

TAKSONOMIA 14

Klasyfikacja i analiza danych – teoria i zastosowania

Aleksandra Łuczak, Feliks Wysocki

Akademia Rolnicza w Poznaniu

ROZMYTA WIELOKRYTERIALNA METODA HELLWIGA PORZĄDKOWANIA LINIOWEGO OBIEKTÓW

1. Wstęp

Metoda Hellwiga [1968] jest jedną z klasycznych metod porządkowania liniowego obiektów wielocechowych. Na jej idei oparto wiele innych metod konstrukcji syntetycznego miernika rozwoju. Jednak metody te nie sprawdzają się, jeśli w zbiorze cech prostych opisujących badane obiekty znajdują się, oprócz cech ilościowych, cechy jakościowe. W takiej sytuacji do konstrukcji cechy syntetycznej można zaproponować rozszerzenie metody Hellwiga przez zastosowanie metody analitycznego procesu hierarchicznego i teorii liczb rozmytych.

W pracy podjęto próbę modyfikacji i rozszerzenia klasycznej metody Hellwiga, która polegała na:

- wprowadzeniu liczb rozmytych w obliczeniach miernika syntetycznego, co umożliwi uwzględnienie w procesie agregacji cech zarówno ilościowych, jak i jakościowych mierzonych na skali porządkowej,
- uwzględnieniu wag dla kryteriów i cech uzyskanych metodą analitycznego procesu hierarchicznego (*analytic hierarchy process* – AHP).

Proponowane podejście tworzenia syntetycznego miernika rozwoju zilustrowano przykładem dotyczącym oceny poziomu rozwoju społeczno-gospodarczego powiatów województwa wielkopolskiego. W tym celu wykorzystano dane z badań ankietowych na temat stanu i możliwości rozwojowych obszarów wiejskich zebrane we wszystkich 31 starostwach powiatowych województwa wielkopolskiego i dane statystyczne [*Województwo wielkopolskie... 2004*].

2. Metodyka badań

W procesie tworzenia cechy syntetycznej, opartym na metodzie AHP i rozmytej metodzie Hellwiga, można wyróżnić następujące etapy postępowania:

Etap 1. Utworzenie struktury hierarchicznej wielokryterialnego problemu oceny poziomu rozwoju obiektów.

Etap 2. Określenie ważności kryteriów i cech prostych przez przyporządkowanie im współczynników wagowych ustalonych za pomocą analitycznego procesu hierarchicznego (AHP).

Etap 3. Wyznaczenie wartości rozmytych cechy syntetycznej (syntetycznego miernika rozwoju) za pomocą rozmytej metody Hellwiga.

Etap 4. Uporządkowanie liniowe i klasyfikacja typologiczna obiektów według wartości cechy syntetycznej.

Etap 1. Struktura hierarchiczna wielokryterialnego problemu oceny obiektów jest tworzona drogą rozkładu rozważanego problemu na elementy składowe: główne kryterium oceny (np. poziom rozwoju społeczno-gospodarczego), kryteria podrzędne, cechy proste oraz oceniane obiekty. Główne kryterium umieszczane jest na szczycie hierarchii i składa się z kilku kryteriów podrzędnych. W ramach poszczególnych kryteriów przyjmuje się wiele cech prostych o charakterze ilościowym i jakościowym, opisujących oceniane obiekty. Cechy proste są wyznacznikami częściowymi poziomu rozwoju obiektów (np. powiatów). Wybór kryteriów i cech prostych powinien opierać się na przesłankach merytorycznych i statystycznych.

Etap 2. Określenie systemu wag dla kryteriów $\mathbf{W} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ i cech prostych $\mathbf{W}_j = (w_{j1}, w_{j2}, \dots, w_{jk}, \dots, w_{jp_j})$ ($j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, p_j$), przy czym

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1, \quad \sum_{k=1}^{p_j} w_{jk} = w_j.$$

Wektory współczynników wagowych można otrzymać metodą analitycznego procesu hierarchicznego (*analytic hierarchy process* – AHP), dokonując porównania parami ważności kryteriów podrzędnych w odniesieniu do kryterium głównego oraz porównania parami cech prostych w odniesieniu do danego kryterium podrzędnego, wykorzystując do tego np. dziewięciostopniową skalę Saaty'ego [Saaty 1980].

Etap 3. Wartości cechy syntetycznej wyznacza się rozmytą metodą Hellwiga. Ustalone w pierwszym etapie wartości i warianty cech prostych przekształca się na trójkątne liczby rozmyte (a, b, c) w postaci trzech ocen (parametrów): pesymistycznej a , najbardziej prawdopodobnej b i optymistycznej c .

W przypadku cech jakościowych wykorzystuje się do ich prezentacji zmienne lingwistyczne. W tabeli 1 podano przykład zmiennej lingwistycznej mającej pięć poziomów, z których każdy jest wyrażony przez liczbę rozmytą trójkątną $\tilde{x} = (a, b, c)$. Ponadto każda wartość cechy ilościowej, np. wartość b , może być przedstawiona jako $\tilde{x} = (b, b, b)$.

Tabela 1. Zmienna lingwistyczna – jej poziomy i odpowiadające im liczby rozmyte wykorzystywane do opisu cech jakościowych – porządkowych

Poziom zmiennej lingwistycznej	Bardzo niski (BN)	Niski (N)	Średni (Ś)	Wysoki (W)	Bardzo wysoki (BW)
Trójkątne liczby rozmyte (a, b, c)	(0, 0, 20)	(20, 30, 40)	(40, 50, 60)	(60, 70, 80)	(80, 100, 100)

Źródło: [Chang, Yeh 2004].

Uzyskane trójkątne liczby rozmyte $\tilde{X}_{C_j} = [(a_{ik}, b_{ik}, c_{ik})]$ przedstawia się w postaci rozmytych macierzy danych:

$$\tilde{X}_{C_j} = \begin{bmatrix} (a_{11}, b_{11}, c_{11}) & (a_{12}, b_{12}, c_{12}) & (a_{1p_j}, b_{1p_j}, c_{1p_j}) \\ (a_{21}, b_{21}, c_{21}) & (a_{22}, b_{22}, c_{22}) & (a_{2p_j}, b_{2p_j}, c_{2p_j}) \\ (a_{m1}, b_{m1}, c_{m1}) & (a_{m2}, b_{m2}, c_{m2}) & \dots (a_{mp_j}, b_{mp_j}, c_{mp_j}) \end{bmatrix},$$

gdzie: m jest liczbą obiektów ($i = 1, 2, \dots, m$), z których każdy jest oceniany za pomocą zbioru n kryteriów C_j ($j = 1, 2, \dots, n$), z kolei kryterium C_j jest opisywane przez p_j cech prostych C_{jk} ($k = 1, 2, \dots, p_j$), $p_1 + p_2 + \dots + p_n = P$ – łączna liczba cech.

Relacje między liczbami rozmytymi można przedstawić za pomocą działań na ich parametrach [Iron 1998] (zob. Załącznik). Zostały one wykorzystane w rozmytej metodzie Hellwiga, która przebiega w następujących krokach:

Krok 1. Normalizacja cech prostych za pomocą przekształcenia ilorazowego. Ma ona na celu ujednolicenie charakteru cech prostych i sprowadzenie ich wartości do porównywalności (zob. [Łuczak, Wysocki 2005]):

– dla stymulant

$$\tilde{z}_{ik} = \left(\frac{a_{ik}}{c_k^+}, \frac{b_{ik}}{c_k^+}, \frac{c_{ik}}{c_k^+} \right),$$

gdzie

$$c_k^+ = \max_i c_{ik}, \max_i c_{ik} \neq 0$$

– dla destymulant

$$\tilde{z}_{ik} = \left(\frac{a_k^-}{c_{ik}}, \frac{a_k^-}{b_{ik}}, \frac{a_k^-}{a_{ik}} \right), \text{ gdy } a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} \neq 0,$$

$$a_k^- = \min_i a_{ik};$$

– dla nominant

$$\tilde{z}_{ik} = \left(\frac{a_{ik}}{b_k^*}, \frac{b_{ik}}{b_k^*}, \frac{c_{ik}}{b_k^*} \right), \text{ gdy}$$

$$b_{ik} \leq \text{nom } b_{ik}, \text{ gdzie } b_k^* = \text{nom}_i b_{ik}$$

$$\text{nom } b_{ik} \neq 0,$$

$$\tilde{z}_{ik} = \left(\frac{b_k^*}{c_{ik}}, \frac{b_k^*}{b_{ik}}, \frac{b_k^*}{a_{ik}} \right), \text{ gdy}$$

$$b_{ik} > \text{nom } b_{ik},$$

$$a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} \neq 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, m; k = 1, \dots, p_j.$$

Krok 2a. Konstrukcja znormalizowanej, rozmytej macierzy danych:

$$\tilde{\mathbf{Z}} = [\tilde{z}_{ik}]_{m \times P} = [a_{ik}^{(z)}, b_{ik}^{(z)}, c_{ik}^{(z)}]_{m \times P}$$

$$i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, P.$$

Krok 3a. Ustalenie rozmytego wzorca rozwoju

$$\tilde{A}^+ = (\max_i (\tilde{z}_{i1}), \max_i (\tilde{z}_{i2}), \dots, \max_i (\tilde{z}_{iP})) =$$

$$= (\tilde{z}_1^+, \tilde{z}_2^+, \dots, \tilde{z}_P^+).$$

Krok 4a. Obliczenie rozmytych ważonych odległości euklidesowych ocenianych obiektów od wzorca rozwoju

$$\tilde{q}_i^{(1)} = (a_i^{(q)}, b_i^{(q)}, c_i^{(q)}) = \sqrt{\sum_{k=1}^P w_k \otimes (\tilde{z}_{ik} - \tilde{z}_k^+)^2},$$

$$i = 1, 2, \dots, m,$$

gdzie: $\sum_{k=1}^P w_k = 1.$

Krok 5. Obliczenie wartości rozmytej syntetycznego miernika rozwoju Hellwiga dla każdego obiektu ze wzoru:

$$\tilde{S}_i = 1 - \frac{\tilde{q}_i}{\tilde{q}_0} = (1, 1, 1) - \frac{(a_i^{(q)}, b_i^{(q)}, c_i^{(q)})}{(a_0, b_0, c_0)} \equiv (1, 1, 1) - \left(\frac{a_i^{(q)}}{c_0}, \frac{b_i^{(q)}}{b_0}, \frac{c_i^{(q)}}{a_0} \right) = \left(1 - \frac{c_i^{(q)}}{a_0}, 1 - \frac{b_i^{(q)}}{b_0}, 1 - \frac{a_i^{(q)}}{c_0} \right),$$

gdzie:

$$\tilde{q}_0 \equiv (a_0, b_0, c_0) = \bar{\tilde{q}}_0 + 2 \cdot \tilde{s}_0 = (\bar{a}_0, \bar{b}_0, \bar{c}_0) + 2 \cdot (a_0^{(s)}, b_0^{(s)}, c_0^{(s)}) = (\bar{a}_0, \bar{b}_0, \bar{c}_0) + (2a_0^{(s)}, 2b_0^{(s)}, 2c_0^{(s)}) =$$

$$= (\bar{a}_0 + 2a_0^{(s)}, \bar{b}_0 + 2b_0^{(s)}, \bar{c}_0 + 2c_0^{(s)}),$$

a $\bar{\tilde{q}}_0$ i $\tilde{s}_0$ są odpowiednio rozmytą średnią arytmetyczną i rozmytym odchyleniem standardowym z $\tilde{q}_i^{(1)}$ lub $\tilde{q}_i^{(2)}$.

Krok 6. Uśrednienie wartości rozmytych syntetycznego miernika rozwoju $\tilde{S}_i = (a^{(i)}, b^{(i)}, c^{(i)})$.

Można je przeprowadzić, stosując średnią prostą: $S_i^{(1)} = (a^{(i)} + b^{(i)} + c^{(i)})/3$, $i = 1, \dots, m$ lub ważoną:

Krok 2b. Konstrukcja ważonej, znormalizowanej rozmytej macierzy danych:

$$\tilde{r}_{ik} = \tilde{z}_{ik} w_k = w_k \otimes (a_{ik}^{(z)}, b_{ik}^{(z)}, c_{ik}^{(z)}) =$$

$$= (w_k a_{ik}^{(z)}, w_k b_{ik}^{(z)}, w_k c_{ik}^{(z)})$$

$$\tilde{\mathbf{R}} = [\tilde{r}_{ik}]_{m \times P} = [a_{ik}^{(r)}, b_{ik}^{(r)}, c_{ik}^{(r)}]_{m \times P}.$$

Krok 3b. Ustalenie rozmytego wzorca rozwoju

$$\tilde{A}^+ = (\max_i (\tilde{r}_{i1}), \max_i (\tilde{r}_{i2}), \dots, \max_i (\tilde{r}_{iP})) =$$

$$= (\tilde{r}_1^+, \tilde{r}_2^+, \dots, \tilde{r}_P^+).$$

Krok 4b. Obliczenie rozmytych odległości euklidesowych ocenianych obiektów od wzorca rozwoju

$$\tilde{q}_i^{(2)} = (a_i^{(q)}, b_i^{(q)}, c_i^{(q)}) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^P (\tilde{r}_{ik} - \tilde{r}_k^+)^2}{P}},$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

$S_i^{(2)} = (a^{(i)} + 4b^{(i)} + c^{(i)})/6$. Im wyższa wartość średniej rozmytej, tym wyższy poziom rozwoju obiektu [Łuczak, Wysocki 2005].

Etap 4. Uporządkowanie liniowe i klasyfikacja typologiczna obiektów na sześć klas. Ich przedziały klasowe ustalono z wykorzystaniem średniej arytmetycznej i odchylenia standardowego z obliczonych wartości cechy syntetycznej.

3. Ocena poziomu rozwoju społeczno-gospodarczego powiatów

Proponowaną wielokryterialną rozmytą metodę Hellwiga zastosowano do oceny poziomu rozwoju społeczno-gospodarczego obszarów wiejskich w układzie powiatów województwa wielkopolskiego.

W pierwszym etapie utworzono strukturę hierarchiczną problemu oceny poziomu rozwoju społeczno-gospodarczego powiatów (rys. 1, zob. również [Łuczak, Wysocki 2005]). W zbiorze wytypowanych cech prostych znalazły się cechy o charakterze zarówno ilościowym, jak i jakościowym – porządkowym (np. walory środowiska przyrodniczego, poziom kultury rolnej).

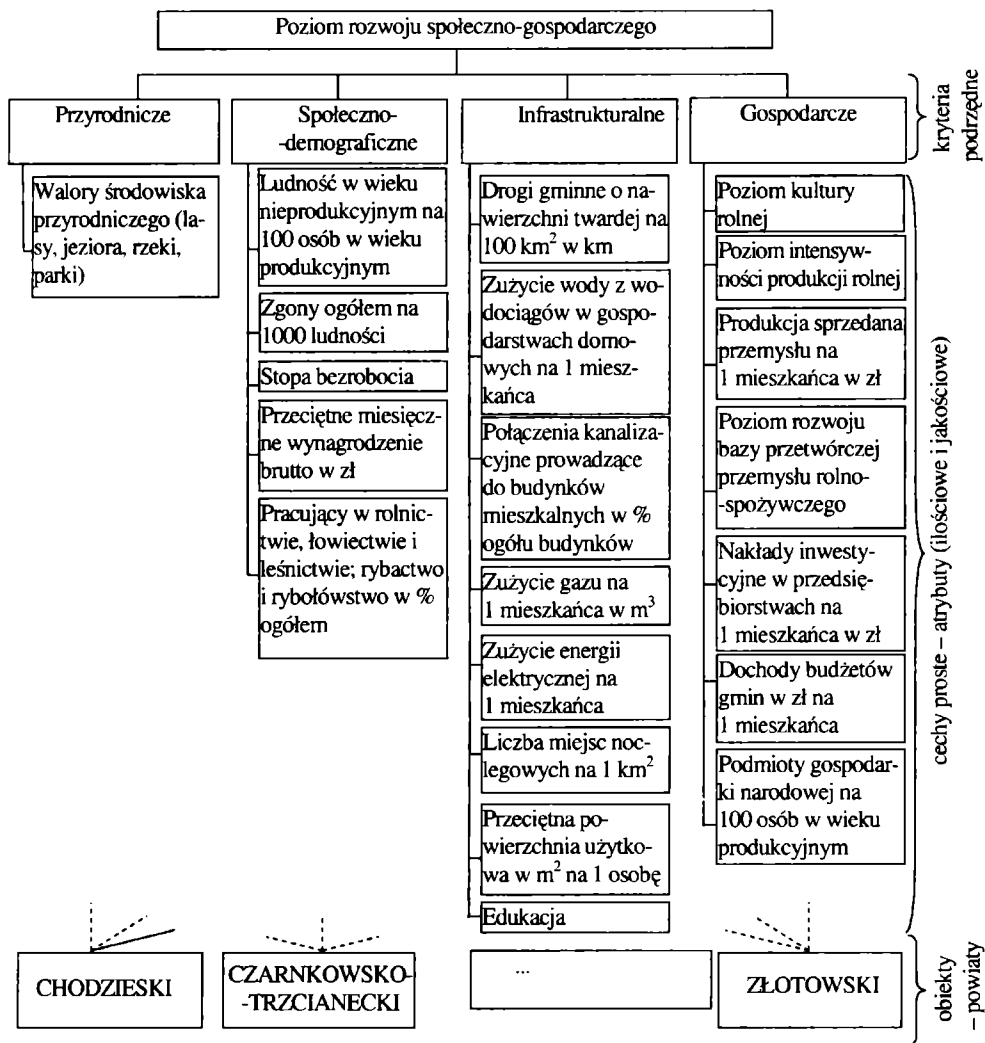
Do ustalenia współczynników wagowych w odniesieniu do kryteriów zastosowano metodę Saaty'ego analitycznego procesu hierarchicznego. Eksperti w starostach powiatowych dokonali jakościowego porównania kryteriów parami¹, których poprawność sprawdzono, obliczając wartości wskaźnika niezgodności. Wskaźnik ten mierzy koherencję porównań parami, czyli określa, w jakim stopniu wzajemne porównania ważności charakterystyk są niezgodne. Jeżeli porównania ważności elementów zostały przeprowadzone poprawnie, to oblicza się wektory własne macierzy porównań, które po znormalizowaniu² określają względną ważność kryteriów, czyli ich wagi. Wykorzystanie metody ułatwia oprogramowanie Expert Choice.

Najwyższy współczynnik wagowy uzyskało kryterium związane z gospodarką (0,565), a pozostałym zostały przyporządkowane wagi: kryterium demograficzno-społeczne – 0,262, infrastrukturalne – 0,118, przyrodnicze – 0,055. Dalej w celu uproszczenia przyjęto, że współczynniki wagowe cech prostych będą miały wartości odwrotnie proporcjonalne do liczebności danego ich zespołu oraz że

$$\sum_{k=1}^{p_j} w_{jk} = w_j, j = 1, 2, 3, 4.$$

¹ Wykorzystano dziewięciostopniową skalę ocen: równy, słaby, mocny, bardzo mocny i absolutny oraz kompromisowe oceny pomiędzy każdymi dwiema następującymi po sobie parami ocen. W jednym procesie przy porównywaniu elementów mogą być wykorzystane różne skale preferencji (np. na jednym poziomie hierarchii może zostać użyta skala dziewięciostopniowa, a na innym – tylko trójstopniowa). Stanowi to dużą zaletę metody Saaty'ego.

² Znormalizowanie oznacza, że suma wszystkich liczb w wektorze własnym jest równa 1.



Rys. 1. Struktura hierarchiczna problemu oceny poziomu rozwoju społeczno-gospodarczego powiatów województwa wielkopolskiego

Źródło: opracowanie własne.

W etapie trzecim, po przekształceniu wartości i wariantów cech prostych w trójkątne liczby rozmyte, zestawiono je w postaci rozmytych macierzy danych. Tabela 2 prezentuje fragment macierzy rozmytych obserwacji $\tilde{X}_C$.

Kolejnym krokiem jest normalizacja cech prostych mająca na celu ujednolicenie ich charakteru i sprowadzenie wartości do porównywalności. W pracy zastosowano przekształcenia ilorazowe wykonywane na liczbach rozmytych (etap 3, krok 1, tab. 3).

Tabela 2. Poziomy i wartości wybranych cech prostych dla wybranych powiatów oraz odpowiadające im trójkątne liczby rozmyte w zakresie kryterium związanego z gospodarką

Nr	Powiaty	Cechy proste			
		poziom kultury rolnej	poziom intensywności produkcji rolnej w punktach	...	podmioty gospodarki narodowej na 100 osób w wieku produkcyjnym
1	chodzieski	N ^{a)}	280		13,9
		(20; 30; 40) ^{b)}	(280; 280; 280)	...	(13,9; 13,9; 13,9)
...	...	...	...	...	...
31	złotowski	$\bar{S}$	228		9,5
		(40; 50; 60)	(228; 228; 228)	...	(9,5; 9,5; 9,5)

^{a)}Warianty cechy określane jako poziomy zmiennej lingwistycznej: bardzo wysoki (BW), wysoki (W), średni ($\bar{S}$), niski (N), bardzo niski (BN) albo liczby rzeczywiste.

^{b)} Trójkątna liczba rozmyta. Jej oceny odpowiadają poziomowi niskiemu zmiennej lingwistycznej (zob. tab. 1).

Źródło: obliczenia własne na podstawie wyników badania ankietowego przeprowadzonego w starostwach powiatowych województwa wielkopolskiego (2001) [Województwo wielkopolskie... 2004].

Tabela 3. Znormalizowane wartości wybranych cech prostych i wzorce rozwoju dla wybranych powiatów oraz odpowiadające im trójkątne liczby rozmyte w zakresie kryterium związanego z gospodarką

Nr	Powiaty	Cechy proste			
		poziom kultury rolnej	poziom intensywności produkcji rolnej w punktach	...	podmioty gospodarki narodowej na 100 osób w wieku produkcyjnym
1	chodzieski	(20/100; 30/100; 40/100)	(280/474,09; 280/474,09; 280/474,09)		(13,9/18,74; 13,9/18,74; 13,9/18,74)
		(0,2; 0,3; 0,4)	(0,59; 0,59; 0,59)	...	(0,74; 0,74; 0,74)
...	...	...	...	...	...
31	złotowski	(40/100; 50/100; 60/100)	(228/474,09; 228/474,09; 228/474,09)		(9,5/18,74; 9,5/18,74; 9,5/18,74)
		(0,4; 0,5; 0,6)	(0,48; 0,48; 0,48)	...	(0,53; 0,53; 0,53)
Wzorzec rozwoju		(0,8; 1; 1)	(1, 1, 1)		(1, 1, 1)
Wagi dla cech		0,565/7 = 0,0807	0,565/7 = 0,0807		0,565/7 = 0,0807

Źródło: obliczenia własne na podstawie tab. 2.

Otrzymane rozmyte macierze danych i wektory współczynników wagowych dla cech stanowiły podstawę obliczeń syntetycznego miernika poziomu rozwoju społeczno-gospodarczego powiatów w odniesieniu do następujących wariantów:

- I – rozmyta metoda Hellwiga – ważenie odległości euklidesowych,
- II – rozmyta metoda Hellwiga – ważenie wartości znormalizowanych cech,
- III – rozmyta metoda Hellwiga – bez wag,
- IV – klasyczna metoda Hellwiga – bez wag (z pominięciem cech jakościowych).

Tabela 4 pokazuje uporządkowanie liniowe powiatów według nierosnących wartości rzeczywistych cechy syntetycznej $S_i^{(2)} = (a^{(i)} + 4b^{(i)} + c^{(i)})/6$ ($i = 1, 2, \dots, 31$), uzyska-

nych według wariantu I (etap 4). Ujemne wartości miernika $\tilde{S}_i$ dotyczą głównie ocen pesymistycznych dla powiatów należących do klasy IV i V – o niskim i

Tabela 4. Wartości syntetycznego miernika poziomu rozwoju społeczno-gospodarczego powiatów uzyskane za pomocą proponowanych metod (uporządkowanie liniowe i klasyfikacja typologiczna powiatów według wartości uzyskanych rozmytą ważoną metodą Hellwiga – wariant I)

Lp.	Powiaty	Warianty obliczeń								Numer klasy typologicznej ^{a)}	Poziom rozwoju społeczno-gospodarczego
		I				II		III	IV		
		metoda rozmyta							metoda klasyczna		
		ważenie odległości euklidesowych				ważenie znormalizowanych wartości cech		bez wag	bez wag		
		liczby rozmyte $\tilde{S}_i$			średnia prosta $S_i^{(1)}$	średnia ważona $S_i^{(2)}$					
		a	b	c							
1	poznański	0,439	0,616	0,728	0,595	0,605	0,643	0,520	0,394	I	bardzo wysoki
2	gostyński	0,225	0,440	0,571	0,412	0,426	0,480	0,349	0,327	II	wysoki
3	kościański	0,179	0,401	0,538	0,373	0,387	0,427	0,321	0,283		
4	piłski	0,150	0,393	0,586	0,376	0,385	0,401	0,344	0,260	III	średni wyższy
5	wolsztyński	0,151	0,386	0,560	0,366	0,376	0,391	0,364	0,355		
6	szamotulski	0,115	0,360	0,539	0,338	0,349	0,381	0,275	0,207		
7	krotoszyński	0,118	0,351	0,494	0,321	0,336	0,387	0,253	0,205		
8	grodziski	0,099	0,342	0,503	0,314	0,328	0,353	0,282	0,261		
9	leszczyński	0,106	0,340	0,486	0,311	0,325	0,353	0,267	0,234		
10	średzki	0,080	0,323	0,482	0,295	0,309	0,331	0,270	0,213		
11	międzychodzki	0,064	0,311	0,470	0,281	0,296	0,310	0,262	0,167		
12	rawicki	0,051	0,307	0,483	0,280	0,294	0,327	0,236	0,203		
13	gnieźnieński	0,043	0,301	0,484	0,276	0,289	0,288	0,303	0,245		
14	ostrowski	0,036	0,295	0,478	0,270	0,282	0,306	0,235	0,169		
15	śremski	0,037	0,293	0,473	0,268	0,280	0,297	0,235	0,160		
16	nowotomyski	0,023	0,286	0,476	0,262	0,274	0,288	0,221	0,141		
17	obornicki	0,015	0,280	0,478	0,258	0,269	0,302	0,189	0,109		
18	kepiski	-0,004	0,269	0,469	0,245	0,257	0,291	0,191	0,169		
19	jarociński	0,024	0,267	0,408	0,233	0,250	0,271	0,211	0,112		
20	wrzesiński	-0,002	0,256	0,424	0,226	0,241	0,255	0,212	0,125		
21	chodzieski	-0,060	0,226	0,440	0,202	0,214	0,196	0,244	0,187		
22	ostrzeszowski	-0,095	0,202	0,426	0,177	0,190	0,199	0,169	0,193		
23	wągrowiecki	-0,107	0,176	0,369	0,146	0,161	0,168	0,155	0,102		
24	czarnkowsko-trzcianecki	-0,139	0,162	0,380	0,135	0,148	0,156	0,109	0,050		
25	turecki	-0,185	0,116	0,377	0,103	0,110	0,133	0,083	0,103		
26	kaliski	-0,183	0,122	0,331	0,090	0,106	0,128	0,069	0,069		
27	pleszewski	-0,208	0,112	0,352	0,085	0,099	0,112	0,084	0,106		
28	kolski	-0,207	0,106	0,331	0,077	0,091	0,109	0,065	0,053		
29	złotowski	-0,216	0,097	0,325	0,069	0,083	0,083	0,080	0,029		
30	ślupecki	-0,276	0,059	0,313	0,032	0,045	0,044	0,059	0,080		
31	koniński	-0,287	0,031	0,317	0,021	0,026	0,007	0,087	0,166		

^{a)} Klasa VI jest pusta.

Źródło: obliczenia własne.

średnim niższym poziomie rozwoju. Warto też zauważyć, że rozmyta metoda Hellwiga (warianty I-III), poprzez uwzględnienie cech jakościowych, dała większy zakres zmienności wartości syntetycznego miernika rozwoju w porównaniu z metodą klasyczną. Z kolei rozstęp pomiędzy ocenami pesymistyczną a optymistyczną może pokazywać poziom ustabilizowania rozwoju społeczno-gospodarczego danego powiatu. Im jest on mniejszy, tym rozwój powiatu jest bardziej stabilny (dotyczy to np. powiatu poznańskiego). Generalnie większe ustabilizowanie rozwoju cechuje powiaty o wyższym, a mniejsze – o niższym poziomie rozwoju.

4. Podsumowanie

Rozmyta metoda Hellwiga porządkowania liniowego obiektów może być przydatna w procedurze tworzenia cechy syntetycznej, zwłaszcza wtedy, gdy w zbiorze cech występują cechy o charakterze ilościowym i jakościowym – porządkowym.

Przeprowadzone obliczenia i analizy prowadzą do następujących stwierdzeń:

1. Dzięki zastosowaniu analitycznego procesu hierarchicznego poszczególnym kryteriom i cechom prostym można przyporządkować zróżnicowane współczynniki wagowe. Są one ustalone merytorycznie na podstawie ocen ekspertów, którzy dokonują jakościowego porównywania parami ważności kryteriów podrzędnych w odniesieniu do kryterium głównego. W badaniach poziomu rozwoju społeczno-gospodarczego najwyższy współczynnik wagowy uzyskało kryterium związane z gospodarką (0,565), a najniższy – kryterium przyrodnicze (0,055).

2. Wartości i poziomy cech prostych zostają przedstawione w postaci trójkątnych liczb rozmytych. Dzięki przekształceniu wartości cech ilościowych w liczby rozmyte nie następuje strata informacji w nich zawartych. Wystąpiłaby ona w przypadku przekształcenia wartości cech ilościowych na liczby należące do skali słabszej – porządkowej.

3. Wartości parametrów liczby rozmytej syntetycznego miernika rozwoju są przedstawione za pomocą trzech ocen: pesymistycznej, najbardziej prawdopodobnej oraz optymistycznej. Rozstęp między oceną optymistyczną a pesymistyczną pokazuje poziom ustabilizowania rozwoju społeczno-gospodarczego obiektu (powiatu). Na ogół większe ustabilizowanie rozwoju cechuje powiaty o wyższym, a mniejsze – o niższym poziomie rozwoju.

4. Zastosowana rozmyta metoda Hellwiga dostarczyła – poprzez uwzględnienie cech jakościowych – większego zakresu zmienności wartości syntetycznego miernika rozwoju w porównaniu z klasyczną metodą Hellwiga. Powiatom należącym do klas o niskim i średnim niższym poziomie rozwoju odpowiadają (na ogół) ujemne wartości oceny pesymistycznej rozmytego miernika rozwoju.

5. Pewną trudność numeryczną w prezentowanym podejściu stanowią działania na liczbach rozmytych. Dotyczy to zwłaszcza operacji mnożenia i dzielenia dwóch

liczb rozmytych, które mogą być wykonywane w sposób przybliżony za pomocą różnych podejść.

Załącznik

Działania na liczbach rozmytych:

– dodawanie:

$$\tilde{x}_1 \oplus \tilde{x}_2 = (a_1, b_1, c_1) \oplus (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2),$$

– odejmowanie:

$$\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = (a_1, b_1, c_1) - (a_2, b_2, c_2) = (a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2),$$

– mnożenie:

$$\tilde{x}_1 \otimes \tilde{x}_2 = (a_1, b_1, c_1) \otimes (a_2, b_2, c_2) \equiv (a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2) \quad \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 > 0$$

$$\tilde{x}_1 \otimes \tilde{x}_2 = (a_1, b_1, c_1) \otimes (a_2, b_2, c_2) \equiv (c_1 a_2, b_1 b_2, a_1 c_2) \quad \tilde{x}_1 > 0, \tilde{x}_2 < 0$$

$$\tilde{x}_1 \otimes \tilde{x}_2 = (a_1, b_1, c_1) \otimes (a_2, b_2, c_2) \equiv (c_1 c_2, b_1 b_2, a_1 a_2) \quad \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 < 0$$

$$\tilde{x}_1 \otimes \tilde{x}_2 = (a_1, b_1, c_1) \otimes (a_2, b_2, c_2) \equiv (a_1 c_2, b_1 b_2, c_1 a_2) \quad \tilde{x}_1 < 0, \tilde{x}_2 > 0,$$

– dzielenie:

$$\frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_2} = (a_1, b_1, c_1) / (a_2, b_2, c_2) \equiv \left(\frac{a_1}{c_2}, \frac{b_1}{b_2}, \frac{c_1}{a_2} \right),$$

– potęgowanie:

$$\tilde{x}_1^{\tilde{x}_2} \equiv (a_1^{a_2}, b_1^{b_2}, c_1^{c_2}) \quad \tilde{x}_1 > 1, \tilde{x}_2 > 0 \quad \tilde{x}_1^{\tilde{x}_2} \equiv (a_1^{c_2}, b_1^{b_2}, c_1^{a_2}) \quad 0 < \tilde{x}_1 < 1, \tilde{x}_2 > 0$$

$$\tilde{x}_1^{\tilde{x}_2} \equiv (c_1^{a_2}, b_1^{b_2}, a_1^{c_2}) \quad \tilde{x}_1 > 1, \tilde{x}_2 < 0 \quad \tilde{x}_1^{\tilde{x}_2} \equiv (c_1^{c_2}, b_1^{b_2}, a_1^{a_2}) \quad 0 < \tilde{x}_1 < 1, \tilde{x}_2 < 0,$$

– liczba przeciwna do liczby rozmytej:

$$-(a, b, c) = (-c, -b, -a),$$

– dodawanie skalaru do liczby rozmytej: $k \oplus (a, b, c) = (k + a, k + b, k + c),$

– mnożenie skalaru przez liczbę rozmytą: $k \otimes (a, b, c) \equiv (ka, kb, kc).$

Działania mnożenia, dzielenia i potęgowania są wykonywane jako operacje przybliżone.

Literatura

Chang Y.- H, Yeh C.- H. (2004), *A New Airline Safety Index*, „Transportation Research” Part B 38, s. 369-383.

- Hellwig Z. (1968), *Zastosowania metody taksonomicznej do typologicznego podziału krajów ze względu na poziom ich rozwoju i strukturę wykwalifikowanych kadr*, „Przegląd Statystyczny” z. 4, s. 307-327.
- Iron A. (1998), *Fuzzy Rules and Fuzzy Functions: A Combination of Logic and Arithmetic Operations for Fuzzy Numbers*, „Fuzzy Sets and Systems” vol. 99, s. 49-56.
- Łuczak A., Wysocki F. (2005), *Rozmyta wielokryterialna metoda porządkowania liniowego obiektów*, *Taksonomia 13, Klasyfikacja i analiza danych. Teoria i zastosowania*, AE, Wrocław 2006.
- Saaty T. L. (1980), *The Analytic Hierarchy Process Planning. Priority Setting. Resource Allocation*, MacGraw- Hill, New York International Book Company.
- Województwo wielkopolskie. Podregiony – powiaty – gminy 2004* (2004), WUS, Poznań.

FUZZY MULTI-CRITERIA HELLWIG’S METHOD OF LINEAR ORDERING OF OBJECTS

Summary

The aim of this paper was to investigate the applicability of the fuzzy linear ordering method to the construction of synthetic characteristics. Proposed approach base on two methods: analytical hierarchy process (to calculate weight of criterias) and fuzzy Hellwig’s method (to ranking of objects). The proposed procedure was employed to assess the socio-economic development of rural Wielkopolska seen as a collection of counties.