

Ewa Wycinka

Uniwersytet Gdański

EWOLUCJA AKTUARIALNYCH MODELI TRWANIA ŻYCIA I ICH WPŁYW NA ROZWÓJ UBEZPIECZEŃ NA ŻYCIE – UJĘCIE RETROSPEKTYWNE

1. Wstęp

Szacowanie składek i rezerw w ubezpieczeniach na życie wymaga przyjęcia pewnych założeń odnośnie do trwania życia ludzkiego (model trwania życia) i wysokości technicznej stopy ubezpieczenia. Adekwatność tych założeń wpływa na dopasowanie modelu do danych rzeczywistych i dokładność aktuarialnych oszacowań składek i rezerw.

Celem niniejszego artykułu jest prezentacja najważniejszych etapów rozwoju aktuarialnych modeli trwania życia w kontekście ich wykorzystania w ubezpieczeniach na życie oraz wskazanie współczesnych kierunków badań w tej dziedzinie. Artykuł zawiera przegląd zmian dokonywanych w modelowaniu trwania życia od propozycji Dodsona (1755 r.) do modelu Lee-Cartera (1992 r.).

2. Pierwsze modele trwania życia wykorzystywane w ubezpieczeniach

Zapotrzebowanie na ochronę ubezpieczeniową występowało już w najstarszych cywilizacjach. Przykłady rent i innych świadczeń na wypadek utraty życia lub zdrowia odnaleźć można w najstarszych zachowanych pomnikach prawa, jednak zawierane w owych czasach umowy nie były konstruowane w oparciu na oszacowanym ryzyku zgonu i bardziej przypominały grę hazardową niż ubezpieczenie. Jedną ze stron takiego kontraktu zwykle ponosiła stratę. W siedemnastowiecznej Europie popularne były renty dożywotnie, chętnie wówczas sprzedawane przez rządy wielu europejskich państw, jako forma pozyskania środków na potrzeby prowadzonych wojen. Rozpropagowane były również systemy specyficznych rent,

tw. tontyny¹. Nieliczne zakłady ubezpieczeń sprzedawały krótkoterminowe ubezpieczenia na życie o stałej (niezależnej od wieku) wysokości składki i zmiennej wysokości świadczenia (uzależnionej od liczby zmarłych w danym okresie) [10, s. 65]. Długoterminowe ubezpieczenia na życie mogły się rozwinąć dopiero jako efekt uwzględnienia w szacowaniu wysokości składek ryzyka związanego z długością ludzkiego życia.

Rozwój metod aktuarialnych był determinowany wcześniejszym powstaniem i upowszechnieniem się podstaw matematyki finansowej (rachunek procentu)² oraz rachunku prawdopodobieństwa³. W tym samym czasie powstały pierwsze prace analityczne dotyczące trwania życia ludzkiego. W roku 1662 J. Graunt skonstruował pierwszą tablicę wymieralności⁴ opierającą się na spisach zmarłych w Londynie. Wymienione wcześniej nowości naukowe połączył E. Halley (1693 r.), który nawiązując do pomysłu Graunta, skonstruował tablicę wymieralności na podstawie danych o urodzeniach i zgonach we Wrocławiu i przedstawił pełną metodologię konstruowania tablic wymieralności metodą spisu zmarłych. Halley wyprowadził również wartość składki jednorazowej renty życiowej⁵ i przedstawił propozycje wykorzystania jej w ubezpieczeniach rentowych⁶. Rachunek rent rozwinął de Moivre (1725 r.). Pierwszy projekt ubezpieczeń długoterminowych ze składkami wyznaczonymi na podstawie ryzyka zgonu i założonej stopy procentowej zaproponował dopiero Dodson w roku 1755. Projekt Dodsona stał się podstawą funkcjonowania pierwszego na świecie towarzystwa ubezpieczeń na życie – Equitable (1762 r.)⁷. Zasady kalkulacji składek stosowane w Equitable były kopiowane przez kolejne towarzystwa ubezpieczeń na życie i stały się z czasem standardem rynku ubezpieczeń na życie.

Towarzystwo Equitable wykorzystało do szacowania umieralności ubezpieczonych skonstruowaną specjalnie w tym celu (metodą spisów zmarłych) tablicę *Nor-*

¹ Schemat tontyny polegał na tym, że grupa osób w różnym wieku wpłacała jednorazowo pewne kwoty pieniężne, w zamian za co każdy z wpłacających miał otrzymywać dożywotnią rentę. Co roku suma przeznaczana na renty była taka sama. Jednak z powodu wymierania kolejnych uczestników projektu pozostali żyjący otrzymywali coraz wyższe renty. Ostatnia pozostała przy życiu osoba pobierała rentę w wysokości równej wszystkim początkowym rentom, i to aż do swojej śmierci. Wtedy wypłata rent definitywnie się kończyła [5, s. 23].

² Elementy teorii procentu przedstawili jako pierwsi S. Stevin (1585 r.) oraz R. Witt (1613 r.).

³ Za narodziny rachunku prawdopodobieństwa uważa się moment rozwiązania tzw. problemu podziału (*problem of points*) przez B. Pascala oraz P. de Fermata w roku 1654.

⁴ Istnieje wcześniejsza tablica, tzw. tablica Ulpiana, ale nie ma dowodów, że była to tablica wymieralności; szerzej [13].

⁵ Rachunek rent wyprowadził wcześniej Holender J. de Witt (1671 r.), autor zasady równowagi składek i świadczeń, jednak jego praca nie została opublikowana i nie wpłynęła na rozwój metod aktuarialnych [11, s. 21-22].

⁶ W swojej pracy Halley skrytykował renty emitowane w tym czasie przez rząd brytyjski. Renty rządowe nie były uzależnione od wieku rentobiorcy, a ich wysokość była zawyżona. Uwagi te zostały zignorowane, a w późniejszym okresie państwo poniosło spore straty i ostatecznie wycofało się z projektu [1, s. 74].

⁷ Było to najdłużej działające towarzystwo ubezpieczeniowe, które miało ogromny wkład w rozwój ubezpieczeń na życie.

thampton (1771 r.). Wadą tej tablicy było to, iż zawyżała ona prawdopodobieństwa zgonów, co przyczyniło się do powstania nadwyżki w ubezpieczeniach na życie oraz do niedoborów w ubezpieczeniach rentowych. W związku z tym towarzystwo zaproponowało ubezpieczonym ubezpieczenia na życie z udziałem w zysku oraz wycofało się z rent życiowych. W roku 1815 towarzystwa ubezpieczeniowe zaczęły wykorzystywać tablicę *Carlisle* skonstruowaną metodą współczynników zgonów [4, s. XXVI]. Oszacowane w niej prawdopodobieństwa zgonów lepiej odzwierciedlały rzeczywistą umieralność ubezpieczonych i umożliwiły wprowadzenie przez ubezpieczycieli ubezpieczeń na dożycie i ubezpieczeń kapitałowych, aktuariusze zaś dalej szukali sposobów dokładniejszego modelowania umieralności.

3. Modele uwzględniające zróżnicowanie populacji

Pierwsze tablice wymieralności wykorzystywane w ubezpieczeniach opierały się na założeniu, że opisują umieralność w jednorodnej populacji. W roku 1740 N. Struyck zbudował pierwsze tablice z podziałem na płeć, a w 1833 r. F. Corboux zwrócił uwagę na inne czynniki będące przyczyną niejednorodności populacji. W tym samym czasie dostrzeżono nieodpowiedniość do celów ubezpieczeniowych tablic konstruowanych w oparciu na populacji danego kraju z tego powodu, że opisywały one wymieralność całej populacji, a nie wyodrębnionej grupy ubezpieczonych. Ubezpieczeni stanowią w stosunku do całej populacji grupę bardziej jednorodną, o odmiennych współczynnikach zgonów. Od początku swego istnienia towarzystwa ubezpieczeniowe starały się przeciwdziałać zjawisku antyselekcji oceniając stan zdrowia kandydatów na ubezpieczonych. W ten sposób przeciętny stan zdrowia grupy osób przyjmowanych do ubezpieczenia był znacznie lepszy od przeciętnego stanu zdrowia w całym społeczeństwie, a prawdopodobieństwa zgonów niższe od wynikających z powszechnych badań, przy czym różnica ta była zwykle większa w pierwszych latach ubezpieczenia i podlegała wahaniom w zależności od rodzaju ubezpieczenia. Do prawidłowego oszacowania prawdopodobieństw zgonu ubezpieczonych niezbędne było posłużenie się wyłącznie danymi z zakładów ubezpieczeń. Pierwszą tablicę wymieralności ubezpieczonych skonstruował W. Morgan w roku 1828. Oparł się on na danych z towarzystwa Equitable. Pierwszą tablicą zbudowaną na podstawie danych zagregowanych z różnych zakładów ubezpieczeń była tablica siedemnastu towarzystw ubezpieczeń na życie z roku 1843, znana pod nazwą *Actuaries or the Combined Experience Table*. Konstruktorzy tablic wymieralności dostrzegli, że wpływ selekcji na prawdopodobieństwa zgonów ubezpieczonych maleje wraz z upływem czasu od zawarcia umowy ubezpieczenia. Po pewnym okresie prawdopodobieństwa śmierci ubezpieczonych zrównują się z prawdopodobieństwami śmierci osób, wśród których nie przeprowadzano selekcji. Występowanie selekcji czasowej jako pierwsi analizowali brytyjscy aktuariusze – E.J. Farren i J.A. Higham – w roku 1850. Zauważyli oni, że wpływ selekcji zanika po upływie od 5 do 10 lat. Pierwsze i ostateczne tablice se-

lekcyjne powstały w związku z publikacją w 1869 r. tablic wymieralności (dla obu płci) na podstawie danych z dwudziestu brytyjskich towarzystw ubezpieczeń na życie (była to kontynuacja metody konstruowania tablic na podstawie zagregowanych danych zakładów ubezpieczeń).

4. Ciągłe modele trwania życia

Równocześnie z pracami nad doskonaleniem metodologii tablic trwania życia poszukiwano analitycznych praw opisujących przebieg życia ludzkiego. Jako pierwszy de Moivre (1725 r.) założył, że w przedziale wieku od 12 do 86 lat stopniowe zmniejszenie się liczby osób następuje według postępu arytmetycznego $l_x = 86 - x$ dla $12 \leq x \leq 86$. Kluczowe znaczenie w rozwoju metod aktuarialnych miało prawo umieralności zaproponowane przez Gompertza w roku 1825. Wyraził on natężenie umieralności⁸ jako funkcję wykładniczą: $\mu_x = Bc^x$, gdzie B i c są stałymi modelu. Według prawa Gompertza umieralność osób w wieku $[x, x + 1]$ jest średnią wyciągniętą z indywidualnych odporności na śmierć (*average exhaustion's of an individual resistance to death*). Odporność ta maleje w postępie geometrycznym wraz z upływem wieku. W roku 1860 W. Makeham wyprowadził ogólniejszą formułę prawa umieralności Gompertza: $\mu_x = A + Bc^x$. Ta nowa formuła obejmowała dwie główne, współwystępujące przyczyny śmierci: pierwsza to ryzyko bez wcześniejszych oznak (*deposition to death*), druga (zdefiniowana wcześniej przez Gompertza) to spadek odporności na śmierć (*deterioration*). Prawo Gompertza-Makehama dobrze opisywało wymieralność osób, które osiągnęły wiek 25 lat. W starszych grupach wiekowych rzeczywista intensywność zgonów była mniejsza niż intensywność wynikająca z prawa Gompertza, tak więc prawo Gompertza-Makehama mogło być stosowane do opisu śmiertelności jedynie w krótkich okresach życia. Aktuariusze jednak wciąż poszukiwali formuły opisującej śmiertelność w całym przebiegu życia człowieka. Modyfikacje prawa Gompertza proponowali: Opermann (1870 r.), Thiele (1872 r.), Perks (1932 r.) oraz Beard (1963 r.). Rozwijane były również modele obrazujące zmiany śmiertelności w całym życiu i uwzględniające nieliniowe zmiany natężenia śmiertelności w wieku dzieciństwa i dojrzewania: zaproponowali je Wittstein (1883 r.) oraz Helligman i Pollard (1980 r.) [7]. Żaden z tych modeli nie opisywał poprawnie całego trwania życia i nie zastąpił tablic trwania życia. Modele analityczne znalazły zastosowanie do aproksymacji funkcji tablicowych w ułamkowych okresach wieku, wygładzania funkcji tablicowych oraz do ekstrapolacji tablic w najstarszych rocznikach wieku.

Ciągłe podejście do funkcji aktuarialnych oznacza przyjęcie założenia, że składka ubezpieczeniowa jest płatna w sposób ciągły, a świadczenie w momencie śmierci ubezpieczonego. W pierwszych projektach ubezpieczeniowych stosowano podejście

⁸ Gompertz nie nazwał zaproponowanej przez siebie funkcji natężeniem umieralności, pojęcie to i jego definicję wprowadził T. Edmonds w 1832 r.

dyskretne. Oznaczało to przyjęcie na potrzeby kalkulacji założenia, że składka była płatna okresowo (raz do roku, raz na kwartał itp.), a świadczenie było płatne na koniec roku, w którym nastąpiła śmierć ubezpieczonego. Ponieważ w rzeczywistości świadczenie wypłacano bezpośrednio po śmierci ubezpieczonego, oznaczało to, że oszacowania nie były dokładne. Ciągłe podejście do funkcji aktuarialnych w kompleksowy sposób przedstawił W. Woolhouse w 1869 r. Zdefiniował on w ujęciu ciągłym formuły jednorazowej składki netto ubezpieczenia i renty oraz zależność między nimi przy założonej intensywności oprocentowania [11, s. 19]⁹. Ciągłe podejście do funkcji aktuarialnych w zakresie metod szacowania rezerw zastosował T. Thiele (1875 r.) przedstawiając równanie różniczkowe rezerw. Praktyka ubezpieczeniowa zastosowała ciągłe podejście do ubezpieczeń na życie dopiero na początku XX w. – jako pierwsze towarzystwo Assicurazioni Generali z Triestu wykorzystywało system taryf skonstruowanych na podstawach ciągłych [10, s. 9].

5. Stochastyczne modele trwania życia

Przez wiele dekad aktuariusze ograniczali się do wyznaczania oczekiwanej wartości bieżącej składek i rezerw, pomijając analizę momentów wyższych rzędów. Zakładano bowiem powszechnie, że kalkulacje składek są oparte na wystarczająco dużej liczbie obserwacji, by działało prawo wielkich liczb, a wpływ błędów losowych był znikomy [6, s. 842]. Zagadnienie zmienności względem wartości oczekiwanej zaczęto analizować dopiero pod koniec XVIII w. W roku 1786 Tetens jako pierwszy badał wielkość grupy ubezpieczonych n jako czynnik ryzyka umieralności. Wykazał on, że ryzyko dla towarzystwa ubezpieczeń w ujęciu bezwzględnym rośnie, gdy liczba ubezpieczonych rośnie, ale jednocześnie ryzyko w odniesieniu do jednego ubezpieczonego maleje $\sqrt{n}$ razy [4, s. 30; 10, s. 6].

W roku 1859 C. Bremiker zainteresował się losową zmiennością umieralności w grupie ubezpieczonych. Przyjmując, że długość życia ubezpieczonego jest zmienną losową, wyznaczył rozkład szkód i miarę jego ryzyka. Za miarę ryzyka składki ubezpieczeniowej w ubezpieczeniu na całe życie przyjął on wariancję świadczenia [10, s. 7].

Zagadnienie to rozwinął w roku 1869 K. Hattendorff, który zdefiniował pojęcie straty ubezpieczyciela¹⁰. Hattendorff wykazał, że ciąg strat ubezpieczyciela w kolejnych latach ma wartość oczekiwaną równą zero i zmienne te są nieskorelowane.

⁹ Przedstawił on również formuły wyznaczania wartości bieżących rent płatnych m -razy rocznie oraz zależności między modelami dyskretnymi i ciągłymi. Następnie wielkości te wykorzystał do szacowania składek we wszystkich stosowanych ówczesnie rodzajach ubezpieczeń na życie.

¹⁰ Jest to zmienna losowa (L) określająca różnicę wartości bieżącej przyszłych świadczeń (które są zobowiązaniami zakładu ubezpieczeń) i przyszłych składek, które wpłyną od ubezpieczonego. Obie składowe funkcje straty (składki i świadczenia) są również zmiennymi losowymi. Zgodnie z zasadą równoważności składek i świadczeń wartość oczekiwana funkcji straty wynosi zero [12, s. 83-84].

Tak więc wariancja całkowitej straty jest sumą wariancji rocznych strat¹¹. Prace Hattendorffa i jego poprzedników są współcześnie uważane za załóżek teorii ryzyka [3, s. 18].

5. Wielostanowe modele trwania życia

Ubezpieczenia wypadkowe i chorobowe przez długi okres rozwijały się niezależnie od ubezpieczeń na życie i rent życiowych. Zapotrzebowanie na takie formy ubezpieczeń istniało w środowiskach robotniczych, stąd jako pierwsze oferowały je gildie i cechy rzemieślnicze, a następnie towarzystwa *friendly societies*¹². Środowisko aktuarialne zainteresowało się towarzystwami *friendly societies* i prowadzonymi przez nie ubezpieczeniami wypadkowymi i chorobowymi dopiero w XIX w. Włączenie ubezpieczeń chorobowych i wypadkowych jako uzupełnienie ubezpieczeń na życie i dożycie (ubezpieczenia wieloopcyjne) wymagało przede wszystkim skonstruowania tablic wieloopcyjnych (*multiple decrement table*) uwzględniających różne przyczyny zakończenia ubezpieczenia [10, s. 9]. Idea konstrukcji tablic wieloopcyjnych wywodzi się z XVII w., z prób oszacowania skutków epidemii ospy (D. Bernoulli, 1760 r.). Równanie natężenia umieralności w modelach wielostanowych przedstawili niezależnie A. Cournot w 1843 r. oraz W. Makeham w 1867 r. W roku 1875 J. Karup opisał własności oraz wykorzystał model pojedynczy prawdopodobieństw oraz natężenia ubytku w kontekście modelu choroby – śmierci (bez uwzględniania wyzdrowień), nazwany przez niego czystymi (lub niezależnymi) prawdopodobieństwami odejścia. Pierwszą pełną matematyczną analizę ubezpieczeń z świadczeniami z tytułu inwalidztwa (w ujęciu zarówno dyskretnym, jak i ciągłym) przedstawił w roku 1900 E. Hamza [10, s. 10]. Przedstawione modele uwzględniały tylko przypadki inwalidztwa trwałego. Do istotnego rozwoju teorii modeli wielostanowych przyczynił się G. Du Pasquier (1912 r.), który wprowadził trójstopniowy model choroby – śmierci, uwzględniający przypadki wyzdrowień (przejściowe inwalidztwo). Przedstawił on równania różniczkowe prawdopodobieństw przejść z jednych stanów do kolejnych i pokazał, że prowadzą one do równań różniczkowych drugiego stopnia, które rozwiązuje się przy założeniu stałej siły ubytku [3, s. 35]. Praca Du Pasquiera zawiera wczesne zastosowanie łańcuchów Markowa do analiz aktuarialnych i stanowi podstawę nowoczesnych ubezpieczeń

¹¹ Roczna stratę ubezpieczyciela Hattendorff zdefiniował jako zdyskontowane na początek polisy: wartość wydatków netto i świadczeń minus wysokość składek w danym roku plus saldo wysokości rezerw na koniec i początek roku [3, s. 18].

¹² Powstające od VII w. gildie udzielały swym członkom pomocy w wypadku zdarzeń losowych (ognia, śmierci, kradzieży, wypadku w podróży morskiej i lądowej itp.). Z czasem przekształciły się one w cechy rzemieślnicze. *Friendly societies* – towarzystwa wzajemnej pomocy – zaczęły powstawać w Anglii w XVI w. Koncentrowały się na świadczeniu wzajemnej pomocy, w tym wypłacaniu rent i świadczeń pośmiertnych członkom rodziny zmarłego. Towarzystwa nie uzależniały wielkości wypłacanych odszkodowań od potrzeb członków oraz określonych świadczeń zdrowotnych i chorobowych [3].

chorobowych. Mimo ogromnego znaczenia prezentowanych prac i zainteresowania aktuariuszów tymi zagadnieniami, wiele z tych osiągnięć zostało zapomnianych i na nowo odkrytych dopiero w roku 1951 przez Fixa i Neymana, którzy rozwinęli te formuły w kontekście procesów Markowa, nieznacznie tylko odnosząc się do prac swoich poprzedników [3, s. 35].

7. Modele oceny zróżnicowania umieralności

Czynniki medyczne i pozamedyczne różnicujące umieralność poszczególnych ubezpieczonych zaczęto badać pod koniec XIX w. W roku 1866 Taylor i Tardien zaproponowali, by szacować składki ubezpieczeniowe dla osób o gorszym stanie zdrowia, „postarzając” ubezpieczonych (*age shift method*). W roku 1874 G. Humphrey na podstawie badań empirycznych skonstruował tablicę wymieralności, w której współczynniki umieralności były funkcją wieku i liczby dokładanych lat [4, s. 24-25; 10, s. 13]. W roku 1919 O. Rogers i A. Hunter stworzyli system oceny ryzyka zgonu na podstawie wskaźników umieralności przedstawionych procentowo. System ten jest znany jako numeryczny system oceny (*numerical rating system*)¹³. Zakłady ubezpieczeń zyskały dzięki temu narzędzie umożliwiające ubezpieczanie osób o gorszym stanie zdrowia w zamian za podwyższoną składkę ubezpieczeniową.

8. Inne kierunki prac aktuarialnych w XX w.

Jak wskazano wcześniej, większość z nowych kierunków badań zapoczątkowanych w XVIII i XIX w. była rozwijana w wieku XX. Ponadto za kluczowe odkrycia aktuarialne można uznać zastosowanie przez L. Bechaliera w roku 1900 stochastycznego podejścia do stopy procentowej [10, s. 6].

W niektórych rodzajach ubezpieczeń długość ubezpieczenia ma znacznie większy wpływ na prawdopodobieństwo zgonu niż wiek ubezpieczonego, np. przy kalkulacji rezerw w ubezpieczeniach na życie i dożycie. Z tego powodu Smolensky (1934 r.) zaproponował wykorzystanie tablic kompaktowych (*compact table*). Są to tablice wymieralności, w których prawdopodobieństwa zgonów zależą jedynie od długości ubezpieczenia, bez względu na wiek ubezpieczonego.

W drugiej połowie XX w. zaadaptowanie do potrzeb aktuarialnych teorii procesów stochastycznych odnowiło zainteresowanie twierdzeniem Hattendorffa (może być ono przedstawione za pomocą martyngału) [3, s. 18]. Twierdzenie to umożliwia teoretyczne rozdzielenie straty i jej ryzyka na kolejne lata trwania umowy, a to z

¹³ Metoda ta opiera się na porównaniu umieralności w grupie obserwowanej z umieralnością w grupie odniesienia (oczekiwaną umieralnością według tablic wymieralności) wyrażaną jako 100%. Uzyskany wynik porównania umieralności wskazuje, o ile procent umieralność w badanej grupie odchyła się od umieralności standardowej. Wszystkie czynniki są dzielone na debety i kredyty w zależności od tego, czy mają pozytywny, czy negatywny wpływ na umieralność. Dla każdego ubezpieczonego obliczana jest łączna suma debetów i kredytów i wynik odnoszony jest do początkowych 100% [11, s. 113].

kolei pozwala dokonać konwersji polisy [1, s. 197]. Świadczenie jako zmienna losowa zostało zdefiniowane dopiero przez de Finetti (1950 r.) i Sverdrupa (1952 r.).

9. Modele dynamiczne trwania życia

Na początku XX w. demografowie i aktuariusze dostrzegli stałą tendencję do wydłużania się trwania życia i zmiany kształtu krzywej wymieralności (coraz silniejsza koncentracja zgonów wokół dominanty i przesuwanie się jej w kierunku starszych roczników wieku (*rectangularization process*)) oraz zwiększone natężenie i jednocześnie silniejszą dyspersję zgonów osób młodych (*young mortality hump*). Zjawiska te opisali Beard (1959 r.) oraz Levinson (1959 r.). Kalkulacje aktuarialne przeprowadzane na podstawie statycznych modeli trwania życia prowadziły do przeszacowania składek w ubezpieczeniach na życie i niedoszacowania w ubezpieczeniach rentowych. Za najbardziej znaczące modele dynamiczne wykorzystywane w kalkulacjach aktuarialnych można uznać optymalne tablice wymieralności, tablice modelowe oraz metody relacyjne. Tablice optymalne (*optimal table*), zaproponowane przez Bourgeois i Pichata (1952 r.), zakładają, że wydłużanie się trwania życia ograniczone jest naturalną granicą, więc współczynniki zgonów dla grup wiekowych będą maleć w kolejnych latach kalendarzowych aż do osiągnięcia wartości „optymalnych”. Tablice modelowe (*model tables*), skonstruowane po raz pierwszy na potrzeby ONZ w 1955 r., opierają się na twierdzeniu, że wzorce umieralności są niezmiennie, niezależnie od czasu i miejsca. Znając pewne wyznaczniki trwania życia, np. oczekiwaną długość życia noworodka, można wyznaczyć cały rozkład trwania życia. Metody relacyjne (*relational methods*), zaproponowane przez Brassa (1974 r.) opierają się na logitowej transformacji funkcji dalszego trwania życia niezależnej od wieku [10, s. 22-23]. W roku 1979 Petrioli i Berti zaproponowali inną transformację funkcji dalszego trwania życia, tzw. funkcję odporności (*resistance function*). W roku 1992 L. Carter i R.D. Lee zaproponowali wykorzystanie centralnego współczynnika zgonów (traktowanego jako proces stochastyczny) do estymacji przedziałowej przyszłej umieralności (wcześniej omówione metody dotyczyły estymacji punktowej). Metoda Lee-Cartera jest obecnie najczęściej wykorzystywana w modelowaniu perspektywicznej umieralności.

10. Wnioski

Ewolucja aktuarialnych modeli trwania życia doprowadza do coraz lepszego opisywania przez nie rzeczywistej umieralności ubezpieczonych oraz prognozowania zmian w czasie wzorca umieralności. Dzięki temu zakłady ubezpieczeń w większym stopniu kontrolują swoją wypłacalność, mogą oferować coraz bardziej rozbudowane i elastyczne produkty ubezpieczeniowe, a ubezpieczeni obciążani są sprawiedliwą składką, zależną od wnoszonego przez nich ryzyka do zakładu. Za najważniejsze etapy rozwoju modeli trwania życia można uznać przejście od po-

dejsia deterministycznego do stochastycznego, od założenia jednorodności populacji do analizy czynników różnicujących umieralność, od dyskretnego do ciągłego ujęcia wieku, od modeli pojedynczego ubytku do modeli wieloopcyjnych i ostatecznie od modeli statycznych do dynamicznych [10].

Literatura

- [1] Bernstein P., *Przeciw bogom: niezwykle dzieje ryzyka*, WIG-Press, Warszawa 1997.
- [2] Błaszczyzyn B., Rolski T., *Podstawy matematyki ubezpieczeń na życie*, WNT, Warszawa 2004.
- [3] Haberman S., *Landmarks in the History of Actuarial Science (up to 1919)*, City University, „Actuarial Research Paper” 1996 nr 84.
- [4] Haberman S., Sibbett T., *History of Actuarial and Survival Model*, William Pickering, London 1995.
- [5] Hald A., *A history of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*, John Wiley and Sons, New York 1990.
- [6] Hickman J., *History of Actuarial Profession*, Encyclopedia of Actuarial Science, John Wiley and Sons, 2004.
- [7] Higgins T., *Mathematical Models of Mortality*, Workshop on Mortality Modeling and Forecasting Australia National University, 2003.
- [8] Lewin C.G., *The Creation of Actuarial Science*, „Zentralblatt für Didaktik der Mathematik” 2001, vol. 33 (2).
- [9] Outreville J., *Theory and Practice of Insurance*, Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [10] Pitacco E., *Survival Models in Actuarial Mathematics: From Halley to Longevity Risk*, 7th International Congress Insurance: Mathematics and Economics, ISFA, Lyon, June 2003.
- [11] *Risk Classification in Life Insurance*, red. J. Cummins, Kluwer, Boston 1984.
- [12] Skałba M., *Matematyka w ubezpieczeniach. Ubezpieczenia na życie*, WNT, Warszawa 1999.
- [13] Wycinka E., *Tablica Ulpiana. Zapomniane początki tablic trwania życia*, „Studia Demograficzne” 2002 nr 2.

THE EVOLUTION OF ACTUARIAL MODELS AND THEIR INFLUENCE ON LIFE INSURANCE DEVELOPMENT – RETROSPECTIVE APPROACH

Summary

Premiums and life reserves evaluation requires some assumptions concerning human life survival and the level of interest rate. These two factors are crucial for constructing adequate actuarial models. An actuarial model is a simplified mathematical view of the reality based on certain assumptions. Assumptions' adequacy plays an important role in model efficiency. The main purpose of this article is to present the evolution of actuarial models from Dodson (1755) to Lee-Carter (1992) and the influence of actuarial models development on life insurance evaluation.