

Krzysztof Piontek

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

NIEKTÓRE PRAKTYCZNE WYZWANIA W MODELOWANIU WIELOWYMIAROWYCH PROCESÓW GARCH

1. Wstęp

Od zaproponowania przez Engla w 1982 r. jednowymiarowego modelu klasy ARCH, modele te, a w szczególności model GARCH, potwierdzają przydatność w analizie finansowych szeregów czasowych¹. Nie rozwiązują one jednak, w swej klasycznej postaci², problemu opisu zmiennych w czasie wartości macierzy kowariancji szeregów stóp zwrotu. Prawidłowe wyznaczanie prognoz tej macierzy nie jest sprawą błahą i może przyczynić się do poprawy osiąganych wyników ekonomicznych w takich zagadnieniach, jak: analiza portfelowa, modele równowagi rynków kapitałowych, wycena pewnych opcji egzotycznych, pomiar ryzyka według koncepcji VaR oraz zabezpieczanie instrumentu lub portfela instrumentów (hedging)³.

Naturalnym rozszerzeniem modeli GARCH są wielowymiarowe modele tej klasy (Multivariate GARCH – MGARCH), umożliwiające opis zmiennych w czasie warunkowych wartości macierzy wariancji-kowariancji. Pomimo iż od wprowadzenia poszczególnych, podstawowych wielowymiarowych modeli klasy MGARCH⁴ upłynęło już 10, a czasami 20 lat, to modele te nadal są wykorzystywane jedynie w niewielkim stopniu.

¹ Por. [Bollerslev, Engle, Nelson 1994; Gouriéroux 1997; Osińska 2006; Piontek 2002; Tsay 2002].

² Pomijane jest tutaj wykorzystanie modeli jednorównaniowych w modelu CCC (stałej korelacji warunkowej); por. np. [Bauwens, Laurent, Rombouts 2004; Gouriéroux 1997; Osińska 2006; Tsay 2002; Zahnd 2002].

³ Por. [Bauwens, Laurent, Rombouts 2004; Bollerslev, Engle, Wooldridge 1988; Gouriéroux 1997; Osińska 2006; Tsay 2002].

⁴ Por. [Bauwens, Laurent, Rombouts 2004; Engle, Kroner 1995; Gouriéroux 1997].

Niniejsza praca ma na celu przybliżenie wybranych, podstawowych modeli MGARCH (modeli warunkowej macierzy kowariancji) w kontekście problemów z ich praktycznym wykorzystaniem. W praktyce najczęściej wykorzystywane są modele dwuwymiarowe pozwalające na analizę zmiennego w czasie współczynnika zabezpieczenia instrumentu bazowego kontraktami *futures* (por. np. [Bauwens, Laurent, Rombouts 2004; Gouriéroux 1997]). Pracę kończy więc przykład empiryczny, którego celem jest odpowiedź na pytanie, który z podstawowych modeli dwuwymiarowych dopasowuje się najlepiej (z punktu widzenia kryterium Akaike'a) do wybranych par szeregów i powinien stanowić obszar potencjalnego zainteresowania praktyków.

2. Wielowymiarowy model stóp zwrotu

Punktem wyjścia są pojęcia wektora warunkowych wartości oczekiwanych μ_t , warunkowej macierzy kowariancji H_t , oraz postaci warunkowego rozkładu standaryzowanych reszt modelu z_t .

Więcej informacji na ten temat znaleźć można np. w pracach [Bauwens, Laurent, Rombouts 2004; Osińska 2006; Piontek 2002; Tsay 2002]. Poniżej przedstawione zostaną jedynie niezbędne informacje. Główna uwaga skupiona zostanie na opisie warunkowej macierzy H_t .

Rozpatrywany w niniejszej pracy wielowymiarowy model stóp zwrotu zadany jest następującym równaniem (por. [Osińska 2006; Piontek 2005; Tsay 2002]):

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad (1)$$

gdzie: μ_t – wektor warunkowych wartości oczekiwanych stóp zwrotu wyznaczanych na podstawie informacji $\mathcal{F}$ dostępnej w chwili $t - 1$,
 ε_t – wektor błędów modelu.

Wektor warunkowych wartości oczekiwanych wyznacza się najczęściej na podstawie modelu klasy VAR (*vector autoregressive model*) (por. [Osińska 2006; Piontek 2002]). Zazwyczaj zakłada się dodatkowo, że stopy zwrotu pochodzą z wielowymiarowego warunkowego rozkładu normalnego⁵.

W większości przypadków wystarczający okazuje się model VAR rzędu 1. Modele wyższego rzędu wykorzystuje się rzadko, ze względu na szybko rosnącą liczbę parametrów. Podstawowy model k -wymiarowy, rozpatrywany także w tej pracy, zadany jest wzorem:

⁵ Możliwe są oczywiście rozwiązania z warunkowymi rozkładami o grubszych ogonach, np. z wielowymiarowym rozkładem t -Studenta (por. [Bauwens, Laurent, Rombouts 2004; Gouriéroux 1997; Tsay 2002]).

$$\begin{bmatrix} r_{1,t} \\ \vdots \\ r_{k,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{10} \\ \vdots \\ \mu_{k0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{k1} & \cdots & \varphi_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{1,t-1} \\ \vdots \\ r_{k,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{k,t} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Ujęcie to wydaje się być obecnie standardem w przypadku analiz wielowymiarowych.

3. Modele klasy MGARCH

Związki pomiędzy warunkową macierzą $\mathbf{H}_t$, wektorem błędów modelu $\boldsymbol{\varepsilon}_t$, oraz wektorem standaryzowanych reszt modelu $\mathbf{z}_t$ dla modelu k -wymiarowego dane są wzorami⁶:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{H}_t^{1/2} \mathbf{z}_t, \quad (3)$$

$$\text{gdzie:} \quad \mathbf{z}_t \text{ iid } E[\mathbf{z}_t] = 0, \text{ var}[\mathbf{z}_t] = \mathbf{I}_k \quad (4)$$

$$\text{oraz} \quad \mathbf{H}_t = \text{var}[\boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathfrak{I}_{t-1}] = E[\boldsymbol{\varepsilon}_t^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathfrak{I}_{t-1}] = \left(\mathbf{H}_t^{1/2} \right)^T \cdot \mathbf{H}_t^{1/2}. \quad (5)$$

Ogólna postać modelu MGARCH, zaproponowana została w pracy [Bollerslev, Engle, Wooldridge 1988]⁷ nosi nazwę VEC-GARCH. Macierz $\mathbf{H}_t$ zadana jest następującym równaniem:

$$\text{vech}(\mathbf{H}_t) = \text{vech}(\mathbf{W}) + \mathbf{A} \text{vech}(\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}) + \mathbf{B} \text{vech}(\mathbf{H}_{t-1}), \quad (6)$$

gdzie operator $\text{vech}(\cdot)$ to operator wektoryzacji macierzy symetrycznej.

Model (6) jest odpowiednikiem jednowymiarowego modelu GARCH(1, 1). Możliwa jest analiza modeli MGARCH klasy VEC wyższych rzędów, ale w praktyce nie jest spotykana.

W przypadku k -wymiarowym $\mathbf{W}$ jest symetryczną macierzą o wymiarach $k \times k$, natomiast macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są symetrycznymi macierzami o wymiarach $0,5k(k+1) \times 0,5k(k+1)$.

Podstawowymi problemami, które występują w przypadku próby praktycznego zastosowania modelu VEC, są duża liczba parametrów, konieczność zapewnienia dodatniej określoności macierzy w każdej chwili t oraz skończoności wartości bezwarunkowej macierzy kowariancji. Liczbę parametrów k -wymiarowego modelu VEC(1,1) określa wzór $0,5k(k+1)[1+k(k+1)]$.

W przypadku dwuwymiarowego modelu VEC niezbędna jest więc estymacja 21 parametrów (tylko w zakresie modelu warunkowej macierzy wariancji-

⁶ Por. [Bauwens, Laurent, Rombouts 2004; Gouriéroux 1997; Osińska 2006; Piontek 2005; Tsay 2002].

⁷ Por. także [Bauwens, Laurent, Rombouts 2004; Gouriéroux 1997; Zahnd 2002].

-kowariancji), co już samo w sobie praktycznie uniemożliwia stosowanie tego rozwiązania⁸.

Warunek wystarczający zapewnienia dodatniej określoności macierzy $\mathbf{H}_t$ dla każdej chwili czasu przedstawiony został w pracy Engla i Kronera [1995] (por. także [Gourieroux 1997]). Dla uproszczenia poniżej zaprezentowany został warunek dla modelu VECH(0, 1), który można przedstawić w postaci równoważnej do modelu (6) jako:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{W} + (\mathbf{I}_k \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}^T) \tilde{\mathbf{A}} (\mathbf{I}_k \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}), \quad (7)$$

czyli:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{W} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{1,t-1} & \boldsymbol{\varepsilon}_{2,t-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\varepsilon}_{1,t-1} & \boldsymbol{\varepsilon}_{2,t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}/2 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}/2 & a_{31} \\ a_{22}/2 & a_{23} & a_{32}/2 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{1,t-1} & 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{2,t-1} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\varepsilon}_{1,t-1} \\ 0 & \boldsymbol{\varepsilon}_{2,t-1} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

gdzie $\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$ to iloczyn Kroneckera.

Warunkiem wystarczającym zapewnienia dodatniej określoności jest zagwarantowanie dodatniej określoności symetrycznych macierzy $\tilde{\mathbf{A}}$ oraz $\mathbf{W}$.

Warunkiem wystarczającym dodatniej określoności macierzy $\mathbf{H}_t$ w modelu VECH(1, 1) jest zapewnienie ponadto dodatniej określoności analogicznej macierzy $\tilde{\mathbf{B}}$ ⁹. W procesie estymacji parametrów modelu k -wymiarowego problemem jest więc zagwarantowanie dodatniej określoności dwóch macierzy o wymiarach $k^2 \times k^2$ oraz jednej o wymiarach $k \times k$, co wprowadza bardzo skomplikowane, nieliniowe warunki ograniczające.

Kolejnym warunkiem, pożądanym w odniesieniu do modelu opisującego zmienną w czasie macierz $\mathbf{H}_t$, jest zapewnienie (obserwowalnych w praktyce) skończonych wartości bezwarunkowej macierzy wariancji-kowariancji $\mathbf{H}$.

Proces VECH(1,1) jest stacjonarny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne macierzy $(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ leżą wewnątrz koła jednostkowego¹⁰.

Bezwarunkowa macierz wariancji-kowariancji zadana jest wtedy następującym wzorem:

$$\text{vech}(\mathbf{H}) = (\mathbf{I}_{k^*} - (\mathbf{A} + \mathbf{B}))^{-1} \text{vech}(\mathbf{W}), \quad (9)$$

gdzie $\mathbf{I}_{k^*}$ to macierz jednostkowa o wymiarze $k^* = 0,5k \cdot (k + 1)$.

⁸ Por. [Bauwens, Laurent, Rombouts 2004; Zahnd 2002; Gourieroux 1997; Engle, Kroner 1995].

⁹ Formalnie wystarczające jest, by dwie z macierzy $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$, $\mathbf{W}$ były połówkowo dodatnio określone, a trzecia dodatnio określona.

¹⁰ Por. [Bauwens, Laurent, Rombouts 2004; Gourieroux 1997; Zahnd 2002].

Duża liczba parametrów, konieczność zapewnienia dodatniej określoności oraz stacjonarności macierzy $\mathbf{H}_t$, powodują, iż model VECH w swej pełnej postaci nie znajduje zastosowania nawet dla najprostszych przypadków dwuwymiarowych.

Zaproponowano więc szereg modeli zawierających się w ogólnym modelu VECH, które ograniczają liczbę parametrów lub zapewniają dodatnią określoność macierzy. Odbywa się to jednak kosztem ogólności modelu. Do najczęściej wykorzystywanych rozwiązań zalicza się modele diagonalne VECH oraz modele klasy BEKK¹¹.

Model diagonalny (diagonal VECH – DVECH) zaproponowany został w pracy Bollersleva, Engle’a i Wooldridge’a [1988]¹². Macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ (por. wzór (6)) są macierzami diagonalnymi. Dla k -wymiarowego diagonalnego modelu VECH niezbędna jest estymacja $1,5k(k+1)$ parametrów. Dla dwuwymiarowego modelu niezbędne jest wyznaczenie wartości 9 parametrów, co oznacza znaczną redukcję w stosunku do modelu pełnego (21 parametrów). Elementy $h_{ij,t+1}$ macierzy $\mathbf{H}_{t+1}$ zależą jedynie od swoich przeszłych wartości $h_{ij,t}$ oraz od odpowiednich iloczynów błędów z chwili $t(\varepsilon_{i,t}, \varepsilon_{j,t})$, co powoduje, że brak jest tzw. efektu przenikania wariancji. Elementy h_{ii} opisane są klasycznymi, jednowymiarowymi modelami GARCH(1,1), a elementy h_{ij} ($i \neq j$) – ich odpowiednikami¹³. Model DVECH można przedstawić w następującej postaci, która ułatwia dalsze analizy (por. [Engle, Kroner 1995]):

$$\mathbf{H}_{t+1} = \mathbf{W} + \bar{\mathbf{A}} \circ (\boldsymbol{\varepsilon}_t^T \boldsymbol{\varepsilon}_t) + \bar{\mathbf{B}} \circ \mathbf{H}_t, \quad (10)$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \text{ivech}(\text{diag}(\mathbf{A})), \quad \bar{\mathbf{B}} = \text{ivech}(\text{diag}(\mathbf{B})), \quad (11)$$

gdzie $\mathbf{X} \circ \mathbf{Y}$ to iloczyn Hadamarda (por. np. [Bauwens, Laurent, Rombouts 2004; Piontek 2005]), a $\text{ivech}(\cdot)$ – operator odwrotny do vech .

Z faktu, że suma macierzy dodatnio określonych jest macierzą dodatnio określoną, wynikają warunki wystarczające, by zapewnić dodatnią określoność macierzy $\mathbf{H}_t$:

- macierze $\mathbf{W}$, $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$ muszą być dodatnio określone (por. przypis 9),
- macierz $\mathbf{H}_1$ musi być dodatnio określona, co najprościej zapewnić, przyrównując ją do bezwarunkowej macierzy wariancji-kowariancji¹⁴.

¹¹ Por. np. [Bauwens, Laurent, Rombouts 2004; Engle, Kroner 1995; Gouriéroux 1997; Osińska 2006; Tsay 2002; Zahnd 2002]

¹² Por. także [Gouriéroux 1997; Osińska 2006].

¹³ Por. np. [Bauwens, Laurent, Rombouts 2004; Gouriéroux 1997; Piontek 2005].

¹⁴ W procedurze estymacji jest to macierz wariancji-kowariancji szacowana z próby, natomiast w procedurach symulacyjnych jest to macierz wynikająca z przyjętych parametrów modelu.

Dla modelu dwuwymiarowego pierwszy warunek sprowadza się do zagwarantowania następujących prostych nierówności:

$$x_{11} > 0, \quad x_{11}x_{22} - x_{12}^2 > 0, \quad (12)$$

gdzie x_{ij} to odpowiednie elementy macierzy $\mathbf{W}$, $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$.

Warunki zapewniające skończoność parametrów macierzy bezwarunkowej dla modelu DVECH mają prostą postać, analogiczną jak dla modeli jednowymiarowych:

$$\bar{a}_{ij} + \bar{b}_{ij} < 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, k. \quad (13)$$

Modelem rozwiązującym w prosty sposób problem dodatniej określoności macierzy kowariancji dla przypadku k -wymiarowego jest tzw. model BEKK¹⁵:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{W}^{*T} \mathbf{W}^* + \mathbf{A}^{*T} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^{*T} \mathbf{H}_{t-1} \mathbf{B}^*. \quad (14)$$

Także w tym modelu przyjmuje się, że $\mathbf{H}_t$ równe jest macierzy bezwarunkowej, co gwarantuje dodatnią określoność macierzy $\mathbf{H}_t$ dla każdej chwili czasu, jeśli tylko rzędy macierzy $\mathbf{W}^*$, $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{B}^*$ równe są wymiarowi modelu. W standardowym rozwiązaniu macierz $\mathbf{W}^*$ jest górną macierzą trójkątną, natomiast $\mathbf{A}^*$ i $\mathbf{B}^*$ są dowolnymi macierzami kwadratowymi o rzędzie równym wymiarowi modelu. Liczba parametrów w modelu BEKK dana jest wzorem $0,5k(k+1) + 2k^2$. Model dwuelementowy ma więc 11 parametrów.

W przeciwieństwie do modelu DVECH, w modelu BEKK trudno zagwarantować stacjonarność bezwarunkowej macierzy wariancji-kowariancji. Warunkiem jest bowiem, by wszystkie wartości własne macierzy $(\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^* \otimes \mathbf{B}^*)$ leżały wewnątrz koła jednostkowego. Już dla dwuwymiarowego procesu wymaga to analizy wartości własnych macierzy o wymiarach 4×4 , co stanowi na tyle skomplikowane zagadnienie, iż zazwyczaj pomija się ten warunek podczas estymacji modelu BEKK.

Bezwarunkowa macierz $\mathbf{H}$ dla modelu BEKK dana jest następującym wzorem:

$$\text{vec}(\mathbf{H}) = \left(\mathbf{I}_{k^2} - (\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A}^*)^T + (\mathbf{B}^* \otimes \mathbf{B}^*)^T \right)^{-1} \text{vec}(\mathbf{W}^{*T} \mathbf{W}^*), \quad (15)$$

gdzie $\text{vec}(\cdot)$ to operator wektoryzacji całej macierzy, a nie jedynie elementów leżących na oraz poniżej przekątnej, jak ma to miejsce dla operatora $\text{vech}(\cdot)$.

Propozycją pozwalającą uniknąć skomplikowanych warunków gwarantujących stacjonarność macierzy $\mathbf{H}$ w modelu BEKK jest model diagonalny (*diagonal* BEKK – DBEKK), w którym macierze $\mathbf{A}^*$ oraz $\mathbf{B}^*$ są macierzami diagonalnymi. Warunek skończonych wartości macierzy $\mathbf{H}$ dla tego modelu dany jest układem nierówności:

¹⁵ Por. np. [Bauwens, Laurent, Rombouts 2004; Engle, Kroner 1995; Gouriéroux 1997; Osińska 2006; Zahnd 2002].

$$(a_{ii}^*)^2 + (b_{ii}^*)^2 < 1, i = 1, 2, \dots, k. \quad (16)$$

Model DBEKK jest szczególnym przypadkiem modelu DVECH i posiada $0,5k(k+1) + 2k$ parametrów. W prosty sposób gwarantuje on zarówno dodatnią określoność macierzy, jak i jej stacjonarność. Uzyskuje się to jednak kosztem znacznego zmniejszenia ogólności modelu.

Najprostszym modelem BEKK jest model ze skalarnymi macierzami A^* i B^* , tzw. model skalarny (*scalar* BEKK – SBEKK).

4. Problemy praktyczne

Znaczna część problemów praktycznych została zasygnalizowana w rozważaniach teoretycznych. Związane są one przede wszystkim z szacowaniem parametrów. Estymacji parametrów dokonuje się najczęściej metodą największej wiarygodności, co wymaga maksymalizowania skomplikowanej funkcji wielu zmiennych przy spełnieniu dodatkowych nierówności nałożonych na parametry. Funkcja największej wiarygodności jest prawie płaska wokół maksimum, co powoduje wiele problemów optymalizacyjnych. Wyznaczone parametry zależą od przyjętych punktów startowych. Szczególne znaczenie ma to dla modeli niediagonalnych. W przypadku modeli diagonalnych (DVECH lub DBEKK) przynajmniej część parametrów można oszacować na podstawie modeli jednorównaniowych i wykorzystać bądź to jako wartości ostateczne parametrów, bądź jako punkty startowe do estymacji modelu wielowymiarowego jako całości. Powyższe problemy ujawniają się w fakcie otrzymywania odmiennych oszacowań parametrów dla różnych pakietów obliczeniowych, co utrudnia porównywanie wyników. Duża liczba parametrów wraz z optymalizacją przy pewnych skomplikowanych warunkach stanowi właściwie problem informatyczny, lecz wydaje się, że w chwili obecnej przesądza o małej popularności tych modeli w zagadnieniach finansowych.

W stosowaniu tych modeli problemem jest także jakość oszacowanych parametrów w przypadku stosunkowo krótkich szeregów finansowych (np. gdy na podstawie średnio 2000 obserwacji należy oszacować kilkanaście parametrów modelu VAR-MGARCH).

Aby uzyskać prawidłowe wyniki dla modeli wielowymiarowych należy w odpowiedni sposób przygotować wielowymiarowy wektor danych. Zazwyczaj usuwa się stopy zwrotu dla okresów, w których brakowało stopy zwrotu choćby dla jednego instrumentu. Prowadzi to do dalszego skracania długości analizowanych szeregów.

Błędna specyfikacja modelu wektora warunkowych wartości oczekiwanych (modelu VAR) powoduje zazwyczaj kłopoty z oszacowaniem modelu MGARCH, gdyż metody iteracyjne mogą prowadzić do modelu z macierzą kowariancji na granicy dodatniej określoności. W wielu przypadkach niezbędne jest też odpowiednie przeskalowanie danych w celu poprawy jakości metod optymalizacyjnych.

Przeszkodą do praktycznego upowszechnienia modeli wielowymiarowych jest niewątpliwie brak ogólnie dostępnych tanich lub darmowych pakietów ekonometrycznych, pozwalających inwestorowi szacować parametry modeli MGARCH bądź symulować dane, a następnie na podstawie uzyskanych wyników weryfikować różne strategie inwestycyjne.

Wszystkie zaprezentowane powyżej problemy powodują, iż ewentualne zastosowanie praktyczne znajdują jedynie modele dwuwymiarowe, mogące w praktyce posłużyć do wyznaczania np. zmiennego w czasie współczynnika zabezpieczenia (*hedge ratio*)¹⁶ lub współczynnika beta. Dla liczby wymiarów powyżej dwóch nadal zastosowanie znajdują modele wygładzania wykładniczego lub stałej macierzy wariancji-kowariancji.

5. Przykład empiryczny

Analizie poddano dwuwymiarowe modele klasy *diagonal* VECM (9 parametrów), BEKK (11 parametrów), *diagonal* BEKK (7 parametrów) oraz *scalar* BEKK (5 parametrów). Są to modele najczęściej wykorzystywane w praktyce. Wszystkie prezentowane wyniki badań empirycznych uzyskano za pomocą autorskich procedur napisanych w środowisku MATLAB 6.0. Próbie do badań stanowiło 15 szeregów dziennych logarytmicznych stóp zwrotu z następujących instrumentów¹⁷ (waluty, akcje, indeksy): CHF (04-01-1993, 3240), GBP (04-01-1993, 3240), USD (04-01-1993, 3240), JPY (04-01-1993, 3240), BRE (06-10-1992, 3073), ELEKTRIM (26-03-1992, 3126), KROSNO (16-04-1991, 3173), WÓLCZANKA (16-07-1991, 3167), ŻYWIEC (24-09-1991, 3120), CAC40 (03-01-1995, 2740), DAX (02-01-1995, 2739), FT-SE100 (22-10-1992, 3292), NIKKEI (05-01-1970, 8841), SP500 (22-01-1970, 9051), WIG (16-04-1991, 3188). Kryterium wyboru poszczególnych szeregów była liczba obserwacji. Analizie poddano wszystkie dwuelementowe kombinacje szeregów. Łącznie przeanalizowano więc 105 par szeregów oraz 420 modeli dwuwymiarowych. Każdorazowo z oryginalnych szeregów stóp zwrotu usunięto dni z brakującymi obserwacjami. Do uzyskanych w ten sposób szeregów dopasowano model VAR(1), a następnie do reszt tego modelu dopasowywano odpowiednie modele MGARCH. Jako kryterium dopasowania modelu wykorzystano kryterium informacyjne Akaike'a. Uzyskane wyniki prezentuje tab. 1.

Wyróżnione zostały modele, dla których kryterium AIC przyjmuje wartości minimalne. W ostatniej kolumnie tab. 1 umieszczono informację o optymalnym modelu. Oznaczenie „-NS” w przypadku modeli klasy BEKK informuje, iż dla danego przypadku uzyskany model nie spełnia warunku stacjonarności macierzy H .

¹⁶ Por. np. [Gourieroux 1997; Tsay 2002; Bauwens, Laurent, Rombouts 2004].

¹⁷ We wszystkich przypadkach datą zakończenia szeregów był dzień 31-10-2005. W nawiasach podano datę początkową szeregu oraz liczbę obserwacji. Wszystkie dane pochodzą z serwisu bossa.pl.

Tabela 1. Wyniki dopasowania poszczególnych modeli

Lp.	Para instrumentów	Liczba obserw.	Wartość kryterium AIC				Optymalny model
			DVECH	SBEKK	DBEKK	BEKK	
1	2	3	4	5	6	7	8
1	CAC40 BRE	2683	17,13175	17,13977	17,13996	17,14262	DVECH
2	CHF BRE	3046	17,13175	17,13977	17,13996	17,14262	DVECH
3	CHF CAC40	2697	14,49199	14,52986	14,49817	14,49105	BEKK
4	DAX BRE	2682	17,23879	17,25109	17,25162	17,25376	DVECH
5	DAX CAC40	2713	14,84289	14,78915	14,78989	14,79163	SBEKK-NS
6	DAX CHF	2690	14,57724	14,61848	14,58908	14,58579	DVECH
7	ELEKTRIM BRE	3070	19,54030	19,55246	19,55030	19,55061	DVECH
8	ELEKTRIM CAC40	2685	18,01568	18,01648	17,99585	17,99855	DBEKK
9	ELEKTRIM CHF	3048	16,84609	16,87072	16,86600	16,86728	DVECH
10	ELEKTRIM DAX	2684	18,10109	18,12849	18,11380	18,11579	DVECH
11	FT-SE100 BRE	3016	16,75842	16,77641	16,77508	16,77711	DVECH
12	FT-SE100 CAC40	2698	14,25002	14,25145	14,25180	14,25363	DVECH
13	FT-SE100 CHF	3174	13,82914	13,86571	13,83416	13,83339	DVECH
14	FT-SE100 DAX	2697	14,60880	14,61627	14,61763	14,61836	DVECH
15	FT-SE100 ELEKTRIM	3017	17,52641	17,54439	17,53680	17,53889	DVECH
16	GBP BRE	3046	15,86480	15,90093	15,89379	15,89495	DVECH
17	GBP CAC40	2697	14,35021	14,38989	14,36700	14,36069	DVECH
18	GBP CHF	3238	12,39878	12,40018	12,39823	12,34661	BEKK
19	GBP DAX	2690	14,44143	14,48844	14,47512	14,46770	DVECH
20	GBP ELEKTRIM	3048	16,62160	16,65522	16,65369	16,65411	DVECH
21	GBP FT-SE100	3174	13,60732	13,64481	13,62683	13,62517	DVECH
22	JPY BRE	3046	16,45193	16,47419	16,47539	16,47316	DVECH
23	JPY CAC40	2697	14,95068	14,94491	14,94537	14,94790	SBEKK-NS
24	JPY CHF	3238	13,24239	13,25118	13,24309	13,19027	BEKK
25	JPY DAX	2690	15,01093	15,03959	15,03928	15,04178	DVECH
26	JPY ELEKTRIM	3048	17,20851	17,23451	17,22846	17,23086	DVECH
27	JPY FT-SE100	3174	14,22052	14,24500	14,24452	14,24519	DVECH
28	JPY GBP	3238	12,99815	13,00193	12,99811	12,97455	BEKK-NS
29	KROSNO BRE	3056	19,37876	19,68539	19,31869	19,31761	BEKK-NS
30	KROSNO CAC40	2671	17,62187	17,84648	17,49965	17,50187	DBEKK-NS
31	KROSNO CHF	3034	16,58449	17,02220	16,55846	16,53098	BEKK-NS
32	KROSNO DAX	2670	17,68378	17,92609	17,59025	17,59211	DBEKK-NS
33	KROSNO ELEKTRIM	3109	20,16618	20,33101	20,09525	20,08564	BEKK-NS
34	KROSNO FT-SE100	3003	17,32058	17,53758	17,21116	17,21144	DBEKK-NS
35	KROSNO GBP	3034	16,35408	17,02969	16,36094	16,35192	BEKK-NS
36	KROSNO JPY	3034	16,94216	17,34176	16,88876	16,88245	BEKK-NS
37	NIKKEI BRE	2922	17,60865	17,64001	17,64023	17,64250	DVECH
38	NIKKEI CAC40	2598	15,85467	15,87220	15,87372	15,87047	DVECH
39	NIKKEI CHF	3076	14,66615	14,69424	14,67375	14,67473	DVECH
40	NIKKEI DAX	2601	15,93683	15,96296	15,96213	15,95843	DVECH
41	NIKKEI ELEKTRIM	2972	18,41006	18,44344	18,43169	18,43429	DVECH
42	NIKKEI FT-SE100	3127	15,16448	15,18266	15,18319	15,18340	DVECH
43	NIKKEI GBP	3076	14,43717	14,48714	14,46824	14,46492	DVECH
44	NIKKEI JPY	3076	15,03508	15,04663	15,04768	15,04963	DVECH
45	NIKKEI KROSNO	3018	18,27383	18,48669	18,18184	18,18083	BEKK-NS

1	2	3	4	5	6	7	8
46	SP500 BRE	2992	16,83585	16,86110	16,85951	16,86193	DVECH
47	SP500 CAC40	2673	15,04440	15,02516	15,02378	15,02639	DBEKK
48	SP500 CHF	3145	13,87186	13,93736	13,90549	13,89890	DVECH
49	SP500 DAX	2673	15,05078	15,05386	15,05502	15,05548	DVECH
50	SP500 ELEKTRIM	3045	17,65820	17,69228	17,67944	17,68196	DVECH
51	SP500 FT-SE100	3234	14,21344	14,19419	14,19530	14,19700	SBEKK-NS
52	SP500 GBP	3145	13,64429	13,70135	13,68091	13,68197	DVECH
53	SP500 JPY	3145	14,24646	14,27595	14,27491	14,27213	DVECH
54	SP500 KROSNO	3092	17,44770	17,81593	17,37663	17,37338	BEKK-NS
55	SP500 NIKKEI	8621	14,71041	14,74359	14,73689	14,73768	DVECH
56	USD BRE	3046	15,85599	15,89244	15,88218	15,88380	DVECH
57	USD CAC40	2697	14,32864	14,38043	14,34312	14,34325	DVECH
58	USD CHF	3238	12,74622	12,74517	12,74569	12,69217	BEKK-NS
59	USD DAX	2690	14,38043	14,42840	14,40354	14,40511	DVECH
60	USD ELEKTRIM	3048	16,61152	16,64132	16,64245	16,64446	DVECH
61	USD FT-SE100	3174	13,61489	13,66173	13,63343	13,63161	DVECH
62	USD GBP	3238	12,23843	12,24514	12,24121	12,16063	BEKK-NS
63	USD JPY	3238	12,92410	12,92641	12,92273	12,89284	BEKK
64	USD KROSNO	3034	16,33723	16,58718	16,30237	16,28120	BEKK-NS
65	USD NIKKEI	3076	14,42945	14,46598	14,44996	14,44604	DVECH
66	USD SP500	3145	13,65019	13,70739	13,67781	13,67843	DVECH
67	WIG BRE	3071	17,52187	17,52942	17,52924	17,52897	DVECH
68	WIG CAC40	2686	15,95088	15,95812	15,95869	15,95996	DVECH
69	WIG CHF	3049	14,99449	15,03143	15,00897	15,00546	DVECH
70	WIG DAX	2685	16,05082	16,06164	16,06260	16,06518	DVECH
71	WIG ELEKTRIM	3124	18,34564	18,34896	18,34847	18,34882	DVECH
72	WIG FT-SE100	3018	15,66445	15,67514	15,67386	15,67594	DVECH
73	WIG GBP	3049	14,77068	14,78933	14,79020	14,78878	DVECH
74	WIG JPY	3049	15,36705	15,39302	15,39034	15,39232	DVECH
75	WIG KROSNO	3171	18,36861	18,59680	18,30560	18,24744	BEKK-NS
76	WIG NIKKEI	3032	16,62839	16,63730	16,63621	16,63811	DVECH
77	WIG SP500	3107	15,80674	15,83484	15,83126	15,83138	DVECH
78	WIG USD	3049	14,76880	14,79587	14,79137	14,78654	DVECH
79	WOLCZANKA BRE	3062	19,16981	19,20318	19,18564	19,18012	DVECH
80	WOLCZANKA CAC40	2677	17,44944	17,49576	17,46291	17,46535	DVECH
81	WOLCZANKA CHF	3040	16,39787	16,45062	16,43472	16,43653	DVECH
82	WOLCZANKA DAX	2676	17,54407	17,58580	17,56143	17,56005	DVECH
83	WOLCZANKA ELEKTRIM	3115	19,95602	19,97627	19,97498	19,97114	DVECH
84	WOLCZANKA FT-SE100	3009	17,08272	17,12689	17,10414	17,10613	DVECH
85	WOLCZANKA GBP	3040	16,16709	16,20399	16,20371	16,20394	DVECH
86	WOLCZANKA JPY	3040	16,75494	16,79177	16,78427	16,78557	DVECH
87	WOLCZANKA KROSNO	3150	19,66570	19,84611	19,65886	19,64881	BEKK-NS
88	WOLCZANKA NIKKEI	3013	17,96913	18,02952	18,00222	18,00160	DVECH
89	WOLCZANKA SP500	3086	17,19340	17,24199	17,22022	17,22243	DVECH
90	WOLCZANKA USD	3040	16,15389	16,18210	16,18280	16,18399	DVECH
91	WOLCZANKA WIG	3165	18,00856	18,02033	18,01418	18,00834	BEKK
92	ZYWIEC BRE	3025	18,48692	18,51570	18,49518	18,48376	BEKK-NS
93	ZYWIEC CAC40	2641	16,72653	16,74301	16,74040	16,73931	DVECH

1	2	3	4	5	6	7	8
94	ZYWIEC CHF	3003	15,70999	15,78244	15,72531	15,71834	DVECH
95	ZYWIEC DAX	2642	16,81838	16,84109	16,83374	16,83118	DVECH
96	ZYWIEC ELEKTRIM	3078	19,28287	19,32444	19,28915	19,28582	DVECH
97	ZYWIEC FT-SE100	2972	16,41314	16,43330	16,42865	16,43054	DVECH
98	ZYWIEC GBP	3003	15,47404	15,53668	15,50076	15,50205	DVECH
99	ZYWIEC JPY	3003	16,07238	16,10570	16,09711	16,09951	DVECH
100	ZYWIEC KROSNO	3104	19,14469	19,36125	19,06472	19,05754	BEKK-NS
101	ZYWIEC NIKKEI	2967	17,30372	17,32812	17,31619	17,31536	DVECH
102	ZYWIEC SP500	3041	16,52420	16,54817	16,54591	16,54802	DVECH
103	ZYWIEC USD	3003	15,46334	15,52541	15,48286	15,48104	DVECH
104	ZYWIEC WIG	3118	17,41734	17,43907	17,42362	17,41284	BEKK-NS
105	ZYWIEC WOLCZANKA	3109	18,87389	18,92978	18,88223	18,88153	DVECH

Źródło: obliczenia własne.

Na podstawie otrzymanych wyników stwierdzić można, iż w zdecydowanej większości (76 przypadków na 105) najlepszym modelem z punktu widzenia kryterium AIC okazał się model diagonalny VECH. Uzyskany wynik sugeruje, iż uwzględnienie efektu przenikania kosztem zwiększonej liczby parametrów przy ograniczeniach gwarantujących prostotę uzyskania dodatniej określoności macierzy nie wpływa zazwyczaj na poprawę modelu. Jedynie w 29 przypadkach na 105 kryterium AIC wskazało jako model optymalny jeden z modeli klasy BEKK. W 21 przypadkach z owych 29 wybrane zostały pełne modele BEKK, które w zdecydowanej większości (16 przypadków na 21) nie spełniają warunku stacjonarności macierzy wariancji-kowariancji. Jedynie w 8 przypadkach na 105 optymalne okazały się uproszczone modele BEKK (diagonalne lub skalarne), które tylko w 2 przypadkach spełniały warunki stacjonarności.

6. Podsumowanie

Uzyskane wyniki, przynajmniej w odniesieniu do modeli dwuwymiarowych, sugerują zwrócenie szczególnej uwagi w zagadnieniach praktycznych na modele diagonalne klasy VECH. Jest to wynik pozytywny, ponieważ modele te sprawiają najmniej praktycznych problemów. Są proste do estymacji, gdyż za modele warunkowej wariancji można przyjąć dowolne jednowymiarowe modele GARCH, co pozwala na estymację dwuetapową modelu i jest bardzo korzystne w przypadku krótkich szeregów. Łatwo zapewnić w ogólności warunki stacjonarności oraz dla przypadku dwuwymiarowego – warunki dodatniej określoności modelu. Modele te posiadają również intuicyjną interpretację parametrów.

Potwierdzenie przewagi modeli DVECH także na podstawie kryteriów ekonomicznych w procesie zabezpieczania instrumentu bazowego kontraktami *futures* z wykorzystaniem zmiennego w czasie współczynnika zabezpieczenia stanowić będzie obszar dalszych prac autora.

Literatura

- Bauwens L., Laurent S., Rombouts J.V.K. (2004), *Multivariate Garch Models: A Survey*, www.core.ucl.ac.be/econometrics/Bauwens/Papers/2003-31-JAEfinal.pdf.
- Bollerslev T., Engle R., Nelson D. (1994), *ARCH Models*, [w:] *Handbook of Econometrics*, vol. IV, Amsterdam (Holland).
- Bollerslev T., Engle R., Wooldridge J. (1988), *A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariance*, „Journal of Political Economy”, University of Chicago Press, vol. 96(1).
- Engle R., Kroner K. (1995), *Multivariate Simultaneous Generalized ARCH*, University of California, citeseer.ist.psu.edu/engle93multivariate.html.
- Gourieroux C. (1997), *ARCH Models and Financial Applications*, Springer, New York.
- Osińska M. (2006), *Ekonometria finansowa*, PWE, Warszawa.
- Piontek K. (2002), *Modelowanie i prognozowanie zmienności instrumentów finansowych*, Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu (praca doktorska).
- Piontek K. (2005), *Prognozowanie macierzy kowariancji i korelacji finansowych szeregów czasowych*, [w:] *Modelowanie preferencji a ryzyko*, AE, Katowice (w druku).
- Tsay R. (2002), *Analysis of Financial Time Series*, Wiley and Sons.
- Zahnd E. (2002), *The Application of Multivariate GARCH Models to Turbulent Financial Markets*, University of Basel. <http://www.eco.fundp.ac.be/cere-fim/varpaper/>.

SOME PRACTICAL CHALLENGES IN MULTIVARIATE GARCH MODELLING

Summary

The article presents some information about selected Multivariate GARCH Models and challenges in practical application of those models. Main attention is paid here to the following problems: number of parameters to estimate, positive-definiteness and stationarity condition for covariance matrix. Full and diagonal VEC models, as well as full, diagonal and scalar BEKK models, are considered. The results obtained from the empirical research indicate that the 2-dimensional diagonal VEC model is optimal for the most data-sets. The results can be applied to time-varying hedge ratio estimate.