

A 1924 I

78561.4
Biblioteka Wydziału Elektrotechniki
Politechnika Wrocławska
161.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

TOM IV • ZESZYT 1

KWARTALNIK



PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1955

SPIS TREŚCI

	str.
J. Kroszczyński: Badanie widm analizatorami o skończonej szerokości wstęgi	3
R. Kulikowski: Optymalne schematy zastępcze i modele liniowych układów dynamicznych	17
A. Smoliński: Synteza wzmacniaczy rezonansowych z trójobwodowymi filtrami pasmowymi o sprzężeniu transformatorowym	35
B. Konorski: Nowe twierdzenia o polu elektrostatycznym	65
Cz. Jaworski: Analiza pracy silnika trakcyjnego (Metoda analityczna obliczania mocy elektrowozu)	159

СОДЕРЖАНИЕ

И. Крощински: Исследование спектров анализаторами с конечной шириной полосы	3
Р. Куликовски: Оптимальные схемы замещения в модели линейных динамических систем	17
А. Смолинськи: Синтез резонансных усилителей с трёхконтурными полосовыми фильтрами и с трансформаторным сопряжением	35
Б. Конорски: Новые теоремы электростатического поля	65
Ч. Яворски: Анализ работы поездного электродвигателя (Аналитический метод расчёта мощности электровоза)	159

CONTENTS — SOMMAIRE

J. Kroszczyński: The examination of frequency-spectra by means of analyzers having a finite band-width	3
R. Kulikowski: Optimum equivalent networks and models of dynamic linear systems	17
A. Smoliński: Synthesis of amplifiers with triple-tuned coupled circuits	35
B. Konorski: Neue Sätze über das elektrostatische Feld	65
Cz. Jaworski: The analysis of the traction motor performance (An analytical method of motor-coach rating computation)	159

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

TOM IV · ROCZNIK 1955

KWARTALNIK

Biblioteka Wydziału Elektrycznego
Politechniki Wrocławskiej

161.

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA

R A D A R E D A K C Y J N A :

PROF. JANUSZ LECH JAKUBOWSKI, PROF. BOLESŁAW KONORSKI,
PROF. IGNACY MAŁECKI, PROF. WITOLD NOWICKI, PROF. PAWEŁ SZULKIN,
PROF. STANISŁAW SZPOR

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y :

<i>Redaktor Naczelny</i>	<i>Z-ca Redaktora Naczelnego</i>	<i>Sekretarz</i>
PROF. JANUSZ GROSZKOWSKI	PROF. PAWEŁ NOWACKI	WACŁAW ZWOLAKOWSKI

A D R E S R E D A K C J I :

Warszawa, ul. Koszykowa 75, Politechnika
Zakład Elektroniki PAN, tel. 8.32.04

S P I S T R E Ś C I

	Str.
K. Bochenek: Niektóre zagadnienia związane ze stosowaniem wektorów Hertza	247
T. Cholewicki: Metody oczkowe i węzłowe w macierzach składowych symetrycznych	449
W. Golde: Wielostopniowe wzmacniacze szerokopasmowe z charakterystyką Gaussa	215
J. Groszkowski: Okres granicznego cyklu drgania nieliniowego	269
J. Groszkowski: Cykl graniczny układów drgań o jednym wyraźnym elemencie magazynującym energię	509
J. Gzylewski: O wpływie zmian przenikalności dielektrycznej na rozkład pola elektrycznego w przepustach kondensatorowych	365
Cz. Jaworski: Analiza pracy silnika trakcyjnego (Metoda analityczna obliczania mocy elektrowozu)	159
B. Konorski: Nowe twierdzenia o polu elektrostatycznym	65
H. S. Kozłowski: Teoria optymalnych kształtów maszyn indukcyjnych	585
J. Kroszczyński: Badanie widm analizatorami o skończonej szerokości wstęgi	3
R. Kulikowski: Optymalne schematy zastępcze i modele liniowych układów dynamicznych	17
R. Kulikowski: Wyznaczanie optymalnych parametrów układów liniowych na podstawie charakterystyk czasowych	323
R. Kulikowski, J. Plebański: Optymalne charakterystyki częstotliwościowe liniowych układów dynamicznych	347
R. Kulikowski: Minimalne zniekształcenia i energia szumów w filtrach środkowoprzepustowych	425
R. Kulikowski, J. Plebański: Minimalne zniekształcenia sygnału stochastycznego w układach o małym poziomie szumów	435
J. Lenkowski: Zakres możliwości realizacji wąskopasmowego filtra o 3 obwodach sprzężonych	401
W. Nowicki: Odtłumiki	279
J. Osiowski: Analiza przebiegów napięciowych w obwodzie anodowym wzmacniacza rezonansowego klasy C	521
Cz. Rajski: Transformatorowa realizacja różnicy symetrycznej	419
S. Sławiński: Wpływ częstotliwości zasilania na sztywność i obciążalność łącza selsynowego	547

	Str.
A. Smoliński: Synteza wzmacniaczy rezonansowych z trójobwodowymi fil- trami pasmowymi o sprzężeniu transformatorowym	35
S. Szpor: Uzupełnienie teorii relaksacyjnej rozwoju pioruna — Czas przerwy między schodkami	609
P. Szulkin: Oddziaływanie zwrotne pola elektromagnetycznego na elektrony pobudzające w rezonatorze cylindrycznym w obecności pola magne- tycznego	577
Komunikaty z prac Zakładu Elektroniki IPPT PAN	379
Komunikaty z prac Zakładu Elektroniki IPPT PAN	493
Komunikaty z prac Zakładu Elektroniki IPPT PAN	621

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
К. Бохенэк: Некоторые вопросы связанные с применением векторов Герца	247
В. Гольде: Многостепенные широкополосные усилители с гауссовой ха- рактеристикой	215
Г. Гзылевски: Влияние изменений диэлектрической проницаемости на рас- пределение электрического поля в конденсаторных вводах	365
Я. Грошковски: Период предельного цикла нелинейных колебаний	269
Я. Грошковски: Предельный цикл колебательных систем с одним отчёт- ливым элементом аккумулирующим энергию	500
Б. Конорски: Новые теоремы электростатического поля	65
Г. С. Козловски: Теория оптимальных форм индукционных машин	585
Г. Кроцински: Исследование спектров анализаторами с конечной шири- ной полосы	3
Р. Куликовски: Оптимальные схемы замещения и модели линейных ди- намических систем	17
Р. Куликовски: Определение оптимальных параметров линейных систем соответствующих заданным временным характеристикам	323
Р. Куликовски и Г. Плебаньски: Оптимальные частотные характери- стики линейных систем	347
Р. Куликовски: Минимальные искажения и энергия шумов в полосовых фильтрах	425
Р. Куликовски и Г. Плебаньски: Минимальные искажения стохастиче- ского сигнала в системах с небольшим уровнем шумов	435
Я. Ленковски: Условие осуществимости узкополосового фильтра с тремя резонансными контурами	401
В. Новицки: Усилители, действие которых основано на использовании отри- цательного полного сопротивления — Усилители „О“	279
Г. Осёвски: Анализ напряжения в анодном контуре резонансного усили- теля класса С	531
Ч. Райски: Трансформаторное исполнение симметрической разницы	419
С. Славиньски: Влияние питающей частоты на жёсткость и нагружаемость сельсинной связи	547
А. Смолиньски: Синтез резонансных усилителей с трёхконтурными поло- совыми фильтрами и с трансформаторным сопряжением	35
Т. Холевицки: Контурные и узловые методы в матрицах симметрических составляющих	449
П. Шулькин: Обратное влияние электромагнитного поля в цилиндрическом резонаторе на движение вязки электронов, вызывающих колебания в присутствии сильного магнитного поля	577

	Стр.
С. Шпор: Пополнение релаксационной теории развития молнии — Междуступенчатый интервал времени	609
Ч. Яворски: Анализ работы поездного электродвигателя (Аналитической метод расчёта мощности электровоза)	159
Сообщения	379
Сообщения	493
Сообщения	621

TABLE OF CONTENTS

	Page
K. Bochenek: Some problems related to the application of Hertzian vectors	247
T. Cholewicki: Mesh and node-pair methods in matrices of symmetrical components	449
W. Golde: Wide-band multistage amplifiers with Gaussian characteristics	215
J. Groszkowski: The limit-cycle period of the nonlinear oscillation	269
J. Groszkowski: The limit cycle of systems with a single distinct energy storing element	509
J. Gzylewski: The influence of the dielectric permeability change on the electric field distribution in condenser bushings	365
Cz. Jaworski: The analysis of the traction motor performance (An analytical method of electric locomotive rating computation)	159
B. Konorski: Neue Sätze über das elektrostatische Feld	65
H. S. Kozłowski: The theory of the optimum dimensions of induction machines	585
J. Kroszczyński: The examination of frequency-spectra by means of analyzers having a finite band-width	3
R. Kulikowski: Optimum equivalent networks and models of dynamic linear systems	17
R. Kulikowski: Determination of the optimum linear network parameters based on the time characteristics	323
R. Kulikowski, J. Plebański: The optimum frequency characteristics of dynamic linear circuits	347
R. Kulikowski: Minimum disturbance and noise energy in band-pass filters	425
R. Kulikowski, J. Plebański: Minimum stochastic signal distortions in lownoise level circuit	435
J. Lenkowski: Quality factors of physically realizable narrow-band filter with three coupled circuits	401
W. Nowicki: Répéteurs dont l'action est fondée sur la mise à profit de l'impédance négative („Désaffaiblisseurs“)	279
J. Osowski: The analysis of the voltage phenomena in the anode circuit of a class C resonance amplifier	521
Cz. Rajski: A simple half-adder	419
S. Sławiński: The influence of the input frequency on the stiffness and loading capacity of a synchro transmission system	547
A. Smoliński: Synthesis of amplifiers with triple-tuned coupled circuits	35
S. Szpor: Contribution to the relaxation theory of the lightning propagation — Interval of time between two steps	609
P. Szulkin: The retroaction of the electromagnetic field in a cylindrical cavity resonator on the movement of exciting electrons in the presence of a strong magnetic field	577
Communiqués	379
Communiqués	493
Communiqués	621

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

TOM IV • ZESZYT 1

KWARTALNIK

*Biblioteka Wydziału Elektrycznego
Politechnika Wrocławska
161.*

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA

R A D A R E D A K C Y J N A

PROF. JANUSZ LECH JAKUBOWSKI, PROF. BOLESŁAW KONORSKI,
PROF. IGNACY MALECKI, PROF. WITOLD NOWICKI, PROF. PAWEŁ SZULKIN,
PROF. STANISŁAW SZPOR

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

Redaktor Naczelny

PROF. JANUSZ GROSZKOWSKI

Z-ca Redaktora Naczelnego

PROF. PAWEŁ NOWACKI

Sekretarz

WACŁAW ZWOLAKOWSKI

ADRES REDAKCJI:

Warszawa, ul. Koszykowa 75, Politechnika,
Zakład Elektroniki PAN, tel. 8.32.04

Państwowe Wydawnictwo Naukowe - Dział Czasopism
Warszawa, Krakowskie Przedmieście 79

Nakład 1163+103 egz.	Do składania 6 XII 1955
Ark. wyd. 15,1 druk 13,25	Podpisano do druku 15. IV. 1955
Papier dr. sat. 70 g V kl. 70×100/16	Druk ukończono w kwietniu
Zamówienie 872/88	Cena zł 15.— K-6-336

POZNAŃSKA DRUKARNIA NAUKOWA — POZNAŃ, FREDRY 10

621.392.1:621.317.755

J. KROSZCZYŃSKI

Badanie widm analizatorami o skończonej szerokości wstęgi

Rękopis dostarczono 20. 10. 1953

Przy pomiarach widm zasadnicze znaczenie ma problem powstającego — wskutek skończonej szerokości wstęgi analizatora — zniekształcenia wyników. Postawiono zagadnienie w postaci ogólnej, przeprowadzono dyskusję dla przypadku uproszczonego oraz wprowadzono definicję pewnego rodzaju wyidealizowanej detekcji. Po podaniu pomocniczego twierdzenia udowodniono twierdzenie o analizie, które głosi, że wynik analizy badanego przebiegu jest identyczny z widmem przebiegu będącego iloczynem odwróconej odpowiedzi impulsowej analizatora i przebiegu badanego. Podano również inne sformułowanie tego twierdzenia. Przeprowadzono dyskusję dla pewnego typu obwodu analizatora. Wyjaśniono fizyczne znaczenie przyjętego prawa detekcji oraz dopuszczalność przyjętych uproszczeń. Podano szczegółowe rozwiązanie postawionego zagadnienia dla widma impulsu prostokątnego, rozpatrując wyniki uzyskiwane przy pomiarze impulsu o stałej długości za pomocą analizatorów o różnych własnościach oraz impulsów różnej długości za pomocą jednego analizatora. Uzyskane wyniki przedstawiono na kilku wykresach, na podstawie których podano kryteria szerokości wstęgi dla różnych wymagań dokładności pomiaru.

1. WSTĘP

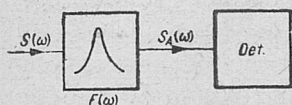
W wielu dziedzinach współczesnej radiotechniki ważną rolę odgrywają pomiary widm niektórych przebiegów. Praca niniejsza ma za zadanie określenie, z jakimi zniekształceniami (w stosunku do idealnych wyników) należy się liczyć, stosując przy pomiarach analizatory mające skończoną szerokość wstęgi.

Ze względu na to, że problem postawiony w ogólnej postaci jest dość skomplikowany zarówno co do strony obliczeniowej, jak i co do interpretacji, na wstępie zostaną rozpatrzone pewne przypadki uproszczone, które ułatwią przejście do bardziej skomplikowanych rozważań.

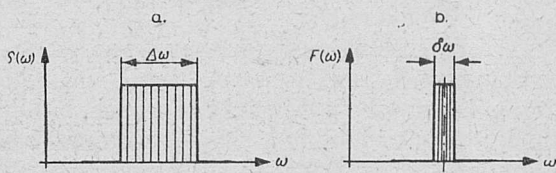
Schemat blokowy urządzeń do pomiaru widma przedstawić można następująco. Przebieg $f(t)$, o widmie $S(\omega)$ (rys. 1) zostaje wprowadzony na wejście filtru wstęgowego o charakterystyce $F(\omega)$. Na podstawie znanej zależności z teorii obwodów liniowych widmo przebiegu na wyjściu przedstawi się jako

$$S_A(\omega) = S(\omega) \cdot F(\omega). \quad (1)$$

Jeżeli będziemy przesuwac w częstotliwości charakterystykę $F(\omega)$ (prze-strajac analizator), kolejne wskazania detektora przedstawiaj funkcję, która jest wynikiem pomiaru widma $S(\omega)$; funkcję tę oznaczmy jako Φ . Idealnym analizatorem będziemy nazywali taki analizator, dla którego funkcje Φ i $S(\omega)$ są identyczne dla wszystkich częstotliwości. Łatwo wy-kazać, że idealny analizator nie daje się fizycznie zrealizować, gdyż mu-siałby mieć nieskończenie wąską wstęgę. W związku z powyższym wynik analizy widma dowolnym analizatorem (o skończonej szerokości wstęgi) nie przedstawia badanego widma wiernie.



Rys. 1. Schemat bloko-
wy analizatora



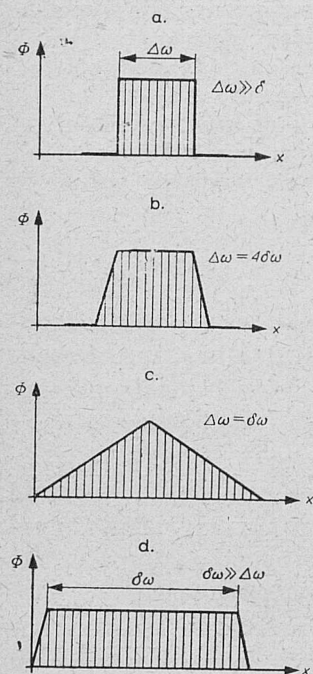
Rys. 2. Kształt mierzonego widma i charaktery-
styki analizatora w przypadku uproszczonym

Dla łatwiejszego wyjaśnienia zagadnienia można rozpatrzeć uproszczony przypadek, gdy zarówno widmo badane $S(\omega)$, jak i charaktery-
styka analizatora $F(\omega)$ mają kształt prostokątny (pomijając kwestię praktycznej możli-
wości realizacji takich charakterystyk). Założona szerokość wstęgi analizatora będzie $\delta\omega$, a sze-
rokość widma $\Delta\omega$ (rys. 2).

Aby wykreślić Φ przy różnych założeniach co do szerokości wstęgi analizatora, należy w obliczeniach założyć pewną charakterystykę detektora, o którego właściwościach dotychczas nie było mowy. Można chwilowo przyjąć, że wskazania detektora są proporcjonalne do po-wierzchni figury uzyskanej przez wzajemne pomnożenie charakterystyk 2a i 2b zgodnie ze wzorem (1). Szukana funkcja przedstawiałaby się więc jako

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \cdot F(\omega - x) d\omega, \quad (2)$$

gdzie x oznacza środkową częstotliwość anali-
zatora (rys. 2b). Sprawa charakterystyki detek-
tora poruszona będzie w sposób bardziej
szczegółowy dalej.



Rys. 3. Wpływ szeroko-
ści wstęgi analizatora
na wynik pomiaru w
przypadku uproszczo-
nym

Po dokonaniu elementarnych obliczeń uzyskuje się wykresy przedstawione na rys. 3a, b, c, d. Widać tam wyraźnie, jak przy małych szerokościach wstęgi analizatora mierzone widmo niewiele odbiega od idealnego, jak powstają zniekształcenia przy rosnącej wstędze analizatora, aby wreszcie mieć do czynienia raczej ze zdejmowaniem charakterystyki analizatora niż pomiarem widma.

Po tych wstępnych rozważaniach należy przejść do znalezienia rozwiązania ogólnego.

2. TWIERDZENIE O ANALIZIE

Weźmy pod uwagę przebieg $f(t)$ określony (w ogólnie stosowanym zapisie symbolicznym) jako

$$f(t) = f_0(t) e^{j\omega_0 t},$$

gdzie $f_0(t)$ jest funkcją zmiennej rzeczywistej t , spełniającą warunki Dirichleta, oraz warunek

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |f_0(t)| dt \neq \infty.$$

Częstotliwość ω_0 nazwiemy częstotliwością nośną przebiegu $f(t)$, a przebieg $f(t)$ — przebiegiem modulowanym.

Z przebiegami tego typu spotykamy się często w zagadnieniach analizy widmowej i takie właśnie przebiegi będą przedmiotem dalszych rozważań. Ażeby rozważania te możliwie uogólnić, na wstępie zostanie rozpatrzona pewna prosta zależność z teorii przekształcenia Fouriera. Zależność ta, zwana niekiedy *twierdzeniem o modulacji*, pozwoli na zastąpienie w rozważaniach funkcji

$$f(t) = f_0(t) e^{j\omega_0 t}$$

funkcją $f_0(t)$, co uprości dalsze rozważania, nie ograniczając jednak zakresu ich stosowalności.

Niech będzie dany przebieg $f_0(t)$ spełniający wyżej podane warunki. Z teorii całki Fouriera wiemy, że przebieg $f_0(t)$ i jego widmo związane są wzorem

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3)$$

Wzór (3) nazywamy *przekształceniem Fouriera* i notujemy symbolicznie

$$S(\omega) = \mathcal{F}\{f_0(t)\}. \quad (4)$$

Twierdzenie o modulacji mówi, że jeśli przebieg $f(t)$ (rys. 4) zostanie zmodulowany częstotliwością ω_0 , to widmo nowego przebiegu będzie miało kształt identyczny jak poprzednio, przesunie się jednak na skali częstotliwości o wielkość ω_0 , a więc zamiast $S(\omega)$ będzie (rys. 5)

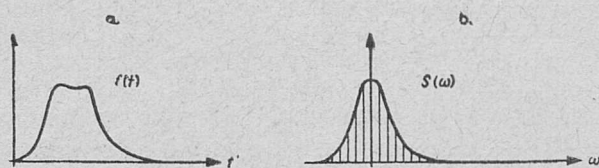
$$S'(\omega) = S(\omega - \omega_0). \quad (5)$$

Dowód jest bardzo prosty, gdyż obliczając $S'(\omega)$ z definicji otrzymuje się

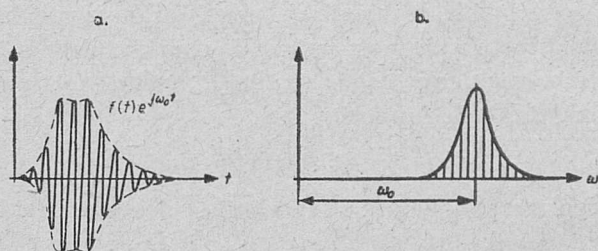
$$\begin{aligned} S'(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t) e^{j\omega_0 t}] e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = \\ &= \dot{S}(\omega - \omega_0), \end{aligned} \quad (6)$$

czego należało dowieść.

Widzimy, iż rozważając zamiast $f(t)$ przebieg $f_0(t)$ nie traci się nic na ogólności, gdyż znając widmo przebiegu $f_0(t)$ drogą prostego przesunięcia można uzyskać w razie potrzeby widmo przebiegu zmodulowanego dowolną częstotliwością [9].



Rys. 4. Przebieg $f(t)$ i jego widmo



Rys. 5. Przebieg $f(t)$ i jego widmo po zmodulowaniu

Należy teraz ponownie zwrócić uwagę na wzór (2). Mimo, iż interpretowano go początkowo w sposób bardzo prosty, wzór ten jest zupełnie ogólny; bezpośrednio jednak jego zastosowanie natrafia na poważne przeszkody. Jedną z nich są trudności obliczeniowe. Dla przykładu można rozpatrzeć najprostszy przebieg, a mianowicie impuls prostokątny, oraz najprostszą charakterystykę — filtr idealny o charakterystyce prostokątnej; całka (2) nie daje się wówczas wyrazić przez funkcje elementarne. Drugą niewygodną właściwością wzoru (2) jest to, że nie prowadzi on do żadnej prostej interpretacji, za pomocą której można by na podstawie posiadanych warunków wyciągnąć jakościowe wnioski o przebiegu zjawiska. Tymczasem w technice dąży się zawsze do uzyskania takich wzorów, które nie

tylko umożliwiając ilościowe obliczenie potrzebnych danych, ale także ułatwiają dyskusję charakteru zjawiska.

Poniżej zostaną przedstawione rozważania, w wyniku których wspomniane dwie trudności mogą być w znacznej mierze usunięte.

W teorii przekształcenia Fouriera znana jest pewna zależność, która będzie wykorzystana do przekształcenia wzoru (2). Jest to mianowicie niżej podane twierdzenie.

Twierdzenie

Jeżeli dwie funkcje $G_1(t)$ i $G_2(t)$ zmiennej rzeczywistej t są transformalne według Fouriera oraz jeśli

$$\mathcal{F}\{G_1(t)\} = S_1(\omega),$$

$$\mathcal{F}\{G_2(t)\} = S_2(\omega),$$

to przekształcenie fourierowskie funkcji $G(t)$, która jest iloczynem funkcji $G_1(t)$ i $G_2(t)$, wyraża się wzorem

$$\mathcal{F}\{G(t)\} = \mathcal{F}\{G_1(t) \cdot G_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\omega) \cdot S_2(x - \omega) d\omega. \quad (7)$$

Dowód

Z definicji przekształcenia Fouriera mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{G_1 G_2\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(t) G_2(t) e^{-jxt} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} G_2(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] e^{-jxt} dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Ponieważ obie funkcje posiadają przekształcenie Fouriera, można zamienić kolejność całkowania i napisać

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{G_1 G_2\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} G_2(t) e^{-j(x-\omega)t} dt \right] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\omega) S_2(x - \omega) d\omega, \end{aligned} \quad (9)$$

gdyz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_2(t) e^{-j(x-\omega)t} dt = S_2(x - \omega). \quad (10)$$

W powyższym dowodzie wprowadzono bez wyjaśnienia sensu fizycznego zmienną x . Znaczenie tej wielkości stanie się jasne, jeśli porównać wzór (7) ze wzorem (2). Wzory te są prawie identyczne z wyjątkiem znaku przy x oraz ω w nawiasie.

Udowodnione twierdzenie można więc wykorzystać do fizycznej interpretacji wzoru (2). Biorąc mianowicie pod uwagę, że charakterystykę analizatora $F(\omega)$ można uważać za widmo odpowiedzi impulsowej¹ analizatora, otrzymamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie o analizie

Wynik analizy widma $S(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ za pomocą analizatora o charakterystyce $F(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}$ można wyrazić wzorem

$$\Phi(x) = 2\pi \mathcal{F}\{f(t) \cdot g(-t)\}, \quad (11)$$

gdzie $g(t)$ jest odpowiedzią impulsową analizatora.

Istotnie, ponieważ na mocy definicji przekształcenia Fouriera mamy

$$F(-\omega) = \mathcal{F}\{g(-t)\}, \quad (12)$$

przeto z porównania wzorów (2) i (7) wynika od razu słuszność twierdzenia.

Twierdzenie powyższe można jeszcze sformułować w nieco inny sposób, nadając mu postać, która czasem jest wygodniejsza do interpretacji.

Mianowicie jeżeli pewien przebieg $f(t)$ ma widmo $S(\omega)$, to analizując wymienione widmo analizatorem o charakterystyce $F(\omega)$ otrzyma się w wyniku widmo Φ , identyczne z widmem przebiegu $f(t)$ pomnożonego przez $g(-t)$, przy czym $g(t)$ jest odpowiedzią impulsową analizatora.

W powyższym sformułowaniu pominięto czynnik 2π , który nie odgrywa większej roli w problemach analizy widma, gdzie jest istotny jedynie kształt widma, a nie jego bezwzględna wartość.

Wyprowadzona wyżej zależność dobrze nadaje się do interpretacji oraz ułatwia obliczenia, jest przy tym zupełnie ogólna². Nasuwa się tu jednak pewne pytanie, czemu mianowicie w rzeczywistych układach odpowiada detekcja zgodnie z przyjętym na podstawie wzoru (2) prawem. Zanim jednak można będzie odpowiedzieć na to pytanie, zresztą bardzo istotne, rozpatrzmy przykład zastosowania powyższej metody do konkretnego układu.

Można na przykład przyjąć, że analizator zawiera jako filtr rezonator, którego schemat zastępczy można przedstawić w postaci obwodu

¹ Odpowiedzią impulsową czwórnika nazywamy przebieg napięcia na wyjściu czwórnika, wywołany przyłożeniem na jego wejście sygnału w postaci funkcji impulsowej Diraca $\delta(t)$.

² Interpretacja spłotu jako wyniku analizy nasuwa ciekawe analogie również i w innych zagadnieniach radiotechniki, między innymi w teorii informacji, w związku z pewnymi własnościami funkcji korelacyjnych.

RLC. Jak wiadomo, odpowiedź impulsowa takiego obwodu ma postać

$$g(t) = Ce^{-at} \sin \omega_0 t, \quad (13)$$

gdzie $a = \frac{R}{2L}$, ω_0 jest pulsacją drgań własnych obwodu, a C jest pewną stałą.

Zgodnie z uwagami umieszczonymi na początku tej części pracy, eliminujemy (dla uogólnienia rozważań) wyraz $\sin \omega_0 t$, przesuwając charakterystykę rezonatora do częstotliwości zerowej. Ze względu na to, że interesujący jest tylko kształt widma, a nie jego bezwzględna wartość, pomijamy również współczynnik C . Ostatecznie będzie więc

$$g_0(t) = e^{-at}, \quad (14)$$

a w związku z tym, zgodnie ze wzorem (7) i następnymi, widmo funkcji $f(t)$, zmierzone analizatorem o skończonej szerokości wstęgi, przedstawi się jako widmo przebiegu

$$f_a(t) = e^{at} f_0(t). \quad (15)$$

Zależność (13) można również wyprowadzić posługując się bardziej konwencjonalnymi metodami. Ze względu na to, że operowanie odpowiedzią impulsową może być stosunkowo mniej znane, będzie przytoczone również i to drugie wyprowadzenie. Dla pojedynczego obwodu rezonansowego krzywa selektywności wyraża się znanym wzorem

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + 4Q^2 \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right)^2}}, \quad (16)$$

gdzie $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$ jest dobrocią obwodu.

Wprowadzając nową zmienną $\omega' = \omega - \omega_0$ (co odpowiada przesunięciu krzywej rezonansu do częstotliwości zerowej) otrzymamy

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + 4Q^2 \left(\frac{\omega'}{\omega_0} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4L^2}{R^2} \omega'^2}} = \frac{\frac{R}{2L}}{\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega'^2}}. \quad (17)$$

Ponieważ widmo przebiegu e^{-at} ma postać $\frac{1}{a + j\omega}$ a jego moduł — postać $\frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$, to porównując ten wzór ze wzorem (17) można spostrzec, że

$$a = \frac{R}{2L} = \frac{\omega_0 R}{\omega_0 2L} = \frac{\omega_0}{2Q}. \quad (18)$$

Wprowadzając szerokość wstęgi na poziomie $\frac{1}{\sqrt{2}}$ napiszemy

$$\alpha = \frac{B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{2}. \quad (19)$$

Podane wyżej rozważania, mimo że są ściśle i zupełnie ogólne, są jednak w pewnym sensie dość formalne. Aby usunąć wątpliwości, które wskutek tego mogą powstać, rozpatrzmy omawiane zagadnienie w inny jeszcze sposób, bardziej rzucający światło na fizyczną stronę zagadnienia.

W tym miejscu wydaje się wskazane przedstawienie odmiennego rozwiązania, zaczerpniętego z książki A. A. Charkiewicza [3]. Część pracy niniejszej od wzoru (20) do (24) jest zaczerpnięta ze wspomnianej książki (str. 135—139) z zachowaniem użytych tam oznaczeń.

Weźmy rezonator (elektryczny lub mechaniczny), do którego przyłożono działanie o przebiegu $f(t)$. Wówczas, jak wiadomo, można napisać równanie

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + sx = f(t), \quad (20)$$

przy czym odpowiedź impulsowa będzie

$$g(t) = \frac{1}{m\omega_k} e^{-at} \sin \omega_k t. \quad (21)$$

Rozwiązaniem równania (20) jest

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{m\omega_k} \int_0^t e^{-a(t-u)} \sin \omega_k(t-u) f(u) du = \\ &= \frac{e^{-at}}{m\omega_k} \left[\sin \omega_k t \int_0^t e^{au} f(u) \cos \omega_k u du - \cos \omega_k t \int_0^t e^{au} f(u) \sin \omega_k u du \right]. \quad (22) \end{aligned}$$

Dla obwiedni drgania po czasie $t > \tau$ (gdzie τ oznacza moment zakończenia działania impulsu na rezonator) istnieje zależność

$$\xi = \frac{e^{-at}}{m\omega_k} \left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{au} f(u) \cos \omega_k u du \right)^2 + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{au} f(u) \sin \omega_k u du \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (23)$$

Z powyższego wzoru wynika, że przy pomiarze widma funkcji $f(t)$ za pomocą rezonatora o właściwościach wyrażonych równaniem (20), jeżeli detektor wskazuje wartości proporcjonalne do ξ , to otrzymane w wy-

niku pomiaru widmo będzie identyczne z widmem amplitudy funkcji zmodyfikowanej, a mianowicie

$$f_a(t) = e^{at} \cdot f(t). \quad (24)$$

Jak widać, posługując się zupełnie inną metodą, dochodzimy do wzoru identycznego jak poprzednio (15). Przy tej okazji został wyjaśniony problem detekcji; okazało się, że biorąc widmo amplitudy funkcji określonej wzorami (15) lub (24), w wyniku otrzymuje się krzywe, które odpowiadają wynikom pomiaru za pomocą detektora szczytowego, a więc za pomocą najczęściej stosowanego układu³.

Stosując przekształcenie Fouriera do funkcji (24), otrzymamy

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (25)$$

skąd zgodnie z (3)

$$\Phi = S(\omega + ja), \quad (26)$$

widmo zaś amplitudy przedstawi się wówczas jako

$$|\Phi| = |S(\omega + ja)|. \quad (27)$$

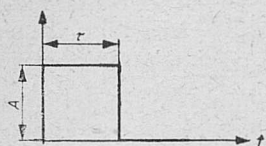
Wyrażenia podobne do powyższego, to znaczy takie, w których posługujemy się częstotliwością zespoloną, nasuwają ciekawe uwagi związane z teorią obwodów liniowych dzięki znanemu pokrewieństwu przekształceń Fouriera i Laplace'a, ich rozpatrywanie wykracza jednak poza zamierzenia niniejszej pracy. Do rozpatrywania pewnych zagadnień praktycznych wyprowadzone powyżej związki są zupełnie wystarczające. Należy jeszcze tylko wyjaśnić pewną kwestię, mogącą budzić ewentualne zastrzeżenia. W przedstawionych rozważaniach z reguły jest mowa o pojedynczym impulsie; z drugiej strony mówi się o pomiarze drogą przestrajania analizatora. Pozornie, z czysto teoretycznego punktu widzenia, zachodzi tu pewna sprzeczność. Sprzeczność ta znikłaby natychmiast, gdyby wprowadzić pojęcie analizy równoczesnej [3], przy czym reszta rozważań pozostałaby bez zmian. W praktyce jednak w przeważającej większości przypadków występują impulsy bardzo krótkie w stosunku do okresu powtarzania, a ponadto ma się do czynienia z powolnym przestrajaniem; w tej sytuacji istnieją praktycznie te same warunki, co dla analizy równoczesnej. Ponieważ sprawa ta jest stosunkowo oczywista, autor

³ Nie należy jednak wysnuwać na tej podstawie błędnego wniosku, że detekcja szczytowa i detekcja według prawa określonego wzorem całkowym (2) są całkowicie identyczne. Całki typu (2) odpowiadają raczej notowaniu wartości przebiegu w pewnym określonym momencie; fizycznie odpowiada to na przykład pewnym przypadkom pomiarów, dokonywanych za pomocą synchronoskopu. Łatwo się zorientować, kiedy wyniki tej metody są całkowicie zgodne z detekcją szczytową, a kiedy zgodność ta nie wystąpi.

zdecydował się na przyjęcie terminologii obowiązującej w dziedzinie, dla potrzeb której opracowany jest niniejszy artykuł.

3. POMIAR WIDMA IMPULSU PROSTOKĄTNEGO

Opisana wyżej metoda zostanie teraz wykorzystana do rozpatrzenia wpływu szerokości wstęgi analizatora na wyniki pomiaru widma najczęściej w technice impulsowej występującego przebiegu, a mianowicie impulsu prostokątnego.



Rys. 6. Impuls prostokątny

Niech będzie długość impulsu τ i amplituda A (rys. 6). Jak wiadomo [7], widmo takiego impulsu wyraża się wzorem

$$S(\omega) = \frac{A}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau}). \quad (28)$$

Zgodnie ze wzorem (27) będzie

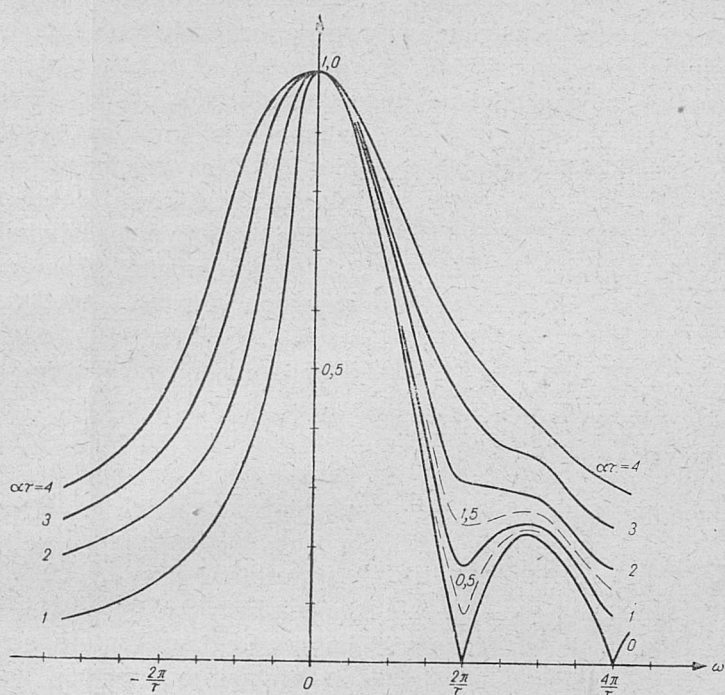
$$\Phi = S(\omega + ja) = \frac{A}{j(\omega + ja)} \left[1 - e^{-j(\omega + ja)\tau} \right] = \frac{A}{-a + j\omega} \left[1 - e^{(a - j\omega)\tau} \right]. \quad (29)$$

Moduł tego wyrażenia obliczymy jako

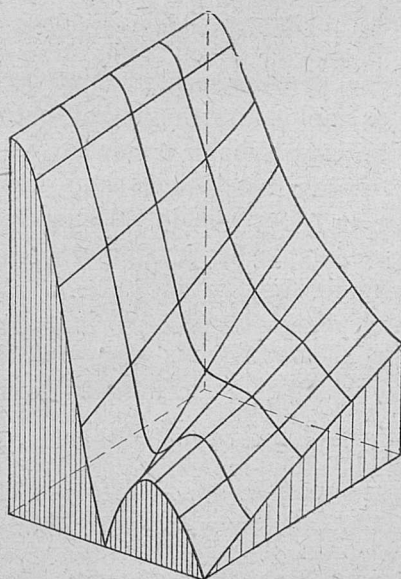
$$\begin{aligned} |\Phi| &= \frac{A}{|-a + j\omega|} \cdot \left| 1 - e^{(a - j\omega)\tau} \right| = \frac{A}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \cdot \left| 1 - e^{a\tau} \cos \omega\tau + je^{a\tau} \sin \omega\tau \right| = \\ &= \frac{A}{\sqrt{\omega^2 + a^2}} \sqrt{(1 - e^{a\tau} \cos \omega\tau)^2 + (e^{a\tau} \sin \omega\tau)^2} = \\ &= \frac{A}{\sqrt{\omega^2 + a^2}} \sqrt{1 - 2e^{a\tau} \cos \omega\tau + e^{2a\tau}}. \end{aligned} \quad (30)$$

Ostatnią zależność ilustrują załączone wykresy. Z prawej strony rys. 7 przedstawiono szereg krzywych dla różnych wartości parametru a przy stałej długości impulsu; w celu łatwiejszego porównania krzywe są sprowadzone do wspólnej wartości przy $\omega = 0$. W lewej części rysunku podano krzywe rezonansu analizatora dla odpowiednich wartości a^4 . Na rysunku 8 wzór (30) przedstawiono również jako funkcję dwóch zmiennych; widać tam wyraźnie, jak w miarę wzrostu szerokości wstęgi analizatora zacieśniają się szczegóły widma. Na rys. 9 przedstawiono krzywe otrzymane dla analizatora o stałych właściwościach przy różnych długościach impulsu. Posiadając tego rodzaju wykresy można z łatwością rozstrzygać wiele zagadnień praktycznych, a więc na przykład ustalić maksymalną szerokość wstęgi analizatora, dopuszczalną z punktu widzenia wymagań dokładności pomiaru.

⁴ Nie należy zapominać, że a mierzone jest w tych samych jednostkach co ω .

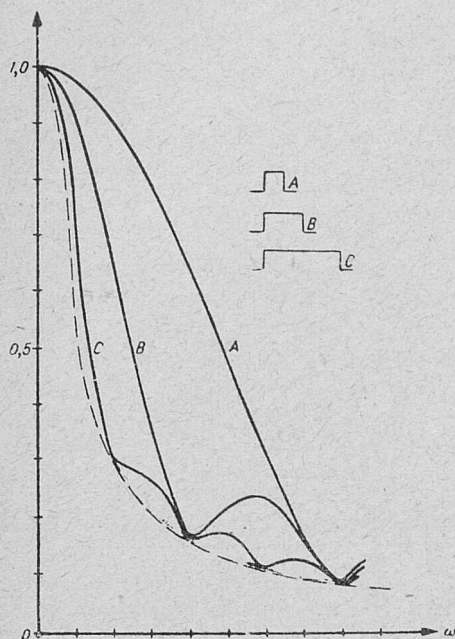


Rys. 7. Krzywe uniwersalne dla pomiaru widma impulsu prostokątnego



Rys. 8. Wykres przestrzenny wzoru (30)

W tym miejscu należy zwrócić uwagę na możliwość odmiennego traktowania tego rodzaju zagadnień, wynikającą z twierdzenia o analizie. Z poprzednich rozważań widać, że skończona szerokość wstęgi analizatora spowoduje zniekształcenia tego rodzaju, jak gdyby obserwowano



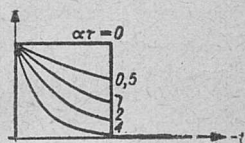
Rys. 9. Analiza impulsów prostokątnych o różnej długości

widmo nie impulsu prostokątnego (rys. 6), lecz zniekształconego (rys. 10). Za kryterium dobroci analizy można zatem uznać wielkość ΔA . Dla porównania z wykresem 7 przedstawiono kształt zniekształconych impulsów (rys. 10), odpowiadających różnym wartościom α . Wybór wartości, która zostanie uznana za zadowalającą, zależy oczywiście od konkretnego przypadku, jednak na podstawie rys. 7 i 10 stwierdzić można, że stosunkowo dobre wyniki uzyskuje się przy $\alpha\tau < 0,5$. Przyjmując na przykład $\alpha\tau = 0,314$, dla szerokości wstęgi analizatora otrzymałoby się kryterium w postaci warunku

$$B_1 \text{ (Hz)} \leq \frac{1}{10\tau}. \quad (31)$$

Jak widać z wykresów, przy badaniach, w których właściwości widma w okolicach minimów są mniej interesującymi, natomiast zależy głównie na stwierdzeniu szerokości widma w okolicach połowy jego wysokości, można ostatecznie stosować wartości $\alpha\tau$ dochodzące do 2 bez popełniania znacznych błędów. Dla takich pomiarów występowałoby więc łatwiejsze do spełnienia kryterium

$$B_2 \text{ (Hz)} \leq \frac{2}{3\tau}. \quad (32)$$



Rys. 10. Równoważne impulsy przy różnych szerokościach wstęgi analizatora

Wniosek ten jest dość interesujący i ma duże znaczenie w pewnych przypadkach praktycznych.

Na zakończenie pragnąłbym wyrazić swą wdzięczność prof. drowi J. Groszkowskiemu za cenne uwagi dotyczące opracowania niniejszej

pracy, przejrzenie rękopisu oraz zachętę do opublikowania. Dziękuję również ob. P. Ostrowskiemu za pomoc przy wykonywaniu części obliczeń do wykresów.

WYKAZ LITERATURY

1. Bubb F. W. — A network theorem and its applications — PIRE, June 1951.
2. Campbell G. A., Foster R. M. — Fourier integrals for practical applications — Van Nostrand, New York 1948.
3. Charkiewicz A. A. — Spekttry i analiz — GITTL, Moskwa 1952.
4. Cherry C. — Pulses and transients in communications circuits — Chapman & Hall, London 1949.
5. Barlow H. M., Cullen A. L. — Microwave measurements — lub tłumaczenie na język rosyjski — Izmierienja na swierchwysokich czastotach — Sow. Radio, Moskwa 1952.
6. Korolew F. A. — Spektroskopja wysokiej razrieszajuszczej siły — GITTL, Moskwa 1953.
7. Kroszczyński J. — Prosta metoda obliczania widm przebiegów impulsowych — Prace PIT nr 10.
8. Montgomery C. G. — Technique of microwave measurements — Mc. Graw-Hill, London 1947.
9. Shaw I. J. — Fourier analysis and negative frequencies — Wireless engineer, January 1952.

Я. КРОЩИНСКИ

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРОВ АНАЛИЗАТОРАМИ С КОНЕЧНОЙ ШИРИНОЙ ПОЛОСЫ

Резюме

При измерении спектров основное значение имеет вопрос искажения результатов вследствие конечной ширины полосы анализатора.

Вопрос этот поставлен нами в общем виде: с определением основных свойств анализирующей системы введено определение некоторого рода идеального детектора и благодаря этому найдено выражение, определяющее функцию, являющуюся результатом анализа (форм. 2).

Проведено обсуждение упрощенного случая. После выведения вспомогательной теоремы доказана „теорема об анализе“, гласящая, что результат анализа спектра исследуемого процесса тождествен со спектром произведения обратного импульсного ответа анализатора на исследуемый процесс. Приведена также другая формулировка этой теоремы. Проведено обсуждение для конкретной характеристики анализатора (форм 16).

Сравнивая на примере полученные результаты с результатами полученными при помощи иного метода, изъяснено физическое значение принятого права детектирования, а также допустимость принятых упрощений.

Приведено подробное решение поставленной проблемы для случая анализа спектра прямоугольного импульса. Рассмотрены результаты получаемые при измерении импульса с постоянной длиной при помощи анализаторов с различными ши-

ринами полосы а также измерения импульсов с разными длинами при помощи одного и того же анализатора. Полученные результаты представлены на нескольких диаграммах, на основании которых поданы критерии наибольшей допустимой ширины полосы для различных требуемых степеней точности измерения.

J. KROSZCZYŃSKI

THE EXAMINATION OF FREQUENCY-SPECTRA BY MEANS
OF ANALYZERS HAVING A FINITE BAND-WIDTH

Summary

In frequency spectrum measurements the problem of the deformations of results due to finite band-width of the analyser is of great importance. This problem is stated in its general form and the fundamental properties of the analysing system are described, the definition of some ideal detector is given, so that the expression determining the function resulting from the analysis (Eq. (2)) could be given. A simplified case is discussed. After giving an auxiliary theorem, the „analysis-theorem“ is proved, which states that the result of the frequency-analysis of an examined transient is identical with the frequency-spectrum of the product of the reversed pulse response of the analyzer and examined transient. There is also another formulation of this theorem. The characteristic of an analyzer is discussed (Eq. 16). By comparing the results of this example with those obtained by other means the physical meaning of the adopted detection-law and the admissibility of adopted simplifications are explained. The detailed solution of the stated problem for analysis of the spectrum of a rectangular pulse has been given. The results of measurements of a pulse of constant length by means of analyzers with various band-widths as well as of the results of measurements of pulses with different lengths by means of one analyzer have been examined. The diagrams presenting the obtained results show the criterions of maximum band-width for different requirements of accuracy.

Optymalne schematy zastępcze i modele liniowych układów dynamicznych

Rękopis dostarczono 13. 3. 1954

W pracy niniejszej zostało wprowadzone pojęcie optymalnego schematu zastępczego i modelu liniowego układu dynamicznego, to jest układu, którego charakterystyki względem „ ω ” lub „ t ” znajdują się w najmniejszej odległości, w metryce odpowiedniej przestrzeni funkcyjnej, od charakterystyki danej, na przykład określonej doświadczalnie. Jako przykłady rozpatruje się przybliżenia w przestrzeni $C(0,T)$; $L^2(0,T)$; $L^2(0,\infty)$. Wybór odpowiedniej metryki uzależniono od wybranego kryterium zniekształceń w rozpatrywanych układach dynamicznych. Wnioski teoretyczne zilustrowano konkretnymi przykładami zaczerpniętymi z radiotechniki i teorii regulacji automatycznej.

1. WSTĘP

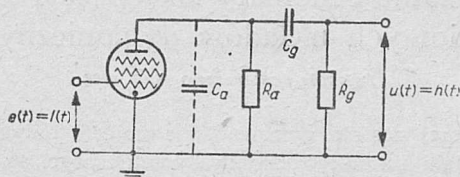
Przeprowadzając analizę procesów w realnych układach dynamicznych zmuszeni jesteśmy do uproszczenia aparatu matematycznego pomijając wpływ wielu czynników drugorzędnych, to jest upraszczać ten układ. Na przykład często zakłada się, że układ składa się z elementów skupionych, czyli nie zostają uwzględnione jego wymiary geometryczne. Często też zostaje pominięty wpływ tak zwanych parametrów szkodliwych, jak na przykład: pojemności i indukcyjności rozproszone, kondensatory sprzęgające itd. Ścisłej mówiąc, pomija się pewne parametry nie dlatego, że są one małe lub duże w porównaniu z innymi parametrami (co byłoby pozbawione sensu, gdyż trudno porównywać takie wielkości, jak na przykład pojemność i oporność lub indukcyjność, które mają różne wymiary), lecz dlatego, że pewne człony równania różniczkowego układu, zależne od rozpatrywanych parametrów, mało wpływają na rozwiązanie tego równania. Analizując procesy we wzmacniaczu, którego schemat przedstawiono na rys. 1 i który posiada funkcję przenoszenia wyrażoną wzorem

$$K(p) \approx SR_a \cdot \frac{p}{\tau_2 p^2 + \left(1 + \frac{\tau_2}{\tau_1}\right)p + \frac{1}{\tau_1}}, \quad (1)$$

gdzie

$$p = i\omega, \quad \tau_1 = R_g C_g, \quad \tau_2 = R_a C_a, \quad (C_a \ll C_g),$$

S jest nachyleniem charakterystyki lampy, pomija się zwykle przy małych częstotliwościach wpływ pojemności C_a , tj. odrzuca się człon $\tau_2 p^2$, który jest mniejszy od pozostałych członów; przy wielkich zaś częstotliwościach odrzuca się człon $\frac{1}{\tau_1}$.

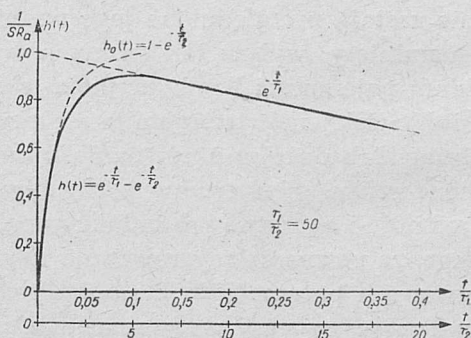


Rys. 1. Schemat wzmacniacza impulsów

Analogicznie przy rozpatrywaniu charakterystyk chwilowych tego wzmacniacza

$$\frac{1}{SR_a} h(t) = e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}}, \quad (2)$$

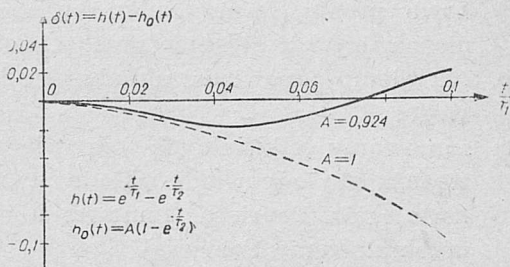
przedstawionych na rys. 2 przy $\frac{\tau_1}{\tau_2} = 50$, dla dostatecznie dużych wartości czasu pomija się człon $e^{-\frac{t}{\tau_2}}$. Przy rozpatrywaniu zaś zniekształceń czoła impulsu, to jest dla niewielkich wartości czasu, przyjmuje się $e^{-\frac{t}{\tau_2}} = 1$.



Rys. 2. Funkcja przejściowa wzmacniacza impulsów $h(t)$ oraz funkcja przejściowa układu zastępczego $h_0(t)$

Nie zatrzymując się na pozornej tylko różnicy między tymi dwiema drogami idealizacji (tj. w zakresie częstotliwości i czasu), zwróćmy uwagę na

błąd $\delta(t) = h(t) - h_0(t)$ popełniany przy przyjęciu charakterystyki zastępczej $h_0(t)$, na przykład $h_0(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}$. Błąd ten szybko narasta ze wzrostem argumentu (rys. 3). Zatem analiza procesów we wzmacniaczach, opierająca się na uproszczonej funkcji przejściowej $h_0(t)$, prowadzi do znacznych błędów, które w przypadku układów wielostopniowych (np. przy badaniu czoła impulsów) mogą osiągać niedopuszczalne wartości. Jasne, że absolutną wartość tego błędu można by znacznie zmniejszyć, gdyby charakterystyka $h_0(t)$ równomiernie aproksymowała charakterystykę danego układu $h(t)$. W przypadku rozpatrywanego przez nas układu można by to uczynić „ściskając” krzywą $h_0(t)$ wzdłuż osi pionowej, czyli mnożąc $h_0(t)$ przez współczynnik $A < 1$, co jest oczywiście związane z koniecznością wyboru odpowiednich parametrów układu zastępczego, jak to w dalszym ciągu będzie dokładnie wyjaśnione.



Rys. 3. Wykres błędu $\delta(t) = h(t) - h_0(t)$ dla układów zastępczych

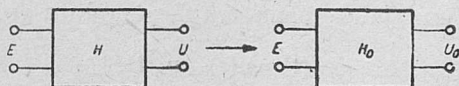
Aby dostatecznie jasno i ściśle rozważyć wysunięte tu zagadnienie oraz rozpatrzyć konkretne przykłady, wydaje się celowe wprowadzenie pewnych prostych pojęć analizy funkcjonalnej i teorii aproksymacji.

Aby dostatecznie jasno i ściśle rozważyć wysunięte tu zagadnienie oraz rozpatrzyć konkretne przykłady, wydaje się celowe wprowadzenie pewnych prostych pojęć analizy funkcjonalnej i teorii aproksymacji.

2. OKREŚLENIE OPTYMALNEGO UKŁADU ZASTĘPCZEGO

Rozpatrzmy układ przedstawiony na rys. 4. Układ ten nazywamy układem liniowym, jeśli przy sygnale wejściowym

$$e(t) = a_1 e_1(t) + a_2 e_2(t) + \dots + a_n e_n(t) \quad (3)$$



Rys. 4. Układ liniowy i odpowiadający mu układ zastępczy

odpowiedź układu wyniesie:

$$u(t) = a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t) + \dots + a_n u_n(t), \quad (4)$$

gdzie $u_1(t)$, $u_2(t)$... $u_n(t)$ są to odpowiedzi układu na sygnały $e_1(t)$, $e_2(t)$... $e_n(t)$.

Metody określenia odpowiedzi układu liniowego $u(t)$ na sygnał wejściowy $e(t)$ polegają na [5]:

- rozłożeniu sygnału $e(t)$ na sumę funkcji elementarnych, to jest funkcji liniowo niezależnych, na które odpowiedź układu wyraża się stosunkowo prosto (w przypadku sygnałów nieokresowych rozłożenie to można uzyskać stosując przekształcenie Fouriera);
- określeniu odpowiedzi układu na oddzielne składowe sygnału wejściowego;
- sumowaniu oddzielnych odpowiedzi (w przypadku widma, jakim wyraża się odpowiedź układu w razie rozłożenia za pomocą przekształcenia Fouriera, sumowanie można uzyskać stosując odwrotne przekształcenie Fouriera).

Odpowiedź układu na funkcję jednostkową nazwiemy funkcją przejściową tego układu.

Zarówno zespół sygnałów wejściowych E , jak i wyjściowych U tworzą pewną przestrzeń liniową o skończonej lub nieskończonej ilości wymiarów. Współrzędne tej przestrzeni określa zbiór sygnałów elementarnych. Sygnał e może być zatem przedstawiony jako punkt lub wektor w przestrzeni funkcyjnej. Zupełnie podobnie klasa sygnałów wyjściowych układu zastępczego U_0 tworzy pewną przestrzeń, która ogólnie biorąc jest podprzestrzenią U . Na podstawie tych wstępnych uwag zagadnienie, które staje przed nami, może być sformułowane następująco.

W pewnym przedziale czasowym T , w przestrzeni dowolnej ilości wymiarów, zadane są dwie funkcje $u(t)$ i $u_0(t, A_1, A_2 \dots A_n)$ zmiennej t , przy czym u_0 zależy jeszcze od pewnej ilości parametrów $A_1 \dots A_n$. Parametry te trzeba określić w ten sposób, by odchylenie w T funkcji $u_0(t, A \dots A_n)$ od $u(t)$ było minimalne. Przy tym oczywiście należy zdefiniować, co się rozumie pod odchyleniem u_0 od u lub tak zwaną odległością między tymi funkcjami. Jeśli na przykład ograniczymy się do rozpatrywania funkcji ciągłych w T , a w charakterze kryterium, na zasadzie którego będziemy oceniać tę odległość, wprowadzimy tak zwaną normę, którą określimy jako górną granicę modułu różnicy.

$$\delta(t) = u(t) - u_0(t),$$

to jest

$$\|\delta(t)\| = \max_{t \in T} |\delta(t)|, \quad (5)$$

to otrzymamy pewną normowaną przestrzeń liniową. Przestrzeń tę zgodnie z przyjętą symboliką oznaczymy literą C . Inną przestrzeń otrzymamy, jeśli ograniczymy się do klasy funkcji mierzalnych, całkowalnych z kwadratem, a normę określimy wzorem

$$\|\delta(t)\| = \sqrt{\int_{[T]} |\delta(t)|^2 dt}, \quad (6)$$

Przestrzeń taką oznacza się symbolem L^2 . Krótko mówiąc wprowadzenie normy, którą utożsamiamy z odległością między u i u_0 pozwala nam w otrzymanej w ten sposób przestrzeni wykonywać operacje metryczne, podobnie jak wprowadzenie pojęcia absolutnej wartości liczby zespolonej w analizie pozwala na mierzenie odległości.

Powstaje pytanie, czy istnieje jednoznaczna funkcja u_0 znajdująca się w najmniejszej odległości od u w metryce przestrzeni C i L^2 . Twierdzącą odpowiedź na to pytanie można znaleźć w pracach poświęconych teorii aproksymacji [1].

Definicja

Funkcję przejściową układu zastępczego, którą określamy z warunków optymalnego przybliżenia u w metrze określonej przestrzeni, nazwiemy optymalną funkcją przenoszenia układu zastępczego, a sam układ, który odpowiada tej funkcji przenoszenia — optymalnym układem zastępczym.

W ogólnym przypadku struktura i wartości elementów układu H mogą być nie znane, chociaż charakterystyki tego układu można określić na przykład eksperymentalnie. Niemniej jednak układ zastępczy można znaleźć w drodze syntezy na podstawie znalezionej w rezultacie aproksymacji funkcji przejściowej h_0 . Mając jednak na względzie to, że otrzymany w ten sposób układ H_0 może znacznie różnić się od rzeczywistego układu H , będziemy go nazywać modelem układu H . Podobnie i w przypadku układów liniowych z rozłożonymi stałymi typu *continuum* [3] (na przykład linia długa lub układ regulatora temperatury ze znaczną pojemnością cieplną itp.), które opisuje się układem równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, układ zastępczy zbudowany z elementów skupionych będzie, rzecz jasna, modelem tego *continuum*. Określenia struktury i wartości elementów modelu można dokonać drogą syntezy na podstawie otrzymanej w wyniku optymalnej aproksymacji funkcji przenoszenia $K(p)$ lub funkcji przejściowej $h_0(t)$ tego modelu.

Wybór odpowiedniej metryki i przestrzeni, w której określa się optymalne układy zastępcze, trzeba rozpatrywać na gruncie konkretnych zagadnień. Gdy mamy do czynienia na przykład ze zniekształceniami kształtu impulsów, to w celu określenia optymalnego układu zastępczego najlepiej posługiwać się tak zwanym najlepszym przybliżeniem w metryce przestrzeni C . Natomiast w niektórych układach automatycznego regulowania, na przykład znajdujących się pod działaniem sił stochastycznych, ważne jest, by całkowity efekt zniekształceń był dostatecznie mały [4], i dlatego wybór przestrzeni L^2 jest zupełnie racjonalny.

W następnych rozdziałach na konkretnych przykładach zostaną podane metody określenia optymalnych układów zastępczych w przestrzeni C i L^2 .

3. ZNAJDYWANIE OPTYMALNYCH SCHEMATÓW ZASTĘPCZYCH NA PODSTAWIE PRZYBLIŻENIA W PRZESTRZENI C

Ograniczymy się na razie do rozpatrywania charakterystyk czasowych układów dynamicznych. W większości przypadków odpowiedź układu zastępczego na sygnał wejściowy może być przedstawiona sumą funkcji liniowo niezależnych $\varphi_k(t)$ to jest

$$u_0(t) = \sum_{k=0}^{k=n} A_k \varphi_k(t). \quad (7)$$

Często $u_0(t)$ można przedstawić wielomianem wykładniczym¹

$$u_0(t) = \sum_{k=0}^{k=n} A_k e^{-a_k t}, \quad (8)$$

który należy do tak zwanego układu Czebyszewa [3]² i własności którego określa uogólnione twierdzenie Czebyszewa [1]:

Twierdzenie

Jeśli $u_0(t)$ jest wielomianem układu Czebyszewa w przedziale T , a $u(t)$ — dowolną funkcją ciągłą w T , to wielomian [8], który w metryce przestrzeni C najmniej się odchyła od $u(t)$, w zupełności określa się tym, że różnica $\delta(t) = u(t) - u_0(t)$ przyjmuje z kolejno zmieniającymi się znakami swoją maksymalną wartość przynajmniej w $n+1$ punktach przedziału T ³.

Różnorodne metody aproksymacji charakterystyk czasowych w metryce przestrzeni C , napotykanie w zagadnieniach techniki impulsowej, opisano w pracy [2]. Dlatego w niniejszej pracy ograniczono się do rozpatrzenia następującego prostego przykładu. Znaleźć optymalny schemat zastępczy w przedziale $(0, T)$ układu przedstawionego na rys. 1, którego odpowiedź na jednostkową funkcję włączenia jest:

$$u(t) = \frac{h(t)}{SR_a} = e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}},$$

gdzie $\tau_1 = 50\tau_2$.

Funkcję przejściową układu zastępczego przyjmujemy w postaci

$$\frac{h_0(t)}{SR} = A(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}). \quad (9)$$

¹ Wyrażenie takiego typu jak (7) nazywamy ogólnie wielomianami.

² Wielomianem układu Czebyszewa w danym przedziale nazywamy taki wielomian, który ma nie więcej niż n zer.

³ Twierdzenie to podajemy w naszych oznaczeniach przyjętych w niniejszej pracy.

Postaci tej odpowiada schemat przedstawiony na rys. 5, przy czym

$$C = \frac{C_a}{A}, \quad R = R_a A, \quad CR = \tau_2.$$

Ponieważ $h_0(t)$ posiada w $(0, T)$ jedno zero, ilość punktów maksymalnego odchylenia funkcji $\delta(t) = \frac{h(t)}{SR_a} - \frac{h_0(t)}{SR}$ nie przekracza 2, przy czym jeden punkt leży na końcu odcinka $(0, T)^4$, a drugi w pewnym punkcie t_0 .

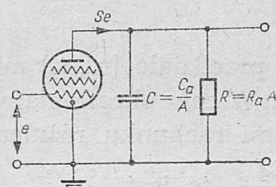
Możemy przyjąć, że punkt t_0 leży w środku przedziału, tj. $t_0 = \frac{T}{2}$ (dokładną

wartość t_0 można określić z warunku $\delta'(t)|_{t=t_0} = 0$).

Zgodnie zatem z twierdzeniem Czebyszewa w celu otrzymania najlepszego przybliżenia powinny być wypełnione warunki:

$$\delta\left(\frac{T}{2}\right) = e^{-\frac{T}{2\tau_1}} - e^{-\frac{T}{2\tau_2}} - A\left(1 - e^{-\frac{T}{2\tau_2}}\right) = L, \quad (10)$$

$$\delta(T) = e^{-\frac{T}{\tau_1}} - e^{-\frac{T}{\tau_2}} - A\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau_2}}\right) = -L. \quad (11)$$



Rys. 5. Optymalny schemat zastępczy układu przedstawionego na rysunku 1

Rugując stąd maksymalne odchylenie L otrzymujemy

$$A = \frac{e^{-\frac{T}{2\tau_1}} + e^{-\frac{T}{\tau_1}} - e^{-\frac{T}{2\tau_2}} - e^{-\frac{T}{\tau_2}}}{2 - e^{-\frac{T}{2\tau_2}} - e^{-\frac{T}{\tau_2}}}. \quad (12)$$

Podstawiając dla przykładu w (12)

$$\frac{T}{\tau_1} = 0,1, \quad \frac{T}{\tau_2} = 5, \quad \frac{T}{2\tau_1} = 0,05, \quad \frac{T}{2\tau_2} = 2,5,$$

otrzymujemy $A = 0,924$. Krzywą błędu $\delta(t)$ przedstawiono na rys. 3.

Jak wynika z rozpatrzonego przykładu, w celu otrzymania optymalnego schematu zastępczego należy nie tylko pominąć parametry, które są związane z małymi członami równania różniczkowego, ale również pomnożyć pozostałe parametry przez określone współczynniki, zależne od przedziału i charakteru przybliżenia. Dzięki temu błąd spowodowany idealizacją układu może być kilkakrotnie zmniejszony.

⁴ Wynika to z właściwości wielomianu Czebyszewa [1].

4. ZNAJDYWANIE OPTYMALNYCH UKŁADÓW ZASTĘPCZYCH NA PODSTAWIE PRZYBLIŻENIA W PRZESTRZENI L^2

Zadanie, które stoi przed nami, polega na wybraniu takich wartości współczynników A_k w wielomianie

$$u_0(t) = \sum_{k=0}^n A_k \varphi_k(t), \quad (13)$$

żeby całka

$$J = \int_{t_1}^{t_2} [u(t) - u_0(t)]^2 dt \quad (14)$$

w przedziale $[t_1, t_2]$ miała wartość minimalną.

W celu określenia wartości współczynników A_k należy zgodnie z regułami rachunku różniczkowego przyrównać do zera pochodne cząstkowe

$\frac{\partial J}{\partial A_k}$, to jest

$$\frac{1}{2} \frac{\delta J}{\delta A_k} = \int_{t_1}^{t_2} [u(t) - u_0(t)] \varphi_k(t) dt = 0, \quad (k=0, 1, \dots, n), \quad (15)$$

lub

$$\int_{t_1}^{t_2} u(t) \varphi_k(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} u_0(t) \varphi_k(t) dt. \quad (16)$$

Wprowadzając oznaczenia

$$(f\varphi) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) \cdot \varphi(t) dt. \quad (17)$$

układ równań (16) możemy przepisać w postaci

$$(u\varphi_k) = \sum_{i=1}^n A_i (\varphi_i \varphi_k), \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (18)$$

Rozwiązując powyższe równanie możemy wzór (13) przedstawić w następującej postaci

$$u_0(t) = \begin{vmatrix} 0 & \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ (u\varphi_1) & (\varphi_1\varphi_1) & \dots & (\varphi_1\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u\varphi_n) & (\varphi_n\varphi_1) & \dots & (\varphi_n\varphi_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} (\varphi_1\varphi_1) & (\varphi_1\varphi_2) & \dots & (\varphi_1\varphi_n) \\ (\varphi_2\varphi_1) & (\varphi_2\varphi_2) & \dots & (\varphi_2\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n\varphi_1) & (\varphi_n\varphi_2) & \dots & (\varphi_n\varphi_n) \end{vmatrix}. \quad (19)$$

$$U(p) = \int_0^{\infty} u(t) e^{-pt} dt, \quad U_0(p) = \int_0^{\infty} u_0(t) e^{-pt} dt.$$

Jak wynika z tych równań, w celu otrzymania optymalnego schematu zastępczego należy interpolować charakterystykę sygnału wyjściowego $U(p)$ za pomocą sygnału wyjściowego układu zastępczego $U_0(p)$. Przy tym węzły interpolacji a_k powinny być tak wybrane, aby:

1. optymalny układ zastępczy mógł być urzeczywistniony, tj. wielkości te powinny być rzeczywiste, dodatnie lub zespolono-sprzężone z częścią rzeczywistą większą od zera,
2. zapewniły szybką zbieżność procesu interpolacji (na przykład przez tak zwane „czebyszewskie“ rozstawienie węzłów interpolacji).

Zaleta wzorów (21) polega na tym, że chociaż kryterium minimalnego błędu odnosi się do charakterystyk chwilowych układu, to proces przybliżenia (tj. interpolacji) odbywa się w zakresie charakterystyk częstotliwościowych.

Wyprowadzając wzory (21) zakładaliśmy, że węzły interpolacji układu zastępczego mogą być wybrane zupełnie niezależnie.

Teraz znajdujemy optymalne (w metryce $L^2(0, \infty)$) rozstawienie tych węzłów. W tym celu należy rozwiązać układ równań

$$\frac{\partial J}{\partial a_k} = 0, \quad (k=1, 2 \dots n), \quad (22)$$

przy czym

$$J = \int_0^{\infty} [u(t) - u_0(t)]^2 dt, \quad (23)$$

$$u_0(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{-a_k t}.$$

Podstawiając (23) do (22) otrzymujemy

$$\frac{1}{2A_k} \frac{\partial J}{\partial a_k} = - \int_0^{\infty} [u(t) - u_0(t)] e^{-a_k t} t dt = 0.$$

Równanie to na podstawie znanej zależności rachunku operatorowego

$$t f(t) \rightarrow - \frac{d}{dp} F(p),$$

gdzie

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt,$$

można sprowadzić do następującej postaci:

$$\frac{d}{dp} [U(p) - U_0(p)]_{p=a_k} = 0. \quad (24)$$

Jak wynika ze wzoru (24), w rozpatrywanym przypadku funkcja $U_0(p)$ powinna interpolować funkcję $U(p)$ w ten sposób, by w węzłach interpolacji pochodne tych funkcji pokrywały się⁵.

Można udowodnić, że S -krotny biegun funkcji $U_0(p)$ odpowiada interpolacji z węzłem $S+1$.

Rzeczywiście, niechaj

$$u_0(t) = e^{-at}(A_1 + A_2 t + \dots A_r t^{r-1} + \dots + A_s t^{s-1}), \quad (25)$$

wtedy na podstawie zależności

$$f(t)t^r \rightarrow (-1)^r \frac{d^r}{dp^r} F(p),$$

otrzymujemy

$$\frac{\partial J}{\partial A_r} = \frac{d^{r-1}}{dp^{r-1}} | U(p) - U_0(p) |_{p=a} = 0 \quad (26)$$

oraz

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a} = \frac{d}{dp} | U(p) - U_0(p) |_{p=a} + \dots + (-1)^{r+1} \frac{d^r}{dp^r} | U(p) - U_0(p) |_{p=a} + \dots + \\ + (-1)^{s+1} \frac{d^s}{dp^s} | U(p) - U_0(p) |_{p=a} = 0. \end{aligned}$$

Równania powyższe można napisać w następującej postaci:

$$\frac{d^v}{dp^v} | U(p) - U_0(p) |_{p=a} = 0 \quad (v=0, 1, 2 \dots s). \quad (27)$$

Wynika stąd następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Optymalna funkcja przenoszenia, w metryce przestrzeni $L^2(0, \infty)$ układu zastępczego dla danego układu dynamicznego, interpoluje charakterystyki przenoszenia tego układu w węzłach a_k rzędu S_k+1 , przy czym wielkości a_k stanowią „zwierciadlane odbicie“ względem osi rzędnych płaszczyzny p biegunów funkcji $U_0(p)$, a S_k — rząd tych biegunów.

W celu zobrazowania możliwości praktycznego stosowania wzorów (24) rozpatrzmy układ zawierający elementy rozłożone, na przykład piec

⁵ Tak zwana interpolacja z podwójnym węzłem.

w układach regulacji temperatury. Ponieważ pojemność cieplna i oporność cieplna są równomiernie rozłożone w całej przestrzeni pieca, równanie takiego układu wyraża się przez pochodne cząstkowe, a funkcja przenoszenia układu [3]

$$K(p) = e^{-\sqrt{pT}}, \quad (28)$$

gdzie

$T = IW$ — stała czasu,

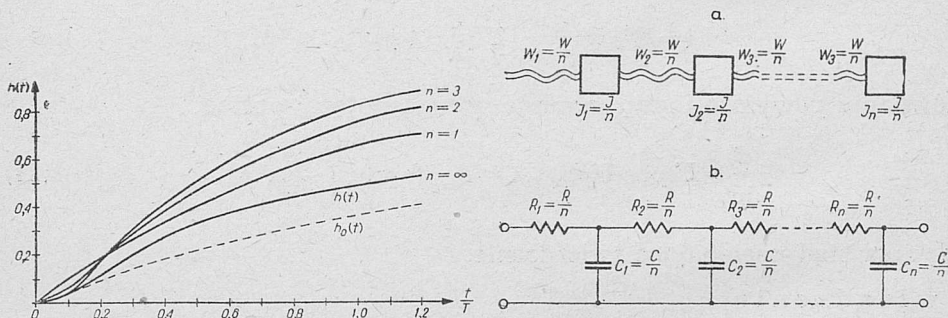
I — ogólna objętość akumulująca ciepło,

W — ogólna oporność cieplna układu.

Funkcja przejściowa tego układu, odpowiadająca (28), jest

$$h(t) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{t}{T}}}\right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\sqrt{t/T}}{2}} e^{-x^2} dx. \quad (29)$$

Funkcję tę przedstawiono na rys. 6. Dla uproszczenia analizy zwykle zakłada się, że układ takiego typu może być zastąpiony modelem zawierającym jednakowe pojemności i oporności skupione w n -punktach, co przedstawiono na rys. 7a. Układ takiego typu ma swój odpowiednik RC, przedstawiony na rys. 7b. Funkcje przejściowe modelu dla $n=1, 2, 3$ przed-



Rys. 6. Funkcje przejściowe kontinuum ($n=\infty$), oraz układów zastępczych ($n=1, n=2, n=3$); $h_0(t)$ odpowiada optymalnemu układowi zastępczemu w przedziale $(0, \infty)$

Rys. 7.a. Schemat modelu układu cieplnego posiadający n ogniw ze stałymi skupionymi; b. Schemat odpowiednika elektrycznego RC układu przedstawionego na rys. 7.a

stawiono na rys. 6. Jak wynika z tego rysunku, założenie o równomiernym rozłożeniu pojemności i oporności w n punktach prowadzi do znacznych błędów [3]. Wykażemy, że można znaleźć taki model układu, którego charakterystyka znacznie lepiej aproksymuje rzeczywistą charakterystykę (29).

Założmy, że funkcja przenoszenia modelu wyraża się

$$K_0(p) = \frac{\frac{1}{T_0}}{p + \frac{1}{T_0}}, \quad (30)$$

gdzie T_0 jest optymalną stałą czasową, którą należy tak wybrać, żeby odchylenie charakterystyki przejściowej modelu (która wyraża się następującym wzorem $h_0(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T_0}}$, od charakterystyki przejściowej układu (29) było minimalne w metryce przestrzeni $L^2(0, \infty)$.

Zgodnie z warunkami (24) możemy napisać:

$$\frac{d}{dp} \left[\frac{1}{p} \frac{\frac{1}{T_0}}{\left(p + \frac{1}{T_0}\right)} \right]_{p=\frac{1}{T_0}} - \frac{d}{dp} \left[\frac{1}{p} e^{-\sqrt{pT}} \right]_{p=\frac{1}{T_0}} = 0,$$

czyli

$$\left[-\frac{\frac{1}{T_0}}{p} \cdot \frac{1}{\left(p + \frac{1}{T_0}\right)^2} - \frac{\frac{1}{T_0}}{p^2 \left(p + \frac{1}{T_0}\right)} \right]_{p=\frac{1}{T_0}} - \left[-\frac{1}{p^2} e^{-\sqrt{pT}} - \frac{T}{2p\sqrt{pT}} e^{-\sqrt{pT}} \right]_{p=\frac{1}{T_0}} = 0.$$

Podstawiając $p = \frac{1}{T_0}$ otrzymujemy:

$$3e^{\sqrt{T/T_0}} = 4 + 2\sqrt{\frac{T}{T_0}}.$$

Rozwiązując to równanie znajdujemy

$$T_0 \simeq 3,56 T. \quad (31)$$

Wykres funkcji przejściowej

$$h_0(t) = 1 - e^{-\frac{t}{3,56 \cdot T}}$$

przedstawiono na rys. 6.

Analogicznie można wyznaczyć optymalne funkcje przejściowe modeli posiadających 2, 3 i n elementów skupionych.

Zastosowanie idealizacji opisanego typu (tj. zastąpienie charakterystyki (28) charakterystyką uproszczoną (30)) może okazać się bardzo pożyteczne przy badaniu dynamiki układów automatycznego regulowania.

⁶ Co odpowiada układowi przedstawionemu na rys. 7a dla $n=1$.

Natomiast trzeba się zastrzec, że badanie stabilności przeprowadzane przez niektórych autorów, jak na przykład przez Oldenbourga i Sartoriusa [3], na schematach zastępczych jest niedopuszczalne, ponieważ kryteria stabilności układu opierają się na zupełnie innych charakterystykach i zależnościach⁷.

Metoda powyższa może mieć również pewne zastosowanie przy syntezie układów automatycznego regulowania, gdzie do chwili obecnej stosuje się głównie metodę przybliżenia charakterystyk za pomocą odcinków prostej z nachyleniem 6.k decybeli na oktawę [4].

W przypadku, gdy struktura układu badanego jest nie znana, a znane są tylko jego charakterystyki częstotliwościowe (lub oddzielne punkty tych charakterystyk), które mogą być określone doświadczalnie, optymalną funkcję przenoszenia układu zastępczego tego modelu można znaleźć na podstawie wzorów (21), (27). Przy tym im więcej weźmiemy węzłów interpolacji a_k , tym charakterystyki $h_0(t)$ modelu zastępczego będą lepiej odzwierciedlały rzeczywiste charakterystyki chwilowe $h(t)$ układu badanego.

Zakład Elektrotechniki Teoretycznej
I.P.P.T. — P.A.N.

WYKAZ LITERATURY

1. Achiezer N. I. — Lekcje po teorii aproksymacji — OGIZ, 1947.
2. Kulikowski R. — Obliczanie liniowych układów impulsowych — Archiw. Elektrot. T. 3, z. 2, 1954.
3. Oldenbourg R, Sartorius G. — Dinamika awtomaticheskowo regulirowanija — GEI, 1949.
4. Sołodownikow W. W. — Wwiedienje w staticzeskuju dinamiku sistiem awtomaticheskowo upravlenja — GITTL, 1952.
5. Zadeh L. — A general theory of linear signal transmission system — Journal of Franklin Institution nr 3, 1952.

Р. КУЛИКОВСКИ

ОПТИМАЛЬНЫЕ СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ И МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Резюме

Исследуя переходные и установившиеся процессы в линейных динамических системах, мы обычно пренебрегаем (ради упрощения математического аппарата) влиянием второстепенных факторов, т. е. идеализируем эти системы.

Так напр., рассматривая передаточную функцию

⁷ Na fakt powyższy zwrócił uwagę A. Michajłow w przedmowie do rosyjskiego wydania książki Oldenbourga i Sartoriusa.

$$K(p) = SR_a \frac{p}{\tau_2 p + \left(1 + \frac{\tau_1}{\tau_2}\right) p + \frac{1}{\tau_2}},$$

где

$$p = i\omega, \quad \tau_1 = R_g C_g, \quad \tau_2 = R_a C_a, \quad C_a \ll C_g,$$

усилителя представленного на рис. 1, можем пренебречь влиянием ёмкости C_a на низких частотах, т. е. пренебречь членом $\tau_2 p^2$; на высоких же частотах можем пренебречь членом $\frac{1}{\tau_2}$. Рассматривая аналогично временную характеристику этого усилителя, представленную на рис. 2,

$$\frac{1}{SR_a} h(t) = e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}},$$

для больших моментов времени, можем пренебречь членом $e^{-\frac{t}{\tau_2}}$, рассматривая же

фронт импульса, т. е. для небольших моментов времени, можем принять $e^{-\frac{t}{\tau_2}} = 1$ и следовательно переходная функция этой идеализированной системы будет:

$h_1(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}$. Погрешность $\delta(t) = h(t) - h_0(t)$, которая является результатом этой идеализации, имеет возрастающий с течением времени характер (см. рис. 3). и в случае многокаскадных систем может достигнуть недопустимой величины. Возникает вопрос: можно — ли подобрать параметры схемы замещения так, чтобы значение этой погрешности в рассматриваемом интервале времени свести к минимуму?

Чтобы дать строгий и точный ответ на этот вопрос, необходимо ввести некоторые простые понятия конструктивной теории функции и функционального анализа.

Для этого рассмотрим линейную систему, представленную на рис. 4, на вход которой действует некоторый сигнал

$$e = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n,$$

где на выходе системы получаем

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n,$$

где $u_1, u_2, \dots, u_n$ реакции системы на элементарные сигналы $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Разложение произвольного входного сигнала e на элементарные сигналы e_i может быть произведено путём т. н. ортогональных разложений или при помощи оператора Фредгольма с симметричным ядром (5). Таким образом входной сигнал e и затем выходной сигнал u можно представить точками в конечно или бесконечномерном пространстве элементарных сигналов. Также само может быть представлен сигнал системы замещения u_0 . На основе этих определений задачу, которая стоит перед нами, можем сформулировать следующим образом. На некотором интервале времени T заданы две функции $u(t)$ и $u_0(t, A_1, A_2, \dots, A_n)$ переменной t , причём u_0 зависит ещё от некоторого числа параметров $A_1, A_2, \dots, A_n$. Параметры A_k должны быть так выбраны, чтобы отклонение в T функции $u_0(t, A_1, A_2, \dots, A_n)$ от $u(t)$ было в метрике данного функционального пространства минимальным возможным.

Переходную функцию системы замещения, которую определяем на основе оптимального приближения в метрике данного функционального пространства, называем оптимальной переходной функцией этой системы, а систему соответствующую этой переходной функции — оптимальной системой замещения.

В общем случае структура и значения элементов исследуемой системы могут быть неизвестны. Однако схему замещения можно определить путём аппрокси-

мации хатактеристики этой системы (полученной экспериментальным путём) и синтезе цепи на основе найденной в результате аппроксимации переходной функции. Схему такого типа будем называть моделью данной системы.

При выборе метрики функционального пространства необходимо учитывать характер возникающих в данной системе искажений. Например, в случае систем, в которых главное значение имеет искажение формы сигнала, лучше всего подходит приближение в метрике пространства C .

В случае же некоторых систем автоматического регулирования, которые находятся под воздействием стохастических сил и где важное значение имеет интегральный результат искажений, лучше всего подходит приближение в метрике пространства L^2 .

В качестве примера рассматривается схему замещения (рис. 5) усилителя, представленного на рис. 1. Приближение осуществляется в метрике пространства C . На основе тнз. условий Чебышева (10) (11) находим оптимальное значение коэффициента A (см. рис. 5), который определяет значение элементов схемы замещения.

Этот же пример рассматривается в пространстве L^2 , причём оптимальное значение коэффициента A находим на основе приближения $u(t)$ при помощи линейно-независимого агрегата функций $u_0(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{-a_k t}$. Оптимальное $u_0(t)$ выражается формулой (19).

В случае бесконечного промежутка приближения (в пространстве L^2) определение переходной функции схемы замещения можно свести к задаче интерполяции $U(p) = \int_0^{\infty} u(t) e^{-pt} dt$ при помощи агрегата $U_0(p) = \int_0^{\infty} u_0(t) e^{-pt} dt$ в заданных узлах интерполяции $a_0, a_1, \dots, a_n$ (см. форм. 21). Этот случай поясняется с помощью примера, в котором определяется оптимальную модель системы типа „континуум“, нпр. печи, которая обладает передаточной функцией $K(p) = e^{-\sqrt{p}t}$ [3].

Считая, что передаточная функция модели $K_0(p) = \frac{1/T_0}{p + 1/T_0}$ на основе формул интерполяции (24) находим $T_0 = 3,56 T$

Задачи такого типа встречаются в теории автоматического регулирования [3].

Изложенные методы могут найти применение в случае анализа сложных динамических систем, встречающихся в теории цепей, теории автоматического регулирования и т. д.

R. KULIKOWSKI

OPTIMUM EQUIVALENT NETWORKS AND MODELS OF DYNAMIC LINEAR SYSTEMS

Summary

In examining steady-state or transient conditions in linear dynamic systems the influence of second order factors is usually neglected, i. e. these systems are idealized.

E. g. when studying the transfer function of an amplifier:

$$K(p) = SR_a \frac{p}{\tau_2 p^2 + \left(1 + \frac{\tau_2}{\tau_1}\right)p + \frac{1}{\tau_1}}$$

where

$$p = i\omega, \tau_1 = R_0 C_0, \tau_2 = R_a C_a, \quad C_a \ll C_0,$$

(Fig. 1) for low frequencies we can neglect the influence of the capacity C_a , i. e. we can neglect the factor $\tau_2 p^2$ and for high frequencies — the factors $\frac{1}{\tau_2}$.

Similarly, studying the transient response of this amplifier (Fig. 2):

$$\frac{1}{SR_a} h(t) = e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}},$$

for large time-intervals we can neglect the factor $e^{-\frac{t}{\tau_2}}$, and studying the front of a pulse (i. e. for short time-intervals) we may assume $e^{-\frac{t}{\tau_2}} = 1$. The error $\delta(t) = h(t) - h_0(t)$ which results from such an idealization increases with time (Fig. 3) and in the case of multistage amplifiers may reach an intolerable value. The question arises as to the possibility of finding the parameters of an equivalent network, which would assure the reduction of that error to a minimum. In answer to this question some simple ideas of the constructive theory of functions are introduced.

Let us study the linear network shown in Fig. 4 at the input of which there is the signal

$$e = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n.$$

Then at the output we get

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n,$$

where $u_1, u_2, \dots, u_n$ are the response of the network caused by the elementary signals $e_1, e_2, \dots, e_n$.

The resolving of any signal e into elementary signals e_k can be realized by orthogonal expansion or by means of Fredholm's operator with symmetrical root. So the input signal e and the output signal u can be represented as a point in the linear space of elementary signals. Similarly one can represent the signals of the equivalent network. Thus the problem may be formulated as follows: suppose there are given two functions $u(t)$ and $u_0(t_1, A_1, A_2, \dots, A_n)$ of variable t . In addition, u_0 depends upon some parameters $A_1, A_2, \dots, A_n$. The parameters A_k should be chosen in such a way as to reduce the error between the function $u_0(t_1, A_1, A_2, \dots, A_n)$ and $u(t)$ to a minimum in the metric of the given functional space.

The transfer function of the equivalent network, which has been found on the base of the optimum approximation in the metric of the given functional space we call the optimum transfer function of this network, and the network itself — corresponding to this function — the optimum equivalent network.

In the general case the structure and the values of the elements of the examined network may be not known. However, one may determine the equivalent network by means of an approximation in the characteristics of the network (given in an experimental way) and a synthesis of the network on the base of the found characteristics. We shall call such network a model of the examined network.

Choosing the metric of the functional space one must take into account the character of the deformations of the signals arising in the given network. For example in the case of the networks in which the deformations of the shape of the signal are of a great importance, the metric of the space C is the most suitable. In the case of some servosystems, which are subject to the action of the stochastic forces and where

the integral effect of the deformations is important, the approximation in the metric of the space L^2 is the most suitable.

As an example the equivalent network (Fig. 5) of the amplifier shown in Fig. 1 has been examined. The approximation is realized in the metric of the space C .

On the base of the Tchebyshev's conditions (10), (11) the optimum value of the coefficient A (Fig. 5) can be found. This coefficient determines the values of the elements of the equivalent network. The same example is studied in the space L^2 . We can find the optimum values of the coefficient A from the approximation $u(t)$ with the aid of a set of linear independent functions $u_0(t) = \sum A_k e^{-a_k t}$. The optimum value of $u_0(t)$ is given by Eq. (19).

In the case of the infinite interval of the approximation in the space L^2 the determining of the optimum transfer function of the equivalent network reduces itself to the interpolation $U(p) = \int_0^\infty u(t) e^{-pt} dt$ by means of the set $U_0(p) = \int_0^\infty u_0(t) e^{-pt} dt$ in the given points of the points of the interpolation $a_1 \dots a_n$ Eq. (21).

This case may be illustrated by the example in which the optimum model of the system of the „continuum“ type is determined, e. g. a furnace with automatic temperature control which has the transfer function $K(p) = e^{-pT}$ [3].

Considering the transfer-function of the model $K_0(p) = \frac{1/T_0}{p + 1/T_0}$ we find in the interpolation Eq. (24) $T_0 = 3.56 T$. Such problems arise in the theory of automatic regulating systems [3].

The above methods can be applied to the analysis of complicated dynamic networks, e. g. in the theory of automatic regulation.

621.396.645.22

A. SMOLINSKI

Synteza wzmacniaczy rezonansowych z trójobwodowymi filtrami pasmowymi o sprzężeniu transformatorowym

Rękopis dostarczono 25. 3. 1954

Wzmacniacze rezonansowe z trójobwodowymi filtrami pasmowymi znajdują zastosowanie w tych rodzajach urządzeń odbiorczych, w których selektywność z dwuobwodowymi filtrami pasmowymi jest za mała, wzmocnienie natomiast jest dostateczne. Wzmacniacze z trójobwodowymi filtrami tylko w pewnych warunkach mają zupełnie płaski bądź też równomiernie falisty wierzchołek krzywej rezonansu. Warunki powstawania takich krzywych rezonansu były kilkakrotnie badane, jednak zajmowano się przypadkami nie zawsze realnych albo jedynie teoretycznie optymalnych rozwiązań. W pracy niniejszej zbadano przypadek optymalny zarówno pod względem teoretycznym, jak i praktycznym, polegający na dobraniu równych sprzężeń między obwodami, silniej tłumionego obwodu anodowego i równo tłumionych obwodów pośredniego i siatkowego. Rozważano schemat zastępczy wzmacniacza w postaci równoległej i za pomocą metody potencjałów węzłowych obliczono przewodność przejściową oraz wzmocnienie zespolone układu. Zbadano symetrię krzywej rezonansu w wąskim pasmie częstotliwości, w którym zachodzą zjawiska rezonansowe, i przyrównano tożsamościowo kwadrat modułu przewodności przejściowej dla silniejszych sprzężeń z funkcją Czebyszewa szóstego rzędu, skąd uzyskano warunek równomiernej falistości wierzchołka. W rezultacie stwierdzono, że przebieg wzmocnienia napięciowego układu zależy od zmiennej x , będącej funkcją odstrojenia od częstotliwości rezonansowej, i od jednego parametru b , co pozwala na wykreślenie uniwersalnych krzywych wzmocnienia. Przewidywano warunki uzyskiwania równomiernie falistego wierzchołka. Rozpatrzono syntezę wzmacniaczy o trójwierzchołkowej krzywej rezonansu, umożliwiającą obliczenie elementów układu przy zadanym kształcie krzywej rezonansu. Wyniki obliczeń podano w postaci wykresów. Wyprowadzono wzory na obliczanie wielostopniowych wzmacniaczy o trójwierzchołkowej, równomiernie falistej krzywej rezonansu. Istniejące w literaturze nomogramy zadaptowano do omawianego optymalnego przypadku i podano przykład obliczania trójstopniowego wzmacniacza za pomocą nomogramów.

1. WSTĘP

W szeregu urządzeń odbiorczych o dostatecznym wzmocnieniu selektywność wzmacniaczy pośredniej częstotliwości przy zastosowaniu wzmacniaczy rezonansowych z dwuobwodowymi filtrami pasmowymi jest za

mała. Wówczas stosuje się wzmacniacze z trójobwodowymi filtrami pasmowymi [13]. Układy tego typu tylko w pewnych warunkach mają płaski albo równomierny falisty wierzchołek krzywej rezonansu [2]. Warunki otrzymywania takich krzywych rezonansu kilkakrotnie badano w ciągu ostatnich 30 lat. Początkowo badania te jako wynik dawały nie-realny¹ w praktyce warunek zerowego tłumienia obwodu pośredniego [2]. [4], [5]. W dalszej fazie prac zwrócono uwagę na możliwość innego, realnego rozkładu tłumień, polegającego na silniejszym stłumieniu obwodu anodowego [10], [11]. Dla tego rozkładu tłumień opracowano syntezę wzmacniacza z płaskim wierzchołkiem krzywej rezonansu w warunkach optymalnych maksymalnego wzmocnienia układu [5], [10], natomiast synteza wzmacniaczy o równomiernie falistym wierzchołku była przeprowadzana w różnych warunkach. W jednej z prac [16] przeprowadzono syntezę dla przypadku minimalnych tłumień obwodów pośredniego i siatkowego. Przypadek ten, jak udowodniono, nie daje maksimum wzmocnienia układu, które występuje przy równych tłumieniach obwodów pośredniego i siatkowego [7]. Na podstawie tych założeń przeprowadzono syntezę wzmacniacza [7] nie uwzględniając jednak drugiego, optymalnego z praktycznego punktu widzenia warunku równych sprzężeń między obwodami.

W pracy niniejszej rozpatrzono ten ostatni przypadek w zastosowaniu do wzmacniaczy o sprzężeniu transformatorowym². Synteza wzmacniaczy oparta jest na funkcji najlepszego przybliżenia Czebyszewa [3]. Jako rezultat pracy podane są wykresy umożliwiające projektowanie wzmacniaczy w optymalnych warunkach pracy.

Na koniec należy podkreślić, że omawiana dotychczas literatura jak i niniejsza praca dotyczą wzmacniaczy zestrojonych, to jest o obwodach dostrojonych do jednej częstotliwości. Trzeba jednak zwrócić uwagę na to, że możliwe jest uzyskiwanie płaskiego lub równomiernie falistego wierzchołka również i we wzmacniaczach symetrycznie rozstrojonych względem częstotliwości centralnej, lecz kosztem mniejszego wzmocnienia rezonansowego. Na ten fakt zwrócono już wcześniej uwagę [2], ale dokładniej opracowano ten przypadek znacznie później [8], [11], [17].

2. SCHEMAT ZASTĘPCZY WZMACNIACZA

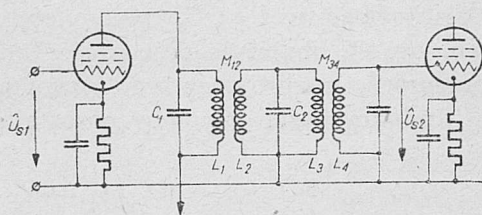
Wzmacniacz rezonansowy z trójobwodowym filtrem pasmowym może być realizowany w różnych postaciach obwodu pośredniego jak również przy różnych rodzajach sprzężeń międzyobwodowych. Każdej z postaci wzmacniacza odpowiada właściwa funkcja wzmocnienia, która wyraża się w krzywych rezonansu różniących się nieco od siebie.

¹ Z wyjątkiem techniki mikrofalowej.

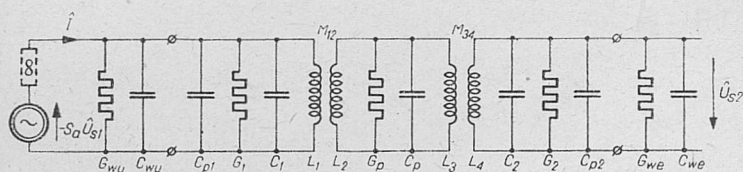
² W czasie pisania niniejszego artykułu autor nie znał poz. [6] wykazu literatury.

Różnice te zacierają się w przypadku ograniczenia rozważań do wzmacniaczy wąskopasmowych i do pracy w wąskim pasmie częstotliwości, w którym występują zjawiska rezonansowe. W tych warunkach istnieje równoważność wszystkich praktycznie stosowanych układów wzmacniaczy rezonansowych z trójobwodowymi filtrami pasmowymi [4], [7] i o wyborze układu do rozważań decydują względy drugorzędne, jak łatwość oraz elegancja analizy matematycznej itp.

W pracy niniejszej za podstawę rozważań przyjęto układ o równoległym obwodzie pośrednim i o sprzężeniu transformatorowym (rys. 1) ze względu na jego duże znaczenie praktyczne. Schemat zastępczy tego układu można przedstawić w postaci równoległej (rys. 2), podając straty cewek i kondensatorów w postaci przewodności G_1, G_p i G_2 . W wąskim zakresie częstotliwości, w którym badamy zjawiska rezonansowe wzmacniacza, zakładamy stałość tych przewodności.



Rys. 1. Schemat wzmacniacza rezonansowego z trójobwodowym filtrem pasmowym, sprzęgniętym transformatorowo

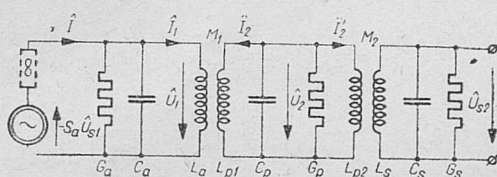


Rys. 2. Schemat zastępczy wzmacniacza rezonansowego w postaci równoległej

Równolegle do G_1 i G_2 włączone są przewodności źródła G_{wy} i obciążenia G_{we} , tworzące razem przewodność obu obwodów zastępczych (rys. 3).

$$G_a = G_{wy} + G_1, \quad (1)$$

$$G_s = G_2 + G_{we}. \quad (2)$$



Rys. 3. Uproszczona postać schematu zastępczego wzmacniacza rezonansowego w postaci równoległej

W podobny sposób sumują się pojemności obu obwodów

$$C_a = C_{wy} + C_{p1} + C_1, \quad (3)$$

$$C_s = C_2 + C_{p2} + C_{we}, \quad (4)$$

gdzie C_{p1} i C_{p2} oznaczają pojemności rozproszone obwodów anodowego i siatkowego, a C_1 i C_2 pojemności kondensatorów tych obwodów. Pojemność C_p obejmuje pojemność kondensatora obwodu pośredniego oraz pojemności rozproszone tego obwodu.

Indukcyjności obwodów pozostają bez zmiany otrzymując oznaczenia

$$L_a = L_1; \quad L_{p1} = L_2; \quad L_{p2} = L_3; \quad L_s = L_4, \quad (5)$$

podobnie jak indukcyjności wzajemne

$$M_1 = M_{12} \quad \text{ i } \quad M_2 = M_{34}. \quad (6)$$

Należy tu podkreślić brak innych sprzężeń magnetycznych ($M_{13} = M_{14} = M_{23} = M_{24} = 0$). Sprzężenia te są szkodliwe, gdyż wywołują asymetrię krzywej rezonansu [11].

3. PRZEWODNOŚĆ PRZEJŚCIOWA I WZMOCNIENIE UKŁADU

Wzmocnienie zespolone układu z rys. 3 określa się na podstawie definicji [14]

$$\hat{k}_u = \frac{\hat{U}_{s2}}{\hat{U}_{s1}} = - \frac{\hat{U}_{s2}}{\hat{I}} S_a = - \frac{S_a}{\hat{Y}_p}, \quad (7)$$

gdzie

$$\hat{Y}_p = \frac{\hat{I}}{\hat{U}_{s2}} \quad (8)$$

jest przewodnością przejściową [15].

W celu znalezienia tej wielkości napiszemy równanie prądów dla trzech górnych węzłów obwodów: anodowego, pośredniego i siatkowego [9], opierając się na wzorach wyprowadzonych w przypisach w postaci następującej

$$\hat{I} = \hat{U}_1(G_a + j\omega C_a) + \frac{\hat{U}_1}{j\omega L_a(1 - \kappa_1^2)} - \frac{\kappa_1 \hat{U}_2}{j\omega \sqrt{L_a L_{p1}}(1 - \kappa_1^2)}, \quad (9)$$

$$0 = \hat{U}_2(G_p + j\omega C_p) + \frac{\hat{U}_2}{j\omega L_{p1}(1 - \kappa_1^2)} - \frac{\kappa_1 \hat{U}_1}{j\omega \sqrt{L_a L_{p1}}(1 - \kappa_1^2)} + \frac{\hat{U}_2}{j\omega L_{p2}(1 - \kappa_2^2)} - \frac{\kappa_2 \hat{U}_{s2}}{j\omega \sqrt{L_{p2} L_s}(1 - \kappa_2^2)}, \quad (10)$$

$$0 = \hat{U}_{s2}(G_s + j\omega C_s) + \frac{\hat{U}_{s2}}{j\omega L_s(1 - \kappa_2^2)} - \frac{\kappa_2 \hat{U}_2}{j\omega \sqrt{L_{p2} L_s}(1 - \kappa_2^2)}, \quad (11)$$

gdzie współczynniki sprzężenia

$$\kappa_1 = \frac{M_1}{\sqrt{L_a L_{p1}}}, \quad (12)$$

$$\kappa_2 = \frac{M_2}{\sqrt{L_{p2} L_s}}. \quad (13)$$

Pierwszym upraszczającym założeniem jest pominięcie κ_2 wobec jedynki w mianownikach wzorów (9), (10) i (11). Założenie to wprowadza minimalne błędy, gdyż współczynniki sprzężenia κ_1 i κ_2 są rzędu najwyżej kilku procent [4], [7].

Z równań (9), (10) i (11) otrzymujemy przewodność przejściową w postaci

$$\hat{Y}_p = - \left(\frac{\omega}{\omega_r} \right)^2 \frac{\omega_r \sqrt{C_a C_s}}{\sigma_1 \sigma_2} \left\{ (d_a + j\nu) \left[(d_p + j\nu)(d_s + j\nu) + \sigma_2^2 \left(\frac{\omega_r}{\omega} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \sigma_1^2 \left(\frac{\omega_r}{\omega} \right)^2 (d_s + j\nu) \right\}, \quad (14)$$

gdzie

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{C_a L_a}} = \frac{1}{\sqrt{C_p L_p}} = \frac{1}{\sqrt{C_s L_s}} \quad (15)$$

jest częstotliwością rezonansową wszystkich obwodów³, przy czym

$$\frac{1}{L_p} = \frac{1}{L_{p1}} + \frac{1}{L_{p2}}, \quad (16)$$

Inne oznaczenia są następujące:

tłumienie n -tego obwodu

$$d_n = \frac{G_n}{\omega_r C_n}, \quad (17)$$

gdzie n równa się kolejno a , p i s ;

zastępcze współczynniki sprzężenia między obwodami

$$\sigma_1 = \frac{M_1}{\sqrt{L_a L_{p1}}} \sqrt{\frac{L_p}{L_{p1}}} = \kappa_1 \sqrt{\frac{L_p}{L_{p1}}}, \quad (18)$$

³ Dostrojenie wszystkich obwodów do jednej częstotliwości rezonansowej jest warunkiem symetrii krzywej rezonansu względem tej częstotliwości rezonansowej [7].

$$\sigma_2 = \frac{M_2}{\sqrt{L_{p2} L_s}} \sqrt{\frac{L_p}{L_{p2}}} = \kappa_2 \sqrt{\frac{L_p}{L_{p2}}}, \quad (19)$$

i zmienna niezależna

$$\nu = \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \quad (20)$$

wyrażająca odstrojenie od częstotliwości rezonansowej obwodów.

W rezultacie wyżej podanych obliczeń ze wzoru (7) otrzymujemy wzmocnienie napięciowe

$$\hat{k}_u = \frac{\sigma_1 \sigma_2 S_a}{\left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^2 \omega_r \sqrt{C_a C_s} \left\{ (d_a + j\nu) \left[(d_p + j\nu)(d_s + j\nu) + \sigma_2 \left(\frac{\omega_r}{\omega}\right)^2 \right] + \sigma_1^2 \left(\frac{\omega_r}{\omega}\right)^2 (d_s + j\nu) \right\}} \quad (21)$$

Przy wyprowadzeniu tego wzoru nie uczyniono dotychczas żadnych założeń upraszczających z wyjątkiem pominięcia κ^2 wobec jedności w mianownikach wzorów (9), (10) i (11) oraz założenia stałości przewodności G_a , G_p i G_s (drugie założenie upraszczające).

4. SYMETRIA KRZYWYCH REZONANSU

W celu zbadania postaci krzywych rezonansu, to jest charakterystyk wzmocnienia w funkcji częstotliwości, należałoby przeprowadzić analizę wzmocnienia określonego równaniem (21). Ponieważ wielkości decydujące o postaci krzywych rezonansu znajdują się w mianowniku tego wyrażenia, więc wygodniej jest badać odwrotność tej funkcji, to jest przewodność przejściową $\hat{Y}_p$, wyrażoną wzorem (14).

Z kształtu tej funkcji wynika bezpośrednio, że nie jest ona w jakikolwiek sposób symetryczna względem częstotliwości rezonansowej f_r .

Czynnik $\left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^2$ przed nawiasem klamrowym wywołuje monotoniczne opadanie wzmocnienia w funkcji częstotliwości. W wąskim pasmie częstotliwości, w którym odbywają się zjawiska rezonansowe, efekt ten jest minimalny i trzecie założenie upraszczające ($\omega \approx \omega_r$) w tym pasmie częstotliwości wprowadza z tego powodu bardzo małe błędy. Należy jednak zwrócić uwagę na to, że wewnątrz nawiasu klamrowego znajdują się składniki zawierające $\left(\frac{\omega_r}{\omega}\right)^2$, uproszczenie których do jedności może wywołać poważniejsze błędy, sięgające 10% w przypadkach ważnych w praktyce [11]. Zastosowanie układu o kolejnych sprzężeniach: transformatorowym (indukcyjnym) i pojemnościowym w pewnym stopniu zmniejsza asymetrię wywołaną przez omawiane czynniki [11], [17].

W rezultacie trzech założeń upraszczających przewodność przejściowa będzie

$$\hat{Y}_p \approx - \frac{\omega_r \sqrt{C_a C_s}}{\sigma_1 \sigma_2} \left\{ (d_a + j\nu) \left[(d_p + j\nu)(d_s + j\nu) + \sigma_2^2 \right] + \sigma_1^2 (d_s + j\nu) \right\}. \quad (22)$$

Równanie to przekształcamy, do dalszej analizy wprowadzając pojęcie całkowitego tłumienia układu

$$d_c = d_a + d_p + d_s. \quad (23)$$

Dzieląc przez d_c dotychczasowe parametry i zmienną niezależną otrzymujemy znormalizowane tłumienie

$$\delta_n = \frac{d_n}{d_c}, \quad (24)$$

gdzie n równa się kolejno a , p i s , znormalizowane zastępcze współczynniki sprzężeń

$$s_1 = \frac{\sigma_1}{d_c}, \quad (25)$$

$$s_2 = \frac{\sigma_2}{d_c}, \quad (26)$$

oraz zmienną niezależną w postaci

$$x = \frac{2\nu}{d_c} = \frac{2}{d_c} \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right). \quad (27)$$

W tych warunkach przewodność przejściowa wyraża się następująco:

$$\hat{Y}_s \approx \frac{\omega_r \sqrt{C_a C_p}}{8s_1 s_2} d_c \{ 2x^2 - 8(\delta_a \delta_p \delta_s + \delta_a s_2^2 + \delta_s s_1^2) + \\ + jx[x^2 - 4(s_1^2 + s_2^2 + \delta_a \delta_p + \delta_a \delta_s + \delta_p \delta_s)] \}. \quad (28)$$

Wyrażenie to jest symetryczne względem x , gdyż część rzeczywista nie posiada wyrazów o nieparzystych potęgach, a część urojona nie posiada wyrazów o parzystych potęgach. Ponieważ x wyraża się wzorem (27), więc $\hat{Y}_p$ jest geometrycznie symetryczne względem częstotliwości rezonansowej.

W wąskim przedziale częstotliwości, w którym odbywają się zjawiska rezonansowe, równanie (27) można uprościć

$$x \approx \frac{2}{d_c} \frac{2(\omega - \omega_r)}{\omega_r}, \quad (29)$$

Wówczas przewodność przejściowa $\hat{Y}_p$ przejawia wobec częstotliwości rezonansowej f_r symetrię arytmetyczną.

Zależnie od wartości parametrów krzywa rezonansu wyrażona równaniami (22) lub (28) może być jedno-, dwu- lub trójwierzchołkowa, przy czym w tym ostatnim przypadku wysokość środkowego wierzchołka nie musi być równa wysokości skrajnych wierzchołków [11].

Największą selektywność układu uzyskuje się przy wierzchołku równomiernie falistym o możliwie największym falowaniu [7], dlatego więc należy zbadać warunki powstawania tego typu krzywej rezonansu.

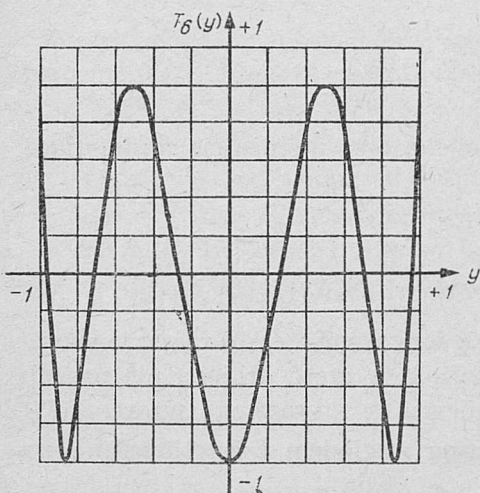
5. RÓWNOMIERNIE FALISTY WIERZCHOŁEK KRZYWYCH REZONANSU

Ze względu na wprowadzanie możliwie małych zniekształceń liniowych przebiegów wzmacnianych (prawie periodycznych) przez wzmacniacz, wierzchołek jego krzywej rezonansu powinien być płaski, dostatecznie szeroki i o możliwie stromych zboczach, gwarantujących dobrą selektywność.

Tego typu krzywą rezonansu uzyskuje się przy określonych wartościach współczynników sprzężeń⁴, tak zwanych optymalnych [1], w przypadku gdy wyłaniające się wierzchołki zaczynają się od siebie oddalać. Takie krzywe rezonansu odznaczają się jednak stosunkowo najmniejszą selektywnością w porównaniu z krzywymi o równomiernie falistym

wierzchołku, otrzymywanym przy sprzężeniach większych od optymalnego. Naturalnie zwiększoną selektywność uzyskuje się kosztem nierównomierności wierzchołka.

Falisty kształt wierzchołka aproksymuje w pewnym stopniu pożądaną jego płaskość w sposób analogiczny do funkcji Czebyszewa, funkcji największego przybliżenia [3], [12]. Ponieważ mamy do czynienia z układem o trzech obwodach, więc jak wspomniano, największa liczba rezonansów nie przekracza trzech, wobec czego przewodność przejściowa może mieć postać funkcji Czebyszewa szóstego rzędu



Rys. 4. Funkcja Czebyszewa szóstego rzędu

$$T_6(y) = 32y^6 - 48y^4 + 18y^2 - 1. \quad (30)$$

Obraz tej funkcji przedstawiony jest na rys. 4.

⁴ Oraz przy pewnych wartościach dobroci obwodów.

Zadaniem naszym będzie zbadanie, czy moduł przewodności przejściowej Y_p nie może mieć postaci wymienionej funkcji Czebyszewa w założeniu, że zmienna x wyrażona jest przybliżonym wzorem (29), prowadzącym do arytmetycznej symetrii krzywej rezonansu wobec częstotliwości rezonansowej f_r . W tym celu zbadamy wyrażenie zawarte w klamrach wzoru (28) i napiszemy je w postaci

$$\{x\} = 2x^2 - (b+1)^2 + 4g^2 + jx[x^2 - 2(b+1)] = \hat{F}(x), \quad (31)$$

gdzie

$$b = 2(s_1^2 + s_2^2 + \delta_a \delta_p + \delta_a \delta_s + \delta_p \delta_s) - 1 \quad (32)$$

$$g^2 = \frac{1}{4} (b+1)^2 - 2(\delta_s s_1^2 - \delta_a s_2^2 + \delta_a \delta_p \delta_s). \quad (33)$$

Z tych podstawień widzimy, że $\{x\}$ czyli zmienna część przewodności przejściowej jest właściwie funkcją tylko dwóch parametrów b i g , zależnych od pięciu dotychczasowych ($s_1, s_2, \delta_a, \delta_p, \delta_s$).

Kwadrat modułu badanej funkcji

$$F^2(x) = x^6 - 4bx^4 + 16g^2x^2 + [(b+1)^2 - 4g^2]^2 \quad (34)$$

przyrównujemy tożsamościowo do przekształconej funkcji Czebyszewa

$$F(x) = a[T_6(y) + l], \quad (35)$$

skąd znajdujemy przez zrównanie wyrazów o tej samej potęgze

$$y = \frac{x}{\sqrt{b}} \sqrt{\frac{3}{8}}, \quad (36)$$

$$a = \frac{16}{27} b^3, \quad (37)$$

$$l = 1 + \frac{(2b+1)^2}{a} \quad (37a)$$

oraz warunek konieczny do uzyskania równomiernie falistego wierzchołka

$$g^2 = \frac{1}{2} b^2, \quad (38)$$

w którym $b > 0$. Wówczas można stwierdzić, że równanie przewodności przejściowej wzmacniacza o równomiernie falistym wierzchołku, odpowiadającym funkcji Czebyszewa, przybiera postać

$$\hat{Y}_p \approx \frac{\omega_r \sqrt{C_a C_s}}{8s_1 s_2} d_c \{2x^2 - 2b - 1 + jx[x^2 - 2(b+1)]\}, \quad (39)$$

a moduł tego wyrażenia

$$Y_p \approx \frac{\omega_r \sqrt{C_a C_s}}{8s_1 s_2} d_c \left\{ x^6 - 4bx^4 + 4b^2 x^2 + (2b+1)^2 \right\}^{1/2} =$$

$$= \frac{\omega_r \sqrt{C_a C_s}}{8s_1 s_2} d_c \left\{ \frac{16}{27} b^3 \left[T_6 \left(\frac{3}{8} \frac{x}{\sqrt{b}} \right) + 1 \right] + (2b+1)^2 \right\}^{1/2}, \quad (40)$$

gdzie $T_6 \left(\sqrt{\frac{3}{8}} \frac{x}{\sqrt{b}} \right)$ jest funkcją Czebyszewa szóstego stopnia o zmiennej

$$\sqrt{\frac{3}{8}} \frac{x}{\sqrt{b}}.$$

Z równań tych wynika, że zmiany przewodności przejściowej jak i wzmocnienia układu o równomiernie falistym wierzchołku zależą od zmiennej x , wyrażającej odstrojenie od rezonansu i tylko od jednego parametru b .

6. WZMOCNIENIE UKŁADU O RÓWNOMIERNIE FALISTYM WIERZCHOŁKU KRZYWEJ REZONANSU

Wzmocnienie napięciowe układu posiadającego krzywą rezonansu o równomiernie falistym wierzchołku obliczamy ze wzorów (7) i (39) w postaci

$$\hat{k}_u = - \frac{8s_1 s_2 S_a}{\omega_r \sqrt{C_a C_s} d_c \{ 2x^2 - 2b - 1 + jx[x^2 - 2(b+1)] \}}, \quad (41)$$

przy czym moduł wzmocnienia

$$\hat{k}_u = \frac{8s_1 s_2 S_a}{\omega_r \sqrt{C_a C_s} d_c \sqrt{x^6 - 4bx^4 + 4b^2 x^2 + (2b+1)^2}}, \quad (42)$$

a jego kąt fazowy

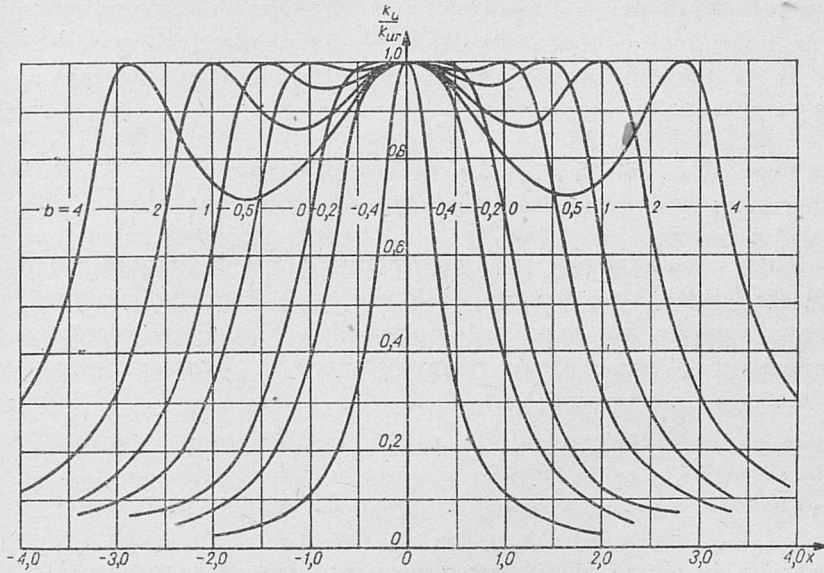
$$\alpha = \pi + \Theta = \pi - \arctg \frac{x^3 - 2(b+1)x}{2x^2 - 2b - 1} \quad (43)$$

W rezonansie $\omega = \omega_r$ i $x = 0$. Moduł wzmocnienia rezonansowego zatem równa się

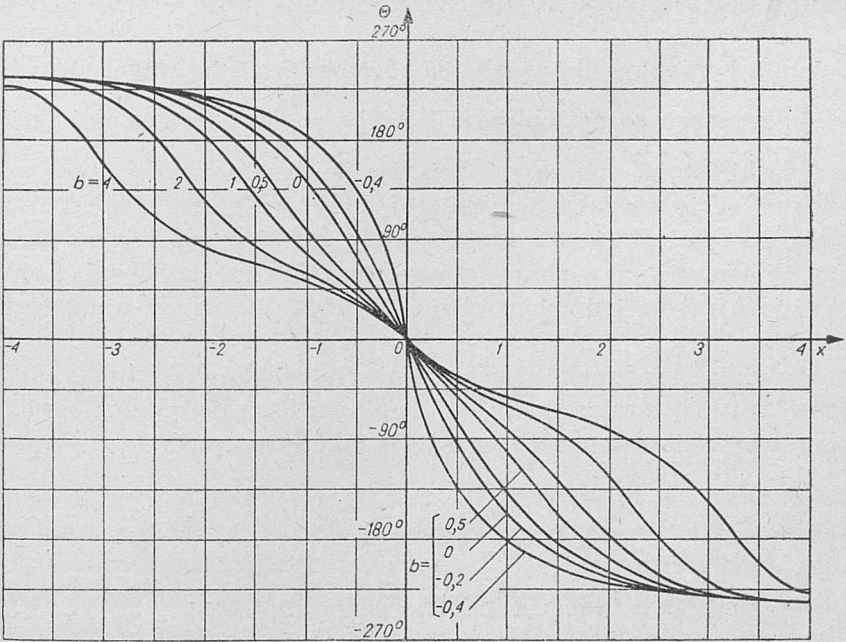
$$k_{ur} = \frac{8s_1 s_2 S_a}{\omega_r \sqrt{C_a C_s} d_c (2b+1)}. \quad (44)$$

Moduł wzmocnienia napięciowego można przedstawić w znormowanej postaci

$$\frac{k_u}{k_{ur}} = \left\{ \left[\frac{x(x^2 - 2b)}{2b+1} \right]^2 + 1 \right\}^{-1/2} = f(x) \quad (45)$$



Rys. 5. Uniwersalna charakterystyka wzmocnienia wzmacniacza rezonansowego z trójobwodowym filtrem pasmowym. Wierzchołek równomiernie falisty



Rys. 6. Względny kąt fazowy wzmocnienia wzmacniacza rezonansowego z trójobwodowym filtrem pasmowym. Wierzchołek równomiernie falisty

jako funkcję zmiennej x i parametru b . Odzwierciedleniem tego wyrażenia są uniwersalne charakterystyki wzmocnienia [11], przedstawione na rys. 5. W podobny sposób można przedstawić względny kąt fazowy (rys. 6)

$$\Theta = -\arctg \frac{x^3 - 2(b+1)x}{2x^2 - 2b - 1} \quad (46)$$

Z analizy równania (45) [11] jak również z rys. 5 wynika, że najbardziej płaski wierzchołek otrzymuje się dla $b=0$. Temu warunkowi matematycznemu odpowiada sprzężenie optymalne. Wzmocnienie rezonansowe k_{ur} odniesione do wzmocnienia rezonansowego k_{uro} przy sprzężeniu optymalnym wyraża się wzorem

$$\frac{k_{ur}}{k_{uro}} = \frac{1}{2b+1}, \quad (47)$$

skąd wynika, że wzmocnienie rezonansowe maleje ze wzrostem b , a więc i ze wzrostem szerokości pasma u wierzchołka.

7. WARUNKI UZYSKIWANIA RÓWNOMIERNIE FALISTEGO WIERZCHOŁKA

Warunki konieczne dla uzyskania równomiernie falistego wierzchołka krzywej rezonansu są następujące: $b > 0$ i $g^2 = \frac{1}{4}b^2$. Teraz należy ustalić, jakie związki istnieć muszą między tłumieniami obwodów oraz współczynnikami sprzężeń, aby warunki te były spełnione. Jako parametr określający postać charakterystyki według rys. 5 przyjmujemy nadal b . Wiemy, że b musi być większe od zera dla trójwierzchołkowej charakterystyki i że $b=0$ dla jednowierzchołkowej charakterystyki o najszerszym wierzchołku.

Podstawiając warunek równomiernie falistego wierzchołka (38) do równań (32) i (33) otrzymujemy dla danej wartości parametru b znormalizowane wartości zastępczych współczynników sprzężeń

$$s_1^2 = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{\delta_p}{\delta_a - \delta_s} \right) [(\delta_p + \delta_s)^2 + 3\delta_a^2 + 2b], \quad (48)$$

$$s_2^2 = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{\delta_p}{\delta_a - \delta_s} \right) [(\delta_a + \delta_p)^2 + 3\delta_s^2 + 2b], \quad (49)$$

będące funkcjami znormalizowanych współczynników tłumień. Z rów-

nania (48) wynika, że w celu otrzymania rzeczywistej wartości dla s_1 powinien być spełniony warunek [11]

$$\delta_p \leq |\delta_a - \delta_s|. \quad (50)$$

Zatem przy spełnionej nierówności (50) dla zadanego kształtu charakterystyki b i danych tłumień obwodów d_a , d_p i d_s można znaleźć szukane wartości znormalizowanych zastępczych współczynników sprzężeń, a za pomocą równań (18), (19), (25) i (26) — indukcyjności wzajemne lub współczynniki sprzężeń.

Z rozważań tych wynika, że istnieje nieskończenie wiele rozwiązań zagadnienia. W praktyce ważne są przypadki łatwe do zrealizowania i prowadzące do maksimum wzmocnienia. Szereg autorów badało różne rozkłady tłumień i wpływ ich na wzmocnienie [2], [4], [5], [16], [7], jednak nie rozwiązano zagadnienia do końca dla przypadku równych sprzężeń, optymalnego z praktycznego punktu widzenia⁵.

Najprostszy przypadek równych tłumień obwodów $d_a = d_p = d_s$ nie spełnia podstawowego warunku (50) równomiernej falistości wierzchołka [2]. Drugi przypadek równych tłumień obwodu anodowego i siatkowego $d_a = d_s$ prowadzi do warunku zerowego tłumienia obwodu pośredniego $d_p = 0$ [2], [4], który jest niemożliwy do spełnienia dokładnego, a trudny i kosztowny do spełnienia przybliżonego (obwód z kwarcem [18]). W tym przypadku suma kwadratów znormalizowanych zastępczych współczynników sprzężeń

$$s_1^2 + s_2^2 = \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{2} \right). \quad (51)$$

Trzeci przypadek silniej tłumionego obwodu anodowego [10], [7], nadaje się do praktycznej realizacji. Mimo że maksimum wzmocnienia występuje przy spełnieniu warunku [7],

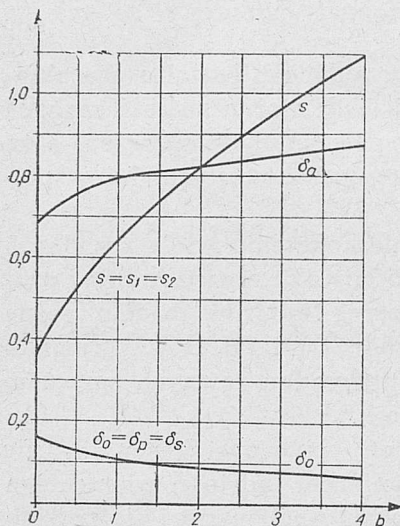
$$\delta_a > \delta_p = \delta_s = \delta_0, \quad (52)$$

co prowadzi w praktyce do niewielkiego tłumienia obwodu pośredniego w celu wyrównania tłumienia przewodnością wejściową lampy wzbudzanej, to jednak rozważa się również układy z nietłumionym obwodem pośrednim [16].

Opisana w literaturze metoda obliczeń dla omawianego przypadku [7], określonego równaniem (52), polega na zakładaniu wartości pewnego pośredniego parametru, co prowadzi do różnych wartości współczynników sprzężeń. Przy nieodpowiednim wyborze tego parametru wartość jednego ze współczynników sprzężeń może okazać się za małą i niedogodna do praktycznej realizacji.

⁵ Patrz uwaga 2 na stronie 36.

Dlatego wydaje się celowe zmodyfikowanie tej metody obliczeń przy założeniu równości współczynników sprzężeń w postaci



Rys. 7. Wykresy do obliczenia znormalizowanych wartości współczynników sprzężeń $s_1=s_2=s$ oraz tłumień δ_a i $\delta_p=\delta_s=\delta_0$ w zależności od współczynnika kształtu b równomiernie falistej krzywej rezonansu w przypadku silniej tłumionego obwodu anodowego

$$s_1 = s_2 = s. \quad (53)$$

Wówczas z równań (48), (49) i (53), pamiętając o zależności między znormalizowanymi współczynnikami tłumień w postaci

$$\delta_a + 2\delta_0 = 1, \quad (54)$$

obliczamy dla danej wartości współczynnika b kształtu krzywych rezonansu szukane wartości znormalizowanych tłumień δ_a i $\delta_p=\delta_s=\delta_0$ oraz współczynników sprzężeń s . Wyniki tych obliczeń, przedstawione w postaci krzywych na rys. 7, pozwalają na obliczenie elementów obwodów przy zadanej postaci krzywej rezonansu. W szczególnym przypadku płaskiej charakterystyki wierzchołka ($b=0$) otrzymujemy

znane z literatury [10] rozwiązanie, które prowadzi do następujących wartości $\delta_a=0,64$, $\delta_p=\delta_s=\delta_0=0,16$ i $s=0,357$.

8. SYNTEZA WZMACNIACZY O TRÓJWIERZCHOŁKOWEJ KRZYWEJ REZONANSU

Obliczenie wzmacniaczy i jednowierzchołkowej płaskiej krzywej rezonansu w opisanych warunkach przeprowadza się według znanych z literatury [5] wzorów, które mogą być łatwo dostosowane do układu z rys. 1. Brak jest natomiast wzorów lub wykresów do obliczania układu z równomiernie falistą charakterystyką w założeniu silniej tłumionego obwodu anodowego i równych sprzężeń między obwodami.

Przy obliczaniu tego typu wzmacniaczy zakłada się zwykle pewną nierównomierność wierzchołka, najlepiej w postaci współczynnika q_w , oraz względną szerokość pasma między wierzchołkami

$$b_w = \frac{B_w}{f_r} = \frac{(2\Delta f)_w}{f_r}, \quad (55)$$

Wielkości te są określone według rys. 8. Jako parametr przyjmuje się tutaj szerokość pasma między wierzchołkami B_w zamiast zwykle stosowanej szerokości między punktami połowy mocy B_p , gdyż szerokość B_w jest wielkością niezmienną przy kaskadowym łączeniu identycznych wzmacniaczy. Szerokość pasma między wierzchołkami wyznacza się przyrównując do zera pochodną najlepiej Y_p w wyniku czego znajduje się między innymi następujące rozwiązanie:

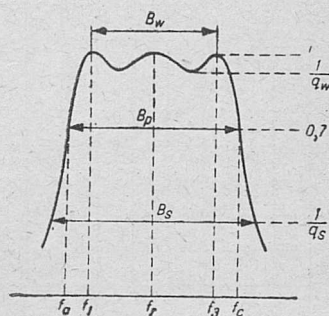
$$x_{\max} = 0 \quad (56)$$

oraz

$$x_{\max}^2 = 2b. \quad (57)$$

Wstawiając tę ostatnią wartość x do równania (29) otrzymujemy

$$b_w = \frac{B_w}{f_r} = d_c \sqrt{\frac{b}{2}}. \quad (58)$$



Rys. 8. Krzywa rezonansu z równomiernie falistym wierzchołkiem

Chcąc znaleźć całkowite tłumienie układu w zależności od współczynnika q_w charakteryzującego kształt wierzchołka, należy wyznaczyć jeszcze zależność między b i q_w . Zależność tę znajdujemy z definicji

$$q_w = \frac{k_{u \max}}{k_{u \min}} = \frac{k_{ur}}{k_{ul}}, \quad (59)$$

Minimalną wartość wzmocnienia $k_{u \min}$, występującą we wgłębieniach wierzchołka krzywej rezonansu, znajduje się jako wynik przyrównania do zera pochodnej Y_p^2 , w wyniku czego znajdujemy między innymi

$$x_{\min}^2 = \frac{2}{3} b, \quad (60)$$

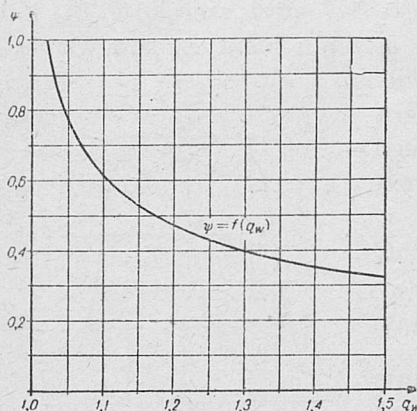
co pozwala na obliczenie z równania (42) wartości $k_{u \min}$. Znajdując k_{ur} z równania (44), z definicji (59) otrzymujemy

$$q_w^2 = \frac{32}{27} b^3 + 1, \quad (61)$$

skąd ostatecznie wyznacza się szukaną zależność w postaci

$$b = \frac{3}{2} \left(\sqrt[3]{\frac{1+q_w}{q_w^2-1}} + \sqrt[3]{\frac{1-q_w}{q_w^2-1}} \right)^{-2} = \frac{1}{2\psi(q_w)}. \quad (62)$$

Funkcja pomocnicza $\psi(q_w)$ zilustrowana wykresem na rys. 9, pozwala na napisanie pierwszego równania obliczeniowego w prostej postaci



Rys. 9. Wykres pomocniczy $\psi = f(q_w)$ do obliczania wzmacniacza o równomiernie falistym wierzchołku

$$d_c = 2\psi(q_w) \frac{B_w}{f_r} \quad (63)$$

Z równania tego wyznaczamy tłumienie układu konieczne i wystarczające, aby wierzchołek równomiernie falistej krzywej rezonansu miał względną szerokość zewnętrznych wierzchołków B_w/f_r , a wgłębienia były równe k_{ur}/q_w .

Rozdziału całkowitego tłumienia układu d_c na poszczególne obwody dokonuje się za pomocą krzywych z rys. 7, przeliczonych do postaci

uwidocznionych na rys. 10, a wyrażających zależność znormalizowanych tłumień δ_a i $\delta_p = \delta_s = \delta_0$ od współczynnika q_w . Z definicji (24) otrzymujemy drugie równanie obliczeniowe

$$d_a = \delta_a d_c \quad (64)$$

oraz trzecie

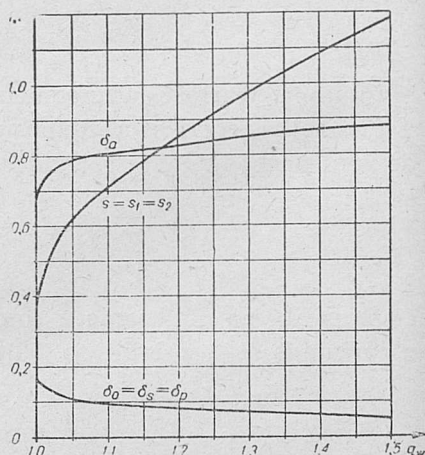
$$d_p = d_s = \delta_0 d_c \quad (65)$$

Przedstawiona na rys. 10 zależność $s_1 = s_2 = s = f(q_w)$ pozwala również obliczyć z definicji (18), (19), (25) i (26) indukcyjności wzajemne

$$M_1 = s d_c L_{p1} \sqrt{\frac{L_a}{L_p}} \quad (66)$$

$$M_2 = s d_c L_{p2} \sqrt{\frac{L_s}{L_p}} \quad (67)$$

w założeniu, że uprzednio obliczyliśmy indukcyjność L_a, L_{p1}, L_{p2} i L_s ze wzorów (15) i (16) przy danych wartościach pojemności C_a, C_p i C_s .



Rys. 10. Wykresy do obliczania znormalizowanych wartości współczynników sprzężenia $s_1 = s_2 = s$ oraz tłumień δ_a i $\delta_p = \delta_s = \delta_0$ w zależności od współczynnika kształtu q_w równomiernie falistej krzywej rezonansu w przypadku silnie tłumionego obwodu anodowego

Równania (66) i (67) stanowią czwarte i piąte równanie obliczeniowe wzmacniacza. Przewodności tłumiące poszczególne obwody wyznacza się z ich definicji (17) i tłumień obliczonych wzorami (64) i (65).

Po wyznaczeniu wartości wszystkich elementów układu należy przystąpić do obliczenia wzmocnienia rezonansowego przy danym nachyleniu charakterystyki lampy S_a . Wzmocnienie to można obliczyć po dokonaniu syntezy ze wzoru (44), lecz można go obliczyć również przed dokonaniem syntezy przy zadanych S_a, B_w, q_w , założywszy wartości pojemności obwodów C_a i C_s .

Wstępnego obliczania wzmocnienia przed dokonaniem syntezy (w celu sprawdzenia przydatności wzmacniacza) dokonuje się ze wzoru

$$k_{ur} = \frac{2}{\pi} \frac{\psi(q_w)}{1 + \psi^2(q_w)} \frac{S_a s^2(q_w)}{B_w \sqrt{C_a C_s}}, \quad (68)$$

który otrzymuje się z (44) po podstawieniu do niego zależności wyżej obliczonych, jak na przykład (63) itp. Współczynniki $\psi(q_w)$ i $s(q_w)$ znajduje się z wykresów na rys. 9 i 10.

Rozwiązanie zagadnienia nie byłoby kompletne, gdyby nie można było określić szerokości krzywej rezonansu B_s przy dowolnym spadku wzmocnienia, wyrażonym według rys. 8 współczynnikiem

$$q_s = \frac{k_{ur}}{k_u}. \quad (69)$$

Podstawiając do tego równania odpowiednie wartości wzmocnienia ze wzorów (42) i (44) i uwzględniając przybliżoną definicję x (29) oraz rugując d_c i b za pomocą (62) i (63) otrzymujemy [4]

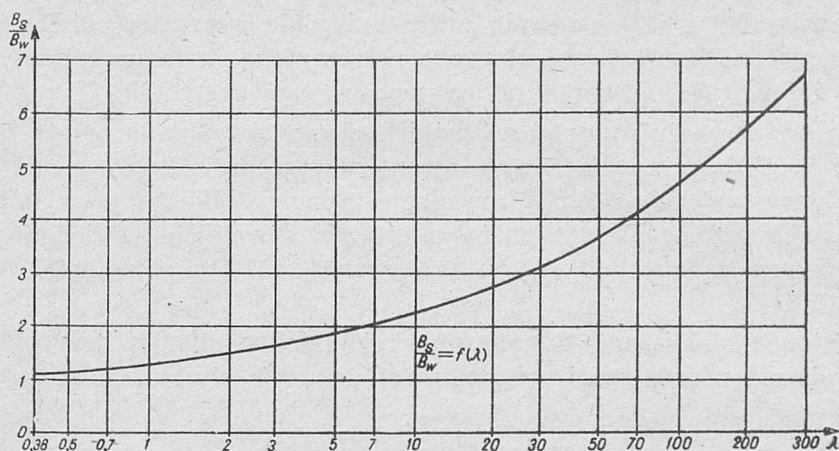
$$q_s^2 = 1 + \left\{ \frac{\frac{B_s}{B_w} \left[\left(\frac{B_s}{B_w} \right)^2 - 1 \right]}{[1 + \psi^2(q_w)] \psi(q_w)} \right\}^2. \quad (70)$$

Rozwiązanie tego równania ma postać

$$\frac{B_s}{B_w} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left[\sqrt[3]{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \frac{4}{27}}} + \sqrt[3]{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \frac{4}{27}}} \right], \quad (71)$$

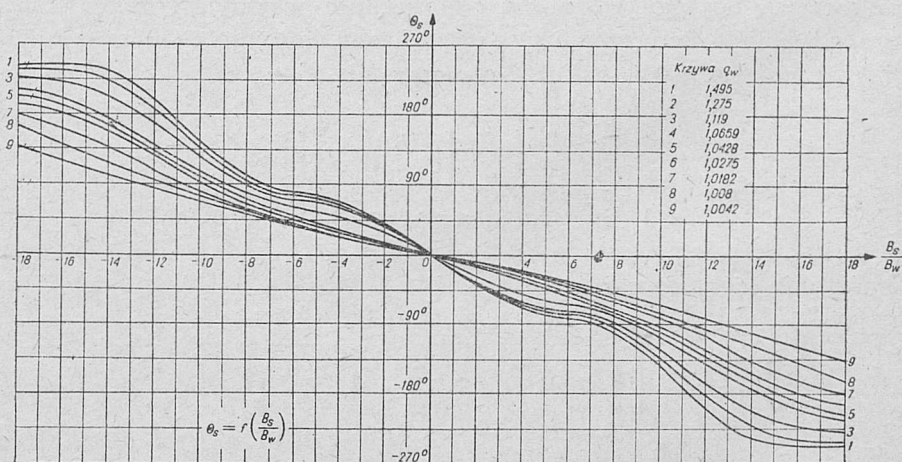
gdzie

$$\lambda = \psi(q_w) [1 + \psi^2(q_w)] \sqrt{q_s^2 - 1}. \quad (72)$$



Rys. 11. Wykres pomocniczy $\frac{B_s}{B_w} = f(\lambda)$ do obliczania wzmacniacza o równomiernie falistym wierzchołku

Zależność $\frac{B_s}{B_w} = f(\lambda)$ jest zilustrowana wykresem na rys. 11, który ułatwia obliczenia.



Rys. 12. Względny kąt fazowy wzmocnienia $\theta_s = f\left(\frac{B_s}{B_w}\right)$ przy $q_w = \text{const}$

Na koniec należy wyznaczyć względny kąt fazowy θ_s , występujący przy odstrojeniu $\frac{1}{2}B_s$. Kąt ten otrzymujemy ze wzoru (46), do którego podstawiono znane nam wartości na x i b [4]

$$\theta_s = -\arctg \frac{\frac{B_s}{B_w} \left[1 + 2\psi^2(q_w) - \left(\frac{B_s}{B_w} \right)^2 \right]}{\psi(q_w) \left[1 + \psi^2(q_w) - 2 \left(\frac{B_s}{B_w} \right)^2 \right]}. \quad (73)$$

Zależność $\theta_s = f\left(\frac{B_s}{B_w}\right)$ przy $q_w = \text{const}$ podana jest na rys. 12.

9. OBLICZANIE WIELOSTOPNIOWYCH WZMACNIACZY O TRÓJWIERZCHOŁKOWEJ KRZYWEJ REZONANSU

Wyprowadzone uprzednio wzory obliczeniowe dla jednego stopnia wzmacniacza dają się łatwo dostosować do obliczania wielostopniowych wzmacniaczy. Pamiętając o tym, że przy kaskadowym łączeniu wzmacniaczy wzmocnienia rosną z n -tą potęgą liczby stopni, we wzorach obliczeniowych jednostopniowego wzmacniacza zamiast współczynników q_w i q_s stosujemy ich n -te pierwiastki w postaci $\sqrt[n]{q_{cw}}$ i $\sqrt[n]{q_{cs}}$. Przy tych założeniach funkcja pomocnicza przybiera postać

$$\psi(q_w) = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \left(\sqrt[3]{\frac{1 + \sqrt[n]{q_{cw}}}{\sqrt[n]{q_{cw}^2} - 1}} + \sqrt[3]{\frac{1 - \sqrt[n]{q_{cw}}}{\sqrt[n]{q_{cw}^2} - 1}} \right), \quad (74)$$

która pozwala na obliczenie całkowitego tłumienia układu jednego stopnia

$$d_c = 2\psi(q_w) \frac{B_w}{f_r}. \quad (75)$$

Znormalizowane wartości tłumień δ_a , $\delta_p = \delta_s = \delta_0$ oraz znormalizowane wartości zastępczych współczynników sprzężeń $s_1 = s_2 = s$ dla jednego stopnia wyznaczamy z krzywych na rys. 10 dla

$$q_w = \sqrt[n]{q_{cw}}. \quad (76)$$

Dane te pozwalają na obliczenie elementów poszczególnych stopni według wzorów podanych w poprzednim rozdziale. W analogiczny sposób oblicza się wzmocnienie rezonansowe jednego stopnia ze wzoru (68).

Szerokość krzywej rezonansu całego wzmacniacza B_{cs} przy pozostałości wzmocnienia k_{uc}/q_{cs} oblicza się z definicji

$$q_{cs} = \frac{k_{ucr}}{k_{uc}} \quad (77)$$

podstawiając do równania (70)

$$q_c = \sqrt[n]{q_{cs}}, \quad (78)$$

w rezultacie czego otrzymujemy

$$q_{cs} = \sqrt[n]{1 + \left\{ \frac{B_{cs} \left[\left(\frac{B_{cs}}{B_w} \right)^2 - 1 \right]}{[1 + \psi^2(q_{cs})] \psi(q_{cs})} \right\}^2}. \quad (79)$$

Rozwiązanie tego równania ma postać

$$\frac{B_{cs}}{B_w} = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \left[\sqrt[n]{\lambda_c + \sqrt{\lambda_c^2 - \frac{4}{27}}} + \sqrt[n]{\lambda_c - \sqrt{\lambda_c^2 - \frac{4}{27}}} \right], \quad (80)$$

gdzie

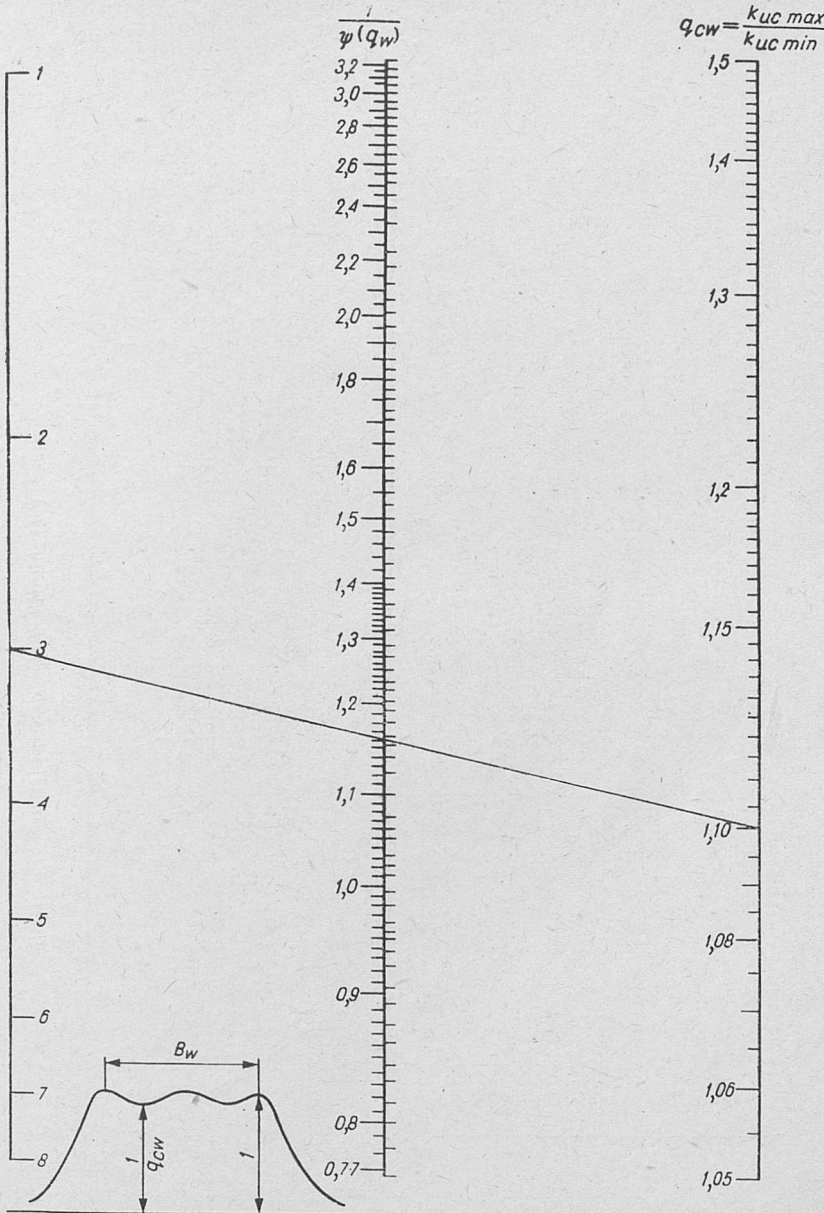
$$\lambda_c = \psi(q_w) [1 + \psi^2(q_w)] \sqrt[n]{q_{cs}^2 - 1}. \quad (81)$$

Zależność (80) jest zilustrowana wykresem na rys. 11. Należy zwrócić uwagę, że względny kąt fazowy θ_s jednego stopnia wzmacniacza, występujący przy rozstrojeniu $\frac{1}{2} B_{cs}$, wyznacza się ze wzoru (73) lub z wykresu przedstawionego na rys. 12.

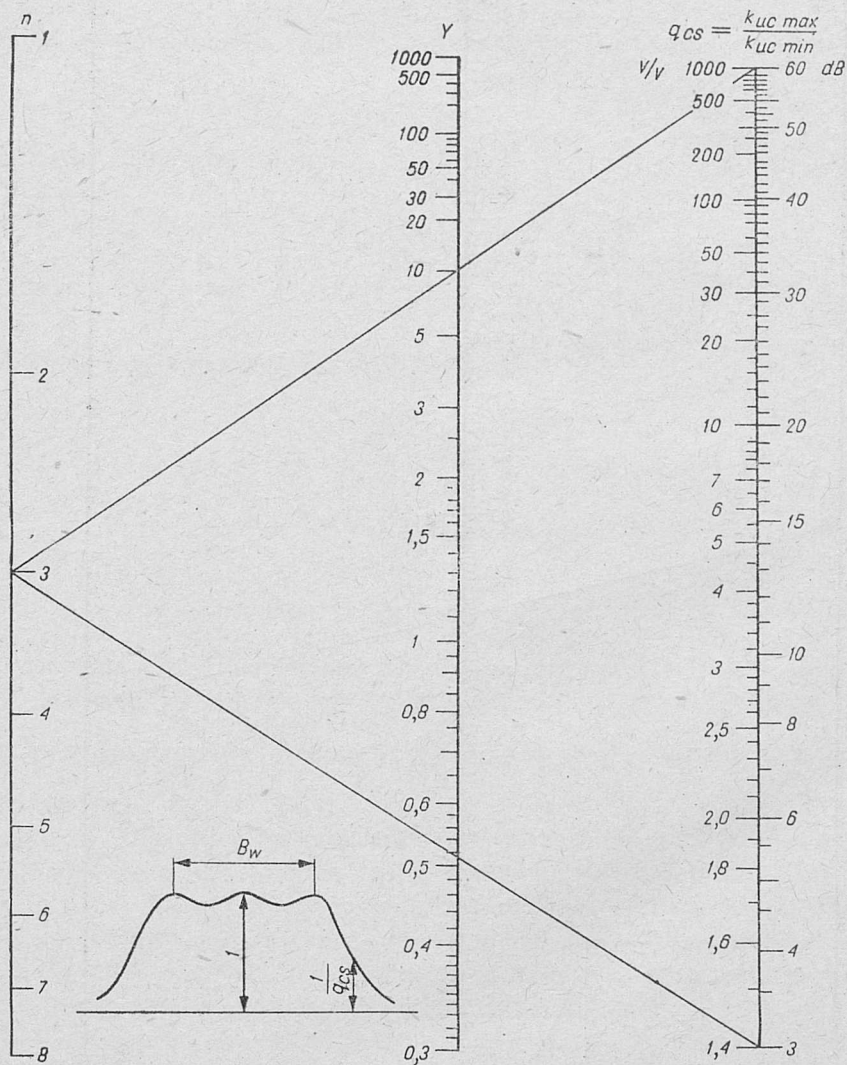
Znane z literatury nomogramy do obliczania wielostopniowych wzmacniaczy rezonansowych z trójobwodowym filtrem pasmowym [4], skonstruowane dla układu z pośrednim obwodem nietłumionym, dostosowane do układu z silniej tłumionym obwodem anodowym przedstawione są na rys. 13, 14 i 15. Zastosowanie ich pozwala na znaczne skrócenie czasu obliczeń, jak to wynika z przykładu niżej podanego.

10. PRZYKŁAD OBLICZANIA WZMACNIACZA ZA POMOCĄ NOMOGRAMÓW

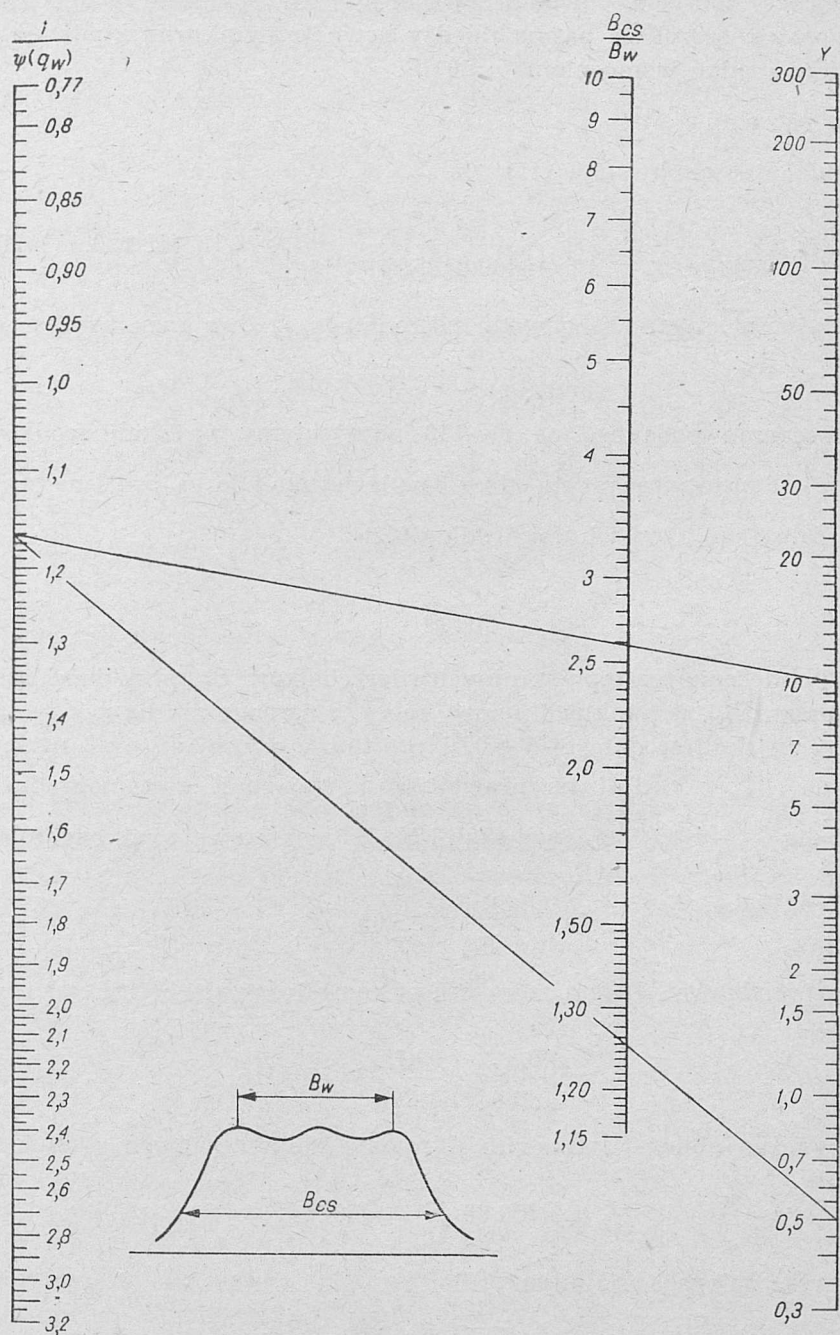
W trójstopniowym wzmacniaczu, pracującym przy $f_r = 463$ kHz, stosunek wzmocnienia wierzchołków do wgłębień powinien wynosić $q_{cw} = 1,1$ przy szerokości pasma w punktach połowy mocy $B_{cp} = 9$ kHz. Pojemności obwodów natomiast $C_a = C_p = C_s = C_0 = 250$ pF, a nachylenie charakterystyki lampy $S_a = 1,65$ mA/V.



Rys. 13. Nomogram I do obliczania wzmacniaczy rezonansowych z trójobwodowym filtrem pasmowym



Rys. 14. Nomogram II do obliczania wzmacniaczy rezonansowych z trójobwodowym filtrem pasmowym



Rys. 15. Nomogram III do obliczania wzmacniaczy rezonansowych z trójobwodowym filtrem pasmowym

Obliczyć dobrocie obwodów, współczynniki sprzężeń, wzmocnienie rezonansowe, szerokość pasma między zewnętrznymi wierzchołkami B_w oraz przy spadku wzmocnienia o 60 dB.

Rozwiązanie

Indukcyjności obwodów (15)

$$L_a = L_p = L_s = \frac{1}{\omega_r^2 C_o} = \frac{1}{(2\pi 463000)^2 250 \cdot 10^{-12}} = 4,76 \cdot 10^{-4} \text{H} \approx 0,48 \text{ mH}.$$

Indukcyjności cząstkowe obwodu pośredniego są dwa razy większe (16)

$$L_{p1} = L_{p2} = 2L_p \approx 0,9 \text{ mH}.$$

Z nomogramu podanego na rys. 13 odczytujemy na skali środkowej

$\frac{1}{\psi(q_w)} = 1,16$ prowadząc prostą od $n=3$ na lewej skali do $q_{cw}=1,1$ na prawej skali. Zatem $\psi(q_{cw})=0,86$ oraz według (62)

$$b = \frac{1}{2,0,86^2} = 0,675.$$

W celu obliczenia rozstępu skrajnych wierzchołków B_w , przy danej szerokości pasma B_{cp} w punktach połowy mocy, z nomogramu na rys. 14 znajdujemy na skali środkowej $Y=0,51$ prowadząc prostą od $n=3$ na lewej skali do $q_{cp}=\sqrt{2}=1,41$ na prawej skali. Następnie z nomogramu na rys. 15 dla $\frac{1}{\psi(q_w)}=1,16$ na lewej skali i $Y=0,51$ na prawej skali znajdujemy

$$\frac{B_{cp}}{B_w} = 1,265$$

na skali środkowej. Zatem szerokość pasma między zewnętrznymi wierzchołkami

$$B_w = \frac{B_{cp}}{1,265} = \frac{9 \text{ kHz}}{1,265} = 7,1 \text{ kHz}.$$

Teraz można obliczyć całkowite tłumienie układu jednego stopnia (75)

$$d_c = 2,0,86 \frac{7,1}{463} = 0,0264.$$

Z wykresu na rys. 8 znajdujemy dla

$$q_w = \sqrt[3]{q_{cw}} = \sqrt[3]{1,1} = 1,03,$$

$$\delta_a = 0,77, \quad \delta_p = \delta_s = 0,12 \quad \text{ i } \quad s_1 = s_2 = s = 0,56.$$

Wobec tego tłumienie obwodu anodowego (64)

$$d_a = 0,77 \cdot 0,0264 = 0,02$$

oraz tłumienia obwodów pośredniego i siatkowego (65)

$$d_p = d_s = 0,12 \cdot 0,0264 = 0,00316.$$

Odpowiednie dobrocie obwodów wynoszą zatem $Q_a = 50$ i $Q_p = Q_s = 315$. W przypadku gdyby te ostatnie wartości nie były możliwe do zrealizowania, należałoby dopuścić mniejsze q_{cw} i założyć bardziej płaski wierzchołek.

Indukcyjności wzajemne obliczone ze wzorów (66) i (67)

$$M_1 = M_2 = 0,56 \cdot 0,0264 \cdot 4,76 \cdot 10^{-4} \text{H} = 7 \cdot 10^{-6} \text{H} = 7 \mu\text{H}.$$

Odpowiadające im współczynniki sprzężeń (12) i (13)

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \frac{7 \cdot 10,6}{1 \cdot (4,76 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 2} \approx 0,01 = 1\%.$$

Wzmocnienie rezonansowe jednego stopnia (68)

$$k_{ur} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{0,86}{1 + 0,86^2} \cdot \frac{1,65 \cdot 10^{-3} \cdot 0,56^2}{7,1 \cdot 10^{-3} \cdot 250 \cdot 10^{-12}} = 55,5 \text{V/V} = 35 \text{ dB}.$$

Zatem całkowite wzmocnienie rezonansowe wynosi $k_{ucr} = 3,55 = 105 \text{ dB}$.

Szerokość pasma B_{cs} przy spadku wzmocnienia 60 dB, a więc przy $q_{cs} = 1000$, znajdujemy posilując się również nomogramami. Z nomogramu na rys. 14 dla $n = 3$ na lewej skali i dla $q_{cs} = 1000$ na prawej skali znajdujemy $Y = 10$ na skali środkowej, po czym z nomogramu na rys. 15 dla $\frac{1}{\psi(q_w)} = 1,16$ na lewej skali i dla $Y = 10$ na skali prawej znajdujemy

$$\frac{B_{sc}}{B_w} = 2,6$$

na skali środkowej. Zatem szerokość pasma krzywej rezonansu dla całego wzmacniacza przy spadku wzmocnienia o 60 dB wynosi

$$B_{cs} = 2,6 B_w = 2,6 \cdot 7,1 \text{ kHz} = 18,5 \text{ kHz}.$$

Przy tej szerokości pasma odstrojenie odniesione do połowy szerokości pasma między zewnętrznymi wierzchołkami

$$\frac{B_{cs}}{B_w} = \frac{18,5 \text{ kHz}}{7,1 \text{ kHz}} = 2,6.$$

Ponieważ obliczony stosunek nie mieści się na wykresie z rys. 12, więc względny kąt fazowy jednego stopnia dla odstrojenia $\frac{1}{2}B_{cs}$ obliczamy ze wzoru (73)

$$\Theta_s = -\arctg \frac{2,6(1+2 \cdot 0,86^2-2,6^2)}{0,86(1+0,86-2 \cdot 2,6^2)} = -\arctg(\pm 1,51).$$

Rzut oka na rys. 12 wskazuje, że $\Theta_s = \pm(180^\circ + 56^\circ) = \mp 236^\circ$ Zatem całkowity kąt fazowy jednego stopnia (43)

$$\alpha_s = 180^\circ \mp 236^\circ = -56^\circ \text{ lub } 360^\circ + 86^\circ = 56^\circ.$$

Całkowity kąt fazowy całego wzmacniacza

$$\alpha_{cs} = 3\alpha_s = 3 \cdot 56^\circ = \mp 168^\circ.$$

Na zakończenie chciałbym złożyć podziękowanie prof. dr. inż. B. Konorskiemu za cenne uwagi oraz k. n. t. W. Goldemu i mgr. inż. J. Helztyńskiemu za pomoc, jakiej udzielili mi przy opracowaniu niniejszego zagadnienia.

*Katedra Podstaw Telekomunikacji
Politechniki Warszawskiej*

WYKAZ LITERATURY

1. Asiejew B. — Osnovy radiotekhniki — GIL p. WS i R, Moskwa 1947, s. 154.
2. Backhaus H. — Theorie der kurzen Siebketten — Zeitschrift für Hochfrequenztechnik, tom 24, 1924, nr 1, s. 11, nr 2, s. 39 i nr 3, s. 54.
3. Czebyszew P. — Sobranije soczinienij — tom I, Petersburg 1899, s. 273.
4. Dishal M. — Exact design and analysis of double-and triple tuned band-pass amplifiers — nr 6, PIRE 1947, s. 606.
5. Dishal M. — Desing of dissipative band-pass filters producing desired exact amplitude-frequency characteristics — nr 9, PIRE 1949, s. 1050.
6. Drexler G. i Voss H. — Mehrkreisige Bandfilter mit optimaler Annäherung an die ideale Rechteckform der Durchlasskurve — nr 11, Frequenz 1952, s. 337 i 1953, nr 1, s. 20.
7. Feldtkeller R. — Einführung in die Theorie der Rundfunksiebschaltungen — S. Hirzel, Leipzig 1945, s. 5 i 95.
8. Gensel J. — Über die günstigste Form der Übertragungskurven dreikreisiger Rundfunksiebschaltungen — nr 6, TFT 1940, s. 159.
9. Konorski B. — Podstawy Elektrotechniki — tom I, Trzaska Ewert i Michalski, Warszawa 1950, s. 118.
10. Landon V. — Discussion on exact desing and analysis of double and tripled tuned band-pass amplifiers — nr 2, PIRE 1947, s. 1507.
11. Mather N. — An analysis of triple-tuned coupled circuits — nr 7, PIRE 1950, s. 813.
12. Natanson I. — Konstruktiwnaja teorija funkcji — Moskwa 1949.
13. Siforow W. — Radioprijomnyje ustrojstwa — GILp WS i R, Moskwa 1939.

14. Smoliński A. — Zasady wzmacniania — Podstawy teoretyczne — tom I, PWT, Warszawa 1950, s. 3.
15. Smoliński A. — Zasady wzmacniania — Wzmacniacze pasmowe — tom II, PWT, Warszawa 1952, s. 327.
16. Wagner T. — The general design of triple and quadruple tuned circuits — nr 3, PIRE 1951, s. 279.
17. Wucherer H. — Dreikreisige Bandfilter mit symetrischer ausgeglichener Übertragungskurve — nr 6, TFT 1939, s. 231 i nr 8, s. 328.
18. Betzenhammer i Henze — Theoretische Untersuchungen über dreikreisige Bandfilter vom Tschebyscheffschen Typ — A. E. Ü. nr 12, 1954, s. 545.

PRZYPISY

Mając dane spadki napięć $\hat{U}_1$ i $\hat{U}_2$ na dwóch indukcyjnościach, między którymi występuje indukcyjność wzajemna M (rys. 16), obliczamy prądy płynące przez te indukcyjności w sposób następujący⁶:

Równania spadków napięć mają postać

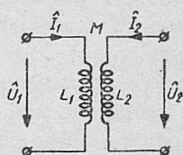
$$\hat{U}_1 = j\omega L_1 \hat{I}_1 + j\omega M \hat{I}_2, \quad (a)$$

$$\hat{U}_2 = j\omega M \hat{I}_1 + j\omega L_2 \hat{I}_2. \quad (b)$$

Rozwiązanie tych równań brzmi

$$\hat{I}_1 = \frac{L_2}{j\omega L_1 L_2 - M^2} \hat{U}_1 - \frac{M}{j\omega L_1 L_2 - M^2} \hat{U}_2, \quad (c)$$

$$\hat{I}_2 = \frac{L_1}{j\omega L_1 L_2 - M^2} \hat{U}_2 - \frac{M}{j\omega L_1 L_2 - M^2} \hat{U}_1. \quad (d)$$



Rys. 16. Prądy i spadki napięć na dwóch indukcyjnościach sprzęgniętych ze sobą

Równania te pozwalają na obliczenie prądów $\hat{I}_1$ i $\hat{I}_2$ przy danych spadkach napięć $\hat{U}_1$ i $\hat{U}_2$ na obu indukcyjnościach.

Wprowadzając współczynnik sprzężenia między obwodami

$$\kappa = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (e)$$

otrzymujemy równanie na prąd w postaci

$$\hat{I}_1 = \frac{1}{j\omega L_1 (1 - \kappa^2)} \hat{U}_1 - \frac{\kappa}{j\omega \sqrt{L_1 L_2} (1 - \kappa^2)} \hat{U}_2, \quad (f)$$

$$\hat{I}_2 = \frac{1}{j\omega L_2 (1 - \kappa^2)} \hat{U}_2 - \frac{\kappa}{j\omega \sqrt{L_1 L_2} (1 - \kappa^2)} \hat{U}_1. \quad (g)$$

Dla słabszych sprzężeń

$$1 - \kappa^2 \approx 1 \quad (h)$$

⁶ Gardner M., Barnes J. — Transients in linear systems — T, I, J. Wiley, New York 1945, s. 40.

oraz

$$\hat{I}_1 \approx \frac{1}{j\omega L_1} \hat{U}_1 - \frac{\kappa}{j\omega \sqrt{L_1 L_2}} \hat{U}_2. \quad (i)$$

$$\hat{I}_2 \approx \frac{1}{j\omega L_2} \hat{U}_2 - \frac{\kappa}{j\omega \sqrt{L_1 L_2}} \hat{U}_1. \quad (j)$$

А. СМОЛИНСКИ

СИНТЕЗ РЕЗОНАНСНЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ С ТРЁХКОНТУРНЫМИ ПОЛОСОВЫМИ ФИЛЬТРАМИ И С ТРАНСФОРМАТОРНЫМ СОПРЯЖЕНИЕМ

Резюме

Резонансные усилители с трёхконтурными полосовыми фильтрами применяются в тех приёмных устройствах, в которых селективность с двухконтурными полосовыми фильтрами является слишком малой, усиление же достаточно.

Усилители с трёхконтурными фильтрами только в известных условиях имеют вполне плоскую или равномерно волнообразную вершину резонансной кривой. Условия возникновения таких резонансных кривых были исследованы неоднократно, однако эти исследования касались не всегда реальных или только теоретически наилучших решений. В настоящем труде исследован случай наилучшего решения как с теоретической, так и практической точки зрения, состоящий в подборе равных сопряжений между сильнее затухающим анодным контуром и одинаково затухающими промежуточным и сеточным контурами.

Обсуждалась замещающая схема усилителя параллельной формы (рис. 2 и 3) и с помощью метода узловых потенциалов (форм. (9), (10) и (11)) рассчитано транзитивную проводимость (форм. (14)) и комплексное усиление системы — форм. (21).

За независимую переменную ν принята относительная отстройка (форм. 20), а главными параметрами контуров являются — их затухание d_n — форм. (17) и заместительные коэффициенты сопряжений между контурами σ_1 и σ_2 форм. (18) и (19).

Исследовано симметрию резонансной кривой в узкой полосе частоты, в которой происходят явления резонанса и, как результат трёх упрощающих положений, получено симметричную форму транзитивной проводимости — форм. (22). Деление независимой переменной и параметров на полное затухание системы d_n — форм. (23) ведёт к новым формам (x, s, δ) упомянутых величин — форм. (24), (25), (26) и (27) и в окончательной форме транзитивной проводимости — форм. (28).

Для получения равномерной волнообразной величины резонансной кривой квадрат модуля транзитивной проводимости был для сопряжений превышающих оптимальное сопряжение — тождественно приравнен к функции Чебышева шестой степени — форм. (30), откуда были получены условия равномерной волнообразности верхушки — форм. (36) до (38).

Как результат этих действий мы нашли, что ход усиления напряжения в системе форм. (41) зависит от переменной x , являющейся функцией отстройки от резонансной частоты и от одного параметра b — форм. (32), что позволяет начертить универсальные кривые усиления, рис. 5 и 6. Из анализа уравнения резонансных кривых (45) следует, что наиболее плоская вершина получается для $b=0$, что и является условием наилучшего сопряжения.

Обсуждению подвергалось условие получения равномерной волнообразной вершины в виде неравенства (50), ведущее на практике к более сильному затуханию анодного контура при одинаковых затуханиях в остальных контурах. Полагая

одинаковые коэффициенты сопряжений — определены их нормализованные значения, а также требуемые нормализованные значения затуханий в зависимости от коэффициента b формы равномерной волнообразной вершины (рис. 7).

Рассмотрен синтез усилителей с трёхвершинной резонансной кривой, позволяющей рассчитать элементы системы при заданной форме резонансной — рис. 8. Результаты расчётов представлены в виде диаграммы (рис. 10) и расчётных формул (63 до 65) для элементов системы и для характеристики усиления (71 и 72) и его фазного угла (73 и рис. 12).

Выведены формулы (см. рис. 75) для расчёта многостепенных усилителей с трёхвершинной резонансной равномерно волнообразной кривой.

Существующие в литературе номограммы были применены к рассматриваемому наилучшему случаю (рис. 13 до 15) и приведён пример расчёта трёхступенного усилителя при помощи номограмм.

A. SMOLIŃSKI

SYNTHESIS OF AMPLIFIERS WITH TRIPLE — TUNED COUPLED CIRCUITS

Summary

Amplifiers with triple-tuned coupled circuits are applied to those types of receiver sets in which the selectivity of two band-pass filters is too low, and the amplification factor is sufficient. Only under some conditions amplifiers with triple tuned coupled circuits have a flat or uniformly wavy top of the resonance curve. The conditions of realizing such resonance-curves have been studied several times, but only the cases of some unreal or merely theoretically optimum solutions have been considered. In this paper theoretically and practically the optimum case is analysed, i. e. the case of equal coupling between circuits, especially strongly damped plate-circuit and equally damped first and third. The parallel equivalent network of the amplifier (Figs. 2 and 3) is examined and by means of the nodal-analysis (Eqs. (9), (10) and (11) the transfer admittance (Eq. 14) and the complex amplification factor (21) are calculated. The relative detuning ν (Eq. (20) has been chosen as the independent variable, the chief circuit-parameters are their coefficients of damping d (Eq. 17) and the equivalent coefficients of coupling between circuits σ_1 and σ_2 (18) and (19). The symmetry of the resonance-curve is studied in a narrow frequency-band, in which the resonance phenomena occur. As a result of three simplifying assumptions the symmetrical form of transfer admittance (22) has been obtained. The division of the independent variable and parameters by the total damping coefficient of the network d_c (Eq. 23) results in new forms (x , s , δ) of the mentioned expressions (24), (25), (26) and (27) in the last form of transfer admittance (Eq. 28).

In order to obtain a uniformly wavy top of the resonance-curve, the square of the magnitude of transfer admittance has been identified with Tchebyshev's function of the sixth order (Eq. (30) for a coupling greater than optimum and thus the conditions of the uniformly wavy top have been obtained (Eq. (36), (37) and (38)).

As a result of these operations it was found that the voltage amplification factor of the network (41) depends upon the variable x , being a function of the detuning from the resonance-frequency and upon one parameter b (Eq. (32). This

allows to draw universal amplification-curves (Figs. 5 and 6). The analysis of resonance-curve (45) shows that the flattest top can be obtained when $b = 0$, which is the condition of optimum coupling.

The condition of obtaining the uniformly wavy top is discussed. This condition, given by inequality (50), leads in practice to a stronger damping of the plate-circuit whilst the other circuits are equally damped. At the assumption of equal coupling coefficients their normal values have been computed. The required normal values of damping coefficients depend upon the coefficient b of the shape of uniformly wavy top (Fig. 7). These coefficients have been also computed.

The synthesis of amplifiers with resonance-curves having three tops is discussed. This allows to calculate elements of the network having a given shape of the resonance-curve (Fig. 8). The results of the calculations are presented as diagrams (Fig. 10) and calculating equations (63), (64) and (65), giving the elements of the network and the amplification (71) and (72) and phase-angle (73) and Fig. 12 characteristics.

The equations to calculate multistage triple-tuned amplifiers (Fig. 75) having an uniformly wavy resonance curve and three tops are evaluated. The existing nomograms are adopted to the optimum case discussed above (Fig. 13, 14 and 15) and an example of calculating a multistage amplifier by means of nomograms is computed.

631.3.011.1:621.3.015

B. KONORSKI

Nowe twierdzenia o polu elektrostatycznym

Rękopis dostarczono 27. 5. 1954

W pracy powyższej omówiono niektóre własności pola elektrostatycznego, stanowiące pewien przyczynek do teorii tego pola. Prawo najmniejszej pojemności przedstawia własność zmaterializowanej powierzchni ekwipotencjalnej, tj. folii metalowej (o ściankach znikomej grubości), przystosowanej swym kształtem ściśle do kształtu powierzchni ekwipotencjalnej (folia ta nazwana jest w pracy elektrodą pośrednią). Z prawa najmniejszej pojemności można wysnuć wnioski co do struktury energetycznej pola elektrostatycznego. Struktura ta warunkuje pewien określony charakter ruchów elektrody pośredniej, jeśli otrzymała ona z zewnątrz jednorazowy impuls.

W trakcie rozważań obliczono pojemności w układzie dwóch kul, przy czym znamieny jest fakt, że wchodzi tu w rachubę nie tylko pojemność wzajemna, ale także i pojemności własne, dotyczące tej części ładunku, dla której linie pola wychodzące z powierzchni kuli przebiegają do nieskończoności.

Z wyrażeń przedstawiających pojemności układu dwóch kul można obliczyć siłę przyciągania takich kul mających ładunki odmiennego znaku. Dochodzimy w ten sposób do wzorów, którym można nadać miano uogólnionego prawa Coulomba. Za pomocą tych wzorów oblicza się siły przyciągania w przypadkach szczególnych, na przykład: kuli i płaszczyzny, kuli i ładunku punkowego itd.

1. WSTĘP

Ilość naszych wiadomości o strukturze pola elektrostatycznego niewiele się stosunkowo powiększyła od czasu Maxwella i Faradaya, tj. w przeciągu ostatnich 80 lat. Należy stwierdzić, iż w dziedzinie tej istnieje bardzo dużo zagadnień jeszcze zupełnie nie wyjaśnionych. Rzuca się w oczy nierównomierność postępu w tej dziedzinie i w innych dziedzinach elektrotechniki teoretycznej i stosowanej.

Z rozwojem nauki o elektryczności wiążą się bezpośrednio wielkie sukcesy, które gruntownie przekształciły środki produkcji oraz materialny i kulturalny sposób życia ludzkości. Wydaje się, jak gdyby te właśnie sukcesy tak dalece przykuły do siebie uwagę badaczy i uczonych, że nie starczyło jej już na głębsze dociekania nad istotą pola elektrostatycznego.

I rzeczywiście, można zaobserwować, że nieliczne prace w tej dziedzinie, nie wyłączając prac tak wybitnych uczonych, jak W. Thomsona, W. Rogowskiego, F. Ollendorffa (i innych), mają charakter raczej fenomenologiczny. Rezultatem tego jest, że właściwie nie bardzo potrafiliśmy się oddalić od starego prawa Coulomba, które dzisiaj tak samo, jak 50 lat temu, jeszcze wciąż jest centralnym prawem elektrostatyki. Ważne problemy w tej dziedzinie jeszcze wciąż czekają, a zbadane zostało dotychczas jedynie to, co jest najprostsze.

Wszystkim znany jest fakt, że przy przejściu od najprostszych form geometrycznych do form nieco bardziej złożonych napotykamy piętrzące się trudności matematyczne; są one czasem tak wielkie, że wydają się nie do pokonania. Trudności te zmuszają do rezygnacji z dążenia do ścisłego rozwiązania zagadnienia i powodują wprowadzanie założeń upraszczających. Powstaje tu specjalna sztuka stosowania dość daleko sięgających uproszczeń, które jednak muszą być tak zakreślone, aby nie uronić nic z podstawowych cech badanego zjawiska. Sztuka upraszczania praktykowana jest od dawna i często. Stosowana jest ona powszechnie i w wyniku tego elektrostatyka roi się od uproszczeń i od idealizacji, sięgających czasem tak daleko, że doprowadziły do elementów i do układów nierealnych. Takim elementem nierealnym jest na przykład ładunek punktowy lub ładunek rozmieszczony na powierzchni nieskończenie długiego walca. Znane i zbadane jest pole odosobnionej kuli naładowanej, ale trafiamy często na tereny nieznanne, jeśli chcemy pójść o jeden krok dalej i rozważyć pole dwóch naładowanych kul.

Weźmy przykład: zagadnienie pojemności układu dwóch naładowanych kul nie jest dotychczas całkowicie rozwiązane, szczególnie jeśli obie kule mają rozmaite średnice lub jeśli wartości bezwzględne ładunków nie są jednakowe.

Narzuca się przy tym konieczność wprowadzenia i do tego przypadku, znanego już od czasów Maxwella pojęcia pojemności cząstkowych przy jednoczesnym rozszerzeniu tego pojęcia; narzuca się tu konieczność wyjaśnienia roli, jaką w tym układzie odgrywa nieskończoność. Zagadnienia te są stosunkowo proste i bliskie, a pomimo to nie widać prób ich rozwiązania i to nie tylko ilościowego, ale nawet i jakościowego; w rezultacie problemy te leżą odłogiem od dziesiątków lat.

Pole dwóch naładowanych kul jest jednym z podstawowych zagadnień elektrostatyki. Praktyczne znaczenie tego problemu polega na tym, że dwa dowolne ciała, znajdujące się w odległości dużej w stosunku do ich rozmiarów, można aproksymować jako 2 kule; natomiast 2 kule znajdujące się w bliskiej od siebie odległości (i noszące jednakowe różnoimienne ładunki) przedstawiają aproksymatywnie jeden z najbardziej podstawowych elementów budowy materii — dipol elektryczny.

Z energetycznej struktury pola dwóch kul muszą z kolei wynikać działające między nimi siły — w ten sposób można uogólnić i uściślić czcigodne prawo Coulomba, przedstawione 170 lat temu Akademii Francuskiej.

Zbyteczne są sugestie o praktycznym znaczeniu osiągniętych związków — może w atomistyce, może w teorii wysokich napięć lub prądów zmiennych albo w innych teoriach z dziedziny nauki o elektryczności. Ale trzeba podkreślić wielkie znaczenie teoriopoznawcze badań tego rodzaju. Umożliwiają one lepsze poznanie otaczającego nas świata, gruntują światopogląd materialistyczny również i w tej dziedzinie wiedzy fizycznej.

Przedstawione tu twierdzenia są ze sobą ściśle związane. Sposób ich wyłożenia obrany został tak, aby właśnie wykazać ich współzależność. Tym tłumaczy się odsunięcie ogólnego omówienia prawa najmniejszej pojemności aż do rozdz. 10 i przedstawienie najpierw szeregu przykładów. Można by zrobić inaczej. Jednak celem tych przykładów jest nie tylko ilustrowanie prawa najmniejszej pojemności; wprowadzają one czytelnika w swoistą mechanikę ruchów elektrody pośredniej i tym samym przygotowują grunt do dalszych rozważań i twierdzeń.

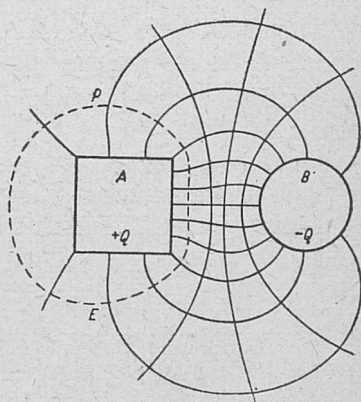
1. SFORMUŁOWANIE PRAWA NAJMNIEJSZEJ POJEMNOŚCI W POLU ELEKTROSTATYCZNYM

UWAGI OGÓLNE

a. Załóżmy, że pole elektrostatyczne wytworzone jest przez dwa ładunki $+Q$ i $-Q$ znajdujące się na dwóch przewodnikach A i B dowolnego kształtu (rys. 1). Wiadomo, że ani rozkład linii tego pola, ani rozkład potencjałów nie zmieni się, jeżeli w miejscu jednej z powierzchni ekwipotencjalnych p umieścimy nieskończenie cienką folię metalową; folia ta musi być oczywiście zupełnie ściśle przystosowana do kształtu powierzchni ekwipotencjalnej.

Nazwijmy opisaną wyżej powierzchnię metalową elektrodą pośrednią; elektrodę pośrednią będziemy oznaczali przez E . Na obu powierzchniach (nieskończenie cienkiej) powłoki E istnieją ładunki influencyjne.

Następnie pojemność między powierzchnią A i lewą powierzchnią elektrody po-



Rys. 1. Układ powierzchni ekwipotencjalnych i linii pola elektrostatycznego

średniej E oznaczmy przez C_1 oraz pojemność między powierzchnią B i prawą powierzchnią elektrody pośredniej E — przez C_2 . Wtedy pojemność C między powierzchniami A i B jest

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (1)$$

Zakładaliśmy dotychczas, że — na zasadzie definicji — elektroda pośrednia E zajmuje miejsce powierzchni ekwipotencjalnej p . Przyjmujemy, że metalowa błona E ma dostateczną sztywność i że może być przesuwana bez zmiany swego kształtu¹. Przesuńmy w taki właśnie sposób elektrodę pośrednią E do nowego położenia p' (Oczywiście, że powierzchnia p' nie jest powierzchnią ekwipotencjalną w pierwotnym układzie pola między A i B). Pojemność między A i E oraz między E i B w nowym położeniu elektrody pośredniej E oznaczmy przez C'_1 i C'_2 .

Po dokonanej zmianie położenia E poprzednia pojemność C między A i B zmieni się na C' , przy czym

$$C' = \frac{C'_1 C'_2}{C'_1 + C'_2}.$$

Można wykazać, że ta nowa pojemność C' , uzyskana przy zmienionych warunkach (przy zniekształceniu pierwotnego pola elektrostatycznego), jest zawsze większa od poprzedniej pojemności C_1 , tj. że

$$C' > C. \quad (2)$$

Nierówność powyższa jest spełniona dla każdego położenia p' elektrody pośredniej E , które nie jest zgodne z uprzednią powierzchnią ekwipotencjalną p .

Położenie elektrody pośredniej E zgodne z powierzchnią ekwipotencjalną p będziemy nazywali jej położeniem (lub miejscem) macierzystym. Możemy zatem powiedzieć: położenie elektrody pośredniej E w miejscu macierzystym odpowiada najmniejszej pojemności układu A, E, B .

Twierdzenie powyższe można nazwać prawem najmniejszej pojemności w polu elektrostatycznym.

Prawo to można także sformułować w sposób następujący: położenie elektrody pośredniej E w miejscu macierzystym odpowiada największej energii pola elektrostatycznego układu A, E, B .

Zanim zajmiemy się powyższymi twierdzeniami w przedstawionej tu ogólnej postaci wykażemy ich słuszność na prostych przykładach. Nadają

¹ Zakładamy przy tym, że podczas przesunięcia elektrody pośredniej nie jest ona połączona w żadnym źródłem napięcia (tzn. potencjał jej nie jest utrzymywany na stałej wysokości).

Rys. 2. Układ 3 walców o osiach równoległych leżących w jednej płaszczyźnie

a. Pojemność C_{23} walców 2 i 3 położonych na zewnątrz siebie (położenie „zewnątrzne“) wynosi

$$C_{23} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{r_3}{r_2} \frac{d_2 + c_{23}}{d_3 - c_{23}}}, \quad (3)$$

przy czym

$$d_3 = \frac{D_{23}^2 + r_3^2 - r_2^2}{2D_{23}}; \quad d_2 = \frac{D_{23}^2 + r_2^2 - r_3^2}{2D_{23}}; \quad d_2 + d_3 = D_{23} \quad (4)$$

oraz

$$c_{23}^2 = d_3^2 - r_3^2 = d_2^2 - r_2^2 \quad (5)$$

(na rys. 2 jest $c_{23} = c$).

b. Pojemność między walcami 1 i 3 położonymi jeden wewnątrz drugiego (czyli w tak zwanym położeniu „wewnętrznym“) przy spełnieniu warunku podanego niżej w f wynosi

$$C_{13} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{r_1}{r_3} \frac{d_3 - c_{13}}{d_1 - c_{13}}}, \quad (6)$$

przy czym

$$d_1 = \frac{-D_{13}^2 + r_3^2 - r_1^2}{2D_{13}}; \quad d_3 = \frac{D_{13}^2 + r_3^2 - r_1^2}{2D_{13}}; \quad d_3 - d_1 = D_{13} \quad (7)$$

oraz

$$c_{13}^2 = d_1^2 - r_1^2 = d_3^2 - r_3^2 \quad (8)$$

(na rys. 2 jest $c_{13} = c$).

Drogą prostych przekształceń wzorów (3) i (6) można znaleźć wyrażenia

$$C_{23} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln(K_z + \sqrt{K_z^2 - 1})}, \quad \text{gdzie } K_z = \frac{D_{23}^2 - r_3^2 - r_2^2}{2r_2 r_3};$$

$$C_{13} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln(K_w + \sqrt{K_w^2 - 1})}, \quad \text{gdzie } K_w = \frac{r_1^2 + r_3^2 - D_{13}^2}{2r_1 r_3}.$$

Można zatem napisać

$$C_{23} = \frac{2\pi\epsilon l}{\operatorname{arch} \frac{D_{23}^2 - r_3^2 - r_2^2}{2r_2 r_3}} \quad (3a)$$

$$C_{13} = \frac{2\pi\epsilon l}{\operatorname{arch} \frac{r_1^2 + r_3^2 - D_{13}^2}{2r_1 r_3}} \quad (6a)$$

U w a g a: Wzory (3), (3a), (6), (6a) etc. dotyczą walców nieskończenie długich; wielkości C_{23} , C_{13} etc. oznaczają pojemności układu tych walców na każdy odcinek l ich długości.

c. Pojemność dwóch walców „zewnątrznych” o jednakowym promieniu $r_1 = r_2 = r$ jest następująca:

$$C_{12} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{d+c}{d-c}} = \frac{\pi\epsilon l}{\ln \left(\frac{D_{12}}{2r} + \sqrt{\frac{D_{12}^2}{4r^2} - 1} \right)}, \quad (9)$$

przy czym

$$d = \frac{D_{12}}{2}; \quad c^2 = D_{12}^2 - r^2. \quad (10)$$

d. Pojemność dwóch walców współśrodkowych 1 i 3 otrzymamy zakładając w (6), że $D_{13} = 0$ (po podstawieniu do (6) wartości c_{13} z (8) i przejściu do granicy $d_3 = d_1 \rightarrow \infty$

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{r_3}{r_1}}. \quad (11)$$

e. Warunek, aby powierzchnia cylindryczna 3 była powierzchnią ekwipotencjalną w polu walców 1 i 2, jest

$$c_{13} = c_{32}. \quad (12)$$

Jeżeli obliczymy i przyrównamy do siebie d_3 obliczone z par walców 3, 2 i 3, 1, to warunek ten będzie

$$\frac{D_{32}^2 + r_3^2 - r_2^2}{D_{32}} = \frac{D_{13}^2 + r_3^2 - r_1^2}{D_{13}}, \quad (12a)$$

jeżeli obliczymy i przyrównamy do siebie d_2 obliczone z par walców 1, 2 i 2, 3, to warunek (12) przyjmie postać

$$\frac{D_{32}^2 + r_2^2 - r_3^2}{D_{32}} = \frac{D_{12}^2 + r_2^2 - r_1^2}{D_{12}}. \quad (12b)$$

Obliczając analogicznie d_1 z par walców 1, 3 i 1, 2 warunek (12) możemy napisać

$$\frac{-D_{13}^2 + r_3^2 - r_1^2}{D_{13}} = \frac{D_{12}^2 + r_1^2 - r_2^2}{D_{12}}. \quad (12c)$$

f. Warunkiem słuszności wzoru (3) jest

$$D_{23} > r_2 + r_3. \quad (13)$$

Zakładając

$$D_{23} = r_2 + r_3 \quad (14)$$

otrzymamy z (4)

$$d_3 = r_3; \quad d_2 = r_2; \quad c_{23} = 0$$

oraz

$$C = \infty. \quad (15)$$

Warunkiem słuszności wzoru (6) jest

$$D_{13} > r_3 - r_1. \quad (16)$$

Zakładając

$$D_{13} = r_3 - r_1 \quad (17)$$

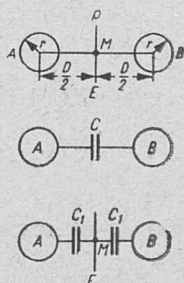
otrzymamy z (7)

$$d_1 = r_1; \quad d_3 = r_3; \quad c_{13} = 0$$

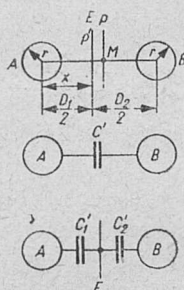
i stąd wynika również (15).

3. DWA PRZYPADKI SZCZEGÓLNE UKŁADÓW SYMETRYCZNYCH

Przykład 1.a. Stan przed przesunięciem elektrody pośredniej (rys. 3); E znajduje się w miejscu p .



Rys. 3. Do przykładu 1.a



Rys. 4. Do przykładu 1.b

Pojemność C dana jest przez wzór (9); pojemności C_1 i C_2 wynoszą

$$C_1 = C_2 = 2C.$$

Przykład 1.b. Stan po przesunięciu elektrody pośredniej E z p do p' , (rys. 4).

Dla pojemności wypadkowej otrzymujemy w tym przypadku wzór

$$C' = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln[(D_1 + \sqrt{D_1^2 - 4r^2})(D_2 + \sqrt{D_2^2 - 4r^2})] - \ln 4r^2}.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$y = (x + \sqrt{x^2 - 4r^2})[(D - x) + \sqrt{(D - x)^2 - 4r^2}] = MN,$$

znajdujemy

$$y' = MN \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 4r^2}} - \frac{1}{\sqrt{(D - x)^2 - 4r^2}} \right).$$

Wynika stąd, że y_{extr} zachodzi dla $x = \frac{D}{2}$.

Obliczając

$$(y'')_{x=\frac{D}{2}} = \frac{-D}{\frac{D}{2} + \sqrt{\frac{D^2}{4} - 4r^2}} \cdot \left(\frac{\frac{D}{2} + \sqrt{\frac{D^2}{4} - 4r^2}}{\sqrt{\frac{D^2}{4} - 4r^2}} \right)^3$$

widzimy, że położenie jak na rys. 3 odpowiada najmniejszej pojemności układu.

Przykład 2. Kondensator walcowy współśrodkowy.

Elektrodę zewnętrzną traktujemy jako elektrodę pośrednią E . Po jej przesunięciu (rys. 5) pojemność kondensatora dana jest przez wzór (6). Wzór ten możemy napisać w postaci

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{y}{2r_1 r_3}},$$

gdzie

$$y = -D_{13}^2 + r_1^2 + r_3^2 + \sqrt{(-D_{13}^2 + r_3^2 - r_1^2)^2 - 4D_{13}^2 r_1^2}. \quad (18)$$

Obliczamy

$$y' = -2D_{13} \frac{-D_{13}^2 + r_3^2 - r_1^2 + \sqrt{(-D_{13}^2 + r_3^2 - r_1^2)^2 - 4D_{13}^2 r_1^2}}{\sqrt{(-D_{13}^2 + r_3^2 - r_1^2)^2 - 4D_{13}^2 r_1^2}}$$

i znajdujemy, że y_{extr} zachodzi dla $D_{13} = 0$; ponieważ

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial D_{13}^2} \right)_{D_{13}=0} = -4$$

z czego wynika, że najmniejsza pojemność odpowiada współśrodkowemu ustawieniu walców.

4. DWA WALCE O OSIACH RÓWNOLEGLYCH PRZYPADEK OGÓLNY

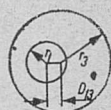
Ogólność naszych rozważań nie jest naruszona, jeżeli założymy (rys. 2), że $r_1 = r_2$.

Otrzymuje się tu nader skomplikowane wzory, które w znacznym stopniu utrudniają orientację, i aby wzory te uprościć, wprowadzamy oznaczenia

$$X_{13} = \frac{d_3 - c_{13}}{d_1 - c_{13}}; \quad X_{23} = \frac{d_2 + c_{23}}{d_3 - c_{23}}. \quad (19)$$

Drogą prostych przekształceń znajdujemy

$$X_{13} = D_{13} \frac{d_1 + c_{13}}{r_1^2} + 1; \quad X_{23} = D_{23} \frac{d_3 + c_{23}}{r_3^2} - 1. \quad (20)$$



Rys. 5. Kondensator walcowy (do przykł. 2)

Na marginesie naszych rozważań możemy stwierdzić, że przy użyciu (18) z (20) wynika bezpośrednio

$$X_{13} = \frac{y}{2r_1^2}.$$

Zakładając, że $D_{13} = 0$ znajdujemy

$$(X_{13})_{D_{13}=0} = \frac{r_3^2}{r_1^2},$$

podstawiając tę wartość do (6) znajdujemy od razu wyrażenie (11).

Szeregowe połączenie kondensatorów C_{13} i C_{23} prowadzi do wyrażenia pojemności C między elektrodami A i B w postaci

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \ln X_{13} X_{23}. \quad (21)$$

Stąd uwydatnia się rola funkcji

$$X = X_{13} X_{23} = \frac{1}{4r_1^2 r_3^2} [-D_{13}^2 + r_1^2 + r_3^2 + \sqrt{(-D_{13}^2 + r_3^2 - r_1^2)^2 - 4r_1^2 D_{13}^2}] [D_{23}^2 - r_3^2 - r_1^2 + \sqrt{(D_{23}^2 + r_3^2 - r_1^2)^2 - 4r_3^2 D_{23}^2}]$$

w rozważanym zagadnieniu. Uwzględniając, że

$$D_{23} = D_{12} + D_{13}$$

i przyjmując $D_{12} = \text{const}$, otrzymujemy po przekształceniach

$$\frac{\partial X}{\partial D_{13}} = 8r_1^2 r_3^2 X \left(\frac{D_{23}}{2r_3^2 X_{23} - D_{23}^2 + r_1^2 + r_3^2} - \frac{D_{13}}{2r_1^2 X_{13} + D_{13}^2 - r_1^2 - r_3^2} \right).$$

Ze względu na warunki (13) i (16) wartość X jest zawsze dodatnia i różna od zera; dlatego też ekstremum funkcji C zachodzi, jeżeli

$$\frac{D_{23}}{2r_3^2 X_{23} - D_{23}^2 + r_1^2 + r_3^2} = \frac{D_{13}}{2r_1^2 X_{13} + D_{13}^2 - r_1^2 - r_3^2},$$

to znaczy jeżeli

$$c_{23} = c_{13}.$$

Zgodnie z (12) równość powyższa stanowi warunek, przy którego spełnieniu elektroda pośrednia E zajmuje położenie powierzchni ekwipotencjalnej w polu elektrycznym walców A i B (położenie macierzyste). Zachodzące tu ekstremum wielkości C może na zasadzie rozważań w rozdz. 3.1 oraz dalszych wywodów w rozdz. 5 odpowiadać tylko najmniejszej wartości pojemności.

W ten sposób twierdzenie o najmniejszej pojemności zostało udowodnione dla przypadku dwóch równoległych walców o równych średnicach. Na zasadzie rozważań zawartych w rozdz. 2 można je również uważać za udowodnione, jeśli walce mają średnice niejednakowe.

5. ENERGIA UKŁADU DWÓCH WALCÓW PRZY ZMIENNYM POŁOŻENIU ELEKTRODY POŚREDNIEJ

ANALIZA RUCHU ELEKTRODY

Mówiąc niżej o zmianie położenia elektrody pośredniej mamy na myśli zmiany spełniające warunki podane w rozdz. 1.

Założmy, że ładunki $\pm Q$ na elektrodach A i B pozostają niezmiennie i że środek O_3 elektrody pośredniej E zmienia swe położenie na prostej $O_1 O_2$ (rys. 2). Każdej wartości D_{13} odpowiada wówczas określona ilość energii W_{13} zawartej w przestrzeni między powierzchniami 1 i 3 oraz ilość energii W_{32} zawartej w przestrzeni między powierzchniami 3 i 2; całkowita energia pola elektrycznego jest

$$W = W_{13} + W_{32}.$$

Poszczególne wyrazy tej równości są proporcjonalne do wyrażen

$$\lg X_{13} X_{32}; \lg \frac{r_1}{r_3} X_{13}; \lg \frac{r_3}{r_2} X_{32}. \quad (22)$$

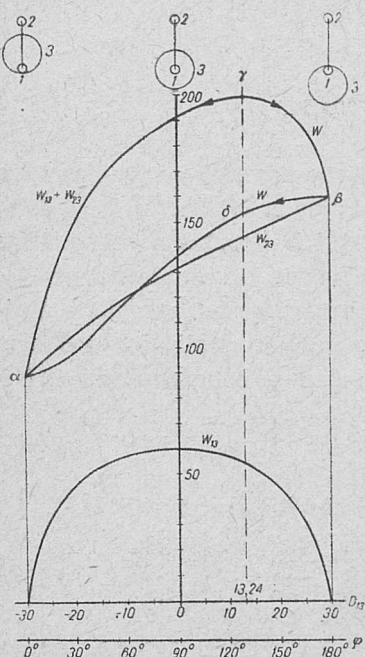
Jak wiadomo, wielkość W uzyskuje największą wartość, jeżeli położenie E odpowiada powierzchni ekwipotencjalnej, to jest, jeżeli D_{13} spełnia warunek (12).

Wysoce pouczające jest graficzne przedstawienie przebiegu zmienności powyższych trzech wielkości W_{13} , W_{23} . W w zależności od D_{13} . Wykresy takie przedstawiono na rys. 6 i rys. 7. Rys. 6 skonstruowano przy danych $r_1 = r_2 = 10$; $D_{12} = 100$; $r_3 = 40$. D_{13} może się tu zmieniać od $D_{13} = 30$ (walce 3 i 2 położone najdalej od siebie) do $D_{13} = -30$ (walce 3 i 2 położone najbliżej siebie). Wartość $D_{13} = 0$ odpowiada współśrodkowemu położeniu walców 1 i 3. W tym punkcie energia W_{13} posiada swe maksimum (por. rozdz. 3.2.), natomiast dla $D_{13} = \pm 30$ mamy $W_{13} = 0$. Wielkość W_{23} zmienia się w sposób monotoniczny od punktu β ($D_{13} = 30$) do punktu α ($D_{13} = -30$). Maksimum łącznej energii (punkt γ) przypada w punkcie $D_{13} = 13,246$, który otrzymuje się z (12b) lub z (12c).

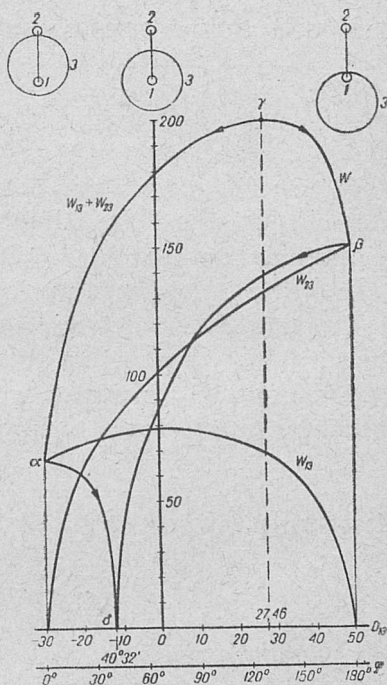
Inny charakter mają krzywe na rys. 7, gdzie założono, że $2r_3 > D_{12}$; rysunek ten skonstruowano przy danych $r_1 = r_2 = 10$; $D_{12} = 100$; $r_3 = 60$.

Dla obu rysunków charakterystyczny jest płaski przebieg krzywej W w punkcie γ . Jednakże położenie elektrody pośredniej E odpowiadające temu punktowi jest położeniem równowagi chwiejnej. Z obu rysunków

widać, że jeżeli elektroda E zostanie wyprowadzona z położenia γ przez impuls działający w kierunku $O_1 O_2$, to E będzie się poruszać dalej, aż dojdzie do położenia α ; jeżeli impuls działać będzie w kierunku $O_2 O_1$, to końcowe położenie elektrody E będzie odpowiadać punktowi β .



Rys. 6. Energia układu przy zmianie położenia elektrody pośredniej



Rys. 7. Energia układu przy zmianie położenia elektrody pośredniej

Pewne zainteresowanie wzbudzić mogą dwa nasuwające się pytania:

1. czy istotnie położenie β elektrody E jest jej położeniem ostatecznym?
2. czy w swoim ruchu z γ do β lub z γ do α elektroda E nie ulega jakimś odmiennie skierowanym siłom, przez działanie których kierunek jej ruchu mógłby się odchylić od kierunku $O_1 O_2$ (lub $O_2 O_1$)?

Pierwsze z tych pytań powstaje przy obserwacji rys. 6 i 7, na których widać, że poziom energetyczny w położeniu β jest wyższy niż w położeniu α .

Aby odpowiedzieć na pierwsze pytanie, należy zauważyć, że jeżeli porównać dwa położenia I i II walców „zewnątrznych” 2 i 3 o niezmiennych promieniach r_2 i r_3 , przy czym położeniu I odpowiada odległość D tych walców, położeniu II — odległość D' , to z założenia $D' < D$ dla pojemności wynika warunek

$$C' > C. \quad (23)$$

Istotnie, na skutek podanych zależności z (23) otrzymujemy kolejno

$$\frac{d_2 + c}{d_3 - c} > \frac{d'_2 + c'}{d'_3 - c'}$$

$$D^2 + r_3^2 - r_2^2 + \sqrt{(D^2 + r_3^2 - r_2^2)^2 - 4D^2 r_3^2} > D'^2 + r_3^2 - r_2^2 + \sqrt{(D'^2 + r_3^2 - r_2^2)^2 - 4D'^2 r_3^2}$$

$$[(D + r_3)^2 - r_2^2][(D - r_3)^2 - r_2^2] > [(D' + r_3)^2 - r_2^2][(D' - r_3)^2 - r_2^2]$$

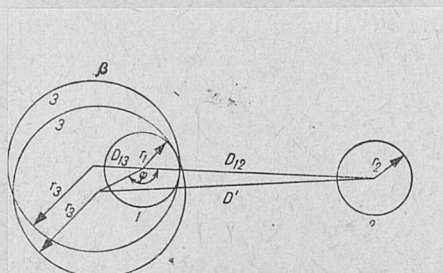
ostatnia zaś nierówność, ze względu na $D' > r_2 + r_3$, jest zgodna z założeniem.

W analogiczny sposób można wykazać, że porównując ze sobą położenia I i II walców „wewnętrznych“ 1 i 3 o niezmiennych promieniach r_1 i r_3 i o różnych odległościach między osiami (D_{13} w położeniu I, D'' — w położeniu II) oraz zakładając $D'' > D_{13}$ dochodzimy do wniosku:

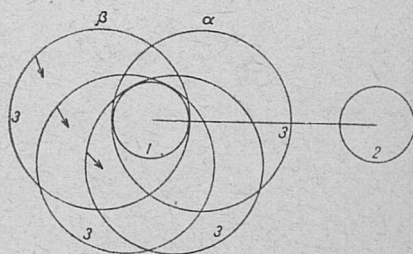
pojemność C'' w położeniu II jest większa od pojemności C w położeniu I.

Wynika stąd, że jeżeli elektroda E znajduje się w położeniu II (rys. 8), to energia pola elektrycznego walców 1, 3 jest mniejsza niż energia pola tych samych walców w położeniu I (β) elektrody E (w obu przypadkach walec 1 jest wewnętrznie styczny do 3; D_{13} i D_{12} są wielkościami stałymi). Miarą energii W' układu przy kącie φ (rys. 8) jest wyrażenie

$$\lg \left\{ \frac{D_{12}^2 + D_{13}^2 - 2D_{12}D_{13} \cos \varphi - r_3^2 - r_2^2}{2r_2 r_3} + \frac{\sqrt{(D_{12}^2 + D_{13}^2 - 2D_{12}D_{13} \cos \varphi + r_3^2 - r_2^2)^2 - 4(D_{12}^2 + D_{13}^2 - 2D_{12}D_{13} \cos \varphi)r_3^2}}{2r_2 r_3} \right\}.$$



Rys. 8. Ruch elektrody pośredniej po dojściu do położenia β

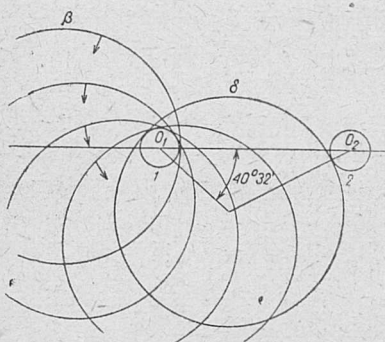


Rys. 9. Przejście elektrody pośredniej z położenia β do położenia α

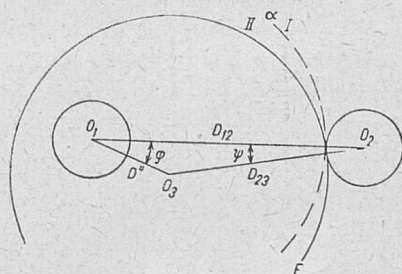
Rys. 6 przedstawia krzywą $W' = f(\varphi)$; krzywa ta (δ) przebiega od punktu β do punktu α i opisuje ruch elektrody pośredniej, która po dojściu do położenia β zaczyna się obracać dookoła stycznego do niej walca 1, aż osiąga ostateczne położenie spoczynkowe α (rys. 9). To samo ostateczne położenie

osiąga elektroda E bezpośrednio, jeżeli impuls działający na nią w położeniu γ miał kierunek $O_1 O_2$. W nieco odmienny sposób zachowuje się elektroda pośrednia w przypadku przedstawionym na rys. 7. W położeniu β przy najmniejszym impulsie skierowanym prostopadłe do $O_1 O_2$ zaczynają na E oddziaływać takie same siły, jak opisane wyżej; pod ich wpływem elektroda E obraca się naokoło walca 1 stale pozostając z nim w styczności. Jednakże ostateczne położenie odpowiadające wartości $W=0$ elektroda E osiągnie wówczas, gdy podczas swego obrotu osiągnie styczność również i z walcem 2 (położenie δ , rys. 10, por. także rys. 7).

Również i krańcowe położenie α elektrody E uwidocznione na rys. 7, nie jest położeniem ostatecznym i przedstawia stan równowagi chwiejnej. Zachodzące tu zależności ilustruje rys. 11. Na zasadzie podanego wyżej



Rys. 10. Przejście elektrody pośredniej z położenia β lub α do położenia δ



Rys. 11. Chwiejność elektrody pośredniej w położeniu α

twierdzenia energia W'' (przeźrzeni pola zawartej między walcem 1 i elektrodą E) jest mniejsza w położeniu II niż w położeniu I. Miarą tej energii jest wyrażenie

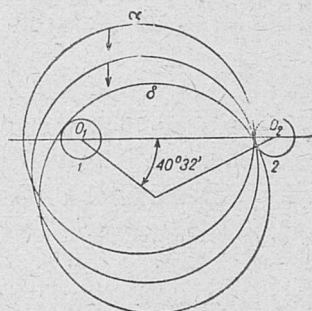
$$\lg \frac{-D''^2 + r_3^2 + r_1^2 + \sqrt{(-D''^2 + r_3^2 - r_1^2)^2 - 4D''^2 r_1^2}}{2r_1 r_3},$$

przy czym, jak wynika z prostych zależności geometrycznych na rys. 11

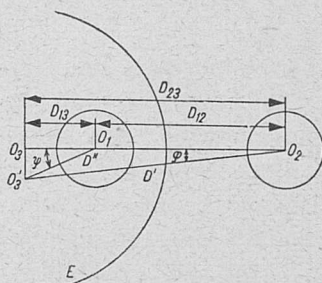
$$D'' = \sqrt{(D_{12}^2 + D_{23}^2 - 2D_{12}^2 \sin^2 \varphi)} - \sqrt{(D_{12}^2 + D_{23}^2 - 2D_{12}^2 \sin^2 \varphi)^2 - (D_{12}^2 - D_{23}^2)^2}.$$

Z zależności powyższych wynika, że elektroda E po zajęciu położenia α i otrzymaniu impulsu w kierunku prostopadłym do $O_1 O_2$ rozpoczyna obrót naokoło walca 2 (pozostając z nim stale w styczności). Kresem tego ruchu jest położenie δ , w którym E jest styczna do obu walców 1 i 2 (rys. 12). Krzywa $\alpha\delta$ (w zależności od kąta φ) jest naniesiona na rys. 7. Widać stąd również, że po otrzymaniu odpowiednich impulsów elektroda pośrednia przechodzi od położenia γ albo poprzez β do δ , albo też poprzez α do δ .

Należy jeszcze odpowiedzieć na sformułowane wyżej drugie pytanie. Odpowiedź jest ułatwiona dzięki rys. 13, który przedstawia elektrodę



Rys. 12. Przejście elektrody pośredniej z położenia β lub α do położenia δ



Rys. 13. Impuls wywarty na elektrodę pośrednią w kierunku prostym do O_1O_2

pośrednią E o środku O'_3 , odchylonym nieco od osi O_1-O_3 w kierunku do niej prostym. Przyjawszy oznaczenia tego rysunku widzimy, że zgodnie z (22) wyrażeniem miarodajnym dla całkowitej energii układu jest $\lg F$, gdzie

$$F(\psi) = \left[-\frac{D_{13}^2}{\cos^2 \psi} + r_1^2 + r_3^2 + \sqrt{\left(-\frac{D_{13}^2}{\cos^2 \psi} + r_3^2 - r_1^2 \right)^2 - 4r_1^2 \frac{D_{13}^2}{\cos^2 \psi}} \right] [D_{23}^2 + D_{13}^2 \operatorname{tg}^2 \psi - r_1^2 - r_3^2 + \sqrt{(D_{23}^2 + D_{13}^2 \operatorname{tg}^2 \psi + r_3^2 - r_1^2)^2 - 4r_3^2 (D_{23}^2 + D_{13}^2 \operatorname{tg}^2 \psi)}].$$

Można się łatwo przekonać, że

$$\frac{\partial F}{\partial \psi} = \sin \psi \cdot M(\psi), \quad M(\psi) = \text{skończ.}$$

a zatem

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \psi} \right)_{\psi=0} = 0.$$

Ze względu na to, iż $F(0) \neq 0$, możemy stwierdzić, że na elektrodę pośrednią E w jej drodze wzdłuż prostej $O_1 O_2$ nie działają żadne impulsy, które skłaniałyby E do dokonywania ruchów ubocznych (na rysunku: w górę lub w dół). Położenie środka elektrody E na osi $O_1 O_2$ odpowiada równowadze chwiejnej tej elektrody.

6. POLE ELEKTRYCZNE DWÓCH NAŁADOWANYCH KUL

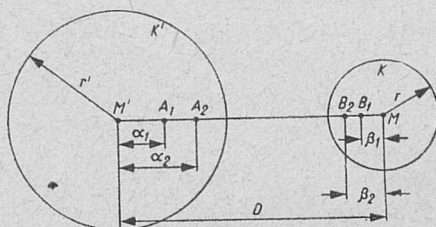
Przedstawimy obecnie prawo najmniejszej pojemności w zastosowaniu do innego przypadku: do pola elektrycznego dwóch naładowanych kul. Przykład ten jest konieczny, ponieważ posiada on cechy odrębne od

przykładów rozważanych wyżej. Powierzchnie obu elektrod są tu powierzchniami skończonymi i zamkniętymi (w odróżnieniu od nieskończonego długich walców). Dopiero rozważenie tego przykładu pozwoli na uogólnienie prawa najmniejszej pojemności odnośnie do elektrod o dowolnej postaci.

Zagadnieniem pola między dwiema kulami zajmowano się od dawna. W r. 1833 pracował nad tym Murphy, w latach dziewięćdziesiątych ubiegłego stulecia zagadnienie rozwiązał W. Thomson (Lord Kelvin), stosując opracowaną przez siebie metodę odbić zwierciadlanych. Na podstawie tej opierają swoje rozważania K  pfm  ller [5] i Ollendorff [7]; ostatni podał r  wnie ż wzory o charakterze ogólnym.

Ni żej zostanie przedstawiona metoda zwierciadlanego odbicia w skr  cie.

a. Dane s ą dwie kule metalowe po  łożone jedna na zewnątrz drugiej (rys. 14). Chcemy utworzy  ugrupowanie ładunków, które wywoła takie



Rys. 14. Wzajemne odbicia zwierciadlane ładunków w 2 kulach po  łożonych na zewnątrz siebie

pole elektryczne, aby w tym polu kula K (M, r) uzyskała potencjał V , kula K' (M', r') — potencjał zero. Umieścimy w tym celu w środku pierwszej kuli ładunek dodatni

$$Q = 4\pi r \epsilon_0 V; \quad (24)$$

wtedy wprowadzie powierzchnia kuli K będzie miała potencjał V , ale jednocześnie kula K' uzyskuje potencjał dodatni $Q/4\pi\epsilon_0 D$. W celu skompensowania tego potencjału, umieszczamy w punkcie A_1 wewnątrz kuli K' ujemny ładunek q_1 odpowiedniej wartości. Potencjał kuli K' stanie się teraz równy zero, jednak kula K uzyskuje dodatkowy ujemny potencjał spowodowany przez ładunek q_1 . Aby ten potencjał skompensowa , umieszczamy w punkcie B wewnątrz kuli K dodatni ładunek dodatkowy Q_1 . Teraz kula K ma potencjał o przepisanej wielkości V , ale ładunek Q_1 wywołuje na kuli K' dodatni potencjał $Q_1/4\pi(D-\beta_1)$; potencjał ten kompensujemy przez ujemny ładunek dodatkowy q_2 , który umieszczamy w punkcie A_2 wewnątrz kuli K' . Postępując w ten sam sposób dalej, otrzymujemy dwa szeregi malejących dodatkowych ładunków dodatnich $Q_1, Q_2 \dots$ oraz ujemnych $q_1, q_2 \dots$. Przy obecności wszystkich tych ładunków obie kule

mają przepisane potencjały V i O . Odległości $a_1, a_2, \dots$ punktów $A_1, A_2, \dots$ od środka M' i odległości $\beta_1, \beta_2, \dots$ punktów $B_1, B_2, \dots$ od środka M otrzymuje się z podstawowych zależności odbić zwierciadlanych, np.

$$M'A_1 \cdot M'M = a_1 D = r'^2, \quad (25)$$

wartości zaś ładunków obliczamy z równań analogicznych do

$$q_1 = Q \frac{a_1}{r'} = Q \frac{r'}{D}, \quad (26)$$

Wprowadzając skróty

$$D - a_n = x_n; \quad D - \beta_n = y_n \quad (27)$$

znajdujemy w ten sposób po kolei

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{r'^2}{D}; & \beta_1 &= \frac{r'^2}{x_1}; & q_1 &= Q \frac{r'}{D}; & Q_1 &= q_1 \frac{r}{x_1}; \\ a_2 &= \frac{r'^2}{y_1}; & \beta_2 &= \frac{r'^2}{x_2}; & q_2 &= Q_1 \frac{r'}{y_1}; & Q_2 &= q_2 \frac{r}{x_2}; \\ a_3 &= \frac{r'^2}{y_2}; & \beta_3 &= \frac{r'^2}{x_3}; & q_3 &= Q_2 \frac{r'}{y_2}; & Q_3 &= q_3 \frac{r}{x_3}; \\ & \dots & & & & & & \\ a_n &= \frac{r'^2}{y_{n-1}}; & \beta_n &= \frac{r'^2}{x_n}; & q_n &= Q_{n-1} \frac{r'}{y_{n-1}}; & Q_n &= q_n \frac{r}{x_n}. \end{aligned} \quad (28)$$

Z zależności tych wynika:

$$\begin{aligned} Q_n &= Q_{n-1} \frac{rr'}{x_n y_{n-1}} = Q_{n-1} \frac{r}{r'} \left(\frac{D}{x_n} - 1 \right); & Q_{n+1} &= \frac{r}{r'} \left(D \cdot \frac{1}{x_{n+1}} - 1 \right); \\ \frac{Q_n}{Q_{n+1}} &= \frac{r'}{r} \frac{1}{\frac{D}{x_{n+1}} - 1}; & \frac{Q_n}{Q_{n-1}} &= \frac{r}{r'} \left(\frac{D}{x_n} - 1 \right); \\ D - x_{n+1} &= a_{n+1} = \frac{r'^2}{D - \beta_n} = \frac{r'^2 x_n}{D x_n - r'^2}; & x_{n+1} &= \frac{D^2 x_n - D r'^2 - x_n r'^2}{D x_n - r'^2}; \\ \frac{D}{x_{n+1}} - 1 &= \frac{r'^2 x_n}{D^2 x_n - D r'^2 - x_n r'^2}; & \frac{r'}{r} \frac{1}{\frac{D}{x_{n+1}} - 1} &= \frac{D^2}{r r'} - \frac{D r}{x_n r'} - \frac{r'}{r}; \\ \frac{Q_n}{Q_{n+1}} + \frac{Q_n}{Q_{n-1}} &= \frac{D^2 - r'^2 - r^2}{r r'}. \end{aligned} \quad (29)$$

Rekurencyjne równanie (29) wiąże ze sobą trzy ładunki Q o kolejnych indeksach.

W celu przemianowania indeksów w niektórych równaniach (28) napiszemy

$$\left. \begin{array}{ll} Q_n^* \text{ zamiast } Q_{n-1}, \\ y_n^* \text{ „ } y_{n-1}, \\ \beta_n^* \text{ „ } \beta_{n-1}, \end{array} \right\} \quad (30)$$

Możemy teraz przepisać równania (28) w postaci

$$\beta_n^* = \frac{r^2}{x_{n-1}}; \quad a_n = \frac{r'^2}{y_n^*}; \quad Q_n^* = q_{n-1} \frac{r}{x_{n-1}}; \quad q_n = Q_n^* \frac{r'}{y_n^*}. \quad (31)$$

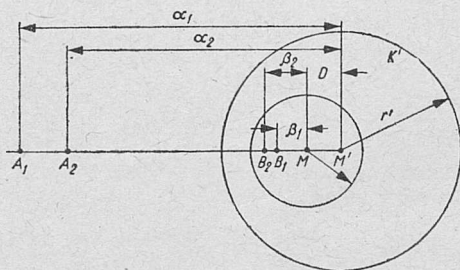
Równania (31) są analogiczne do (28); występuje w nich

$$\left. \begin{array}{ll} q_n & \text{zamiast } Q_n, \\ r' & \text{„ } r, \\ r & \text{„ } r', \\ a_n, y_n^* & \text{„ } \beta_n, x_n \\ \beta_n^*, x_{n-1} & \text{„ } a_n, y_{n-1} \end{array} \right\} \quad (32)$$

Wynika stąd, że równania (31) prowadzą do rekurencyjnego równania (33) analogicznego do (29):

$$\frac{q_n}{q_{n+1}} + \frac{q_n}{q_{n-1}} = \frac{D^2 - r'^2 - r^2}{rr'}. \quad (33)$$

b. Weźmy teraz dwie kule metalowe K i K' położone jedna wewnątrz drugiej (rys. 15). Zadanie, jakie sobie teraz stawiamy, jest analogiczne



Rys. 15. Wzajemne odbicia zwierciadlane ładunków w 2 kulach położonych jedna wewnątrz drugiej

do zadania *a*: na prostej $M'M$ chcemy umieścić szereg ładunków tak, aby w polu tych ładunków kula K uzyskała potencjał V , kula K' — potencjał zero. Również i metoda postępowania jest analogiczna. W punkcie M umieszczamy ładunek $+Q$ dany przez (24) dzięki czemu kula K uzyskuje potencjał V , kula K' zaś — potencjał różny od zera (dodatni), który — w celu sprowadzenia go do zera — kompensujemy przez ujemny ładunek

q_1 umieszczony w punkcie A_1 . Kula K otrzymuje teraz dodatkowy potencjał ujemny, który kompensujemy przez umieszczenie w punkcie B_1 dodatkowego dodatniego ładunku Q_1 itd. Otrzymujemy

$$M'A_1 \cdot M'M = a_1 D = r'^2; \quad q_1 = Q \frac{r'}{D}$$

oraz, wprowadzając oznaczenia

$$x_n = a_n - D; \quad y_n = \beta_n + D$$

znajdujemy

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{r'^2}{D}; & \beta_1 &= \frac{r^2}{x_1}; & q_1 &= Q \frac{r'}{D}; & Q_1 &= q_1 \frac{r}{x_1}; \\ a_2 &= \frac{r'^2}{y_1}; & \beta_2 &= \frac{r^2}{x_2}; & q_2 &= Q_1 \frac{r'}{y_1}; & Q_2 &= q_2 \frac{r}{x_2}; \\ & \dots & & & & & & \\ a_n &= \frac{r'^2}{y_{n-1}}; & \beta_n &= \frac{r^2}{x_n}; & q_n &= Q_{n-1} \frac{r'}{y_{n-1}}; & Q_n &= q_n \frac{r}{x_n}. \end{aligned} \quad (34)$$

Z zależności tych wynika

$$\begin{aligned} Q_n &= Q_{n-1} \frac{r}{r'} \left(1 - \frac{D}{x_n} \right); & Q_{n+1} &= Q_n \frac{r}{r'} \left(1 + \frac{D}{x_{n+1}} \right); \\ \frac{Q_n}{Q_{n+1}} &= \frac{r'}{r} \frac{1}{1 + \frac{D}{x_{n+1}}}; & \frac{Q_n}{Q_{n-1}} &= \frac{r}{r'} \left(1 + \frac{D}{x_n} \right); \\ \frac{x_{n+1}}{D} &= \frac{r'^2 x_n - r^2 D - x_n D^2}{r^2 D + x_n D^2}; & \frac{D}{x_{n+1}} + 1 &= \frac{r'^2 x_n}{r'^2 x_n - r^2 D - x_n D^2}; \\ \frac{Q_n}{Q_{n+1}} &= \frac{r'}{r} - \frac{r}{r'} \frac{D}{x_n} - \frac{D^2}{rr'}; & \frac{Q_n}{Q_{n+1}} + \frac{Q_n}{Q_{n-1}} &= \frac{r'^2 + r^2 - D^2}{rr'}. \end{aligned} \quad (35)$$

Otrzymuje się zatem równanie analogiczne do (29), a po przemianowaniu indeksów jak w (30), zamiast (34) znajdujemy

$$\beta_n^* = \frac{r^2}{x_{n-1}}; \quad a_n = \frac{r'^2}{y_n^*}; \quad Q_n^* = q_{n-1} \frac{r}{x_{n-1}}; \quad q_n = Q_n \frac{r'}{y_n} \quad (36)$$

Różnice między (36) i (34) scharakteryzowane są znowu przez (32); prowadzi to do zależności

$$\frac{q_n}{q_{n+1}} + \frac{q_n}{q_{n-1}} = \frac{r'^2 + r^2 - D^2}{rr'}. \quad (37)$$

Wszystkie cztery równania (29), (33), (35) i (37) mają tę samą postać, to jest

$$-\frac{1}{Q_{n+1}} + \frac{1}{Q_{n-1}} = \frac{k}{Q_n}; \quad -\frac{1}{q_{n+1}} + \frac{1}{q_{n-1}} = \frac{k}{q_n}; \quad (38)$$

przy czym w przypadku „zewnętrznego“ położenia kul piszemy zamiast k

$$k_z = \frac{D^2 - r^2 - r'^2}{rr'}; \quad (39)$$

natomiast w przypadku „wewnętrznego“ położenia kul —

$$k_w = \frac{r'^2 + r^2 - D^2}{rr'} \quad (40)$$

7. ROZWIĄZANIE RÓWNIANIA RÓŻNICOWEGO (38)

a. Ollendorff [7] rozwiązuje równanie (38) przez założenie

$$\frac{1}{Q_n} = A_1 e^{\lambda n} + A_2 e^{-\lambda n}, \quad (41)$$

z którego, po podstawieniu do (38), wynika

$$\cosh \lambda = \frac{k}{2}. \quad (42)$$

Stałe A_1 , A_2 można obliczyć z warunków początkowych zachodzących przy $n=0$ ($Q_n=Q_0=Q_1$) i $n=1$ ($Q_n=Q_1$). Otrzymuje się w ten sposób zależność

$$\frac{Q_n}{Q} = \frac{\sinh \lambda}{\left(\frac{1}{p} - \cosh \lambda\right) \sinh \lambda n + \sinh \lambda \cosh \lambda n}, \quad (43)$$

gdzie przy kulach położonych na zewnątrz siebie

$$p = p_z = \frac{rr'}{D^2 - r'^2}, \quad (44)$$

natomiast w przypadku, gdy jedna kula jest położona wewnątrz drugiej², byłoby

$$p = p_w = \frac{rr'}{r'^2 - D^2}. \quad (45)$$

² Ollendorff nie rozpatruje tego przypadku.

Podobną do (43) zależność otrzymuje się dla ładunków q

$$\frac{q_{n+1}}{Q} = \frac{r'}{D} \frac{2 \sinh \lambda}{(k - \cosh \lambda) \operatorname{sh} \lambda n + \sinh \lambda \cosh \lambda n}. \quad (46)$$

Związki powyższe prowadzą do wzorów skomplikowanych i do szeregów nie dających się sumować ani w łatwy sposób obliczać

$$\left. \begin{aligned} \sum Q_i &= Q \left[1 + \frac{\sinh \mu}{\sinh (\mu + \lambda)} + \frac{\sinh \mu}{\sinh (\mu + 2\lambda)} + \dots \right], \\ \sum q_i &= Q \left[\frac{\sinh \mu}{\sinh \lambda} + \frac{\sinh \mu}{\sinh 2\lambda} + \dots \right], \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

przy czym parametr μ oblicza się z równań:

$$\sinh \mu = \frac{r'}{D} \sinh \lambda; \quad \cosh \mu = \frac{r + r' \cosh \lambda}{D}; \quad \operatorname{tgh} \mu = \frac{2}{k} \sinh \lambda. \quad (48)$$

b. Szeregi (47) dają wprawdzie wyniki zupełnie ścisłe, jednak przez ich zawartość i niemożność zsumowania w skończonej postaci utrudniają w znacznym stopniu wnioskowanie. Z tego powodu postaramy się rozwiązać równania (38) w sposób przybliżony, ale prostszy i bardziej elastyczny. W tym celu w pierwszym z nich zakładamy

$$\frac{1}{Q_n} = \frac{A}{z^n}, \quad (49)$$

co prowadzi do równania kwadratowego

$$z^2 - kz + 1 = 0 \quad (50)$$

o pierwiastkach

$$z_1 = \frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4} - 1}; \quad z_2 = \frac{k}{2} - \sqrt{\frac{k^2}{4} - 1}; \quad z_1 z_2 = 1. \quad (51)$$

Warunek początkowy otrzymuje się z (28) i (34) przy $n=1$ w przypadku kul „zewnątrznych“

$$Q_1 = Q \frac{r'}{D} \frac{r}{x_1} = Q \frac{rr'}{D^2 - r'^2} = Q p_z, \quad (52)$$

w przypadku kul „wewnętrznych“

$$Q_1 = Q \frac{r'}{D} \frac{r}{x_1} = Q \frac{rr'}{r'^2 - D^2} = Q p_w. \quad (53)$$

Podstawiając do (49) wyrażenia (52) lub (53)

$$Q_1 = Qp = \frac{1}{A} z$$

znajdujemy

$$Q_n = Qp z^{n-1} \quad (n=1, 2, \dots). \quad (54)$$

Z rys. 14 i 15 wynika

$$k_{w \min} = \frac{r'^2 + r^2 - D^2_{\max}}{rr'} = 2; \quad k_{z \min} = \frac{D^2_{\min} - r'^2 - r^2}{rr'} = 2,$$

zatem

$$\left(\frac{k}{2} \right)_{\min} = 1. \quad (55)$$

W celu uzyskania dostatecznej dokładności przybliżona metoda rozwiązania równań różnicowych (38) wymaga, aby $\frac{k}{2} > 1$ (przyjmuje się przy tym przeważnie $\frac{k}{2} = 2$, por. rozdz. 7 p. C). Wynika stąd $z_1 > 1; z_2 < 1$.

Rozwiązanie (54) ma sens fizyczny tylko wtedy, gdy założymy w nim $z = z_2$, w przeciwnym przypadku bowiem kolejne ładunki dodatkowe miałyby coraz większe wartości i tworzyłyby szereg rozbieżny. Mamy zatem

$$Q_n = Qp z_2^{n-1}. \quad (56)$$

W ciągu

$$Q, Q_1, Q_2, Q_3, \dots$$

pierwsze dwie wielkości otrzymuje się z warunków zagadnienia, dopiero wielkości następne obliczamy za pomocą wzoru (54).

c. W analogiczny sposób rozwiązujemy drugie równanie (38). Zakładamy

$$q_n = q_2 z_2^{n-2} \quad (n=2, 3, \dots). \quad (57)$$

Wielkości q_1 i q_2 otrzymujemy z (28) i (34):

w przypadku „zewnątrznego“ położenia kul

$$q_1 = Q \frac{r'}{D}; \quad q_2 = \frac{q_1}{k_z} = Q \frac{r'}{Dk_z}, \quad (58)$$

w przypadku „wewnętrznego“ położenia

$$q_1 = Q \frac{r'}{D}; \quad q_2 = \frac{q_1}{k_w} = Q \frac{r'}{Dk_w}. \quad (59)$$

W ciągu

$$q_1, q_2, q_3, q_4, \dots$$

pierwsze dwie wielkości otrzymujemy z warunków zagadnienia (wzory 58 i 59); dopiero następne wielkości obliczamy za pomocą wzoru (56). Wyrażenia (56) i (57) przedstawiają przybliżone rozwiązania równań (38). Nie mogą one być użyte, jeśli chodzi o obliczenie odległości a_n i β_n , ponieważ — jak można łatwo zauważyć — przy zastosowaniu (56) z (31) i (34) wynikałoby np., że $a_n = \text{const}$ i $\beta_n = \text{const}$. Z tego powodu równania (56) i (57) nie mogą również być zastosowane do obliczania potencjałów i natężeń pola elektrycznego obu kul. Nadają się natomiast do obliczania poszczególnych ładunków $Q_2, Q_3, \dots, q_3, q_4, \dots$ oraz ich sum.

Niżej wykazemy, jaki błąd popełniamy stosując przybliżone rozwiązania (56) i (57) zamiast dokładnych wzorów (47). W tym celu przeprowadzimy kilka rozważań pomocniczych.

A. Stwierdzamy, że zachodzi nierówność

$$\frac{k_w}{2} > m, \quad (60)$$

gdzie m jest dowolnie przyjętą liczbą dodatnią większą od jedności, jeżeli spełniony jest jeden z warunków:

$$\text{I.} \quad r' \geq 2mr \quad \text{i} \quad r > D \quad \text{albo} \quad r' > 2mr \quad \text{i} \quad r \geq D$$

lub też

$$\text{II.} \quad r' \geq 2mr + D \quad (m > 1). \quad (61)$$

Kryterium I nie jest dla nas przydatne i nie będziemy go stosować.

Stwierdzamy dalej, że przy zachowaniu warunku (61) mamy

$$p_w = \frac{rr'}{r'^2 - D^2} < \frac{1}{2m}. \quad (62)$$

Najmniejszą teoretycznie możliwą wartością p_w jest $p_w = 0$.

B. Stwierdzamy, że zachodzi nierówność

$$\frac{k_z}{2} > m \quad (63)$$

gdzie m jest dowolnie przyjętą liczbą dodatnią większą od jedności, jeżeli

$$D \geq mr_1 + r_2, \quad (64)$$

przy czym albo $r_1 = r'$ i $r_2 = r$, albo też $r_1 = r$ i $r_2 = r'$ oraz

$$m > 1 \quad (65)$$

Przy spełnieniu tych warunków otrzymujemy

$$p_z = \frac{rr'}{D^2 - r'^2} < \frac{1}{2m}. \quad (66)$$

Najmniejszą teoretycznie możliwą wartością p_z jest $p_z = 0$.

C. We wzorach (60)–(66) jako m przyjmujemy przeważnie liczby całkowite. Stąd najmniejszą wartością m , którą będziemy stosowali jest $m = 2$.

D. Przy założeniu (42) otrzymuje się równanie

$$e^{2\lambda} - ke^\lambda + 1 = 0$$

analogiczne do (50). Zakładając, że $\lambda > 0$ otrzymujemy zatem

$$e^\lambda = z_1; \quad e^{-\lambda} = z_2 \quad (67)$$

E. Z dokładnego równania (43) wynika zależność rekurencyjna

$$\frac{Q_{n+1}}{Q_n} = \frac{\sinh \lambda n - p \sinh \lambda(n-1)}{\sinh \lambda(n+1) - p \sinh \lambda n}. \quad (68)$$

Natomiast z przybliżonego równania (56) otrzymujemy

$$\frac{Q_{n+1}}{Q_n} = z_2. \quad (69)$$

Łatwo zauważyć, że (68) staje się identyczne z (69), jeżeli przyjąć przybliżoną wartość wyrażeń $\sinh \lambda n$ itd.

$$\sinh \lambda n \approx e^{\lambda n} = z_1^n.$$

F. W podobny sposób z dokładnego wyrażenia (46) znajdujemy wzór rekurencyjny

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{k \sinh \lambda(n-1) - \sinh \lambda(n-2)}{k \sinh \lambda n - \sinh \lambda(n-1)}. \quad (70)$$

Wartość tego samego stosunku otrzymana z przybliżonego wyrażenia (57) jest

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = z_2. \quad (71)$$

Widzimy, że (71) otrzymuje się z (70) przez odrzucenie ujemnych potęg $e^{-\lambda n}$, $e^{-\lambda(n-1)}$, $e^{-\lambda(n-2)}$.

G. Wzór (68) możemy przedstawić w postaci

$$\frac{Q_{n+1}}{Q_n} = \frac{1}{z_1} \left(1 - \frac{1 - \frac{1}{z_1^2}}{z_1^{2n-1} \frac{z_1 - p}{1 - pz_1} - \frac{1}{z_1^2}} \right) = \frac{1}{z_1} (1 - B_Q). \quad (72)$$

Wyrażenie B_Q zawarte w nawiasie uzyskuje największą wartość, jeżeli $p=0$; mamy wówczas

$$B_{Q \max} = \frac{1 - \frac{1}{z_1^2}}{z_1^{2n} - \frac{1}{z_1^2}};$$

ze względu na to, że $z_1 > 1$, mamy

$$B_{Q \max} < \frac{1}{z_1^{2n}} = z_2^{2n}. \quad (73)$$

Wyrażenie (73) daje granicę względnego błędu popełnionego przy stosowaniu do obliczania Q_{n+1} przybliżonego wzoru (69) zamiast ścisłego wzoru (68). Przyjmując w wyrażeniach (60) i (63) jako najmniejszą wartość m liczbę 2, znajdujemy

$$z_2 = 2 - \sqrt{3} = 0,268.$$

Najmniejsza wartość n wynosi $n=2$, przeto największa wartość popełnionego błędu względnego jest

$$B_{Q \max} = 0,268^4 = 0,0052,$$

czyli 1/2% (Przyjmując $m=1,5$ znajdujemy $z_2=0,382$ i w związku z tym największy błąd względny będzie w tym przypadku 2%). W rzeczywistości błąd jest znacznie mniejszy, ponieważ wartość p jest większa od zera (przeważnie $B_Q \leq \frac{1}{400}$). Błąd zmniejsza się przy rosnącym n . Błąd znacznie się zmniejsza również, jeżeli m jest liczbą większą od 2.

H. Wyrażenie (70) możemy przedstawić w postaci

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{1}{z_1} \left(1 - \frac{1 - \frac{1}{z_1^2}}{z_1^{2n-3} \frac{kz_1 - 1}{k - z_1} - \frac{1}{z_1^2}} \right).$$

Z (50) wynika

$$kz_1 - 1 = z_1^2; \quad k - z_1 = \frac{1}{z_1}; \quad \frac{kz_1 - 1}{k - z_1} = z_1^3$$

i wobec tego

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{1}{z_1} \left(1 - \frac{1 - \frac{1}{z_1^2}}{z_1^{2n} - \frac{1}{z_1^2}} \right) = \frac{1}{z_1} (1 - B_q). \quad (74)$$

Otrzymujemy

$$B_q \max < \frac{1}{z_1^{2m}} = z_2^{2n}, \quad (75)$$

przy czym największa wartość błędu jest tu znacznie mniejsza niż w G, ponieważ w obecnych warunkach $n_{\min} = 3$.

Porównanie rezultatów liczbowych dokładnego i przybliżonego obliczenia znajduje się w rozdz. 8b.

8. OBLICZENIE ŁĄCZNYCH ŁADUNKÓW KUL

a. Łączny ładunek zawarty wewnątrz kuli K (rys. 14 i 15) jest następujący

$$\sum Q = Q + Q_1 + Q_2 + \dots = Q + \sum_{i=1}^{\infty} Q_i = Q + \frac{Q_1}{1 - z_2} = QS. \quad (76)$$

Na podstawie (51) otrzymujemy

$$\frac{1}{1 - z_2} = \frac{1}{1 - \frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4} - 1}} = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{k+2}{k-2}} \right)$$

i po podstawieniu (39) i (40) znajdujemy

$$\left. \begin{aligned} S_w &= 1 + \frac{r'r}{2(r'^2 - D^2)} \left(1 + \sqrt{\frac{(r' + r)^2 - D^2}{(r' - r)^2 - D^2}} \right), \\ S_z &= 1 + \frac{r'r}{2(D^2 - r'^2)} \left(1 + \sqrt{\frac{D^2 - (r' - r)^2}{D^2 - (r' + r)^2}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

W podobny sposób znajdujemy łączny ładunek znajdujący się wewnątrz kuli K' (rys. 14) lub też na zewnątrz tej kuli (rys. 15)

$$\sum q = q_1 + q_2 + q_3 + \dots = q_1 + \sum_{i=2}^{\infty} q_i = q_1 + \frac{q_2}{1 - z_2} = QT. \quad (78)$$

Po dokonaniu przeliczeń otrzymujemy

$$\left. \begin{aligned} T_w &= \frac{r'}{D} \left[1 + \frac{1}{2k_w} \left(1 + \sqrt{\frac{(r' + r)^2 - D^2}{(r' - r)^2 - D^2}} \right) \right], \\ T_z &= \frac{r'}{D} \left[1 + \frac{1}{2k_z} \left(1 + \sqrt{\frac{D^2 - (r' - r)^2}{D^2 - (r' + r)^2}} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Dalej stosujemy jeszcze wyrażenia następujące:

$$\sum q = Qr'T_{ow} \text{ lub } = Qr'T_{oz}. \quad (80)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{ow} &= \frac{1}{D} \left[1 + \frac{1}{2k_w} \left(1 + \sqrt{\frac{(r' + r)^2 - D^2}{(r' - r)^2 - D^2}} \right) \right], \\ T_{oz} &= \frac{1}{D} \left[1 + \frac{1}{2k_z} \left(1 + \sqrt{\frac{D^2 - (r' - r)^2}{D^2 - (r' + r)^2}} \right) \right] = \frac{T_z}{r'}. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

b. Przeprowadzimy teraz porównanie dokładnego obliczenia (według Ollendorffa) z obliczeniem przybliżonym. W tym celu rozważymy dwa przykłady liczbowe.

Przykład I. $r' = r = 1$; $D = 5$; $Q = 1$

$$k_z = \frac{5^2 - 1 - 1}{1 \cdot 1} = 23.$$

Rozwiązanie dokładne

$$\cosh \lambda = 11,5, \quad \lambda = 3,1292, \quad \sinh \lambda = 11,406,$$

$$\sinh \mu = 2,2812, \quad \mu = 1,5628,$$

$$\begin{aligned} \sum Q &= 1 + \frac{2,2812}{54,531} + \frac{2,2812}{1246,45} + \frac{2,2812}{28488} + \dots \\ &= 1 + 0,0418 + 0,00183 + 0,00008 + \dots = 1,0437, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum q &= \frac{2,2812}{11400} + \frac{2,2812}{261,19} + \frac{2,2812}{5969,7} + \dots \\ &= 0,2 + 0,0087 + 0,00038 + \dots = 0,2091. \end{aligned}$$

Rozwiązanie przybliżone

$$p_z = \frac{1}{24} = 0,0417, \quad z_2 = 11,5 - \sqrt{11,5^2 - 1} = 0,0435,$$

$$\begin{aligned} \sum Q &= 1 + 0,0417 + 0,0417 \cdot 0,0435 + 0,0417 \cdot 0,0435^2 + \dots \\ &= \underline{1} + \underline{0,0417} + 0,00183 \quad + 0,00008 \quad + \dots = 1,0437, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum q &= 0,2 + 0,0087 + 0,0087 \cdot 0,0435 + \dots \\ &= \underline{0,2} + \underline{0,0087} + 0,00038 + \dots \quad \dots = 0,2091. \end{aligned}$$

Bezpośrednie obliczenie $\sum Q$ i $\sum q$ metodą przybliżoną:

$$\sum Q = S_z = 1 + \frac{1}{2(25-1)} \left(1 + \sqrt{\frac{25}{25-4}} \right) = 1,0436,$$

$$\sum q = T_z = \frac{1}{5} \left[1 + \frac{1}{2 \cdot 23} \left(1 + \sqrt{\frac{25}{21}} \right) \right] = 0,2091.$$

Przykład II. $r=1$; $r'=100$; $D=102$; $Q=1$

$$k_z = \frac{102^2 - 100^2 - 1}{100} = 4,03.$$

Rozwiązanie dokładne

$$\cosh \lambda = 2,015, \quad \lambda = 1,3256, \quad \sinh \lambda = 1,7494,$$

$$\sinh \mu = 1,7151, \quad \mu = 1,3085,$$

$$\begin{aligned} \sum Q &= 1 + \frac{1,7151}{6,9295} + \frac{1,7151}{26,212} + \frac{1,7151}{98,704} + \frac{1,7151}{371,39} + \dots \\ &= \underline{1} + \underline{0,248} + 0,066 + 0,0174 + 0,00462 + \dots \quad \dots = 1,336, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum q &= \frac{1,7151}{1,7494} + \frac{1,7151}{7,0502} + \frac{1,7151}{26,658} + \frac{1,7151}{100,406} + \dots \\ &= \underline{0,981} + \underline{0,243} + 0,0643 + 0,0171 + \dots \quad \dots = 1,305. \end{aligned}$$

Rozwiązanie przybliżone

$$p_z = \frac{100}{102^2 - 100^2} = \frac{100}{404}, \quad z_2 = 2,015 - \sqrt{2,015^2 - 1} = 0,2657,$$

$$\begin{aligned} \sum Q &= 1 + \frac{100}{404} + \frac{100}{404} 0,2657 + \frac{100}{404} 0,2657^2 + \frac{100}{404} 0,2657^3 + \dots \\ &= \underline{1} + \underline{0,248} \quad + 0,0657 \quad + 0,0175 \quad + 0,00464 + \dots = 1,336, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum q &= \frac{100}{102} + \frac{100}{102,4,03} + \frac{100}{102,4,03} 0,2657 + \frac{100}{102,4,03} 0,2657^2 + \dots \\ &= 0,9804 + 0,2432 + 0,0646 + 0,0173 + \dots \dots = 1,305.\end{aligned}$$

Bezpośrednie obliczenie $\sum Q$ i $\sum q$ metodą przybliżoną jest następujące

$$\begin{aligned}\sum Q = S_z &= 1 + \frac{100}{2(102^2 - 100^2)} \left(1 + \sqrt{\frac{102^2 - 99^2}{102^2 - 101^2}} \right) = 1,337, \\ \sum q = T_z &= \frac{100}{102} \left[1 + \frac{1}{8,06} \left(1 + \sqrt{\frac{102^2 - 99^2}{102^2 - 101^2}} \right) \right] = 1,304,\end{aligned}$$

Przy porównywaniu rezultatów obu powyższych przykładów liczbowych nasuwają się następujące uwagi:

1. Różnice w podkreślonych liczbach nie wynikają z różnic metodycznych, ponieważ liczby te stanowią wartości wyjściowe, które zasadniczo powinny być takie same przy stosowaniu obu metod. (Występujące tu właśnie różnice o charakterze czysto rachunkowym są prawdopodobnie w dużej części przyczyną różnic dalszych).

2. Obliczenie metodą przybliżoną jest (przy praktycznie tych samych rezultatach) znacznie prostsze i nie wymaga korzystania z tablic funkcji hiperbolicznych. Można nawet powiedzieć, jakkolwiek brzmi to paradoksalnie, że właśnie wskutek swej prostoty obliczenie metodą przybliżoną daje dokładniejsze rezultaty niż obliczenie metodą ścisłą. Mniejsza dokładność metody ścisłej jest spowodowana tym, że właśnie wskutek konieczności wprowadzenia pomocniczych funkcji hiperbolicznych powstają nie dające się usunąć źródła błędów.

3. Najważniejsze jednak nie jest to, jak ścisła jest trzecia cyfra dziesiętna w otrzymanym rezultacie. Najbardziej istotną i ważną cechą przedstawionej metody jest możliwość przedstawienia rezultatu w postaci zwartego wzoru. Dzięki tej okoliczności jesteśmy w stanie wyciągnąć z istniejącego stanu rzeczy cały szereg wniosków.

9. POJEMNOŚCI W UKŁADZIE DWÓCH KUL

a. Kula K położona jest wewnątrz kuli K' . Dotychczasowe rozważania były oparte na założeniu (por. rozdz. 6a), że potencjał kuli K jest V (wzór 24), potencjał zaś kuli K' równa się zeru. Wobec tego napięcie między kulami wynosi

$$U_{KK'} = \frac{Q}{4\pi r \epsilon_0}. \quad (82)$$

Pojemność układu znajdziemy, zważywszy, że wewnątrz kuli K znajduje się łączny ładunek $\sum Q$ (rys. 15)

$$C = \frac{\sum Q}{U_{KK'}} \quad (83)$$

Podstawiając tu wartości czynników z (82) i (76) znajdujemy szukaną pojemność

$$C = 4\pi\epsilon_0 r S_w, \quad (84)$$

przy czym S_w jest określone przez (77).

Należy pamiętać, że warunkiem słuszności wzoru (84) jest spełnienie nierówności (60) lub (61).

Przez podstawienie do wzoru (84) $D=0$ otrzymuje się znane wyrażenie pojemności dwóch kul współśrodkowych

$$C_0 = 4\pi\epsilon_0 \frac{rr'}{r' - r} \quad (85)$$

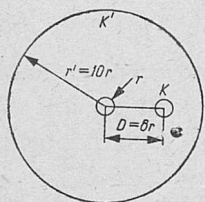
Zakładając w (84) $r' = \infty$ za pomocą (77) otrzymujemy znane wyrażenie pojemności C_∞ kuli odosobnionej.

$$C_\infty = 4\pi\epsilon_0 r. \quad (86)$$

Tablica 1

Pojemność dwóch kul w położeniu „wewnętrznym” przy zmiennej odległości środków kul
(stosunek promieni kul $r'/r=10$ i 15)

	$\frac{D}{r} =$	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{r'}{r} = 10$	$\frac{C}{4\pi\epsilon_0 r} =$	1,111	1,112	1,116	1,123	1,135	1,154	1,186
$\frac{r'}{r} = 15$	$\frac{C}{4\pi\epsilon_0 r} =$	1,071	1,072	1,073	1,075	1,077	1,081	1,086
	$\frac{D}{r} =$	7	8	9	10	11		
$\frac{r'}{r} = 15$	$\frac{C}{4\pi\epsilon_0 r} =$	1,093	1,103	1,116	1,136	1,169		



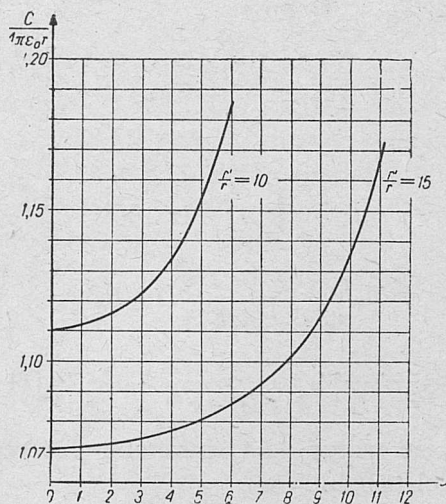
Rys. 16. Do tabl. 1

Tablica 1 przedstawia wartości C obliczone z (84) przy założeniu $r' = 10r$ lub $r' = 15r$ i przy zmiennym stosunku D/r . Zakładając, że $m=2$ otrzymujemy z (61) granice dla D , w obrębie których ważny jest wzór (84)

$$0 \leq D \leq 6r \text{ przy } r' = 10r$$

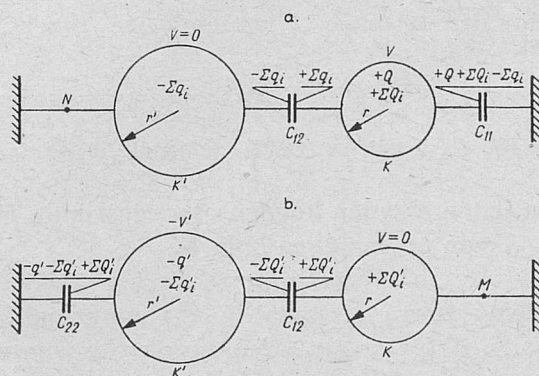
$$0 \leq D \leq 11r \text{ przy } r' = 15r$$

(p. rys. 16). Za wartość odniesienia przyjęto w tablicy 1 wielkość $C^\infty = 4\pi\epsilon_0 r$. Na rys. 17. przedstawiono tę zależność graficznie.



Rys. 17. Pojemność dwóch kul w położeniu wewnętrznym (tablica 1)

b. Kule K i K' położone są na zewnątrz siebie. Zakładamy, jak poprzednio, że kula K ma potencjał V i że kula K' jest uziemiona (rys. 18a).



Rys. 18a i b. Schematyczne przedstawienie układu pojemności dwóch kul

W układzie pojemności musimy obecnie rozróżnić dwie pojemności cząstkowe: pojemność C_{11} kuli K bezpośrednio względem ziemi oraz pojemność C_{12} między K i K' ; pojemność C_{12} odpowiada liniom pola

elektrostatycznego łączącym te dwie powierzchnie. Mamy zatem (p. rys. 14)

$$C_{12} = \frac{\sum q_i}{U_{KK'}} = \frac{QT_z}{Q/4\pi\epsilon_0 r} = 4\pi\epsilon_0 r T_z = 4\pi\epsilon_0 r r' T_{0z}, \quad (87)$$

$$C_{11} = \frac{\sum Q - \sum q}{U_{KK'}} = 4\pi\epsilon_0 r (S_z - T_z). \quad (88)$$

Wprowadzając oznaczenie

$$R_z = \sqrt{\frac{D^2 - (r' - r)^2}{D^2 - (r' + r)^2}} \quad (89)$$

możemy napisać

$$T_{0z} = \frac{1}{D} + \frac{1}{2k_z D} (1 + R_z), \quad (90)$$

$$S_z - T_z = 1 - \frac{r'}{D} + \left[\frac{r r'}{2(D^2 - r'^2)} - \frac{r'}{2k_z D} \right] (1 + R_z). \quad (91)$$

Należy pamiętać, że warunkiem słuszności powyższych wzorów jest spełnienie nierówności (63) lub (64).

Przy $r = \text{skończ}$ i $r' = \text{skończ}$ jest zawsze

$$S_z > T_z. \quad (92)$$

Istotnie, w wyrażeniu (91) jest zawsze

$$1 > \frac{r'}{D} \quad \text{i} \quad \frac{r r'}{2(D^2 - r'^2)} > \frac{r'}{2k_z D};$$

o słuszności ostatniej nierówności możemy się przekonać zakładając $D = r + r' + a$, gdzie $a > 0$.

Zakładając we wzorze (91) $D = \infty$, $r = \text{skończ}$ i $r' = \text{skończ}$, otrzymujemy

$$\lim_{D \rightarrow \infty} (S_z - T_z) = 1, \quad \text{czyli} \quad \lim_{D \rightarrow \infty} C_{11} = 4\pi\epsilon_0 r.$$

W tym przypadku jedną okładką kondensatora jest kula K, drugą — ziemia posiadająca ten sam potencjał co kula K'.

Ten sam wynik otrzymamy przyjmując $r' = 0$, $r = \text{skończ}$.

Jeżeli przyjmiemy teraz, że kula K' ma potencjał różny od zera, a uziemiona jest kula K (patrz rys. 18b, który wykonano opierając się na założeniu, że potencjał kuli K' jest $-V'$), to symetryczne wyrażenie (87) pojemności C_{12}

$$C_{12} = 4\pi\epsilon_0 r r' T_{0z} = 4\pi\epsilon_0 r T_z = 4\pi\epsilon_0 r' T'_z \quad (87)$$

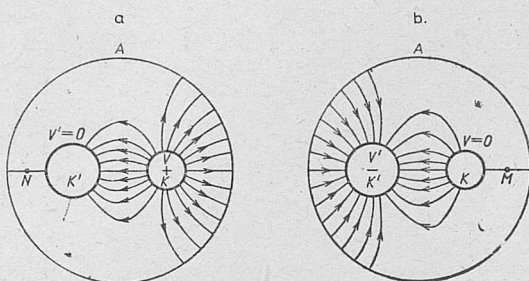
pozostaje bez zmiany, natomiast odnośna pojemność cząstkowa C_{22} kuli K' jest

$$C_{22} = 4\pi\epsilon_0 r' (S'_z - T'_z) \quad (93)$$

przy czym

$$S'_z = 1 + \frac{rr'}{2(D^2 - r^2)}(1 + R_z); \quad T'_z = \frac{r}{D} \left(1 + \frac{1 + R_z}{2k_z} \right) = rT_{0z}. \quad (94)$$

c. Na rys. 18a i 18b przedstawione są ładunki znajdujące się wewnątrz kul oraz na okładkach kondensatorów cząstkowych; ładunki i potencjały na rys. 18b zaopatrzone są w kreseczki. Schematyczne obrazy pól istniejących w obu tych przypadkach przedstawiono na rys. 19a i b. Zewnętrzny okrąg A obrazuje tu nieskończenie odległą sferę; przyjmujemy, że jej potencjał zawsze równa się zero. Linie pola wychodzą np. z powierzchni kuli K dodatnio naładowanej (rys. 19a), kończą się zaś na obu powierzchniach A i K' mających potencjał zerowy.



Rys. 19a i b. Schematyczne obrazy pola w przypadku rys. 18a i 18b

Rozłączmy teraz uziemienia obu kul w punktach M , N (rys. 18) i dokonajmy superpozycji obu przedstawionych na tym rysunku stanów. Stan, który powstanie na skutek tego nałożenia, przedstawiony jest na rys. 20.

Na rys. 20 jako źródło napięcia narysowana jest bateria ogniw; ma to tylko znaczenie schematyczne, w rzeczywistości napięcie musi być wielokrotnie wyższe (ta sama uwaga dotyczy rys. 31).

Na kuli K' znajdują się teraz ładunki

$$-q' - \sum q'_i - \sum q_i = -(q'S' + QT) = -H'; \quad (95)^3$$

łączny ładunek tej kuli oznaczamy przez $-H'$; na kuli K natomiast otrzymamy po dokonaniu superpozycji łączny ładunek H

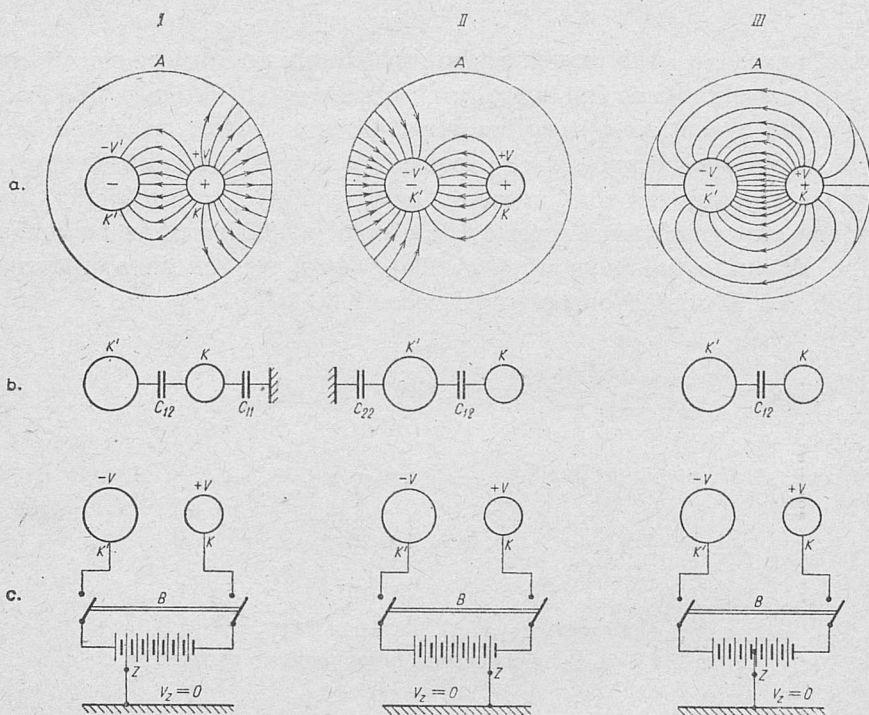
$$Q + \sum Q_i + \sum Q'_i = QS + q'T' = H. \quad (96)$$

Mogą tu zajść trzy przypadki I, II, III, które są przedstawione schematycznie na rys. 20. Rys. 20a przedstawia przebieg linii pól⁴, rys. 20b —

³ Opuszczamy przy wyrażeniach S_z , T_z , T_{0z} indeks z tam, gdzie można to zrobić bez uszczerbku dla zrozumienia wzoru.

⁴ Inne układy linii pola przedstawiono na rys. 31.

odnośne pojemności cząstkowe, rys. 20c — schematy połączeń konieczne do uzyskania odpowiednich potencjałów lub ładunków na kulach K' i K .



Rys. 20. Schematyczne obrazy pól powstałych przez superpozycję pól z rys. 18a i 18b oraz odnośne schematy połączeń

Przy zamkniętym wyłączniku B potencjały kul utrzymywane są przez baterię na stałej wartości. Jeżeli wyłącznik B otworzyć, to na kulach pozostają stałe ładunki H' i H , przy czym przez odpowiednie dobranie punktu Z (który jest połączony z ziemią, tzn. ma potencjał równy zero) można osiągnąć, że w przypadku I jest $H > H'$, w przypadku II: $H < H'$, w przypadku III zaś: $H = H'$ (jeżeli punkt Z na rys. 20 IIIc odpowiada równości bezwzględnych wartości potencjałów $|-V'| = |V|$, to w celu uzyskania równości bezwzględnych wartości odnośnych ładunków $|-H'| = |H|$ należy punkt Z przesunąć na baterii nieco w lewo).

$$\text{Przypadek I. } H > H' \text{ albo } QS + q'T' > q'S' + QT \quad (97)$$

Ładunek dodatni kuli K (patrz rys. 20 I) zrównoważony jest częściowo przez ujemny ładunek kuli K' , częściowo zaś przez ujemne ładunki znajdujące się w nieskończoności (na sferze A). W związku z tym czynne są w tym układzie pojemności cząstkowe: C_{12} (pojemność wzajemna) i C_{11} (pojemność własna kuli K).

Przypadek II. $H < H'$ albo $QS + q'T' < q'S' + QT$ (98)

Obraz pola i odnośne schematy przedstawiono na rys. 20 II. Ładunek ujemny kuli K' zrównoważony jest tu częściowo przez dodatni ładunek kuli K , częściowo zaś przez dodatnie ładunki znajdujące się w nieskończoności A . W związku z tym teraz w układzie czynne są pojemności cząstkowe: C_{12} i C_{22} (pojemność własna kuli K').

Przypadek III. $H = H'$ albo $QS + q'T' = q'S' + QT$ (99)

Obraz pola i schematy połączeń przedstawiono na rys. 20 III. Ładunki obu kul są tu zrównoważone, żadna linia pola nie dąży do nieskończoności; w związku z tym w układzie czynna jest tylko pojemność cząstkowa C_{12}

Potencjały V i V' obu kul wynoszą

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}; \quad V' = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r'}, \quad (100)$$

Z równań (95) i (96) wynika

$$Q = \frac{S'H - T'H'}{SS' - TT'}; \quad q' = \frac{SH' - TH}{SS' - TT'}. \quad (101)$$

Można teraz znaleźć następujące wyrażenia pojemności cząstkowych:

W przypadku I

$$C_{12} = \frac{S'q' + TQ}{V + V'} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r'S'V' + rTV}{V + V'} = \frac{4\pi\epsilon_0 rr'(SS' - TT')H'}{(r'S' - rT)H + (rS - r'T')H'}; \quad (102)$$

$$C_{11} = \frac{(S - T)Q - (S' - T')q'}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0}{V} [r(S - T)V - r'(S' - T')V'] = \\ = \frac{4\pi\epsilon_0 r(SS' - TT')(H - H')}{S'H - T'H'}. \quad (103)$$

W przypadku II

$$C_{12} = \frac{SQ + T'q'}{V + V'} = 4\pi\epsilon_0 \frac{rSV + r'T'V'}{V + V'} = \frac{4\pi\epsilon_0 rr'(SS' - TT')H}{(rS - r'T')H' - (r'S' - rT)H}; \quad (104)$$

$$C_{22} = \frac{(S' - T')q' - (S - T)Q}{V'} = \frac{4\pi\epsilon_0}{V'} [r'(S' - T')V' - r(S - T)V] = \\ = \frac{4\pi\epsilon_0 r'(SS' - TT')(H' - H)}{S'H' - TH}. \quad (105)$$

W przypadku III

$$C_{12} = 4\pi\epsilon_0 \frac{rTV + r'S'V'}{V + V'} = \frac{4\pi\epsilon_0 rr'(SS' - TT')}{r'(S' - T') + r(S - T)} \quad (106)$$

oraz

$$C_{11} = C_{22} = 0. \quad (107)$$

Wyrażenie (87) otrzymuje się ze (102) i (106) przez podstawienie $V' = 0$, wyrażenie (88) ze (103) przez to samo podstawienie; podobnie można otrzymać np. wyrażenie (93) ze (105) przez podstawienie $V = 0$.

Równania (102) do (105) umożliwiają obliczenie odnośnych pojemności cząstkowych w każdym poszczególnym przypadku; równania te ujawniają interesujący szczegół: pojemność układu dwóch kul zależy nie tylko, jak można by mniemać, od geometrycznych własności (wymiarów) tego układu i od przenikalności dielektrycznej ośrodka, lecz także od potencjałów lub od ładunków obu kul, to znaczy od układu pola elektrostatycznego. Pojemności, które się otrzymuje przy określonych V i V' (lub H i H') nazywamy pojemnościami czynnymi w tych warunkach.

Pojemności czynne nie występują w układach odosobnionych składających się z dwóch ciał (patrz np. rys. 20 III); powstawanie ich jest możliwe dopiero przy co najmniej trzech elektrodach, przy czym jedną z nich może być nieskończenie odległa sfera (patrz np. rys. 20 I i 20 II).

Wprowadzone wyżej pojęcia pojemności cząstkowych C_{11} , C_{22} są wprawdzie analogiczne do znanych z teorii pól elektrostatycznych pojemności cząstkowych, jednakże przedstawiają (w energetyce) w stosunku do nich pewne novum. W układzie naładowanych przewodników pojemność cząstkowa dotyczyła zawsze dwóch dowolnych przewodników lub też jednego przewodnika i ziemi; w ten sposób obie okładki kondensatorów odpowiadających tym pojemnościom znajdowały się zawsze w skończonych odległościach od siebie. Jednakże w rozważanych obecnie pojemnościach cząstkowych C_{11} i C_{22} jedna okładka położona jest w nieskończoności (tak jak na przykład druga okładka „kondensatora“ w przypadku odosobnionej kuli naładowanej). Niezwykłość tego przypadku sprawia, że w potocznym rozumieniu tej sprawy, myśląc o pojemności układu dwóch kul, pojemności cząstkowych C_{11} , C_{22} wcale się „nie widzi“; tymczasem, jak wykażemy niżej, grają one ilościowo bardzo znaczną rolę.

d. Jeżeli obie kule są jednakowe ($r = r'$), to

$$S = S' = 1 + \frac{1}{2(\delta^2 - 1)} \left(1 + \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - 4}} \right) = S_s; \quad \delta = \frac{D}{r};$$

$$T = T' = \frac{1}{\delta} \left[1 + \frac{1}{2(\delta^2 - 2)} \left(1 + \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - 4}} \right) \right] = T_s \quad (108)$$

i wówczas w przypadku I

$$C_{12} = 4\pi\epsilon_0 r \frac{S_s V' + T_s V}{V + V'} = 4\pi\epsilon_0 r (S_s + T_s) \frac{H'}{H + H'}; \quad (109)$$

$$C_{11} = 4\pi\epsilon_0 r (S_s - T_s) \frac{V - V'}{V} = 4\pi\epsilon_0 r (S_s^2 - T_s^2) \frac{H - H'}{SH - TH'} \quad (110)$$

W przypadku II otrzymuje się analogiczne wzory (przy zamianie V na V' , H na H' i vice versa).

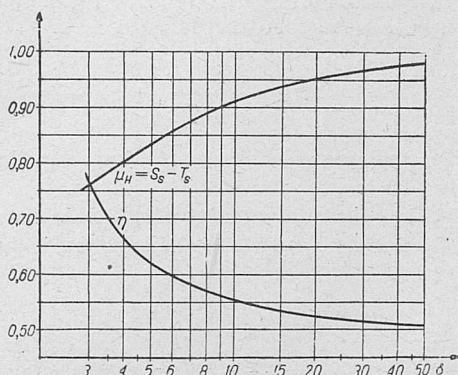
W przypadku III jest

$$C_{12} = 2\pi\epsilon_0 r (S_s + T_s) \quad (111)$$

Ostatnie równanie można napisać w postaci

$$C_{12} = 4\pi\epsilon_0 r \eta, \quad \text{gdzie} \quad \eta = \frac{1}{2} (S_s + T_s) \quad (112)$$

Wartości współczynników η , S_s , T_s i $\mu_H = S_s - T_s$ podane są w tablicy 2. Przebieg graficzny współczynników η i $\mu_H = S_s - T_s$ przedstawiono na rys. 21.



Rys. 21. Współczynniki pojemności wzajemnej w układzie dwóch kul

U w a g a: Fizyczne powstanie stanów pokazanych na rys. 19 i 20 można sobie przedstawić w sposób następujący.

Wychodzimy z istnienia odosobnionej kuli K naładowanej dodatnio; wszystkie linie sił wychodzące z K dążą do nieskończoności.

Z bardzo wielkiej odległości (teoretycznie z nieskończoności) przybliżamy kulę K' nie mającą żadnego ładunku do kuli K tak długo, aż osiągniemy żądaną odległość D między kulami.

Stwierdzamy istnienie na kuli K' dwóch ładunków influencyjnych: ujemnego ładunku na stronie znajdującej się naprzeciwko kuli K oraz ładunku dodatniego na stronie przeciwległej; usuwamy teraz ten influencyjny ładunek dodatni przez połączenie kuli K' poprzez N z nieskończone odległą sferą (lub też zastępczo z ziemią, co do której również zakładamy, że znajduje się w stosunkowo wielkiej odległości od naszego układu). W ten sposób jednocześnie nadajemy kuli K' potencjał równy zeru.

W tym stadium połączenie przez N nie ma już żadnego znaczenia; można je pozostawić albo przerwać bez zmiany ładunku i potencjału kuli K' ; nie zmienia się również przy tym układ pola.

Stan, jaki teraz osiągnęliśmy, odpowiada stanowi z rys. 14, kula K' ma potencjał zero, kula K — potencjał dodatni określony pierwszym wzorem (100). Wiemy z poprzednich rozważań, że na kuli K znajdują się ładunki $Q + \sum Q_i = QS$, na kuli K' — ładunki $\sum q_i = QT$. Wiemy również z wzoru (92), że jest zawsze $QS > QT$. Obraz pola jest przedstawiony zatem na rys. 19a.

Aby osiągnąć na przykład stan 20 Ia, dodajemy do istniejącego już na kuli K' ładunku ujemnego $-QT$ jeszcze dodatkowy niewielki ładunek ujemny np. ładunek $k(S-T)Q$, gdzie $k < 1$. Potencjały obu kul teraz zmieniają się: potencjał kuli K' będzie ujemny, potencjał kuli K pozostanie dodatni jak poprzednio. Ładunki obu kul będą określone przez równania (95) i (96), przy czym na skutek naszego założenia będzie

$$H' = QT + kQ(S-T) = q'S' + QT; \quad q' = \frac{k(S-T)}{S'} Q;$$

$$H = QS + q'T' = QS + \frac{k(S-T)T'}{S'} Q.$$

Warunek $H > H'$ sprowadza się teraz do nierówności

$$k < \frac{S'}{S' - T'},$$

która może być zawsze spełniona, ponieważ k jest dowolnie obieralne. W ten sposób otrzymaliśmy stan 20 I.

Na zasadzie twierdzenia o jednoznaczności pól — pola rozważane wyżej (w tym rozdz. i w rozdz. 6) są identyczne z polami, które obecnie osiągnęliśmy w sposób fizyczny.

Tablica 2

Wartości współczynników S_s , T_s , $\mu_H = S_s - T_s$ i η w układzie dwóch jednakowych kul przy zmiennej odległości $D/r = \delta$

$\delta =$	3	4	5	6	8	10	15	20	30	40	50
$S_s =$	1,1463	1,0718	1,0435	1,0294	1,0161	1,0102	1,0045	1,0025	1,0011	1,0006	1,0004
$T_s =$	0,389	0,269	0,209	0,172	0,127	0,101	0,067	0,050	0,033	0,025	0,020
$\mu_H = S_s - T_s =$	0,757	0,807	0,835	0,858	0,889	0,909	0,938	0,952	0,968	0,976	0,980
$\eta =$	0,767 ₅	0,668 ₅	0,626	0,600	0,572	0,556	0,536	0,526	0,517	0,513	0,510

Przy coraz bardziej wzrastającej odległości między kulami:

1. współczynnik $(S_s - T_s)$ dąży do 1;
2. współczynnik η (to znaczy i pojemność cząstkowa C_{12} , wzór (112) dąży do 0,5;

3. przy $\delta > 5$ można założyć w przybliżeniu $S_s - T_s \approx \frac{\delta - 1}{\delta}$ i $\eta \approx \frac{\delta + 1}{2\delta}$
(błąd $< 3\%$);

4. przy $D \rightarrow \infty$ ze (109) i (110) wynika

$$C_{12} \rightarrow 2\pi\epsilon_0 r, \quad C_{11} \rightarrow 4\pi\epsilon_0 r \frac{H-H'}{H} = 4\pi\epsilon_0 r \frac{V-V'}{V} \quad (113)$$

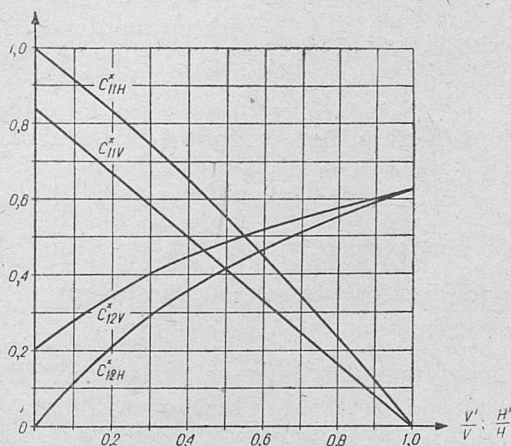
przy $H=H'$ jest $C_{11}=0$.

W tablicy 3 założono, że dwie jednakowe kule ($r=r'$) położone są w stałej odległości $D=5r$ od siebie.. Obliczono pojemności cząstkowe C_{12} i C_{11} przy następujących założeniach.

A. Potencjał V kuli K jest stały; potencjał V' kuli K' zmienia się od 0 do V ; obliczone wartości $C_{12}/4\pi\epsilon_0 r$ i $C_{11}/4\pi\epsilon_0 r$ oznaczono w tym przypadku: C_{12V}^* , C_{11V}^* .

B. Ładunek H kuli K jest stały; ładunek H' kuli K' zmienia się od 0 do H ; obliczone wartości $C_{12}/4\pi\epsilon_0 r$ i $C_{11}/4\pi\epsilon_0 r$ oznaczono w tym przypadku: C_{12H}^* , C_{11H}^* .

Przebieg graficzny powyższych współczynników przedstawiono na rys. 22.



Rys. 22. Wykresy do tablicy 3

Tablica 3

Pojemności C_{11}^* i C_{12}^* układu dwóch jednakowych kul przy stałej odległości $D=5r$ i zmiennym stosunku potencjałów V'/V oraz ładunków H'/H

$\frac{V'}{V}$ lub $\frac{H'}{H} =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$C_{12V}^* =$	0,209	0,285	0,346	0,402	0,447	0,487	0,522	0,553	0,575	0,604	0,626
$C_{11V}^* =$	0,834	0,751	0,668	0,584	0,501	0,417	0,334	0,250	0,167	0,083	0,00
$C_{12H}^* =$	0,00	0,114	0,207	0,289	0,358	0,417	0,470	0,516	0,557	0,593	0,626
$C_{11H}^* =$	1,00	0,918	0,833	0,745	0,652	0,555	0,454	0,349	0,238	0,138	0,00

e. Obliczymy obecnie pojemność C_p układu składającego się z kuli K i płaszczyzny odległej o A od środka K . Pojemność tę możemy znaleźć dwoma sposobami:

S p o s ó b α : zakładając przy zewnętrznym położeniu obu kul, że promień r' kuli K' dąży do nieskończoności:

$$r' \rightarrow \infty, \quad D \rightarrow \infty$$

jednak przy tym wielkość A

$$A = D - r' \quad (114)$$

pozostaje niezmienna (rys. 23a),

S p o s ó b β : zakładając, że przy położeniu kuli K wewnątrz kuli K' promień r' ostatniej dąży do nieskończoności

$$r' \rightarrow \infty, \quad D \rightarrow \infty,$$

Rys. 23. Pojemność układu kuli i płaszczyzny

przy czym jednak pozostaje bez zmiany wielkość A (rys. 23b)

$$A = r' - D. \quad (115)$$

Operacje powyższe będziemy oznaczali znakiem $\lim_a$ albo $\lim_\beta$, lub też, jeżeli rezultat obu obliczeń wykonanych sposobami α i β jest zgodny, będziemy używać znaku $\lim_{a\beta}$.

Podstawiając do wyrażenia S_z (wzór 77) wartość D ze (114) lub też do S_w (wzór 77) wartość D ze (115) i przechodząc do granicy otrzymujemy w obu przypadkach to samo wyrażenie

$$S_p = \lim_a S_z = \lim_\beta S_w = 1 + \frac{r}{4A} \left(1 + \sqrt{\frac{A+r}{A-r}} \right). \quad (116)$$

Podstawiając do wyrażenia T_z (wzór 79) wartość D ze (114) lub do wyrażenia T_w (wzór 79) wartość D ze (115) i przechodząc do granicy otrzymujemy w obu przypadkach to samo wyrażenie

$$T_p = \lim_a T_z = \lim_\beta T_w = 1 + \frac{r}{4A} \left(1 + \sqrt{\frac{A+r}{A-r}} \right). \quad (117)$$

W analogiczny sposób znajdujemy

$$k_p = \lim_a k_z = \lim_\beta k_w = \frac{2A}{r}; \quad \lim_a S'_z = 1, \quad \lim_a T'_z = 0. \quad (118)$$

Warunek dostatecznej dokładności tych wzorów wyrażony za pomocą (64) obecnie przy założeniu $r_2 = r'$ przyjmuje postać

$$A > mr; \quad (119)$$

jako warunek stosowalności powyższych wzorów przeważnie przyjmujemy

$$A \geq 2r \quad \text{lub nawet} \quad A \geq 1,5r.$$

Podczas dokonywania operacji α potencjał V' dąży do zera; przyjmując formalnie wyrażenia dla ładunków H i H' zgodnie z (95) i (96) znajdujemy

$$\lim_{\alpha} H = QS_p; \quad \lim_{\alpha} H' = q' + QS_p.$$

Ponieważ wielkość q' jest zawsze dodatnia, to wynika stąd, że można by rachunkowo uważać za dopuszczalne przypadki II lub III (rozdz. 9a). Jednakże, fizycznie biorąc, ładunek q' nie może być utrzymany na nieskończenie rozległej powierzchni; mamy zatem zawsze w tym przypadku

$$H = H'. \quad (120)$$

Wniosek powyższy jest zgodny ze znanym twierdzeniem Ollendorffa [6], [7].

„Przewodnik rozciągający się do nieskończoności przejmuje wszystkie linie pola wychodzące z drugiego naładowanego przewodnika (o wymiarach skończonych)“.

Przy uwzględnieniu związków (116) do (118) ze wzoru (106) wynika

$$C_p = \lim_{\alpha} C_{12} = 4\pi\epsilon_0 r \left(1 + \frac{r}{4A} + \frac{r}{4A} \sqrt{\frac{A+r}{A-r}} \right). \quad (121)$$

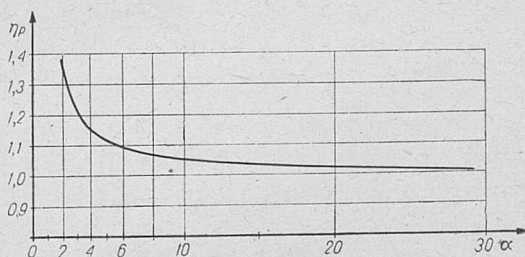
Wprowadzając oznaczenie

$$\alpha = \frac{A}{r} \quad (122)$$

możemy napisać

$$C_p = 4\pi\epsilon_0 r \eta_p; \quad \eta_p = 1 + \frac{1}{4\alpha} \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} \right). \quad (123)$$

W tablicy 4 i na rys. 24 przedstawiono zależność między η_p i α .



Rys. 24. Wartości współczynnika η_p

gdzie

$$R_p = \sqrt{\frac{A_1 + r}{A_1 - r}}; \quad R'_p = \sqrt{\frac{D - A_1 + r}{D - A_1 - r}}.$$

Warunek ten jest spełniony, jeżeli $D - A_1 = A_1$.

Bezpośredni dowód, że powyższe ekstremum odpowiada na j m n i e j s z e j wartości pojemności, wymaga wykonania nader zawiłych rachunków. Przeprowadzenie ich nie jest jednak konieczne; należy zważyć, że zarówno C' jak C'' są funkcjami ciągłymi, zmieniającymi się monotonnie. Wystarczy zatem wykazać na dowolnym przykładzie liczbowym, iż

$$\frac{1}{C'_p} + \frac{1}{C''_p} < \frac{2}{C_p},$$

to znaczy, że (p. rys. 25)

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{4\alpha} \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} \right)} + \frac{1}{1 + \frac{1}{4\beta} \left(1 + \sqrt{\frac{\beta+1}{\beta-1}} \right)} < \frac{2}{1 + \frac{0,5}{\alpha+\beta} \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha+\beta+2}{\alpha+\beta-2}} \right)}$$

aby wyprowadzić stąd wnioski ogólne.

Istotnie, równanie powyższe jest zawsze spełnione. Przyjmując np. $\alpha=2$; $\beta=4$; $\frac{\alpha+\beta}{2}=3$ i korzystając z danych zawartych w tablicy 4 znajdujemy wartości

$$C'_p = 1,34163 \cdot 4\pi\epsilon; \quad C''_p = 1,14319 \cdot 4\pi\epsilon; \quad C_p = 1,20118,$$

które spełniają nierówność

$$\frac{1}{1,34163} + \frac{1}{1,14319} < \frac{2}{1,20118}$$

albo

$$0,745 + 0,875 = 1,620 < 1,665.$$

b. Wykażemy ponadto, że w polu odosobnionej kuli K elektroda pośrednia K' o kształcie kulistym, położona współśrodkowo względem K , odpowiada najmniejszej pojemności układu. Ponieważ pojemność odosobnionej kuli K' pozostaje zawsze niezmienna niezależnie od zmiany położenia tej kuli), przeto na zasadzie (84) warunek dla szukanego ekstremum brzmi

$$\frac{\partial S_w}{\partial D} = 0$$

albo

$$\frac{2Dr^2r'^2}{(r'^2 - D^2)\sqrt{[(r' + r)^2 - D^2][(r' - r)^2 - D^2]}} + \frac{Drr'}{(r'^2 - D^2)^2} \left(1 + \sqrt{\frac{(r' + r)^2 - D^2}{(r' - r)^2 - D^2}} \right) = 0.$$

Jak widać, warunek ten jest spełniony przy $D=0$. Złożenie powyższe odpowiada minimum wartości S_w , ponieważ przesuwając środek kuli K' o ΔD można udowodnić, że spełniona jest nierówność

$$1 + \frac{r'r}{2r'^2} \left(1 + \frac{r' + r}{r' - r} \right) < 1 + \frac{r'r}{2(r'^2 - \Delta D^2)} \left(1 + \sqrt{\frac{(r' + r)^2 - \Delta D^2}{(r' - r)^2 - \Delta D^2}} \right)$$

(lewa strona tej nierówności odpowiada wartości $\Delta D=0$). Istotnie poszczególne wyrazy iloczynu z lewej strony nierówności są mniejsze od poszczególnych wyrazów iloczynu po stronie prawej.

c. Prawo najmniejszej pojemności dyskutowane w rozdz. 1 zostało tu udowodnione w kilku przypadkach szczególnych; stwierdzona została słuszność tego prawa:

1. w ogólnym przypadku pola utworzonego przez dwa walce kołowe o równoległych osiach;
2. w szczególnym przypadku pola utworzonego przez dwie kule o jednakowej średnicy, gdy elektroda pośrednia jest umieszczona w płaszczyźnie symetrii tych kul;
3. w przypadku pola odosobnionej kuli naładowanej.

Pierwsze dwa przypadki dotyczą powierzchni ekwipotencjalnych rozciągających się do nieskończoności, przypadek trzeci dotyczy powierzchni skończonych.

„Szczegółowość“ wszystkich tych rozważanych przypadków polega na tym, że wszystkie one dotyczą elektrod o pewnych specjalnych kształtach. Kształty te zostały obrane rozmyślnie w taki sposób, aby otrzymać powierzchnie ekwipotencjalne o postaci prostej, dające się w łatwy sposób wyrazić za pomocą wzorów matematycznych. Wzory te pomogły udowodnić w rozważanych warunkach słuszność prawa najmniejszej pojemności. Jednak uzyskany w ten sposób pogląd wychodzi poza zasięg wyprowadzonych wzorów.

d. Można sformułować pytanie: czy w ogóle słuszność prawa najmniejszej pojemności może być uzależniona od kształtu elektrod? Wydaje się, że odpowiedź na to pytanie musi być negatywna.

Ograniczmy rozważania do przypadku ośrodka jednorodnego i izotropowego.

Na zasadzie hipotezy Maxwella—Faradaya o istocie pola elektrostatycznego i wynikających z niej poglądów, same elektrody, a zatem i postać

ich powierzchni, nie mają bezpośredniego wpływu na stany i zjawiska zachodzące w dowolnym punkcie pola. Wpływ kształtu elektrod na te stany i zjawiska ujawnia się wyłącznie pośrednio, to znaczy poprzez konfigurację układu powierzchni ekwipotencjalnych i układu linii sił. Jest oczywiste, że kształt elektrod ma decydujący wpływ na kształt powierzchni ekwipotencjalnych i ich ortogonalnych trajektorii. Wpływ ten jest najsilniejszy w pobliżu elektrod i słabnie w miarę oddalania się od nich. Stan istniejący w pewnym punkcie pola uwarunkowany jest już tylko przez konfigurację obu wymienionych układów w tym punkcie i siły wywierane na ewentualnie wprowadzony na to miejsce mikroładunek zależą wyłącznie od praw różniczkowych, dotyczących bezpośredniej okolicy tego punktu. Wszelkie poglądy upatrujące w ośrodku jednorodnym i izotropowym możliwość jakiegoś dodatkowego wpływu na stan punktu A , wpływu uzależnionego zatem nie tylko od wymienionych wyżej elementów, ale jeszcze od czynników postronnych, jak np. od materiału elektrod lub od ich kształtu itd., są nawrotem do starej i odrzuconej kulombowskiej hipotezy działania na (daleką) odległość.

Nie ma najmniejszej trudności w uogólnieniu powyższych rozważań, dotyczących jednego punktu, do dowolnego zbioru punktów, a zatem i do zbioru punktów tworzących powierzchnię ekwipotencjalną. Nic nie zmieni się również, jeżeli, nie zmieniając w niczym geometrycznych charakterystyk poszczególnych punktów i utworzonej przez nie powierzchni, nadamy tej powierzchni hipotetyczne własności spistości i przewodnictwa. Dochodzimy w ten sposób do wprowadzonego w rozdz. I pojęcia elektrody pośredniej. Elektroda ta posiada ścianki o tak znikomej grubości, że wprowadzona na miejsce powierzchni ekwipotencjalnej nie deformuje istniejącego pola; jednakże, jak wynika z powyższego, posiada ona własności materialne: ma dwie ciągle powierzchnie, na których gromadzić się mogą ładunki elektryczne, ponadto wewnątrz swych cienkich ścianek może przewodzić prąd elektryczny.

Opierając się na powyższym możemy uważać, że stan elektryczny na powierzchni elektrody pośredniej (potencjał, natężenie pola w poszczególnych punktach) oraz zjawiska, które mogą zająć podczas jej nieskończenie drobnego ruchu, zależą wyłącznie od układu istniejących w bezpośrednim sąsiedztwie tej elektrody innych powierzchni ekwipotencjalnych oraz od układu przyległych linii pola.

Wydaje się zatem, że wszelkie pozory słuszności (*pausibilité*) posiada następujące twierdzenie:

Zjawiska, zachodzące przy nieskończenie małym ruchu elektrody pośredniej w ośrodku jednorodnym i izotropowym, zależą wyłącznie od konfiguracji zbliżonych do niej powierzchni ekwipotencjalnych

oraz od układu przyległych linii pola; nie są one natomiast bezpośrednio zależne od kształtu elektrod.

d. Należy jeszcze rozważyć możliwość polegającą na przypuszczeniu, że spełnienie prawa najmniejszej pojemności zależy od specjalnej geometrycznej postaci samej elektrody pośredniej. Można np. przypuścić, że spełnienie tego prawa we wszystkich przedstawionych wyżej przypadkach uwarunkowane jest tym, iż elektroda miała kształt kołowego walca lub kuli; można suponować, że przy elektrodach pośrednich o innej postaci prawo to nie jest już słuszne.

W celu wykazania, że supozycja taka nie jest słuszna, trzeba przeanalizować własności drobnych ruchów elektrody pośredniej.

Elektroda pośrednia może poruszać się w polu w taki sposób, że wszystkie jej elementy powierzchniowe utrzymują niezmiennie wartości swych potencjałów (np. ruch obrotowy walcowej elektrody naokoło osi walca). W tych przypadkach elektroda pośrednia, pojęta jako całość, właściwie pozostaje na swoim miejscu. Z dalszego ciągu naszych rozważań tego rodzaju ruch elektrody pośredniej wyłączamy.

We wszystkich innych przypadkach podczas ruchu elektrody pośredniej każdy element jej powierzchni przez zmianę swego położenia uzyskuje w polu potencjał odmienny niż potencjał, jaki miał poprzednio. Mogą tu zajść dwa przypadki.

Przypadek A. Ruch elektrody pośredniej odbywa się w taki sposób, że różnice potencjałów wszystkich jej punktów pozostają niezmiennie. Przypadek taki zachodzi na przykład, jeżeli elektroda porusza się ruchem posuwowym (translacja) w polu równomiernym.

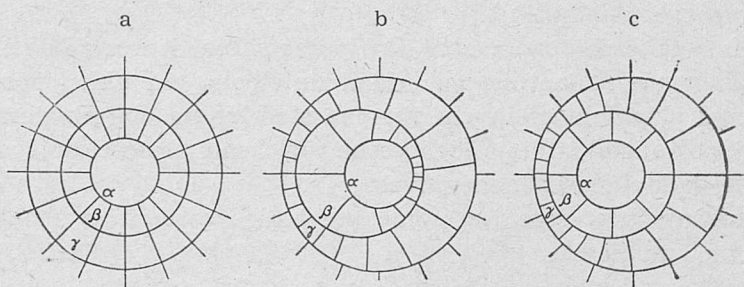
Podczas takiego ruchu energia układu nie zmienia się i dlatego ruch tego rodzaju można nazwać ruchem *konservatywnym*. (W wyżej przytoczonym przykładzie należy to rozumieć w ten sposób, że układ zawarty jest w ograniczonej części przestrzeni o bardzo wielkich wymiarach, w stosunku do których rozmiary elektrody pośredniej są pomijalnie małe).

Przypadek B. Ruch elektrody pośredniej odbywa się w taki sposób, że między niektórymi jej punktami (lub też między wszystkimi jej punktami) powstaje różnica potencjałów. Ta różnica potencjałów w metalowej błonie, jaką jest elektroda pośrednia, jest krótkotrwała, zostaje ona natychmiast wyrównana przez przejściowe prądy elektryczne.

Skutki tych prądów są następujące:

1. w elektrodzie pośredniej powstają straty energetyczne (straty Joule'a);
2. na obu powierzchniach elektrody pośredniej (lub też tylko na jednej z nich) zachodzi w rezultacie przemieszczenie ładunków.

Jako ilustracja służyć tu może schematyczny rys. 26. Na rys. 26a przedstawiono trzy współśrodkowe walce α, β, γ . Walec β traktujemy jako elektrodę pośrednią w położeniu macierzystym. Ładunki na zewnętrznej



Rys. 26. Przesunięcie elektrody pośredniej w układzie dwóch walców

powierzchni α na obu powierzchniach β i na obu powierzchniach γ rozmieszczone są (na zasadzie symetrii) równomiernie. Po przesunięciu walca β (rys. 26b) następuje przemieszczenie ładunków na obu powierzchniach elektrody pośredniej β . Jeżeli teraz γ traktować jako elektrodę pośrednią, to po jej przesunięciu (w stosunku do rys. 26a) przemieszczają się tylko ładunki po jej stronie wewnętrznej (rys. 26c), podczas gdy rozkład ładunków na jej powierzchni zewnętrznej pozostanie niezmienny.

Opisany wyżej ruch może być nazwany ruchem konsumpcyjnym.

Ruch konsumpcyjny elektrody pośredniej może odbywać się w dwóch kierunkach:

1. Podczas ruchu tego zwiększa się ogólny zasób energii układu (wielkość tę będziemy nazywać poziomem energetycznym układu). W tym przypadku ruch ten jest ruchem konsumpcyjnym wymuszonym przez obcą układowi, działającą z zewnątrz siłę. Podwyższenie poziomu energetycznego układu oraz straty energetyczne (powstające w elektrodzie pośredniej) pokryte są wtedy przez obcy zasobnik energetyczny.

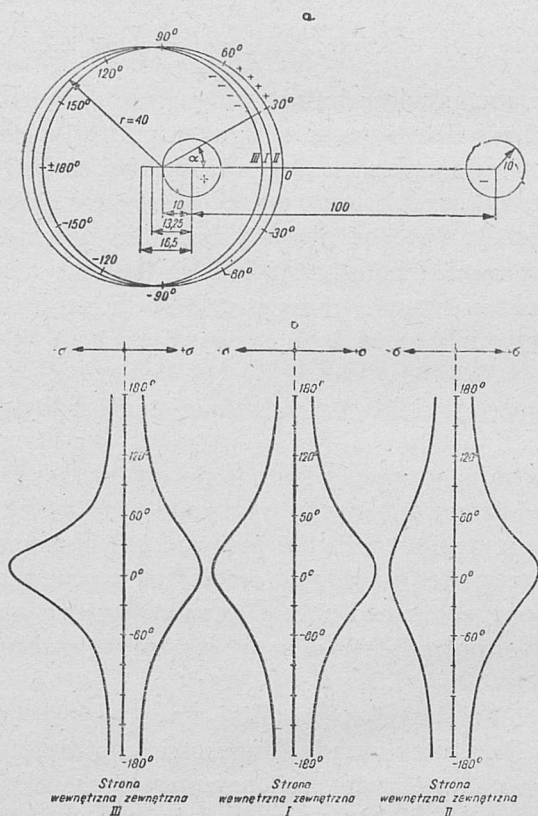
2. Podczas ruchu elektrody pośredniej zmniejsza się poziom energetyczny układu. Na skutek zasady Thomsona o najmniejszej energii ruch ten można wtedy nazwać ruchem konsumpcyjnym własnym. Układ oddziałuje wówczas na elektrodę pośrednią z pewną siłą, pod której działaniem porusza się ona i przyjmuje coraz to nowe położenia odpowiadające coraz bardziej malejącemu poziomowi energetycznemu układu.

W rozważaniach naszych układ elektrod wraz z elektrodą pośrednią stanowił układ odosobniony (por. odnośnik 1). Widzimy zatem, że ruch konsumpcyjny własny elektrody pośredniej może powstać tylko wtedy, gdy pole oddziałuje na tę elektrodę z pewną siłą; jeśli taka siła przez pole nie jest wytwarzana, to znaczy, jeśli poziom energetyczny układu

nie zmienia się podczas drobnego jej przesunięcia i takie przesunięcie elektrody pośredniej z pewnego jej położenia jest ruchem konserwatywnym, to wówczas położenie to musi odpowiadać ekstremum poziomu energetycznego układu.

Jeżeli na miejsce powierzchni ekwipotencjalnej wprowadzić elektrodę pośrednią, to nie zmieni się ani układ linii pola, ani układ pozostałych powierzchni ekwipotencjalnych. Wynika stąd, że na obu powierzchniach elektrody pośredniej istnieje identyczne rozłożenie gęstości pojawiających się na niej ładunków influencyjnych.

Twierdzenie powyższe jest samo przez się zrozumiałe; skonkretyzujemy je na przykładzie.



Rys. 27. a i b. Gęstość powierzchniowa ładunków na elektrodzie pośredniej w jej rozmaitych położeniach

Ilustracją tego twierdzenia jest rys. 27, który przedstawia rozkład gęstości powierzchniowej ładunków influencyjnych na elektrodzie pośredniej w polu elektrostatycznym dwóch walców. Naładowane walce mają promień równy 10 cm i znajdują się we wzajemnej odległości 100 cm od siebie. Elektroda pośrednia jest walcem o promieniu $r_0 = 40$ cm; jest

ona pokazana w trzech położeniach *I*, *II*, *III* (patrz rys. 27a, przy czym położenie *I* ($D_{13}=13,25$ cm) odpowiada powierzchni ekwipotencjalnej; w położeniu *II* elektroda przesunięta jest o 3,25 cm w prawo ($D_{13}=10$ cm); w położeniu *III* — o 3,25 cm w lewo ($D_{13}=16,5$ cm). Gęstość σ ładunków na powierzchni walca daje się przedstawić jako funkcja kąta α

$$\sigma = \frac{Qc}{2\pi r_0(d_3 - r_0 \cos \alpha)},$$

przy czym d_3 i c mają te same znaczenie co w rozdz. 2, Q zaś oznacza ładunek na jednostkę długości walca.

(Wzór powyższy można sprawdzić przez całkowanie:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{Qc r_0 da}{2\pi r_0(d_3 - r_0 \cos \alpha)} &= 2 \frac{Qc}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{da}{d_3 - r_0 \cos \alpha} = \\ &= \frac{Qc}{\pi} \frac{1}{\sqrt{d_3^2 - r_0^2}} \left[\arccos \frac{d_3 \cos \alpha - r_0}{d_3 - r_0 \cos \alpha} \right]_0^{\pi} = \\ &= \frac{Q}{\pi} [\arccos(-1) - \arccos(+1)] = -Q. \end{aligned}$$

Na rys. 27b przedstawiono rozkład gęstości na obwodzie powierzchni elektrody pośredniej w trzech położeniach *I*, *II*, *III*. Po lewej stronie wykreślone są krzywe σ na powierzchniach wewnętrznych, po stronie prawej — krzywe dotyczące powierzchni zewnętrznych elektrody pośredniej w położeniach *I*, *II*, *III*. Widać, że w miarę przybliżania się elektrody do walca zewnętrznego rośnie gęstość σ na powierzchni zewnętrznej na obu powierzchniach elektrody pośredniej są jednakowe. Jest to cecha charakteryzująca położenie macierzyste elektrody pośredniej.

Ze względu na zależność między natężeniem pola K i gęstością ładunku σ

$$K\varepsilon_0 = \sigma,$$

wykresy gęstości σ na powierzchniach elektrody pośredniej (np. wykres na rys. 27b) możemy traktować jednocześnie jako wykresy natężenia pola w poszczególnych jej punktach. Każdy element powierzchniowy elektrody pośredniej podlega działaniu dwóch sił wywieranych przez pole na obie powierzchnie dS tego elementu lub, ściślej mówiąc, na ładunki σdS umiejscowione po dwóch stronach tego elementu. Kierunek tych sił jest zawsze prostopadły do dS (w przypadku przedstawionym na rys. 27b kierunek sił jest radialny). Wykazano wyżej, że na obu powierzchniach elektrody pośredniej w jej położeniu macierzystym zarówno ładunek σdS

każdego elementu powierzchniowego, jak i natężenie K pola są po obu stronach jednakowe. Wynika stąd, że i działające na ten element siły

$$dF = K\sigma dS$$

są w każdym elemencie powierzchniowym elektrody pośredniej jednakowe. Zważywszy, że ładunki influencyjne σdS po obu stronach elektrody pośredniej mają różne znaki, możemy stwierdzić, że siły dF mają na tych dwóch powierzchniach kierunki różniące się o 180° , to znaczy, równoważą się. Skoro jednak siły działające na każdy element elektrody pośredniej równoważą się, to przez ich obustronne zsumowanie nie może powstać żadna siła wypadkowa, działająca na elektrodę pośrednią jako na całość. Wynika stąd, że żaden nieskończenie drobny ruch elektrody pośredniej znajdującej się w położeniu macierzystym nie może powstać na skutek oddziaływania pola, że ewentualnie zachodzący ruch taki jest zatem ruchem konserwatywnym i że poziom energetyczny układu dla tego położenia elektrody pośredniej ma swe ekstremum.

Jest oczywiste, że własności, o których wyżej mowa, zachodzą tylko w położeniu macierzystym elektrody pośredniej. W każdym innym położeniu gęstości ładunków (a zatem i natężenia pola) są po obu stronach tej elektrody rozmaite. Ilustruje to wyraźnie przykład na rys. 27b. Na pierwszy rzut oka można stwierdzić, że wypadkowe działanie wektora K na rozłożone wzdłuż powierzchni walca ładunki (por. znaki tych ładunków) dają siłę wypadkową F , która w położeniu *II* skierowana jest w prawo, w położeniu *III* — w lewo (Analityczne uzasadnienie powyższego podane jest w rozdz. 5; por. także rys. 6, na którym wymiary trzech walców są jednakowe). W położeniu *I* (położenie macierzyste elektrody pośredniej) siły działające na ładunki influencyjne w prawo i w lewo równoważą się i siła wypadkowa równa się zeru.

Ekstremum energii, które powyżej stwierdziliśmy, może odpowiadać tylko maksimum energetycznego poziomu pola. Wynika to z ogólnych własności pola i potwierdza się w przedstawionych przykładach (patrz np. rys. 6 i 7). Gdyby ekstremum to oznaczało minimum energii, to położenie macierzyste elektrody pośredniej musiałoby odpowiadać stanowi jej równowagi trwałej. Wyprowadzenie jej z tego położenia byłoby możliwe tylko przy zastosowaniu siły obcej i na skutek tego działania energia pola zwiększałaby się. Zwiększanie to zachodziłoby w sposób ciągły aż do chwili, w której elektroda pośrednia zetknęłaby się z jedną z elektrod stałych. Wniosek powyższy przeczy naszemu doświadczeniu, które wskazuje, że właśnie takie położenie może tylko odpowiadać trwałej równowadze elektrody pośredniej i najmniejszemu poziomowi energetycznemu układu.

Rozważania powyższe stanowią jednocześnie fizyczne wytłumaczenie wywodów matematycznych w rozdz. 1 i następnych.

Ze względu na to, że podane wywody oparte są w dużej mierze na analogiach i przykładach, nie można traktować ich jako ścisły dowód prawa najmniejszej pojemności. Wydaje się jednak możliwe stwierdzenie na ich podstawie, że prawo to posiada wszelkie pozory słuszności.

e. Uwagi. Zakładamy, że wszelkie ruchy elektrody pośredniej, które były przedmiotem rozważań niniejszego i poprzednich rozdziałów, odbywają się z bardzo małą prędkością, tak że magnetyczne skutki przenoszenia ładunków mogą być uważane za pomijalne.

Wyżej mówiono kilkakrotnie o wprowadzeniu elektrody pośredniej na miejsce powierzchni ekwipotencjalnej. Termin powyższy użyty tu jest w specjalnym sensie i nadawanie mu innego znaczenia mogłoby doprowadzić do wypaczenia formułowanych twierdzeń.

Nie można traktować „wprowadzania” elektrody pośredniej jako ciągłego procesu fizycznego polegającego np. w przypadku przedstawionym na rys. 4 lub rys. 25 na umieszczeniu w płaszczyźnie p małego przewodzącego krążka (o znikomej grubości) o środku M i o średnicy ϱ po czym nastąpiłoby powiększenie ϱ i przejście do granicy $\varrho \rightarrow \infty$; nie możemy również przedstawiać sobie, że płaską elektrodę wprowadzamy w omawianych przypadkach na miejsce p jakoś „z boku”. Wszystkie takie lub inne podobne metody zawodzą; są one połączone ze zniekształceniami pola, które nie były tu analizowane i o których nie możemy nic powiedzieć. Nie można również wprowadzać skończonej elektrody pośredniej np. kawałkami (rys. 1). Musimy się ograniczyć do porównywania stanu, gdy elektrody pośredniej jeszcze w ogóle nie ma i stanu, gdy istnieje ona w całości. Pod terminem „wprowadzanie” elektrody należy rozumieć przejście od badania stanu pierwotnego do badania stanu drugiego.

11. UOGÓLNIONE PRAWO COULOMBA

a. Z kolei przejdziemy do obliczenia sił, jakie wywierane są przez pole układu dwóch naładowanych kul na te kule. W tym celu obliczymy ogólną energię W całego układu, np. układu z rys. 20 I

$$W = \frac{1}{2} C_{12} (V + V')^2 + \frac{1}{2} C_{11} V^2 \quad (124)$$

i obliczymy pochodną tego wyrażenia względem D .

Z klasycznego prawa Coulomba wiadomo, że siła F , działająca na ładunki punktowe, wynosi:

przy ładunkach nierównych ⁵ mających te same znaki

$$F = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 D^2}; \quad (125)$$

przy ładunkach równych mających te same znaki

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 D^2}; \quad (126)$$

przy ładunkach nierównych mających znaki różne

$$F = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 D^2}; \quad (127)$$

przy ładunkach równych mających znaki różne

$$F = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 D^2}. \quad (128)$$

We wzorach (125)—(128) siły dążące do oddalenia ładunków od siebie (tzw. siły „odpychania“) oznaczyliśmy znakiem +, siły dążące do zbliżenia tych ładunków (tzw. siły „przyciągania“) znakiem —. Terminologia „siły odpychania“ i „siły przyciągania“ pochodzi z czasów, gdy zgodnie z hipotezą działania na daleką odległość siły te przypisywano wzajemnemu oddziaływaniu na siebie obu ładunków. Jest oczywiste, że siły powyższe powstają wskutek oddziaływania pola elektrostatycznego otaczającego oba ładunki na te ładunki; pomimo to zachowamy dawne terminy „siła przyciągania“ i „siła odpychania“ ze względu na ich krótkość.

Prawo odpychania ładunków zostało przez C. A. Coulomba sformułowane w sposób następujący (1784):

„Podstawowe prawo elektryczności. Siła odpychania dwóch małych kul jednakowo naelektryzowanych zmienia się w stosunku odwrotnym do kwadratu odległości środków obu kul“.

Prawo powyższe nie było przez Coulomba dowiedzione teoretycznie i powstało w wyniku licznych nadzwyczaj sumiennych doświadczeń. Przeprowadzony później dowód teoretyczny oparty na równaniu Laplace'a $\nabla^2 V = 0$ nie uwzględnia asymetrii w rozmieszczeniu gęstości powierzchniowej ładunków. Dlatego też prawo Coulomba ma charakter prawa przybliżonego (o nieokreślonym stopniu przybliżenia), jeżeli choćby jeden tylko z obu naładowanych przewodników ma wymiary skończone. Prawo Coulomba można uważać za ściśle tylko wówczas, gdy dotyczy ono dwóch ładunków punktowych. Ten wyidealizowany przypadek nie

⁵ Wyrażenie to używamy tu jako skrót wyrażenia dłuższego: przy ładunkach o nierównych wartościach bezwzględnych.

wymaga dalszych ograniczeń lub omówień. Jeżeli jednak przejdziemy do przypadku, gdy ładunki znajdują się na dwóch kulach, to jest na ciałach o wymiarach skończonych, to powstaje konieczność wprowadzenia dodatkowych założeń co do ładunków lub potencjałów tych kul. Rozróżnimy tu dwie krańcowe możliwości I i II.

I. Utrzymujemy na niezmiennym poziomie potencjały V' i V obu kul. Przypadek ten może być osiągnięty, jeżeli kule są połączone z dwoma biegunami źródła stałego napięcia. Jeżeli siła działająca na każdą kulę wynosi F i jeśli pod wpływem tej siły kula przesuując się o dD wykona pracę $F \cdot dD$, to, jak wiadomo z teorii, energia pola elektrycznego układu zwiększy się również o

$$dW = F \cdot dD;$$

łączna praca $dW + FdD = 2dW$ dostarczana jest przez źródło napięcia (w tym przypadku układ obu kul nie jest układem odosobnionym).

Na podstawie wzoru (100) w rozważanym przypadku stałe są ładunki Q i q' , natomiast ładunki $\sum Q_i, \sum Q'_i, \sum q_i, \sum q'_i$ są zmienne: w miarę zbliżenia lub oddalenia od siebie kul ładunki przyływają do obu kul ze źródła lub też odpływają od obu kul do źródła.

Siłę F obliczamy za pomocą przytoczonego już wzoru

$$F = \frac{dW}{dD}. \quad (129)$$

Jeżeli ładunki Q i q' mają znaki różne, to przy $\Delta D < 0$ jest $\Delta W > 0$, zatem F jest ujemne; jeżeli ładunki Q i q' mają znaki jednakowe, to przeważnie⁶ $\Delta W > 0$ gdy $\Delta D > 0$ czyli $F > 0$. Widać stąd, że siły przyciągania charakteryzują się znakiem minus, natomiast siły odpychania — znakiem plus.

II. Układ obu kul jest układem odosobnionym i ładunki ich są niezmiennie. Przyjmujemy pewne położenie obu kul jako położenie wyjściowe. Założmy, że w tym położeniu ładunki obu kul są

$$H = Q + \sum Q_i + \sum Q'_i; \quad H' = q' + \sum q_i + \sum q'_i. \quad (130)$$

Ładunki H i H' traktujemy teraz jako wielkości stałe. Pole elektryczne wytwarza działające na obie kule siły F i praca $F \cdot \Delta D$ wykonana podczas przesunięcia jednej z kul powoduje zmniejszenie energii układu o ΔW ; mamy tu zatem

$$F = - \frac{dW}{dD}. \quad (131)$$

⁶ Odmienne przypadki omówione są w punkcie *d*.

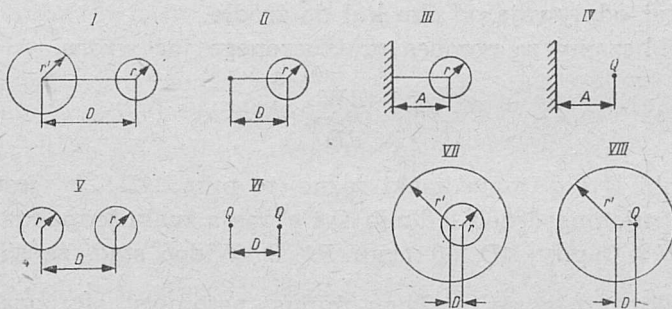
Jeżeli ładunki H i H' mają znaki różne, to siły F mają charakter sił zbliżających; wtedy przy $\Delta D < 0$ i przy $\Delta W < 0$ jest $F < 0$; jeżeli ładunki H i H' mają znaki jednakowe, to przy $\Delta D > 0$ jest przeważnie $\Delta W < 0$ dlatego siłom odpychającym nadajemy jak poprzednio znak $+$. Jak już zaznaczyliśmy wyżej, siły F powstają na skutek oddziaływania pola układu dwóch naładowanych kul na te kule. W obu możliwych przypadkach tj.

A. gdy oba ładunki mają znaki różne i

B. gdy oba ładunki mają znaki jednakowe

struktura pola jest zupełnie odmienna. Dlatego też nie możemy apriorycznie wnioskować, że w przypadku A i w przypadku B wartości bezwzględne sił wywieranych na kule są jednakowe, jeżeli ładunki lub potencjały tych kul mają tę samą wartość (nie możemy tu zatem zakładać zgodności wyrażeń jak wyżej we wzorach (125) i (127) lub (126) i (128). Przypadki A. i B. musimy traktować odrębnie.

Z ogólnego położenia obu kul otrzymujemy przez założenia specjalne (dotyczące wymiarów ich średnic) szereg przypadków szczególnych przedstawionych na rys. 28 I—VIII. Przypadek III otrzymuje się z I w sposób



Rys. 28. Różne przypadki wzajemnego położenia dwóch kul

opisany w rozdz. 9 p. e (rys. 23). Przypadki VII i VIII dotyczą położenia kuli K wewnątrz kuli K' .

Na odrębne traktowanie zasługują przypadki, gdy bezwzględne wartości obu ładunków są jednakowe lub różne. Zestawienie wszystkich możliwych przypadków zawiera tablica 5; w tablicy tej liczby oznaczają numery wzorów Coulomba dotyczących każdego przypadku.

Kreski poziome znajdujące się w tablicy 5 oznaczają, że odnośny układ nie daje się fizycznie zrealizować. Tak na przykład w rozdz. 9 p. d omówiliśmy niemożliwość istnienia układu składającego się z płaszczyzny i kuli o ładunkach tego samego znaku (przypadek IIIa, IIIc, IIIe, IIIg); to samo dotyczy przypadków IVa, IVc, IVe i IVg. Przypadki IIId i IVd

⁷ Odmienne przypadki omówione są na końcu punktu e.

nie dają się zrealizować, bowiem jeżeli V' jest potencjałem nieskończenie rozległej płaszczyzny, to musi być $V'=0$ i stąd dla kolumny d wynikałoby także $V=0$. Nierealność innych zakreskowanych przypadków jest oczywista.

W trzecim wierszu nagłówka znaki $+V, +V'$ (albo $+H+H'$ itd.) oznaczają, że potencjał jednej kuli jest $+V$, potencjał drugiej $+V'$ (albo, że ładunek jednej kuli wynosi $+H$, ładunek drugiej kuli wynosi $+H'$ itd.).

Tablica 5

Zestawienie uogólnionych wzorów Coulomba

Położenie zewnętrzne kul		Przy stałych potencjałach				Przy stałych ładunkach			
		$ V > -V' $		$ V = -V' $		$ H > -H' $		$ H = -H' $	
		$+V+V'$ albo $-V-V'$	$+V-V'$	$+V+V$ albo $-V-V$	$+V-V$	$+H+H'$ albo $-H-H'$	$+H-H'$	$+H+H$ albo $-H-H$	$+H-H$
		a	b	c	d	e	f	g	h
I	Nierówne kule	(155)	(135)	(159)	(146)	(193)	(172)	(195)	(173)
II	Kula i punkt	(156)	(137)	(160)	(147)	(194)	(175)	(196)	(176)
III	Płaszczyzna i kula	—	(139)	—	—	—	(187)	—	(187)
IV	Płaszczyzna i punkt	—	(142)	—	—	—	(142)	—	(142)
V	Równe kule	(158)	(144)	(161)	(148)	(197)	(177)	(200)	(180)
VI	Dwa punkty	(125)	(127)	(126)	(128)	(125)	(127)	(126)	(128)
Położenie wewnętrzne kul									
VII	Dwie kule	—	—	—	(207)	—	—	—	(210)
VIII	Kula i punkt	—	—	—	(208)	—	—	—	(208)

Z zestawienia widać, że przy ujęciu przyjętym w powyższej pracy istnieją ogółem 34 różne odmiany wzorów Coulomba; z tej liczby cztery wzory są znanymi klasycznymi wzorami (125)—(128), pozostałe zaś 30 zostaną poniżej wyprowadzone.

b. Przede wszystkim znajmiemy się przypadkami, gdy kule K' i K znajdują się w położeniu zewnętrznym (tablica 5, przypadki I—VI, rys. 28 I—VI); stosowanie odnośnych wzorów ograniczone jest warunkami (64) i (65).

Rozważymy najpierw przypadek Ib (rys. 28 I). Na zasadzie związków (100) niezmiennosc V i V' pociąga za sobą również i niezmiennosc Q i q' . Wzór (124) możemy teraz przepisać w postaci

$$W = 2\pi\epsilon_0(rSV^2 + r'SV'^2 + 2rr'VV'). \quad (132)$$

W celu uproszczenia powstających wzorów wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$M^2 = D^2 - (r' - r)^2; \quad N = D^2 - (r' + r)^2 \quad (133)$$

Znajdujemy (wartość k_z patrz wzór 39)

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d}{dD} \sqrt{\frac{M}{N}} &= \sqrt{\frac{M}{N}} \frac{4rr'D}{MN} \\ -\frac{d}{dD} T_{0z} &= \frac{1}{D^2} + \left(1 + \sqrt{\frac{M}{N}}\right) \left(\frac{1}{2k_z D^2} + \frac{1}{rr'k_z^2}\right) + \frac{2rr'}{k_z MN} \sqrt{\frac{M}{N}} = \tau \\ -\frac{d}{dD} S_z &= \left(1 + \sqrt{\frac{M}{N}}\right) \frac{Drr'}{(D^2 - r'^2)^2} + \frac{2Dr^2r'^2}{(D^2 - r'^2)MN} \sqrt{\frac{M}{N}} = \sigma \\ -\frac{d}{dD} S'_z &= \left(1 + \sqrt{\frac{M}{N}}\right) \frac{Drr'}{(D^2 - r^2)^2} + \frac{2Dr^2r'^2}{(D^2 - r^2)MN} \sqrt{\frac{M}{N}} = \sigma'. \end{aligned} \right\} \quad (134)$$

Na podstawie (129) znajdujemy odnośną siłę przyciągania

$$\begin{aligned} F &= -2\pi\epsilon_0(r\sigma V^2 + r'\sigma'V'^2 + 2rr'\tau VV') = \\ &= -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{\sigma Q^2}{r} + \frac{\sigma' Q'^2}{r'} + 2\tau Q Q' \right). \end{aligned} \quad (135)$$

Zakładając we wzorach (39), (133) i (134) $r'=0$ znajdujemy

$$\begin{aligned} (M)_{r'=0} &= (N)_{r'=0} = D^2 - r^2; & \left(\frac{\sigma}{r}\right)_{r'=0} &= 0; & \left(\frac{\sigma'}{r'}\right)_{r'=0} &= \frac{2Dr}{(D^2 - r^2)^2} \\ (\tau)_{r'=0} &= \frac{1}{D^2} \end{aligned} \quad (136)$$

wtedy ze wzoru (135) dla przypadku IIb (kula i punkt, rys. 28 II) wynika

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Qq'}{D^2} + \frac{Drq'^2}{(D^2 - r^2)^2} \right). \quad (137)$$

Zakładając we wzorze (135)

$$D - r' = A = \text{const}$$

i przechodząc do granicy $r \rightarrow \infty$ (tzw. „sposób a “ patrz rozdz. 9 p. e), znajdujemy

$$\left. \begin{aligned} \lim_a k_z &= \frac{2A}{r}; & \lim_a \frac{M}{N} &= \frac{A+r}{A-r}; & \lim_a MN &= \infty; & \lim_a \tau &= 0; \\ \lim_a \frac{rr'}{MN} &= 0; & \lim_a \frac{\sigma'}{r'} &= 0; & \lim_a \sigma &= \frac{r}{4A^2} \left(1 + \sqrt{\frac{A+r}{A-r}} \right) + \\ & & & & & + \frac{1}{4A} \frac{r^2}{A^2 - r^2} \sqrt{\frac{A+r}{A-r}} = \sigma_p. \end{aligned} \right\} \quad (138)$$

Wynika stąd siła przyciągania między kulą i płaszczyzną (przypadek IIIb, rys. 28 III)

$$F = -2\pi\epsilon_0 r \sigma_p V^2 = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_p}{r} Q^2. \quad (139)$$

Wzór (139) nie zawiera ładunku q' ; rzeczywiście z obrazu fizycznego wynika, że w tym przypadku musi być $Q = q'$. Wzór (139) można przedstawić w postaci

$$F = -\pi\epsilon_0 V^2 \lambda_v = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 (2A)^2} \lambda_v, \quad (140)$$

gdzie

$$\lambda_v = \frac{2\sigma_p}{r} A^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a^2 + a - 1}{a^2 - 1} \sqrt{\frac{a+1}{a-1}} \right); \quad a = \frac{A}{r}. \quad (140a)$$

Wartości współczynnika λ_v znajdujemy z tablicy 6 i z rys. 29.

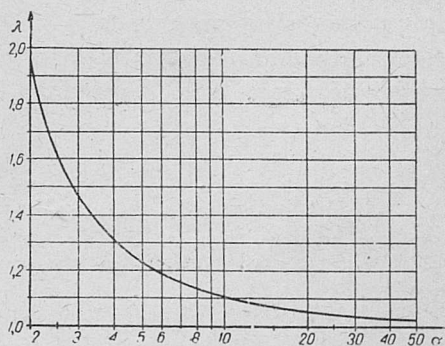
Tablica 6

Wartości współczynników λ_v określających siłę przyciągania między kulą i płaszczyzną przy niezmiennych potencjałach

$a =$	2	2,5	3	4	5	6	8
$\lambda_v =$	1,943	1,601	1,473	1,318	1,240	1,193	1,139
$a =$	10	15	20	30	40	50	
$\lambda_v =$	1,108	1,070	1,057	1,034	1,025	1,020	

Ładunek rzeczywisty H_p znajdujący się na kuli zmienia się wraz ze zmianą odległości kuli od płaszczyzny. Znajdujemy go na podstawie (99), (116), (123) i uwzględniając, że $\lim_{a \rightarrow 0} T' = 0$:

$$H_p = Q S_p = \frac{V_p}{4\pi\epsilon_0 r} \eta_p. \quad (141)$$



Rys. 29. Wartości współczynnika λ_v

Dalszą specjalizację wzoru (139) otrzymamy zakładając $r = 0$. Siła przyciągania ładunku punktowego i płaszczyzny (przypadek IVb, rys. 28 IV) jest następująca:

$$F = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 (2A)^2}. \quad (142)$$

Z powyższego widać, że siła w tym przypadku równa się sile przyciągania między dwoma ładunkami punktowymi $+Q$ i $-Q$ odległymi od siebie o $2A$.

Z kolei rozważymy przypadek dwóch jednakowych kul. Zakładając $r=r'$ znajdujemy

$$\left. \begin{aligned} k_z &= \frac{D^2 - 2r^2}{r^2}; \quad M^2 = D^2; \quad N = D^2 - 4r^2; \quad S = S' = S_s; \quad T = T' = T_s; \\ \sigma &= \sigma' = \sigma_s; \quad \tau = \tau_s; \end{aligned} \right\} \quad (143)$$

i siła przyciągania w tym przypadku (Vb, rys. 28 V) jest

$$F = -2\pi\epsilon_0 [r\sigma_s(V^2 + V'^2) + 2r^2\tau_s VV'] = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{\sigma_s}{r} (Q^2 + q'^2) + 2\tau_s Qq' \right] \quad (144)$$

(przez σ_s i τ_s oznaczamy wartości wyrażeń σ i τ ze (134), które otrzymuje się przez założeniu $r=r'$).

Wreszcie zakładając we wzorach (135), (137) lub (144)

$$r=0 \text{ oraz } r'=0$$

otrzymamy klasyczną postać wzoru Coulomba (127). Założeń $r'=0$, $r=0$ lub $r=r'=0$ można dokonywać tylko we wzorach zawierających ładunki Q , q' , nie można zaś ich stosować we wzorach zawierających potencjały V , V' ; wynika to stąd, że choć jesteśmy w stanie stworzyć wyidealizowane pojęcie ładunku punktowego, to jednak potencjał takiego ładunku nie daje się wyprowadzić ze stosowanych normalnie wzorów (100).

Na specjalne podkreślenie zasługują wzory na siłę F przyciągania między dwiema kulami w przypadku, gdy wartości bezwzględne ich potencjałów są równe. Z równości V i V' wynika

$$\frac{Q}{r} = \frac{q'}{r'} \quad (145)$$

i w przypadku Id (rys. 28 I) otrzymujemy

$$F = -2\pi\epsilon_0 V^2 (r\sigma + r'\sigma' + 2rr'\tau) = -\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} (r\sigma + r'\sigma' + 2rr'\tau). \quad (146)$$

W przypadku IIId (rys. 34 II)

$$F = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{D^2} + \frac{Dr}{(D^2 - r^2)^2} \right]. \quad (147)$$

Przez wykonanie na wzorze (146) tzw. przekształcenia a otrzymuje się znowu wzór (139).

Największe znaczenie ma przypadek Vd (rys. 28 V): dwie jednakowe kule z ładunkami $+Q$ i $-Q$. Siła przyciągania wynosi tu

$$F = -4\pi\epsilon_0 r(r\tau_s + \sigma_s) V^2 = -\frac{r\tau_s + \sigma_s}{4\pi\epsilon_0 r} Q^2 \quad (148)$$

Równanie powyższe można przedstawić w postaci

$$F = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 D^2} \zeta_v, \quad (149)$$

gdzie

$$\zeta_v = 1 + \left[\frac{(1,5\delta^2 - 1)}{(\delta^2 - 2)^2} + \frac{\delta^3}{(\delta^2 - 1)^2} \right] \left(1 + \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - 4}} \right) + \left(\frac{1}{\delta^2 - 2} + \frac{\delta}{\delta^2 - 1} \right) \frac{2\delta}{(\delta^2 - 4)^{1,5}}; \quad \delta = \frac{D}{r} \quad (150)$$

Wartości współczynnika ζ_v podane są w tablicy 7 i na rys. 30.

Tablica 7

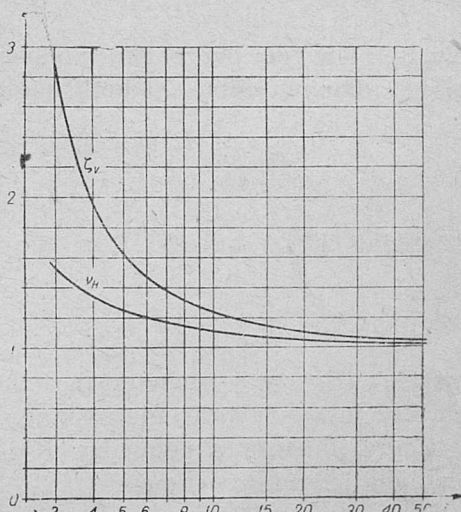
Wartości współczynników ζ_v , ν_H określających siłę przyciągania dwóch kul o jednakowych promieniach przy niezmiennych potencjałach

$\delta =$	3	4	5	6	8	10	15	20	30	40	50
$\zeta_v =$	2,865	1,930	1,624	1,480	1,312	1,240	1,149	1,149	1,071	1,052	1,041
$\nu_H = 2\eta =$	1,535	1,336	1,252	1,201	1,143	1,111	1,072	1,053	1,034	1,026	1,020

Na rys. 30 wykreślona jest również krzywa wartości ν_H z której można wywnioskować, jaki łączny ładunek rzeczywisty znajduje się na kulach w każdej odległości δ . Jak wiadomo, ładunek ten wynosi $Q + \sum Q_i + \sum Q'_i$, współczynnik ν_H zaś jest zdefiniowany przez stosunek

$$\begin{aligned} \nu_H &= \frac{Q + \sum Q'_i + \sum Q_i}{Q} = \\ &= S_S + T_S = 2\eta \end{aligned} \quad (151)$$

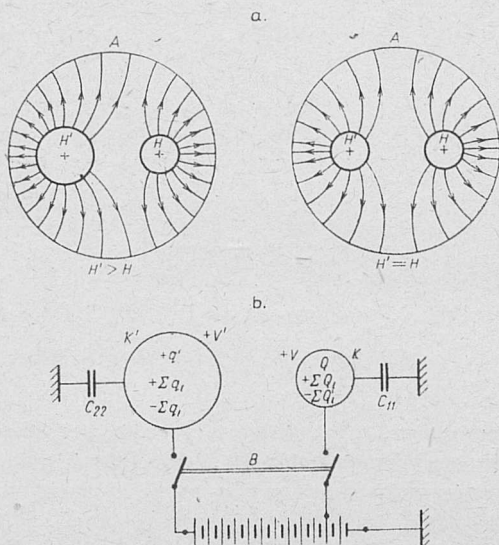
(patrz wzór 112).



Rys. 30. Wartości współczynników ζ_v i ν_H (do tablicy 7)

Zakładając we wzorach (135), (144), (146), (148) $r=r'=0$ lub we wzorach (137), (147) $r=0$ otrzymuje się klasyczną postać prawa Coulomba (127) lub (128).

c. Rozważmy obecnie przypadki, gdy na dwóch kulach z ładunkami jednakowych znaków utrzymywane są stałe potencjały V i V'



Rys. 31a i b. Schematyczne obrazy pól dwóch jednoimiennych ładunków i odpowiadający schemat połączeń

(rys. 31). I w tym przypadku (podobnie jak w rozdz. 6) stosujemy metodę zwierciadlanych odbić. Ładunki łączne kul K i K' wynoszą

$$\begin{aligned} H &= Q + \sum Q_i - \sum Q'_i = SQ - T'q'; \\ H' &= q' + \sum q'_i - \sum q_i = S'q' - TQ. \end{aligned} \quad (152)$$

Potencjały V' i V kul K' i K są jak poprzednio

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}; \quad V' = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r},$$

tak że w dalszych rachunkach i ładunki q' oraz Q musimy traktować również jako wielkości niezmiennicze.

Żadne linie pola pomiędzy K i K' nie przebiegają, tak że $C_{12} = 0$ i istnieją jedynie pojemności

$$C_{11} = \frac{SQ - T'q'}{Q} 4\pi\epsilon_0 r; \quad C_{22} = \frac{S'q' - TQ}{q'} 4\pi\epsilon_0 r'. \quad (153)$$

Dla łącznej energii otrzymujemy wyrażenie

$$W = \frac{(SQ - T'q')^2}{2C_{11}} + \frac{(S'q' - TQ)^2}{2C_{22}},$$

które możemy napisać w postaci

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{SQ^2}{r} + \frac{S'q'^2}{r'} - 2T_s Qq' \right), \quad (154)$$

Różniczkując wyrażenie (154) względem D na zasadzie (129) dla przypadku Ia (rys. 28 I) otrzymujemy

$$F = 2\pi\epsilon_0(2rr'\tau VV' - r\sigma V^2 - r'\sigma'V'^2) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left(2\tau_s Qq' - \frac{\sigma}{r} Q^2 - \frac{\sigma'}{r'} q'^2 \right). \quad (155)$$

Podstawiając do (155) $r'=0$ za pomocą (136) znajdujemy siłę odpychania kuli z ładunkiem $+Q$ i ładunku punkowego q' (przypadek IIa, rys. 28 II)

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Qq'}{D^2} - \frac{Dr}{(D^2 - r^2)^2} q'^2 \right]. \quad (156)$$

Nadmieniliśmy już poprzednio, że przypadek płaszczyzny i kuli, mających ładunki tego samego znaku, jest fizycznie niemożliwy; widzimy to także na rys. 31b: jeżeli kula K' przeistacza się w nieskończenie rozległą płaszczyznę K' , na której musi się znajdować związany z $+Q$ ładunek $-Q$. Źródło napięcia jest zwarte. Jest jednak interesujące, jak reaguje wzór (155) na podstawienie a (rozdz. 9 p. e) przekształcające kulę K' w płaszczyznę. Można się łatwo przekonać, że otrzymuje się wyrażenie

$$F = -\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_p}{r} \quad (157)$$

przedstawiające siłę przyciągania między K i K' identyczną ze (139). Rzeczywiście fizyczne warunki zagadnienia są teraz następujące: na kuli K znajduje się ładunek $+Q$, potencjał kuli jest $+V$; wszystkie linie pola wychodzące z $+Q$ muszą się kończyć na nieskończenie rozległej płaszczyźnie K' , na której musi się znajdować związany z $+Q$ ładunek $-Q$. Wynika stąd istnienie siły przyciągającej F (wzór 157).

Jeżeli promienie obu kul są jednakowe (przypadek Va, rys. 28 V), to

$$F = 4\pi\epsilon_0 \left[r^2 \tau_s VV' - \frac{1}{2} r \sigma_s (V^2 + V'^2) \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\tau_s Qq' - \frac{\sigma_s}{2r} (Q^2 + q'^2) \right]. \quad (158)$$

Zakładając w drugim wzorze (158) $r=0$ otrzymujemy znowu klasyczną postać (125) prawa Coulomba.

Jeżeli potencjały obu kul są jednakowe, to ze wzoru (155) otrzymujemy (przypadek Ic, rys. 28 I)

$$F = 2\pi\epsilon_0 V^2 (2rr'\tau - r\sigma - r'\sigma') = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(2\tau - \frac{\sigma}{r} - \frac{\sigma'}{r'} \right). \quad (159)$$

Siła odpychania ładunku punktowego od kuli (przypadek IIc, rys. 28 II) wynosi

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{D^2} - \frac{Dr}{(D^2 - r^2)^2} \right]. \quad (160)$$

Największe znaczenie ma przypadek Vc; siła odpychania dwóch równych kul o ładunkach Q i $-Q$ jest następująca:

$$F = 4\pi\epsilon_0 (r\tau_s - \sigma_s) V^2 = \frac{r\tau_s - \sigma_s}{4\pi\epsilon_0 r} Q^2. \quad (161)$$

Równanie powyższe można napisać w postaci

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 D^2} \xi_v \quad (162)$$

przy czym

$$\xi_v = 1 + \left[\frac{1,5\delta^2 - 1}{(\delta^2 - 2)^2} - \frac{\delta^3}{(\delta^2 - 1)^2} \right] \left(1 + \frac{\delta}{1/\delta^2 - 4} \right) - \left(\frac{\delta}{\delta^2 - 1} - \frac{1}{\delta^2 - 2} \right) \frac{2\delta}{(\delta^2 - 4)^{1,5}} \quad (162a)$$

Wartości współczynnika ξ_v podane są w tabelicy 8 i na wykresie na rys. 32. Na rysunku tym wykreślona jest również krzywa wartości μ_H ,

z której można wywnioskować, jaki łączny ładunek rzeczywisty znajduje się na kulach w każdym położeniu δ . Ładunek ten jest $Q + \sum Q_i - \sum Q'_i$ współczynnik zaś μ_H wynosi

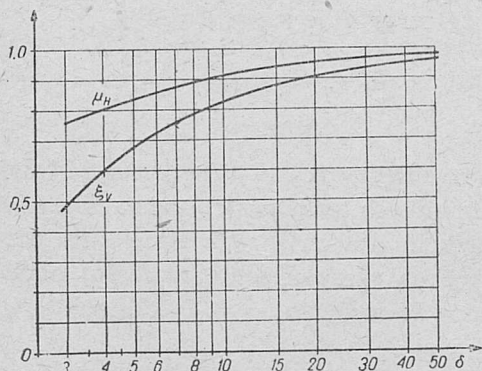
$$\mu_H = \frac{Q + \sum Q_i - \sum Q'_i}{Q} = S_s - T_s. \quad (163)$$

Podstawiając do wyrażeń (159), (160) lub (161)

$$r = 0 \text{ i } r' = 0$$

otrzymujemy postać (126) klasycznego prawa Coulomba.

Widzieliśmy wyżej, że w układzie dwóch kul, przedstawionym na rys. 31, pojemność C_{12} równa się zero, a istnieją tylko pojemności C_{11} i C_{22} .



Rys. 32. Wartości współczynników ξ_v i μ_H (do tabelicy 8)

Tablica 8

Wartości współczynników ξ_v, μ_{II} określających siłę odpychania dwóch kul o jednakowych promieniach przy niezmiennych potencjałach

$\delta =$	3	4	5	6	8	10	15	20	30	40	50
$\xi_v =$	0,484	0,605	0,673	0,723	0,784	0,823	0,878	0,907	0,935	0,952	0,961
$\mu_{II} = S_s - T_s =$	0,761	0,803	0,832	0,857	0,889	0,909	0,939	0,952	0,968	0,976	0,980

Zgodnie z terminologią wprowadzoną w rozdz. 9 p. c. można powiedzieć, że w układzie pola przedstawionym na rys. 31 czynna pojemność wzajemna równa się zeru.

d. Przy rozważaniu wzorów (155), (156), (158), (159), (160), (161) zwraca uwagę okoliczność następująca: wzory te przedstawiają siły F , z jakimi pole dwóch kul mających ładunki jednoimienne oddziałuje na te kule. Jak wiadomo, siły te są siłami odpychającymi i dlatego (zgodnie z rozważaniami w p. a) znak wyrażeń otrzymanych dla F jest dodatni. Jednakże we wszystkich przytoczonych wyżej wzorach odnośne wyrażenia F składają się z wyrazów dodatnich i z wyrazów ujemnych.

Nasuwa się pytanie: czy jest możliwe, aby przy pewnych określonych warunkach wyrazy ujemne w tych wyrażeniach przeważały i w rezultacie można byłoby otrzymać (przy jednoimiennych ładunkach) ujemną wartość F , to jest, aby w tych warunkach między kulami powstały siły przyciągające?

Odpowiedź na to pytanie jest potakująca. Również i z innych zjawisk możemy wnioskować, że siła F przy ładunkach jednoimiennych może uzyskiwać znak ujemny. Widzieliśmy wyżej, że przez zastosowanie tzw. sposobu α wzór (156), w którym F ma znak dodatni, przekształcił się na wzór (157), w którym F jest ujemne. Przekształcenie α polega na podstawieniu $D = A + r'$ i przejściu do granicy $r' \rightarrow \infty$, jest zatem operacją ciągłą. Podczas równomiernego zwiększania r' , w trakcie tej operacji, dodatnia wielkość F zmniejsza się w sposób ciągły, uzyskuje dla pewnej wartości r' wartość zero i przy dalszym zwiększaniu r osiąga wartości ujemne⁸.

Najłatwiejszy pod tym względem do zrealizowania jest wzór (156), przedstawiający siłę odpychania między ładunkiem punktowym $+q'$ i kulą o promieniu r i ładunku $+Q$. Siła F będzie równa się zeru, jeżeli

$$\frac{Qq'}{D^2} = q'^2 \frac{Dr}{(D^2 - r^2)^2}. \quad (164)$$

⁸ Stan, w którym $F=0$ można nazwać równowagą elektrostatyczną; stan ten będziemy oznaczali przez gr .

Równość powyższa może być osiągnięta przez obranie odpowiedniej wartości stosunku

$$\delta = \frac{D}{r},$$

bądź też przez przyjęcie odpowiedniej wartości stosunku

$$\kappa = \frac{q'}{Q}. \quad (165)$$

Z (164) wynika

$$\kappa_{gr} = \frac{\delta^2 - 1}{\delta\sqrt{\delta}}. \quad (166)$$

Wartości κ_{gr} dla rozmaitych δ podano w następującym zestawieniu:

Tablica 9

**Wartości współczynników κ_{gr} równowagi elektrostatycznej
w przypadku ładunku punkowego i kuli
(przy niezmiennych potencjałach)**

$\delta =$	3	4	5	6	8	10	15	20
$\kappa_{gr} =$	1,540	1,875	2,147	2,381	2,784	3,131	3,856	4,461

Zależność między κ_{gr} i δ przedstawiono na rys. 33. Krzywa $\kappa_{gr} = f(\delta)$ ilustruje przypadki, dla których $F=0$; obszar ponad tą krzywą odpowiada wartości $F < 0$ (przyciąganie)

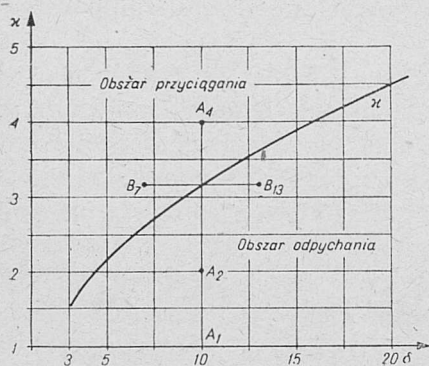
obszar poniżej krzywej odpowiada wartościom $F > 0$ (odpychanie). Z rysunku widać, że przejście z jednego obszaru do drugiego może nastąpić na przykład przez powiększenie ładunku q' przy stałym stosunku δ (prosta $A_1 R A_4$)¹⁰ lub też przy stałym stosunku κ ładunków i przy zwiększaniu parametru δ (prosta $B_7 R B_{13}$).

Schematyczny obraz pola w stacjach scharakteryzowanych punktami $A_1, A_2 R A_4$ przedstawiono na rys. 34, który nie wymaga dodatkowych komentarzy.

Zjawisko powyższe jest już znane od bardzo dawna. Tak np. dokładnie opisuje je F. Aepinus, który sumiennie przeprowadzał wiele odnośnych doświadczeń. W konkluzji Aepinus pisze ⁹:

⁹ F. Aepinus, *Teoria elektryczności i magnetyzmu*, 1757, rozdział II, *O elektrycznym i magnetycznym przyciąganiu i odpychaniu*. Wydanie Akademii Nauk ZSRR. 1951, s. 142/3, p. 135.

¹⁰ R jest punktem przecięcia krzywej κ i prostej $A_1 A_4$.

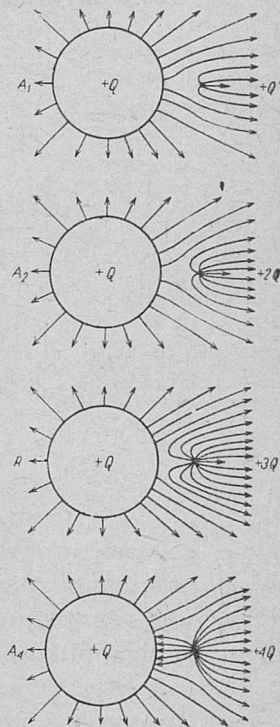


Rys. 33. Wartości współczynników κ_{gr} (do tablicy 9)

„... a mianowicie ujemnie elektryczne ciała A i B bliskie sobie odpychają się albo się przyciągają, albo zupełnie wzajemnie na siebie nie działają... Rzeczywiście i w tym przypadku jest możliwe nie tylko, że dwa ujemnie-elektryczne ciała położone w większej odległości od siebie odpychają się wzajemnie, a po ich zbliżeniu zaczynają się wzajemnie przyciągać, ale także, że ciało A ujemnie-elektryczne w nieznacznym stopniu odpycha ciało B , będąc zaś naelektryzowane silniej, przyciąga je...”.

Jak to już zaznaczyliśmy, zjawisko powstawania siły przyciągającej może wystąpić i w innych przypadkach scharakteryzowanych wzorami w kolumnach a i c tablicy 5; dokładniejsza analiza wykazuje, że stan równowagi $F=0$ w przypadkach IIc i Vc (wzory 160 i 161) jest możliwy tylko przy $\delta < 3$ to znaczy w obszarze, który nie jest już objęty zasięgiem przedstawionych przez nas wzorów. Najogólniejszego przypadku Ia (wzór 155) nie będziemy tu analizowali. Stan równowagi w przypadku Ic (wzór 159) jest uzależniony od spełnienia warunku

$$2\tau = \frac{\sigma}{r} + \frac{\sigma'}{r'}; \quad (167)$$



Rys. 34. Siły odpychające i przyciągające dwóch ładunków jednoimennych

przez obrócenie ostatecznie dużych wartości stosunków r'/r i r/D równanie (167) może zawsze być spełnione. Wreszcie w przypadku Va (dwie jednakowe kule o ładunkach jednego znaku rozmaitej wartości) wzór (158) warunek równowagi otrzymuje się w postaci

$$\kappa + \frac{1}{\kappa} = \frac{2\tau_s r}{\sigma_s} = 2\Theta, \quad (168)$$

przy czym

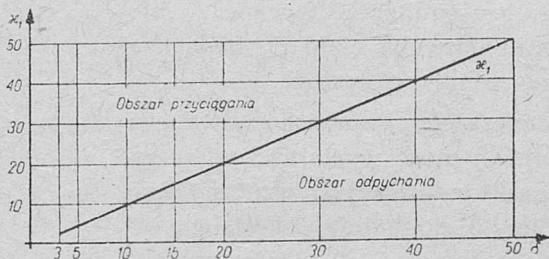
$$\Theta = \frac{1 + \left(1 + \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - 4}}\right) \frac{1,5\delta^2 - 1}{(\delta^2 - 2)^2} + \frac{2\delta}{(\delta^2 - 2)(\delta^2 - 4)^{1,5}}}{\left(1 + \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - 4}}\right) \frac{\delta^3}{(\delta^2 - 1)^2} + \frac{2\delta^2}{(\delta^2 - 1)(\delta^2 - 4)^{1,5}}}. \quad (169)$$

Kwadratowe równanie (168) ma dwa pierwiastki κ_1 i κ_2 , przy czym $\kappa_1 \kappa_2 = 1$, Zależność $\kappa_1 = f(\delta)$ przedstawiono w tablicy 10 i na rys. 35.

Tablica 10

Wartości współczynników κ_1 równowagi elektrostatycznej
w przypadku dwóch jednakowych kul przy stałym napięciu
 κ_1 jest przy $\delta > 10$ w przybliżeniu równe δ

$\delta =$	3	4	5	6	8	10	15	20	30	40	50
$\kappa_1 =$	2,40	3,54	4,54	5,70	7,75	9,79	14,91	19,93	29,97	39,97	49,98



Rys. 35. Wartości współczynników κ_1
(do tablicy 10)

e. Bardziej interesujące dla nas, niż przedstawione wyżej w p. c i d wzory Coulomba przy założeniu stałych potencjałów, są wzory, które otrzymuje się przy założeniu stałych ładunków. Niestety, wzory te są bardziej skomplikowane niż poprzednie.

Rozważmy przede wszystkim przypadki, gdy ładunki mają różne znaki. Łączny ładunek obu kul jak poprzednio oznaczamy przez H i H' (wyrażenia 95 i 96). Zakładając, że $H > H'$ (rys. 20 I) otrzymujemy wyrażenie dla łącznej energii pola

$$W = \frac{H'^2}{2C_{12}} + \frac{(H - H')^2}{2C_{11}}, \quad (170)$$

które przy wykorzystaniu związków (101), (102) i (103) można napisać w postaci

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r r'} \frac{r' S' H^2 + r S H'^2 - (rT + r'T') H H'}{SS' - TT'}. \quad (171)$$

Otrzymuje się stąd wyrażenie dla siły w przypadku If (rys. 28 I)

$$F = - \frac{1}{8\pi\epsilon_0 (SS' - TT')^2} \left[(r' S' H^2 + r S H'^2 - 2r r' T_0 H H') \left(\frac{S}{r} \cdot \frac{\sigma'}{r'} + \frac{S'}{r} \cdot \frac{\sigma}{r'} - 2\tau T_0 \right) - (SS' - TT') \left(\frac{\sigma'}{r} H^2 + \frac{\sigma}{r'} H'^2 - 2\tau H H' \right) \right]. \quad (172)$$

Zakładając, że ładunki mają te same wartości bezwzględne, to jest, że $H=H'$, znajdujemy (przypadek I_h, rys. 28 I)

$$F = - \frac{H^2}{8\pi\epsilon_0(SS' - TT')^2} \left[(rS + r'S' - 2rr'T_0) \left(\frac{S}{r} \frac{\sigma'}{r'} + \frac{S'}{r} \frac{\sigma}{r} - 2\tau T_0 \right) - (SS' - TT') \left(\frac{\sigma'}{r} + \frac{\sigma}{r'} - 2\tau \right) \right]. \quad (173)$$

W celu wyprowadzenia wzoru dla przypadku II_f (rys. 28 II) do (172) podstawiamy $r'=0$; oprócz związków (136) zachodzą tu jeszcze zależności

$$\left. \begin{aligned} (S)_{r'=0} &= 1; & (S')_{r'=0} &= 1; & (T)_{r'=0} &= 0; & (T')_{r'=0} &= \frac{r}{D}; \\ (T_0)_{r'=0} &= \frac{1}{D}; & \left(\frac{\sigma}{r'} \right)_{r'=0} &= \frac{2r}{D^3}; & \left(\frac{\sigma'}{r} \right)_{r'=0} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (174)$$

tak że po podstawieniu otrzymuje się

$$F = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 D^2} \left[HH' + H'^2 \frac{r^3(2D^2 - r^2)}{D(D^2 - r^2)^2} \right]. \quad (175)$$

Zakładając we wzorze (175) jeszcze $H=H'$ znajdujemy wyrażenie dla F w przypadku II_h (rys. 28 II)

$$F = - \frac{H^2}{4\pi\epsilon_0 D^2} \left[1 + \frac{r^3(2D^2 - r^2)}{D(D^2 - r^2)^2} \right]. \quad (176)$$

Ten sam wzór można także otrzymać podstawiając do (172) $r'=0$ i $H'=H$.

Podstawiając do (172) $r=r'$ znajdujemy wyrażenie F w przypadku V_f

$$F = - \frac{1}{8\pi\epsilon_0(S_s^2 - T_s^2)} \left\{ 2[rS_s(H^2 + H'^2) - 2r^2T_0HH'] \left(\frac{S_s}{r} \frac{\sigma_s}{r} - T_0\tau_s \right) - (S_s^2 - T_s^2) \left[\frac{\sigma_s}{r} (H^2 + H'^2) - 2\tau_s HH' \right] \right\}. \quad (177)$$

W przypadku V_h najlepiej wyjść z wyrażenia dla energii pola (171), którą tu można przedstawić w postaci

$$W = \frac{H^2}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{1}{S_s + T_s}, \quad (178)$$

po czym znajdujemy

$$F = - \frac{H^2}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{r\tau_s + \sigma_s}{(S_s + T_s)^2}. \quad (179)$$

Wzór powyższy możemy przedstawić w postaci

$$F = - \frac{H^2}{4\pi\epsilon_0 D^2} \zeta_H, \quad (180)$$

gdzie

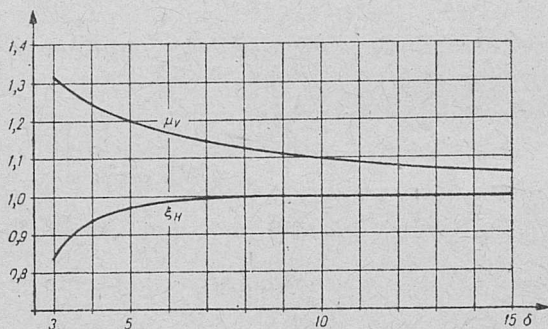
$$\zeta_H = \frac{\zeta_v}{4\eta^2} \quad (181)$$

(por. wzór 112 i 150). Wartości współczynnika ζ_H podano w tablicy 11 i na rys. 36.

Tablica 11

**Wartości współczynników ζ_H i ν_v
określających siłę przyciągania dwóch jednakowych kul
przy niezmiennych ładunkach**

$\delta =$	3	4	5	6	8	10	15
$\zeta_H =$	1,215	1,070	1,035	1,025	1,010	1,004	1,00
$\nu_v = 1 : 2\eta$	0,651	0,745	0,798	0,835	0,875	0,900	0,933



Rys. 36. Wartości współczynników ζ_H i ν_v
(do tablicy 11)

Na rys. 36 wykreślona jest również krzywa ν_v , z której można wnioskować, jaki jest potencjał V_δ kul w każdym położeniu (dla każdego δ). Współczynnik ν_v jest zdefiniowany za pomocą

$$\nu_v = \frac{V_\delta}{V_H}, \quad (182)$$

przy czym

$$V_H = \frac{eH}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q(S_s + T_s)}{4\pi\epsilon_0 r}; \quad (183)$$

wartości współczynnika ν_v znajdujemy ze związku

$$\nu_v = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} : \frac{Q(S_s + T_s)}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{S_s + T_s} = \frac{1}{2\eta} \quad (184)$$

(por. wzór 112).

Na podstawie tablicy 11 można zauważyć, jakie różnice zachodzą między klasycznym wzorem Coulomba (128) dla danego przypadku i dokładnym wzorem (180); przy $\delta > 8$ błąd jest mniejszy niż 1%.

Podstawiając do (177) lub do (179) $r=0$ znowu znajdujemy klasyczną postać (127) wzoru Coulomba.

Przeprowadzając we wzorach (172) lub (173) obliczenie sposobem α i uwzględniając zależności (138) oraz

$$\left. \begin{aligned} \lim_a S = S_p; \quad \lim_a S' = 1; \quad \lim_a T_0 = 0; \quad \lim_a TT' = 0; \quad \lim_a \frac{S'}{r} = \frac{1}{r}, \\ \lim_a \frac{\sigma}{r'} = 0; \quad \lim_a \sigma' = 0; \quad \lim_a \tau = 0; \quad \lim_a \frac{S}{r'} = 0; \quad \lim_a r'\tau = \sigma_p; \end{aligned} \right\} \quad (185)$$

otrzymujemy następujące wyrażenie dla F w przypadku IIIf lub IIIh:

$$F = -\frac{H^2}{8\pi\epsilon_0 S_p^2} \frac{\sigma_p}{r} = -\frac{H^2}{32\pi\epsilon_0 A^2} \frac{1 + \left(1 + \frac{Ar}{A^2 - r^2}\right) \sqrt{\frac{A+r}{A-r}}}{\left[1 + \frac{r}{4A} \left(1 + \sqrt{\frac{A+r}{A-r}}\right)\right]^2} \quad (186)$$

Wzór powyższy możemy napisać w postaci

$$F = -\frac{H^2}{4\pi\epsilon_0 (2A)^2} \lambda_H, \quad (187)$$

gdzie

$$\lambda_H = \frac{2A^2 \sigma_p}{r S_p^2} = \frac{\lambda_v}{\eta_p^2} \quad (188)$$

(por. wzory 140a, 116 i 123).

Wartości λ_H i $\frac{1}{\eta_p}$ przedstawiono w tablicy 12 i na rys. 37.

Tablica 12

Wartości współczynników λ_H określających siłę przyciągania kuli i płaszczyzny przy niezmiennych ładunkach

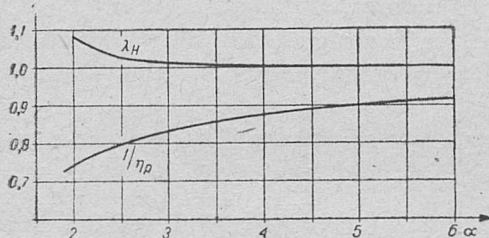
$\alpha =$	2	2,5	3	4	5	6	8	10
λ_H	1,079	1,023	1,018	1,010	1,006	1,003	1,001	1,001
$1/\eta_p$	0,746	0,798	0,833	0,875	0,901	0,916	0,938	0,950

Przy $a > 5$ różnica między wzorem (187) i wzorem (142), dotyczącym ładunku punktowego, jest mniejsza niż 0,5%.

Potencjał kuli V_p zmienia się wraz ze zmianą odległości kuli od płaszczyzny. Zależność między V_p i H jest ta sama co we wzorze (141):

$$V_p = 4\pi\epsilon_0 r H_p \frac{1}{\eta_p}. \quad (189)$$

Zakładając we wzorze (186) $r=0$ otrzymujemy znowu wzór (142) (przypadek IVf i IVh).



Rys. 37. Wartości współczynników λ_H i $1/\eta_p$
(do tablicy 12).

Jeżeli ładunki H i H' na kulach mają znaki jednakowe, to wielkości ich dane są przez wzory (152). Rozwiązując te równania względem Q i q' znajdujemy

$$Q = \frac{S'H + T'H}{SS' - TT'}; \quad q' = \frac{TH + SH'}{SS' - TT'}. \quad (190)$$

W rozważanym przypadku istnieją tylko dwie pojemności

$$C_{11} = \frac{SQ - T'q'}{Q} 4\pi\epsilon_0 r; \quad C_{22} = \frac{S'q' - TQ}{q'} 4\pi\epsilon_0 r'. \quad (191)$$

Wyrażenie W łącznej energii układu

$$W = \frac{H^2}{2C_{11}} + \frac{H'^2}{2C_{22}}$$

możemy napisać w postaci

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0(SS' - TT')} \left(\frac{S'}{r} H^2 + \frac{S}{r'} H'^2 + 2T_0 HH' \right). \quad (192)$$

Wynika stąd siła odpychania dla przypadku Ie

$$F = \frac{1}{8\pi\epsilon_0(SS' - TT')^2} \left[(SS' - TT') \left(\frac{\sigma'}{r} H^2 + \frac{\sigma}{r'} H'^2 + 2\tau HH' \right) - (r'S'H^2 + rSH'^2 + 2rr'T_0 HH') \left(\frac{S}{r} \frac{\sigma'}{r'} + \frac{S'}{r} \frac{\sigma}{r'} - 2\tau T_0 \right) \right]. \quad (193)$$

Podstawiając do (193) $r'=0$ i uwzględniając związki (136), (174) znajdujemy dla przypadku IIe

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 D^2} \left[HH' - H'^2 \frac{r^3(2D^2 - r^2)}{D(D^2 - r^2)^2} \right]; \quad (194)$$

zakładając w (193) $H = H'$ otrzymujemy (przypadek Ig)

$$F = \frac{H^2}{8\pi\epsilon_0 (SS' - TT')^2} \left[(SS' - TT') \left(\frac{\sigma'}{r} + \frac{\sigma}{r'} + 2\tau \right) - \right. \\ \left. - (r'S' + rS + 2rr'T_0) \left(\frac{S}{r} \frac{\sigma'}{r'} + \frac{S'}{r} \frac{\sigma}{r'} - 2\tau T_0 \right) \right] \quad (195)$$

oraz po podstawieniu $r'=0$ jak wyżej (przypadek IIg)

$$F = \frac{H^2}{4\pi\epsilon_0 D^2} \left[1 - \frac{r^3(2D^2 - r^2)}{D(D^2 - r^2)^2} \right]. \quad (196)$$

Dokonując we wzorze (193) obliczenia sposobem a otrzymujemy znowu wzór (186) dotyczący przypadku II*f* i II*h* (podczas tego przekształcenia znak F zmienia się z $+$ na $-$).

Przez podstawienie $r=r'$ do (191) znajdujemy dla przypadku Ve

$$F = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r} \frac{(S_s^2 - T_s^2) [\sigma(H^2 + H'^2) + 2r\tau HH']}{(S_s^2 - T_s^2)^2} - \frac{2[S_s(H^2 + H'^2) + 2T_s HH'] (S_s\sigma - r\tau T_s)}{(S_s^2 - T_s^2)^2}. \quad (197)$$

Jeżeli oba ładunki mają (te same znaki) i te same wartości bezwzględne (przypadek Vg), to energia układu wynosi

$$W = \frac{H^2}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{1}{S_s - T_s}, \quad (198)$$

skąd wynika wyrażenie dla siły odpychania

$$F = \frac{H^2}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{r\tau_s - \sigma_s}{(S_s - T_s)^2}, \quad (199)$$

które piszemy w postaci

$$F^r = \frac{H^2}{4\pi\epsilon_0 D^2} \xi_H, \quad (200)$$

przy czym

$$\xi_H = \frac{\xi_V}{(S_s - T_s)^2} = \frac{\xi_V}{\mu_H^2} \quad (201)$$

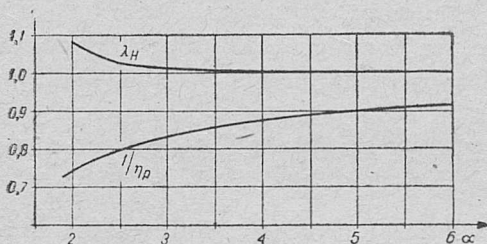
(por. wzory 161, 162a i 163).

Przy $a > 5$ różnica między wzorem (187) i wzorem (142), dotyczącym ładunku punkowego, jest mniejsza niż 0,50%.

Potencjał kuli V_p zmienia się wraz ze zmianą odległości kuli od płaszczyzny. Zależność między V_p i H jest ta sama co we wzorze (141):

$$V_p = 4\pi\epsilon_0 r H_p \frac{1}{\eta_p}. \quad (189)$$

Zakładając we wzorze (186) $r=0$ otrzymujemy znowu wzór (142) (przypadek IVf i IVh).



Rys. 37. Wartości współczynników λ_H i $1/\eta_p$
(do tablicy 12).

Jeżeli ładunki H i H' na kulach mają znaki jednakowe, to wielkości ich dane są przez wzory (152). Rozwiązując te równania względem Q i q' znajdujemy

$$Q = \frac{S'H + T'H}{SS' - TT'}; \quad q' = \frac{TH + SH'}{SS' - TT'}. \quad (190)$$

W rozważanym przypadku istnieją tylko dwie pojemności

$$C_{11} = \frac{SQ - T'q'}{Q} 4\pi\epsilon_0 r; \quad C_{22} = \frac{S'q' - TQ}{q'} 4\pi\epsilon_0 r'. \quad (191)$$

Wyrażenie W łącznej energii układu

$$W = \frac{H^2}{2C_{11}} + \frac{H'^2}{2C_{22}}$$

możemy napisać w postaci

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0(SS' - TT')} \left(\frac{S'}{r} H^2 + \frac{S}{r'} H'^2 + 2T_0 HH' \right). \quad (192)$$

Wynika stąd siła odpychania dla przypadku Ie

$$F = \frac{1}{8\pi\epsilon_0(SS' - TT')^2} \left[(SS' - TT') \left(\frac{\sigma'}{r} H^2 + \frac{\sigma}{r'} H'^2 + 2\tau HH' \right) - \right. \\ \left. - (r'S'H^2 + rSH'^2 + 2rr'T_0 HH') \left(\frac{S}{r} \frac{\sigma'}{r'} + \frac{S'}{r} \frac{\sigma}{r'} - 2\tau T_0 \right) \right]. \quad (193)$$

Podstawiając do (193) $r'=0$ i uwzględniając związki (136), (174) znajdujemy dla przypadku IIe

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 D^2} \left[HH' - H'^2 \frac{r^3(2D^2 - r^2)}{D(D^2 - r^2)^2} \right]; \quad (194)$$

zakładając w (193) $H=H'$ otrzymujemy (przypadek Ig)

$$F = \frac{H^2}{8\pi\epsilon_0 (SS' - TT')^2} \left[(SS' - TT') \left(\frac{\sigma'}{r} + \frac{\sigma}{r'} + 2\tau \right) - \right. \\ \left. - (r'S' + rS + 2rr'T_0) \left(\frac{S}{r} \frac{\sigma'}{r'} + \frac{S'}{r} \frac{\sigma}{r'} - 2\tau T_0 \right) \right] \quad (195)$$

oraz po podstawieniu $r'=0$ jak wyżej (przypadek IIg)

$$F = \frac{H^2}{4\pi\epsilon_0 D^2} \left[1 - \frac{r^3(2D^2 - r^2)}{D(D^2 - r^2)^2} \right]. \quad (196)$$

Dokonując we wzorze (193) obliczenia sposobem *a* otrzymujemy znowu wzór (186) dotyczący przypadku II*f* i II*h* (podczas tego przekształcenia znak F zmienia się z $+$ na $-$).

Przez podstawienie $r=r'$ do (191) znajdujemy dla przypadku Ve

$$F = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r} \frac{(S_s^2 - T_s^2) [\sigma(H^2 + H'^2) + 2r\tau HH']}{(S_s^2 - T_s^2)^2} - \\ - \frac{2[S_s(H^2 + H'^2) + 2T_s HH'] (S_s\sigma - r\tau T_s)}{(S_s^2 - T_s^2)^2}. \quad (197)$$

Jeżeli oba ładunki mają (te same znaki) i te same wartości bezwzględne (przypadek Vg), to energia układu wynosi

$$W = \frac{H^2}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{1}{S_s - T_s}, \quad (198)$$

skąd wynika wyrażenie dla siły odpychania

$$F = \frac{H^2}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{r\tau_s - \sigma_s}{(S_s - T_s)^2}, \quad (199)$$

które piszemy w postaci

$$F = \frac{H^2}{4\pi\epsilon_0 D^2} \xi_H, \quad (200)$$

przy czym

$$\xi_H = \frac{\xi_V}{(S_s - T_s)^2} = \frac{\xi_V}{\mu_H^2} \quad (201)$$

(por. wzory 161, 162a i 163).

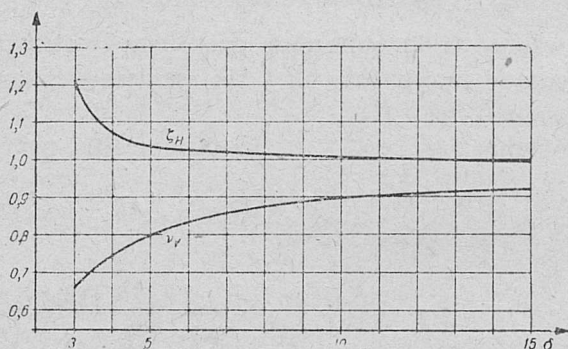
Wartości współczynników ξ_H i μ_v znajdujemy na podstawie tablicy 13 i rys. 38.

Tablica 13

**Wartości współczynników ξ_H i μ_v
określających siły odpychania dwóch jednakowych kul
przy niezmiennych ładunkach**

$\delta =$	3	4	5	6	8	10	15	20
$\xi_H =$	0,836	0,938	0,971	0,985	0,994	0,997	0,998	0,999
$\mu_v = 1/\mu_H =$	1,315	1,245	1,202	1,167	1,125	1,100	1,065	1,051

Korzystając z tablicy 13 możemy zauważyć, jak drobne różnice zachodzą w rozważanym tu przypadku między klasycznym wzorem Coulomba (126) i dokładnym wzorem (200). Przy $\delta > 5$ błąd przy stosowaniu pierwszego



Rys. 38. Wartości współczynników ξ_H i μ_v
(do tablicy 13)

jest mniejszy niż 0,5%. Na rys. 38 wykreślona jest również krzywa μ_v , z której można wnioskować, jaki jest potencjał V_δ kul w każdym położeniu (dla każdego δ). Współczynnik μ_v jest zdefiniowany analogicznie do μ_v (we wzorach 182—184)

$$\mu_v = \frac{V_\delta}{V_H} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} : \frac{Q(S_s - T_s)}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{S_s - T_s} = \frac{1}{\mu_H}. \quad (202)$$

Porównując ze sobą wartości współczynników ξ_v i ξ_H (tablica 7 i 11), ξ_v i ξ_H (tablica 8 i 13) oraz λ_v i λ_H (tablica 6 i 12) widzimy, że przy tych samych wartościach δ lub α :

$\xi_v > \xi_H$ czyli siły przyciągania między dwiema jednakowymi kulami przy niezmiennych potencjałach są większe niż odnośne siły przy niezmiennych ładunkach;

$\xi_v < \xi_H$ czyli siły odpychania między dwiema jednakowymi kulami przy niezmiennych potencjałach są mniejsze niż odnośne siły przy niezmiennych ładunkach;

$\lambda_v > \lambda_H$ czyli siły przyciągania między płaszczyzną i kulą przy niezmiennych napięciach są większe niż odnośne siły przy niezmiennych ładunkach.

Zbadanie, czy przy niezmiennych jednoimiennych ładunkach możliwe jest powstanie sił przyciągających, ograniczymy do rozważenia przypadków IIe i IIg (wzory 194 i 196). Pozostałe wzory wchodzące tu w rachubę (193, 195, 197) są tak zbudowane, że odnośna analiza przedstawia duże trudności. To samo można powiedzieć o wzorze (200) (przypadek Vg), jakkolwiek struktura tego wzoru pozwala domyślać się, że stworzenie dlań warunków, w których $F=0$, jest niemożliwe.

W przypadku IIe (wzór 194) warunek równowagi elektrostatycznej brzmi

$$HH' = H'^2 \frac{r^3(2D^2 - r^2)}{D(D^2 - r^2)^2}$$

albo

$$\chi_{gr} = \frac{H'}{H} = \frac{\delta(\delta^2 - 1)^2}{2\delta^2 - 1}. \quad (203)$$

Wartości współczynnika χ_{gr} znajdujemy w tablicy 14.

Tablica 14

**Wartości współczynników χ równowagi elektrostatycznej
w układzie kula-ładunek punktowy przy niezmiennych ładunkach**

$\delta =$	3	4	5	6
$\chi_{gr} =$	11,3	29,0	58,7	103,7

Na podstawie tej tablicy stwierdzamy, że wartości χ w stanie równowagi są znacznie wyższe niż odnośne wartości κ z tablicy 9, tak że krzywa $\chi = f(\delta)$ przebiega o wiele bardziej stromo niż krzywa $\kappa = f(\delta)$ na rys. 33. Osiągnięcie stanu równowagi jest zatem przy niezmiennych ładunkach znacznie trudniejsze niż przy niezmiennych potencjałach.

Jeśli chodzi o wzór (196) (przypadek VIg), to łatwo można wykazać, że warunek równowagi przypada dla wartości $\delta < 3$, że zatem w zasięgu stosowalności podanych wzorów równowaga nie jest możliwa.

f. Jeżeli kula K (o promieniu r) znajduje się wewnątrz kuli K' (o promieniu r'), to energia pola zawartego w przestrzeni między obiema kulami wynosi

$$W = \frac{1}{2} \frac{(\sum Q)^2}{C_w}. \quad (204)$$

Ładunki na kuli K i na wewnętrznej powierzchni kuli K' mają zawsze znaki różne. W przypadku, gdy potencjały kul utrzymywane są na stałym poziomie, ładunek Q jest stały i wzorowi (204) można nadać postać

$$W = \frac{Q^2 S_w}{8\pi\epsilon_0 r}. \quad (205)$$

Korzystając z oznaczeń (133) znajdujemy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dD} \sqrt{\frac{N}{M}} &= \sqrt{\frac{M}{N}} \frac{4rr'D}{M^2}, \\ \frac{d}{dD} S_w &= \frac{rr'D}{(r'^2 - D^2)^2} \left(1 + \sqrt{\frac{N}{M}} \right) + \frac{2r'^2 r'^2 D}{r'^2 - D^2} \frac{1}{M^2} \sqrt{\frac{M}{N}}. \end{aligned} \quad (206)$$

W rozważanym przypadku zachodzi również związek (129); jednakże w przeciwieństwie do rozdz. 12 p. a I przy $\Delta D > 0$ mamy $\Delta W > 0$, tak że wynikające ze (129) siły przyciągania będą tu miały znak dodatni. Dla przypadku VIIId (rys. 34 VII) otrzymujemy zatem

$$F = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r'D}{(r'^2 - D^2)} \left[\frac{1}{r'^2 - D^2} \left(1 + \sqrt{\frac{N}{M}} \right) + \frac{2rr'}{M\sqrt{MN}} \right]. \quad (207)$$

Granice stosowalności tego wzoru określone są warunkiem (61).

Zakładając we wzorze (207) $D=0$ znajdujemy $F=0$; siły wywierane przez zewnętrzną kulę K' na wewnętrzną kulę K położoną współśrodkowo z K' równoważą się wzajemnie i siła wypadkowa równa się zeru.

Przyjmując we wzorze (207) $r=0$ znajdujemy

$$N = M = r'^2 - D^2$$

i otrzymujemy stąd siłę wywieraną przez pole na ładunek punktowy K (przypadek VIIIId rys. 34 VIII)

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{rD}{(r^2 - D^2)^2}. \quad (208)$$

Jeżeli kule K' i K tworzą układ odosobniony, czyli ładunki ich są stałe, to oznaczając wartości bezwzględne tych ładunków przez H znajdujemy dla energii W pola elektrostatycznego zawartego w przestrzeni między K i K'

$$W = \frac{H^2}{8\pi_0 r S_w}. \quad (209)$$

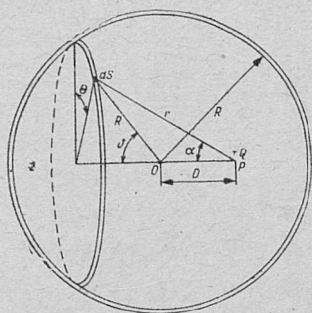
Przy $AD > 0$ energia W zmniejsza się i $\Delta W < 0$; wynikająca ze (131) siła, która ma tu charakter siły przyciągania, jest dodatnia; wartość jej w rozważanym przypadku VIIh (rys. 34 VII) wynosi

$$F = \frac{H^2}{8\pi\epsilon_0 \cdot S_w^2} \cdot \frac{r'D}{r'^2 - D^2} \left[1 + \sqrt{\frac{N}{M}} + \frac{2rr'}{M\sqrt{MN}} \right]. \quad (210)$$

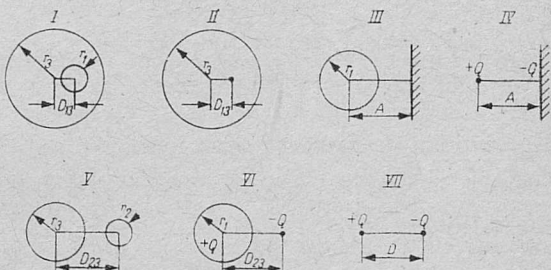
W celu znalezienia siły przyciągania w przypadku VIIIh (rys. 34 VIII) podstawiamy do wzoru (210) $r=0$. Otrzymuje się wtedy wyrażenie identyczne z wyrażeniem (208) otrzymanym poprzednio przy założeniu stałego napięcia. Podstawiając do

$$D = r' - A$$

i przechodząc do granicy $r' \rightarrow \infty$ (sposób β , rozdz. 9 p. c) znajdujemy znane już wyrażenie (139) określające siłę przyciągania między kulą i płaszczyzną.



Rys. 39. Obliczenie siły wywieranej na ładunek elektryczny położony wewnątrz kuli



Rys. 40. Różne przypadki wzajemnego położenia 2 walców

Wzór (208) jest sprzeczny z rozpowszechnionym poglądem, według którego siła F wywierana na ładunek punktowy znajdujący się wewnątrz metalowej wydrążonej kuli równa się zero. Pogląd ten opiera się na kilkakrotnie przeprowadzonych doświadczeniach (pierwsze z nich dokonane było jeszcze przez Cavendisha w końcu osiemnastego stulecia; doświadczenia te były następnie powtórzone przez Maxwella r. 1870 i innych). H. H. Skilling w swojej książce *Fundamentals of electric waves* posuwa się tak daleko, że w równości $F=0$ upatruje dowód prawa Coulomba. Rachunek, który do takiego wniosku prowadzi, jest następujący.

Załóżmy, że w punkcie P wewnątrz kuli znajduje się ładunek Q i że influencyjny ładunek $-Q$ rozmieszczony jest równomiernie na wewnętrz-

nej powierzchni kuli. Wtedy ładunek dQ elementu powierzchniowego dS będącego częścią pierścienia o promieniu $R \sin \vartheta$ i o szerokości $R d\vartheta$ (rys. 39) wynosi

$$dQ = \sigma dS = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot R d\vartheta \cdot R \sin \vartheta d\Theta.$$

Założmy dalej, że siła przyciągania wywierana przez $(-dQ)$ na $+Q$ wynosi

$$dF' = \frac{Q dQ}{4\pi \epsilon r^n} \quad \text{gdzie} \quad n=2.$$

Przy tych założeniach siła wywierana przez cały pierścień na punktowy ładunek $+Q$ umieszczony w P jest

$$dF = \frac{Q^2 d\vartheta}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \vartheta \cos \alpha}{4\pi \epsilon r^2} d\Theta,$$

przy czym ze względu na symetrię siła dF działa w kierunku $\vec{OP}$.

Siła wypadkowa wywierana na ładunek punktowy $+Q$ przez cały rozmieszczony na kuli ładunek $-Q$ wynosi zatem

$$F = \frac{Q^2}{4\pi} \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} \frac{\sin \vartheta}{4\pi \epsilon r^2} \cdot \frac{D + R \cos \vartheta}{r} d\Theta = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon} \int_0^\pi \frac{(D + R \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta}{r^3}.$$

Wprowadzając zamiast ϑ zmienną r

$$r = \sqrt{R^2 + D^2 + 2DR \cos \vartheta}$$

znajdujemy

$$F = \frac{Q^2}{16\pi \epsilon D^2 R} \int_{R-D}^{R+D} \frac{r^2 - R^2 + D^2}{r^2} \cdot dr = 0.$$

Łatwo stwierdzić, że równość powyższa zachodzi tylko wtedy, gdy $n=2$.

Pomimo to przytoczone wywody oparte o powyższe obliczenia są niesłuszne z następujących powodów:

1. doświadczalne stwierdzenie prawa Coulomba przy zastosowaniu niezbyt wysokich napięć jest bardzo trudne ze względu na znikomość występujących sił; jeżeli zaś napięcie powiększyć, to powstają inne niemniej istotne trudności polegające między innymi na obecności drgań parazytowych, na konieczności dostatecznej izolacji i na zapobieganiu zwarć; zwarcia są szczególnie niebezpieczne, jeżeli D jest duże; natomiast przy zmniejszeniu D zmniejsza się znacznie rzeczywista występująca w rzeczywistości siła (w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalnie do D^3); dlatego też wnioskowanie z samych doświadczeń musi budzić zastrzeżenia;

2. założeniem przeprowadzonego wyżej rachunku jest równomierne rozmieszczenie ładunku na wewnętrznej powierzchni kuli; jednakże niecentryczne położenie ładunku punktowego $+Q$ jest właśnie powodem nierównomiernego rozkładu gęstości σ , co z kolei prowadzi do powstania wypadkowej siły przyciągania.

12. SIŁY PRZYCIĄGANIA MIĘDZY NAŁADOWANYMI WALCAMI KOŁOWYMI O OSIACH RÓWNOLEŻŁYCH

a. Korzystając z równania (129) jesteśmy w stanie obliczyć siłę F , z jaką przyciągają się dwa walce o osiach równoległych. Przypadek dwóch nieskończenie długich walców o jednoimiennych ładunkach nie daje się teoretycznie ani fizycznie zrealizować.

Zakładamy, że Q oznacza ładunek na odcinku o długości l każdego z obu walców; przyjmujemy:

1. że oba odcinki walców położone są między dwiema równoległymi płaszczyznami prostopadłymi do osi walców;
2. że odległość obu walców jest nieograniczona.

Obliczane niżej siły F_w , F_p lub F_z dotyczą również odcinków odpowiadających powyższemu założeniu.

W praktyce możemy przyjąć, że oba walce są bardzo długie i że rozważane odcinki znajdują się w znacznej odległości od ich końców. Otrzymane wzory mają wtedy charakter wzorów przybliżonych.

Rozważmy najpierw takie walce położone wewnątrz siebie. Zgodnie z wzorami (6) i (19) możemy napisać

$$C_{13} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{r_3^2 + r_1^2 - D_{13}^2 + \sqrt{(r_3^2 - r_1^2 - D_{13}^2)^2 - 4D_{13}^2 r_1^2}}{2r_3 r_1}} \quad (211)$$

Różniczkując wyrażenie

$$W_{13} = \frac{Q^2}{2C_{13}}$$

znajdujemy szukaną siłę F_w dotyczącą przypadku z rys. 40 I

$$F_w = \frac{Q^2 D_{13}}{2\pi\epsilon_0 l \sqrt{(r_3^2 - r_1^2 - D_{13}^2)^2 - 4D_{13}^2 r_1^2}} \quad (212)$$

Nadmieniamy przy tym, że czasem korzystne jest stosowanie tożsamości

$$(r_3^2 - r_1^2 - D_{13}^2)^2 - 4D_{13}^2 r_1^2 = (r_1^2 - r_3^2 - D_{13}^2)^2 - 4D_{13}^2 r_1^2. \quad (213)$$

Podstawiając do równania (212) $r_1 = 0$, znajdujemy siłę przyciągania F_w między walcem kołowym o promieniu r_3 i równoległym doń ładun-

kiem liniowym, znajdującym się wewnątrz walca w odległości D_{13} od osi walca (rys. 40 II)

$$F_w = \frac{Q^2 D_{13}}{2\pi\epsilon_0 l (r_3^2 - D_{13}^2)} \quad (214)$$

Zakładając w równaniu (212) $D_{13} = r_3 - A$ i przechodząc do granicy $r_3 \rightarrow \infty$, znajdujemy siłę przyciągania F_p między walcem kołowym i równoległą doń płaszczyzną odległą o A od osi walca (rys. 40 III)

$$F_p = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 l \sqrt{A^2 - r^2}} \quad (215)$$

Jeżeli we wzorze (215) założymy $r_1 = 0$, to otrzymamy siłę przyciągania F_p między płaszczyzną i równoległym do niej ładunkiem liniowym (A = odległość ładunku liniowego od płaszczyzny, rys. 40 IV)

$$F_p = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 l A} \quad (216)$$

b. Pojemność dwóch walców kołowych o wzajemnie równoległych i położonych na zewnątrz siebie osiach wg (3) i (19) wynosi

$$C_{23} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{D_{23}^2 - r_2^2 - r_3^2 + \sqrt{(D_{23}^2 + r_2^2 - r_3^2)^2 - 4D_{23}^2 r_3^2}}{2r_2 r_3}} \quad (217)$$

W podobny sposób jak w pkt *a* znajdujemy siłę przyciągania F walców (rys. 40 V)

$$F_z = \frac{Q^2 D_{23}}{2\pi\epsilon_0 l \sqrt{(D_{23}^2 + r_2^2 - r_3^2)^2 - 4D_{23}^2 r_2^2}} \quad (218)$$

Możemy przy tym korzystać z tożsamości

$$(D_{23}^2 + r_2^2 - r_3^2)^2 - 4D_{23}^2 r_2^2 = (D_{23}^2 + r_3^2 - r_2^2) - 4D_{23}^2 r_3^2 \quad (219)$$

Zakładając we wzorze (218) $r_2 = 0$, znajdujemy siłę przyciągania między walcem kołowym o promieniu r i równoległym do osi walca oraz położonym na zewnątrz walca ładunkiem liniowym (D_{23} = odległość między ładunkiem liniowym i osią walca — rys. 40 VI):

$$F_z = \frac{Q^2 D_{23}}{2\pi\epsilon_0 l (D_{23}^2 - r_3^2)} \quad (220)$$

Przyjmując we wzorze (220) $r_3=0$, znajdujemy siłę przyciągania F_z między dwoma równoległymi ładunkami liniowymi znajdującymi się we wzajemnej odległości D (rys. 40 VII)

$$F_z = \frac{Q^2}{2\pi\epsilon l D} \quad (221)$$

Wzór (221) można także otrzymać ze (216) stosując metodę zwierciadlanego odbicia.

Podstawiając do wzoru (218) $D_3 = A + r_3$ i przechodząc do granicy $r_3 \rightarrow \infty$, otrzymamy znane już wyrażenie (215).

Jeżeli średnica obu walców jest jednakowa, to w (218) musimy podstawić $r_3 = r_2$, znajdujemy wówczas

$$F_p = \frac{Q^2}{2\pi\epsilon l \sqrt{D_{23}^2 - 4r_2^2}} \quad (222)$$

Na zasadzie metody zwierciadlanego odbicia wzory (215) i (222) są zgodne.

(Czyniąc analogiczne podstawienie $r_1 = r_3$ we wzorze (212) otrzymalibyśmy w mianowniku liczbę urojoną; odpowiada to interpretacji fizycznej, zgodnie z którą takie podstawienie jest niedopuszczalne).

13. ZASTOSOWANIE DO POLA PRZEPŁYWOWEGO

Niektóre z przedstawionych wyżej wzorów i rozważań znajdują zastosowanie w polach przepływowych (w szczególności w polach przepływowych w ziemi). Dotyczy to przede wszystkim obliczonych wyrażeń pojemności układów.

Jak wiadomo, między pojemnością C układu składającego się z dwóch elektrod i opornością przejściową R w polu przepływowym przy tym samym układzie elektrod zachodzi związek

$$R = \frac{\epsilon}{\gamma} \cdot \frac{1}{C}, \quad (223)$$

gdzie γ oznacza przewodność właściwą ośrodka. W ten sposób wszystkie odnośne wzory, a mianowicie wzory (3), (6), (9), (84), (87), (106), (112), (123) dają się zużytkować także w opisany tu sposób. Odpowiednią interpretację otrzymują również tablice 1, 2 i 4.

Najważniejsze z tym wzorów są te, które dotyczą oporności przejściowej w układzie dwóch kul oraz w układzie jednej kuli i płaszczyzny.

14. WNIOSKI I ZAKOŃCZENIE

Praca przedstawia próbę rozwiązania niektórych zagadnień dotyczących pola elektrostatycznego.

Sformułowane tu prawo najmniejszej pojemności przyczynia się niewątpliwie do znajomości struktury tego pola. Prawo powyższe nie zostało w pracy dowiedzione w ściśle matematyczny sposób, jednakże przeprowadzone rozważania w dostatecznej mierze gruntują jego podstawy fizyczne.

Wprowadzone pojęcie elektrody pośredniej i analiza ruchów tej elektrody ma również znaczenie podobne. W pracy zanalizowany jest najprostszy przypadek elektrody o postaci walca kołowego. Byłoby interesujące przeprowadzenie analogicznych rozważań również w innych przypadkach.

Duże znaczenie teoretyczne ma próba wprowadzenia pojemności cząstkowych w przypadku układu dwóch kul. Cechą szczególną tych pojemności jest to, że jedna z okładek odnośnego „kondensatora” znajduje się w nieskończoności. Rozważania, o których mowa, rzucają pewne światło na rolę nieskończoności w układach elementów o wymiarach skończonych. Dają one również wyobrażenie o strukturze odnośnych pól elektrostatycznych.

Przedstawione w pracy wyrażenie dla pojemności układu dwóch kul jest wyrażeniem przybliżonym; daje się ono z dostateczną dokładnością stosować tylko wtedy, gdy stosunek średnic kul do odległości ich środków nie jest zbyt wielki. Jednakże obszar zastosowań podanego wzoru jest bardzo rozległy. Byłoby rzeczą nadzwyczaj cenną sprawdzenie doświadczalne tego wzoru; pomiar taki przedstawia wprawdzie znaczne trudności, jednak nie wydaje się niemożliwy.

Oczywiście dalszym dążeniem musi być ujawnienie zachodzących związków w obszarze nie pokrytym przez przedstawiony tu wzór.

Te same wzory dla pojemności mogą oczywiście bez trudności być zastosowane również i do pól przepływowych. Dotyczy to także omówionych wyżej pojemności cząstkowych, które prowadzą bezpośrednio do pojęcia oporności cząstkowych. Odnośne rozważania i związki mogą mieć znaczenie na przykład w teorii prądów ziemnych; zanalizowanie tych możliwości pozostaje kwestią otwartą.

W pracy podano uogólnione wzory Coulomba. Stosowanie tych wzorów jest ograniczone spełnieniem tych samych warunków jak w przypadku wspomnianego wyrażenia dla pojemności i w dużym obszarze daje dostatecznie ściśle przybliżenie. Przez specjalizację przedstawionych wzorów ogólnych otrzymuje się 34 wzory dla przypadków szczególnych, pozwalające obliczać siły działające między kulą i płaszczyzną, między kulą i ła-

dunkiem punktowym itd. Wzory dają się zastosować również i w przypadku położenia jednej kuli wewnątrz drugiej.

Jako najdalszą specjalizację otrzymuje się z podanego wzoru klasyczną postać wzoru Coulomba.

Oczywiście i w tej dziedzinie powinno przejawiać się dążenie do stworzenia wzorów o zakresie szerszym niż zakres wzorów przedstawiony w pracy.

Za pomocą podanych wzorów można analitycznie ugruntować znane z literatury zjawisko polegające na tym, że w pewnych przypadkach dwa ciała naładowane jednoimiennie nie zawsze oddalają się od siebie; czasem nie oddziałuje na nie żadna siła, czasem zaś działająca siła zbliża oba ciała do siebie.

Cechą charakterystyczną pracy jest wielka prostota używanego aparatu matematycznego, który niewiele wychodzi poza ramy podstawowych twierdzeń analizy; widać stąd, że nie zawsze muszą zachodzić trudności zaznaczone we wstępie do niniejszej pracy. Potwierdza się przy tym zdanie prof. H. Steinhausa, który w r. 1949 pisał¹¹:

„Im prostsze są metody matematyczne w stosunku do korzyści praktycznych, tym lepiej. Jest rzeczą zdumiewającą, ile niewyzyskanych możliwości kryje się w elementarnych związkach matematycznych“.

Praca uchyła tylko drobny rąbek związków dotychczas nam nie znanych; jednym z najbliższych zadań byłaby dalsza dokładniejsza analiza pola układu dwóch kul. Poza zasięgiem przedstawionej pracy roztaczają się szerokie horyzonty, które czekają dopiero na ich odkrycie.

Katedra Podstaw Elektrotechniki
Politechniki Łódzkiej

WYKAZ LITERATURY

1. Galileo Ferraris — Wissenschaftliche Grundlagen der Elektrotechnik — Leipzig 1901.
2. Goworkow — Elektriceskije i magnitnyje pola — Moskwa 1951.
3. Kałantarow P. L. i Nejman L. R. — Tieoreticzeskije osnovy elektrotechniki — Moskwa 1951.
4. Konorski B. — Podstawy Elektrotechniki — t. I, Warszawa 1950.
5. Küpfmülller K. — Einführung in die theoretische Elektrotechnik — Berlin 1939.
6. Ollendorff F. — Erdströme — Berlin 1928.
7. Ollendorff F. — Potentialfelder der Elektrotechnik — wyd. 2, Berlin 1932.
8. Russel A. The Dielectric Strength of Air. Phil. Mag. vol. XI. 1906.
9. Skilling H. H. Fundamentals of Electric Waves. Wydanie polskie, Warszawa 1954, P. W. N.

¹¹ Czasopismo *Matematyka* 1949, zesz. nr 3 (5).

PRZYPISY

Obliczenia do rys. 6

D_{13}	D_{23}	d_1	c_{13}	$\frac{r_1}{r_3} x_{13}$	d_2	d_3	$\frac{r_3}{r_1} x_{23}$	$\lg \frac{r_1}{r_3} x_{13}$	$\lg \frac{r_3}{r_1} x_{23}$	W
30	130	10	0	1	59,231	70,769	38,0	0	1,580	1,580
20	120	27,5	25,617	2,906	53,75	66,25	31,76	0,463	1,502	1,965
15	115	42,5	41,3065	3,3875	50,978	64,022	28,76	0,530	1,459	1,989
13,24 (,2455)	113,2455	50	48,99	3,525	50	63,2455	27,72	0,547	1,443	1,990
10	110	70	69,282	3,732	48,182	61,818	25,96	0,572	1,414	1,986
5	105	147,5	147,14	3,9325	45,357	59,643	23,32	0,595	1,368	1,962
0	100	—	—	4	42,5	57,5	20,68	0,602	1,315 ₅	1,918
— 5	95	147,5	147,14	3,9325	39,606	55,394	18,20	0,595	1,260	1,858
—10	90	70	69,282	3,732	36,667	53,333	15,92	0,572	1,202	1,774
—20	80	27,5	25,617	2,906	30,625	49,375	11,64	0,463	1,066	1,529
—30	70	10	0	1	24,826	45,714	7,88	0	0,8965	0,896 ₅

Obliczenie krzywej δ

I	II	III	IV	V	VI
φ	$\cos \varphi$	$2D_{12}D_{13} \cos \varphi$	D_{23}^2	$D_{23}^2 + r_3^2 - r_2^2$	$D_{23}^2 r_3^2$
0	1	6000	16900	18400	$\times 10^4$ 10816
30°	0,86603	5196,18	16096,18	17596,18	10301,55
60°	0,5	3000	13900	15400	8896
90°	0	0	10900	12400	6976
120°	—0,5	—3000	7900	9400	5056
135°	—0,70711	—4242,66	6657,34	8157,34	4260,7
150°	—0,86603	—5196,18	5703,92	7203,92	3650,51
165°	—0,96593	—5795,58	5104,42	6604,42	3266,83
180°	—1	—6000	4900	6400	3136

Obliczenie krzywej δ (ciąg dalszy)

I	VII	VIII	IX	X	W
φ	V ² -VI	$\sqrt{\text{VII}}$	$D_{23}^2 - r_3^2 -$ $-r_2^2 + \text{VIII}$	$\frac{\text{IX}}{2r_2 r_3}$	lg X
0	$\times 10^4$ 23040	15180	30380	37,95	1,579
30°	20661	14374	30170,2	37,71	1,576
60°	14820	12174	24374	30,47	1,484
90°	8400	9165,2	18365,2	22,96	1,361
120°	3780	6148,2	12348,2	15,435	1,189
135°	2393,5	4892,3	9849,6	12,31	1,090
150°	1539,13	3923,2	7927,1	9,91	0,996
165°	1095,0	3309	6713,4	8,39	0,924
180°	960	3098,4	6298,4	7,87	0,896

Obliczenia do rys. 7

D_{13}	D_{23}	d_1	d_2	d_3	c_{13}	c_{23}	X_{13}	X_{23}	$\lg \frac{r_1}{r_3} X_{13}$	$\lg \frac{r_3}{r_1} X_{23}$	W
50	150	10	63,333	86,667	0	62,6155	6	5,2201	0	1,496	1,496
40	140	23,75	57,5	82,5	21,542	56,624	19,17	4,4104	0,505	1,423	1,928
27,46	127,46	50	50	77,46	48,99	48,99	28,18	3,4604	0,672	1,317	1,989
20	120	77,5	45,417	74,583	76,852	44,3025	31,87	2,9628	0,725	1,250	1,975
10	110	170	39,091	70,909	169,7	37,79	34,97	2,3214	0,766	1,144	1,910
0	100	—	32,5	67,5	—	30,923	36	1,734	0,778	1,017	1,795
-10	90	170	25,556	64,444	169,7	23,518	34,97	1,1990	0,766	0,857	1,623
-20	80	77,5	18,125	61,875	76,85	15,117	31,87	0,7109	0,725	0,630	1,355
-30	70	43,33	10	60	42,124	0	26,649	0,1667	0,648	0	0,648

Obliczenie krzywej $\beta - \delta$

I	II	III	IV	V	VI
φ	$\cos \varphi$	$2D_{12}D_{13} \cos \varphi$	D_{23}^2	$D_{23}^2 + r_3^2 - r_2^2$	V^2
180°	1	10000	22500	26000	$\times 10^4$ 67600
150°	0,86603	8660,3	21160,3	24660,3	60812
120°	0,5	5000	17500	21000	44100
90°	0	0	12500	16000	25600
60°	-0,5	-5000	7500	11000	12100
45°	-0,70711	-7071,1	5428,9	8928,9	7972,5
40°32'			4900	8400	7056

Obliczenie krzywej $\beta-\delta$ (ciąg dalszy)

VII	VIII	IX	X	XI	XII
$D_{23}^2 r_3^2$	VI-VII	$\sqrt{\text{VIII}}$	$D_{23}^2 - r_3^2 -$ $-r_2^2 + \text{IX}$	$\frac{\text{X}}{2r_2 r_3}$	$\lg \text{X}$
$\times 10^4$	$\times 10^4$				
32400,8	35200	18762	37562	31,31	1,496
30470,8	30341,2	17419	34879,2	29,066	1,463
25200	18900	13748	27548	22,79	1,358
18000	7600	8718	17518	14,598	1,164
10800	1300	3606	7406	6,173	0,791
7818	154,9	1245	2973,9	2,478	0,394
7056	0	0	1200	1	0

Obliczenie krzywej $\alpha-\delta$

I	II	III	IV	V	VI
φ	$\sin^2 \varphi$	$2 D_{12}^2 \sin^2 \varphi$	$D_{12}^2 + D_{23}^2 -$ $-2D_{12}^2 \sin^2 \varphi$	$\sqrt{\text{IV}^2 - 5100}$	IV-V
0	0	0	14900	14000	900
10°	0,030154	603,08	14296,92	13356	940,92
20°	0,116978	2339,56	12560,44	11480	1080,44
30°	0,250000	5000,0	9900	8485,3	1414,7
40°32'10"	0,422409	8448,18	6451,82	3951,7	2500

Obliczenie krzywej $\alpha-\delta$ (ciąg dalszy)

I	VII	VIII	IX	X	XI	XII
φ	$(3500 - \text{VI})^2$	$\text{VII} - 4D''^2 r_1^2$	$r_3^2 + r_1^2 - D''^2$	$\sqrt{\text{VIII}}$	$\text{IX} + \text{X}$	$\lg \frac{\text{XI}}{1200}$
	$\times 10^4$	$\times 10^4$				
0	676	640	2800	2529,82	5329,82	0,648
10°	654,89	611,67	2759,1	2473,2	5232,3	0,640
20°	585,43	542,21	2619,6	2328,5	4948,1	0,615
30°	434,85	378,26	2285,3	1945	4230,3	0,547
40°32'10"	100	0	1200	0	1200	0

Obliczenia do tablicy 1

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII= S'_w
δ	$81-\delta^2$	$121-\delta^2$	II : III	$1+\sqrt{IV}$	$100-\delta^2$	5 : VI	$1+V \cdot VII$
0	81	121	1,493	2,222	100	0,0500	1,1111
1	80	120	1,500	2,225	99	0,0502	1,112
2	77	117	1,520	2,233	96	0,0521	1,116
3	72	112	1,558	2,248	91	0,0549	1,123
4	65	105	1,614	2,2705	84	0,0595	1,135
5	56	96	1,713	2,309	75	0,0667	1,154
6	45	85	1,890	2,375	64	0,0782	1,186

Obliczenia do tablicy 1 (ciąg dalszy)

I	II	III	VI	V	VI	VII	VIII
δ	$196-\delta^2$	$256-\delta^2$	III : II	$1+\sqrt{IV}$	$225-\delta^2$	$7,5 \cdot V$	$1+(VII : VI)$
0	196	256	1,305	2,142	225	15,0650	1,0713
1	195	255	1,307	2,143	224	16,0725	1,0716
2	192	252	1,312	2,145	221	16,0875	1,0728
3	187	247	1,320	2,149	217	16,1175	1,0746
4	180	240	1,333	2,155	209	16,1625	1,0774
5	171	231	1,350	2,162	200	16,2150	1,0807
6	160	220	1,375	2,173	189	16,2975	1,0862
7	147	207	1,409	2,187	176	16,4025	1,0932
8	132	192	1,455	2,206	161	16,5450	1,1028
9	115	175	1,520	2,233	144	16,7475	1,11 3
10	96	156	1,622	2,274	125	17,0550	1,1363
11	75	135	1,800	2,342	104	17,5650	1,1689

Obliczenia do tablicy 4

I	II	III	IV	$V=\eta_p$	I	II	III	IV	$V=\eta_p$
α	$\frac{\alpha+1}{\alpha-1}$	$1+\sqrt{II}$	$\frac{1}{4\alpha}$	$1+III \cdot IV$	α	$\frac{\alpha+1}{\alpha-1}$	$1+\sqrt{II}$	$\frac{1}{4\alpha}$	$1+III \cdot IV$
1,5	5	3,23607	$\frac{1}{6}$	1,53935	8	$\frac{9}{7}$	2,13390	$\frac{1}{32}$	1,066685
2	3	2,73205	$\frac{1}{8}$	1,34163	9	1,25	2,11803	$\frac{1}{36}$	1,058834
2,5	2,333	2,52753	$\frac{1}{10}$	1,25275	10	1,222	2,10553	$\frac{1}{40}$	1,052638
3	2	2,41421	$\frac{1}{12}$	1,20118	15	$\frac{8}{7}$	2,06904	$\frac{1}{60}$	1,034484
4	1,667	2,29100	$\frac{1}{16}$	1,14319	20	1,105	2,05131	$\frac{1}{80}$	1,025641
5	1,5	2,22474	$\frac{1}{20}$	1,11123	30	1,069	2,034	$\frac{1}{120}$	1,017
6	1,4	2,18322	$\frac{1}{24}$	1,09097	40	1,05	2,025	$\frac{1}{160}$	1,013
7	1,333	2,15471	$\frac{1}{28}$	1,08267	50	1,04	2,020	$\frac{1}{200}$	1,010

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV
δ	$2(\delta^2-1)$	$2(\delta^2-2)$	$\sqrt{\delta^2-4}$	I : IV	1 + V	I : III	1 + VI · VII	VIII : I	I : II	1 + X · VI	IX + XI	XII : 2	XI - IX
3	16	14	2,236	1,34	2,34	0,0715	1,1673	0,3891	0,0625	1,14625	1,5353 ₅	0,7676	0,7571
4	30	28	3,464	1,155	2,155	0,0357	1,077	0,2642	0,03333	1,07176	1,3360	0,6680	0,8075
5	48	46	4,583	1,09	2,09	0,02174	1,0415	0,2083	0,020833	1,04353	1,2518	0,6259	0,8352
6	70	68	5,657	1,06	2,06	0,01471	1,0302	0,1715	0,014286	1,02944	1,2009	0,6005	0,8579
8	126	124	7,746	1,033	2,033	0,008064	1,0166	0,1270	0,007936 ₅	1,01613	1,1431	0,5716	0,8891
10	198	196	9,798	1,021	2,021	0,005102	1,0103 ₅	0,1010	0,005050 ₅	1,01021	1,1112	0,5556	0,9091
15	448	446	14,866	1,007	2,007	0,002242	1,0045	0,0670	0,002232	1,00448	1,0715	0,5357	0,9375
20	798	796	19,900	1,005	2,005	0,001256	1,0026	0,0501	0,001253	1,00251	1,0526	0,5263	0,9524
30	1798	1796	29,933	1,0023	2,0023	0,000556	1,0011	0,0334	0,000556	1,00111	1,0345	0,5172	0,9677
40	3198	3196	39,950	1,0012	2,0012	0,000313	1,00063	0,0250	0,000313	1,00063	1,0256	0,5128	0,9756
50	4998	4996	49,960	1,0008	2,0008	0,000200	1,00040	0,0200	0,000200	1,00040	1,0204	0,5102	0,9804

Obliczenia do tablicy 3

$$C_{12v}^* = \frac{1,0435x + 0,209}{x+1}; \quad C_{11v}^* = 0,8344(1-x); \quad x = \frac{V'}{V}; \quad C_{12H}^* = 1,2526 \frac{y}{1+y}; \quad C_{11H}^* = 1,0433 \frac{1-y}{1,0435-0,209y}; \quad y = \frac{H'}{H}$$

x	Sx	$Sx+T$	C_{12v}^*	C_{11v}^*	y	$(S+T) \frac{y}{y+1}$	Ty	$S-Ty$	$(S^2-T^2)(1-y)$	C_{11}^*
0	0	0,2091	0,2091	0,834	0	0	0	1,0435	1,0433	1
0,1	0,104354	0,31344	0,2849	0,751	0,1	0,1139	0,02091	1,02263	0,93897	0,918
0,2	0,208708	0,41780	0,346	0,668	0,2	0,2066	0,04182	1,00172	0,83464	0,833
0,3	0,313062	0,52215	0,402	0,584	0,3	0,2891	0,06273	0,98081	0,73031	0,745
0,4	0,417416	0,6265	0,447	0,501	0,4	0,3579	0,08364	0,95990	0,62598	0,652
0,5	0,521770	0,7309	0,487	0,417	0,5	0,4175	0,10454	0,93900	0,52165	0,555
0,6	0,626124	0,8352	0,522	0,334	0,6	0,4697	0,12545	0,91809	0,41732	0,454
0,7	0,730478	0,9396	0,553	0,250	0,7	0,5158	0,14636	0,89718	0,31299	0,349
0,8	0,834832	1,0439	0,575	0,167	0,8	0,5567	0,16727	0,87627	0,20866	0,238
0,9	0,939180	1,1483	0,604	0,083	0,9	0,5933	0,18818	0,85536	0,10433	0,138
1,0	1,04354	1,2526	0,626	0	1,0	0,6263	0,20919	0,73445	0	0

Obliczenia do rys. 27.

I	II	III	IV	V	VI
α	$r_0 \cos \alpha$	$d_{3l} - \text{II}$	$\frac{C_t}{\text{II} \cdot r_0}$	$d_{3p} - \text{II}$	$\frac{C_p}{\text{V} \cdot r_0}$
$D_{23} = 10; D_{23} = 110$					
		wewn.		zewn.	
0	40	40	43,4	21,82	54,2
30°	34,64	45,36	38,2	27,18	43,4
60°	20	60	28,9	41,82	28,2
90°	0	80	21,7	61,82	19,1
120°	-20	100	17,3	81,82	14,4
150°	-34,64	114,64	15,1	96,46	12,2
180°	-40	120	14,4	101,82	11,5

Obliczenia do rys. 27 (ciąg dalszy)

I	VII	VIII	IX	X	XI	XII
α	$d_3 - \text{II}$	$\frac{C}{\text{VII} \cdot r_0}$	$d_{3l} - \text{II}$	$\frac{C_e}{\text{IX} \cdot r_0}$	$d_{3p} - \text{II}$	$\frac{C_p}{\text{XI} \cdot r_0}$
$D_{13} = 13,245; D_{23} = 113,245$			$D_{13} = 16,49; D_{23} = 116,49$			
			wewn.		zewn.	
0	23,24 ₅	53,7	10,37	73,9	24,68	51,5
30°	28,60	43,7	15,73	48,6	30,04	42,3
60°	43,24 ₅	28,9	30,37	25,2	44,68	28,4
90°	63,24 ₅	19,75	50,37	15,2	64,68	19,7
120°	83,24 ₅	15,0	70,37	10,9	84,68	15,0
150°	97,88	12,8	85,01	9,0	99,32	12,8
180°	103,24	12,1	90,37	8,5	104,68	12,15

Obliczenia do tablicy 6

I	II	III	IV	V= λ
a	$\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}$	a^2-1	a^2+a-1	$\frac{1}{2} + \frac{IV \cdot II}{2 \cdot III}$
1,5	2,23607	1,25	2,75	—
2	1,73205	3	5	1,9434
2,5	1,52753	5,25	7,75	1,6015
3	1,41421	8	11	1,4728
4	1,29100	15	19	1,3176
5	1,22474	24	29	1,2399
6	1,18322	35	41	1,1930
8	1,13390	63	71	1,1389
10	1,10533	99	109	1,1081
15	1,06904	224	239	1,0703
20	1,05131	399	419	1,0570
30	1,0339	899	929	1,0342
40	1,0253	1599	1639	1,0255
50	1,0202	2499	2549	1,0203

Obliczenia do tablicy 7

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
δ	$\sqrt{\delta^2-4}$	$1+\delta/II$	$1,5\delta^2-1$	$(\delta^2-2)^2$	IV : V	$(\delta^2+1)^2$	$\delta^3 : VII$
3	2,236	2,34	12,5	49	0,2555	64	0,422
4	3,464	2,155	23	196	0,1173	225	0,284
5	4,583	2,09	36,5	529	0,069	576	0,217
6	5,657	2,06	53	1156	0,0458	1225	0,176
8	7,746	2,033	95	3844	0,0219	3969	0,129
10	9,798	2,021	149	9604	0,0155	9801	0,102
15	14,866	2,007	336,5	49729	0,0068	50176	0,0672
20	19,900	2,005	599	158404	0,0038	159201	0,0502
30	29,933	2,0023	1499	806404	0,00186	808201	0,0334
40	39,95	2,0010	2399	2553600	0,00094	2556800	0,0251
50	49,96	2,0008	3749	6240000	0,00060	6245000	0,0200

Obliczenia do tablicy 7 (ciąg dalszy)

I	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV
δ	VI+VIII	III·IX	$2:\delta^2-4$	$\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2-4}}$	$\frac{2}{\delta^2-2} + \frac{2\delta}{\delta^2-1}$	$\frac{XI \cdot XII \cdot XIII}{2}$	$1+X+XIV$
3	0,678	1,587	0,4	1,34	1,036	0,278	2,865
4	0,401	0,865	0,167	1,155	0,676	0,065	1,930
5	0,286	0,598	0,0953	1,09	0,504	0,0261	1,624
6	0,222	0,467	0,0625	1,06	0,402	0,0133	1,480
8	0,151	0,307	0,0333	1,033	0,286	0,0049	1,3119
10	0,1175	0,238	0,0208	1,021	0,222	0,00235	1,2403
15	0,074	0,1485	0,00905	1,007	0,143	0,00065	1,1491
20	0,054	0,1083	0,00505	1,005	0,1053	0,00026	1,1086
30	0,0353	0,0707	0,00223	1,0023	0,0690	0,00007	1,0708
40	0,0260	0,0520	0,00125	1,001	0,0513	0,00002	1,0520
50	0,0206	0,0412	0,0008	1,00080	0,0408	0,00001	1,0412

Б. КОНОРСКИ

НОВЫЕ ТЕОРЕМЫ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Резюме

Начальное место в этом труде занимает т. н. “право наименьшей ёмкости”. Для его формулировки введено понятие “промежуточного электрода”. В электростатическом поле, образованном двумя заряженными телами $+A$ и $-B$ помещена вместо одной из эквипотенциальных поверхностей металлическая фольга с чрезвычайно малой толщиной стенок, форма которой точно подобрана к форме эквипотенциальной поверхности. Эта проводимая оболочка названа промежуточным электродом E (рис. 1); предполагается, что несмотря на очень тонкие стенки, этот электрод обладает достаточной жёсткостью, чтобы не поддаваться деформации во время своего перемещения. Согласно теореме наименьшей ёмкости, если мы переместим промежуточный электрод E из его первоначального положения (т. е. из места согласованного с положением эквипотенциальной поверхности) в другое положение, то совместная ёмкость системы $A - E - B$ увеличится.

Верность этой теоремы доказывается сперва в частных случаях, когда A и B круглые цилиндры с параллельными осями (рис. 2).

В первом примере (рис. 3) E является плоскостью симметрии двух лежащих один вне другого круглых цилиндров с одинаковыми диаметрами. Во втором примере все три цилиндра A , E и B имеют общую ось. Далее приведено доказательство теоремы наименьшей ёмкости в общем случае двух параллельных круглых цилиндров; промежуточный электрод является также круглым цилиндром с осью параллельной к оси цилиндра A и B .

В том положении поверхности E , в котором она соответствует наименьшей ёмкости, энергия целой системы является наибольшей. Это положение отличается поэтому неустойчивым равновесием и достаточно дать промежуточному электроду внешний импульс, чтобы он из этого положения безвозвратно вышел; E движется тогда до тех пор, пока займёт такое новое положение, в котором энергия всей системы будет наименьшей (или равной нулю). На двух примерах приведен анализ

движения промежуточного электрода E (рис. 9—12) и графически представлена энергия системы (рис. 6 и 7).

Для применения теоремы наименьшей ёмкости к случаю двух шаров—проведен сперва расчёт ёмкости такой системы. Применён притом метод Томсона, ведущий к разностным уравнениям (38); эти уравнения были уже представлены Оллендорфом в [3]. Оллендорф указал также способ точного решения этих уравнений, ведущий к сложным рядам (47). Суммирование этих рядов в конечной форме невозможно, а поэтому невозможны или по крайней мере весьма затруднительны выводы из них.

Поэтому автором был разработан приблизительный метод решения уравнений (38), ведущий к результатам очень близким к точному решению. Применение метода обусловлено удовлетворением неравенства (61) для шаров расположенных один внутри другого и (64, 65) для шаров лежащих один вне другого.

При помощи представленного приближённого метода можно рассчитать ёмкости в системе двух шаров. Формула (84) вместе с формулой (77) представляет ёмкости шаров расположенных один внутри другого. В случае, когда оба шара расположены один вне другого, выступающие ёмкости могут быть двоякого рода: взаимная ёмкость C_{12} , соответствующая двум разноименным зарядам с одинаковыми абсолютными значениями, расположенными напротив себя на поверхности обоих шаров и соединенными друг с другом линиями поля; а также собственные ёмкости C_{11} или C_{22} , соответствующие линиям поля, проходящим между одним из обоих шаров и бесконечностью. В зависимости от представленных на рис. 20 случаев, ёмкости C_{12} , C_{11} , C_{22} могут быть рассчитываемы при помощи соответствующих формул (102) до (112).

В системе трех поверхностей проводов (из которых одна может быть бесконечно отдаленным шаром) ёмкость между двумя проводами зависит не только от геометрических свойств системы и от диэлектрической проницаемости среды, но также от поля. Отсюда следует необходимость введения понятия активной ёмкости.

При переходе к пределу (рис. 23) из тех же формул получается ёмкость системы шар-плоскость (уравн. 122) и (123), табл. 4. рис. 24).

На основании опыта приобретенного в представленных соображениях можно перейти теперь к доказательству теоремы наименьшей ёмкости в самом общем случае. Доказательство основано на представлениях Максвелла и Фарадея об электростатическом поле, а также на рассуждении о распределении плотности электрического заряда на обеих поверхностях промежуточного электрода. На рис. 27 даны примеры такого распределения, относящиеся к промежуточному электроду поля двух цилиндров.

Зная ёмкости в системе двух шаров, мы можем рассчитать накопленную в соответствующем электростатическом поле энергию; отсюда мы можем затем рассчитать действующие в этом поле на оба шара силы (т. наз. силы притяжения и отталкивания). Закон Кулона определяет эти силы при помощи четырёх классических формул (125) до (128), относящихся к точечным зарядам. Однако, если мы перейдем к зарядам расположенным на шарах с конечными размерами, то следует также принять во внимание, имеют ли шары неизменные заряды, или же их потенциалы поддерживаются на постоянном уровне.

Ввиду различной структуры поля — силы выступающие при одноименных зарядах или потенциалах не равны силам при зарядах или потенциалах с противоположными знаками (даже если абсолютные значения этих зарядов или потенциалов одинаковы).

Следует также учесть возможность различных расположений сферических электродов. В настоящем труде представлен анализ следующих 8 случаев (рис. 28). Внешнее расположение шаров: I два неравных шара; II шар и точечный заряд;

III шар и плоскость; IV плоскость и точечный заряд; V два одинаковых шара; Внутреннее расположение шаров: VI два точечных заряда; VII один шар внутри другого; VIII точечный заряд внутри шара.

Все эти различия приводят к 34 возможностям (из них 4 — являются вышеупомянутыми классическими формулами Кулона).

Таблица 5 содержит формулы относящиеся к этим случаям.

В настоящем труде рассчитаны:

1. Числовые коэффициенты формул для сил притяжения между двумя одинаковыми шарами при неизменных потенциалах или при неизменных зарядах (формулы 148 и 180, таблицы 7 и 11).

2. Числовые коэффициенты формул для отталкивающих сил между двумя одинаковыми шарами при неизменных зарядах (формулы 162, 200 — таблицы 8 и 13).

3. Числовые коэффициенты формул сил притяжения между шаром и плоскостью при неизменных потенциалах или при неизменных зарядах (формулы 139, 187, таблицы 6 и 12).

Анализ влияния поля на два шара с одноименными зарядами подтвердил, что в нескольких случаях является возможным полное отсутствие влияния на эти шары, (электростатическое равновесие), а также и возможность притяжения таких шаров (явление это издавна качественно известно, так напр. заметил это Эпинус).

Для трех случаев рассчитаны числовые условия такого равновесия (таблицы 9, 10, и 14). Рассчитаны также силы притяжения двух круглых цилиндров с параллельными осями в различных относительных расположениях (рис. 40), формулы (212), (214), (215), (216), (218), (220) и (221).

В конце труда представлены применения поля электрического тока. Выражение, представляющее ёмкости двух шаров, может быть использовано для расчёта переходного сопротивления.

B. KONORSKI

NEUE SÄTZE ÜBER DAS ELEKTROSTATISCHE FELD

Zusammenfassung

Im Vordergrund der Arbeit steht der „Satz der kleinsten Kapazität“. Um ihn zu formulieren, wird der Begriff der „Zwischenelektrode“ eingeführt. In einem elektrostatischen Feld, gebildet von zwei geladenen Körpern $+A$ und $-B$, wird an Stelle einer der Niveauflächen eine Metallfolie eingeführt, deren Stärke verschwindend klein ist und deren Form sich genau der Form einer Niveaufläche anpasst. Diese Metallfolie wird Zwischenelektrode E genannt (Bild 1), wobei angenommen wird, dass sie ungeachtet ihrer dünnen Wände genügende Festigkeit besitzt, um bei Bewegungen ihre ursprüngliche Form nicht zu verlieren. Es wird nun behauptet, dass, falls man die Zwischenelektrode aus ihrer ursprünglichen Lage (Niveaufläche!) in eine andere Lage verschiebt, die Gesamtkapazität des Systems $A - E - B$ eine Vergrößerung erfährt (Satz der kleinsten Kapazität).

Die Richtigkeit dieses Satzes wird vorerst an dem Spezialfall erwiesen, wenn A und B zwei Kreiszylinder mit parallelen Achsen sind (Bild 2). Im ersten Beispiel (Bild 3) ist E die Symmetrieebene zweier Zylinder von gleichem Durchmesser, deren Achsenentfernung grösser als die Zylinderdurchmesser ist. Im zweiten Beispiel (Bild 5) sind alle drei Walzen A , B und E coaxial. Hierauf wird der vorgenannte Satz für den allgemeinen Fall zweier parallelen Kreiszylinder bewiesen; dabei ist E ebenfalls ein Kreiszylinder mit paralleler Achse.

In derjenigen Lage von E , in welcher die Kapazität ein Minimum ist, ist gleichzeitig die Energie des Systems am grössten. Diese Lage ist also labil und wenn die Zwischenelektrode von aussen einen Kraftimpuls erleidet, kommt sie nicht mehr in ihre ursprüngliche Lage zurück, sondern sie wird sich solange bewegen, bis sie eine Stellung einnimmt, in welcher die Energie des Systems am kleinsten, bzw. gleich Null ist. In zwei Beispielen wird die entsprechende Bewegung von E untersucht (Bild 9 bis 12) und der jeweilige Energieinhalt des Systems graphisch dargestellt (Bild 6 und 7).

Um den Satz der kleinsten Kapazität auf den Fall zweier Kugeln anzuwenden, wird zunächst die Kapazität eines solchen Systems berechnet. Zu diesem Zweck wird die bekannte Abbildungsmethode von Thomson benutzt, welche zu Differenzengleichungen (38) führt, die bereits von Ollendorff in [3] aufgestellt worden sind. Die genaue Lösung dieser Gleichungen führt (nach Ollendorff) zu unübersichtlichen Ausdrücken (47), mit denen sich nichts anfangen lässt. Deshalb wird in der vorliegenden Arbeit eine Näherungslösung vorgeschlagen, die jedoch ausserordentlich genaue Resultate ergibt. Die Gültigkeit der Methode wird durch die Ungleichungen (61) (für ineinanderliegende Kugeln) und (64, 65) (für aussenliegende Kugeln) eingeschränkt.

Mit Hilfe der angegebenen angenäherten Methode kann man Kapazitäten berechnen, die im System zweier Kugeln auftreten. Die Formel (84) gibt, zusammen mit Formel (77), die Kapazität von zwei ineinanderliegenden Kugeln an. Wenn die Kugeln sich in der Aussenlage befinden, können zweierlei Kapazitäten auftreten und zwar: die Gegenkapazität C_{12} , welche zwei ungleichnamigen, einander gegenüberliegenden Ladungen von demselben Betrag entspricht, und die Eigenkapazität C_{11} oder C_{22} , welche den Feldlinien entspricht, die von einer der beiden Kugeln ausgehen und sich ins Unendliche erstrecken. Je nach den bestehenden, in Bild 20 dargestellten Möglichkeiten werden zur Berechnung von C_{12} , C_{11} , C_{22} entsprechende Formeln aus (102) bis (112) benutzt.

Im System dreier Leiterflächen (von welchen eine die unendliche Sphäre sein kann) hängt die Kapazität zweier Leiter nicht nur von geometrischen Eigenschaften des Systems und von der Dielektrizitätskonstante des Mediums sondern auch von der Feldstruktur ab. Daraus erwächst die Notwendigkeit, den Begriff der aktiven Kapazität einzuführen.

Durch Grenzübergang (Bild 23) ergibt sich aus denselben Formeln die Kapazität des Systems Kugel — Ebene (Gl. 122 und 123, Tabelle 4, Bild 24).

Auf Grund der Erfahrungen, die in den vorstehenden Rechnungen erworben wurden, kann nunmehr der Beweis des Satzes der kleinsten Kapazität für den allgemeinsten Fall geführt werden. Der Beweis stützt sich einerseits auf die Maxwell-Faraday'schen Auffassungen über das elektrostatische Feld, andererseits auf das Studium der Ladungsverteilung auf beiden Oberflächen der Zwischenelektrode. Um ein Beispiel für diese Verteilung zu geben, wird wiederum auf zwei parallele Kreiszylinder zurückgegriffen (Bild 27).

Sobald man die Kapazitäten kennt, die im System zweier Kugeln auftreten, kann man auch die Energie berechnen, die im Feld dieser Kugeln aufgespeichert ist; daraus lassen sich Ausdrücke für Kräfte ableiten, die vom Feld aus auf die Kugeln einwirken (sogenannte anziehende und abstossende Kräfte). Nach dem Coulombschen Gesetz werden diese Kräfte mittels vier klassischer Formeln (125) bis (128), welche Punktladungen betreffen, berechnet. Es zeigt sich jedoch, dass man beim Uebergang zu Ladungen, die sich auf Kugeln endlichen Ausmasses befinden, auch noch den

Umstand berücksichtigen muss, ob die Kugeln konstante Ladungen haben, bzw. ob deren Potentiale konstant gehalten werden.

Die Beschaffenheit der Felder, die bei gleichnamigen Ladungen oder Potentialen entstehen, ist verschieden von der Beschaffenheit des Feldes bei ungleichnamigen Ladungen oder Potentialen (auch im Fall, wenn die absoluten Beträge gleich sind); demzufolge werden auch die Kräfte, die in beiden Fällen auftreten, verschieden sein.

Man muss auch die Möglichkeit verschiedener Formen von Kugelelektroden berücksichtigen. In der vorliegenden Arbeit werden folgende 8 Fälle untersucht: Aussenlage der Kugeln: I. Zwei ungleiche Kugeln. II. Kugel und Punktladung. III. Kugel und Ebene. IV. Punktladung und Ebene. V. Zwei gleiche Kugeln. VI. Zwei Punktladungen. — Innenlage der Kugeln: VII. Eine Kugel innerhalb der andern. VIII. Punktladung im Innern der Kugel.

Infolge dieser verschiedenen Modalitäten muss man 34 Fälle berücksichtigen (4 davon sind die früher bezeichneten klassischen Formeln von Coulomb). Die Zusammenstellung der Formeln, die sich auf diese Fälle beziehen, enthält Tafel 5. In der vorliegenden Arbeit sind berechnet:

1. Zahlenkoeffizienten für die Anziehungskräfte zwischen zwei gleichen Kugeln bei konstanten Potentialen oder konstanten Ladungen (Formeln 148 und 180, Tafeln 7 und 11).

2. Zahlenkoeffizienten für die Abstossungskräfte zwischen zwei gleichen Kugeln bei konstanten Potentialen oder konstanten Ladungen (Formeln 162, 200, Tafeln 8 und 13).

3. Zahlenkoeffizienten für die Anziehungskräfte zwischen einer Kugel und einer Ebene bei konstanten Potentialen oder konstanten Ladungen (Formeln 139 und 187, Tafeln 6 und 12).

Wenn man die Einwirkung des Feldes auf zwei Kugeln mit gleichnamigen Ladungen analysiert, so kann man feststellen, dass in gewissen Fällen nicht nur keinerlei Kräfte entstehen (elektrostatistisches Gleichgewicht), sondern sogar die Kugeln einander anziehen können. (Diese Erscheinung ist qualitativ seit Langem bekannt. So wird sie z. B. von Aepinus erwähnt). In drei Fällen werden die Zahlenverhältnisse dieses Gleichgewichtes berechnet (Tafeln 9, 10 und 14).

Es werden weiters die Anziehungskräfte zweier Kreiszylinder mit parallelen Achsen in verschiedenen gegenseitigen Lagen berechnet. (Bild 38, Formeln 212, 214, 215, 216, 218, 220, 221).

Am Schluss der Arbeit werden Anwendungen auf das Strömungsfeld dargestellt. Der Ausdruck, der für die Kapazität zweier Kugeln gilt, kann zur Berechnung des entsprechenden Uebergangswiderstandes dienen.

CZ. JAWORSKI

Analiza pracy silnika trakcyjnego (Metoda analityczna obliczania mocy elektrowozu)

Rękopis dostarczono 30. 6. 1954.

Przy projektowaniu elektryfikacji kolei zachodzi między innymi konieczność określenia mocy elektrowozów. Nie ma dotychczas metody pozwalającej obliczyć tę moc a priori dla zadanych z góry warunków pracy elektrowozu. Z tego powodu moc tę zakłada się najpierw w przybliżeniu „na oko” na podstawie doświadczenia projektującego, po czym, po wstępnym zaprojektowaniu elektrowozu i obliczeniu jego charakterystyk trakcyjnych, wykonuje się na ich podstawie szereg przejazdów analitycznych z różnymi pociągami przewidzianymi dla tego elektrowozu i na przewidzianych dla nich trasach. W wyniku tych przejazdów uzyskuje się wielkość prądu zastępczego silników elektrowozu, który stanowi kryterium do oceny właściwości dokonanego uprzednio wyboru mocy silników trakcyjnych.

Aby uniknąć doboru mocy lokomotywy drogą wielokrotnych, żmudnych prób i sprawdzeń i aby wypełnić lukę, jaką stanowi brak jakiegokolwiek metody obliczenia z góry potrzebnej mocy lokomotywy, autor przeprowadza analizę pracy silnika trakcyjnego i wyciąga szereg wniosków, które pozwalają mu z kolei dla założonych warunków pracy lokomotywy określić z góry wielkość prądu zastępczego silników i wynikającej z niego znamionowej mocy lokomotywy.

W wyniku przeprowadzonej analizy autor kwestionuje znaczenie przypisywane zazwyczaj prądowi zastępczemu, w szczególności jako kryterium nagrzewania się silnika trakcyjnego. Kryterium takie stanowić może jedynie przebieg temperatury silnika w funkcji drogi pociągu, wykonany metodą analityczną lub wykreślną.

WSTĘP

Charakterystyczną cechą pracy silnika trakcyjnego jest zmienność jego obciążenia. Tylko w wyjątkowych przypadkach, kiedy pociąg porusza się z jednostajną szybkością, tak zwaną szybkością ustaloną, przy której siła lokomotywy równa się oporom ruchu pociągu, prąd silników ma wartość stałą. Poza tym wielkość prądu ulega ciągłym zmianom nie tylko wtedy, kiedy, jak to ma miejsce przy rozruchu, zmienia się wzajemne połączenia silników z układu szeregowego na równoległe, zmieniając przez to wiel-

kość przyłożonego do silników napięcia, lub gdy zwierza się poszczególne partie włączonych w szereg z uzwojeniem silnika oporów rozruchowych, czy wreszcie, gdy przez tzw. bocznikowanie uzwojeń magnesów zmienia się wielkość pola magnetycznego, lecz i wtedy gdy prąd płynący przez silnik, jak to wynika z charakterystyki jego obrotów, zmienia swą wielkość przy każdej zmianie szybkości pociągu. W konsekwencji także nagrzewanie się silnika, zależne między innymi tak od jego szybkości, jak i od prądu, ulega stałym wahaniom, zależnym od rodzaju lokomotywy i pociągu, od trasy, od sposobu jazdy itd. A wreszcie ta sama ilość ciepła wydzielanego w silniku będzie wywoływała przyrost bądź spadek jego temperatury zależnie od tego, jaką temperaturę i jaką szybkość ma silnik w danej chwili. W tych warunkach określenie na drodze teoretycznej przebiegu zmian temperatury silnika w zależności od wszystkich wymienionych wyżej parametrów jego pracy jest rzeczą bardzo trudną, albo w ogóle niemożliwą.

Przy analizie nagrzewania się silnika trakcyjnego wprowadza się początkowo szereg założeń upraszczających, w szczególności stałość niektórych parametrów. Przede wszystkim zaś przyjmuje się, że silnik trakcyjny, lub jego część (np. wirnik lub uzwojenie wirnika), stanowi ciało jednorodne. Oczywiście, założenie takie upraszcza wprawdzie znacznie analizę przebiegu zjawiska nagrzewania się silnika, jednak kosztem ścisłości otrzymanych wyników, które następnie można skorygować na drodze praktycznych badań doświadczalnych. Przeprowadzona przy tych założeniach analiza pozwala zorientować się przynajmniej w charakterze zmian zachodzących przy nagrzewaniu się silnika; badania próbne potwierdzają w zasadzie ten charakter.

1. PRĄD ZASTĘPCZY

W celu uproszczenia, choćby kosztem ścisłości, analizy zjawisk zachodzących w silniku wprowadzone zostało pojęcie tzw. prądu zastępczego. Przez to pojęcie rozumie się prąd umyślony o stałej wartości, który spowodowałby wydzielenie w silniku takiej samej ilości ciepła, jaka występuje przy rzeczywistym, zmiennym obciążeniu tego silnika, przy czym zakłada się, że ilość wydzielonego ciepła jest proporcjonalna do kwadratu prądu¹. Przy obliczeniu tak pojętego prądu zastępczego pomija się okoliczność, że straty mechaniczne oraz straty w żelazie (o bardzo złożonej naturze zmian) nie są w każdym razie proporcjonalne do kwadratu prądu silnika i przyjmuje się w przybliżeniu, że nie tylko straty w miedzi, lecz wszystkie straty silnika są proporcjonalne do kwadratu prądu. Po-

¹ Patrz [5] str. 156.

mija się przy tym także fakt, że przyrost temperatury silnika na jednostkę czasu zależy nie tylko od ilości wydzielonego ciepła, lecz także od temperatury silnika oraz, że chłodzenie silnika ulega zmianie w okresie jego pracy w zależności od temperatury silnika i od jego obrotów. Przy takich upraszczających założeniach wielkość prądu zastępczego wyraża się wzorem

$$I_z = \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t I^2 dt}. \quad (1.1)$$

Często zamiast tego wzoru stosuje się inny, w którym całkę zastępuje się odpowiednią sumą

$$I_z = \sqrt{\frac{1}{t} \sum_{k=1}^{n_c} I_k^2 \cdot \Delta t}, \quad (1.2)$$

gdzie $t = \sum \Delta t$.

Jest kilka przyczyn usprawiedliwiających metodę sprawdzania stopnia nagrzewania się silnika na drodze badania prądu zastępczego:

1. Znaczne uproszczenie zagadnienia.
2. Okoliczność, że przy częstym przeciążaniu silnika trakcyjnego największa ilość ciepła wydzielą się w uzwojeniach silnika.
3. Choć silnik trakcyjny nie jest ciałem jednorodnym, tak że poszczególne jego części nagrzewają się niejednakowo, to jednak miejscem najczulszym w silniku i najbardziej narażonym na uszkodzenie z powodu przegrzania jest izolacja uzwojeń silnika, na której temperaturę wpływa przede wszystkim temperatura samych uzwojeń, w znacznie mniejszym stopniu temperatura żelaza, a tylko pośredni i zupełnie nieznaczny wpływ mają takie straty silnika, jak np. straty mechaniczne.

Przyjęte przy wprowadzeniu pojęcia prądu zastępczego założenie, że straty całkowite w silniku $\sum \Delta P$, które dalej oznaczamy przez ΔP , są proporcjonalne do kwadratu jego obciążenia, prowadzi do paradoksalnych wniosków odnośnie do krzywej sprawności silnika, przy takim bowiem założeniu mielibyśmy

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_1 - \Delta P}{P_1} = \frac{P_1 - RI^2}{P_1} = 1 - \frac{RI^2}{UI} = 1 - \frac{R}{U} I.$$

Ponieważ w ostatnim wyrażeniu stosunek $\frac{R}{U}$ jest wielkością stałą, więc krzywą sprawności jest linia prosta (η_1), jak na rys. 1, odpowiadająca krzywej $\Delta P = f_1(I)$. Tymczasem rzeczywista krzywa sprawności silnika ma,

jak wiadomo, zupełnie inny charakter (η), odpowiadający innej krzywej strat $\Delta P = f_2(I)$, niż założono. Tę rzeczywistą krzywą strat można łatwo wykreślić na podstawie krzywej sprawności z zależności:

$$\Delta P = UI(1 - \eta). \quad (1.3)$$

Krzywa ta, jak widzimy na rysunku, nie przechodzi przez początek układu współrzędnych i ma charakter znacznie łagodniejszy, niż hipotetyczna krzywa strat proporcjonalnych do kwadratu prądu.

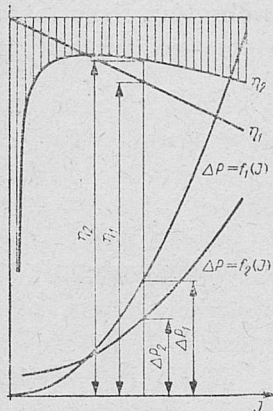
Już ta pobieżna analiza wykazuje, że przy dużych prądach, a więc przy małych szybkościach pociągu, ilości ciepła wydzielanego w silnikach trakcyjnych są znacznie niższe, niż to wynika ze stosowanego rachunku prądu zastępczego, zaś przy prądach małych, a więc przy dużych szybkościach, znacznie wyższe.

Jak się później okaże, nie przesądza to jednak jeszcze kwestii nagrzewania się silnika trakcyjnego.

Rzeczywisty silnik trakcyjny, jako ciało niejednorodne, nie wykaże tak wielkich różnic temperatur, jakie wynikają dla silnika idealnego, stanowiącego ciało jednorodne, niemniej różnice te istnieją: temperatura izolacji uzwojeń silnika zależy nie tylko od ilości ciepła wydzielanego przez uzwojenia, lecz także od ilości ciepła oddawanego żelazu. Przy dużych prądach mamy zwykle dużą różnicę temperatur między miedzią i żelazem, która polepsza oddawalność ciepła, wobec czego rzeczywista temperatura tej izolacji będzie niższa, niżby to wynikało z założenia nie uwzględniającego chłodzącego wpływu żelaza. Przy małych prądach izolacja ta nie stygnie tak szybko, jakby to wynikało z powyższego założenia, ponieważ ilość ciepła wydzielanego w jej otoczeniu spada z kwadratem prądu tylko w miedzi, utrzymując się w żelazie prawie na tym samym poziomie, jak to będzie wynikało także z dalszej analizy. W tym przypadku całkowita ilość wydzielanego ciepła może być kilkakrotnie wyższa od ilości wynikającej z przyjętego założenia (porównaj rzędne $1 - \eta$ dla obu krzywych przy małych prądach).

2. STRATY W SILNIKU TRAKCYJNYM I JEGO SPRAWNOŚĆ

W celu zorientowania się, jakie ilości ciepła wydzielane są w poszczególnych częściach silnika trakcyjnego w czasie jego pracy, czyli jakie czynniki wpływają na ich wielkość i jakie są ich wzajemne zależności,



Rys. 1. Krzywe sprawności silnika trakcyjnego w funkcji prądu, $\eta = f(I)$

należy przeanalizować rodzaje poszczególnych strat występujących w silnikach trakcyjnych, które powodują nagrzewanie się silników.

Całkowite straty w silniku ΔP określają jego sprawność i dla silnika prądu stałego mogą być wyrażone w sposób następujący

$$\Delta P = \frac{P}{\eta} - P = P \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) = UI_{\eta} \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) = UI(1 - \eta), \quad (2.1)$$

gdzie P — moc mierzona na wale silnika.

Analiza poszczególnych rodzajów strat prowadzi do następujących wniosków:

1. Straty w uzwojeniach są proporcjonalne do kwadratu prądu i przy prądzie mocy ciągłej silnika stanowią, w zależności od rodzaju pracy dla niego przewidzianej, nieco mniej lub nieco więcej niż połowę całkowitych strat silnika. Jeśli mianowicie przewidziana jest praca dorywcza silnika, straty w uzwojeniach stanowią (względnie powinny stanowić) mniej niż połowę strat całkowitych i tym mniej, im krótszy ma być względny czas pracy silnika i im większy jest prąd w stosunku do prądu mocy ciągłej; taki rodzaj pracy charakteryzuje silniki tramwajowe i trolejbusowe oraz silniki jednostek podmiejskich i szybkich kolei miejskich (metro). Jeśli natomiast przewiduje się długotrwałą pracę silników, straty w ich uzwojeniach przy prądzie mocy ciągłej powinny stanowić więcej niż połowę strat całkowitych silnika i tym więcej, im dłuższe mają być odległości międzyprzystankowe tras obsługiwanych przez elektrowozy wyposażone w te silniki, im cięższe są pociągi przewidziane dla tych elektrowozów i im łagodniejszy jest profil linii.

Straty w uzwojeniach silnika szeregowego, czyli normalnego silnika trakcyjnego wyrażają się wzorem

$$\Delta P_{cu} = RI^2, \quad (2.2)$$

gdzie R jest sumą oporności uzwojeń twornika, biegunów głównych i pomocniczych i ewentualnie uzwojeń kompensacyjnych. Należy pamiętać, że całkowite straty w uzwojeniach rozkładają się oczywiście na wszystkie uzwojenia, powodując wydzielanie się w nich ciepła w ilościach proporcjonalnych do oporności poszczególnych uzwojeń. W normalnych konstrukcjach silników trakcyjnych główną jednak część tych strat stanowią straty w uzwojeniach twornika.

2. Ścisłe ujęcie analityczne strat w żelazie nie jest możliwe i z tego względu stosowane są zwykle wzory empiryczne, które albo traktują wszystkie straty w żelazie łącznie i wtedy zakłada się, że są one proporcjonalne do kwadratu indukcji i do pewnej potęgi częstotliwości,

przy czym wykładnik tej potęgi przyjmuje się między 1 i 2 (zwykle 1,6)², albo też rozdziela się straty w żelazie na straty na prądy wirowe i straty na histerezę i wtedy przyjmuje się dla strat na prądy wirowe

$$\Delta P_w = c f^2 B^2 \quad (2.3)$$

oraz dla strat na histerezę

$$\Delta P_h = c f B^2. \quad (2.4)$$

Rozpatrzmy straty w żelazie według ostatnich wzorów.

Ponieważ częstotliwość jest proporcjonalna do prędkości obrotowej silnika, zaś indukcja magnetyczna B — do strumienia, więc straty na prądy wirowe możemy przedstawić w postaci:

$$\Delta P_w = c n^2 \Phi^2, \quad (2.5)$$

ale iloczyn obrotów przez strumień jest proporcjonalny do siły elektromotorycznej. Zastępując z kolei siłę elektromotoryczną przez różnicę napięcia i spadku napięcia i pomijając wielkość drugiego rzędu, będziemy mieli

$$\begin{aligned} \Delta P_w &= c E^2 = c (U - IR)^2 = c (U^2 - 2UIR + I^2 R^2) \approx \\ &\approx c U (U - 2RI) = c_1 - c_2 I \approx \text{const.} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Spadek napięcia RI jest wielkością stosunkowo drobną wobec napięcia U , tym bardziej więc pomijalnie drobna będzie wielkość $R^2 I^2$ wobec U^2 . Jednakże i wielkość $2RI$ jest stosunkowo drobna w stosunku do U , wobec czego można przyjąć w przybliżeniu, że w silniku szeregowym przy stałym napięciu na jego zaciskach straty na prądy wirowe, spadające nieco ze wzrostem obciążenia, są praktycznie stałe.

Jeśli w analogiczny sposób przekształcimy podany wyżej wzór na straty na histerezę, przy $U = \text{const}$ otrzymamy

$$\Delta P_h = c n \Phi^2 = c \frac{(n \Phi)^2}{n} = c \frac{E^2}{n} \approx c \frac{U - 2RI}{n} \approx \frac{c}{n}. \quad (2.7)$$

Pomijając, jak wyżej, stosunkowo drobny spadek siły elektromotorycznej ze wzrostem prądu możemy przyjąć, że w silniku szeregowym straty na histerezę są, praktycznie biorąc, odwrotnie proporcjonalne do obrotów silnika, to znaczy, że ze wzrostem prądu rosną początkowo dość szybko, później coraz wolniej, co wynika z charakterystyki obrotów silnika szeregowego.

Sumę wszystkich strat w żelazie i w uzwojeniach przy prądzie mocy ciągłej można przyjąć w przybliżeniu na około 80% strat całkowitych. Jeśli więc straty w miedzi stanowią 50% strat całkowitych silnika, to straty w żelazie wyniosą około 30% tych strat; można też przyjąć w przy-

^a Patrz [1] str. 408.

blizieniu, że jeśli z powodów wyżej podanych straty w uzwojeniach są o pewien procent mniejsze lub większe od połowy strat całkowitych, to o tyleż procent w stosunku do strat całkowitych rosną lub maleją straty w żelazie.

Straty w żelazie i w uzwojeniach decydują właściwie o nagrzewaniu się najbardziej narażonych na nie części silnika (w szczególności i przede wszystkim izolacji uzwojeń twornika) nie tylko dlatego, że stanowią około 80% wszystkich strat, lecz także i z tego powodu, że z następnej co do wielkości grupy strat, a mianowicie strat mechanicznych stanowiących ogółem około 10÷15% strat całkowitych silnika, tylko straty przewietrzania, i to w drobnej zaledwie części i tylko w silnikach samoprzewietrzanych, wpływać mogą bezpośrednio na nagrzewanie się wymienionych wyżej części silnika. Natomiast ani straty tarcia szczotek o komutator, ani tym bardziej straty w łożyskach nie mają praktycznie wpływu na nagrzewanie się izolacji uzwojeń, lecz przede wszystkim powodują nagrzewanie się komutatora bądź łożysk, a dopiero pośrednio — przez przewodzenie ciepła (w żelazie lub miedzi) — wpływają na temperaturę izolacji uzwojeń. Znaczenie pośrednie nagrzewania się komutatora polega tu przede wszystkim na tym, że ma on dużą powierzchnię promieniującą i chłodzoną powietrzem: jeśli więc temperatura jego będzie niska, ciepło wydzielające się w uzwojeniach twornika będzie szybciej wędrowało z nagrzaných uzwojeń do chłodnych działek komutatora, skąd będzie zabierane przez powietrze chłodzące.

3. Straty przewietrzania, stanowiące przy prądach mocy ciągłej około połowę strat mechanicznych, względnie 5 ÷ 10% całkowitych strat w silniku, rosną teoretycznie z sześciannem obrotów silnika, praktycznie natomiast mniej więcej z kwadratem obrotów. Straty tarcia o komutator oraz straty w łożyskach można przyjąć jako proporcjonalne do szybkości obwodowej komutatora względnie czopów, a więc i do obrotów silnika. Całkowite więc straty mechaniczne są proporcjonalne do pewnej potęgi obrotów, której wykładnik można przyjąć za równy około 1,5 dla silników samoprzewietrzanych i równy 1 dla silników przewietrzanych sztucznie

$$\Delta P_m \approx cn^K, \quad (2.8)$$

gdzie $K=1$ do $1,5^3$. Różnica w wysokości wykładnika potęgi tłumaczy się tym, że straty przewietrzania silników przewietrzanych sztucznie pokrywane są nie przez silnik trakcyjny, lecz przez silnik wentylatora. W związku z tym także udział strat mechanicznych w stratach całkowitych silnika trakcyjnego odpowiednio maleje przy zastosowaniu sztucznego chłodzenia. Z ostatniego wzoru wynika, że ze wzrostem prądu silnika

³ Patrz także [1] str. 412.

szeregowego jego straty mechaniczne maleją początkowo szybko, następnie coraz wolniej, ustalając się niemal przy prądach wyższych od prądu mocy godzinnej.

4. Następną z kolei grupę tak zwanych strat przejścia ze szczotek na komutator oblicza się w założeniu stałego spadku napięcia na przejściu, który przyjmuje się rzędu 3 V. Z tego wynika, że straty przejścia są proporcjonalne do prądu silnika

$$\Delta P_P = \Delta UI \approx 3I. \quad (2.9)$$

5. Na straty dodatkowe w silniku składa się szereg różnorodnych strat występujących w różnych częściach silnika. Należą do nich:

- straty komutacyjne,
- straty od pola żłobkowego,
- straty w bandażach,
- straty w nabiegunnikach.

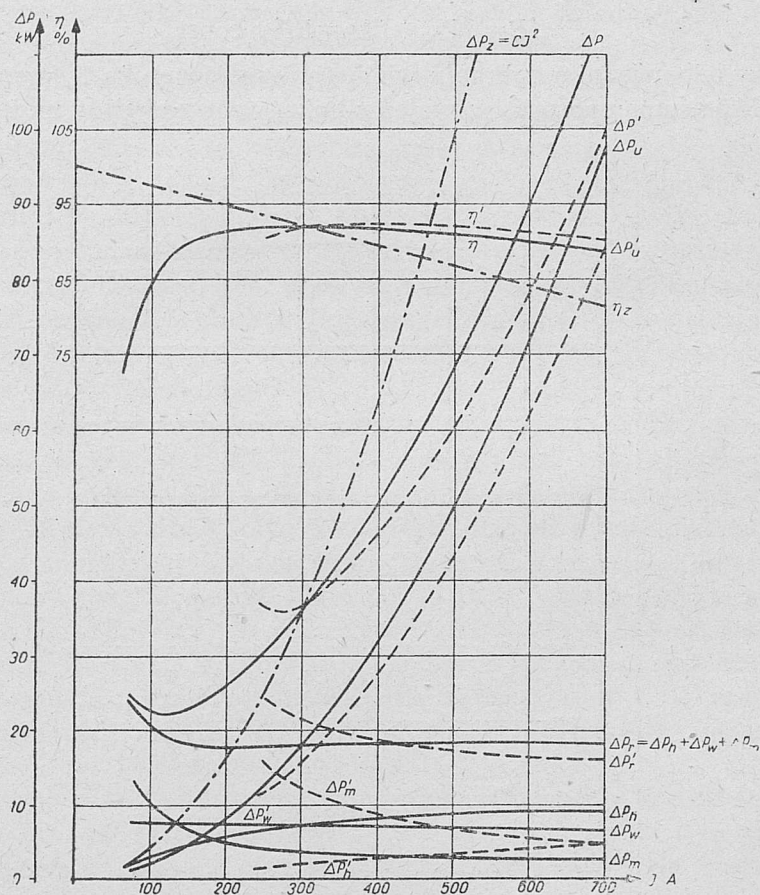
Jeśli przy konstruowaniu silnika trakcyjnego nie zostały przewidziane odpowiednie środki w celu zmniejszenia strat dodatkowych silnika, w szczególności jego strat komutacyjnych, sumaryczne straty dodatkowe silnika mogą osiągnąć dość wysoką wartość rzędu 30% strat w żelazie przy biegu jałowym silnika, tj. około 10% całkowitych strat w silniku, przy czym zakłada się, że rosną one ze wzrostem obciążenia nieco szybciej niż proporcjonalnie. Ze względu na złożony charakter wszystkich rodzajów strat dodatkowych niemożliwe jest ujęcie ich wielkości na podstawie wzorów analitycznych i dlatego oblicza się je zwykle za pomocą dość złożonych wzorów empirycznych względnie mierzy na stanowiskach próbnych jako różnicę między pomierzonymi stratami całkowitymi a sumą obliczonych lub także pomierzonych pozostałych czterech grup strat silnika. Z charakteru poszczególnych strat dodatkowych wynika, że straty komutacyjne rosną ze wzrostem częstotliwości (a więc i obrotów silnika) wolniej niż proporcjonalnie; straty od pola żłobkowego — z iloczynem kwadratu częstotliwości (obrotów) przez amperozwoje zębów, względnie (wg innych wzorów) z potęgą częstotliwości (obrotów) w stopniu 3/2; straty w bandażach — proporcjonalnie do iloczynu $B^{1.5} \cdot n^{1.8}$; wreszcie straty w nabiegunnikach — proporcjonalnie do iloczynu $B^2 \cdot n^{1.5}$, gdzie B jest indukcją, zaś n — obrotami silnika⁴. Ze względu na tak bardzo złożony charakter strat dodatkowych zależność ich od obciążenia silnika rozpatruje się czasami łącznie ze zmianą ogólnych strat w żelazie na podstawie ogólnych wzorów empirycznych; można wtedy przyjąć w przybliżeniu, że suma strat w żelazie i strat dodatkowych wyrazi się wzorem:

$$\Delta P_h + \Delta P_w + \Delta P_d = 0,08(15 + a^2) \Delta P_{Fe0}, \quad (2.10)$$

⁴ Patrz [7] str. 314—315.

gdzie ΔP_{Fe0} — straty w żelazie przy biegu jałowym, zaś α — stosunek prądu silnika do prądu mocy ciągłej⁵.

Charakter przebiegu poszczególnych rodzajów strat dużych silników trakcyjnych sztucznie przewietrzanych przedstawiono na rys. 2 i 3. W pierwszym z nich (rys. 2) nie uwzględniono stosunkowo drobnych strat przejścia oraz specjalnego charakteru strat dodatkowych, przy czym cał-



Rys. 2.* Krzywe strat i sprawności silnika trakcyjnego w funkcji prądu, a. przy pełnym wzbudzeniu, b. przy wzbudzeniu 35%

kowite straty silnika zostały rozbite na straty w uzwojeniach, straty na prądy wirowe, straty na histerezę i straty mechaniczne. W drugim (rys. 3) uwzględniono osobny charakter tak strat dodatkowych, jak i strat przejścia. Na obu wykresach uwidoczniło także przebieg sumy wszystkich strat innych (ΔP_r) niż straty w uzwojeniach (ΔP_{cu}); z ostatnich krzywych

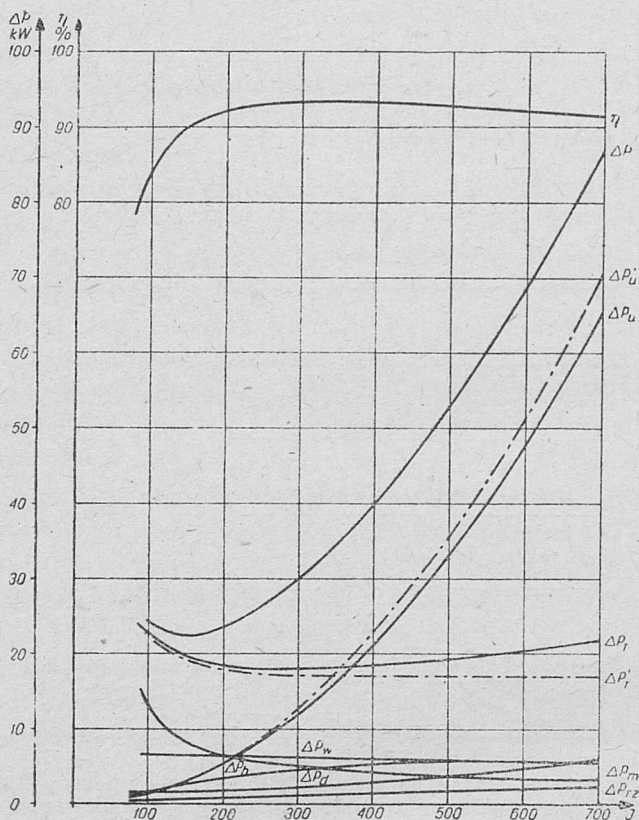
⁵ Patrz [7] str. 313, rys. 340.

* Na rys. 2 i 3 oznaczenia ΔP_u i $\Delta P'_u$ należy czytać jako ΔP_{cu} i $\Delta P'_{cu}$.

wynika, że jeśli pominąć stosunkowo drobny udział strat przejścia i strat dodatkowych, to straty całkowite silnika na całym prawie zakresie prądu silnika dają się przedstawić jako suma dwu składowych: zmiennej (proporcjonalnej do kwadratu prądu, obejmującej straty w uzwojeniach) i stałej (równej sumie pozostałych strat silnika). Tak więc straty całkowite szeregowego silnika trakcyjnego można wyrazić wzorem przybliżonym

$$\Delta P = \Delta P_{cu} + \Delta P_r = RI^2 + \text{const.} \quad (2.11)$$

Przy odpowiednim dobraniu wielkości współczynnika R , wyrażającego w zasadzie sumę oporności uzwojeń silnika, wzór powyższy może być sto-



Rys. 3. Krzywe strat silnika trakcyjnego w funkcji prądu

sowany nawet w takich przypadkach, w których z powodu rosnących z obciążeniem silnika strat przejścia i strat dodatkowych suma tak zwanych strat innych (niż w uzwojeniach) nie przedstawia wielkości stałej, jak to na przykład ma miejsce w przypadku przedstawionym na rys. 3. Jeśli mianowicie przy stosowaniu powyższego wzoru zwiększymy sumę

oporności uzwojeń o pewien procent, wzrosną wtedy odpowiednio straty proporcjonalne do kwadratu prądu, zmaleje zaś suma strat pozostałych. W podanym przykładzie zwiększono współczynnik R o 8% uzyskując wzrost strat ΔP_{cu} do wielkości $\Delta P'_{cu}$, przez co jednocześnie zmalały straty inne ΔP_r do wartości $\Delta P'_r$, praktycznie stałej (patrz rys. 3). Sens fizyczny takiego ujęcia oznacza, że do strat na ciepło Joule'a w uzwojeniach silnika dodano straty przejścia oraz część strat dodatkowych, obejmującą w przybliżeniu straty komutacyjne, które występują także w uzwojeniach. W ten sposób ujęte straty $\Delta P'_{cu}$ oznaczają wszystkie straty, jakie występują w obwodzie prądowym silnika szeregowego, zaś straty $\Delta P'_r$ — wszystkie straty inne, a więc wszystkie straty w żelazie i straty mechaniczne. W tym sensie występujący we wzorze 2.11 współczynnik R jest pewną opornością umyśloną, która oznacza oporność całkowitą obwodu silnika, zwiększoną na skutek występujących w uzwojeniach twornika miejscowych prądów wirowych, dających dodatkowe straty komutacyjne. Ta umyślona oporność R obwodu prądowego silnika może być przyjmowana jako o 5 do 10% większa od oporności mierzonej przy prądzie stałym w zależności od konstrukcji silnika.

Wyprowadzony wyżej prosty wzór empiryczny, charakteryzujący przebieg strat szeregowego silnika trakcyjnego, może być wykorzystany przy badaniu nagrzewania się silnika, mimo iż jest niezgodny z rzeczywistym przebiegiem strat silnika w zakresie małych prądów, kiedy tak zwane straty inne są w rzeczywistości większe niż straty, jakie wynikają ze wzoru (patrz rys. 2 i rys. 3). Wzrost tych strat, występujący ze spadkiem prądu, spowodowany jest znacznym wzrostem strat mechanicznych, związanych ze wzrostem obrotów silnika. Straty te jednak, jak widzieliśmy wyżej, mają tylko minimalny wpływ na nagrzewanie się uzwojeń twornika lub magnesnicy, wobec czego ich wzrost może być w tym przypadku pominięty. Ewentualny choć pomijalnie mały wpływ wzrostu strat mechanicznych silnika przy wzroście jego obrotów będzie skompensowany z nadwyżką przez bardziej wyczuwalny wpływ występującego jednocześnie obniżenia się strat w żelazie, mianowicie strat na histerezę, które, jak to było wyżej wyjaśnione, są w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalnie do obrotów silnika.

Na rys. 2 uwidoczniono dodatkowo wykres strat całkowitych silnika ΔP_z które by powstały, gdyby zmieniały się jedynie w zależności od kwadratu prądu silnika, jak się to często przyjmuje przy założeniu tak zwanego prądu zastępczego. Jak wynika z wykresu, przy takim założeniu straty te są znacznie wyższe od rzeczywistych przy prądach wyższych od prądu mocy ciągłej (300 A) i znacznie niższe — przy prądach mniejszych, a więc przy szybkościach silnika wyższych od szybkości mocy ciągłej.

Na podstawie obliczonych i wykreślonych przebiegów strat całkowitych w silniku obliczono dla obu przypadków krzywą sprawności silnika (η). Kształt tych krzywych pokrywa się z charakterystycznym kształtem krzywej sprawności każdej maszyny elektrycznej.

Jak to daje się zauważyć na obu wykresach, maksimum sprawności silnika występuje przy takim jego prądzie, przy którym proporcjonalna do kwadratu prądu składowa zmienna całkowitych strat silnika $\Delta P'_{cu}$ równa się ich składowej stałej $\Delta P'_r$. Zostanie to później udowodnione analitycznie.

Linie przerywane na rys. 2 przedstawiają przebieg wszystkich krzywych strat i krzywej sprawności dla pola głównego silników, osłabionego o 65%. Z przebiegów tych wynika, że przy tych samych prądach silnika straty mechaniczne silnika rosną (w związku ze wzrostem obrotów silnika), straty na prądy wirowe pozostają bez zmiany, natomiast wszystkie pozostałe straty — maleją. W wyniku krzywa sprawności silnika przesuwana się w kierunku wyższych prądów, tak że przy prądach wyższych sprawność silnika wzrasta, zaś na małym zakresie prądów mniejszych od prądu mocy ciągłej silnika (przy najwyższych jego obrotach) sprawność silnika zbocznikowanego maleje. Maksymalna wartość sprawności, jak i cała krzywa sprawności, podnosi się przy osłabieniu pola silników o ułamek procentu na skutek spadku strat całkowitych silnika.

Zbadajmy obecnie analitycznie przebieg sprawności silnika w funkcji jego obciążenia przy założeniu, że straty silnika wyrażają się wzorem 2.11. Sprawność silnika prądu stałego wyrazi się wtedy następująco:

$$\eta = \frac{P - \Delta P}{P} = 1 - \frac{\Delta P}{P} = 1 - \frac{\Delta P'_{cu} + \Delta P'_r}{P} = 1 - \frac{RI^2 + \Delta P'_r}{UI} \quad (2.12)$$

lub

$$\eta = 1 - \left(\frac{R}{U} \cdot I + \frac{\Delta P'_r}{R \cdot I} \right) = 1 - \left(c_1 I + \frac{c_2}{I} \right). \quad (2.13)$$

Wynik ten wyjaśnia znany, charakterystyczny kształt krzywej sprawności maszyn elektrycznych i oznacza, że krzywą sprawności możemy otrzymać odejmując od jedności, tj. od 100%, sumę rzędnych pewnej funkcji prostoliniowej i pewnej funkcji hiperbolicznej. Jeśli więc (patrz rys. 4) w układzie $(I, 1 - \eta)$ wykreślimy prostą o równaniu

$$y_1 = \frac{R}{U} \cdot I$$

oraz hiperbolę równoboczną o równaniu

$$y_2 = \frac{\frac{\Delta P'_r}{U}}{I}$$

a następnie wykreślimy w tym samym układzie krzywą

$$y = y_1 + y_2 = \frac{R}{U} \cdot I + \frac{\Delta P_r}{I},$$

to krzywa ta w układzie (I, η) będzie krzywą sprawności silnika

$$\eta = f(I).$$

Zbadajmy obecnie, kiedy sprawność silnika osiąga swoje maksimum. W tym celu przyrównamy do zera pochodną sprawności ze wzoru 2.12 względem prądu:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dI} &= - \frac{UI \cdot 2RI - (RI^2 + \Delta P'_r)U}{U^2 I^3} = \\ &= - \frac{2URI^2 - URI^2 - U\Delta P'_r}{U^2 I^3} = \\ &= - \frac{U(RI^2 - \Delta P'_r)}{U^2 I^3} = \frac{\Delta P'_r - RI^2}{UI^2} = 0. \end{aligned}$$

Stąd mamy:

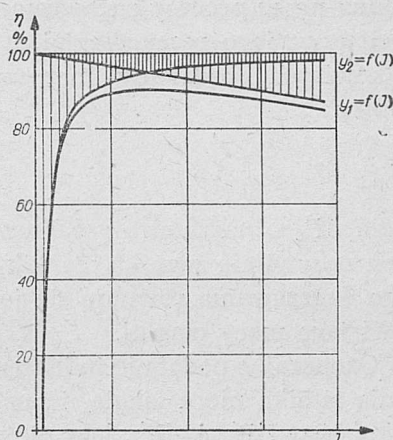
$$\Delta P'_r = RI^2. \quad (2.14)$$

Otrzymany wynik oznacza, że maksimum sprawności silnika występuje przy takim prądzie $I = I_n$, przy którym składowa zmienna strat silnika równa się jego składowej stałej⁶. Wynik ten można również przedstawić odwrotnie: składowa stała strat silnika równa się składowej zmiennej przy takim prądzie, przy którym sprawność silnika osiąga swoje maksimum. Ten prąd najwyższej sprawności silnika będziemy w dalszym ciągu oznaczali I

3. STOPIEŃ NAGRZEWANIA SILNIKA TRAKCYJNEGO

Wprowadzimy obecnie dwa nowe pojęcia: mianowicie stosunek prądu silnika do prądu jego mocy ciągłej będziemy nazywali stopniem obciążenia α silnika

$$\alpha = \frac{I}{I_c}, \quad (3.1)$$



Rys. 4. Krzywa sprawności silnika, otrzymana z założenia, że straty całkowite silnika składają się ze strat stałych i strat proporcjonalnych do kwadratu prądu

⁶ Patrz także [2] str. 620 oraz [3] str. 168.

gdzie I_c jest prądem mocy ciągłej, oraz stosunek ciepła wydzielanego do silnika przez procesy zachodzące w czasie jego pracy do ciepła wydzielanego przy jego mocy ciągłej, a więc stosunek odpowiednich jego strat całkowitych będziemy nazywali stopniem nagrzewania Ψ' silnika

$$\Psi' = \frac{\Delta P}{\Delta P_c}, \quad (3.2)$$

gdzie ΔP_c oznacza straty całkowite silnika przy mocy ciągłej. Z określonych tych oczywiście wynika, że tak stopień obciążenia silnika, jak i stopień jego nagrzewania równają się jedności przy prądzie silnika równym prądowi jego mocy ciągłej.

Oznaczając podobnie indeksem c inne wielkości, dotyczące stanu obciążenia silnika mocą ciągłą, i pomijając wprowadzony uprzednio znacznik prim' przy $\Delta P'_{cu}$ i $\Delta P'_r$, lecz nie przy Ψ' , będziemy mieli

$$\Psi' = \frac{\Delta P}{\Delta P_c} = \frac{\Delta P_{cuc} + \Delta P_r}{\sum \Delta P_c},$$

ale ponieważ

$$\Delta P_c = \Delta P_{cuc} + \Delta P_r,$$

więc podstawiając

$$\Delta P_r = \Delta P_c - \Delta P_{cuc}$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} \Psi' &= \frac{\Delta P_{cu} + \Delta P_c - \Delta P_{cuc}}{\Delta P_c} = 1 - \frac{\Delta P_{cuc} - \Delta P_{cu}}{\Delta P_c} = 1 - \frac{RI_c^2 - RI^2}{UI_c(1 - \eta_c)} = \\ &= 1 - \frac{RI_c}{U(1 - \eta_c)} + \frac{RI^2}{UI_c(1 - \eta_c)} = \\ &= 1 - \frac{RI_c}{U(1 - \eta_c)} + \frac{RI_c}{U(1 - \eta_c)} \cdot \frac{I^2}{I_c^2} = (1 - u_c) + u_c \alpha^2 \end{aligned}$$

lub

$$\Psi' = 1 + u_c(\alpha^2 - 1), \quad (3.3)$$

gdzie

$$u_c = \frac{RI_c}{U(1 - \eta_c)} = \frac{RI_c^2}{UI_c(1 - \eta_c)} = \frac{\Delta P_{cuc}}{\Delta P_c} = \left(\frac{\Delta P_{cu}}{\Delta P} \right)_c \quad (3.4)$$

i oznacza udział strat zmiennych w stratach całkowitych silnika przy mocy ciągłej, natomiast

$$\alpha = \frac{I}{I_c}$$

i oznacza, zgodnie z wprowadzonym wyżej określeniem, stopień obciążenia silnika.

Stopień nagrzewania silnika możemy wyrazić także w inny sposób: ponieważ straty stałe silnika równają się jego stratom zmiennym przy takim prądzie I_η , przy którym sprawność silnika osiąga swoje maksimum, to znaczy

$$\Delta P_r = RI_\eta^2, \quad (3.5)$$

więc

$$\Psi' = \frac{\Delta P}{\Delta P_c} = \frac{\Delta P_r + \Delta P_{cu}}{\Delta P_r + \Delta P_{cuc}} = \frac{RI_\eta^2 + RI_c^2}{RI_\eta^2 + RI_c^2} = \frac{I_\eta^2 + I_c^2}{I_\eta^2 + I_c^2}. \quad (3.6)$$

Dzieląc licznik i mianownik ułamka przez I_c^2 otrzymamy

$$\Psi' = \frac{\left(\frac{I_\eta}{I_c}\right)^2 + \left(\frac{I}{I_c}\right)^2}{\left(\frac{I_\eta}{I_c}\right)^2 + 1},$$

zaś stosując wprowadzone wyżej oznaczenia będziemy mieli ostatecznie

$$\Psi' = \frac{\alpha_\eta^2 + \alpha^2}{\alpha_\eta^2 + 1}. \quad (3.7)$$

Jeśli wzór ten przekształcimy i napiszemy go w postaci

$$\Psi' = 1 + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha_\eta^2 + 1} \quad (3.8)$$

oraz porównamy ze wzorem 3.3 otrzymamy

$$u_c = \frac{1}{\alpha_\eta^2 + 1}. \quad (3.9)$$

Z ostatniego wzoru wynika, że prąd, przy którym dany silnik wykazuje maksimum sprawności, zależy wyłącznie od udziału strat zmiennych w stratach całkowitych silnika przy jego prądzie znamionowym (ciągłym). Odpowiadające temu prądowi obciążenie silnika α_η można wyznaczyć z równania

$$\alpha_\eta = \sqrt{\frac{1}{u_c} - 1}. \quad (3.10)$$

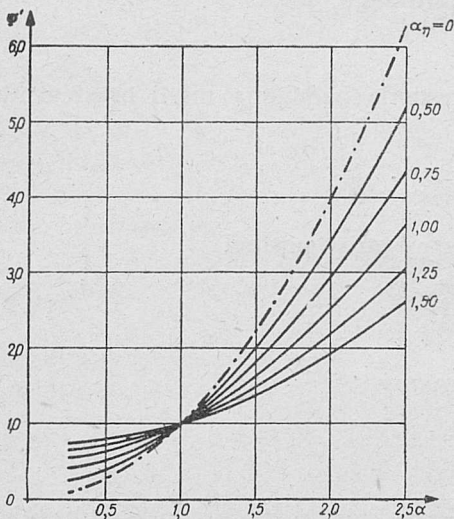
Zauważmy, że udział strat zmiennych przy prądzie mocy ciągłej silnika daje się łatwo obliczyć na podstawie metryki silnika ze wzoru (3.4), w którym zwiększamy oporność obwodu silnika o 5 do 10% w zależności od jego mocy i konstrukcji (tym niższy procent, im silnik większy i lepiej wykonany). Przeważnie jednak dana jest charakterystyczna sprawność silnika, z której prąd I_η , a więc i α_η , można odczytać. Przekształcając dalej wzór (3.10) otrzymujemy

$$\alpha_\eta = \sqrt{\left(\frac{\Delta P_r}{\Delta P_{cu}}\right)_c}. \quad (3.11)$$

Ze wzoru tego wynika, że kwadrat parametru a_η , który możemy odczytać z krzywej sprawności silnika, oznacza stosunek strat innych do strat w uzwojeniach silnika przy jego mocy ciągłej.

Wzór (3.7) przy jednym tylko parametrze stałym a_η , pozwala obliczyć stopień nagrzewania silnika dla każdego jego prądu. Oczywiście, wyznaczona na podstawie tego równania krzywa $\Psi' = f(a)$ daje w pewnej skali krzywą strat całkowitych silnika (patrz rys. 5), przy czym punkt (1,1) tego układu odpowiada w tej skali — punktowi krzywej układu $\Delta P = f(I)$, wyrażającego straty całkowite silnika przy prądzie mocy ciągłej.

Zauważmy, że jak wynika ze wzoru 3.10, maksimum sprawności silnika przypada na tym większy prąd $I_\eta = I_c \cdot a_\eta$, im mniejszy jest udział strat zmiennych w stratach całkowitych przy mocy ciągłej silnika.



Rys. 5. Krzywe stopnia nagrzewania Ψ' w funkcji stopnia jego obciążenia przy różnych wartościach współczynnika

W tabelicy 1 podano dla różnych wartości udziału u_c strat zmiennych w stratach całkowitych silnika — odpowiadające im wartości współczynnika a_η , a następnie w zależności od tego — stopień nagrzewania silnika przy różnym stopniu obciążenia silnika a . Wyniki te zestawiono następnie na rys. 5. w postaci krzywych $\Psi' = f(a)$ dla różnych wartości a_η .

Jak wynika z zestawienia i wykresu, decydujący wpływ na stopień nagrzewania Ψ silnika ma nie tylko stopień obciążenia a , lecz także wielkość współczynnika a_η . Zauważmy, że na przykład przy tym samym obciążeniu $a = 0,25$ rozpiętość stopnia nagrzewania silnika waha się od 0,25 przy

$a_\eta = 0,5$ do 0,712 przy $a_\eta = 1,5$, a więc zwiększa swą wartość prawie trzykrotnie, zaś przy obciążeniu $a = 2,5$ waha się od 5,20 przy $a_\eta = 0,5$ do 2,616 przy $a_\eta = 1,5$, a więc maleje niemal do połowy. Powodem tego stanu rzeczy jest udział strat zmiennych, rosnących z kwadratem obciążenia, do strat całkowitych silnika; im udział ten jest większy, tym bardziej stroma jest krzywa nagrzewania silnika $\Psi = f(a)$, tym silniej nagrzewa się on przy dużych obciążeniach i tym słabiej — przy małych. Przeciwnie, im udział strat zmiennych jest mniejszy, tym krzywa nagrzewania silnika jest bardziej płaska i tym mniejsze są różnice w nagrzewaniu się silnika przy różnych jego obciążeniach.

Z charakteru zależności stopnia nagrzewania Ψ' silnika od stopnia jego obciążenia a i od współczynnika a_η wyciągnąć należy ważne wnioski dotyczące pożądanej dla danych warunków trakcyjnych konstrukcji silnika, od której zależy wielkość współczynnika a_η : jeśli silnik ma pracować na krótkich odległościach międzyprzystankowych, jak to ma miejsce w ruchu miejskim i podmiejskim, względnie jeśli ma pracować na trasach o profilu górskim, wtedy pożądane jest podwyższenie współczynnika a_η przez zmniejszenie udziału strat zmiennych do całkowitych; oczywiście wymaga to zwiększenia przekrojów uzwojeń, a co za tym idzie — zwiększenia ciężaru miedzi silnika. Jeśli natomiast silnik ma pracować w lokomotywach przeznaczonych do pociągów bezpośrednich na liniach

Tablica 1

$u_c =$	0,308	0,39	0,50	0,64	0,8	1
$a_\eta =$ a	1,5	1,25	1,00	0,75	0,50	0
0,25	0,712	0,635	0,531	0,40	0,25	0,063
0,50	0,769	0,708	0,625	0,52	0,40	0,250
0,75	0,865	0,829	0,781	0,72	0,65	0,563
1,—	1,—	1,—	1,—	1,—	1,—	1,—
1,25	1,173	1,219	1,281	1,36	1,45	1,563
1,50	1,384	1,488	1,625	1,80	2,00	2,250
1,75	1,635	1,805	2,031	2,32	2,65	3,063
2,—	1,924	2,170	2,500	2,92	3,40	4,—
2,25	2,250	2,583	3,031	3,60	4,25	5,063
2,50	2,616	3,046	3,625	4,36	5,20	6,250
2,75	3,019	3,557	4,281	5,20	6,25	7,563
3,—	3,464	4,12	5,—	6,12	7,40	9,—

magistralnych o dużych odległościach międzyprzystankowych i łagodnym profilu, pożądane jest wtedy zmniejszenie jego strat przy pracy silnika przy dużych obrotach, a więc przy małych prądach, co wymaga odpowiedniego obniżenia współczynnika a_η przez odpowiednie zmniejszenie strat w żelazie i mechanicznych (wentylacyjnych); pociąga to za sobą z jednej strony konieczność zwiększenia przekrojów żelaza i zmniejszenia obrotów silnika, z drugiej zaś strony — zastosowania sztucznego chłodzenia silników. Przez zastosowanie sztucznego chłodzenia silników, czyli przez polepszenie warunków chłodzenia uzyskuje się poza tym i przede wszystkim powiększenie mocy ciągłej silnika, przez zastosowanie zaś silnika cięższego i wolniejszego — lepszą charakterystykę trakcyjną lokomotywy.

Wyprowadzony wyżej wzór (3.7) określa charakter krzywej stopnia nagrzewania silnika w funkcji stopnia jego obciążenia przy założeniu, że straty całkowite silnika dają się rozłożyć na dwie składowe: stałą

i zmienną proporcjonalną do kwadratu prądu. Krzywą nagrzewania silnika możemy otrzymać także wprost z krzywej sprawności silnika i niezależnie od charakteru zmian strat silnika

$$\psi' = \frac{\Delta P}{\Delta P_c} = \frac{UI(1-\eta)}{UI_c(1-\eta_c)} = \frac{1-\eta}{1-\eta_c} \cdot a. \quad (3.12)$$

Wszystkie dotychczasowe rozważania dotyczyły silnika trakcyjnego jako ciała jednorodnego. Tymczasem ciała jednorodnego nie stanowi nie tylko silnik jako całość, ale nawet żadna jego część składowa, jak wirnik, magneśnica, komutator itd. Poza tym nagrzewanie się każdej z tych części wynika z innych procesów, inaczej przebiegających i, ogólnie biorąc, w różnym czasie zachodzących. Wreszcie przyrost temperatury silnika zależy nie tylko od stopnia nagrzewania silnika, lecz także od szeregu innych parametrów, w szczególności od stopnia jego chłodzenia i od temperatury silnika i otoczenia.

Zanim zostanie uwzględniony i przeanalizowany wpływ różnych czynników na nagrzewanie się silnika bądź poszczególnych jego części, rozpatrzmy, o ile i w jaki sposób różnić się będzie stopień nagrzewania dwu głównych części silnika, to jest twornika i magneśnicy, od zbadanego dotychczas stopnia nagrzewania silnika jako całości.

Jak to wynikało z przeprowadzonej wyżej analizy strat silnika trakcyjnego, straty w uzwojeniach rozkładają się na straty w uzwojeniach twornika, biegunów głównych i pomocniczych i ewentualnie w uzwojeniach kompensacyjnych, przy czym rozdział tych strat jest w przybliżeniu proporcjonalny do oporności poszczególnych uzwojeń. Należy przy tym wyjaśnić, że na straty w uzwojeniach twornika przypadnie udział nieco wyższy, a to z powodu strat dodatkowych, które występują tylko w tych uzwojeniach. Jeśli na przykład oporność uzwojeń twornika wynosi 56% oporności całego obwodu prądowego i jeżeli ze względu na straty dodatkowe w uzwojeniach dodajemy 8% do mierzonej przy prądzie stałym oporności całego obwodu, to straty w uzwojeniach podzielą się w ten sposób, że na twornik przypadnie około 60% tych strat. Na pozostałe uzwojenia przypadnie odpowiednia część tych strat, przy czym oczywiście wszystkie straty w uzwojeniach będą się zmieniały proporcjonalnie do kwadratu obciążenia.

Straty w żelazie skupiają się niemal całkowicie w tworniku. (Pomijamy tu zupełnie drobne straty w biegunach i jarzmie, występujące z powodną zwykle zmianą wielkości strumienia magnetycznego). Jedynie w nabiegunnikach biegunów głównych występują drobne straty związane z pulsacją pochodzącą do zębów twornika.

Straty mechaniczne występują na komutatorze i w łożyskach, jeśli chodzi o straty tarcia, i na wirniku, jeśli chodzi o straty wentylacyjne.

Tak więc w wirniku skupia się większość strat silnika, a mianowicie: wszystkie straty w żelazie, ponad połowa strat w uzwojeniach, a w silnikach samoprzewietrzanych także straty wentylacyjne. Powstaje pytanie, jaki charakter ma przebieg stopnia nagrzewania twornika w funkcji obciążenia. Charakter ten możemy określić w przybliżeniu, jeśli od strat całkowitych silnika odejmiemy około 40% strat w uzwojeniach. Otrzymamy wtedy

$$\Psi'_{tw} \approx \frac{\Delta P - 0,4\Delta P_{ac}}{\Delta P_c - 0,4\Delta P_{cuc}}$$

Postępując podobnie jak przy wyprowadzeniu wzoru (3,7) otrzymamy

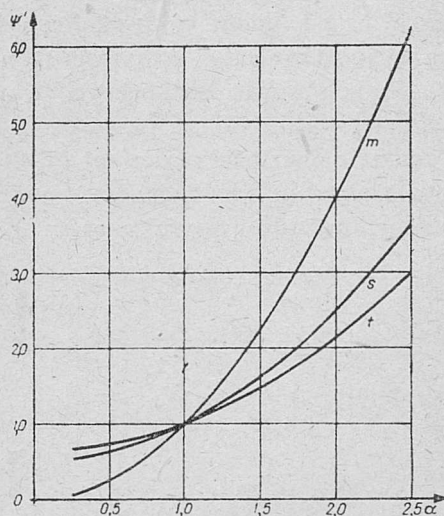
$$\Psi'_{tw} \approx \frac{\alpha_\eta^2 + 0,6\alpha^2}{\alpha_\eta^2 + 0,6}$$

Wynik ten oznacza, że stopień nagrzewania twornika jest taki, jaki byłby dla całego silnika, gdyby współczynnik α_η^2 wzrósł do około $\frac{\alpha_\eta^2}{0,6}$, czyli taki, jaki otrzymamy, jeśli udział strat zmiennych silnika przy mocy ciągłej zmaleje od wartości $1 : (\alpha_\eta^2 + 1)$ do wartości $0,6 : (\alpha_\eta^2 + 0,6)$. Znaczy to, że stopień nagrzewania twornika jako ciała jednorodnego zmienia się ze zmianą obciążenia silnika w sposób łagodniejszy aniżeli dla całego silnika.

Natomiast stopień nagrzewania uzwojeń biegunów głównych, podobnie jak i stopień nagrzewania samego tylko uzwojenia twornika oraz uzwojeń biegunów zwrotnych i uzwojeń kompensacyjnych, w których nie ma udziału strat stałych, zmienia się z kwadratem obciążenia, to jest tak, jak się to przyjmuje przy założeniu nagrzewania wg prądu zastępczego.

Na rys. 6 przedstawiono charakter zmiany nagrzewania silnika jako całość przy $\alpha_\eta = 1$ (krzywa *s*) oraz nagrzewania twornika (*t*) i magneśnicy (*m*) tego silnika traktowanych jako ciała jednorodne.

Podany na rys. 6 charakter zmiany stopnia nagrzewania silnika nie przesądza jeszcze kwestii przyrostu temperatury silnika lub jego części.



Rys. 6. Stopień nagrzewania Ψ' uzwojeń magneśnicy (*m*), twornika (*t*) i średni całego silnika (*s*) w funkcji stopnia jego obciążenia α

Twornik, dla którego krzywa przebiega na wykresie najłagodniej, znajduje się w najtrudniejszych warunkach pracy, a to ze względu na małą stosunkowo jego pojemność cieplną przy dużej ilości wydzielanych strat (około 80% strat całego silnika), jak i ze względu na to, że ciepło wydzielane w tworniku może on oddawać niemal wyłącznie przez konwekcję i promieniowanie. Tymczasem uzwojenie magnesów głównych silnika, dla którego krzywa Ψ' przebiega najbardziej stromo, otoczone jest dużą masą żelaza jarzma i biegunów, w których ciepło się nie wydzieli i które przejmują ciepło wydzielane z uzwojenia magnesów także drogą przewodzenia.

4. PRĄD ZASTĘPCZY A ZNAMIONOWY PRĄD CIĄGŁY

Z dotychczasowej analizy wynika, że proces nagrzewania tak całego silnika, jak i poszczególnych jego części (z wyjątkiem samych uzwojeń traktowanych oddzielnie, niezależnie od innych części, do których one przylegają) przebiega łagodniej, niż to wynika z założenia prądu zastępczego. Powodem tego jest, że nie wszystkie straty silnika są proporcjonalne do kwadratu prądu.

Jest jednak i drugi powód, w wyniku którego ilość ciepła wydzielanego przez silnik trakcyjny jest mniejsza, niżby to, pozornie zresztą tylko, wynikało z założenia, które jest podstawą pojęcia prądu zastępczego. Tym drugim powodem jest okoliczność, że szeregowy silnik trakcyjny nie pracuje przez cały czas swego biegu, lecz tylko przez pewien jego okres.

Pojęcie prądu zastępczego⁷ wyprowadza się z założenia, że ilość ciepła wydzielona do silnika przez procesy zachodzące w czasie jego pracy przy prądzie o wartości zmiennej I jest taka sama, jaka wydzieliliby się przy obciążeniu silnika prądem o wartości stałej, określonej znanym i powszechnie stosowanym wzorem

$$I_z = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I^2 dt} \quad (4.1)$$

względnie

$$I_z \approx \sqrt{\frac{\sum I^2 \Delta t}{\sum \Delta t}} \quad (4.2)$$

Zbadajmy obecnie czy prąd zastępczy obliczony według tego wzoru odpowiada w rzeczywistości powyższemu założeniu, czy rzeczywiście w silniku trakcyjnym, obciążonym stale prądem zastępczym o powyższej wartości, wydzieli się tyle ciepła, ile przy jego zmiennym obciążeniu.

⁷ Patrz [5] str. 156.

Aby ilość ciepła wydzielonego w silniku trakcyjnym w czasie T przy jego zmiennym obciążeniu nie przekraczała ilości ciepła wydzielanego przy obciążeniu stałym, odpowiadającym mocy ciągłej silnika, musi być spełniony warunek

$$\int_0^T \Delta P dt < \Delta P_c \cdot T,$$

gdzie

ΔP — całkowite straty silnika w W,

ΔP_c — „ „ „ „ „ przy prądzie mocy ciągłej.

Dzieląc obie strony nierówności przez $\Delta P_c \cdot T$ i wprowadzając ΔP_c pod znak całki otrzymamy

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\Delta P}{\Delta P_c} dt \leq 1$$

lub korzystając z zależności (3.2)

$$\frac{1}{T} \int_0^{t_p} \Psi' dt < 1, \quad (4.3)$$

gdzie

T — całkowity czas biegu silnika (ewentualnie wraz z postojem),

t_p — czas biegu silnika pod prądem,

Ψ' — stopień nagrzewania silnika wg wzoru (3.2).

Ponieważ silnik trakcyjny obciążony jest z reguły nie w ciągu całego czasu T jego biegu, lecz tylko w ciągu czasu $t_p < T$, biegnąc poza tym bez obciążenia lub stojąc, jako górną granicę całki wstawiono celowo czas t_p zamiast, jak się to zwykle pisze, T .

Jeśli silnik ma być w pełni wykorzystany, we wzorze (4.3) możemy pominąć znak nierówności i napiszemy:

$$\frac{1}{T} \int_0^{t_p} \Psi' dt = 1.$$

Podstawiając do tego równania wyprowadzoną wyżej wartość Ψ' ze wzoru (3.7) otrzymamy

$$\frac{1}{T} \int_0^{t_p} \Psi' dt = \frac{1}{T} \int_0^{t_p} \frac{\alpha_\eta^2 + \alpha^2}{\alpha_\eta^2 + 1} dt = \frac{1}{\alpha_\eta^2 + 1} \left[\frac{t_p}{T} \alpha_\eta^2 + \frac{1}{T} \int_0^{t_p} \alpha^2 dt \right] = 1. \quad (4.4)$$

Zauważmy, że drugi składnik nawiasu kwadratowego daje się przekształcić w sposób następujący:

$$\frac{1}{T} \int_0^{t_p} a^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^{t_p} \left(\frac{I}{I_c} \right)^2 dt = \frac{1}{I_c^2} \cdot \frac{1}{T} \int_0^{t_p} I^2 dt = \frac{I_z^2}{I_c^2},$$

a więc, że wyraża stosunek kwadratu prądu zastępczego do kwadratu prądu mocy ciągłej, czyli

$$\frac{1}{T} \int_0^{t_p} a^2 dt = \left(\frac{I_z}{I_c} \right)^2 = \beta^2. \quad (4.5)$$

Podstawiając tę wartość do równania (4.4) będziemy mieli:

$$\frac{a_\eta^2 \tau + \beta^2}{a_\eta^2 + 1} = 1, \quad (4.6)$$

gdzie $\tau = \frac{t_p}{T}$ i oznacza względny czas biegu silnika pod prądem. Z równań (4.5) i (4.6) otrzymamy

$$\beta^2 = \frac{I_z^2}{I_c^2} = a_\eta^2 + 1 - a_\eta^2 \tau = 1 + a_\eta^2 (1 - \tau) = 1 + a_\eta^2 \tau_0,$$

gdzie $\tau_0 = \frac{T - t_p}{T}$ i oznacza czas względny wyłączenia silnika, tj. czas względny jego postoju i biegu bez prądu. Z ostatniego równania otrzymujemy

$$I_c = \frac{I_z}{\beta} = \frac{I_z}{\sqrt{1 + a_\eta^2 \tau_0}}. \quad (4.7)$$

Jak z tego wzoru wynika, prąd mocy ciągłej silnika trakcyjnego, traktowanego jako ciało jednorodne i w pełni wyzyskanego, mógłby być mniejszy od prądu zastępczego w stosunku

$$\beta = \sqrt{1 + a_\eta^2 \tau_0}. \quad (4.8)$$

Tylko w przypadku $\beta = 1$ otrzymalibyśmy prąd mocy ciągłej równy zastępczemu; byłoby to możliwe z kolei w dwóch przypadkach.

Pierwszy z nich zachodziłby przy $a_\eta = 0$, tj. gdyby, jak to wynika ze wzoru (3.7), nie występowały w silniku straty stałe, natomiast wszystkie straty zmienne były proporcjonalne do kwadratu prądu; takie właśnie założenie przyjmuje się przy badaniu nagrzewania się uzwojeń silnika; znaczy to, że obliczanie mocy znamionowej silnika wg tak zwanego prądu zastępczego stanowi założenie krańcowe: w rzeczywistości w każdym

silniku występują także straty inne niż w uzwojeniach, których wielkość nie jest proporcjonalna do kwadratu prądu. Jak to wynikało ze wzoru (3.11) o stosunku strat stałych do zmiennych decyduje współczynnik α_η , którego wielkość w silnikach trakcyjnych waha się w granicach

$$0,6 < \alpha_\eta < 1,4. \quad (4.9)$$

przy czym dolną wartość graniczną powinny mieć silniki lokomotyw o rzadkich rozruchach, a więc dalekobieżnych, zaś górną — silniki elektrowozów o rozruchach częstych, a więc przede wszystkim w jednostkach podmiejskich.

Przypadek drugi, o który tu właśnie chodzi, kiedy $\beta = 1$ i $I_z = I_c$, zachodziłby przy $\tau_0 = 0$, tj. gdyby silnik pracował bez przerw, co jak wiemy, w trakcji elektrycznej nie ma nigdy miejsca. Czas względny pracy silnika trakcyjnego nawet bez uwzględnienia czasu postojów na stacjach nie wykracza zazwyczaj poza granice określone nierównością

$$0,3 < \tau < 0,8 \quad \text{a więc} \quad 0,2 < \tau_0 < 0,7. \quad (4.10)$$

Przyjmując powyższe granice dla α_η i τ dla przeciętnych warunków trakcyjnych w założeniu silnika jako ciała jednorodnego, wielkość współczynnika β otrzymujemy w granicach

$$1,1 < \beta < 1,3. \quad (4.11)$$

Ponieważ w rzeczywistości silniki trakcyjne nie nagrzewają się tak, jak same tylko ich uzwojenia, to znaczy w sposób założony dla prądu zastępczego, lecz w stopniu niższym, wykazują one zawsze (jeśli są obliczone wg prądu zastępczego) pewien zapas mocy, którego miarą jest współczynnik β . Tym zapasem mocy można tłumaczyć obserwowane niejednokrotnie zjawisko, że silniki, szczególnie jednostek podmiejskich, zdolne są do wykonania prac znacznie cięższych, niżby to wynikało z obliczeń opartych na prądzie zastępczym.

Wynikający z powyższej analizy zapas mocy silnika, jak się to dalej okaże, nie tylko nie jest zbędny, lecz niejednokrotnie konieczny, i z tego względu, jeśli przy projektowaniu mocy silnika nie jest badany przebieg jego temperatury w funkcji drogi, przynajmniej w trudniejszych warunkach pracy elektrowozu, to obliczanie względnie sprawdzanie mocy silnika na zasadzie prądu zastępczego daje niejaką gwarancję odpowiedniego jej doboru, mimo pewnych nieścisłości związanych z tym pojęciem.

Sprawdzanie, przyjmowanej zwykle w przybliżeniu, mocy silników wymaga uprzedniego, wstępnego zaprojektowania elektrowozu, a w szczególności: odpowiedniego doboru przełożenia przekładni, założenia dolnej i górnej granicy prądu rozruchowego, obliczenia oporów rozruchowych, a następnie wykonania na podstawie uzyskanych charakterystyk trakcyj-

nych szeregu przejazdów analitycznych z danym pociągiem na danej trasie. W wyniku tych przejazdów oprócz przebiegu szybkości i czasu w funkcji drogi można uzyskać między innymi zależność $\sum I^2 \Delta t$ w funkcji odległości międzypzystankowych. Ta ostatnia zależność pozwala zastąpić normalne wyrażenie całkowe prądu zastępczego — wyrażeniem przybliżonym.

Jest rzeczą oczywistą, że tak wstępne zaprojektowanie lokomotywy, jak następnie i przede wszystkim sprawdzenie jej mocy na podstawie przejazdów analitycznych, w wyniku których otrzymuje się wielkość prądu zastępczego, należy do prac bardzo żmudnych, wymagających wielkiej ilości czasu projektującego, tak że obecnie konstruuje się nawet specjalne urządzenia, analizatory trakcyjne, których zadaniem jest zastąpienie w pracy projektującego inżyniera.

W tych warunkach nasuwa się pytanie, czy da się ująć analitycznie związek między prądem zastępczym silnika trakcyjnego a jego prądem średnim. Ponieważ wielkość prądu średniego silnika daje się łatwo obliczyć na podstawie jednostkowego zużycia energii, które można określić specjalną metodą analityczną dla każdego założonych z góry warunków trakcyjnych⁸, przeto określenie z kolei na tej podstawie wielkości prądu zastępczego dałoby decydujący wskaźnik dla oznaczenia mocy znamionowej silnika i lokomotywy.

5. PRĄD ZASTĘPCZY A ŚREDNI

Jeśli w pewnym okresie czasu T silnik pracuje w ciągu czasu t_p przy zmiennym obciążeniu, pobierając prąd o wartości zmiennej I , wtedy wartość średnią I_{sr} prądu pobieranego przez ten silnik w okresie T można wyrazić w postaci

$$I_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^{t_p} I dt. \quad (5.1)$$

Natomiast dla prądu zastępczego I_z mamy

$$I_z = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{t_p} I^2 dt}.$$

Dzieląc oba równania przez I_{sr} , podnosząc drugie równanie do kwadratu i wprowadzając czas T pod znak całki, otrzymamy odpowiednio:

⁸ Patrz [4].

$$1 = \int_0^{\frac{t_p}{T}} \left(\frac{I}{I_{sr}} \right) d\left(\frac{t}{T} \right) \quad \text{oraz} \quad \left(\frac{I_z}{I_{sr}} \right)^2 = \int_0^{\frac{t_p}{T}} \left(\frac{I}{I_{sr}} \right)^2 d\left(\frac{t}{T} \right).$$

Jeśli do równań tych wprowadzimy teraz oznaczenia

$$\frac{I}{I_{sr}} = \varphi; \quad \frac{I_z}{I_{sr}} = c; \quad \frac{t}{T} = \tau; \quad \frac{t_p}{T} = \tau_p \quad (5.2)$$

i podstawimy je do poprzedniego układu równań, wtedy otrzymamy

$$\int_0^{\tau_p} \varphi d\tau = 1 \quad \text{oraz} \quad \int_0^{\tau_p} \varphi^2 d\tau = c^2. \quad (5.3)$$

Po takim przekształceniu całka oznaczona $\int_0^{\tau_p} \varphi d\tau$ ma wartość stałą równą jedności bez względu na rodzaj funkcji, jej kształt i przebieg. Natomiast wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{\tau_p} \varphi^2 d\tau$$

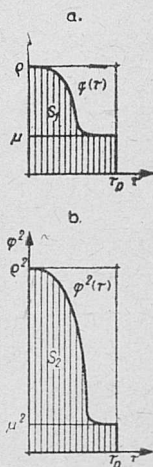
zależna jest od funkcji $\varphi(\tau)$. Powstaje pytanie, czy znając tylko granice zmienności funkcji $\varphi(\tau)$ można określić granice zmienności

$$\int_0^{\tau_p} \varphi^2 d\tau,$$

a tym samym granice zmienności współczynnika c , tj. stosunku prądu zastępczego do średniego.

Niech będzie dana jakaś funkcja $\varphi(\tau)$ (patrz rys. 7a), która w czasie od 0 do τ_p zmienia swą wartość od ϱ do μ , gdzie $\varrho > \mu$. Możemy wtedy wykreślić funkcję $\varphi^2(\tau)$ (patrz rys. 7b), która w tym samym okresie zmieni swą wartość od ϱ^2 do μ^2 .

Z warunku, że bez względu na rodzaj funkcji $\varphi(\tau)$ całka $\int_0^{\tau_p} \varphi d\tau$ ma mieć wartość stałą, wynika w interpretacji geometrycznej, iż zakreślona na rysunku powierzchnia S_1 pola ograniczonego osiami współrzędnych (prostą $\tau_p = \text{const}$ oraz krzywą $\varphi = f(\tau)$) musi pozostać niezmienną bez względu na kształt i przebieg krzywej $\varphi = f(\tau)$. Postawione wyżej zagadnienie sprowadza się do odpowiedzi na pytanie: przy jakim kształcie



Rys. 7. Graficzny obraz całki

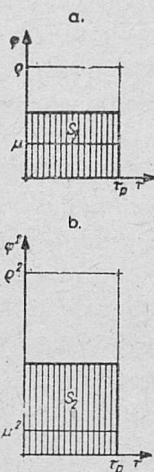
$$S_1 = \int_0^{\tau_p} \varphi d\tau \quad \text{oraz}$$

$$\text{całki } S_2 = \int_0^{\tau_p} \varphi^2 d\tau$$

przy danej zależności $\mu < \varphi(\tau) < \varrho$

krzywej $\varphi = f(\tau)$ powierzchnia S_2 pola ograniczonego krzywą $\varphi^2 = f(\tau)$ będzie największa i przy jakim — najmniejsza.

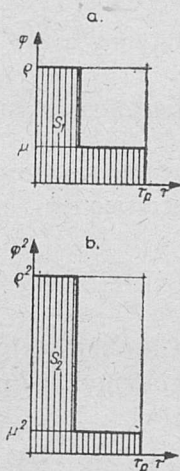
W odpowiedzi na to pytanie można postawić tezę ogólną, którą następnie udowodnimy, że jeśli dla funkcji $\varphi(\tau)$, mogącej się zmieniać w granicach $\mu < \varphi < \varrho$ $\int_0^{\tau_p} \varphi d\tau = \text{const}$, to $\int_0^{\tau_p} \varphi^2 d\tau$ osiąga swą wartość najniższą, gdy w ciągu całego okresu od 0 do τ_p funkcja $\varphi(\tau)$ ma wartość stałą, natomiast osiąga ona wartość najwyższą, gdy funkcja $\varphi(\tau)$ przybiera jedynie swoje wartości krańcowe μ i ϱ (patrz rys. 8 i 9).



Rys. 8. Kształt krzywej $\varphi = f(\tau)$ w przypadku, kiedy przy

$$S_1 = \int_0^{\tau_p} \varphi d\tau = \text{const},$$

$\int_0^{\tau_p} \varphi^2 d\tau$ ma wartość najmniejszą



Rys. 9. Kształt krzywej $\varphi = f(\tau)$ w przypadku, kiedy przy

$$S_1 = \int_0^{\tau_p} \varphi d\tau = \text{const},$$

$\int_0^{\tau_p} \varphi^2 d\tau$ ma wartość największą

Celem udowodnienia powyższej tezy zauważmy, że w przypadku pierwszym, tj. przy $\varphi = \text{const}$, nasz układ równań ogólnych (5.3) możemy zastąpić odpowiednio układem:

$$\varphi \tau_p = 1 \quad \text{oraz} \quad \varphi^2 \tau_p = c_1^2. \quad (5.4)$$

Zbadajmy teraz przypadek, gdy funkcja $\varphi(\tau)$ posiada wartość stałą φ na całym obszarze τ_p z wyjątkiem drobnego okresu $\Delta\tau_1$ w ciągu którego ma ona wartość φ_1 nieco wyższą od φ , i z wyjątkiem drobnego okresu

$\Delta\tau_2$, w ciągu którego ma ona wartość φ_2 nieco niższą od φ (patrz rys. 10). Będziemy mieli wtedy następujący układ równań:

$$\begin{cases} \varphi_1 \Delta\tau_1 + \varphi_2 \Delta\tau_2 + \varphi(\tau_p - \Delta\tau_1 - \Delta\tau_2) = 1 \\ \varphi_1^2 \Delta\tau_1 + \varphi_2^2 \Delta\tau_2 + \varphi^2(\tau_p - \Delta\tau_1 - \Delta\tau_2) = c^2 \end{cases}$$

stąd

$$\begin{cases} (\varphi_1 - \varphi) \Delta\tau_1 - (\varphi - \varphi_2) \Delta\tau_2 + \varphi\tau_p = 1, \\ ((\varphi_1^2 - \varphi^2) \Delta\tau_1 - (\varphi^2 - \varphi_2^2) \Delta\tau_2 + \varphi^2\tau_p = c^2. \end{cases} \quad (5.4a)$$

Odejmując stronami w obu układach równań (5.4) i (5.4a) równania pierwsze i równania drugie otrzymujemy

$$\begin{cases} (\varphi_1 - \varphi) \Delta\tau_1 - (\varphi - \varphi_2) \Delta\tau_2 = 0, \\ ((\varphi_1^2 - \varphi^2) \Delta\tau_1 - (\varphi^2 - \varphi_2^2) \Delta\tau_2 = c^2 - c_1^2, \end{cases}$$

skąd

$$\begin{cases} (\varphi_1 - \varphi) \Delta\tau_1 = (\varphi - \varphi_2) \Delta\tau_2, \\ ((\varphi_1^2 - \varphi^2) \Delta\tau_1 - (\varphi^2 - \varphi_2^2) \Delta\tau_2 = c^2 - c_1^2. \end{cases}$$

Podstawiając w drugim równaniu zamiast iloczynu $(\varphi - \varphi_2) \Delta\tau_2$ jego wartość z równania pierwszego otrzymujemy

$$(\varphi_1^2 - \varphi^2) \Delta\tau_1 - (\varphi + \varphi_2) (\varphi_1 - \varphi) \Delta\tau_1 = c^2 - c_1^2,$$

stąd po wyłączeniu przed nawias

$$(\varphi_1 - \varphi) \Delta\tau_1 [(\varphi_1 + \varphi) - (\varphi + \varphi_2)] = c^2 - c_1^2$$

i po zredukowaniu

$$(\varphi_1 - \varphi) (\varphi_1 - \varphi_2) \Delta\tau_1 = c^2 - c_1^2.$$

Jednakże zgodnie z założeniem

$$\varphi_2 < \varphi < \varphi_1,$$

więc

$$(\varphi_1 - \varphi) (\varphi_1 - \varphi_2) > 0,$$

to znaczy

$$c^2 > c_1^2,$$

czyli

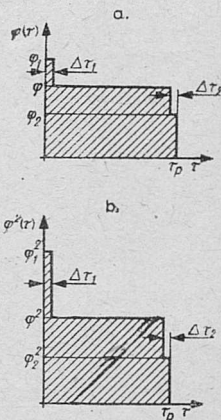
$$|c| > |c_1|,$$

a ponieważ $c > 0$, zatem ostatecznie

$$c > c_1. \quad (5.5)$$

Z przeprowadzonej analizy wynika, że jakakolwiek niestałość funkcji $\varphi(\tau)$ powoduje, iż współczynnik c uzyskuje wartość wyższą aniżeli w przypadku $\varphi(\tau) = \text{const}$; znaczy to, że w przypadku $\varphi(\tau) = \text{const}$ współczynnik c uzyskuje wartość najniższą.

Zbadajmy obecnie drugi przypadek krańcowy.



Rys. 10. Kształt całek $\int_0^{\tau_p} \varphi d\tau$ oraz $\int_0^{\tau_p} \varphi^2 d\tau$, gdy funkcja $\varphi(\tau)$ przybiera nie tylko wartość stałą

Jeśli funkcja w ciągu całego okresu τ_p przybiera wyłącznie swoje skrajne wartości ϱ i μ , będziemy mieli wtedy układ równań

$$\begin{aligned}\varrho\tau_1 + \mu(\tau_p - \tau_1) &= 1, \\ \varrho^2\tau_1 + \mu^2(\tau_p - \tau_1) &= c_2^2.\end{aligned}\quad (5.6)$$

Natomiast w przypadku, kiedy funkcja przybiera swoje skrajne wartości ϱ i μ , w ciągu całego okresu poza drobnymi okresami $\Delta\tau_1$ i $\Delta\tau_2$, w czasie których ma ona pewną wartość pośrednią φ (patrz rys. 11), będziemy mieli:

$$\begin{cases} \varrho(\tau_1 - \Delta\tau_1) + \varphi(\Delta\tau_1 + \Delta\tau_2) + \mu(\tau_p - \tau_1 - \Delta\tau_2) = 1 \\ \varrho^2(\tau_1 - \Delta\tau_1) + \varphi^2(\Delta\tau_1 + \Delta\tau_2) + \mu^2(\tau_p - \tau_1 - \Delta\tau_2) = c^2. \end{cases}$$

Odejmując stronami odpowiednie równania obu układów otrzymujemy

$$\begin{cases} \varrho\Delta\tau_1 - \varphi(\Delta\tau_1 + \Delta\tau_2) + \mu\Delta\tau_2 = 0 \\ \varrho^2\Delta\tau_1 - \varphi^2(\Delta\tau_1 + \Delta\tau_2) + \mu^2\Delta\tau_2 = c_2^2 - c^2, \end{cases}$$

skąd

$$\begin{cases} (\varrho - \varphi)\Delta\tau_1 = (\varphi - \mu)\Delta\tau_2 \\ (\varrho^2 - \varphi^2)\Delta\tau_1 - (\varphi^2 - \mu^2)\Delta\tau_2 = c_2^2 - c^2. \end{cases}$$

Rugując z obu równań $\Delta\tau_2$ otrzymujemy.

$$\begin{aligned}(\varrho^2 - \varphi^2)\Delta\tau_1 - (\varrho + \mu)(\varrho - \varphi)\Delta\tau_1 &= c_2^2 - c^2, \\ (\varrho - \varphi)\Delta\tau_1[(\varrho + \varphi) - (\varrho + \mu)] &= c_2^2 - c^2, \\ (\varrho - \varphi)(\varphi - \mu)\Delta\tau_1 &= c_2^2 - c^2.\end{aligned}$$

Ponieważ zgodnie z założeniem $\mu < \varphi < \varrho$, więc wyrażenie po lewej stronie równania ma wartość dodatnią, wobec czego

$$c^2 < c_2^2$$

czyli

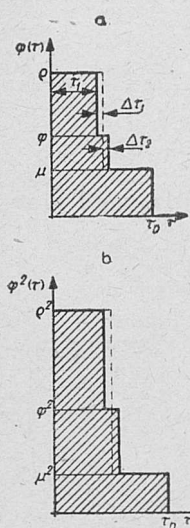
$$|c| < |c_2|.$$

Ale ponieważ $c > 0$, więc ostatecznie

$$c < c_2. \quad (5.7)$$

Z przeprowadzonej analizy wynika, że jeśli funkcja $\varphi(\tau)$ w ciągu dowolnie krótkiego czasu przybiera jakąkolwiek wartość pośrednią pomiędzy swymi wartościami skrajnymi, to współczynnik c ma wartość mniejszą niż w przypadku, gdy funkcja $\varphi(\tau)$ przybiera wyłącznie swoje skrajne wartości. Oznacza to, że współczynnik c ma wartość najwyższą, jeśli funkcja $\varphi(\tau)$ przybiera wyłącznie swoje skrajne wartości.

W ten sposób postawiona wyżej teza została udowodniona.



Rys. 11. Kształt ca-

łęk $\int_0^{\tau_p} \varphi d\tau$ oraz $\int_0^{\tau_p} \varphi^2 d\tau$,

gdy funkcja $\varphi(\tau)$ przybiera nie tylko swoje skrajne wartości μ i ϱ

Łącząc oba wyniki przeprowadzonej analizy otrzymujemy ostatecznie

$$c_1 < c < c_2. \quad (5.8)$$

Wynik ten oznacza, że wielkość współczynnika c , który jest stosunkiem prądu zastępczego silnika do jego prądu średniego, jest ograniczona z dwu stron, czyli że prąd zastępczy silnika zawiera się także w pewnych granicach, które są funkcją prądu średniego.

Obecnie na podstawie przeprowadzonej tezy obliczymy najniższą i najwyższą wartość współczynnika c .

Z układu równań (5.4) dla pierwszego przypadku granicznego, to jest dla $\varphi = \text{const}$, rugując φ znajdujemy

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{\tau_p}}. \quad (5.9)$$

Natomiast z układu równań (5.6) dla drugiego przypadku granicznego, kiedy funkcja $\varphi(\tau)$ przybiera jedynie swoje skrajne wartości μ i ϱ , będziemy mieli

$$(\varrho - \mu) \tau_1 = 1 - \mu \tau_p,$$

$$(\varrho^2 - \mu^2) \tau_1 = c_2^2 - \mu^2 \tau_p.$$

Dzieląc stronami równanie drugie przez pierwsze otrzymamy

$$\frac{c_2^2 - \mu^2 \tau_p}{1 - \mu \tau_p} = \varrho + \mu,$$

skąd

$$c_2 = \sqrt{(\varrho + \mu)(1 - \mu \tau_p) + \mu^2 \tau_p}$$

i ostatecznie

$$c_2 = \sqrt{\varrho + \mu - \varrho \mu \tau_p}. \quad (5.10)$$

Jeśli otrzymane obie wartości współczynnika c stanowią jego wartości krańcowe, wtedy współczynnik c zależnie od kształtu $\varphi(\tau)$ może przybierać zgodnie z przeprowadzoną wyżej tezą wyłącznie tylko takie wartości, które zawarte są między obliczonymi wyżej granicami c_1 i c_2

$$\frac{1}{\sqrt{\tau_p}} < c < \sqrt{\varrho + \mu - \varrho \mu \tau_p}. \quad (5.11)$$

W nierówności tej zgodnie z powyższymi założeniami:

$c = \frac{I_z}{I_{sr}}$ jest stosunkiem prądu zastępczego silnika do jego prądu średniego;

$\varrho = \frac{I_{\max}}{I_{sr}}$ jest stosunkiem największego prądu silnika do jego prądu średniego;

$\mu = \frac{I_{\min}}{I_{sr}}$ jest stosunkiem najmniejszego prądu silnika do jego prądu średniego;

$\tau_p = \frac{t_p}{T}$ jest stosunkiem czasu biegu silnika pod prądem do całkowitego czasu biegu silnika.

Z wyprowadzonej nierówności wynika, że

$$\frac{1}{\sqrt{\tau_p}} < \sqrt{\varrho + \mu - \varrho\mu\tau_p}.$$

Podnosząc obie strony nierówności do kwadratu będziemy mieli

$$\frac{1}{\tau_p} < \varrho + \mu - \varrho\mu\tau_p.$$

Z nierówności tej, określającej wzajemną zależność parametrów τ_p , ϱ i μ , możemy znaleźć z kolei granice, w jakich może się zawierać czas względny silnika pod prądem. W tym celu rozwiązujemy nierówność względem τ_p

$$\frac{\varrho\mu\tau_p - \varrho\tau_p^2 - \mu\tau_p + 1}{\tau_p} < 0,$$

ale $\tau_p > 0$, więc

$$\varrho\tau_p(\mu\tau_p - 1) - (\mu\tau_p - 1) < 0,$$

$$(\mu\tau_p - 1)(\varrho\tau_p - 1) < 0,$$

skąd

$$\frac{1}{\varrho} < \tau_p < \frac{1}{\mu}. \quad (5.12)$$

W przypadku $\mu < 1$ nierówność powyższa musi być uzupełniona nierównością dodatkową

$$\tau_p < 1. \quad (5.13)$$

Z ostatnich nierówności wynika, że znając maksymalny, średni i minimalny prąd silnika możemy określić granice, w jakich zawiera się czas względny biegu silnika pod prądem. Podstawiając na ϱ i μ ich wartości otrzymujemy

$$\frac{I_{sr}}{I_{\max}} < \tau_p < \frac{I_{sr}}{I_{\min}}. \quad (5.14)$$

Jeśli przy obliczaniu współczynnika c czas względny pracy silnika pod prądem τ_p nie mógł być założony nawet w granicach przybliżonych, należałoby ustalić dla współczynnika c dalsze, najbardziej krańcowe granice, podstawiając we wzorze na c odpowiednie skrajne wartości dla τ_p ; przy tych skrajnych wartościach mielibyśmy

$$\sqrt{\mu} < c < \sqrt{\varrho}, \quad (5.15)$$

zaś przy $\mu < 1$ dodatkowo:

$$c > 1. \quad (5.16)$$

Łącząc nierówność (5.11) z nierównością (5.15) będziemy mieli

$$\sqrt{\mu} < \frac{1}{\sqrt{\tau_p}} < c < \sqrt{\varrho + \mu - \varrho\mu\tau_p} < \sqrt{\varrho}. \quad (5.17)$$

Otrzymane skrajne wartości współczynnika c silnik może przybrać jedynie w tych przypadkach, kiedy przez cały okres pracy pracuje wyłącznie przy prądzie minimalnym bądź wyłącznie przy maksymalnym. Ten ostatni przypadek będzie miał miejsce wtedy, kiedy przy krótkich odległościach silniki pracują jedynie przy rozruchu oporowym bądź także bocznikowym i tylko przy stałej średniej wartości prądu rozruchowego. We wszystkich innych przypadkach, w których silniki pracują także prądem mniejszym od maksymalnego, wartość współczynnika c maleje i maleje tym więcej, im dłuższy jest czas względny pracy silnika pod prądem.

Z przeprowadzonej wyżej tezy o maksymalnej i minimalnej wartości całki oznaczonej

$$\int_0^{\tau_p} \varphi^2 d\tau$$

przy

$$\int_0^{\tau_p} \varphi d\tau = \text{const}$$

można wyprowadzić dalszy wniosek ogólny, że z różnych rodzajów pracy silnika elektrycznego, pobierającego w danym okresie pewną ilość energii, ten rodzaj pracy wywoła większe nagrzanie silnika, przy którym prąd silnika ulegał większym wahaniom. Jeśli natomiast za podstawę porównania weźmiemy nie tę samą ilość zużytej energii, lecz to samo nagrzanie silnika, a więc ten sam prąd zastępczy (np. maksymalnie dla danego silnika dopuszczalny), to powiemy, że największe wykorzystanie mocy silnika trakcyjnego uzyskamy wówczas, gdy przez dobór odpowiednio dużej przekładni a zarazem odpowiednio silnego stopnia bocznikowania silników zdołamy w możliwie największym stopniu zmniejszyć rozpiętość prądów silnika, a więc przede wszystkim — zmniejszyć jego prąd rozruchowy.

Jeśli parametry nierówności (5.11) zastąpimy odpowiednimi stosunkami prądów, to otrzymamy

$$\frac{1}{\sqrt{\tau_p}} < \frac{I_z}{I_{sr}} < \sqrt{\frac{I_{\max}}{I_{sr}} + \frac{I_{\min}}{I_{sr}} - \frac{I_{\max}}{I_{sr}} \cdot \frac{I_{\min}}{I_{sr}} \cdot \tau_p},$$

stąd

$$\frac{I_{sr}}{\sqrt{\tau_p}} < I_z < \sqrt{I_{sr}(I_{\max} + I_{\min}) - I_{\max} I_{\min} \tau_p}. \quad (5.18)$$

Niech będzie na przykład $I_{\max} = 400$ A; $I_{sr} = 220$ A; $I_{\min} = 100$ A; $\tau_p = 0,64$ — wtedy

$$\frac{220}{\sqrt{0,64}} < I_z < \sqrt{220(400 + 100) - 400 \cdot 100 \cdot 0,64}$$

$$275 < I_z < 290.$$

Wyprowadzone wyżej wzory (5.11) i (5.18) na wartości graniczne współczynnika c względnie prądu zastępczego będą miały wartość praktyczną, gdy rozpiętość między wyprowadzonymi granicami nie będzie zbyt wielka. Zbadajmy stosunek różnicy obu granic do granicy dolnej

$$\frac{c_2 - c_1}{c_1} = \frac{c_2}{c_1} - 1 = \sqrt{\tau_p(\varrho + \mu - \varrho\mu\tau_p)} - 1.$$

Rozpatrywany stosunek będzie miał wartość największą, gdy wyrażenie podpierwiastkowe osiągnie swoje maksimum. Dla znalezienia odpowiedniej wartości τ_p przyrównajmy do zera pochodną wyrażenia podpierwiastkowego względem τ_p

$$\frac{d\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2}{d\tau_p} = \varrho + \mu - 2\varrho\mu\tau_p = 0,$$

stąd

$$\tau_p = \frac{\varrho + \mu}{2\varrho\mu} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\mu} \right). \quad (5.19)$$

Poprzednio stwierdziliśmy, że graniczne wartości, jakie może mieć τ_p , są $\frac{1}{\varrho}$ i $\frac{1}{\mu}$. Otrzymany wynik mówi więc, że największą rozpiętość między granicami współczynnika c będziemy mieli wtedy, kiedy τ_p będzie miało wartość średnią między swymi granicami, to jest gdy

$$\tau_p = \frac{\tau_{p1} + \tau_{p2}}{2}.$$

Obliczymy tę największą rozpiętość granic współczynnika c w jej stosunkowej wartości

$$\gamma = \left(\frac{c_2}{c_1} \right)_{\max} = \sqrt{\frac{\varrho + \mu}{2\varrho\mu} \left(\varrho + \mu - \varrho\mu \frac{\varrho + \mu}{2\varrho\mu} \right)} = \frac{\varrho + \mu}{2\sqrt{\varrho\mu}}. \quad (5.20)$$

Oznacza to, że największa wartość stosunku obu granic współczynnika c równa się stosunkowi średniej arytmetycznej granicznych wartości do ich średniej geometrycznej. Stosunek ten można przedstawić jeszcze w postaci

$$\gamma = \frac{\varrho + \mu}{2\sqrt{\varrho\mu}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\varrho}{\mu}} + \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\omega} + \frac{1}{\sqrt{\omega}} \right), \quad (5.21)$$

gdzie

$$\omega = \frac{\varrho}{\mu} = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} \quad (5.22)$$

i oznacza rozpiętość prądów silnika.

Jak z powyższego wzoru wynika, maksymalna rozpiętość granic współczynnika c jest funkcją jedynie rozpiętości prądów silnika. Ta ostatnia waha się zwykle w granicach od 3 do 6, przy czym jest tym mniejsza, im niższy jest prąd rozruchowy, a więc im wyższą zastosowano przekładnię silnika i wyższy stopień osłabienia pola; będzie ona z reguły wyższa w silnikach jednostek podmiejskich niż w silnikach lokomotyw i wyższa przy prowadzeniu pociągów pasażerskich niż towarowych. W tablicy 2 podano dla różnych rozpiętości prądów silnika rozpiętość maksymalną (γ) i średnią ($\sqrt{\gamma}$) granic współczynnika c .

Tablica 2

ω	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0
γ	1,060	1,107	1,155	1,203	1,25	1,301	1,340	1,585	1,428	1,470	1,510
$\sqrt{\gamma}$	1,029	1,051	1,073	1,093	1,12	1,14	1,158	1,177	1,195	1,212	1,229

Decydujący wpływ na wielkość współczynnika c i obie jego granice c_1 i c_2 ma długość czasu względnego τ_p pracy silnika. Im dłużej będzie silnik pod prądem, tym mniejszy będzie jego prąd zastępczy w stosunku do średniego, a więc przy tym samym zużyciu energii tym mniej się nagrzeje, albo — inaczej mówiąc — przy tym samym nagrzaniu się silnika, tym większą wykona on pracę, czyli tym lepiej będzie wykorzystany. Aby tabor elektryczny mógł być w pełni wykorzystany, ten ważny wniosek, wypływający z teorii pracy silnika trakcyjnego, powinien być uwzględniony tak w przejazdach analitycznych, wykonywanych przy projektowaniu kolei elektrycznych, jak też następnie przy ich eksploatacji.

Charakter zmiany dolnej i górnej granicy współczynnika c w funkcji czasu względnego pracy silnika przedstawiono w postaci wykresu na rys. 12 z krzywą $c_1 = f(\tau_p)$ oraz z pękami krzywych $c_2 = f(\tau_p)$ dla wartości

$$\varrho = \frac{I_{\max}}{I_{sr}}$$

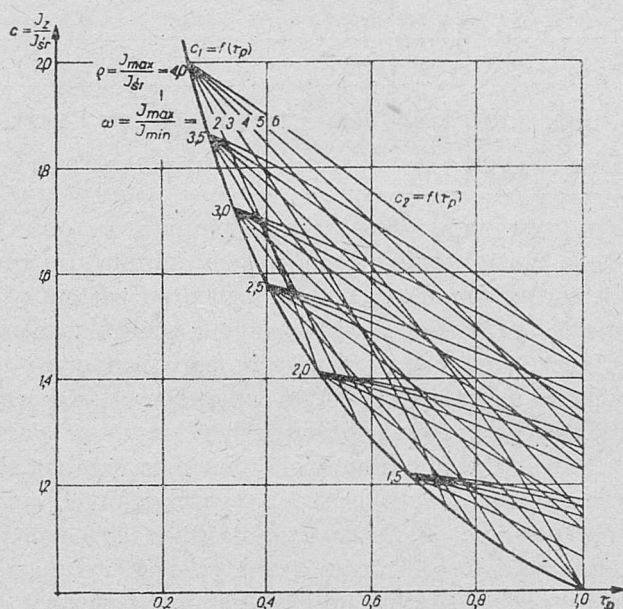
zmieniających się w granicach od 1,5 do 4 i dla wartości

$$\omega = \frac{I_{\max}}{I_{\min}}$$

w granicach od 2 do 6. Wykres ten zastąpić może analityczne obliczenie granic współczynnika c . I tak na przykład: jeśli $I_{\max} = 400$ A, $I_{sr} = 200$ A, $I_{\min} = 100$ A oraz $\tau_p = 0,6$ z wykresu dla $\varrho = 2$ i $\omega = 4$ odczytujemy $1,29 < c < 1,38$, prąd zastępczy silnika zaś będzie się zawierał w granicach: $258 \text{ A} < I_z < 276 \text{ A}$.

Podana wyżej metoda określania granic współczynnika c za pomocą wzoru (5.11) lub wykresu z rys. 12 pozwala z dostateczną dokładnością

określić granice prądu zastępczego silnika pod warunkiem, że znany jest względnie może być wystarczająco ściśle określony czas względny pracy silnika τ_p . Ten czas, zmieniający się zależnie od warunków pracy lokomotywy i sposobu jazdy w granicach od $\frac{1}{\varrho}$ i $\frac{1}{\mu}$, przybiera wartości dla pociągów podmiejskich i osobowych w granicach od około 0,3 do około 0,6, przy czym czas ten jest tym krótszy, im krótsze są odległości międzyprzystankowe. Dla pociągów pospiesznych i towarowych bezpośrednich



Rys. 12. Zależności maksymalnej i minimalnej wartości współczynnika $c = \frac{I_z}{I_{sr}}$ od względnego czasu pracy silnika

$\tau_p = \frac{t_p}{T}$ przy różnych wartościach parametrów $\varrho = \frac{I_{max}}{I_{sr}}$

oraz $\omega = \frac{I_{max}}{I_{min}}$

zmienia się on w granicach od około 0,6 do około 0,8, przy czym dla danej lokomotywy i przy tej samej szybkości technicznej maleje ze wzrostem nierównomierności profilu linii i ze wzrostem ciężaru pociągu. Jednakże największy wpływ na długość czasu względnego τ_p ma sposób jazdy zastosowany przez maszynistę; tę samą szybkość techniczną może on bowiem uzyskać zazwyczaj różnymi sposobami, przy czym im ta jazda przez włączanie i wyłączanie prądu będzie bardziej „piłowana“, tym krótszy będzie czas pracy silnika pod prądem, tym silniej będzie się on nagrzewał.

Wielkość względnego czasu biegu silnika pod prądem, która w przeciętnych warunkach waha się w granicach od 0,5 do 0,75, może być przedstawiona równaniem

$$\tau_p = \frac{1}{\varrho} + \varphi \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\varrho} \right), \quad (5.23)$$

przy czym współczynnik φ można przyjąć orientacyjnie:

a) dla odległości międzyprzystankowych $L \leq 6$ km

$$\varphi = 0,05 L, \quad (5.24)$$

gdzie L — w km;

b) dla odległości międzyprzystankowych $L > 6$ km

$$\varphi = 0,2 + 0,6 \lambda, \quad (5.25)$$

gdzie λ — stosunek drogi na profilu łagodnym do całej drogi pociągu, przy czym za linię o profilu łagodnym można uważać takie linie, których wzniesienia i spadki nie przekraczają poniższych wartości:

dla pociągów towarowych	$ i $	3 ⁰ / ₀₀
„ „ pośpiesznych	$ i $	6 ⁰ / ₀₀
„ „ osobowych	$ i $	9 ⁰ / ₀₀
„ „ jednostkowych	$ i $	12 ⁰ / ₀₀

W najgorszych warunkach pracy silników trakcyjnych (małe odległości międzyprzystankowe, bardzo zmienny profil linii, nieumiejętne prowadzenie pociągu), w wyniku których są one obciążane jedynie prądem maksymalnym a poza tym wyłączane, współczynnik c osiąga swą wartość maksymalną

$$c_{\max} = \sqrt{\varrho}, \quad (5.26)$$

zaś prąd zastępczy silnika

$$I_{z \max} = \sqrt{I_{\max} \cdot I_{sr}}, \quad (5.26a)$$

gdzie I_{sr} jest prądem średnim silnika ze wzoru

$$I_{sr} = \frac{j'_0 V G}{m U}, \quad (5.27)$$

gdzie V — szybkość średnia pociągu w km/godz,

G — ciężar całkowity pociągu w tonach,

U — napięcie na zaciskach silnika w V,

m — ilość silników lokomotywy,

j'_0 — jednostkowe pozorne zużycie energii obliczone dla najgorszych warunków pracy silnika trakcyjnego.

W przypadku gdy rozpiętość między granicami współczynnika c jest tak duża, że zachodzi trudność jego wyboru, należy obliczyć względny

czas jazdy τ_e przy największym obciążeniu silnika prądem $I_{\max}$; do czasu tego wchodzi zazwyczaj okres rozruchu, przy czym pod prądem $I_{\max}$ przy rozruchu oporowym należy rozumieć nie maksymalną, lecz średnią wartość prądu rozruchowego oraz czas pracy przy pokonywaniu wzniesień miarodajnych dla danego pociągu. Wtedy wielkość współczynnika c można określić w przybliżeniu według następującego wzoru

$$c = \sqrt{\frac{1}{\tau_p} [1 + (\varrho - \mu) (\varrho \tau_p - 1) \tau_e]} . \quad (5.28)$$

Wzór (5.28) został wyprowadzony ze wzorów (5.26) przy założeniu zależności liniowej między kwadratem współczynnika c i czasem względnym τ_e ;

$$c^2 = c_1^2 + \frac{\tau_e}{\tau_1} (c_2^2 - c_1^2) . \quad (5.29)$$

Mimo że założenie to nie odpowiada ściśle istotnemu stanowi rzeczy, wynik opartego na nim obliczenia pokrywa się praktycznie z rzeczywistością.

Jeśli na przykład w podanym wyżej przykładzie obliczymy dodatkowo, że czas względny rozruchu prądem maksymalnym wynosi 0,1, zaś czas pokonywania wzniesienia miarodajnego 0,15, to wielkość współczynnika c według wzoru (5.28) wyniesie

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{\frac{1}{0,6} [1 + (2 - 0,5) (2,0,6 - 1) 0,25]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{0,6} (1 + 0,0075)} = 1,34 , \end{aligned}$$

zaś prąd zastępczy będzie

$$I_z = c I_{sr} = 1,34 \cdot 200 = 268 \text{ A} .$$

Jak wynika ze wzoru (4.11), wielkość współczynnika c wypada zawsze większa od jego dolnej granicy c_1 . Poza tym wielkość ta powinna wypaść nie większa niż wartość granicy górnej c_2 ; odwrotny wynik byłby dowodem, że całkowity czas względny τ_p biegu silnika obciążonego przyjęto za duży. Czas bowiem musi spełniać warunek

$$\tau_p \leq \frac{1}{\mu} [1 - (\varrho - \mu) \tau_e] , \quad (5.30)$$

przy czym znak równości w tym wzorze odpowiada przypadkowi granicznemu, kiedy silnik pobiera jedynie prąd największy i najmniejszy i kiedy c równa się c_2 .

Obliczenie czasu stosowania największego prądu silnika nie nastręcza żadnych trudności. Czas rozruchu oporowego obliczamy zakładając i obliczając stałe przyspieszenie a_R rozruchu; wtedy czas rozruchu t_R w sekundach będzie

$$t_R = \frac{V_R}{3,6a_R}, \quad (5.31)$$

gdzie V_R jest szybkością pociągu przy końcu rozruchu oporowego — w km/godz. W silnikach bocznikowanych prąd maksymalny może być stosowany aż do chwili osiągnięcia największego stopnia osłabienia pola głównego silników, po czym prąd spada ze wzrostem szybkości pociągu aż do chwili osiągnięcia szybkości ustalonej. W tych warunkach czas całkowitego rozruchu t_R można przyjąć w przybliżeniu równy

$$t_R = \frac{V_R}{3,6a_R \cdot w}, \quad (5.31a)$$

gdzie w jest stopniem wzbudzenia silników przy prądzie maksymalnym, pozostałe zaś parametry — jak we wzorze poprzednim. Natomiast czas potrzebny na przebycie wzniesień miarodajnych⁹ obliczamy przy założeniu stałej szybkości V_i , której wielkość wynika z charakterystyki $V=f(I)$ dla $I=I_{\max}$; wtedy czas ten t_i w sekundach będzie

$$t_i = \frac{3,6S_i}{V_i} \quad (5.32)$$

gdzie S_i jest ogólną długością wzniesień miarodajnych na badanej odległości międzyprzystankowej — w metrach, oraz V_i — szybkością ustaloną pociągu na wzniesieniu miarodajnym — w km/godz. Całkowity czas względny τ_e stosowania prądu maksymalnego będzie:

$$\tau_e = \frac{t_R + t_i}{T}, \quad (5.33)$$

gdzie T jest czasem całkowitym, potrzebnym na przebycie danej odległości międzyprzystankowej — w sekundach.

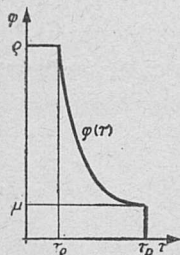
Wielkość współczynnika c , a tym samym i prąd zastępczy silnika można też obliczyć, wychodząc z założenia wynikającego z następującej analizy:

Jeśli pewien przebieg obciążenia w funkcji czasu względnego $\varphi=f(\tau)$ uporządkujemy w czasie pod względem wielkości funkcji φ tworząc tzw. uporządkowany wykres obciążenia, wtedy wielkość całki oznaczonej

$$\int_0^{\tau_p} \varphi^2 d\tau$$

⁹ Do wzniesień miarodajnych należy tu zaliczyć wszystkie odcinki trasy o takim profilu, który wymaga użycia maksymalnego prądu silnika przy biegu pociągu z szybkością ustaloną.

nie ulegnie zmianie. Charakter takiego uporządkowanego wykresu przedstawiono na rys. 13. W pierwszym okresie τ_e funkcja φ ma wartość stałą maksymalną ϱ , po czym gwałtownie maleje osiągając przy końcu okresu τ_p (względnie przed końcem tego okresu) wartość minimalną μ . Kształt krzywej $\varphi=f(\tau)$ w drugiej części okresu τ_p zależy od wielu czynników, jak: ciężar pociągu, profil linii, sposób jazdy itd. Kształt tej krzywej związany jest jedynie zawsze warunkiem oczywistym



Rys. 13. Uporządkowany wykres obciążenia silnika trakcyjnego w funkcji czasu względnie pracy silnika $\varphi=f(\tau)$ gdzie

$$\varphi = \frac{I}{I_c} \text{ oraz}$$

$$\tau = \frac{t}{T}$$

$$\int_{\tau_p}^{\tau_p} \varphi d\tau = 1 - \varrho \tau_e. \quad (5.34)$$

Poza tym przedstawiona na rys. 13 krzywa ma tak typowy charakter, iż można przyjąć w przybliżeniu, że w obszarze od τ_e do τ_p przedstawia następującą funkcję:

$$\varphi = a + b(\tau_p - \tau)^k. \quad (5.35)$$

Z warunków krańcowych $\varphi(\tau_e) = \varrho$ i $\varphi(\tau_p) = \mu$, znajdujemy

$$a = \mu$$

oraz

$$b = \frac{\varrho - \mu}{(\tau_p - \tau_e)^k}$$

Podstawiając te wartości do równania (5.35) otrzymamy

$$\varphi = \mu + \frac{\varrho - \mu}{(\tau_p - \tau_e)^k} (\tau_p - \tau)^k. \quad (5.36)$$

Jeśli wartość funkcji φ w obszarze od τ_e do τ_p oraz wartość $\varphi = \varrho$ w obszarze od 0 do τ_e podstawimy do ogólnego układu naszych równań (5.3), otrzymamy

$$\int_{\tau_e}^{\tau_p} \left[\mu + \frac{\varrho - \mu}{(\tau_p - \tau_e)^k} (\tau_p - \tau)^k \right] d\tau = 1 - \varrho \tau_e$$

oraz

$$\int_{\tau_e}^{\tau_p} \left[\mu + \frac{\varrho - \mu}{(\tau_p - \tau_e)^k} (\tau_p - \tau)^k \right]^2 d\tau = c^2 - \varrho^2 \tau_e.$$

Całkując i rozwiązując powyższy układ równań względem k i c znajdziemy (po wykonaniu dość skomplikowanych przeróbek):

$$k = \frac{\varrho \tau_p - 1}{(1 - \varrho \tau_e) - \mu(\tau_p - \tau_e)^k}$$

oraz

$$c = \sqrt{\varrho - \frac{(\varrho - \mu)(1 - \varrho\tau_e) + \mu(\varrho\tau_p - 1)}{(\varrho - \mu)(\tau_p - \tau_e) + (\varrho\tau_p - 1)} \cdot (\varrho\tau_p - 1)}. \quad (5.37)$$

Jak wynika z zestawienia w tablicy 3, wartość współczynnika c , obliczona przykładowo dla różnych wartości parametrów ϱ , μ , τ_p i τ_e według wzoru (5.37), daje wartości zbliżone do obliczonych na podstawie podanego wyżej prostszego wzoru (5.28). Ponieważ zaś w obu przypadkach obliczenie wielkości c uważać należy jedynie za przybliżone, gdyż ścisłość obliczenia zależy przede wszystkim od trudnego doboru odpowiedniej wielkości parametru τ_p , to jest względnego czasu pracy silnika pod prądem, wydaje się słuszniejsze określanie wielkości prądu zastępczego na podstawie współczynnika c za pomocą wzoru prostszego, jakim jest podany uprzednio wzór (5.28).

Tablica 3

ϱ	μ	τ_p	τ_e	c		ε %
				wg (5.37)	wg (5.28)	
3	0,5	0,5	0,1	1,53	1,50	-1,98
3	0,5	0,5	0,2	1,58	1,58	—
3	1,0	0,4	0,1	1,61	1,61	—
3	1,0	0,4	0,2	1,63	1,64	+0,61
2	0,5	0,8	0,2	1,23	1,22	-0,81
2	0,5	0,8	0,3	1,26	1,26	—

Wartość współczynnika c a z nim i prądu zastępczego, obliczona podaną tu metodą, zależy w znacznej mierze od przyjętej wielkości czasu względnego τ_p , rosnąc szybko ze spadkiem tego parametru. Wynikająca stąd pewna fakultatywność wyników obliczeń prądu zastępczego może stanowić wystarczające uzasadnienie zarzutu małej praktycznej wartości metody obliczania a priori wielkości prądu zastępczego, jeśli tę wielkość miałoby się sprawdzać następnie ex post na drodze przejazdu analitycznego. Zauważmy jednak, że zarzut taki dotyczyłby nie tyle podanej metody obliczania prądu zastępczego, ile samej zasady sprawdzania mocy silnika wielkością prądu zastępczego. Właśnie wielkość prądu zastępczego jest fakultatywnym wynikiem sposobu prowadzenia pociągu, jest wynikiem tego czy przez jazdę „piłowaną“ włączaniem i wyłączaniem silnika skraca się czas względny pracy silnika pod prądem, czy też przez utrzymywanie ustalonej szybkości pociągu czas ten odpowiednio się wydłuża. Sprawdzenie mocy silnika trakcyjnego ex post przez obliczenie prądu zastępczego nie jest sprawdzeniem wystarczającym nie tylko ze specjalnych powodów związanych z nagrzewaniem się silnika, lecz przede wszystkim dlatego, że opiera się na z góry założonym, wybranym sposobie prowa-

dzenia pociągu. Należy oczekiwać, że przejazd analityczny potwierdzi jedynie wyniki otrzymane poprzednio powyższą metodą, jeśli tylko w wyniku tego przejazdu uzyskana będzie ta sama wielkość parametrów, jaka w tej metodzie została założona w celu analitycznego obliczenia prądu zastępczego, i z tego względu wykonywanie przejazdu analitycznego jedynie dla sprawdzenia prądu zastępczego wydaje się zbędne.

Sprawdzanie nagrzewania się silnika metodą prądu zastępczego jest poza tym niewystarczające, a to z tego powodu, że choć znamionowy prąd ciągły silnika nie będzie mniejszy niż prąd zastępczy, obliczony dla najtrudniejszych warunków pracy elektrowozu, w szczególności na najkrótszej odległości międzyprzystankowej w ruchu podmiejskim lub na odcinku o najcięższym profilu — dla ciężkiego pociągu towarowego, to jednak może się okazać, że w pewnym punkcie drogi, przy końcu rozruchu — w pierwszym przypadku i na szczycie wzniesienia — w drugim, temperatura silników przekroczy temperaturę dopuszczalną. I dlatego jedynym pewnym sprawdzianem nagrzewania się silników trakcyjnych jest zbadanie przebiegu ich temperatury w funkcji drogi pociągu. Natomiast znaczenie obliczonego analitycznie prądu zastępczego polega na tym, że pozwala obliczyć w przybliżeniu potrzebną dla założonych warunków moc znamionową lokomotywy, przyjmowaną dotychczas przez projektującego „na wyczucie“, jeśli nie „na oko“.

6. OBLICZENIE MOCY ELEKTROWOZU

Moc znamionową elektrowozu charakteryzują dwie wielkości: moc ciągła i moc godzinna. Jako wielkości te podaje się zwykle odpowiednią wielokrotność ciągłej bądź godzinnej mocy silników trakcyjnych, a więc moc mierzoną nie na obwodzie kół pędnych elektrowozu, lecz na wale silników.

Stosunek mocy godzinnej silnika trakcyjnego do jego mocy ciągłej jest zależny od systemu i stopnia chłodzenia silnika; im ten stosunek jest niższy, a więc bliższy jedności, tym lepsze jest chłodzenie silnika. Jeśli stosunek ten oznaczmy przez a_g , to dla poszczególnych rodzajów silników będziemy mieli:

$$\begin{array}{ll} \text{silniki przewietrzane sztucznie:} & a_g = 1,05 \div 1,20, \\ \text{„ samoprzewietrzane} & a_g = 1,25 \div 1,45.^{10} \end{array}$$

Stosunek a_g może być podstawą do obliczania stałej czasu T silnika przy jego mocy godzinnej.

Dwie inne wielkości charakteryzują wielkość i rodzaj obciążenia elektrowozu względnie jego silników: moc średnia i moc zastępcza. Pojęciom

¹⁰ Porównaj [5] str. 155.

tym przy prawie stałych wartościach napięcia silnika i jego sprawności odpowiadają: prąd średni I_{sr} i prąd zastępczy I_z , których znaczenie i wzajemny stosunek wyjaśnione zostały w poprzednim rozdziale.

Moc średnią elektrowozu można łatwo obliczyć mając ciężar całego pociągu, jego średnia szybkość i jednostkowe zużycie energii na podstawie wzoru

$$N_{sr} = \frac{j'_0 V G}{1000}, \quad (6.1)$$

gdzie

- N_{sr} — moc średnia elektrowozu w kW,
 j'_0 — jednostkowe pozorne zużycie energii w Wh/tkm,
 G — ciężar pociągu wraz z lokomotywą — w tonach,
 V — szybkość średnia pociągu w km/godz, przy czym pod szybkością średnią rozumieć należy przy sztucznym przewietrzaniu silników trakcyjnych stosunek drogi pociągu do czasu liczonego z całym czasem postojów na przystankach, a więc szybkość handlową, zaś przy własnym chłodzeniu silników — stosunek drogi pociągu do czasu jego biegu zwiększonego o połowę czasu postojów na przystankach.

Ponieważ zaś moc zastępcza elektrowozu jest związana z jego mocą średnią stosunkiem

$$c = \frac{I_z}{I_{sr}} \approx \frac{N_z}{N_{sr}}, \quad (6.2)$$

którego wielkość, jak wynika z poprzedniej analizy, daje się obliczyć z wystarczającą technicznie dokładnością, więc przyjmując znamionową moc ciągłą lokomotywy przy pełnym wykorzystaniu silników równą w przybliżeniu mocy zastępczej otrzymamy

$$N_z \approx c N_{sr} \approx \frac{c j'_0 V G}{1000}. \quad (6.3)$$

Moc ta mierzona jest na wale silników lub też na ich zaciskach zależnie od tego, jak liczono jednostkowe zużycie energii.

We wspomnianej wyżej pracy autora obliczono podaną przez niego metodą analityczną jednostkowe, tak zwane pozorne zużycie energii przy prowadzeniu lokomotyw uniwersalną typu BB wymienionych w tablicy 4 rodzajów pociągów dla założonych z góry warunków pracy lokomotywy (patrz tablica) i otrzymano wyniki, zestawione w ostatniej rubryce tej tablicy.

Tablica 4

Rodzaj pociągu	Ciężar pociągu w tonach	Średnia odległość między przyst. w km	Szybkość w km/godz.					Zużycie pozorne w Wh/tkm
			maks.	techn.	handl.	pocz. ham.	końca rozruchu	
	G	L	V_M	V_t	V_h	V_H	V_R	j
Pośpieszny	600	35	120	95	85	80	45	18,11
Osobowy	450	6	100	70	55	70	45	26,54
Towarowy	1800	45	70	55	50	45	45	10,57

Spróbujemy obecnie dla założonych uprzednio (patrz tablica) warunków pracy lokomotywy obliczyć jej znamionową moc ciągłą. Należy tu podkreślić, że parametry przyjęte przy obliczaniu normalnego jednostkowego zużycia energii nie uwzględniały żadnego pogorszenia warunków pracy lokomotywy, wobec czego oczekiwać należy odpowiednio niskich wartości mocy lokomotywy, obliczonej na podstawie tych łagodnych warunków. W celu wykorzystania wzoru (6.3) pozostaje obecnie obliczenie dla każdego rodzaju pociągu wielkości współczynnika c . Granice, w jakich może się zmieniać ta wielkość, ustala wzór (5.11)

$$\sqrt{\frac{1}{\tau_p}} < c < \sqrt{\varrho + \mu - \varrho \mu \tau_p}.$$

Dla znalezienia parametrów ϱ i μ obliczymy największy, średni i najmniejszy prąd silnika lokomotywy przy prowadzeniu przez nią każdego rodzaju pociągu.

Największego prądu silnika należy oczekiwać przy rozruchu.

Prąd ten obliczymy ze wzoru

$$I_m = \frac{F_R V_R}{0,367 m U \eta \eta_z}, \quad (6.4)$$

gdzie

F_R — siła rozruchowa lokomotywy w tonach,

V_R — szybkość przy końcu rozruchu oporowego w km/godz,

m — ilość silników lokomotywy,

U — napięcie na zaciskach silnika — w woltach,

η — średnia sprawność silników,

η_z — średnia sprawność przekładni.

Zakładając ze względu na przyczepność tę samą średnią siłę rozruchową lokomotywy w wysokości 20% ciężaru lokomotywy dla wszystkich rodzajów pociągów, otrzymamy ten sam prąd rozruchowy w wysokości

$$I_M = \frac{0 \cdot 2 \cdot 90 \cdot 45}{0,367 \cdot 4 \cdot 1500 \cdot 0,9 \cdot 0,97} = 421 \text{ A}.$$

Najniższy prąd rozruchowy będzie miała lokomotywa przy najwyższej szybkości pociągu. Założymy, że przełożenie przekładni lokomotywy i stopień wzbudzenia silników zostaną tak dobrane, że pociąg będzie mógł być prowadzony z szybkością ustaloną, równą dopuszczalnej dla danego rodzaju pociągu szybkości maksymalnej; przy takim założeniu siła lokomotywy przy szybkości maksymalnej będzie równa oporom ruchu pociągu

$$F_M = R_M.$$

Trzeba tu zauważyć, że lokomotywa elektryczna, szczególnie zaś lokomotywa typu uniwersalnego, będzie rozporządzała kilkoma różnymi charakterystykami trakcyjnymi o wzbudzeniu wyższym niż odpowiadające przy biegu ustalonym szybkości maksymalnej pociągu, przy wykorzystaniu których możliwe będą także szybkości ustalone niższe niż maksymalne, a więc wymagające prądu niższego niż przyjęto w powyższym założeniu. Jednakże zakładając jazdę o najwyższej szybkości przyjmujemy tym samym jazdę częściowo z rozbiegu aż do początkowej szybkości hamowania, a więc warunki pracy silnika mniej korzystne, niż przy założeniu średniej stałej szybkości o wartości niższej niż dopuszczalna maksymalna. Wprawdzie zakładając niższą szybkość maksymalną otrzymalibyśmy mniejszy prąd minimalny, a więc i mniejszą wartość współczynnika μ , co wpływa na podwyższenie górnej granicy współczynnika c (patrz wzór 5.11), jednocześnie jednak dużo większy w tym przypadku czas względny jazdy pod prądem w znacznie wyższym stopniu wpływa na obniżenie wartości obu granic współczynnika c .

Przy powyższym założeniu prąd szybkości ustalonej pociągu wyniesie:

$$I_m = \frac{R_M V_M}{0,367 m U \eta \eta_z} = \frac{R_M V_M}{367 \cdot 4 \cdot 1,5 \cdot 0,9 \cdot 0,97} = \frac{R_M V_M}{1923},$$

gdzie

$$R_M = G r_M = G \left[2 + \frac{1}{40} \left(\frac{V}{10} \right)^2 \right].$$

Przy zrobionych wyżej założeniach otrzymamy:

- a) dla pociągu pośpiesznego przy $G = 600 + 90 = 690$ t
i $V_M = 120$ km/godz.

$$R_M = 690 \left[2 + \frac{1}{40} \left(\frac{120}{10} \right)^2 \right] = 690 \cdot 5,6 = 3860 \text{ kg},$$

$$I_m = \frac{3860 \cdot 120}{1923} = 241 \text{ A};$$

- b) dla pociągu osobowego przy $G=500+90=590$ t
i $V_M=100$ km/godz.

$$R_M = 500 \left[2 + \frac{1}{40} \frac{100}{10} \left(\frac{70}{10} \right)^2 \right] = 590 \cdot 4,5 = 2660 \text{ kg},$$

$$I_m = \frac{2660 \cdot 100}{1923} = 138 \text{ A};$$

- c) dla pociągu towarowego przy $G=1800+90=1890$ t
i $V_M=70$ km/godz.

$$R_M = 1890 \left[2 + \frac{1}{40} \left(\frac{70}{10} \right)^2 \right] = 1890 \cdot 3,225 = 6100 \text{ kg};$$

$$I_m = \frac{6100 \cdot 70}{1923} = 222 \text{ A}.$$

Prąd średni silnika obliczamy według wzoru

$$I_{sr} = \frac{j'_0 V G}{m U}, \quad (6.5)$$

gdzie j'_0 jest jednostkowym, pozornym zużyciem energii mierzonym na zaciskach silnika (na pantografie), zaś V — szybkością handlową pociągu ¹¹.

Mając największy, najmniejszy i średni prąd silnika obliczymy z kolei wielkość parametrów ϱ i μ ze wzorów:

$$\varrho = \frac{I_M}{I_{sr}} \quad \text{oraz} \quad \mu = \frac{I_m}{I_{sr}}.$$

Otrzymamy:

- a) dla pociągu pośpiesznego przy $j'_0=18,11$ Wh/tkm i $V=85$ km/godz.

$$I_{sr} = \frac{18,11 \cdot 85 \cdot 690}{4 \cdot 1500} = 177 \text{ A};$$

$$\varrho = \frac{421}{177} = 2,38; \quad \mu = \frac{241}{177} = 1,36;$$

¹¹ Należy tu podkreślić, że występująca we wzorze (6.5) wielkość j'_0 może być obliczana analitycznie metodą [4], jeśli średnia wartość prądu rozruchowego silników jest w przybliżeniu stała przy wszystkich rodzajach ich połączeń, to znaczy w ciągu całego okresu rozruchu; w przeciwnym przypadku wielkość występującego w metodzie [4] współczynnika μ musi być osobno obliczona.

b) dla pociągu osobowego przy $j'_0 = 26,54$ Wh/tkm i $V = 55$ km/godz.

$$I_{sr} = \frac{26,54 \cdot 55 \cdot 590}{4 \cdot 1500} = 144 \text{ A};$$

$$\varrho = \frac{421}{144} = 2,94; \quad \mu = \frac{138}{144} = 0,962;$$

c) dla pociągu towarowego przy $j'_0 = 10,57$ Wh/tkm i $V = 50$ km/godz.

$$I_{sr} = \frac{10,57 \cdot 50 \cdot 1890}{4 \cdot 1500} = 167 \text{ A};$$

$$\varrho = \frac{421}{167} = 2,50; \quad \mu = \frac{222}{167} = 1,33.$$

Jak to wynika ze wzoru (5.12), czas względny τ_p waha się dla każdego rodzaju pociągu między liczbami $\frac{1}{\varrho}$ i $\frac{1}{\mu}$. Biorąc pod uwagę te granice i warunki pracy lokomotywy z poszczególnymi rodzajami pociągów możemy przyjąć w przybliżeniu:

a) dla pociągu pośpiesznego — ze względu na dużą odległość międzyprzystankową i łagodny profil linii magistralnej $\tau_p = 0,65$,

b) dla pociągu osobowego — ze względu na stosunkowo małą odległość międzyprzystankową, lecz i mały ciężar pociągu przy łagodnym profilu $\tau_p = 0,55$.

c) dla pociągu towarowego — ze względu na dużą odległość międzyprzystankową, lecz duży ciężar, na który będzie już znacznie wpływał profil linii $\tau_p = 0,6$.

Względny czas pracy silnika pod prądem możemy też obliczyć ze wzoru przybliżonego (5.23)

$$\tau_p = \frac{1}{\varrho} + \varphi \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\varrho} \right),$$

Dla poszczególnych rodzajów pociągu otrzymamy:

a) pośpieszny

$$\tau_p = \frac{1}{2,38} + \varphi \left(\frac{1}{1,36} - \frac{1}{2,38} \right) = 0,42 + \varphi(0,736 - 0,42),$$

b) osobowy

$$\tau_p = \frac{1}{2,94} + \varphi \left(\frac{1}{0,962} - \frac{1}{2,94} \right) = 0,34 + \varphi(1,04 - 0,34),$$

c) towarowy

$$\tau_p = \frac{1}{2,50} + \varphi \left(\frac{1}{1,33} - \frac{1}{2,50} \right) = 0,40 + \varphi(0,75 - 0,40).$$

Obliczając ze wzoru (5.24) wartość współczynnika φ dla pociągu osobowego, zaś dla pozostałych pociągów ze wzoru (5.25) i zakładając, że elektryfikowaną linię magistralną charakteryzuje profil łagodny, nie przekraczający 6‰, przy czym wzniesienia i spadki powyżej 3‰ występują na 30‰ długości linii, otrzymamy:

a) pośpieszny

$$\varphi = 0,2 + 0,6 \cdot 1 = 0,8; \quad \tau_p = 0,42 + 0,8 \cdot 0,316 = 0,673;$$

b) osobowy

$$\varphi = 0,05 \cdot 6 = 0,3; \quad \tau_p = 0,34 + 0,3 \cdot 0,70 = 0,55;$$

c) towarowy

$$\varphi = 0,2 + 0,6 \cdot 0,7 = 0,62; \quad \tau_p = 0,40 + 0,62 \cdot 0,35 = 0,617.$$

Otrzymane wartości τ_p niewiele różnią się od poprzednio założonych.

Przy powyższych wartościach τ_p ze wzorów (5.11) i (5.18) otrzymamy następujące granice współczynnika c i prądu zastępczego:

a) pośpieszny: $1,22 < c < 1,25; \quad 216 < I_z < 222,$

b) osobowy: $1,35 < c < 1,53; \quad 195 < I_z < 220,$

c) towarowy: $1,27 < c < 1,32; \quad 212 < I_z < 220.$

Przy najmniej korzystnych warunkach pracy silników wielkość prądu zastępczego wyrazi się wzorem (5.26a) i przy tych samych wartościach parametrów V_H i j'_0 nie przekroczy wartości:

a) pośpieszny: $I_{z \max} = \sqrt{421 \cdot 177} = 273 \text{ A},$

b) osobowy: $I_{z \max} = \sqrt{421 \cdot 144} = 246 \text{ A},$

c) towarowy: $I_{z \max} = \sqrt{421 \cdot 167} = 265 \text{ A}.$

Przy wszystkich rodzajach pociągów prowadzonych lokomotywą uniwersalną wielkość prądu zastępczego silników tej lokomotywy otrzymaliśmy tego samego rzędu. Przyjmując górną granicę tego prądu (to jest 222 A) jako prąd mocy ciągłej silnika na jego zaciskach będziemy mieli:

$$N_c = UI_c \eta = 1500 \cdot 222 \cdot 0,9 = 300 \text{ kW}.$$

Przy założeniu najmniej korzystnych warunków pracy lokomotywy, to jest wyłącznie prądem maksymalnym, mielibyśmy:

$$N_c = 1500 \cdot 273 \cdot 0,9 = 370 \text{ kW}.$$

Otrzymana bardzo mała moc silników trakcyjnych lokomotywy uniwersalnej typu BB tłumaczy się założonymi bardzo łagodnymi warunkami pracy lokomotywy (patrz tablica 4). Warunki te nie uwzględniają w szczególności przypadków zatrzymywania pociągów pod sygnałami, a więc skrócenia odległości międzyprzystankowej, oraz konieczności wyrównywa-

nia awaryjnych opóźnień pociągów, wymagającej podniesienia szybkości technicznej i handlowej pociągu, przede wszystkim przez podniesienie szybkości początku hamowania, a powodującej znaczny wzrost jednostkowego zużycia energii, a jednocześnie tym silniejszy wzrost mocy lokomotywy. Dlatego przy obliczaniu mocy znamionowej silników trakcyjnych należy uwzględnić ewentualne pogorszenie się warunków ruchowych ich przyszłej pracy przez odpowiedni dobór wielkości poszczególnych parametrów, w szczególności szybkości hamowania i szybkości technicznej oraz odległości międzyprzystankowej.

Podany przykład obliczenia mocy lokomotywy wykazuje, jak stosunkowo niewielkiej potrzeba byłoby mocy dla prowadzenia pociągów w normalnych warunkach ich pracy. Oczywiście tak łagodne warunki pracy nie mogą być przyjmowane przy projektowaniu lokomotywy elektrycznej.

Jeśli na przykład uwzględnimy dodatkowe zatrzymania pociągu osobowego pod sygnałami w ilości 20% zatrzymań rozkładowych, to dla utrzymania założonej szybkości technicznej konieczne będzie znaczne skrócenie czasu biegu pociągu bez prądu i podniesienie szybkości początkowej hamowania. Jednostkowe zużycie energii a z nim i prąd średni wzrosną wtedy, jak wynika z obliczeń o ponad 30%, ponieważ zaś w tym samym mniej więcej stosunku wzrośnie i czas względny pracy silnika, prąd zastępczy wzrośnie o około 15% (patrz wzór 5.13). Moc ciągła silnika dla najmniej korzystnych warunków jego pracy wyniesie więc przy tych założeniach:

$$N_c = 370 \cdot 1,15 = 425 \text{ kW}.$$

Metoda analityczna obliczania jednostkowego zużycia energii trakcyjnej [7] oraz podana wyżej metoda obliczania współczynnika c pozwalają, dla danych w założeniu warunków pracy lokomotywy, obliczyć z góry jej moc znamionową, tak że późniejsze sprawdzanie tej mocy na podstawie prądu zastępczego jest już zbędne: jak wynika bowiem z przeprowadzonej analizy, prąd zastępczy nie może przekroczyć obliczonej analitycznie jego górnej granicy ze wzoru (5.10), jeśli przejazd analityczny wykonany będzie w założonych warunkach, tzn. jeśli do tego przejazdu będą użyte czy też w jego wyniku uzyskane założone uprzednio wysokości poszczególnych parametrów (końcowa szybkość rozruchu oporowego i początkowa hamowania, szybkość maksymalna i techniczna, czas biegu pod prądem itd.).

Jednakże wielkość prądu zastępczego, stanowiąca powszechnie główne, a u nas dotąd jedyne kryterium dla oceny mocy silnika trakcyjnego, nie jest kryterium wystarczającym. Jak wynika z poprzednich rozważań (rozdz. 1—4), samo założenie, na którym opiera się pojęcie prądu zastępczego, nie odpowiada w silnikach trakcyjnych istotnemu stanowi rzeczy, gdyż nie uwzględnia strat o przebiegu innym niż proporcjonalnym do kwadratu prądu. Następnie, jak wynika z rozdziału 4, prąd zastępczy

obliczony ze wzoru (4.1) lub też (4.2) nie przedstawia prądu odpowiadającego ilości ciepła wydzielonego rzeczywiście w silniku, co spowodowane jest nieuwzględnieniem z jednej strony właściwego charakteru strat silnika, z drugiej zaś — jego biegu bez prądu. A wreszcie nawet wielkość prądu, nazwanego wyżej równoważnym, przy którym wydzielą się ta sama ilość ciepła co przy rzeczywistym zmiennym obciążeniu silnika, nie stanowi jeszcze wystarczającego kryterium dla oceny mocy silnika, ponieważ:

1. przyrost temperatury silnika nie zależy wyłącznie od stopnia jego nagrzewania, lecz także od chłodzenia, którego intensywność zmienia się w zależności od obciążenia i obrotów;
2. średni stopień nagrzewania się silnika mówi jedynie o średniej, a nie o maksymalnej temperaturze silnika, która dopiero decyduje o możliwościach i przydatności silnika o danej mocy do założonych dla niego warunków.

Z powyższego wynika, że jedyne kryterium oceny nagrzewania się silnika trakcyjnego stanowić może tylko przebieg jego temperatury w funkcji drogi pociągu.

Obliczenie takiego przebiegu temperatury musi być oparte na wynikających z teorii nagrzewania się silnika lub otrzymanych doświadczalnie krzywych nagrzewania się i może być uzyskane na drodze analitycznej lub wykreślanej równocześnie z przejazdem analitycznym.

*Katedra Kolei Elektrycznych
Politechniki Łódzkiej*

WYKAZ LITERATURY

1. Aleksiejew A. E. — Тяговые электродвигатели — 1951.
2. Arnold E. — Gleichstrommaschinen — t. I, 1919.
3. Dubicki B. — Maszyny elektryczne.
4. Jaworski Cz. — Metoda analityczna obliczania jednostkowego zużycia energii trakcyjnej — Arch. Elektrot., tom II, zeszyt 1—2, 1953.
5. Podoski R. — Trakcja elektryczna — t. I.
6. Rozenfeld W. E., Sidorow N. N., Kuzin S. E. — Электрические железные дороги — 1951.
7. Szlachto P. N., Zacharczenko D. D. — Подвижной состав электрических железных дорог — t. II, 1951.

Ч. ЯВОРСКИ

АНАЛИЗ РАБОТЫ ПОЕЗДНОГО ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ (Аналитический метод расчёта мощности электровоза)

Резюме

При проектировании электрификации железных дорог возникает среди других необходимость определения мощности электровозов. До сих пор нет метода, дающего возможность расчёта этой мощности прямо для заранее определённых условий работы электровоза. Поэтому эту мощность определяют сперва приблизительно

„на глаз” на основании опыта проектирующего, а затем по предварительному проекту электровоза и подсчёту его тяговых характеристик производят на основании этих данных, ряд аналитических поездок с разными поездами, предвиденными для этого электровоза и по предвиденным для них маршрутам. В результате этих поездок получается среди других величина среднеквадратичного тока двигателей электровоза, составляющего критерий для оценки правильности избранной предварительно мощности поездных электродвигателей: если полученный среднеквадратичный ток не больше тока постоянной мощности двигателей или близок ему, можно считать избранную мощность двигателей правильной; в противном случае следует, на основании полученной после аналитических поездок величины среднеквадратичного тока принять новую величину мощности электровоза, подобрать вновь соответствующие двигатели и передачу, подсчитать тяговые характеристики электровоза, а затем на основании этих данных производить вновь аналитические поездки с целью проверки среди других среднеквадратичного тока электродвигателей.

Рассмотренный выше метод подбора мощности поездных электродвигателей путём испытаний является, конечно, весьма кропотливым и требует в особенности, учитывая необходимость при этом методе аналитических поездок, продолжительного времени для проектирующего, — времени насчитываемого обыкновенно сотнями часов.

Для разработки проблемы, какой является недостаток какого-либо метода, допускающего возможно точно определить заранее необходимую мощность поездных электродвигателей, автор проводит анализ потерь и коэффициента полезного действия двигателя, а затем исследует значение величины среднеквадратичного тока, выводит зависимость между среднеквадратичным током и током постоянной мощности — с одной стороны, и между среднеквадратичным током и средним — с другой, при чём в результате приведенного анализа ставит следующие тезисы:

1. Потери поездного электродвигателя можно выразить в виде суммы переменной величины ΔP_{cu} , являющейся потерей в обмотках, пропорциональной квадрату тока, и некоторой постоянной величины ΔP_r , вмещающей все остальные потери двигателя: $\Delta P = \Delta P_{cu} + \Delta P_r = RI^2 + \text{const}$ где R полное сопротивление цепи поездного электродвигателя при переменном токе.

2. Наибольший коэффициент полезного действия дают поездные электродвигатели при таком токе I_η , при котором переменные потери двигателя ΔP_{cu} равны постоянным. Соответствующая этому току степень нагрузки двигателя a_η , т. е. отношение тока I_η к току постоянной мощности I_c , равна квадратному корню из отношения постоянных потерь к потерям переменным при постоянной мощности:

$$a_\eta = \sqrt{\left(\frac{\Delta P_r}{\Delta P_\eta} \right)_c}$$

3. Степень нагрева двигателя ψ' , т. е. отношение потерь ΔP при данном токе к потерям ΔP_{cu} , при токе постоянной мощности зависит не только от нагрузки двигателя a , т. е. от соотношения соответствующих токов I и I_c , но также от указанного выше параметра a_η , при чём его можно выразить формулой

$$\psi' = \frac{a_\eta^2 + a^2}{a_\eta^2 + 1}$$

Таким образом при $a < 1$ он всегда ниже степени потерь a^2 , получаемого в результате предпосылки при определении понятия среднеквадратичного тока.

4. Среднеквадратичный ток электродвигателя всегда больше „эквивалентного” тока т. е. такого, при котором выделяется столько-же теплоты, как и при действитель-

ной переменной нагрузке двигателя, причём соотношение этих токов $\beta = I_s : I_r$, представляющее собой указатель запаса мощности двигателя, равно:

$$\beta = \sqrt{1 + a_{\eta}^2 \tau}$$

где τ_0 — отношение продолжительности хода двигателя без тока к полному времени хода электродвигателя и для обычно встречаемых величин коэффициентов a_{η} и τ_0 колеблется в пределах

$$1,1 < \beta < 1,3$$

5. Отношение с среднеквадратичного тока к среднему току поездного электродвигателя двусторонне ограничено, причём эти границы можно подсчитать заранее, исходя из зависимости

$$\sqrt{\frac{1}{\tau_p}} < c < \sqrt{\varrho + \mu - \varrho \mu \tau_p}$$

где τ_p — отношение времени работы двигателей под током к полному времени их хода,

ϱ — отношение максимального тока двигателя к среднему току,

μ — отношение минимального тока двигателя к среднему току.

Необходимую для подсчёта параметров ϱ и μ величину среднего тока двигателя можно подсчитать на основании формулы

$$I_{sr} = \frac{j'_0 VG}{mU}$$

где m — число двигателей в электровазоне,

U — напряжение на зажимах двигателя — вольт,

V — средняя скорость поезда — км/час.,

G — полный вес поезда, в тоннах,

j'_0 — удельное, т. н. кажущееся¹ потребление энергии, подсчитанное аналитическим методом в $\frac{\text{Вт} \cdot \text{ч}}{\text{ткм}}$.

6. Так как параметры ϱ и μ для данного двигателя и данных заранее условий работы электровазона возможно подсчитать вполне точно, а параметр τ_p для данного рода поезда, данных условий движения и предпринятого способа ведения поезда, — можно принять вперёд с достаточной для технических целей точностью — поэтому возможен прямой подсчёт для принятых заранее условий работы электровазона, обыкновенно сравнительно узких границ коэффициента, т. е. и среднеквадратичного тока. Таким образом проверка среднеквадратичного тока путём аналитических поездок с этой целью является излишней, а номинальную, постоянную мощность электровазона и в кв. мы можем сразу подсчитать, принимая верхнюю границу коэффициента с по формуле

$$N = \frac{m U I_2}{1000} = \frac{c j VG}{1000}$$

7. Величина среднеквадратичного тока полученная приведенным методом зависит от принятой предварительно величины коэффициента τ_p . Причиной возникающей вследствие этого некоторой факультативности полученного результата явля-

¹ Смотри [4].

ется не метод автора, но полная зависимость среднеквадратичного тока от условий работы электровоза и способа ведения его. Чем работа электродвигателей будет менее постоянная а более прерывистая, по объективным причинам, как переменность профиля линии, или субъективным, как принятый машинистом способ ведения поезда — тем выше будет отношение среднеквадратичного тока к среднему. т. е. тем больше нагрев двигателей по отношению к исполненной эффективной их работе.

На основании произведенного анализа автор приходит к заключению, хотя с помощью поданного им метода возможно подсчитать заранее для predetermined условий работы электровоза предельные величины среднеквадратичного тока, следовательно и мощности электровоза, однако окончательным критерием выбора мощности двигателя должен быть не среднеквадратичный ток двигателя, но изображенный аналитическим или начертательным методом ход его температуры как функции пути поезда.

CZ. JAWORSKI

ANALYSIS OF THE TRACTION MOTOR PERFORMANCE

(An analytical method of electric locomotive rating computation)

Summary

When projecting railway electrification schemes one has to find the power of the locomotive. There is no known method of computing it beforehand for given conditions of the locomotive performance. Therefore to start with, the locomotive power is assumed approximately according to the experience of the designer. After the preliminary design of the locomotive and the computation of its traction characteristics a number of analytical trials is performed with the assumption of different trains for the given locomotive and for the given lines. As a result of such trials the value of the equivalent current of the locomotive motors is obtained. This current is the criterion of the proper estimation of the traction motor rating. If the equivalent current approaches but does not exceed the continuous rated current of the motor, the motor rating is considered to be properly chosen. Otherwise, a new value of locomotive rating is assumed from the value of the equivalent current obtained out of the analytical trial computations, new motors and gearings are chosen, locomotive tractive characteristics are calculated and new analytical trial computations are undertaken in order to check the equivalent current of the motor.

The described experimental method of finding the traction motor rating is of course very tedious and requires hundreds of working hours of the designer, because of the necessity of the analytical trials.

In order to fill the gap caused by the lack of a method allowing with sufficient accuracy to find out beforehand the traction motor rating required, the author introduces an analysis of the losses and efficiency of the motor. Then he investigates the value of the equivalent current, deduces the relations between the equivalent current and the continuous rated current on the one side, and between the equivalent current and the average current on the other. The results of the analysis are given as follows:

1. The losses of the traction motor can be expressed as the sum of the variable ΔP_{cu} representing the winding losses and proportional to the square of the current and to a constant ΔP_r , representing the remaining motor losses:

$$\Delta P = \Delta P_{cu} + \Delta P_r = RI^2 + \text{const},$$

where R — is the total A. C. resistance of the traction motor circuit.

2. The highest efficiency of the traction is obtained at such a value of the current I_η , when the variable parts of the motor losses ΔP_{cu} are equal to the constant losses. The corresponding motor loading α_η , i. e. the ratio of the current I_η to the continuous rated power I_c , is equal to the square root of the ratio of the constant to the variable losses at the continuous rated power:

$$\alpha_\eta = \sqrt{\left(\frac{\Delta P_r}{\Delta P_{cu}} \right)_c}.$$

3. The degree of motor-heating ψ' , i. e. the ratio of the losses ΔP at the given current to the losses ΔP_{cu} at the continuous rated current depends not only on the motor loading α , i. e. the ratio of the corresponding currents I and I_c , but also on the above parameter α_η and may be expressed by the equation

$$\psi' = \frac{\alpha_\eta^2 + \alpha^2}{\alpha_\eta^2 + 1}.$$

The degree of motor heating, when $\alpha > 1$ is therefore always lower than the degree of heating α^2 , which follows from the definition of the equivalent current.

4. The equivalent current I_e of the traction motor is always higher than the „substitute“ current I_r , i. e. a current which causes such heating as in the case of the real variable loading of the motor. The ratio of the current $\beta = I_e : I_r$, which gives the measure of the overrating of the motor, is

$$\beta = \sqrt{1 + \alpha_\eta^2 \tau_0}.$$

where τ_0 is the ratio of the no-load run time of the motor to the total time of the motor run. For the usual values of the coefficients α_η and τ_0

$$1.1 < \beta < 1.3.$$

5. The ratio c of the equivalent current to the average current of a traction motor is limited on both sides and the limits can be found beforehand from the following formula:

$$\sqrt{\frac{1}{\tau_p}} < c < \sqrt{\varrho + \mu - \varrho\mu\tau_p},$$

where τ_p — ratio of the load run time of the motor to the total run time,

ϱ — ratio of the maximum current of the motor to the average current,

μ — ratio of the minimum current of the motor to the average current.

In order to find the parameters ϱ , μ , and c we calculate the value of the average current using the equation:

$$I_{sr} = \frac{j'_0 VG}{mU},$$

where m — number of motors in a locomotive,

U — motor terminal voltage in volts,

V — average speed of the train in km/h,

G — total weight of the train in tons,

j'_o — unit „apparent“¹ power consumption computed analytically in $\frac{\text{Wh}}{\text{tkm}}$.

6. The parameters ρ and μ for a given motor and conditions of locomotive work can be accurately calculated. The parameter τ_p for the given kind of train, conditions of traffic and assumed speed-time curve may be assumed with sufficient accuracy for technical purposes. Therefore it is possible to calculate beforehand, for the given conditions of locomotive work, the relatively narrow limits of the coefficient c and consequently the equivalent current.

It is therefore unnecessary to perform analytical trial calculations in order to check the equivalent current values. The rated power of the locomotive can be calculated beforehand, deriving the upper limit of the coefficient c from the formula

$$N = \frac{mUI_2}{1000} = \frac{cVG}{1000}.$$

7. The value of the equivalent current obtained analytically depends on the assumed value of the coefficient τ_p . However, the arbitrary result is not caused by the proposed method, but by the exact relation of the equivalent motor current to the conditions of the locomotive work and its time-speed curve.

The less continuous the working of the coach-motors, i. e. the more it is interrupted as a results of objective causes — like frequent changes of the road-profile — or subjective causes — like the mode of driving — the higher will be the ratio of equivalent to average current and the higher will be the motor heating compared with the effective work done.

On the basis of the analysis the author concludes, that by means of the described method it is possible, for assumed conditions of the locomotive performance, to compute beforehand the limiting values of the equivalent current and, in consequence, the power rating of the locomotive. The final criterion of selecting the motor power rating should be, however, not the equivalent current of the motor, but the analytically or graphically obtained motor-temperature curve as function of the distance covered by the train.

¹ See: [4].

ERRATA

Zeszyt 4, Tom III, 1954

L.p.	str.	wiersz		j e s t	powinno być
		od dołu	od góry		
1	452	6	—	$R^2 - 4n^2 h_2$	$R^2 - 4n^2 h R^2$
2	467	—	10	rozwiązanie	rozwiązanie 3
3	467	—	15	$v_1 - v_2$	$V_1 - V_2$
4	468	—	9	$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{v_1} = K_{v_1}$	$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{V_1} = K_{V_1}$
5	468	—	11	$K_{v_1} = 0$	$K_{V_1} = 0$
6	468	—	12	$K_{v_1} = 0$	$K_{V_1} = 0$
7	468	9	—	$\frac{K_{p_1} = 0}{K_0}$	$\frac{K_{V_1} = 0}{K_0}$
8	468	1	—	$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{v_2} K_{v_2}$	$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{V_2} = K_{V_2}$
9	474	4	—	$4 \cdot 4 \cdot e$	$4 \cdot 4 \cdot e^4$
10	451	Rysunek 4 powinien być obrócony o 90° w lewo			
11	454	Rysunek 5 powinien być obrócony o 90° w prawo.			
12	500	—	10	$n_k \rightarrow \frac{\Phi_2(\Omega)}{\Phi_2(\Omega)}$	$n_k \rightarrow \frac{\Phi(\Omega)}{\Phi(\omega)}$
13	511	—	10	drugiej harmonicznej	dla drugiej harmonicznej
14	515	8	—	(23)	(23b)
15	519	—	16	zespolona	zespolona zewnętrzna
16	519	—	18	zespolona	zespolona zewnętrzna
17	529	—	6	X_2	X_z
18	530	Rysunek 19		$\hat{U}''$	$\hat{U}''_o$
19	530	„	„	$\hat{U}''_q$	$\hat{U}''_{qo}$
20	530	„	„	$\Delta \hat{U}$	$\Delta \hat{U}''_o$
21	531	4	—	Pierwszy	Drugi
22	532	10	—	Drugi	Pierwszy
23	533	—	7	$\overline{AC}$	$\overline{OC}$
24	534	—	6	(88)	(78)
25	534	—	8	(89)	(79)
26	535	—	11	$E_{d_o} = U_{d_o} + {}_d I_{d_o}$	$E_{d_o} = U_{d_o} + X_d I_{d_o}$

WYTYCZNE DLA AUTORÓW

Komitet Redakcyjny prosi autorów o ułatwienie prac redakcyjnych związanych z przygotowaniem do druku nadesłanych artykułów przez przestrzeganie podanych wytycznych przy przygotowaniu maszynopisu:

1. Prace powinny być napisane pismem maszynowym, na pojedynczych arkuszach formatu A4, jednostronnie, z interlinią (co drugi wiersz), z marginesem 3 cm z lewej strony. Stronice numerowane. Artykuły należy nadsyłać w dwóch egzemplarzach.
2. Wzory i oznaczenia należy wpisywać ręcznie, czytelnie, używając jedynie liter łacińskich i greckich. Wskaźniki niżej liter i wykładniki potęg pisać należy szczególnie dokładnie i wyraźnie.
3. Każda praca powinna być zaopatrzona w krótkie streszczenie (analizę) w języku polskim do 25 wierszy maszynopisu oraz obszerniejsze streszczenia (do 20% objętości artykułu) w języku rosyjskim oraz angielskim, francuskim lub niemieckim. W razie niemożności nadesłania streszczenia w języku obcym autor dostarcza odpowiednie streszczenie w języku polskim w trzech egz. z jednoczesnym wpisaniem, o ile możliwości, terminologii w języku rosyjskim oraz w języku obcym.
4. Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonywać na oddzielnych arkuszach z podaniem kolejnych numerów rysunków. W tekście i na marginesie, obok właściwego tekstu, należy podać jedynie odpowiadający numer rysunku. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.
5. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót: rys.) i nie używać określeń jak figura, szkic, fotografia. U samego dołu rysunku (a przy fotografiach — na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, napis pod rysunkiem, tytuł pracy i nazwisko autora.
6. Wszystkie tablice (unikać zbyt dużych) podobnie jak rysunki należy wykonywać na oddzielnych arkuszach i numerować kolejno liczbami arabskimi. U góry każdej tablicy podać tytuł (napis) objaśniający.
7. Po zakończeniu artykułu należy podać wykaz literatury, wymieniając w następującej kolejności: nazwisko autora i pierwsze litery imion, pełny tytuł dzieła lub artykułu, tytuł czasopisma, tom, numer zeszytu, rok i miejsce wydania oraz ewentualnie numer strony. Pozycje powinny być ponumerowane w kolejności alfabetycznej autorów; w tekście — powołania na numer pozycji w nawiasie kwadratowym, np. [3].
8. Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egzemplarzy odbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze autor może zamówić w redakcji na własny koszt przy przesyłaniu korekty swjej pracy.

U.w a g a: Autora obowiązuje korekta autorska, którą należy zwracać w ciągu 3 dni pod adresem: Redakcja „Archiwum Elektrotechniki“, Warszawa, Koszykowa 75, Politechnika, Gmach Elektrotechniki, Zakład Elektroniki PAN. tel. 8.32.04.

Cena zł 15,—