

Biblioteka Wydziału
Politechniki

161.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

TOM IV · ZESZYT 4

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1955

SPIS TREŚCI	Str.
J. Groszkowski: Cykl graniczny układów drgań o jednym wyraźnym elemencie magazynującym energię	509
J. Osowski: Analiza przebiegów napięciowych w obwodzie anodowym wzmacniacza rezonansowego klasy C	521
S. Sławiński: Wpływ częstotliwości zasilania na sztywność i obciążalność łącza selsynowego	547
P. Szulkin: Oddziaływanie zwrotne pola elektromagnetycznego na elektrony pobudzające w rezonatorze cylindrycznym w obecności pola magnetycznego	577
H. S. Kozłowski: Teoria optymalnych kształtów maszyn indukcyjnych	585
S. Szpor: Uzupełnienie teorii relaksacyjnej rozwoju pioruna — Czas przerwy między schodkami	609
Komunikaty z prac Zakładu Elektroniki IPPT PAN	621

СОДЕРЖАНИЕ	
Я. Грошковски: Предельный цикл колебательных систем с одним отчётливым элементом аккумулирующим энергию	509
Г. Осёвски: Анализ напряжения в анодном контуре резонансного усилителя класса C	521
С. Славиньски: Влияние питающей частоты на жёсткость и нагружаемость сельсинной связи	547
П. Шулькин: Обратное влияние электромагнитного поля в цилиндрическом резонаторе на движение вязки электронов, вызывающих колебания в присутствии сильного магнитного поля	577
Г. С. Козловски: Теория оптимальных форм индукционных машин	585
С. Шпор: Пополнение релаксационной теории развития молнии — Междуступенчатый интервал времени	609
С о б щ е н и я	621

CONTENTS — SOMMAIRE	
J. Groszkowski: The limit cycle of systems with a single distinct energy storing element	509
J. Osowski: The analysis of the voltage phenomena in the anode circuit of a class C resonance amplifier	521
S. Sławiński: The influence of the input frequency on the stiffness and loading capacity of a synchro transmission system	547
P. Szulkin: The retroaction of the electromagnetic field in a cylindrical cavity resonator on the movement of exciting electrons in the presence of a strong magnetic field	577
H. S. Kozłowski: The theory of the optimum dimensions of induction machines	585
S. Szpor: Contribution to the relaxation theory of the lightning propagation Interval of time between two steps	609
Communiqués	621

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

TOM IV • ZESZYT 4

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA

R A D A R E D A K C Y J N A

PROF. JANUSZ LECH JAKUBOWSKI, PROF. BOLESŁAW KONORSKI,
PROF. IGNACY MALECKI, PROF. WITOLD NOWICKI, PROF. PAWEŁ SZULKIN,
PROF. STANISŁAW SZPOR

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

Redaktor Naczelny

PROF. JANUSZ GROSZKOWSKI

Z-ca Redaktora Naczelnego

PROF. PAWEŁ NOWACKI

Sekretarz

WACŁAW ZWOLAKOWSKI

ADRES REDAKCJI:

Warszawa, ul. Koszykowa 75, Politechnika,
Zakład Elektroniki PAN, tel. 8.32.04

Państwowe Wydawnictwo Naukowe - Dział Czasopism
Warszawa, Krakowskie Przedmieście 79

Nakład 1273+103 egz.	Do składania 23 VIII. 1955
Ark. wyd. 11 druk. 7,5	Podpisano do druku 22 XI. 1955
Papier dr. sat. 70 g V kl. 70×100/16	Druk ukończono w listopadzie 1955
Cena zł 15.—	K-6-1384. - Zamówienie 417/132

POZNAŃSKA DRUKARNIA NAUKOWA — POZNAŃ, FREDRY 10

621.396.615.17 : 621.3.011.5.

J. GROSZKOWSKI

Cykl graniczny układów drgań o jednym wyraźnym elemencie magazynującym energię*

Rękopis dostarczono 11. 12. 1954

Rozpatrzono zjawiska zachodzące w układzie relaksacyjnym pobudzonym przez opór ujemny o charakterystyce bezpętlowej, biorąc pod uwagę rolę elementu resztkowego (np. indukcyjności — w generatorze RC , pojemności — w generatorze RL). Podano przebiegi prądu i napięcie na poszczególnych elementach obwodu relaksacyjnego z pojemnością.

1. WSTĘP

Układami drgań o jednym wyraźnym elemencie magazynującym energię nazwiemy układy sprowadzające się do indukcyjności L lub pojemności C oraz oporu R , pobudzane do drgań za pomocą oporu ujemnego, który jest określony charakterystyką opadającą $i=f(u)$ lub $u=f(i)$. Zachodzące w takich układach zjawiska należą do typu tzw. d r g a ń r e l a k s a c y j n y c h; otrzymywane przebiegi, znacznie odbiegając od sinusoidalnych, mają raczej charakter — jak przyjęto określać — pewnego rodzaju skoków prądu bądź napięcia, zachodzących w sposób periodyczny z częstotliwością, która jest dana przez stosunek $L : R$ lub przez iloczyn CR .

W rozważaniach przyjmuje się zazwyczaj, że układ drgań składa się wyłącznie z indukcyjności L i oporu R , bądź z pojemności C i oporu R , to znaczy pomija się wielkości resztkowe: w pierwszym przypadku pojemność C_0 , w drugim zaś — indukcyjność L_0 . Przy takim założeniu dopuszcza się w układzie występowanie nieskończenie krótko trwających skoków napięcia bądź prądu, które zachodzą na charakterystyce ujemnego oporu układu pobudzającego; wymaga to przyjęcia warunku, że charakterystyka oporu ujemnego jest linią pętlową o zaskoku napięcia lub prądu [1]. Istnienie zaskoku na charakterystyce oznacza konieczność występowania w samym oporze ujemnym elementów, które są zdolne do magazynowania

* Praca referowana na Kursie-Konferencji Elektrotechniki Teoretycznej ZET-IPPT-PAN w Karpaczu, we wrześniu 1954.

energii (lub przesuwania fazy między napięciem i prądem), czyli pewnych wielkości wewnętrznych, które odpowiadają resztkowej pojemności C_0 bądź indukcyjności L_0 [2]. W ten sposób dochodzimy w rezultacie do układów oscylacyjnych typu LCR lub CLR , a więc układów z dwoma elementami magazynującymi energię.

Zagadnienie staje się bardziej interesujące, gdy charakterystyka układu pobudzającego jest linią cienką, co ma, praktycznie biorąc, miejsce w przypadku oporów ujemnych elektronowych aż do bardzo nawet wielkich częstotliwości (dla których dopiero występuje ograniczenie, wywołane czasem przelotu elektronów).

2. PRZEBIEGI RELAKSACYJNE W UJĘCIU TEORII RÓWNOWAGI UROJONEJ MOCY HARMONICZNYCH

Ponieważ zasada równowagi urojonej mocy harmoniczných [3] musi obowiązywać dla każdego układu drgań, można napisać dla rozpatrywanego układu (z jednym wyraźnym elementem magazynującym energię) równanie

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \operatorname{Im} \{Z_k\} n_k^2 = 0; \quad (1)$$

$\operatorname{Im} \{Z_k\}$ — jest tu składową urojoną impedancji, czyli reaktancją obwodu dla częstotliwości $k\omega$.

n_k — jest zawartością harmoniczných prądowych w obwodzie, ω — częstotliwością podstawową drgania.

Jeśli suma $\sum$ w równaniu (1) ma być równa zeru, to wobec dodatnich wartości wielkości k i n_k^2 muszą w wyrażeniu $\operatorname{Im} \{ \}$ wystąpić wyrazy o znakach przeciwnych. Zatem układ CR musi bezwarunkowo zawierać jakiś element resztkowy L_0 , a układ LR — jakiś element resztkowy C_0 .

Z punktu widzenia fizykalnego jest to całkowicie uzasadnione, gdyż w rzeczywistości nie może występować nieskończenie szybki skok natężenia prądu w układzie CR , ani nieskończenie szybki skok napięcia w układzie LR . Również w świetle zjawisk zachodzących w polu elektromagnetycznym skoki prądu lub napięcia oznaczałyby istnienie zmieniającego się pola elektrycznego, które nie wywołuje pola magnetycznego, lub istnienie zmieniającego się pola magnetycznego, które nie wywołuje pola elektrycznego.

W takim stanie rzeczy wielkości resztkowe w żadnym przypadku nie mogą być pomijane, nawet przy przeprowadzaniu rozważań teoretycznych, jeśli nie chcemy zatracić sensu fizykalnego zachodzących zjawisk.

3. PRZEBIEGI RELAKSACYJNE W UKŁADZIE $RC(L)$

Rozpatrzmy teraz pobudzany oporem ujemnym układ LCR (rys. 1), w którym jeden z elementów magazynujących energię, na przykład indukcyjność L , będzie malał aż do niezmiernie małej wartości.

Zgodnie z warunkami (1) dla układu LCR napiszemy równanie

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C} \right) n_k^2 = 0, \quad (2)$$

czyli

$$\omega L \sum_{k=1}^{\infty} k^2 n_k^2 - \frac{1}{\omega C} \sum_{k=1}^{\infty} n_k^2 = 0.$$

Stąd

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} n_k^2}{\sum_{k=1}^{\infty} k^2 n_k^2} = h^2 \frac{1}{LC} \quad (4)$$

albo

$$\omega = h \frac{1}{\sqrt{LC}} = h\omega_0, \quad (5)$$

gdzie

$$h = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{\infty} n_k^2 \right) : \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 n_k^2 \right)} \quad (6)$$

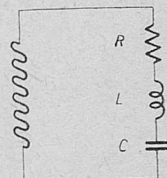
oraz

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (7)$$

W stanie bliskim do stanu granicznego będzie $n_1 \approx 1$, $n_k \Big|_2^{\infty} \approx 0$ skąd $h \approx 1$, a zatem $\omega \approx \omega_0$. W miarę odchodzenia od stanu granicznego (np. przez zmniejszenie oporności R) mianownik w wyrażeniu (6) będzie wzrastał szybciej niż licznik, a zatem h , a z nim ω będzie malało. Wartość wielkości h , danej wyrażeniem (6), będzie zależała od widma harmonicznych, a więc od kształtu charakterystyki oporu ujemnego oraz od danych obwodu CLR .

W przypadku gdy $R=0$ ¹, przy danym kształcie charakterystyki nieliniowego oporu ujemnego, h będzie zależało jedynie od stosunku $L:C$.

Założmy, iż przy $R=0$ zmniejszamy indukcyjność L w kierunku bardzo małej wartości, dążącej do zera. Częstotliwość będzie malała i dążyła



Rys. 1

(3) Obwód $RC(L)$ pobudzany oporem ujemnym.

¹ Przypadek $R \neq 0$ można zawsze sprowadzić do przypadku $R=0$ przez odpowiednie zmniejszenie bezwzględnej wartości ujemnej oporności układu pobudzającego.

do wartości, która w przypadku charakterystyki oporu ujemnego o równaniu

$$u = -ri + r\varrho i^3 \quad (8)$$

jest dana wyrażeniem (patrz Dod. 1)

$$\omega^2 = \frac{\pi^2}{r^2 C^2 \left(\ln 2 - \frac{3}{2} \right)^2}. \quad (9)$$

Z przyrównania (9) do (4) mamy

$$L \sum_{k=1}^{\infty} k^2 n_k^2 = r^2 C \left(\frac{\ln 2 - \frac{3}{2}}{\pi} \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} n_k^2. \quad (10)$$

Prawa strona równania (10) ma wartość skończoną; wynika stąd, iż przy zmniejszaniu L do zera wyrażenie $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 n_k^2$ musi wzrastać do nieskończoności.

Wartość wielkości $\sum_{k=1}^{\infty} n_k^2$ jest zależna od kształtu charakterystyki oporu ujemnego; jest ona nieco większa od jedności i na przykład dla charakterystyki trzeciego stopnia wynosi około 1,22 (patrz Dod. 2). Przyjmując tę wartość, wyrażenie (10) napiszemy jako

$$\lim_{L \rightarrow 0} \left\{ L \sum_{k=1}^{\infty} k^2 n_k^2 \right\} = r^2 C (0,066)^2 \cdot 1,22 \approx 0,082 r^2 C. \quad (11)$$

Jeśli założymy, że harmoniczne nieskończenie wielkiego rzędu w rzeczywistości nie mogą powstawać, to suma $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 n_k^2$ nie może być równa nieskończoności, a zatem L nie może być równe zeru.

4. KSZTAŁT PRĄDU I NAPIĘĆ

Przyjmując konieczność istnienia w układzie pewnej resztkowej indukcyjności (L_0), otrzymujemy następujący obraz zachodzących tu zjawisk (rys. 2).

Napięcie u na oporze ujemnym związane jest z prądem i płynącym przez ten opór za pomocą charakterystyki oporu ujemnego, która wyraża się linią cienką (rys. 3a); chwilowy punkt pracy podczas przebiegu porusza się zawsze po tej charakterystyce między punktami $abcd$, jak to pokazano strzałkami pierzastymi na rys. 3a.

Napięcie u_C na pojemności C nie jest równe napięciu u na oporze ujemnym; różni się ono o spadek napięcia (u_L) występujący na indukcyjności resztkowej (L_0), a mianowicie

$$u_C = -u - (u_L), \quad (12)$$

co wynika z równania

$$u + u_C + (u_L) = 0.$$

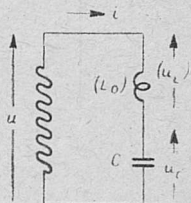
Napięcie na pojemności u_C nie może ulegać nagłym skokom; zatem różnica tego napięcia u_C , przebiegającego po linii $abdca$, i napięcia u na oporze ujemnym, przebiegającego po charakterystyce $abcd$, występuje na indukcyjności resztkowej (L_0). Oczywiście

$$(u_L) = (L_0) \frac{di}{dt}. \quad (13)$$

Przebieg napięcia (u_L) uwidoczniłoby na rys. 3b. Dla (L_0)=0 musiałoby $\frac{di}{dt} = \infty$, co oznaczałoby nieskończenie szybkie zmiany prądu w obwodzie.

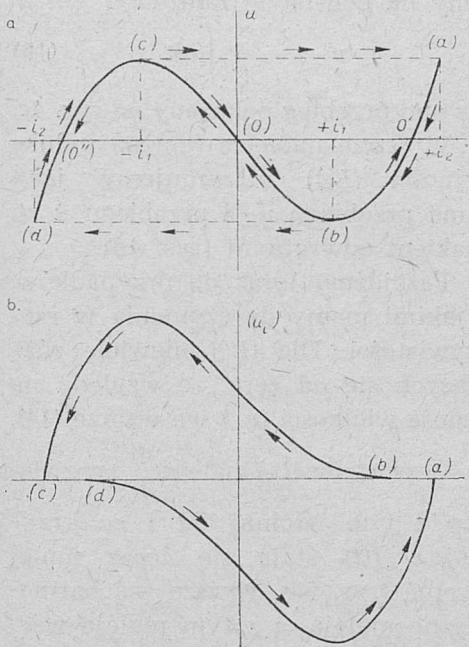
Rozpatrzmy teraz przebieg prądu i i napięć w poszczególnych elementach obwodu, najpierw dla przypadku abstrakcyjnego, to jest dla (L_0)=0.

Zależność prądu i w obwodzie w funkcji czasu t (rys. 4a) w zakresie wartości $(+i_2) \div (+i_1)$ oraz $(-i_2) \div (+i_1)$, a więc przy przebiegu po odcinkach ab i dc charakte-



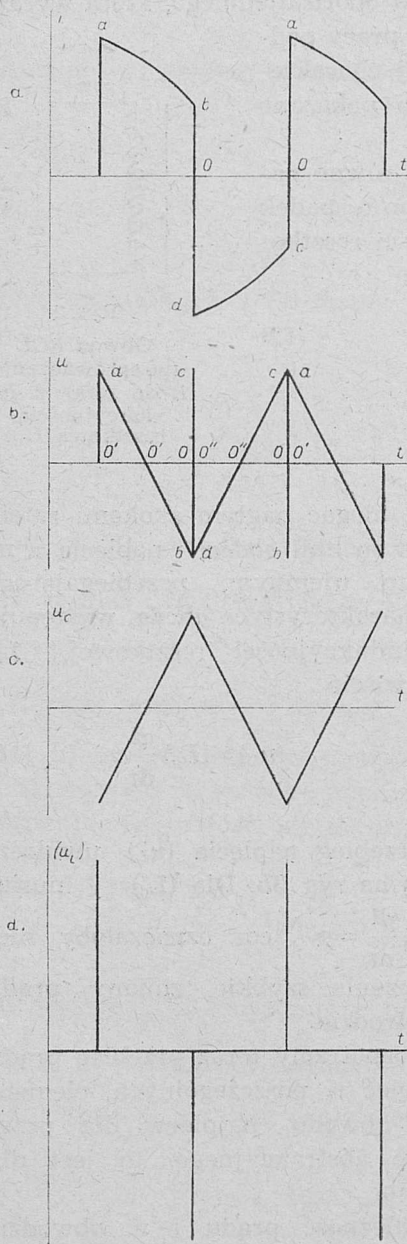
Rys. 2.

Obwód RCL
(po sprowadzeniu
R do zera) z in-
dukcyjnością
resztkową (L_0).



Rys. 3. a — napięcie i prąd na oporze ujemnym.

b — napięcie i prąd na indukcyjności resztkowej (L_0).



Rys. 4. *a* — przebieg prądu w obwodzie; *b* — przebieg napięcia na oporze ujemnym; *c* — przebieg napięcia na kondensatorze; *d* — przebieg napięcia na indukcyjności resztkowej.

rystyki oporu ujemnego (rys. 3a), określamy z równania (patrz Do-datek 1)

$$t = -rC \left(\ln i - \frac{3}{2} \varrho i^2 \right). \quad (14)$$

W zakresie wartości $(+i_1) \div (-i_2)$ i $(-i_1) \div (+i_2)$ zmiany prądu są bardzo szybkie (*bOd* lub *cOa*).

Na podstawie krzywej (14) oraz charakterystyki oporu ujemnego (8) możemy wykreślić przebieg napięcia u na oporze ujemnym $u = f(i)$. Należy zwrócić uwagę, iż w momentach czasu, w których zachodzą szybkie zmiany prądu, również zachodzą szybkie zmiany napięcia (rys. 4b).

Napięcie u_c na pojemności C w funkcji czasu (rys. 4c) znajdujemy na podstawie zależności

$$u_c = -\frac{1}{C} \int i dt \quad (15)$$

Ma ono przebieg pokazany na rys. 4c.

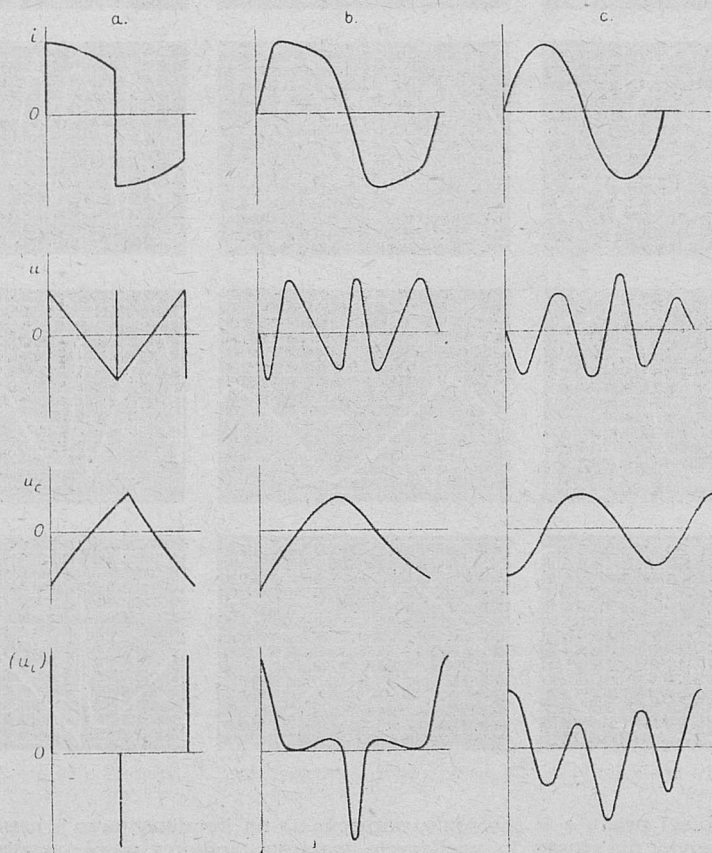
Wreszcie napięcie (u_L) na indukcyjności (L_0) otrzymujemy jako sumę przebiegu u_c i przebiegu u ze znakiem odwrotnym (rys. 4d).

Przejdźmy teraz do przypadków, z jakimi mamy do czynienia w rzeczywistości. Dla (L_0) niewiele różniących się od zera, ze względu na stałość wielkości (u_L) we wzorze (14),

ze wzrostem (L_0) maleje $\frac{di}{dt}$; w związku z tym odcinki *bd* i *ca* krzywej $i = f(t)$ stają się coraz mniej strome (rys. 5a), wyższe zaś harmoniczne maleją, a z tym maleje wartość wyrażenia $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 n_k^2$. Iloczyn

$(L_0) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 n_k^2$ ulega nieznacznemu tylko wzrostowi, tak iż częstotliwość, zgo-

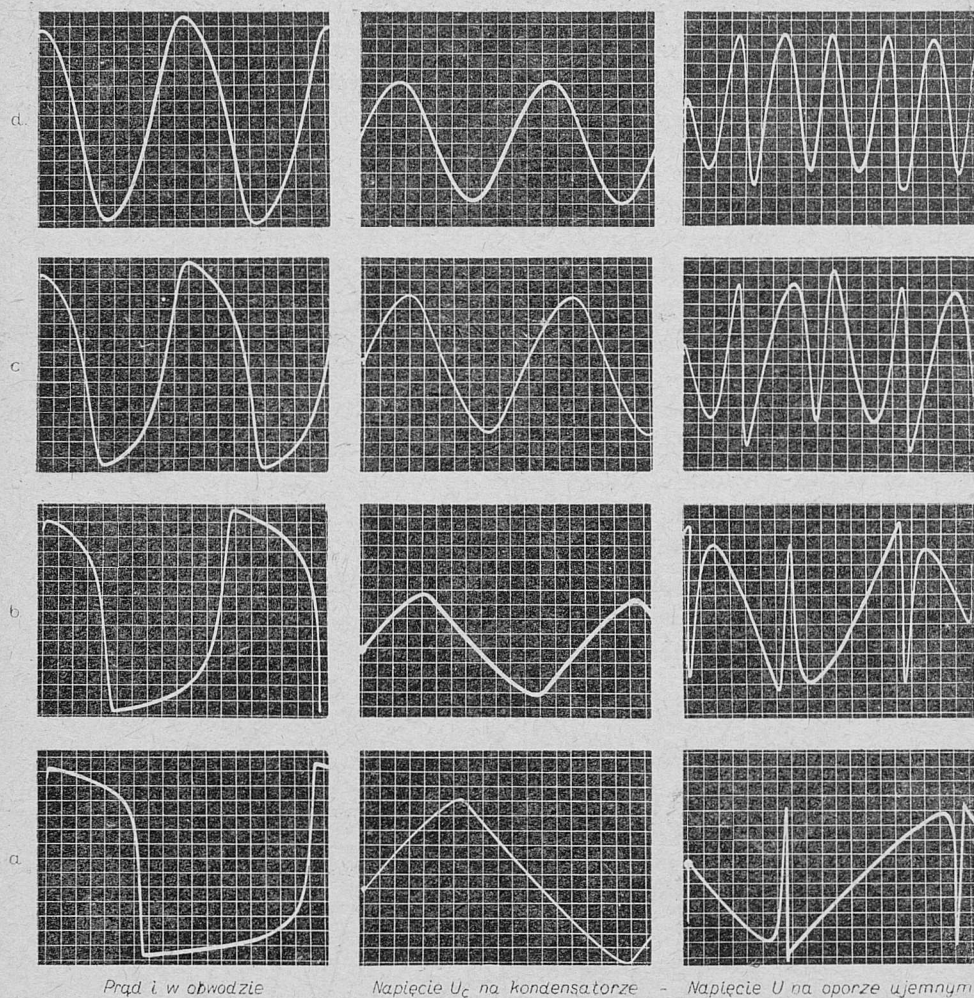
dnie ze wzorem (4), bardzo mało maleje. Natomiast znacznej zmianie ulega obraz przebiegu napięcia na oporze ujemnym (rys. 5b), a z tym i na indukcyjności (L_0) (rys. 5d): mianowicie odcinki $c-bd$ i $b-ca$, będące liniami schodzącymi się dla (L_0)=0, rozszczepiają się na bc i cd oraz cb i ba .



Rys. 5. a — przebiegi dla (L_0) $\rightarrow$ 0; b — przebiegi dla stosunkowo małej indukcyjności (L_0); c — przebiegi dla niezbyt małej indukcyjności (L_0).

Napięcie (u_c) na kondensatorze C ulega stosunkowo małym zmianom; ze względu na zmniejszenie się wysokich harmoniczných, wierzchołki krzywej $u_c = f(t)$ stają się jedynie mniej ostre.

Zdjęcia fotograficzne na rys. 6 uwidaczniają przebieg prądu w obwodzie, napięcie na kondensatorze oraz napięcia na oporze ujemnym o charakterystyce danej równaniem (8); zdjęcia te otrzymano za pomocą



Rys. 6. Przebiegi prądu i w obwodzie, napięcia u_C na kondensatorze i napięcia u na oporze ujemnym dla coraz to większych wartości indukcyjności resztkowej (L_0)
(a — przebieg relaksacyjny, d — przebieg prawie sinusoidalny).

analizatora równań różniczkowych ARR w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk² dla kilku różnych wartości stosunku $L : C$. Jak widać, potwierdzają one przewidywany poprzednim rozumowaniem przebieg zjawisk w układzie relaksacyjnym.

Zakład Radiotechniki
Politechniki Warszawskiej

² Za przygotowanie programu rozwiązania na analizatorze i wykonanie zdjęć wyrażam wdzięczność doc. drowi L. Łukaszewiczowi z IM-PAN.

WYKAZ LITERATURY

1. Groszkowski J. Indukcyjność i oporność ujemna elementu pobudzającego o zaskoku napięcia. Arch. Elektr. t. 2, zt. 3—4, 1953.
2. Groszkowski J. Lampa jarzeniowa jako indukcyjność. Kwart. Telek. 11, nr 3—4, 1948.
3. Groszkowski J. Zmiany częstotliwości a zawartość harmonicznych w układach oscylacyjnych. Przegl. Rad. 10, zt. 23—24, 1932 i nast.

DODATEK 1

Dla prądu i i napięcia u na pojemności C równego napięciu na oporze ujemnym, który jest dany równaniem

$$u = -ri + rqi^3, \quad (1')$$

mamy zależność

$$\frac{du}{dt} = \frac{i}{C}. \quad (2')$$

Różniczkując (1') względem czasu i podstawiając (2') napiszemy

$$\frac{i}{C} = -r(1 - 3qi^2) \frac{di}{dt}. \quad (3')$$

skąd

$$dt = -rC \left(\frac{di}{i} - 3qi^2 \right) \quad (4')$$

oraz

$$t = -rC \left(\ln i - \frac{3}{2} qi^2 \right). \quad (5')$$

Jeśli $(L_0) \rightarrow 0$, czas przebiegu punktu roboczego przez odcinki da i bc (rys. 3d) dąży do zera, a okres cyklu granicznego sprowadza się do czasu przebiegu po odcinkach ab i cd .

Zatem

$$T = 2 \int_{i_2}^{i_1} dt = -2 \int_{i_1}^{i_2} dt = 2rC \left[\ln \frac{i_2}{i_1} - \frac{3q}{2} (i_2^2 - i_1^2) \right] \quad (6')$$

Dla charakterystyki danej równaniem (1') znajdujemy łatwo

$$i_2 = \pm \frac{2}{\sqrt{3q}}, \quad i_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3q}} \quad (7'), (8')$$

a zatem

$$T = 2rC \left[\ln 2 - \frac{3}{2} \right], \quad (9')$$

czyli

$$\omega^2 = \frac{4\pi}{T^2} = \frac{\pi^2}{r^2 C^2 \left(\ln 2 - \frac{3}{2} \right)^2}. \quad (10')$$

DODATEK 2

W przypadku gdy charakterystyka oporu ujemnego jest krzywą trzeciego stopnia o równaniu (11), przebieg prądu w czasie ma kształt przedstawiony na rys. 4a. Rozkład jego na harmoniczne daje następujące zawartości (nieparzyste):

$$n_1=1, n_3 \approx 0,32, n_5 \approx 0,19, n_7 \approx 0,14, n_9 \approx 0,11.$$

Dla prądu o kształcie prostokątnym zawartości harmoniczných są

$$n_1=1, n_3=\frac{1}{3}=0,333 \dots, n_5=\frac{1}{5}=0,200 \dots, n_7=\frac{1}{7}=0,143 \dots, n_9=\frac{1}{9}=0,111 \dots$$

a wyrażenie

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_k^2 = \sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{1}{k^2} = 1,2337 \dots$$

Uważając, iż dla $k > 9$ oba przebiegi są identyczne, można oszacować wyrażenie

$\sum_{k=1}^{\infty} n_k^2$ dla pierwszego przebiegu jako

$$1,2337 - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} \dots \right) + (0,32^2 + 0,19^2 + 0,14^2 + 0,11^2 \dots) \approx 1,22$$

Я. ГРОШКОВСКИ

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ОДНИМ ОТЧЁТЛИВЫМ ЭЛЕМЕНТОМ АККУМУЛИРУЮЩИМ ЭНЕРГИЮ

Резюме

Автор называет колебательными системами с одним отчётливым элементом аккумулярующим энергию такие системы, которые сводятся к индуктивности L и сопротивлению R или к ёмкости C и сопротивлению R , и возбуждаемы отрицательным сопротивлением. При обсуждении подобных систем обыкновенно пренебрегают т. наз. остаточными величинами: в первом случае ёмкостью C_0 , во втором — индуктивностью L_0 .

При таком предположении в системе допустимо появление бесконечно коротких скачков на характеристике отрицательного сопротивления, в первом случае — скачков напряжения, во втором же — скачков тока; из этого следует необходимость принятия условия, что характеристика отрицательного сопротивления имеет петлю гистерезиса со скачком напряжения или тока [1]. Существование скачка на петле обозначает выступание в самом отрицательном сопротивлении величин, соответствующих недостающим элементам: в первом случае — ёмкости, во втором — индуктивности [2].

Проблема становится более интересной, если предположить, что характеристика отрицательного сопротивления является „тонкой” (безпетлевой) линией. При таком именно предположении рассмотрена возбуждаемая отрицательным сопротивлением система CLR — с уравнением (8), в которой индуктивность L уменьшалась до нулевого значения. Согласно принципу баланса реактивной мощности гармоник [3], выражаемому условием (1), получено уравнение (2), в котором n_k является содержанием гармоник тока $n_k = I_k : I$, а k — индексом гармоник. Отсюда выводим выражение для частоты (4). Если теперь L уменьшается до нуля, то частота, как известно, будет

стремиться к значению определенному уравнением (9). Из сравнения (9) и (4) следует зависимость (10). Так как правая сторона уравнения (10) имеет конечное значение, поэтому при $L=0$ выражение $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 n_k^2$ должно достичь значения равного бесконечности. Если положить, что в действительной системе не могут возникать гармоники с бесконечно большим индексом, то сумма $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 n_k^2$ не может быть бесконечно большая, а следовательно L не может быть равной нулю. Отсюда следует, что система без индуктивности не может соответствовать в действительности и что всегда следует учитывать некоторую, хотя бы чрезвычайно малую остаточную индуктивность.

Принимая необходимость существования остаточной индуктивности (L_0), мы получаем систему по рис. 2, для которой зависимость между напряжением и током на отрицательном сопротивлении определяется всегда (тонкой) характеристикой отрицательного сопротивления (рис. 3а). Так как на ёмкости C не могут появляться скачки напряжения, поэтому разница напряжения между петлей $abcd$ и тонкой линией должна выступать на индуктивности L_0 (рис. 3б).

Диаграммы на рис. 4 изображают токи (а) и напряжения: на отрицательном сопротивлении (б), на конденсаторе (с) и на остаточной индуктивности (д). На рисунках 5 и 9 представлены токи и напряжения для разных значений остаточной индуктивности.

J. GROSZKOWSKI

THE LIMIT CYCLE OF SYSTEMS WITH A SINGLE DISTINCT ENERGY STORING ELEMENT

Summary

By oscillating systems with a single distinct energy storing element the author means such systems which can be reduced to the inductance L and the resistance R , or to the capacitance C and the resistance R , excited by the negative resistance. When considering such systems, the so called residual values are usually neglected: in the first case it is the capacitance C_0 , in the second — the inductance L_0 . Under such assumption we admit the appearance of infinitely short jumps occurring in the negative resistance characteristic, in the first case—a voltage jump, in the second — a current jump; this requires the further assumption that the negative resistance characteristic is a loopshaped line with a voltage or current jump. The occurrence of a jump on the loop means the appearance in the negative resistance itself of values corresponding to the missing elements: in the first case — the capacitance, in the second case — the inductance [2].

The problem gets more interesting, if we assume the negative resistance characteristic to be a thin (loopless) line. Under such assumption the CLR system was considered, in which the inductance L was gradually reduced to zero. This system was excited by the negative resistance (8). According to the principle of reactive power balance of harmonics [3], expressed by the condition (1), we get the formula (2), in which n_k is the content of current harmonics ($n_k = I_k: I_1$), k — order of harmonic. Thus we find the expression for the frequency (4). If L decreases to zero, the frequency, as is well known, tends to the value given by Eq. (9). Comparing (9) and (4) we get the relation (10). As the right hand side of the equation (10) has

a finite value, the expression $\sum_{k=1} k^2 n_k^2$ must reach the value equal to infinity when $L=0$. If we assume that a practical circuit cannot contain harmonics of an infinitely high order, then the sum $\sum_{k=1} k^2 n_k^2$ cannot be infinitely great, and therefore L cannot be equal to zero. Hence a system having no inductance is unreal and one always has to take into account a certain, even an extremely small, residual inductance.

Assuming the necessary presence of the residual inductance (L_0) we get a system as in Fig. 2; for such a system the relation between the voltage and the current on the negative resistance is always defined by the (thin) characteristic of the negative resistance (Fig. 3a). As the voltage jumps cannot occur on the capacitance C , the voltage difference between the loop $abcd$ and the thin line must appear on the inductance L_0 (Fig. 3b).

The graphs in Fig. 4 show the time relations of the current (a) and the voltages: on the negative resistance (b), on the condenser (c) and on the residual inductance (d). In Figs 5 and 6 this relations for various values of the residual inductance are shown.

621.396.645.84:621.3.015.033

J. OSIOWSKI

Analiza przebiegów napięciowych w obwodzie anodowym wzmacniacza rezonansowego klasy C*

Rękopis dostarczono 30. 12. 1954

W pracy omówiono niektóre wyniki, dyskusji pewnego rozwiązania obwodu anodowego wzmacniacza rezonansowego wielkiej częstotliwości pracującego w klasie C. Wyniki zilustrowano odpowiednimi wykresami.

1. WSTĘP

W rozmaity sposób można analizować przebiegi wyjściowe w obwodzie anodowym wzmacniacza klasy C, na przykład za pomocą znanych metod analitycznych, graficznych itp. Spośród metod analitycznych największe znaczenie ma metoda rozkładu Fourierowskiego, dająca rozwiązanie w stanie ustalonym i stosowana głównie w przypadku dostrojonego obwodu rezonansowego. Można również otrzymać rozwiązanie metodami operatorowymi w różnych wariantach (na przykład [1], [2], [3], [5]). Wykorzystując jedną z możliwości zastosowania rachunku operatorowego (twierdzenie o splocie) otrzymano rozwiązanie ogólne obwodu liniowego przy pobudzaniu ciągiem jednakowych impulsów [3]. Rozwiązanie to zastosowano — przy pewnych założeniach upraszczających — do wzmacniacza klasy C. Niniejsza praca zawiera niektóre wyniki dyskusji tego rozwiązania.

Założenia upraszczające, jakie poczyniono przy rozwiązywaniu zagadnienia, są następujące.

a. Impulsy prądu anodowego mają kształt części sinusoidy odpowiadających kątowni przepływu $0 < 2\theta < \pi$; częstotliwość powtarzania ω tych impulsów jest równa częstotliwości napięcia wzbudzającego. Prąd anodowy wyraża się zatem zależnościami (rys. 1):

* Wyniki przedstawionej pracy były referowane na Kurs-Konferencji Elektrotechniki Teoretycznej w Karpaczu w dniu 15. 9. 1954 r.

$$i_a(\omega t) = 0 \quad ; \quad \omega t \leq 0, \\ i_a(\omega t) = I \frac{\cos(\omega t - \Theta) - \cos \Theta}{1 - \cos \Theta} \quad ; \quad 0 \leq \omega t \leq 2\Theta, \quad (1)$$

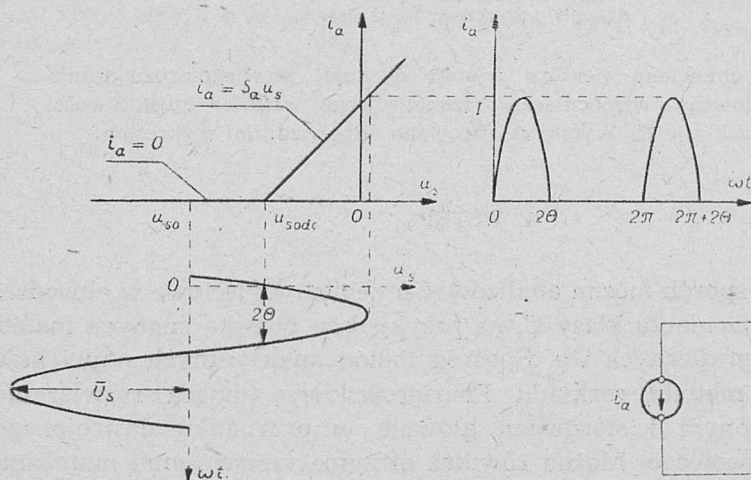
$$i_a(\omega t) = 0 \quad ; \quad 2\Theta \leq \omega t \leq 2\pi,$$

oraz

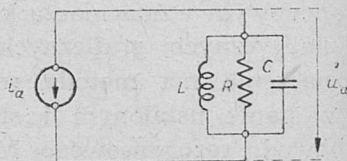
$$i_a(\omega t) = i_a(\omega t + k \cdot 2\pi) \quad ; \quad \omega t \geq 0, \quad k = 0, 1, 2 \dots$$

b. Oporność wewnętrzna lampy jest nieskończenie wielka, wobec czego napięcie anodowe nie wpływa na prąd anodowy. Założenie to jest w przybliżeniu spełnione w pentodach i tetrodach.

c. Obwód rezonansowy przedstawiono w postaci elementów RLC połączonych równolegle.



Rys. 1. Uproszczona charakterystyka robocza lampy oraz przebiegi czasowe napięcia wzbudzenia i prądu anodowego przy przyjętych założeniach.



Rys. 2. Układ zastępczy obwodu anodowego wzmacniacza

Wobec przyjętych założeń charakterystyka pracy lampy ma postać podaną na rys. 1. Wykorzystując wyniki otrzymane w [3] dochodzimy do wzorów ogólnych będących rozwiązaniem liniowego układu zastępczego przedstawionego na rys. 2. Wzory te, w przypadku dostrojonego obwodu anodowego (to znaczy przy $\frac{\omega_0}{\omega} = k$, gdzie k jest liczbą naturalną), mają postać¹ następującą.

¹ Rozwiązanie podane w [3] jest ogólniejsze, gdyż jest ono słuszne przy dowolnym stosunku $\frac{\omega_0}{\omega}$. W niniejszej pracy ograniczono się do przedyskutowania najważniejszego przypadku, gdy stosunek $\frac{\omega_0}{\omega} = k$ jest liczbą naturalną.

Zakres I. $0 \leq \omega t' \leq 2\theta$; $n=0, 1, 2 \dots \infty$

$$\frac{u_a(\omega t', n)}{RI} = \frac{1}{k(1 - \cos \theta)} \cdot \left\{ \sin(\beta_1 + \beta_2) \cdot \sin(\omega t' - \theta - \beta_2 + \beta_1) + \right. \\ \left. + \exp\left(-\frac{k\omega t'}{2Q}\right) \cdot [(A_0 - AP_n) \cos k(\omega t' - \theta) + (B_0 - BP_n) \sin k(\omega t' - \theta)] \right\}. \quad (2)$$

Zakres II. $2\theta \leq \omega t' \leq 2\pi$; $n=0, 1, 2 \dots \infty$

$$\frac{u_a(\omega t', n)}{RI} = \frac{P_n \exp\left(-\frac{k\omega t'}{2Q}\right)}{k(1 - \cos \theta)} [A \cos k(\omega t' - \theta) + B \sin k(\omega t' - \theta)] = \\ = -E_n \exp\left(-\frac{k\omega t'}{2Q}\right) \cdot \cos[k(\omega t' - \theta) - \alpha], \quad (3)$$

gdzie

$$E_n = \frac{P_n \sqrt{A^2 + B^2}}{k(1 - \cos \theta)}; \quad \sin \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \quad \cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad (4)$$

przy czym użyto oznaczeń:

u_a — składowa zmienna napięcia anodowego,

$Q = R\omega_0 C$ — dobroć obwodu rezonansowego,

$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}$ — częstotliwość własna obwodu rezonansowego,

ω — częstotliwość powtarzania impulsów prądu anodowego,

I — maksymalna wartość prądu anodowego.

Zmienne t' i n są związane z czasem t zależnością

$$\omega t = \omega t' + n \cdot 2\pi, \quad (5)$$

przy czym

$$0 \leq \omega t' \leq 2\pi; \quad n = 0, 1, 2 \dots;$$

n interpretujemy jako całkowitą liczbę okresów (cykli) prądu anodowego poprzedzających chwilę t .

Współczynniki występujące we wzorach (2) do (4) wyrażone są następująco:

$$\beta_1 = \arctg\left(2Q \frac{k-1}{k}\right); \quad \beta_2 = \arctg\left(2Q \frac{k+1}{k}\right), \quad (6)$$

$$A_0 = \exp \frac{k\theta}{Q} \cdot \{\cos \beta_1 \cdot \cos [(k-1)\theta - \beta_1] - \cos \beta_2 \cdot \cos [(k+1)\theta - \beta_2]\}, \quad (7)$$

$$B_0 = \exp \frac{k\theta}{Q} \cdot \{\cos \beta_1 \cdot \sin [(k-1)\theta - \beta_1] - \cos \beta_2 \cdot \sin [(k+1)\theta - \beta_2]\}, \quad (8)$$

$$A = A_0 - \cos \beta_1 \cdot \cos [(k-1)\theta + \beta_1] + \cos \beta_2 \cdot \cos [(k+1)\theta + \beta_2], \quad (9)$$

$$B = B_0 + \cos \beta_1 \cdot \sin [(k-1)\theta + \beta_1] - \cos \beta_2 \cdot \sin [(k+1)\theta + \beta_2], \quad (10)$$

$$P_n = \frac{1 - \exp \left[-(n+1) \frac{k\pi}{Q} \right]}{1 - \exp \left(-\frac{k\pi}{Q} \right)}. \quad (11)$$

Wzory (2) i (3) podają rozwiązanie w stanie nieustalonym. Rozwiązanie dla stanu ustalonego (w granicach jednego okresu) otrzymuje się z tych wzorów jako granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_a(\omega t', n) = u_a(\omega t', \infty) = u_{a \text{ ust}}(\omega t'). \quad (12)$$

Ponieważ napięcie anodowe zależy od n tylko za pośrednictwem P_n , funkcję $u_a(\omega t', \infty)$ otrzymujemy przez zastąpienie we wzorach (2) i (3) wielkości P_n jej granicą

$$P_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{1}{1 - \exp \left(-\frac{k\pi}{Q} \right)}. \quad (13)$$

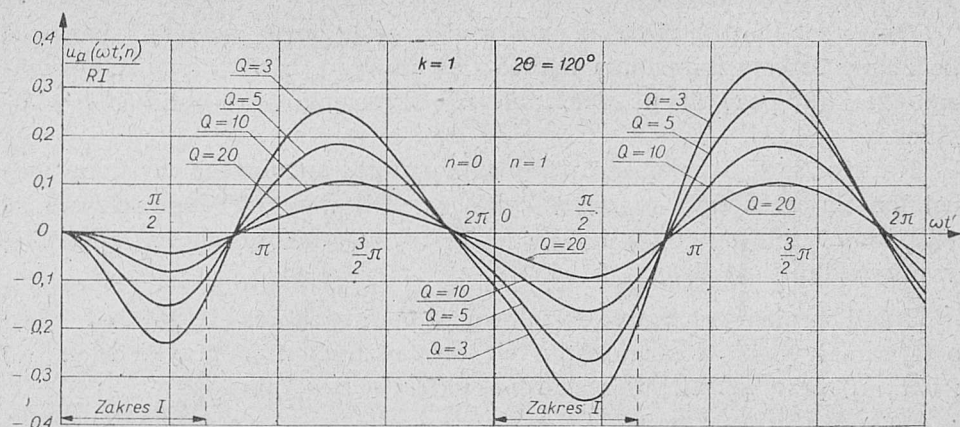
Zależności (2) i (3) stanowią więc rozwiązanie ogólne zarówno dla stanu nieustalonego ($n=0, 1, 2, \dots$), jak i dla stanu ustalonego ($n=\infty$).

2. DYSKUSJA PRZEBIEGÓW NAPIĘCIOWYCH W OBWODZIE ANODOWYM

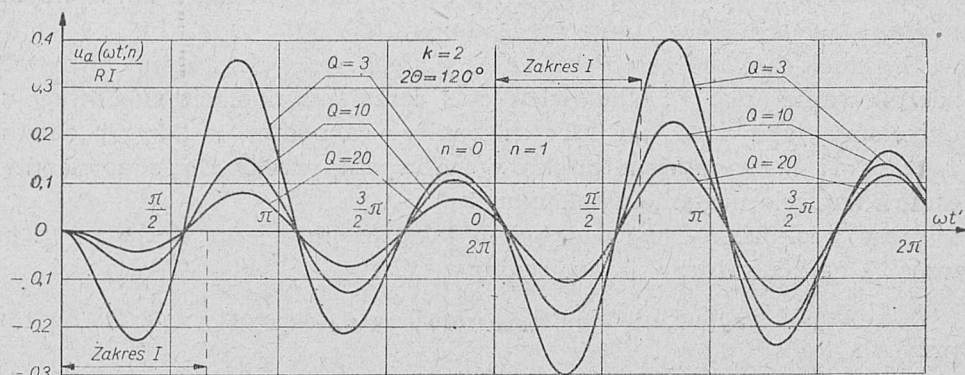
2.1. Napięcie anodowe w stanie nieustalonym

Napięcie anodowe w stanie nieustalonym jest wynikiem sumowania się napięć na obwodzie, które są wywołane poszczególnymi impulsami prądu. Każdy impuls w czasie swojego trwania wywołuje przebieg wymuszony oraz przebieg swobodny po zaniku impulsu, będący wynikiem tłumionych oscylacji energii dostarczonej do obwodu przez impuls. Napięcie wypadkowe w chwili t jest zatem sumą tłumionych drgań swobodnych, wywołanych wszystkimi impulsami poprzedzającymi oraz przebiegu wymuszonego, o ile chwila t leży w zakresie przepływu prądu (zakres I: $0 \leq \omega t' \leq 2\theta$).

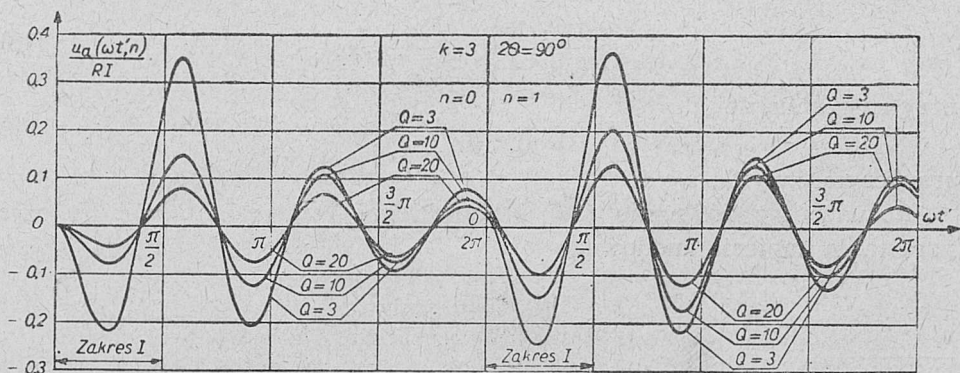
Krzywa napięcia anodowego ustala się (tzn. następuje stan ustalony), gdy drgania swobodne wywołane początkowym impulsem prądu zostają tak stłumione, że nie mają już praktycznego wpływu na napięcie wypadkowe.



Rys. 3. Wykresy napięcia anodowego w stanie nieustalonym w ciągu dwóch pierwszych cykli dla $k=1$ i $2\Theta = 120^\circ$.



Rys. 4. Wykresy napięcia anodowego w stanie nieustalonym w ciągu dwóch pierwszych cykli dla $k=2$ i $2\Theta = 120^\circ$.



Rys. 5. Wykresy napięcia anodowego w stanie nieustalonym w ciągu dwóch pierwszych cykli dla $k=3$ i $2\Theta = 90^\circ$.

Czas τ , po którym napięcie na obwodzie praktycznie się ustala, nazywać będziemy czasem narastania napięcia anodowego. Bliższa analiza rozwiązań (2) i (3) pozwala na dokładniejsze określenie oraz obliczenie wielkości τ .

Na rys. 3, 4, 5 pokazano przebiegi napięcia anodowego w stanie nieustalonym przez dwa pierwsze cykle ($n=0$ i $n=1$). Podane krzywe są wykresami zależności (2) i (3) przy różnych wartościach parametru Q w przypadku $k=1, 2, 3$.

Jeżeli będziemy rozważać dwa dowolne punkty zakresu II ($2\theta \leq \omega t' \leq 2\pi$)¹ o tej samej wielkości argumentu $\omega t'$ oraz różnych n , na przykład $(\omega t', n_1)$ i $(\omega t', n_2)$ przy $n_2 > n_1$, to z zależności (3) i (11) wynika, że

$$\frac{u_a(\omega t', n_2)}{u_a(\omega t', n_1)} = \frac{P_{n_2}}{P_{n_1}} > 1, \quad (14)$$

a więc we wzmacniaczu dostrojonym mamy do czynienia z narastaniem napięcia anodowego w stanie nieustalonym.

Stosunek (14) nie zależy od $\omega t'$ i dlatego pozwala to na formalne zdefiniowanie czasu τ . Mianowicie czas narastania napięcia anodowego τ określamy jako czas, po którym napięcie anodowe w każdej chwili zakresu II (z wyjątkiem punktów zerowych) przekracza odpowiednią część s napięcia w stanie ustalonym.

Czas τ określony jest więc przez taką (najmniejszą) liczbę n_τ (por. wzór 5), że dla każdego $n > n_\tau$ mamy

$$|u_a(\omega t', n)| > s \cdot |u_{a \text{ ust}}(\omega t')| = s |u_a(\omega t', \infty)|, \quad (15)$$

przy

$$2\theta \leq \omega t' \leq 2\pi.$$

Wielkość τ (za pośrednictwem n_τ) wyznaczona jest więc przez równanie

$$\frac{u_a(\omega t', n_\tau)}{u_a(\omega t', \infty)} = \frac{P_{n_\tau}}{P_\infty} = s, \quad (16)$$

przy założeniu, że

$$0 < s < 1,$$

przy czym zwykle $s \approx 1$.

Rozwiązując równanie (16) otrzymujemy ostateczny wzór na czas narastania napięcia anodowego

$$\tau = \frac{2Q}{k\omega} \ln \frac{1}{1-s} \quad (17)$$

¹ Należy zastrzec, że punkty te nie są punktami zerowymi napięcia anodowego, to znaczy $\omega t'$ jest takie, że

$$u_a(\omega t', n) \neq 0.$$

lub w nieco innej postaci

$$\frac{\tau}{T} = \frac{Q}{k\pi} \ln \frac{1}{1-s}, \quad (18)$$

gdzie $T = 2\pi/\omega$.

Należy podkreślić, że czas τ określony w ten sposób jest identyczny z czasem, po jakim amplituda chwilowa ² drgań swobodnych wywołanych pojedynczym impulsem prądu zmaleje $\frac{1}{1-s}$ krotnie.

Jeśli $\tau < T$, można zupełnie zaniedbać stan nieustalony, gdyż napięcie anodowe już w pierwszym cyklu przekracza wartość $s \cdot u_{a \text{ ust.}}$. Warunek całkowitej pomijalności stanu nieustalonego można zatem sformułować na podstawie wzoru (18) jako

$$\frac{Q}{k} \leq \frac{\pi}{\ln \frac{1}{1-s}}. \quad (19)$$

Jeżeli dla s przyjmiemy konkretną wartość, na przykład

$$s = 1 - \frac{1}{e^2} \approx 0,865,$$

to zależności (18) i (19) przybiorą postać:

$$\frac{\tau}{T} = \frac{2Q}{k\pi}, \quad (20)$$

$$\frac{Q}{k} \leq \frac{\pi}{2}. \quad (21)$$

2. 2. Przypadek graniczny $Q \rightarrow \infty$

Przypadek graniczny $Q \rightarrow \infty$ należy, wobec zależności $Q = R\omega_0 C$ (por. rys. 2), traktować jako przypadek, gdy $R \rightarrow \infty$. W związku z tym z równań (2) i (3) otrzymujemy dla stanu nieustalonego

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{u_a(\omega t', n)}{RI} = 0, \quad (22)$$

przy

$$0 \leq \omega t' \leq 2\pi; \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

² Amplitudę chwilową A , określamy dla każdego przebiegu sinusoidalnego tłumionego wykładniczo

$$A e^{-at} \sin(\omega t + \varphi)$$

jako

$$A_r = A e^{at}.$$

Aby otrzymać rozwiązanie graniczne, należy najpierw obie strony równań (2) i (3) pomnożyć przez R , a następnie przejść do granicy, gdy $Q \rightarrow \infty$. Otrzymujemy wtedy rozwiązanie w stanie nieustalonym dla idealnego bezstratnego obwodu rezonansowego L, C w postaci następujących wzorów.

Dla $k \neq 1$

Zakres I. $0 \leq \omega t' \leq 2\theta$; $n=0,1,2 \dots$; $k \neq 1$

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{u_a(\omega t', n)}{I/\omega C} = \frac{1}{(k^2 - 1)(1 - \cos \theta)} \cdot [k \sin(\omega t' - \theta) + k \sin \theta \cdot \cos k\omega t' - \cos \theta \cdot \sin k\omega t' - 2n(\sin k\theta \cdot \cos \theta - k \cos k\theta \cdot \sin \theta) \cos k(\omega t' - \theta)]. \quad (23)$$

Zakres II. $2\theta \leq \omega t' \leq 2\pi$; $n=0,1,2 \dots$; $k \neq 1$

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{u_a(\omega t', n)}{I/\omega C} = - \frac{2(n+1)(\sin k\theta \cdot \cos \theta - k \cos k\theta \cdot \sin \theta)}{(k^2 - 1)(1 - \cos \theta)} \cos k(\omega t' - \theta). \quad (24)$$

Dla $k=1$

Zakres I. $0 \leq \omega t' \leq 2\theta$; $n=0,1,2 \dots$; $k=1$

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{u_a(\omega t', n)}{I/\omega C} = \frac{1}{2(1 - \cos \theta)} [\cos \theta \cdot \sin \omega t' - \omega t' \cdot \cos(\omega t' - \theta) - 2n(\theta - \sin \theta \cos \theta) \cdot \cos(\omega t' - \theta)] \quad (25)$$

Zakres II. $2\theta \leq \omega t' \leq 2\pi$; $n=0,1,2 \dots$; $k=1$

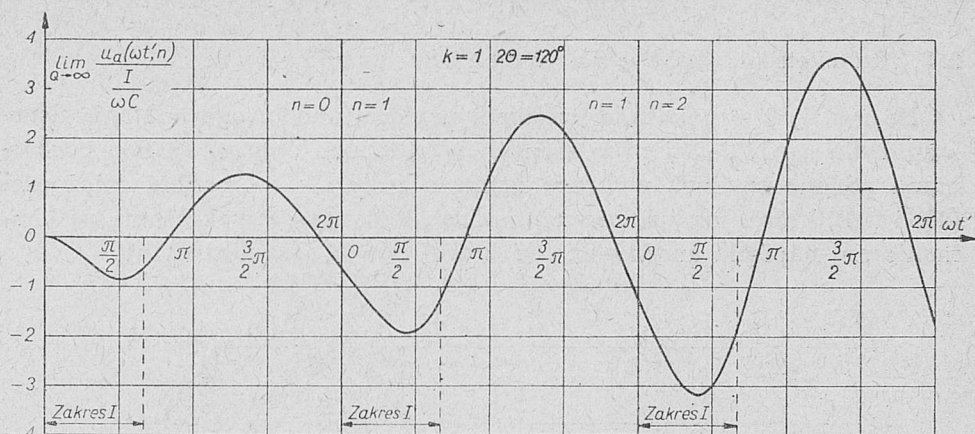
$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{u_a(\omega t', n)}{I/\omega C} = - \frac{(n+1)(\theta - \sin \theta \cdot \cos \theta)}{1 - \cos \theta} \cos(\omega t' - \theta). \quad (26)$$

Na rysunku 6 przedstawiono przykładowo wykres napięcia na obwodzie idealnym L, C w stanie nieustalonym przy $k=1$ oraz $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Gdy $n \rightarrow \infty$, zależności (23), (24), (25) i (26) granicy nie mają, napięcie anodowe ze wzrostem n wzrasta nieograniczenie. Czas narastania napięcia anodowego określony zależnością (17) jest w tym przypadku nieskończenie wielki

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \tau = \infty \quad (27)$$

i stan ustalony w sensie określonym przez (12) nie istnieje.



Rys. 6. Wykres napięcia na obwodzie idealnym L, C w stanie nieustalonym.

Jeśli jednak będziemy rozważać rozwiązania (2) i (3) przy skończonej dobroci dla stanu ustalonego ($n=\infty$), to okazuje się, iż istnieją ich granice przy $Q \rightarrow \infty$ w postaci niżej podanych wzorów.

Dla $k \neq 1$

Zakres I i II. $0 \leq \omega t' \leq 2\pi$; $n=\infty$; $k \neq 1$

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{u_a(\omega t', \infty)}{RI} = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin k\theta \cdot \cos \theta - k \cos k\theta \cdot \sin \theta}{k(k^2 - 1)(1 - \cos \theta)} \cos k(\omega t' - \theta). \quad (28)$$

Dla $k=1$

Zakres I i II. $0 \leq \omega t' \leq 2\pi$; $n=\infty$; $k=1$

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{u_a(\omega t', \infty)}{RI} = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\theta - \sin \theta \cdot \cos \theta}{1 - \cos \theta} \cos(\omega t' - \theta). \quad (29)$$

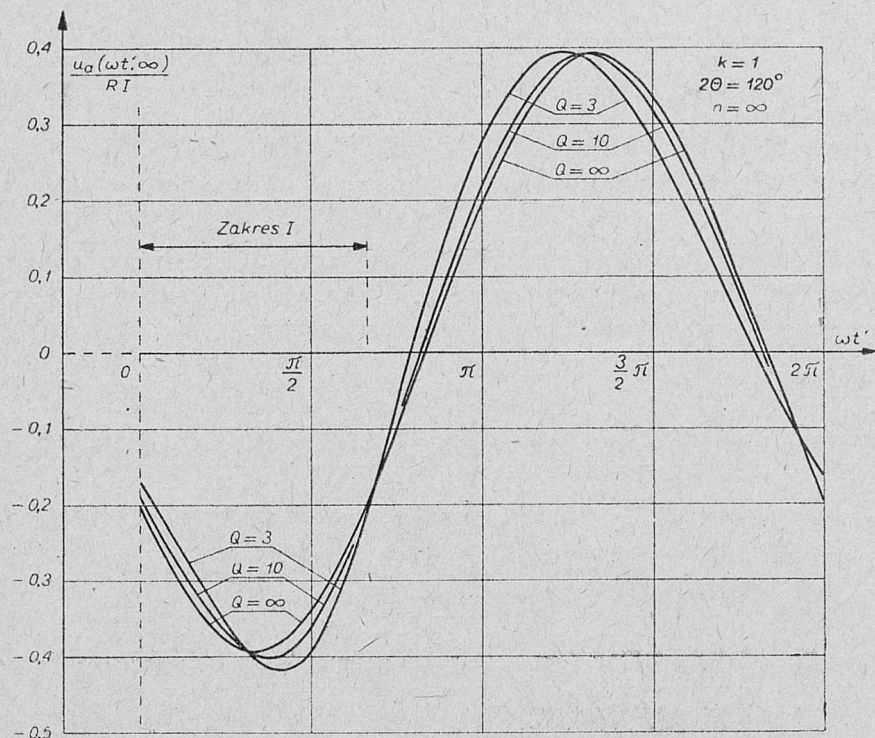
Wzory (28) i (29) stanowią więc rozwiązanie w stanie ustalonym obwodu o nieskończonej wielkiej dobroci o tyle, że są one granicami rozwiązań w stanie ustalonym obwodu o skończonej dobroci, gdy dobroć rośnie nieograniczenie.

Zależności (28) i (29) są identyczne z rozwiązaniami dla stanu ustalonego, otrzymywanymi metodą harmoniczną z uwzględnieniem wpływu tylko tej harmoniczej, do której dostrojony jest obwód.

Typowe rozwiązania Fourierskie dla stanu ustalonego stanowią zatem przypadek graniczny ($Q=\infty$) rozważanych rozwiązań.

2.3. Napięcie anodowe w stanie ustalonym

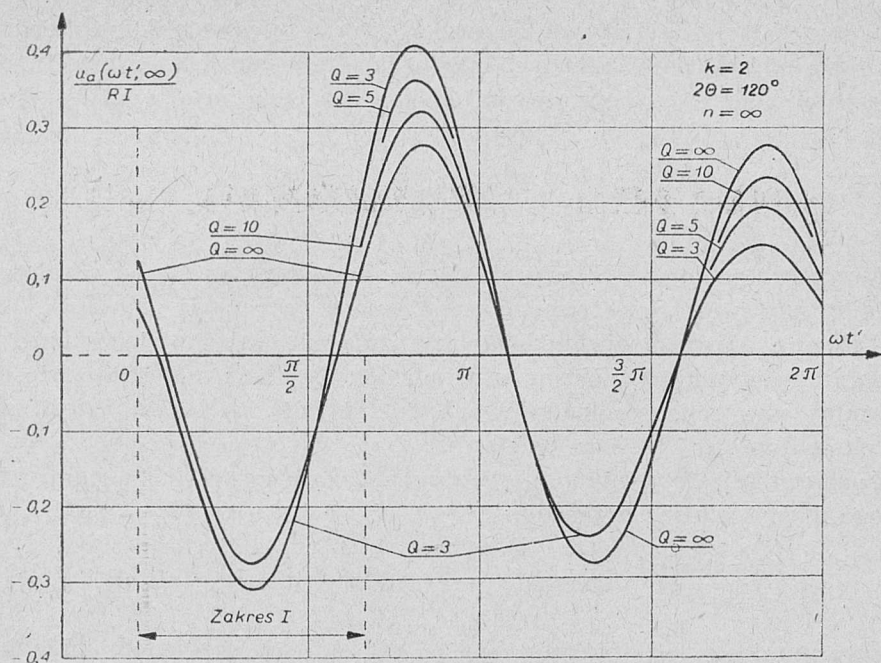
Na rys. 7, 8, 9 pokazano przebiegi napięcia anodowego w stanie ustalonym dla $k=1, 2, 3$ i przy różnych wartościach dobroci Q . Dla porównania podano również wykresy napięcia przy $Q=\infty$ według zależności (28) i (29), które, jak już zaznaczono, są identyczne z wykresami tej harmonicznej napięcia anodowego, do której obwód jest dostrojony.



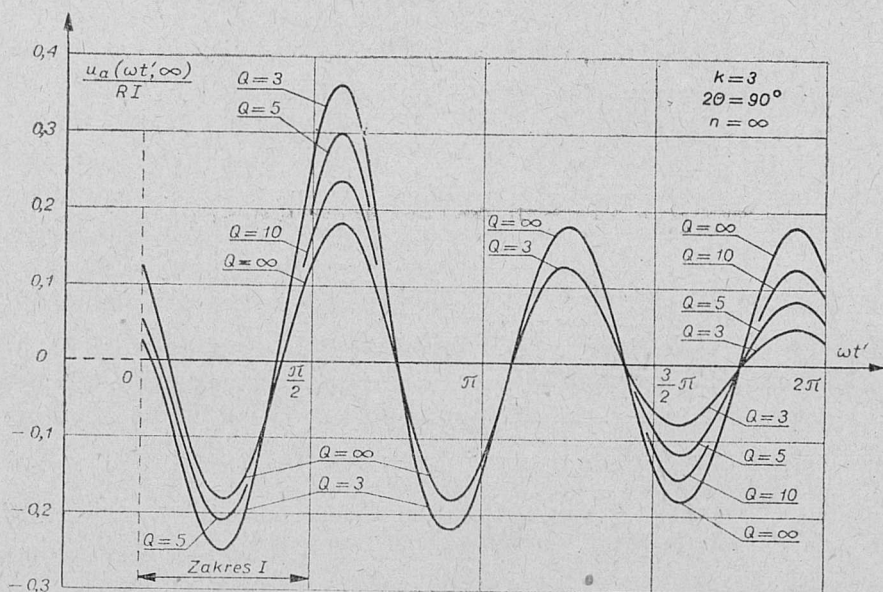
Rys. 7. Wykresy napięcia anodowego w stanie ustalonym przy $k=1$ i $2\theta=120^\circ$.

Analizując krzywe napięcia u_a przy $k=1$ (rys. 7) dochodzimy do ogólnego wniosku, że różnice pomiędzy krzywymi przy dobroci $Q \geq 3$ są w tym przypadku tak niewielkie, że można je praktycznie pominąć. Różnice te polegają na rosnącym, przy coraz to mniejszym Q , przesunięciu (por. 2. 4) sinusoidy napięcia u_a w odniesieniu do krzywej przy $Q=\infty$.

Gdy układ pracuje jako powielacz częstotliwości, to znaczy przy $k=2$ i $k=3$ (rys. 8 i 9), różnice pomiędzy krzywymi są znacznie większe i — przy tych samych dobrociach — tym większe, im większe jest k . Jest to



Rys. 8. Wykresy napięcia anodowego w stanie ustalonym przy $k=2$ i $2\theta=120^\circ$.



Rys. 9. Wykresy napięcia anodowego w stanie ustalonym przy $k=3$ i $2\theta=90^\circ$.

uzasadnione tym, że im większe jest k , tym względne różnice częstotliwości sąsiednich harmonicznych prądu w odniesieniu do częstotliwości własnej obwodu są mniejsze i tym większe napięcia na obwodzie wytwarzają harmoniczne rzędów różnych od k .

2.4. Dyskusja parametrów rozwiązania w stanie ustalonym

W dalszym ciągu dyskusji napięcia anodowego w stanie ustalonym ograniczymy się do rozpatrzenia rozwiązania w zakresie II ($2\theta \leq \omega t' \leq 2\pi$). W zakresie I przebiegi anodowe wyrażają się zależnościami bardziej skomplikowanymi, co znacznie utrudnia ich dyskusję, nie różnią się one natomiast wiele od przebiegów w zakresie II. Ponadto zakres II jest zwykle około dwa razy większy od zakresu I.

Z zależności (3) wynika, że rozwiązanie w zakresie II dla stanu ustalonego można zapisać w postaci

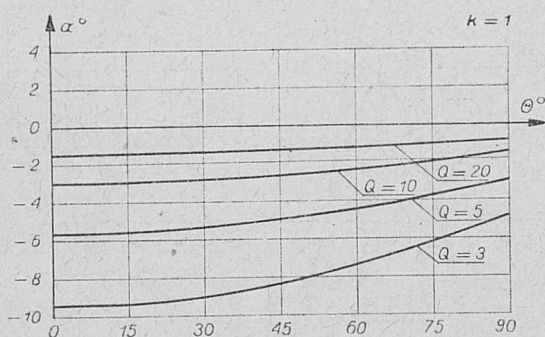
$$\frac{u_a(\omega t', \infty)}{RI} = E_\infty \exp\left(-\frac{k\omega t'}{2Q}\right) \cos[k(\omega t' - \theta) - (\pi + a)], \quad (30)$$

a więc napięcie u_a opóźnia się o kąt $(\pi + a)$ względem przebiegu $\cos k(\omega t' - \theta)$, przy czym napięcie siatkowe wyrażone jest funkcją $u_s \cos(\omega t' - \theta)$ (por. rys. 1).

W rozwiązaniu otrzymywanym metodą harmonicznym (lub w naszym przypadku przy $Q = \infty$) napięcie u_a określone jest funkcją

$$\cos[k(\omega t' - \theta) - \pi],$$

opóźniającą się o π względem przebiegu $\cos k(\omega t' - \theta)$.



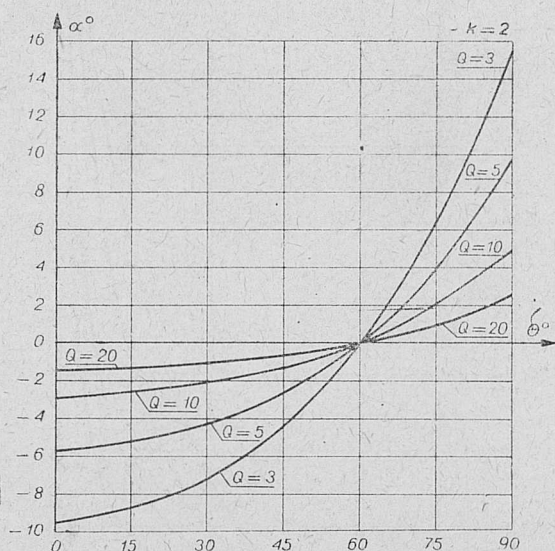
Rys. 10. Wykresy dodatkowego przesunięcia fazowego α napięcia anodowego przy $k=1$.

Opóźnienie fazowe przy skończonej dobroci jest więc różne od π i zależy od wielkości i znaku kąta a .

Wykresy kąta α jako funkcji kąta odcięcia θ przy różnych dobrociach Q dla $k=1, 2, 3$ podane są na rys. 10, 11 i 12. Dodatkowe przesunięcie fazowe α jest równe zero, gdy kąt θ jest prawie równy tak zwanemu kątowi optymalnemu

$$\theta_{\text{opt}} = \frac{2\pi}{3k}, \quad (31)$$

przy którym występuje maksimum amplitudy k -tej harmonicznej w rozkładzie Fourierskim ciągu impulsów prądu.



Rys. 11. Wykresy dodatkowego przesunięcia fazowego α napięcia anodowego przy $k=2$.

Dla kątów $\theta < \theta_{\text{opt}}$ faza α jest ujemna, a zatem całkowite przesunięcie fazy napięcia anodowego jest mniejsze od π . Dla $\theta > \theta_{\text{opt}}$ jest $\alpha > 0$ i całkowite przesunięcie fazowe jest większe od π .

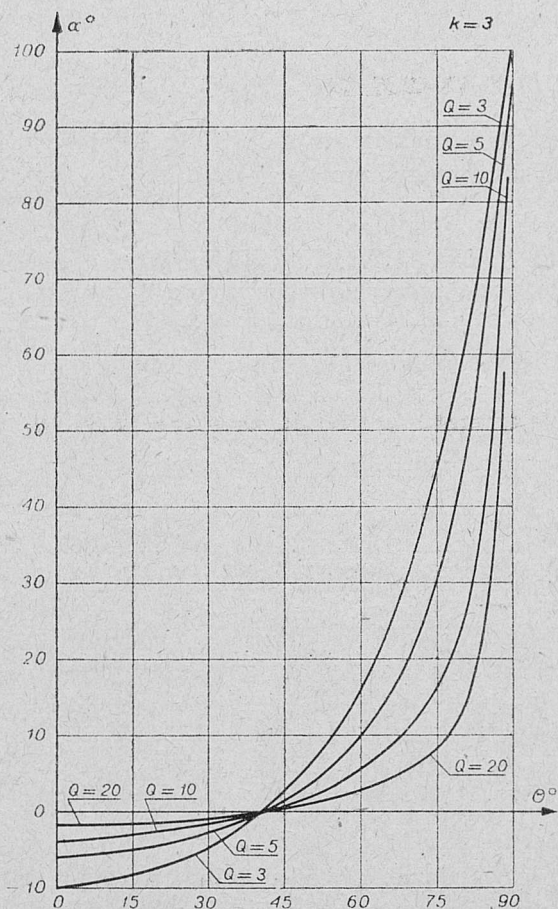
Aby zobrazować wpływ dobroci na amplitudę napięcia u_a , wygodnie jest wprowadzić pojęcie amplitudy początkowej U_{ap} i amplitudy końcowej $\bar{U}_{ak}$ napięcia anodowego w stanie ustalonym, czyli wartości, jakie przyjmuje amplituda chwilowa (por. wzór 30)

$$E_{\infty} \exp\left(-\frac{k\omega t'}{2Q}\right)$$

tego napięcia na początku i końcu zakresu II. Mamy przeto

$$\bar{U}_{ap} = E_{\infty} \exp\left(-\frac{k\omega t'}{2Q}\right) \Big|_{\omega t' = 2\theta} = E_{\infty} \exp\left(-\frac{k\theta}{Q}\right), \quad (32)$$

$$\bar{U}_{ak} = E_{\infty} \exp\left(-\frac{k\omega t'}{2Q}\right) \Big|_{\omega t' = 2\pi} = E_{\infty} \exp\left(-\frac{k\pi}{Q}\right). \quad (33)$$



Rys. 12. Wykresy dodatkowego przesunięcia fazowego α napięcia anodowego przy $k=3$.

Wykresy tych wielkości w funkcji kąta θ przy różnych wartościach dobroci Q oraz dla $k=1, 2, 3$ przedstawiono na rys. 13, 14, 15. Dla porównania pokazano również wykres amplitudy $\bar{U}_a$

$$\bar{U}_a = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin k\theta \cdot \cos \theta - k \cos k\theta \cdot \sin \theta}{k(k^2 - 1)(1 - \cos \theta)}; \quad k \neq 1,$$

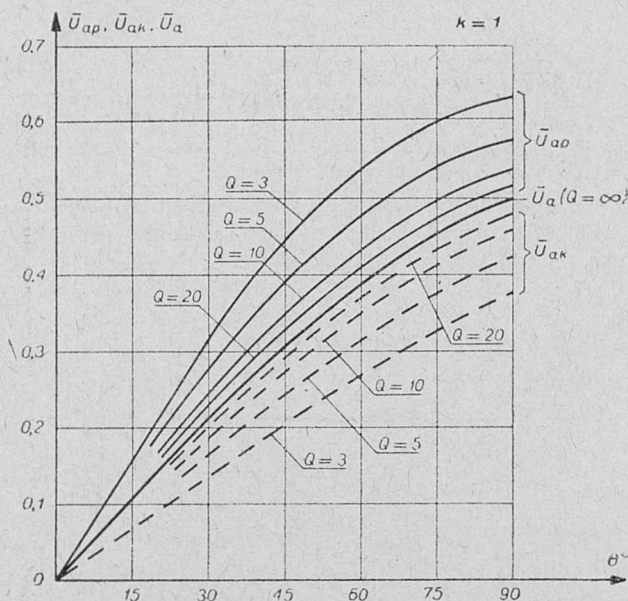
$$\bar{U}_a = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\theta - \sin \theta \cdot \cos \theta}{1 - \cos \theta}; \quad k = 1, \quad (34)$$

otrzymywanej z rozkładu Fourierowskiego (to znaczy dla $Q = \infty$).

W granicy przy $Q \rightarrow \infty$ mamy oczywiście (por. (28) i (29))

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \bar{U}_{ap} = \lim_{Q \rightarrow \infty} \bar{U}_{ak} = \bar{U}_a. \quad (35)$$

Wykresy $\bar{U}_{ap}$ i $\bar{U}_{ak}$ mają podobny przebieg jak i $\bar{U}_a$ z tym, że maksima $\bar{U}_{ap}$ zachodzą dla $\theta < \theta_{\text{opt}}$, natomiast maksima $\bar{U}_{ak}$ występują przy wartościach $\theta > \theta_{\text{opt}}$.



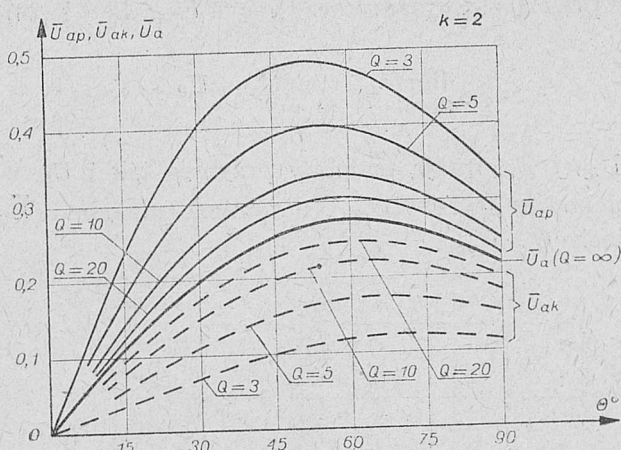
Rys. 13. Wykresy amplitudy początkowej $\bar{U}_{ap}$ i końcowej $\bar{U}_{ak}$ napięcia anodowego w stanie ustalonym przy $k=1$.

Istotne znaczenie ma pytanie, jaka jest największa chwilowa wartość napięcia anodowego (składowej zmiennej) i jak wielka jest ona w stosunku do amplitudy U_a rozkładu Fourierowskiego. Zagadnienie to jest ważne z uwagi na bezpieczeństwo pracy wzmacniacza.

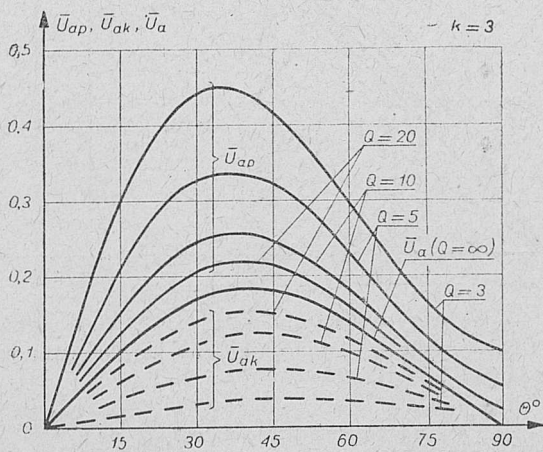
W punktach, w których występują ekstrema napięcia anodowego mamy

$$\frac{\partial u_a(\omega t', \infty)}{\partial (\omega t')} = 0. \quad (36)$$

Ponieważ przebieg u_a w zakresie II jest tłumiony, to największa wartość bezwzględna u_a występuje przy pierwszym ekstremum w tym zakresie.



Rys. 14. Wykresy amplitudy początkowej $\bar{U}_{ap}$ i końcowej $\bar{U}_{ak}$ napięcia anodowego w stanie ustalonym przy $k=2$.



Rys. 15. Wykresy amplitudy początkowej $\bar{U}_{ap}$ i końcowej $\bar{U}_{ak}$ napięcia anodowego w stanie ustalonym przy $k=3$.

Rozwiązując równanie (36) otrzymujemy wartość $\omega t'_1$

$$\omega t'_1 = \frac{\pi}{k} + \Theta + \frac{\alpha - \alpha_0}{k}, \quad (37)$$

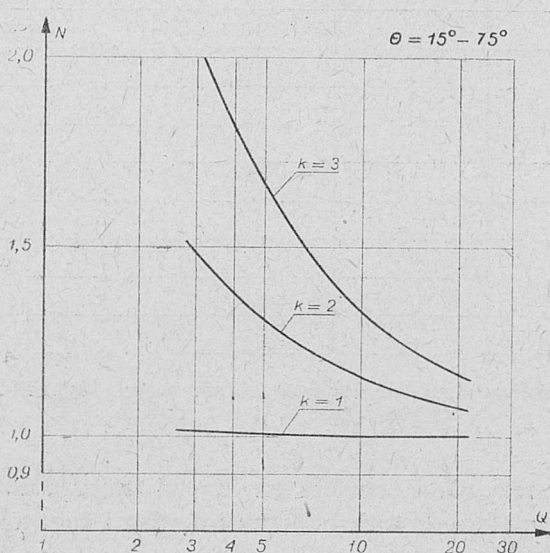
przy której zachodzi pierwsze ekstremum. Maksymalna wartość chwilowa napięcia u_a jest zatem równa

$$\begin{aligned}
 u_{a \max} &= -E_{\infty} \exp \left(-\frac{k\omega t'}{2Q} \right) \cdot \cos [k(\omega t' - \Theta) - a] \Big|_{\omega t' = \omega t'_1} = \\
 &= E_{\infty} \exp \left(-\frac{\pi + k\Theta + a - a_0}{2Q} \right) \cdot \cos a_0,
 \end{aligned} \quad (38)$$

gdzie

$$a_0 = \arctg \frac{1}{2Q}. \quad (39)$$

Ponieważ wartość $u_{a \max}$ jest dodatnia, to przy $\omega t'_1$ występuje maksimum u_a (por. rys. 7, 8, 9). Wartość $u_{a \max}$ dodaje się więc w tym momencie do składowej stałej napięcia anodowego.



Rys. 16. Wykresy stosunku $N = \frac{u_{a \max}}{\bar{U}_a}$.

Dla porównania wielkości $u_{a \max}$ z amplitudą $\bar{U}_a$ otrzymywaną metodą harmoniczną, wprowadzamy stosunek

$$N = \frac{u_{a \max}}{\bar{U}_a}, \quad (40)$$

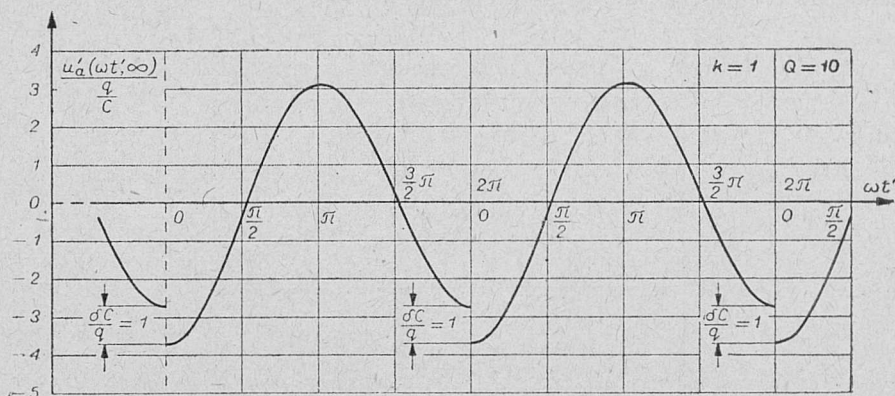
którego wykres w funkcji dobroci Q podano na rys. 16. Stosunek N praktycznie nie zależy od Θ w dość szerokim zakresie ($15^\circ - 75^\circ$).

3. ROZWIĄZANIA GRANICZNE

3.1. Praca wzmacniacza przy bardzo wąskich impulsach prądu

Dla zorientowania się w przebiegach napięciowych przy małych kątach odcięcia θ , celowe jest rozpatrzenie przypadku granicznego, gdy $\theta \rightarrow 0$. Jednakże z zależności (2) i (3) otrzymujemy w granicy zarówno dla stanu nieustalonego, jak i ustalonego:

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{u_a(\omega t', n)}{RI} = 0; \quad n = 0, 1, 2 \dots \infty. \quad (41)$$



Rys. 17. Wykres napięcia anodowego ustalonego w przypadku granicznym $\theta = 0$ przy $k=1$ i $Q=10$.

Własność ta jest oczywista, bowiem gdy kąt θ zmierza do zera przy ustalonej wartości I , maleje do zera ładunek impulsu i energia dostarczana do obwodu.

Niezerowe rozwiązanie graniczne otrzymamy, jeżeli założymy, że przy $\theta \rightarrow 0$ zmienia się jednocześnie amplituda I tak, że na przykład nie ulega zmianie ładunek q poszczególnych impulsów.

Dla impulsu kosinusoidalnego wyrażonego zależnością (1) otrzymujemy

$$q = \frac{2I}{\omega} \frac{\sin \theta - \theta \cos \theta}{1 - \cos \theta}. \quad (42)$$

Zakładając $q = \text{const}$ przebiegi graniczne przy $\theta \rightarrow 0$ otrzymujemy w postaci ³

³ Obwód jest w tym przypadku pobudzany ciągiem funkcji impulsowych Diraca.

$$0 < \omega t' < 2\pi; \quad n=0,1,2 \dots \infty$$

$$\frac{u'_a(\omega t', n)}{q/C} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{u_a(\omega t', n)}{q/C} = - \frac{P_n}{\cos \alpha_0} \exp\left(-\frac{k\omega t'}{2Q}\right) \cos(k\omega t' - \alpha_0), \quad (43)$$

gdzie α_0 określone jest przez (39).

Rozwiązanie (43) uwzględnia charakterystyczny (por. [4], str. 128) skok napięcia anodowego w momencie występowania impulsu prądu o bardzo małym kącie odcięcia (rys. 17).

Zarówno w stanie nieustalonym, jak i ustalonym granice lewo- i prawostronne funkcji $u'_a(\omega t', n)$ w momentach występowania impulsów prądu (to znaczy dla $\omega t' = 0$ i $\omega t' = 2\pi$) są różne. Interesuje nas skok napięcia δ określony jako różnica tych granic.

Oznaczając dla stanu nieustalonego

$$\begin{aligned} u'_{nl} &= \lim_{\omega t' \rightarrow 2\pi-} \frac{u'_a(\omega t', n)}{q/C}, \\ u'_{np} &= \lim_{\omega t' \rightarrow 0+} \frac{u'_a(\omega t', n+1)}{q/C} \end{aligned} \quad (44)$$

oraz analogicznie dla stanu ustalonego

$$\begin{aligned} u'_{ul} &= \lim_{\omega t' \rightarrow 2\pi-} \frac{u'_a(\omega t', \infty)}{q/C}, \\ u'_{up} &= \lim_{\omega t' \rightarrow 0+} \frac{u'_a(\omega t', \infty)}{q/C}, \end{aligned} \quad (45)$$

otrzymujemy z (43)

$$u'_{nl} - u'_{np} = u'_{ul} - u'_{up} = 1. \quad (46)$$

Wielkość δ określamy jako ⁴

⁴ Zamiast różnicy granic można rozpatrywać ich stosunek. Uwzględniając (43) i (45) mielibyśmy

$$\frac{u'_{ul}}{u'_{up}} = e^{-\frac{k\pi}{Q}}, \quad (a)$$

przy czym związek ten jest słuszny tylko dla stanu ustalonego, to znaczy

$$\frac{u'_{ul}}{u'_{up}} \neq \frac{u'_{nl}}{u'_{np}}.$$

Zależność (a) może być otrzymana również na innej drodze, na przykład z ogólnej definicji współczynnika dobroci [4], str. 127.

$$\frac{\delta}{q/C} = u'_{nl} - u'_{np} = u'_{ul} - u'_{up}, \quad (47)$$

a więc mamy jednakowo dla przebiegów nieustalonych i ustalonych

$$\delta = \frac{q}{C}, \quad (48)$$

co wynika również z przesłanek fizycznych.

Zależności graniczne przy $\Theta \rightarrow 0$ mogą być traktowane jako rozwiązania przybliżone w przypadku bardzo małych kątów Θ .

Jeśli przyjmiemy

$$\sin \Theta \approx \Theta - \frac{\Theta^3}{6}; \quad \cos \Theta \approx 1 - \frac{\Theta^2}{2}, \quad (49)$$

to wzór (42) przybiera postać

$$q \approx \frac{4}{3} \frac{I\Theta}{\omega}. \quad (50)$$

Zależność (43) traktujemy jako rozwiązanie przybliżone dla dostatecznie małych kątów Θ . Uwzględniając (50) otrzymujemy

$0 < \omega t' < 2\pi; n=0,1,2 \dots \infty; \Theta$ dost. małe

$$\frac{u_a(\omega t', n)}{RI} = -\frac{4}{3} \frac{k\Theta P_n}{Q \cos a_0} \exp\left(-\frac{k\omega t'}{2Q}\right) \cdot \cos(k\omega t' - a_0). \quad (51)$$

Analogicznie zależność (48) można przedstawić w postaci przybliżonej słusznej dla małych Θ

$$\delta \approx \frac{4}{3} I\Theta Z_c, \quad (52)$$

gdzie

$$Z_c = \frac{1}{\omega C}.$$

3.2. Rozwiązanie dla klasy B

W drugim przypadku granicznym, gdy $\Theta = \frac{\pi}{2}$ (klasa B), wszystkie wzory wyprowadzone dla klasy C zachowują słuszność, gdyż są one ciągłe dla $\Theta = \frac{\pi}{2}$. Rozważanie tego przypadku nie wnosi do dyskusji nic nowego, a upraszczają się jedynie wzory. Zamiast operować współczynnikami A_0 , A , B_0 i B (wzory (7) do (10)), wygodniej jest w tym przypadku wprowadzić wielkość

$$M = \sqrt{\cos^2 \beta_1 + 2 \cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 \cdot \cos(\beta_1 - \beta_2) + \cos^2 \beta_2} \quad (53)$$

z którą tamte współczynniki powiązane są następująco:

$$\begin{aligned}\sqrt{A_0^2 + B_0^2} &= M \exp \frac{k\pi}{2Q}, \\ \sqrt{A^2 + B^2} &= M \left[\exp \frac{k\pi}{2Q} + (-1)^k \right].\end{aligned}\quad (54)$$

Ponieważ ponadto przy $\Theta = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{B_0}{A_0} = \frac{B}{A},$$

wprowadzając więc kąt

$$\gamma = \arctg \frac{\cos \beta_1 \sin \beta_1 + \cos \beta_2 \sin \beta_2}{\cos^2 \beta_1 + \cos^2 \beta_2} \quad (55)$$

otrzymujemy po przekształceniach ostateczną postać rozwiązań dla klasy B

Zakres I. $0 \leq \omega t' \leq 2\Theta = \pi$; $n = 0, 1, 2 \dots \infty$

$$\begin{aligned}\frac{u_a(\omega t', n)}{RI} &= \frac{1}{k} \left\{ -\sin(\beta_1 + \beta_2) \cdot \cos(\omega t' - \beta_2 + \beta_1) + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^k \exp\left(-\frac{k\omega t'}{2Q}\right) M \left[\exp\left(-\frac{k\pi}{2Q}\right) \cdot P_{n-1} + (-1)^k P_n \right] \sin(k\omega t' + \gamma) \right\}.\end{aligned}$$

Zakres II. $\pi = 2\Theta \leq \omega t' \leq 2\pi$; $n = 0, 1, 2 \dots \infty$ (56)

$$\frac{u_a(\omega t', n)}{RI} = \frac{(-1)^k}{k} \exp\left(-\frac{k\omega t'}{2Q}\right) \cdot \left[\exp \frac{k\pi}{2Q} + (-1)^k \right] P_n M \sin(k\omega t' + \gamma), \quad (57)$$

przy czym P_n jest określone zależnością (11) (przyjmujemy $P_{-1} = 0$).

Dla stanu ustalonego należy we wzorach (56) i (57) P_n i P_{n-1} zastąpić przez P_∞ według (13).

4. ROZWIĄZANIA PRZYBLIŻONE

Forma zależności (2) i (3) oraz współczynników występujących w tych równaniach jest skomplikowana i mało przejrzysta, wobec czego często jest bardziej celowe stosowanie zależności uproszczonych. Uproszczenia takie mogą być różnego rodzaju i zostaną tutaj omówione jedynie przykładowo.

Najważniejszy jest przypadek $k=1$, w którym bez żadnych przybliżeń wzory (6) do (11) upraszczają się. Jeśli ponadto ograniczymy się do obwodów o dostatecznie dużej dobroci Q (co odpowiada większości przypadków spotykanych w praktyce), można otrzymać znacznie prostsze zależności przybliżone.

Dla $k=1$ mamy

$$\beta_1 = 0; \quad \beta_2 = \arctg 4Q. \quad (58)$$

Jeżeli przyjmimy $Q \gg 1$, można wówczas napisać w przybliżeniu

$$\beta_2 \approx \frac{\pi}{2}; \quad \cos \beta_2 \approx 0; \quad \sin \beta_2 \approx 1 \quad (59)$$

i wzory na współczynniki (6) do (10) przybierają postać przybliżoną

$$\left. \begin{aligned} A_0 &\approx \exp \frac{\Theta}{Q}, \\ B_0 &\approx 0, \\ A &\approx \exp \frac{\Theta}{Q} - 1 \approx \frac{\Theta}{Q}, \\ B &\approx 0. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Jeśli w wyrażeniach (2) i (3) uwzględnimy (60), otrzymamy rozwiązania przybliżone dla $k=1$ i $Q \gg 1$.

Zakres I. $0 \leq \omega t' \leq 2\Theta$; $n = 0, 1, 2 \dots \infty$

$$\frac{u_a(\omega t', n)}{RI} \approx \frac{1}{1 - \cos \Theta} \left[\exp \left(-\frac{\omega t'}{2Q} \right) \cdot \left(\exp \frac{\Theta}{Q} - \frac{\Theta}{Q} P_n \right) - 1 \right] \cos(\omega t' - \Theta). \quad (61)$$

Zakres II. $2\Theta \leq \omega t' \leq 2\pi$; $n = 0, 1, 2 \dots \infty$

$$\frac{u_a(\omega t', n)}{RI} \approx -\frac{\Theta}{Q} \cdot \frac{P_n \exp \left(-\frac{\omega t'}{2Q} \right)}{1 - \cos \Theta} \cos(\omega t' - \Theta). \quad (62)$$

W przypadku szczególnym $\Theta = \frac{\pi}{2}$ (klasa B) oraz dla $n = \infty$ (stan ustalony) po prostych przekształceniach i uproszczeniach zależności (61) i (62) można doprowadzić do następującej postaci dla $k=1$, $Q \gg 1$:

Zakres I. $0 \leq \omega t' \leq 2\Theta = \pi$; $n = \infty$

$$\frac{u_a(\omega t', \infty)}{RI} \approx -\frac{1}{2} \left[2 - \exp \left(-\frac{\omega t'}{2Q} \right) \right] \sin \omega t'. \quad (63)$$

Zakres II. $\pi = 2\Theta \leq \omega t' \leq 2\pi$; $n = \infty$

$$\frac{u_a(\omega t', \infty)}{RI} \approx -\frac{1}{2} \exp \left(-\frac{\omega t'}{2Q} \right) \sin \omega t'. \quad (64)$$

Wzór (63) otrzymał inną metodą Gonorowski [2] str. 13 oraz [3] str. 155.

Na zakończenie autor pragnie wyrazić serdeczne podziękowanie prof. drowi inż. Stanisławowi Ryżce za wiele cennych uwag i rad udzielonych w trakcie opracowywania tematu. Słowa podziękowania należą się również ob. Leokadii Wiśniewskiej, rachmistrzowi IM PAN, za wydatną pomoc przy opracowaniu obliczeń do wykresów.

Instytut Matematyczny PAN
Zakład Urządzeń Radiotechnicznych
Politechniki Warszawskiej

WYKAZ LITERATURY

1. Gonorowski I. Wozdziejstwie složnych periodiczeskich elektrodwizuszczich sił na liniejnyje sistemy. Radiotekhnika nr 1, 1953.
2. Gonorowski I. Radiosignaly i pierexodnyje jawlenija w radiociepłach. Gos. Izd. Lit. po woprosam swiazi i radio. Moskwa 1954.
3. Osowski J. Stany nieustalone w układach pobudzanych ciągiem impulsów. Arch. Elektr. t. II, zeszyt 1—2, 1953.
4. Ryżko S. Urządzenia radionadawcze, część I. Wydawnictwo MON. Warszawa 1954.
5. Węgrzyn S. Stany nieustalone w układach pobudzanych periodycznie. Arch. Elektrot. t. III, zeszyt 4, 1954.

и. Осёвский

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕНИЯ В АНОДНОМ КОНТУРЕ РЕЗОНАНСНОГО УСИЛИТЕЛЯ КЛАССА С

Резюме

Пользуясь операторными методами (теорема свертывания) в труде [3] получено общее решение линейного контура при возбуждении рядом одинаковых импульсов. После некоторых упрощений—это решение было применено к усилителю класса С; настоящий труд содержит дискуссию над этим решением.

Приняты были следующие упрощающие положения:

- а) импульсы анодного тока имеют форму участков синусоиды, соответствующих углу отсечки $0 < 2\theta < \pi$: анодный ток выражен зависимостями (1) и представлен на рис. 1;
- б) внутреннее сопротивление лампы бесконечно велико, и поэтому анодное напряжение не влияет на анодный ток;
- в) резонансный контур представлен в форме элементов R, L, C , соединенных параллельно.

Пользуясь результатами поданными в [3], получены общие решения эквивалентной линейной системы рассматриваемого усилителя в виде формул (2) и (3). В этих формулах коэффициенты определены зависимостями (4) и (6) ÷ (11). Решения эти правильны при подстроенном резонансном контуре

$$\left(\frac{\omega_0}{\omega} = k - \text{натуральное число} \right)$$

при нестационарном режиме ($n=0,1,2,\dots$) и установившемся режиме ($n=\infty$). В этом последнем случае в формулах (2) и (3) вместо P_n должен приниматься предел $P_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ определенный зависимостью (13).

На рис. 3, 4, 5 показан ход анодного напряжения выраженного в формулах (2) и (3) в нестационарном режиме. На основании (2) и (3) определено и рассчитано т. наз. время возрастания анодного напряжения τ (формулы (17) и (18)) и подано условие (19), при котором можно совершенно пренебречь нестационарным режимом.

Переходя соответственным образом к пределу при $Q \rightarrow \infty$ получены в виде формул (23) ÷ (26) решения в нестационарном режиме контура LC без потерь. Формулы (28) и (29) идентичные с решениями анодного контура при установившемся режиме, получаемыми методом гармоник (ряды Фурье), являются предельным случаем решений (2) и (3) при $Q \rightarrow \infty$.

На рис. 7, 8, 9 поданы диаграммы анодного напряжения при установившемся режиме. На рис. 10 ÷ 15 показана зависимость фазового угла α , начальной амплитуды $\bar{U}_{ap}$ и конечной амплитуды $\bar{U}_{ak}$ стационарного напряжения, формула (30), от добротности Q и угла отсечки θ .

Решая уравнение

$$\frac{\partial u_a(\omega t', \infty)}{\partial (\omega t')} = 0$$

можно найти экстремумы и максимальное значение переменной составляющей анодного напряжения (рис. 16).

Рассчитывая предел зависимостей (2) и (3), когда $\theta \rightarrow 0$ (предполагая, что заряд q каждого импульса тока не подлежит изменению), получено предельное решение (51), являющееся приближенным решением анодного контура усилителя в случае весьма коротких импульсов тока (рис. 17).

Формулы (56) и (57) являются модификацией формул (2) и (3) для усилителей класса В.

В заключение приведено несколько приближенных зависимостей, полученных из (2) и (3) после некоторых дополнительных упрощений.

J. OSIOWSKI

THE ANALYSIS OF THE VOLTAGE PHENOMENA IN THE ANODE CIRCUIT OF A CLASS C RESONANCE AMPLIFIER

Summary

Using operator methods (Borel's theorem), a general solution of a linear circuit excited by means of a series of identical impulses is obtained [3]. This solution, after certain simplifications, is applied to a class C amplifier and the paper contains a discussion of the solution.

The simplifications made are as follows:

- a. anode current impulses have a shape of part of the sine curve corresponding to the cut-off angle $0 < 2\theta < \pi$; the anode current is given by the expression (1) and shown in Fig. 1.
- b. the anode resistance of the valve is infinite, hence the anode voltage does not influence the anode current.
- c. the resonance circuit is shown in the form of the elements R , L , C , connected in parallel.

Using the results given in [3], the general solution of an equivalent linear circuit of the discussed amplifier is obtained in the form of formulae (2) and (3). The coefficients found in these formulae are given by the equations (4) and

(6) $\div$ (11). The above solutions are correct in the case of a tuned in resonance circuit $\left(\frac{\omega_0}{\omega} = k, k\text{-natural}\right)$ for the transient ($n=0, 1, 2 \dots$) and the steady state ($n=\infty$) conditions. In the last case the limit $P_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ defined by (13) should be substituted for P_n in the formulae (2) and (3).

The Figs 3, 4, 5 show the anode current changes given by (2) and (3) in the transient conditions. Using (2) and (3), the so called anode voltage growth time τ is defined and calculated (eqs. 17 and 18) and the condition (19), allowing completely to neglect the transient state is given.

Passing to the limit, with $Q \rightarrow \infty$, the transient state solutions of the LC circuit without losses are obtained [eqs. (23) $\div$ (26)]. Equations (28) and (29) which are identical to the anode circuit solution for the steady state conditions, obtained by the harmonic method (Fourier series), give the limiting case of solutions (2) and (3) for $Q \rightarrow \infty$.

Figs 7, 8, 9 show the anode voltage diagrams in the steady state conditions. Figs 10 $\div$ 15 illustrate the dependance of the phase angle α , the initial amplitude U_{ap} , and the final amplitude $\bar{U}_{ak}$ of the steady state anode voltage upon the Q factor and the cut-off angle Θ .

Solving the equations

$$\frac{\partial u_a(\omega t', \infty)}{\partial(\omega t')} = 0$$

the extremes and the maximum value of the variable components of the anode voltage are found (Fig. 16).

Calculating the limit of (2) and (3) for $\Theta \rightarrow 0$ (assuming, that the charge q of each pulse is the same), a limit solution is obtained (51), which is an approximate solution of the amplifier anode circuit in the case of very short current impulses (Fig. 17).

The formulae (56) and (57) are modified formulae (2) and (3) for class B amplifiers.

Finally few approximate relations obtained from (2) and (3) are given by making certain simplifications.

621.398 : 621.317.083.7

S. SŁAWIŃSKI

Wpływ częstotliwości zasilania na sztywność i obciążalność łącza selsynowego

Rękopis dostarczono 15. 2. 1955

Wyprowadzono wzory na prądy w uzwojeniach selsynów o biegunach utajonych i wystających. Wyprowadzono przy dość ogólnych założeniach wzór na moment obrotowy między dwoma uzwojeniami znajdującymi się w ośrodku magnetycznie izotropowym, a następnie podano wzór na moment obrotowy dla rozpatrywanych selsynów. Dalej określono kolejno sztywność i obciążalność łącza, wyprowadzono odpowiednie wzory i przeprowadzono ogólną ich dyskusję. Wreszcie przeprowadzono bardziej szczegółową dyskusję otrzymanych wzorów z punktu widzenia wpływu częstotliwości zasilania.

1. WSTĘP

Łącza selsynowe są typowymi układami zdalnego przekazywania danych. Znalazły one szerokie zastosowanie w radiolokacji, lotnictwie, nawigacji morskiej, teledystrybucji, automatyce przemysłowej i wielu innych dziedzinach. Selsyny, które są elementami tych łączy, są w zasadzie małymi maszynami elektrycznymi, są one zazwyczaj rozpatrywane na podstawie teorii maszyn synchronicznych lub indukcyjnych.

Tak ujęta literatura przedmiotu [4], [5], [8] jest z reguły trudno dostępna dla szerokiego i bardzo zróżnicowanego grona użytkowników selsynów, którzy nie są konstruktorami maszyn. Z drugiej strony przeznaczone dla nie-maszynowców publikacje [1], [2], [3], [6], [7] mają zazwyczaj charakter czysto opisowy i nie wnikają głębiej w analizę pracy tych układów.

Praca niniejsza jest próbą wprowadzenia w teorię selsynów bez posługiwania się jakąkolwiek teorią maszyn elektrycznych, jedynie w oparciu o podstawy elektrotechniki, ogólnie znane zarówno teleelektrykom jak i energoelektrykom. Praca ta jest również próbą częściowego obalenia ogólnie przyjętego poglądu o korzyściach wynikających z zasilania selsynów podwyższoną częstotliwością. Pogląd ten jest szeroko rozpowszechniony nie tylko wśród inżynierów — bezpośrednich użytkowników selsynów, lecz również wśród autorów poważnych nawet publikacji.

Poniżej wykazano, że jeśli chodzi o *szt y w n o ś ć*¹, to podwyższanie częstotliwości zasilania jest korzystne tylko w odniesieniu do selsynów małych, dla *większych natomiast jednostek korzystniejsza jest raczej częstotliwość mała*, jeśli zaś chodzi o *o b c i ą ż a l n o ś ć*², to podwyższanie częstotliwości zasilania może ją tylko zmniejszyć.

Selsyny wykonywane są zazwyczaj ze stroną wtórną trójuzwojeniową; w pracy niniejszej rozpatrywane są układy dwuuzwojeniowe, ze względu na znacznie prostszą ich analizę. Wyniki tej analizy mogą być oczywiście uogólnione na układy o większej liczbie uzwojeń.

Wyprowadzone wzory dotyczą łączy, w których nadajnik i odbiornik są identyczne. Szt y w n o ś ć powyższych układów określana bywa mianem charakterystycznej, w odróżnieniu od *szt y w n o ś c i* roboczej, jaką selsyn może osiągnąć przy współpracy z drugim selsynem o innych wymiarach.

Rozważania dotyczą również tylko tzw. *szt y w n o ś c i* s t a t y c z n e j, to jest występującej na wale selsynu, gdy wirniki są nieruchome lub też obracają się powoli. Przy większych obrotach zachodzi zmniejszenie *szt y w n o ś c i* łąca; efekt ten nie wchodzi jednak w zakres niniejszych rozważań.

W dalszym ciągu, ponieważ nie zachodzi obawa nieporozumień, statyczna *szt y w n o ś ć* charakterystyczna określana będzie w skrócie po prostu jako *szt y w n o ś ć*.

Należy również zauważyć, że przeprowadzona dyskusja dotyczy selsynów z uzwojeniem pierwotnym na wirniku; takie zwięźenie zakresu rozważań wydaje się jednak w pełni uzasadnione, ponieważ selsyny o innej konstrukcji nie są prawie zupełnie spotykane w praktyce.

2. PRĄDY W UZWOJENIACH SELSYNÓW O BIEGUNACH UTAJONYCH

Na rys. 1 przedstawiono schematycznie łączy selsynowe składające się z dwóch identycznych selsynów o wirnikach żłobkowych (bieguny utajone), mających po dwa prostopadłe do siebie uzwojenia zarówno na stojanach, jak i na wirnikach. Jedno z uzwojeń na wirniku przyłączone jest do źródła napięcia zmiennego, drugie natomiast jest zwarte³. Uzwojenia na stojanach są ze sobą wzajemnie połączone.

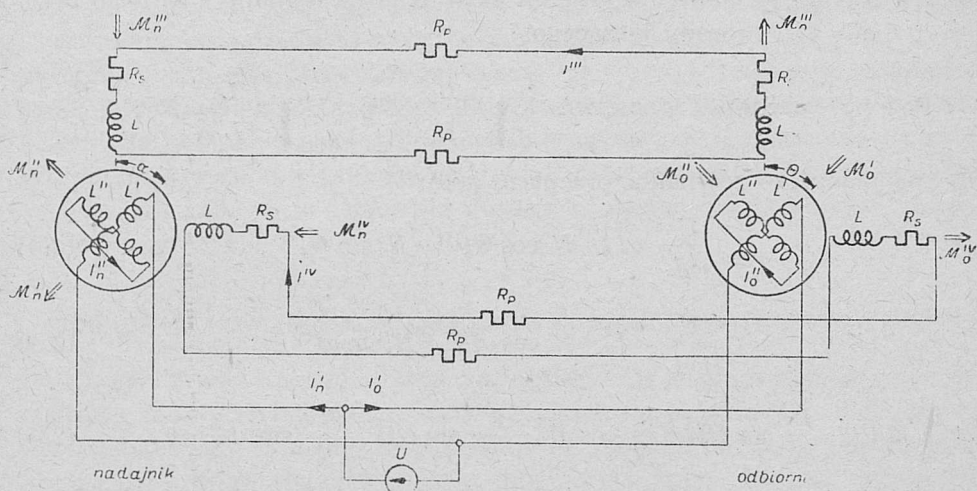
¹ Definicję *szt y w n o ś c i* podano w rozdziale 5. Wielkość ta określana bywa również mianem momentu synchronizującego lub kierującego; autor uważa jednak za celowe stosowanie określenia jednowyrazowego i unikanie słowa „moment” z odpowiednim przymiotnikiem, gdyż *szt y w n o ś ć* jest pochodną momentu obrotowego względem kąta i wyrażana jest w innych jednostkach niż moment.

² Definicję *o b c i ą ż a l n o ś c i* podano w rozdziale 6.

³ Rola uzwojenia zwartego wynika z rozważań w rozdziałach 3 i 5.

Jeśli przyjąć dla uproszczenia, że

- rezystancje uzwojeń na wirnikach są równe zero,
- straty w żelazie są równe zero, jego zaś przenikalność magnetyczna jest stała,
- indukcyjność wzajemna między dowolnymi dwoma uzwojeniami selsynu jest proporcjonalna do kosinusa kąta, jaki tworzą ze sobą osie tych uzwojeń,



Rys. 1. Schemat łączy selsynowego zestawionego z selsynów o biegunach utajonych. Strzałki z symbolami M oznaczają zwroty sił magnetomotorycznych wywołanych przepływem przez odpowiednie uzwojenia prądów o oznaczonych kierunkach.

to przy użyciu oznaczeń zgodnie z rys. 1, rozpatrywany układ można opisać następującymi równaniami:

$$\begin{aligned}
 \hat{U} &= j\omega L' \hat{I}_0^I - j\omega k' \sqrt{L'L} \cdot \cos \theta \hat{I}_0^{III} - j\omega k' \sqrt{L'L} \cdot \sin \theta \hat{I}_0^{IV}, \\
 \hat{U} &= j\omega L' \hat{I}_n^I + j\omega k' \sqrt{L'L} \cos \alpha \hat{I}_n^{III} + j\omega k' \sqrt{L'L} \cdot \sin \alpha \hat{I}_n^{IV}, \\
 2(R + j\omega L) \hat{I}^{III} - j\omega k' \sqrt{L'L} \cdot \cos \theta \hat{I}_0^I + j\omega k' \sqrt{L'L} \cdot \cos \alpha \hat{I}_n^I + \\
 &\quad - j\omega k'' \sqrt{L''L} \sin \theta \hat{I}_0^{II} - j\omega k'' \sqrt{L''L} \sin \alpha \hat{I}_n^{II} = 0, \\
 2(R + j\omega L) \hat{I}^{IV} - j\omega k' \sqrt{L'L} \sin \theta \hat{I}_0^I + j\omega k' \sqrt{L'L} \sin \alpha \hat{I}_n^I + \\
 &\quad + j\omega k'' \sqrt{L''L} \cos \theta \hat{I}_0^{II} + j\omega k'' \sqrt{L''L} \cos \alpha \hat{I}_n^{II} = 0, \\
 j\omega L'' \hat{I}_0^{II} - j\omega k'' \sqrt{L''L} \sin \theta \hat{I}_0^{III} + j\omega k'' \sqrt{L''L} \cos \theta \hat{I}_n^{IV} &= 0, \\
 j\omega L'' \hat{I}_n^{II} - j\omega k'' \sqrt{L''L} \sin \alpha \hat{I}_n^{III} + j\omega k'' \sqrt{L''L} \cos \alpha \hat{I}_n^{IV} &= 0.
 \end{aligned}$$

W równaniach tych

ω — oznacza pulsację źródła zasilającego układ,

k' — maksymalny współczynnik sprzężenia między uzwojeniami o indukcyjnościach L i L' (gdy osie tych uzwojeń pokrywają się ze sobą),

k'' — analogiczny maksymalny współczynnik sprzężenia między uzwojeniami o indukcyjnościach L i L'' ,

$R = R_s + R_p$ — sumę rezystancji uzwojenia na stojanie i jednego przewodu łączącego.

Po wprowadzeniu oznaczeń $k' \sqrt{\frac{L}{L'}} = N'$; $k'' \sqrt{\frac{L}{L''}} = N''$; $\frac{R}{\omega L} = d$

można powyższe równania przepisać jako:

$$\frac{\hat{U}}{j\omega L'} = \hat{I}_0^I - N' \cos \Theta \hat{I}^{III} - N' \sin \Theta \hat{I}^{IV}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\hat{U}}{j\omega L'} = \hat{I}_n^I + N' \cos \alpha \hat{I}^{III} + N' \sin \alpha \hat{I}^{IV}, \quad (2.2)$$

$$2(1 - jd)\hat{I}^{III} - \frac{k'^2}{N'} \cos \Theta \hat{I}_0^I + \frac{k'^2}{N'} \cos \alpha \hat{I}_n^I - \frac{k''^2}{N''} \sin \Theta \hat{I}_0^{II} - \frac{k''^2}{N''} \sin \alpha \hat{I}_n^{II} = 0, \quad (2.3)$$

$$2(1 - jd)\hat{I}^{IV} - \frac{k'^2}{N'} \sin \Theta \hat{I}_0^I + \frac{k'^2}{N'} \sin \alpha \hat{I}_n^I + \frac{k''^2}{N''} \cos \Theta \hat{I}_0^{II} + \frac{k''^2}{N''} \cos \alpha \hat{I}_n^{II} = 0, \quad (2.4)$$

$$\hat{I}_0^{II} - N'' \sin \Theta \hat{I}^{III} + N'' \cos \Theta \hat{I}^{IV} = 0, \quad (2.5)$$

$$\hat{I}_n^{II} - N'' \sin \alpha \hat{I}^{III} + N'' \cos \alpha \hat{I}^{IV} = 0. \quad (2.6)$$

Rozwiązanie układu równań (2.1) do (2.6) ma postać

$$\hat{I}_0^I = \hat{I}_n^I = \frac{\hat{U}}{j\omega L'} \left[1 + \frac{k'^2(1 - \cos \delta)}{(1 - k'^2)(1 - \cos \delta) + (1 - k''^2)(1 + \cos \delta) - j2d} \right], \quad (2.7)$$

$$\hat{I}_0^{II} = \hat{I}_n^{II} = \frac{\hat{U}}{j\omega L'} \cdot \frac{N''}{N'} k'^2 \frac{\sin \delta}{(1 - k'^2)(1 - \cos \delta) + (1 - k''^2)(1 + \cos \delta) - j2d}, \quad (2.8)$$

$$\hat{I}^{III} = \frac{\hat{U}}{j\omega L'} \cdot \frac{k'^2}{N'} \frac{\cos \Theta - \cos \alpha}{(1 - k'^2)(1 - \cos \delta) + (1 - k''^2)(1 + \cos \delta) - j2d}, \quad (2.9)$$

$$\hat{I}^{IV} = \frac{\hat{U}}{j\omega L'} \cdot \frac{k'^2}{N'} \frac{\sin \Theta - \sin \alpha}{(1 - k'^2)(1 - \cos \delta) + (1 - k''^2)(1 + \cos \delta) - j2d}, \quad (2.10)$$

gdzie $\delta = \alpha - \Theta$ jest kątem niezgodności położenia wirników.

Z wyrażeń (2. 8), (2. 9), (2. 10) widać, że prądy w uzwojeniach stojana i w uzwojeniu zwartym na wirniku mogą zmieniać swój znak i są równe zeru przy $\delta=0$, to znaczy gdy wirniki nadajnika i odbiornika zajmują analogiczne położenia względem stojanów.

Z wyrażenia (2. 7) natomiast widać, że prądy pobierane z sieci przez oba selsyny są sobie równe. Prądy te są minimalne przy zgodnym położeniu obu wirników ($\delta=0$) i rosną (początkowo bardzo powoli) w miarę wzrostu odchylenia od tego położenia. Przy przyjętych wyżej założeniach upraszczających, prądy te mają czysto indukcyjny charakter przy $\delta=0$, natomiast przy wzroście bezwzględnej wartości δ uzyskują składową, która jest w fazie z napięciem zasilającym. Oznacza to, że przy $\delta=0$, łącze selsynowe pobiera z sieci tylko moc bierną; natomiast przy rozchyleniu wzajemnym wirników pojawia się również i składowa czynna mocy. Moc ta traci się całkowicie na ciepło Joule'a w uzwojeniach stojana i przewodach łączących.

3. PRĄDY W UZWOJENIACH SELSYNÓW O BIEGUNACH WYSTAJĄCYCH

Na rys. 2 przedstawiono schematycznie łącze selsynowe składające się z dwóch identycznych selsynów o wirnikach z biegunami wystającymi (dwuzłobkowych). Selsyny te różnią się od poprzednio omówionych, poza kształtem wirnika również tym, że nie posiadają na wirniku uzwojenia zwartego.

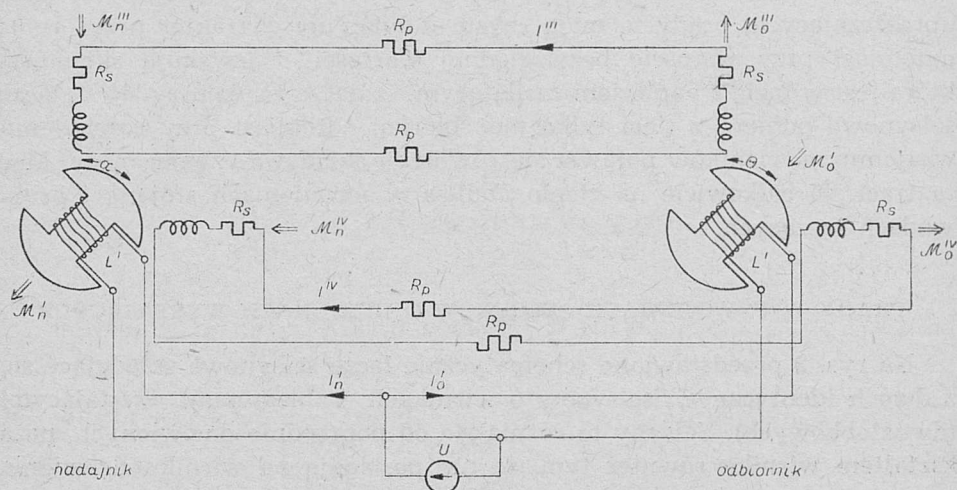
Równania (2. 1) do (2. 4), nawet przy pominięciu wyrazów z L'' , nie opisują zjawisk w łączu przedstawionym na rys. 2, gdyż w układzie tym indukcyjności uzwojeń stojana nie są stałe jak poprzednio, ale zależą od położenia wirnika. Gdy wirnik zajmuje położenie podłużne względem uzwojenia, indukcyjność jego osiąga wartość największą; gdy wirnik ustawi się poprzecznie, indukcyjność spada do minimum. W położeniach pośrednich wirnika indukcyjność uzwojeń na stojanie przybiera wartości pośrednie między powyższymi ekstremami. Zależność tej indukcyjności od kąta, pod jakim położony jest wirnik, jest na ogół trudna do określenia, gdyż jest ona funkcją kształtu wirnika.

Z tego względu analizę pracy układu z rys. 2 oparto, poza uproszczeniami przyjętymi w rozdziale 2, jeszcze na dodatkowym założeniu czynionym zazwyczaj przy rozpatrywaniu maszyn elektrycznych. Przyjęto mianowicie, że każde z uzwojeń na stojanie jest równoważne szeregowemu połączeniu dwóch uzwojeń wzajemnie prostopadłych, o osiach pokrywających się z osiami symetrii wirnika (rys. 3) i o indukcyjnościach równych odpowiednio

$$L \cos^2 \vartheta \quad \text{ i } \quad mL \sin^2 \vartheta ;$$

gdzie

- L — oznacza maksymalną indukcyjność uzwojenia (przy podłużnym położeniu wirnika),
 mL — minimalną jego indukcyjność (przy poprzecznym położeniu wirnika),
 ϑ — kąt, jaki oś uzwojenia w danym przypadku tworzy z osią uzwojenia na wirniku.



Rys. 2. Schemat łącza selsynowego zestawionego z selsynów o biegunach wystających. Strzałki z symbolami M oznaczają zwroty sił magnetomotorycznych wywołanych przepływem przez odpowiednie uzwojenia prądów o oznaczonych kierunkach.

Przy powyższych założeniach i oznaczeniach jak na rys. 2 dla rozpatrywanego układu można napisać następujące równania:

$$\hat{U} = j\omega L \hat{I}_0^I - j\omega k' \sqrt{L'L} \cos \Theta \hat{I}^{III} - j\omega k' \sqrt{L'L} \sin \Theta \hat{I}^{IV},$$

$$\hat{U} = j\omega L \hat{I}_n^I + j\omega k' \sqrt{L'L} \cos \alpha \hat{I}^{III} + j\omega k' \sqrt{L'L} \sin \alpha \hat{I}^{IV},$$

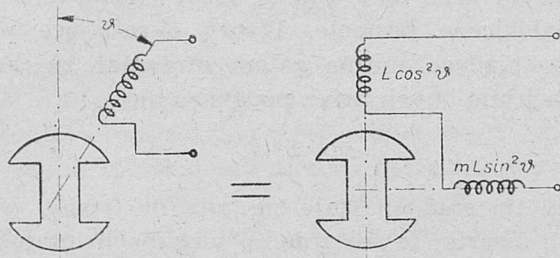
$$\begin{aligned} (2R + j\omega L \cos^2 \Theta + j\omega mL \sin^2 \Theta + j\omega L \cos^2 \alpha + j\omega mL \sin^2 \alpha) \hat{I}^{III} + \\ - j\omega k' \sqrt{L'L} \cos \Theta \hat{I}_0^I + j\omega k' \sqrt{L'L} \cos \alpha \hat{I}_n^I + \\ + j\omega L(1-m)(\sin \Theta \cdot \cos \Theta + \sin \alpha \cdot \cos \alpha) \hat{I}^{IV} = 0, \\ (2R + j\omega L \cos^2 \Theta + j\omega mL \sin^2 \Theta + j\omega L \cos^2 \alpha + j\omega mL \sin^2 \alpha) \hat{I}^{IV} + \\ - j\omega k' \sqrt{L'L} \sin \Theta \hat{I}_0^I + j\omega k' \sqrt{L'L} \sin \alpha \hat{I}_n^I + \\ + j\omega L(1-m)(\sin \Theta \cdot \cos \Theta + \sin \alpha \cdot \cos \alpha) \hat{I}^{III} = 0, \end{aligned}$$

w których, jak poprzednio

ω — oznacza pulsację źródła zasilającego układ,

k' — maksymalny współczynnik sprzężenia między uzwojeniem wirnika i jednym uzwojeniem stojana (gdy osie tych uzwojeń pokrywają się ze sobą),

$R = R_s + R_p$ — sumę rezystancji uzwojenia na stojanie i jednego przewodu łączącego.



Rys. 3. Uzwojenie stojana i jego układ równoważny.

Po wprowadzeniu oznaczeń $k' \sqrt{\frac{L}{L'}} = N'$, $\frac{R}{\omega L} = d$, powyższe równania można przepisać jako

$$\frac{\hat{U}}{j\omega L'} = \hat{I}_0^I - N' \cos \Theta \hat{I}^{III} - N' \sin \Theta \hat{I}^{IV}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\hat{U}}{j\omega L'} = \hat{I}_n^I + N' \cos a \hat{I}^{III} + N' \sin a \hat{I}^{IV}, \quad (3.2)$$

$$(-j2d + \cos^2 \Theta + m \sin^2 \Theta + \cos^2 a + m \sin^2 a) \hat{I}^{III} - \frac{k'^2}{N'} \cos \Theta \hat{I}_0^I + \frac{k'^2}{N'} \cos a \hat{I}_n^I + (1-m) (\sin \Theta \cos \Theta + \sin a \cos a) \hat{I}^{IV} = 0, \quad (3.3)$$

$$(-j2d + \cos^2 \Theta + m \sin^2 \Theta + \cos^2 a + m \sin^2 a) \hat{I}^{IV} - \frac{k'^2}{N'} \sin \Theta \hat{I}_0^I + \frac{k'^2}{N'} \sin a \hat{I}_n^I + (1-m) (\sin \Theta \cos \Theta + \sin a \cos a) \hat{I}^{III} = 0. \quad (3.4)$$

Rozwiązanie układu równań (3.1) do (3.4) ma postać

$$\hat{I}_0^I = \hat{I}_n^I = \frac{\hat{U}}{j\omega L'} \left[1 + \frac{k'^2 (1 - \cos \delta)}{(1 - k'^2) (1 - \cos \delta) + m (1 + \cos \delta) - j2d} \right], \quad (3.5)$$

$$\hat{I}_{III} = \frac{\hat{U}}{j\omega L'} \cdot \frac{k'^2}{N'} \cdot \frac{\cos \Theta - \cos \alpha}{(1-k'^2)(1-\cos \delta) + m(1+\cos \delta) - j2d}, \quad (3.6)$$

$$\hat{I}_{IV} = \frac{\hat{U}}{j\omega L'} \cdot \frac{k'^2}{N'} \cdot \frac{\sin \Theta - \sin \alpha}{(1-k'^2)(1-\cos \delta) + m(1+\cos \delta) - j2d}, \quad (3.7)$$

gdzie, jak poprzednio, $\delta = \alpha - \Theta$.

Z porównania wyrażeń (2. 7) i (3. 5), (2. 9) i (3. 6), (2. 10) i (3. 7) widać, że mają one analogiczne postacie. Wzory określające prądy selsynów o biegunach wystających można zatem otrzymać ze wzorów dla selsynów o biegunach utajonych przez podstawienie

$$m = 1 - k''^2. \quad (3.8)$$

Sens fizyczny tej analogii staje się zupełnie jasny, jeśli uwzględnić, że obecność pętli zwartej w selsynie o biegunach utajonych powoduje pozorne zmniejszenie indukcyjności uzwojenia, z którym pętla jest sprzężona. Ponieważ pętla ta jest umieszczona na wirniku, pozorne indukcyjności uzwojeń na stojanach będą zależały od położenia wirnika, a więc wystąpi efekt identyczny jak w selsynach o biegunach wystających. Na przykład na rys. 1, przy $\Theta = 0$, indukcyjność pozorna jednego uzwojenia na stojanie wynosi L , drugiego zaś $(1 - k''^2)L$, podczas gdy na rys. 2 w tych samych warunkach indukcyjności uzwojeń stojana będą wynosiły odpowiednio L i mL .

Ponieważ prądy dla obu typów selsynów wyrażają się podobnymi wzorami, uwagi z rozdziału 2 dotyczące selsynów z biegunami utajonymi można bezpośrednio odnieść również do selsynów o biegunach wystających.

4. MOMENT OBROTOWY

Moment obrotowy powstający na osi selsynu w rozpatrywanych układach można traktować jako wynik oddziaływania wzajemnego między polem magnetycznym i prądami płynącymi w uzwojeniach stojanów.

Jak podkreślono w rozdziale 3, prądy płynące w uzwojeniach selsynów obu typów, z biegunami utajonymi i jawnymi, wyrażają się identycznymi wzorami. Jeśli zatem dane są dwa łącza różnych typów, zestawione z selsynów o identycznych stojanach i o pozostałych wartościach wielkości wchodzących do wzorów (2. 7), (2. 9), (2. 10), (3. 5), (3. 6), (3. 7) odpowiednio równych, z uwzględnieniem warunku (3. 8), to prądy płynące w uzwojeniach odpowiadających sobie selsynów będą równe. Prądy w uzwojeniach stojanów powstają przez indukcję, a ponieważ stojany te są identyczne, to istniejące w nich pola magnetyczne muszą być również identyczne tak w obu nadajnikach, jak i odbiornikach.

Z powyższego wynika, że momenty obrotowe na osiach selsynów w obu rozpatrywanych przypadkach muszą być również jednakowe, wystarczy zatem określić te momenty dla jednego typu selsynów, a otrzymany wzór słuszny będzie również i dla selsynów typu drugiego.

Ze względu na prostotę rozważań przytoczono poniżej wprowadzenie wzoru na moment obrotowy dla selsynów z biegunami utajonymi. Moment ten można obliczyć wychodząc ze znanej zależności

$$F = B \cdot I \cdot l, \quad (4.1)$$

gdzie F — oznacza siłę działającą na przewodnik z prądem I , znajdujący się na długości l w prostokątym doń polu magnetycznym o indukcji B .

Dla uproszczenia rozważań przyjęto układ mający tylko dwa uzwojenia: jedno na wirniku i jedno na stojanie i niech w uzwojeniach tych płyną prądy stałe I_w i I_s . W przypadku braku prądu w uzwojeniu wirnika, prąd I_s powoduje powstanie pola magnetycznego; pole to, określone we współrzędnych walcowych, których oś z pokrywa się z osią obrotu wirnika, ma składowe:

$$B_r = f_1(R, \gamma, z),$$

$$B_\gamma = f_2(R, \gamma, z),$$

$$B_z = f_3(R, \gamma, z).$$

R — jest tu współrzędną określającą odległość od osi z ,

γ — współrzędną określającą kąt względem przyjętej płaszczyzny odniesienia,

B_r — składową radialną indukcji magnetycznej,

B_γ — jej składową styczną,

B_z — składową skierowaną wzdłuż osi z .

Położenie wirnika można określić w powyższym układzie współrzędnych przez jedną tylko współrzędną γ_0 dowolnie obranego i związanego z wirnikiem punktu nie leżącego na osi obrotu z .

Jeśli przyjąć, że

- indukcja magnetyczna może mieć wartość różną od zera tylko dla wartości współrzędnej z zawartej w przedziale (a, b) (odpowiadającym długości żelaza wirnika rozpatrywanego układu), poza tym przedziałem natomiast jest równa zeru,
- przewodność magnetyczna dla obu uzwojeń jest stała i niezależna od położenia wirnika,
- każdy zwój na wirniku ma w obszarze zawartym między płaszczyznami $z=a$ oraz $z=b$ dwa boki równoległe do osi z ,
- zmiany pola magnetycznego i gęstości prądu w przekroju każdego z przewodów uzwojenia wirnika mogą nie być brane pod uwagę,

to przy przepływającym prądzie I_w i ustalonym położeniu wirnika moment obrotowy skręcający pojedynczy zwój wirnika względem stojana można wyrazić jako

$$T_p = I_w \int_a^b \{R' B_r(R', \gamma', z) - R'' B_r(R'', \gamma'', z)\} dz,$$

gdzie R' , γ' oraz R'' , γ'' są współrzędnymi środków boków zwoju równoległych do osi z .

Całkowity moment obrotowy, skręcający wirnik względem stojana, jest sumą momentów działających na poszczególne zwoje i wyrazi się w dość prosty sposób, jeśli przyjąć, że oś z jest osią symetrii dla części uzwojenia leżącego w obszarze między płaszczyznami $z=a$ i $z=b$, to znaczy, że jeśli współrzędne środków przewodów w jednym boku są

$$R_1, \gamma_0 + \gamma_1 \quad R_2, \gamma_0 + \gamma_2 \quad \dots \quad R_n, \gamma_0 + \gamma_n$$

wtedy współrzędne środków przewodów w drugim boku można wyrazić

$$R_1, \gamma_0 + \gamma_1 + \pi \quad R_2, \gamma_0 + \gamma_2 + \pi \quad \dots \quad R_n, \gamma_0 + \gamma_n + \pi.$$

Przy tym założeniu moment obrotowy na osi wirnika będzie równy

$$T = \sum_{k=1}^n I_w R_k \int_a^b \{B_r(R_k, \gamma_0 + \gamma_k, z) - B_r(R_k, \gamma_0 + \gamma_k + \pi, z)\} dz, \quad (4.2)$$

gdzie n jest liczbą zwojów uzwojenia na wirniku.

Przy założeniu, że indukcyjność wzajemna między uzwojeniami na wirniku i stojanie jest proporcjonalna do kosinusa kąta, jaki tworzą ze sobą osie tych uzwojeń (rozdział 2), wzór (4.2) daje się sprowadzić do bardzo prostej postaci. Mianowicie strumień magnetyczny obejmowany przez pojedynczy zwój wirnika można przedstawić jako

$$\Phi_p = \int_a^b \left\{ R' \int_{\gamma'}^{\gamma_0} B_r(R', \gamma, z) d\gamma + R'' \int_{\gamma_0}^{\gamma''} B_r(R'', \gamma, z) d\gamma + \int_{R'}^{R''} B_r(R, \gamma_0, z) dR \right\} dz,$$

gdzie, jak poprzednio, R' , γ' oraz R'' , γ'' oznaczają współrzędne środków boków tego zwoju równoległych do osi z , a więc odpowiednie pary ze zbiorów

$$\begin{aligned} R_1, \gamma_0 + \gamma_1 & \quad R_2, \gamma_0 + \gamma_2 \quad \dots \quad R_n, \gamma_0 + \gamma_n, \\ R_1, \gamma_0 + \gamma_1 + \pi & \quad R_2, \gamma_0 + \gamma_2 + \pi \quad \dots \quad R_n, \gamma_0 + \gamma_n + \pi. \end{aligned}$$

Strumień magnetyczny skojarzony z uzwojeniem wirnika można wyrazić przez

$$\Psi = \sum_{k=1}^n \int_a^b \left\{ R_k \int_{\gamma_0 + \gamma_k}^{\gamma_0 + \gamma_k + \pi} B_r(R_k, \gamma, z) d\gamma + \int_{R_k}^{R_k^*} B_r(R, \gamma_0, z) dR \right\} dz,$$

gdzie R_k^* oznacza k -ty element ze zbioru będącego określoną przez sposób nawinięcia permutacją zbioru

$$R_1 \ R_2 \ R_3 \ \dots \ R_n.$$

Ponieważ jak łatwo dowieść

$$\sum_{k=1}^n \int_{R_k}^{R_k^*} B_r(R, \gamma_0, z) dR = 0,$$

$$\Psi = \sum_{k=1}^n \int_a^b \left\{ R_k \int_{\gamma_0 + \gamma_k}^{\gamma_0 + \gamma_k + \pi} B_r(R_k, \gamma, z) d\gamma \right\} dz.$$

Indukcyjność wzajemną między uzwojeniami wirnika i stojana można wyrazić przez

$$M = \frac{\Psi}{I_s}.$$

Jeśli teraz przyjąć, analogicznie jak w rozdziale 2, że indukcyjność wzajemna między uzwojeniami wirnika i stojana jest proporcjonalna do kosinusa kąta, jaki tworzą ze sobą osie tych uzwojeń, to przy odpowiednim wyborze układu współrzędnych można napisać

$$\frac{1}{I_s} \sum_{k=1}^n \int_a^b R_k \int_{\gamma_0 + \gamma_k}^{\gamma_0 + \gamma_k + \pi} B_r(R_k, \gamma, z) d\gamma dz = M_{\max} \cos \gamma_0. \quad (4.3)$$

Zróżniczkowanie obu stron wyrażenia (4.3) względem γ_0 daje

$$\frac{1}{I_s} \sum_{k=1}^n \int_a^b R_k \left\{ B_r(R_k, \gamma_0 + \gamma_k + \pi, z) - B_r(R_k, \gamma_0 + \gamma_k, z) \right\} dz = -M_{\max} \sin \gamma_0 \quad (4.4)$$

Z porównania wyrażeń (4.2) i (4.4) wynika

$$T = I_w \cdot I_s \cdot M_{\max} \cdot \sin \gamma_0. \quad (4.5)$$

Wzór (4.5) określa zatem moment obrotowy powstający na wale wirnika, gdy przez uzwojenia układu przepływają prądy stałe I_w i I_s .

Jeśli prądy w uzwojeniach wirnika i stojana są zmienne w czasie, to wartość chwilową momentu obrotowego określi wzór

$$T_t = I_{wt} \cdot I_{st} \cdot M_{\max} \cdot \sin \gamma_0,$$

gdzie I_{wt} oraz I_{st} oznaczają wartości chwilowe.

Gdy prądy w uzwojeniach wirnika i stojana są harmonicznymi funkcjami czasu o tej samej częstotliwości

$$I_{st} = I_{sm} \sin \omega t,$$

$$I_{wt} = I_{wm} \sin (\omega t + \varphi),$$

to przez moment obrotowy w tym przypadku rozumie się nie wartość chwilową tej wielkości, lecz jej wartość średnią za okres

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_{st} \cdot I_{wt} \cdot M_{\max} \sin \gamma_0 d\omega t = \frac{M_{\max} \sin \gamma_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_{sm} \sin \omega t \cdot I_{wm} \sin (\omega t + \varphi) d\omega t = \\ &= \frac{1}{2} I_{sm} I_{wm} \cos \varphi M_{\max} \sin \gamma_0. \end{aligned}$$

Jeśli dane są wyrażenia symboliczne dla prądów $\hat{I}_s$ oraz $\hat{I}_w$, to można łatwo wykazać (analogicznie zresztą jak przy obliczeniach mocy w układach prądu zmiennego), że

$$\frac{1}{2} I_{sm} I_{wm} \cos \varphi = \operatorname{Re} \{ \check{I}_w \cdot \hat{I}_s \},$$

gdzie prawa strona oznacza część rzeczywistą liczby zespolonej, otrzymanej z pomnożenia $\hat{I}_s$ przez liczbę zespoloną, sprzężoną z $\hat{I}_w$.

Zatem w przypadku, gdy przez uzwojenia układu płyną prądy zmienne i gdy prądy te są określone w postaci symbolicznej, moment obrotowy na wale wirnika określi wzór

$$T = \operatorname{Re} \{ \check{I}_w \cdot \hat{I}_s \cdot M_{\max} \cdot \sin \gamma_0 \} \quad (4.6)$$

Moment obrotowy na osi selsynu o biegunach utajonych można obliczyć posługując się wzorem (4.6), jeśli dopuścić uproszczenia poczynione przy wyprowadzeniu tego wzoru. Należy podkreślić, że uproszczenia te nie wykluczają z rozważań selsynów o skośnych żłobkach na wirniku bądź na stojanie, nie ograniczają również sposobu nawinięcia, gdyż założoną symetrię osiową można osiągnąć nie tylko przy nawinięciu średnicowym, ale i przy nawinięciach cięciwowych.

Moment obrotowy na osi selsynu z rysunku 1 można traktować jako skutek oddziaływania wzajemnego między czterema uzwojeniami. Moment ten na osi odbiornika, zgodnie ze wzorem (4.6) i przy oznaczeniach jak w rozdziale 2, jest równy

$$\begin{aligned} T_0 &= \operatorname{Re} \{ k' \sqrt{L' L} \check{I}_0^{\text{III}} \hat{I}^{\text{III}} \sin \Theta - k' \sqrt{L' L} \check{I}_0^{\text{IV}} \hat{I}^{\text{IV}} \cos \Theta + \\ &\quad - k'' \sqrt{L'' L} \check{I}_0^{\text{II}} \hat{I}^{\text{III}} \cdot \cos \Theta - k'' \sqrt{L'' L} \check{I}_0^{\text{IV}} \hat{I}^{\text{IV}} \sin \Theta \} \quad (4.7) \end{aligned}$$

lub po odpowiednich podstawieniach

$$T_0 = \frac{U_{sk}^2}{2\omega^2 L'} \frac{k'^2(1-k''^2) \sin \delta}{\left[(1-k'^2) \sin^2 \frac{\delta}{2} + (1-k''^2) \cos^2 \frac{\delta}{2} \right]^2 + d^2} \quad (4.8a)$$

Analogicznie moment obrotowy na osi nadajnika wynosi

$$T_n = \operatorname{Re} \{ -k' \sqrt{L' L_n} \hat{I}_n^{\text{III}} \sin \alpha + k' \sqrt{L' L_n} \hat{I}_n^{\text{IV}} \cos \alpha + \\ -k'' \sqrt{L'' L_n} \hat{I}_n^{\text{III}} \cos \alpha - k'' \sqrt{L'' L_n} \hat{I}_n^{\text{IV}} \sin \alpha \}$$

lub po podstawieniach

$$T_n = -\frac{U_{sk}^2}{2\omega^2 L'} \frac{k'^2(1-k''^2) \sin \delta}{\left[(1-k'^2) \sin^2 \frac{\delta}{2} + (1-k''^2) \cos^2 \frac{\delta}{2} \right]^2 + d^2} \quad (4.8b)$$

Z porównania wyrażeń (4.8a), (4.8b) widać, że momenty obrotowe na osiach nadajnika i odbiornika są sobie równe i przeciwnie skierowane. Oznacza to, że jeśli na osi odbiornika wystąpić ma określony moment obrotowy, to analogiczny moment musi być przyłożony na oś nadajnika. Łączy zatem zachowuje się jako pewnego rodzaju giętki wał, w którym nie występuje wzmacnianie momentu obrotowego.

Z wyrażeń (4.8a), (4.8b) widać również, że krzywa $T=f(\delta)$ na ogół nie jest sinusoidą; staje się nią tylko w przypadku gdy $k'=k''$. Przy $k'>k''$ ekstrema tej funkcji występują dla $|\delta| > 90^\circ$, przy $k'<k''$ dla $|\delta| < 90^\circ$.

Kształt całej krzywej momentu nie ma zasadniczego znaczenia w praktyce (pomijając efekty tzw. przerzutów o 360° przy nagłym przeciążeniu), gdyż przy pracy ciągłej, jak to wykazano niżej, selsyn może pracować tylko przy małych kątach niezgodności, w którym to zakresie zależność $T=f(\delta)$ można traktować jako liniową i posługiwać się pojęciem sztywności.

Powyższe uwagi przy uwzględnieniu zależności (3.8) dotyczą również selsynów z biegunami wystającymi, dla których wzory na momenty obrotowe przybierają postać

$$T_0 = -T_n = \frac{U_{sk}^2}{2\omega^2 L'} \frac{k'^2 m \sin \delta}{\left[(1-k'^2) \sin^2 \frac{\delta}{2} + m \cos^2 \frac{\delta}{2} \right]^2 + d^2} \quad (4.9)$$

5. SZTYWNOŚĆ ŁĄCZA SELSYNOWEGO

Sztywność łącza określona jest jako wartość bezwzględna nachylenia krzywej momentu obrotowego w funkcji kąta niezgodności w punkcie $\delta=0$

$$S = \left| \frac{\partial T_0}{\partial \delta} \right|_{(\delta=0)} = \left| \frac{\partial T_n}{\partial \delta} \right|_{(\delta=0)}$$

Odpowiednio do tego sztywność łącza zestawionego z selsynów o biegunach utajonych jest

$$S_u = \frac{U_{sk}^2 k'^2}{2\omega^2 L'} \cdot \frac{1 - k''^2}{(1 - k''^2)^2 + d^2}, \quad (5.1a)$$

sztywność zaś łącza zestawionego z selsynów o biegunach wystających

$$S_w = \frac{U_{sk}^2 k'^2}{2\omega^2 L'} \cdot \frac{m}{m^2 + d^2}. \quad (5.1b)$$

Z innych rozważań dotyczących błędów łącza selsynowego zarówno w stanie spoczynku, jak i podczas ruchu wynika, że jego sztywność powinna być możliwie duża.

Z wyrażeń (5.1a) i (5.1b) widać, że sztywność zależy od wpływu wirnika na indukcyjność uzwojeń na stojanie; w wyrażeniu (5.1a) jest ona funkcją $(1 - k''^2)$, w wyrażeniu zaś (5.1b) — funkcją m . Funkcje te osiągają maksima w punktach, gdzie

$$\frac{\partial S_u}{\partial (1 - k''^2)} = \frac{\partial S_w}{\partial m} = 0,$$

co zachodzi przy

$$1 - k''^2 = m = d = \frac{R}{\omega L}. \quad (5.2)$$

Po odpowiednim podstawieniu wartości (5.2) wyrażenia (5.1a) i (5.1b) przybierają postać

$$S_{u \max} = S_{w \max} = \frac{U_{sk}^2 k'^2}{4\omega R} \cdot \frac{L}{L'}, \quad (5.3a)$$

lub

$$S_{u \max} = S_{w \max} = P_b \cdot \frac{k'^2 L}{8R}, \quad (5.3b)$$

gdzie P_b oznacza moc bierną pobieraną przez łącze z sieci zasilającej przy $\delta=0$.

Sens fizyczny warunku (5.2) jest następujący. Przy danym strumieniu magnetycznym powstającym w rdzeniu selsynu pod wpływem przyłożo-

nego napięcia sztywność zależy od amplitudy prądów w uzwojeniach wtórnych i od ich fazy względem strumienia. Maksimum sztywności uzyskuje się przy maksymalnej amplitudzie i braku przesunięcia fazowego. Prądy w uzwojeniach wtórnych wzrastają, gdy maleje indukcyjność w obwodach, w których się one zamykają. Stąd wynika korzystny wpływ uzwojenia zwartego na wirnik w przypadku biegunów utajonych, lub też odpowiedniego kształtu wirnika — w przypadku biegunów jawnych. Jednakże istnienie indukcyjności w tych obwodach jest konieczne ze względu na przesunięcie fazowe. W przypadku bowiem zupełnego braku indukcyjności w obwodzie uzwojenia wtórnego, prąd w nim płynący jest przesunięty w fazie o 90° względem strumienia i moment obrotowy staje się równy zeru. Jeśli zatem indukcyjność jest duża w stosunku do rezystancji, to jej zmniejszenie powoduje znaczny wzrost prądu przy nieznacznej zmianie fazy i moment obrotowy rośnie.

Gdy indukcyjność jest mała w stosunku do rezystancji, to jej zmniejszanie powoduje również i tym razem wzrost prądu, jednakże nieznaczny, podczas gdy przesunięcie fazowe zmienia się znacznie i moment obrotowy maleje.

Maksimum momentu uzyskuje się przy równości reaktancji indukcyjnej i rezystancji w uzwojeniu wtórnym, co odpowiada przesunięciu fazowemu prądu względem strumienia o 45° i co zachodzi właśnie przy spełnionym warunku (5. 2).

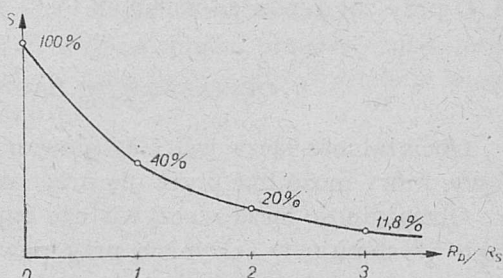
Ze wzorów (5. 1), (5. 3) wynikają następujące wnioski:

1. Dla danego łącza (selsynów i przewodów łączących) oraz określonej częstotliwości zasilania sztywność rośnie z kwadratem napięcia zasilającego.

2. Maksymalną sztywność selsyn osiąga przy spełnionym warunku (5. 2). Zatem każdej częstotliwości zasilania odpowiada określona optymalna wartość k'' , bądź m .

3. Przy spełnionym warunku (5. 2) sztywność wzrasta proporcjonalnie do mocy biernej pobieranej przez selsyny z sieci zasilającej oraz do stosunku L/R . Wzrasta ona zatem z wymiarami selsynów, gdyż wtedy oba te czynniki wzrastają.

4. Sztywność maleje ze wzrostem rezystancji przewodów łączących stojany. Ze wzoru (5. 3) widać, że jest ona proporcjonalna do stosunku



Rys. 4. Zależność sztywności łącza od stosunku rezystancji przewodów łączących do rezystancji uzwojeń na stojanach.

L/R , to jest $L/R_s + R_p$. Stosunek ten, jeśli rezystancja przewodów łączących R_p jest znikomo mała w stosunku do rezystancji uzwojeń R_s , charakteryzuje uzwojenie stojana i przy określonym miejscu, jakie uzwojenie to zajmuje, nie zależy od ilości zwoi, jeśli pominąć grubość izolacji. Praktycznie biorąc stosunek ten maleje ze wzrostem ilości zwoi ze względu na wzrost miejsca, jakie zajmuje izolacja. Z drugiej jednak strony korzystne jest nawijanie stojana cienkim drutem i dużą liczbą zwojów, ze względu na mniejszy wpływ rezystancji przewodów łączących stojany, i mniejszy efekt naskórkowości. Gdy rezystancja przewodów łączących stojany jest współmierna z rezystancją uzwojeń, sztywność spada dość znacznie. Ilustrację tego efektu podano na rys. 4, sporządzonym na podstawie wzoru (5.1) przy założeniu, że warunek (5.2) spełniony jest przy $R_p = 0$.

6. OBCIĄŻALNOŚĆ ŁĄCZA SELSYNOWEGO

Obciążalność łączy jest zdefiniowana jako maksymalny moment obrotowy, który może być przez nie przenoszony podczas pracy ciągłej.

Obciążalność łączy rzeczywistego ograniczona jest przez straty cieplne, jakie występują w selsynach przy powiększaniu kąta niezgodności δ . Są one sumą strat: w żelazie, w miedzi, uzwojenia pierwotnego, w miedzi uzwojeń wtórnych. Z tych trzech składników praktycznym ograniczeniem obciążalności łączy są tylko straty w miedzi uzwojeń wtórnych, które rosną bardzo szybko z kątem niezgodności i osiągają niedopuszczalną wartość już przy nieznacznych jego wartościach (zazwyczaj rzędu kilkunastu stopni). Straty w żelazie i w uzwojeniu pierwotnym przy tak małych kątach niezgodności pozostają prawie niezmienione.

Wykazać to można w oparciu o wzory (2.7) do (2.10) oraz (3.5) do (3.7). Prądy I^{III} i I^{IV} są równe zero przy zgodnym położeniu obu wirników i rosną przy odchyleniu od tego położenia. Ten wzrost prądów w uzwojeniach stojana zależy jednak nie tylko od bezwzględnej wartości kąta niezgodności δ , ale i od położenia, jakie dane uzwojenie zajmuje w tej chwili względem wirnika.

Tak na przykład prąd I^{III} jest największy przy zadanej wartości δ , gdy

$$\frac{d}{d\Theta} [\cos \Theta - \cos (\Theta + \delta)] = 0$$

to jest gdy

$$-\sin \Theta + \sin (\Theta + \delta) = 0$$

lub

$$\Theta = \pm \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}. \quad (6.1)$$

Analogicznie prąd I^{IV} osiąga największą wartość przy zadanej wartości δ , gdy

$$\frac{d}{d\Theta} [\sin \Theta - \sin (\Theta + \delta)] = 0,$$

to jest gdy

$$\cos \Theta - \cos (\Theta + \delta) = 0$$

lub

$$\Theta = -\frac{\delta}{2}, \quad \Theta = \pi - \frac{\delta}{2}. \quad (6.2)$$

Przy określaniu dopuszczalnych wartości δ , ze względu na grzanie się uzwojeń stojana, należy brać pod uwagę przyrost prądu w tych uzwojeniach w określonych wyżej położeniach względem wirnika.

Oszacowanie grzania się uzwojeń stojana można przeprowadzić przez porównanie z uzwojeniem pierwotnym. Amplituda gęstości prądu w uzwojeniu pierwotnym jest w przybliżeniu

$$J'_m = \frac{I_m^I \cdot z'}{\sigma'},$$

gdzie

z' — oznacza liczbę zwojów,

σ' — przekrój zajmowany przez to uzwojenie.

Analogicznie na stojanie

$$J_m = \frac{I_m \cdot z}{\sigma},$$

gdzie

z — oznacza liczbę zwojów jednego uzwojenia na stojanie,

σ — przekrój zajmowany przez to uzwojenie.

Jeśli przyjąć, że $\sigma = \sigma'$, to stosunek amplitud gęstości prądów w uzwojeniu pierwotnym i uzwojeniach stojana jest

$$\frac{J_m}{J'_m} = \frac{I_m z}{I_m^I z'} \approx \frac{I_m}{I_m^I} \sqrt{\frac{L}{L'}}.$$

Ponieważ, jak to jest wykazane niżej, amplituda prądu w uzwojeniu pierwotnym prawie się nie zmienia ze zmianami δ w dopuszczalnym zakresie pracy, można przyjąć jej wartość dla $\delta = 0$, to jest

$$I_m^I = \frac{U_m}{\omega L'}$$

oraz

$$\frac{J_m}{J'_m} = \frac{I_m \omega L'}{U_m} \sqrt{\frac{L}{L'}}$$

Z powyższego widać, że gęstość prądu w uzwojeniach stojana staje się równa gęstości prądu w uzwojeniu pierwotnym dla wartości amplitudy prądów stojana

$$I_m = \frac{U_m}{\omega \sqrt{L'L}}$$

Powyższa wartość amplitudy prądu w uzwojeniach stojana w położeniu określonym przez warunek (6. 1) dla I^{III} i przez warunek (6. 2) dla I^{IV} , jest osiągana przy $d=0,1$, $k'=k''$ i dopasowaniu selsynu do pracy na danej częstotliwości, to jest spełnionym warunku (5. 2), już przy

$$|\delta| \approx 17^\circ$$

a przy $d=0,05$ dla

$$|\delta| \approx 8,5^\circ$$

Oznacza to, że w pierwszym z rozpatrywanych przypadków straty w miedzi stojana przekroczą dopuszczalną wartość już przy $|\delta| > 17^\circ$, w drugim zaś — przy $|\delta| > 8,5^\circ$.

Jeśli chodzi o prąd w uzwojeniu pierwotnym, to w pierwszym z rozpatrywanych przypadków, jak to wynika ze wzoru (2. 7) i (3. 5), wzrasta on o 10%, w drugim zaś zaledwie o 5%, a więc założona wyżej niezmiennosc tego prądu z rozchylaniem wirników jest zupełnie usprawiedliwiona.

Ponieważ założone w powyższych przykładach wartości d odpowiadają przeciętnie spotykanym w praktyce, oznacza to, że w układach praktycznych przy nieznacznym wzroście kąta niezgodności prądu w uzwojeniach stojanów rosną bardzo szybko, podczas gdy prąd w uzwojeniu pierwotnym zmienia się raczej nieznacznie. Można stąd wysnuć wniosek, że w układach rzeczywistych straty w uzwojeniu pierwotnym, jeśli uwzględnić określoną jego rezystancję, pozostają prawie niezmiennie przy rozchylaniu wirników z położenia równowagi oraz że spadek napięcia na tej rezystancji i na indukcyjności rozproszenia jest prawie stały, a więc indukcja maksymalna w rdzeniu również prawie się nie zmienia i straty w żelazie są stałe.

W łącu złożonym z selsynów o biegunach wystających nie występują inne prądy poza rozpatrzonymi wyżej (brak uzwojenia zwartego); na podstawie powyższych rozważań można zatem wysnuć wniosek, że ograniczeniem obciążalności takiego łąca są straty w uzwojeniach stojana.

W łącu złożonym z selsynów o biegunach utajonych dochodzi dodatkowo wpływ uzwojenia zwartego. W przypadku tym można wykazać w sposób analogiczny jak poprzednio, że gdy uzwojenie to ma taki sam przekrój miedzi jak uzwojenia na stojanie, to gęstość prądu w tym uzwojeniu dla niewielkich kątów niezgodności będzie w przybliżeniu taka sama jak w uzwojeniach na stojanie w najbardziej niekorzystnych położeniach wirnika, określonych przez wzory (6. 1) lub (6. 2). Wydawałoby się zatem,

ze efektu grzania się uzwojenia zwartego w układach rzeczywistych można nie rozpatrywać osobno, gdyż nie będzie on większy jak w uzwojeniach stojana.

W układach praktycznych jednak, gdy przekrój uzwojenia zwartego jest mniejszy od przekroju uzwojeń stojana i gdy te ostatnie mają lepsze warunki chłodzenia, ograniczeniem obciążalności łącza może być grzanie się uzwojenia zwartego na wirniku.

Jeżeli jednak, pomimo powyższych różnic między obydwoma typami selsynów, założyć w celu jednolitego ich traktowania, że w przybliżeniu w obu przypadkach ograniczeniem obciążalności są straty w uzwojeniach stojana, to wzór na obciążalność łącza otrzymać można z wyrażenia (4. 7) przez odpowiednie jego przekształcenie. Mianowicie po podstawieniu $\hat{I}_0^{\text{II}}$ z wyrażen (2. 1) i (2. 5) wyrażenie to przyjmuje postać

$$\begin{aligned} T_0 = & \operatorname{Re} \left\{ k' \sqrt{L' L} (\hat{I}^{\text{III}} \sin \Theta - \hat{I}^{\text{IV}} \cos \Theta) \left(\frac{-\check{U}}{j\omega L'} + N' \check{I}^{\text{III}} \cos \Theta + N' \check{I}^{\text{IV}} \sin \Theta \right) + \right. \\ & \left. - k'' \sqrt{L' L} (\hat{I}^{\text{III}} \cos \Theta + \hat{I}^{\text{IV}} \sin \Theta) (N'' \check{I}^{\text{III}} \sin \Theta - N'' \check{I}^{\text{IV}} \cos \Theta) \right\} = \\ = & \operatorname{Re} \left\{ (\hat{I}^{\text{III}} \sin \Theta - \hat{I}^{\text{IV}} \cos \Theta) \cdot \left[j N' \frac{\check{U}}{\omega} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \check{I}^{\text{III}} L (k'^2 - k''^2) \cos \Theta + \check{I}^{\text{IV}} L (k'^2 - k''^2) \sin \Theta \right] \right\}. \quad (6.3) \end{aligned}$$

Jeżeli założyć, że k' niewiele różni się od k'' , to wyrażenie (6. 3) można napisać w przybliżonej postaci jako

$$T_0 \approx \operatorname{Re} \left\{ j N' \frac{\check{U}}{\omega} (\hat{I}^{\text{III}} \sin \Theta - \hat{I}^{\text{IV}} \cos \Theta) \right\}. \quad (6.4)$$

Ze wzorów (4. 8) i (4. 9) wynika, że moment obrotowy nie zależy od kąta Θ , to jest od położenia, jakie zajmuje wirnik odbiornika względem stojana, zależy natomiast od kąta niezgodności δ . Wynika stąd, że we wzorze (6. 4) można przyjąć dowolny kąt Θ , a mimo to wzór ten będzie słuszny dla wszystkich wartości Θ . Przy założeniu na przykład $\Theta = 90^\circ$ wyrażenie (6. 4) upraszcza się do postaci

$$T_0 \approx \operatorname{Re} \left\{ j N' \frac{\check{U}}{\omega} \hat{I}_{m(\Theta=90^\circ)}^{\text{III}} \right\},$$

przy spełnionym zaś warunku (5. 2), to jest przesunięciu fazowym między prądem i strumieniem $\varphi = 45^\circ$

$$T_0 \approx \frac{1}{2} N' \frac{U_m}{\omega} I_{m(\Theta=90^\circ)}^{\text{III}} \cdot \cos 45^\circ = \frac{1}{2} N' \frac{U_{sk}}{\omega} I_{m(\Theta=90^\circ)}^{\text{III}}. \quad (6.5)$$

Wzór powyższy zawiera amplitudę prądu I_m^{III} , jaka odpowiada danemu kątowi niezgodności w położeniu wirnika określonym w przybliżeniu przez warunek (6. 1). W położeniu tym prąd I^{III} wzrasta najszybciej ze wzrostem kąta niezgodności; jeżeli więc do wzoru (6. 5) wstawiona zostanie maksymalnie dopuszczalna w uzwojeniach stojana amplituda prądu $I_{s \max}$, wzór ten określi obciążalność łącza

$$T_{\max} = \frac{1}{2} N' \frac{U_{sk}}{\omega} I_{s \max}. \quad (6.6)$$

Wzór (6. 6) przyjęty został w dalszych rozważaniach za podstawę dyskusji obciążalności łącza w funkcji częstotliwości zasilania.

7. ZALEŻNOŚĆ SZTYWNOŚCI I OBCIĄŻALNOŚCI ŁĄCZA OD CZĘSTOTLIWOŚCI ZASILANIA

Poniższa dyskusja oparta jest na wzorach (5. 3) i (6. 6). Obydwa te wzory odnoszą się do selsynów, które spełniają warunek (5. 2), a więc są dopasowane do pracy na jednej, rozpatrywanej częstotliwości. Niemniej jednak, jeśli założyć, że wartość k'' bądź m może być w pewnych granicach dopasowywana do zmian częstotliwości bez zmiany pozostałych wielkości wchodzących do tych wzorów, to mogą one być użyte za podstawę dyskusji wpływu zmian częstotliwości w tym zakresie. Wartość m może być na przykład zmieniana przez zmianę kształtu nabiegunków wirnika, wartość zaś k'' — przez zmianę kształtu zębów wirnika cylindrycznego. Jako jeden ze środków, rzadziej wprowadzanych, można również wymienić zaklinowywanie uzwojenia zwartego w żłobkach za pomocą odpowiednich klinów ferromagnetycznych.

Wzorami (5. 3) i (6. 6) wygodniej jest operować w innej nieco ich postaci. Jeśli poza rezystancją uzwojenia pierwotnego pominąć również jego indukcyjność rozproszenia, to napięcie zasilające łącze można wyrazić w następujący sposób

$$U_{sk} = K \cdot \Psi \cdot \omega \quad (7.1)$$

gdzie

K — jest współczynnikiem,

Ψ — oznacza amplitudę strumienia magnetycznego skojarzonego z uzwojeniem pierwotnym.

Wykorzystując powyższą zależność można wyrażenie (5. 3) i (6. 6) przedstawić w postaci

$$S = \frac{K^2 \cdot \Psi^2 \cdot N^2}{4} \cdot \frac{\omega}{R} \quad (7.2)$$

$$T_{\max} = \frac{K \Psi N'}{2} \cdot I_{s \max}. \quad (7.3)$$

Z wyrażeń (7.2) i (7.3) widać, że przy stałej amplitudzie strumienia magnetycznego sztywność wzrasta proporcjonalnie do częstotliwości zasilania, obciążalność zaś, jeśli przyjąć stałą, maksymalnie dopuszczalną amplitudę prądu w uzwojeniach stojana, nie zależy od tej częstotliwości.

W dyskusji wpływu częstotliwości na pracę łączy konieczne jest uwzględnienie roli strat w żelazie i miedzi uzwojenia pierwotnego. Wprawdzie wyprowadzone wyżej wzory otrzymano przy pominięciu tych strat, uproszczenie to jednak jest zupełnie dopuszczalne, gdyż straty te tylko w nieznacznym stopniu wpływają na prądy w uzwojeniach i na moment obrotowy łączy. Przeciwnie jednak, straty w uzwojeniach i żelazie są całkowicie określone przez prądy i napięcia w układzie. Można zatem, nie popełniając dużych błędów, ze wzorów uproszczonych wnosić pośrednio o stratach, które zaniedbano przy ich wyprowadzeniu.

Straty w żelazie, które są proporcjonalne do kwadratu amplitudy indukcji magnetycznej, można rozpatrywać jako sumę strat: na histerezę i na prądy wirowe. Straty na histerezę są ponadto proporcjonalne do częstotliwości zmian indukcji, straty zaś na prądy wirowe — do kwadratu tej częstotliwości:

$$P_H \approx B^2 \omega; \quad P_w \approx B^2 \omega^2.$$

Jeśli uwzględnić tylko straty na histerezę i założyć ich stałość ze zmianami częstotliwości, wtedy iloczyn $B^2 \omega$ musi być stały i, jak wynika ze wzoru (7.2), sztywność będzie stała, niezależna od częstotliwości. Obciążalność selsynu, jak to wynika ze wzoru (7.3), w tych samych warunkach będzie malała odwrotnie proporcjonalnie do pierwiastka z częstotliwości.

Przy uwzględnieniu tylko strat na prądy wirowe i założeniu ich niezmienności z częstotliwością, iloczyn $B^2 \omega^2$ musi być stały, a zatem, jak wynika ze wzorów (7.2) i (7.3), zarówno sztywność jak i obciążalność maleją odwrotnie proporcjonalnie do częstotliwości.

Z powyższego wynika, że przy zachowaniu stałych całkowitych strat w żelazie zarówno sztywność jak i obciążalność maleją ze wzrostem częstotliwości. To zmniejszanie się sztywności i obciążalności zachodzi tym szybciej, im bardziej przeważają straty na prądy wirowe.

Widać stąd, że przy uwzględnieniu tylko strat w żelazie i zaniedbaniu pozostałych czynników, zmniejszaniu częstotliwości zasilania towarzyszyłby ciągły wzrost sztywności i obciążalności łączy. Odbывałoby się to oczywiście przy jednoczesnym wzroście amplitudy indukcji magnetycznej.

W rzeczywistości jednak tego rodzaju obniżanie częstotliwości napotyka na ograniczenie, którym jest zbyt ni wzrost prądu magnesującego.

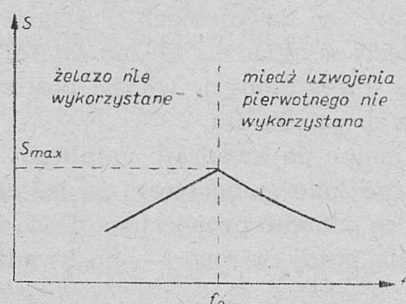
Prąd ten, określony przez wyrażenia (2.7) i (3.5) w zakresie normalnej pracy, to jest przy niewielkich kątach niezgodności, zmienia się niewiele ze zmianami tego kąta, jak to wykazano w rozdziale 6. Z wystarczającym

przybliżeniem można zatem przyjąć, że wartość skuteczna tego prądu jest

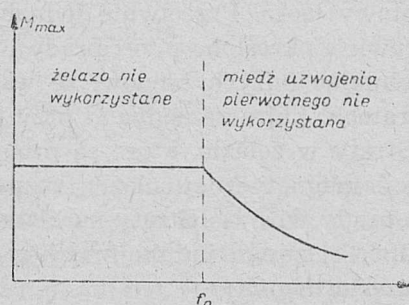
$$I'_{sk} = \frac{U_{sk}}{\omega L'}$$

lub, po uwzględnieniu zależności (7. 1)

$$I'_{sk} = \frac{K\Psi}{L'}$$



Rys. 5. Zależność sztywności łącza od częstotliwości.



Rys. 6. Zależność obciążalności łącza od częstotliwości.

Widać stąd, że ze wzrostem amplitudy strumienia Ψ prąd pierwotny wzrasta, wzrost zaś ten jest ograniczony przez maksymalnie dopuszczalną gęstość prądu w uzwojeniu, a więc przez straty w miedzi uzwojenia pierwotnego.

Zależność sztywności i obciążalności łącza od częstotliwości, z uwzględnieniem zarówno strat w żelazie, jak i w miedzi uzwojenia pierwotnego, przedstawiono na rys. 5 i 6.

Dla zakresu częstotliwości mniejszych od f_0 amplituda indukcji magnetycznej jest stała i ograniczona jedynie przez gęstość prądu w uzwojeniu pierwotnym. W zakresie tym sztywność rośnie proporcjonalnie do częstotliwości; straty w żelazie są mniejsze od dopuszczalnych. Przy częstotliwości f_0 straty w żelazie osiągają dopuszczalną wartość i powodują, że przy dalszym wzroście częstotliwości amplituda indukcji magnetycznej musi być zmniejszana; to z kolei jest przyczyną malenia gęstości prądu pierwotnego oraz spadku sztywności.

Obciążalność łącza dla zakresu stałej amplitudy indukcji magnetycznej ($f < f_0$) jest stała, a następnie maleje z częstotliwością.

Częstotliwość optymalna pracy łącza f_0 (rys. 5 i 6) jest to częstotliwość, przy której zarówno żelazo jak i miedź uzwojenia pierwotnego są całkowicie wykorzystane.

Zależność optymalnej częstotliwości f_0 oraz sztywności maksymalnej $S_{\max}$ od wymiarów selsynu oszacować można rozpatrując, uproszczony zresztą bardzo dla przejrzystości rozważań, układ przedstawiony na rys. 7. Układ ten przedstawia fragment selsynu jawnobiegunowego uwzględniający uzwojenie pierwotne i obwód magnetyczny dla tego uzwojenia.

Związek między miejscem przeznaczonym na uzwojenie pierwotne i wymiarami wirnika zapewniający maksymalną sztywność można dla tego układu określić następująco.

Zakładając, że pole magnetyczne w środkowej części wirnika na długości d (rys. 7) jest równomierne i skierowane zgodnie z osią symetrii wirnika, wyrażenie (7. 2) na sztywność selsynu przedstawić można jako

$$S = \frac{K^2 N'^2}{4R} \omega z^2 A^2 B^2, \quad (7.4)$$

gdzie

B — oznacza tu amplitudę indukcji magnetycznej,

$A = (b-2x)l$ — przekrój żelaza,

z^2 — współczynnik zależny od liczby zwojów i kształtu pola magnetycznego w przestrzeni, gdzie leży uzwojenie pierwotne.

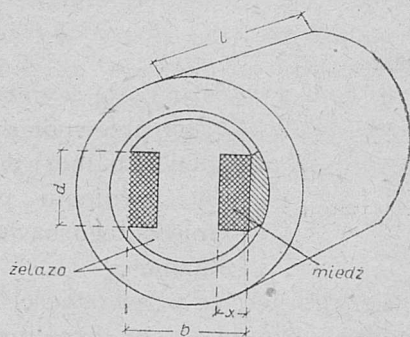
Zgodnie z poprzednim, na częstotliwości f_0 straty w żelazie osiągają maksymalnie dopuszczalną wartość. Biorąc za podstawę rozważań straty w określonej wyżej części wirnika, można zależność między amplitudą indukcji B oraz pulsacją ω_0 określić w przybliżeniu równaniem

$$B^2 \omega_0^a = \text{const} = C, \quad (7.5)$$

w którym stała a reprezentuje stosunek strat na histerezę do strat na prądy wirowe i leży w przedziale $1 < a < 2$.

Po podstawieniu wartości ω_0 ze wzoru (7. 5) do wyrażenia (7. 4), to ostatnie przyjmuje postać

$$S_{\max} = \frac{K^2 N'^2 z^2 A^2 B^2}{4R} \left(\frac{C}{B^2} \right)^{\frac{1}{a}} = \frac{K^2 N'^2 z^2 C^{\frac{1}{a}}}{4R} A^2 B^{2-\frac{2}{a}}.$$



Rys. 7. Uzwojenie pierwotne i jego obwód magnetyczny w selsynie jawnobiegunowym.

Lecz amplitudę indukcji magnetycznej B wyrazić można przez

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{J'_m dx \lambda}{(b-2x)l}, \quad (7.6)$$

gdzie

b, d, l, x — oznaczają wymiary układu oznaczone na rys. 7,

λ — jego przewodność magnetyczną,

J'_m — maksymalnie dopuszczalną amplitudę gęstości prądu w uzwojeniu pierwotnym, gdyż na częstotliwości f_0 miedź tego uzwojenia jest również całkowicie wykorzystana.

Przyjmując, że przewodność magnetyczna λ zależna głównie od przewodności magnetycznej szczeliny powietrznej, nie zależy w pierwszym przybliżeniu od wymiaru x (rys. 7), można po odpowiednich podstawieniach wyrazić sztywność $S_{\max}$ jako następującą funkcję wymiaru x :

$$S_{\max} = \frac{K^2 N'^2 z^2 C^{\frac{1}{a}}}{4R} [(b-2x)l]^{\frac{2}{a}} [J'_m x d \lambda]^{\frac{2}{a}}. \quad (7.7)$$

Powyższa funkcja, jak łatwo wykazać, osiąga maksimum dla

$$x = \frac{b}{2} \frac{a-1}{a}. \quad (7.8)$$

Wynika stąd bezpośredni wniosek, że maksymalną sztywność selsyn osiąga przy określonym stosunku wymiarów x/b zależnym tylko od parametru a , a więc od stosunku strat na histerezę do strat na prądy wirowe i niezależnym zupełnie od tego, czy jest to selsyn mały czy duży.

Wyrażenie na optymalną częstotliwość pracy otrzymać można z podstawienia (7. 6) z uwzględnieniem warunku (7. 8) do zależności (7. 5)

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{C^{\frac{1}{a}}}{2\pi} \left(\frac{2l}{J'_m d \lambda (a-1)} \right)^{\frac{2}{a}}.$$

Z wyrażenia tego wynika, że ze wzrostem wymiarów selsynu częstotliwość optymalna f_0 maleje, gdyż na przykład przy p -krotnym powiększeniu wszystkich wymiarów selsynu [z wyjątkiem szczegółów zapewniających spełnienie warunków (5. 2)] licznik (l) wzrasta p razy, mianownik zaś p^2 razy (wymiar d oraz przewodność magnetyczna λ , która rośnie liniowo ze wzrostem liniowych wymiarów elementu).

Malenie częstotliwości optymalnej f_0 ze wzrostem wymiarów selsynu oznacza, że selsyny o małych wymiarach (wskaźnikowe) powinny być projektowane na większą częstotliwość zasilania, selsyny zaś większe,

przeznaczone do przenoszenia znacznych momentów obrotowych na częstotliwość mniejszą.

Z powyższego wynika więc, że ogólnie rozpowszechniona opinia, jakoby większa częstotliwość zasilania pozwalała na uzyskiwanie większych sztywności przy danych wymiarach selsynów, lub na zmniejszenie wymiarów przy żądanej sztywności, jest tylko w części słuszna, a mianowicie w odniesieniu do selsynów stosunkowo małych.

Wyrażenie na maksymalną sztywność $S_{\max \max}$ przy optymalnym kształcie wirnika otrzymać można z wyrażenia (7.7) przez podstawienie warunku (7.8)

$$S_{\max \max} = \frac{K^2 N'^2 z^2 C^{\frac{1}{a}}}{4R} \left[\frac{b}{a} l \right]^{\frac{2}{a}} \left[J'_m d \lambda \frac{b}{a} \frac{a-1}{2} \right]^{2-\frac{2}{a}} \quad (7.9)$$

Wyrażenie powyższe daje możność określenia zależności sztywności maksymalnej od wymiarów selsynu. Przy p -krotnym, jak wyżej, powiększeniu wymiarów liniowych selsynu przewodność magnetyczna λ wzrasta również p -krotnie, rezystancja zaś R maleje p -krotnie i sztywność określona przez wyrażenie (7.9) rośnie $p^{7-\frac{a}{2}}$ -krotnie, a zatem w zależności od stosunku strat na histerezę do strat na prądy wirowe wzrasta ona z wymiarami selsynu w potęgę 6, jeśli uwzględnić tylko straty na prądy wirowe ($a=2$), lub też w potęgę 5, jeśli uwzględnić tylko straty na histerezę ($a=1$). Dla łączy rzeczywistych wzrost sztywności będzie się zawierał w powyższych granicach, to znaczy można powiedzieć z grubym przybliżeniem, że sztywność wzrasta prawie z kwadratem objętości selsynu.

Obciążalność selsynu określona przez wyrażenie (7.3)

$$T_{\max} = \frac{K \Psi N'}{2} I_{s \max}$$

wzrasta z p -krotnym powiększeniem wymiarów selsynu p^5 -razy, gdyż strumień Ψ wzrasta w tym przypadku p^3 -razy, dopuszczalna zaś amplituda prądu w uzwojeniach wtórnych p^2 -razy. Można zatem powiedzieć, że obciążalność wzrasta z objętością selsynów w potęgę 5/3.

Powyższe rozważania i wnioski są słuszne, jeśli nie występują ograniczenia co do możliwości spełnienia warunku (5.2) oraz co do wartości, jakie może przybierać amplituda indukcji magnetycznej. Dla dostatecznie dużych częstotliwości praktyczna realizacja warunku (5.2) staje się niemożliwa, co poza rozpatrzonymi dotychczas czynnikami stanowi dodatkowy czynnik ograniczający powiększanie częstotliwości zasilania. Jeśli chodzi natomiast o amplitudę indukcji magnetycznej, to praktycznym jej ograniczeniem jest nasycenie w obwodzie magnetycznym. Nasycenie jest czynnikiem ograniczającym od dołu możliwość zmiany częstotliwości zasil-

lania. W przypadku bowiem, gdy musi ono być uwzględnione (to jest przy stosunkowo dużych wymiarach selsynu) z dalszym wzrostem wymiarów optymalna częstotliwość pracy już nie maleje, ale zachowuje stałą wartość zapewniającą, przy amplitudzie indukcji magnetycznej równej indukcji nasycenia, pełne wykorzystanie żelaza. W warunkach tych określony przez wyrażenie (7.8) stosunek wymiarów x/b nie jest stały, lecz maleje ze wzrostem wymiarów selsynu, zapewniając maksymalne wykorzystanie uzwojenia pierwotnego.

Reasumując powyższe wnioski można stwierdzić, że jak to widać na rys. 5 i 6, zbyt mała częstotliwość zasilania jest szkodliwa, gdyż powoduje spadek sztywności, bardziej jeszcze szkodliwa jest częstotliwość zbyt wielka, gdyż powoduje spadek nie tylko sztywności, ale i obciążalności selsynu. Optymalna częstotliwość zasilania zależy od wymiarów selsynu; jest większa dla selsynów małych i maleje odpowiednio w miarę wzrostu tych wymiarów. Ograniczeniem obniżania się częstotliwości optymalnej jest nasycenie magnetyczne, a mianowicie dolną granicę stanowi częstotliwość, przy której straty w żelazie osiągają dopuszczalną wartość dla amplitudy indukcji magnetycznej równej indukcji nasycenia.

*Katedra Techniki Fał Ultrakrótkich
Politechniki Warszawskiej*

WYKAZ LITERATURY

1. Blackburn J. F. Components handbook. Mc Graw Hill 1949, s. 310—340.
2. Czistiakov N. I. Elektriceskije awiacionnyje pribory. Moskwa 1949, s. 160—186.
3. Johnson T. C. Selsyn design and applications. Transactions I. E. E. Vol. 64, October 1945.
4. Kostenko M. P. Elektriceskije masziny, specjalnaja czast'. Moskwa 1949, s. 53—58.
5. Linville T. M., Woodward J. S. Selsyn instruments for position systems. El. Eng. 1934, s. 953.
6. Reintjes J. F., Coate G. T. Principles of radar. Mc Graw Hill, wyd. 3, 1953, s. 277—288.
7. Szljandin W. M. Elementy awtomatiki i telemechaniki. Moskwa 1952, s. 240—251.
8. Wasiliew D. W. Indukcionnyje sistemy synchronnoj swiazi. Moskwa 1949.

С. СЛАВИНСКИ

ВЛИЯНИЕ ПИТАЮЩЕЙ ЧАСТОТЫ НА ЖЁСТКОСТЬ И НАГРУЖАЕМОСТЬ СЕЛЬСИННОЙ СВЯЗИ

Резюме

В настоящей работе рассматриваются только сельсины с первичными обмотками (питаемыми источником переменного напряжения) на роторах и с двумя перпендикулярными обмотками на статорах — в условиях работы когда передатчик и приемник

идентичны, и когда они передают данные своего положения, иначе говоря когда они находятся в покое.

Выражения для токов в обмотках сельсинов с неявно выраженными полюсами (рис. 1) выведены при следующих упрощенных предположениях, которыми положено, что:

- а. активные сопротивления обмоток на роторах равны нулю.
- б. железные потери равны нулю, а магнитная проницаемость железа постоянна, и
- в. взаимная индуктивность между двумя любыми обмотками сельсина пропорциональна косинусу угла между осями этих обмоток.

Эти токи определены выражениями (2.7) ÷ (2.10), в которых обозначения истекают из рис. 1 и кроме того ω — обозначает угловую частоту источника, питающего систему, k' — максимальный коэффициент связи между обмотками с индуктивностями L и L' (когда оси этих обмоток совпадают), k'' — аналогичный максимальный коэффициент связи между обмотками с индуктивностями L и L' , $R = R_p + R_s$ обозначает сумму активных сопротивлений обмотки статора и одного соединительного провода $\delta = \alpha - \beta$ — угол несогласования.

Аналогично получены выражения для токов в системе состоящей из сельсинов с явно выраженными полюсами (рис. 2), пренебрегая железными потерями и потерями в первичной обмотке, а также полагая, что каждая из обмоток статора эквивалентна последовательному соединению двух взаимно перпендикулярных обмоток — с осями, совпадающими с осями симметрии ротора (рис. 3) и с индуктивностями, равными

$$L \cos^2 \theta \quad \text{и} \quad mL \sin^2 \theta$$

где L обозначает максимальную индуктивность обмотки (при продольном положении ротора) и mL — минимальную её индуктивность (при поперечном положении ротора), θ — угол между осью обмотки и осью обмотки ротора — в данном случае.

Токи в обмотках системы по рис. 2 определяются выражениями (3.5) ÷ (3.7).

Из сравнения выражений (2.7) ÷ (2.10) и (3.5) ÷ (3.7) видно, что формулы, определяющие токи сельсинов с явно выраженными полюсами можно получить из формул для сельсинов с неявно выраженными полюсами, пользуясь выражением (3.8).

Поэтому, если даны две системы состоящие из сельсинов разных типов, но с идентичными статорами и с соответственно равными остальными значениями, входящими в формулы (2.7) ÷ (2.10) и (3.5) ÷ (3.7) при учете условия (3.8), то токи текущие в обмотках соответствующих друг другу сельсинов будут равны. Токи в обмотках статоров возникают по индукции, а так как статоры идентичны, то существующие в них магнитные поля должны быть тоже идентичны, как в обоих передатчиках так и в приемниках. Из вышесказанного следует, что синхронизирующие (крутящие) моменты на осях сельсинов в обоих рассматриваемых случаях тоже должны быть одинаковы, и достаточно поэтому определить эти моменты для одного типа сельсинов, а полученная формула будет верна и для сельсинов второго типа.

Для простоты рассуждений выведена формула для синхронизирующего момента сельсинов с неявно выраженными полюсами. Ибо момент, возникающий между двумя обмотками в магнитно-изотропной среде, когда взаимная индуктивность между этими обмотками пропорциональна косинусу угла между их осями, можно после некоторых преобразований известных зависимостей представить выражением (4.5), в котором I_ω и I_s обозначают соответственные токи, текущие в обеих обмотках, $M_{\max}$ — максимальное значение взаимной индуктивности между этими обмотками, γ — угол между осями этих обмоток.

Принимая, что синхронизирующий момент, возникающий на оси сельсинов в системе на рис. 1 равен сумме воздействий между четырьмя обмотками, мы получаем выражения (4.8).

Момент на осях сельсинов с явно выраженными полюсами, согласно вышесказанному, можно представить в виде (4.9).

Жесткость системы определена как абсолютное значение наклона кривой синхронизирующего момента в функции угла несогласования δ в точке $\delta=0$

$$S = \left| \frac{\partial T}{\partial \delta} \right|_{\delta=0}$$

Соответственным образом жесткость связи составленной сельсинов с неявно выраженными полюсами определяется выражением (5.1a), а жесткость связи сельсинов с явно выраженными полюсами определяется из выражения (5.1b).

Функции (5.1) достигают максимумов при изменении $1-k''^2$ или m , для значений определенных выражением (5.2). Эти максимумы определяются выражениями (5.3).

Из формул (5.1) ÷ (5.3) вытекают следующие положения:

- а. для данной системы (сельсинов и соединительных проводов) и определенной питающей частоты жесткость возрастает вместе с квадратом питающего напряжения.
- б. максимальной жесткости сельсин достигает при удовлетворении условия (5.2), следовательно каждой питающей частоте соответствует определенное оптимальное значение k'' или m
- в. жесткость уменьшается с увеличением сопротивления R , а следовательно уменьшается с увеличением активного сопротивления соединительных проводов. Эта зависимость представлена на рис. 4 который сделан на основании формулы (5.1) в предположении, что условие (5.2) удовлетворено при $R_p=0$.

Нагружаемость системы определяется равной максимальному синхронизирующему моменту, который он может передавать в установленном режиме.

На основании выведенных формул доказано, что нагружаемость ограничена нагревом обмоток на статорах и коротко замкнутой обмотки. Эта нагружаемость определяется выражением (6.6), в котором $I_{sm \max}$ обозначает максимальную допустимую амплитуду тока во вторичной обмотке, а U_{sk} — эффективное значение питающего напряжения.

Обсуждение влияния частоты на работу системы основано на выражениях (5.3) и (6.6). Обе эти формулы относятся к сельсинам удовлетворяющим условиям (5.2) и следовательно предвиденным для работы при одной рассматриваемой частоте. Тем не менее, полагая, что значения k'' или m могут быть в некоторой степени изменяемы вместе с частотой для соблюдения условия (5.2) без изменения остальных входящих в формулы (5.3) ÷ (6.6) величины, то эти формулы могут быть приняты за основу дискуссии влияния изменения частоты в этих пределах.

Формулы (5.3) и (6.6) были удобны для действий в форме (7.2) и (7.3), в которой K является коэффициентом, а Ψ обозначает амплитуду сцепления магнитного потока с первичной обмоткой.

Из этих формул следует при учете железных и медных потерь в первичной обмотке, что зависимости жесткости и нагружаемости от частоты имеют характер представленный на рис. 5 и 6 и что оптимальная частота работы f_0 является той частотой, при которой как железо так и медь первичной обмотки вполне использованы.

Из рассмотрения упрощенной системы представленной на рис. 7 мы заключаем, что с возрастанием размеров сельсина оптимальная частота f_0 уменьшается, и что жесткость возрастает почти пропорционально квадрату объема сельсина, а нагружаемость пропорционально 5/3 степени его объема.

S. SŁAWIŃSKI

THE INFLUENCE OF THE INPUT FREQUENCY ON THE STIFFNESS AND LOADING CAPACITY OF A SYNCHRO TRANSMISSION SYSTEM

Summary

In the paper are considered synchros containing the primary windings (fed from the A. C. source) on the rotor, and two stator windings placed in quadrature to each other. The system considered is symmetrical and transmitting the position data, i. e. the generator and the motor are identical and they are stationary.

The expressions for the winding currents of synchros with cylindrical rotors (Fig. 1) are derived by applying the following simplifying assumptions:

- the resistance of the rotor windings is equal to zero,
- the iron loss is equal to zero, and its magnetic permeability is constant,
- the mutual inductance between any two synchro windings is proportional to the cosine of the angle formed by the axes of that windings.

These currents are determined by the expressions (2. 7.) — (2. 10.) where apart from the symbols shown in Fig. 1, ω — denotes the angular frequency of the source feeding the system, k' — the greatest coupling coefficient between the windings L and L' (if the winding axes coincide), k'' — similarly, the greatest coupling coefficient between the windings L and L'' ; $R = R_p + R_s$, the sum of the one stator winding resistance and of one joining conductor, $\delta = \alpha - \beta$ — the error angle.

In a similar way the expressions for currents of the system consisting of synchros with salient pole rotors (Fig. 2), neglecting the primary winding and iron losses and assuming that each of the stator windings is equivalent to the series connection of two windings, perpendicular to each other, with axes coincident with the rotor symmetry axes (Fig. 3) and the inductance equal to

$$L \cos^2 \theta \quad \text{and} \quad mL \sin^2 \theta$$

where L means the direct-axis winding inductance and mL — the quadrature winding inductance, θ — the angle between the winding axis and rotor direct axis.

The winding currents of the system presented in Fig. 2 are expressed by equations (3. 5) — (3. 7).

Comparing the expressions (2. 7) — (2. 10) and (3. 5) — (3. 7) one can see that the formulae for salient pole synchro currents may be obtained from the formulae for synchros with cylindrical rotors by substitution (3. 8).

Given two synchro transmission systems composed of different types of synchros, but with identical stators and other parameters included in formulae (2. 7 — (2. 10), (3. 5) — (3. 7) respectively equal, taking into account the condition (3. 8), the currents flowing in the windings of corresponding synchros will be equal. The currents in both stators arise by induction. Since both stators are identical, their magnetic fields must be identical in both generators as well as in both motors. Hence the torques on the synchro shaft in both discussed cases must be equal. Therefore it is sufficient to specify the torque for the one type of synchros and the formula obtained is also valid for synchros of the other type.

For the sake of simplicity, the formula for the torque of cylindrical rotor synchro is derived. The torque arising between two windings in a magnetically isotropic medium, when the mutual inductance between these windings is proportional to the cosine of the angle formed by their axes, may be, after several transformations of the known formulae, expressed in the form (4. 5) where I_w and I_s correspondingly are the currents in both windings, $M_{\max}$ — the greatest value of

mutual inductance between these windings and γ — the angle between the axes of these windings.

Regarding the torque arising on the synchro shaft in the system viewed in the Fig. 1, as a sum of actions arising between four windings, one gets the expressions (4. 8).

The torque on the salient pole synchro shafts may accordingly be expressed in the form (4. 9). The stiffness of the synchro transmission system is defined as the absolute value of the torque gradient expressed as the function of error angle δ at the point $\delta=0$.

$$S = \left| \frac{\partial T}{\partial \delta} \right|_{\delta=0}$$

Correspondingly the stiffness of the system composed of cylindrical rotor synchros is defined by the expression (5. 1a), and the stiffness of the system composed of salient pole synchros — by the expression (5. 1b).

The expressions (5. 1) reaches their maximum for values of $1 - k''^2$, or m , given by the expression (5. 2).

From (5. 1) — (5. 3) arise the following conclusions:

- for a given transmission system (synchros and joining conductors) and for a given input frequency the stiffness grows with the square of the input voltage,
- the greatest stiffness is obtained, when the condition (5. 2) is satisfied; therefore each input frequency corresponds an optimum value of k'' or m ,
- the stiffness decreases as the resistance R increases; therefore it decreases with the increase of joining conductor resistance. Fig. 4, which is drawn according to the formula (5.1) — assuming that the condition (5.2) is satisfied when $R_p=0$ — shows this relation.

The loading capacity for the synchro transmission system is defined as the greatest torque, which may be transmitted continuously.

The derived formula shows, that the loading capacity is limited by the heating of the stator windings and shorted windings on the rotors.

This loading capacity is determined by the expression (6.6), $I_{s \max}$ denotes the greatest permissible current amplitude in the secondary winding, and U_{sk} — the R.M.S. value of the input voltage.

The discussion of the frequency influence on the work of the system is based on the expressions (5. 3) and (6. 6). Both equations apply to the synchros fulfilling the condition (5.2) i. e. well suited to work at one considered frequency. Nevertheless, assuming that the value k'' or m may be adjusted within certain limits with the changes of frequency without the change of other values in the formulae (5. 3) and (6. 6), these formulas may be used as a basis for the discussion about the influence of the frequency variation.

For the convenience of mathematical operations, formulae (5. 3) and (6. 6) are put in the form (7.2) and (7.3), where K is a coefficient and Ψ is the amplitude of the primary winding flux linkages.

Taking into account the primary winding iron and copper losses, one may see from the above formulae, that the relation between the stiffness or loading capacity and the frequency is of the character shown in Fig. 5 and 6. One may also see, that the most suitable frequency f_0 for the system is the one, when both iron and copper are used to their full capacity.

Out of the simplified system shown in Fig. 7. one may see, that with the increase of the dimensions of the synchro the optimum frequency f_0 decreases and that the stiffness increases almost as the square of the synchro's volume and the loading capacity increases with the $5/3$ power of the volume.

621.396.615.143

P. SZULKIN

Oddziaływanie zwrotne pola elektromagnetycznego na elektrony pobudzające w rezonatorze cylindrycznym w obecności pola magnetycznego

Rękopis dostarczono 25. 7. 1955.

W pracy udowodniono, że oddziaływanie zwrotne pola elektromagnetycznego w rezonatorze cylindrycznym na ruch wiązki elektronów, będącej przyczyną drgań, sprowadza się jedynie do wpływu składowej osiowej pola elektrycznego.

Założono istnienie dostatecznie dużego pola magnetycznego stałego.

Rozpatrzmy przypadek powstawania drgań elektromagnetycznych w rezonatorze cylindrycznym pod wpływem przelotu odpowiedniej wiązki elektronów (na przykład o zmodulowanej gęstości) mającej początkową prędkość v_0 w kierunku osi rezonatora. Zakładamy, że w obszarze rezonatora istnieje jednocześnie ogniskujące pole magnetyczne B_0 skierowane również w kierunku tej osi. W ten sposób wewnątrz rezonatora powstaje określony rozkład pól, który oddziałuje zwrotnie na ruch elektronów.

Celem niniejszej pracy jest wykazanie, że praktycznie na ruch elektronów wpływa jedynie składowa osiowa E_z natężenia pola elektrycznego drgań elektromagnetycznych.

Indukcję wypadkową $\bar{B}_c$ wewnątrz rezonatora można przedstawić jako sumę

$$\bar{B}_c = \bar{B} + \bar{B}_0, \quad (1)$$

gdzie

$\bar{B}$ odpowiada polu elektromagnetycznemu, a

$\bar{B}_0 = \bar{K}_z B_0$ jest wywołane przez istniejące pole magnetyczne stałe. (2)

Jeśli oznaczymy przez $\bar{v}$ prędkość elektronu, to równanie Lorentza w tym przypadku można napisać jako

$$m \cdot \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = e \{ \bar{E} + [\bar{v} \bar{B}_c] \} = e \{ \bar{E}' + [\bar{v} \bar{B}] + [\bar{v} \bar{B}_0] \}, \quad (3)$$

Zakładając

$$|v| \ll c, \quad (4)$$

gdzie c jest szybkością światła, można łatwo wykazać, że drugi człon po prawej stronie równania (3) można pominąć wobec dwóch pozostałych członów.

Z równości energii elektrycznej i magnetycznej w fali elektromagnetycznej wynika

$$\epsilon_0 \bar{E}^2 = \mu_0 \bar{H}^2, \\ H = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E.$$

Z drugiej zaś strony

$$\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{C},$$

a zatem

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu_0 C} \bar{E}. \quad (5)$$

Podstawiając (5) do (3) i pamiętając, że

$$\bar{B} = \mu_0 \bar{H},$$

mamy

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = e \left\{ \bar{E} + \left[\frac{v}{c} \bar{E} \right] + [\bar{v} \bar{B}_0] \right\}.$$

Jeżeli, zgodnie z założeniem (4), ograniczamy się do prędkości $v \ll c$, wielkość $\frac{v}{c} \bar{E}$ możemy pominąć wobec $\bar{E}$. Wpływ pola magnetycznego zmiennego na ruch elektronów jest więc znikomy w porównaniu z działaniem pola elektrycznego. Ostatecznie równanie ruchu elektronów przybiera postać

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = e \{ \bar{E} + [\bar{v} \bar{B}_0] \}. \quad (6)$$

Aby móc napisać równanie ruchu dla składowych, obliczamy przede wszystkim iloczyn wektorowy

$$[\bar{v} \bar{B}_0] = \begin{vmatrix} \bar{k}_r & \bar{k}_\varphi & \bar{k}_z \\ v_r & v_\varphi & v_z \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = \bar{k}_r v_\varphi B_0 - \bar{k}_\varphi v_r B_0 = \bar{k}_r r \dot{\varphi} B_0 - \bar{k}_\varphi \dot{r} B_0,$$

gdzie $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ oraz $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$. Równania ruchu we współrzędnych cylin-

drycznych są wówczas

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - m\dot{r}\dot{\varphi}^2 &= eE_r + e\dot{\varphi}B_o, \\ m \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) &= -er\dot{r}B_o, \\ m\ddot{z} &= eE_z, \end{aligned} \quad (7)$$

przy czym w równaniu środkowym nie występuje natężenie pola elektrycznego. Na ogół [1] E wyraża się za pomocą funkcji potencjału skalar-
nego Φ i potencjału wektorowego $\vec{A}$ jako

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{grad } \Phi\right).$$

Zatem przy założeniu, że przewidziane rozwiązanie ma symetrię osiową (to jest $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$) oraz że kierunek prądu jest osiowy ($A_\varphi = 0$) będziemy mieli $E_\varphi = 0$.

Całkowanie drugiego równania układu (1) daje

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) &= -er \frac{dr}{dt} B_o = -e \frac{d}{dt} \left(\frac{r^2}{2}\right) B_o, \\ r^2\dot{\varphi} \Big|_0^t &= -\frac{e}{m} B_o \frac{r^2}{2} \Big|_0^t. \end{aligned}$$

Założmy, że rozpatrywany elektron w momencie $t=0$ znajduje się w początku układu i ma prędkość początkową $\vec{v}_0 = \vec{k}_z v_o$ wzdłuż osi z , co daje następujące warunki początkowe:

$$\begin{aligned} r &= 0, \\ \dot{r} &= 0, \\ \varphi &= 0, \\ \dot{\varphi} &= 0, \\ \dot{z} &= v_o. \end{aligned} \quad (8)$$

Te specjalne założenia robimy dla uproszczenia obliczeń; wszystkie inne elektrony znajdujące się w rezonatorze, opisują w zasadzie podobne tory, a więc założenia poczynione nie mają wpływu na ogólność ważności wniosków. Możemy zatem napisać:

$$r^2\dot{\varphi} = -\frac{e}{m} B_o \frac{r^2}{2},$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{e}{m} \frac{B_0}{2},$$

$$\varphi = -\frac{eB_0}{2m} t + C.$$

Z warunku $\varphi=0$ dla $t=0$ wynika, że $C=0$, tak iż ostatecznie

$$\varphi = -\frac{eB_0}{2m} t. \quad (9)$$

Wprowadzając ten wynik do pierwszego równania układu (7) otrzymujemy

$$m\ddot{r} - mr \frac{e^2 B_0^2}{4m^2} = e E_r - r \frac{e^2 B_0^2}{2m},$$

$$\ddot{r} + \frac{e^2 B_0^2}{4m^2} r = \frac{e}{m} E_r.$$

Część jednorodna tego niejednorodnego równania różniczkowego ma rozwiązanie

$$r_0 = A e^{j\omega_0 t} + B e^{-j\omega_0 t},$$

gdzie

$$\omega_0 = \frac{eB_0}{2m}. \quad (10)$$

Aby znaleźć całkę szczególną równania niejednorodnego, możemy na przykład założyć

$$E_r = R_1(r) e^{j(\omega t - \gamma_1 z)} + R_2(r) e^{j(\omega t + \gamma_2 z)}.$$

Obliczenie rozwiązania wymaga znajomości funkcji $R_1(r)$ i $R_2(r)$. Nas jednak interesuje jedynie dowód twierdzenia, że przy obliczaniu zwrotnego działania pola E_r można pominąć wobec E_z . Do tego wystarczy założenie, że E_r jest dowolnie duże, lecz skończone. Możemy następnie pominąć zależność od z , która nie wpływa zasadniczo na amplitudę $\overset{\circ}{E}_r$ i założyć na przykład, że ta ostatnia jest stała. Wówczas

$$E_r = \overset{\circ}{E}_r e^{j\omega t}.$$

W ten sposób można przyjąć rozwiązanie szczególne w postaci

$$r_1 = K \overset{\circ}{E}_r e^{j\omega t},$$

gdzie stałą K znajduje się z równania

$$(-\omega^2 K + \omega_0^2 K) \overset{\circ}{E}_r = \frac{e}{m} \overset{\circ}{E}_r,$$

$$K = \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_o^2 - \omega^2}.$$

Tak więc rozwiązaniem całkowitym jest

$$r = r_o + r_1 = A e^{j\omega_o t} + B e^{-j\omega_o t} + \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_o^2 - \omega^2} \ddot{E}_r e^{j\omega t}. \quad (11)$$

Z warunków początkowych wynikają następujące zależności:

$$\begin{aligned} 0 &= A + B + \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_o^2 - \omega^2} \ddot{E}_r, \\ 0 &= \omega_o \cdot (A - B) + \frac{e}{m} \frac{\omega}{\omega_o^2 - \omega^2} \ddot{E}_r, \\ 0 &= 2\omega_o A + \frac{e}{m} \frac{\omega_o + \omega}{\omega_o^2 - \omega^2} \ddot{E}_r, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} A &= -\frac{e}{2m} \frac{1}{\omega_o(\omega_o - \omega)} \ddot{E}_r, \\ 0 &= 2\omega_o B + \frac{e}{m} \frac{\omega_o - \omega}{\omega_o^2 - \omega^2} \ddot{E}_r, \\ B &= -\frac{e}{2m} \frac{1}{\omega_o(\omega_o + \omega)} \ddot{E}_r. \end{aligned} \quad (13)$$

Podstawiając (12) i (13) do (11) otrzymujemy

$$\begin{aligned} r &= -\frac{e \ddot{E}_r}{2m} \left[\frac{e^{j\omega_o t}}{\omega_o(\omega_o - \omega)} + \frac{e^{-j\omega_o t}}{\omega_o(\omega_o + \omega)} \right] + \frac{e \ddot{E}_r}{m} \frac{e^{j\omega t}}{\omega_o^2 - \omega^2} = \\ &= -\frac{e \ddot{E}_r}{2m} \left[\frac{\omega_o e^{j\omega_o t} + \omega e^{j\omega_o t} + \omega_o e^{-j\omega_o t} - \omega e^{j\omega_o t}}{\omega_o(\omega_o^2 - \omega^2)} \right] + \frac{e \ddot{E}_r}{m} \frac{e^{j\omega t}}{\omega_o^2 - \omega^2} = \\ &= -\frac{e \ddot{E}_r}{2m} \left[\frac{e^{j\omega_o t} + e^{-j\omega_o t}}{\omega_o^2 - \omega^2} + \frac{\omega}{\omega_o} \frac{e^{j\omega_o t} - e^{-j\omega_o t}}{\omega_o^2 - \omega^2} \right] + \frac{e \ddot{E}_r}{m} \frac{e^{j\omega t}}{\omega_o^2 - \omega^2} = \\ &= -\frac{e \ddot{E}_r}{m} \frac{1}{\omega_o^2 - \omega^2} \left[\cos \omega_o t + j \frac{\omega}{\omega_o} \sin \omega_o t + e^{j\omega t} \right]. \end{aligned}$$

Nas interesuje tylko wyrażenie na amplitudę r , gdyż czasowa zależność nie ma tu znaczenia. Widzimy więc, że dla r istnieje następująca proporcjonalność

$$\dot{r} \approx \frac{e \vec{E}_r}{m} \frac{1}{\omega_o^2 - \omega^2}. \quad (14)$$

Podobnie łatwo się przekonać, że dla prędkości promieniowej r zachodzi proporcjonalność

$$\dot{r} \approx \frac{e \vec{E}_r}{m} \frac{\omega_o}{\omega_o^2 - \omega^2} = \frac{e \vec{E}_r}{m} \frac{1}{\omega_o - \frac{\omega^2}{\omega_o}}. \quad (15)$$

Podstawiając zamiast ω_o wyrażenie (4) otrzymamy

$$\dot{r} \approx \frac{e \vec{E}_r}{m} \frac{1}{\left(\frac{e B_o}{2m}\right)^2 - \omega^2}. \quad (16)$$

$$\dot{r} = v_r \approx \frac{e \vec{E}_r}{m} \frac{1}{\frac{e B_o}{2m} \frac{\omega^2 2m}{e B_o}} = \vec{E}_r \frac{1}{B_o - \frac{\omega^2}{B_o} \frac{2m}{e^2}}. \quad (17)$$

Z równań (16) i (17) widzimy, że dla dużych wartości B_o wielkości r i $\dot{r}$ są bardzo małe.

Z powyższego wyniku bezpośrednio, że v_φ jest znikomo małe. Mamy bowiem $v_\varphi = \dot{r}_\varphi$, a z (14) i (9)

$$v_\varphi \approx \frac{e \vec{E}_r}{m} \frac{\omega_o}{\omega_o^2 - \omega^2} = \dot{r}. \quad (18)$$

W ten sposób udowodniliśmy, że przy silnym polu magnetycznym ogniskującym, można pominąć v_r i v_φ w porównaniu z v_z ; równanie ruchu sprowadza się przeto do prostego wyrażenia

$$m \ddot{z} = e E_z.$$

Pozwala to na łatwe obliczanie prędkości v_z i przesunięcia $r = k_z r_z$, które całkowicie wyznaczają działanie zwrotne pola na ruch elektronów. Warto podkreślić, że działanie to nie zależy od stałego pola magnetycznego B_o .

WYKAZ LITERATURY

1. Becker R. Theorie der Elektrizität. 1949.
2. Stratton J. A. Electromagnetic theory. N. Y. 1941.

П. ШУЛЬКИН

ОБРАТНОЕ ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ НА ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКИ ЭЛЕКТРОНОВ, ВЫЗЫВАЮЩИХ КОЛЕБАНИЯ В ПРИСУТСТВИИ СИЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ.

Резюме

Статья рассматривает обратное влияние электромагнитного поля в цилиндрическом резонаторе на движение вязки электронов, вызывающих колебания. Доказывается, что это влияние практически ограничивается в случае приложения добавочного сильного постоянного магнитного поля, только на действии осевой компоненты электрического поля.

P. SZULKIN

THE RETROACTION OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD IN A CYLINDRICAL CAVITY RESONATOR ON THE MOVEMENT OF EXCITING ELECTRONS IN THE PRESENCE OF A STRONG MAGNETIC FIELD

Summary

The paper presents the mathematical proof, that the retroaction of the electromagnetic field in a cylindrical cavity resonator on the movement of an electron-bunch, being the cause of the excited oscillations, reduces itself only to the influence on the axial component of the electrical field-strength.

The proof is valid under the assumption of a strong constant magnetic field.

621.313.33:621.3.041.1

H. S. KOZŁOWSKI

Teoria optymalnych kształtów maszyn indukcyjnych

Rękopis dostarczono 5. 4. 1955

Wyprowadzono równania, wyrażające zależność ekonomiczności maszyny indukcyjnej od kształtu jej rdzenia. Z równań tych wysnuto wnioski dotyczące niezależności optymalnego kształtu od wielkości maszyny i od jej obciążeń elektromagnetycznych. Rozpatrzono wpływ warunku dostatecznej przeciążalności na kształt rdzenia. Podano przykład obliczeniowy oraz wyjaśniono związek pomiędzy koniecznością utrzymania nagrzewania w dopuszczalnych granicach, a kształtem rdzenia i ekonomicznością maszyny.

1. WSTĘP

Szerokie zastosowanie maszyn indukcyjnych, a w związku z tym masowa produkcja, stwarza potrzebę jak najdokładniejszego obliczania ich najlepszych pod względem ekonomicznym kształtów. Od stosunku średnicy wewnętrznej do średnicy zewnętrznej rdzenia statora, jak również od stosunku jego długości do średnicy zależą w znacznym stopniu koszty produkcji maszyny, a w szczególności materiałów na nią zużytych. Kształty maszyny mają również duży wpływ na sprawność i współczynnik mocy, a więc na koszty użytkowania jej przez długie lata, w czasie których, trzeba płacić za energię idącą na straty.

Nie małe znaczenie ma również ciężar maszyny i jej wymiary zewnętrzne, szczególnie jeśli ma ona pracować jako wbudowana w inne maszyny lub urządzenia, a ciężar i wymiary zewnętrzne zależne są od prawidłowego obioru kształtów.

Pomimo widocznej potrzeby gospodarczej działań obliczeń ekonomicznych kształtów nie jest tak dobrze opanowany, jak inne działy nauki o maszynach elektrycznych, na przykład obliczenia elektromagnetyczne [1]. Przyczyna takiego stanu rzeczy wynika z tego, że ekonomiczność maszyny jest zależna od dużej liczby czynników, co utrudnia ich łączne ujęcie matematyczne. Stosowane przez niektórych autorów oddzielne traktowanie poszczególnych czynników lub ich grup daje wyniki niedokładne.

Do wielkości związanych z ekonomicznością maszyny indukcyjnej należą: moc, wymiary i ich stosunki, indukcje, gęstości prądu, straty i współczynnik sprawności, współczynnik mocy, opory indukcyjne i przeciążalność momentu, nagrzewanie i przyrosty temperatury.

Dodatkową trudność stanowi to, że bezpośrednio, liczbowo, możemy porównywać tylko stosunki mocy do kosztów tych maszyn, których moce są jednakowe. Stosunek ten bowiem zmienia się z mocą maszyny nawet wtedy, gdy wykorzystanie pozostaje takie samo.

Podobnie jest z możliwością porównywania współczynników sprawności i mocy, które również zależą od mocy. A przy szukaniu najlepszego kształtu trudno jest uniknąć zmiany mocy, gdy się zmienia kształt maszyny.

Praca niniejsza stanowi próbę ujęcia jak największej liczby głównych czynników, od których zależy ekonomiczność maszyny, we wspólną zależność matematyczną i oddzielenia tych czynników, których związek z innymi jest na tyle luźny, że można je traktować osobno. Jest ona oparta na dwóch poprzednich pracach autora [2], [3] i stanowi ich rozszerzenie i uzupełnienie.

2. POJĘCIE EKONOMICZNOŚCI MASZYN I EKONOMICZNOŚCI KSZTAŁTU

Pierwszym krokiem umożliwiającym zorientowanie się we wspomnianym zbiorze wzajemnych zależności jest odróżnienie pojęcia ekonomiczność kształtu maszyny od szerszego pojęcia ekonomiczność maszyny. Pierwsze — jest miarą osiągalnej przy danym kształcie ekonomiczności, drugie natomiast — charakteryzuje ekonomiczność maszyny przy określonej mocy i obciążeniach elektromagnetycznych, zależną i od kształtu maszyny i od tych obciążeń.

Z teoretycznych rozważań [5] wynika, że gdy maszyna rośnie bez zmiany kształtu i obciążeń elektromagnetycznych, to jest iloczynu indukcji w powietrzu przez gęstość prądu w stojanie ($B_p \cdot j = \text{const}$), to iloraz mocy wewnętrznej do potęgi $3/4$ przez ciężar, a więc z pewnym przybliżeniem, przez koszt K maszyny, jest wielkością stałą (niezależną od mocy)

$$\frac{P_w^{3/4}}{K} = \text{const.}$$

W obecnych naszych rozumowaniach, na odwrót, rozpatrywana być musi maszyna, która zmienia swój kształt, dla której $\frac{P_w^{3/4}}{K} \neq \text{const.}$ Zmiana tego stosunku wynikać może tylko ze zmiany iloczynu $B_p \cdot j$ albo

ze zmiany kształtu geometrycznego maszyny. Jeśli na razie pozostawić w mocy założenie $B_p \cdot j \neq \text{const}$, to wielkość

$$F = \frac{P_w^{3/4}}{K} \quad (1)$$

jest miernikiem ekonomiczności geometrycznego kształtu maszyny.

Aby móc obliczyć F dla każdego z porównywanych kształtów maszyny, trzeba przedstawić go pod postacią funkcji głównych wymiarów maszyny, tj. średnicy zewnętrznej rdzenia statora D_z , wewnętrznej — D i długości rdzenia L .

3. MOC WEWNĘTRZNA MASZINY P_w JAKO FUNKCJA WYMIARÓW RDZENIA przy założeniu $B_p \cdot j = \text{const}$: maszyna z otwartymi żłóbkami statora, posiadającymi przekrój prostokątny.

Gdy oznaczymy przez:

E — siłę elektromotoryczną w uzwojeniu statora,

I — prąd statora,

Φ — strumień główny magnetyczny,

$\sum S_u$ — sumę przekrojów wszystkich przewodów uzwojenia statora i przez

z — liczbę zwojów uzwojenia statora,

wówczas moc wewnętrzna maszyny, którą w tego rodzaju obliczeniach możemy uważać za proporcjonalną do mocy znamionowej oddanej, wyrazi się wzorem

$$P_w = C \cdot E \cdot I = C_1 \cdot \Phi \cdot z \cdot I = C_2 \cdot D \cdot L \cdot B_p \cdot j \cdot \sum S_u. \quad (2)$$

Wprowadźmy oznaczenia:

k_n — współczynnik wypełnienia żłobka statora „netto“, to jest stosunek przekroju metalu wszystkich przewodów do przekroju żłobka (wykroju),

k_{fe} — współczynnik wypełnienia rdzenia żelazem,

h_j — wysokość jarzma statora,

B_j — indukcja maksymalna w jarzmie statora,

B_{zi} — indukcja idealna w najwęższym miejscu zęba statora,

wtedy

$$\sum S_u = k_n \cdot 0,5 \cdot (D_z - D - 2h_j) \pi \cdot D \left(1 - \frac{B_p}{k_{fe} B_{zi}} \right) = k_n \cdot a \cdot D (D_z - a_1 D) \quad (3)$$

gdzie

$$a_1 = 1 + \frac{2h_j}{D} = 1 + \frac{\pi \cdot a_1 \cdot B_p}{2 \cdot p \cdot k_{fe} \cdot B_j}$$

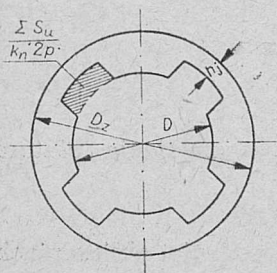
Do wzoru (3) nie wchodzi liczba żłobków statora. Nie mamy potrzeby jej określać dopóki nie wyniknie sprawa przeciążalności, którą się na razie nie zajmujemy. Możemy więc przedstawić wykrój blachy statora tak, jak na rys. 1, to jest jakby ze zsuniętymi zębami każdej podziałki biegunowej w jeden szeroki ząb. Resztę podziałki biegunowej zajmować będzie szerokość zastępczego żłobka o powierzchni przekroju $\sum S_u/k_n \cdot 2p$.

Jeżeli maszyna posiada kanały promieniowe w rdzeniu, to można je uwzględnić sposobem uproszczonym, przyjmując zamiast k_{fe} współczynnik

$$k'_{fe} = k_{fe} \frac{l_{fe}}{l_i}.$$

Po podstawieniu równania (3) do równania (2) otrzymuje się

$$P_w = C_3 \cdot D^2 (D_z - a_1 \cdot D) L \cdot B_p \cdot j \quad (4)$$



Rys. 1. Wykrój blachy statora ze zsuniętymi zębami każdej podziałki biegunowej w jeden szeroki ząb.

We wzorze (4) a zostało uznane za stałe i włączone do stałej C_3 , a z nim razem stosunek $B_p B_{zi}$. Do stałej a_1 — włączony został stosunek $B_p B_j$. W rzeczywistości, przy szukaniu najlepszego kształtu projektowanej maszyny może zająć potrzeba zmiany tych stosunków wraz ze zmianą wymiarów i kształtów. Sprawa ta będzie omówiona później. Na razie, uważając te stosunki za stałe, obiera się ich wartości według istniejących przykładów, to jest maszyn możliwie jak najpodobniejszych do tych, które obliczamy.

4. ILOCZYN $B_p \cdot j$ JAKO FUNKCJA WYMIARÓW RDZENIA

Równanie (4) wyraża zależność mocy maszyny nie tylko od wymiarów rdzenia, lecz również i od obciążeń elektromagnetycznych. Przyjęcie iloczynu $B_p \cdot j$ za stały jest ogromnym ułatwieniem, powszechnie stosowanym przy wszelkich podobnych zagadnieniach. Na usprawiedliwienie przytaczany bywa fakt, że w wykonanych dobrze pracujących i wykorzystanych maszynach iloczyn jest prawie taki sam dla wszystkich maszyn, ponieważ maszyny większej mocy mają nieco większe B_p i jednocześnie nieco mniejsze j .

Argument ten, jakkolwiek jest oparty na spostrzeżeniu zgodnym z prawdą, nie jest słuszny przy rozważaniach ekonomicznych, albowiem dotyczy tych maszyn, które są końcowymi wynikami różnych usiłowań

doprowadzenia do najlepszych kształtów i obciążeń elektromagnetycznych. W tej pracy natomiast chodzi o wpływ zmiany iloczynu $B_p \cdot j$ na najkorzystniejszy kształt maszyny. Jeśli zmiana kształtu w pewnym kierunku daje możliwość powiększenia iloczynu $B_p \cdot j$, to oczywiście będzie to miało wpływ na zmianę optymalnego kształtu w tym właśnie kierunku.

Zmiana $B_p \cdot j$ powoduje zmianę P_w , lecz jednocześnie współczynników sprawności i mocy, te zaś mają również wpływ na ekonomiczność maszyny, ponieważ są miernikiem kosztu energii straconej przy eksploatacji maszyny.

Łączne ujęcie tych czynników może być takie: ze zmianą kształtu maszyny jej obciążenia elektromagnetyczne zmieniać powinniśmy tak, aby najważniejszy pod względem ekonomicznym współczynnik eksploatacyjny — sprawność, zmieniała się według zależności $\eta = f(P)$, przyjętej dla projektowanej serii. Jeżeli przez P_1 oznaczyć moc pobieraną, to

$$\eta = 1 - \frac{\sum \Delta P}{P_1} \quad (5)$$

Z teoretycznych rozważań [5], jak również z danych zebranych z wyników obliczeń i prób rozmaitych seryj maszyn asynchronicznych wynika, że suma strat $\sum \Delta P$ jest proporcjonalna do $P_w^{3/4}$. Z dopuszczalnym dla tego rodzaju rachunków przybliżeniem wzór (5) można napisać

$$\eta = 1 - c_e \frac{P_w^{3/4}}{P_w} = 1 - c_e P_w^{-1/4}, \quad (5a)$$

gdzie c_e jest stałą, charakteryzującą sprawność serii typów.

Wydaje się więc słuszne uzależnienie iloczynu $B_p \cdot j$ od kształtu rdzenia w taki sposób, aby przy zmianie tego kształtu i związanej z tym zmianie mocy, współczynnik sprawności zmieniał się według równania (5a), to jest aby c_e pozostawało stałe. Jest to równoznaczne z założeniem, że straty mają się zmieniać proporcjonalnie do $P_w^{3/4}$. Wartość c_e nie potrzebuje przy tym być określona, nastąpi to dopiero przy obliczaniu elektromagnetycznym.

Zachodzi jeszcze konieczność zrobienia dodatkowego założenia, że stosunek strat zmiennych do strat stałych nie powinien się zmieniać przy zmianie kształtu maszyny. Porównywane będą wtedy pod względem ekonomicznym kształty maszyn o jednakowo dobrym kształcie krzywej sprawności.

Z połączenia obu tych warunków wynika, że tak straty w miedzi, jak i straty w żelazie, przy zmianie kształtu maszyny powinny zachowywać proporcjonalność do $P_w^{3/4}$.

Pierwszy warunek wyraża się wzorem

$$\frac{P_w^{3/4}}{\Delta P_{u1}} = \text{const} = \frac{P_w^{3/4}}{\sum S_u (L + L_{cz}) j^3} = \frac{[D^2 (D_z - a_1 D) \cdot L \cdot B_p \cdot j]^{3/4}}{D (D_z - a_1 D) (L + L_{cz}) j^3}, \quad (6)$$

gdzie L_{cz} jest długością połączenia czołowego statora. Z równania (6) wynika

$$B_p^{3/4} \cdot j^{-5/4} \cdot D^{1/2} \cdot (D_z - a_1 D)^{-1/4} \cdot L^{3/4} \cdot (L + L_{cz})^{-1} = \text{const}. \quad (7)$$

We wzorze (7) zamiast całkowitych strat w miedzi obu uzwojeń wzięte zostały tylko straty w statorze w założeniu, że w maszynie zmieniającej kształt i obciążenia elektromagnetyczne, straty w uzwojeniach obu części maszyny zmieniają się jednakowo.

Z warunku ograniczającego straty w żelazie wynika

$$\frac{P_w^{3/4}}{\Delta P_{fe}} = \text{const} = \frac{[D^2 \cdot (D_z - a_1 D) \cdot L \cdot B_p \cdot j]^{3/4}}{D_z^2 \cdot L \cdot B_p^2}. \quad (8)$$

We wzorze (8) przyjęto, że straty w żelazie są proporcjonalne do całej objętości blachy użytej na rdzeń razem z wirnikiem. Jest to uproszczenie równoznaczne z założeniem, że objętość rdzenia statora, to jest jego jarzma i zębów, jest proporcjonalna do objętości blachy zużytej na rdzeń. Chodzi tu o proporcjonalność przy zmianie kształtu maszyny. Przy zmianie długości rdzenia proporcjonalność ta zachodzi ściśle. Przy zmianie natomiast stosunku średnic (wewnętrznej do zewnętrznej) nie ma ścisłej proporcjonalności, jakkolwiek odchylenie od niej nie jest wielkie, ponieważ ze wzrostem średnicy wewnętrznej zmniejsza się wysokość zębów statora, lecz jednocześnie zwiększa się ich grubość i zwiększa się wysokość jarzma statora.

(Chodzi tu bowiem o zależność wyłącznie od objętości, czyli przy stałej indukcji. Zwiększenie D powoduje zwiększenie strumienia, a przy założeniu stałych indukcji w zębach i jarzmie — zwiększenie odpowiednich wymiarów tych części).

Z równania (8) mamy

$$B_p^{-5/4} \cdot j^{7/4} \cdot D^{5/2} \cdot (D_z - a_1 D)^{3/4} \cdot L^{-1/4} \cdot D_z^{-2} = \text{const}. \quad (9)$$

Z przemnożenia przez siebie równań (7) i (9) i po podniesieniu obu stron do kwadratu otrzymujemy

$$B_p \cdot j = C_4 \cdot D_z^{-4} \cdot D^4 \cdot (D_z - a_1 D) \cdot L \cdot (L + L_{cz})^{-2} \quad (10)$$

Po podstawieniu do równania (4) iloczynu $B_p \cdot j$ w formie funkcji wymiarów rdzenia maszyny według równania (10), otrzymamy zależność mocy maszyny od zmieniających się trzech głównych wymiarów rdzenia przy zachowaniu warunku, że współczynnik sprawności zmienia się w funkcji mocy tak, jak się powinien zmieniać w ramach jednej serii

typów oraz warunku, że stosunek strat stałych do zmiennych pozostaje stale ten sam.

$$P_w = C_5 \cdot D_z^{-4} \cdot D^6 \cdot (D_z - a_1 D)^2 \cdot L^2 \cdot (L + L_{cz})^{-2} \quad (11)$$

W rozważaniach tych pominięty został współczynnik mocy maszyny. Gdyby chcieć uwzględnić współczynnik mocy, trzeba byłoby przedstawić iloczyn $B_p \cdot j$ w funkcji wymiarów, przy użyciu założenia, że $\cos \varphi$ zmienia się z mocą maszyny odpowiednio do współczynników mocy maszyn tej samej serii. Przypuśćmy, że udałooby się wykonać z dostateczną dla praktyki dokładnością to zadanie, trudne ze względu na zależność od charakterystyki magnesowania. Otrzymalibyśmy nieco inny wynik niż wtedy, gdy opieraliśmy się na wymaganiach dotyczących współczynnika sprawności. Pogodzić jedno wymagania z drugimi można by było jedynie za pomocą kompromisu. Aby zaś znaleźć najlepszy kompromis, konieczne byłoby ustalenie wpływu tych dwóch współczynników na koszt eksploatacji maszyny.

Tak skomplikowane rachunki nie byłyby wytłumaczone potrzebą, ponieważ rezultat ich różniłby się niewiele od rezultatu opartego na wymaganiach jedynie co do sprawności, szczególnie jeśli chodzi o duże maszyny. Najważniejsze bowiem czynniki wpływają w tym samym kierunku na straty w żelazie, co i na prąd magnesujący (wartości indukcji w poszczególnych częściach rdzenia oraz wymiary tych części wzdłuż linii pola). Dlatego, gdy dojdziemy do ustalenia najlepszego kształtu rdzenia ze względu na ekonomiczność i na straty, to z dostateczną dla naszych celów dokładnością będziemy mogli powiedzieć, że nie ma powodu, aby kształt ten nie był dobry również ze względu na współczynnik mocy maszyny.

5. KOSZTY MASZyny

Koszt maszyny w tego rodzaju rachunkach nie może być ujęty zupełnie dokładnie, zależy on bowiem od bardzo wielu czynników między innymi i takich jak: środki, którymi rozporządza zakład wytwórczy, liczba sztuk maszyn tego samego typu, wykonywanych jednocześnie itp. O przedstawieniu w sposób ogólny wpływu tych czynników na koszt maszyny w funkcji jej kształtu nie może oczywiście być mowy. Trzeba więc te części ogólnego kosztu, które stanowią jego najpoważniejsze składniki przedstawić pod postacią funkcji wymiarów. Takie traktowanie sprawy jest oczywiście źródłem niedokładności, ale tylko o tyle, o ile te nieuwzględnione koszty nie są proporcjonalne do kosztów wziętych do rachunku.

Podstawowym i najpoważniejszym składnikiem kosztu maszyny indukcyjnej jest koszt materiałów czynnych. Jest on zarazem łatwo wyrażalny przez wzory matematyczne, uzależniające go od wymiarów. Składa się

on z kosztów uzwojeń K_u i kosztów rdzenia K_{fe} . Do kosztu uzwojenia można doliczyć, poza kosztem materiału nawojowego, również koszt izolacji, nawijania, impregnacji itd., czyli wszystko to, co z dostateczną dla praktyki dokładnością da się przedstawić jako proporcjonalne do ciężaru materiału nawojowego.

Do kosztu rdzenia doliczyć można np. koszt kadłuba tarcz i tych wszystkich części konstrukcyjnych, których wielkość, ciężar, a nawet i obróbka są w pewnym stopniu zależne od wymiarów rdzenia. Można to zrobić przez odpowiednie zwiększenie ceny jednostkowej materiału użytego na rdzeń.

Znając dobrze kalkulację kosztów wyrobu wszystkich części maszyny i wszystkich operacji związanych z wytwarzaniem serii maszyn, można każdą z nich podzielić na część proporcjonalną do kosztu rdzenia lub uzwojenia i na część niezależną, która nie ma wpływu na optymalny kształt maszyny. W naszych bowiem rozważaniach nie chodzi o porównywanie maszyn różnych konstrukcji, lecz o znalezienie najlepszych kształtów w ramach obranego rozwiązania konstrukcyjnego.

Koszt ogólny, zależny od kształtów

$$K = K_u + K_{fe}. \quad (12)$$

Jeżeli nazwiemy przez

- k_d — stosunek powierzchni arkusza blachy do kwadratu średnicy zewnętrznej wyciętej z niego blachy statora,
- k_w — stosunek kosztu uzwojeń statora i wirnika do kosztu samego uzwojenia statora (wzięty z danych istniejących serii o podobnej konstrukcji),
- γ_u — ciężar właściwy materiału uzwojenia statora,
- C_u — cenę za 1 kg materiału uzwojenia statora ewentualnie wraz z obliczonymi na 1 kg innymi kosztami,
- γ_{fe} — ciężar właściwy blachy użytej na rdzeń,
- C_{fe} — cenę za 1 kg blachy użytej na rdzeń ewentualnie wraz z innymi kosztami,

i jeżeli oznaczymy:

$$a_5 = k_w \cdot k_n \cdot a \cdot \gamma_u \cdot C_u,$$

$$a_6 = k_d \cdot k_{fe} \cdot \gamma_{fe} \cdot C_{fe},$$

to koszt uzwojenia i ewentualnie koszty proporcjonalne do niego będą

$$\begin{aligned} K_u &= \sum S_u \cdot (L + L_{cz}) \cdot k_w \cdot \gamma_u \cdot C_u = k_n \cdot a \cdot D \cdot (D_z - a_1 \cdot D) \cdot (L + L_{cz}) \cdot k_w \cdot \gamma_u \cdot C_u = \\ &= a_5 \cdot D \cdot (D_z - a_1 \cdot D) \cdot (L + L_{cz}). \end{aligned} \quad (13)$$

Koszt rdzenia i ewentualne koszty do niego proporcjonalne

$$K_{fe} = a_6 \cdot D_z^2 \cdot L. \quad (14)$$

6. WSPÓŁCZYNNIK EKONOMICZNOŚCI KSZTAŁTU
JAKO FUNKCJA GŁÓWNYCH WYMIARÓW RDZENIA
maszyna z otwartymi żłobkami statora

Podstawiając do wzoru (1) wzory (11), (12), (13) i (14), otrzymujemy

$$F = C_6 \frac{[D_z^{-4} \cdot D^6 \cdot (D_z - a_1 D)^2 \cdot L^2 \cdot (L + L_{cz})^{-2}]^{3/4}}{a_5 \cdot D \cdot (D_z - a_1 D) \cdot (L + L_{cz}) + a_6 \cdot D_z^2 \cdot L}, \quad (15)$$

a po przekształceniu

$$F = C_6 \frac{\left[\left(\frac{D}{D_z} \right)^3 \cdot \left(1 - a_1 \cdot \frac{D}{D_z} \right) \right]^{3/2} \cdot \left(\frac{L}{D_z} \right)^{3/2} \cdot \left(\frac{L}{D_z} + \frac{L_{cz}}{D_z} \right)^{-3/2}}{a_5 \cdot \frac{D}{D_z} \cdot \left(1 - a_1 \cdot \frac{D}{D_z} \right) \cdot \left(\frac{L}{D_z} + \frac{L_{cz}}{D_z} \right) + a_6 \cdot \frac{L}{D_z}} \quad (16)$$

We wzorze (16) jest to charakterystyczne, że wymiary nie występują w nim inaczej jak pod postacią stosunków do średnicy zewnętrznej. Z tego można wysnuć poniższy wniosek

Wniosek 1. Optymalny kształt rdzenia maszyny asynchronicznej nie zależy od wielkości maszyny. Dotyczy to zakresu, w którym nie zmieniają się współczynniki zapelnienia i w którym wymagana przeciążalność momentu nie jest jeszcze czynnikiem zmuszającym do zmiany kształtu.

We wzorze (16) jako zmienne niezależne traktować trzeba stosunki D/D_z i L/D_z , natomiast stosunek L_{cz}/D_z jest stały. Obiera go się według danych maszyn już wypróbowanych, posiadających podobną konstrukcję.

Do wzoru (16) nie wchodzi B_p ani j . Na współczynnik ekonomiczności kształtu wielkości te nie wpływają bezpośrednio, wpływa tylko ich zmiana ze zmianą kształtu, według normalnej zależności strat od mocy.

Zależność $\frac{P^{3/4}}{\Delta P_u} = \text{const}$ lub $\frac{P^{3/4}}{\Delta P_{fe}} = \text{const}$ nie zależy od bezwzględnej

wartości gęstości prądu względnie indukcji. Stąd wypływa wniosek:

Wniosek 2. Optymalny kształt maszyny indukcyjnej nie zależy od obciążeń elektromagnetycznych, a więc nie zależy i od współczynnika sprawności.

Wniosek ten nie obejmuje oczywiście sprawy wykonalności maszyny o optymalnym kształcie z zachowaniem dopuszczalnych przyrostów temperatury, przy powiększaniu obciążeń elektromagnetycznych.

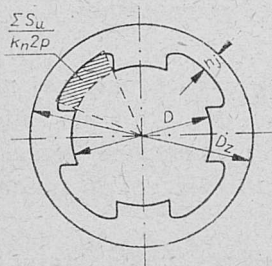
Wniosek ten jest bardzo ważny dla konstruktora. Oddziela on niejako sprawę ekonomiczności kształtu od sprawy ogólnej ekonomiczności ma-

szyny, która może się zmieniać ze zmianą B_p i j , przy czym najekonomiczniejszy kształt będzie zawsze ten sam.

Spostrzeżenie to bardzo ułatwia rozwiązanie zagadnienia obliczania serii maszyn na minimum ogólnych kosztów wyprodukowania i eksploatacji. Trzeba najpierw obliczyć i zaprojektować maszyny na najlepszy kształt a następnie osobno traktować sprawę obciążeń i współczynników eksploatacyjnych oraz kosztów eksploatacji, przy niezmiennych, dla wszystkich obciążeń najlepszych, kształtach.

7. WSPÓŁCZYNNIK EKONOMICZNOŚCI KSZTAŁTU MASZYN maszyna o zbieżnych żłobkach statora i zębach jednakowej szerokości na swej długości

Dla takich maszyn, z reguły małych i niskiego napięcia, wzór na powierzchnię przekroju wszystkich przewodów uzwojenia statora, $\sum S_u$, będzie miał inną postać niż przy żłobkach o przekroju prostokątnym. Na rys. 2 pokazany jest wykrój blachy statora ze skupionymi żłobkami każdej podziałki biegunowej w jeden żłobek, tak jak to było poprzednio.



Rys. 2. Wykrój blachy statora ze skupionymi żłobkami każdej podziałki biegunowej w jeden żłobek

Liczymy tak, jakby ząb nie rozszerzał się przy szczelinie. Aby uproszczenie to nie powodowało błędów, powierzchnię przekroju żłobka do współczynnika wypełnienia miedzią k_n należy obliczać również w założeniu, że ząb ma stałą szerokość aż do swojego końca

$$\begin{aligned} \sum S_u &= k_n \frac{\pi}{4} \left[(D_z - 2h_j)^2 - D^2 \right] \left(1 - \frac{B_p}{k_{fe} \cdot B_{zi}} \right) = \\ &= k_n \cdot \frac{a}{2} \cdot D_z^2 \left[1 - a_2 \frac{D}{D_z} - a_3 \cdot \left(\frac{D}{D_z} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (17)$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{\pi \cdot a_i \cdot B_p}{p \cdot k_{fe} \cdot B_{j1}}, \\ a_3 &= 1 - \left(\frac{\pi \cdot a_i \cdot B_j}{2 \cdot p \cdot k_{fe} \cdot B_{j1}} \right)^2. \end{aligned}$$

Moc wewnętrzna takiej maszyny

$$P_{wv} = C_7 \cdot D \cdot L \cdot D_z^2 \cdot \left[1 - a_2 \cdot \frac{D}{D_z} - a_3 \cdot \left(\frac{D}{D_z} \right)^2 \right] \cdot B_p \cdot j. \quad (18)$$

Warunki stałości c_e

$$\frac{P_w^{3/4}}{\Delta P_{u1}} = \text{const} = \frac{\left\{ D \cdot L \cdot D_z^2 \cdot \left[1 - a_2 \frac{D}{D_z} - a_3 \cdot \left(\frac{D}{D_z} \right)^2 \right] B_p \cdot j \right\}^{3/4}}{D_z^2 \left[1 - a_2 \cdot \frac{D}{D_z} - a_3 \cdot \left(\frac{D}{D_z} \right)^2 \right] \cdot (L + L_{cz}) \cdot j^2}, \quad (19)$$

$$D_z^{-1/2} \cdot D^{3/4} \cdot L^{3/4} \cdot \left[1 - a_2 \frac{D}{D_z} - a_3 \cdot \left(\frac{D}{D_z} \right)^2 \right]^{-1/4} \cdot B_p^{3/4} \cdot j^{-5/4} \cdot (L + L_{cz})^{-1} = \text{const}, \quad (20)$$

$$\frac{P_w^{3/4}}{\Delta P_{fe}} = \text{const} = \frac{\left\{ D \cdot L \cdot D_z^2 \cdot \left[1 - a_2 \cdot \frac{D}{D_z} - a_3 \cdot \left(\frac{D}{D_z} \right)^2 \right] B_p \cdot j \right\}^{3/4}}{D_z^2 \cdot L \cdot B_p^2} \quad (21)$$

$$D_z^{-1/2} \cdot D^{3/4} \cdot L^{-1/4} \cdot \left[1 - a_2 \frac{D}{D_z} - a_3 \cdot \left(\frac{D}{D_z} \right)^2 \right]^{3/4} \cdot B_p^{-3/4} \cdot j^{3/4} = \text{const}. \quad (22)$$

Z przemnożenia równań (20) i (22) i po podniesieniu do kwadratu

$$B_p \cdot j = D_z^{-2} \cdot D^3 \cdot L \cdot \left[1 - a_2 \frac{D}{D_z} - a_3 \cdot \left(\frac{D}{D_z} \right)^2 \right] (L + L_{cz})^{-2} \cdot \text{const}. \quad (23)$$

Po podstawieniu (23) do (18) otrzymujemy

$$P_w = C_8 \cdot D^4 \cdot L^2 \cdot \left[1 - a_2 \cdot \frac{D}{D_z} - a_3 \cdot \left(\frac{D}{D_z} \right)^2 \right]^2 \cdot (L + L_{cz})^{-2}. \quad (24)$$

Współczynnik ekonomiczności kształtu

$$F = \frac{P_w^{3/4}}{K_u + K_{fe}} = C_9 \cdot \frac{\left(\frac{D}{D_z} \right)^3 \left[1 - a_2 \cdot \frac{D}{D_z} - a_3 \cdot \left(\frac{D}{D_z} \right)^2 \right]^{3/2} \cdot \left(\frac{L}{D_z} \right)^{3/2} \left(\frac{L}{D_z} + \frac{L_{cz}}{D_z} \right)^{-3/2}}{\frac{a_5}{2} \cdot \left[1 - a_2 \cdot \frac{D}{D_z} - a_3 \cdot \left(\frac{D}{D_z} \right)^2 \right] \cdot \left[\frac{L}{D_z} + \frac{L_{cz}}{D_z} \right] + a_6 \cdot \frac{L}{D_z}}. \quad (25)$$

Tak, jak i w przypadku żłobków prostokątnych, F nie zależy od wielkości maszyny, lecz od stosunków wymiarów. Wnioski 1 i 2 są oczywiście słuszne i w przypadku żłobków o przekroju nieprostokątnym.

8. PRZYKŁAD OBLICZENIA EKONOMICZNOŚCI KSZTAŁTU

przy założeniu, że sprawy przeciążalności momentu i przyrostu temperatury nie mają na nią wpływu

Obliczenie wykonamy dla maszyn ze żłobkami statora posiadającymi przekrój prostokątny.

Dla obliczenia współczynnika F według wzoru (16) przyjęto formę tablicy, którą ułożono w ten sposób, aby poziome rzędy wartości składni-

Tablica 1

Tablica obliczeń współczynnika ekonomiczności kształtu F

$I = \frac{D}{D_z}$	=	0,66	0,67	0,68	0,69	0,70	0,71	0,72	0,73	0,74	0,75	0,76
$II = \left(\frac{D}{D_z}\right)^3$	$= 10^{-3}$	287	300	314	328	343	358	373	389	405	422	439
$III = \left(1 - a_1 \frac{D}{D_z}\right)$	$= 10^{-3}$	241	229	218	206	195	183	172	160	149	138	126
$IV = II \cdot III$	$= 10^{-4}$	692	688	685	675	668	655	642	622	603	583	553
$V = IV^{3/2}$	$= 10^{-4}$	182	180	179	176	173	168	163	155	148	141	130
$VI = a_5 \cdot I \cdot III$	$= 10^{-2}$	234	226	218	209	201	191	182	172	162	152	141
$VII = \frac{L}{D_z}$	=	0,2										
$VIII = \frac{L}{D_z} + \frac{L_{cz}}{D_z}$	=	0,81										
$IX = \left(\frac{VII}{VIII}\right)^{3/2}$	=	0,124										
$X = V \cdot IX$	$= 10^{-5}$	226	223	222	218	214	208	202	192	183	175	161
$XI = VI \cdot VIII$	$= 10^{-2}$	189	183	176	169	163	155	147	139	131	123	114
$XII = a_6 \cdot VII$	=	1,44										
$XIII = XI + XII$	$= 10^{-2}$	333	327	320	313	307	299	291	283	275	267	258
$XIV = F = \frac{X}{XIII}$	$= 10^{-6}$	680	682	695	697	697	695	694	678	665	665	$\cdot C_6$
$VII = \frac{L}{D_z}$	=	0,3										
$XIV = F$	$= 10^{-6}$	818	822	835	837	837	830	822	805	788	768	$\cdot C_6$
$VII = \frac{L}{D_z}$	=	0,4										
$XIV = F$	$= 10^{-6}$	868	872	880	882	880	873	864	840	819	800	$\cdot C_6$
$VII = \frac{L}{D_z}$	=	0,5										
$XIV = F$	$= 10^{-6}$	887	890	898	898	896	888	875	850	828	805	$\cdot C_6$
$VII = \frac{L}{D_z}$	=	0,6										
$XIV = F$	$= 10^{-6}$	891	893	900	900	898	887	874	847	825	802	$\cdot C_6$
$VII = \frac{L}{D_z}$	=	0,7										
$XIV = F$	$= 10^{-6}$	877	880	885	884	879	870	858	831	808	783	$\cdot C_6$

c. d. tablicy 1

$VII = \frac{L}{D_z}$	=	0,8											
$XIV = F$	$= 10^{-6}$	860	860	867	865	861	851	838	810	788	763	717	$\cdot C_6$
$VII = \frac{L}{D_z}$	=	1,0											
$XIV = F$	$= 10^{-6}$	813	814	820	817	812	802	788	762	739	716	673	$\cdot C_6$

ków tego wzoru dla rozmaitych D/D_z można było wykonywać za jednym nastawieniem suwaka logarytmicznego.

Jako przykład weźmiemy maszynę sześciobiegunową ($2p=6$), z rdzeniem złożonym z blach izolowanych lakierem, bez kanałów promieniotwórczych. Wtedy współczynnik zapelnienia rdzenia można przyjąć $k_{fe} = 0,93$. Założmy, że blachy statora mają kształt zewnętrzny kwadratowy, wobec czego $k_d = 1$.

Według danych wziętych z maszyn starszych typów o podobnej konstrukcji $L_{cz}/D_z = 0,61$, $k_n = 0,33$, $\alpha_i = 0,73$ i $k_w = 1,4$.

Współczynniki obliczone według oznaczeń zastosowanych we wzorze (3) i podanych bezpośrednio po nim wynoszą: $a = 0,895$, $a_1 = 1,15$.

Jeżeli założyć, że cena jednostkowa materiału rdzenia wynosi $C_{fe} = 1$, a uzwojenia — $C_u = 4$, to możemy obliczyć współczynniki do wzorów (13) i (14) $a_5 = 14,7$, $a_6 = 7,2$.

Pierwsze sześć wierszy tablicy obliczeń, które rozpoczynają się od liczb I do VI, odnoszą się do tych części wzoru (16), które zawierają tylko jedną zmienną niezależną D/D_z . Są one wspólne dla całego obliczenia.

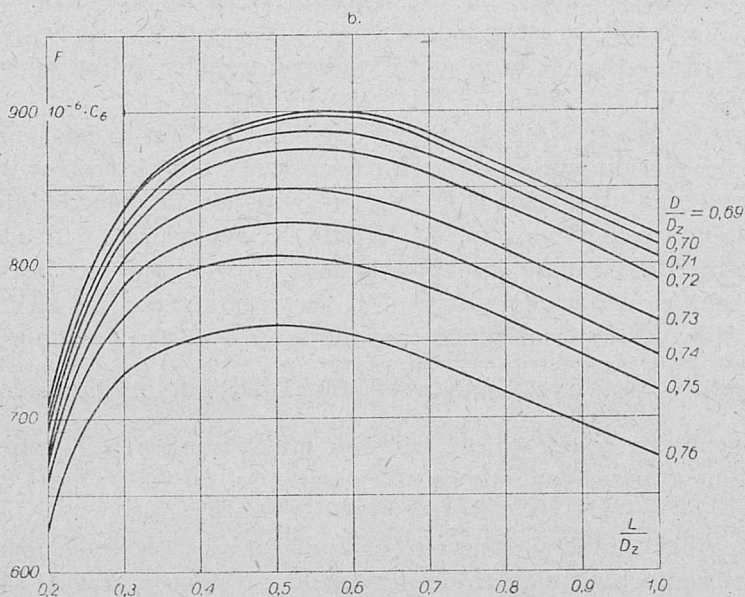
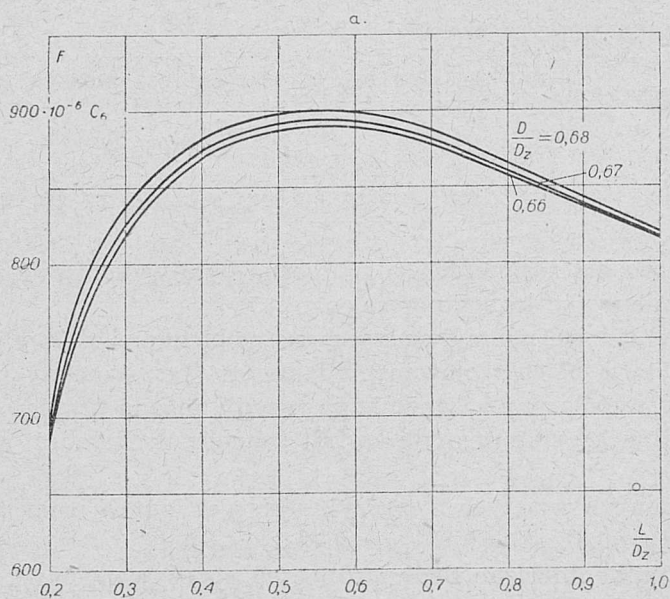
Następne osiem wierszy, od VII do XIV zawierają i drugą zmienną niezależną L/D_z muszą być powtarzane. Powtórzenie to jest w tablicy opuszczone za wyjątkiem pozycji VII i wynikowej pozycji XIV.

Wyniki tych obliczeń przedstawione są na rysunku 3a i 3b pod postacią krzywych $F = f\left(\frac{L}{D_z}\right)$, przy stałym stosunku D/D_z , innym dla każdej krzywej.

Ze względu na przejrzystość, krzywe dla stosunku D/D_z mniejszego od optymalnego przedstawione są na rysunku 3a, zaś krzywe dla D/D_z większego — na rys. 3b.

Jak widać z tablicy obliczeń F , największa z możliwych jego wartości, przy założeniach przyjętych do przykładu, występuje przy D/D_z pomiędzy 0,68 a 0,69 i przy L/D_z około 0,6. Wtedy jest $F_{\max \max} = C_6 \cdot 900 \cdot 10^{-6}$.

Rys. 3b może być bezpośrednio użyteczny przy wyznaczaniu granic ekonomicznych długości rdzenia tych typów maszyn, które mają jednokowe średnice. Krzywe te dają nam jednocześnie dobrą orientację co do wielkości odstępstwa od najlepszej ekonomiczności, jeśli ze względu na



Rys. 3a. Krzywa dla stosunku D/D_z mniejszego od optymalnego
 b. Krzywa dla stosunku D/D_z większego od optymalnego.

przeciążalność lub nagrzewanie, zmuszeni jesteśmy zmienić kształt maszyny, dając stosunkowo większą średnicę wewnętrzną (płytsze żłobki). Sprawy te będą tematem dalszych rozdziałów.

9. OBLICZENIE NAJLEPSZYCH KSZTAŁTÓW MASZYN o mocy ograniczonej wymaganą przeciążalnością momentu.

W dotychczasowych rozważaniach, sprawa przeciążalności nie była zupełnie brana pod uwagę. Nie została określona nawet liczba żłobków i nie wzięto jej w rachubę.

Począwszy od pewnej wielkości maszyny, a ściślej, od pewnej wielkości jej średnicy, stosując obliczony, podaną wyżej metodą, najlepszy kształt rdzenia, nie można otrzymać wymaganej przeciążalności momentu nawet wtedy, gdy się stosuje największą wykonalną liczbę żłobków. Nie pozostaje wówczas nic, jak tylko przyjąć inny kształt rdzenia, mianowicie taki, przy którym żłobki będą płytsze, co jest równoznaczne ze zmianą stosunku D/D_z na większy niż ten, przy którym występuje $F_{max\ max}$. W jakim stosunku odbiegamy przy tym od największego współczynnika ekonomiczności kształtu widzimy z obliczonego poprzednio przykładu i z rysunku 3b.

Metodą próbnych elektromagnetycznych obliczeń można znaleźć przy jakim (powiększonym w stosunku do najlepszego) stosunku D/D_z przeciążalność momentu jest już wystarczająca, oczywiście, dla założonego stosunku strat stałych do strat zmiennych.

Dla tego stosunku D/D_z można łatwo dobrać według odpowiedniej krzywej z rys. 3b najkorzystniejszą długość lub najkorzystniejsze długości w obrębie płaskiej części wierzchołka krzywej. W ten sposób otrzymany kształt będzie najkorzystniejszy jaki można osiągnąć przy żądanej przeciążalności.

Powtarzanie tych próbnych elektromagnetycznych obliczeń dla każdego z obliczonych typów serii byłoby zbyt pracochłonne, postaramy się więc znaleźć sposób na określenie najmniejszego, lecz wystarczającego ze względu na przeciążalność, D/D_z w funkcji D_z , to jest w funkcji tej wielkości, której stopnie mamy przy projektowaniu serii z góry zadane, jako znormalizowane ze względu na rozkrój arkuszy i ze względów technologicznych.

Przypuśćmy, że obliczenie elektromagnetyczne wykazało, iż do pewnej średnicy zewnętrznej, którą oznaczymy przez D'_z , silnik daje się obliczyć tak, aby przy optymalnym D/D_z (na rys. 3b $D/D_z = 0,69$) przeciążalność momentu była w granicach przepisów lub naszych wymagań. Średnice D'_z oraz odpowiadającą jej — D' nazwiemy g r a n i c z n y m i.

Wszystkie mniejsze maszyny, aż do tych o średnicy granicznej, mogą mieć ten sam najlepszy stosunek $D/D_z = D'/D'_z$. Wobec niezmienności kształtu blachy, stosunek głębokości żłobka do średnicy wewnętrznej (w pierwszej potędze) pozostaje bez zmiany.

$$\frac{2h_z}{D} = C_h = \frac{D_z - a_1 D}{D}, \quad (26)$$

gdzie C_h jest stałą.

Zależność ta obowiązuje, gdy $D \leq D'$.

Począwszy od D' , to jest dla $D \geq D'$, obowiązuje już, ze względu na przeciążalność, inna zależność. Głębokość żłobka rosnać może już tylko proporcjonalnie do D^y , przy czym $y < 1$. Wzór (26) zmieni się wtedy na

$$\frac{2h_z}{D^y} = C'_h = \frac{D_z - a_1 D}{D^y}, \quad (27)$$

stąd

$$D_z = a_1 D + C'_h D^y. \quad (28)$$

Stałą C'_h można określić z zależności wartości granicznych

$$C'_h = \frac{D'_z - a_1 D'}{(D')^y}. \quad (29)$$

Stosując to samo C'_h dla każdego $D > D'$ można obliczyć D_z ze wzoru

$$D_z = a_1 D + C'_h D^y \quad (30)$$

i mieć stąd dla każdej wartości D_z — wartość D , a więc i D/D_z , przy którym przeciążalność jest wystarczająca, a z odpowiedniej krzywej rys. 3b otrzymać współczynnik ekonomiczności kształtu w funkcji długości rdzenia.

Pozostaje jeszcze określić wartość wykładnika potęgi y . Należy to wykonać na podstawie doświadczeń lub przyjąć $y = 0,5$, jak to zostało określone na podstawie danych doświadczalno-statystycznych podanych w [4] dla innej metody.

10. PRZYKŁAD OBLICZENIA GRANICZNEGO STOSUNKU $D/D_z = f(D_z)$

poniżej którego przeciążalność momentu jest niewystarczająca.

Obliczenie to przeprowadzone zostanie dla serii maszyn posiadające te same dane, które założone były w przykładzie obliczonym w rozdziale 8.

Przypuśćmy, że obliczenia elektromagnetyczne maszyny posiadającej najlepszy kształt, to jest $D/D_z = 0,69$, wykazały, że przy $D_z = 333$ mm można jeszcze osiągnąć wymaganą przeciążalność momentu, a przy większych średnicach już nie.

(Jako D_z brany jest bok kwadratu, wynikający z rozkroju normalnego arkusza bez reszty, ponieważ poprzednio założone zostało, że silniki mają konstrukcję z kwadratowymi blachami statora. Nie ma to zresztą wpływu na sposób obliczeń ekonomiczności kształtu.)

Średnica graniczna jest więc $D'_z = 333$ mm,

średnica wewnętrzna — $D' = 0,69 \cdot 333 = 230$ mm.

Jeśli przyjąć $y = 0,5$, to ze wzoru (29)

$$C'_h = \frac{333 - 1,15 \cdot 230}{230^{0,5}} = 4,67.$$

Dalsze obliczenie, według wzoru (30), przeprowadzone zostanie w formie tablicy.

Według dwóch ostatnich pozycji tablicy 2, łatwo jest, dla każdej wartości D_z , określić D/D_z potrzebne ze względu na przeciążalność, a z odpowiedniej krzywej rys. 3b — granice właściwych długości rdzenia.

Tablica 2

Obliczenie $D/D_z = f(D_z)$

D (mm)	250	270	300	330	360	400	440	490	540	600	700
$a_1 D$	288	312	345	380	414	460	506	565	622	691	806
D_y	15,8	16,5	17,4	18,2	19	20	21	22,2	23,3	24,5	26,5
$C'_h D_y$	73,8	77	81,2	85	88,8	93,5	98,2	103,5	108,5	114,5	124
D_s	361,8	389	426,2	465	502,8	553,5	604,2	668,5	720,5	805,5	930
$\frac{D}{D_z}$	0,692	0,695	0,702	0,71	0,715	0,72	0,728	0,753	0,75	0,745	0,75

11. ZMIANA WSPÓŁCZYNNIKÓW ZAPEŁNIENIA I INNYCH WSPÓŁCZYNNIKÓW PRZYJĘTYCH ZA STAŁE PODCZAS OBLICZANIA SERII

Ze zmianą wielkości maszyny, a głównie jej średnicy, współczynniki przyjęte za stałe, mogą się nieco zmieniać. Krzywe $F = f\left(\frac{D}{D_z}, \frac{L}{D_z}\right)$ można odpowiednio korygować. Aby przy tym skala pozostała ta sama, trzeba wziąć pod uwagę to, że w stałej C_6 mieszczą się dwa najważniejsze z tych współczynników, to jest k_n i a , w których zawarty jest stosunek indukcji B_p/B_{zi} , jak to podano w rozdziale 3 (bezpośrednio poniżej wzoru 3).

Gdyby przy wyprowadzaniu wzoru (16) współczynniki k_n i a traktowane były jako zmienne, to w mianowniku trzeba byłoby wprowadzić je w potęgę $3/2$, ponieważ w stałej C_6 mieści się stała C_8 z równania (4)

i stała C_4 z równania (10), obie podniesione do potęgi $3/4$ i pomnożone przez siebie. Stałe C_3 i C_4 zawierają zaś iloczyn $k_n \cdot a$ w pierwszej potędze — każda.

Stała a_3 w mianowniku wzoru (16) zawiera, zgodnie z oznaczeniem przed wzorem (13), iloczyn $k_n \cdot a$ w pierwszej potędze.

Aby więc zmienić F z uwzględnieniem zmiany współczynników k_n i a na k'_n i a' , wystarczy w tablicy obliczeń współczynnika ekonomiczności kształtu F zmienić cztery pozycje w następujący sposób:

$$X' = X \left(\frac{k'_n \cdot a'}{k_n \cdot a} \right)^{3/4} \quad (31)$$

$$XI' = XI \frac{k'_n \cdot a'}{k_n \cdot a} \quad (32)$$

$$XIII' = XI' + XII \quad (33)$$

$$XIV' = \frac{X'}{XIII'} \quad (34)$$

Zmiana stosunku B_p/B_j , który ukryty jest we współczynniku a_1 , jak to widać z oznaczenia po wzorze (3), byłaby bardziej uciążliwa. Trzeba byłoby zmieniać wszystkie pozycje zawierające a_1 , co jednak jest możliwe i opłacalne przy obliczaniu dużej serii maszyn.

W krańcowym przypadku, jeśli się nie liczyć z pracochłonnością obliczenia, można, dobierając dla każdej normalnej D_z właściwe współczynniki wypełnienia i stosunki indukcji, obliczyć i wykreślić dla każdej D_z inne krzywe $F = f(D, L)$ oczywiście tylko w pobliżu spodziewanego maksimum. Porównanie tych krzywych dawałoby możność najekonomiczniejszego zaprojektowania kształtów całej serii typów maszyn, na razie bez uwzględnienia nagrzewania.

12. WPŁYW NAGRZEWANIA SIĘ MASZYN NA JEJ KSZTAŁTY

Pozornie wydaje się, że nad całym zagadnieniem ekonomiczności dominuje, nie brany w powyższych rozważaniach czynnik, nagrzewanie się maszyny. Wobec oczywistej niemożności ogólnego matematycznego ujęcia nagrzewania i wprowadzenia go do wzorów na współczynnik ekonomiczności, realność osiągniętych w tej pracy wyników wydaje się problematyczna. W rzeczywistości jednak, przez wyodrębnienie współczynnika ekonomiczności kształtu z ogólnej ekonomiczności maszyny, sprawa znacznie się wyświeśla.

Współczynnik ekonomiczności kształtu jest o wiele mniej zależny od nagrzewania niż ogólny współczynnik ekonomiczności. Ten ostatni zależy bowiem od obciążeń elektromagnetycznych, od których zależy nagrze-

wanie. Optymalny kształt jest natomiast jednakowy dla maszyn więcej lub mniej obciążonych, jeśli tylko stosunek strat stałych do strat zmiennych pozostaje ten sam. Każda więc maszyna o optymalnym kształcie może mieć, przy swojej konstrukcji i warunkach chłodzenia, takie obciążenia B_p i j , że nagrzewanie jej części czynnych nie przekroczy dopuszczalnego.

Te graniczne obciążenia oznaczmy przez B'_p i j' .

Przez B''_p i j'' oznaczmy natomiast te obciążenia, które byłyby najlepsze z punktu widzenia ogólnej ekonomiczności maszyny, to jest przy których suma kosztów wytworzenia i kosztów użytkowania maszyny jest najmniejsza (przy tej samej mocy).

Zmiana kształtów maszyny ze względu na nagrzewanie jest wówczas celowa, jeżeli na skutek odstępstwa od kształtu optymalnego zwiększenie efektu chłodzenia pozwoli na przejście na obciążenie większe niż B'_p i j' i jeśli poza tym B''_p i j'' są większe od B'_p i j' .

Należy jednak zwrócić uwagę na to, że przy powiększaniu obciążeń bez odstępowania od najlepszego kształtu wzrost mocy i wzrost strat zawsze się w pewnym stopniu kompensują, a przy powiększaniu obciążeń z odstępstwem od optymalnego kształtu dochodzi niczym nieskompensowany czynnik, mianowicie: zmniejszenie współczynnika ekonomiczności kształtu — dodatkowy składnik zmniejszenia się ogólnej ekonomiczności.

W związku z tym można byłoby dać do praktycznego użytku konstruktorów następujące wskazówki:

należy najpierw obliczyć krzywe współczynnika ekonomiczności kształtu, aby się do nich stosować lub, w razie odstępstwa, wiedzieć, jakie są jego konsekwencje (w liczbach);

przy stosowaniu odstępstwa od najlepszego kształtu w celu wykorzystania indywidualnych dla danej konstrukcji możliwości zwiększenia chłodzenia, a więc i obciążeń

należy pamiętać, że poza normalnym stosunkowym zwiększeniem strat, wystąpi dodatkowo pogorszenie ekonomiczności ogólnej, spowodowane zmniejszeniem się współczynnika ekonomiczności kształtu.

Katedra Maszyn Elektrycznych
Politechniki Warszawskiej

WYKAZ LITERATURY

1. Kade F. Die Wachtumsgesetze des Induktionsmotor. E. T. Z., 1. 10. 1952, s. 629.
2. Kozłowski H. S. Metoda obliczania ekonomicznych kształtów maszyn asynchronicznych. Przegląd Elektrot. nr 3, 1953.
3. Kozłowski H. S. Równanie najekonomiczniejszej średnicy wewnętrznej maszyny asynchronicznej. Przegl. Elektrot. nr 9, 1952.
4. Postnikow I. M. Uniwersalnaja maszynnaja postojannaja. Elektricestwo, nr 11, 1950.
5. Vidmar M. Der wirtschaftliche Aufbau der elektrischen Maschinen, 1918.

Г. С. КОЗЛОВСКИ

ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ФОРМ ИНДУКЦИОННЫХ МАШИН

Резюме

Настоящий труд является развитием и дополнением трудов [2] и [3] а также попыткой свести в одну математическую зависимость наибольшее число факторов, влияющих на экономичность формы сердечника. Мерой экономичности формы принято F по формуле (1), функцию внутренней мощности и стоимости K , т. к. она не изменяется в связи с величиной машины и зависит поэтому только от формы и произведения индукции в воздухе B_p на густоту тока j .

Величина F представлена формулами (2), (3) и (4), как функция главных размеров сердечника: внешнего диаметра D_2 , внутреннего D статора и длины сердечника L . Использован при этом рис. 1 листа статора на котором все пазы полюсного деления сжаты в один, т. к. число пазов и зависящая от него перегружаемость момента пока не рассматривается.

Приняты обозначения: E — э. д. е. в обмотке статора, I — ток статора, Φ — магнитный поток, $\sum S_n$ — сумма сечений всех проводов обмотки статора, z — число витков обмотки статора, k_n — отношение сечения проводов к сечению паза, k_{fe} — коэффициент заполнения железом сердечника, h_j — высота ярма, B_j — индукция в ярме статора, B_{zi} — идеальная индукция в наиболее узком месте зубца. C, C_1, C_2 и т. д. величины постоянные. Приняты как постоянные величины отношение B_p/B_j а также B_p/B_{zi} на основании данных подобных машин.

Произведение $B_p j$ не принимается как постоянная величина, как это было до сих пор, но оно представлено в формуле (10) в виде функции главных размеров и длины лобовых частей статора L_{ez} . Уравнение (10) выведено из формул (6) и (8), выражающих условия, дабы потери в обмотке ΔP_{u1} и в железе ΔP_{fe} являлись при изменении формы пропорциональными к мощности в степени 3,4. Это условие равнозначно с тем, что при изменении мощности коэффициент полезного действия применяется так, как нормально в серии машин в связи с условием, что отношение переменных потерь к постоянным остается без изменения. Уравнение (11) выражает эти условия.

Стоимость машины выражена формулами (12), (13) и (14) как стоимость обмоток K_u и сердечника K_{fe} и предположительно других частей машины, либо технологических операций, которые пропорциональны к этим двум главным позициям общей стоимости. В этих формулах k_d — обозначает отношение поверхности листа стали к квадрату внешнего диаметра листа статора, вырезанного из полного листа, k_w коэффициент, учитывающий стоимость обмотки ротора $\gamma_u C_u, \gamma_{fe}$ и C_{fe} — удельные веса единичные цены материалов для обмоток и листов стали для сердечника.

Подставляя равенства (11) до (14) в уравнение (1) получаем по преобразованию уравнения (16), из которого следует:

Вывод I Оптимальная форма сердечника не зависит от величины машины (в пределах, в которых не изменяются коэффициенты принятые постоянными).

Вывод II Оптимальная форма не зависит от электромагнитных нагрузок, следовательно, и от коэффициента полезного действия.

Оба эти выводы касаются машин, мощность коих не ограничена перегружаемостью или нагревом.

Подобным образом выведено равенство (25) об экономичности формы машин с зубцами статора имеющими постоянную ширину.

Приведен пример расчёта экономичности формы в виде таблиц а также выводы в виде рис. 3а и 3б, которые могут быть основой для экономического проектирования форм сердечников серии индукционных машин.

Чем машина больше, тем меньше перегружаемость момента поскольку сохраняется та-же форма и то-же соотношение между переменными и постоянными, потерями. При расчете серии типов машин возможно путем электромагнитных подсчётов определить предельные диаметры D'_z и D' , при которых перегружаемость является еще достаточной при оптимальной форме и при наиболее возможном — с технологической точки зрения — числе зубцов. При больших диаметрах форма сердечника должна быть изменена в смысле уменьшения высоты зубцов h_z , что равнозначно с увеличением D/D_z . Форму машин с большими диаметрами чем D'_z следует избирать согласно кривым, находящимся в нижней части рис. 3б.

Для машин больших чем предельные h_z не будет уже пропорционально к D но к D^y где y согласно опытным данным [7] можно принять равным 0,5.

Уравнение (30) дает возможность определения D/D_z , необходимого в связи с перегружаемостью больших машин. Постоянная C'_h определяется на основании размеров машин продольной величины, начиная с которой нельзя уже применять D/D_z дающего наибольшее F . Для этого следует применять уравнение (29).

Приведен пример подсчёта отношений диаметров серии типов машин при учете перегружаемости.

Рассмотрен вопрос изменения во время расчёта серии коэффициентов принимаемых как постоянные.

Вопрос влияния нагрева машины на ее экономичность, хотя не был включен в общую с другими факторами математическую зависимость, был значительно выяснен путем введения понятия экономичности формы. Согласно с выводом II наиболее экономическая форма остается та-же при разных нагрузках. Отступление от экономической формы для получения лучшего охлаждения, а следовательно и возможности увеличения нагрузки, связано с добавочным снижением экономичности вследствие уменьшения экономичности формы.

H. S. KOZŁOWSKI

THE THEORY OF THE OPTIMUM DIMENSIONS OF INDUCTION MACHINES

Summary

This paper is an extension and a supplement of the papers [2] and [3]. It is an attempt of a comprehensive account of many factors influencing the economy of the machine core shape and their expression in one mathematical relation. As a measure of the shape economy has been taken: F , as in equation (1), the function of the internal power and the cost K , because it does not change with the size of the machine [5]. It depends only on the shape of the core and on the product of the flux density in the air B_p and the current density j .

The value F is given by equations (2), (3) and (4), as a function of the main core dimensions: the external diameter D_z , the internal diameter of the stator D and the length of the core L . The use of Fig. 1 showing the stator lamination was made, where all slots of the pole pitch are combined into one, because, for the time being, the number of slots and the maximum torque is not being considered.

The following symbols are used: E — E.M.F. in the stator winding, I — stator current, Φ — magnetic flux, $\sum S_u$ — sum of the cross section areas of all stator winding conductors, z — number of turns in the stator winding, k_n — ratio of the cross section areas of the conductors and a slot, k_{fe} — space factors, h_j — height of the yoke, B_j — flux density in the stator yoke, B_{zi} — ideal flux density in the narrowest place of the tooth, $C, C_1, C_2 \dots$ are constants. The ratios B_p/B_j and B_p/B_{zi} taken from the data of similar machines are assumed constant.

The product $B_p \cdot j$ is not assumed constant, as it has been done so far, but it is shown by equation (10) as a function of the main dimensions and the end winding length of the stator L_{cz} . The equation (10) is deduced from the formulae (6) and (8). They express the conditions, that the copper losses ΔP_{u1} and the iron losses ΔP_{fe} are proportional to the $3/4$ power of the machine output, if the dimensions change. This condition is identical with that, that during the change of power the efficiency alters — as usually in a machine production series — together with the condition, that the ratio of variable to constant losses be always the same.

The equation (11) contains these conditions.

The cost of the machine is shown by the formulae (12), (13) and (14) as the cost of: the windings K_u , the core K_{fe} , and possible other machine parts or technological operations, which are proportional to both main items of the general cost. In the following equations: k_d — the ratio of the sheet surface area to the square of the external sheet of the stator, cut out of it, k_w — the coefficient accounting for the rotor winding cost, $\gamma_u, C_u, \gamma_{fe}$ and C_{fe} — the specific densities and the unit prices of the materials for the winding and sheet for the core.

Putting the formulae (11) and (14) into (1), we get, after a transformation, the formula (16) indicating that:

1. the optimum shape of the core is independent of the machine size,
2. it does not depend on the electromagnetic load, i. e. on the efficiency.

Both conclusions deal with machines, whose output is not limited by overload capacity and heating.

In a similar way equation (25) is derived for the dimensional economy of machines with stator teeth of a constant width.

An example of dimensional economy calculation is given in tabular form and its results in Fig. 3a and 3b, which may be a basis for designing economical core shapes of induction machine series.

The bigger the machine, the smaller the overload moment capacity for the same shape and the same ratio of the variable and constant losses. When calculating a series of machine types it is possible to define by electromagnetic calculations the limiting diameters D'_{zw} and D' , at which the overload capacity is still sufficient, with the most advantageous shape and with the greatest technologically acceptable number of teeth. If the diameters are bigger the core shape must be changed in order to diminish the tooth height h_z , which is identical with the enlargement of D/D_z . The machine dimensions with diameters greater than D'_z should be selected according to the lower curves in Fig. 3b.

For machines bigger than the limit size, h_z will not be proportional to D , but to D^y , where y according to experimental values [4] may be assumed equal to 0.5.

The equation (30) allows to determine the necessary D/D_z for the overload capacity of the bigger machines. The constant C'_h is derived from the limiting machine size, beginning from which the ratio D/D_z — for greatest T — cannot be applied. In that case equation (29) has to be applied.

An example is given of diameter ratio calculation of a machine type series with regard to the overload capacity.

The change is discussed of the coefficients assumed to be constant, while calculating a series.

The influence of the heating of the machine on its economy, although not included in the mathematical relation together with other factors, is considerably cleared up by introducing the notion of shape economy. According to the second conclusion the most economical shape at different loadings is always the same. The deviation from the optimum shape in order to get a better cooling, i.e. a load increasing possibility, is connected with an additional economy loss due to the reduction of the shape economy.

S. SZPOR

Uzupełnienie teorii relaksacyjnej rozwoju pioruna

Czas przerwy między schodkami

Rękopis dostarczony 28. 6. 1955

Rozpatruje się niedociągnięcia i niejasności w pierwotnym sformułowaniu teorii relaksacyjnej wyładowania wstępnego schodkowego z roku 1942, mianowicie w sprawie roli napięcia wypadkowego wzdłuż drogi wyładowania, w dziedzinie podstawowych zależności elektrodynamicznych oraz w zagadnieniu przyczyn uruchomienia nowej strzały schodkowej po przerwie. Następnie wskazuje się nowsze wyniki doświadczenia, które usuwają niektóre wątpliwości oraz przypomina się udoskonalone sformułowania elektrodynamiczne z roku 1952. Wreszcie wysuwa się dalsze uzupełnienie teorii relaksacyjnej wyjaśniając czas przerwy między strzałami schodkowymi jako czas potrzebny na ogrzanie powietrza aż do stanu jonizacji cieplnej.

Dalej przedstawia się matematyczne ujęcie tego uzupełnienia. Rozważania nad nagrzewaniem powietrza przez wyładowanie są oparte na podstawowych zależnościach elektrodynamicznych, którą w rachubę niezbyt dokładne dane liczbowe i wprowadzają bardzo istotny współczynnik η niejednostajności rozkładu prądu w kanale wyładowania. Wyprowadza się wzory na czas potrzebny do osiągnięcia stanu jonizacji cieplnej. Ostatecznym wynikiem są wartości η około $10^5 \dots 10^6$ dla czasu przerwy między strzałami schodkowymi rzędu kilkudziesięciu μs — uznane za dość prawdopodobne. W zakończeniu wyjaśnia się różnice między wyładowaniami wstępnymi schodkowymi a wyładowaniami wstępnymi ciągłymi w późniejszych uderzeniach pioruna wielokrotnego.

1. OBECNY STAN TEORII I SZKIC UZUPEŁNIENIA

Publikacja autora z roku 1942 [14] dała *pierwszy szkic teorii relaksacyjnej wyładowania piorunowego wstępnego o przebiegu schodkowym* (w piorunie pojedynczym lub w pierwszym uderzeniu pioruna wielokrotnego). Sformułowanie to miało *niedociągnięcia i niejasności* w trzech punktach.

A. Nie było dostatecznych dowodów, że spadek napięciowy na oporności kanału iskrowego U_R (tj. napięcie wypadkowe wzdłuż kanału przewodzącego prąd) może być w końcu rozwoju schodka znaczny w porów-

naniu z napięciem pola pierwotnego wzdłuż kanału U_0 i że może spowodować w związku z tym zatrzymanie szybkiego rozwoju wyładowania. Stosunkowo wielkie wartości gradientów K_R nie miały jeszcze poparcia doświadczalnego, a stosunkowo małe gradienty U_0 (do kilkuset V/cm) były jeszcze niekiedy podawane w wątpliwość (zwłaszcza przez elektryków — przyjmujących na podstawie badań laboratoryjnych wartości rzędu kilku kV/cm).

B. Podstawowe zależności elektrodynamiczne, na których oparto pierwsze sformułowanie teorii relaksacyjnej, były zbyt proste. Nie brały one dostatecznie w rachubę niejednostajnego rozkładu pola elektrycznego oraz nieciągłości rozwoju wyładowania schodkowego. Wynikała stąd pozorna sprzeczność niektórych okoliczności, mianowicie z jednej strony osłabienia gradientu wypadkowego przed czołem zatrzymywanej strzały schodkowej, z drugiej zaś niepowstrzymanego wzrostu ładunków wzdłuż kanału — wobec przepływu prądu tylko z niewielkimi fluktuacjami. Schonland wysunął ostatnio twierdzenie [11], że małe fluktuacje prądu w wyładowaniu schodkowym (niewielkie wahania pola elektrycznego mierzonego na powierzchni ziemi) przemawiają przeciw teorii relaksacyjnej i potwierdzają teorię wyładowania przedwstępnego ciągłego.

C. Czas przerwy międzyschodkowej i przyczyna uruchomienia nowej strzały schodkowej otrzymały tylko skąpe oświetlenie w artykule z roku 1942. Wysłunięto hipotezę wyścigu dwóch czynników: wzrostu ładunków w czołowej części wyładowania oraz wzrostu średnicy czoła wskutek dyfuzji i wskutek wpływu pola elektrycznego. Utrzymywanie przerwy przypisano początkowej przewodze czynnika drugiego i wynikającym stąd małym wartościom gradientu wypadkowego przed czołem zatrzymanego wyładowania. Uruchomienie nowej strzały próbowano wyjaśnić późniejszą przewagą czynnika pierwszego — powodującą wzrost gradientu wypadkowego przed czołem. Jednakże nie uzasadniono dostatecznie tej różnicy między okresem początkowym i późniejszym. Ponadto sformułowanie z roku 1942 oceniało zbyt mały promień strzały schodkowej i przyjmowało w związku z tym przesadnie wielki stosunek wzrostu promienia czoła w czasie przerwy.

Wątpliwości A w sprawie *wielkich wartości gradientu wypadkowego wzdłuż wyładowania wstępnego* zostały rozproszone częściowo dzięki wynikom badań doświadczalnych Komielkova [4], [5] nad rozwojem iskry długiej laboratoryjnej. Badania te wykazały dwie fazy wyładowań wstępnych: najpierw fazę wyładowania wstęgowego (streamer) o dużej średnicy i o małej gęstości prądu, o natężeniu pola rzędu kilku kV/cm lub nawet trochę większym, jeszcze bez jonizacji cieplnej; następnie fazę kanału plazmowego (właściwego wyładowania wstępnego), o znacznie mniejszej średnicy i znacznie większej gęstości prądu, o natężeniu pola rzędu kilku-

dziesięciu V/cm, z jonizacją cieplną, a więc o właściwościach zbliżonych do łuku elektrycznego.

Natężenie pola rzędu kilku kV/cm wzdłuż wyładowania wstęgowego jest wskazówką bardzo doniosłą dla teorii relaksacyjnej. Wystarczy przyjąć tak wielkie wartości gradientu K_R tylko wzdłuż odcinka świeżej strzały schodkowej, rzędu kilkudziesięciu metrów, ażeby wyjaśnić główną przyczynę zatrzymania strzały. W pozostałej, starszej części wyładowania wstępnego, o długości rzędu od kilkuset do kilku tysięcy metrów, znacznie mniejsze gradienty K_R , na przykład rzędu kilkudziesięciu V/cm, nie mają tak istotnego znaczenia w mechanizmie schodków, ale mogą jednak brać poważny udział w wytwarzaniu dużej wartości całkowitej U_R w porównaniu z napięciem pola pierwotnego U_0 .

W sprawie wartości K_0 panują już zgodne poglądy. Między chmurą burzową a ziemią występują natężenia od kilkudziesięciu do kilkuset V/cm, a tylko w stosunkowo niewielkim obszarze chmury gradient pierwotny osiąga kilka tysięcy V/cm.

Braki B w podstawowych sformułowaniach elektrodynamicznych zostały usunięte w publikacji autora z roku 1952 [15]. Uzupełnienia wzięły w rachubę nieciągłość rozwoju wyładowania schodkowego oraz silną niejednostajność pola wzdłuż kanału. Jako główną okoliczność niejednostajnego pola wskazano skupienie dużych gradientów K_R tylko w stosunkowo krótkim odcinku czołowym wyładowania. Wyprowadzono wzory przybliżone

$$Q \approx \frac{1}{16 \cdot 9 \cdot 10^{11}} \frac{(U_0 + U_S - U_R + U_A) a}{\ln \frac{a}{r} - 1}, \quad (1)$$

$$K_A \approx \frac{2(U_0 + U_S - U_R)}{r \left(\ln \frac{a}{r} - 1 \right)}, \quad (2)$$

$$i \approx \frac{1}{16 \cdot 9 \cdot 10^{11}} \frac{1}{\ln \frac{a}{r} - 1} \left[a \frac{d(U_0 + U_S - U_R + U_A)}{dt} + \right. \\ \left. + 2v(U_0 + U_S + U_R + U_A) \right], \quad (3)$$

$$i_W \approx \frac{1}{4 \cdot 9 \cdot 10^{11}} \frac{(U_0 + U_S - U_R) v_W}{\ln \frac{a}{r} - 1}, \quad (4)$$

w których:

Q — ładunek rozłożony w dolnej połowie kanału wyładowania wstępnego,

- K_A — wypadkowe natężenie pola elektrycznego przed czołem wyładowania wstępnego,
 i — wartość chwilowa prądu w środkowej części kanału wstępnego, określona przy wzięciu w rachubę nieciągłości mechanizmu schodkowego oraz niejednostajności rozkładu trójmianu $(K_0 + K_S - K_R)$,
 i_w — prąd wygładzony z pulsacyj, które są związane ze strzałami schodkowymi i z przerwami międzyschodkowymi,
 a — długość rozwijającego się kanału,
 r — promień wyładowania, we wzorze (2) promień czoła,
 v — szybkość rozwoju wyładowania,
 v_w — szybkość wypadkowa (średnia) wyładowania schodkowego lub szybkość wyładowania ciągłego,
 U_0 — napięcie pola elektrycznego pierwotnego na całej długości wyładowania,
 U_S — siła elektromotoryczna, związana ze zmianami pola magnetycznego wytwarzanego przez wyładowanie,
 U_R — napięcie wypadkowe wzdłuż wyładowania, tj. spadek napięciowy na oporności wyładowania,
 U_A — napięcie dodatkowe wynikające z niejednostajności rozkładu trójmianu $(K_0 + K_S - K_R)$, wprowadzone jako uogólnienie matematyczne kilku zbadanych przypadków,
 jednostki — kulomb, amper, wolt, V/cm, cm, s, cm/s.

Wprowadzenie dodatkowego składnika U_A we wzorze (1) pozwala pogodzić nieustanny wzrost ładunku Q z maleniem natężenia K_A — według wzoru (2) — w okresie zatrzymywania strzały schodkowej. Mianowicie zmniejszanie się K_A wymaga, ażeby trójmian $(U_0 + U_S - U_R)$ malał, co jest możliwe przy wzroście znacznego napięcia U_R ; pomimo to można uzasadnić dalszy wzrost ładunku Q dzięki wyrazowi U_A , który kompensuje silne wahania trójmianu $(U_0 + U_S - U_R)$. Regularnemu wzrostowi ładunku Q odpowiada prąd i przedstawiający niezbyt wielkie różnice między okresem rozwoju strzały schodkowej a okresem przerwy międzyschodkowej. We wzorze (3) drugi wyraz w nawiasie klamrowym odgrywa wielką rolę w czasie rozwoju strzały schodkowej — przy wielkich wartościach v , schodzi natomiast prawie do zera w przerwie międzyschodkowej; wtedy radykalnemu zmniejszeniu prądu i zapobiega pierwszy wyraz w nawiasie klamrowym. Można w ten sposób uzasadnić niezbyt silne wahania prądu i wyładowania schodkowego — nie uciekając się do założeń wyładowania przedwstępnego ciągłego. Wzór (4) — ze stosunkowo niewielką szybkością v_w — może służyć do określania prądu wygładzonego z pulsacyj, a zatem również rzędu wielkości prądu zarówno w okresie strzały schodkowej jak i w okresie przerwy.

Wątpliwości C w sprawie przyczyny uruchomienia nowej strzały schodkowej po przerwie można usunąć lub co najmniej zmniejszyć dowodząc, że w końcu przerwy odcinek poprzedniej strzały osiąga temperaturę potrzebną do *jonizacji cieplnej*, staje się dopiero wtedy kanałem plazmowym i przedstawia radykalne obniżenie napięcia U_R . Utrzymywanie dużych wartości U_R w ciągu przerwy i znaczne zmniejszenie dopiero pod koniec pozwala łatwo uzasadnić silny wzrost natężenia K_A w końcu przerwy pomimo zwiększenia się promienia czoła r oraz wznowienie lawin elektronowych składowych.

Myśl, że doprowadzenie do stanu jonizacji cieplnej — przypominającego łuk elektryczny — odgrywa poważną rolę w rozwoju pioruna, jest stara. Bruce w swoim wariacie teorii wyładowania przedwstępnego [1], [2], [3] wysuwa przypuszczenie, że przejście w stan zbliżony do łuku jest wynikiem wzrostu prądu do minimalnej wartości wymaganej dla tego rodzaju wyładowań i że taki wzrost prądu można wyjaśnić rozszerzaniem się wyładowania przedwstępnego — o charakterze zbliżonym do ulotu. Badania doświadczalne Komiolkowa [4], [5] nad iskrą długą laboratoryjną wskazują, że szerokie początkowo wyładowanie wstępne przechodzi następnie w znacznie węższe wyładowanie wstępne — z jonizacją cieplną.

Dalsze rozważania — oparte na podstawowych zależnościach elektrodynamicznych — mają doprowadzić do gruntowniejszych wniosków o roli jonizacji cieplnej w rozwoju pioruna i do uzupełnień teorii relaksacyjnej wyładowania schodkowego w tej części, która mówi o przerwie międzyschodkowej i o uruchomieniu nowej strzały. Rozważania te są w sposobie ujęcia matematycznego jonizacji cieplnej zbliżone do publikacji Slepiana z roku 1928 [12], która stanowi bardzo wczesne sformułowanie częściowej teorii iskry długiej (bez odkrytych później szczegółów: jonizacji fotoelektrycznej i lawin składowych).

2. SFORMUŁOWANIE MATEMATYCZNE ROLI JONIZACJI CIEPLNEJ

Nagrzewanie powietrza w kanale wyładowania wstępnego zależy w znacznej mierze od gęstości prądu j oraz od gradientu wypadkowego K_R wzdłuż kanału — w myśl wzoru na energię wydzielaną w jednostce objętości

$$\Delta A = j K_R \cdot \Delta t = C \cdot \Delta \theta,$$

gdzie:

$\Delta \theta$ — przyrost temperatury w rozpatrywanej części kanału w czasie Δt ,

C — ciepło właściwe powietrza na jednostkę objętości, w jednostkach $\text{Ws/cm}^3 \cdot ^\circ\text{C}$,

j, K_R — w jednostkach $\text{A/cm}^2, \text{V/cm}$.

Można stąd przejść do pochodnej

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{C} j K_R \quad (5)$$

Wybierając wartość ciepła właściwego C nie można przyjąć ściśle ani warunku stałego ciśnienia, tj. większego ciepła właściwego C_p , ani warunku stałej objętości, tj. mniejszego ciepła właściwego C_v . W rzeczywistości powietrze nagrzewane rozszerza się trochę, ale nie tak szybko, ażeby następowało całkowite wyrównanie ciśnienia z otoczeniem. Można zdecydować się na wartość średnią niezbyt silnie różniących się współczynników C_p , C_v i przyjąć w normalnych warunkach atmosferycznych

$$C \approx 10^{-3} \text{ Ws/cm}^3 \cdot ^\circ\text{C}$$

Wobec bardzo niedokładnego charakteru dalszych sformułowań taka ocena wartości C wydaje się usprawiedliwiona.

Gęstość prądu j można określić biorąc w rachubę prąd wyładowania wstępnego oraz promień kanału. Jako prąd można przyjąć wartość średnią i_w w okresie jednej strzały świetlnej i jednej przerwy, tj. wygładzony z pulsacyj — według wzoru (4). Dokładniejsze uwzględnienie zmian prądu nie miałoby istotnego znaczenia dla wyników rozważań. Jako promień kanału przyjmuje się wartość r występującą we wzorach (1) do (4). Gęstość prądu nie jest jednakowa w całym przekroju o promieniu r ; dla największej gęstości, która decyduje o najsilniejszym nagrzewaniu niektórych miejsc, wprowadza się współczynnik niejednostajności rozkładu prądu $\eta > 1$ pisząc

$$j = \frac{i_w}{\pi r^2} \eta \quad (6)$$

Współczynnik niejednostajności rozkładu prądu η jest bardzo prymitywnym ujęciem dwóch czynników.

1. Mechanizm lawin elektronowych składowych nie wypełnia kanału jednostajnie. Powstaje jak gdyby sieć lawin skupiających większe gęstości prądu. Wielką rolę odgrywa tutaj wartość natężenia pola wypadkowego w czole wyładowania oraz intensywność fotoelektrycznego wytwarzania elektronów, które dają początek lawinom składowym.

2. W dalszym ciągu niektóre części kanału nagrzewają się prędzej i dochodzą wcześniej do stanu jonizacji cieplnej. Wtedy prąd skupia się jeszcze silniej w tych włóknach i wreszcie następuje zagęszczenie prądu w radykalnie zwężonym kanale — o charakterze zbliżonym do łuku elektrycznego.

Ścisłe ujęcie zmian współczynnika η z biegiem czasu byłoby wprost niemożliwe w obecnym stanie materiału doświadczalnego. Poprzestaje się na sformułowaniu bardzo uproszczonym posługując się średnią war-

tością η w okresie od wytworzenia lawin składowych do przejścia w stan zbliżony do łuku. W grę wchodzi prawdopodobnie znaczna wartość η , większego rzędu niż 10.

Promień r określa się jako wynik równoległego rozwoju lawin elektronowych w tak szerokim obszarze, że natężenie pola wypadkowego przed czołem K_A pozostaje ograniczone do wartości prawdopodobnie rzędu kilkudziesięciu kV/cm — pomimo bardzo wielkiego trójkątianu ($U_0 + U_S - U_R$). Na podstawie wzoru (2) można napisać

$$r \approx \frac{2(U_0 + U_S - U_R)}{K_A \left(\ln \frac{a}{r} - 1 \right)} \quad (7)$$

Podstawienie wyrażeń (7) oraz (4) we wzorze (6) daje zależność na gęstość prądu

$$j \approx \frac{1}{16 \cdot 9 \cdot 10^{11} \cdot \pi} \left(\ln \frac{a}{r} - 1 \right) \frac{K_A^2 v_w}{U_0 + U_S - U_R} \eta. \quad (8)$$

Gradient wypadkowy K_R wzdłuż kanału można dogodnie wyrazić jako ułamek κ natężenia K_A

$$K_R = K_A \kappa. \quad (9)$$

W okresie nagrzewania kanału przeważają prawdopodobnie wartości K_R rzędu kilku kV/cm; dopiero w końcowych fazach można spodziewać się wartości znacznie mniejszych. Jako dość prawdopodobną wartość średnią κ dla całego przebiegu nagrzewania można więc przyjąć około 0,1 — do rozważań przybliżonych, w których wprowadza się podobnie wartość średnią współczynnika η .

Wzory (8) i (9) pozwalają przepisać równanie nagrzewania (5) w postaci

$$\frac{d\theta}{dt} \approx \frac{1}{16 \cdot 9 \cdot 10^{11} \cdot \pi} \frac{\ln \frac{a}{r} - 1}{C} \frac{K_A^3 v_w}{U_0 + U_S - U_R} \eta \kappa. \quad (10)$$

Wprowadzając wartości średnie η , κ , K_A , ($U_0 + U_S - U_R$) jak gdyby wartości stałe przeprowadza się łatwo całkowanie w obszarze przyrostu temperatury $\Delta\theta$ w czasie t . Dochodzi się w ten sposób do wzoru na czas t potrzebny do osiągnięcia przyrostu temperatury $\Delta\theta$

$$t \approx 16 \cdot 9 \cdot 10^{11} \cdot \pi \frac{C}{\ln \frac{a}{r} - 1} \frac{U_0 + U_S - U_R}{K_A^3 v_w} \frac{1}{\eta \kappa} \Delta\theta \quad (11)$$

w sekundach.

Zakładając dalej

$$C \approx 10^{-3} \text{ Ws/cm}^3 \text{ } ^\circ\text{C},$$

$$\ln \frac{a}{r} - 1 \approx 5,$$

$$K_A \approx 30 \text{ kV/cm} = 30000 \text{ V/cm},$$

$$\Delta\theta \approx 5000 \text{ } ^\circ\text{C},$$

otrzymuje się

$$t \approx 1,7 \frac{U_0 + U_S - U_R}{v_W} \frac{1}{\eta \kappa} \quad (12)$$

z jednostkami s, cm/s, V.

Jeżeli przyjąć jako *typowe wartości piorunowe*

$$U_0 + U_S - U_R \approx 10 \text{ do } 100 \text{ MV} = 10^7 \text{ do } 10^8 \text{ V},$$

$$v_W = 10^7 \text{ do } 2 \cdot 10^8 \text{ cm/s},$$

$$\frac{U_0 + U_S - U_R}{v_W} \approx 0,1 \text{ do } 10 \text{ Vs/cm},$$

$$\kappa \approx 0,1,$$

to wzór (12) daje

$$t \approx (1,7 \text{ do } 170) \frac{1}{\eta}. \quad (13)$$

Jeżeli typowy czas przerwy między schodkami $50 \mu\text{s} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ przyjąć jako wartość t we wzorze (13), to współczynnik niejednostajności rozkładu prądu wypada

$$\eta \approx (0,3 \text{ do } 30) \cdot 10^5 \quad (14)$$

Tak wielkie wartości η wskazywałyby na niezbyt gęstą sieć lawin składowych.

Wyniki te nie są całkowicie przekonującym dowodem, że jonizacja cieplna odgrywa rolę omówioną w końcu rozdziału 1, że jest czynnikiem odmierzającym czas przerwy między kolejnymi strzałami schodkowymi. Przeprowadzone rozważania nad czasem t biorą w rachubę liczne wielkości znane niezbyt dokładnie, oceniane na podstawie przybliżonych zależności matematycznych lub nawet całkowicie nieznane, jak zwłaszcza współczynnik niejednostajności rozkładu prądu η . Wniosek o bardzo wielkiej wartości η , około 10^5 do 10^6 , odpowiadającej czasowi przerwy $50 \mu\text{s}$ jest dość prawdopodobny, ale również trochę mniejsze i większe wartości nie powodowałyby sprzeczności w obecnym stanie wiadomości.

Proponowane uzupełnienie teorii relaksacyjnej wyładowania wstępnego schodkowego w pierwszym uderzeniu pioruna pozwala wyjaśnić dodatkowo odrębny charakter *wyładowania wstępnego ciągłego* w następnym uderzeniu pioruna wielokrotnego. W przerwie między kolejnymi uderzeniami odbywa się tylko częściowe ochłodzenie i dejonizacja kanału iskrowego. Dlatego późniejsze wyładowanie wstępne nie wymaga już stosunkowo długiego czasu, rzędu kilkudziesięciu μs na doprowadzenie kanału do jonizacji cieplnej. Również prawdopodobny rozwój tego wyładowania w niezbyt szerokim obszarze, zbliżonym do wąskiego kanału plazmowego z poprzedniego uderzenia, sprzyja szybkiemu podgrzaniu i wzmocnieniu jonizacji. Gdyby nawet zdarzało się zatrzymywanie takiego wyładowania, to przerwy między kolejnymi strzałami musiałyby być stosunkowo bardzo krótkie, a więc niewyraźne.

Katedra Wysokich Napięć i Przyrządów Rozdzielczych
Politechnika Gdańska

WYKAZ LITERATURY

1. Bruce C. E. R. — Nature 1941, t. 147, s. 805.
2. Bruce C. E. R. — Proc. Roy. Soc. London 1944, t. A 183, s. 228.
3. Bruce C. E. R., Golde R. H. — J. Inst. El. Eng. 1941, t. 88/II, s. 487.
4. Komielkow W. S. — Izv. Ak. Nauk SSSR, Otd. Tiechn. Nauk, 1947, Nr 8, s. 955.
5. Komielkow W. S. — Izv. Ak. Nauk SSSR, Otd. Tiechn. Nauk, 1950, Nr 6, s. 851.
6. Loeb L. B., Meek J. M. — The mechanism of the electric spark — 1941, rozdział III, 16.
7. Meek J. M. — Phys. Rev. 1939, t. 55, s. 972.
8. Meek J. M. — Nature 1941, t. 148, s. 437.
9. Rüdenberg R. — Wiss. Veröff. Siemens — K. 1930, s. 1.
10. Schonland B. F. J. — Proc. Roy. Soc. London 1938, t. A 164, s. 132.
11. Schonland B. F. J. — Proc. Roy. Soc. London 1953, t. A 220, s. 25.
12. Slepian J. — El. World 1928, s. 761.
13. Szpor S. — Bull. Ass. Suisse El. 1942, s. 6.
14. Szpor S. — Rec. Trav. Sc. Pol. Int. en Suisse 1944, t. 2/4, s. 513.
15. Szpor S. — Electrodinamic considerations of lightning problems — Tow. Nauk. Warsz. 1952, Classe VI, Trav. techniques, t. II.
16. Szpor S. — Ochrona odgromowa, PWT Warszawa 1953, t. I, rozdział V, 22.

С. ШПОР

ПОПОЛНЕНИЕ РЕЛАКСАЦИОННОЙ ТЕОРИИ РАЗВИТИЯ МОЛНИИ- междуступенчатый интервал времени.

Резюме

Указываются недостатки и неясности формулировки релаксационной теории с 1942г. относительно развития ступенчатого лидера, результирующего напряжения U_R вдоль пути разряда, основных электродинамических зависимостей и относительно причин

возникновения нового стримера после перерыва. Затем оговариваются новейшие опытные результаты, устраняющие некоторые неясности. Одновременно припоминается усовершенствованная электродинамическая формулировка с 1952 г. На конец, предлагается дальнейшее пополнение релаксационной теории: время между двумя последующими ступенями разряда обосновывается временем нужным для нагрева воздуха до выступления термоионизации. Новый стример начинается после значительного ослабления напряжения результирующего поля K_R вдоль предидущего стримера действием термоионизации.

Приводятся математические рассуждения, связанные с временем необходимым для нагрева пути разряда до выступления термоионизации. Используются две электродинамические зависимости

$$K_A \approx \frac{2(U_0 + U_S - U_R)}{r \left(\ln \frac{a}{r} - 1 \right)}, \quad (2)$$

$$i_W \approx \frac{1}{4 \cdot 9 \cdot 10^{11}} \frac{(U_0 + U_S - U_R) v_W}{\ln \frac{a}{r} - 1}, \quad (4)$$

причем

K_A — напряжение результирующего поля вблизи фронта разряда,

i_W — средняя величина тока, между максимумами и местными минимумами — отвечающими стримерам и перерывам,

a — длина развивающегося разряда,

r — радиус разряда, в зависимости (2) радиус головки стримера,

v_W — средняя скорость развития разряда,

U_0 — напряжение первоначального поля вдоль пути разряда,

U_S — Э. Д. С. — самоиндукции,

U_R — падение результирующего напряжения вдоль пути разряда, единицы — вольт, в/см, ампер, см, см/сек.

Максимальную плотность тока определяется из уравнения

$$j = \frac{i_W}{\pi r^2} \eta, \quad (6)$$

в котором η представляет коэффициент неравномерности. Большие значения этого коэффициента получаются благодаря малой плотности размещения составляющих электронных лавин и выступающего затем уплотнения тока. Напряжение результирующего поля K_R вдоль разряда определяется дробью κ от величины K_A .

Дается уравнение скорости роста температуры Θ наиболее нагретых токовых трубок

$$\frac{d\Theta}{dt} \approx \frac{1}{16 \cdot 9 \cdot 10^{11} \cdot \pi} \frac{\ln \frac{a}{r} - 1}{C} \frac{K_A^3 v_W}{U_0 + U_S - U_R} \eta \kappa, \quad (10)$$

причем C удельная теплота воздуха, между значениями C_v и C_p , вт.-сек/см³.°С. Принимая в приближении, что средние величины η , κ , K_A , а также $(U_0 + U_S - U_R)$ остаются постоянными, путем интегрирования получается зависимость на время (сек)

$$t \approx 16 \cdot 9 \cdot 10^{11} \cdot \pi \frac{1}{\ln \frac{a}{r} - 1} \frac{U_0 + U_S - U_R}{K_A^3 v_W} \frac{1}{\eta \kappa} \Delta \Theta \quad (11)$$

для получения приращения температуры $\Delta\theta$. Принимая

$$C \approx 10^{-3} \text{ вт-сек/см}^3 \cdot ^\circ\text{C},$$

$$\ln \frac{a}{r} - 1 \approx 5,$$

$$K_A \approx 30000 \text{ в/см},$$

$$\frac{U_0 + U_S - U_R}{v_W} \approx 0,1 \div 10 \text{ в-сек/см},$$

$$\Delta\theta \approx 5000 ^\circ\text{C},$$

$$\kappa \approx 0,1 \quad (\text{для стримера}),$$

$$t \approx 50 \text{ мсек} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ сек} \quad (\text{для промежутка времени между двумя стримерами}),$$

получается соответствующую величину коэффициента неравномерности распределения тока

$$\eta \approx (0,3 \div 30) \cdot 10^5 \quad (14)$$

Полученный результат представляется довольно вероятным, хотя нет непосредственного опытного подтверждения.

Дается пояснение разниц между ступенчатым и непрерывным лидером.

S. SZPOR

CONTRIBUTION TO THE RELAXATION THEORY OF THE LIGHTNING PROPAGATION

interval of time between two steps

Summary

Some lacks and doubts arising in connection with the 1942 formulation of the relaxation theory are pointed out, namely as to the relative importance of the resultant voltage U_R along the discharge path, as to the fundamental electrodynamic equations and to the causes of the streamer initiation after a pause. Recent experimental results are reviewed, which eliminate some of the lacks and doubts, and the improved electrodynamic formulae of the 1952 paper are mentioned. Then a further supplement to the relaxation theory is proposed, namely the time of pause between two successive streamer steps is explained to be the time necessary for the initiation of thermal ionization and the start of a new streamer step is attributed to a considerable decrease of the resultant-field intensity K_R along the preceding step due to thermal ionization.

A mathematical analysis is undertaken pertaining to the time necessary for the heating of the discharge path till thermal ionization. Two of the electrodynamic formulae are utilized

$$K_A \approx \frac{2(U_0 + U_S - U_R)}{r \left(\ln \frac{a}{r} - 1 \right)} \quad (2)$$

$$i_W \approx \frac{1}{4 \cdot 9 \cdot 10^{11}} \frac{(U_0 + U_S - U_R) v_W}{\ln \frac{a}{r} - 1} \quad (4)$$

where

K_A — resultant field intensity ahead of the discharge tip,

i_W — average current value, between the peaks and local minimums corresponding to the streamer steps and to the pauses,

a — length of the progressive — discharge path,

r — radius of the discharge, in Eq. (2) radius of the tip,

v_W — average velocity of the discharge propagation,

U_0 — primary — field voltage along the discharge path,

U_S — electromotive force of self induction,

U_R — the resultant voltage drop,

units — volt, V/cm, ampere, cm, cm/s.

The maximum current density is determined by the formula

$$j = \frac{i_W}{\pi r^2} \eta, \quad (6)$$

where η is a non-uniformity factor whose large values are due to a scarce distribution of the component electron avalanches and to a later concentration of the current. The resultant field intensity K_R along the discharge path is expressed as a fraction α of K_A .

The rate of rise of the temperature Θ of the hottest discharge filaments is found to follow the equation

$$\frac{d\Theta}{dt} \approx \frac{1}{16 \cdot 9 \cdot 10^{11} \cdot \pi} \frac{\ln \frac{a}{r} - 1}{C} \frac{K_A^3 v_W}{U_0 + U_S - U_R} \eta \alpha, \quad (10)$$

where C is a specific heat of air, somewhere between C_v and C_p , in $\text{Ws/cm}^3 \cdot ^\circ\text{C}$. A simplified treatment of average values as constant values of η , α , K_A and $(U_0 + U_S - U_R)$ leads after integration to formula

$$t \approx 16 \cdot 9 \cdot 10^{11} \cdot \pi \frac{1}{\ln \frac{a}{r} - 1} \frac{U_0 + U_S - U_R}{K_A^3 v_W} \frac{1}{\eta \alpha} \Delta \Theta \quad (11)$$

for the time (in seconds) necessary to attain a temperature rise $\Delta \Theta$. Putting

$$C \approx 10^{-3} \text{ Ws/cm}^3 \cdot ^\circ\text{C},$$

$$\ln \frac{a}{r} - 1 \approx 5,$$

$$K_A \approx 30000 \text{ V/cm},$$

$$\frac{U_0 + U_S - U_R}{v_W} \approx 0,1 \div 10 \text{ Vs/cm},$$

$$v_W$$

$$\Delta \Theta \approx 5000^\circ\text{C},$$

$$\alpha \approx 0,1 \text{ (for the streamer stage),}$$

$$t \approx 50 \mu\text{s} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ s (for a pause between two streamer steps),}$$

one finds the corresponding value of the non-uniformity factor

$$\eta \approx (0,3 \div 30) \cdot 10^5 \quad (14)$$

This result can be admitted as a probable one, but no certitude may be claimed as to the agreement with the phenomena.

An explanation of the difference between the stepped leaders and the continuous leaders is added.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI POLSKIEJ AKADEMII NAUK ZAKŁAD ELEKTRONIKI

Komunikaty z prac

referowanych na zebraniu sprawozdawczym IPPT w dniu 17. 2. 1955

621.315.592.4.

O PEWNYCH WŁAŚCIWOŚCIACH ELEKTRYCZNYCH SPIEKÓW TLENKÓW MANGANU, NIKLU I MIEDZI

B. SCHMIDT, K. MIKKE, Z. SOŁTYS

Badano oporność właściwą i współczynnik temperaturowy oporności spieków tlenków niklu, manganu i miedzi w zależności od składu. Stwierdzono istnienie minimum oporności dla mieszanki tlenków o składzie spinelu $\text{NiO} \cdot \text{Mn}_2\text{O}_3$. Dodatek tlenku miedzi pozwala na regulowanie oporności właściwej w granicach 10^2 do $10^5 \Omega \text{cm}$ przy zachowaniu współczynnika temperaturowego oporności α_{25} w granicach od 3 do $5\%/^\circ\text{C}$.

О НЕКОТОРЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ СПЕКАЕМЫХ ОКИСЛОВ МАРГАНЦА, НИКЕЛЯ И МЕДИ

Резюме

Исследовано удельное сопротивление и температурный коэффициент сопротивления спекаемых окислов никеля, марганца и меди в зависимости от состава. Констатировано существование минимума сопротивления для смеси окислов с составом шпинеля $\text{NiO} \cdot \text{Mn}_2\text{O}_3$. Прибавка меди позволяет регулировать удельное сопротивление в пределах $10^2 : 10^5 \Omega \text{cm}$ при сохранении температурного коэффициента сопротивления α_{25} в пределах от 3 до $5\%/^\circ\text{C}$.

CERTAIN ELECTRICAL PROPERTIES OF SINTERED MANGANESE-NICKEL AND COPPER OXIDES

Summary

The resistivity and the temperature coefficient of resistivity of sintered manganese-nickel and copper oxides were investigated in dependence of their composition. The existence of a minimum of resistance was observed for a mixture of oxides with a spinel-composition — $\text{NiO} \cdot \text{Mn}_2\text{O}_3$. The addition of copper oxide permits to controll the resistivity within the limits of $10^2 \div 10^5 \Omega \text{cm}$ while keeping the temperature coefficient of resistivity α_{25} within the limits of 3 to $5\%/^\circ\text{C}$.

1. Wstęp. Jedną z charakterystycznych cech półprzewodników jest współczynnik temperaturowy oporności. Zależność oporności od temperatury ujmuje w pierwszym przybliżeniu wzór

$$R = R_0 e^{B \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)}$$

gdzie R i R_0 są opornościami przy temperaturach T i T_0 , B — stałą materiałową

charakterystyczną dla danego półprzewodnika. Współczynnik temperaturowy oporności

$$\alpha = \frac{1}{R} \frac{dR}{dT} = -\frac{B}{T^2}$$

jest dla danej temperatury proporcjonalny do stałej B .

W półprzewodnikowych przyrządach oporowych wykorzystuje się dużą wartość stałej B oraz współczynnika α . Ze wzrostem stałej B rośnie jednak na ogół oporność właściwa, a ta — ze względów praktycznych — nie powinna przekraczać $10^6 \Omega \text{cm}$. Z tego względu do budowy oporowych przyrządów półprzewodnikowych nie stosuje się materiałów mających $B > 6000^\circ$. Z punktu widzenia przydatności do budowy tych przyrządów najbardziej interesujące są materiały, które zachowując dużą wartość stałej B mają jednocześnie możliwie małą oporność właściwą. Właściwości materiałów muszą być przy tym powtarzalne i niezmiennie w czasie.

2. Cel pracy. Celem pracy jest poszukiwanie i badanie takich właśnie materiałów odpowiednich do wykonania elementów oporowych — termistorów.

Według danych z literatury najbardziej odpowiadają tym warunkom mieszaniny tlenków o przewodnictwie czysto elektro-nowym, bądź wyłącznie typu p , bądź dla temperatur wyższych typu p i n . Najczęściej stosowane są tlenki manganu, niklu i kobaltu z pewnymi domieszkami stabilizującymi oraz modulującymi ich właściwości. Bliższych danych dotyczących składu ilościowego stosowanych materiałów, rodzaju domieszek i technologii w literaturze brak. Przeprowadzono zatem systematyczne badanie wpływu składu mieszanin na właściwości spieków, podając przede wszystkim badaniu mieszaniny tlenków manganu i niklu.

3. Metoda. Jako materiały wyjściowe przyjęto NiO otrzymany przez prażenie węglanu niklowego oraz Mn_2O_3 otrzymany przez prażenie octanu manganowego. Tlenki starannie rozdrobnione mie-

szano w różnych stosunkach wagowych z dodatkiem kaolinu jako środka wiążącego. Rozdrabnianie i mieszanie przeprowadzano w młynie kulowym na mokro. Z otrzymanych mieszanek odważano porcje po 0,5 g i prasowano na prasie hydraulicznej kształtki o średnicy 10 mm pod ciśnieniem 1500 Kg/cm^2 . Tabletki te poddawano w piecu rurowym obróbkę termiczną w temperaturze końcowej 1300°C , srebrzono powierzchnie czołowe płytek przez redukcję srebra z pasty srebrowej i lutowano do płytek przewody. Tak przygotowane termistory umieszczano w termostacie, gdzie zdejmowano charakterystykę $R=f(T)$. Opór termistora mierzono za pomocą zestawionego mostka, w którym wskaźnikiem był galvanometr o czułości 10^{-8} A/dz . Temperaturę w czasie pomiaru utrzymywano stałą w granicach $0,1^\circ\text{C}$. Stosowano zakresy temperatur 18 do 50°C . W tych granicach przebieg funkcji $\lg R=f\left(\frac{1}{T}\right)$ był prostoliniowy.

Z nachylenia prostej obliczano stałą materiałową B i współczynnik temperaturowy oporności dla 25°C :

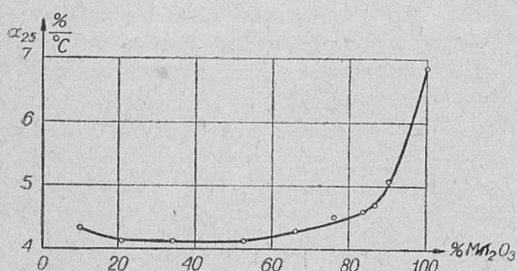
$$\alpha_{25} = -\frac{B}{298^2} \cdot 100\%.$$

Oporność właściwą w Ωcm określano z oporu płytki, mierzonego w temperaturze 25°C , i jej rozmiarów:

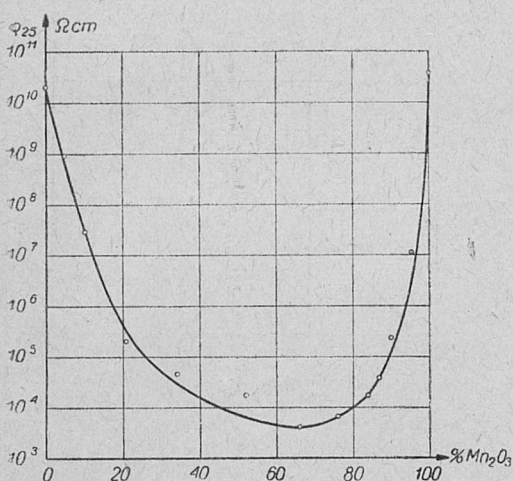
$$\rho_{25} = R_{25} \frac{s}{l}$$

4. Wyniki. 4.1. Tlenki niklu i manganu. Przy zachowaniu tych samych warunków prasowania i spiekania wykonano i przebadano spieki z mieszanek tlenku niklu i manganu o zawartości Mn_2O_3 od 0 do 100% . Zależność współczynnika temperaturowego oporności α_{25} od zawartości Mn_2O_3 w mieszance przedstawiono na rys. 1. Jak widać dla zawartości Mn_2O_3 od 20 do 60% współczynnik α_{25} jest prawie stały i wynosi około $-4,2\%/^\circ\text{C}$. Przy zawartości Mn_2O_3 przekraczającej 70% współczynnik α_{25} szybko wzrasta osiągając $-6,8\%/^\circ\text{C}$ dla 100% .

Mn_2O_3 . Spieki o dużej zawartości NiO (ponad 90%) dają wartości współczynnika α_{25} zmienne zależnie od próbek.



Rys. 1

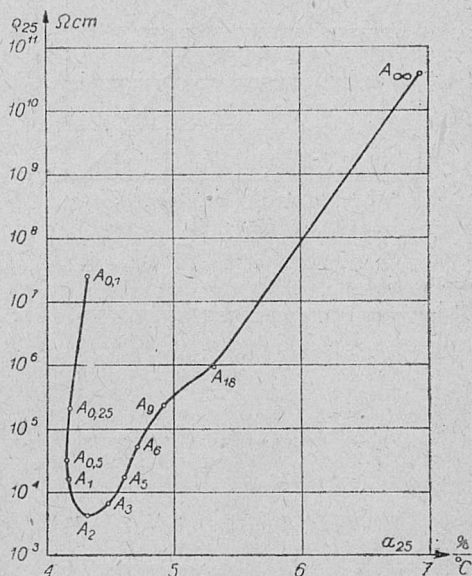


Rys. 2

Na rys. 2 przedstawiono zależność oporności właściwej spieku od zawartości Mn_2O_3 w mieszaninie. Oporność osiąga minimum wynoszące $4000 \Omega\text{cm}$ dla 67% Mn_2O_3 (materiał A_2). Skład ten odpowiada stosunkowi molowemu $\text{NiO} : \text{Mn}_2\text{O}_3 = 1 : 1$. Jak wynika z badań strukturalnych przeprowadzonych przez Thien-Chi i Suchet [3] przy spiekaniu tlenków niklu i manganu powstaje spinel o wzorze $\text{NiO} \cdot \text{Mn}_2\text{O}_3$. Materiał A_2 zawiera właśnie ilości NiO i Mn_2O_3 potrzebne do powstania spinelu. Z badań Verwey'a [4] nad materiałami o strukturze spineli, w szcze-

gólności Fe_3O_4 , wynika, iż odznaczają się one stosunkowo dużym przewodnictwem związanym z istnieniem równoważnych energetycznie położenia jonu dwu i trójwartościowego, na przykład Fe^{++} i Fe^{+++} (tak zwanych miejsc oktaedrycznych i tetraedrycznych). Elektron może przeskakiwać między tymi jonami bez zmiany energii, stając się jakby swobodnym nośnikiem prądu. Podobne stosunki mogą zaistnieć w materiałach typu spineli zawierających inny jon o zmiennej wartościowości (na przykład jon Mn). W ten sposób duże przewodnictwo spieku o składzie odpowiadającym strukturze spinelu byłoby usprawiedliwione.

Przegląd właściwości spieków tlenków niklu i manganu przedstawiono na rys. 3.

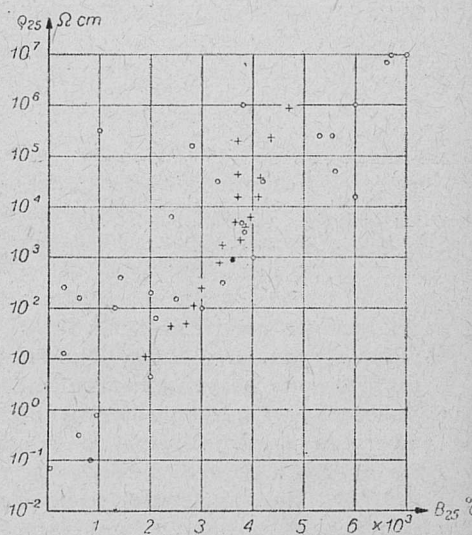
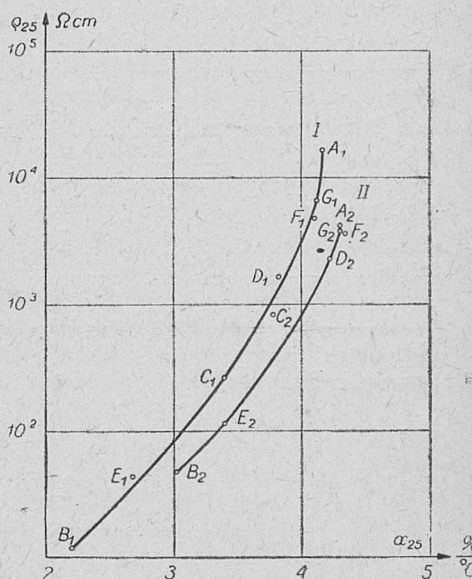
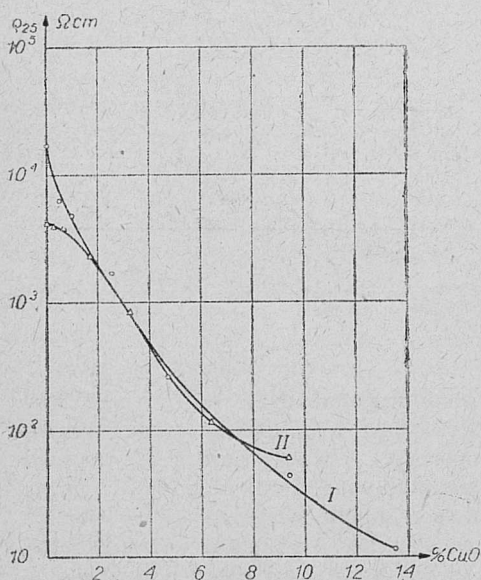
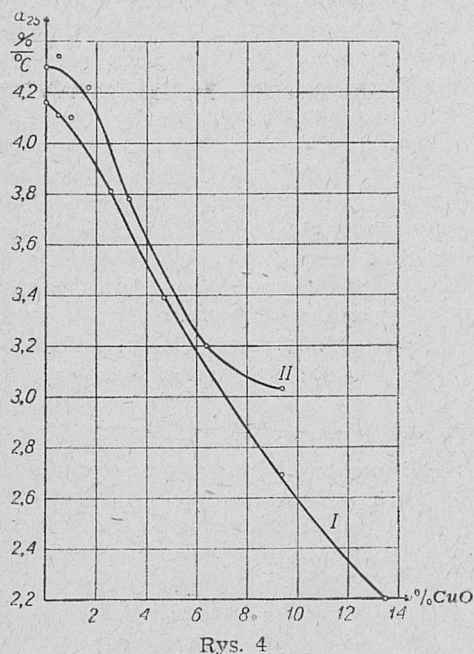


Rys. 3

gdzie współrzędnymi są oporność właściwa oraz współczynnik temperaturowy oporności, a każdy materiał oznaczony jest punktem. Punkty układają się wzdłuż dwóch gałęzi łączących się w punkcie A_2 . Cenniejsze z punktu widzenia zastosowań są materiały gałęzi prawej o składzie powyżej 67% Mn_2O_3 .

4.2. Tlenki niklu, manganu i miedzi.
Jak wynika z powyższych danych, mieszaniny tlenków niklu i manganu nie po-

zwalają na uzyskanie materiału o oporności właściwej poniżej 4000 Ωcm . Dla konstrukcji pewnych typów termistorów potrzebny jest materiał o oporności mniejszej. Dla uzyskania takich materiałów zastosowano domieszkę tlenku miedzi CuO otrzymanego przez rozkład zasado-



wego węglanu miedziawego. Zbadano wpływ domieszki CuO na mieszanki o zawartości 50% Mn_2O_3 (rodzina A_1) i 67% Mn_2O_3 (rodzina A_2).

Na rys. 4 i 5 zilustrowano uzyskane wyniki. W obu przypadkach dodatek CuO znacznie obniża zarówno oporność właściwą materiału (rys. 4) jak i współczynnik temperaturowy oporności (rys. 5). Przegląd spieków z domieszką CuO przedstawia rys. 6. Przy zachowaniu $\alpha_{25} \geq 3\%$ można zejść z opornością właściwą do 40 Ωcm (materiał B_2 z rodziny A_2). Materiały z rodziny A_1 wykazują znacznie mniejszą wartość współczynnika temperaturowego oporności dla tej samej oporności właściwej w porównaniu z materiałami rodziny A_2 .

Na rys. 7 podano porównanie materiałów opracowanych w Zakładzie Elektrotechniki (krzyżyki) z materiałami cytowanymi w literaturze (punkty) [1].

Otrzymane materiały pokrywają zakres oporności właściwych od 10^2 do $10^5 \Omega\text{cm}$ przy współczynniku temperaturowym oporności zawartym w granicach $-3\%/^\circ\text{C}$ do $-5\%/^\circ\text{C}$.

4.3. *Przykład zastosowania.* Dla ilustracji zastosowania przebadanych materiałów zebrano w tablicy dane techniczne wykonanych z tych materiałów termistorów płytkowych o rozmiarach $\phi 9 \times 1,5 \text{ mm}$ i obciążalności 0,9 W.

Tablica 1

Dane techniczne termistorów płytkowych

Oporność przy 25°C k Ω	$-\alpha_{25}$ %/°C	Granice zmienności oporność w ramach dopuszczalnego obciążenia k Ω
10	4,8	10 do 0,3
1,5	4,4	1,5 „ 0,06
0,5	4,2	0,5 „ 0,025
0,2	3,8	0,2 „ 0,015
0,1	3,2	0,1 „ 0,01

Literatura.

1. Becker, Green, Pearson. Properties and uses of thermistors. Bell System Techn. J. 1946, s. 170.
2. Henisch. Semi conducting materials. 1951.
3. Thien - Chi, Suchet. Conductibilité des semiconducteurs électroniques et thermistances. L'onde électrique 1951, t. 31, nr 297, s. 473.
4. Verwey, Haayman, Romeyn. Semiconductors with large negative temperature coefficient of resistance. Phil. Tech. Rev. 1947/48, s. 239—248.
5. Volger. Electrical properties of ceramics. Research 1954, s. 196.

Str.	Wiersz		Jest	Powinno być
	od dołu	od góry		
408	wzór 9a	—	$d_2 = B \cdot \varepsilon d_{sr}$	$d_2 = \beta \cdot \varepsilon d_{sr}$
425	wzór 1	—	$\int^{\infty}$	$\int_0^{\infty}$
426	—	16	proporcjonalna	proporcjonalna do
429	—	4	$p_1 = \frac{p}{K}$	$p_1 = \frac{p}{k}$
430	wzór 29	—	$+4a)$,	$+4a)]$,
433	wzór 32	—	$I = \frac{\pi}{64E} \left\{ [(a-1)^2 e^{2kT} (a+1)^2 \right.$	$I = \frac{\pi}{64E} \left\{ [(a-1)^2 e^{2kT} - (a+1)^2 \right.$
439	—	14	wyznaczamy	wyznaczamy μ
439	8	—	i zakłóceniami $z(t)$	i zakłóceniami $z(t)=0$
469	wzór 5.28	—	$\begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y_{n0} \\ -y_{n1} \\ -y_{n2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_{n0} \\ -y_{n1} \\ -y_{n2} \end{bmatrix}$
484	—	11	wskazuje	wskazane
488	—	10	проводимости	сопротивления
498	Tablica 1	—	Własności magnatyczne	Własności magnetyczne



WYTYCZNE DLA AUTORÓW

Komitet Redakcyjny prosi autorów o ułatwienie prac redakcyjnych związanych z przygotowaniem do druku nadesłanych artykułów przez przestrzeganie podanych wytycznych przy przygotowaniu maszynopisu:

1. Prace powinny być napisane pismem maszynowym, na pojedynczych arkuszach formatu A4, jednostronnie, z interlinią (co drugi wiersz), z marginesem 3 cm z lewej strony. Stronice numerowane. Artykuły należy nadsyłać w dwóch egzemplarzach.
2. Wzory i oznaczenia należy wpisywać ręcznie, czytelnie, używając jedynie liter łacińskich i greckich. Wskaźniki niżej liter i wykładniki potęg pisać należy szczególnie dokładnie i wyraźnie.
3. Każda praca powinna być zaopatrzona w krótkie streszczenie (analizę) w języku polskim do 25 wierszy maszynopisu oraz obszerniejsze streszczenia (do 20% objętości artykułu) w języku rosyjskim oraz angielskim, francuskim lub niemieckim. W razie niemożności nadesłania streszczenia w języku obcym autor dostarcza odpowiednie streszczenie w języku polskim w trzech egz. z jednoczesnym wpisaniem, o ile możliwości, terminologii w języku rosyjskim oraz w języku obcym.
4. Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonywać na oddzielnych arkuszach z podaniem kolejnych numerów rysunków. W tekście i na marginesie, obok właściwego tekstu, należy podać jedynie odnośny numer rysunku. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.
5. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót: rys.) i nie używać określeń jak figura, szkic, fotografia. U samego dołu rysunku (a przy fotografiach — na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, napis pod rysunkiem, tytuł pracy i nazwisko autora.
6. Wszystkie tablice (unikać zbyt dużych) podobnie jak rysunki należy wykonywać na oddzielnych arkuszach i numerować kolejno liczbami arabskimi. U góry każdej tablicy podać tytuł (napis) objaśniający.
7. Po zakończeniu artykułu należy podać wykaz literatury, wymieniając w następującej kolejności: nazwisko autora i pierwsze litery imion, pełny tytuł dzieła lub artykułu, tytuł czasopisma, tom, numer zeszytu, rok i miejsce wydania oraz ewentualnie numer strony. Pozycje powinny być ponumerowane w kolejności alfabetycznej autorów; w tekście — powołania na numer pozycji w nawiasie kwadratowym, np. [3].
8. Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egzemplarzy odbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze autor może zamówić w redakcji na własny koszt przy przesyłaniu korekty swej pracy.

U w a g a: Autora obowiązuje korekta autorska, którą należy zwracać w ciągu 3 dni pod adresem: Redakcja „Archiwum Elektrotechniki“, Warszawa, Koszykowa 75, Politechnika, Gmach Elektrotechniki, Zakład Elektroniki PAN. tel. 8.32.04.

Cena zł 15,—