

Anna Szymańska

Uniwersytet Łódzki

WYBRANE MIARY EFEKTYWNOŚCI SYSTEMÓW *BONUS-MALUS* UBEZPIECZEŃ KOMUNIKACYJNYCH OC

1. Wstęp

W ubezpieczeniach komunikacyjnych OC składki są wyznaczane w dwóch etapach. Pierwszy to obliczenie składki podstawowej na podstawie czynników *a priori*, czyli obserwowalnych czynników ryzyka. W większości polskich zakładów ubezpieczeń o wysokości składki podstawowej decydują strefa regionalna, w której zarejestrowany jest samochód, oraz pojemność skokowa silnika. Drugi etap to taryfikacja *a posteriori*, czyli różnicowanie składek na podstawie liczby szkód zgłoszonych przez kierowców w poprzednim okresie ubezpieczenia (czyli na podstawie historii szkodowości kierowcy). Etap ten nazywany jest systemem *bonus-malus* (por. [2]).

W każdym systemie *bonus-malus* muszą być ustalone klasa startowa, do której trafiają ubezpieczeni bez historii szkodowości, wektor stawek składki podstawowej oraz zasady przejść między klasami.

Efektywność systemów *bonus-malus* bezpośrednio wpływa na wyniki finansowe uzyskiwane przez zakłady ubezpieczeń. W pracy przedstawiono wybrane metody oceny efektywności systemów *bonus-malus* w ubezpieczeniach komunikacyjnych OC. Zbadano również efektywność systemu *bonus-malus* łódzkiego towarzystwa ubezpieczeniowego.

2. Zastosowanie łańcuchów Markowa do modelowania systemu *bonus-malus*

W celu modelowania systemu zwyczaj i zniżek w ubezpieczeniach komunikacyjnych OC za pomocą łańcuchów Markowa przyjmujemy następujące założenia:

1. Portfelem nazywamy ustaloną grupę kierowców (ubezpieczonych) podzieloną na klasy ryzyka, zwane klasami taryfowymi.

2. Liczba klas taryfowych jest skończona i wynosi r . Oznaczmy przez $R = \{1, 2, \dots, r\}$ zbiór numerów klas taryfowych. Przyjmijmy, że klasa numer 1 jest obciążona największymi zwyczajami, natomiast klasa o numerze r największymi zniżkami.

3. Przynależność ubezpieczonego do klasy w danym roku zależy od klasy, w której znajdował się w roku poprzednim, oraz od liczby szkód spowodowanych w roku poprzednim, przy czym kierowcy bez historii szkodowości trafiają do klasy startowej.

4. Liczba szkód w danym roku dla dowolnego kierowcy z danej klasy jest zmienną losową K o znanym i stałym w czasie rozkładzie prawdopodobieństwa. Wysokość szkód pojedynczego kierowcy jest zmienną losową Y . Zmienne K i Y są niezależne. Zmienna losowa X jest łączną wartością szkód zgłaszanych w pojedynczym okresie czasu, tzn. w ciągu roku.

5. Każdej i -tej klasie taryfowej przyporządkowana jest składka podstawowa b_i , $i = 1, \dots, r$.

Oczekiwana strata dla losowo wybranego z określonej klasy kierowcy wynosi

$$EX = EK \cdot EY. \quad (1)$$

Przy takich założeniach ciąg zmiennych losowych $\{X_n\}_{n \in N}$ taki, że dla każdego $i_0, i_1, \dots, i_{n-1} \in R$ oraz $n \in N$ zachodzi

$$P(X_n = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i) = P(X_n = j | X_{n-1} = i) \quad (2)$$

jest skończonym łańcuchem Markowa o przestrzeni stanów $R = \{1, 2, \dots, r\}$.

Macierz prawdopodobieństw przejścia (por. [3]) skończonego jednorodnego łańcucha Markowa o przestrzeni stanów $R = \{1, 2, \dots, r\}$ jest macierzą o postaci:

$$M = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1r} \\ \vdots & & \\ p_{r1} & \dots & p_{rr} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

gdzie p_{ij} jest prawdopodobieństwem przejścia łańcucha ze stanu i do j w jednym kroku oraz $\sum_{j \in R} p_{ij} = 1$ i $p_{ij} \geq 0$ dla $i, j \in R$. Wiersz i -ty macierzy $M = [p_{ij}]$ to prawdopodobieństwa znalezienia się ubezpieczonego w następnym okresie w każdej z klas taryfowych, jeżeli w danym okresie jest w klasie i .

Niech $F_k(i) = j$ oznacza, że kierowca przechodzi z klasy i do klasy j , gdy spowodował k wypadków w ciągu jednego okresu ubezpieczenia (przyjmijmy, że w ciągu jednego roku), przy czym $F: R \rightarrow R$, $R = \{1, 2, \dots, r\}$, ($i, j \in R$, $k = 0, 1, 2, \dots$). Tak zdefiniowaną funkcję F nazywamy funkcją transformacji, natomiast zasady przejścia możemy zapisać w postaci k zero-jedynkowych macierzy $F_k = [f_{ij}^{(k)}]$, gdzie:

$$f_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{dla } F_k(i) = j \\ 0 & \text{dla } F_k(i) \neq j \end{cases}, \quad (4)$$

gdzie $i, j \in R$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Jeżeli liczba szkód jest zmienną losową o rozkładzie Poissona, to prawdopodobieństwo spowodowania k szkód przez kierowcę w jednostkowym okresie czasu wyraża się wzorem:

$$p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k (e^{-\lambda})}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5)$$

Wzór (5) jest stosowany do opisu rozkładu liczby szkód w jednorodnych portfelach. Jeżeli portfel jest niejednorodny, to parametr intensywności szkód Λ jest zmienną losową o rozkładzie gamma z parametrami α i β , o funkcji gęstości mającej postać

$$f(\lambda) = \frac{\beta^\alpha e^{-\beta\lambda} \lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \lambda > 0, \quad (6)$$

przy czym $\bar{\lambda} = E\Lambda = \frac{\alpha}{\beta}$ i $D^2\Lambda = \frac{\alpha}{\beta^2}$. Wówczas liczba szkód w portfelu ma rozkład ujemny dwumianowy o postaci

$$p_k = P(K=k) = \binom{k+\alpha-1}{k} \left(\frac{\beta}{1+\beta} \right)^\alpha \left(\frac{1}{1+\beta} \right)^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (7)$$

Estymatory parametrów α i β , wyznaczone metodą momentów (por. [1]), mają postać

$$\beta = \frac{\bar{k}}{S_k^2 - \bar{k}} \quad \text{ i } \quad \alpha = \frac{\bar{k}^2}{S_k^2 - \bar{k}}. \quad (8)$$

Prawdopodobieństwa przejścia z klasy i do klasy j w jednostkowym okresie czasu wynoszą

$$p_{ij}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) f_{ij}^{(k)}, \quad i, j \in R \quad (9)$$

lub w zapisie macierzowym:

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) F_k. \quad (10)$$

3. Miary efektywności systemów *bonus-malus*

Załóżmy, że proces przejść ubezpieczonych między klasami jest skończonym jednorodnym łańcuchem Markowa o macierzy prawdopodobieństw przejścia M . Najczęściej stosowaną miarą, oceniającą system *bonus-malus*, jest **efektywność ogólna** $\eta(\lambda)$, nazywana efektywnością systemu według Loimaranta (por. [3]) i określona wzorem

$$\eta(\lambda) = \frac{B'(\lambda)}{B(\lambda)} \cdot \lambda = \frac{dB(\lambda)}{B(\lambda)} \bigg/ \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad (11)$$

gdzie średnia asymptotyczna składka za pojedynczy okres po osiągnięciu przez system stanu stacjonarnego wynosi

$$B(\lambda) = \sum_{i=1}^r w_i(\lambda) \cdot b_i \quad (12)$$

oraz b_i – składka w klasie i , $b = (b_1, \dots, b_r)$ jest wektorem składek, $W(\lambda) = [w_1(\lambda), \dots, w_r(\lambda)]$ jest wektorem, którego składowymi są prawdopodobieństwa przynależności do i -tej klasy, przy czym $\sum_{i=1}^r w_i(\lambda) = 1$.

Przy przedstawionych założeniach wektor $W(\lambda)$ można wyznaczyć jako unormowany lewostronny wektor własny macierzy przejść M , odpowiadający wartości własnej 1 (normalizacja polega na tym, że suma składowych wektora wynosi jeden).

Tak zdefiniowana efektywność opiera się na przeciętnej stacjonarnej składce wyznaczanej jako średnia ważona przeciętnych indywidualnych składek stacjonarnych. Efektywność ogólna jest elastycznością średniej składki $B(\lambda)$ względem poziomu ryzyka λ i pozwala ocenić, w jakim stopniu kierowcy są oceniani przez system. W idealnym stanie $B(\lambda)$ powinna być rosnącą funkcją λ taką, że $\eta(\lambda) = 1$.

Tak zdefiniowana efektywność ma dwie wady: po pierwsze stan stacjonarny procesu może nie zostać osiągnięty, po drugie efektywność ocenia wszystkich kierowców łącznie.

Efektywność systemu można również mierzyć za pomocą **średniej asymptotycznej składki** określonej wzorem (12). Opisaną miarę stosujemy gdy porównujemy systemy *bonus-malus* kilku towarzystw ubezpieczeniowych, przy założeniu jednakowej szkodowości w badanych portfelach. Towarzystwo ubezpieczeniowe z najwyższą przeciętną stacjonarną składką osiągnie najlepszy wynik techniczny z działalności ubezpieczeniowej.

Niech $V(\lambda) = [v_1(\lambda), \dots, v_r(\lambda)]$ będzie wektorem, którego składowymi są zdyskontowane (na początek ubezpieczenia) płatności ponoszone zależnie od klasy startowej. Jeżeli kierowca startuje z klasy i , to zdyskontowane płatności wynoszą $v_i(\lambda)$.

Efektywnością zależną od klasy startowej i nazywamy funkcję

$$\mu_i(\lambda) = \frac{v'_i(\lambda)}{v_i(\lambda)} \cdot \lambda = \frac{dv_i(\lambda)}{v_i(\lambda)} \bigg/ \frac{d\lambda}{\lambda}. \quad (13)$$

Strumień zdyskontowanych płatności wynosi

$$v_i(\lambda) = b_i + d \sum p_k(\lambda) \cdot v_{F_k(i)}(\lambda), \quad i = 1, \dots, r, \quad (14)$$

gdzie b_i – oznacza roczną składkę w klasie i , d – czynnik dyskonta, $F_k(i) = j$ – funkcja transformacji.

Równanie (14) ma dokładnie jedno rozwiązanie (dowód twierdzenia, można znaleźć w pracy [3]).

Efektywność zależna od grupy startowej pozwala ocenić, jak szybko kierowcy trafiają do klas odpowiadających poziomowi ryzyka, jakie reprezentują.

Efektywność systemów *bonus-malus* można również mierzyć, oceniając **wynik techniczny z działalności ubezpieczeniowej** towarzystwa ubezpieczeniowego. Symulację przeprowadza się przy różnych założeniach co do rozkładu liczby i wielkości szkód oraz długości funkcjonowania systemu. Najczęściej zakłada się, że liczba szkód ma rozkład ujemny dwumianowy, a wielkość szkód ma rozkład gamma. Na podstawie badań KNUiFE (por. www.knufe.gov.pl) w latach 1998-2001 średnia częstotliwość szkód w Polsce z pojedynczej polisy wynosiła 10,21% (w krajach UE – 4,51%) z odchyleniem standardowym 32,96%. Natomiast średnia wielkość szkody wynosiła 5000 zł z odchyleniem standardowym 4000 zł.

4. Efektywność wybranego towarzystwa ubezpieczeniowego

Działające w Polsce towarzystwa ubezpieczeniowe mają podobną strukturę systemów *bonus-malus*. Zgodnie z danymi KNUiFE najczęściej kierowca za 2 lata bezwypadkowej jazdy uzyskuje zniżkę w wysokości 20% składki podstawowej, za 3 lata – 30%, za 4 lata – 40%, za 5 lat – 50%. Większe różnice pomiędzy towarzystwami ubezpieczeniowymi występują w przypadku konstrukcji klas zwykłych. Funkcjonujące systemy mają od jednej do kilkunastu klas zwykłych o maksymalnej stawce składki podstawowej w wysokości od 120 do 260%.

Badanie przeprowadzono w roku 2003 dla portfela ubezpieczeń komunikacyjnych OC łódzkiego towarzystwa ubezpieczeniowego liczącego 1356 polis. System *bonus-malus* badanego towarzystwa ubezpieczeniowego opisuje tab. 1.

Tabela 1. Zwyżki i zniżki ubezpieczeń OC komunikacyjnych badanego towarzystwa ubezpieczeniowego

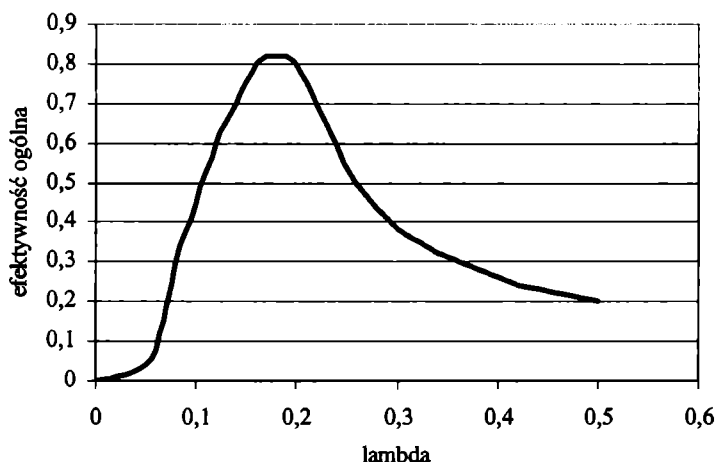
Klasa	% składki podstawowej	Liczba szkód zgłoszonych w ciągu roku			
		0	1	2	3+ (co najmniej trzy)
1	160	2	1	1	1
2	130	3	1	1	1
3	100	4	2	1	1
4	90	5	2	1	1
5	80	6	3	1	1
6	70	7	3	2	1
7	60	8	5	3	1
8	50	9	5	4	1
9	50	10	6	5	1
10	50	11	8	5	1
11	50	12	9	6	2
12	50	13	9	6	2
13	40	13	10	7	3

Źródło: warunki ogólne ubezpieczeń komunikacyjnych.

$$M = \begin{bmatrix} P_{1+} & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{1+} & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{2+} & p_1 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{2+} & p_1 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{3+} & p_2 & p_1 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{3+} & 0 & p_2 & p_1 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{3+} & 0 & 0 & p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{3+} & 0 & 0 & 0 & p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{3+} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & p_0 & 0 \\ 0 & p_{3+} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & p_0 \\ 0 & p_{3+} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & p_0 \\ 0 & 0 & p_{3+} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_0 \end{bmatrix}$$

p_k – prawdopodobieństwo spowodowania k szkód w ciągu roku,

p_{k+} – prawdopodobieństwo spowodowania co najmniej k szkód w ciągu roku.



Rys. 1. Efektywność ogólna systemu *bonus-malus* badanego towarzystwa ubezpieczeniowego
Źródło: badania własne.

Jeżeli przyjmujemy, że rozkład liczby szkód w portfelu jest rozkładem ujemnym dwumianowym, to efektywność ogólną $\eta(\lambda)$ badanego towarzystwa ubezpieczeniowego przedstawia wykres na rys. 1. W badanym portfelu średnia szkodowość wynosiła $\lambda = 0,13$.

5. Podsumowanie

W systemie *bonus-malus* badanego towarzystwa ubezpieczeniowego elastyczność stawek składki względem poziomu ryzyka (szkodowości) nie jest większa od 0,8%. Oznacza to, że system nie jest efektywny (funkcja elastyczności składek względem poziomu ryzyka jest nieelastyczna dla wszystkich wartości szkodowości).

Charakterystyczną cechą polskich systemów *bonus-malus* w długim okresie jest koncentracja polis w klasach o maksymalnej zniżce oraz znikoma obecność polis w klasach zwykłych. W badanym towarzystwie ubezpieczeniowym po 10 latach aż 68% ubezpieczonych znajdowało się w klasie o największej zniżce składki podstawowej, a jedynie 2,5% płaciło składkę podwyższoną w stosunku do stawki podstawowej. W dłuższym okresie w większości polskich towarzystw ubezpieczeniowych średnia asymptotyczna składka dąży do składki z maksymalną zniżką. W badanym portfelu już po 16 latach średnia składka to 40% składki podstawowej.

Literatura

- [1] Domański Cz., Pruska K., *Nieklasyczne metody statystyczne*, PWE, Warszawa 2000.
- [2] Hossack I.B., Pollard J.H., Zehnwirth B., *Introductory Statistics with Applications in General Insurance*, Cambridge 1999.
- [3] Lemaire J., *Bonus-malus Systems in Automobile Insurance*, Kluwer Nijhoff, Boston 1995.

CHOSEN EFFICIENCY MEASURES OF BONUS-MALUS SYSTEM OF CIVIL RESPONSIBILITY CAR INSURANCE

Summary

In civil responsibility car insurance the individual premium is estimated in two stages. The first stage is the estimation of the basic premium on the basis of prior factors – known risk factors such as driver's sex and age, type of car etc. The second stage is the posterior tariffication i.e. determining the individual premium on the basis of the damage history of the insured. This stage is called the bonus-malus system. The paper presents some selected methods of the assessment of the effectiveness of the bonus-malus system. The effectiveness of the bonus-malus system of an insurance company from Łódź was also investigated on real data.