Handbuch
der
Statik fester Körper.

Mit
vorzüglicher Rücksicht
auf
ihre Anwendung in der Architektur.

Aufgesetzt
von
J. A. Eytelwein,
Johann Albert
Königl. Preuß. geheimen Oberbaurathe; Director der Königl. Bau-Akademie; der Akademie der Wissenschaften und der Akademie der Künste und deren Senats zu Berlin, der batavischen Gesellschaft der Experimental-Philosophie zu Rotterdam, der Gesellschaft der Wissenschaften und Künste zu Frankfurth an der Oder, der Ostpreuß. physikalisch-ökonomischen Gesellschaft, der ökonomischen Societät zu Leipzig, und der märkischen ökonomischen Gesellschaft zu Potsdam Mitgliede.

Erster Band.

Mit zehn Kupfertafeln.

Berlin, 1808.
In der Realschulbuchhandlung.

Vorrede.

Unter denjenigen Theilen der angewandten Mathematik, welche für den Baumeister als Hülfswissenschaften unentbehrlich sind, behauptet die Statik der festen Körper den ersten Rang. Soll diese Wissenschaft mit vorzüglicher Rücksicht auf Anwendung im bürgerlichen Leben vorgetragen werden, so ist ihr Umfang außerordentlich groß, und es wird sehr schwierig, bestimmte Grenzen zu ziehen, wenn ein Lehrbuch außer den allgemeinen Sätzen auch nur die nächsten Anwendungen auf besondere Fälle enthalten soll. Da man bei der Bearbeitung dieses Handbuchs nur vorzüglich Anwendungen auf Architektur zur Absicht hatte, so wird sich dadurch entschuldigen lassen, daß einige Materien mehr, andere weniger Ausdehnung erhielten, so wie es dem Bedürfniß angemessen zu seyn schien. Der mehrern Einfachheit wegen ist hier die ganze Statik auf den Lehrsatz vom Parallelogramme der Kräfte gegründet, dessen Beweis ich im Jahre 1804 ohne Beihülfe des Hebels bekannt machte. Hieraus ist, so weit es hier erforderlich war, das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit gefolgert worden, weil sich dies vorzüglich durch seine Allgemeinheit und Einfachheit empfiehlt, um in schwierigen Fällen dem Praktiker, welcher nicht sogleich mit allen Hülfsmitteln der Statik vertraut ist, zur Führerinn zu dienen, oder solches nach vollendeter Auflösung einer schwierigen Aufgabe als Prüfstein zu gebrauchen.

Die Untersuchung über die Reibung der Körper wird gewöhnlich in den Lehrbüchern in einer besondern Abtheilung, mit Anwendung auf einige Fälle, vorgetragen. Hier schien es zweckmäßiger, um die einzelnen Lehren nicht zu zerstreuen, und ihre Anwendung auf vorkommende Fälle zu erleichtern, gleich in jedem Kapitel, wie z. B. bei der schiefen Ebene, der Schraube, dem Räderwerke u. s. w., die Lehre von der Reibung mit den übrigen Lehren, so weit es erforderlich war, zu verbinden. Besonders ist man bemüht gewesen, die Reibungen beim Räderwerke, bei den Zähnen, Kämmen und Daumen möglichst genau, und so weit solches zuläßig war, durch einfache Ausdrücke anzugeben. Ohne bei demjenigen zu verweilen, was etwa diese Schrift neues enthält, und welches dem Kenner wahrscheinlich nicht entgehen wird, darf ich die schwierige Untersuchung über den Druck der Körper auf ihre Unterlagen, wenn deren mehr als zwei in einer graden Linie liegen, nicht unberührt lassen. Die Eulerschen Bemühungen, dieses Problem aufzulösen, sind bekannt, aber eben so leicht überzeugt man sich auch, daß solche für die Ausübung ohne Nutzen sind, weil sie das widersprechende Resultat geben, daß die von der Last entferntere Stütze einen stärkern Druck leidet, als die der Last näher gelegene. Bei der von mir gegebenen Auflösung dieses Problems, welches für den Architekten von so großer Wichtigkeit ist, mußte man wünschen, die Resultate eben so wie beim Parallelogramm der Kräfte, ohne Hülfe der höhern Analysis, zu erhalten. Dies hat aber bis jetzt nicht gelingen wollen. Es wäre zu weitläuftig gewesen, diejenigen Versuche, welche die Uebereinstimmung dieses Gesetzes mit den Erfahrungen beweisen, umständlich hier anzuführen, weshalb solches in einer besondern Abhandlung für die Denkschriften der hiesigen Königl. Akademie der Wissenschaften geschehen ist. Nur die besondere Ansicht, daß diese Schrift vorzüglich für angehende Architekten bestimmt ist, wird es rechtfertigen lassen, daß die Lehren von den Gewölben und von der Festigkeit der Materialien ungewöhnlich ausgedehnt sind. Auch liegt hierin der Grund, weshalb die von mir angestellten mühsamen und weitläuftigen Versuche über die Biegsamkeit und Festigkeit mehrerer Holzarten hier mitgetheilt worden sind, ob sie gleich nach meiner Meinung mehr der Physik als der Statik angehören.

Es war nicht möglich, die sämmtlichen Lehren der Statik, so weit sie in der Architektur erfordert werden, ohne höhere Analysis vorzutragen, ob man gleich bemüht war, da, wo es ohne zu große Weitläuftigkeit geschehen konnte, diese Rechnungsart zu vermeiden, welches besonders vom ersten Abschnitte der Lehre von den Gewölben gilt. Damit aber dem ersten Anfänger und denjenigen, welche mit der höhern Analysis noch nicht vertraut sind, das Studium erleichtert werde, so sind mehrere §. §., und selbst einige Abschnitte, mit einem Sternchen * bezeichnet worden, welches anzeigt, daß diese Abtheilungen noch ausgesetzt bleiben können, bis nach fortgesetztem Studiren die

Statik in dem ganzen hier gegebenen Umfange erlernt werden kann. Eben so war es nothwendig, zur Vermeidung einer unnützen Ausdehnung und zur Erleichterung für den Anfänger, bei vorkommenden analytischen Ausdrücken, eine Quelle anzuführen, wo man sich von der Richtigkeit der Formeln überzeugen könne. Da nun die mathematische Analysis von Pasquich größtentheils alle diejenigen Integralformeln entwickelt enthält, welche hier vorkommen, so hat man sich der Kürze wegen jedesmal auf diese Schrift bezogen. Nicht so konnte man bei der Lehre von denjenigen krummen Linien verfahren, deren Kenntniß hier als bekannt vorausgesetzt werden mußte, weil das Pasquichsche Lehrbuch nur auf die Kegelschnitte eingeschränkt ist, und weil man nicht leicht die hier erforderlichen Lehren in dem nöthigen Zusammenhange findet. Es ist deshalb im dritten Bande als Anhang die Theorie transcendenter krummer Linien, welche bei statischen Untersuchungen vorkommen, beigefügt worden.

Sämmtliche Maaße, bei welchen nichts besonders erinnert worden, beziehen sich auf das bei uns eingeführte brandenburgische Maaß, welches mit dem rheinländischen überein stimmt, und eben so sämmtliche Gewichte auf das berlinische Handelsgewicht.

(P. A. 1. B.) bedeutet den ersten Band, und (P. A.) den zweiten Band von Pasquich's mathematischer Analysis (Leipzig 1791).

Berlin, im Januar 1808.

J. A. E.

Inhalt

des

ersten Bandes.

II. Kapitel. Vom Gleichgewichte mehrerer Kräfte, welche nicht auf einen einzigen Punkt wirken, oder vom Hebel und der Drehungsaxe.

III. Kapitel. Vom eigenthümlichen Gewichte der Körper.

IV. Kapitel. Vom Schwerpunkte.

(I.) Vom Schwerpunkte der Linien.

(II.) Vom Schwerpunkte ebener Flächen.

VIII. Kapitel. Von der schiefen Ebene, dem Keile und der Schraube.

(I.) Von der schiefen Ebene.

(II.) Vom Keile.

Statik

Statik

der

festen Körper.

Erster Band.

Einleitung.

§. 1.

Die Ursache, durch welche ein Körper bewegt wird oder ein Bestreben zur Bewegung erhält, heißt Kraft (Vis, *Force*). Wirkt eine Kraft beständig auf einen Körper, so kann die Bewegung des Körpers durch einen Widerstand (Resistentia, *Résistance*) aufgehoben werden, nicht die Kraft. Das was alsdann der Widerstand leidet, heißt Druck (Pressio, *Pression*), und die grade Linie, nach welcher die Kraft den Körper bewegen würde, die Richtung (Directio, *Direction*) des Drucks.

Sind mehrere Kräfte so an einem Körper angebracht, daß sich ihre Wirkungen aufheben und keine Bewegung des Körpers erfolgt, so sagt man: die Kräfte sind im Gleichgewicht (Aequilibrium, *Equilibre*). Die Wissenschaft, welche die Gesetze angiebt, nach welchen das Gleichgewicht unter mehrern an einem Körper angebrachten Kräften erfolgt, heißt die Statik (Statica, *Statique*), und wenn solche auf feste Körper eingeschränkt wird, die Geostatik oder Statik der festen Körper.

Unter festen Körpern werden hier solche verstanden, deren Theile so stark unter einander zusammen hängen.

daß sie durch die angebrachten Kräfte nicht aus ihrer Verbindung oder Lage gebracht werden können.

Dasjenige was den Raum (Spatium, *espace*) eines Körpers ausfüllt, nennt man seine Materie, und die Menge der Materie, welche in dem Körper enthalten ist, seine Masse.

So ist bei einer goldenen Kugel, Gold die Materie, die Kugel der Körper, und die Menge des Goldes die Masse.

§. 2.

Die Körper, mit welchen wir Versuche anstellen können, verursachen gegen ihre Unterlagen einen Druck, und wenn diese Unterlage weggenommen wird, so fallen sie. Die Ursache dieses Drucks und der Bewegung ist eine Kraft, welche die Schwere (Gravitas, *Gravité*) genannt wird, so wie die Größe des Drucks, welchen ein Körper, vermöge der Schwere gegen seine Unterlage ausübt, sein Gewicht (Pondus, *Poids*) heißt.

Schwere und Gewicht sind demnach wie Ursache und Wirkung verschieden, daher in den Wissenschaften die Verwechselung dieser Wörter zu vermeiden ist, obgleich solche im gemeinen Leben sehr häufig vorkommt. Nach dem Sprachgebrauche sagt man von einem Körper, welcher mehr Gewicht als ein anderer hat, er sey schwerer; dieser uneigentliche Ausdruck, welcher ohne Einführung eines neuen Worts nicht vermieden werden kann, muß daher nicht unrichtig verstanden werden. Anstatt schwerer könnte man besser gewichtiger sagen.

Wäre der Druck, welchen ein Gewicht gegen seine Unterlage äußert, eben so groß als die Wirkung irgend einer Kraft (einer Stahlfeder u. dgl.) gegen eben diese

Unterlage, so ist es in Absicht der Wirkung auf diese Unterlage einerlei, ob das Gewicht oder die Kraft angebracht wird. In dieser Rücksicht kann man auch ein Gewicht als eine Kraft ansehen, und in Absicht dieser Wirkung andern Kräften gleich setzen.

Die Richtung, nach welcher ein Körper frei fällt, oder die Linie, welche ein sehr dünner Faden angiebt, an welchem ein Körper frei herabhängt, heißt eine vertikale, lothrechte oder bleirechte Linie. Eine Ebene durch diese Linie gelegt, heißt eine Vertikalebene, so wie eine auf der Vertikallinie senkrechte Linie, eine horizontale oder wagerechte Linie. Horizontalebenen sind also auf der Vertikallinie senkrecht.

Man pflegt auch jede Linie, welche mit einer andern nicht wagerechten einen rechten Winkel bildet, eine senkrechte oder lothrechte Linie zu nennen. Es würde aber zweckmäßiger seyn, sie Normallinie oder kürzer Normale zu heißen, um sie nicht mit den Vertikallinien zu verwechseln, welche nur allein auf einer Horizontalebene normal stehen.

§. 3.

Wirken mehrere Kräfte auf einen Körper nach parallelen Richtungen, so wird eine Ebene, welche auf einer dieser Richtungen senkrecht steht, auch auf allen übrigen senkrecht seyn, weil man sich eine jede Richtung nach Belieben verlängert vorstellen kann. Strebt nun jede Kraft für sich, diese Ebene nach einerlei Seite fort zu bewegen, so sagt man von den Kräften: daß sie an verschiedenen Punkten nach einerlei Richtung angebracht sind. Wären die Richtungen parallel, aber einige von diesen Kräften strebten die Ebene nach der entgegengesetzten Seite daß sie durch die angebrachten Kräfte nicht aus ihrer Verbindung oder Lage gebracht werden können.

Dasjenige was den Raum (Spatium, *espace*) eines Körpers ausfüllt, nennt man seine Materie, und die Menge der Materie, welche in dem Körper enthalten ist, seine Masse.

So ist bei einer goldenen Kugel, Gold die Materie, die Kugel der Körper, und die Menge des Goldes die Masse.

§. 2.

Die Körper, mit welchen wir Versuche anstellen können, verursachen gegen ihre Unterlagen einen Druck, und wenn diese Unterlage weggenommen wird, so fallen sie. Die Ursache dieses Drucks und der Bewegung ist eine Kraft, welche die Schwere (Gravitas, *Gravité*) genannt wird, so wie die Größe des Drucks, welchen ein Körper, vermöge der Schwere gegen seine Unterlage ausübt, sein Gewicht (Pondus, *Poids*) heißt.

Schwere und Gewicht sind demnach wie Ursache und Wirkung verschieden, daher in den Wissenschaften die Verwechselung dieser Wörter zu vermeiden ist, obgleich solche im gemeinen Leben sehr häufig vorkommt. Nach dem Sprachgebrauche sagt man von einem Körper, welcher mehr Gewicht als ein anderer hat, er sey schwerer; dieser uneigentliche Ausdruck, welcher ohne Einführung eines neuen Worts nicht vermieden werden kann, muß daher nicht unrichtig verstanden werden. Anstatt schwerer könnte man besser gewichtiger sagen.

Wäre der Druck, welchen ein Gewicht gegen seine Unterlage äußert, eben so groß als die Wirkung irgend einer Kraft (einer Stahlfeder u. dgl.) gegen eben diese

Unterlage, so ist es in Absicht der Wirkung auf diese Unterlage einerlei, ob das Gewicht oder die Kraft angebracht wird. In dieser Rücksicht kann man auch ein Gewicht als eine Kraft ansehen, und in Absicht dieser Wirkung andern Kräften gleich setzen.

Die Richtung, nach welcher ein Körper frei fällt, oder die Linie, welche ein sehr dünner Faden angiebt, an welchem ein Körper frei herabhängt, heißt eine **vertikale, lothrechte** oder **bleirechte Linie**. Eine Ebene durch diese Linie gelegt, heißt eine **Vertikalebene**, so wie eine auf der Vertikallinie senkrechte Linie, eine **horizontale** oder **wagerechte Linie**. Horizontalebenen sind also auf der Vertikallinie senkrecht.

Man pflegt auch jede Linie, welche mit einer andern nicht wagerechten einen rechten Winkel bildet, eine senkrechte oder lothrechte Linie zu nennen. Es würde aber zweckmäßiger seyn, sie Normallinie oder kürzer Normale zu heißen, um sie nicht mit den Vertikallinien zu verwechseln, welche nur allein auf einer Horizontalebene normal stehen.

§. 3.

Wirken mehrere Kräfte auf einen Körper nach parallelen Richtungen, so wird eine Ebene, welche auf einer dieser Richtungen senkrecht steht, auch auf allen übrigen senkrecht seyn, weil man sich eine jede Richtung nach Belieben verlängert vorstellen kann. Strebt nun jede Kraft für sich, diese Ebene nach einerlei Seite fort zu bewegen, so sagt man von den Kräften: daß sie an verschiedenen Punkten nach einerlei Richtung angebracht sind. Wären die Richtungen parallel, aber einige von diesen Kräften strebten die Ebene nach der entgegengesetzten Seite fort zu bewegen, so sagt man, diese Kräfte wirken mit den übrigen nach einerlei, aber entgegengesetzten Richtungen. Fallen die entgegengesetzten Richtungen zweier Kräfte in einerlei grade Linien, so sind die Richtungen dieser Kräfte einander gerade entgegengesetzt.

Bei den folgenden Untersuchungen wird vorausgesetzt, daß die Masse eines Körpers unter allen Umständen einerlei Gewicht behalte, oder daß die Schwere eine unveränderliche Kraft sei. Eben so werden die Richtungen der Schwere oder die Vertikallinien als parallel mit einander angenommen.

Wenn gleich die Schwere nicht als eine unveränderliche Kraft angesehen werden kann, weil sie von den Polen nach dem Aequator und in größern Abständen vom Mittelpunkt der Erde abnimmt: so kann solche doch für die Abstände derjenigen Körper unter einander, welche bei den folgenden Untersuchungen in Betrachtung kommen, als unveränderlich angesehen werden. Um einigermaßen zu beurtheilen, wiefern die angenommene Voraussetzung statthaft ist, so folgt aus Gründen, welche hier nicht auseinander gesetzt werden können, daß derselbe Körper, welcher in Berlin seine Unterlage mit einem Gewichte von 100000 Pfund drückt, in Paris nur einen Druck von 99969, und unter dem Aequator nur von 99638 Pfund ausüben wird; wogegen dieser Körper unter den Polen einen Druck von etwa 100178 Pfund verursacht. Die Voraussetzung paralleler Vertikallinien in der Statik läßt sich eben so leicht rechtfertigen. Denn so fern sich zwei Vertikallinien im Mittelpunkte der Erde schnitten, so ist doch für die Abstände, unter welchen hier Körper betrachtet werden, der Durchschnittspunkt so weit entfernt, daß man diese Vertikalen ohne Bedenken als parallel annehmen kann.

Erstes Kapitel.

Grundlehren der Statik, oder vom Gleichgewichte mehrerer Kräfte, welche auf einen Punkt wirken.

§. 4.

Im Punkte A Figur 1. der graden, festen, unbiegsamen und gewichtlosen Linie AB, sey eine Kraft P nach der Richtung AB angebracht. Befindet sich nun am Ende B der Linie AB irgend ein Widerstand MN, welcher verhindert, daß sich diese Linie nicht fortbewegen kann, so wird der Punkt B so stark gegen den Widerstand in B drücken, als wenn die Kraft P unmittelbar in B nach derselben Richtung angebracht wäre. Wollte man annehmen, der Druck bei B sei kleiner als bei A, so müßte ein Theil der Kraft P vernichtet worden seyn, wozu kein Grund vorhanden ist. Eben so wenig läßt sich annehmen, daß der Druck bei B größer als bei A sei, weil es an einer Ursache zur Vergrößerung dieses Drucks fehlt. Es ist daher in Absicht auf den Druck bei B einerlei, in welchem Punkte der Linie AB die Kraft P nach der Richtung AB wirkt. Taf. I. Fig. 1.

Verlängert man die Richtung AB nach BC, und BC ist eine feste, gewichtlose Linie oder ein unausdehnbarer, gewichtloser Faden, welcher mit dem Punkt B unzertrennlich verbunden ist, so wird aus gleichen Gründen, wenn die Kraft P im Punkte C nach der Richtung AC angebracht wird, der Punkt B nach der Richtung BC eben so stark gedrückt werden, als wenn die Kraft P unmittelbar im Punkte B nach der Richtung AC angebracht wäre.

Hieraus folgt, daß bei unveränderter Richtung, die Wirkung einer Kraft auf einerlei Punkt eines festen Körpers unverändert bleibt, in welchem Punkte ihrer Richtung diese Kraft auch angebracht werden mag, wenn nur der Punkt, an welchem die Kraft unmittelbar wirkt, mit dem festen Punkte des Körpers in eine unzertrennliche Verbindung gesetzt ist.

§. 5.

Zwei gleiche Kräfte, welche auf einen Punkt nach grade entgegengesetzten Richtungen wirken, heben sich auf oder halten einander im Gleichgewicht, weil durchaus kein Grund vorhanden ist, weshalb eine Kraft die andere überwältigen sollte. Findet man umgekehrt, daß zwei Kräfte in grade entgegengesetzten Richtungen, ohne Mitwirkung einer dritten Kraft, einander im Gleichgewicht halten, so kann man hieraus auf die Gleichheit der Kräfte schließen.

Diese Gleichheit der Kräfte muß aber nur von ihren Wirkungen verstanden werden, wovon hier allein die Rede ist.

Sind die Kräfte, welche auf einen gemeinschaftlichen Punkt in grade entgegengesetzter Richtung wirken, ungleich, so kann kein Gleichgewicht erfolgen. Soll daher ein Punkt, auf welchen eine Kraft wirkt, in Ruhe bleiben, so muß eine eben so große Kraft nach grade entgegengesetzter Richtung wirken. Findet dies nicht Statt, so kann auch kein Gleichgewicht erfolgen.

§. 6.

Mehrere Kräfte, welche nach einerlei Richtung auf einen gemeinschaftlichen Punkt wirken, vereinigen sich zu einer einzigen Kraft, welche der Summe dieser Kräfte gleich ist; daher wird auch eine einzige eben so große Kraft, nach grade entgegengesetzter Richtung angebracht, mit sämmtlichen Kräften im Gleichgewichte seyn. Verursacht z. B. die eine Kraft einen Druck nP, und die andere nach derselben Richtung einen Druck mP, so ist der gesammte Druck $(n + m)P$ und eine Kraft $= (n + m)P$ nach gerade entgegengesetzter Richtung angebracht, ist mit den beiden Kräften nP und mP im Gleichgewichte.

§. 7.

Wenn verschiedene an einem Punkte angebrachte Kräfte mit einander im Gleichgewichte sind, und man fügt neue Kräfte hinzu, welche ebenfalls unter sich das Gleichgewicht halten, so müssen sämmtliche Kräfte unter einander im Gleichgewichte seyn, weil kein Grund vorhanden ist, weshalb dasselbe gestört werden sollte. Eben so läßt sich einsehen, daß, wenn mehrere Kräfte im Gleichgewichte sind, und man einige von denselben, die unter sich im Gleichgewichte stehen, wegnimmt, hiedurch das Gleichgewicht der übrig bleibenden Kräfte nicht gestört werden könne.

§. 8.

Findet unter mehrern nach verschiedenen Richtungen wirkenden Kräften ein Gleichgewicht statt, so muß dasselbe auch noch bestehen, wenn jede einzelne Kraft doppelt oder gleichvielfach wirkt, oder wenn von jeder einzelnen Kraft die Hälfte oder ein bestimmter Theil des Ganzen genommen wird. Dieses läßt sich sogleich mit Hülfe des vorigen §. einsehen, es folgt daher ganz allgemein, daß wenn sich mehrere Kräfte im Gleichgewichte befinden, so werden auch andere Kräfte im Gleichgewichte seyn, wenn sie den erstern proportional sind, und in eben den Richtungen gegen einander wirken.

Wären die drei Kräfte P, Q, R, welche nach verschiedenen Richtungen an einem Punkte wirken, mit einander im Gleichgewichte, so wird dies auch von den Kräften p, q, r gelten, wenn sie nach gleichen Richtungen an einem Punkte angebracht sind, und wenn sich $p : q : r$ wie $P : Q : R$ verhalten.

Auch ist es leicht, wenn eine von den Kräften p, q, r gegeben ist, die beiden übrigen mit Hülfe der bekannten Kräfte P, Q, R zu finden. Wenn z. B. r gegeben wäre, so hat man

$R : P = r : p$ und $R : Q = r : q$ daher ist

$$p = \frac{r}{R} P \text{ und } q = \frac{r}{R} Q.$$

§. 9.

Mehrere Kräfte, welche nach verschiedenen Richtungen auf einen Punkt wirken, erhalten den Punkt in Ruhe, wenn sie im Gleichgewichte sind. Wäre kein Gleichgewicht vorhanden, so muß sich der Punkt bewegen, und weil einerlei Punkt in derselben Zeit nur einerlei Weg durchlaufen kann, so kann auch die Richtung des Drucks, welche aus sämmtlichen Kräften entspringt, nur nach einerlei Linie gehen.

§. 10.

Zwei Kräfte P, Q die nach Richtungen G P, G Q, Figur 2., welche nicht in eine grade Linie fallen, auf einen Punkt G wirken, können einander nicht im Gleichgewichte erhalten, weil keine Kraft den Druck der andern gänzlich aufhebt. Es muß daher von beiden Kräften ein Druck nach irgend einer Richtung G R entstehen und weil die Richtungen beider Kräfte P, Q in einerlei Ebenen fallen, so muß auch die Richtung G R in derselben Ebene liegen. Denn wollte man annehmen, daß die Richtung G R mit der Ebene in welcher die Kräfte P, Q wirken, einen Winkel einschließt, so müßte aus gleichen Gründen auch auf der andern Seite der Ebene eine Richtung wie G R entstehen. Weil aber einerlei Punkt G nicht zugleich verschiedene Wege durchlaufen kann, so muß die Richtung G R mit den Richtungen der Kräfte P, Q in einerlei Ebene liegen. Taf. I. Fig. 2.

Die Richtung G R nach welcher sich der Punkt G durch die Wirkung der beiden Krafte P, Q fort zu bewegen strebt, heißt die mittlere Richtung dieser Kräfte, und eine dritte Kraft R, welche den Punkt G nach der Richtung G R eben so drückt als die beiden Kräfte P, Q, heißt die Mittelkraft (Vis composita. *Force résultante.*) von den Seitenkräften (Vires componentes. *Forces composantes.*) P, Q.

Der Winkel P G R $= \varphi$, welchen die Richtung der Mittelkraft R mit der Richtung der Seitenkraft P einschließt, heißt ein Richtungswinkel der Mittelkraft und der Winkel P G Q, der Richtungswinkel der Seitenkräfte.

Weil die Mittelkraft R den Punkt G eben so stark nach G R drückt wie die Seitenkräfte P, Q, so muß auch eine Kraft R, welche nach einer der Mittelkraft grade entgegengesetzten Richtung R G angebracht wird, den Punkt G in Ruhe erhalten, wenn an demselben keine andere Kräfte als P und Q wirken. Daher sind unter diesen Umständen die drei Kräfte P, Q, R am Punkt G im Gleichgewichte; oder die Seitenkräfte sind mit der Mittelkraft im Gleichgewichte, wenn letztere an dem gemeinschaftlichen Punkte G nach grade entgegengesetzter Richtung angebracht wird. Eben so folgt aus dem Vorhergehenden, daß man in Absicht des Drucks auf den Punkt G, anstatt der Seitenkräfte P, Q die Mittelkraft R nach ihrer Richtung G R, oder anstatt dieser die Seitenkräfte P, Q nach ihren Richtungen anbringen kann.

Findet man aus den Seitenkräften die Mittelkraft, so nennt man dies die Mittelkraft aus den Seitenkräften zusammensetzen (Compositio virium. *Composition des Forces*). Werden hingegen aus der Mittelkraft die Seitenkräfte gefunden, so sagt man die Mittelkraft ist in die Seitenkräfte zerlegt worden (Resolutio virium. *Décomposition des Forces*).

Wird hier und in der Folge nicht besonders erinnert daß die Richtungen der Kräfte in einerlei Ebene liegen, so wird dies jedesmal vorausgesetzt.

§. 11.

Taf. I. Fig. 3. Aufgabe. Die beiden Seitenkräfte P, Q Figur 3. wirken auf den Punkt G nach Richtungen G P, G Q, welche sich unter dem rechten Winkel P G Q schneiden.

Man fragt wie groß die Mittelkraft R seyn wird, welche den gegebenen Seitenkräften das Gleichgewicht hält. Taf. I. Fig. 3.

Auflösung. Es sey R G die Richtung der Mittelkraft R, welche mit der Seitenkraft P irgend einen Winkel P G R = φ einschließt. Man ziehe durch G auf G R die Linie q p′ senkrecht, so ist der Winkel q G P = R G Q = $90° - \varphi$. Da nun die Linie G P gegen G R und G q eben die Lage hat, wie G R gegen G P und G Q, und weil R mit P und Q im Gleichgewichte ist, so müssen sich auch zwei Kräfte p, q nach den Richtungen G R, G q angeben lassen, welche eben so viel wirken als die Kraft P nach der Richtung G P, oder P läßt sich in die Kräfte p, q zerlegen. Denn eben so wie R die Mittelkraft von P, Q ist, so läßt sich P als Mittelkraft von p, q ansehen, und weil R gegen P, Q eben die Lage hat, wie P gegen p, q, so verhält sich (§. 8.).

$$R : P = P : p \text{ also ist } p = \frac{P^2}{R} \text{ und}$$

$$R : Q = P : q \text{ also ist } q = \frac{P.Q}{R}$$

Ferner ist der Winkel Q G p′ = φ; man kann daher auch Q als eine Mittelkraft ansehen und solche in die Seitenkräfte p′, q′ nach G p′, G R zerlegen, weil Q gegen p′, q′ eben die Lage hat wie R gegen P, Q. Hienach verhält sich

$$R : P = Q : p' \text{ also ist } p' = \frac{P.Q}{R} \text{ und}$$

$$R : Q = Q : q' \text{ also ist } q' = \frac{Q^2}{R}$$

Wenn daher R mit P, Q im Gleichgewichte ist, so können die Kräfte P und Q weggenommen und anstatt derselben die Kräfte p, q und p′, q′ angebracht werden, ohne das Gleichgewicht zu stören (§. 10.). Es ist aber $q = p'$ weil beide $= \frac{P.Q}{R}$ sind, daher können auch diese beide Kräfte weggenommen werden (§. 7.), und es müssen noch die Kräfte p und q′, welche nach GR wirken, der Kraft R, welche ihnen grade entgegen nach RG wirkt, das Gleichgewicht halten und ihr gleich seyn, (§. 5.) daher ist

$$R = p + q' = \frac{P^2}{R} + \frac{Q^2}{R} = \frac{P^2 + Q^2}{R} \text{ oder}$$

$$R^2 = P^2 + Q^2$$

Hieraus folgt, daß wenn sich die Richtungen der Seitenkräfte unter einem rechten Winkel schneiden, so muß das Quadrat der Mittelkraft der Summe von den Quadraten der Seitenkräfte gleich seyn.

§. 12.

Die Größen und Richtungen mehrerer Kräfte lassen sich bequem durch Längen und Lagen grader Linien vorstellen, und so oft die für sämmtliche Kräfte gemeinschaftliche Einheit in jeder einzelnen Kraft enthalten ist, so oft muß auch irgend eine grade Linie, welche als Einheit angenommen wird, in jeder der Linien, welche die einzelnen Kräfte darstellen, enthalten seyn. Stellt z. B. die Linie
Taf. I. GA Figur 4. die Größe und Richtung einer Kraft P und
Fig. 4. GB einer Kraft Q vor, so ist, wenn $GB = \frac{5}{8} GA$ ist, auch $Q = \frac{5}{8} P$, und überhaupt $P : Q = GA : GB$.

Auch sieht man hieraus, wie fern es erlaubt ist, AG mit der Kraft P zu verwechseln, und $AG = P$ und $BG = Q$ zu setzen.

§. 13.

Zwei gleiche Kräfte P, Q, deren Größe und Richtung durch die Linien GP, GQ Figur 5. ausgedrückt werden, wirken unter einem rechten Winkel PGQ auf den Punkt G; man zeichne das Quadrat PGQR, so wird die Diagonale RG die Größe und Richtung der Mittelkraft R vorstellen. Taf. I. Fig. 5.

Beweis. Aus §. 11. folgt, daß RG die Größe der Mittelkraft R ist. Ferner sind die Kräfte P, Q einander gleich, also muß hier von der Wirkung, welche P hervorbringt, eben das gelten, was von der Wirkung der Kraft Q gilt, daher muß auch die Richtung GP gegen GR eben die Lage haben wie GQ gegen GR, oder die Winkel PGR und QGR müssen einander gleich seyn. Wollte man annehmen, RG wäre nicht die gesuchte Richtung, so müßte eine von den beiden Kräften P, Q den Punkt G mehr nach sich ziehen als die andere, welches aber aus gleichen Gründen von der andern Kraft gelten müßte. Daher, weil einerlei Punkt nicht verschiedene Wege zugleich durchlaufen kann (§. 9.), so kann die mittlere Richtung GR nur eine solche Lage erhalten, daß sie mit den Richtungen der Seitenkräfte gleiche Winkel bildet; folglich ist jeder von den beiden Richtungswinkeln der Mittelkraft, die Hälfte eines rechten Winkels oder PGR = RGQ = 45 Grad.

§. 14.

Die Richtungen zweier Seitenkräfte P, Q, welche im Punkte G Figur 4. nach GA und GB wirken, schneiden sich unter einem rechten Winkel AGB. Man nehme GA = P und GB = Q, ziehe AB, so ist im recht- Taf. I. Fig. 4.

winklichten Dreieck AGB, $AB^2 = AG^2 + GB^2$, daher wenn R die Größe der Mittelkraft von P, Q bezeichnet, so ist AB = R (§. 11.). Man kann also durch das rechtwinklichte Dreieck die Größe der Kräfte P, Q, R für das Gleichgewicht darstellen, nur bleibt die Lage von der Richtung der Mittelkraft gegen die Richtungen der Seitenkräfte noch ungewiß.

Wird im rechtwinklichten Dreieck ABG der Winkel, welchen die Seitenkraft GA = P mit der Hypothenuse AB einschließt, oder GAB = α gesetzt, so ist

$$GA = AB \cos\alpha \text{ und } GB = AB \sin\alpha \text{ oder}$$
$$P = R \cos\alpha \text{ und } Q = R \sin\alpha.$$

Es kann daher, wenn der Winkel α bekannt ist, welchen die Seitenkraft P mit der Hypothenuse des rechtwinklichten Dreiecks einschließt, welches aus den Kräften P, Q, R entsteht, mit Hülfe der Mittelkraft R, eine jede von den Seitenkräften P, Q gefunden werden, vorausgesetzt, daß letztere unter einem rechten Winkel wirken.

Zur Abkürzung soll der Winkel α ein Hypothenusenwinkel heißen. Ist daher für drei Kräfte P, Q, R die Kraft $P = R \cos\alpha$ und $Q = R \sin\alpha$, so ist α der Hypothenusenwinkel dieser Kräfte.

§. 15.

Taf. I. Fig. 6. Es werde vorausgesetzt, daß an dem Punkte G Figur 6. die Seitenkräfte P, Q nach den auf einander senkrechten Richtungen GP, GQ, mit der Mittelkraft R nach der Richtung RG im Gleichgewichte sind, wenn die Kraft R mit P den Richtungswinkel PGR = φ einschließt. Ist nun ferner für die gegebenen Kräfte P, Q, R der Hypothenusenwinkel = α (§. 14.), so läßt sich für den

Fall, wenn die Mittelkraft R mit zwei andern auf einander senkrechten Seitenkräften P', Q' unter dem Richtungswinkel 2φ im Gleichgewichte ist, der zu den Kräften P', Q', R gehörige Hypothenusenwinkel finden.

Es sei der Winkel $PGP' = PGR = \varphi$ und $P'G$ nach q' verlängert, so sind, wenn GQ' auf $P'q'$ senkrecht steht, $P'GQ'$, $Q'Gq'$ rechte Winkel, und man kann mittelst des bekannten Verhältnisses der Kräfte P, Q, R, die Kraft P als Mittelkraft, in die Seitenkräfte p, q nach GP', GQ', und Q als Mittelkraft, in die Seitenkräfte p', q' nach GQ', Gq' zerlegen. Alsdann ist (§. 8.)

$$R : P = P : p \quad \text{also} \quad p = \frac{P^2}{R}$$

$$R : Q = P : q \qquad q = \frac{P . Q}{R}$$

$$R : P = Q : p' \qquad p' = \frac{P . Q}{R}$$

$$R : Q = Q : q' \qquad q' = \frac{Q^2}{R}$$

Da nun die Kräfte p, q, p', q' eben die Wirkung wie P, Q hervorbringen (§. 10.), so kann man P, Q wegnehmen, und dafür die Kräfte p, q, p', q' nach den angegebenen Richtungen anbringen, welche alsdann mit R im Gleichgewichte sind. Man setze

$$p - q' = P' \text{ und } q + p' = Q'$$

so ist auch P' und Q' mit R im Gleichgewichte, und die Mittelkraft R bildet mit der Seitenkraft P' den Richtungswinkel $RGP' = 2\varphi$.

Es ist aber

$$P' = p - q' = \frac{P^2 - Q^2}{R} \text{ und}$$

$$Q' = q + p' = \frac{2 P . Q}{R}$$

Nach §. 14. ist ferner

$P = R \cos \alpha$ und $Q = R \sin \alpha$, daher

$P^2 - Q^2 = R^2 (\cos \alpha^2 - \sin \alpha^2) = R^2 \cos 2\alpha$ und

$2PQ = 2R^2 \sin \alpha \cos \alpha = R^2 \sin 2\alpha$ oder

$P' = R \cos 2\alpha$ und $Q' = R \sin 2\alpha$

daher ist (§. 14.) 2α der Hypothenusenwinkel für die Kräfte P', Q', R.

Es folgt also hieraus daß wenn eine Mittelkraft R den Richtungswinkel φ und Hypothenusenwinkel α mit einer Seitenkraft P einschließt, so wird dieselbe Mittelkraft R, wenn solche mit einer andern Seitenkraft P' den Richtungswinkel 2φ bildet, auch den Hypothenusenwinkel 2α einschließen müssen.

Auch läßt sich eben so beweisen, daß wenn dieser Satz für $n\varphi$ gilt, er auch für $(n+1)\varphi$ gelten müsse, wo n jede ganze Zahl bedeuten kann. Denn wenn für
Taf. I. die Seitenkräfte P, Q Figur 7. die zugehörigen Rich-
Fig. 7. tungs- und Hypothenusenwinkel φ und α sind, und wenn $n\varphi$ und $n\alpha$ ebendasselbe für die Kräfte P' und Q' bei einerlei Mittelkraft R bedeuten, so ist §. 14.

$P = R \cos \alpha, \qquad Q = R \sin \alpha;$

$P' = R \cos n\alpha, \qquad Q' = R \sin n\alpha.$

Für jede zwei andere Seitenkräfte P'', Q'' sei $(n+1)\varphi$ der Richtungswinkel, so erhält man auf eine ähnliche Art wie oben, wenn die Kräfte P' und Q' in die Seitenkräfte p, q und p', q' zerlegt werden

$R : P = P' : p$ und $R : P = Q' : p'$

$R : Q = P' : q \qquad R : Q = Q' : q'$ also

$$p - q' = \frac{PP' - QQ'}{R} = P'' \text{ und}$$

$$q + p' = \frac{QP' + PQ'}{R} = Q'' \text{ oder}$$

$$PP' - QQ' = R^2 (\cos\alpha \cos n\alpha - \sin\alpha \sin n\alpha) = R^2 \cos(n+1)\alpha$$

und

$$QP' + PQ' = R^2 (\sin\alpha \cos n\alpha + \cos\alpha \sin n\alpha) = R^2 \sin(n+1)\alpha$$

folglich

$$P'' = R \cos(n+1)\alpha \text{ und } Q'' = R \sin(n+1)\alpha.$$

Nun gilt dieser Satz für $n = 2$, daher auch für $n + 1 = 3$, also auch für $n = 4$, u. s. w.

Es ist nun ganz allgemein erwiesen, daß wenn die Richtungs- und Hypothenusenwinkel zweier Seitenkräfte φ und α sind, so werden zwei andere Seitenkräfte bei ungeänderter Mittelkraft noch im Gleichgewichte bleiben, wenn ihre Richtungs- und Hypothenusenwinkel $n\varphi$ und $n\alpha$ sind. Man setze $n\varphi = \varphi'$ und $n\alpha = \alpha'$, so verhält sich

$$\varphi : \alpha = \varphi' : \alpha' \text{ oder es ist } \frac{\varphi}{\alpha} = \frac{\varphi'}{\alpha'}$$

Da nun dieser Satz ganz allgemein gilt, φ mag so groß oder klein als man nur immer will angenommen werden, so folgt, daß wenn in irgend einem Falle das Verhältniß zwischen φ' und α' bekannt ist, daraus für jeden andern Fall das Verhältniß zwischen φ und α gefunden wird. Für $\varphi' = 45°$ ist $\alpha' = 45°$ (§. 13.) oder $\frac{\varphi'}{\alpha'} = 1$, daher ist ganz allgemein $\frac{\varphi}{\alpha} = 1$ oder $\varphi = \alpha$.

Es muß daher die Richtung der Mittelkraft R mit den Richtungen ihrer Seitenkräfte P, Q eben die Winkel bilden, welche entstehen, wenn man diese drei Kräfte in ein Dreieck zusammenstellt, vorausgesetzt, daß sich die Richtungen der Seitenkräfte unter einem rechten Winkel schneiden.

Taf. I. Fig. 8. Wenn daher im Rechteck GPRQ Figur 8. die Linien GP, GQ die Größen und Richtungen der Seitenkräfte P, Q vorstellen, so ist die Diagonale RG die Größe und Richtung der Mittelkraft R. Man kann also mit Hülfe eines Rechtecks aus den Seitenkräften die Mittelkraft, und aus der Mittelkraft die Seitenkräfte finden, wenn vorausgesetzt wird, daß die Richtungen der Seitenkräfte auf einander senkrecht sind.

§. 16.

Fig. 9. 10. Unter irgend einem Winkel PGQ Figur 9. und 10. wirken die Seitenkräfte P = GP und Q = GQ; wird nun das Parallelogramm PGQR aus den Seiten GP, GQ ergänzt, so ist die Diagonal RG; die Größe und Richtung der Mittelkraft R.

Beweis. Man ziehe AB durch G, PD aus P, QE aus Q auf GR senkrecht, und PA, QB mit DG parallel, so ist △ DPR = △ GEQ, daher GB = EQ = PD = AG und GE = RD. Nun zerlegt sich GP = P in die Seitenkräfte GA und GD, und GQ = Q in die Seitenkräfte GB und GE. Aber die Kräfte GA und GB heben sich auf, weil sie einander gleich und grade entgegengesetzt sind, daher bleibt noch GD + GE = GR die Größe und Richtung einer Kraft, welche eben so viel wie P und Q wirkt; es ist daher die Kraft GR = R nach der Richtung RG mit den Seitenkräften P, Q im Gleichgewichte.

Fällt die senkrechte Linie AB unterhalb der Linie GQ

Fig. 11. Figur 11., so muß EG von GD abgezogen werden, weil

die Kräfte EG und GD nach entgegengesetzten Richtungen wirken, und sich zum Theil aufheben. Alsdann ist GD — GE = GR = R.

§. 17.

Zusatz. Hieraus folgt, daß man mit Hülfe eines Parallelogramms, welches hier das Parallelogramm der Kräfte (Parallelogrammum virium) genannt wird, die Bedingungen angeben könne, unter welchen drei auf einen Punkt wirkende Kräfte im Gleichgewichte sind, weil jedesmal zwei Seiten des Parallelogramms die Größe und Richtung der Seitenkräfte und diejenige Diagonale, welche mit beiden Seiten einen gemeinschaftlichen Punkt hat, die Größe und Richtung der Mittelkraft für das Gleichgewicht angiebt. Hienach kann man eben so leicht, wenn die Kräfte durch Linien ausgedruckt werden, aus den beiden Seitenkräften und ihrem Richtungswinkel, die Größe und Richtung der Mittelkraft mit Hülfe des Parallelogramms der Kräfte finden, wie man aus den Richtungen der beiden Seitenkräfte und der gegebenen Mittelkraft, die Größe der Seitenkräfte durch eine leichte Zeichnung finden kann.

Auch folgt hieraus, daß sich eine jede Kraft, deren Größe und Richtung gegeben ist, nach unzähligen Richtungen, jedesmal in zwei Seitenkräfte zerlegen läßt, weil man eine unzählige Menge Parallelogramme über einer als Diagonale gegebenen Linie beschreiben kann.

Anmerkung. Man pflegt gewöhnlich die Lehre vom Parallelogramm der Kräfte aus der Lehre vom Hebel abzuleiten, wie dies von de la Hire, Kästner, Karsten ꝛc. in ihren Lehrbüchern geschehn ist. Die hier gegebene Darstellung ist ein Versuch, diesen Satz ohne Hülfe des Hebels zu beweisen. Zu den vorzüglichsten Bemühungen, den Beweis dieses Satzes unabhängig vom Hebel zu geben, kann man die von Dan. Bernoulli (*), Lambert (**), d'Alembert (***) und de la Place (****) zählen.

§. 18.

Aufgabe. Die Größen dreier Kräfte P, Q, R sind durch die Linien AB, CD, EF, Figur 12. gegeben; man soll die Richtungen dieser Kräfte für das Gleichgewicht durch eine Zeichnung finden.

Taf. I. Fig. 12.

Auflösung. Aus den drei gegebenen Linien beschreibe man das Dreieck GHI, indem GI = AB, IH = CD und GH = EF angenommen wird. Zu dem Dreiecke GHI ergänze man das Parallelogramm GIHK, so ist GI die Richtung der Kraft P, GK der Kraft Q und HG der Kraft R (§. 17.).

(*) Examen principiorum mechanicae et demonstrationes geometricae de compositione et resolutione virium. Commentarii Acad. Petropol. Tom. I. A. 1724. p. 126.

(**) Beiträge zum Gebrauche der Mathematik. 2 Theil. 2 Absch. Berlin 1770. S. 468.

(***) Opuscules Mathemat. T. I. Paris 1761. p. 169. Demonstration du principe de la composition des Forces. Opusc. Math. T. VI. Paris 1773. p. 360. Nouvelle Demonstration du Parallelogramme des Forces.

(****) Mechanik des Himmels, übersetzt von Burkhardt. Berlin 1800. 1. Theil. S. 2. ꝛc.

So fern aus den drei Seiten AB, CD, EF kein Dreieck zusammengesetzt werden kann, welches der Fall ist, wenn zwei Seiten kleiner als die dritte sind, so kann auch kein Parallelogramm der Kräfte entstehen, oder es ist unter drei gegebenen Kräften kein Gleichgewicht möglich, wenn zwei davon kleiner sind als die dritte.

§. 19.

Aufgabe. Die Bedingungen anzugeben, unter welchen drei Kräfte P, Q, R mit Bezug auf ihre Richtungswinkel im Gleichgewichte sind.

Auflösung. Man setze Figur 9. den Richtungswinkel der Kräfte P, R oder $PGR = \alpha$ Taf. I. Fig. 9.

Q, R oder $QGR = \beta$

P, Q oder $PGQ = \delta$

α β δ

so ist $\alpha + \beta = \delta$. Nun verhält sich im Dreiecke GPR

$$GP : GR = \sin GRP : \sin GPR \text{ oder}$$
$$P : R = \sin \beta : \sin (180^\circ - \delta)$$

oder weil

$\sin (180^\circ - \delta) = \sin \delta$ ist, so erhält man

$$R \sin \beta = P \sin \delta \quad [I]$$

Ferner verhält sich

$$GP : PR = \sin PRG : \sin PGR \text{ oder}$$
$$P : Q = \sin \beta : \sin \alpha \quad \text{daher ist auch}$$
$$P \sin \alpha = Q \sin \beta. \quad [II]$$

Aus dieser und der Gleichung [I] erhält man folgende Ausdrücke

$$(I) \quad P = \frac{Q \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{R \sin \beta}{\sin \delta}$$

$$\text{(II)}\ Q = \frac{P \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{R \sin \alpha}{\sin \delta}$$

$$\text{(III)}\ R = \frac{P \sin \delta}{\sin \beta} = \frac{Q \sin \delta}{\sin \alpha}$$

welche dazu dienen, wenn für das Gleichgewicht dreier Kräfte zwei Richtungswinkel und eine Kraft gegeben sind, die übrigen Kräfte durch Rechnung zu finden. Auch sieht man, wie aus einem Richtungswinkel und zwei Kräften die übrigen Richtungswinkel leicht bestimmt werden können.

Taf. I. Fig. 9. Weil $GD = GP \cos \alpha$ und $RD = PR \cos \beta$, so ist $GR = GD + RD = GP \cos \alpha + PR \cos \beta$, oder man findet die Mittelkraft, wenn die beiden Seitenkräfte nebst ihren Richtungswinkeln gegeben sind.

$$\text{(IV)}\ R = P \cos \alpha + Q \cos \beta$$

Ferner ist nach [II] $P \sin \alpha = Q \sin \beta$. Aber

$\beta = \delta - \alpha$ also $\sin \beta = \sin \delta \cos \alpha - \cos \delta \sin \alpha$

daher

$P \sin \alpha = Q \sin \delta \cos \alpha - Q \cos \delta \sin \alpha$ oder

$$Q \sin \delta = \frac{P \sin \alpha + Q \cos \delta \sin \alpha}{\cos \alpha} = P \operatorname{tgt} \alpha + Q \cos \delta \operatorname{tgt} \alpha$$

folglich findet man die Tangente des Winkels, welchen die Seitenkraft P mit der Mittelkraft R einschließt, oder

$$\text{(V)}\ \operatorname{tgt} \alpha = \frac{Q \sin \delta}{P + Q \cos \delta}$$

und es kann daher aus beiden Seitenkräften und ihrem Richtungswinkel die Richtung der Mittelkraft gefunden werden.

Aus (V) und (II) erhält man

$$P + Q \cos \delta = \frac{Q \sin \delta}{\operatorname{tgt} \alpha} = \frac{R \sin \alpha}{\operatorname{tgt} \alpha} = R \cos \alpha$$

oder quadrirt

$$P^2 + 2PQ\cos\delta + Q^2\cos\delta^2 = R^2\cos\alpha^2;$$ aber (II)

$$Q^2\sin\delta^2 = R^2\sin\alpha^2$$

wenn nun beide Gleichungen addirt und $\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2$ sowohl als $\sin\delta^2 + \cos\delta^2 = 1$ gesetzt werden, so ist

$$P^2 + 2PQ\cos\delta + Q^2 = R^2$$

und man erhält hieraus die Mittelkraft

$$\text{(VI)} \quad R = \sqrt{(P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\delta)}$$

so daß aus den beiden Seitenkräften und ihrem Richtungswinkel die Mittelkraft gefunden werden kann. Nur ist dabei zu bemerken, daß $\cos\delta$, also auch das Produkt $2PQ\cos\delta$, negativ wird, wenn der Winkel δ stumpf ist.

Endlich erhält man aus (VI) den Cosinus des Winkels, welchen die Seitenkräfte einschließen, oder

$$\text{(VII)} \quad \cos\delta = \frac{R^2 - P^2 - Q^2}{2PQ}$$

1. Beispiel. Von zwei Seitenkräften P und Q schließt die erste mit der Mittelkraft einen Winkel von 70 Grad 53 Minuten, und die zweite mit eben dieser Mittelkraft einen Winkel von 49 Grad 7 Minuten ein. Die Kraft P = 40 Pfund ist gegeben, man soll Q finden.

Hier ist nach (II) $\alpha = 70^\circ\, 53'$ und $\beta = 49^\circ\, 7'$ daher

$Q = \frac{P\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{40.\ \sin 70^\circ\, 53'}{\sin 49^\circ\, 7'}$ oder wenn man mit Logarithmen rechnet

Log 40	=	1,6020600
Log sin 70° 53′	=	9,9753646
		11,5774246
Log sin 49° 7′	=	9,8785470
		1,6988776 = Log 49,9894 = Log Q

Es ist daher die Seitenkraft Q = 49,9894 Pfund.

2. Beispiel. Zwei Kräfte, $P = 40$ und $Q = 50$ Pfund wirken unter einem Winkel von 120 Grad $= \delta$ auf einen Punkt; man fragt, wie groß ist die Mittelkraft R, welche den Kräften P, Q das Gleichgewicht hält?

Weil $\cos \delta = \cos 120^\circ = - \cos 60^\circ = - 0{,}5$, so ist nach (VI) die Mittelkraft

$$R = \sqrt{(1600 + 2500 - 2.40.50.0{,}5)} = 45{,}83 \text{ Pfund}.$$

Wollte man auch den Richtungswinkel der Mittelkraft finden, so ist (V)

$$\text{tgt}\ \alpha = \frac{50.0{,}5\ \sqrt{3}}{40 - 50.0{,}5} = \tfrac{5}{3}\sqrt{3} = \text{tgt}\ 70^\circ\ 53'\ 36''$$

Die Kraft R schließt also mit P einen Richtungswinkel von 70 Grad 53 Minuten 36 Sekunden ein.

§. 20.

1. Zusatz. Schneiden sich die Richtungen der Seitenkräfte P, Q unter einem rechten Winkel, so wird nach dem Vorhergehenden $\delta = 90^\circ$; $\beta = 90^\circ - \alpha$, daher $\sin \delta = 1$; $\sin \beta = \cos \alpha$ folglich

$$\begin{array}{ll}
(\text{I}) & P = Q \cot \alpha = R \cos \alpha \\
(\text{II}) & Q = P\ \text{tgt}\ \alpha = R \sin \alpha \\
(\text{III}) & R = P \sec \alpha = Q\ \text{cosec}\ \alpha \\
(\text{IV}) & R = P \cos \alpha + Q \sin \alpha \\
(\text{V}) & \text{tgt}\ \alpha = \dfrac{Q}{P} \\
(\text{VI}) & R = \sqrt{(P^2 + Q^2)}.
\end{array}$$

§. 21.

2. Zusatz. Sind die Seitenkräfte P, Q einander gleich, also $P = Q$, so sind, weil (I) §. 19. $P \sin \alpha = Q \sin \beta$ ist, also $\sin \alpha = \sin \beta$, auch die Winkel α, β, welche die Seitenkräfte mit der Mittelkraft einschließen, gleich groß, und man erhält $\delta = 2\alpha$ also $\sin \delta = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ daher

$$\text{(I)} \quad P = \frac{R \sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{R}{2 \cos \alpha} = \tfrac{1}{2} R \sec \alpha$$

$$\text{(II)} \quad R = \frac{P \sin 2\alpha}{\sin \alpha} = 2 P \cos \alpha$$

$$\text{(III)} \quad \cos \alpha = \frac{R}{2P}$$

$$\text{(IV)} \quad \cos 2\alpha = \frac{R^2 - 2P^2}{2P^2}$$

§. 22.

Wenn die Kräfte P, Q, R im Gleichgewichte sind, indem die Seitenkräfte P, Q den Richtungswinkel δ einschließen, so ist P mit Q auch am Richtungswinkel $180° - \delta$ mit einer Mittelkraft S im Gleichgewichte, wenn

$$S^2 = 2P^2 + 2Q^2 - R^2 \text{ ist.}$$

Beweis. Im Parallelogramme ADBG, Figur 13., sei $GA = P$, $GB = Q$, $GD = R$ und der Winkel $AGB = \delta$, so ist für $BA = S$ der Winkel GBD $= 180° - \delta$ und S mit $P = BD$ und $Q = BG$ im Gleichgewichte. §. 17. Man ziehe GE, BF auf AD senkrecht, und setze Taf. I. Fig. 13.

$GE = BF = x$ und $AE = DF = y$ so ist

$R^2 = (Q - y)^2 + x^2$ und

$S^2 = (Q + y)^2 + x^2$ also

$$R^2 + S^2 = (Q - y)^2 + (Q + y)^2 + 2x^2 = 2(Q^2 + x^2 + y^2)$$

Aber $P^2 = x^2 + y^2$ daher

$$R^2 + S^2 = 2(Q^2 + P^2)$$

§. 23.

Drei Kräfte P, Q, R, welche nach den Richtungen GP, GQ, GR Figur 14. wirken, sind im Gleichgewichte. Man ziehe drei willkürliche Linien BC, BA, Fig. 14.

AC dergestalt, daß jede auf einer von den Richtungen der Kräfte P, Q, R senkrecht stehe, so verhalten sich die Seiten des Dreiecks ABC, welches diese Linien bilden, wie die Kräfte, auf deren Richtungen die Seiten des Dreiecks senkrecht stehen.

Beweis. Die Richtung RG werde bis an eine Seite des Dreiecks ABC verlängert, und zur Diagonale GA' das Parallelogramm $GB'A'D'$ beschrieben, so verhält sich §. 17.

$$B'G : A'B' : A'G = P : Q : R$$

Es sind aber die Winkel

$RGB' + ACB = RGB' + B'GA' = 180°$ also $ACB = B'GA'$
$RGD' + BAC = RGD' + D'GA' = 180°$ also $BAC = D'GA'$
oder $BAC = GA'B'$; da nun in den Dreiecken ABC und $A'B'G$ die Winkel bei C und A den Winkeln bei G und A' gleich sind, so sind diese Dreiecke ähnlich, und es verhält sich

$B'G : A'B' : A'G = BC : AB : AC$ daher auch
$BC : AB : AC = P : Q : R$

§. 24.

Aufgabe. Aus den gegebenen Größen und Richtungen mehrerer Kräfte P, P', P'', ... welche auf einen Punkt wirken, die Größe und Richtung der Mittelkraft R zu finden, welche sämmtlichen Kräften das Gleichgewicht hält.

Auflösung. Sind die Größen und Richtungen der Kräfte P, P', P'', ... durch die Linien GP, GP',
Taf. I. GP'', ... Figur 15. ausgedrückt, so ziehe man will-
Fig. 15. kürlich durch G zwei auf einander senkrechte Linien AB, CD. Werden nun die Winkel, welche die Kräfte

$P, P', P'' \ldots$ mit der Linie GA einschließen durch $\gamma, \gamma', \gamma'' \ldots$ bezeichnet, so daß sämmtliche Winkel nach einerlei Seite von GA gemessen, also von 0 bis 360 Grad fortgezählt werden, so ist der Winkel $AGP = \gamma$; $AGP' = \gamma'$; $AGP'' = \gamma'' \ldots$ und man kann die Kräfte $P, P', P'' \ldots$ nach Richtungen zerlegen, welche in die Linien AB und CD fallen.

Für die Linie AB erhält man die Seitenkräfte von $P, P', P'' \ldots$ (§. 20. I)

$Gp = P\cos\gamma$; $Gp' = P'\cos\gamma'$; $Gp'' = P''\cos\gamma''$; ...

und eben so für CD (§. 20. II)

$Gq = P\sin\gamma$; $Gq' = P'\sin\gamma'$; $Gq' = P''\sin\gamma''$; ...

wobei mit Bezug auf die Figur sogleich einleuchtet, daß Gp'', Gp''', Gq'', Gq''', in Absicht der Richtung von den übrigen Seitenkräften, negativ sind, welches auch die trigonometrischen Linien $\cos\gamma''$, $\cos\gamma'''$, $\sin\gamma''$, $\sin\gamma'''$ ausdrücken.

Wird nun die algebraische Summe aller Seitenkräfte nach der Richtung GA durch die Linie Gv, und die Summe nach der Richtung GC durch die Linie Gw ausgedrückt; ferner $Gv = V$ und $Gw = W$ gesetzt, so ist

$$V = P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \ldots$$
$$W = P\sin\gamma + P'\sin\gamma' + P''\sin\gamma'' + \ldots$$

Die aus beiden Kräften V, W entspringende Mittelkraft, welche durch die Linie GR ausgedrückt ist, sei R, so ist diese auch mit den Kräften $P, P', P'' \ldots$ im Gleichgewichte, man findet daher (§. 20. VI) die Mittelkraft

Taf. I. Fig. 15.

$$\text{(I)}\ R = \sqrt{(V^2 + W^2)} \text{ oder}$$

$$R = \sqrt{\left\{\begin{matrix}(P \sin\gamma + P' \sin\gamma' + P'' \sin\gamma'' + \ldots)^2 \\ + (P \cos\gamma + P' \cos\gamma' + P'' \cos\gamma'' + \ldots)^2\end{matrix}\right\}}$$

Der Richtungswinkel für die Mittelkraft R mit der Linie AG sei φ, so ist (§. 20. V)

$$\text{(II)}\ \operatorname{tgt}\varphi = \frac{Rv}{Gv} = \frac{W}{V} \text{ oder}$$

$$\operatorname{tgt}\varphi = \frac{P \sin\gamma + P' \sin\gamma' + P'' \sin\gamma'' + \ldots}{P \cos\gamma + P' \cos\gamma' + P'' \cos\gamma'' + \ldots}$$

Weil jede Tangente zu zwei verschiedenen Winkeln gehört, welche 180° von einander verschieden sind, so erhält man zwar durch die Bestimmung von φ die Lage derjenigen Linie, in welche die Richtung der Kraft R fällt, es bleibt aber ungewiß, ob R oberhalb AB nach GR oder unterhalb AB nach Gr angebracht werden muß. Dies läßt sich mit Hülfe von $\sin\varphi$ beurtheilen, weil ein positiver Werth von $\sin\varphi$ anzeigt, daß R oberhalb AB, und ein negativer, daß R unterhalb angebracht werden muß. Nun ist $\sin\varphi = \frac{Rv}{RG}$ daher

$$\text{(III)}\ \sin\varphi = \frac{W}{R} \text{ oder}$$

$$\sin\varphi = \frac{P \sin\gamma + P' \sin\gamma' + P'' \sin\gamma'' + \ldots}{R}$$

Es läßt sich leicht einsehen, daß diese Aufgaben, auch ohne Rechnung, durch bloße Zeichnung aufgelöst werden können.

Beispiel. Vier Kräfte $P = 100$, $P' = 80$, $P'' = 60$, $P''' = 200$ Pfund wirken an einem Punkte, und bilden mit einer willkürlichen Linie GA die Richtungswinkel $\gamma = 60°$, $\gamma' = 150°$, $\gamma'' = 225°$ und $\gamma''' = 300°$; man sucht die Größe der Mittelkraft R, welche den gegebenen vier Kräften das Gleichgewicht hält.

Es ist:

$\sin\gamma = \sin 60° = 0{,}866025 \ldots\ldots$ also $P \sin\gamma = + 86{,}6025$

$\sin\gamma' = \sin 150° = \sin 30° = 0{,}5 \ldots$ also $P' \sin\gamma' = + 40{,}0000$

$\sin\gamma'' = \sin 225° = -\sin 45° = -0{,}707107 .$ also $P'' \sin\gamma'' = - 42{,}4264$

$\sin\gamma''' = \sin 300° = -\sin 60° = -0{,}866025 .$ also $P''' \sin\gamma''' = -173{,}2050$

$$W = P \sin\gamma + P' \sin\gamma' + P'' \sin\gamma'' + P''' \sin\gamma''' = - 89{,}0289$$

Ferner:

$\cos\gamma = \cos 60° = 0{,}5 \ldots\ldots\ldots$ also $P \cos\gamma = + 50{,}0000$

$\cos\gamma' = \cos 150° = -\cos 30° = -0{,}866025$ also $P' \cos\gamma' = - 69{,}2820$

$\cos\gamma'' = \cos 225° = -\cos 45° = -0{,}707107$ also $P'' \cos\gamma'' = - 42{,}4264$

$\cos\gamma''' = \cos 300° = \cos 60° = 0{,}5 \ldots$ also $P''' \cos\gamma''' = +100{,}0000$

$$V = P \cos\gamma + P' \cos\gamma' + P'' \cos\gamma'' + P''' \cos\gamma''' = + 38{,}2916$$

Hieraus findet man die Mittelkraft

$$R = \sqrt{(V^2 + W^2)} = \sqrt{9392{,}46} = 96{,}915 \text{ Pfund}$$

Für die Richtung der Mittelkraft ist

$$\operatorname{tgt} \varphi = \frac{-89{,}0289}{+38{,}2916} = - 2{,}325029 = - \operatorname{tgt} 66° 44' = \operatorname{tgt} 113° 16'$$

Die Richtung der Mittelkraft R schließt daher mit GA einen Winkel von 113 Grad 16 Minuten, oder von 293° 16′ ein, so daß im ersten Falle die Kraft R oberhalb und im zweiten unterhalb AB fällt. Nun war W negativ, also ist $\sin\varphi$ negativ, folglich φ größer als 180° daher ist der gesuchte Winkel

$$\varphi = 293° 16' = - 66° 44'$$

§. 25.

Zusatz. Fällt die Linie AG Figur 15. in die Richtung der Kraft P, so wird $\gamma = 0$, also $\sin\gamma = 0$ und $\cos\gamma = 1$, daher die Mittelkraft Taf. I. Fig. 15.

$$R = \sqrt{[(P' \sin\gamma' + P'' \sin\gamma'' + \ldots)^2 + (P + P' \cos\gamma' + P'' \cos\gamma'' + \ldots)^2]}$$

und

$$\operatorname{tgt} \varphi = \frac{P' \sin\gamma' + P'' \sin\gamma'' + P''' \sin\gamma''' + \ldots}{P + P' \cos\gamma' + P'' \cos\gamma'' + P''' \cos\gamma''' + \ldots}$$

§. 26.

Taf. I. Fig. 15. Sind am Punkte G Figur 15. mehrere Kräfte P, P′, P″, P‴, P⁗ im Gleichgewichte; so ist keine Mittelkraft R erforderlich, das Gleichgewicht zu halten; es ist daher (§. 24.) für diesen Fall $V = 0$ und $W = 0$, d. h. mehrere Kräfte P, P′, P″, P‴, P⁗ .... welche an einem Punkte wirken, und mit einer willkürlichen Linie die Winkel γ, γ', γ'', γ''', γ'''' .... bilden, sind im Gleichgewichte, wenn

$$P \sin\gamma + P' \sin\gamma' + P'' \sin\gamma'' + P''' \sin\gamma''' + P'''' \sin\gamma'''' \ldots = 0$$

und

$$P \cos\gamma + P' \cos\gamma' + P'' \cos\gamma'' + P''' \cos\gamma''' + P'''' \cos\gamma'''' \ldots = 0$$

ist, welches die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht mehrerer Kräfte an einem Punkte sind.

§. 27.

Zieht man von einem willkürlich angenommenen Punkte senkrechte Linien auf die Richtungen verschiedener Kräfte, so erhält man dadurch die Abstände der Richtungen von diesem Punkte. Werden alsdann diese Abstände mit den zugehörigen Kräften multiplizirt, so nennt man diese Produkte die Momente der Kräfte in Bezug auf den angenommenen Punkt O, und dieser heißt der Mittelpunkt der Momente.

Taf. I. Fig. 16. Wären die Kräfte P, P′, P″ Figur 16. nach verschiedenen Richtungen GP, GP′, GP″ angebracht, welche sich im Punkt G schneiden; und man nimmt in einer dieser Richtungen den willkürlichen Punkt O an, von welchem senkrechte Linien OD, OE auf die nöthigenfalls verlängerten Richtungen der Kräfte P, P″ gezogen werden, so muß das Moment OD.P dem Momente

OE.P″

$OE.P''$ gleich seyn, wenn die Kräfte P, P', P'' unter einander im Gleichgewichte sind.

Denn man setze den Winkel $OGD = \alpha$, $OGE = \beta$, so ist (§. 19. I)

$$P \sin \alpha = P'' \sin \beta$$

aber es ist auch

$$\sin \alpha = \frac{OD}{OG} \text{ und } \sin \beta = \frac{OE}{OG} \text{ daher}$$

$$P \cdot \frac{OD}{OG} = P'' \cdot \frac{OE}{OG} \text{ oder}$$

$$OD \cdot P = OE \cdot P''$$

d. h. wenn zwischen drei nach verschiedenen Richtungen wirkenden Kräften ein Gleichgewicht vorhanden ist, so müssen die Momente gleich seyn, welche entstehen, wenn aus einem willkürlichen Punkte in der Richtung einer dieser Kräfte die Abstände genommen werden.

Wären die Momente nicht vom Punkte O sondern von O' gerechnet, so bleibt der Beweis für die Dreiecke $GO'D'$ und $GO'E'$ mit dem vorigen einerlei; auch läßt sich einsehen, wie man aus der Gleichheit der Momente auf das Gleichgewicht der Kräfte schließen kann, weil sich der Beweis eben so leicht führen läßt.

§. 28.

Die Sätze von den Momenten lassen sich in der größten Allgemeinheit auf jede Anzahl von Kräften P, P', P'', P''' .... anwenden, welche an einem gemeinschaftlichen Punkte G Figur 17. wirken, wobei es auch nicht Taf. I.
nöthig ist, den Mittelpunkt O der Momente in einer der Fig. 17.
Richtungen der Kräfte anzunehmen, da er jede andere Lage erhalten kann.

Gesetzt die Kräfte P, P', P'', P''' wären im Gleichgewichte, wenn ihre Richtungen mit irgend einer Linie GA die Winkel γ, γ', γ'', γ''' einschließen, also $AGP = \gamma$; $AGP' = \gamma'$ u. s. w. ist. Ferner sey O ein willkürlich angenommener Punkt, dessen Lage gegen die Linie GA durch den Winkel $OGA = \omega$ und durch die Linie $OG = x$ bestimmt werde. Vom Punkte O sei OD senkrecht auf die Richtung der Kraft P gezogen, und man nenne diesen Abstand $= a$; eben so sollen a', a'', a''' die Abstände der Richtungen der Kräfte P', P''. P''' vom Punkte O bezeichnen, alsdann ist

$$a = x \sin(\gamma - \omega); \quad a' = x \sin(\gamma' - \omega);$$
$$a'' = x \sin(\gamma'' - \omega); \quad a''' = x \sin(\gamma''' - \omega).$$

Nach §. 26. ist für das Gleichgewicht unter den gegebenen Kräften

$$\text{(I)}\quad P \sin\gamma + P' \sin\gamma' + P'' \sin\gamma'' + P''' \sin\gamma''' = 0$$

und

$$\text{(II)}\quad P \cos\gamma + P' \cos\gamma' + P'' \cos\gamma'' + P''' \cos\gamma''' = 0$$

Wird die erste Gleichung mit $x \cos\omega$, und die zweite mit $x \sin\omega$ multiplizirt, und von erster die letzte abgezogen, so erhält man

$$Px(\sin\gamma\cos\omega - \cos\gamma\sin\omega) + P'x(\sin\gamma'\cos\omega - \cos\gamma'\sin\omega) + \ldots = 0$$

oder nach bekannten trigonometrischen Lehren,

$$Px\sin(\gamma - \omega) + P'x\sin(\gamma' - \omega) + P''x\sin(\gamma'' - \omega) + \ldots = 0$$

und wenn die oben gefundenen Werthe für $x\sin(\gamma - \omega) \ldots$ in diese Gleichung gesetzt werden

$$\text{(III)}\quad aP + a'P' + a''P'' + a'''P''' = 0.$$

d. h. im Falle des Gleichgewichts muß für jeden willkürlich angenommenen Punkt O, die Summe der Momente sämmtlicher Kräfte = o seyn.

Bei näherer Untersuchung des erhaltenen allgemeinen Ausdrucks für die Summe der Momente läßt sich leicht einsehen, daß mehrere derselben negativ werden müssen, in so fern die Werthe von a, a'... oder sin $(\gamma - \omega)$; sin $(\gamma' - \omega)$ .... negativ sind. Dies wird aber allemal der Fall seyn wenn die Winkel $(\gamma - \omega)$; $(\gamma' - \omega)$.... größer als zwei rechte werden, weil alsdann der Sinus negativ ist, oder wenn die Abstände (O D) unterhalb der Linie O G fallen.

Wären sämmtliche Kräfte mit ihren Abständen weniger einem gegeben, so kann man den fehlenden Abstand nach (III) für das Gleichgewicht leicht finden, so wie auch wenn sämmtliche Abstände und die zugehörigen Kräfte weniger einer gegeben sind, die fehlende Kraft für das Gleichgewicht aus der Gleichung (III) gefunden werden kann.

§. 29.

Aufgabe. In einer festen, gewichtlosen Ebene MN Figur 18. sind zwei Kräfte P, P' nach beliebigen Richtungen A P, A' P' angebracht, welche eine willkürlich gezogene Linie O Z in A und A' schneiden. Die Größe dieser Kräfte und ihre Lage ist durch die Winkel O A P $= \alpha$, O A' P' $= \alpha'$ und durch die Entfernungen O A $=$ b, O A' $=$ b' gegeben; man soll die Größe und Lage einer dritten Kraft R finden, welche mit den Kräften P, P' im Gleichgewichte ist. Taf. I. Fig. 18.

Auflösung. Schneiden sich die Richtungen der Kräfte P, P' im Punkte G, so ist ihre Wirkung eben dieselbe als wenn solche unmittelbar im Punkte G nach ihren Richtungen angebracht wären (§. 4.). Man kann daher nach §. 19. die Größe und Lage einer dritten Kraft R finden, deren Richtung durch G geht und welche mit P und P′ im Gleichgewichte ist. Die Richtung dieser Kraft R sei GR und schneide verlängert die Linie O Z in B; die gesuchte Entfernung O B sei $= r$ und damit alle Winkel auf einerlei Art von der Linie O Z ab gemessen werden, so sei der erhabene Winkel $OBR = \varphi$. Man ziehe O′Z′ durch G mit O Z parallel, so sind die Winkel $O'GP = \alpha$, $O'GP' = \alpha'$, $O'GR = \varphi$ daher §. 26.

(I) $P \sin\alpha + P' \sin\alpha' + R \sin\varphi = 0$ und

(II) $P \cos\alpha + P' \cos\alpha' + R \cos\varphi = 0$

Nun muß ferner in dem Sinne §. 28. (III) für jeden willkürlich angenommenen Punkt O, die Summe von den Momenten der Kräfte = 0 seyn; werden daher die Linien OD, OD′, OE auf die Richtungen der Kräfte P, P′, R senkrecht gezogen, so erhält man

$OD \,.\, P + OD' \,.\, P' - OE \,.\, R = 0$

Aber $OD = AO \,.\, \sin\alpha = b \sin\alpha$; $OD' = b' \sin\alpha'$ und $OE = - r \sin\varphi$ daher

(III) $bP \sin\alpha + b'P' \sin\alpha' + rR \sin\varphi = 0$

Aus (I) und (II) findet man

$(P \sin\alpha + P' \sin\alpha')^2 = R^2 \sin\varphi^2$

$(P \cos\alpha + P' \cos\alpha')^2 = R^2 \cos\varphi^2$

und wenn man beide Ausdrücke addirt und $\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2 = 1$ setzt, so ist die gesuchte Kraft

(IV) $R = \sqrt{[(P \sin\alpha + P' \sin\alpha')^2 + (P \cos\alpha + P' \cos\alpha')^2]}$

Aus (I) und (II) erhält man ferner

$P \sin\alpha + P' \sin\alpha' = - R \sin\varphi$

$P \cos\alpha + P' \cos\alpha' = - R \cos\varphi$

wird mit dem letzten Ausdrucke in den vorstehenden dividirt und tgt φ statt $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ gesetzt, so findet man die Lage der Richtung für die Kraft R oder

$$(V)\quad \operatorname{tgt}\varphi = \frac{P\sin\alpha + P'\sin\alpha'}{P\cos\alpha + P'\cos\alpha'}$$

Endlich ist nach (I) und (III)

$$P\sin\alpha + P'\sin\alpha' = - R\sin\varphi$$

$$bP\sin\alpha + b'P'\sin\alpha' = - rR\sin\varphi$$

und wenn der letzte Ausdruck durch den vorstehenden dividirt wird, so erhält man den Abstand

$$(VI)\quad r = \frac{bP\sin\alpha + b'P'\sin\alpha'}{P\sin\alpha + P'\sin\alpha'}$$

§. 30.

Zusatz. Will man keinen erhabenen Winkel in Rechnung bringen, so darf man nur von jedem, welcher diese Beschaffenheit hat, 180 Grad abziehen, alsdann kommt nach dem Beispiel Figur 18. statt des erhabenen Winkels OBR $= \varphi$, der Winkel OBE $= \varphi - 180°$ in Rechnung. Setzt man diesen $= \psi$, so ist

$\sin\psi = \sin(\varphi - 180°) = - \sin\varphi$ und

$\cos\psi = \cos(\varphi - 180°) = - \cos\varphi$ also

$\sin\varphi = - \sin\psi$ und $\cos\varphi = - \cos\psi$. Diese Ausdrücke in die vorstehenden Gleichungen gesetzt, geben

$$(I)\quad R\sin\psi = P\sin\alpha + P'\sin\alpha'$$

$$(II)\quad R\cos\psi = P\cos\alpha + P'\cos\alpha'$$

$$(III)\quad rR\sin\psi = bP\cos\alpha + b'P'\cos\alpha'$$

Die Ausdrücke für R, tgt ψ und r bleiben wie bei (IV), (V) und (VI).

Eben diese Resultate werden erhalten, wenn man nicht diejenige Lage der Kraft R sucht, in welcher sie mit P und

P' das Gleichgewicht hält, sondern diejenige in welcher sie eben die Wirkung nach derselben Richtung wie P, P' hervorbringt.

§. 31.

Taf. I. Fig. 19. Die Ebene YZ Figur 19 werde von der Richtung MG einer Kraft V, welche außerhalb dieser Ebene liegt, in G geschnitten; man ziehe MN senkrecht auf YZ, so ist $MGN = \alpha$ der Einfallswinkel, unter welchem die Richtung der Kraft V die Ebene YZ schneidet. Der Punkt G leidet daher nach der verlängerten Richtung GL einen Druck V. Wird NG bis H verlängert und in der auf YZ senkrechten Ebene GHL das Parallelogramm $GHLK$ gezeichnet, so ist, für $GL = V$, weil der Winkel $LGH = \alpha$ ist, (§. 20.),

$$GH = V \cos \alpha \text{ und } GK = V \sin \alpha$$

oder wenn YZ eine feste Ebene ist und

P den von V herrührenden Druck bezeichnet, welcher in die Ebene YZ fällt und solche nach derjenigen Richtung fort zu treiben strebt, welche in der Ebene des Einfallswinkels α liegt, und

Q den Druck bezeichnet, der im Punkte G senkrecht auf die Ebene YZ entstehet, so ist

$$\text{(I)} \quad P = V \cos \alpha$$

$$\text{(II)} \quad Q = V \sin \alpha.$$

Man pflegt den Punkt N, die Projection des Punktes M und die Linie NG die Projection der Linie MG auf die Ebene YZ zu nennen. Auch heißt Q der Normaldruck gegen die Ebene YZ.

§. 32.

Aufgabe. Auf den Punkt G, Figur 20., wirken drei Kräfte P, P′, P″ deren Richtungen GA, GB, GC wechselseitig auf einander senkrecht sind, man soll die Größe und Richtung der Mittelkraft V finden. Taf. I. Fig. 20.

Auflösung. Es sey $GA = P$, $GB = P'$, $GC = P''$; man ergänze zu diesen drei gegebenen Seiten des Parallelopipeden AGBCDH und ziehe die Diagonale DG, so ist DG die Größe und Richtung der Mittelkraft V.

Denn in der Grundfläche AB ist die Diagonale GH die Mittelkraft von P und P′, so wie im Rechteck GHDC, die Diagonale DG, die Mittelkraft zwischen GH und GC oder zwischen P, P′ und P″ ist, folglich muß $V = DG$ seyn.

Weil im Rechtecke AGBH

$$GH^2 = AG^2 + GB^2$$

und im Rechtecke GCDH

$$DG^2 = GH^2 + GC^2 \text{ so ist}$$

$$DG^2 = AG^2 + GB^2 + GC^2$$

oder man findet die Mittelkraft

$$V = \sqrt{(P^2 + P'^2 + P''^2)}$$

Umgekehrt läßt sich jede Kraft V in drei aufeinander senkrechte Richtungen zerlegen, welche ganz willkürlich angenommen werden können, daher läßt sich auch jede Anzahl von Kräften, welche auf einen Punkt wirken, nach drei auf einander senkrechten Richtungen zerlegen.

Anmerkung. So wie man mittelst des Parallelogramms der Kräfte zwischen zwei gegebenen Kräften eine dritte findet, welche denselben das Gleichgewicht hält, so geschieht dies hier für drei Kräfte, deren Richtungen nicht in einerlei Ebene fallen durch das Parallelepipeden der Kräfte.

§. 33.

Taf. I. Fig. 21. Aufgabe. Auf den Punkt G, Figur 21., wirken mehrere Kräftn V, V′, V″.... nach Richtungen, welche nicht in einerlei Ebene fallen; man soll die Größe und Richtung der Mittelkraft U für das Gleichgewicht finden.

Auflösung. Durch den Punkt G lege man willkürlich eine Ebene Y Z und bestimme von den Kräften V, V′, V″.... die Einfallswinkel α, α', α''.... gegen die Ebene Y Z sowohl als die Winkel γ, γ', γ''.... welche die Projectionen von den Richtungen der Kräfte, mit einer Linie G A bilden, die willkürlich in der Ebene Y Z gezogen ist. Nun zerlege man jede der Kräfte V, V′, V″.... in zwei Seitenkräfte (§. 20.) wovon die erstern P, P′, P″.... in die Ebene Y Z fallen, die andern Q, Q′, Q″.... aber, nach der Richtung G s auf der Ebene Y Z senkrecht sind, so ist

$$P = V \cos \alpha; \quad P' = V' \cos \alpha'; \ldots\ldots$$
$$Q = V \sin \alpha; \quad Q' = V' \sin \alpha'; \ldots\ldots$$

Aus der Größe und Richtung sämmtlicher Kräfte P, P′, P″.... welche in die Fläche Y Z fallen, läßt sich eine Mittelkraft R und der Richtungswinkel finden, welchen die Richtung der Kraft R mit der Linie A G einschließt. Es sei dieser Winkel $A G r = \varphi$, so ist (§. 24. I.)

$$\text{(I)}\ R = \sqrt{\left\{\begin{array}{l}(P \sin \gamma + P' \sin \gamma' + P'' \sin \gamma'' + \ldots)^2 \\ + (P \cos \gamma + P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + \ldots)^2\end{array}\right\}} \text{ und}$$

$$\text{(II)}\ \operatorname{tgt} \varphi = \frac{P \sin \gamma + P' \sin \gamma' + P'' \sin \gamma'' + \ldots}{P \cos \gamma + P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + \ldots}$$

Ist nun S die Summe aller Kräfte Q, Q′, Q″.... welche auf die Ebene Y Z senkrecht nach der Richtung G s wirken, so ist

$$\text{(III)}\ S = V \sin \alpha + V' \sin \alpha' + V'' \sin \alpha'' + \ldots$$

Man setze $Gr = R$ und $Gs = S$, zeichne das Parallelogramm $Gsur$, so ist $Gu = U$ die Mittelkraft welche R und S, also auch $P, P', P'' \ldots$ und $Q, Q', Q'' \ldots$ oder den Kräften $V, V', V'' \ldots$ das Gleichgewicht hält. Nun ist

$$Gu^2 = Gr^2 + Gs^2 \text{ daher}$$

$$\text{(IV)} \quad U = \sqrt{(R^2 + S^2)}$$

und wenn der Richtungswinkel $rGu = \omega$ gesetzt wird

$$ur = rG \operatorname{tgt} \omega \text{ oder}$$

$$\text{(V)} \quad \operatorname{tgt} \omega = \frac{S}{R}$$

Es läßt sich daher jedesmal wenn die Größe und Lage der Richtungen mehrerer Kräfte $V, V', V'' \ldots$ gegen eine Ebene gegeben ist, daraus die Größe der Mittelkraft U und die Lage ihrer Richtung mittelst der Winkel φ und ω finden.

Eben so kann man jede Anzahl von Kräften welche auf einen Punkt wirken, in zwei andere Kräfte R und S zerlegen, welche auf einander senkrecht sind.

§. 34.

Zusatz. Sind sämmtliche Kräfte $V, V', V'' \ldots$ welche auf einen Punkt wirken und deren Richtungen nicht in einerlei Ebene fallen, mit einander im Gleichgewichte, so ist ihre Mittelkraft $U = 0$, daher $R = 0$ und $S = 0$, und man erhält für die Bedingungen unter welchen die Kräfte $V, V', V'' \ldots$ einander das Gleichgewicht halten.

$$P \sin \gamma + P' \sin \gamma' + P'' \sin \gamma'' + \ldots = 0$$

$$P \cos \gamma + P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + \ldots = 0$$

$$V \sin \alpha + V' \sin \alpha' + V'' \sin \alpha'' + \ldots = 0$$

wo bekanntlich $P = V \cos \alpha$; $P' = V' \cos \alpha' \ldots$ ist.

§. 35.

Taf. I. Fig. 22. Drei Kräfte P, Q, R, Figur 22., wirken nach verschiedenen Richtungen G P, G Q, G R auf den Punkt G und erhalten einander im Gleichgewichte. Erhält der Punkt G durch irgend eine Ursache eine grade fortgehende Bewegung, etwa von G nach G′ und die Kräfte P, Q, R wirken fortwährend nach Richtungen G′ P′, G′ Q′, G′ R′ welche den ersten Richtungen derselben parallel sind, so ist jede Kraft um einen Theil, nach paralleler Richtung gemessen, fort gerückt. Zieht man G′ B auf die ursprüngliche Richtung G Q senkrecht, so ist die Kraft Q um den Weg G B in paralleler Richtung weiter gerückt und man kann G B den Weg der Kraft Q nach paralleler Richtung nennen. Eben so sind wenn G′ A und G′ D auf den Richtungen G P und G R senkrecht sind, G A und G D die Wege, welche die Kräfte P und R nach parallelen Richtungen zurück gelegt haben. Nun läßt sich beweisen, daß bei einer jeden grade fortgehenden Bewegung des Punkts G, die Summe von den Producten einer jeden Kraft in ihren nach paralleler Richtung zurück gelegten Weg $= 0$ ist, vorausgesetzt daß man die Wege (G A, G B) welche nach der Richtung der Kräfte zurück gelegt sind, positiv, und die Wege (GD) welche gegen diese Richtungen gehen, negativ in Rechnung bringt.

Denn man setze die Winkel $PGD = \alpha$, $DGQ = \beta$, $DGG' = \varphi$; die Wege $GA = p$, $GB = q$, $GD = r$, $GG' = x$;

so erhält man in den rechtwinklichten Dreiecken $GG'A$, $GG'B$, $GG'D$

$\frac{p}{x} = \cos(\alpha + \varphi)$; $\frac{q}{x} = \cos(\beta - \varphi)$; $\frac{r}{x} = \cos\varphi$

Nun ist

$$\cos(\alpha + \varphi) = \cos\varphi \cos\alpha - \sin\varphi \sin\alpha \text{ oder}$$

$$\frac{p}{x} = \frac{r}{x} \cos\alpha - \frac{x}{x} \sin\varphi \sin\alpha \; [I]$$

Ferner ist

$$\cos(\beta - \varphi) = \cos\varphi \cos\beta + \sin\varphi \sin\beta \text{ oder}$$

$$\frac{q}{x} = \frac{r}{x} \cos\beta + \frac{x}{x} \sin\varphi \sin\beta, \; [II]$$

Die Gleichung [I] werde mit $x \sin\beta$ und [II] mit $x \sin\alpha$ multiplizirt, so ist

$$p \sin\beta = r \cos\alpha \sin\beta - x \sin\varphi \sin\alpha \sin\beta \text{ und}$$

$$q \sin\alpha = r \sin\alpha \cos\beta + x \sin\varphi \sin\alpha \sin\beta$$

Beide Gleichungen addirt, geben

$$p \sin\beta + q \sin\alpha = r(\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta)$$

$$= r \sin(\alpha + \beta) \text{ oder}$$

$$p \sin\beta + q \sin\alpha - r \sin(\alpha + \beta) = 0$$

Nach §. 19. ist

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{R \sin\beta}{P} \text{ und } \sin\alpha = \frac{Q \sin\beta}{P}.$$

Setzt man diese Werthe in die zuletzt gefundene Gleichung und multiplizirt durchgängig mit $\frac{P}{\sin\beta}$, so wird

$$p \cdot P + q \cdot Q - r \cdot R = 0$$

Da nun P, Q, R so angesehen werden können als wenn sie aus jeder noch so großen Anzahl von Kräften zusammen gesetzt sind (§. 33.) so folgt hieraus die Allgemeinheit des Satzes für jede Anzahl von Kräften.

§. 36.

1. Zusatz. Für den Fall daß $\varphi = 90°$ wird, ist $\cos\varphi = 0$, also $r = 0$ daher

$$q \cdot Q = p \cdot P$$

weil cos $(\alpha + 90^\circ)$ also auch p negativ ist. Nennt man nun P die Kraft und Q die Last, so ist p der Weg der Kraft und q der Weg der Last und es verhält sich

$$P : Q = q : p$$

oder für das Gleichgewicht zwischen P und Q, wenn eine gradlinigte Bewegung senkrecht auf die Richtung der dritten Kraft R entsteht, verhält sich die Kraft P zur Last Q, umgekehrt wie die Wege welche sie nach parallelen Richtungen durchlaufen.

§. 37.

Taf. I. Fig. 22. 2. Zusatz. Statt daß die Kraft R in G nach der Richtung GR wirkt, könnten, wenn der Punkt r mit G in einer festen Verbindung steht, in r mehrere Kräfte nach verschiedenen Richtungen angebracht werden, welche dasselbe auf den Punkt G wirken, was R verrichtet, und man könnte R weglassen, ohne das Gleichgewicht zu stören. Für die Wege der Kräfte in r wird alsdann noch eben so der erwiesene Satz gelten, und weil man in den übrigen Richtungen der Kräfte noch mehrere solche Punkte wie r annehmen kann, so folgt ganz allgemein für jede Anzahl von Kräften, sie mögen auf einen oder mehrere Punkte einer festen Masse oder eines aus festen Linien verbundenen Systems wirken, daß, für das Gleichgewicht unter sämmtlichen Kräften, die algebraische Summe von den Producten einer jeden Kraft in ihren nach paralleler Richtung zurück gelegten Weg = 0 seyn muß.

Anmerkung. Dieser Satz ist von der größten Wichtigkeit und kann als allgemeines Grundgesetz der Statik angesehen werden; auch ist derselbe unter dem

Namen des Cartesischen Grundsatzes bekannt. Hier ist er nur für die grade fortgehende Bewegung bewiesen, er läßt sich aber eben so für die drehende Bewegung erweisen (§. 69.) so daß er in beiden Fällen ganz allgemein gilt und daher die wichtigsten Lehren der Statik enthält. Es ist nicht nothwendig ihn, wie gewöhnlich, für jeden besondern Fall bei den einzelnen statischen Maschinen darzuthun, weil er hier ein für allemal für alle diejenigen Fälle erwiesen ist, welche sich auf das Parallelogramm der Kräfte gründen.

Zweites Kapitel.

Vom Gleichgewichte mehrerer Kräfte welche nicht auf einen einzigen Punkt wirken, oder vom Hebel und der Drehungsaxe.

§. 38.

Jede feste und unbiegsame Linie heißt ein Hebel. (Vectis. *Levier*). Wird derselbe ohne Gewicht vorausgesetzt, so wird er zur Unterscheidung vom physischen, ein mathematischer Hebel genannt.

Derjenige Punkt in welchem der Hebel so befestigt ist, daß er sich frei umdrehen kann, heißt der Ruhe-, Dreh- oder Stützpunkt. (Hypomochlion. *Point d'appui*).

Unter Angriffs- oder Aufhängepunkte versteht man diejenigen Punkte am Hebel, auf welche die einzelnen Kräfte wirken.

Sind nur zwei Kräfte an einem graden Hebel angebracht, so pflegt man auch, wenn sich der Drehpunkt am

Ende des Hebels befindet, denselben einen einarmigten (Vect. homodromus.) zu nennen. Liegt aber der Stützpunkt zwischen beiden Endpunkten des graden Hebels, so heißt derselbe doppelarmig. (V. heterodromus). Bilden endlich die beiden graden Hebelsarme einen Winkel, dessen Spitze in den Drehpunkt fällt, so wird ein solcher Hebel ein **Winkelhebel** (V. angularis) genannt, um ihn von dem graden oder gebogenen Hebel zu unterscheiden.

Bei den folgenden Untersuchungen wird allemal ein gewichtloser Hebel vorausgesetzt und dabei angenommen daß sich die Richtungen sämmtlicher Kräfte in einerlei Ebene befinden, es sei denn daß eine besondere Erinnerung beigefügt ist.

§. 39.

Taf. I. Fig. 23. Am wagerechten doppelarmigen Hebel AB Figur 23. welcher in C seinen Drehungspunkt hat, sind die Gewichte P, Q aufgehängt. Verhalten sich alsdann diese Gewichte umgekehrt wie die Länge der Hebelsarme an welchen sie angebracht sind, so ist der Hebel im Gleichgewichte.

Beweis. Ueber A B beschreibe man den Halbkreis ADB, ziehe CD auf AB senkrecht und durch D, A und D, B die Linien DG und DI. Man nehme auf den Richtungen der Kräfte in dem Sinn, §. 12., $AE = P$ und $BF = Q$ und beschreibe die Parallelogramme EH und FK, so sind die Dreiecke AEG, ACD, BCD und BFI einander ähnlich.

Nun verhält sich den Bedingungen der Aufgabe gemäß

$$P : Q \text{ oder } AE : BF = BC : AC$$

und wegen Aehnlichkeit der angeführten Dreiecke, weil AH = EG und BK = FI ist,

AH : AE = AC : CD und

BF : BK = CD : BC. Aber auch

AE : BF = BC : AC folglich, wenn man die Glieder welche sich aufheben weg läßt,

AH : BK = 1 : 1 also ist AH = BK.

Außer den Kräften AE und BF bringe man in A die Kraft AH und in B die Kraft BK an, so entspringt aus beiden Kräften in A, die Mittelkraft AG, und aus den beiden Kräften in B, die Mittelkraft BI. Man nehme DL = AG; DM = BI und zeichne das Parallelogramm DLMN, so wird die Diagonale ND verlängert durch C gehen und man kann in derselben eine Kraft DN anbringen, welche mit AG und BI also auch mit AE, AH, BF und BK im Gleichgewichte ist. Bringt man die Kraft DN im Punkte C an, so muß das Gleichgewicht unter den fünf Kräften DN, AE, AH, BF und BK welche am Hebel AB wirken noch bestehen (§. 4.) und der Hebel auch ohne Unterstützung in Ruhe bleiben. Aber AH = BK, daher kann man (§. 7.) diese Kräfte wegnehmen und das Gleichgewicht unter den drei Kräften AE, BF und DN bleibt ungestört. Wird endlich anstatt der Kraft DN der Punkt C befestigt, so kann auch die Kraft DN weggenommen werden, ohne das Gleichgewicht unter den Kräften AE = P und BF = Q zu stören. Es sind daher die beiden Kräfte AE = P und BF = Q am Hebel AB im Gleichgewichte, wenn sich P : Q = BC : AC verhält.

Umgekehrt läßt sich auf eine ähnliche Art beweisen, wenn sich die Kräfte P, Q im Gleichgewichte befinden, daß sich alsdann die Hebelsarme, an welchen sie angebracht sind, umgekehrt wie diese Kräfte verhalten müssen.

§. 40.

Zusatz. Weil die Kraft DN zur Erhaltung des Gleichgewichts eben die Wirkung hervor bringt, als wenn man den Punkt C des Hebels befestigt, so leidet der Punkt C nach der auf AB senkrechten Richtung CN einen Druck $= DN$. Man ziehe MO, LS auf CN senkrecht, so ist das Dreieck $AEG = MNO$ und $BFI = DMO$, also $NO = AE$ und $OD = BF$, daher $DN = NO + OD = AE + BF = P + Q$. Setzt man nun die Kraft $DN = R$, so findet man den Druck welchen der Drehpunkt C nach einer den Richtungen der Kräfte P, Q parallelen Richtung leidet, oder

$$(\mathrm{I})\ R = P + Q$$

Man setze $AC = a$, $BC = b$ so verhält sich
$P : Q = b : a$ daher ist

$$(\mathrm{II})\ aP = bQ$$

oder wenn man den Drehpunkt als Mittelpunkt der Momente (§. 27.) annimmt, so ist der grade doppelarmige Hebel im Gleichgewicht, wenn die Momente der Gewichte einander gleich sind.

Sind daher die Hebelsarme a, b nebst einem Gewichte gegeben, so kann man daraus das andere Gewicht finden.

$$(\mathrm{III})\ P = \frac{bQ}{a} \text{ oder } Q = \frac{aP}{b}$$

Wären hingegen die beiden Gewichte nebst einem Hebelsarme gegeben, so findet man den zweiten Hebelsarm

$$(\mathrm{IV})\ a = \frac{bQ}{P} \text{ oder } b = \frac{aP}{Q}.$$

Nimmt

Nimmt man die Unterstützung in C weg und bringt dafür die Kraft R nach einer auf AB senkrechten Richtung CD an, so sind die drei Kräfte P, Q, R am Hebel AB im Gleichgewichte. Die Kraft Q verhindert, daß der Punkt B nicht ausweicht. Wird daher B so befestigt daß sich der Hebel um B frei drehen kann, so wird Q entbehrlich, man kann dieses Gewicht weg nehmen und die beiden Kräfte P und R am einarmigen Hebel sind im Gleichgewichte. Es verhielt sich aber

$P : Q = BC : AC$ daher auch

$P : P + Q = BC : BC + AC$

oder weil $P + Q = R$ und $BC + AC = BA$ ist

$P : R = BC : BA$ folglich

(V) $BA \cdot P = BC \cdot R$

Es sind daher auch am einarmigen Hebel zwei Kräfte P und R im Gleichgewichte, wenn ihre Momente vom Drehpunkte B gerechnet gleich sind.

Der Druck auf den Drehpunkt B ist (I)

(VI) $Q = R - P$

Beispiel. Die Gewichte $P = 40$ und $Q = 50$ Pfund, sollen am doppelarmigen Hebel senkrecht angebracht werden, wenn der Hebelsarm woran P hängt 8 Fuß lang ist. Wie groß wird der andere Hebelsarm zum Aufhängen des Gewichts Q seyn müssen?

Nach (IV) findet man wenn b die gesuchte Länge bezeichnet

$$b = \frac{8 \cdot 40}{50} = 6\tfrac{2}{5} \text{ Fuß.}$$

§. 41.

Aufgabe. Senkrecht auf den wagerechten graden Hebel AB, Figur 24., welcher an seinen beiden End- Taf. I. Fig. 24.

punkten unterstützt ist, wirkt in C eine Kraft R; man fragt, wie stark die Unterlagen A, B gedrückt werden?

Auflösung. Der Druck auf A sei P, auf B, Q; so wird eine Kraft P senkrecht auf AB in A angebracht, mit R im Gleichgewichte seyn, wenn man die Unterlage bei A wegnimmt, und B als den Drehpunkt des Hebels ansieht. Es ist aber (§. 40.)

$$P = \frac{BC \cdot R}{AB}$$

und eben so groß muß der Druck auf die Unterlage bei A seyn.

Auf gleiche Weise findet man den Druck auf die Unterlage bei B oder

$$Q = \frac{AC \cdot R}{AB}.$$

Beispiel. Für R = 50 Pfund; AB = 16, AC = 7, also CB = 9 Fuß, ist der Druck auf A oder

$$P = \frac{9 \cdot 50}{16} = 28\tfrac{1}{8} \text{ Pfund}$$

und der Druck auf B oder

$$Q = \frac{7 \cdot 50}{16} = 21\tfrac{7}{8} \text{ Pfund}.$$

Auch hätte man $Q = R - P$ finden können (§. 40. VI.)

Zusatz. Wird AC = CB oder hängt die Last R in der Mitte beider Unterlagen, so ist $P = Q = \frac{1}{2}R$ oder die Last wird alsdann auf ihre beide Unterlagen gleich vertheilt.

§. 42.

Taf. I. Fig. 25. An einem wagerechten graden Hebel AB, Figur 25., sind mehrere Kräfte P, P′, P″, P‴ an dem einen Arm AC, in Entfernungen a, a′, a″, a‴ vom Drehungspunkte C angebracht, wovon einige nach oben, andere nach unten senkrecht auf den Hebel wirken; ist ferner senkrecht an dem andern Hebelsarm $CB = b$ eine Kraft Q angebracht, so sind sämmtliche Kräfte im Gleichgewichte, wenn die algebraische Summe (*) der Momente des einen Hebelarms dem Momente $b.Q$ des andern Hebelarms gleich ist; oder wenn

$$aP + a'P' - a''P'' + a'''P''' = bQ \text{ ist.}$$

Beweis. Anstatt Q sollen in B zur Hervorbringung des Gleichgewichts mit P, P', $-P''$, P''', vier einzelne Kräfte q, q', $-q''$, q''' angebracht werden, so ist erforderlich (§. 40.) daß

$$aP = bq$$
$$a'P' = bq'$$
$$-a''P'' = -bq''$$
$$a'''P''' = bq''' \text{ oder}$$
$$aP + a'P' - a''P'' + a'''P''' = b(q + q' - q'' + q''') \text{ ist.}$$

Nach der Voraussetzung ist aber

$$aP + a'P' - a''P'' + a'''P''' = b.Q \text{ daher}$$
$$b(q + q' - q'' + q''') = b.Q \text{ oder}$$
$$Q = q + q' - q'' + q'''$$

Nun sind die Kräfte P, P', $-P''$, P''' mit $(q + q' - q'' + q''')$ im Gleichgewichte, daher auch mit Q.

§. 43.

Zusatz. Von den einzelnen Kräften q, q', q'', q''', aus welchen die Kraft Q bestehet, wirken q, q', q''' nach

---

(*) Das heißt, die Kräfte wie P'', welche den untern entgegengesetzt sind, werden negativ in Rechnung gebracht, daher auch ihre Momente das Minuszeichen erhalten.

unten und q'' nach oben; oder es drücken die Kräfte P, q; P', q'; P''', q''' den Drehpunkt C nach unten, und P'', q'' nach oben (§. 40.). Der gesammte Druck R auf den Drehpunkt C ist daher

$$R = P + q + P' + q' + P''' + q''' - P'' - q''$$

oder

$$R = P + P' - P'' + P''' + Q$$

d. h. der Druck auf den Drehpunkt des Hebels, ist der algebraischen Summe sämmtlicher Kräfte gleich, und eine Kraft von dieser Größe im Punkte C senkrecht auf den Hebel nach oben angebracht, wird ebenfalls den Hebel im Gleichgewichte erhalten, wenn die Unterstützung bei C weggenommen wird.

§. 44.

Taf. I. Fig. 26. Wären an dem einen Arme eines wagerechten graden Hebels AB, Figur 26., die Kräfte P, P', P'' in Entfernungen a, a', a'' vom Drehpunkte C, und an dem andern die Kräfte Q, Q' in Entfernungen b, b' senkrecht auf den Hebel angebracht, so sind alle Kräfte im Gleichgewichte, wenn die algebraische Summe der Momente an dem einen Hebelsarme, der algebraischen Summe der Momente am andern Hebelsarme gleich ist, oder wenn

$$aP - a'P' + a''P'' = bQ + b'Q' \text{ ist}$$

Beweis. Dieses Hauptgesetz des Hebels einzusehen nehme man CD = CE = x, so ist (§. 42.) in D eine Kraft R mit P, P', P'' im Gleichgewichte, wenn

$$xR = aP - a'P' + a''P'' \text{ ist.}$$

In E nehme man eine Kraft S an, so daß

$$xS = bQ + b'Q' \text{ wird,}$$

alsdann müssen alle Kräfte P, P', P'', Q, Q', R, S im Gleichgewichte seyn.

Weil aber nach der Voraussetzung

$$aP - a'P' + a''P'' = bQ + b'Q' \text{ ist,}$$

so muß auch nach den zuletzt gefundenen Gleichungen $xR = xS$ also $R = S$ seyn, daher können die Kräfte R und S weggenommen werden, ohne das Gleichgewicht zu stören (§. 7.), und die Kräfte P, P', P'', Q, Q' müssen noch im Gleichgewichte bleiben.

Daß dieser Satz von jeder größern Anzahl von Kräften ebenfalls wahr ist, läßt sich leicht einsehn, weil der Beweis desselben ganz der nämliche ist.

Zusatz. Auch folgt hieraus mit Hülfe des vorigen §. daß der Druck auf den Drehpunkt des Hebels, der algebraischen Summe sämmtlicher Gewichte gleich ist.

§. 45.

Aufgabe. Am wagerechten Hebel AB, Figur 27., wirken mehrere Kräfte senkrecht auf denselben; man sucht die Entfernung des Drehpunkts C von irgend einem in dem Hebel oder in der Verlängerung desselben angenommenen Punkte O. Taf. I. Fig. 27.

Auflösung. Die Entfernung der Richtungen der Kräfte P, P', P'', P''' von O sei e, e', e'', e''' und die gesuchte Entfernung des Umdrehungspuntes oder $OC = x$, so ist (§. 44.)

$$CA.P - CE.P' = CF.P'' + CB.P''' \text{ oder}$$

$$(x - e)P - (x - e')P' = (e'' - x)P'' + (e''' - x)P'''$$

also

$$xP - xP' + xP'' + xP''' = eP - e'P' + e''P'' + e'''P'''$$

daher

$$x(P - P' + P'' + P''') = eP - e'P' + e''P'' + e'''P'''$$

folglich der gesuchte Abstand AC oder

$$x = \frac{eP - e'P' + e''P'' + e'''P'''}{P - P' + P'' + P'''}$$

Fällt der Punkt O zwischen die Endpunkte A, B, etwa in O', und man setzt die Abstände $O'A = f$, $O'E = f'$, $O'F = f''$, $O'B = f'''$ und $O'C = y$ so ist

$$CA \,.\, P - CE \,.\, P' = CF \,.\, P'' + CB \,.\, P''' \text{ oder}$$

$$(f - y)P - (f' - y)P' = (f'' + y)P'' + (f''' + y)P'''$$

also

$$-yP + yP' - yP'' - yP''' = -fP + f'P' + f''P'' + f'''P'''$$

oder

$$-y(P - P' + P'' + P''') = -fP + f'P' + f''P'' + f'''P'''$$

daher der Abstand $O'C$ oder

$$-y = \frac{-fP + f'P' + f''P'' - f'''P'''}{P - P' + P'' + P'''}.$$

Aehnliche Resultate würde man erhalten, wenn der Punkt O in irgend einem andern Punkte des Hebels angenommen wird. Läge O in O'', und man setzte, daß die Abstände durch g, g', g'', g''' und z bezeichnet werden, so findet man $O''C$ oder

$$z = \frac{-gP - g'P' + g''P'' + g'''P'''}{P - P' + P'' + P'''}.$$

Bei näherer Untersuchung der für x, y, z gefundenen Werthe ergiebt sich, daß der Nenner die algebraische Summe der Kräfte enthält, und daß im Zähler die algebraische Summe der Momente mit Bezug auf die Lage der angenommenen Punkte O, O' oder O'' enthalten ist.

Werden nämlich, wie erforderlich ist, alle nach oben wirkende Kräfte negativ in Rechnung gebracht, und eben so alle Abstände, welche rückwärts von den Punkten O'

oder O'' nach A zu genommen werden, ebenfalls negativ gerechnet, so kann man die Zähler der für x, y, z gefundenen Brüche als algebraische Summe der Momente der Kräfte ansehn. Auch sieht man hieraus, daß das Minuszeichen vor y hier so viel bedeutet, daß von O' ab, O'C oder y nicht nach B hin, sondern rückwärts nach A hin, genommen werden soll. Taf. I. Fig. 27.

Man findet daher ganz allgemein die Entfernung des Drehungspunktes von irgend einem innerhalb oder in der Verlängerung eines Hebels liegenden Punkte, wenn man diesen Punkt als Mittelpunkt der Momente (§. 27.) annimmt, und die algebraische Summe der Momente, durch die algebraische Summe der Gewichte dividirt.

1. Beispiel. Wäre O der Mittelpunkt der Momente, so sei $e = 5$, $e' = 11$, $e'' = 17$, $e''' = 20$ Fuß, und $P = 12$, $P' = -9$, $P'' = 8$, $P''' = 10$ Pfund, so findet man OC oder

$$x = \frac{5.12 - 11.9 + 17.8 + 20.10}{12 - 9 + 8 + 10} = 14\tfrac{1}{7} \text{ Fuß.}$$

2. Beispiel. Wenn O' als Mittelpunkt der Momente angenommen wird, so sei $e = -10$, $e' = -4$, $e'' = 2$, $e''' = 5$ Fuß, und $P = 12$, $P' = -9$, $P'' = 8$, $P''' = 10$ Pfund, so ist O'C oder

$$x = \frac{-10.12 + 4.9 + 2.8 + 5.10}{12 - 9 + 8 + 10} = -\tfrac{6}{7} \text{ Fuß.}$$

3. Beispiel. Wird A als Mittelpunkt der Momente angenommen, so ist $e = 0$. Nun sei $e' = 6$, $e'' = 12$, $e''' = 15$ Fuß, und $P = 12$, $P' = -9$, $P'' = 8$, $P''' = 10$ Pfund, so wird AC oder

$$x = \frac{0.12 - 6.9 + 12.8 + 15.10}{12 - 9 + 8 + 10} = 9\tfrac{1}{2} \text{ Fuß.}$$

§. 46.

Der nach senkrechter Richtung auf den Hebel entstehende Druck R auf den Drehpunkt C, Figur 27., ist der algebraischen Summe von den Kräften P, P′, P″, P‴ gleich (§. 44.); daher wenn $R = P - P' + P'' + P'''$ nach der auf AB senkrechten Richtung CR angebracht, und die Befestigung bei C weggenommen wird, so sind die Kräfte P, P′, P″, P‴, R im Gleichgewichte. Wird O als Mittelpunkt der Momente angenommen, so ist nach dem vorigen §.

Taf. I. Fig. 27.

$$xR = eP - e'P' + e''P'' + e'''P''' \text{ oder}$$
$$xR + e'P' = eP + e''P'' + e'''P'''.$$

Eben so erhält man für die Punkte O′ und O″

$$fP = yR + f'P' + f''P'' + f'''P''' \text{ und}$$
$$zR + gP + g'P' = g''P'' + g'''P''';$$

daher sind an einem jeden nicht unterstützten graden Hebel die auf ihn senkrecht angebrachten Kräfte im Gleichgewichte, wenn von einem willkürlich angenommenen Mittelpunkte der Momente

I. die Summe der Momente der Kräfte, welche den Hebel, nach einerlei Richtung, um den Mittelpunkt der Momente zu drehen streben, der Summe der Momente derjenigen Kräfte, welche nach entgegengesetzter Richtung wirken, gleich sind,

und

II. wenn die Summe der Kräfte, welche nach einerlei Richtung wirken, der Summe der Kräfte, welche nach entgegengesetzter Richtung angebracht worden, gleich sind.

Es ist wohl zu bemerken, daß die erste Bedingung allein nicht zureicht, das Gleichgewicht unter den Kräften eines graden nicht unterstützten Hebels zu beurtheilen.

§. 47.

Die allgemeinen Ausdrücke des vorigen §. können noch dazu dienen, die Fundamentalgleichungen für die Bedingungen des Gleichgewichts am graden nicht unterstütz- Hebel zu entwickeln. Denn es ist

$$(\mathrm{I})\quad eP - e'P' + e''P'' + e'''P''' - xR = 0$$

$$(\mathrm{II})\quad P - P' + P'' + P''' - R = 0$$

d. h. an einem nicht unterstützten graden Hebel sind sämmtliche darauf senkrecht wirkende Kräfte im Gleichgewichte, wenn für einen willkürlich angenommenen Mittelpunkt der Momente, die algebraische Summe der Momente sowohl, als die algebraische Summe der Kräfte selbst = o ist.

§. 48.

Die Richtungen A'P, B'Q, DR, Figur 28., von den Kräften P, Q, R fallen in die feste Ebene YZ; sind nun überdies diese drei Kräfte im Gleichgewichte, und man nimmt in der Richtung der Kraft R einen willkürlichen Punkt C an, und befestigt denselben dergestalt, daß sich die Ebene YZ um C frei drehen kann, so wird das Gleichgewicht noch bestehen. Der feste Stützpunkt C hebt den Druck der Kraft R auf, und man kann diese Kraft weglassen, ohne das Gleichgewicht zu stören. Es sind alsdann in der Ebene YZ die Kräfte P und Q, deren Stützpunkt C in die Richtung ihrer Mittelkraft fällt, mit einander im Gleichgewichte, und daher auch, wenn CA,

Taf. I. Fig. 28.

CB auf A'P, B'Q senkrecht sind, die Momente CA.P und CB.Q (§. 27.) einander gleich.

Die Kraft P wirke am Punkte E; Q an F (§. 4.), und man ziehe in der festen Ebene YZ die Linien CE, CF, so bilden solche einen Winkelhebel, und wenn man diese Linien so mit einander verbunden annimmt, daß sie sich um den Punkt C frei drehen, dabei aber kein Hebelsarm ohne den andern in Bewegung kommt, so kann man die feste Ebene weglassen, ohne das Gleichgewicht zu stören, weil die Kräfte noch eben so wie vorher in den Punkten E und F nach ihren Richtungen angebracht bleiben und nicht weichen können, so daß die gewichtlose Ebene nunmehr zur Erhaltung des Gleichgewichts nichts beitragen kann.

Da dieser Satz von jeder Lage der Linien CE und CF gilt, so müssen eben so wie bei dem graden Hebel (§. 40.) auch an jedem Winkelhebel zwei Kräfte P, Q im Gleichgewichte seyn, wenn ihre Momente CA.P und CB.Q einander gleich sind.

Auch läßt sich leicht einsehen, daß es ganz gleichgültig ist, ob die Hebelsarme grade oder auf irgend eine Art
Taf. I. wie Figur 29. gebogen sind, wenn solche nur hinlängliche
Fig. 29. Festigkeit haben, und die Momente CA.P und CB.Q einander gleich bleiben, so wird auch der Hebel in Ruhe seyn.

Umgekehrt läßt sich eben so beweisen, daß wenn zwei Kräfte an irgend einem Hebel mit einander im Gleichgewichte sind, so müssen auch ihre Momente einander gleich seyn.

§. 49.

Aufgabe. An einem nicht unterstützten graden Hebel AB, Figur 30., sind drei Kräfte P, Q, R in A, B, C nach ganz verschiedenen Richtungen angebracht. Man sucht die Bedingungen für das Gleichgewicht. Taf. I. Fig. 30.

Auflösung. Man setze die Länge $AC = a$, $AB = b$, den Winkel $OAP = \alpha$, $ABQ = \beta$, $BCR = \gamma$, so ist nach §. 29. (I), (II) und (III), weil hier $\gamma + 180°$ dem dortigen φ gleich ist,

$$\text{(I)} \quad P \sin\alpha + Q \sin\beta = R \sin\gamma$$

$$\text{(II)} \quad P \cos\alpha + Q \cos\beta = R \cos\gamma$$

$$\text{(III)} \quad bQ \sin\beta = aR \sin\gamma$$

welches die drei Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht unter den Kräften P, Q, R sind. Die verlängerten Richtungen der Kräfte P, Q müssen sich daher nach §. 29. in einem gemeinschaftlichen Punkte der Richtung CR schneiden.

Auf eine ähnliche Art wie §. 29. findet man die Kraft

$$\text{(IV)} \quad R = \sqrt{[(P \sin\alpha + Q \sin\beta)^2 + (P \cos\alpha + Q \cos\beta)^2]}$$

Ferner den Winkel BCR, welchen die Richtung der Kraft R mit dem Hebel einschließt, oder

$$\text{(V)} \quad \operatorname{tgt} \gamma = \frac{P \sin\alpha + Q \sin\beta}{P \cos\alpha + Q \cos\beta}$$

und endlich den Abstand AC oder

$$\text{(VI)} \quad a = \frac{bQ \sin\beta}{P \sin\alpha + Q \sin\beta}$$

§. 50.

Zusatz. Wenn an einem Hebel die drei Kräfte P, Q, R unter den Winkeln α, β, γ angebracht im Gleichgewichte sind, so müssen diese Kräfte an denselben Punkten des Hebels, aber unter den Ergänzungswinkeln zu zwei rechten angebracht, ebenfalls im Gleichgewichte bleiben.

Taf. I. Fig. 31. Denn man nehme Figur 31.

$$\alpha' = 180° - \alpha \text{ statt } \alpha$$
$$\beta' = 180° - \beta \text{ statt } \beta \text{ und}$$
$$\gamma' = 180° - \gamma \text{ statt } \gamma$$

so bleiben die Bedingungsgleichungen (I) und (III) ungeändert, weil $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ ist. Dagegen erhält man $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$; weil aber deshalb alle drei Glieder der Gleichung (II) negativ werden, welche vorher positiv gewesen sind, so muß die Gleichheit auch noch bestehen, daher müssen auch die Kräfte P, Q, R unter den Winkeln $180° - \alpha$, $180° - \beta$, $180° - \gamma$ einander noch im Gleichgewichte erhalten, wenn sie vorher unter den Winkeln α, β, γ angebracht, im Gleichgewichte waren.

Wären z. B. die drei Kräfte P, Q, R unter den Winkeln von 32, 107 und 75 Grad angebracht, mit einander im Gleichgewichte, so wird dies auch noch unter den Winkeln 148, 73 und 105 Grad bestehen.

§. 51.

Taf. II. Fig. 32. **Aufgabe.** Der Hebel AB, Figur 32., nebst den Kräften P, Q, R, welche an den Punkten A, B, C angebracht werden sollen, sind in Linien gegeben, man soll die Richtungen dieser Kräfte durch Zeichnung finden.

Auflösung. Auf der willkürlich gezogenen Linie DF nehme man DE = BC, EF = CA, und zeichne über DE das Dreieck DEG dergestalt, daß sich verhält DE : EG : DG = P : Q : R.

Man ergänze das Parallelogramm DEGH, ziehe FG bis I, trage aus I nach F die Linie BA bis K, so wird IK = AB. Nun ziehe man durch K die Linie KA′ mit DI parallel, und durch A′ mit KI die Linie A′B′, verlängere DG bis C′, so ist A′C′B′ dem gegebenen Hebel ACB gleich, und A′P, B′Q, C′R sind die gesuchten Richtungen der Kräfte P, Q, R für das Gleichgewicht. Taf. II. Fig. 32.

Fällt der Punkt K in K′ zwischen F und I, so muß die Linie K′A″ ebenfalls mit DI parallel gezogen werden, bis solche die Linie DF in A″ schneidet. Alsdann giebt eine durch A″ mit FI gezogene Parallellinie die gesuchte Lage des Hebels.

Beweis. Im Parallelogramme DEGH verhalten sich die Seiten DE, DH, DG wie die Kräfte P, Q, R, daher müssen diese nach den bestimmten Richtungen angebracht einander im Gleichgewicht erhalten. Aber KI = AB und KI = A′B′, daher auch A′B′ = AB. Ferner verhält sich

FE : ED = FG : GI

FG : GI = A′C′ : C′B′ also

FE : ED = A′C′ : C′B′ oder weil FE = AC und ED = BC

AC : CB = A′C′ : C′B′. Aber AB = A′B′

daher auch

AC = A′C′ und CB = C′B′.

Aus den hier gefundenen Richtungen der Kräfte P, Q, R lassen sich für denselben Hebel noch drei andere verschiedene Richtungen nach §. 50. angeben, bei welchen diese Kräfte ebenfalls im Gleichgewichte sind, wenn man statt der gefundenen Richtungen, die Ergänzungswinkel derselben zu zwei rechten Winkeln annimmt.

Uebrigens wird erfordert, daß jede zwei Kräfte zusammengenommen größer als die dritte sind. Denn wäre $P + Q = R$, so muß sich, wenn die Auflösung möglich seyn soll, $P : Q = BC : AC$ verhalten; alsdann ist aber die Aufgabe nach §. 40. dadurch aufgelöst, daß man die Gewichte senkrecht auf den Hebel anbringt. Wären aber zwei Kräfte größer als die dritte, so ist die Auflösung nach §. 18. unmöglich.

§. 52.

Aufgabe. An einem willkürlich gebogenen Hebel
Taf. II. Fig. 33. u. 34. ACB, Figur 33. und 34., dessen Drehpunkt in C gegeben ist, sollen zwei gegebene Kräfte P und Q in A und B so angebracht werden, daß solche einander das Gleichgewicht halten; man sucht die Richtungen dieser Kräfte.

Auflösung. Aus C werden die Linien CA und CB gezogen, und über denselben die Kreise $ADCD'$ und und $BECE'$ beschrieben. Ferner nehme man

$$CF : CG = Q : P$$

wo CF und CG kleiner als CA und CB seyn müssen. Mit dem Halbmesser CF und CG beschreibe man aus C die Bogen DFD' und EGE', bis solche die zuerst gezeichneten Kreise in D, D' und E, E' schneiden, ziehe die Linien AD und BE, so geben solche die Richtungen AP und BQ für die Kräfte P und Q.

Auch kann man die Punkte AD' und BE' mit einander durch grade Linien verbinden, so erhält man dadurch zwei andere Richtungen AP' und BQ', nach welchen die Kräfte P und Q angebracht ebenfalls im Gleichgewichte sind.

Beweis. In den Halbkreisen ADC und BEC ist CD und CE senkrecht auf AD und BE. Aber CD = CF und CE = CG daher weil

CF : CG = Q : P so verhält sich auch

CD : CE = Q : P folglich ist §. 39. P mit Q im Gleichgewichte.

Dasselbe gilt für die Richtungen AP′ und BQ′.

Zusatz. Wird die Linie CF größer oder kleiner angenommen, so daß F mehr nach A oder C rückt, so entstehen so viel verschiedene Richtungen für die Kräfte P und Q, als man zusammengehörige Punkte F und G zwischen AC und BC annehmen kann, und in allen diesen Fällen müssen die Kräfte P, Q im Gleichgewichte bleiben, weshalb diese Aufgabe eine unzählige Menge von Auflösungen zuläßt. Ist hingegen die Richtung einer von den gegebenen Kräften bestimmt, so erhält man nur zwei mögliche Richtungen für das Gleichgewicht, es sei denn, daß die Auflösung in dem Falle unmöglich werde, wenn z. B. die Kraft P und ihre Richtung nebst der Kraft Q gegeben ist, und man fände aus der Proportion

Q : P = CD : CE

die Linie CE größer als die gegebene Linie CB, weil in diesem Falle der Punkt E nicht in den Umfang des über CB beschriebenen Kreises fallen kann.

§. 53.

An dem willkürlich gebogenen Hebel AA‴, Figur 35., welcher in C seinen Drehungspunkt hat, wirken Kräfte P, P′, P″, P‴ nach verschiedenen Richtungen, deren senkrechte Abstände von C, oder CD = a, CD′ = a′, CD″ = a″, CD‴ = a‴ sind; so ist unter diesen Taf. II. Fig. 35.

Taf. II. Fig. 35. Kräften ein Gleichgewicht, wenn man den Drehpunkt als Mittelpunkt der Momente annimmt, und die Summe der Momente von den Kräften, welche den Hebel auf die eine Seite umzudrehen streben, der Summe der Momente von den Kräften gleich ist, welche eine entgegengesetzte Umdrehung bewirken würden, oder wenn

$$aP + a''P'' = a'P' + a'''P'''.$$

Beweis. Man verbinde mit dem gebogenen Hebel AA''' einen graden Hebel dd''', so daß beide den gemeinschaftlichen Drehungspunkt C erhalten, und einer ohne den andern nicht bewegt werden kann. Man nehme man $CD = Cd = a$, $CD' = Cd' = a'$, $CD'' = Cd'' = a''$, $CD''' = Cd''' = a'''$;

bringe senkrecht auf dd''' in d, d', d'', d'''

die Kräfte p, p', p'', p''' an,

welche den Kräften P, P', P'', P'''

gleich seyn sollen, und den Hebel dd''' nach entgegengesetzter Seite zu drehen streben, so halten die Kräfte P, p; P', p'; P'', p''; P''', p''' einander das Gleichgewicht (§. 39.), oder der Hebel ist in Ruhe. Weil aber nach der Voraussetzung $ap + a''p'' = a'p' + a'''p'''$ ist, so sind (§. 45.) die Kräfte p, p', p'', p''' unter sich im Gleichgewichte, und der Hebel muß in Ruhe bleiben, wenn auch diese Kräfte weggenommen werden (§. 7.); daher halten sich die Kräfte P, P', P'', P''' unter den oben angeführten Bedingungen das Gleichgewicht.

§. 54.

Zusatz. Sind die Richtungen sämmtlicher Kräfte mit einander parallel, so fallen sämmtliche Abstände wie

CD,

CD, CD′, CD″, ... in eine einzige grade Linie, welche man statt des zweiten graden Hebels dd″ annehmen kann. Der Druck sämmtlicher Kräfte auf den Drehpunkt ist alsdann ihrer algebraischen Summe gleich, und die Richtung dieses Drucks ist mit den Richtungen der Kräfte parallel.

§. 55.

Am graden Hebel AA‴, Figur 36., dessen Drehpunkt in C liegt, sind die nach verschiedenen Richtungen angebrachten Kräfte P, P′, P″, P‴ im Gleichgewichte. Man setze die Entfernungen der Angriffspunkte vom Drehpunkt, oder $CA = b$, $CA' = b'$, $CA'' = b''$, $CA''' = b'''$, und die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte mit dem Hebel einschließen, $CAP = \alpha$, $CAP' = \alpha'$, $CAP'' = \alpha''$, $CAP''' = \alpha'''$, so ist alsdann: Taf. II. Fig. 36.

$$bP \sin\alpha + b''P'' \sin\alpha'' = b'P' \sin\alpha' + b'''P''' \sin\alpha''',$$

wo die Kräfte P, P″ den Hebel nach einer, und die Kräfte P′, P‴ nach der entgegengesetzten Seite drehen.

Beweis. Man ziehe die Linien CD, CD′, CD″, CD‴ auf die Richtungen der Kräfte P, P′, P″, P‴ senkrecht, so ist für das Gleichgewicht erforderlich, daß (§. 53.)

$$CD.P + CD''.P'' = CD'.P' + CD'''.P''' \text{ ist.}$$

Aber $CD = b\sin\alpha$, $CD' = b'\sin\alpha'$, $CD'' = b''\sin\alpha''$, $CD''' = b'''\sin\alpha'''$, wodurch man die obenstehende Gleichung erhält.

Dieser Satz läßt sich eben so für jede noch so große Anzahl von Kräften beweisen.

§. 56.

Taf. II. Fig. 36. Sind sämmtliche auf den graden Hebel wirkende Kräfte nebst ihren Richtungen gegeben, so kann hieraus die Entfernung des Drehpunkts C, Figur 36., von irgend einem innerhalb oder in der Verlängerung des Hebels angenommenen Mittelpunkte der Momente gefunden werden. Es sei O dieser Mittelpunkt, ferner $OA = e$, $OA' = e'$, $OA'' = e''$, $OA''' = e'''$ und $OC = x$, so ist mit Beibehaltung der Bezeichnungen im vorigen §.

$$b = x - e,\ b' = x - e',\ b'' = x - e'',\ b''' = e''' - x$$

daher

$$(x - e) P \sin\alpha + (x - e'') P'' \sin\alpha''$$
$$= (x - e') P' \sin\alpha' + (e''' - x) P''' \sin\alpha'''$$

und hieraus findet man die Entfernung des Umdrehungspunktes C vom Mittelpunkte der Momente O oder

$$x = \frac{e P \sin\alpha - e' P' \sin\alpha' + e'' P'' \sin\alpha'' + e''' P''' \sin\alpha'''}{P \sin\alpha - P' \sin\alpha' + P'' \sin\alpha'' + P''' \sin\alpha'''}$$

Fig. 37. Beispiel. Am Hebel AB, Figur 37., sei $P = 60$, $P' = 80$ Pfund; der Winkel $PAB = \alpha = 130°$, $P'BC = \alpha' = 105°$. Wird nun A als Anfangspunkt statt O genommen, so ist $e = 0$, $e' = AB = 10$ Fuß, daher der Abstand des Umdrehungspunktes C von A oder

$$x = \frac{-e' P' \sin\alpha'}{P \sin\alpha - P' \sin\alpha'} = \frac{-10 \cdot 80 \cdot 0{,}966}{60 \cdot 0{,}766 - 80 \cdot 0{,}966}$$
$$= \frac{-772{,}8}{-31{,}32} = 24{,}67 \text{ Fuß}.$$

§. 57.

Wären die Richtungen sämmtlicher Kräfte mit einander parallel, also unter irgend einem Winkel β gegen den graden Hebel geneigt, so ist

$$\alpha = \alpha' = \alpha'' = \alpha''' = \beta$$

daher für diesen Fall die Entfernung

$$x = \frac{eP - e'P' + e''P'' + e'''P'''}{P - P' + P'' + P'''}$$

wie §. 46. Es entstehet daher, wenn Kräfte nach parallelen Richtungen an einem graden Hebel wirken, unter eben den Bedingungen ein Gleichgewicht, als wenn diese Kräfte senkrecht auf den Hebel angebracht wären, oder

Gewichte, welche in irgend einer Lage am graden Hebel aufgehangen im Gleichgewichte sind, bleiben bei jeder Lage des Hebels in Ruhe.

§. 58.

Aufgabe. Am gebogenen Hebel AA'', Figur 38., sind mehrere Kräfte P, P', P'' nach verschiedenen Richtungen angebracht, mit einander im Gleichgewichte; man sucht den Druck, welcher von diesen Kräften auf den Drehpunkt C entsteht. Taf. II. Fig. 38.

Auflösung. Durch C werde willkürlich eine grade Linie DD' gezogen, so läßt sich jede der gegebenen Kräfte, wie z. B. P, in zwei andere zerlegen, wovon die eine p senkrecht auf DD' und die andere parallel mit DD' ist. Statt der Kräfte P, P', P'' entstehen daher die Kräfte p, p', p'' und q, q', q'', von welchen p, p', p'' senkrecht auf die Linie DD' gerichtet sind, und daher nach §. 54. den Punkt C eben so drücken, als wenn sie unmittelbar in C auf DD' senkrecht angebracht wären. Ferner wirken die Kräfte q, q', q'' mit DD' parallel, also entsteht auch von diesen ein Druck auf den Punkt C (§. 54.), welcher eben so groß ist, als wenn solche daselbst nach ihrer gemeinschaftlichen Richtung DD' angebracht werden.

Taf. II. Fig. 38. Bringt man daher sämmtliche Kräfte p, p', p'', q, q', q'' auf den Punkt C nach ihren Richtungen, so lassen sich aus zwei und zwei, wie p, q; p', q' und p'', q'' die Kräfte Π, Π', Π'' zusammensetzen, welche genau den Kräften P, P', P'' gleich, und in Absicht der Richtungen parallel sind.

Hieraus folgt ganz allgemein, daß wenn mehrere Kräfte nach verschiedenen Richtungen an einem gebogenen Hebel angebracht im Gleichgewichte sind, so ist der Druck auf den Drehpunkt eben so groß, als wenn diese Kräfte unmittelbar am Drehpunkte nach Richtungen angebracht wären, die mit ihren ersten Richtungen parallel sind.

Mit Hülfe dieses Satzes läßt sich leicht die Größe und Richtung des Drucks auf den Drehpunkt finden, wenn nach §. 24. die Größe und Richtung der Mittelkraft gesucht wird. Auch sieht man hieraus, wie die Größe und Lage einer Kraft R gefunden werden kann, welche mehrern nach verschiedenen Richtungen wirkenden Kräften an einem gebogenen Hebel das Gleichgewicht hält.

§. 59.

Aufgabe. Mehrere Kräfte wirken in verschiedenen Punkten einer festen Ebene unter gegebenen Richtungen, welche sämmtlich in diese Ebene fallen; man sucht die Bedingungen für das Gleichgewicht.

Auflösung. Durch eine willkürliche Linie OZ, Fig. 39. Figur 39., sei die Richtung und Lage der Kräfte P, P', P'' ... dadurch bestimmt, daß sämmtliche Winkel wie $OAP = \alpha$, $OA'P' = \alpha'$, $OA''P'' = \alpha''$ ... nebst den Entfernungen $OA = b$, $OA' = b'$, $OA'' = b''$...

gegeben sind, wobei zu bemerken ist, daß die Winkel Taf. II.
α, α' ... von 0 bis 360 Grad von der Linie OZ an ab- Fig. 39.
wärts auf einerlei Weise gemessen werden.

Gesetzt daß nur die beiden Kräfte P, P' vorhanden wären, so läßt sich statt derselben eine dritte R angeben, welche eben die Wirkung wie P, P' hervorbringt, und deren Neigungswinkel gegen OZ $= \varphi$ und Entfernung $= r$ nach §. 29. gefunden werden kann. Alsdann ist für diese drei Kräfte nach §. 30. I. II. III.

$$R \sin\varphi = P \sin\alpha + P' \sin\alpha'$$
$$R \cos\varphi = P \cos\alpha + P' \cos\alpha'$$
$$rR \sin\varphi = bP \sin\alpha + b'P' \sin\alpha'.$$

Statt der Kräfte P, P' kann man nun die Kraft R setzen, welche dieselbe Wirkung hervorbringen, und daher mit P'', P''' im Gleichgewichte seyn muß. Für diesen Fall wird aber erfordert (§. 29.), daß

$$R \sin\varphi + P'' \sin\alpha'' + P''' \sin\alpha''' = 0$$
$$R \cos\varphi + P'' \cos\alpha'' + P''' \cos\alpha''' = 0 \text{ und}$$
$$rR \sin\varphi + b''P'' \sin\alpha'' + b'''P''' \sin\alpha''' = 0 \text{ sei.}$$

Setzt man statt der ersten Glieder dieser Gleichungen die vorhin gefundenen Werthe, so findet man

$$P \sin\alpha + P' \sin\alpha' + P'' \sin\alpha'' + P''' \sin\alpha''' = 0$$
$$P \cos\alpha + P' \cos\alpha' + P'' \cos\alpha'' + P''' \cos\alpha''' = 0$$
$$bP \sin\alpha + b'P' \sin\alpha' + b''P'' \sin\alpha'' + b'''P''' \sin\alpha''' = 0.$$

Wären fünf Kräfte in der Ebene angebracht, so könnte man mit Hülfe der letzten Gleichungen eine Kraft R' angeben, welche den drei Kräften P, P', P'' das Gleichgewicht hält, und wenn R' statt P, P', P'' angebracht ist, so kann man R' mit den beiden übrigen Kräften P''', P'''' in Verbindung bringen, woraus ganz ähn-

Taf. II. Fig. 39. liche Resultate wie vorhin entstehen. Eben so würde man bei sechs und mehrern Kräften verfahren, so daß man ganz allgemein als Bedingung für das Gleichgewicht unter jeder Anzahl von Kräften, welche nach beliebigen Richtungen in einerlei Ebene wirken, folgende drei Gleichungen erhält:

$$(\mathrm{I})\quad P\sin\alpha + P'\sin\alpha' + P''\sin\alpha'' + \ldots = 0$$
$$(\mathrm{II})\quad P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots = 0$$
$$(\mathrm{III})\quad bP\sin\alpha + b'P'\sin\alpha' + b''P''\sin\alpha'' + \ldots = 0.$$

§. 60.

Befindet sich in einer festen Ebene eine Linie, welche so gehalten oder befestigt wird, daß sich die Ebene um diese Linie frei drehen kann, die Linie selbst aber ihre Lage unverändert behält, so heißt solche eine feste Axe oder eine Drehaxe. Dagegen nennt man diejenige Linie, auf welche sämmtliche Momente der Kräfte bezogen werden, die Axe der Momente.

Sind mehrere Linien, Flächen oder Körper so mit einander verbunden, daß man sie als fest und unzertrennlich ansehn kann, wenn Kräfte oder Gewichte an denselben angebracht werden, so heißt diese Zusammensetzung ein System.

§. 61.

Wirken mehrere Kräfte auf eine feste Ebene senkrecht, und man nimmt an, daß die Drehaxe mit der Axe der Momente zusammenfällt, so sind sämmtliche Kräfte im Gleichgewichte, wenn die Summe der Momente von den Kräften, welche die Ebene auf eine Seite der Axe zu drehen streben, der Summe der

Momente von den entgegengesetzt wirkenden Kräften gleich ist.

Beweis. Es sei, Figur 40. und 41., XY eine feste Ebene, und MN ihre Drehaxe. Auf diese Ebene senkrecht in A, B wirken Kräfte P, Q nach den Richtungen AP, BQ, deren senkrechte Abstände von der Drehaxe DA und EB sind. Ist nun das Moment AD.P = BE.Q, und man zieht die Linie AB, welche die Drehaxe in C schneidet, so sind die Dreiecke ACD und BCE ähnlich; daher verhält sich Taf. II. Fig. 40. u. 41.

AD : BE = CD : CE. Aber weil AD.P = BE.Q so verhält sich auch

AD : BE = Q : P daher

CD : CE = Q : P.

Da nun der Punkt C als hinlänglich unterstützt angesehen werden kann, so sind (§. 39 und 40.) die Kräfte P, Q in der Ebene XY mit einander im Gleichgewichte.

So wie dieser Beweis für die beiden Kräfte P und Q geführt worden, läßt er sich auf jede Anzahl von Kräften ausdehnen, welche auf der Ebene XY senkrecht sind.

§. 62.

1. Zusatz. Von den Gewichten P, Q leide der Punkt C einen Druck = R, so ist (§. 40.)

$$R = \frac{AB}{AC} \cdot Q$$

Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke ACD und BCE verhält sich aber

AB : AC = DE : DC, daher ist

$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DC}$, also auch $R = \frac{DE}{DC} \cdot Q$.

Stellt man sich nun vor, daß die Kräfte P, Q in den Punkten D und E mit ihren vorherigen Richtungen parallel angebracht wären, so fände man ebenfalls (§. 40.) den Druck auf den Punkt C

$$R = \frac{DE}{DC} \cdot Q$$

daher leidet die Drehaxe von den Kräften P, Q einen Druck, welcher eben so groß ist, als wenn diese Kräfte nach ihren Richtungen unmittelbar in den Punkten D und E der Drehaxe angebracht wären.

Man vergleiche hiemit §. 58.

§. 63.

2. Zusatz. Wird die feste Axe in zwei Punkten M und N gehalten, so ist es nun leicht, die Pressungen auf diese Punkte zu bestimmen. Man erhält nemlich (§. 48. I.)

den Druck auf M

$$= \frac{ND.P \pm NE.Q}{MN}$$

und den Druck auf N

$$= \frac{MD.P \pm ME.Q}{MN}$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn Q nach einerlei Richtung mit P zieht, das untere aber, wenn die Richtungen von P und Q entgegengesetzt sind.

§. 64.

Taf. II. Fig. 42. Zwei feste Ebenen NM′, NN′, Figur 42., sind unter einem beliebigen Winkel an der festen Axe MN mit einander verbunden. In A, B wirken Kräfte P, Q, nach AP, BQ, in Entfernungen AC, BD von der Axe MN, so wird P mit Q im Gleichgewichte seyn, wenn $AC \cdot P = BD \cdot Q$ ist.

Beweis. Man nehme in der Ebene NN′ auf MN senkrecht $Cb = BD$, und bringe in b, senkrecht auf NN′, die Kräfte Q′ und Q″ jede $= Q$ an, so ist P mit Q″ (§. 39.) und Q′ mit Q im Gleichgewichte. Aber es ist auch Q′ mit Q″ im Gleichgewichte; daher kann man Q′, Q″ wegnehmen, und P, Q bleiben noch in Ruhe.

Da sich dieser Satz eben so für mehrere Kräfte beweisen läßt, so folgt allgemein, daß, wenn die Momente von der gemeinschaftlichen Drehaxe genommen werden, mehrere an verschiedenen auf der Axe senkrechten Ebenen angebrachte Kräfte einander das Gleichgewicht halten, wenn die Summe der Momente von denjenigen Kräften, welche die Ebenen nach einer Seite zu drehen streben, der Summe der Momente in Bezug auf die entgegengesetzte Umdrehung gleich ist.

§. 65.

Die Kräfte P, Q″, Figur 42., drücken die Axe MN eben so, als wenn solche in C nach paralleler Richtung mit P und Q″ nach Cp und Cq″ angebracht wären (§. 58.). Dasselbe gilt von den Kräften Q und Q′, weil diese (§. 62.) die Axe so drücken, als wenn Q nach Dq und Q′ nach Cq′ angebracht wäre. Die Kräfte Q′, Q″ nach Cq′, Cq″ verursachen keinen Druck auf die Axe, weil sie einander gleich und entgegengesetzt sind, daher können solche abgenommen werden, und es bleibt noch in C der Taf. II. Fig. 42.

Druck P nach Cp, und in D der Druck Q nach Dq; daher leidet eine feste Axe von den Kräften P, Q, welche auf verschiedenen mit dieser Axe verbundenen Ebenen senkrecht wirken und sich im Gleichgewichte halten, eben den Druck, als wenn diese Kräfte in den Punkten C und D der Axe nach ihren Richtungen angebracht wären.

§. 66.

Taf. II. Fig. 43. Aufgabe. Die feste Ebene MN', Figur 43., befinde sich an der Drehaxe MN, welche in M und N gehalten wird. Am Punkt G dieser Ebene wirke eine Kraft P, deren Richtung GP in diese Ebene fällt; man sucht den von der Kraft P herrührenden Druck auf die Punkte M und N.

Auflösung. Es sei der Winkel $NMG = \alpha$, $MNG = \beta$, und der Winkel, unter welchem die verlängerte Richtung der Axe die Richtung der Kraft P schneidet, oder $NCG = \gamma$, so ist, wenn MG nach m verlängert wird, der Winkel

$$nGg = \beta + \gamma$$
$$gGm = \alpha - \gamma$$
$$nGm = \alpha + \beta$$

Nimmt man nun $Gg = P$, und zeichnet das Parallelogramm Gmgn, so ist §. 19.

$$Gm = \frac{P \,.\, \sin nGg}{\sin nGm} = P \,.\, \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin(\alpha + \beta)} \text{ und}$$

$$Gn = \frac{P \sin gGm}{\sin nGm} = P \,.\, \frac{\sin(\alpha - \gamma)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Die Kraft Gm drückt den Punkt M nach MG; wird sie daher nach MN und senkrecht darauf nach MM' zerlegt, und wird letzter Druck p' genannt, so erhält man §. 20. Taf. II. Fig. 43.

$$p' = Gm \,.\, \sin\alpha$$

und den Druck nach $MN = Gm \,.\, \cos\alpha$.

Eben so kann man die auf den Punkt N nach GN wirkende Kraft Gn, nach MN und darauf senkrecht, nach der Richtung N′N zerlegen. Wird letzterer Druck $= p''$ gesetzt, so ist §. 20.

$$p'' = Gn \,.\, \sin\beta$$

und der Druck nach $MN = Gn \,.\, \cos\beta$.

Setzt man für Gm und Gn die gefundenen Werthe, so erhält man den Druck in M nach der auf die Axe senkrechten Richtung MM′ oder

$$(\mathrm{I})\ p' = P \,.\, \frac{\sin(\beta + \gamma)\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

den Druck auf den Punkt N nach der auf die Axe senkrechten Richtung NN′ oder

$$(\mathrm{II})\ p'' = P \,.\, \frac{\sin(\alpha - \gamma)\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

und wenn der gesammte Druck, welchen die Axe nach der Richtung MN leidet, also

$$Gm \,.\, \cos\alpha + Gn \,.\, \cos\beta = p'''$$

gesetzt wird, so erhält man

$$p''' = P \,.\, \frac{\sin(\beta + \gamma)\cos\alpha + \sin(\alpha - \gamma)\cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Es ist aber $\sin(\beta + \gamma) = \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma$ und $\sin(\alpha - \gamma) = \sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma$, daher wenn man statt der Sinus von den Summen und Differenzen zweier Winkel die Sinus von den einzelnen Winkeln in diese Gleichung einführt, Zähler und Nenner mit $\cos\alpha\cos\beta$ dividirt, und die Größen, welche sich aufheben, wegläßt, so erhält man

$$(III)\ p''' = P \cos\gamma.$$

Diesen Werth hätte man ebenfalls erhalten, wenn man sich die Kraft P in C angebracht vorgestellt, und solche nach CN und senkrecht auf CN zerlegt hätte.

§. 67.

1. Zusatz. Läuft die Richtung der Kraft P, Figur 43., mit der Axe MN parallel, so wird $\gamma = 0$, also $\cos\gamma = \cos 0 = 1$ daher ist

$$(I)\ p' = P \cdot \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{P}{\cot\alpha + \cot\beta}$$

Es sei GD auf MN senkrecht, so ist

$MD = GD \cot\alpha$ und

$DN = GD \cot\beta$ also

$MD + DN = MN = GD(\cot\alpha + \cot\beta)$ oder

$\frac{MN}{GD} = \cot\alpha + \cot\beta$, folglich auch

$$p' = \frac{GD}{MN} \cdot P$$

Weil ferner $p'' = P \cdot \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, so wird

$(II)\ p'' = p'$ und

$(III)\ p''' = P.$

Je weiter daher bei einer Thüre die Stützhaken von einander entfernt sind, desto geringer ist die Gewalt, mit welcher die Haken horizontal gedrückt werden.

§. 68.

2. Zusatz. Wäre daher an einer festen Stange MN, Taf. II. Fig. 44. Figur 44., ein Arm DG auf MN senkrecht befestigt, und man giebt der Stange MN eine vertikale Lage, indem die Kräfte P, p''' nach vertikalen Richtungen GP, Np''', und die Kräfte p', p'' nach horizontalen Richtun-

gen Mp', Np'' angebracht werden, so ist unter den vier Kräften ein Gleichgewicht, und die Stange bleibt in Ruhe, wenn $P = p'''$ und

$$p' = p'' = \frac{GD}{MN} P \text{ ist.}$$

Dieser Satz findet seine Anwendung bei den Stämpfern, weil sich nach demselben der Druck der Stämpfer gegen die Scheidelatten finden läßt.

§. 69.

In einer festen Ebene sind verschiedene Kräfte P, P', P''..., welche nach verschiedenen Richtungen angebracht sind, mit einander im Gleichgewicht. Die ganze Ebene werde um einen in derselben willkürlich angenommenen Punkt O, Figur 45., äußerst wenig gedreht, so daß, wenn die Linie OA'', welche die Richtungen der Kräfte bestimmt, in die Lage Oa'' kommt, der Bogen $A''a''$, welchen der äußerste Punkt A'' durchläuft, so klein sei, daß solcher mit seiner Sehne als gleich groß angenommen werden kann. Sind nun A, A', A'' . . . die Punkte, wo die Richtungen der Kräfte P, P', P'' . . . die Linie OA'' schneiden, wobei es gleichgültig ist, ob die Kräfte in den Punkten A, A' . . . oder in irgend einem Punkte ihrer Richtung wirken, und man setzt die Entfernungen OA, OA', OA''... $= b$, b', b'' . . . und die Richtungswinkel OAP, $OA'P'$, $OA''P''$... $= \alpha$, α', α''... wo die Winkel von 0 bis 360 Grad fortgezählt werden; wird ferner ap, $a'p'$ . . . mit AP, $A'P'$ . . . parallel und ad, $a'd'$ . . . auf AP, $A'P'$ . . . senkrecht gezogen, so bezeichnet Ad den Weg, welchen die Kraft P nach ihrer Richtung durchlaufen muß, wenn die Linie

Taf. II. Fig. 45.

Taf. II. Fig. 45. O A in die Lage O a kommt. Eben so sind $A'd'$, $A''d''$ ... die Wege, welche alsdann die Kräfte P', P'' ... nach einerlei Richtung durchlaufen. Weil der Winkel $A''Oa''$ unendlich klein ist, so sind OAa, $OA'a'$ ... rechte Winkel, also

$$aAd = 90° - \alpha$$
$$OA'P' = A''A'd' = A'a'd' = 360° - \alpha' \text{ und}$$
$$A''a''d'' = 180° - \alpha''.$$

Man setze die Wege

$Ad = w$, $A'd' = w'$, $A''d'' = w''$, so ist, wenn

$Aa = v$ gesetzt wird

$$A'a' = \frac{b'v}{b} \text{ und } A''a'' = \frac{b''v}{b} \text{ also}$$

$$Ad = Aa \,.\, \cos(90° - \alpha) \text{ oder } w = v \sin\alpha$$

$$A'd' = A'a' \,.\, \sin(360° - \alpha') \text{ oder } w' = -\frac{b'v}{b} \sin\alpha'$$

$$A''d'' = A''a'' \,.\, \sin(180° - \alpha'') \text{ oder } w'' = \frac{b''v}{b} \sin\alpha''$$

Nach §. 29. III. ist aber für das Gleichgewicht unter den Kräften P, P', P''

$$bP\sin\alpha + b'P'\sin\alpha' + b''P''\sin\alpha'' = 0$$

oder wenn durchgängig mit $\frac{v}{b}$ multiplizirt wird

$$vP\sin\alpha + \frac{b'v\sin\alpha'}{b} P' + \frac{b''v\sin\alpha''}{b} P'' = 0$$

und wenn die vorhin gefundenen Werthe w, w', w'' in diese Gleichung gesetzt werden, so erhält man

$$wP - w'P' + w''P'' = 0$$

oder weil bei mehrern Kräften P, P', P'' ... die Rechnung auf gleiche Art geführt wird, und ähnliche Resultate entstehen, so erhält man ganz allgemein für jede Anzahl von Kräften

$$wP + w'P' + w''P'' + w'''P''' + \ldots\ldots = 0$$

d. h. Wenn mehrere Kräfte, deren Richtungen in einerlei Ebene fallen, auf verschiedene Punkte eines Systems wirken und im Gleichgewichte sind, so muß bei einer geringen Umdrehung des ganzen Systems um einen willkürlich angenommenen Punkt, die algebraische Summe der Produkte einer jeden Kraft in den nach ihrer Richtung durchlaufenen Weg = 0 seyn.

Hiebei ist aber wohl zu bemerken, daß die Wege, welche die Kräfte nach solchen Richtungen durchlaufen, welche ihnen grade entgegengesetzt sind, negativ in Rechnung kommen.

Eben diese Resultate erhält man, wenn die Punkte A, A′, A″, ... nicht in einer graden Linie liegen. Fallen die Richtungen der Kräfte P, P′, P″, ... in mehrere mit einander parallele Ebenen, welche auf einer willkürlich angenommenen Drehaxe senkrecht stehen, so vertritt die Drehaxe die Stelle des angenommenen Punkts O, und man erhält dieselben Resultate. Auch läßt sich der angeführte Satz für mehrere Kräfte beweisen, deren Richtungen jede Lage haben mögen, weil man nur alsdann statt des Punktes O eine willkürliche Drehaxe annehmen, und jede von den Kräften P, P′, P″, ... nach §. 32. in drei auf einander senkrechte Richtungen zerlegen darf, wovon eine mit der Drehaxe parallel, und die andere durch die Drehaxe geht. Der Beweis und die dazu gehörige Figur ist indessen so verwickelt, daß solcher um so mehr hier übergangen werden kann, weil diejenigen Fälle, wo die Richtungen der Kräfte nicht in einerlei oder mehrere parallele Ebenen fallen, hier nicht in Betrachtung gezogen werden.

Der oben erwiesene Satz kann daher als ein allgemeines Grundgesetz der Statik angesehen werden, weil er sich über alle Gegenstände derselben erstreckt, und die schwierigsten Aufgaben mit seiner Hülfe aufgelößt werden können. Auch ist dieser Satz unter dem Namen des Gesetzes vom Bestreben nach Geschwindigkeit oder des Grundsatzes von der virtuellen Geschwindigkeit bekannt, wovon der Cartesische Grundsatz, nach welchem sich, im Falle des Gleichgewichts, die Kraft zur Last umgekehrt wie der Weg der Kraft zum Wege der Last verhält, als ein einzelner Fall leicht abgeleitet werden kann.

Es läßt sich leicht einsehn, daß das erwiesene Grundgesetz nicht nur für die drehende, sondern auch für die fortschreitende Bewegung (§. 35.) gilt, bei welcher das ganze System eine solche Lage erhält, welche mit der vorhergehenden parallel ist, weil man nur den Drehpunkt unendlich weit entfernt annehmen darf.

Umgekehrt kann man auf eine ganz ähnliche Art beweisen, daß, wenn bei einem Systeme die algebraische Summe der Produkte einer jeden Kraft in den nach ihrer Richtung durchlaufenen unendlich kleinen Weg $= 0$ ist, sich alsdann das System im Gleichgewichte befindet.

Drittes

Drittes Kapitel.

Von dem eigenthümlichen Gewichte der Körper.

§. 71.

Gleichgroße Körper von verschiedener Materie haben oft sehr verschiedene Gewichte, wodurch man auf die Verschiedenheit ihrer Massen schließt (§. 1.), weil doppelt so viel Masse einen doppelt so großen Druck auf ihre Unterlage verursacht, als die einfache. Wenn also ein Kubikfuß Eisen dreimal so viel wiegt, als ein Kubikfuß Kalkstein, so wird ersterer dreimal so viel Masse enthalten als letzterer. Je mehr Masse gleich große Körper enthalten, desto dichter sind sie, daher man überhaupt die Dichtigkeit (Densitas. *Densité*) eines Körpers nach der Masse, welche er in einem bestimmten Raume enthält, und die Masse nach ihrem Gewichte beurtheilt. Nehmen daher zwei Körper einerlei Raum ein, so verhalten sich ihre Dichtigkeiten wie ihre Massen oder wie ihre Gewichte.

Haben alle einzelne gleichgroße Theile eines Körpers einerlei Gewicht, so kann man der Materie desselben eine gleichförmige Dichtigkeit zuschreiben. Ist alsdann das Gewicht von einem bestimmten Theile eines Körpers, dessen Materie gleichförmig dicht oder homogen ist, bekannt, so läßt sich daraus auf das Gewicht des ganzen Körpers schließen, weshalb es sehr wichtig ist, von mehrern vorkommenden Körpern, sofern deren Materie als homogen angenommen werden kann, die Gewichte zu kennen, weil sich daraus das Gewicht eines Körpers von jeder Gestalt leicht finden läßt. Die folgenden Untersuchungen finden daher auch nur in so weit ihre Anwendung, als man ohne Nachtheil die Materie der Körper als gleichförmig dicht annehmen kann.

§. 72.

Sind die Materien zweier gleichgroßer Körper homogen, aber die Gewichte derselben verschieden, so sagt man, die Materie desjenigen Körpers, welcher das meiste Gewicht hat, besitzt mehr eigenthümliches (spezifisches) Gewicht (Pondus specificum. *Poids relatif*), als die Materie des andern Körpers. Zur Vergleichung der eigenthümlichen Gewichte mehrerer Materien darf man daher nur Körper von einerlei Größe, in Absicht ihrer Gewichte, mit einander vergleichen, und wenn man das Gewicht von einem derselben als Einheit annimmt, und alsdann ausmittelt, wie vielmal das Gewicht der übrigen Körper größer oder kleiner ist, als das Gewicht des zur Einheit angenommenen Körpers, so hat man dadurch ein bequemes Mittel, die eigenthümlichen Gewichte verschiedener Materien zu vergleichen. Damit aber das eigenthümliche Gewicht der Materie eines Körpers mit demjenigen nicht verwechselt werde, welches dem Körper von bestimmter Größe entspricht, so pflegt man letzteres das absolute Gewicht (Pondus absolutum. *Poids absolu*) zu nennen.

Unter allen bekannten Materien hat das reine Regenwasser oder destillirtes Wasser, in Absicht der gleichförmimigen Dichtigkeit den Vorzug, und weil es überdies sehr leicht zu haben ist, sich auch noch aus andern, erst in der Hydrostatik einleuchtend werdenden Gründen, empfiehlt, so hat man allgemein das Gewicht des destillirten Wassers als Einheit, zur Vergleichung mit den Gewichten anderer Körper angenommen. Ist daher das Gewicht von einem Kubikfuße destillirten Wassers bekannt, und man findet das Gewicht von einem Kubikfuße Feldstein zwei und ein halbmal so groß, so ist, wenn das eigenthümliche Gewicht des destillirten Wassers = 1 gesetzt wird, das eigenthümliche Gewicht des Feldsteins = 2, 5. Es sei γ das Gewicht von einem Kubikfuße destillirten Wassers, und G das Gewicht von einem Kubikfuße irgend einer andern Materie, so erhält man, wenn g das spezifische Gewicht dieser Materie bezeichnet, ganz allgemein $g = \frac{G}{\gamma}$

§. 73.

Die genaue Ausmittelung von dem Gewichte des destillirten Wassers ist deshalb sehr nothwendig, weil hievon die richtige Bestimmung des eigenthümlichen Gewichts der übrigen Materien abhängt. Nach meinen sehr sorgfältigen und mehrmal wiederholten Versuchen (*) ist das Gewicht von einem brandenburgischen Kubikfuße destillirten Wassers = 65,93684, oder beinahe $65\frac{15}{16}$ Pfund ber-

(*) Vergleichung der in den Kön. Preuß. Staaten eingeführten Maaße und Gewichte. Berlin 1798. S. 27.

Der rheinländische oder brandenburgische Fuß hält 139,13 pariser Linien, und das berliner Pfund Hanliner Handelsgewicht, bei einer Temperatur von 14 Grad Reaumur. Der brandenburgische Kubikzoll wiegt hienach 0,038158 Berliner Pfund oder 5011$\frac{1}{5}$ cöllnische Richtpfennige.

Bei sehr genauen Untersuchungen ist die Angabe der Temperatur deshalb nothwendig, weil die erwärmten Körper gewöhnlich sich ausdehnen, und daher ein geringeres eigenthümliches Gewicht erhalten, als die kältern. Wie viel die Abweichung von dem Gewichte des destillirten Wassers bei verschiedenen Temperaturen beträgt, kann man aus nachstehenden aus Brisson's Physik genommenen Angaben (*Traité élémentaire ou Principes de Physique, par M. J. Brisson; seconde édition, Tome I., Paris* 1797.) übersehen, aus welchen zugleich das merkwürdige Resultat folgt, daß das Wasser seine größte Dichtigkeit bei einer höhern Temperatur als bei 0 Grade hat. Nach Rumford und Hällstrom (Gilberts Annalen der Physik, 20. Bd., 1805. S. 389.) findet man die größte Dichtigkeit bei einer Temperatur von 3,483 Grad Reaumur. Die letzte Spalte in der folgenden Tafel ist zur bessern Uebersicht und Vergleichung noch beigefügt worden, indem man die französische Unze oder 8 *Gros* = 576 *Grains poids de marc* = 8575,36 Richtpfennige setzte.

---

delsgewicht 131328 cöllnische Richtpfennige oder 9747 holländische Asse.

Wenn lediglich von Fuß oder Pfund hier die Rede ist, so werden allemal hier brandenburgische Fuße oder berliner Pfunde verstanden.

Destillirtes Wasser	Ein pariser Kubikzoll wiegt		Ein brandenburg. Kubikzoll wiegt	Bei einer Temperat. n. Reaum.
	Gros	Grains	Cölln. Richtpfenn.	Grad
im luftleeren Raume	5	13,3680	5013,884	0
	5	13,3843	5014,102	5
in der Luft	5	12,9080	5007,708	0
	5	12,9243	5007,927	5
	5	12,6930	5004,808	10
	5	12,4617	5001,714	15
	5	12,1843	4998,990	20

Mit diesen Angaben kann man die im Grenschen Journal (Neues Journal der Physik. 1. Bd. Leipzig 1795. S. 216 u. f.) beschriebene, vom Hrn. Professor Schmidt angestellten Versuche über das Gesetz der Ausdehnung einiger Flüssigkeiten durch die Wärme vergleichen, von welchen nachstehende Tafel einen Auszug giebt, indem man das eigenthümliche Gewicht des Wassers bei einer Temperatur von 15 Grad Reaumur = 1 gesetzt hat.

Therm. Grade nach Reaum.	Eigenth. Gew. des Wassers	Therm. Grade nach Reaum.	Eigenth. Gew. des Wassers
$\frac{3}{4}$	1,00130	40	0,98978
5	1,00143	45	0,98689
10	1,00101	50	0,98389
15	1,00000	55	0,98001
20	0,99858	60	0,97637
25	0,99701	65	0,97219
30	0,99479	70	0,96837
35	0,99219	75	0,96325

§. 74.

Bezeichnet man allgemein durch

γ das Gewicht des destillirten Wassers $= 65,9368$ Pfund;

P das absolute Gewicht eines Körpers in Pfunden ausgedrückt;

V den Inhalt dieses Körpers in Kubikfuß;

G das Gewicht von einem Kubikfuße dieses Körpers, und durch

g das eigenthümliche Gewicht von der Materie desselben;

so erhält man nach §. 72. das Gewicht von einem Kubikfuße oder

$$(\text{I})\quad G = g\gamma.$$

Es verhält sich aber

$$1 : V = G : P$$

daher findet man das absolute Gewicht eines Körpers

$$(\text{II})\quad P = GV = g\gamma V$$

hieraus den körperlichen Inhalt oder

$$(\text{III})\quad V = \frac{P}{G} = \frac{P}{g\,\gamma}$$

und sein eigenthümliches Gewicht

$$(\text{IV})\quad g = \frac{P}{\gamma V} = \frac{G}{\gamma}$$

Auch erhält man noch

$$(\text{V})\quad G = \frac{P}{V}$$

1. Beispiel. Wieviel wiegt eine cylindrische Säule von Sandstein, deren Durchmesser 3, und Höhe 30 Fuß beträgt, wenn das eigenthümliche Gewicht des Sandsteins $= 1,97$ ist?

Hier wird g = 1,97 und der Inhalt

$V = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 9 \cdot 30 = 211,95$ Kubikfuß;

daher ist nach (II) das Gewicht dieser Säule oder

$$P = 1,97 \cdot 65,94 \cdot 211,95 \text{ Pfund.}$$

Nun ist log 1,97 = 0,2944662
log 65,9.... = 1,8191281
log 211,95 = 2,3262334

4,4398277 = log 27531,36

daher wiegt die Säule 27531,36 berliner Pfunde.

2. Beispiel. Man soll den Inhalt eines aus gegossenem Eisen verfertigten Körpers finden, welcher 372,7 Pfund wiegt, wenn das eigenthümliche Gewicht 7,113 ist.

P = 372,7 und g = 7,113, daher findet man (III) den Inhalt

$$V = \frac{372,7}{7,113 \cdot 65,9 \ldots}$$

Aber log 7,113 = 0,8520528
log 65,9.... = 1,8191281

2,6711809

log 372,7 = 1,5713594

0,9001785 — 2 = log 0,079465

daher ist der Inhalt des eisernen Körpers = 0,079465 brandenburgische Kubikfuß.

§. 75.

Die nachstehende Tafel enthält die Angaben von dem eigenthümlichen Gewichte mehrerer Materien, wobei besonders auf die bei uns üblichen Baukörper Rücksicht genommen ist. Die angegebenen Verhältnißzahlen können aber nur als Näherungs- oder Mittelwerthe angesehen werden, weil selbst bei Materien von einer Art ihre mannichfaltige Dichtigkeit öfters sehr abweichende Resultate finden läßt. Auch muß bei Körpern von gemischter Materie, wie z. B. beim Mauerwerke, wo die Steine ein anderes eigenthümliches Gewicht als der Mörtel haben, die Angabe des eigenthümlichen Gewichtes so verstanden werden, als wenn die verschiedenen Materien einen gleichförmig dichten Körper bildeten. Ueberhaupt müssen die jedesmaligen Umstände, unter welchen von diesen Voraussetzungen Gebrauch gemacht wird, entscheiden, wie weit solche zulässig sind

Vorzüglich hat man die Musschenbrökschen und Brissonschen Angaben von dem eigenthümlichen Gewichte der Körper benutzt, dagegen gründet sich die Bestimmung der bei uns einheimischen Holzarten und Baukörper größtentheils auf eigene deshalb angestellte Untersuchungen.

Tafel

zur Vergleichung des eigenthümlichen Gewichtes mehrerer Materien, wenn das Gewicht des destillirten Wassers als Einheit angenommen wird.

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Abricosenbaumholz, vom Stam̃e, trocken	0,711 bis 0,868
Accacienholz, vom Stamme, trocken	0,650 — 0,702
Agalmatolith, chinesischer, Speckstein	2,785 — 2,815
Agath	2,553 — 2,607
Ahornholz, gemeines, vom Stam̃e, trocken	0,755
virginisches . .	0,629
Alabaster	2,611 — 2,876
weißer antiquer . .	2,730
Alaunerde	1,750
Alaunschiefer, gemeiner . .	1,805 — 2,490
Alaunstein	1,378 — 2,424
Ambra, grauer . . .	0,926
schwärzlichter . .	0,780
Ambrageist	1,031
Ambraöhl	0,978
Ameisensäure . . .	0,994
Ametist	2,653 — 2,785
Ammoniakgummi . . .	1,207
Apatit, blättriger (Phosphorspath)	3,119 — 3,218
Apfelbaumholz, vom Stamme, trocken	0,793
Apfelwein, Cyder . . .	1,018
Aquamarin, s. Berill.	
Arack , ...	1,457
Arsenik, geschmolzen . .	5,763
weißer, gemeiner .	3,594
gelber	3,452

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Asbest, biegsamer . . .	0,908 bis 2,313
gemeiner . . .	2,500 — 2,800
schwimmender . .	0,680 — 0,993
Asphalt, Judenpech . .	1,104
Augit, (Olivinblende) . .	3,182 — 3,377
Austerschaalen . . .	2,092
Basalt	2,014 — 3,310
Baumöhl	0,915
Benzoeharz	1,092
Bergblau	3,608
Bergkrystall	2,605 — 2,888
Bergmehl, Silex mont. Farina	0,362
Berill, Aquamarin . . .	2,250 — 2,759
Bernstein	1,078 — 1,086
Bier, braunes . . .	1,034
weißes . . .	1,023
Bimsstein	0,914
Birkenholz, vom Stamme, frisch	0,702
trocken	0,580
Birnbaumholz, vom Stamme, trocken	0,661
Blasenstein, von Menschen .	1,700
Blei, gegossen, englisches .	11,324 — 11,875
deutsches .	11,310
Bleiasche	1,666
Bleikalk	8,940
Bleiweiß	3,156
Bleizucker	2,745
Blutstein	4,360
Blutwasser	1,190
Bolus, armenischer . . .	2,727
Borax	1,720
Borazit, Boraxspath . .	2,076 — 2,566
Brandwein, gemeiner	0,837

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Brasilienholz, rothes . . .	1,031
Braunstein	3,530 bis 4,116
Braunsteinkiesel . . .	3,600
Büchenholz (Rothbüchen)	
vom Stamme, trocken	0,666 — 0,854
vom Splint, trocken	0,600 — 0,721
Büchenholzöhl . . .	0,918
Buchsbaumholz,	
brasilianisches, rothes, trocken	1,031
französisches . .	0,910
holländisches . .	1,328
Butter	0,943
Cacaobutter	0,892
Campechenholz, trocken . .	0,913
Campher	0,989
Canariensect . . .	1,033
Cedernbaumholz, aus Indien, trocken	1,315
aus Palästina	0,418 — 0,778
wildes . .	0,596
Chinawurzel . . .	1,071
Citronenbaumholz, trocken .	0,726
Cocosnußbaumholz, trocken .	1,040
Copal, durchsichtiger . .	1,045
undurchsichtiger . .	1,140
Corallen, rothe . . .	2,689
weiße . . .	2,500
Cyanit (blauer Schörl) . .	3,092 — 3,622
Cyder, s. Apfelwein.	
Cypressenbaumholz, spanisches, trocken	0,644
Dachschiefer	2,670 — 3,500
Demant, blauer, orientalischer	3,525
gelber, brasilianischer	3,666
grüner	3,524

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Demant, orangerother . .	3,550
rosenrother . .	3,531
weißer	3,521
Demantspath . . .	3,710 bis 3,962
Dillenöhl	0,994
Drachenblut (Harz) . .	1,204
Ebenholz, von den Alpen, trocken	1,054
amerikanisches . .	1,331
indianisches . .	1,209
Eichenholz,	
Sommereichen, vom Kern, trocken	0,720 — 0,795
Kern u. Herz, trocken	0,618 — 0,695
Splint, trocken	0,610
Stamm, frisch	0,845 — 0,850
Wurzel, frisch	0,880
Zweige, frisch	0,698 — 0,780
Wintereichen, s. Steineichen.	
Eis	0,916
Eisen, gegossen	7,113 — 7,200
geschmiedet, brandenb. Landeisen	8,189
harzer .	8,291
schwedisches	8,341
suhler .	8,215
Eisenkiesel, krystallisirter Pechstein	2,476 — 3,205
Eisenschlacke . . .	2,855
Elastisches Harz . . .	0,933
Elfenbein	1,825
Elzbeerholz, trocken . .	0,879
Enzianwurzel . . .	0,800
Epheuharz	1,295
Erde, lehmigte, festgestampft, frisch	2,063
trocken	1,929
feste Gartenerde, frisch .	2,047

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Erde, feste Gartenerde, trocken .	1,630
trockne magere Erde .	1,338
Erlenholz, vom Stamme, trocken	0,586 bis 0,660
: vom Splint, trocken	0,485 — 0,574
: vom Stamme, frisch	0,788 — 0,800
Eschenholz, vom Stamme, trocken	0,725 — 0,845
Zweige . .	0,734
Eselsmilch	1,035
Essig, destillirter . . .	1,009
rother	1,025
weißer	1,013
Essigsäure, concentrirte . .	1,063
Feldspat; gemeiner (Feldstein) .	2,430 — 2,600
dichter . . .	2,609 — 3,389
glasigter . . .	2,518 — 2,589
Feuerstein (gemeiner Kiesel) .	2,581 — 3,000
Fichtenholz, s. Rothtanne.	
Fieberrinde	0,780
Flußspath	3,094 — 3,191
Franzosenholz . . .	1,333
Fraueneis, s. Gypsspath.	
Galläpfel	1,034
Galmei	3,524
Gasarten, bei 10 Grad Reaumür,	
kohlensaures Gas .	0,0018478
nitröses Gas . .	0,0014640
Sauerstoffgas . .	0,0013579
Stickgas . .	0,0011905
Wasserstoffgas . .	0,0000948
Glas, von Bouteillen . .	2,732
Fensterglas, gemeines .	2,642
Flintglas . . .	3,329
Krystallglas	2,488 — 2,892

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Glaskopf, rother . . .	4,898
Glimmer	2,767 bis 2,934
Gold, das reinste, gegossen .	19,640
Ducatengold . .	19,352
französis. zu 22 Karat, gegossen	17,486
geschlagen	17,589
guineisches	18,888
von englischen Guineen . .	17,629
Granat, edler (Karfunkel) .	3,718 — 4,352
gemeiner	3,668 — 3,757
Granatenbaumholz . .	1,354
Granit	2,539 — 3,063
Grappwurzel . . .	0,765
Guajakgummi	1,229
Guajakholz	1,632
Gummi, arabisches . .	1,452
Gummiguttä . . .	1,222
Gummilack	1,139
Gummisandarac	1,092
Gummitragant . . .	1,333
Gyps, dichter . . .	1,872 — 2,964
faserigter	2,300
körniger	2,199 — 2,310
sperenberger .	2,199 — 2,266
gebrannter, sperenberger	1,810
frisch gegossener, sperenberger	1,292
gegossener, ausgetrocknet	0,973
Gypsspath, Fraueneis . . .	1,761 — 2,322
halbdurchsicht. sperenberger	1,761 — 2,322
Hammeltalg	0,924
Hanfsaamenöhl . . .	0,926
Harn, vom Menschen . . .	1,011
Haselnußöhl	0,916

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Haselstaudenholz . . .	0,600
Hausenblase . . .	1,111
Heliotrop (grüner Jaspis) .	2,620 bis 2,700
Hirschhorn	1,875
Hirschhorngeist . . .	1,073
Hirschhornsalz, flüchtiges .	1,496
Hollunderholz . . .	0,695
Holzkohle	0,280 — 0,442
Holzstein, versteinertes Holz, Kieselholz	2,045 — 2,675
Honiggeist	0,895
Hornbaum (Weißbüche) v. Stam̃, trocken	0,755 — 0,805
Hornblende	2,922 — 3,410
Hornblendschiefer . . .	2,909 — 3,153
Hornschiefer, s. Klingstein.	
Hornstein (Felskiesel) . .	2,532 — 2,745
Hünereyer	1,090
Hyacinth	3,687 — 4,385
Jalappharz	1,218
Jasminholz	0,770
Jaspis, egyptischer . .	2,564 — 2,600
gemeiner . . .	2,580 — 2,700
Indigo	0,769
Isoppöhl	0,968
Judenpech, s. Asphalt.	
Kalbstalg	0,934
Kalkmörtel, frisch . . .	1,789
trocken . .	1,638
Kalksinter, Tropfstein . .	2,325 — 2,741
Kalkspath	2,070 — 2,720
Kalkstein, dichter . . .	2,396 — 2,700
rüdersdorfer .	2,396
körniger . . .	2,707 — 2,862
gebrannter, rüdersdorfer	1,274
Kalzedon (Onyx) . . .	2,586 — 2,628

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Karniol (Sarder) . . .	2,597 — 2,630
Katzenauge, Silex Catophtalin	2,567 — 3,259
Kiefernholz, vom Kerne, frisch, harzig	0,725
Kern und Splint, frisch	0,640
vom Kerne, trocken	0,625
Kern und Splint, trocken	0,600
Splint, trocken .	0,400 — 0,570
Kieselschiefer (Hornschiefer) .	2,596 — 2,860
Kieselsinter (Quarzsinter) .	1,807 — 1,917
Kirschbaumholz . . .	0,715
Kirschgummi . . .	1,482
Klingstein, Hornschiefer . .	2,512 — 2,700
Kobald, geschmolzen . .	7,812
Kochsalz, reines . . .	1,918
Korkholz	0,240
Korund (Demantspath) . .	3,775 — 3,959
Krausemünzenöhl . . .	0,975
Krebsaugen	1,890
Kreide, schwarze, Zeichenschiefer	2,144 — 2,277
weiße . . .	1,797 — 2,657
Kreutzstein, Kreutzkrystall . .	2,353 — 2,361
Krisoberill	3,698 — 4,000
Krisolith (gelbgrüner Topas) .	3,052 — 3,449
Krisopras	2,479 — 3,250
Krystall, isländischer . .	2,720
Kuhmilch	1,032
Kupfer, geschmolzen . .	7,788
japanisches . .	9,000
schwedisches . .	8,784
Kupferdrath . . .	8,878
Kupfererz, Kies . . .	4,3?5
Lasurstein	2,771 — 2,945
Lava	2,348 — 2,880
Lavendelöhl	0,894

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Lebensbaumholz . . .	1,327
Leimen (Lehm) fetter, frisch .	1,664
erhärtet . . .	1,516
mit Stroh vermischt, wie er zum Auswinden der Staken gebraucht wird, frisch . .	1,192
trocken . .	1,072
Leinöhl	0,940
Lerchenbaumholz . . .	0,622
Leucit (weißer Granat) . .	2,455 — 2,490
Limonienbaumholz . .	0,703
Lindenholz	0,604
Lorbeerbaumholz . . .	0,524 — 0,822
Luft, atmosphärische, bei 10° Reaumür	0,0012323
Lydischer Stein (Probierstein, schwarzer Jaspis) . . .	2,596 — 2,887
Magnesium	6,850
Magnetstein, indianischer .	4,244
Mahagoniholz . . .	1,063
Mandelbaumholz . . .	1,102
Mandelöhl, süßes . . .	0,917
Mandelstein	2,231 — 2,594
Marmor, bayreuther . .	2,840
carrarischer, weißer	2,717 — 2,763
egyptischer, grüner	2,668
vom Harz, blankenburger	2,675
elbingeroder	2,851
italiänischer, schwarzer	2,712
weißer	2,715
von Paros, weißer .	2,837
schlesischer, Jaspismarmor	2,739
schlesischer, blauer .	2,711
grüner .	2,700
weißer .	2,648

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Marmor, schwedischer, grüner	2,725
Mastixbaumholz . . .	0,849
Mastixgummi . . .	1,074
Mauer mit Kalkmörtel,	
von rüdersd. Bruchsteinen, frisch	2,461
trocken	2,396
von magdeb. Sandsteinen. frisch	2,123
trocken	2,047
von Ziegelsteinen, frisch .	1,554 — 1,699
trocken .	1,471 — 1,593
Maulbeerbaumholz . . .	0,626 — 0,897
Meerschaum	0,336 — 1,600
Meerwasser	1,026
Melanit (schwarzer Granat) .	3,691
Menschenblut . . .	1,040
Mergel, erdiger . . .	1,606 — 2,400
erhärteter . . .	2,300 — 2,700
Messing, gegossen . . .	8,396
Messingdrath	8,544
Mispelbaumholz . . .	0,944
Mohnöhl	0,924
Mohnsaft, türkischer . .	1,363
Mühlenstein	2,490
Myrrhe	1,360
Naphta	0,847
Nelkenöhl	1,036
Nickel, gemeiner . . .	6,648
geschmolzen . . .	7,807 — 9,000
Nußbaumholz, deutsches . .	0,664
französisches .	0,671
virginisches, schwarzes	0,827
Nußöhl	0,923
Obsidian (Glasachat) . .	2,348
Ochsenhorn	1,840

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Ochsentalg	0,923
Olivenbaumholz . . .	0,927
Olivin (grüner Schörl) . .	3,032 bis 3,403
Opal, edler, orientalischer . .	1,700 — 2,114
gemeiner . . .	2,015 — 2,144
Opium	1,336
Pappelbaumholz, Schwarzpappel, trocken	0,383 — 0,557
Weißpappel, trocken	0,529 — 0,810
carolinisches .	0,419
italiänisches .	0,398
Paradiesholz	1,177
Pech	1,150
Pechstein	2,049 — 2,669
Perlen, orientalische . . .	2,684
Pfeifenstrauchholz . . .	1,099
Pferdemilch	1,035
Pfirsichbaumholz	0,749
Pflaumenbaumholz . . .	0,785
Phosphor	1,714
Phosphorsäure	1,558
Platina, gereinigte, gezogen .	21,042
gehämmert	20,337
gegossen .	19,500
Pommeranzenbaumholz . .	0,705
Pommeranzenöhl . . .	0,888
Pontak	0,993
Porphyr	2,395 — 2,793
Porzellan, chinesisches . .	2,385
französisches . .	2,146
sächsisches . . .	2,493
Porzellanerde	2,230 — 2,400
Prasem (Praser) . . .	2,580
Prechnit (grüner Feldspath) .	2,942
Puzzolane	2,510 — 2,800

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Quarz, gemeiner . . .	2,486 bis 2,763
milchweißer	2,652
Quecksilber, deutsches . .	14,000
englisches . .	13,593
Quecksilberkalk	9,230
Quittenbaumholz	0,705
Regenwasser, ganz reines . .	1,000
Reisblei, deutsches . . .	2,460
englisches . . .	2,089
Rosenholz	1,125
Rosmarinöhl	0,934
Rothbüchenholz, s. Büchen.	
Rothstein	1,666 — 3,139
Rothtannenholz, Fichten, frisch	0,546
trocken	0,370 — 0,498
Rubin	4,166 — 4,283
Rübsaamenöhl	0,853 — 0,919
Sadebaumöhl	0,986
Salmiak, reiner	1,420
Salpeter	1,900
feuerbeständiger . .	2,745
Salpetersäure, gemeine . .	1,272
rauchende . .	1,583
Salzsäure	1,194
Sand, gemeiner, trocken . .	1,638
aus Bächen . . .	1,900
mit Wasser gesättigt .	1,945
Sandelholz, gelbes . . .	0,809
rothes . . .	1,128
weißes . . .	1,041
Sandstein	1,933 — 2,699
magdeburger . .	1,971 — 2,123
Saphir	3,994 — 4,203
Sardonix	2,595 — 2,628

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Sassafrasholz, trocken . .	0,482
Sassafrasöhl	1,094
Scamonienharz	1,200
Schaafsmilch	1,041
Schieferthon	2,600 bis 2,680
Schlehensaft	1,515
Schmergel	3,922
Schörl, gemeiner (schwarzer) .	2,920 — 3,212
elektrischer, s. Turmalin.	
Schwefel, geschmolzener . .	1,991
natürlicher . .	2,033
Schwefelkies	2,440 — 4,954
Schwefelnaphta	0,716
Schweinefett	0,937
Schwerspath, gemeiner . .	4,342 — 4,760
dichter . . .	4,300 — 4,400
faseriger . .	4,440 — 4,496
körniger . .	4,380
Serpentinstein, gemeiner . .	2,560 — 2,894
Silber, 16löthiges, geschlagen .	10,511
geschmolzen	10,474
Silberglaserz	6,910
Silberhornerz	4,749
Smaragd, gemeiner . . .	2,678 — 2,775
Speck	0,948
Speckstein, gemeiner . . .	2,614 — 2,880
Spieköhl	0,936
Spinell (Rubinspath) . .	3,454 — 3,914
Spiesglas, geschmolzen . .	6,702
rohes . . .	4,064
Spiesglasöhl	2,470
Spiesglastinktur . . .	0,866
Stahl, geschlagen . . .	7,819
ungeschlagen . . .	7,833

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Stahl, köllnischer	8,215
Federstahl	8,215
von englischen Feilen .	8,189
Stangenstein (weißer Schörl) .	3,530
Steineichenholz, vom Stamme, frisch	0,990 bis 1,100
trocken	0,724 — 0,760
von der Wurzel, frisch	1,008 — 1,200
vom Zweige, frisch	0,819 — 0,832
Steinkohle	1,270 — 1,500
Steinmark, verhärtetes . .	2,500 — 2,815
Steinöhl	0,878
Steinsalz	2,143
Stinkstein	2,699 — 2,712
Storaxgummi	1,110
Strahlstein, Strahlschörl . .	2,806 — 3,452
Stroh, so wie es in den Scheunen zusammengebunden ist .	0,053
zusammengepreßt . .	0,125
Strontianit	3,400 — 3,675
Tacamakharz	1,139
Talk, gemeiner (Talkstein) .	2,700 — 3,000
Talkschiefer	2,768 — 3,020
Tannenharz	1,073
Tannenholz, s. Weißtanne.	
Taxusbaumholz, holländisches .	0,788
spanisches .	0,807
Teufelsdreck	1,327
Therpentin	0,991
Therpentingeist	0,874
Therpentinöhl	0,870
Thon, gemeiner, Töpfererde .	1,800 — 2,000
Thonerde, reine	1,305 — 1,699
Thonschiefer, Dachschiefer . .	2,670 — 3,500
Thran	0,923

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Thumerstein, Axinit (Glasschörl)	3,250 — 3,295
Thuyasbaumholz . . .	0,561
Tombak	9,185
Topas	3,333 bis 4,010
Trapp	2,780 — 3,021
Tripel (Tripelerde) . . .	2,529
Tropfstein	2,324 — 2,675
Tungstein	6,066
Turmalin, elektrischer Schörl .	3,054 — 3,470
Ulmenholz, vom Stamme, trocken	0,600 — 0,742
Veroneserorde, Grünerde . .	2,637
Vesuvian (vulkanischer Schörl) .	3,365 — 4,000
Vitriol, danziger	1,715
englischer . . .	1,880
Vitriolsalz	1,900
Vitriolsäure	1,700 — 1,877
Wacholderholz	0,556
Wacholderöhl	0,911
Wachs, gelbes	0,965
weißes	0,969
Wachsöhl	0,831
Wacke	2,535 — 2,980
Wallrath	0,943
Wallroßzahn	1,933
Wasser, destillirtes . . .	1,000
Wasserblei	4,738
Weibermilch	1,020
Weidenholz	0,585
Wein, Bordeaux . . .	0,991
Burgunder . . .	0,991
Kapwein, rother . .	1,018
weißer . .	1,039
Madera	1,038
Mallaga	1,022

Benennung der Materien.	Eigenthümliches Gewicht.
Wein, Moseler	0,916
Pontak	0,993
Rheinwein . . .	0,999
Tokayer	1,054
Weingeist, gemeiner . . .	0,837
höchst rectificirter .	0,829
Weinstein	1,849
Weinsteingeist	1,073
Weinsteinöhl	1,550
Weinsteinrahm	1,900
Weinsteinsalz	1,550
Weinstockholz	1,327
Weisbüchenholz, s. Hornbaum.	
Weißtannenholz, vom Stamme, frisch	0,444 bis 0,453
trocken	0,420 — 0,424
Weyrauch	1,173
Wetzschiefer	2,609 — 2,955
Wismuth, gediegen . . .	9,020
geschmolzen . .	9,822
Wundersalz, Glaubers . .	2,246
Zeolith, straligter . . .	2,035 — 2,100
Ziegel, gebrannter . . .	1,410 — 2,215
Ziegenmilch	1,034
Zimmetöhl	1,044
Zink, geschmolzen . . .	7,191
Zinkblende	4,166
Zinn, englisches, gegossen . .	7,291
gehämmert .	7,306
Zinnober, braunrother . .	10,218
hochrother . . .	6,902
Zirkon, dunkelblauer . . .	4,666
weißer	4,307
Zucker, weißer	1,606

Weil die Zahlen γ und $\frac{1}{\gamma}$ häufig vorkommen, so ist zur Erleichterung der Rechnung noch folgende Tafel beigefügt.

	γ	$\frac{1}{\gamma}$
1	65,936841	0,0151660
2	131,873682	0,0303321
3	197,810524	0,0454981
4	263,747365	0,0606641
5	329,684206	0,0758301
6	395,621047	0,0909962
7	461,557888	0,1061622
8	527,494730	0,1213282
9	593,431571	0,1364943

Wollte man z. B. das eigenthümliche Gewicht eines Körpers wissen von welchem der Kubikfuß 273,46 berliner Pfund wiegt, so wird, mit Hülfe der vorstehenden Tafel, die Rechnung folgendergestalt geführt:

273	46
003	03321
01	06162
0	04550
	00607
	0091
4	14731

Das eigenthümliche Gewicht dieses Körpers ist daher = 4,14731.

Wäre umgekehrt das eigenthümliche Gewicht eines Körpers z. B. = 4,14731 gegeben, so findet man eben so leicht das Gewicht von einem Kubikfuße der Materie desselben.

4	14731
263	747365
6	593684
2	637474
	461558
	19781
	659
273	460521

Viertes Kapitel.

Vom Schwerpunkte.

§. 76.

Wenn mehrere Gewichte an einer oder mehreren festen mit einander verbundenen Linien oder Ebenen angebracht sind, so nennt man denjenigen Punkt, welcher gehörig unterstützt werden muß, damit diese Gewichte in allen Lagen der Linien oder Ebenen im Gleichgewichte oder in Ruhe bleiben, den Schwerpunkt (Centrum gravitatis. *Centre de gravité.*). In eben der Bedeutung versteht man unter dem Schwerpunkte eines schweren festen Körpers denjenigen Punkt, welcher vertikal unterstützt werden muß, wenn der Körper in allen Lagen in Ruhe bleiben soll.

Bei dem graden Hebel ist der Dreh- oder Ruhepunkt der Schwerpunkt, weil derselbe in allen Lagen im Gleichgewichte bleibt, wenn dieser Punkt gehörig unterstützt ist (§. 57.).

§. 77.

Taf. II. Fig. 46. Aufgabe. An einer festen Ebene XY, Figur 46., wirken senkrecht auf dieselbe in den Punkten A, A′ zwei Gewichte P, P′, deren Lage durch die senkrechten Abstände DA, D′A′ von einer in dieser Ebene willkürlich gezogenen Momentenaxe BC gegeben sind; man sucht den Abstand des Schwerpunkts von dieser Axe.

Auflösung. Man ziehe AA'; nehme $AG = \frac{AA'.P'}{P+P'}$ Taf. II. Fig. 46.
so ist G der Schwerpunkt (§. 45.), und wenn dieser unterstützt wird, so bleiben beide Gewichte in allen Lagen in Ruhe.

Nun verhält sich

$P' : P + P' = AG : AA'$; aber auch

$AG : AA' = HG - AD : A'D' - AD$ also ist

$(HG - AD)(P + P') = (A'D' - AD)P'$ folglich der gesuchte Abstand des Schwerpunktes der Gewichte P, P' oder

$$HG = \frac{AD.P + A'D'.P'}{P + P'}$$

Der Punkt G wird seine Unterstützung in jeder Lage eben so stark drücken, als wenn die Gewichte P, P' darin vereinigt wären.

Wird noch ein drittes Gewicht P'' in A'' senkrecht auf XY angebracht, so kann man die Gewichte P, P' in G anbringen, und ihre Wirkung auf diesen Punkt G bleibt dieselbe. Für das Gewicht $(P + P')$ in G, und P'' in A'', ist es nun leicht, nach der vorstehenden Regel den Abstand des Schwerpunkts G' zu finden, weil hier eben die Regel gelten muß, wie bei zwei Gewichten; es ist daher

$$H'G' = \frac{HG.(P + P') + A''D''.P''}{(P + P') + P''}$$

oder wenn man für HG seinen Werth setzt

$$H'G' = \frac{AD.P + A'D'.P' + A''D''.P''}{P + P' + P''}$$

und es ist alsdann G' der gemeinschaftliche Schwerpunkt der drei Gewichte P, P', P'', welcher gehörig unterstützt diese Gewichte bei jeder Lage der Ebene in Ruhe erhält.

Auch wird der Punkt G' so stark gedrückt, als wenn die Gewichte P, P', P'' in ihm vereinigt wären.

Verfährt man auf diese Art weiter, bei einem vierten, fünften rc. Gewichte, so erhält man allgemein, wenn

a, a', a'', a''', ... die Abstände der Gewichte P, P', P'', P''', ... von einer willkürlichen Linie BC sind, und x die Entfernung des Schwerpunkts von dieser Linie bezeichnet

$$x = \frac{aP + a'P' + a''P'' + a'''P''' + \ldots}{P + P' + P'' + P''' + \ldots}$$

d. h. man findet die Entfernung des Schwerpunkts mehrerer in einer Ebene angebrachten Gewichte, von einer willkürlichen Linie, in dieser Ebene, wenn die Summe der Momente für diese Linie durch die Summe der Gewichte dividirt wird.

Hiedurch erhält man ein leichtes Mittel, den Schwerpunkt mehrerer an einer Ebene befindlichen Gewichte zu finden, weil man nur zwei sich schneidende Linien annehmen, und von diesen die Entfernung des Schwerpunkts bestimmen darf.

Taf. II. Fig. 47. Wären in der Ebene XY, Figur 47., in A, A', A'' die Gewichte $P = 40$, $P' = 50$, $P'' = 60$ Pfund angebracht, und die Lage der Punkte A, A', A'' gegen die willkürlichen Linien BC und $B'C'$ gegeben, so daß

$DA = 5$, $D'A' = 10$, $D''A'' = 6$ und

$EA = 11$, $E'A' = 8$, $E''A'' = 4$ ist, so erhält man für den Abstand des Schwerpunkts von BC

$$\frac{5.40 + 10.50 + 6.60}{40 + 50 + 60} = 7\tfrac{1}{15} \text{ Fuß}$$

und für den Abstand des Schwerpunkts von $B'C'$

$$\frac{11.40 + 8.50 + 4.60}{40 + 50 + 60} = 7\tfrac{1}{5} \text{ Fuß.}$$

Nimmt man nun auf BC senkrecht, $BH = 7\tfrac{1}{15}$ Fuß, und zieht HH' mit BC parallel, so muß in HH' der Schwerpunkt liegen. Eben so nehme man auf $B'C'$ senkrecht, $B'K = 7\tfrac{1}{5}$ Fuß, ziehe KK' mit $B'C'$ parallel, so muß der Schwerpunkt ebenfalls in KK' liegen; folglich ist im Durchschnitt G der gesuchte Schwerpunkt.

§. 78.

Wenn auf mehrere einzelne Punkte eines Systems, welche nicht in einerlei Ebene liegen, Kräfte wirken, deren Richtungen mit einander parallel sind, so läßt sich auch für diese Kräfte ein solcher Punkt angeben, welcher gehörig unterstützt das System in allen Lagen im Gleichgewichte erhält, so bald nur die Lage der angegriffenen Punkte unter sich selbst nicht geändert wird.

Wären D und D', Figur 48., zwei Punkte, in welchen die Kräfte P, P' nach parallelen Richtungen wirken, so nehme man eine Ebene MN von willkürlicher Lage an, und ziehe auf diese Ebene senkrecht die Linien DC, $D'C'$. In der Ebene MN ziehe man die willkürliche Linie AB', und von den Punkten D, D' die auf AB' senkrechte Linien CB, $C'B'$, so wird die Lage der Punkte D und D' durch die Linien $AB = x$, $BC = y$, $CD = z$ und $AB' = x'$, $B'C' = y'$, $C'D' = z'$ bestimmt, wo alsdann A der gemeinschaftliche Anfangspunkt für die Coordinaten x, y, z und x', y', z' ist. Man ziehe CC' und DD', so fällt der Schwerpunkt von P, P' in die Linie DD'. Wäre g dieser Schwerpunkt, so ziehe man gf auf CC' und fe auf AB' senkrecht, auch $D'h$

Taf. II. Fig. 48.

Taf. II. Fig. 48. mit CC' parallel, so wird sich $D'h$ mit gk in k schneiden, und die Dreiecke $DD'h$ und $D'gk$ sind ähnlich. Alsdann verhält sich

$Dh : gk = D'D : D'g$. Aber auch §. 57.

$D'D : D'g = P+P' : P$ daher

$Dh : gk = P+P' : P$ folglich

$$gk = \frac{Dh \cdot P}{P+P'} = \frac{(z-z')P}{P+P'}$$

Aber $gk = fg - fk = fg - z'$ also

$$fg = \frac{(z-z')P}{P+P'} + z'$$

man findet daher

$$fg = \frac{zP + z'P'}{P+P'}.$$

Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke $CC'l$ und $C'fm$ verhält sich ferner

$Cl : fm = C'C : C'f$ und auch

$C'C : C'f = D'D : D'g$. Aber weil

$D'D : D'g = P+P' : P$ so folgt

$Cl : fm = P+P' : P$ daher ist

$$fm = \frac{Cl \cdot P}{P+P'} = \frac{(y-y')P}{P+P'}$$

Aber $fm = ef - em = ef - y'$ also

$$ef = \frac{(y-y')P}{P+P'} + y'$$

daher findet man

$$ef = \frac{yP + y'P'}{P+P'}.$$

Endlich verhält sich auch

$C'l : C'm = Cl : fm$. Aber weil

$Cl : fm = P+P' : P$ so folgt

$C'l : C'm = P+P' : P$ also

$$C'm = \frac{C'l \,.\, P}{P + P'} = \frac{(x' - x)\, P}{P + P'}$$ Taf. II. Fig. 48.

Aber $C'm = B'e = AB' - Ae = x' - Ae$

also

$$x' - Ae = \frac{(x' - x)\, P}{P + P'} \text{ oder } Ae = x' - \frac{(x' - x)\, P}{P + P'}$$

daher ist

$$Ae = \frac{xP + x'P'}{P + P'}.$$

Aus den Werthen Ae, ef, fg läßt sich daher der Schwerpunkt g für jede zwei Kräfte, deren Richtungen parallel sind, bestimmen, wenn die erforderlichen Abstände derselben bekannt sind.

Wäre eine dritte Kraft P'' vorhanden, deren Lage durch die auf einander senkrechte Linien $AB'' = x''$, $B''C'' = y''$, $C''D'' = z''$ gegeben ist, so setze man $P + P' = Q$, so kann man statt der Kräfte P, P' die Kraft Q in g anbringen. Alsdann erhält man, wenn g' der Schwerpunkt für die Kräfte P', Q ist, nach den gefundenen Ausdrücken für den Schwerpunkt zweier Kräfte:

$$Ae' = \frac{Ae \,.\, Q + x''P''}{Q + P''}$$

$$e'f' = \frac{ef \,.\, Q + y''P''}{Q + P''}$$

$$f'g' = \frac{fg \,.\, Q + z''P''}{Q + P''}$$

Es ist aber

$Q = P + P'$; $Ae.Q = Ae\,(P + Q) = xP + x'P'$; $ef.Q = yP + y'P'$ und $fg:Q = zP + z'P$; man erhält daher zur Bestimmung der Lage des Schwerpunkts für die drei Kräfte P, P' und P'' die Abstände

$$Ae' = \frac{xP + x'P' + x''P''}{P + P' + P''}$$

Taf. II. Fig. 48.

$$e'f' = \frac{yP + y'P' + y''P''}{P + P' + P''}$$

$$f'g' = \frac{zP + z'P' + z''P''}{P + P' + P''}$$

Setzt man wieder $P + P' + P'' = Q'$, so kann man auf eine ähnliche Art den Schwerpunkt für vier und mehrere Kräfte finden, und weil das Verfahren immer dasselbe bleibt, so erhält man ganz allgemein, wenn G der Schwerpunkt für irgend eine Anzahl paralleler Kräfte P, P′, P″, P‴, ... ist, und die senkrechten Abstände AE, EF, FG die Lage des Schwerpunkts bezeichnen:

$$AE = \frac{xP + x'P' + x''P'' + x'''P''' + \ldots}{P + P' + P'' + P''' + \ldots}$$

$$EF = \frac{yP + y'P' + y''P'' + y'''P''' + \ldots}{P + P' + P'' + P''' + \ldots}$$

$$FG = \frac{zP + z'P' + z''P'' + z'''P''' + \ldots}{P + P' + P'' + P''' + \ldots}$$

Hätte man anstatt des Anfangspunkts A eine auf AB′ senkrechte Ebene angenommen, welche durch den Punkt A geht, so wären x, x′, x″, ... die Abstände der Punkte D, D′, D″, ... von dieser Ebene. Um daher den Schwerpunkt von mehrern nicht in einerlei Ebene befindlichen Kräften zu finden, nehme man drei sich senkrecht schneidende Ebenen an, und bestimme die Abstände der angegriffenen Punkte von diesen drei Ebenen. Für jede Ebene wird alsdann der Abstand des Schwerpunkts bestimmt, wenn man die Summe der Momente von dieser Ebene durch die Summe der Kräfte dividirt.

Weil dieser Satz für jede willkürlich angenommene Lage der drei auf einander senkrechten Ebenen gilt, so muß er auch für jede Lage des Systems wahr seyn.

§. 79.

§. 79.

Die Materie eines jeden festen Körpers kann man sich so vorstellen, als wenn solche aus einzelnen sehr kleinen Theilen oder Gewichten bestehet, welche durch den Zusammenhang des Körpers mit einander verbunden sind, und für diese muß es eben so wohl, wie für jede andere Menge von Gewichten einen Schwerpunkt geben, welcher, wenn er unterstützt wird, den Körper in jeder Lage in Ruhe erhält, und in welchem man sich das ganze Gewicht des Körpers vereinigt vorstellen kann. Wird der Körper im Schwerpunkte oder in einer durch denselben gehenden festen Vertikallinie unterstützt, so leidet die Stütze einen Druck, welcher dem Gewichte des Körpers gleich ist, woraus folgt, daß ein Körper mit seinem ganzen Gewichte vereinigt in derjenigen Vertikallinie wirkt, welche durch den Schwerpunkt geht. Ist der Schwerpunkt nicht unterstützt, so muß der Körper fallen, und eben daher kann ein Körper nicht zwei oder mehrere Schwerpunkte haben. Es hat daher jeder feste Körper einen Schwerpunkt, der zwar nicht immer, wie z. B. bei einem Ringe, in seiner Masse liegt, aber jederzeit, wenn er mit dem Körper in eine feste Verbindung gesetzt und unterstützt wird, den Körper in Ruhe erhält.

Jede grade Linie, welche durch den Schwerpunkt eines Körpers geht, heißt ein Durchmesser der Schwere (Diameter gravitatis), und da, wo sich zwei Durchmesser der Schwere schneiden, muß der Schwerpunkt liegen.

Eine Ebene, durch den Schwerpunkt gelegt, heißt eine Ebene der Schwere (Planum gravitatis). Die

Durchschnittslinie von zwei Ebenen der Schwere giebt einen Durchmesser der Schwere.

In allen den Fällen, wo hier der Schwerpunkt eines Körpers gesucht wird, ist vorausgesetzt, daß dessen Materie von gleichförmiger Dichtigkeit sei; so wie man auch, wenn von einer schweren Fläche oder Linie die Rede ist, allemal voraussetzen muß, daß gleichgroße Theile derselben gleiches Gewicht haben. Hieraus läßt sich einsehen, wiefern es erlaubt ist, statt des Gewichts eines Körpers seinen Inhalt in Rechnung zu bringen, weil sich die Inhalte eben so wie die Gewichte verhalten. Dasselbe gilt von den Flächen und Linien. Wenn hingegen gleiche Theile eines Körpers nicht einerlei eigenthümliches Gewicht haben, dann verhalten sich die Inhalte nicht wie die Gewichte, und man darf daher auch nicht jene statt dieser in Rechnung bringen.

§. 80.

Taf. II. Fig. 49. Die schwere Linie BAC, Figur 49., werde durch eine grade Linie AD so geschnitten, daß wenn man BC auf AD senkrecht zieht, die Fläche AMBD genau auf ANCD paßt, so ist AD ein Durchmesser der Schwere für die Linie BAC, weil alle gleichgroße Theile dieser Linie gleiche senkrechte Abstände von AD haben müssen. Aus ähnlichen Gründen liegt der Schwerpunkt einer graden Linie in ihrer Mitte.

Fig. 50. Von einer jeden Fläche wie ABC, Figur 50., welche durch eine grade Linie AD so geschnitten werden kann, daß jede Parallellinie mit der Grundlinie BC, wie MN, in zwei gleichgroße Theile MQ = QN getheilt wird,

ist die Linie AD ein Durchmesser der Schwere. Denn man nehme mn parallel mit DE, so daß der eingeschlossene Raum MmnN äußerst schmal ist, alsdann wird offenbar der Schwerpunkt dieses sehr schmalen Streifens in dem Durchschnitte liegen, wo AD denselben schneidet. Weil dieses nun von jedem mit BC parallelen Streifen gilt, und man sich die ganze Fläche in solche Streifen eingetheilt vorstellen kann, so muß die ganze Fläche ABC in Ruhe bleiben, wenn AD unterstützt wird, weshalb in AD der Schwerpunkt von der ganzen Fläche liegen muß.

Aehnliche Schlüsse kann man auf Körper anwenden, deren Inhalt sowohl als ihre Grundfläche durch eine Ebene in zwei gleiche Theile getheilt werden, und wo sämmtliche mit der Grundfläche parallele Querschnitte einen Durchmesser der Schwere haben, der in die Ebene fällt, welche den Körper in zwei gleiche Theile eintheilt. Diese Ebene ist alsdann eine Ebene der Schwere, weil in ihr der Schwerpunkt des Körpers liegen muß.

I. Von dem Schwerpunkte der Linien.

§. 81.

Der Schwerpunkt von dem Umfange einer jeden gradlinigten Figur kann leicht gefunden werden, wenn man sich das Gewicht jeder einzelnen Linie in ihrer Mitte vereinigt vorstellt, und nach §. 77. den Schwerpunkt dieser Gewichte sucht.

Der Schwerpunkt des Kreises und des Umfangs einer jeden regelmäßigen Figur liegt im Mittelpunkte.

§. 82.

Zusatz. Wollte man den Abstand des Schwerpunkts G, Figur 52., von jeder Seite des Dreiecks ABC durch Rechnung finden, so setze man die Seiten BC = a, AC = b, AB = c und die Abstände XG = x, YG = y, ZG = z. Ferner sollen die Höhen des Dreiecks für die Grundlinie BC wie AA′ durch a′, für AC durch b′, für AB durch c′ bezeichnet werden. Bezeichnen nun zugleich die Längen a, b, c die Gewichte dieser Linien, weil sie den Längen proportional sind, so fällt der Schwerpunkt der Linie AC = b in ihre Mitte in D; der Schwerpunkt von AB in die Mitte bei F u. s. w., und man kann sich in D, F die Gewichte der Linie b, c vereinigt vorstellen. Nimmt man BC als Axe zur Bestimmung der Momente an, und zieht DE, FH auf BC senkrecht, so ist ED . AC das Moment der Linie AC, HF . AB das Moment der Linie AB, oder weil $HF = ED = \frac{1}{2} AA' = \frac{1}{2} a'$ ist, so erhält man $ED \cdot AC = \frac{1}{2} a'b$; $HF \cdot AB = \frac{1}{2} a'c$, also nach §. 77. den Abstand XG von der Axe BC oder

Taf. III. Fig. 52.

$$x = \frac{\frac{1}{2}a'b + \frac{1}{2}a'c}{a + b + c} = \frac{a'(b + c)}{2(a + b + c)}$$

Eben so findet man für die Axe AC den Abstand YG oder

$$y = \frac{b'(a + c)}{2(a + b + c)}$$ und endlich ZG oder

$$z = \frac{c'(a + b)}{2(a + b + c)}$$

oder wenn man die Summe der drei Seiten a + b + c = S setzt, so wird

$$x = \frac{a'(S - a)}{2S};\; y = \frac{b'(S - b)}{2S};\; z = \frac{c'(S - c)}{2S}$$

Wären die Höhen a', b', c' des Dreiecks nicht bekannt, sondern nur der Inhalt Q desselben, so ist $Q = \frac{1}{2} a a' = \frac{1}{2} b b' = \frac{1}{2} c c'$; also $a' = \frac{2Q}{a}$ u. s. w.; folglich erhält man auch die Abstände

$$x = \frac{S - a}{a S} Q; \quad y = \frac{S - b}{b S} Q; \quad z = \frac{S - c}{c S} Q$$

§. 83.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Kreisbogens zu finden.

Auflösung. Der Kreisbogen AB, Figur 53., von welchem gleichgroße Stücke gleiches Gewicht haben, sei bei D in zwei gleiche Theile getheilt, und aus dem zugehörigen Mittelpunkte C die Linie CD gezogen, so ist diese ein Durchmesser der Schwere, und in derselben muß der Schwerpunkt G des Bogens AB liegen. Man ziehe $A'B'$ durch C auf CD senkrecht, theile den Bogen AB in eine sehr große Menge äußerst kleiner gleichgroßer Theile wie mn, so ist das Moment für die Linie $A'B'$ von $mn = mn \, . \, mm'$; wo mm', nn' so wie AA', BB' auf $A'B'$ senkrecht sind. Man setze, daß Taf. III. Fig. 53.

r den Halbmesser CD

b den Bogen ADB und

s die Sehne AB bezeichne; ferner sei no auf mm' senkrecht, so ist $\triangle mno \backsim Cmm'$ daher

$$mm' : Cm = no : mn \quad \text{also}$$

$$mn = \frac{Cm \, . \, no}{mm'} = \frac{r \, . \, m'n'}{mm'}$$

Es ist also das Moment des Bogenstücks $mn =$

$$mn \, . \, mm' = r \, . \, m'n'$$

Taf. III. Fig. 53. Für jedes andere Bogenstück wie vw findet man sein Moment $= r \cdot v'w'$, daher die Summe aller Momente $= r \cdot A'B' = r \cdot AB = r \cdot s$

Die Summe dieser Momente muß dem Momente des ganzen Bogens $CG \cdot b$ gleich seyn, daher

$$CG \cdot b = rs \quad \text{folglich}$$

$$CG = \frac{r \cdot s}{b}$$

oder weil auch $b : s = r : CG$, so verhält sich die Länge eines Kreisbogens zu seiner Sehne, wie der Halbmesser des zugehörigen Kreises zum Abstande des Schwerpunkts dieses Bogens vom Mittelpunkte des zugehörigen Kreises.

1. Zusatz. Wäre AB der Quadrant eines Kreises, so ist $s = r\sqrt{2}$ und $b = \frac{1}{2}\pi r$ daher

$$CG = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot r = 0,9003166 \cdot r$$

oder beinahe

$$CG = \tfrac{9}{10}\, r$$

es liegt daher der Schwerpunkt von dem Bogen eines Quadranten sehr nahe $\frac{9}{10}$ des Halbmessers vom Mittelpunkte entfernt.

2. Zusatz. Für den Halbkreis ist $s = 2r$ und $b = \pi r$ also

$$CG = 2\,\frac{r}{\pi} = 0,63661977 \cdot r \text{ oder beinahe}$$

$$CG = \tfrac{7}{11}\, r$$

Der Schwerpunkt eines Halbkreises liegt daher sehr nahe $\frac{7}{11}$ des Halbmessers vom Mittelpunkte entfernt.

Anmerkung. Wird der Punkt G unterstützt, so muß der Bogen AB ruhen. Weil aber hier G nicht in den Bogen fällt, so wird hiebei vorausgesetzt, daß der Punkt G mit dem Bogen in einer festen Verbindung stehe.

§. 84.

Für den Viertelkreis oder Quadranten AEB, Figur 54., sei der Halbmesser $AC = BC = r$, $AP = x$, $PE = y$, der Bogen $AE = v$ und sein Schwerpunkt liege in G. Ferner sei der Horizontalabstand $EI = w$ und der Vertikalabstand $IG = w'$, so ist Taf. III. Fig. 54.

$$AE = \sqrt{(x^2 + y^2)} = \sqrt{2rx} \text{ und nach §. 83.}$$

$$CG = \frac{r \,.\, AE}{\text{Bogen } AE} = \frac{r\sqrt{2rx}}{v}.$$

Weil die Dreiecke GIK, CPK und CAF einander ähnlich sind, so verhält sich

$$CA : AF = CG : PI \text{ oder}$$

$$r : \tfrac{1}{2}\sqrt{2rx} = \frac{r\sqrt{2rx}}{v} : y - w \text{ daher ist}$$

$ry - rw = \frac{r^2 x}{v}$, und man findet hieraus den Horizontalabstand EI für den Schwerpunkt G oder

$$\text{(I)} \quad w = y - \frac{rx}{v}$$

Nun ist ferner

$$IP = y - w = y - y + \frac{rx}{v} = \frac{rx}{v} \text{ und}$$

$CF = \sqrt{(CA^2 - AF^2)} = \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{2}rx)}$. Es verhält sich aber

$$AF : CF = PI : CP + IG \text{ oder}$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2rx} : \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{2}rx)} = \frac{rx}{v} : r - x + w'$$

und hieraus

$$r - x + w' = \frac{2rx}{v\sqrt{2rx}}\sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{2}rx)} = \frac{r}{v}\sqrt{(2rx - x^2)} = \frac{ry}{v}$$

weil für den Kreis $y = \sqrt{(2rx - x^2)}$ ist. Man findet daher den Vertikalabstand IG oder

$$(II) \quad w' = x - r + \frac{ry}{v}.$$

Beispiel. Der Bogen AE sei der achte Theil vom Umfange des Kreises, so ist $v = \frac{2\pi r}{8} = \frac{1}{4}\pi r$; der Winkel ACE = 45 Grad, also

$$CP = PE = y = \frac{r\sqrt{2}}{2} \text{ und } x = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) r$$

daher

$$w = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4 - 2\sqrt{2}}{\pi}\right) r = 0{,}3341837 \cdot r$$

und

$$w' = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{4}{\pi} - 1\right) r = 0{,}1932095 \cdot r$$

§. 85.

Zusatz. Für den ganzen Viertelkreis wird

$$x = y = r \text{ und } v = \tfrac{1}{2}\pi r \text{ daher}$$

$$EI = r - \frac{2r^2}{\pi r}$$

oder man findet den Horizontalabstand

$$(I) \quad w = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) r = 0{,}36338023 \cdot r$$

Ferner ist $IG = r - r + \frac{2r^2}{\pi r}$ oder man erhält den Vertikalabstand

$$(II) \quad w' = \frac{2r}{\pi} = 0{,}63661977 \cdot r.$$

§. 86.

Taf. III. Fig. 54. Mit Beibehaltung der Bezeichnung §. 84. sei G', Figur 54., der Schwerpunkt des Kreisbogens BE und $BI' = w''$, $I'G' = w'''$, so ist der Bogen

$BE = \frac{1}{2}\pi r - v$

$BE = \sqrt{(2r \,.\, BL)} = \sqrt{[2r(r-y)]}$ und §. 83.

$$CG' = \frac{r \,.\, BE}{\frac{1}{2}\pi r - v} = \frac{r\sqrt{(2r^2 - 2ry)}}{\frac{1}{2}\pi r - v}$$

Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke EBL und $CG'I'$ verhält sich

$$EB : EL = CG' : CI' \text{ oder}$$

$$\sqrt{(2r^2 - 2ry)} : r - x = \frac{r\sqrt{(2r^2 - 2ry)}}{\frac{1}{2}\pi r - v} : r - w''$$

Hieraus findet man den Horizontalabstand BI' für den Schwerpunkt G' oder

$$\text{(I)} \quad w'' = r - \frac{r(r-x)}{\frac{1}{2}\pi r - v}$$

Ferner verhält sich

$$EB : BL = CG' : GI \text{ oder}$$

$$\sqrt{(2r^2 - 2ry)} : r - y = \frac{r\sqrt{(2r^2 - 2ry)}}{\frac{1}{2}\pi r - v} : w'''$$

daher ist der Vertikalabstand $I'G'$ oder

$$\text{(II)} \quad w''' = \frac{r(r-y)}{\frac{1}{2}\pi r - v}.$$

* §. 87.

Aufgabe. Von einer jeden krummen Linie AM, Figur 55., die Lage des Schwerpunkts G ganz allgemein zu bestimmen. Taf. III. Fig. 55.

Auflösung. Die Natur der krummen Linie sei durch eine Gleichung gegeben, so daß für die rechtwinklichten Coordinaten A der Anfangspunkt der Abscissen ist. Man setze $AP = x$, $PM = y$, den Bogen $AM = v$. Ferner sei FG senkrecht auf AP, und zur Bestimmung der Lage des Schwerpunkts, $AF = u$, $FG = u'$. Wächst nun x um $Pp = \partial x$, also der Bogen v um

Taf. III. Fig. 55. $Mm = \partial v$, und man zieht AN auf AP und MN auf AN senkrecht, so ist das Moment von ∂v gegen die Linie $AN = NM \,.\, Mm = x \partial v$ also $\int x \partial v$ die Summe aller Momente vom Bogen AM gegen diese Linie AN, und wenn die Summe der Momente durch die Summe der Gewichte $= v$ dividirt wird, so erhält man AF oder

$$(I)\ u = \frac{\int x \partial v}{v}$$

Das Moment vom Elemente Mm gegen die Linie AP ist $PM \,.\, Mm = y \partial v$, also die Summe der Momente $= \int y \partial v$, daher wie vorhin der Abstand des Schwerpunkts von der Linie AP, also FG oder

$$(II)\ u' = \frac{\int y \partial v}{v}$$

Es sei GI senkrecht auf MP, und man setze
w w' $MI = w$, $IG = w'$, so ist $w = y - u'$; man erhält daher den Horizontalabstand MI oder

$$(III)\ w = y - \frac{\int y \partial v}{v}$$

und weil $w' = x - u$ ist, so findet man den Vertikalabstand IG oder

$$(IV)\ w' = x - \frac{\int x \partial v}{v}$$

Mit Hülfe der beiden ersten oder letzten Formeln ist man im Stande, die Lage des Schwerpunkts einer jeden krummen Linie zu finden, wobei zu bemerken ist, daß

$$\partial v = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$$

gesetzt werden kann, wenn ∂v nicht aus andern Umständen bekannt ist.

Wäre A der Scheitel einer krummen Linie von gleichen entgegengesetzten Ordinaten, so ist F der Schwerpunkt der ganzen Kurve, so wie G der Schwerpunkt für die Hälfte ist. Zur Bestimmung des Schwerpunkts von der ganzen Kurve hat man daher nur den Werth AF = u nöthig, wogegen für die halbe Kurve die Werthe u und u' bestimmt werden müssen, um die Lage des Schwerpunkts derselben anzugeben.

* §. 88.

Aufgabe. Den Schwerpunkt G, Figur 55., von dem Bogen AM einer Parabel zu finden. Taf. III. Fig. 55.

Auflösung. Die Gleichung für die Parabel ist $ax = y^2$, so ist $a\,\partial x = 2y\,\partial y$ also

$$\partial x^2 = \frac{4y^2}{a^2}\,\partial y^2 \text{ daher}$$

$$\partial v = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \frac{\partial y}{a}\sqrt{(a^2 + 4y^2)} \text{ oder}$$

wenn man $a^2 + 4y^2 = Y$ setzt

$\partial v = \frac{\partial y}{a}\sqrt{Y}$, daher (P. A. S. 161. VII.)

$$v = \int \frac{\partial y}{a}\sqrt{(a^2+4y^2)} = \frac{y}{2a}\sqrt{Y} + \frac{a}{4}\operatorname{logn}(2y+\sqrt{Y}) + \text{Const.}$$

Für $x = 0$ wird y und $v = 0$ und $\sqrt{Y} = a$ also

$$\text{Const} = -\frac{a}{4}\operatorname{logn} a, \text{ daher}$$

$$v = \frac{y}{2a}\sqrt{Y} + \frac{a}{4}\operatorname{logn}\frac{2y+\sqrt{Y}}{a} = \int\frac{\partial y}{a}\sqrt{Y}$$

Nun ist $x\,\partial v = \frac{y^2}{a}\,\partial v = \frac{y^2\,\partial y}{a^2}\sqrt{Y}$ daher (P. A. S. 153. (3))

$$\int x\,\partial v = \frac{y}{16\,a^2}\sqrt{Y^3} - \frac{a}{16}\int\frac{\partial y}{a}\sqrt{Y} = \frac{y}{16\,a^2}\sqrt{Y^3} - \frac{a\,v}{16}$$

Es ist aber §. 87. $u = \frac{\int x\,\partial v}{v}$, daher findet man den Abstand des Schwerpunkts von der Tangente durch den Scheitel A = AF oder

$$\text{(I)} \quad u = \frac{y\sqrt{(a^2 + 4y)^3} - a^3 v}{16\, a^2\, v}$$

Ferner ist

$$\int y\,\partial v = \int \frac{y\,\partial y}{a} \sqrt{(a^2 + 4y^2)} = \frac{\sqrt{(a^2 + 4y^2)^3}}{12\,a} + \text{Const.}$$

Für $y = 0$ verschwindet das Integral, also ist $\text{Const} = -\frac{a^2}{12}$ daher ist

$\int y\,\partial v = \frac{\sqrt{(a^2 + 4y^2)^3} - a^3}{12\,a}$ folglich §. 87. der Abstand des Schwerpunkts von der Axe oder $FG =$

$$\text{(II)} \quad u' = \frac{\sqrt{(a^2 + 4y^2)^3} - a^3}{12\,a\,v}$$

Anmerkung. Es wird hier nochmal erinnert, daß durch log die briggischen, und durch logn die natürlichen Logarithmen angedeutet werden.

* §. 89.

Taf. III. Fig. 55. Aufgabe. Den Schwerpunkt G, Figur 55., von dem Bogen einer Hyperbel AM zu finden.

Auflösung. Der Anfangspunkt der Abscissen falle in den Scheitel A, so ist für $AP = x$, $PM = y$, wenn $2a$ die Hauptaxe und $2b$ die Nebenaxe der Hyperbel bezeichnen,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2) \text{ [I] also}$$

$$x^2 + 2ax = \frac{a^2 y^2}{b^2}$$

und wenn auf beiden Seiten a^2 addirt, und die Quadratwurzel ausgezogen wird

$$a + x = \frac{a}{b}\sqrt{(a^2 + y^2)} \text{ und}$$

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{(a^2 + y^2)} - a \text{ [II]}$$

Aus [I] folgt ferner, wenn man differenziirt Taf. III. Fig. 55.

$$y\partial y = \frac{b^2}{a^2}(a + x)\partial x \text{ oder}$$

$$\partial x = \frac{a^2 y \partial y}{b^2(a+x)} = \frac{a^2 y \partial y}{ab\sqrt{(a^2+y^2)}} \text{ also}$$

$$\partial x^2 = \frac{a^2 y^2 \partial y^2}{b^2(a^2+y^2)}.$$ Diesen Werth in die Gleichung

$$\partial v = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} \text{ gesetzt giebt}$$

$$\partial v = \frac{\partial y}{b}\sqrt{\frac{a^2b^2 + (a^2+b^2)y^2}{a^2+y^2}}$$

Hieraus und aus [II] findet man

$$x\partial v = \frac{a\partial v}{b}\sqrt{(a^2+y^2)} - a\partial v = \frac{a\partial y}{b^2}\sqrt{[a^2b^2 + (a^2+b^2)y^2]} - a\partial v$$

oder wenn man $a^2 + b^2 = \alpha^2$ setzt

$$\int x\partial v = \int \frac{a\partial y}{b^2}\sqrt{(a^2b^2 + \alpha^2y^2)} - av;$$

Es ist aber (P. A. S. 161. VII)

$$\int \partial y \sqrt{(a^2b^2 + \alpha^2y^2)}$$

$$= \frac{y}{2}\sqrt{(a^2b^2+\alpha^2y^2)} + \frac{a^2b^2}{2\alpha}\operatorname{logn}[\alpha y + \sqrt{(a^2b^2+\alpha^2y^2)}] + \text{Const.}$$

Für $y = o$ verschwindet das Integral, und man erhält

$$\text{Const.} = -\frac{a^2b^2}{2\alpha}\operatorname{logn}.ab \text{ folglich}$$

$$\int x\partial v = \frac{ay}{2b^2}\sqrt{(a^2b^2+\alpha^2y^2)} + \frac{a^3}{2\alpha}\operatorname{logn}\frac{\alpha y + \sqrt{(a^2b^2+\alpha^2y^2)}}{ab} - av$$

Da nun nach §. 87. (I) $u = \frac{\int x\partial v}{v}$ ist, so findet man den Abstand des Schwerpunkts von der Tangente des Scheitels oder AF =

$$(I)\ u = \frac{a}{2v}\left[\frac{y}{b^2}\sqrt{(a^2b^2+\alpha^2y^2)} + \frac{a^2}{\alpha}\operatorname{logn}\frac{\alpha y + \sqrt{(a^2b^2+\alpha^2y^2)}}{ab}\right] - a$$

Weil ferner $\partial y = \frac{b^2(a+x)\partial x}{a^2 y}$, so findet man auch

$$\partial v = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \frac{\partial x}{a^2 y}\sqrt{[a^4y^2 + b^4(a+x)^2]}$$

oder

$$y\partial v = \frac{\partial x}{a^2} \sqrt{[a^4 y^2 + b^4 (a+x)^2]}.$$

Setzt man aus [I] für y^2 seinen Werth, so erhält man nach gehöriger Zusammenziehung

$$y\partial v = \frac{b\partial x}{a^2} \sqrt{[a^2 b^2 + 2a(a^2+b^2)x + (a^2+b^2)x^2]}$$

oder

$$y\partial v = \frac{b\partial x}{a^2} \sqrt{[a^2 b^2 + 2a\alpha^2 x + \alpha^2 x^2]}$$

Zur Abkürzung setze man

$$a^2 b^2 + 2a\alpha^2 x + \alpha^2 x^2 = X$$

so ist (P. A. S. 147. II)

$$\int y\partial v = \frac{b(a+x)}{2a^2}\sqrt{X} - \frac{a^2 b}{2\alpha}\operatorname{logn}[2\alpha^2(a+x) + 2\alpha\sqrt{X}] + \text{Const.}$$

Mit $x = 0$ verschwindet das Integral, und man erhält $\sqrt{X} = ab$, also

$$\text{Const} = -\frac{b^2}{2} + \frac{a^2 b}{2\alpha}\operatorname{logn}[2\alpha^2 a + 2\alpha a b] \quad \text{daher}$$

$$\int y\partial v = \frac{b(a+x)}{2a^2}\sqrt{X} - \frac{b^2}{2} - \frac{a^2 b}{2\alpha}\operatorname{logn}\frac{\alpha(a+x)+\sqrt{X}}{a(\alpha+b)}$$

Nach §. 87. (II) ist aber $u' = \frac{\int y\partial v}{v}$, daher findet man den Abstand des Schwerpunkts von der Axe der Hyperbel oder FG =

$$\text{(II)}\ u' = \frac{b}{2v}\left[\frac{a+x}{a^2}\sqrt{X} - b - \frac{a^2}{\alpha}\operatorname{logn}\frac{\alpha(a+x)+\sqrt{X}}{a(\alpha+b)}\right]$$

* §. 90.

Taf. III. Fig. 55. **Aufgabe.** Den Schwerpunkt G, Figur 55., eines elliptischen Bogens AM zu finden.

Auflösung. Fällt der Anfangspunkt der Abscissen in den Scheitel der kleinen Axe der Ellipse, so sei A dieser Scheitel, AP = x, PM = y, die große Axe = 2 a,

die kleine $= 2b$, so ist die Gleichung für die Ellipse, Taf. III. Fig. 55.
bei welcher die Abscissen vom Scheitel der kleinen Axe gerechnet werden.

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2}(2bx - x^2) \text{ [I] also}$$

$$x^2 - 2bx = -\frac{b^2 y^2}{a^2}$$

und wenn auf beiden Seiten b^2 addirt und die Quadratwurzel ausgezogen wird.

$$b - x = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - y^2)} \text{ und}$$

$$x = b - \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - y^2)} \text{ [II]}$$

Aus [I] folgt ferner $y\,\partial y = \frac{a^2}{b^2}(b - x)\,\partial x$ oder

$$\partial x = \frac{b^2 y\,\partial y}{a^2(b - x)} = \frac{b^2 y\,\partial y}{ab\sqrt{(a^2 - y^2)}} \text{ also}$$

$\partial x^2 = \frac{b^2 y^2 \partial y^2}{a^2(a^2 - y^2)}$. Diesen Werth in die Gleichung

$\partial v = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$ gesetzt, giebt

$$\partial v = \frac{\partial y}{a}\sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)y^2}{a^2 - y^2}}.$$

Hieraus und aus [II] findet man

$$x\partial v = b\partial v - \frac{b\partial v}{a}\sqrt{(a^2 - y^2)} = b\partial v - \frac{b\partial y}{a^2}\sqrt{[a^4 - (a^2 - b^2)y^2]}$$

oder wenn man $a^2 - b^2 = \alpha^2$ setzt

$$\int x\,\partial v = bv - \int\frac{b\partial y}{a^2}\sqrt{(a^4 - \alpha^2 y^2)}$$

Es ist aber (P. A. S. 161. VIII)

$$\int \partial y\sqrt{(a^4 - \alpha^2 y^2)} = \tfrac{1}{2}y\sqrt{(a^4 - \alpha^2 y^2)} + \frac{a^4}{2\alpha}\text{Arc tgt}\frac{\alpha y}{\sqrt{(a^4 - \alpha^2 y^2)}} + \text{Const.}$$

wo Const. $= 0$ ist, weil das Integral mit $y = 0$ verschwindet. Nun ist auch

$$\text{Arc sin}\frac{\alpha y}{a^2} = \text{Arc tgt}\frac{\alpha y}{\sqrt{(a^4 - \alpha^2 y^2)}} \text{ daher}$$

Taf. III. $\int \partial y \sqrt{(a^4 - \alpha^2 y^2)} = \frac{1}{2} y \sqrt{(a^4 - \alpha^2 y^2)} + \frac{a^4}{2\alpha} \text{Arc sin} \frac{\alpha y}{a^2}$
Fig. 55. folglich

$$\int x \partial v = b v - \frac{b y}{2 a^2} \sqrt{(a^4 - \alpha^2 y^2)} + \frac{b a^2}{2\alpha} \text{Arc sin} \frac{\alpha y}{a^2}$$

Nach §. 87. (I) ist $u = \frac{\int x \partial v}{v}$; daher findet man den Abstand des Schwerpunkts von der Tangente durch den Scheitel, oder AF =

$$\text{(I)}\ u = b - \frac{b}{2v} \left[\frac{y}{a^2} \sqrt{(a^4 - \alpha^2 y^2)} + \frac{a^2}{\alpha} \text{Arc sin} \frac{\alpha y}{a^2} \right]$$

Weil $\partial y = \frac{a^2 (b - x) \partial x}{b^2 y}$, so findet man auch

$$\partial v = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \frac{\partial x}{b^2 y} \sqrt{[b^4 y^2 + a^4 (b - x)^2]}$$

oder

$$y \partial v = \frac{\partial x}{b^2} \sqrt{[b^4 y^2 + a^4 (b - x)^2]}.$$

Setzt man aus [I] für y^2 seinen Werth, so erhält man nach gehöriger Zusammenziehung

$$y \partial v = \frac{a \partial x}{b^2} \sqrt{[a^2 b^2 - 2b (a^2 - b^2) x + (a^2 - b^2) x^2]}$$

oder

$$y \partial v = \frac{a \partial x}{b^2} \sqrt{[a^2 b^2 - 2 \alpha^2 b x + \alpha^2 x^2]}$$

Wird zur Abkürzung $a^2 b^2 - 2 \alpha^2 b x + \alpha^2 x^2 = X$ gesetzt, so erhält man (P. A. S. 147. II)

$$\int y \partial v = - \frac{a(b - x)}{2 b^2} \sqrt{X} + \frac{a b^2}{2 \alpha} \text{logn} [2 \alpha \sqrt{X} - 2 \alpha^2 (b - x)] + \text{Const.}$$

Für $x = 0$ verschwindet das Integral, und man erhält $\sqrt{X} = a b$, also

$$\text{Const.} = \frac{a^2}{2} - \frac{a b^2}{2 \alpha} \text{logn} [2 \alpha a b - 2 \alpha^2 b]$$

daher

$$\int y \partial v = \frac{a^2}{2} - \frac{a (b - x)}{2 b^2} \sqrt{X} + \frac{a b^2}{2 \alpha} \text{logn} \frac{\sqrt{X} - \alpha (b - x)}{b (a - \alpha)}$$

Weil

Weil nun §. 87. (II) $u' = \frac{\int y \partial v}{v}$ ist, so erhält man den Abstand des Schwerpunkts von der kleinen Axe der Ellipse oder FG =

$$\text{(II)}\ u' = \frac{a}{2v}\left[a - \frac{b-x}{b^2}\sqrt{X} + \frac{b^2}{\alpha}\,\text{logn}\,\frac{\sqrt{X} - \alpha(b-x)}{b(a-\alpha)}\right]$$

* §. 91.

1. Zusatz. Wäre AM, Figur 55., der vierte Theil von dem ganzen Umfange der Ellipse, wenn der Scheitel in A fällt, so wird $AP = x = b$ und $MP = y = a$, $\sqrt{(a^4 - \alpha^2 y^2)} = ab$, $\sqrt{X} = b^2$ daher AF oder Taf. III. Fig. 55.

$$\text{(I)}\ u = b - \frac{b}{2v}\left[b + \frac{a^2}{\alpha}\,\text{Arc sin}\,\frac{\alpha}{a}\right]$$

und FG oder

$$\text{(II)}\ u' = \frac{a}{2v}\left[a + \frac{b^2}{\alpha^2}\,\text{logn}\,\frac{b}{a-\alpha}\right]$$

* §. 92.

2. Zusatz. Für $x = 2b$ wird $y = 0$, und $\sqrt{X} = ab$, also

$$\text{(I)}\ u = b$$

und

$$\text{(II)}\ u' = \frac{a}{2v}\left[2a + \frac{b^2}{\alpha}\,\text{logn}\,\frac{a+\alpha}{a-\alpha}\right].$$

* §. 93.

Aufgabe. Den Schwerpunkt G, Figur 55., von dem Bogen AM einer Cykloide zu finden.

Auflösung. Werden die Abscissen vom Scheitel A gerechnet, so ist für $AP = x$, $PM = y$ die Gleichung für die Cykloide (Anhang §. 3. III)

$$y = r\ \text{Arc sinv}\,\frac{x}{r} + \sqrt{(2rx - x^2)}$$

und der Bogen AM (Anh. §. 6.) oder

Taf. III. Fig. 55.

$$v = 2\sqrt{2rx} \text{ also } \partial v = \partial x \sqrt{\frac{2r}{x}} = \frac{2r\partial x}{\sqrt{2rx}}$$

also $x\partial v = x\partial x \sqrt{\frac{2r}{x}} = \partial x \sqrt{2rx}$ daher

$$\int x\,\partial v = \int \partial x \sqrt{2rx} = \tfrac{2}{3} x \sqrt{2rx}$$

wo keine Constante hinzukommt, weil das Integral mit $x = 0$ verschwindet. Es ist daher der Abstand des Schwerpunkts von der Tangente durch den Scheitel oder

$$u = \frac{\int x\partial v}{v} = \frac{\int x\partial v}{2\sqrt{2rx}}, \text{ oder}$$

$$\text{(I) } u = \tfrac{1}{3} x.$$

Zur Bestimmung von u' ist

$$y\partial v = \frac{2r^2\partial x}{\sqrt{2rx}} \text{ Arc sinv } \frac{x}{r} + \frac{2r\partial x}{\sqrt{2rx}} \sqrt{(2rx - x^2)}$$

oder

$$\int y\partial v = r\sqrt{2r}\int \frac{\partial x}{\sqrt{x}} \text{ Arc sinv } \frac{x}{r} + \sqrt{2r}\int \partial x \sqrt{(2r-x)} \text{ [I]}$$

Aber $\int \partial x \sqrt{(2r-x)} = -\tfrac{2}{3}\sqrt{(2r-x)^3} + \text{Const.}$, und weil das Integral mit $x = 0$ verschwindet, so ist $\text{Const.} = \tfrac{4}{3} r\sqrt{2r}$ daher

$$\int \partial x \sqrt{(2r - x)} = \tfrac{2}{3}[2r\sqrt{2r} - \sqrt{(2r-x)^3}] \text{ [II]}$$

Um das andere Integral zu bestimmen, so ist

$\int \frac{\partial x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$ und (P. A. S. 79. 3 Z.)

$\partial . \text{Arc sinv } \frac{x}{r} = \frac{\partial x}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$ daher weil (P. A. S. 143.)

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{x}} \text{ Arc sinv } \frac{x}{r} = \text{Arc sv } \frac{x}{r} \int \frac{\partial x}{\sqrt{x}} - \int \partial . \text{Arc sv } \frac{x}{r} \int \frac{\partial x}{\sqrt{x}}$$

so erhält man statt dieser Ausdrücke

$2 . \sqrt{x} \text{ Arc sinv } \frac{x}{r} - \int \frac{2\partial x\sqrt{x}}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$ [III] Nun ist

$$\int \frac{2\partial x\sqrt{x}}{\sqrt{(2rx-x^2)}} = \int \frac{2\partial x}{\sqrt{(2r-x)}} = -4\sqrt{(2r-x)} + \text{Const.}$$

und weil mit $x = 0$ das Integral verschwindet, so ist

Const. $= 4\sqrt{2r}$, daher das vollständige Integral Taf. III.
$= 4[\sqrt{2r} - \sqrt{(2r-x)}]$ Fig. 55.

Man erhält daher aus [I], [II] und [III]

$$\int y\partial v = \tfrac{2}{3}(4r+x)\sqrt{2r}\sqrt{(2r-x)} - \tfrac{16}{3}r^2 + 2r.\sqrt{(2rx)}\,\text{Arc sinvs}\,\frac{x}{r}$$

Nun ist §. 87. (II) $u' = \frac{\int y\partial v}{v} = \frac{\int y\partial v}{2\sqrt{2rx}}$, daher der Abstand des Schwerpunkts von der Axe oder

$$\text{(II)}\ u' = \frac{4r+x}{3}\sqrt{\frac{2r-x}{x}} - \frac{4r}{3}\sqrt{\frac{2r}{x}} + r\,\text{Arc sinvers}\,\frac{x}{r}$$

* §. 94.

Zusatz. Für die ganze Höhe der Cykloide wird $x = 2r$, und man erhält den Abstand des Schwerpunkts vom Scheitel oder

$$u = \tfrac{2}{3}r.$$

Für den Abstand von der Axe wird

$\text{Arc sinvers}\,\frac{x}{r} = \text{Arc sinvers}\,2 = \pi$ also

$$u' = -\tfrac{4}{3}r + \pi r = 1,808259 \,.\, r$$

* §. 95.

Aufgabe. Den Schwerpunkt einer Kettenlinie zu finden.

Auflösung. Der Scheitel der Kettenlinie liege in A, Figur 55., und es sei $AP = x$, $PM = y$ und der Bogen $AM = v$, so ist (Anhang §. 92. I.)

$v^2 = 2cx + x^2$, wo c eine beständige Größe ist.

Hieraus erhält man

$v\partial v = (c+x)\partial x$ [I] oder mit $\frac{x}{v\partial x}$ multiplizirt

$$\frac{x\partial v}{\partial x} = \frac{cx+x^2}{v} + \frac{cx}{v} - \frac{cx}{v} = \frac{2cx+x^2}{v} - \frac{cx}{v} = \frac{v^2}{v} - \frac{cx}{v} \text{ oder}$$

$$x\partial v = v\partial x - \frac{cx\partial x}{v} \quad \text{[II]}$$

Taf. III. Nun ist ferner bei der Kettenlinie (Anhang §. 89.)

Fig. 55. $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{c}{v}$ und nach [I]

$c \partial x = v \partial v - x \partial x.$

Werden die auf einerlei Seite des Gleichheitszeichens stehenden Glieder beider Gleichungen mit einander multiplizirt, so wird

$c \partial y = c \partial v - \frac{c x \partial x}{v}$ oder

$\frac{c x \partial x}{v} = c \partial v - c \partial y.$

Diesen Werth in die Gleichung [II] gesetzt, giebt

$x \partial v = v \partial x - c \partial v + c \partial y$ oder

$2 x \partial v = x \partial v + v \partial x - c \partial v + c \partial y$ also

$2 \int x \partial v = x v - c v + c y$

wo keine Constante hinzukommt, weil das Integral mit $x = y = v = 0$ verschwindet. Nun ist §. 87. (I) der Abstand des Schwerpunkts von der durch den Scheitel gehenden Tangente, $u = \frac{\int x \partial v}{v}$ daher

$$\text{(I)}\ u = \frac{x v - c v + c y}{2 v}.$$

Ferner ist $v \partial y = c \partial x$ also

$\int v \partial y = \int c \partial x = c x$ daher

$\int y \partial v = v y - \int v \partial y = v y - c x.$

Da nun für den Abstand des Schwerpunkts von der Axe $u' = \frac{\int y \partial v}{v}$ ist, so erhält man

$$\text{(II)}\ u' = \frac{v y - c x}{v}.$$

II. Vom Schwerpunkte ebener Figuren.

§. 96.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Dreiecks zu finden.

Auflösung. Man theile BC, Figur 56., in D, und AC in E, in zwei gleiche Theile, ziehe AD und BE, so sind diese Durchmesser der Schwere also nach §. 80. der Durchschnittspunkt G der Schwerpunkt des Dreiecks. Taf. III. Fig. 56.

Wird die Linie DE gezogen, so ist solche mit AB parallel, weil $AE = \frac{1}{2}AC$ und $BD = \frac{1}{2}BC$ ist. Dieserhalb ist das Dreieck $GDE \backsim AGB$, und es verhält sich

$DG : GA = DE : AB$. Da nun

$AC = 2CE$ so wird

$AB = 2DE$ also

$DG : GA = DE : 2DE = 1 : 2$ folglich

$2DG = GA$ oder $DG = \frac{1}{3}AD$ oder $AG = \frac{2}{3}AD$.

Man findet daher den Schwerpunkt eines Dreiecks, wenn von irgend einem Winkelpunkte nach der Mitte der gegenüberliegenden Seite eine grade Linie gezogen, und diese Linie in drei gleiche Theile getheilt wird. Der Schwerpunkt liegt alsdann im zweiten Theilungspunkte, vom Scheitel an gerechnet.

Wenn gleich die Linien AD, BE das Dreieck ABC in zwei gleiche Theile theilen, und jede Linie durch G ein Durchmesser der Schwere ist, so folgt doch hieraus nicht, daß auch durch jeden Durchmesser der Schwere das Dreieck in gleiche große Theile getheilt wird; weil im

Dreiecke nicht so wie beim Parallelogramme, Kreise ꝛc. ein Mittelpunkt der Größe (Centrum magnitudinis) vorhanden ist. So würde eine durch G mit AB parallele Linie das Dreieck in zwei Theile theilen, wovon der nach C gelegene $\frac{4}{9}$ und der nach AB gelegene $\frac{5}{9}$ vom Inhalte des Dreiecks ABC enthält. Dagegen sind aber auch die nach C gelegenen schweren Theile des Dreiecks weiter entfernt, als die nach AB gelegenen, und haben daher auch größere Momente.

§. 97.

Der Abstand des Schwerpunkts eines jeden Dreiecks von irgend einer willkürlich angenommenen Linie, welche mit dem Dreiecke in einerlei Ebene fällt, wird gefunden, wenn man den dritten Theil von der Summe der drei Abstände nimmt, um welche die Spitzen des Dreiecks von der angenommenen Linie entfernt sind.

Taf. III. Fig. 57. Beweis. Es sei ABC, Figur 57, das gegebene Dreieck, $A'B'$ die angenommene Linie, und AA', BB', CC' die drei Abstände der Dreiecksspitzen von der Linie $A'B'$. Man halbire BC in E, ziehe AE, und nehme $EG = \frac{1}{3} AE$, so ist G der Schwerpunkt der Dreiecks ABC (§. 96.). Nun werde AD mit $A'B'$ parallel, und EK auf AD senkrecht gezogen, so ist

$$EK = \frac{CF + BD}{2}.$$

Es ist aber $AG = \frac{2}{3} AE$, also auch

$$GH = \frac{2}{3} EK = \frac{2}{3} \cdot \frac{CF + BD}{2} = \frac{CF + BD}{3}.$$

Weil ferner $HG' = AA' = DB' = FC'$ so ist auch

$$HG' = \frac{AA' + DB' + FC'}{3}$$ folglich

$$GH + HG' = \frac{CF + BD + AA' + DB' + FC'}{3}$$ oder

weil $BD + DB' = BB'$ und $CF + FC' = CC'$ ist, so erhält man den Abstand des Schwerpunkts von der Linie $A'B'$ oder

$$GG' = \frac{AA' + BB' + CC'}{3}.$$

§. 98.

In jedem Dreiecke ist die Summe von den Quadraten der Seiten desselben dreimal so groß, als die Summe von den Quadraten derjenigen Linien, welche man vom Schwerpunkte nach den Spitzen des Dreiecks ziehen kann.

Beweis. Im Dreieck ABC, Figur 58., sei G der Schwerpunkt, und durch denselben die Linien AF, BE, CH gezogen. Man setze $BF = FC = a$, $AE = EC = b$, $AH = HB = c$; ferner $BE = e$, $AF = f$, $CH = h$ und den Winkel $AFB = \alpha$, so ist Taf. III. Fig. 58.

$AB^2 = AF^2 + FB^2 - 2 AF.BF.\cos\alpha$ und

$AC^2 = AF^2 + CF^2 + 2 AF.CF.\cos\alpha$ folglich

$AB^2 + AC^2 = 2 AF^2 + FB^2 + CF^2 = 2 AF^2 + 2 BF^2$

oder

$4c^2 + 4b^2 = 2f^2 + 2a^2$ oder

$f^2 = 2c^2 + 2b^2 - a^2$. Auf gleiche Art ist

$e^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2$ und

$h^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$

daher wenn man diese drei letzten Gleichungen mit einander verbindet

$f^2 + e^2 + h^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$

Es ist aber $AG = \frac{2}{3} f$ also $f^2 = \frac{9}{4} AG^2$

$BG = \frac{2}{3} e$ also $e^2 = \frac{9}{4} BG^2$

$CG = \frac{2}{3} h$ also $h^2 = \frac{9}{4} CG^2$

folglich wenn man diese Werthe in die zuletzt gefundene Gleichung setzt

$$\tfrac{9}{4}(AG^2 + BG^2 + CG^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

oder

$$3(AG^2 + BG^2 + CG^2) = BC^2 + AC^2 + AB^2.$$

§. 99.

Vom Parallelogramme sind die beiden Diagonalen Durchmesser der Schwere, daher liegt der Schwerpunkt im Durchschnittspunkte derselben.

Eben so liegt der Schwerpunkt einer Kreisfläche im Mittelpunkte. Auch fällt der Schwerpunkt eines jeden regelmäßigen Vielecks mit dem Mittelpunkte desjenigen Kreises zusammen, welcher um das Vieleck beschrieben werden kann.

Diese Sätze folgen unmittelbar aus §. 80.

§. 100.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines jeden Vierecks zu finden.

Auflösung. Man suche die Schwerpunkte f, f′,
Taf. III. Figur 59., der Dreiecke ABC, ACD, so ist ff′ ein
Fig. 59. Durchmesser der Schwere vom Viereck ABCD. Sucht man nun ferner die Schwerpunkte g, g′ der Dreiecke ABD, BCD, und zieht gg′, so ist auch dieses ein Durchmesser der Schwere des Vierecks, daher G der gesuchte Schwerpunkt.

§. 101.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines jeden Fünfecks zu finden.

Auflösung. Man suche den Schwerpunkt f vom
Fig. 60. Viereck ABCD, Figur 60., und f′ vom Dreieck ADE,

so ist ff' ein Durchmesser der Schwere für das Fünfeck. Eben so wenn g der Schwerpunkt vom Viereck ABCE und g' vom Dreieck CDE ist, so muß gg' gleichfalls ein Durchmesser der Schwere seyn, daher ist G der Schwerpunkt des Fünfecks.

§. 102.

Auf ähnliche Art, wie §. 100. und 101., kann man mittelst des Schwerpunkts vom Fünfeck den des Sechsecks, und so des Siebenecks u. s. w. bestimmen, weil dies Verfahren aber alsdann sehr umständlich wird, so ist es leichter, um von jedem unregelmäßigen Vielecke den Schwerpunkt zu finden, solche in Dreiecke zu theilen, und von zwei sich schneidenden Linien die Entfernung ihrer Schwerpunkte zu bestimmen, da sich dann leicht nach §. 77. die Lage des Schwerpunkts der ganzen Figur bestimmen läßt, wenn man die Inhalte der Dreiecke, welche ihren Gewichten proportional sind, als Gewichte an den einzelnen Schwerpunkten in Rechnung bringt.

Beispiel. Wäre der Schwerpunkt des Sechsecks ABCDEF, Figur 61., zu finden, so theile man dasselbe in Dreiecke, und bestimme außer ihren Inhalten die Entfernungen ihrer Schwerpunkte g, g', g'', g''' von den beiden Linien XY, YZ. Ist nun Taf. III. Fig. 61.

$\triangle ABF = 12$ □Fuß;	$ag = 4$;	$bg = 10$	Fuß
$BEF = 17$ „ „	$a'g' = 5\frac{1}{2}$;	$b'g' = 9$	„
$BCE = 21$ „ „	$a''g'' = 6$;	$b''g'' = 5\frac{1}{2}$	„
$CDE = 13$ „ „	$a'''g''' = 10$;	$b'''g''' = 7$	„

so erhält man für den Schwerpunkt G der ganzen Figur

$$HG = \frac{12.4 + 17.5\frac{1}{2} + 21.6 + 13.10}{12 + 17 + 21 + 13} = 6,31 \text{ Fuß}$$

$$KG = \frac{12.10 + 17.9 + 21.5\frac{1}{2} + 13.7}{12 + 17 + 21 + 13} = 7,61 \text{ Fuß.}$$

§. 103.

Aufgabe. Den Schwerpunkt von einem Trapez zu bestimmen.

1. Auflösung. Durch Zeichnung. Man theile die
Taf. III. parallelen Seiten AD, BC, Figur 62., vom Trapez
Fig. 62. ABCD in zwei gleiche Theile in E, F, ziehe EF, so ist diese Linie ein Durchmesser der Schwere (§. 80.) vom Trapez. Ferner suche man die Schwerpunkte g, g′ der Dreiecke ABD und BCD, so ist gg′ ebenfalls ein Durchmesser der Schwere, daher der Durchschnittspunkt von EF und gg′ oder G, der Schwerpunkt vom Trapez.

2. Auflösung. Durch Rechnung. Mit BC parallel werde gh, g′h′ gezogen, so ist weil (§. 96.) $Eg = \frac{1}{3}EB$ auch $Eh = \frac{1}{3}EF$; und weil $Fg' = \frac{1}{3}FD$, auch $Fh' = \frac{1}{3}EF$, daher $Eh = Fh' = \frac{1}{3}EF = hh'$.

Die Gewichte vom Trapez ABCD und $\triangle$ BCD verhalten sich wie ihre Inhalte, und diese wie (AD + BC) und BC. Nun müssen am Hebel gg′ die Gewichte der Dreiecke in den zugehörigen Schwerpunkten g, g′ mit dem Gewichte des Trapezes in G im Gleichgewichte seyn, also ist das Moment

$$gG.(AD + BC) = gg'.BC \text{ oder}$$
$$AD + BC : BC = gg' : gG.$$

Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke Ggh, Gg′h′ verhält sich auch

$$gg' : gG = hh' : hG$$

oder, indem $\frac{1}{3}EF$ statt hh′ gesetzt wird,

$$AD + BC : BC = \tfrac{1}{3}EF : hG \text{ also}$$
$$hG = \frac{BC \cdot EF}{3(AD + BC)}.$$

Nun ist

$$EG = Eh + hG \text{ oder}$$
$$= \tfrac{1}{3} EF + \frac{BC \,.\, EF}{3\,(AD + BC)}.$$

Man setze $EF = a$, $AD = b$, $BC = c$, so wird

$$EG = \tfrac{1}{3} a + \frac{ac}{3\,(b + c)}$$

daher wenn beide Glieder unter einen Nenner gebracht werden

$$\text{(I)}\ EG = \frac{a\,(b + 2c)}{3\,(b + c)}$$

woraus leicht der Schwerpunkt G mittelst der Linie $EF = a$ bestimmt werden kann.

Weil $FG = a - EG$, so erhält man, wenn der obige Werth für EG gesetzt wird, und beide Glieder auf einen Nenner gebracht werden

$$\text{(II)}\ FG = \frac{a\,(2b + c)}{3\,(b + c)}.$$

§. 104.

Wollte man die Lage des Schwerpunkts G bei einem Trapez nicht durch die Mittellinie EF, Figur 62., sondern mittelst einer auf der Grundlinie AD, Figur 63., senkrechten Linie HG finden, so sei $BC = b$, $AD = c$, die Höhe $CE = BF = h$ und $AF = e$; ferner die gesuchten Entfernungen $AH = u$ und $HG = u'$. Nimmt man nun die auf AD senkrechte Linie AN als Momentenaxe an, und zieht AC, so erhält man nach §. 97. das

Taf. III. Fig. 63.

$$\text{Moment vom Dreieck } ADC = \frac{c + b + e}{3} \,.\, \tfrac{1}{2} ch$$
$$ABC = \frac{b + 2e}{3} \,.\, \tfrac{1}{2} bh.$$

Die Summe dieser Momente muß dem Momente vom ganzen Trapez, also $= u \frac{(b+c)}{2} h$ seyn, man erhält daher

$$\tfrac{1}{2} uh(b+c) = \tfrac{1}{6} ch(b+c+e) + \tfrac{1}{6} bh(b+2e)$$

und hieraus den Abstand

$$\text{(I)}\ AH = u = \frac{b^2+c^2+bc+2be+ce}{3(b+c)}$$

Um den Abstand HG zu finden, darf man nur die Momente der beiden Dreiecke ACD, ABC gegen AD suchen, und wie vorhin verfahren. Nun ist das

Moment vom Dreieck $ACD = \tfrac{1}{3} h \cdot \tfrac{1}{2} ch$

$ABC = \tfrac{2}{3} h \cdot \tfrac{1}{2} bh$

daher weil die Summe dieser Momente dem Momente $u' \cdot \frac{b+c}{2} h$ gleich seyn muß, so erhält man den Abstand

$$\text{(II)}\ HG = u' = \frac{(2b+c)h}{3(b+c)}.$$

Für $e = 0$ fällt die Linie AB in AN, und man erhält alsdann

$$\text{(III)}\ AH = u = \frac{b^2+c^2+bc}{3(b+c)}.$$

§. 105.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Kreisausschnitts zu finden.

Taf. III. Fig. 64. Auflösung. Wird der Bogen AD, Figur 64., des Ausschnitts ABC in zwei gleiche Theile in D getheilt, so ist CD ein Durchmesser der Schwere, in welchem der Schwerpunkt G des Ausschnitts liegen muß. Mit der Sehne AB parallel, durch C, ziehe man A'B', und theile den Bogen ADB in eine Menge äußerst kleiner gleich großer Theile wie mn, so läßt sich von jedem dieser kleinen Dreiecke wie mnC der Schwerpunkt g in der Linie Co angeben (§. 96.). Auf A'B' sei gg', mp', oo', nn', AA', BB', und auf mp' sei np senkrecht, so ist, wenn von der angenommenen Axe A'B' sämmtliche Momente der kleinen Dreiecke und des ganzen Abschnitts bestimmt werden, $\frac{mn \cdot oC}{2} \cdot gg'$ das Moment des Dreiecks mnC.

Nun ist $Cg = \frac{2}{3} Co$, daher $gg' = \frac{2}{3} oo'$, oder weil mo so klein genommen werden kann, daß der Unterschied zwischen oo' und mp' nicht in Betrachtung kommt, $gg' = \frac{2}{3} mp'$. Setzt man den Halbmesser $AC = CB = r$, so ist alsdann

$$\frac{mn \cdot oC}{2} \cdot gg' = \frac{mn \cdot r}{2} \cdot \frac{2}{3} mp' = \frac{1}{3} r \cdot mn \cdot mp'$$

Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke Cmp' und mnp verhält sich

$$Cm : mp' = mn : pn \text{ daher ist}$$
$$mn \cdot mp' = Cm \cdot pn = r \cdot p'n'$$

und hienach das Moment des $\triangle$ mnC

$$\frac{1}{3} r \cdot mn \cdot mp' = \frac{1}{3} r^2 \cdot p'n'$$

Sucht man auf diese Art für jedes andere Dreieck wie vwC das Moment, so erhält man dafür

$$\frac{1}{3} r^2 \cdot v'w'$$

Es ist daher die Summe von den Momenten der Dreiecke, welche den Ausschnitt ABC ausmachen

$$\frac{1}{3} r^2 \cdot A'B' = \frac{1}{3} r^2 \cdot AB.$$

Für das Gleichgewicht in Bezug auf die Axe A'B' muß das Moment des ganzen Ausschnitts oder die Entfernung $CG = \frac{1}{3} r^2 \cdot AB$ seyn. Man setze, daß

Taf. III. Fig. 64. b den Bogen ADB und s die Sehne AB bezeichne, so ist der Inhalt des Ausschnitts $= \frac{1}{2}r \,.\, b$ daher

$$\tfrac{1}{2}rb \,.\, CG = \tfrac{1}{3}r^2 \,.\, s \quad \text{oder}$$

die Entfernung des Schwerpunkts vom Mittelpunkte

$$CG = \frac{\frac{2}{3}r \,.\, s}{b}$$

oder $b : s = \frac{2}{3}r : CG$

es verhält sich daher der Bogen eines Ausschnitts zu seiner Sehne, wie zwei Drittel des Halbmessers zur Entfernung des Schwerpunkts des Ausschnitts vom Mittelpunkte.

§. 106.

1. Zusatz. Für den Halbkreis ist $s = 2r$ und $b = \pi r$, wenn $\pi = 3{,}14159..$ ist, daher

$$CG = \frac{4}{3}\frac{r}{\pi} = 0{,}424413 \,.\, r$$

oder sehr nahe

$$CG = \tfrac{14}{33}r.$$

Der Schwerpunkt eines Halbkreises liegt daher $\frac{14}{33}$ des Halbmessers vom Mittelpunkt entfernt.

§. 107.

2. Zusatz. Bei einem Viertelkreis oder Quadranten ist der Bogen $b = \frac{1}{2}\pi r$ und $s^2 = 2r^2$ also $s = r\sqrt{2}$ daher findet man den Abstand des Schwerpunkts vom Mittelpunkte, oder

$$CG = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \,.\, r = 0{,}600211 \,.\, r$$

Man ziehe in dem Quadranten ABC, Figur 64., GF auf AC senkrecht, so ist in dem rechtwinklichten Dreiecke CGF, die Seite $CF = FG$, also

$$2CF^2 = CG^2 = \frac{4^2 \cdot 2}{3^2 \cdot \pi^2} \cdot r^2 \text{ oder}$$

$$CF^2 = \frac{16\, r^2}{9\, \pi^2}$$

und man erhält den Abstand des Schwerpunkts von demjenigen Halbmesser, welcher den Quadranten einschließt, oder

$$CF = FG = \frac{4\, r}{3\, \pi} = 0{,}424413 \cdot r$$

§. 108.

3. Zusatz. Wollte man für den Ausschnitt ADBC den Abstand CG des Schwerpunkts durch den Winkel ACB $= \alpha$ ausdrücken, so ist $\frac{1}{2}AB = AC \sin \frac{1}{2}\alpha$ oder $\frac{1}{2}s = r \sin \frac{1}{2}\alpha$, also $s = 2r \sin \frac{1}{2}\alpha$. Bezeichnet nun Arc α die Länge eines Bogens für den Halbmesser $= 1$, welcher den Winkel ACB zum Maaß hat, so verhält sich $1 : CA = \text{Arc}\,\alpha :$ Bog. ADB also Bogen ADB $= CA \cdot \text{Arc}\,\alpha$ oder $b = r\, \text{Arc}\,\alpha$. Man erhält daher für jeden Ausschnitt den Abstand des Schwerpunkts vom Mittelpunkte, oder

$$CG = \frac{4r \sin \frac{1}{2}\alpha}{3\, \text{Arc}\,\alpha}.$$

§. 109.

Aufgabe. Von der Durchschnittsfläche eines Gewölbes ADBFE, Figur 65., welche zwischen concentrischen Kreisbogen und verlängerten Halbmessern eingeschlossen ist, den Schwerpunkt zu finden. Taf. III. Fig. 65.

Auflösung. Man ergänze den Ausschnitt ACB, ziehe durch den Mittelpunkt C die Linie CD nach der Mitte des Bogens AB, so ist CD ein Durchmesser der Schwere für die Gewölbfläche ABF, den Ausschnitt

ACB und ECF. Sind nun G, G′, g die Schwerpunkte dieser Flächen, ferner

Taf. III. Fig. 65.

der Halbmesser $CA = R$, $CE = r$;
die Sehne $AB = S$, $EF = s$;
der Bogen $ADB = B$, $EF = b$, so ist
die Fläche des Ausschnitts $ACB = \frac{1}{2}B \,.\, R$
die Fläche des Ausschnitts $ECF = \frac{1}{2}b \,.\, r$
und die Gewölbfläche $ABFE = \frac{1}{2}(B.R - b.r)$.

In der Axe CD müssen die Momente der beiden letzten Flächen, dem Momente des ganzen Ausschnitts gleich seyn, also

$CG.\frac{1}{2}(B.R - b.r) + Cg.\frac{1}{2}b.r = CG'.\frac{1}{2}B.R$ daher

$$CG = \frac{CG'.B.R - Cg.b.r}{B.R - b.r}.$$

Es verhält sich aber

$$R : r = B : b \text{ daher}$$

$$b = \frac{r.B}{R}. \text{ Eben so ist } \frac{s}{b} = \frac{S}{B}.$$

Nach §. 105. findet man

$$CG' = \frac{2R.S}{3B};$$

$$Cg = \frac{2r.s}{b} = \frac{2rS}{B}.$$

Die Werthe von CG′, Cg und b in obige Gleichung gesetzt, geben, wenn Zähler und Nenner mit R multiplizirt wird, den Abstand des Schwerpunkts vom Mittelpunkte für die Gewölbfläche ADBFE oder

$$CG = \frac{2S}{3B} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$$

Ist der Bogen ADB, Figur 65., ein Halbkreis, so wird $S = 2r$ und $B = \pi r$, also

$$CG = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} = 0{,}424413 \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}.$$

§. 110.

§. 110.

1. Zusatz. Wären nicht die Halbmesser $CA = R$ und $CE = r$, sondern der mittlere Halbmesser $CK = \varrho$ für die centrische Linie des Gewölbbogens und die Breite $AE = \beta$ gegeben, so erhält man

$$R = \varrho + \tfrac{1}{2}\beta \text{ und } r = \varrho - \tfrac{1}{2}\beta.$$

Es ist aber

$$\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} = \frac{R^2 + Rr + r^2}{R + r}$$

daher wenn man in diesem letzten Ausdruck statt R und r die gefundenen Werthe setzt, so wird

$$\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} = \frac{3\varrho^2 + \frac{1}{4}\beta^2}{2\varrho} = \frac{12\varrho^2 + \beta^2}{8\varrho}$$

Ist ferner B' der Bogen KL, welcher zum Halbmesser ϱ gehört, und S' die zu diesem Bogen gehörige Sehne, so verhält sich

$$B : B' = S : S' \text{ also ist } \frac{S}{B} = \frac{S'}{B'}$$

Setzt man die gefundenen Werthe in die für CG §. 109. gefundene Gleichung, so erhält man den Abstand des Schwerpunkts vom Mittelpunkt oder

$$CG = \frac{S'(12\varrho^2 + \beta^2)}{12 B' \varrho}.$$

Für $\beta = 0$ wird $CG = \frac{S'\varrho}{B'}$ wie §. 83.

§. 111.

2. Zusatz. Wird das Verfahren §. 109. zur Bestimmung des Schwerpunkts von der Durchschnittsfläche eines Gewölbes näher erwogen, so sieht man daraus, wie man ganz allgemein aus dem bekannten Schwerpunkte einer Figur und eines Theils derselben den Schwerpunkt des andern Theiles finden kann; auch läßt sich eben so aus

den gegebenen Schwerpunkten der Theile einer Figur der Schwerpunkt der ganzen Figur finden.

Taf. I. Fig. 25. Eine Figur bestehe aus zwei Theilen, deren Inhalte P und Q und ihre Schwerpunkte A und B, Figur 25., sind. Durch die Linie AB verbinde man beide Schwerpunkte, so liegt in AB ein Punkt C, welcher gehörig unterstützt beide Theile in Ruhe erhält. Es ist daher C der Schwerpunkt der ganzen Figur, und wenn ihr Inhalt $= R$ gesetzt wird, so ist $R = P + Q$, und man findet

$$AC = \frac{AB \cdot Q}{P + Q}$$

$$BC = \frac{BA \cdot P}{P + Q} \text{ und}$$

$$AB = \frac{AC \cdot R}{Q} = \frac{BC \cdot R}{P}.$$

§. 112.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Kreisabschnitts zu finden.

Taf. III. Fig. 66. Auflösung. Es sei C, Figur 66., der Mittelpunkt desjenigen Kreises, welcher zu dem Abschnitte ABD gehört; wird nun durch die Mitte des Bogens die Linie CD gezogen, so ist diese ein Durchmesser der Schwere für den Abschnitt. Man setze, daß G der Schwerpunkt vom Abschnitte, g vom $\triangle$ ABC, und G′ vom Ausschnitt ADBC ist, so müssen die Momente des Abschnitts und Dreiecks dem Momente des Ausschnitts gleich seyn. Werden diese von C gerechnet, und der Inhalt des Abschnitts $= A$ gesetzt, so ist mit Beibehaltung der Bezeichnung im vorigen §. der Inhalt des $\triangle$ ABC $= \frac{1}{2}s \cdot EC$ und des Ausschnitts $= \frac{1}{2}br$, daher

$$CG \cdot A + Cg \cdot \tfrac{1}{2}s \cdot CE = CG' \cdot \tfrac{1}{2}br.$$

Aber $Cg = \frac{2}{3}CE$ (§. 96.) und $CG' = \frac{\frac{2}{3}rs}{b}$ also

$$CG.A + \tfrac{1}{3}s.CE^2 = \tfrac{1}{3}sr^2.$$

Im rechtwinklichten $\triangle BCE$ ist

$$CE^2 = r^2 - \tfrac{1}{4}s^2$$

wird dies in die letzte Gleichung gesetzt und abgekürzt, so findet man

$$CG = \frac{s^3}{12A}.$$

Den Abstand des Schwerpunkts eines Kreisabschnitts vom Mittelpunkte des zugehörigen Kreises findet man daher, wenn der Würfel von der Sehne des Abschnitts durch das zwölffache seines Inhalts dividirt wird.

§. 113.

Aufgabe. Den Schwerpunkt einer Fläche ABFE, Figur 67., zu finden, welche in einem Kreise zwischen parallelen Sehnen eingeschlossen ist. Taf. III. Fig. 67.

Auflösung. Die Fläche AF werde durch den Abschnitt ADB zu einem Abschnitte EDF ergänzt, und C sei der Mittelpunkt des Kreises, zu welchem diese Abschnitte gehören; DC ein Durchmesser der Schwere. Ferner sei

$$EF = S,\ AB = s,\ CD = r;$$

der Inhalt der Fläche $AF = A$

und des Abschnitts $ADB = B$. Ferner

G, g, G' die Schwerpunkte der Flächen AF, ADB und EFDE, so muß das Moment des ganzen Abschnitts EFDE den Momenten der beiden Flächen, woraus derselbe bestehet, gleich seyn, also

$CG.A + Cg.B = CG'.(A+B)$. Aber §. 112.

$$Cg = \frac{s^3}{12\,B} \text{ und } CG' = \frac{S^3}{12\,(A + B)}$$

daher findet man, wenn diese Werthe in obige Gleichung gesetzt werden,

$$CG = \frac{S^3 - s^3}{12\,A}.$$

§. 114.

Aufgabe. Den Schwerpunkt einer jeden Fläche
Taf. III. Fig. 68. $A'H'H''A''$, Figur 68., zu finden, welche von zwei symmetrischen krummen Linien begrenzt wird.

Auflösung. Es sei AH die Axe, welche durch die Mitte der Ordinaten $A'A''$, $H'H''$ geht. Diese Axe werde in so viel gleiche Theile AB, BC, ... GH getheilt, daß alle durch die Punkte B, C, ... mit $A'A''$ gezogene Parallellinien von den krummen Linien solche Theile wie $A'B'$, $B'C'$, ... abschneiden, welche man ohne merklichen Fehler als grade annehmen kann.

Man ziehe die Diagonalen $A'B''$, $B'C''$ .... $G'H''$, und setze $A'A'' = a$, $B'B'' = b$ .... $G'G'' = g$, $H'H'' = h$ und $AH = k$. Ferner sei die Anzahl der gleichen Theile AB, BC .... $= n$ und jeder $= \alpha$, so ist $k = n\alpha$. Nun ist der Inhalt der Dreiecke $A'A''B'' = \frac{\alpha a}{2}$; $A'B'B'' = \frac{\alpha b}{2}$; $B'B''C'' = \frac{\alpha b}{2}$; ..,. $G'H'H'' = \frac{\alpha h}{2}$, daher findet man die Summe aller Dreiecke oder den Inhalt der Fläche $A'H'H''A''$

$$= \frac{\alpha}{2}(a + b + b + c + c + d + \ldots + g + g + h)$$

$$= \frac{\alpha}{2}(a + 2b + 2c + \ldots + 2g + h) \text{ oder}$$

$$= \alpha\left[\frac{a + h}{2} + b + c + d + \ldots + g\right]$$

Wird nun $A'A''$ als Axe der Momente für sämmtliche Dreiecke angenommen, so findet man (§. 96. und 97.) das Moment vom Dreiecke

$$A'A''B'' = \frac{\alpha a}{2} \cdot \tfrac{1}{3}\alpha = \tfrac{1}{6}\alpha^2 a$$

$$A'B'B'' = \frac{\alpha b}{2} \cdot \tfrac{2}{3}\alpha = \tfrac{2}{6}\alpha^2 b$$

$$B'B''C'' = \frac{\alpha b}{2} \cdot \tfrac{4}{3}\alpha = \tfrac{4}{6}\alpha^2 b$$

$$B'C'C'' = \frac{\alpha c}{2} \cdot \tfrac{5}{3}\alpha = \tfrac{5}{6}\alpha^2 c$$

— — — — — — — — —

$$F'G''G'' = \frac{\alpha g}{2} \cdot \frac{3n-4}{3}\alpha = \frac{3n-4}{6}\alpha^2 g$$

$$G'G''H'' = \frac{\alpha g}{2} \cdot \frac{3n-2}{3}\alpha = \frac{3n-2}{6}\alpha^2 g$$

$$G'H'H'' = \frac{\alpha h}{2} \cdot \frac{3n-1}{3}\alpha = \frac{3n-1}{6}\alpha^2 h$$

also die Summe der Momente für die ganze Fläche $A'H'H''A''$

$$= \frac{\alpha^2}{6}[a+6b+12c+18d+\ldots+6(n-1)g+(3n-1)h]$$

oder

$$\alpha^2\left[\frac{a+(3n-1)h}{6}+1b+2c+3d+4e+\ldots+(n-1)g\right]$$

Weil die Linie AH sämmtliche Ordinaten halbirt, so ist solche ein Durchmesser der Schwere. Es sei daher O der Schwerpunkt, so erhält man, wenn mit dem gefundenen Flächeninhalte in die Summe der Momente dividirt wird, den Abstand des Schwerpunkts von der Momentenaxe $A'A''$ oder

$$AO = \frac{\alpha\left[\frac{a+(3n-1)h}{6}+b+2c+3d+4e+\ldots+(n-1)g\right]}{\frac{a+h}{2}+b+c+d+e+\ldots+g}$$

Dieses Verfahren ist übrigens desto genauer, je größer die Anzahl der Theile ist, in welche man die Axe eintheilt.

Beispiel. Die Axe einer symmetrischen Fläche sei 4,5, ihre erste Ordinate = 8,66; die letzte = 22,913. Man habe die Axe in 6 gleiche Theile getheilt, und für die zwischenliegenden Ordinaten folgende Werthe gefunden: 12,247; 15,000; 17,321; 19,365; 21,213; so ist hier a = 8,66; h = 22,913; k = 4,5 und n = 6; also $\alpha = 0,75 = \frac{3}{4}$, daher

$$\frac{a + (3n - 1)h}{6} = \frac{8,66 + 17 \cdot 22,913}{6} = 66,530$$

$$\frac{a + h}{2} = \frac{8,66 + 22,913}{2} = 15,786$$

b =	12,247	einmal	12,247
c =	15,000	doppelt	30,000
d =	17,321	dreifach	51,963
e =	19,365	vierfach	77,460
f =	21,213	fünffach	106,065
	85,146		277,735
	15,786		66,530
	100,932		344,265

Nun ist $\alpha = \frac{3}{4}$, daher der Abstand des Schwerpunkts von der ersten Ordinate, oder

$$AO = \frac{3 \cdot 344,265}{4 \cdot 100,932} = 2,539.$$

§. 115.

Taf. III. Fig. 68. Zusatz. Schneiden die Kurven A′H′, A″H″, Figur 68., die Axe AH im Punkte A, so wird a = 0, und man verfährt genau eben so, wie im vorigen §., nur daß a als 0 in Rechnung gebracht wird. Eben das gilt, wenn die Punkte H', H'' mit H zusammen fallen, oder wenn irgend eine andere Ordinate $= 0$ wird.

Schnitte die Kurve die Axe an beiden Enden, so wird $a = 0$ und $h = 0$, daher erhält man alsdann

$$AO = \frac{\alpha\,[b + 2c + 3d + \ldots + (n-1)g]}{b + c + d + \ldots + g}$$

wo n wie vorher die Anzahl der Theile bezeichnet, in welche die Axe AH eingetheilt ist.

Anmerkung. Diese sinnreiche Art, den Schwerpunkt einer unregelmäßigen Fläche zu finden, ist von Bouguer in den Additions zu seiner Preisschrift: de la Mâture des Vaisseaux. Paris 1727. p. 123 etc. angegeben worden.

* §. 116.

Aufgabe. Die Gestalt einer krummen Linie, welche eine ebene Fläche begrenzt, ist durch eine Gleichung zwischen ihren Coordinaten gegeben; man soll die Lage des Schwerpunkts einer solchen Fläche ganz allgemein bestimmen.

Auflösung. Die Fläche $APMA$, Figur 69., werde durch die krumme Linie begrenzt, deren Natur durch eine Gleichung zwischen den Abscissen $AP = x$ und den rechtwinklichten Ordinaten $PM = y$ gegeben ist. Ferner sei die Fläche $APMA = M$, und wenn G der Schwerpunkt dieser Fläche ist, $AF = u$, und der senkrechte Abstand $FG = u'$. Taf. III. Fig. 69. x y M

Wächst x um $Pp = \partial x$, so wächst die Fläche M um $PpmM = \partial M = y\partial x$. Gegen die auf AP senkrechte Linie AN ist das Moment des Elements $\partial M = x\partial M = xy\partial x$, und die Summe der Momente von den Elementen der ganzen Fläche gegen $AN = \int xy\partial x$. Aber das Moment der Fläche M gegen AN ist auch $= u . M$, daher $uM = \int xy\partial x$, folglich erhält man den Abstand des Schwerpunkts der Fläche APM von A oder AF

$$(\mathrm{I})\ u = \frac{\int xy\partial x}{M}$$

oder auch

$$u = \frac{\int x\partial M}{M} = \frac{\int xy\partial x}{\int y\partial x}.$$

Um FG oder den Abstand des Schwerpunkts G von der Axe AP zu finden, bestimme man die Summe von den Momenten der Flächenelemente gegen diese Axe. Der Schwerpunkt des Elements $PpmM = \partial M$ liegt in der Mitte desselben also um $\frac{1}{2}PM = \frac{1}{2}y$ von AP entfernt. Es ist daher das Moment dieses Elements gegen $AP = \frac{1}{2}y\partial M = \frac{1}{2}y . y\partial x$, daher die Summe der Momente aller Elemente der ganzen Fläche gegen $AP = \frac{1}{2}\int y^2\partial x$. Da nun das Moment der Fläche M gegen AP auch $u' . M$ ist, so erhält man $u'M = \frac{1}{2}\int y^2\partial x$ oder den Abstand FG des Schwerpunkts G von der Axe AP oder

$$(\mathrm{II})\ u' = \frac{\int y^2\partial x}{2M}$$

oder auch

$$u' = \frac{\int y\partial M}{2M} = \frac{\int y^2\partial x}{2\int y\partial x}.$$

Wäre A der Scheitel einer symmetrischen Kurve MAM′, bei welcher also die Fläche APM der Fläche APM′ gleich und ähnlich ist, so ist F der Schwerpunkt von der ganze Fläche MAM′M, so wie G der Schwerpunkt von der halben Fläche.

* §. 117.

Zusatz. Man ziehe GI auf MP senkrecht, und setze $MI = w$, $IG = w'$, so kann man auch die Lage des Schwerpunkts G finden, wenn diese beiden Größen bekannt sind. Nun ist $MI = MP - FG$, daher erhält man MI oder w w'

$$(I)\ w = y - \frac{\int y^2 \partial x}{2M}$$

und weil $IG = AP - AF$ ist, so erhält man den Abstand des Schwerpunkts von der Ordinate MP oder IG

$$(II)\ w' = x - \frac{\int xy\partial x}{M}.$$

* §. 118.

Aufgabe. Den Schwerpunkt einer Parabelfläche zu finden.

Auflösung. Für $AP = x$, $PM = y$ sei $ax = y^2$ die gegebene Gleichung, so ist $\partial x = \frac{2y\partial y}{a}$, also

$$xy\partial x = \frac{2y^4\partial y}{a^2}, \text{ daher}$$

$$\int xy\partial x = \frac{2}{a^2}\int y^4\partial y = \frac{2y^5}{5a^2},$$

wo Const. $= 0$ ist. Aber die Fläche $M = \frac{2}{3}xy = \frac{2y^3}{3a}$ daher weil §. 116. (I), $u = \frac{\int xy\partial x}{M}$, so erhält man den Abstand des Schwerpunkts von der Tangente durch den Scheitel A, oder

$$(I)\ u = \frac{3y^2}{5a} = \frac{3}{5}x$$

welches zugleich der Abstand des Schwerpunkts vom Scheitel A für die ganze Parabel ist.

Um den Abstand des Schwerpunkts von der Axe AP für die halbe Parabelfläche APM zu finden, ist

$y^2 \partial x = \frac{2y^3 \partial y}{a}$ also $\int y^2 \partial x = \frac{2}{a} \int y^3 \partial y = \frac{y^4}{2a}$;

daher, weil $u' = \frac{\int y^2 \partial x}{2M}$, erhält man FG oder

$$(\text{II})\ u' = \tfrac{3}{8} y = \tfrac{3}{8} \sqrt{ax}.$$

* §. 119.

Taf. III. Fig. 69. Aufgabe. Den Schwerpunkt der Hyperbelfläche zu finden.

Auflösung. Die gegebene Gleichung sei

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax + x^2)$$

so findet man $y \partial y = \frac{b^2}{a^2} (a + x) \partial x$ also

$$\frac{a^2 y^2 \partial y}{b^2} = (a + x) y \partial x, \text{ daher}$$

$\int (a + x) y \partial x = \frac{a^2}{b^2} \int y^2 \partial y = \frac{a^2 y^3}{3 b^2}$ oder, weil

$\int (a + x) y \partial x = a \int y \partial x + \int x y \partial x$ und §. 116.

die Fläche $M = \int y \partial x$ ist, so erhält man

$$aM + \int xy \partial x = \frac{a^2 y^3}{3 b^2} \text{ oder}$$

$\int xy \partial x = \frac{a^2 y^3}{3 b^2} - aM$. Es ist aber §. 116.

$u = \frac{\int xy \partial x}{M}$ daher findet man Figur 69. AF oder

$$(\text{I})\ u = \frac{a^2 y^3}{3 b^2 M} - a$$

wo (P. A. S. 484.)

$M = \frac{b(a+x)}{2a} \sqrt{(2ax + x^2)} - \frac{ab}{2} \operatorname{logn} \frac{a + x + \sqrt{(2ax + x^2)}}{a}$ ist.

Weil ferner $y^2 \partial x = \frac{b^2}{a^2} (2ax + x^2) \partial x$, so erhält man

$$\int y^2 \partial x = \frac{b^2}{a^2} \int (2ax + x^2) \partial x = \frac{b^2}{a^2} (ax^2 + \tfrac{1}{3} x^3)$$

daher §. 116. (II) $\frac{\int y^2 \partial x}{2M}$ oder FG =

$$(II)\quad u' = \frac{b^2 (3a + x) x^2}{6 a^2 M}.$$

* §. 120.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines elliptischen Abschnitts zu finden, wenn der Scheitel des Abschnitts in das Ende der kleinen Axe der Ellipse fällt.

Auflösung. Wäre a der Halbmesser der großen, und b der Halbmesser der kleinen Axe, so ist Figur 69. für AP = x, PM = y die allgemeine Gleichung, wenn die Abscissen vom Scheitel der kleinen Axe gerechnet werden Taf. III. Fig. 69.

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2}(2bx - x^2) \text{ also}$$

$$y \partial y = \frac{a^2}{b^2}(b - x)\partial x \text{ oder } y^2 \partial y = \frac{a^2}{b^2}(b - x) y \partial x$$

daher

$$\int (b - x) y \partial x = \frac{b^2}{a^2}\int y^2 \partial y = \frac{b^2 y^3}{3a^2} \text{ und weil}$$

$$\int (b - x) y \partial x = b \int y \partial x - \int x y \partial x,$$ und da ferner §. 116. die Fläche $M = \int y \partial x$ ist, so erhält man

$$bM - \int x y \partial x = \frac{b^2 y^3}{3a^2} \text{ oder}$$

$$\int x y \partial x = bM - \frac{b^2 y^3}{3a^2}.$$ Es ist aber §. 116. (I)

$$u = \frac{\int x y \partial x}{M}$$ daher AF oder

$$(I)\quad u = b - \frac{b^2 y^3}{3a^2 M}.$$

Ferner ist $y^2 \partial x = \frac{a^2}{b^2}(2bx - x^2)\partial x$ daher

$$\int y^2 \partial x = \frac{a^2}{b^2}\int (2bx - x^2)\partial x = \frac{a^2}{b^2}\left(bx^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right)$$

Taf. III. Fig. 69. daher, weil §. 116. (II) $\frac{\int y^2 \partial x}{2M} = u'$, erhält man FG oder

$$\text{(II)}\ u' = \frac{a^2(3b - x)x^2}{6b^2 M}.$$

Um den Werth von der Fläche M durch x auszudrücken, ist $y\,\partial x = \frac{a\,\partial x}{b}\sqrt{(2bx - x^2)}$. Aber (P. A. S. 161. (X))

$$\int \partial x \sqrt{(2bx - x^2)}$$

$$= \tfrac{1}{2}(x - b)\sqrt{(2bx - x^2)} + \tfrac{1}{2}b^2 \operatorname{Arc\,tgt} \frac{x - b}{\sqrt{(2bx - x^2)}} + \text{Const.}$$

$$= -\tfrac{1}{2}(b - x)\sqrt{(2bx - x^2)} + \tfrac{1}{2}b^2 \operatorname{Arc\,sinvers} \frac{x}{b} + \text{Const. (*)}$$

Für $x = 0$ verschwindet das Integral, und man erhält

$$\int \partial x \sqrt{(2bx - x^2)} = \tfrac{1}{2}b^2 \operatorname{Arc\,sinvers} \frac{x}{b} - \tfrac{1}{2}(b - x)\sqrt{(2bx - x^2)}$$

folglich, weil $M = \int y\,\partial x$, findet man die Fläche

$$M = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{Arc\,sinvs} \frac{x}{b} - \frac{a(b - x)}{2b}\sqrt{(2bx - x^2)}.$$

* §. 121.

1. Zusatz. Für die halbe elliptische Fläche wird $x = b$, $y = a$, und

$$\operatorname{Arc\,sinvs} \frac{x}{b} = \operatorname{Arc\,sinvs} 1 = \tfrac{1}{2}\pi \text{ also}$$

$$M = \tfrac{1}{4}\pi ab, \text{ daher } u = b - \frac{ab^2}{3M},$$

Man findet also den Abstand des Schwerpunkts vom Scheitel der kleinen Axe, oder AF =

$$u = b\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) = 0{,}424413 \,.\, b.$$

(*) Man kann wegen dieses Ausdrucks die Anmerkung im Anhange §. 9. nachsehen.

Der Abstand des Schwerpunkts vom Mittelpunkte der Ellipse ist hiernach $= b - u = \frac{4b}{3\pi}$.

Es ist daher für die halbe elliptische Fläche der Abstand des Schwerpunkts vom Scheitel von der Länge der großen Axe ganz unabhängig, und wenn man den hier gefundenen Ausdruck mit §. 106. vergleicht, so folgt daraus, daß der Schwerpunkt einer halben elliptischen Fläche eben so weit vom Mittelpunkte entfernt ist, als der Schwerpunkt einer halben Kreisfläche, deren Halbmesser mit der halben kleinen Axe der Ellipse und deren Mittelpunkt mit dem der Ellipse überein kommt.

* §. 122.

2. Zusatz. Für den elliptischen Quadranten APM, Figur 69., erhält man wie im vorigen §. AF oder

$$u = b\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right)$$

und weil für $x = b$, $M = \frac{1}{4}\pi a b$ ist, so findet man FG oder

$$u' = \frac{4a}{3\pi}.$$

* §. 123.

Aufgabe. Den Schwerpunkt von der Durchschnittsfläche eines elliptischen Gewölbbogens ADBFHE, Figur 70., zu finden, welcher von zwei halben Ellipsen begränzt wird, und dessen Scheitel D in der kleinen Axe DC liegt. Taf. III. Fig. 70.

Auflösung. Ist C der Mittelpunkt beider Ellipsen, welche das Gewölbe begrenzen; die halben großen Axen $CB = A$, $CF = a$, und die halben kleinen Axen

$CD = B$, $CH = b$; ferner G' der Schwerpunkt von der elliptischen Fläche ABDA, g von der Fläche EFHE und G der Schwerpunkt des Gewölbbogens AEHFBD, so ist der Inhalt von der

Fläche ABDA $= \frac{1}{2}\pi . A . B$

Fläche EFHE $= \frac{1}{2}\pi . a . b$

Fläche AEHFBDA $= \frac{1}{2}\pi (A . B - a . b)$.

Aus ähnlichen Gründen, wie §. 109., findet man

$$CG = \frac{CG' . \frac{1}{2}\pi . A . B - Cg . \frac{1}{2}\pi a . b}{\frac{1}{2}\pi (A . B - a . b)} = \frac{CG' . A . B - Cg . a . b}{A . B - a . b}$$

Es ist aber §. 122.

$$CG' = \frac{4}{3\pi} . B \text{ und } Cg = \frac{4}{3\pi} . b$$

daher wird wenn diese Werthe in die zuletzt gefundene Gleichung gesetzt werden,

$$CG = \frac{4}{3\pi} . \frac{A . B^2 - a . b^2}{A . B - a . b}.$$

* §. 124.

Aufgabe. Für den Abschnitt einer Cykloide die Entfernung des Schwerpunkts vom Scheitel zu finden.

Auflösung. Für die Cykloide ist (Anhang §. 3. III.)

$$y = r \operatorname{Arc sinus} \frac{x}{r} + \sqrt{(2rx - x^2)}$$

also (Anhang §. 9.)

$$\partial y = \frac{(2r - x)\,\partial x}{\sqrt{(2rx - x^2)}} \text{ oder}$$

$$x^2 \partial y = \frac{(2rx - x^2)\,x\partial x}{\sqrt{(2rx - x^2)}} = x\partial x \sqrt{(2rx - x^2)}$$

daher (P. A. S. 153. (I))

$$\int x^2 \partial y = \int x\partial x \sqrt{(2rx - x^2)} = -\tfrac{1}{3}\sqrt{(2rx - x^2)}^3 + r\int \partial x \sqrt{(2rx - x^2)}$$

Nun ist (Anhang §. 9.)

$$\int \partial x \sqrt{(2rx - x^2)} = \tfrac{1}{2} r^2 \operatorname{Arc sinus} \frac{x}{r} - \tfrac{1}{2}(r - x)\sqrt{(2rx - x^2)}$$

daher

$$\int x^2 \partial y = \tfrac{1}{2} r^3 \,\text{Arc sinus}\, \frac{x}{r} - \tfrac{1}{6}(3r^2 + rx - 2x^2)\sqrt{(2rx - x^2)}$$

Aber $\int xy\,\partial x = \tfrac{1}{2} x^2 y - \tfrac{1}{2}\int x^2 \partial y$ daher, wenn statt y sein Werth gesetzt wird

$$\int xy\,\partial x = \tfrac{1}{4} r(2x^2 - r^2)\,\text{Arcsinus}\, \frac{x}{r} + \tfrac{1}{12}(3r^2 + rx + 4x^2)\sqrt{(2rx - x^2)}$$

Nach §. 116. ist aber $u = \frac{\int xy\,\partial x}{M}$, daher findet man AF oder den Abstand des Schwerpunkts von der Tangente durch den Scheitel =

$$u = \frac{3r(2x^2 - r^2)\,\text{Arc sinus}\, \frac{x}{r} + (3r^2 + rx + 4x^2)\sqrt{(2rx - x^2)}}{6r(2x - r)\,\text{Arc sinus}\, \frac{x}{r} + 6(r + x)\sqrt{(2rx - x^2)}}$$

wo M nach §. 9. des Anhangs bestimmt ist.

* §. 125.

Aufgabe. Den Schwerpunkt einer Kettenfläche zu finden.

Auflösung. Wenn v die Länge des Bogens bezeichnet, welcher den Coordinaten x, y entspricht, so ist für die Kettenlinie $v^2 = 2cx + x^2$ (Anhang §. 91. I.) also $v\partial v = c\partial x + x\partial x$ oder

$$x = \frac{v\partial v}{\partial x} - c.$$

Ferner ist (Anhang §. 91.) $c\partial x = v\partial y$, also auch $\partial y = \frac{c\partial x}{v}$, oder mit x multiplizirt

$$x\partial y = \frac{cx\,\partial x}{v}.$$

Die Glieder dieser Gleichung, mit den der vorhin gefundenen multiplizirt, geben

$$x^2 \partial y = cx\partial v - \frac{c^2 x\,\partial x}{v} \quad [I]$$

Nun ist §. 95.

$$x\partial v = \tfrac{1}{2}x\partial v + \tfrac{1}{2}v\partial x - \tfrac{1}{2}c\partial v + \tfrac{1}{2}c\partial y \text{ und}$$

$$\frac{cx\,\partial x}{v} = c\partial v - c\partial y.$$

Diese Werthe in die Gleichung [I] gesetzt geben

$$x^2\partial y = \tfrac{1}{2}c(x\partial v + v\partial x) - \tfrac{3}{2}c^2\partial v + \tfrac{3}{2}c^2\partial y,$$

also

$$\int x^2\partial y = \tfrac{1}{2}cxv - \tfrac{3}{2}c^2v + \tfrac{3}{2}c^2y.$$

Aber (P. A. S. 143.)

$$\int xy\,\partial x = y\int x\partial x - \int\partial y\int x\partial x = \tfrac{1}{2}x^2y - \tfrac{1}{2}\int x^2\partial y$$

oder

$$\int xy\,\partial x = \tfrac{1}{2}x^2y - \tfrac{1}{4}cxv + \tfrac{3}{4}c^2v - \tfrac{3}{4}c^2y \text{ folglich}$$

erhält man

weil $u = \frac{\int xy\partial x}{M}$ und $M = xy + cy - cv$ ist, (Anh. §. 103. II.), den Abstand des Schwerpunkts von der Tangente durch den Scheitel oder

$$\text{(I)}\quad u = \frac{2x^2y - cxv + 3c^2v - 3c^2y}{4(xy + cy - cv)}.$$

Ferner ist nach Anhang §. 109.

$$\int y^2\partial x = \frac{Q}{\pi} = 2c^2x + (c + x)y^2 - 2cyv$$ daher findet man, weil $u' = \frac{\int y^2\partial x}{2M}$ ist, den Abstand des Schwerpunkts von der Axe oder

$$\text{(II)}\quad u' = \frac{2c^2x + (c + x)y^2 - 2cyv}{2(xy + cy - cv)}.$$

* § 126.

Aufgabe. Den Schwerpunkt einer jeden von einer krummen Linie begränzten Fläche zu bestimmen, wenn auch das Gesetz, nach welcher die Kurve gestaltet ist, unbekannt wäre.

Auflösung.

Auflösung. Es sei $AA'G'G$, Figur 71., die gegebene Fläche, und man sucht den Abstand des Schwerpunkts von der Linie AA', welche auf AG senkrecht und mit GG' parallel ist. Man theile AG in eine beliebige grade Anzahl gleicher Theile AB, BC, CD ... und errichte in den Theilungspunkten die Linien BB', CC' ... senkrecht auf AG. Man setze jeden der gleichen Theile AB, BC ... $= \alpha$, und die Ordinaten $AA' = a$, $BB' = b$, $CC' = c$, ... ziehe die Sehnen $A'C'$, $C'E'$, $E'G'$, und die Linie AK auf CC' senkrecht. Taf. III. Fig. 71.

Statt nun, wie §. 114., die Linien $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, ... grade anzunehmen, setze man voraus, daß jeder von den Bogen $A'C'$, $C'E'$, $E'G'$ einer Parabel zugehöre, welche durch die drei Endpunkte der Ordinaten eines jeden Bogens geht. Nun ist

$$LI = \tfrac{1}{2} KC' = \frac{c-a}{2}$$

$$B'I = LB' - LI = b - a - \frac{c-a}{2} = \frac{2b-a-c}{2};$$

also der Inhalt der Parabelfläche $A'B'C'IA' =$

$$\tfrac{2}{3} . A'K . B'I = \tfrac{2}{3} . 2\alpha . \frac{2b-a-c}{2} = \tfrac{2}{3}\alpha\,(2b-a-c)$$

Auf gleiche Art erhält man den Inhalt der Parabelflächen

$$C'D'E'C' = \tfrac{2}{3}\alpha\,(2d-c-e)$$

$$E'F'G'E' = \tfrac{2}{3}\alpha\,(2f-e-g)$$

also die Summe aller Parabelflächen

$$\tfrac{2}{3}\alpha\,(-a+2b-2c+2d-2e+2f-g)$$

Die Summe von dem Inhalte der Trapezien $AA'C'C$, $CC'E'E$ und $EE'G'G$ ist $=$

$$\alpha(a+c)+\alpha(c+e)+\alpha(e+g) = \alpha(a+2c+2e+g)$$

Addiret man beide Ausdrücke zusammen, so erhält man

$\frac{2}{3}\alpha(-a+2b-2c+2d-2e+2f-g)+\alpha(a+2c+2e+g)$
daher ist der Inhalt der ganzen Fläche $AA'G'G$

$$=\frac{1}{3}\alpha(a+4b+2c+4d+2e+4f+g)$$

d. h. man findet den Inhalt der Fläche $AA'G'G$, wenn man die Summe der ersten und letzten Ordinate einmal, die Summe aller übrigen ungraden Ordinaten zweimal, und die Summe aller graden Ordinaten viermal nimmt, alsdann aber diese drei Summen addirt, und mit dem dritten Theile des Abstandes zweier Ordinaten multiplizirt.

Der Schwerpunkt der Parabelfläche $A'B'C'$ liegt in der Linie $B'I$ (§. 80.), also ist sein Abstand von $AA' = \alpha$. Für die Parabelfläche $C'D'E'$ ist der Abstand von $AA' = 3.\alpha$ und für $E'F'G = 5.\alpha$. Man findet daher die Momente dieser Parabelflächen:

$$\alpha.\frac{2}{3}\alpha(2b-a-c) = \frac{2}{3}\alpha^2(2b-a-c)$$

$$3\alpha.\frac{2}{3}\alpha(2d-c-e) = \frac{2}{3}\alpha^2(6d-3c-3e)$$

$$5\alpha.\frac{2}{3}\alpha(2f-e-g) = \frac{2}{3}\alpha^2(10f-5e-5g)$$

also die Summe dieser Momente

$$=\frac{2}{3}\alpha^2(-a+2b-4c+6d-8e+10f-5g)$$

Für das Trapez $AA'C'C$ ist der Abstand seines Schwerpunkts von AA' (§. 104. II.)

$2\alpha.\frac{a+2c}{3(a+c)}$, also sein Moment - - - - $\frac{2}{3}\alpha^2(a+2c)$.

Für das Trapez $CC'E'E$ ist der Abstand des Schwerpunkts von $CC' = 2\alpha.\frac{c+2e}{3(c+e)}$, also von $AA' =$

$2\alpha.\frac{c+2e}{3(c+e)} + 2\alpha = \frac{2}{3}\alpha\,\frac{4c+5e}{c+e}$, daher sein Moment - - - - - - - - - - $\frac{2}{3}\alpha^2(4c+5e)$.

Für das Trapez $EE'G'G$ ist der Abstand des Schwerpunkts von $AA' =$

$2\alpha \cdot \frac{e + 2g}{3(e+g)} + 5\alpha = \frac{2}{3}\alpha \cdot \frac{7e + 8g}{e+g}$, daher sein Moment - - - - - - - - - - $\frac{2}{3}\alpha^2(7e + 8g)$

und man findet die Summe dieser Momente

$$= \frac{2}{3}\alpha^2(a + 6c + 12e + 8g)$$

wird hiezu die oben gefundene Summe von den Momenten der Parabelflächen addirt, so erhält man die Summe der Momente für die ganze Fläche $AA'G'G$

$$= \frac{2}{3}\alpha^2(2b + 2c + 6d + 4e + 10f + 3g)$$

$$= \frac{1}{3}\alpha^2(1.4b + 2.2c + 3.4d + 4.2e + 5.4f + 6.g)$$

wird diese Summe der Momente durch den gefundenen Inhalt der ganzen Fläche dividirt, so findet man den Abstand des Schwerpunkts von der Linie AA'

$$= \alpha \cdot \frac{0.a + 1.4b + 2.2c + 3.4d + 4.2e + 5.4f + 6.g}{1.a + 4b + 2c + 4d + 2e + 4f + 1g}$$

d. h. man schreibe sämmtliche Ordinaten, wie sie auf einander folgen, in eine Reihe unter einander: nehme die erste und letzte einmal, alle ungeraden doppelt und alle graden viermal, so entsteht hiedurch eine zweite Reihe von Zahlen. Mit dieser zweiten Reihe von Zahlen verbinde man die Reihe natürlicher Zahlen 0, 1, 2, 3, ... und multiplizire solche mit den nebenstehenden Ordinaten, so erhält man eine dritte Reihe. Die Summe der dritten Reihe durch die der zweiten dividirt, und mit dem Abstande zweier auf einander folgenden Ordinaten multiplizirt, giebt den Abstand des Schwerpunkts von der ersten Ordinate.

Beispiel. Die Linie AG = 4,5 sei in sechs gleiche Theile getheilt, also $\alpha = 0,75$. Ferner sei 8,66; 12,247; 15,000; 17,321; 19,365; 21,213; 22,913 die Ordnung der auf einander folgenden Ordinaten, so erhält man:

erste Reihe		zweite Reihe		dritte Reihe
8,660 . 1	. . . . .	8,660 . 0	. . . . .	0,000
12,247 . 4	. . . . .	48,988 . 1	. . . . .	48,988
15,000 . 2	. . . . .	30,000 . 2	. . . . .	60,000
17,321 . 4	. . . . .	69,284 . 3	. . . . .	207,852
19,365 . 2	. . . . .	38,730 . 4	. . . . .	154,920
21,213 . 4	. . . . .	84,852 . 5	. . . . .	424,260
22,913 . 1	. . . . .	22,913 . 6	. . . . .	137,478
		303,427		1033,498

also ist der Abstand des Schwerpunkts von der ersten Ordinate

$$= \frac{0,75 \cdot 1033,498}{303,427} = 2,554.$$

Wird vorausgesetzt, daß die Linien A′B′, B′C′, C′D′, ... grade sind, so erhält man nach §. 114. für eben dies Beispiel, aber weniger genau 2,539 statt 2,554, so daß der Unterschied = 0,015 ist.

* §. 127.

Zusatz. Wird die erste oder letzte Ordinate = 0, so bleibt die Rechnung ungeändert, nur daß man a oder h = 0 nehmen, übrigens aber dieselbe Ordnung bei der Auflösung befolgen muß. Dasselbe gilt von jeder andern Ordinate, wenn solche = 0 wird. Wären a und h = 0, so erhält man den Abstand des Schwerpunkts von der ersten Ordinate

$$= \alpha . \frac{0.0 + 1.4b + 2.2c + 3.4d + 4.2e + 5.4f + 6.0}{0 + 4b + 2c + 4d + 2e + 4f + 0}.$$

Anmerkung. Die hier gegebene Verfahrungsart, den Inhalt und den Schwerpunkt einer jeden unregelmäßigen Fläche zu finden, ist noch genauer wie die §. 114. beschriebene. Der Viceadmiral v. Chapmann hat zuerst in seinem in schwedischer Sprache herausgegebenen Werke über den Bau der Schiffe (Traité de la construction des vaisseaux; trad. du suédois de M. Chapman, par Vial de Clairbois. Brest 1781.) von diesem Verfahren Gebrauch gemacht. Sowohl *Levêque* (in den Noten zum Examen maritime, par Don G. *Juan*, T. II. Paris 1762. p. 88.) als Prony (Nouv. Arch. Hydr. T. I. §. 223.) haben ebenfalls dieses Verfahren auseinandergesetzt.

III. Vom Schwerpunkte der Körper.

§. 128.

Wenn ABC, Figur 50, der Durchschnitt eines Körpers ist, und die grade Linie AD geht durch die Schwerpunkte aller mit BC parallelen Flächen, so muß auch der Schwerpunkt des ganzen Körpers in AD liegen, daher ist AD ein Durchmesser der Schwere. Entstehet ein Körper durch Umdrehung einer Fläche um eine Axe, so ist diese zugleich ein Durchmesser der Schwere. Taf. II. Fig. 50.

Eine Ebene, welche einen Körper so in zwei Theile theilt, daß auf entgegengesetzten Seiten dieser Ebene jede gleich weit von derselben abstehende mit der Ebene parallele Querschnitte des Körpers einander gleich sind, ist eine Ebene der Schwere, weil unter allen gleichgroßen mit der Ebene parallelen Scheiben ein Gleichgewicht vorhanden ist.

Der Schwerpunkt von einer Kugel liegt in ihrem Mittelpunkte, und von einem Cylinder in der Mitte der Axe.

Der Schwerpunkt von jedem Prismen wird gefunden, wenn man den Schwerpunkt der obern und untern Fläche des Prismen mit einer Linie verbindet, und davon die Mitte nimmt.

§. 129.

Aufgabe. Den Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide zu finden.

Auflösung. Man suche den Schwerpunkt F, Figur 72., der Grundfläche BCD, so ist AF ein Durchmesser der Schwere (§. 79.). Eben so wenn H der Schwerpunkt der Fläche ACD ist, welche man ebenfalls als Grundfläche ansehen kann, so ist BH ein Durchmesser der Schwere von der Pyramide. Nun liegen AF und BH in einerlei Ebene ABE, daher der Durchschnittspunkt G dieser Linien der Schwerpunkt der Pyramide ist.

Taf. III. Fig. 72.

Weil $\triangle FGH \backsim ABG$, so verhält sich

$$FH : AB = GF : AG \text{ daher}$$

$$AG = \frac{AB \cdot GF}{FH}.$$

Aber da $EB = 3 \cdot EF$, so ist auch $AB = 3 \cdot FH$ also

$$AG = \frac{3 \cdot FH \cdot GF}{FH} = 3 \cdot GF \text{ folglich}$$

$$AF = 4GF \text{ oder}$$

$$AG = \tfrac{3}{4}AF.$$

Der Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide liegt also in derjenigen Linie, welche von der Spitze nach dem Schwerpunkte der Grundfläche gezogen wird, um $\frac{3}{4}$ dieser Linie, von der Spitze entfernt, oder $\frac{1}{4}$ ihrer Länge von der Grundfläche.

Der Abstand des Schwerpunkts von der Grundfläche ist $\frac{1}{4}$ von der Höhe der Pyramide.

§. 130.

1. Zusatz. Bei einer vielseitigen Pyramide liegt der Schwerpunkt in derjenigen Linie, welche von der Spitze nach dem Schwerpunkte der Grundfläche gezogen wird; diese Linie ist also ein Durchmesser der Schwere. Theilt man die Pyramide in lauter dreiseitige, so steht jeder ihrer Schwerpunkte um $\frac{1}{4}$ der Pyramidenhöhe von der Grundfläche, und eine Ebene mit der Grundfläche parallel geht durch sämmtliche Schwerpunkte, ist also eine Ebene der Schwere, welche den Durchmesser der Schwere auf $\frac{1}{4}$ seiner Länge im Schwerpunkte der ganzen Pyramide schneidet. Der Schwerpunkt einer jeden Pyramide ist daher $\frac{1}{4}$ ihrer Höhe von der Grundfläche entfernt.

2. Zusatz. Eben so liegt der Schwerpunkt eines Kegels um $\frac{1}{4}$ der Höhe desselben von der Grundfläche entfernt.

Bei den wenigsten Körpern kann der Schwerpunkt unmittelbar unterstützt werden. Wenn aber die vertikale Linie, welche von dem Schwerpunkte ab durch die Materie des Körpers gehet, unterstützt wird, so muß der Körper in Ruhe bleiben.

§. 131.

Aufgabe. Von einer jeden willkürlich angenommenen Ebene, den Abstand des Schwerpunkts einer dreiseitigen Pyramide zu finden.

Taf. III. Fig. 73. Auflösung. Es sei ABCD, Figur 73., die Pyramide, und XZ die gegebene von der Pyramide entfernte Ebene. Man ziehe aus den vier Ecken der Pyramide auf die Ebene XZ die senkrechten Linien AA', BB', CC', DD', setze diese Abstände a, b, c, d, und lege durch A mit der Ebene XZ parallel eine Ebene $AB''C''$, welche die Abstände BB', CC' in B'' und C'' schneidet. Die Seite BC werde in E halbirt, AE gezogen, $EF = \frac{1}{3}AE$ angenommen, DF gezogen, und es sei $FG = \frac{1}{4}DF$, so ist G der Schwerpunkt der Pyramide (§. 129.). Aus den Punkten E, F, G ziehe man auf die Ebene XZ die senkrechten Linien EE', FF', GG', wovon die beiden ersten die Ebene $AB''C''$ in den Punkten E'', F'' schneiden, so müssen die Linien AA', FF', EE' in einerlei Ebene $AEE'A'$, und die Linien FF', GG', DD' in einerlei Ebene $FDD'F'$ liegen. Nun ist $BE = EC$, also

$$EE'' = \frac{BB'' + CC''}{2}.$$ Aber $BB'' = b - a$,

$CC'' = c - a$, daher $$EE'' = \frac{b + c - 2a}{2}.$$

Ferner ist $AF = \frac{2}{3}AE$, also auch

$$FF'' = \frac{2}{3}EE'' = \frac{b + c - 2a}{3}, \text{ daher}$$

$$FF' = FF'' + F''F' = FF'' + AA' = \frac{b + c - 2a}{3} + a$$

oder $$3 \cdot FF' = a + b + c.$$

Man nehme $DH = FF'$, und ziehe $F'H$, so fällt $F'H$ in die Ebene $FDD'F'$, und schneidet GG' in irgend einem Punkte K. Nun ist $FG = \frac{1}{4}FD$, also

$$F'K = \frac{1}{4}F'H, \text{ daher auch}$$

$$KG' = \frac{1}{4}D'H = \frac{DD' - DH}{4} = \frac{DD' - FF'}{4}.$$ Aber

$$GG' = GK + KG' = FF' + \frac{DD' - FF'}{4} = \frac{3.FF' + DD'}{4}$$

oder wenn man für $3, FF'$ den Werth $a + b + c$, und für DD' seinen Werth d setzt, so erhält man

$$GG' = \frac{a + b + c + d}{4},$$

oder man findet den Abstand des Schwerpunkts einer dreiseitigen Pyramide von irgend einer willkürlich angenommenen Ebene, wenn man die Abstände der vier Ecken dieser Pyramide von der Ebene sucht, und ihre Summe durch vier dividirt.

§. 132.

Aufgabe. Den Schwerpunkt einer abgekürzten Pyramide zu finden.

Auflösung. Die abgekürzte Pyramide AEFHD, Figur 74., werde durch die fehlende IABD ergänzt. Man ziehe nach dem Schwerpunkte L der Grundfläche die Axe IL, welche die Fläche ABD in K schneidet, so ist IL ein Durchmesser der Schwere, in welchem die Schwerpunkte g, G, G', der fehlenden, abgekürzten und ganzen Pyramide liegen. Man bezeichne durch P, Q die Inhalte der fehlenden und abgekürzten Pyramide, so ist, wegen des Gleichgewichts, Taf. III. Fig. 74.

$$IG'(P + Q) = Ig.P + IG.Q$$

Wird nun durch

$a = KL$ die Länge der Axe für die abgekürzte Pyramide, und durch

$S = EF$, $s = AB$ die Längen zweier ähnlich liegenden Seiten in den parallelen Flächen der abgekürzten Pyramide bezeichnet so verhält sich

$$IK : KL = s : S - s \text{ daher}$$

$$IK = \frac{a\,s}{S - s}, \text{ also}$$

$$Ig = \tfrac{3}{4} IK = \tfrac{3}{4} \cdot \frac{a\,s}{S - s}. \text{ Ferner verhält sich}$$

$$IL : KL = S : S - s, \text{ daher}$$

$$IL = \frac{a\,S}{S - s}, \text{ also}$$

$$IG' = \tfrac{3}{4} IL = \tfrac{3}{4} \cdot \frac{a\,S}{S - s}. \text{ Auch ist}$$

$$IG = IL - LG = \frac{a\,S}{S - s} - LG.$$

Auch verhält sich

$$P : Q = s^3 : S^3 - s^3, \text{ daher ist}$$

$$P = \frac{s^3 Q}{S^3 - s^3}.$$

Setzt man die Werthe für Ig, IG', IG und P in die zuerst gefundene Gleichung, dividirt durch Q, und bringt LG auf eine Seite, so wird

$$LG = \frac{a}{4} \cdot \frac{S^4 - 4s^3 S + 3s^4}{(S - s)(S^3 - s^3)}.$$

Aber $S^3 - s^3 = (S - s)(S^2 + sS + s^2)$ und

$$S^4 - 4s^3 S + 3s^4 = (S - s)^2 (S^2 + 2sS + 3s^2)$$

daher erhält man, wenn diese Werthe in die Gleichung gesetzt werden, nach gehöriger Abkürzung die Entfernung des Schwerpunkts der abgekürzten Pyramide von der Grundfläche, in derjenigen Linie gemessen, welche die Schwerpunkte der beiden parallelen Flächen mit einander verbindet, oder

$$LG = \frac{a}{4} \cdot \frac{S^2 + 2sS + 3s^2}{S^2 + Ss + s^2}.$$

§. 133.

Zusatz. Für den abgekürzten Kegel gelten die vorherigen Schlüsse, wenn der Durchmesser der untern Kreisfläche D = S, und der obern d = s gesetzt wird. Alsdann ist wie vorher

$$LG = \frac{a}{4} \cdot \frac{D^2 + 2dD + 3d^2}{D^2 + dD + d^2}.$$

Für D = d erhält man $LG = \frac{1}{2}a$ wie §. 128.

§. 134.

Aufgabe. Den Schwerpunkt einer ausgehöhlten abgekürzten Pyramide zu finden.

Auflösung. Vorausgesetzt, daß die Aushöhlung abdhfe, Figur 75., prismatisch, und die Schwerpunkte K, L der obern und untern Fläche mit den der abgekürzten Pyramide zusammenfallen, so sei G der Schwerpunkt des ausgehöhlten Körpers, G' der Schwerpunkt der vollen abgekürzten Pyramide, und g der Aushöhlung. Sind nun Q, R die Inhalte der beiden letztern Körper, so ist Q — R der Inhalt der ausgehöhlten Pyramide und das Moment der vollen abgekürzten Pyramide muß den Momenten der beiden Körper, woraus sie besiehet, gleich seyn, also Taf. III. Fig. 75.

$$LG \cdot (Q - R) + Lg \cdot R = LG' \cdot Q \text{ oder}$$

$$LG = \frac{LG' \cdot Q - Lg \cdot R}{Q - R}.$$

Ist nun die Grundfläche efh der Aushöhlung der Grundfläche EFH der Pyramide ähnlich, und man setzt die ähnliegenden Seiten

EF = S, AB = s, ef = σ; ist ferner

h die lothrechte Höhe der abgekürzten Pyramide,

a = KL die Länge der Axe,

F der Inhalt der Grundfläche EFH, so ist nach bekannten Regeln der Geometrie der Inhalt der abgekürzten Pyramide ADHE, oder

$$Q = \frac{hF}{3S^2}(S^2 + sS + s^2)$$

und weil die Grundfläche efh von der Aushöhlung $= \frac{\sigma^2}{S^2} F$ ist, so wird

$$R = h \cdot \frac{\sigma^2}{S^2} F, \text{ also}$$

$$Q - R = \frac{hF}{3S^2}(S^2 + sS + s^2 - 3\sigma^2).$$

Ferner ist (§. 128.) $Lg = \frac{1}{2}a$ und (§. 132.)

$$LG' = \frac{a}{4} \cdot \frac{S^2 + 2sS + 3s^2}{S^2 + sS + s^2}.$$

Setzt man diese Werthe von Q, R, Lg, LG' in die für LG gefundene Gleichung, so findet man, nach gehöriger Abkürzung, die Entfernung des Schwerpunkts von der Grundfläche für die ausgehöhlte Pyramide, oder

$$LG = \frac{a}{4} \cdot \frac{S^2 + 2sS + 3s^2 - 6\sigma^2}{S^2 + sS + s^2 - 3\sigma^2}.$$

§. 135.

1. Zusatz. Für einen ausgehöhlten abgekürzten Kegel wird der Abstand des Schwerpunkts eben so gefunden, wenn man im vorstehenden Ausdrucke, statt der ähnlich liegenden Seiten, die zugehörigen Durchmesser setzt.

§. 136.

2. Zusatz. Ist die abgekürzte Pyramide so weit ausgehöhlt, daß der Querschnitt der Aushöhlung der obern Fläche ABD der abgekürzten Pyramide gleich ist, so wird $s = \sigma$, also

$$LG = \frac{a}{4} \cdot \frac{S^2 + 2sS - 3s^2}{S^2 + sS - 2s^2} = \frac{a}{4} \cdot \frac{(S^2 - s^2) + 2s(S - s)}{(S^2 - s^2) + s(S - s)}$$

$$= \frac{a}{4} \cdot \frac{(S - s)(S + s + 2s)}{(S - s)(S + s + s)}$$

und man findet den Abstand

$$LG = \frac{a}{4} \cdot \frac{S + 3s}{S + 2s}.$$

Für $S = s$ wird der Inhalt des ausgehöhlten Körpers oder $Q - R = 0$, aber $LG = \frac{1}{3}a$. Dies zeigt an, daß der Schwerpunkt eines auf die beschriebene Art ausgehöhlten Körpers nie weiter als um den dritten Theil der Axe von der Grundfläche entfernt seyn kann, oder alle mögliche Schwerpunkte so ausgehöhlter Körper müssen innerhalb der Grenze $\frac{1}{3}a$ liegen.

Beispiel. Für $a = 10$, $S = 10$, $s = 4$ ist

$$LG = \frac{10 \cdot 22}{4 \cdot 18} = 3{,}05555.$$

Für $a = 10$, $S = 10$, $s = 9$ ist

$$LG = \frac{10 \cdot 37}{4 \cdot 28} = 3{,}30303.$$

Für $a = 10$, $S = 1000$, $s = 999$ ist

$$LG = \frac{10 \cdot 3997}{4 \cdot 2998} = 3{,}33305$$

also in allen Fällen kleiner als

$$\tfrac{1}{3}a = 3{,}33333.$$

§. 137.

Aufgabe. Von einem schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismen den Abstand seines Schwerpunkts von der Grundfläche zu finden.

Auflösung. Es sei $ABCC'B'A'$, Figur 76., das gegebene Prismen, aus dessen obersten Ecken A, B, C man auf die nöthigenfalls erweiterte Grundfläche $A'B'C'$ lothrechte Linien ziehen kann, wodurch der Abstand dieser Taf. III. Fig. 76.

Ecken von der Grundfläche $A'B'C'$ bestimmt wird. Man setze diese Abstände, für $A = a$, für $B = b$, für $C = c$; lege durch A eine Ebene $AB''C''$ mit der Grundfläche parallel, so ist, wenn man die Grundfläche $A'B'C' = F$ setzt, auch $AB''C'' = F$. Ferner werde durch die Punkte A, B, C'' eine Ebene gelegt, so ist der ganze Körper $ABCC'B'A'$ in ein Prismen $A'B'C'C''B''A$ und in zwei Pyramiden $AB''C''B$ und $ABC''C$ eingetheilt. Nun findet man

den Inhalt vom Prismen $A'B'C'C''B''A'' = aF$

den Inhalt der Pyramide $AB''C''B = \frac{1}{3}(b-a)F$

Es verhält sich aber der Inhalt der

$$\begin{aligned} \text{Pyr.}\, AB''C''B : \text{Pyr.}\, ABC''C &= \triangle B''C''B : \triangle BC''C \\ &= B''B : C''C \\ &= b-a : c-a \end{aligned}$$

folglich

$$\text{Pyr.}\, ABC''C = \frac{c-a}{b-a} \cdot \text{Pyr.}\, AB''C''B = \frac{1}{3}(c-a)F;$$

daher ist der Inhalt des ganzen Körpers $ABCC'B'A' =$

$$aF + \frac{1}{3}(b-a)F + \frac{1}{3}(c-a)F = \frac{a+b+c}{3} \cdot F$$

Sucht man die Abstände der Schwerpunkte von der Grundfläche $A'B'C'$ für jeden einzelnen Körper, so ist dieser

Abstand für das Prismen $A'B'C'C''B''A = \frac{1}{2}a$ (§. 128.)

Abstand für die Pyramide $AB''C''B = \frac{3a+b}{4}$ (§. 131.)

Abstand für die Pyramide $ABC''C = \frac{2a+b+c}{4}$ (§. 131.)

Das Moment des ganzen Körpers muß der Summe der Momente der einzelnen Körper gleich seyn. Setzt man daher, daß u den Abstand des Schwerpunkts von der Grundfläche für den ganzen Körper bezeichnet, so erhält man

$$u.\frac{a+b+c}{3}F = \tfrac{1}{2}a.aF + \frac{3a+b}{4}.\frac{b-a}{3}.F + \frac{2a+b+c}{4}.\frac{c-a}{3}.F$$

Hieraus findet man den Abstand des Schwerpunkts von der Grundfläche für das schief abgeschnittene dreisei: Prismen, oder

$$u = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc}{4(a+b+c)}.$$

§. 138.

Zusatz. Für $b = c$ wird

$$(\mathrm{I})\ u = \frac{a^2 + 3b^2 + 2ab}{4(a+2b)}.$$

Für $a = 0$ wird

$$(\mathrm{II})\ u = \frac{b^2 + c^2 + bc}{4(b+c)}.$$

Für $a = 0$ und $b = c$ ist

$$(\mathrm{III})\ u = \tfrac{3}{8}b.$$

§. 139.

Aufgabe. Von einem schief abgeschnittenen Parallelepipeden $ACB'D'$, Figur 77., den Abstand seines Schwerpunkts von der Grundfläche $A'B'D'$ zu finden. Taf. III. Fig. 77.

Auflösung. Man setze die Abstände der Ecken A, B, C, D von der Grundfläche $A'B'D' = a, b, c, d$ und theile das Parallelepipeden durch die Ebene $AA'C'C$ in zwei dreieckigte schief abgeschnittene Prismen. Der gesuchte Abstand des Schwerpunkts von der Grundfläche sei $= u$, und man setze die Fläche $A'B'C' = A'C'D' = F$, so ist der Inhalt vom schief abgeschnittenen

Prismen $ABCB' = \frac{a+b+c}{3}F$

Prismen $ACDD' = \frac{a+c+d}{3}F$

Parallelepipeden $BDD'B' = \frac{2a+b+2c+d}{3} F$

und daher, nach §. 137., wenn man die Momente auf die Ebene $B'D'$ bezieht, das Moment vom

Prismen $ABCB' = \frac{a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc}{4(a+b+c)} \cdot \frac{a+b+c}{3} F$

Prismen $ACDD' = \frac{a^2+c^2+d^2+ac+ad+cd}{4(a+c+d)} \cdot \frac{a+c+d}{3} F$

Parallelepipeden $BDD'B' = u \cdot \frac{2a+b+2c+d}{3} F$

Nun muß dies letzte Moment den beiden ersten gleich seyn, daher erhält man

$u(2a+b+2c+d)$

$= \frac{1}{4}(2a^2+b^2+2c^2+d^2+ab+2ac+ad+bc+cd)$

Es ist aber nach den Eigenschaften der Figur

$a+c = b+d$ also $d = a+c-b$.

Setzt man die Werthe für $b+d$, und d in die vorstehende Gleichung, und entwickelt u, so erhält man den gesuchten Abstand des Schwerpunkts von der Grundfläche $A'B'C'D'$ oder

$$u = \frac{2a^2+b^2+2c^2+3ac-2b(a+c)}{6(a+c)}.$$

§. 140.

Aufgabe. Den Schwerpunkt einer Halbkugel zu finden.

Taf. III. Fig. 78. Auflösung. Um die Halbkugel ADB, Figur 78., werde ein Cylinder AEFB beschrieben, dessen Axe CD ist, so ist der Körper EADBF, welcher die krumme Oberfläche der Halbkugel einschließt, einem Kegel ECF gleich, der mit ihm gleiche Höhe und Grundfläche hat, und alle mit der Grundfläche AB parallele Querschnitte dieses Körpers und des Kegels sind einander gleich, wenn

sie

sie von AB gleichen Abstand haben, daher haben beide Körper einen gemeinschaftlichen Schwerpunkt in g, wo $Cg = \frac{3}{4}CD = \frac{3}{4}r$ (§. 130.) ist, wenn r den Halbmesser der Kugel bezeichnet. Mit der Halbkugel werde der Cylinder ABKI = AEFB verbunden, so ist $CH = r$, und wenn G' der Schwerpunkt dieses Cylinders ist, $CG' = \frac{1}{2}r$. Das Gewicht des Cylinders ABKI sei P, so ist das der Halbkugel $= \frac{2}{3}P$, und des Körpers EADBF $= \frac{1}{3}P$ (weil er mit dem Kegel gleichen Inhalt hat). Für die feste Axe DH entsteht ein Gleichgewicht, wenn der Punkt C unterstützt wird; ist nun G der Schwerpunkt der Halbkugel, so müssen die Momente des Körpers EADBF und der Halbkugel, welche beide den Cylinder AEFB ausmachen, dem Momente des Cylinders ABIK gleich seyn, also

$$\frac{1}{3}P . Cg + \frac{2}{3}P . CG = P . CG', \text{ oder}$$
$$\frac{1}{3} . \frac{3}{4}r + \frac{2}{3} . CG = \frac{1}{2}r, \text{ daher}$$
$$CG = \frac{3}{8}r$$

Die Entfernung des Schwerpunkts vom Mittelpunkte der Halbkugel beträgt daher $\frac{3}{8}$ des Halbmessers.

Uebrigens stimmt dieses Resultat mit dem §. 138. III. genau überein.

§. 141.

Aufgabe. Den Schwerpunkt einer ausgehöhlten halben Kugel oder eines Kugelgewölbes zu finden.

Auflösung. Es sei C, Figur 79., der Mittelpunkt für die Halbkugel ADB und für die kugelförmige Aushöhlung adb. In der Linie CD, welche auf der Grundfläche AB senkrecht ist, liegen die Schwerpunkte g, G', Taf. III. Fig. 79.

G von der Aushöhlung adb, der vollen Halbkugel und dem Kugelgewölbe. Ferner sei der Inhalt der vollen Halbkugel $ADB = P$, der Aushöhlung $adb = p$; also des Gewölbes $P - p$, und die Halbmesser

$$AC = CD = R;\ ac = cd = r,$$

so erfordert das Gleichgewicht an der Axe CD

$$Cg \cdot p + CG \cdot (P - p) = CG' \cdot P, \text{ also}$$

$$CG = \frac{CG' \cdot P - Cg \cdot p}{P - p}.$$

Es verhält sich $P : p = R^3 : r^3$, also ist

$$p = P \frac{r^3}{R^3}. \text{ Ferner ist (§. 140.)}$$

$$CG' = \tfrac{3}{8} R;\ Cg = \tfrac{3}{8} r.$$

Setzt man die Werthe von p, CG', Cg in die für CG gefundene Gleichung, so wird der Abstand des Schwerpunkts eines Kugelgewölbes vom Mittelpunkte, oder

$$CG = \tfrac{3}{8} \cdot \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}.$$

* §. 142.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines jeden Körpers, dessen Gestalt durch irgend eine Gleichung gegeben ist, zu finden.

Auflösung. Für irgend einen Körper ANM, Figur 80., sei AP die Abscissenaxe, und für $AP = x$ der auf der Axe AP senkrechte Querschnitt $NM = N$. Ist nun $AG = u$ der Abstand des Schwerpunkts vom Anfangspunkte A der Abscissen für den Körper AMN, dessen Inhalt $= Q$ gesetzt wird, so muß, wenn x um ∂x wächst, der Inhalt Q um das Element $\partial Q = N \partial x$ wachsen. Das Moment dieses Elements für den Punkt A ist $x \partial Q = N x \partial x$, und weil die Summe aller Mo-

Taf. III. Fig. 80.

mente dem Momente des ganzen Körpers gleich seyn muß, so erhält man

$$uQ = \int x \partial Q = \int N x \partial x$$

folglich den Abstand des Schwerpunkts von A, oder

$$u = \frac{\int x \partial Q}{Q} = \frac{\int N x \partial x}{\int N \partial x}$$

weil der Inhalt $Q = \int N \partial x$ ist.

Bestimmt man durch dasselbe Verfahren den Abstand des Schwerpunkts noch für zwei andere Punkte wie A, so ist dadurch für jeden gegebenen Körper die Lage des Schwerpunkts gefunden.

* §. 143.

1. Zusatz. Wäre der gegebene Körper ein Konoid, dessen Axe die Linie AP ist, so liegt der Schwerpunkt in der Axe AP, und man hat daher nur nöthig, den Abstand $AG = u$ zu suchen, so ist dadurch die Lage des Schwerpunkts bekannt. Weil aber für ein Konoid der Querschnitt MN eine Kreisfläche ist, so setze man $PM = y$, so ist $N = \pi y^2$, also $\partial Q = \pi y^2 \partial x$, daher der Abstand AP, oder

$$u = \frac{\pi \int x y^2 \partial x}{Q} = \frac{\int x y^2 \partial x}{\int y^2 \partial x}.$$

* §. 144.

2. Zusatz. Sucht man den Schwerpunkt von dem Ausschnitt eines Konoids, wenn vorausgesetzt wird, daß die Schnitte durch die Axe AP geführt werden, so ist sowohl die Grundfläche PMM', Figur 81., eines sol- Taf. III. chen Körpers, als auch jeder andere auf der Axe AP Fig. 81. senkrechte Querschnitt ein Kreisausschnitt, dessen Mittelpunkt in die Axe AP fällt. Für $AP = x$, $PM = PM' = y$

sei die Fläche $PMM' = N'$, der Inhalt des Körpers
Taf. III Fig. 81. $APMM'A = Q'$, und sein Schwerpunkt G liege in einer auf der Axe AP senkrechten Ebene FSS', welche diese Axe im Punkte F schneidet, so erhält man wie vorhin, wenn $AF = u$ gesetzt wird, den Abstand AF oder

$$\text{(I)}\quad u = \frac{\int x \partial Q'}{Q'} = \frac{\int N' x \partial x}{\int N' \partial x}.$$

Man theile den Bogen MM' in zwei gleiche Theile MQ, QM', lege durch A, P, Q eine Ebene, so theilt solche den Körper $APMM'$ in zwei gleiche Theile, folglich muß der Schwerpunkt G in derselben liegen (§. 80.). Daher ist der Durchschnitt FR, in welchem sich die Ebenen APQ und FSS' schneiden, ein Durchmesser der Schwere des ganzen Körpers. Für jeden Querschnitt wie PMM' sei
α g der Schwerpunkt der Fläche desselben, so ist wenn α den Neigungswinkel der beiden Ebenen APM, APM' bezeichnet, der Winkel $MPM' = \alpha$, daher §. 108. der Abstand des Schwerpunkts der Fläche PMM' von P oder

$$Pg = \frac{4 \sin \frac{1}{2}\alpha}{3 \operatorname{Arc} \alpha} \cdot y.$$

Nun ist ferner die Fläche $PMM' = N' = \frac{1}{2}\alpha y^2$, also das Körperelement $\partial Q' = N' \partial x = \frac{1}{2}\alpha y^2 \partial x$, das Moment dieses Elements =

$$Pg \cdot \partial Q' = \frac{4 \sin \frac{1}{2}\alpha}{3 \operatorname{Arc} \alpha} \cdot y \partial Q'$$

und, wenn man für den Schwerpunkt G des Körpers $APMM'$ den Abstand $FG = u'$ setzt, so erhält man $u' \cdot Q' = \frac{4 \sin \frac{1}{2}\alpha}{3 \operatorname{Arc} \alpha} \int y \partial Q'$, folglich den Abstand FG oder

$$\text{(II)}\quad u' = \frac{4 \sin \frac{1}{2}\alpha \int y \partial Q'}{3 \operatorname{Arc} \alpha \cdot Q'} = \frac{4 \sin \frac{1}{2}\alpha \int N' y \partial x}{3 \operatorname{Arc} \alpha \cdot \int N' \partial x}$$

oder auch

$$u' = \frac{2 \sin \frac{1}{2}\alpha \int y^3 \partial x}{3 Q'} = \frac{4 \sin \frac{1}{2}\alpha \int y^3 \partial x}{3 \,\mathrm{Arc}\,\alpha \,.\, \int y^2 \partial x}.$$

Weil $N' = \frac{1}{2}\alpha y^2$ ist, so erhält man auch noch aus (I) AF, oder

$$u = \frac{\int x y^2 \partial x}{\int y^2 \partial x}$$

eben so wie im vorhergehenden §.

* §. 145.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Kugelabschnitts vom Scheitel desselben zu finden,

Auflösung. Für die Kugel, deren Halbmesser r ist, erhält man $y^2 = 2rx - x^2$ also

$$\int y^2 \partial x = \int (2rx - x^2)\, \partial x = rx^2 - \tfrac{1}{3}x^3, \quad \text{und}$$

$$\int x y^2 \partial x = \int (2rx^2 - x^3)\, \partial x = \tfrac{2}{3}rx^3 - \tfrac{1}{4}x^4$$

wo keine Constante hinzukommt, weil das Integral mit $x = 0$ verschwindet. Man erhält daher §. 142. den Abstand des Schwerpunkts vom Scheitel, oder

$$u = \frac{8r - 3x}{12r - 4x} \,.\, x.$$

Für die Halbkugel wird $x = r$ also $u = \frac{5}{8}r$.

Beispiel. Der Halbmesser der Kugel sei 9 Fuß, und die Höhe des Abschnitts = 4 Fuß, so erhält man den Abstand

$$u = \frac{72 - 12}{108 - 16} \,.\, 4 = 2\tfrac{14}{23} \text{ Fuß}.$$

* §. 146.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Kugelausschnitts zu finden.

Auflösung. Nach §. 144. ist, wie im vorigen §., der Abstand AF, Figur 81., oder Taf. III. Fig. 81.

$$(I)\ u = \frac{8r - 3x}{12r - 4x}\, x.$$

Taf. III. Fig. 81. Ferner ist $y^3 \partial x = (2rx - x^2)^{\frac{3}{2}} \partial x$. Aber (P. A. S. 146. III.)

$$\int y^3 \partial x = \frac{-(r-x)\, y^3}{4} + \frac{3r^2}{4} \int y \partial x. \text{ Ferner}$$

$$\int y \partial x = \int \partial x \sqrt{(2rx - x^2)} \text{ daher, wie §. 120.,}$$

$$= \tfrac{1}{2} r^2 \operatorname{Arc\,sinvs} \frac{x}{r} - \tfrac{1}{2}(r-x)\, y \text{ also}$$

$$\int y^3 \partial x = \frac{3r^4}{8} \operatorname{Arc\,sinvs} \frac{x}{r} - \frac{(r-x)\, y}{4} \left(y^2 + \tfrac{3}{2} r^2\right).$$

Wenn daher der Winkel α die §. 144. gegebene Bedeutung erhält, und Q' den körperlichen Inhalt des Ausschnitts bezeichnet, so ist §. 144. (II) der Abstand des Schwerpunkts von der Axe

$$(II)\ u' = \frac{3r^4 \operatorname{Arc\,sinvs} \frac{x}{r} - y\,(r-x)\,(2y^2 - 3r^2)}{12\, Q'} \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\alpha.$$

* §. 147.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines parabolischen Konoids zu finden.

Auflösung. Die Gleichung für die Parabel ist $y^2 = ax$. Man erhält daher

$$\int xy^2 \partial x = \int ax^2 \partial x = \tfrac{1}{3} ax^3,$$ wo keine Constante hinzukommt. Ferner ist

$$\int y^2 \partial x = \int ax \partial x = \tfrac{1}{2} ax^2,$$ daher §. 142. der Abstand des Schwerpunkts vom Scheitel, oder

$$u = \frac{\frac{1}{3} ax^3}{\frac{1}{2} ax^2} = \tfrac{2}{3} x$$

der Schwerpunkt eines parabolischen Konoids ist daher um $\frac{2}{3}$ der Axe vom Scheitel entfernt.

* §. 148.

Aufgabe. Den Schwerpunkt von dem Ausschnitte eines parabolischen Konoids zu finden.

Auflösung. Der Abstand des Schwerpunkts vom Scheitel ist wie im vorigen §.

$$(\text{I})\ u = \tfrac{2}{3}x.$$

Ferner erhält man

$\int y^2 \partial x = \frac{1}{2} a x^2 = \frac{y^4}{2a}$, und weil $\partial x = \frac{2 y \partial y}{a}$ ist,

$$\int y^3 \partial x = \int \frac{2 y^4 \partial y}{a} = \frac{2 y^5}{5a}$$

daher findet man, wenn α den Winkel des Ausschnitts bezeichnet, §. 144. den Abstand des Schwerpunkts von der Axe, oder

$$u' = \frac{16\, y \sin \frac{1}{2}\alpha}{15 \operatorname{Arc} \alpha}.$$

* §. 149.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines hyperbolischen Konoids zu finden.

Auflösung. Die Gleichung für die Hyperbel ist

$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$ also

$$\int x y^2 \partial x = \int \frac{b^2}{a^2}(2ax^2 + x^3)\,\partial x = \frac{b^2}{a^2}\left(\tfrac{2}{3}ax^3 + \tfrac{1}{4}x^4\right)$$

Ferner ist

$$\int y^2 \partial x = \int \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)\,\partial x = \frac{b^2}{a^2}\left(ax^2 + \tfrac{1}{3}x^3\right)$$

daher §. 142. der Abstand des Schwerpunkts vom Scheitel, oder

$$u = \frac{8a + 3x}{12a + 4x} \cdot x.$$

* §. 150.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines elliptischen Konoids zu finden, dessen Scheitel in die große Axe fällt.

Auflösung. Wenn a den Halbmesser der großen, und b der kleinen Axe bezeichnet, so ist alsdann die Gleichung für die Ellipse $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$, daher

$$\int xy^2 \partial x = \int \frac{b^2}{a^2}(2ax^2 - x^3)\,\partial x = \frac{b^2}{a^2}\left(\tfrac{2}{3}ax^3 - \tfrac{1}{4}x^4\right).$$

Ferner

$$\int y^2 \partial x = \int \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)\,\partial x = \frac{b^2}{a^2}\left(ax^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right)$$

daher §. 142. der Abstand vom Scheitel, oder

$$\text{(I)}\quad u = \frac{8a - 3x}{12a - 4x}\,.\,x$$

Für die halbe Ellipse wird $x = a$, also

$$\text{(II)}\quad u = \tfrac{5}{8}a.$$

Die Entfernung des Schwerpunkts vom Scheitel eines halben elliptischen Konoids beträgt daher wie bei der Halbkugel $\frac{5}{8}$ der halben Axe.

Zusatz. Fällt der Scheitel des elliptischen Konoids in das Ende der kleinen Axe, so ist die Gleichung für die Ellipse $y^2 = \frac{a^2}{b^2}(2bx - x^2)$, und man erhält alsdann den Abstand

$$\text{(III)}\quad u = \frac{8b - 3x}{12b - 4x}\,.\,x.$$

* §. 151.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Kettenkonoids zu finden.

Auflösung. Es sei wie §. 125. $v^2 = 2cx + x^2$ die Gleichung für die Kettenlinie. Nun ist (P. A. S. 143.)

$\int xy^2 \partial x = \frac{1}{2}x^2y^2 - \int x^2 y \partial y$ und

$\int x^2 y \partial y = y \int x^2 \partial y - \int \partial y \int x^2 \partial y$. Nach §. 125. ist aber

$\int x^2 \partial y = \frac{1}{2} c x v - \frac{3}{2} c^2 v + \frac{3}{2} c^2 y$ daher

$\partial y \int x^2 \partial y = \frac{1}{2} c x v \partial y - \frac{3}{2} c^2 v \partial y + \frac{3}{2} c^2 y \partial y$

und weil (§. 91. Anh) $v \partial y = c \partial x$ ist, so erhält man auch

$\partial y \int x^2 \partial y = \frac{1}{2} c^2 x \partial x - \frac{3}{2} c^3 \partial x + \frac{3}{2} c^2 y \partial y$ also

$\int \partial y \int x^2 \partial y = \frac{1}{4} c^2 x^2 - \frac{3}{2} c^3 x + \frac{3}{4} c^2 y^2$ daher

$\int x^2 y \partial y = \frac{1}{2} cxyv - \frac{3}{2} c^2 yv + \frac{3}{2} c^2 y^2 - \frac{1}{4} c^2 x^2 + \frac{3}{2} c^3 x - \frac{3}{4} c^2 y^2$

oder $= \frac{1}{2} cxyv - \frac{3}{2} c^2 yv + \frac{3}{4} c^2 y^2 - \frac{1}{4} c^2 x^2 + \frac{3}{2} c^3 x$

und mit Hülfe dieses Ausdrucks erhält man

$\int xy^2 \partial x = \frac{1}{2} x^2 y^2 - \frac{1}{2} cxyv + \frac{3}{2} c^2 yv - \frac{3}{4} c^2 y^2 + \frac{1}{4} c^2 x^2 - \frac{3}{2} c^3 x.$

Da nun §. 143. $u = \frac{\pi \int xy^2 \partial x}{Q}$ und (§. 109. Anh.) $Q = \pi\,[2c^2 x + (c+x)\,y^2 - 2cyv]$ ist, so erhält man den Abstand des Schwerpunkts vom Scheitel, oder

$$u = \frac{2x^2y^2 - 2cxyv + 6c^2yv - 3c^2y + c^2x^2 - 6c^3x}{4\,[2c^2x + y^2\,(c+x) - 2cyv]}.$$

* §. 152.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines jeden unregelmäßigen Körpers zu finden.

Auflösung. Es sei $AA'G'G$, Figur 82., der gegebene Körper, AG eine grade Linie, welche in eine grade Anzahl gleicher Theile AB, BC, CD, ... eingetheilt ist. Durch jeden dieser Punkte denke man sich Ebenen BB', CC', DD', ... welche auf AG senkrecht stehen; auch soll dies von den äußersten Flächen Taf. III. Fig. 82.

AA', GG' gelten. Der Inhalt von der Fläche AA' sei $= A$, von $BB' = B$, von $CC' = C$, ... und der Abstand zweier Flächen oder $AB = BC = \ldots = \alpha$. Man nehme die Linie AG, Figur 83., eben so groß wie AG, Figur 82., und theile solche in eben so viel gleiche Theile $AB = BC = \ldots$, errichte in A, B, C, ... senkrechte Linien, und sehe die gefundenen Flächeninhalte A, B, C, ... als abstracte Zahlen an, so kann man $AA' = A$, $BB' = B$, $CC' = C$, ... nehmen, und der Flächeninhalt von dem Streifen $AA''B''B$ wird alsdann durch eben die Größen ausgedrückt, welche den körperlichen Inhalt von der Scheibe $AA'B'B$ angeben. Es ist daher der Ausdruck für den Inhalt der ganzen Fläche $AA''G''G$ dem Ausdrucke für den Inhalt des Körpers $AA'G'G$ gleich. Nun ist §. 126. der Inhalt von der Fläche $AA''G''G$

Taf. III. Fig. 83.

$$= \tfrac{1}{3}\alpha\,(A + 4B + 2C + 4D + 2E + 4F + G)$$

daher ist, wenn Q den Inhalt des Körpers $AA'G'G$ bezeichnet,

$$Q = \tfrac{1}{3}\alpha\,(A + 4B + 2C + 4D + 2E + 4F + G).$$

Eben so muß der Schwerpunkt des Körpers $AA'G'G$ von der Ebene AA' eben den Abstand haben, welchen der Schwerpunkt der Fläche $AA''G''G$ von der Linie AA' hat. Es sei daher u der Abstand des Schwerpunkts vom Körper $AA'G'G$ von der Ebene AA', so findet man nach §. 126.

$$u = \alpha \cdot \frac{0.A + 1.4B + 2.2C + 3.4D + 4.2E + 5.4F + 6.G}{A + 4B + 2C + 4D + 2E + 4F + G}$$

Wird A oder G oder irgend ein anderer Querschnitt $= 0$, so bleibt die gefundene Auflösung dieselbe, nur daß man statt dieser Ordinaten in die Gleichung o setzen muß. Hieraus folgt, daß es eben nicht nothwendig ist, daß die beiden Flächen AA', GG' mit einander parallel sind, weil die Auflösung auch dann noch dieselbe bleibt, und man den Schwerpunkt hinlänglich genau findet, wenn nur der Abstand α zweier auf einander folgender Querschnitte klein genug angenommen wird.

Nimmt man drei Ebenen senkrecht auf einander an, so kann man nach der gefundenen Regel die Abstände des Schwerpunkts von diesen Ebenen finden, wodurch die Lage des Schwerpunkts bestimmt wird.

* §. 153.

Zusatz. Wäre der gegebene Körper durch die Umdrehung einer Ebene $AA'''G'''G$, Figur 82., um ihre Axe AG entstanden, so sind alle auf der Axe AG senkrechte Querschnitte Kreisflächen, und wenn man die Halbmesser $AA''' = a$, $BB''' = b$, $CC''' = c$, ... setzt, so ist die Fläche $A = \frac{1}{4}\pi a^2$, $B = \frac{1}{4}\pi b^2$, ... daher erhält man, wenn diese Werthe in die für Q und u gefundene Ausdrücke eingeführt werden, den körperlichen Inhalt des durch Umdrehung irgend einer Ebene um ihre Seitenlinie entstandenen Konoids, oder Taf. III. Fig. 82.

$$Q = \frac{1}{12}\pi\alpha\,(a^2 + 4b^2 + 2c^2 + 4d^2 + 2e^2 + 4f^2 + g^2)$$

und den Abstand des Schwerpunkts von der Fläche AA', oder

$$u = \alpha \,.\, \frac{0.a^2 + 1.4b^2 + 2.2c^2 + 3.4d^2 + 4.2e^2 + 5.4f^2 + 6.g^2}{a^2 + 4b^2 + 2c^2 + 4d^2 + 2e^2 + 4f^2 + g^2}.$$

Beispiel. Den Abstand des Schwerpunkts eines Kugelabschnitts vom Scheitel zu finden, wenn die

Höhe des Abschnitts = h und der zur Kugel gehörige Halbmesser = r ist.

Nimmt man an, daß die Höhe h in zwei gleiche Theile getheilt werden soll, so ist jeder Theil $\alpha = \frac{1}{2}h$. Werden diese Theile vom Scheitel an gerechnet, so ist für den ersten Querschnitt $a^2 = 0$, und es ist, wenn die Querschnitte mit der Grundfläche des Kugelabschnitts parallel genommen werden, für den zweiten und dritten Querschnitt

$$b^2 = 2r\alpha - \alpha^2$$
$$c^2 = 4r\alpha - 4\alpha^2$$

folglich der Abstand

$$u = \alpha \cdot \frac{0.0 + 1.4(2r\alpha - \alpha^2) + 2.(4r\alpha - 4\alpha^2)}{0 + 4(2r\alpha - \alpha^2) + (4r\alpha - 4\alpha^2)}$$

und es wird, wenn man die Parenthesen auflöst und $\alpha = \frac{1}{2}h$ setzt, der Abstand des Schwerpunkts vom Scheitel, oder

$$u = \frac{8r - 3h}{12r - 4h} \cdot h$$

genau eben so wie §. 146., wodurch man sich von der Genauigkeit dieser Methode überzeugen kann.

§. 154.

Weil ein schwerer Körper nur dann in Ruhe bleibt, wenn derselbe in seinem Schwerpunkte unterstützt ist, oder sonst auf eine Art das Sinken des Schwerpunkts verhindert wird, so folgt daraus, daß ein jeder an einem Faden aufgehangene Körper nur dann in Ruhe ist, wenn der Schwerpunkt des Körpers mit dem Faden in einerlei vertikale Linie fällt, weil nur unter diesen Umständen der Schwerpunkt am Sinken verhindert wird. Hängt ein Körper an zwei Fäden, welche sich in einem Aufhängepunkt vereinigen, so muß eine Vertikallinie durch den Aufhängepunkt zugleich durch den Schwerpunkt gehen.

Hiedurch erhält man ein leicht ausführbares praktisches Mittel, den Schwerpunkt eines jeden unregelmäßigen Körpers mittelst eines Fadens zu finden. Denn wenn man das eine Ende des Fadens mit dem Körper verbindet, und das andere an einem Aufhängepunkt so befestigt, daß der Körper frei herabhängen kann, so wird die verlängerte Richtung des Fadens einen Durchmesser der Schwere des Körpers geben. Wird nun der Faden an einem andern Theile des Körpers befestigt, so erhält man dadurch einen zweiten Durchmesser der Schwere, wodurch die Lage des Schwerpunktes bekannt ist.

Wäre der Körper so groß, daß man ihn nicht aufhängen kann, so könnte man einen viel kleinern ganz ähnlichen oder ein Modell verfertigen lassen, und von diesem Modell auf die angeführte Weise den Schwerpunkt suchen, wodurch die Lage des Schwerpunkts für den großen Körper bekannt wird. Dies Verfahren erfordert aber eine außerordentliche Genauigkeit, besonders wenn nicht alle Theile des Körpers einerlei eigenthümliches Gewicht haben.

§. 155.

Von einem jeden Körper, welcher durch Umdrehung irgend einer Fläche um eine Axe entstehet, kann man mit Hülfe des Schwerpunkts derjenigen Fläche, welche den Körper erzeugt, seinen Inhalt nach einer vom Pater Guldin gegebenen Regel (*Méthode centrobarique*) (*)

(*) Pauli *Guldini*, de centro gravitatis trium specierum quantitatis continuae. Viennae. Lib. I. 1635. Lib. II. 1640.

finden, wenn man den Weg, welchen der Schwerpunkt der erzeugenden Fläche durchläuft, mit dem Inhalte dieser Fläche multiplizirt.

Taf. III. Fig. 80. Wäre APM, Figur 80., die erzeugende Fläche, und $Gg = e$ der Abstand des Schwerpunkts dieser Fläche von der Axe AP, so ist $2e\pi$ der Weg, welchen der Schwerpunkt g durchläuft, wenn sich die Fläche $DEB = M$ um die Axe AP dreht, und einen Körper, dessen Inhalt Q ist, erzeugt. Aber §. 116.

$$e = \frac{\int y\,\partial M}{2M} \text{ oder } 2eM = \int y\,\partial M.$$

Nun ist der Inhalt des Körpers

$$Q = \int \pi y^2 \partial x = \pi \int y\,\partial M \text{ daher}$$

$$Q = 2\pi e \,.\, M.$$

IV. Vom Schwerpunkte der Oberfläche eines Körpers.

§. 156.

Der Schwerpunkt von der Oberfläche eines Prismen oder Cylinders liegt in der Mitte derjenigen Axe, welche die Schwerpunkte von dem Umfange der Grundflächen mit einander verbindet.

Eine Ebene, welche durch die Mitte dieser Axe, mit einer der Grundflächen des Prismen parallel geht, schneidet sämmtliche Parallelogramme seiner Außenfläche in ihren Schwerpunkten, und ist daher eine Ebene der Schwere. Nun verhalten sich die Linien vom Umfange der Durchschnittsebene wie die Gewichte der Parallelogramme, durch deren Schwerpunkte sie gehen, daher liegt der Schwerpunkt des ganzen Umfanges in der angegebenen Stelle.

Auf ähnliche Art läßt sich beweisen, daß der Schwerpunkt von der Oberfläche einer Pyramide, die Grundfläche nicht mit gerechnet, oder von der krummen Oberfläche eines Kegels, $\frac{2}{3}$ von der Spitze derjenigen Linie gerechnet, liegen muß, welche den Schwerpunkt von dem Umfange der Grundfläche mit der Spitze verbindet.

§. 157.

Der Schwerpunkt von der krummen Oberfläche eines Kugelabschnitts liegt in der Mitte derjenigen Linie, welche vom Scheitel nach dem Mittelpunkte der Grundfläche des Abschnitts gezogen wird.

Denn man vollende die Halbkugel EDF, Figur 84., welche zum Abschnitt ABD gehört, so ist wenn EF mit AB parallel, und im Mittelpunkte C die Linie CD auf der Grundfläche EF senkrecht stehet, CD ein Durchmesser der Schwere für die krumme Oberfläche des Abschnitts. Um die Grundfläche EF der Halbkugel sei die krumme Oberfläche EIKF eines Cylinders gelegt, welcher auf dieser Grundfläche senkrecht steht, und gleiche Höhe mit der Halbkugel hat, so ist ein jeder äußerst schmale Streifen AabB der krummen Oberfläche des Abschnitts einem Streifen A′a′b′B′ der Cylinderfläche gleich, wenn beide gleichweit von der Grundfläche EF abstehen, und einerlei lothrechte Höhe Hh haben, wie solches in der Geometrie bewiesen wird. Beide schmale Streifen haben also einerlei Gewicht, und da sie gleich weit vom Scheitel D abstehen, auch gleiche Momente von demselben. Dies

Taf. III. Fig. 84.

gilt aber für jeden Streifen auf der Oberfläche des Abschnitts, es muß daher der Schwerpunkt von der Oberfläche des Kugelabschnitts ADB mit dem Schwerpunkte der Cylinderfläche A'B'KI überein kommen.

* §. 158.

Aufgabe. Den Schwerpunkt von der krummen Oberfläche eines jeden Konoids ganz allgemein zu bestimmen.

Taf. III. Fig. 80. Auflösung. Für das Konoid MAN, Figur 80., dessen Axe AP ist, sei $AP = x$, $PM = y$, der Bogen $AM = v$, und die dazu gehörige krumme Oberfläche $= K$. Wächst nun x um ∂x, so wächst v um ∂v und K um $\partial K =$ Fläche MmnNM. Diese Fläche ist aber $= 2\pi y \partial v$ oder

$$\partial K = 2\pi y \partial v.$$

Das Moment dieser Fläche vom Scheitel A gerechnet ist

$$x\partial K = 2\pi x y \partial v.$$

Wäre daher G der Schwerpunkt von der ganzen Oberfläche, und $AG = u$ sein Abstand vom Scheitel A, so ist die Summe aller Momente von $x\partial K$ dem Momente der ganzen Fläche uK gleich, oder

$$uK = \int x\partial K = 2\pi \int x y \partial v$$

und weil K auch $= 2\pi \int y \partial v$ ist, so erhält man für den Abstand des Schwerpunkts vom Scheitel folgende Ausdrücke

$$u = \frac{\int x\partial K}{K} = \frac{2\pi \int x y \partial v}{K} = \frac{\int x y \partial v}{\int y \partial v}$$

wo $\partial v^2 = \partial x^2 + \partial y^2$ ist.

* §. 159.

* §. 159.

Aufgabe. Den Schwerpunkt von der krummen Oberfläche eines Kettenkonoids zu finden.

Auflösung. Es ist (P. A. S. 143.)

$$\int xy\partial v = xyv - \int v\partial(xy) = xyv - \int yv\partial x - \int xv\partial y$$

Nach §. 89. Anh. ist $v\partial y = c\partial x$ daher

$$\int xv\partial y = \int cx\partial x = \tfrac{1}{2}cx^2$$ und weil $v^2 = 2cx + x^2$ ist, so wird

$$y.v\partial x = yv.\frac{v\partial y}{c} = \frac{y\partial y}{c}.v^2 = 2xy\partial y + \frac{x^2y\partial y}{c},$$ also

$$\int yv\partial x = 2\int xy\partial y + \frac{1}{c}\int x^2y\partial y.$$ Nun ist §. 151.

$$\int x^2y\partial y = \tfrac{1}{2}cxyv - \tfrac{3}{2}c^2yv + \tfrac{3}{4}c^2y^2 - \tfrac{1}{4}c^2x^2 + \tfrac{3}{2}c^3x$$

und ferner

$$\int xy\partial y = x\int y\partial y - \int\partial x\int y\partial y = \tfrac{1}{2}xy^2 - \int\tfrac{1}{2}y^2\partial x.$$

Aber (§. 109. Anh.)

$$\int y^2\partial x = 2c^2x + (c+x)y^2 - 2cyv,$$ also

$$\int xy\partial y = \tfrac{1}{2}xy^2 - c^2x - \tfrac{1}{2}(c+x)y^2 + cyv;$$ daher

$$\int yv\partial x = xy^2 - 2c^2x - (c+x)y^2 + 2cyv + \tfrac{1}{2}xyv - \tfrac{3}{2}cyv$$
$$+ \tfrac{3}{4}cy^2 - \tfrac{1}{4}cx^2 + \tfrac{3}{2}c^2x$$
$$= \tfrac{1}{2}cyv - \tfrac{1}{2}c^2x - \tfrac{1}{4}cy^2 + \tfrac{1}{2}xyv - \tfrac{1}{4}cx^2,$$ folglich

$$\int xy\partial v = xyv - \tfrac{1}{2}cyv + \tfrac{1}{2}c^2x + \tfrac{1}{4}cy^2 - \tfrac{1}{2}xyv + \tfrac{1}{4}cx^2 - \tfrac{1}{2}cx^2$$
$$= \tfrac{1}{2}xyv - \tfrac{1}{2}cyv + \tfrac{1}{2}c^2x + \tfrac{1}{4}cy^2 - \tfrac{1}{4}cx^2.$$

Nach §. 110. des Anhangs ist ferner $K = 2\pi(yv - cx)$

daher findet man, weil $u = \frac{2\pi\int xy\partial v}{K}$, den Abstand des Schwerpunkts vom Scheitel, oder

$$u = \frac{2c^2x - cx^2 + cy^2 - 2cyv + 2xyv}{4(yv - cx)}.$$

Fünftes Kapitel.

Von der Stabilität der Körper.

§. 160.

Ein jeder Körper, dessen Schwerpunkt unterstützt ist, und auf welchen keine andere Kräfte wirken, bleibt in Ruhe, und kann nicht umfallen. Es läßt sich aber die Frage aufwerfen, wie viel das Vermögen eines Körpers, mit welchem er dem Umfallen widersteht, größer ist als das eines andern, oder welcher von beiden die größte Standfähigkeit, Stabilität besitzt. Setzt man voraus, daß der Körper auf einem festen horizontalen Boden stehe, und durch eine an seinem Schwerpunkte angebrachte Kraft, deren Richtung mit dem Boden parallel geht, zwar umgeworfen aber nicht fortgeschoben werden kann, so nennt man diese zum Umwerfen nach irgend einer Seite der Grundfläche erforderliche Kraft, welche nur eben so groß genommen wird, als zur Ueberwältigung des aus dem Gewichte des Körpers entspringenden Widerstandes erforderlich ist, die Stabilität des Körpers nach dieser Seite.

Berührt der Körper mit seiner Grundfläche nicht unmittelbar den festen Boden, sondern ist mittelst Stützen, welche mit dem Körper in einer festen Verbindung stehen, auf den Boden gestellt, so wird diejenige Fläche als Grundfläche des Körpers angesehen, welche entstehet, wenn man auf dem Boden die äußersten Punkte der Stützen durch grade Linien verbindet.

§. 161.

Aufgabe. Die Stabilität eines Körpers AD', Figur 85., gegen die Seite BD zu finden. Taf. IV. Fig. 85.

Auflösung. Vom Schwerpunkt G ziehe man auf BD die senkrechte Linie GC, und ziehe in einer durch GC gehenden auf BD senkrechten Ebene die Linie GH mit der Grundfläche AD parallel, und GF darauf senkrecht. Ferner sei CH auf GH, und CF auf GF senkrecht. Ist nun Q das Gewicht des Körpers AD', welches nach der vertikalen Richtung GF wirkt, und S die Stabilität oder diejenige Kraft, welche im Schwerpunkte G nach der Richtung GH der Kraft Q das Gleichgewicht hält, so muß §. 53.

$$CH \cdot S = CF \cdot Q \text{ seyn, oder}$$

$$S = \frac{CF}{CH} \cdot Q.$$

Nun ist CF der senkrechte Abstand des Loths durch den Schwerpunkt von derjenigen Seite der Grundfläche, um welche die Kraft S den Körper zu drehen strebt, und CH die senkrechte Entfernung des Schwerpunkts von der Grundfläche, es folgt daher, daß die Stabilität eines Körpers desto größer wird, je niedriger sein Schwerpunkt liegt, je größer sein Gewicht ist und je weiter das Loth durch den Schwerpunkt von den Seiten seiner Grundfläche absteht.

Wird $CF = 0$, so ist $S = 0$, oder der Körper hat keine Stabilität, und kann von der geringsten Kraft umgeworfen werden, wenn sein Schwerpunkt, lothrecht über den Umfang seiner Grundfläche fällt.

Ist CF negativ, also S negativ, so muß der Körper, weil das Loth von seinem Schwerpunkte nicht in die Grundfläche fällt, nothwendig umfallen, indem eine Kraft S dazu gehört, die Bewegung des Schwerpunkts zu verhindern.

§. 162.

Taf. IV. Fig. 86. Für eine senkrecht stehende grade Mauer sei AB, Figur 86., = D ihre Dicke, BD = L ihre Länge, BB′ = H ihre Höhe, und G das Gewicht von einem Kubikfuße ihrer Materie, so ist §. 74. ihr absolutes Gewicht $P = G . D . L . H$. Die Stabilität dieser Mauer nach der langen Seite BD ist alsdann §. 161.

$$S = \frac{\frac{1}{2}D}{\frac{1}{2}H} . P = \frac{D}{H} . G . D . L . H = G . L . D^2.$$

oder die Stabilität einer lothrechten Mauer ist ihrer Länge und dem Quadrat ihrer Dicke proportional. Sie hängt also nicht von ihrer Höhe ab.

Verschiedene Mauern, welche aus einerlei Material und von gleicher Dicke aufgeführt sind, haben gleiche Stabilität, wenn auch ihre Höhe verschieden ist.

Ist hingegen bei übrigens gleichen Umständen eine Mauer doppelt so dick als eine andere, so ist ihre Stabilität viermal so groß.

Die Dicke einer Mauer, welche bei übrigens gleichen Abmessungen doppelt so viel Stabilität als eine andere erhalten soll, müßte sich zur Dicke dieser Mauer wie $\sqrt{2} : 1$ oder nahe wie $1 : \frac{5}{7}$ verhalten. Eine doppelt so stabile Mauer darf also nur um $\frac{2}{7}$ dicker als eine andere von übrigens gleichen Abmessungen seyn.

§. 163.

Die Stabilität einer gleichdicken Mauer läßt sich ohne Vermehrung ihrer Masse dadurch vergrößern, daß man ihre Dicke vermindert, und dafür Strebepfeiler (Contreforts) anbringt; auch läßt sich leicht einsehn, daß die Stabilität einer solchen Mauer nach der Seite, wo keine Strebepfeiler sind, kleiner ist, als auf der entgegengesetzten.

Es sei bei einer senkrechten Mauer mit Strebepfeilern Taf. IV. Fig. 87.

$d = EH$, Figur 87., die Dicke der Mauer, und

$b = EF$ die Entfernung zweier Pfeiler von einander oder die Länge der Zwischenmauer;

$\delta = CD$ die Dicke der Mauer und des Pfeilers, und

$\beta = CK$ die Breite des Pfeilers nach der Länge der Mauer gemessen.

Ist nun H die Höhe der Mauer, so ist die Stabilität eines Strebepfeilers nach der Seite A

$$= \frac{\frac{1}{2}\delta}{\frac{1}{2}H} \cdot \beta\delta H \cdot G = G \cdot \beta\delta^2$$

und von einer Zwischenmauer

$$= \frac{\frac{1}{2}d}{\frac{1}{2}H} \cdot bdH \cdot G = G \cdot bd^2.$$

Bezeichnet nun S' die Stabilität nach der Seite A für einen Strebepfeiler und die dazu gehörige Zwischenmauer, so ist

$$S' = G\,(\beta\delta^2 + bd^2).$$

Auf ähnliche Art findet man die Stabilität S'' nach der Seite B, auf welcher die Strebepfeiler liegen

$$S'' = G\,(\beta\delta^2 + 2bd\delta - bd^2)$$

Stehn die Pfeiler auf beiden Seiten der Mauer gleich weit über, so ist ihre Stabilität S''' auf beiden Seiten gleich groß, und man erhält

$$S''' = G\,(\beta \delta^2 + b d \delta).$$

Für $\beta = d$; $\delta = 3d$ und $b = 6d$ erhält man

$$S' : S'' : S''' = 5 : 13 : 9.$$

Hieraus lassen sich leicht die nöthigen Folgen ziehen, wenn es darauf ankommt, die größere Stabilität einer Mauer nach der Seite ihrer Strebepfeiler zu übersehen. Es muß aber hiebei nicht vergessen werden, daß ein fester Boden vorausgesetzt wird, und daß zur Erlangung eines festen Verbandes unter den Mauersteinen die Verminderung der Mauerdicke und der Pfeilerdicke nur bis auf eine gewisse Grenze statthaft ist.

Für die Stabilität S einer senkrechten gleich dicken Mauer, deren Dicke und Höhe D, H ist, wenn ihre Länge $L = \beta + b$ angenommen wird, erhält man §. 162.

$$S = G\,.\,(\beta + b)\,D^2.$$

Soll diese Mauer einerlei Inhalt mit derjenigen haben, welche mit Strebepfeilern versehn ist, so wird erfordert, daß $(\beta + b)\,D = \beta\delta + b d$ sei.

Dies giebt

$$S = G\,\frac{(\beta\delta + b d)^2}{\beta + b}$$

also verhält sich, wenn, wie vorhin, S' die Stabilität der mit Strebepfeilern versehenen Mauer nach der den Strebepfeilern entgegengesetzten Seite bezeichnet

$$S : S' = (\beta\delta + b d)^2 : (\beta + b)\,(\beta\delta^2 + b d^2)$$

Für $\beta = d$; $\delta = 3d$ und $b = 6d$ erhält man

$$S : S' = 27 : 35.$$

In dem angenommenen Falle wird also die Stabilität der Mauer mit Strebepfeilern, ohne Vermehrung ihrer Masse, beinahe um $\frac{1}{3}$ größer, und sie würde noch größer werden, wenn man die Strebepfeiler auf beiden Seiten der Mauer gleich weit hervortreten ließe.

§. 164.

Will man zur Ersparung der Materialien eine Mauer mit Strebepfeilern anlegen, welche auf beiden Seiten derselben gleich weit hervorstehn, und mit einer eben so langen und hohen senkrechten Mauer, von gleicher Dicke D, einerlei Stabilität haben soll, und man setzt, daß nach den Bezeichnungen des vorigen §. $\beta = d$, $\delta = 3d$ und $b = 6d$ ist, so wird

$$S = 7d \,.\, D^2 \,.\, G$$
$$S''' = 27d^3 \,.\, G.$$

Nun ist $S = S'''$ also $7D^2 = 27d^2$ folglich

$$d = D\sqrt{\frac{7}{27}}, \text{ oder beinahe } = \tfrac{1}{2}D.$$

Der horizontale Querschnitt der gleichdicken Mauer ist

$$D\,(\beta + \beta) = 14 \,.\, d^2$$

und von der Mauer mit Strebepfeilern

$$\delta\beta + db = 9d^2$$

daher werden bei gleicher Stabilität für die Mauer mit Strebepfeilern beinahe $\frac{5}{14}$ der Materialien erspart.

§. 165.

Aufgabe. Die Stabilität einer graden Mauer zu finden, deren Querschnitt, senkrecht auf ihre Länge, ein Trapez IKLM, Figur 88., bildet, dessen Schwer- Taf. IV. Fig. 88.

punkt G senkrecht über die Mitte der Grundlinie KL fällt.

Auflösung. Es sei

S' die Stabilität dieser Mauer

L, H ihre Länge und Höhe

die obere Breite IM = b, die untere KL = B,

G das spezifische, und P das absolute Gewicht, so ist §. 161.

$$S' = \frac{FL}{FG} \cdot P.$$

Aber $FL = \frac{1}{2}B$;

$$P = \frac{1}{2}(b + B)\, H . L . G \text{ (§. 74.) und}$$

$$FG = \frac{H\,(2b + B)}{3\,(b + B)} \text{. (§. 104.).}$$

Setzt man diese drei Werthe in die zuerst gefundene Gleichung, so erhält man für die Stabilität der trapezförmigen Mauer

$$S' = \frac{3\,B\,(b + B)^2}{4\,(2b + B)} \,.\, L \,.\, G$$

woraus folgt, daß bei Mauern von verschiedener Höhe, deren Querschnitte Trapezien sind, die Stabilitäten einerlei bleiben, wenn nur die übrigen Abmessungen überein stimmen.

Weil für senkrechte Mauern von gleicher Dicke §. 162.

$$S = G . L . D^2$$

ist, so erhält man unter der Voraussetzung, daß die gleich dicke Mauer mit der trapezförmigen einerlei Länge, Inhalt und Gewicht habe, also $b + B = 2D$ sei,

$$S : S' = 2b + B : 3B, \text{ also}$$

$$S' = \frac{3B}{2b + B} \cdot S$$

Für $b = \frac{1}{4}B$ wird $S' = 2 . S$, oder die Stabilität einer trapezförmigen Wand, deren obere Dicke den vierten Theil von der untern beträgt, ist doppelt so groß als die Stabilität einer gleich dicken senkrechten Wand, welche mit der trapezförmigen gleiche Länge und Höhe, und gleichen Inhalt hat.

Will man also das Profil einer gleichdicken senkrechten Wand in ein trapezförmiges verwandeln, welches doppelt so viel Stabilität und gleichen Inhalt hat, so nehme man $\frac{2}{5}$ von der Breite des rechtwinklichten Profils zur obern, und $\frac{8}{5}$ von dieser Breite zur untern Breite des trapezförmigen Profils an.

§. 166.

Durch die Plinte erhalten Mauern ebenfalls eine Verstärkung in Absicht ihrer Stabilität, weil dadurch die Grundfläche breiter und der Abstand des Schwerpunkts von derselben geringer wird. Wäre L die ganze Länge einer senkrechten Mauer; h die Plintenhöhe, und D' die Dicke der Plinte; $n h$ die Mauerhöhe auf der Plinte und d ihre Dicke; wenn ferner der Schwerpunkt von der Mauer und Plinte in einerlei Loth fallen, so ist der Abstand des gemeinschaftlichen Schwerpunkts der Mauer und Plinte von der Grundfläche

$$= \frac{h D' + (2 + n) n d h}{2 (D' + n d)}$$

hieraus findet man die Stabilität S' für die Mauer mit Plinte §. 161.

$$S' = \frac{D' (D' + n d)^2}{D' + n (2 + n) d} . L . G$$

und wenn man annimmt, daß die Plintenhöhe den vierten Theil der gesammten Mauerhöhe beträgt, und die Plinte um $\frac{1}{4}$ dicker als die darauf gesetzte Mauer sei, so wird $n = 3$ und $D' = \frac{5}{4} d$, also

$$S' = \frac{289}{208} d^2 . L . G$$

Eine gleich dicke Mauer ohne Plinte, welche mit der obigen gleiche Länge L und Höhe $(n + 1) h$ hat, wird, wenn D die durchweg gleiche Dicke der Mauer ist, mit der obigen gleichen Inhalt haben, wenn der Inhalt ihres Querschnitts $(n + 1) h D$ dem Inhalte $n h d + h D'$ der Mauer mit Plinthe gleich ist. Hieraus findet man

$$D = \frac{D' + n d}{n + 1}$$

und wenn S die Stabilität der Mauer ohne Plinte ist, §. 163.

$$S = \frac{(D' + n d)^2}{(n + 1)^2} . L . G.$$

Es verhält sich daher

$$S : S' = D' + n (2 + n) d : (n + 1)^2 D'$$

oder, wenn $n = 3$ und $D' = \frac{5}{4} d$ gesetzt wird,

$$S : S' = 13 : 16$$

Durch die angebrachte Plinte wird daher die Stabilität der Mauer um $\frac{3}{13}$ vergrößert, ohne ihren Inhalt zu vermehren.

§. 167.

Soll zur Ersparung der Materialien eine Mauer mit Plinte, mit einer durchweg gleich dicken Mauer einerlei Stabilität haben, so ist mit Beibehaltung der Bezeichnungen im vorigen §. die Stabilität der Mauer ohne Plinte $\quad S = D^2 . L . G;$

soll nun $S = S'$ seyn, so wird erfordert, daß
$D^2 = \frac{D'(D' + nd)^2}{D' + n(2 + n)d}$ ist. Für $n = 3$ und $D' = \frac{5}{4}d$
wird $D^2 = \frac{289}{208} d^2$, also

$$D = d\sqrt{\frac{289}{208}}.$$

Dies giebt den Inhalt des Querschnitts von der gleich dicken Mauer

$$= (n + 1) hd \sqrt{\frac{289}{208}} = 4hd\sqrt{\frac{289}{208}}, \text{ beinahe} = 4\tfrac{7}{9}.hd$$

und den Querschnitt der Mauer mit der Plinte

$$= nhd + hD' = \frac{17}{4} hd,$$

es werden daher bei gleicher Stabilität für die Mauer mit und ohne Plinte, bei der erstern nahe $\frac{2}{17}$ weniger Materialien erfordert.

§. 168.

Ein senkrecht stehender Pfeiler, dessen horizontaler Querschnitt ein Quadrat von der Seite D ist, hat bei einer Höhe H eine Stabilität (§. 162.)

$$S = G \,.\, D^3.$$

Ein Cylinder, dessen Materie und Grundfläche mit der des Pfeilers einerlei ist, habe R zum Halbmesser der Grundfläche, so ist seine Stabilität

$$S' = 2\pi R^3 \,.\, G.$$

Aber weil $D^2 = \pi R^2$, so ist $R = \frac{D}{\sqrt{\pi}}$, daher für diesen Fall

$$S' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} D^3 \,.\, G.$$

Es verhält sich also die Stabilität eines Pfeilers, dessen Grundfläche ein Quadrat bildet, zur Stabilität eines Cylinders von gleicher Grundfläche wie

$$S : S' = 1 : \frac{2}{\sqrt{\pi}} \text{ oder beinahe } = 39 : 44.$$

§. 169.

Bei einer Kugel fällt das Loth aus dem Schwerpunkte mit dem Umdrehungspunkte zusammen, daher ist der Abstand dieses Loths vom Umdrehungspunkte $= 0$, und die Kugel hat keine Stabilität (§. 160), weshalb solche auf einem horizontalen Boden zwar in Ruhe bleibt, aber durch die geringste Kraft in Bewegung gesetzt wird.

Sechstes Kapitel.

Von der Rolle, dem materiellen Hebel und der Wage.

I. Von der Rolle.

§. 170.

Zu den einfachsten Mitteln, um eine Kraft oder ein Gewicht nach jeder beliebigen Richtung wirken zu lassen, gehört die Rolle (Trochlea. *Poulie*), welche hier als feste kreisförmige Scheibe angesehen wird, um deren Umfang ein Faden gelegt, und welche in ihrem Mittelpunkte um eine auf der Ebene der Rolle senkrechte Axe frei bewegt werden kann. Der Faden wird als unausdehnbar, aber vollkommen biegsam vorausgesetzt.

Um die Rolle BKD, Figur 89., deren Axe in C liegt, sei ein Faden ABDE gelegt, und in A eine Kraft P, in B eine Kraft Q, beide nach beliebigen Richtungen BA, DE angebracht, so kann nur zwischen beiden Kräften ein Gleichgewicht entstehn, wenn $P = Q$ ist. Denn, wenn die Halbmesser CB, CD auf die Richtungen BA, DE senkrecht gezogen werden, so ist §. 48. $BC \cdot P = CD \cdot Q$; aber $BC = CD$, daher $P = Q$. Taf. IV. Fig. 89.

Weil dies nun von jeder andern Richtung eben so gilt, so kann man mit Hülfe der Rollen die Richtungen der Kräfte nach Belieben ändern. Die Kraft P, welche den Faden AB nach der Richtung BA auszudehnen strebt, heißt die Spannung (*Tension*) des Fadens. Sie muß in allen Theilen des Fadens ABDE gleich groß seyn, weil sonst kein Gleichgewicht bestehen kann.

Bei den Rollen, wo die Axe kein mathematischer Punkt ist, kann die Umdrehung um dieselbe durch eine zweifache Vorrichtung bewerkstelligt werden. Entweder ist die Rolle in der Mitte durchbohrt, und wird um einen Bolzen (*Goujon*) bewegt, welcher sich nicht mit umdreht, oder in der Mitte der Rolle sind Zapfen (*Tourillon*) befestigt, welche sich mit der Rolle umdrehen. Damit der Faden von der Rolle nicht abgleite, wird am Umfange derselben eine Rinne (*Gorge*) eingeschnitten.

§. 171.

Dreht sich eine Rolle um ihre Axe, und man kann die Axe als unbeweglich ansehen, so heißt sie eine feste Rolle (*Poulie immobile*), oder, wenn die Axe selbst beweglich ist, wie Figur 90., wo das eine Ende des Fadens in A befestigt ist, und am andern Ende V die Rolle B nebst der Fig. 90.

Last W aufwärts gezogen wird, eine bewegliche Rolle (*Poulie mobile*).

Die bewegliche Rolle erfordert jedesmal ein Gehäuse oder eine Hülse (*Chape*) CD, theils um in derselben den Zapfen oder Bolzen der Rolle anzubringen, theils um die Last mittelst eines Hakens an der Hülse zu befestigen. Dagegen kann die feste Rolle auch ohne Hülse angewandt werden.

Sind die Richtungen der Seile AB und DV vertikal aufwärts, und die Last W vertikal abwärts gerichtet, so haben beide Seile die ganze Last W zu tragen. Weil aber der Abstand beider Seile vom Mittelpunkte C gleich groß ist, so trägt jedes Seil gleich viel; daher ist die Kraft V halb so groß, als die Last oder

$$V = \tfrac{1}{2} W.$$

Unter der Last W wird hier das Gewicht der Rolle und der daran befindlichen Last verstanden, das Gewicht des Seils aber bei Seite gesetzt.

§. 172.

Die Größe und Richtung des Drucks auf den Zapfen
Taf. IV. Fig. 89. der Rolle läßt sich finden, wenn der Winkel BLD, Figur 89., welchen die verlängerten Richtungen der gleichen Kräfte P, Q einschließen, gegeben ist.

Man setze BLD $= \alpha$, so ist §. 58. LC die Richtung des Drucks auf den Zapfen, und wenn dieser Druck $= R$ gesetzt wird, so erhält man §. 21. II., weil der Winkel BLC $=$ CLD ist, den Druck auf den Zapfen oder

$$R = 2P \cos \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Sind beide Richtungen der Kräfte parallel, so wird $\alpha = 0$, also $\cos \tfrac{1}{2}\alpha = 1$, daher $R = 2P$, wie §. 41.

II. Vom materiellen Hebel.

§. 173.

Im zweiten Kapitel hat man den Hebel als eine feste gewichtlose Stange ohne Dicke vorausgesetzt, welcher auch ein mathematischer Hebel genannt wird, um ihn vom physischen oder materiellen Hebel zu unterscheiden, der durch jede Stange, sofern sie nicht durch die angebrachten Kräfte gebogen wird, vorgestellt werden kann, und bei welchem zugleich auf sein Gewicht Rücksicht genommen werden muß. Alle Sätze, welche vom mathematischen Hebel erwiesen sind, lassen sich sehr leicht auf den materiellen anwenden, weil es alsdann lediglich nur noch darauf ankommt, das Gewicht desselben in Rechnung zu bringen. Nun ist bekannt, daß man sich das Gewicht eines jeden Körpers in seinem Schwerpunkte vereinigt vorstellen kann, und da sich dieser für jeden materiellen Hebel angeben läßt, so darf man denselben nur eben so wie einen mathematischen behandeln, außer daß man im Schwerpunkte desselben noch eine nach vertikaler Richtung wirkende Kraft annimmt, welche dem Gewichte des materiellen Hebels gleich ist.

§. 174.

Aufgabe. Der materielle Hebel AB, Figur 91., ist in A und B mit den Gewichten P und Q belastet; sein Schwerpunkt liegt in G, und sein Gewicht ist = M; man sucht die Entfernung AC für den Unterstützungspunkt C. Taf. IV. Fig. 91.

Auflösung. Weil der materielle Hebel AB eben so auf die Umdrehung wirkt, als wenn in G ein Gewicht M angebracht wäre, so erhält man die Summe der Momente vom Punkte $A = AG \cdot M + AB \cdot Q$, daher ist §. 45. der Abstand des Unterstützungspunkts oder

$$AC = \frac{AG \cdot M + AB \cdot Q}{P + Q + M}.$$

Beispiel. Die Last P sei 200 und Q = 300 Pfund, ferner wiege die Stange AB 100 Pfund, so ist M = 100. Nun sei AB = 8 und AG = 4 Fuß, so findet man den Abstand

$$AC = \frac{4 \cdot 100 + 8 \cdot 300}{200 + 300 + 100} = 4\tfrac{2}{3} \text{ Fuß.}$$

§. 175.

Taf. IV. Fig. 92. Aufgabe. Ein materieller Hebel AB, Figur 92., ist in den Punkten D, E unterstützt, und in den Punkten F, H, B mit den Gewichten P, Q, R belastet, sein Schwerpunkt liegt in G, und sein Gewicht ist = M; man sucht den Druck auf die Stützen D, E.

Auflösung. Der Druck auf D sei V, und auf E = W, so erhält man für das Gleichgewicht, wenn die Momente von E gerechnet werden (§. 44.)

$$EB \cdot R = EH \cdot Q + EG \cdot M + EF \cdot P - ED \cdot V$$

folglich den Druck auf D

$$V = \frac{EF.P + EH.Q + EG.M - EB.R}{ED};$$

und wenn man die Momente von D rechnet, so ist §. 44.

$$DE.W = DF.P + DG.M + DH.Q + DB.R$$

also der Druck auf E, oder

$$W = \frac{DF.P + DH.Q + DB.R + DG.M}{DE}.$$

Auch

Auch muß nach §. 43.

$$V + W = P + Q + R + M$$

seyn; wenn daher V gefunden ist, so kann daraus W leicht berechnet werden.

Beispiel. Es sei $EF = 10$, $EH = 4$, $EG = 6$, $EB = 3$, $ED = 13$ Fuß und $P = 400$, $Q = 200$, $R = 300$ und $M = 150$ Pfund, so ist der Druck auf D

$$V = \frac{10 \cdot 400 + 4 \cdot 200 + 6 \cdot 150 - 3 \cdot 300}{13} = 369\tfrac{3}{13} \text{ Pfund,}$$

und man findet, weil nach den gegebenen Abmessungen $DF = 3$, $DH = 9$, $DB = 16$ und $DG = 7$ Fuß ist, den Druck auf E oder

$$W = \frac{3 \cdot 400 + 9 \cdot 200 + 16 \cdot 300 + 7 \cdot 150}{13} = 680\tfrac{10}{13} \text{ Pfund.}$$

Alsdann ist $V + W = 369\tfrac{3}{13} + 680\tfrac{10}{13} = 1050$ Pfund, wie erfordert wird.

Fände man $V = 0$, so zeigt dies an, daß in D keine Stütze erforderlich ist, und daß sich die Gewichte P, Q, R, M auf der einzigen Stütze bei E im Gleichgewicht halten. Erhält V einen negativen Werth, so muß die Stütze bei D oberhalb und nicht unterhalb angebracht werden, weil sonst kein Gleichgewicht statt finden kann, und der Hebel sich um den Punkt D drehen wird, nach der Seite wo R hängt.

§. 176.

Aufgabe. An einem materiellen Hebel AC, Figur 93., welcher in C unterstützt ist, soll in der Entfernung $CB = a$ eine Last Q auf den Hebel senkrecht angebracht seyn; wie lang wird der Hebel seyn müssen, damit am Ende desselben eine auf denselben senkrechte Kraft P mit der Last Q und dem Gewicht des Hebels im Gleichgewichte ist. Taf. IV. Fig. 93.

Auflösung. Man setze die ganze Länge des Hebels oder $CA = x$, und jeder Fuß dieser Länge wiege G Pfund, so ist das Gewicht des Hebels $= Gx$, welches in der Entfernung $CG = \frac{1}{2}x$ wirkt. Für das Gleichgewicht erhält man §. 46.

$$aQ + \tfrac{1}{2}x . G . x = xP$$

und hieraus

$$x^2 - \frac{2P}{G}x + \frac{2aQ}{G} = 0$$

folglich die gesuchte Länge

$$x = \frac{P \pm \sqrt{(P^2 - 2aGQ)}}{G}.$$

Weil hier beide Zeichen vor der Wurzel gelten, so giebt es zwei Fälle, bei welchen ein Gleichgewicht statt finden kann, wenn nur $2aGQ$ nicht größer als P^2 wird, weil sonst ein unmöglicher Werth für x entsteht, und keine Auflösung möglich oder der gegebene Fall unstatthaft ist.

Beispiel. Die Kraft P sei 80, und die Last $Q = 100$ Pfund. Jeder Fuß von der Länge des Hebels wiege 8 Pfund, und die gegebene Entfernung $CB = a$ sei 3 Fuß, so ist hier $G = 8$, also die gesuchte Länge

$$x = \frac{80 \pm \sqrt{(6400 - 4800)}}{8} = \begin{cases} 5 \text{ Fuß.} \\ 15 \text{ ,,} \end{cases}$$

Man kann also den materiellen Hebel 5 oder 15 Fuß lang annehmen, so wird in beiden Fällen unter den gegebenen Gewichten ein Gleichgewicht entstehen. Im ersten Falle für $x = 5$ ist

$$3 . 100 + \tfrac{1}{2} . 5 . 40 = 5 . 80$$

und im zweiten Falle für $x = 15$ ist

$$3 . 100 + \tfrac{1}{2} . 15 . 120 = 15 . 80$$

wie erfordert wird.

* Zusatz. Aus der zuerst gefundenen Gleichung erhält man die Kraft, welche mit der Last Q und dem Gewichte des Hebels im Gleichgewichte ist, oder

$$P = \frac{aQ + \frac{1}{2}x^2 G}{x}.$$

Wären a, Q und G gegeben, und man sucht die Länge x des Hebels, welche die kleinste Kraft P zur Erhaltung des Gleichgewichts erfordert, so findet man für diesen Fall die Länge

$$x = \sqrt{\left(\frac{2aQ}{G}\right)}$$

und die kleinste Kraft

$$P = \sqrt{(2aGQ)}$$

Denn es ist

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\frac{1}{2}Gx^2 - aQ}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{2aQ}{x^3}.$$

Für $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ erhält man $\frac{1}{2} G x^2 = aQ$, also $x = \sqrt{\left(\frac{2aQ}{G}\right)}$, und weil dieser Ausdruck statt x in $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$ einen positiven Werth giebt, so erhält man für P ein Kleinstes, wenn $x = \sqrt{\frac{2aQ}{G}}$ gesetzt wird. Alsdann ist $P = \sqrt{(2aGQ)}$.

Beispiel. Für a = 3 Fuß; G = 8 und Q = 100 Pfund erhält man die Länge

$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot 3 \cdot 100}{8}} = 8{,}66025 \text{ Fuß}$$

und die kleinste Kraft

$$P = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 100} = 69{,}282 \text{ Pfund.}$$

Für $x = 8$ wird

$$P = \frac{3 \cdot 100 + \frac{1}{2} \cdot 64 \cdot 8}{8} = 69{,}5 \text{ Pfund}$$

und für $x = 9$ ist

$$P = \frac{3 \cdot 100 + \frac{1}{2} \cdot 81 \cdot 8}{9} = 69{,}333 \text{ Pfund.}$$

III. Von der Wage.

§. 177.

Die Wage (Libra. *Balance*) ist eine besondere Anordnung des Hebels, welche dazu dient, das Gewicht eines Körpers mittelst eines Gegengewichts (*Contre-poids*) mit hinlänglicher Genauigkeit zu finden. Man hat vorzüglich zweierlei Arten von Wagen, gleicharmige oder gemeine, und Schnellwagen (Statera Romana. *Peson*). Bei der gleicharmigen sind die Anhängepunkte für die Last und das Gegengewicht gleich weit vom Drehpunkt entfernt. Bei den Schnellwagen sind diese Entfernungen veränderlich. Kann man den Anhängepunkt für das Gegengewicht verschieben, so entsteht eine römische Wage, wenn aber der Drehpunkt verschoben werden kann, eine schwedische.

Die Gestalt der gemeinen Wage kann als hinlänglich bekannt vorausgesetzt werden. Man unterscheidet bei ihr den Wagebalken (Jugum. *Fléau*), an dessen Enden die Wageschaalen hängen, die Zunge (Lingula, Examen. *Aiguille*), welche rechtwinklicht auf dem Wagebalken steht, und die in der Mitte des Wagebalkens befindliche Zapfen, welche in den Pfannen der Scheere (Agina. *Chasse*) ruhen. Gleiche Gewichte in beide Wageschaalen (Lances. *Bassins*) gelegt müssen veranlassen, daß die Zunge mit den Armen der Scheere in einerlei Vertikalebene fällt, oder welches einerlei ist, daß der Wagebalken horizontal oder wagerecht liegt. Ein kleiner Ueberschuß an Gewicht noch in eine Wageschaale gelegt, muß einen Ausschlag geben oder veranlassen, daß der Balken eine schiefe Lage annimmt. Alsdann bildet die Zunge EC, Figur 94, mit der vertikalen Scheere einen Winkel ECD, welcher desto größer werden muß, je größer der Ausschlag ist, daher man auch diesen Winkel selbst den Ausschlag nennt. Eine Wage ist empfindlicher als eine andere, wenn sie bei gleicher Belastung P, P, und gleichem Uebergewichte R einen größern Ausschlag giebt. Taf. IV. Fig. 94.

Zieht man durch die beiden Anhängepunkte A und B des Wagebalkens eine grade Linie AB, so bezeichnet diese den Hebel, an welchem die Gewichte wirken. Derjenige Punkt C, wo der Zapfen des Wagebalkens mit seiner untern wenig abgerundeten Schärfe in den Pfannen der Scheere ruht, heißt der Drehpunkt der Wage. Die Lage dieses Drehpunkts gegen den Hebel AB hat einen wesentlichen Einfluß auf die Empfindlichkeit der Wage. Vorausgesetzt, daß der Schwerpunkt des Wagebalkens und der Wageschalen in der Mitte des Hebels AB liege, und daß die Reibung gänzlich wegfalle, so wird, wenn der Drehpunkt in den Schwerpunkt fällt, die Wage bei gleicher Belastung in allen Lagen im Gleichgewichte bleiben (§. 57.). Liegt der Drehpunkt C, Figur 95., unter dem Schwerpunkte G, so muß bei gleicher Belastung der horizontale Wagebalken AB bei der mindesten Erschütterung umschlagen, weil in der schiefen Lage A'B' Fig. 95.

das in A′ aufgehängte Gewicht P′ ein größeres Moment hat, als das in B′ aufgehängte Gewicht P′, weshalb der ununterstützte Schwerpunkt G′ so lange sinken wird, bis er seinen tiefsten Stand erreicht hat.

Taf. IV. Fig. 96. Liegt hingegen der Drehpunkt C, Figur 96., über dem Schwerpunkt G, so kann bei gleicher Belastung die Wage nur in Ruhe bleiben, wenn der Wagebalken horizontal ist. Denn in diesem Falle sind nicht nur die Momente einander gleich, sondern der Schwerpunkt G hat auch seinen tiefsten Stand erreicht.

§. 178.

Zur nähern Beurtheilung der gleicharmigen Wage unterscheide man den Punkt G, Figur 96., welcher in die Mitte zwischen beide Anhängepunkte fällt, von dem Schwerpunkte des Wagebalkens, welcher sich über oder unter G in der nöthigenfalls verlängerten Linie CG, etwa in g befinden kann. Um Verwechselungen zu vermeiden, nenne man G den Mittelpunkt des Wagebalkens, und setze den Abstand der Anhängepunkte von diesem Mittelpunkte oder AG = BG = a. Ferner sei CG = b, Cg = c; M das Gewicht einer jeden Wageschaale, N das Gewicht des Wagebalkens, und in jede Schaale sei gleiches Gewicht P gelegt, außerdem aber noch bei B eine Ueberwucht R, so muß die Wage in irgend einer Lage im Gleichgewichte seyn.

a b c M N P R

Fig. 97. Diese Lage werde durch Figur 97. dargestellt, und man ziehe durch C, G, g die Vertikalen CD, GK, gL, und durch B und G die Horizontalen BL und GE, so sind die Winkel GCF, DBF und AGE einander gleich. Setzt man den Winkel, welchen die Zunge mit

der Vertikale bildet, oder den Ausschlag $= \varphi$, so ist $GCF = \varphi$. Für das Gleichgewicht müssen nun die Momente einander gleich seyn, wenn CD als Momentenaxe angenommen wird, daher

$$EH.(P+M) + gI.N = BD(P+M+R)$$

Es ist $EH = EG + GH$ und $BD = BK - GH$; aber $EG = BK = a\cos\varphi$; $GH = b\sin\varphi$ und $gI = c\sin\varphi$ daher

$EH = a\cos\varphi + b\sin\varphi$ und $BD = a\cos\varphi - b\sin\varphi$ also

$$(a\cos\varphi + b\sin\varphi)(P+M) + c.N\sin\varphi$$
$$= (a\cos\varphi - b\sin\varphi)(P+M+R)$$

oder wenn man die ganze Gleichung durch $\cos\varphi$ dividirt, und alsdann $\operatorname{tgt}\varphi$ entwickelt, so erhält man die Tangente des Ausschlags oder

$$\operatorname{tgt}\varphi = \frac{aR}{b(2P+2M+R)+c.N}.$$

Je größer nun unter übrigens gleichen Umständen $\operatorname{tgt}\varphi$ wird, desto größer ist der Ausschlag, daher kann man aus dem gefundenen Ausdrucke leicht beurtheilen, für welche Fälle ein größerer Ausschlag zu erwarten ist.

Weil $\operatorname{tgt}\varphi$ unter übrigens gleichen Umständen (wie hier immer vorausgesetzt wird) mit a wächst, so folgt daraus, daß die Wage einen desto größern Ausschlag geben wird, je länger der Wagebalken ist.

Je kleiner b ist, desto größer wird $\operatorname{tgt}\varphi$, daher wird der Ausschlag desto größer, je geringer die Entfernung des Drehpunkts vom Mittelpunkte des Wagebalkens ist.

Mit der Verminderung von c, N, M, P wächst ebenfalls tgt φ, daher wird der Ausschlag desto größer, je kleiner der Abstand des Drehpunkts vom Schwerpunkte des Wagebalkens, und je kleiner das Gewicht des Wagebalkens, der Wageschaalen und der Belastung in den Wageschaalen ist.

Weil $\frac{R}{b(2P+2M+R)+cN} = \frac{1}{b} - \frac{b(2P+2M)+cN}{b(2P+2M+R)+cN}$ ist, so folgt hieraus, daß der Ausschlag desto größer werden muß, je größer das Uebergewicht R ist.

Uebrigens ist für $R = 0$ auch $\varphi = 0$, wie erfordert wird.

§. 179.

Zusatz. Verlangt man, daß eine fertige gleicharmige Wage ohne wesentliche Veränderungen, besonders bei kleinen Lasten einen größern Ausschlag geben soll, so kann dies am leichtesten durch Veränderung des Werths c bewirkt werden. Für $c = 0$ fällt der Schwerpunkt des Balkens in den Drehpunkt, und wenn dieser Schwerpunkt über den Drehpunkt fällt, so wird c negativ, und der Ausschlag kann dadurch, so weit man will, vergrößert werden. Zur Erreichung dieses Zwecks darf man nur an der Zunge ein kleines Gewicht anbringen, welches sich mittelst eines Schraubengewindes nach Belieben auf- oder abwärts schieben läßt, so erhält man hiedurch ein Mittel, durch welches bei kleinen Lasten der Ausschlag bedeutend vermehrt werden kann.

Es ist aber hiebei zu bemerken, daß $-c$ eine gewisse Grenze nicht übersteigen darf, wenn die Wage noch brauchbar bleiben soll. Denn hätte man den Schwerpunkt des Wagebalkens so weit aufwärts gebracht, daß $b(2P + 2M) - c.N = 0$ ist, so wäre

$$\text{tgt}\,\varphi = \frac{a\,.\,R}{b\,.\,R} = \frac{a}{b}$$

und man würde alsdann bei großen und kleinen Uebergewichten immer denselben Ausschlag erhalten.

§. 180.

Befinden sich in den Wageschaalen gleiche Lasten, so kommt die Wage nur dann in Ruhe, wenn die Zunge einspielt, oder wenn der Balken eine horizontale Lage annimmt. Man sagt alsdann, die Wage ist desto rascher, je größer ihr Bestreben ist, in die horizontale Lage zu kommen. Es sei daher W die Kraft, welche im Punkte B, Figur 97., nach der auf BC senkrechten Richtung BW erfordert wird, die Wage in der Lage zu erhalten, wenn der Ausschlag $= \varphi$ und die übrige Bezeichnung wie §. 178. ist. Alsdann läßt sich die Kraft W nach den Richtungen BC und BP in zwei andere Kräfte zerlegen, wovon die erste durch den festen Punkt bei C aufgehoben wird, die letzte aber, wenn solche $= R$ gesetzt wird, eben die Wirkung wie W verursachen muß. Nun ist, wenn der Winkel $CBG = \psi$ gesetzt wird, Taf. IV. Fig. 97.

$$CBP = \varphi + \psi + 90°,$$

daher §. 19. III.

$$R = W\,\frac{\sin CBW}{\sin CBP} = W\,\frac{\sin 90°}{\sin(\varphi + \psi + 90°)} = \frac{W}{\cos(\varphi + \psi)}$$

Aber $\cos(\varphi + \psi) = \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi$;

$BC = \sqrt{(a^2 + b^2)}$;

$\cos\psi = \frac{BG}{BC} = \frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$ und $\sin\psi = \frac{CG}{BC} = \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$

daher

$$\cos(\varphi + \psi) = \frac{a \cos \varphi - b \sin \varphi}{\sqrt{(a^2 + b^2)}},$$

und, wenn dieser Werth in die zuerst gefundene Gleichung gesetzt wird,

$$R = \frac{W \sqrt{(a^2 + b^2)}}{a \cos \varphi - b \sin \varphi}.$$

Nach §. 178 ist aber für das Gleichgewicht

$$(a \cos \varphi + b \sin \varphi)(P + M) + c N \sin \varphi$$
$$= (a \cos \varphi - b \sin \varphi)(P + M + R)$$ oder
$$(a \cos \varphi - b \sin \varphi) R = 2b (P + M) \sin \varphi + c N \sin \varphi,$$

und man findet, wenn statt R der oben gefundene Werth gesetzt wird, so die Kraft, welche nach der Richtung
Taf. IV. BW erforderlich ist, die Wage in der Lage Figur 97. zu
Fig. 97. erhalten, oder

$$W = \frac{[2b (P + M) + c N] \sin \varphi}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}.$$

Je größer diese Kraft bei einerlei Winkel φ wird, desto größer ist das Bestreben der Wage, sich ins Gleichgewicht zu setzen. Man müßte daher die Abmessungen der Wage so einrichten, daß W möglichst groß wird. Weil dies aber nur durch ganz entgegengesetzte Regeln als die §. 178. erhalten wird, so folgt daraus, daß die Wage desto rascher wird, je kleiner ihr Ausschlag ist, und man kann daher nur einen dieser Zwecke auf Unkosten des andern erreichen.

§. 181.

Sind bei einer gemeinen Wage die Arme des Wagebalkens ungleich lang, und man will das Gewicht einer Last Q finden, so lege man in die Schale bei A, Fi-
Fig. 96. gur 96., die Last Q, und in die Schale bei B das erfor-

derliche Gegengewicht P. Nun lege man Q in die andere Schale bei B, und suche bei A das nöthige Gegengewicht P′, so findet man das wahre Gewicht

$$Q = \sqrt{P \cdot P'}.$$

Denn es sei $AG = x$, $GB = y$, so erhält man durch die erste Abwiegung

$$xQ = yP \text{ also } Q = \frac{y}{x} P.$$

Durch die zweite Abwiegung wird

$$xP' = yQ \text{ also } Q = \frac{x}{y} P', \text{ daher}$$

$$Q^2 = \frac{y}{x} \frac{x}{y} PP' = PP' \text{ also } Q = \sqrt{PP'}.$$

Ohne Ausziehung der Quadratwurzel erhält man das Gewicht der Last Q leichter, wenn man P mit Q ins Gleichgewicht bringt, alsdann Q wegnimmt, und in die Schale, worin Q gelegen hat, so viel Gewichte legt, bis solche mit P ins Gleichgewicht kommen, da denn die Summe der zuletzt eingebrachten Gewichte dem Gewichte von Q gleich ist.

§. 182.

Bei der gewöhnlichen oder römischen Schnellwage, wo mit einerlei Gegengewicht (*Contre-poids*) Lasten von verschiedener Größe gewogen werden, indem der Aufhängepunkt der Last und der Drehpunkt unverändert bleiben, kann man die Sätze von der gemeinen Wage mit den nöthigen Abänderungen ebenfalls anwenden, und danach die zweckmäßige Anordnung der Schnellwage beurtheilen.

Hat die Schnellwage eine solche Einrichtung, daß der Schwerpunkt des Wagebalkens mit der Wageschale zwigewicht so nahe wie möglich am Drehpunkte aufhängt, und so lange Gewichte in die Schaale legt, bis die Zunge bei einer ganzen Zahl von Pfunden einspielt. Die Zahl der Pfunde sei n, und für den zweiten Punkt am Ende des Wagebalkens = m. Zieht man nun n von m ab, so ist m — n die Anzahl der Theile, in welche die Weite zwischen beiden Punkten getheilt werden muß, um ganze Pfunde zu erhalten, wobei man ebenfalls die Einrichtung so treffen kann, daß m — n eine solche Zahl wird, welche sich leicht eintheilen läßt. Der Beweis für dieses Verfahren beruht mit dem zuerst erwähnten auf gleichen Gründen; nur ist noch zu bemerken, daß eben das, was hier von Pfunden gesagt ist, auch von Lothen rc. oder jeder andern Einheit gilt.

§. 183.

Zusatz. Will man mit einer Schnellwage noch größere Lasten wiegen, als das Gegengewicht gestattet, ohne dabei die vorhandene Eintheilung des Wagebalkens abzuändern, so kann dies durch Anbringung eines größern Gegengewichts bewirkt werden, indem man dasselbe so weit vermehrt, daß jede Abtheilung auf dem Wagebalken das doppelte oder vielfache bedeutet. Allein man darf nicht schließen, daß, wenn das Gegengewicht P verdoppelt wird, alsdann auch die Last Q unter übrigens gleichen Umständen für das Gleichgewicht doppelt so groß werden müsse, wovon man sich leicht überzeugen kann. Denn es sei mit Beibehaltung der angenommenen Bezeichnung P mit Q im Gleichgewicht, so ist $xP = gN + aQ$, daher das Gegengewicht

$$P = \frac{gN}{x} + \frac{aQ}{x}.$$

Soll nun bei unverändertem Abstande x die Last Q doppelt so groß werden, und man sucht das zugehörige Gegengewicht P', so wird

$$P' = \frac{gN}{x} + \frac{a \cdot 2Q}{x}, \text{ oder weil } \frac{aQ}{x} = P - \frac{GN}{x} \text{ ist,}$$

so erhält man das erforderliche Gegengewicht

$$P' = 2P - \frac{gN}{x}$$

wenn daher der Schwerpunkt des Balkens und der Schaale zwischen den Anhängepunkt der Schaale und den Drehpunkt fällt, so wird zur Abwiegung doppelt so großer Lasten, bei unveränderter Eintheilung des Balkens ein Gegengewicht erfordert, welches kleiner als das Doppelte desjenigen ist, welches zum Abwiegen der einfachen Lasten nöthig war. Da es nun überdies unbequem ist, große Gegengewichte auf dem Wagebalken zu bewegen, so kann man sich zur Abwiegung größerer Lasten der Vorhängegewichte bedienen, welche in dem vom Drehpunkte am weitesten entfernten Theilungspunkte aufgehängt werden.

Gesetzt, man verlange, daß eine Schnellwage außer der Last Q, welche ihr Gegengewicht P angiebt, auch zugleich jedesmal noch eine Last Q' wiege, so daß die gesammte Belastung in der Wageschaale $Q + Q'$ sei, so setze man das in der Entfernung b vom Drehpunkte nöthige Vorhängegewicht $= V$, so erfordert das Gleichgewicht, daß

$$bV + xP = gN + a(Q + Q')$$

sei. Es ist aber $xP = gN + aQ$, daher wenn man diesen Ausdruck von dem vorstehenden abzieht

$$bV = aQ' \text{ oder } V = \frac{aQ'}{b}.$$

Ist daher die beständige Last Q′ gegeben, so findet man leicht aus dieser und den bekannten Abständen a, b die Größe des Vorhängegewichts V.

Siebentes Kapitel.

Von der Reibung.

§. 184.

So wie man sich die Körper vollkommen fest vorstellen kann, eben so läßt sich voraussetzen, daß ein Körper vollkommen glatt sei, in welchem Falle jede Kraft, welche auf einen solchen auf einer wagerechten vollkommen glatten Fläche befindlichen Körper von der Seite wirkt, den Zustand der Ruhe oder das Gleichgewicht aufheben, und den Körper in Bewegung setzen kann, weil das Gewicht des Körpers von der wagerechten Ebene getragen wird. Ist hingegen die Oberfläche des Körpers und die Fläche, worauf er ruhet, rauh, oder mit kleinen Erhabenheiten versehen, so greifen diese wechselseitig in die Vertiefungen, und es kann schon eine ansehnliche Kraft erfordert werden, um das Gleichgewicht aufzuheben. Da nun die Oberflächen aller Körper, selbst bei der besten Politur, noch einige Unebenheit oder Rauhigkeit behalten, so verursacht dieser Umstand, daß, wenn eine Kraft mit mehrern andern Kräften im Gleichgewichte ist, und man vermehrt dieselbe noch um einen geringen Theil, alsdann in dem Falle noch keine Bewegung oder Aufhebung des Gleichgewichts erfolgt,

wenn

wenn die Rauhigkeit von den aneinander gepreßten Oberflächen der Bewegung oder Aufhebung des Gleichgewichts widersteht, und man ist genöthigt, zur Ueberwältigung dieses Widerstandes noch eine besondere Kraft zu verwenden, bevor der kleinste Ueberschuß an Kraft das Gleichgewicht aufheben kann. Dieser Widerstand, welcher von der Rauhigkeit der berührenden Flächen entsteht, heißt die Reibung oder Frikzion (Frictio. *Frottement*).

§. 185.

Auf der wagerechten Fläche AB, Figur 98., befinde sich ein Körper AD, dessen Gewicht P von der Fläche AB getragen wird. In E sei mit AB parallel nach der Richtung EH eine Kraft F angebracht, oder welches einerlei ist, am Faden EHF, welcher über die Rolle H geht, hänge ein Gewicht F in F, so wird die Reibung der berührenden Flächen bei AB die Bewegung des Körpers so lange aufhalten, bis das Gewicht F hinlänglich vermehrt worden, um den Reibungswiderstand zu überwältigen. Ist nun das Gewicht F von der Beschaffenheit, daß der geringste Ueberschuß an Kraft den Körper AD in Bewegung setzen kann, so ist F mit der Reibung im Gleichgewichte, und die Größe der Reibung wird durch das Gewicht F angegeben, daher man auch das Gewicht F die Größe der Reibung nennt. Taf. IV. Fig. 98.

Der Erfahrung gemäß ist die Größe der Reibung verschieden, wenn es darauf ankommt, den Körper in Bewegung zu setzen, oder nach einerlei Richtung in Bewegung zu erhalten, welches auch schon daraus geschlossen werden kann, daß bei der Bewegung die Hervorragungen der Flächen nicht so sehr in die Vertiefungen eindringen können, wie dies nach vorhergegangener Ruhe der Fall ist. Man unterscheidet daher die Reibung für die anfängliche Bewegung oder die Reibung der Ruhe von der Reibung während der Bewegung.

Im Anfange oder während der Bewegung kann ein Körper über den andern weggeschoben werden, wie dies im Beispiel Figur 98. angenommen war, oder ein Körper kann sich um eine unbewegliche Axe drehen, und bei dieser Umdrehung einen andern unbeweglichen Körper berühren, wodurch eine drehende Reibung entsteht, wie bei den Zapfen in Pfannen. Auch gehört hieher das Umdrehen der Rollen um Bolzen. Beide Reibungen, die schiebende und drehende, können unter dem Namen der gleitenden Reibung begriffen werden, von welcher die rollende oder wälzende Reibung verschieden ist, bei welcher ein Cylinder, eine Kugel ꝛc. über eine Fläche gerollt oder gewälzt wird. Es läßt sich leicht einsehn, daß die wälzende Reibung weit kleiner als die gleitende ist.

Durch die Politur und dadurch, daß man die reibenden Flächen mit einer schicklichen Materie bestreicht oder schmiert, kann die Rauheit derselben ansehnlich vermindert, also die Reibung bedeutend verkleinert werden, nur ist es nicht möglich, die Reibung hiedurch gänzlich aufzuheben.

§. 186.

Die Größe der Reibung ist von sehr vielen Umständen abhängig, besonders von der Materie der reibenden Körper, von ihrer Rauhigkeit, der Schmiere, der Adhäsion oder dem Zusammenhange, dem Drucke gegen die reibenden Flächen, der Größe dieser Flächen, der Temperatur u. dgl., so daß es äußerst schwer fällt, allgemeine Gesetze über die Größe der Reibung anzugeben, weshalb die Resultate, welche man über die Reibung der Körper von verschiedener Materie erhalten hat, bei der Anwendung auf ähnliche Körper nur als Durchschnittssätze angesehen werden können, welche von der Wahrheit nicht weit entfernt sind, da es bekannt ist, welche Verschiedenheit unter Körpern von einerlei Materie statt findet. Ueberdies kommt nächst der Rauheit der reibenden Flächen auch noch die besondere Beschaffenheit der Körper in Absicht ihres chemischen Verhaltens in Betrachtung, weil bei einer Bewegung, welche Wärme erzeugt, eine Zersetzung der reibenden Theile entsteht, wodurch eine stärkere Abnutzung und ein vermehrter Widerstand verursacht werden kann. Die Größe der Reibung kann daher auch nur durch richtige und im Großen angestellte Versuche bestimmt werden, und wenn gleich schon viele Untersuchungen über diesen Gegenstand bekannt sind, so übertreffen doch die neuern hierher gehörigen Versuche des Herrn Coulomb (*) alle bisherigen, theils wegen ihrer Genauigkeit und Mannigfaltigkeit, theils wegen der Größe der reibenden Körper und der Belastung, welcher man sich zur Erhaltung richtiger Resultate bediente. Den Erfahrungen gemäß

(*) Théorie des machines simples, en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des Cordages. Pièce qui a remporté le prix double de l'acad. des scienc. pour l'année 1781. — Mem. de mathemat. et de physiq. presentées à l'académie. Tom. X. Paris 1785. p. 161 — 332.

kann man nachstehende Sätze in Bezug auf gleitende Reibung annehmen:

(I) Die Reibung vermehrt sich mit der Rauhigkeit der reibenden Flächen. Weil es aber unmöglich ist, für die verschiedenen Abstufungen der Rauhigkeit einen Maaßstab anzugeben, so läßt sich auch über die Größe der Reibung in dieser Absicht nichts bestimmen, und es müssen daher die folgenden Sätze darauf eingeschränkt werden, daß die reibenden Flächen möglichst polirt sind.

(II) Die Reibung ist unter übrigens gleichen Umständen dem Druck proportional.

Werden die Körper doppelt so stark an einander gepreßt, so ist auch die Reibung doppelt so groß u. s. w. Die Versuche geben zwar kleine Abweichungen von diesem allgemeinen Satze; für die Ausübung läßt sich aber derselbe ohne Unterschied anwenden. Nachstehende Versuche, welche über die schiebende Reibung der Ruhe aus der angeführten Coulombschen Schrift gezogen sind, werden dies noch näher erläutern.

Schmiere.	Reibende Körper.	No. der Versuche.	Reibende Fläche. □Zoll.	Druck. Pfund.	Reibung. Pfund.	Verhältniß der Reibung zum Druck = 1.
Trocken ohne Schmiere.	Eichen auf Eichenholz =	1	432	74	30	0,405
		2	432	874	406	0,465
		3	432	2474	1116	0,451
		4	*	250	106	0,424
		5	*	450	186	0,413
		6	*	856	356	0,416
	Eichen a. Kiefern =	7	48	50	36	0,720
		8	48	450	284	0,631
		9	48	850	560	0,659
	Kiefern auf Kiefern =	10	48	50	27	0,540
		11	48	250	145	0,580
		12	48	850	480	0,565
	Ulmen auf Ulmen =	13	48	45	21	0,467
		14	48	450	207	0,460
		15	48	1650	756	0,458
	Eichen a. Eichen +	16	*	50	13	0,260
		17	*	1650	450	0,273
	Eisen a. Eichen =	18	45	53	10	0,189
		19	45	1650	340	0,206
	Eisen auf Eisen	20	45	51	15	0,294
		21	45	450	124	0,276
	Messing a. Eisen	22	45	50	14	0,280
		23	45	450	112	0,249
	Kupfer auf Eisen	24	*	47	8	0,170
		25	*	850	140	0,165
Talg.	Eichen a. Eichen	26	180	1650	622	0,377
		27	180	3250	1387	0,426
	Kupfer auf Eisen	28	45	50	7	0,140
		29	45	450	48	0,107
		30	45	1650	168	0,102
Abgenutzt. Talg.	Eichen a. Eichen =	31	648	2310	514	0,222
		32	648	5810	1535	0,264

Von den Zeichen, welche sich in der Tafel befinden, bedeutet:

* daß die reibende Fläche möglichst verkleinert war,

= daß sich die Hölzer nach der Richtung der Fasern bewegten, und

+ daß sich die Holzfasern kreuzten.

Bei diesen Versuchen ist noch zu bemerken, daß nach einer sehr kurzen Ruhezeit die Reibung kleiner war, als wenn sich der Körper schon einige Zeit in Ruhe befand; in einigen Fällen erhielt die Reibung nach mehrern Minuten ihren größten Werth, und blieb alsdann für größere Zeiten unverändert; in andern Fällen waren aber mehrere Tage nöthig, bis die Reibung ihren größten Werth erhielt. Die Angaben der vorstehenden Tafel beziehen sich auf die Fälle, für welche die Reibung beständig ist.

Bei den Versüchen mit Schmiere müßte eine beständige Größe wegen der Adhäsion in Abzug gebracht werden, allein für die Ausübung darf man hierauf nicht Rücksicht nehmen.

(III) Bei gleichem Druck ist unter übrigens gleichen Umständen die Größe der Reibung unabhängig von der Größe der reibenden Fläche.

Dies läßt sich schon ohne Versuche deshalb erwarten, weil bei gleichem Druck auf eine doppelt so große Fläche, wenn die Belastung gleichförmig vertheilt ist, jeder □Zoll der reibenden Fläche nur halb so stark gepreßt wird, als wenn die Fläche halb so groß wäre. Auch durch die Vergleichung der Versuche 1. 2. 3. mit 4. 5. 6. in vorstehender Tafel wird dieser Satz bestätigt. Dagegen ist bei den eingeschmierten Flächen deshalb eine Ausnahme von dem vorstehenden Satze, weil die Schmiere unter sich und mit der Fläche zusammenhängt, daher auch bei größern Flächen in dieser Hinsicht ein größerer Widerstand entsteht. Dieser kann aber für die meisten Fälle der Ausübung aus der Rechnung gelassen werden.

(IV.) Die Reibung der Ruhe ist größer als die Reibung der Bewegung, und die gleitende größer als die drehende.

Zwischen diesen verschiedenen Reibungen ist aber nach Verschiedenheit der Körper und Schmiere das Verhältniß der Reibungen verschieden, wie solches aus den verschiedenen Resultaten in der Tafel des folgenden §. erhellet.

(V.) Die verschiedene Geschwindigkeit der Körper bei der Reibung während der Bewegung hat bei manchen Materien gar keinen, und bei andern nur einen solchen Einfluß, daß derselbe in den meisten Fällen bei Seite gesetzt werden kann.

Bei der größern Geschwindigkeit kommen zwar mehr Theile der Oberflächen in gleicher Zeit in Berührung, aber auch in demselben Verhältnisse wird die Dauer der Berührung verkleinert, und die Unebenheiten können weniger in einander dringen, daher mit Bezug auf die Coulombschen Versuche dieser Satz für die Ausübung ohne Nachtheil besonders bei Holz auf Holz und Metall auf Metall gelten kann.

§. 187.

Setzt man, daß Q den Druck bezeichnet, durch welchen ein reibender Körper gegen einen andern gepreßt wird, und daß F die zur Ueberwindung der Reibung erforderliche Kraft ist, welche hier die Reibung heißt, so kann für jede

Last Q die Reibung F gefunden werden, wenn nur unter ähnlichen Umständen für eine andere Last Q′ die Reibung F′ bekannt ist, weil sich nach (III) verhält

$$Q' : F' = Q : F, \text{ also ist}$$

$$F = \frac{F'}{Q'} Q.$$

Die Zahl $\frac{F'}{Q'}$ kann man den Reibungskoeffizienten nennen. Für die gleitende Reibung bei Ulmen auf Ulmen Holz ist derselbe nach der Tafel des vorigen §. $= 0,46$, daher für diesen Fall $F = 0,46 . Q$. Wäre der Druck $Q = 150$ Pfund, so wird die Reibung $F = 0,46 . 150 = 69$ Pfund.

Für die Folge soll der Reibungskoeffizient allemal ganz allgemein durch μ ausgedrückt werden, so daß allgemein $F = \mu Q$ ist, wo dann der Werth von μ nach den besondern Umständen zu bestimmen ist.

Weil die Anwendung der allgemeinen statischen Lehren dadurch sehr erleichtert wird, wenn Tafeln für die verschiedenen Werthe von μ vorhanden sind, so können hiezu nachstehende Tafeln dienen, welche sich auf die Coulombschen Versuche beziehen.

I. Tafel.

Gleitende Reibung der Ruhe.

Reibende Körper.	Schiebende Reibung.						Drehende Reibung.				
	Trocken. =	Talg.	Theer.	Oehl.	Abgen. Talg.	Trocken. +	Trocken.	Talg.	Theer.	Oehl.	Abgen. Talg.
Eichen auf Eichen	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{5}$			$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{15}$					
Kiefern auf Kiefern	$\frac{7}{12}$										
Ulmen auf Ulmen	$\frac{6}{13}$										
Eichen auf Kiefern	$\frac{2}{3}$										
Steineichen auf Guajac											$\frac{1}{16}$
Eisen auf Eisen	$\frac{2}{7}$										
Kupfer auf Eisen	$\frac{3}{17}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{6}$			$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{3}{20}$		
Eisen auf Guajac							$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$			
Eisen auf Eichen	$\frac{1}{5}$					$\frac{1}{14}$					
Kupfer auf Eichen	$\frac{2}{11}$										
Messing auf Eisen	$\frac{4}{15}$										

= bedeutet hier daß die reibende Körper nach der Richtung der Holzfasern bewegt worden, und

+ daß sich die Holzfasern durchkreuzen.

II. Tafel.

Gleitende Reibung der Bewegung.

Reibende Körper.	Schiebende Reibung.					Drehende Reibung.				
	Trocken. =	Talg.	Theer.	Abgen. Talg.	Trocken. +	Trocken.	Talg.	Theer.	Oehl.	Abgen. Talg.
Eichen auf Eichen	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{10}$					
Kiefern auf Kiefern	$\frac{1}{6}$									
Ulmen auf Ulmen	$\frac{1}{10}$									
Eichen auf Kiefern	$\frac{3}{19}$									
Steineichen auf Guajac							$\frac{1}{26}$			$\frac{1}{17}$
Steineichen auf Ulmen							$\frac{1}{33}$			$\frac{1}{20}$
Buchsbaum auf Guajac							$\frac{1}{23}$			$\frac{1}{14}$
Buchsbaum auf Ulmen							$\frac{1}{29}$			$\frac{1}{20}$
Eisen auf Eisen	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{10}$								
Kupfer auf Eisen	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{11}$				$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{23}$	$\frac{2}{15}$
Eisen auf Guajac						$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$			
Eisen auf Eichen	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{35}$		$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{9}$					
Kupfer auf Eichen	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{41}$		$\frac{1}{16}$						

§. 188.

Die Reibung kann in Vergleichung mit andern Kräften, welche Druck oder Bewegung hervorbringen, als eine leidende (passive) Kraft angesehen werden, welche der Bewegung widersteht, und nur wenn sie aufgehoben werden soll, kann sie als Kraft in Rechnung gebracht werden. Sie ist da wirksam, wo sich die reibenden Flächen berühren, und ihre Richtung liegt in der Richtung der Tangente der Berührungsflächen. Weil sie aber der Bewegung sowohl nach der einen als nach der andern Seite ihrer Richtung gleich stark widersteht, so sind für das Gleichgewicht zwei Fälle sehr wohl zu unterscheiden; einmal, wenn es lediglich darauf ankommt, die Ruhe zu erhalten, in welchem Falle die Reibung zum Vortheile der Kraft wirkt, weil so viel weniger Kraft angewandt werden darf, als wegen der Reibung erforderlich ist, ohne daß die Ruhe unterbrochen werden könnte. Soll aber bei dem geringsten Ueberschuß an Kraft die Ruhe aufhören, also das Gleichgewicht aufgehoben werden, so muß die anzuwendende Kraft nicht nur allen übrigen Kräften, sondern auch der Reibung das Gleichgewicht halten. Man kann dies folgendergestalt allgemein ausdrücken. Wenn P die Kraft bezeichnet, welche für das Gleichgewicht mit mehrern andern Kräften ohne Rücksicht auf Reibung erfordert wird, und F bezeichnet die zur Ueberwältigung der Reibung anzuwendende Kraft, so ist die Kraft $P \pm F$ und jede zwischen $P + F$ und $P - F$ liegende Kraft im Stande, den Körper in Ruhe zu erhalten. Die Kraft $P - F$ ist alsdann die kleinste Kraft, welche die Bewegung des Körpers verhindert, dagegen ist $P + F$ diejenige, welche mit der Last und der Reibung im Gleichgewichte ist, so daß der kleinste Ueberschuß an Kraft vermögend ist, das Gleichgewicht aufzuheben.

In der Folge werden gewöhnlich die Untersuchungen nur auf den letzten Fall eingeschränkt, und wenn es erforderlich ist, von dem ersten Falle Gebrauch zu machen, so wird solches jedesmal besonders angemerkt werden.

§. 189.

Die Kraft, mit welcher die Oberflächen der Körper unter sich oder mit der aufgelegten Schmiere zusammenhängen, oder die Adhäsion, ist zwar §. 186. III. außer Acht gelassen worden, weil der Antheil, welchen die Reibung an den Hindernissen der Bewegung hat, so bedeutend ist, daß man in den meisten Fällen die Kraft, welche zur Ueberwältigung des Zusammenhanges verwandt werden muß, als unbedeutend gegen die Kraft ansehen kann, welche wegen der Reibung erfordert wird. Hiezu kommt noch, daß man für jeden besondern Fall selten die Reibung ganz genau angeben kann, und daß daher größere Genauigkeit bei der Berechnung mit Rücksicht auf Zusammenhang nur die Formeln weitläuftiger macht, ohne für die Ausübung brauchbarere Resultate zu geben.

Um den Einfluß zu übersehen, welchen unter gewissen Umständen die Größe der Berührungsfläche und die Art der Schmiere auf die Reibung haben, so ist zu bemerken, daß nach den angeführten Coulombschen Versuchen bei der gleitenden Reibung zwischen kupfernen Platten auf eisernen, wenn solche mit neuem Talg eingeschmiert waren, der Zusammenhang der Schmiere auf 45 □Zoll Fläche $1\frac{1}{2}$ Pfund betragen hat.

§. 190.

Ueber die Größe der wälzenden Reibung hat Herr Coulomb ebenfalls einige sehr wichtige Versuche angestellt, indem er auf zwei wagerechte Unterlagen AA, Figur 99. eine mit einem dünnen Faden umschlungene Walze legte, und an die Enden des Fadens gleiche Gewichte Q, Q aufhing. Um die wälzende Reibung auszumitteln, vermehrte man das eine Gewicht so lange, bis durch den Zusatz eines Gewichts F eine unmerklich anhaltende Bewegung entstand. Die Unterlagen waren aus Eichenholz, und nebst den gebrauchten Walzen möglichst polirt. Nachstehende Tafeln enthalten die Resultate der Versuche. Taf. IV. Fig. 99.

Die Walzen von Guajac auf Unterlagen von Eichenholz.

Gesammte Belastung der Walze.	Gewicht F zur Ueberwältigung der Reibung.	
Pfund.	Durchmesser der Walze 2 Zoll.	Durchmesser der Walze 6 Zoll.
100	1,6 Pfund	0,6 Pfund
500	9,4 —	3,0 —
1000	18,0 —	6,0 —

Die Walzen von Ulmen auf Unterlagen von Eichenholz.

Gesammte Belastung.	Gewicht F.	
Pfund.	Durchmesser der Walze 6 Zoll.	Durchmesser der Walze 12 Zoll.
1000	10 Pfund	5 Pfund

Aus diesen Versuchen geht hervor, daß sich bei der wälzenden oder rollenden Bewegung die Reibung wie die Belastung und umgekehrt wie die Halbmesser der Walzen verhält, wenn die Körper von einerlei Materie sind.

Bei der sechszölligen Walze von Guajac war bei 100 Pfund Druck die Reibung 0,6 Pfund, und bei einem zehnmal größerem Druck von 1000 Pfund = 6 Pfund. Eben so fand man, wenn die Walzen von Ulmenholz jedesmal mit 1000 Pfund belastet waren, bei der sechszölligen Walze doppelt so viel Reibung, als bei der zwölfzölligen.

Setzt man daher, daß M die gesammte Belastung einer Walze bezeichne, deren Halbmesser = r und deren wälzende Reibung = F ist. Wird ferner für eine andere Walze von gleicher Materie die ähnliche Bezeichnung M', r', F' angenommen, so verhält sich

$\frac{M'}{r'} : \frac{M}{r} = F' : F$, und man findet die Reibung

$$F = \frac{r'F'}{M'} \cdot \frac{M}{r}$$

Ist daher die Zahl $\frac{r'F'}{M'}$ aus Versuchen bekannt, so kann daraus die Reibung F für jede andere Walze von gleicher Materie gefunden werden, wenn die Belastung M und der Halbmesser r gegeben ist. Man kann daher in einem ähnlichen Sinne wie §. 187. die Zahl $\frac{r'F'}{M'} = \mu'$ setzen, und solche den Reibungskoeffizienten nennen.

Aus den vorstehenden Versuchen erhält man als Mittelwerthe für die Reibungskoeffizienten, bei

Walzen von Guajac auf Eichenholz $\mu' = 0,018 = \frac{1}{56}$
Walzen von Ulmen auf Eichenholz $\mu' = 0,03$,
so daß nun ganz allgemein die wälzende Reibung durch

$$F = \mu' \frac{M}{r}$$

ausgedrückt werden kann. Man hat aber bei dem Gebrauche der Zahl μ' darauf zu sehen, daß M in Pariser Pfunde, und r in Pariser Zollen ausgedrückt wird, weil für andere Maaße und Gewichte auch die Zahlen μ' andere Werthe erhalten müssen.

Diese Vorsicht ist bei den Reibungskoeffizienten, welche §. 187. angegeben sind, nicht erforderlich, weil daselbst der Werth μ unverändert derselbe bleibt, man mag denselben in irgend einem Gewichte ausdrücken, wofern nur die Belastung und Reibung sich auf einerlei Gewicht beziehen.

Achtes Kapitel.

Von der schiefen Ebene, dem Keile und der Schraube.

I. Von der schiefen Ebene.

§. 191.

Jede feste gegen den Horizont geneigte Ebene heißt hier eine schiefe Ebene (Planum inclinatum. *Plan incliné*). Wird die schiefe Ebene ABB′, Figur 100., durch die Vertikalebene ACA′ in AA′ und durch die Ho- Taf. IV. Fig. 100.

rizontalebene CBB' in BB' geschnitten, so sind die Linien AA', BB' mit einander parallel, und wenn nichts besonders erinnert wird, so ist jedesmal vorausgesetzt, daß die Richtungen der Kräfte, welche auf Körper wirken, die sich auf der schiefen Ebene befinden, in einerlei Vertikalebene fallen, welche auf den Durchschnittslinien AA', BB' senkrecht ist.

Die Vertikalebene ABC sei auf dem Durchschnitt AA' senkrecht, so ist BAC der Neigungswinkel der schiefen Ebene gegen die Vertikalebene, welcher hier kurz der **Neigungswinkel der schiefen Ebene** genannt werden soll. In der Folge wird allemal dieser Neigungswinkel $BAC = \alpha$ gesetzt. Die Linie AB heißt die **Länge**, AC die **Höhe**, und BC die **Grundlinie** der schiefen Ebene.

Befindet sich ein Körper auf einer schiefen Ebene, so wird derselbe irgend einen Druck senkrecht auf die Länge der Ebene ausüben, dieser senkrechte Druck soll hier der **Normaldruck** heißen. Die Kraft, mit welcher sich der Körper längs der schiefen Ebene fortzubewegen strebt, heißt sein **relatives Gewicht**.

§. 192.

Aufgabe. Die Bedingungen für das Gleichgewicht eines auf der schiefen Ebene befindlichen Körpers zu finden, wenn die Richtung der Kräfte durch seinen Schwerpunkt geht.

Taf. IV. Fig. 101. Auflösung. Auf der schiefen Ebene AB, Figur 101., befinde sich ein Körper, dessen Schwerpunkt in G liegt, und dessen Gewicht Q nach vertikaler Richtung GQ wirkt. Ist der Körper dadurch gegen das Umfallen

gesichert,

gesichert, daß die Vertikale GD noch innerhalb seiner Grundfläche fällt, so wird er, sich selbst überlassen, auf der schiefen Ebene nach der Richtung AB herabsinken. Soll dies verhindert werden und ein Gleichgewicht entstehen, so wird eine im Schwerpunkte G angebrachte Kraft P nach irgend einer Richtung GP auf den Körper wirken müssen. Es sei die Neigung der schiefen Ebene BAC $= \alpha$, und der Winkel, unter welchem die Richtung der Kraft P die verlängerte Vertikallinie CA in A' schneidet, oder AA'G $= \beta$, so läßt sich unter der Voraussetzung, daß die auf AB senkrechte Linie GF noch innerhalb der Grundfläche des Körpers fällt, das Gewicht V senkrecht auf AB nach GF, und parallel mit AB nach GE zerlegen. Nun ist der Winkel FDG $=$ DGE $= \alpha$ und DGF $= 90° - \alpha$, daher der vom Gewichte Q auf AB entstehende Normaldruck (§. 20. I.), welcher von der Ebene AB aufgehoben wird, oder

$$GF = GD \,.\, \cos DGF = Q \sin \alpha$$

und die Kraft, mit welcher sich der Körper durch die Wirkung seines Gewichts Q längs der schiefen Ebene nach der Richtung GE fortzubewegen strebt, oder sein relatives Gewicht

$$GE = DG \,.\, \cos DGE = Q \cos \alpha.$$

Soll nun der Körper in Ruhe bleiben, so muß P den Körper eben so stark nach der Richtung BA aufwärts zu bewegen streben, als solches vom Gewichte Q nach der Richtung AB abwärts geschieht, weil hier die Normalpressungen nicht in Rechnung kommen können, da solche von der festen Ebene AB aufgehoben werden. Man zerlege daher die Kraft P nach GF auf AB senkrecht, und nach GK mit BA parallel, oder dem respectiven Gewichte von Q grade entgegengesetzt, alsdann ist der Winkel $IGD = 180° - \beta$ und $IGL = IGD - FGD = 180° - \beta - (90° - \alpha) = 90° - (\beta - \alpha)$, also $KGI = 90° - IGL = \beta - \alpha$, daher $\cos IGL = \sin(\beta - \alpha)$ und $\cos KGI = \cos(\beta - \alpha)$ und man erhält den Normaldruck auf AB, welcher von der Kraft P entsteht (§. 20.)

$$GL = GI . \cos IGL = P \sin(\beta - \alpha)$$

und die in paralleler Richtung mit BA entstehende Wirkung

$$GK = GI . \cos KGI = P \cos(\beta - \alpha).$$

Damit der Körper in Ruhe bleibe, muß diese Kraft dem respectiven Gewichte $Q \cos \alpha$ gleich seyn, also $P \cos(\beta - \alpha) = Q \cos \alpha$, daher findet man, wenn das Gewicht Q und die Winkel α, β gegeben sind, für das Gleichgewicht die Kraft

$$\text{(I)} \quad P = \frac{Q \cos \alpha}{\cos(\beta - \alpha)}.$$

oder, wenn P, α und β gegeben sind,

$$\text{(II)} \quad Q = \frac{P \cos(\beta - \alpha)}{\cos \alpha}.$$

Nennt man den von beiden Kräften Q und P entstehenden Normaldruck $= N$, so ist der gesammte Normaldruck auf die Ebene AB

$$\text{(III)} \quad N = Q \sin \alpha + P \sin(\beta - \alpha).$$

Wird aus (I) für P sein Werth gesetzt, so ist

$$\text{(IV)} \quad N = Q [\sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{tgt}(\beta - \alpha)]$$

oder, wenn in (III) statt Q sein Werth aus (II) gesetzt wird

$$\text{(V)} \quad N = P [\sin(\beta - \alpha) + \cos(\beta - \alpha) \operatorname{tgt} \alpha].$$

Beispiel. Eine schiefe Ebene, auf welcher sich eine Last von 1000 Pfund befindet, ist unter einem Winkel von 60 Grad gegen die Vertikale geneigt; man sucht die für das Gleichgewicht erforderliche Kraft, welche den Körper am Herabgleiten hindert, wenn ihre Richtung mit der Vertikale einen Winkel von 75 Grad einschließt. Hier ist $Q = 1000$; $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 75^\circ$, $\beta - \alpha = 15^\circ$; also nach (I), wenn man sich der Logarithmen bedient,

$$\log \cos \alpha = \log \cos 60^\circ = 9{,}6989700$$
$$\log Q = \log 1000 = 3$$
$$12{,}6989700$$
$$\log \cos (\beta - \alpha) = \log \cos 15^\circ = 9{,}9849438$$
$$2{,}7140262$$

wozu die Zahl 517,64 stimmt. Es ist daher die zum Gleichgewicht erforderliche Kraft $P = 517{,}64$ Pfund.

§. 193.

1. Zusatz. Weil über die Richtungen, nach welchen man Kräfte zerlegen muß, bei Anfängern leicht Zweifel entstehen können, so ist das vorhergehende Verfahren nochmals genau zu erwägen. Man hat nemlich den Punkt G, auf welchen die Kräfte P, Q wirken. Um von dieser Wirkung zu urtheilen, mußte ausgemittelt werden, nach welchen Richtungen der Punkt G ausweicht, welches wegen P nach GK, und wegen Q nach GE erfolgen würde. Ferner ist GF die einzige Richtung, nach welcher der Punkt G nicht ausweichen kann, und man hat daher die Kräfte P, Q nach solcher Richtung zerlegt, nach welcher der Punkt G sich bewegen würde, und in eine andere, nach welcher er nicht ausweichen kann. Die Nothwendigkeit dieses Verfahrens läßt sich einsehen, wenn man annimmt, die Kräfte P, Q wären nach andern Richtun-

gen zerlegt, weil alsdann eine jede nach einer andern Richtung angenommene Seitenkraft wieder in eine solche zerlegt werden konnte, welche auf die Bewegung des Körpers wirkt, die hier eigentlich gesucht wird, und in eine andere, welche nichts auf die Bewegung wirken kann, und wie hier von der festen Ebene AB gänzlich aufgehoben wird. Hieraus kann man die allgemeine Regel ableiten, daß es bei der Bestimmung der Wirkung einer Kraft auf einen Punkt, welcher nur nach einer gewissen Richtung bewegbar ist, darauf ankommt, diese Kraft in zwei Seitenkräfte zu zerlegen, wovon die eine in die Richtung fällt, nach welcher der Punkt nur ausweichen würde, und die andere, nach welcher der Punkt nicht ausweichen kann, oder nach welcher irgend ein Widerstand die zweite Seitenkraft gänzlich aufhebt.

§. 194.

2. Zusatz. Wirkt die Kraft P mit der Länge der schiefen Ebene parallel, so ist $\beta = \alpha$, also

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos 0^\circ = 1, \text{ daher}$$

$$P = Q \cos \alpha.$$

Nun ist $\cos \alpha = \frac{AC}{AB}$, daher verhält sich

$$Q : P = AB : AC$$

oder wenn die Richtung der Kraft P mit der Länge der schiefen Ebene parallel wirkt, so verhält sich das Gewicht Q zur Kraft P, wie die Länge der schiefen Ebene zu ihrer Höhe.

3. Zusatz. Wäre die Richtung der Kraft P horizontal, also mit der Grundlinie der schiefen Ebene

parallel, so ist $\beta = 90°$, also $\cos(\beta - \alpha) = \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$, daher §. 192. I.

$$P = Q \cot\alpha.$$

Weil aber $\cot\alpha = \frac{AC}{BC}$ ist, so verhält sich

$$Q : P = BC : AC$$

oder wenn die Kraft P mit der Grundlinie der schiefen Ebene parallel wirkt, so verhält sich das Gewicht Q zur Kraft P, wie die Grundlinie der schiefen Ebene zu ihrer Höhe.

§. 195.

4. Zusatz. Die Richtung der Kraft P sei horizontal, und gehe wie bisher durch den Schwerpunkt G, so läßt sich, wenn P und das Gewicht Q gegeben sind, die Lage der schiefen Ebene bestimmen, bei welcher der Körper im Gleichgewicht ist, und man erhält alsdann

$$\operatorname{tgt}\alpha = \frac{P}{Q}.$$

Sobald $\operatorname{tgt}\alpha$ größer oder kleiner als $\frac{P}{Q}$, kann kein Gleichgewicht entstehen, und der Körper muß sich entweder abwärts oder aufwärts auf der schiefen Ebene bewegen, weil in diesem Falle GE größer oder kleiner als GK wird.

§. 196.

Aufgabe. Die Bedingungen des Gleichgewichts eines auf der schiefen Ebene befindlichen Körpers mit Rücksicht auf Reibung zu finden, wenn die Richtung der Kräfte durch seinen Schwerpunkt geht, und die anzuwendende Kraft zugleich die Reibung überwältigen, oder den Körper mit dem kleinsten Ueberschuß an Kraft erheben soll.

Auflösung. Man setze die zur Ueberwältigung der Last und Reibung erforderliche Kraft $= V$, so ist mit
Taf. IV. Beibehaltung der Bezeichnung §. 192. der Normaldruck
Fig. 101. auf die Ebene AB, Figur 101.,

$$(I)\ N = Q \sin\alpha + V \sin(\beta - \alpha)$$

also die davon entstehende Reibung $= \mu N$, welche der Kraft V nach der Richtung AB widersteht. Soll nun die Kraft $V \cos(\beta - \alpha)$, mit welcher die Kraft P den Körper längs der schiefen Ebene aufwärts zu bewegen strebt, mit dem respectiven Gewichte $Q \cos\alpha$ und der Reibung μN im Gleichgewichte seyn, so ist

$$V \cos(\beta - \alpha) = Q \cos\alpha + \mu[Q \sin\alpha + V \sin(\beta - \alpha)]$$

daher findet man die zur Ueberwältigung der Reibung und für das Gleichgewicht mit Q erforderliche Kraft zum Erheben

$$(II)\ V = \frac{Q(\cos\alpha + \mu \sin\alpha)}{\cos(\beta - \alpha) - \mu \sin(\beta - \alpha)}$$

und jede auch noch so kleine Vermehrung der Kraft V wird eine aufwärts gehende Bewegung verursachen. Wäre die Kraft V nebst α und β gegeben, so findet man das Gewicht

$$(III)\ Q = \frac{V[\cos(\beta - \alpha) - \mu \sin(\beta - \alpha)]}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha}.$$

1. Beispiel. Auf einer schiefen Ebene, welche unter einem Winkel von 60 Grad gegen die Vertikale geneigt ist, befindet sich eine Last von 1000 Pfund. Die Kraft, welche mit dieser Last und der Reibung im Gleichgewichte seyn soll, wirkt unter einem Winkel von 75 Grad gegen die Vertikale. Man sucht die Kraft unter der Voraussetzung, daß die Reibung dem sechsten Theile des Drucks

gleich sei. Hier ist $V = 1000$, $\mu = \frac{1}{6}$, $\alpha = 60°$, $\beta = 75°$, daher die Kraft

$$V = \frac{1000\,(0,5 + \frac{1}{6}\,0,86603)}{0,96593 - \frac{1}{6} \cdot 0,25882} = 698,25 \text{ Pfund}$$

also 180,61 Pfund mehr als §. 192. ohne Reibung.

2. Beispiel. Für $Q = 1000$, $\mu = \frac{1}{6}$, $\alpha = 60°$, und $\beta = 30°$ wird $\beta - \alpha = -30°$, also

$\cos -30° = \cos 30°$ und $\sin -30° = -\sin 30°$,

daher die Kraft

$$V = \frac{1000\,(0,5 - \frac{1}{6} \cdot 0,86603)}{0,86603 + \frac{1}{6} \cdot 0,5} = 678,707 \text{ Pfund.}$$

§. 197.

1. Zusatz. Für $\beta = \alpha$ wird die Richtung der Kraft V mit der schiefen Ebene parallel, und weil alsdann $\cos(\beta - \alpha) = \cos 0 = 1$, und $\sin(\beta - \alpha) = 0$ ist, so erhält man die Kraft, welche zugleich die Reibung überwältigt, oder

$$\text{(I)}\quad V = Q\,(\cos \alpha + \mu \sin \alpha).$$

Beispiel. Für $Q = 1000$ Pfund, $\alpha = 60$ Grad, und $\mu = \frac{1}{6}$ ist die Kraft

$$V = 1000\,(0,5 + \tfrac{1}{6} \cdot 0,86603) = 644,34 \text{ Pfund.}$$

Wird die Ebene horizontal, so ist $\alpha = 90°$, also $V = \mu Q$, wie erfordert wird (§. 187.).

Bei einer vertikalen Ebene ist $\alpha = 0$, also $V = Q$.

Die Kraft V erhält bei einerlei Last Q ihren größten Werth, wenn der Neigungswinkel α so genommen wird, daß

$$\text{(II)}\quad \operatorname{tgt} \alpha = \mu$$

ist. Alsdann erhält man

$$V = Q\,(\cos \alpha + \operatorname{tgt} \alpha \sin \alpha) = Q\,\frac{\cos \alpha^2 + \sin \alpha^2}{\cos \alpha} = Q\,\frac{1}{\cos \alpha}$$

oder

$$(\mathrm{III})\quad V = Q \sec \alpha.$$

Es sei $\mu = \frac{1}{6}$, so ist in diesem Falle $\operatorname{tgt} \alpha = 0{,}16666 = \operatorname{tgt} 9^\circ\, 28'$. Für diesen Winkel ist nach (I) oder (III)

$$V = 1013{,}79 \text{ Pfund.}$$

Für $\alpha = 10$ Grad ist $V = 1013{,}75$ und
für $\alpha = 11$ Grad ist $V = 1013{,}43$ Pfund,
also in beiden Fällen kleiner als $1013{,}79$.

Um den Werth zu finden, für welchen P am größten wird, sehe man α in der Gleichung (I) als veränderlich an, so ist

$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = Q\,(-\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = 0$ also $\mu = \operatorname{tgt} \alpha$ und

$\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} = Q\,(-\cos \alpha - \mu \sin \alpha)$ eine negative Größe,

folglich ist für $\mu = \operatorname{tgt} \alpha$ die Kraft V ein Größtes.

Die Last Q wird daher auf einer schiefen Ebene, bei welcher die Kraft mit der Länge der Ebene parallel wirkt, den meisten Kraftaufwand zur Aufwärtsbewegung erfordern, wenn die Tangente von α dem Reibungskoeffizienten μ gleich ist.

Eine größere oder geringere Neigung der schiefen Ebene erfordert einen zur Fortbewegung der Last geringeren Kraftaufwand; den kleinsten wenn $\alpha = 0$ oder wenn die Ebene horizontal wird, weil hier vom Abwärtsziehen nicht die Rede ist.

§. 198.

2. Zusatz. Für $\beta = 90^\circ$ wird die Richtung der Kraft V horizontal, alsdann ist

$$\cos(\beta - \alpha) = \sin \alpha \text{ und } \sin(\beta - \alpha) = \cos \alpha,$$

daher §. 196. (II) die Horizontalkraft, welche zugleich der Reibung das Gleichgewicht hält

$$V = \frac{Q(\cos\alpha + \mu \sin\alpha)}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha} = \frac{Q(1 + \mu \operatorname{tgt}\alpha)}{\operatorname{tgt}\alpha - \mu}.$$

Beispiel. Für $V = 1000$ Pfund, $\alpha = 60^\circ$, und $\mu = \frac{1}{6}$ findet man die Kraft

$$V = \frac{1000\,(1 + \frac{1}{6}\cdot 1,73205)}{1,73205 - \frac{1}{6}} = 823,22 \text{ Pfund}.$$

Bei einer horizontalen Lage der Ebene ist $\alpha = 90^\circ$, also $V = \mu Q$. Dagegen wird der Nenner $\operatorname{tgt}\alpha - \mu = 0$, wenn $\operatorname{tgt}\alpha = \mu$ ist, es muß daher in diesem Falle V unendlich groß werden. Es giebt also, wenn $\operatorname{tgt}\alpha = \mu$ ist, keine Kraft, welche der Reibung und dem Gewichte Q dergestalt das Gleichgewicht halten könnte, daß bei dem geringsten Ueberschuß an Kraft eine Bewegung erfolgte.

§. 199.

Aufgabe. Auf der schiefen Ebene befindet sich eine Last Q, welche durch die Reibung und eine im Schwerpunkte der Last anzubringende Kraft V' am Abgleiten verhindert werden soll; wie groß muß die zum Erhalten des Körpers erforderliche Kraft P' seyn, damit keine abwärts gehende Bewegung erfolgt.

Auflösung. Da hier die Kraft nicht mit der Last und Reibung wie §. 196., sondern die Kraft und Reibung mit der Last im Gleichgewichte seyn soll, so erhält man, wie §. 196., den Normaldruck

$$N = Q\sin\alpha + V'\sin(\beta - \alpha)$$

also die Reibung $= \mu N$, daher

$$V'\cos(\beta - \alpha) + \mu[Q\sin\alpha + V'\sin(\beta - \alpha)] = Q\cos\alpha$$

daher die Kraft, welche das Abwärtsgleiten der Last verhindert, oder die zum Erhalten der Last erfordert wird

$$(\text{I})\ V' = \frac{Q\,(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}{\cos(\beta-\alpha) + \mu\sin(\beta-\alpha)}$$

und jede noch so kleine Vermehrung der Last oder Verminderung der Kraft wird das Gleichgewicht aufheben.

Wäre V' nebst α und β gegeben, so findet man die Last

$$(\text{II})\ Q = \frac{V'\,[\cos(\beta-\alpha) + \mu\sin(\beta-\alpha)]}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}.$$

Beispiel. Eine schiefe Ebene, unter einem Winkel von 60 Grad gegen die Vertikale geneigt, ist mit einer Last von 1000 Pfund beschwert; wieviel Kraft wird man anwenden müssen, um zu verhindern, daß die Last nicht herabsinkt, wenn die Richtung der Kraft mit der Vertikale einen Winkel von 75 Grad einschließt. Hier ist $Q = 1000$; $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 75^\circ$, und wenn $\mu = \frac{1}{6}$ angenommen wird, so erhält man die Kraft

$$V' = \frac{1000\,(0,5 - \frac{1}{6}\cdot 0,86603)}{0,96593 + \frac{1}{6}\cdot 0,25882} = 352,46 \text{ Pfund},$$

also 165,18 Pfund weniger als §. 192. ohne Reibung.

§. 200.

1. Zusatz. Wird $\beta = \alpha$, so ist die Richtung der Kraft V' mit der Länge der schiefen Ebene parallel, und man erhält für diesen Fall, weil $\cos(\beta-\alpha) = \cos 0 = 1$ und $\sin(\beta-\alpha) = 0$ ist, die Kraft, welche nebst der Reibung den Körper am herabsinken hindert, oder

$$(\text{I})\ V' = Q\,(\cos\alpha - \mu\sin\alpha).$$

Diese Kraft wird $= 0$, wenn $\cos\alpha - \mu\sin\alpha = 0$, oder wenn

$$(\text{II})\ \mu = \cot\alpha$$

ist. In diesem Falle wird keine Kraft erfordert, den Körper in Ruhe zu erhalten, weil sein respectives Gewicht der Reibung das Gleichgewicht hält. Der Winkel α heißt alsdann der Ruhewinkel.

Für $\mu = \frac{1}{6}$ ist $\cot \alpha = 0,16666 = \cot 80^\circ 32'$, daher wird ein Körper auf einer schiefen Ebene, deren Neigungswinkel gegen die Vertikale 80 Grad 32 Minuten beträgt, in Ruhe bleiben, wenn die Reibung dem sechsten Theile des Drucks gleich ist. Bei einem kleinern Neigungswinkel wird Bewegung erfolgen, aber nicht wenn der Winkel bis zu 90 Grad zunimmt.

Für $\mu = \frac{1}{3}$ ist $\cot \alpha = 0,33333 = \cot 71^\circ 34'$.

Man sieht hieraus, wie mit Hülfe einer schiefen Ebene die Reibung der Körper sehr leicht gefunden werden kann, denn man darf nur den Winkel α so lange vergrößern, bis der Körper sich zu bewegen anfängt, so ist dies der Ruhewinkel, und man kann durch denselben nach (II) den Reibungskoeffizienten finden. Man pflegt daher auch den Winkel α den Reibungswinkel zu nennen.

Beispiel. Die schiefe Ebene ist unter einem Winkel von 60 Grad gegen die Vertikale geneigt, man sucht die erforderliche Kraft, welche nach paralleler Richtung mit der Länge der Ebene einer Last von 1000 Pfund das Gleichgewicht hält, wenn $\mu = \frac{1}{6}$ ist. Hier wird $V = 1000$, $\alpha = 60$ Grad, also (I) die Kraft

$$V = 1000\,(0,5 - \tfrac{1}{6}.0,86603) = 355,66 \text{ Pfund.}$$

§. 201.

2. Zusatz. Wenn die Richtung, nach welcher die Kraft V' wirkt, horizontal oder $\beta = 90^\circ$ ist,

so erhält man §. 199. die Kraft

$$V' = \frac{Q(\cos\alpha - \mu \sin\alpha)}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} = \frac{Q(1 - \mu \,\mathrm{tgt}\,\alpha)}{\mathrm{tgt}\,\alpha + \mu}.$$

Beispiel. Wäre $V' = 1000$ Pfund, $\alpha = 60^\circ$ und $\mu = \frac{1}{6}$, so findet man die Kraft

$$V' = \frac{1000\,(1 - \frac{1}{6} \cdot 1{,}73205)}{1{,}73205 + \frac{1}{6}} = 374{,}63 \text{ Pfund.}$$

* §. 202.

Aufgabe. Unter welchem Winkel muß die Kraft wirken, damit zum Erheben und Erhalten einer Last auf der schiefen Ebene, mit Rücksicht auf Reibung, die kleinstmögliche Kraft anzuwenden ist.

Auflösung. Zum Erheben einer Last wird nach §. 196. die Kraft

$$V = \frac{Q(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}{\cos(\beta - \alpha) - \mu\sin(\beta - \alpha)}$$

und zum Erhalten §. 199. die Kraft

$$V = \frac{Q(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}{\cos(\beta - \alpha) + \mu\sin(\beta - \alpha)} \text{ erfordert.}$$

Beide Bedingungen lassen sich ganz allgemein durch

$$V = \frac{Q(\cos\alpha \pm \mu\sin\alpha)}{\cos(\beta - \alpha) \mp \mu\sin(\beta - \alpha)}$$

ausdrücken, wo die obern Zeichen für das Erheben, und die untern für das Erhalten der Last gelten.

Man nehme β als veränderlich an, und setze $\beta - \alpha = \varphi$, und den Nenner

$$\cos\varphi \mp \mu\sin\varphi = z$$

so wird V ein Kleinstes, wenn z ein Größtes wird und umgekehrt. Nun ist

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = -\sin\varphi \mp \mu\cos\varphi = 0, \text{ also}$$

$$\mp\mu = \mathrm{tgt}\,\varphi \text{ daher } \sin\varphi = \frac{\mp\mu}{\sqrt{(1+\mu^2)}} \text{ und } \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1+\mu^2)}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} = - \cos \varphi \pm \mu \sin \varphi$$

oder wenn man für $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ die obigen Werthe setzt

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} = - \frac{1 + \mu^2}{\sqrt{(1 + \mu^2)}} = - \sqrt{(1 + \mu^2)}.$$

Weil dies eine negative Größe ist, so wird z am größten für $\operatorname{tgt} \varphi = \mp \mu$, also für diesen Werth V am kleinsten.

Nun ist

$$\mp \mu = \operatorname{tgt} \varphi = \operatorname{tgt} (\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tgt} \beta - \operatorname{tgt} \alpha}{1 + \operatorname{tgt} \beta \operatorname{tgt} \alpha}$$

Hieraus findet man für den Winkel β, unter welchem die Kraft V wirken muß, damit solche den kleinstmöglichen Werth erhält,

$$\operatorname{tgt} \beta = \frac{\operatorname{tgt} \alpha \mp \mu}{1 \pm \mu \operatorname{tgt} \alpha}$$

wo die obern Zeichen für das Erheben, und die untern für das Erhalten der Last gelten.

Nimmt man an, daß die schiefe Ebene unter einem Winkele von 60 Grad gegen die Vertikal geneigt sei, so erhält man für $\mu = \frac{1}{6}$ zum Erheben der Last, wenn die Kraft mit der Reibung und Last im Gleichgewichte seyn soll

$$\operatorname{tgt} \beta = \frac{\operatorname{tgt} \alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tgt} \alpha} = \frac{1,73205 - \frac{1}{6}}{1 + 0,288675} = 1,2147$$

also $\beta = 50^\circ\ 32'$.

Berechnet man nach §. 196. für $Q = 1000$ Pfund, und für verschiedene Werthe von β die zugehörigen Werthe von V, so erhält man

α	β		V
Grad	Grad	Min.	Pfund
60	30	—	678, 71
	50	—	635, 58
	50	32	635, 57
	51	—	635, 80
	60	—	644, 34
	90	—	823, 22

Um den Winkel β zu bestimmen, unter welchem mit der kleinsten Kraft eine Last auf der schiefen Ebene, welche unter einem Winkel von 60 Grad gegen die Vertikale geneigt ist, erhalten werden kann, so ist

$$\operatorname{tgt} \beta = \frac{\operatorname{tgt} \alpha + \mu}{1 - \mu \operatorname{tgt} \alpha} = \frac{1,73205 + \frac{1}{6}}{1 - 0,288675} = 2,6694$$

also $\beta = 69^\circ\ 28'$.

Wird $Q = 1000$ gesetzt, so erhält man

α	β		V
Grad	Grad	Min.	Pfund
60	60	—	355, 66
	69	28	350, 82
	75	—	352, 46
	90	—	374, 63

Kommt es lediglich darauf an, die Last Q auf der schiefen Ebene in Ruhe zu erhalten, und das Herabsinken zu verhüten, ohne auf das Gleichgewicht, welches zum

Erheben oder Erhalten der Last erfordert wird, Rücksicht zu nehmen, so läßt sich leicht einsehen, daß wenn α, β, μ und Q gegeben sind, eine unzählige Menge verschiedener Kräfte im Stande ist, die Last Q in Ruhe zu erhalten. Denn nicht nur die Kraft

$$V = \frac{Q(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}{\cos(\beta - \alpha) - \mu\sin(\beta - \alpha)}$$

sondern auch die Kraft

$$V' = \frac{Q(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}{\cos(\beta - \alpha) + \mu\sin(\beta - \alpha)}$$

erhält die Last Q in Ruhe, daher müssen auch alle Kräfte, welche zwischen V und V′ fallen, die Last Q in Ruhe erhalten.

§. 203.

Aufgabe. Die Bedingungen anzugeben, unter welchen ein auf der schiefen Ebene befindlicher Körper in Ruhe bleibt, wenn die Kraft, welche das Gleichgewicht halten soll, nach horizontaler Richtung wirkt, ohne daß diese Richtung durch den Schwerpunkt des Körpers geht.

Auflösung. Die Lage der gegebenen schiefen Ebene aA, Figur 102., werde durch den Neigungswinkel Aao = φ bestimmt, und der Körper BC, dessen Gewicht Q ist, berühre die schiefe Ebene aA in dem einzigen Punkt B. Nach horizontaler Richtung CG′ sei in C eine Kraft C dergestalt angebracht, daß die Punkte B und C in einerlei auf der Fläche aA senkrechten Vertikalebene liegen, so soll die Kraft C mit dem Gewichte Q, welches im Schwerpunkte G nach vertikaler Richtung G′GQ wirkt, im Gleichgewichte seyn. Taf. IV. Fig. 102.

Weil der Körper BC nur in dem Punkte C gehalten wird, und in B auf der Ebene aA steht, so läßt sich auch die in der vertikalen Richtung $G'Q$ wirkende Kraft Q für das Gleichgewicht nur nach Richtungen zerlegen, welche durch die Gegenwirkungen in B und C aufgehoben werden. Man zerlege daher die Kraft Q im Punkte G', wo sich die Horizontale CG' und die Vertikale QG schneiden, nach den Richtungen $G'C$ und $G'B$, setze den Winkel $GG'B = \gamma$, so ist die nach $G'C$ wirkende Kraft (§. 19.)

$$= Q \frac{\sin BG'G}{\sin BG'C} = Q \frac{\sin \gamma}{\sin 90° + \gamma} = Q \operatorname{tgt} \gamma$$

und eben so groß muß die Kraft C seyn, wenn am Punkt C ein Gleichgewicht entstehen soll; dies giebt

$$\text{(I)} \quad C = Q \operatorname{tgt} \gamma.$$

Der Druck auf den Punkt B nach der Richtung $G'B$ ist (§. 19.)

$$Q \frac{\sin CG'G}{\sin BG'C} = \frac{Q}{\cos \gamma}.$$

Diese Kraft muß von der festen Ebene aA aufgehoben werden, wenn ein Gleichgewicht entstehen soll. Fiele nun die Richtung $G'B$ des Drucks $\frac{Q}{\cos \gamma}$ schief auf die Ebene aA, so zerlegt sich die Kraft $\frac{Q}{\cos \gamma}$ senkrecht auf aA nach BN, und längs aA nach BL. Es ist aber, wenn BM vertikal gezogen wird, der Winkel

$KBM = BG'G = \gamma$; $MBA = oaA = \phi$; also

$KBL = KBM + MBA = \gamma + \phi$ und

$KBN = 90° - (\gamma + \phi)$, daher §. 20. der von $\frac{Q}{\cos \gamma}$ auf aA entstehende Normaldruck

$$\text{(II)} \quad N = \frac{Q}{\cos \gamma} . \sin (\gamma + \phi) = \frac{Q \sin (\gamma + \phi)}{\cos \gamma},$$

und wenn der Druck, mit welchem der Punkt B nach BL längs der Ebene aA getrieben wird, $= R$ gesetzt wird

(III)

$$\text{(III)}\quad R = \frac{Q}{\cos\gamma}\,.\cos(\gamma+\varphi) = \frac{Q\cos(\gamma+\varphi)}{\cos\gamma}.$$

Dem Normaldruck widerstehet die Ebene aA, und hebt ihn gänzlich auf; dagegen wird die Kraft R, weil sie durch nichts aufgehalten wird, den Untertheil B des Körpers nach BA bewegen, und der Körper kann nur dann in Ruhe bleiben, wenn noch eine Kraft R am Untertheile des Körpers in B nach der Richtung Ba angebracht wird. Nur dann ist in B keine Kraft erforderlich, wenn R = o, also G'B auf der Ebene aA senkrecht steht.

§. 204.

Sind die Entfernungen BE = e und CD = h, Figur 102., gegeben, und man soll mit Hülfe derselben und dem gegebenen Neigungswinkel φ der schiefen Ebene aA, die Horizontalkraft C in C, und die nach Ba erforderliche Kraft R für das Gleichgewicht finden, wenn Q das Gewicht des Körpers bezeichnet, so ist $e = h \operatorname{tgt} \gamma$, also §. 203. (I) die Horizontalkraft in C, oder Taf. IV. Fig. 102.

$$\text{(I)}\quad C = \frac{e}{h}\,Q.$$

Weil $\cos(\gamma + \varphi) = \cos\gamma\cos\varphi - \sin\gamma\sin\varphi$ ist, so erhält man §. 203. (III)

$R = Q(\cos\varphi - \sin\varphi \operatorname{tgt}\gamma)$, oder man findet die für das Gleichgewicht erforderliche Kraft, welche nach der Richtung Ba wirken muß

$$\text{(II a)}\quad R = Q\left(\cos\varphi - \frac{e}{h}\sin\varphi\right) = Q\cos\varphi - C\sin\varphi$$

wobei zu bemerken ist, daß R negativ wird, wenn $\frac{e}{h}\sin\varphi$ größer als $\cos\varphi$ ist. Man muß daher diese Kraft nach entgegengesetzter Richtung BA anbringen.

Nennt man alsdann die zur Erhaltung des Gleichgewichts nach der Richtung BA erforderliche Kraft $= R'$, so findet sich

$$\text{(II b)}\quad R' = C \sin \varphi - Q \cos \varphi.$$

Es ist ferner $\sin(\gamma + \varphi) = \sin\gamma \cos\varphi + \cos\gamma \sin\varphi$, daher nach §. 203. (II)

$N = Q\,(\operatorname{tgt}\gamma \cos\varphi + \sin\varphi)$, oder man findet den Normaldruck

$$\text{(III)}\quad N = Q\left(\frac{e}{h}\cos\varphi + \sin\varphi\right) = Q \sin\varphi + C \cos\varphi.$$

Der Druck N werde nach horizontaler Richtung BH in die Kraft H; und nach vertikaler BM in die Kraft Q' zerlegt, so ist der Winkel $HBN = \varphi$ und $NBM = 90^\circ - \varphi$ und man findet den horizontalen Druck gegen die Ebene in B, oder

$$\text{(IV)}\quad H = N \cos\varphi = Q\left(\frac{e}{h}\cos\varphi + \sin\varphi\right)\cos\varphi$$

und den Vertikaldruck in B

$$\text{(V)}\quad Q' = N \sin\varphi = Q\left(\frac{e}{h}\cos\varphi + \sin\varphi\right)\sin\varphi.$$

Wäre die Kraft R, welche das Abgleiten des Punkts B nach A verhindert, nicht besonders am Körper BC angebracht, sondern statt derselben ein Hinderniß in der Ebene aA, etwa eine Hervorragung, Reibung u. dgl. vorhanden, so daß sich der Körper BC zwar um B bewegen, aber nicht davon entfernen kann, so muß nunmehr die ganze Kraft $\frac{Q}{\cos\gamma}$, welche aus den Kräften C und Q nach G'B entspringt, von der Ebene aufgehoben werden. Diese Kraft ist $= \frac{Q}{\cos\gamma}$, und man erhält daher, wenn die ganze Wirkung, welche aus den Kräften

C und Q entspringt, von der Ebene aA aufgehoben wird, den Horizontaldruck in B, oder

$$\text{(VI)}\ H = \frac{Q}{\cos\gamma} \cdot \sin\gamma = \frac{e}{h} Q = C$$

und eben so findet man den Vertikaldruck

$$\text{(VII)}\ Q' = \frac{Q}{\cos\gamma} \cdot \cos\gamma = Q.$$

Wenn daher die schiefe Ebene aA die Wirkung der Kräfte Q und C aufhebt, so ist der Vertikaldruck in B dem Gewichte Q des Körpers, und der Horizontaldruck H in B, dem Horizontaldruck C gleich.

Endlich erhält man noch aus (I) und (II) $R = Q\cos\varphi - C\sin\varphi$ und aus (I) und (III) $N = Q\sin\varphi + C\cos\varphi$ werden beide Gleichungen quadrirt und zusammen addirt, so ist

$$\text{(VIII)}\ R^2 + N^2 = Q^2 + C^2$$

welches man auch aus der Figur ableiten konnte, weil die im Punkt G′ wirkenden Kräfte mit den im Punkte B im Gleichgewichte seyn müssen.

§. 205.

Zusatz. Wird der Winkel φ ein rechter, oder liegt die Ebene aA, Figur 102., auf welche sich der Körper BC stützt, wagerecht, so ist $\sin\varphi = \sin 90° = 1$ und $\cos\varphi = 0$, daher das Gewicht des Körpers Taf. IV. Fig. 102.

$$\text{(I)}\ Q = \frac{e}{h} C.$$

Die Kraft, mit welcher der Körper nach der horizontalen Richtung BA wirkt

$$R = -\frac{e}{h} Q$$

oder wenn sich R auf die entgegengesetzte Richtung B a bezieht, so findet man den Horizontaldruck

$$\text{(II)}\quad R = \frac{e}{h}\,Q = C.$$

Der Normaldruck ist

$$\text{(III)}\quad N = Q.$$

Die aus diesem Normaldruck entspringende Horizontalkraft $H = 0$

und endlich der Vertikaldruck

$$\text{(IV)}\quad Q' = Q.$$

§. 206.

Wirken außer den Kräften Q und C keine andere auf den Körper, welcher sich auf der schiefen Ebene befindet, so muß die Kraft $R = 0$ werden, wenn der Körper ohne Reibung auf der Ebene im Gleichgewichte bleiben soll. Dies ist der Fall, wenn §. 203. (III) $\cos(\gamma + \varphi) = 0$, also wenn $\gamma + \varphi$ einem rechten Winkel gleich ist. Für

Taf. IV. Fig. 102.

diesen Fall sei Figur 102. $a'A'$ die Lage der schiefen Ebene und ihr Neigungswinkel $A'a'o' = \alpha$, so ist, wenn B D horizontal und C D vertikal gezogen, und der Abstand der Vertikale G Q von B oder $BE = e$, und die Höhe des Punkts C über der Horizontale B D, oder $CD = h$ gesetzt wird, $e = h \operatorname{tgt} \gamma$, oder weil

$$\operatorname{tgt}\gamma = \operatorname{tgt}(90^\circ - \alpha) = \cot\alpha \text{ ist,}$$

$$\text{(I)}\quad \cot\alpha = \frac{e}{h}$$

welches die erste Bedingung für das Gleichgewicht des Körpers auf der schiefen Ebene $A'a'$ ist, wenn alle Hindernisse der Bewegung, wodurch das Abgleiten gehemmt werden könnte, bei Seite gesetzt werden.

Als zweite Bedingung erhält man §. 203. I.

(II) $C = Q \cot \alpha$ oder auch $Q = C \operatorname{tgt} \alpha$.

Ist daher durch die Größen e und h die Stellung eines Körpers bekannt, so kann daraus die Neigung der schiefen Ebene und die Horizontalkraft C für das Gleichgewicht gefunden werden. Wird hingegen $\operatorname{tgt} \alpha < \frac{Q}{C}$, so muß der Körper abwärts gleiten, und wenn $\operatorname{tgt} \alpha > \frac{Q}{C}$ ist, so erfolgt eine Bewegung nach entgegengesetzter Richtung.

Der Normaldruck auf die Ebene $A'a'$ sei N, so erhält man für $R = 0$, $\gamma + \varphi = 90^\circ$ und $\gamma = 90^\circ - \alpha$, daher ist nach §. 203. (II) der Normaldruck

(III) $N = \frac{Q}{\sin \alpha}$.

Dieser Normaldruck werde nach horizontaler Richtung BH in eine Kraft H, und nach vertikaler BM in eine Kraft Q' aufgelöst, so erhält man (§. 20.) den Horizontaldruck in B

(IV) $H = N \cos \alpha = Q \cot \alpha = C$

und den Vertikaldruck in B

(V) $Q' = N \sin \alpha = Q$.

Es ist daher der Horizontaldruck C in C eben so groß, als der Horizontaldruck in B, und der Vertikaldruck in B ist dem Gewichte des Körpers gleich.

§. 207.

Die §. 203. gefundenen allgemeinen Sätze lassen sich eben so ableiten, wenn man die Lehre vom Hebel oder das §. 69. erwiesene Grundgesetz der Statik anwendet.

Wird die Lehre vom Hebel angewandt, so sei mit Beibehaltung der im vorigen §. angenommenen Bezeichnung, Taf. IV. Fig. 103. nach Figur 103., $ED = c$, der Winkel $BCD = \omega$, und die verlängerte Vertikallinie QG schneide BC in G'', so wird vom Gewichte Q auf die Punkte C und B ein vertikaler Druck entstehen, welcher sich wie $G''B : G''C$ oder wie $EB : EC$ oder wie $e : c$ verhält. (§. 42.) Es ist daher der vertikale Druck in C

$$= \frac{eQ}{e + c}$$

und der vertikale Druck in B

$$= \frac{cQ}{e + c}$$

Der vertikale Druck in C werde nach horizontaler Richtung CC' in eine Kraft C, und nach der Richtung CB in eine Kraft I zerlegt, so ist (§. 19.)

$$C = \frac{eQ}{e + c} \operatorname{tgt} \omega \text{ [I] und}$$

$$I = \frac{eQ}{(e + c) \cos \omega}.$$

Der vertikale Druck in B kann nach der Richtung BA und senkrecht auf aA nach BN zerlegt werden, und weil $ABM = \varphi$ und $MBN = 90° - \varphi$, so erhält man §. 19. den Druck nach der Richtung BA

$$= \frac{cQ}{e + c} \cos \varphi$$

und nach der Richtung BN den Normaldruck

$$= \frac{cQ}{e + c} \sin \varphi.$$

Von der Kraft I, welche in B nach der Richtung BI wirkt, entsteht ebenfalls ein Druck nach BA, und ein Normaldruck nach BN, und weil der Winkel $ABM = \varphi$, $MBI = \omega$, also $ABI = \varphi + \omega$ und $IBN = 90° - (\varphi + \omega)$ ist, so erhält man die Kraft nach der Richtung $BA =$

$$I \cdot \cos(\varphi + \omega) = \frac{eQ \cos(\varphi + \omega)}{(e + c)\cos\omega},$$

und den von I nach der Richtung BN entstehenden Normaldruck =

$$I \cdot \sin(\varphi + \omega) = \frac{eQ \sin(\varphi + \omega)}{(e + c)\cos\omega}.$$

Beide Pressungen nach BA zusammengenommen geben die Kraft

$$R = \frac{cQ\cos\varphi}{e+c} + \frac{eQ\cos(\varphi+\omega)}{(e+c)\cos\omega} = Q\,\frac{c\cos\varphi + e\cos\varphi - e\sin\varphi\,\mathrm{tgt}\,\omega}{e+c} \quad [II]$$

wenn nemlich $\cos(\varphi + \omega)$ aufgelöst und der ganze Ausdruck abgekürzt wird.

Die beiden Pressungen nach der Richtung BN geben für den gesammten Normaldruck auf A a

$$N = \frac{cQ\sin\varphi}{e+c} + \frac{eQ\sin(\varphi+\omega)}{(e+c)\cos\omega} = Q\,\frac{c\sin\varphi + e\sin\varphi + e\cos\varphi\,\mathrm{tgt}\,\omega}{e+c} \quad [III]$$

Um zu übersehen, daß die Ausdrücke [I], [II], [III] mit den im vorigen §. gefundenen übereinzustimmen, ist zu erwägen, daß $BD = CD\,\mathrm{tgt}\,\omega$ oder $e + c = h\,\mathrm{tgt}\,\omega$ ist, dies giebt

$$c = h\,\mathrm{tgt}\,\omega - e;$$

wird dieser Werth statt c in die Gleichung [I] gesetzt, so erhält man wie im im vorigen §.

$$(I)\ C = \frac{e}{h}\,Q$$

Eben diesen Werth statt c in [II] gesetzt, giebt

$$(II)\ R = Q\left(\cos\varphi - \frac{c}{h}\sin\varphi\right).$$

Auf gleiche Art findet man aus [III]

$$(III)\ N = Q\left(\sin\varphi + \frac{a}{h}\cos\varphi\right).$$

§. 208.

Will man das Grundgesetz der Statik §. 69. anwenden, um eine Vergleichung zwischen den Kräften Q, C, R, N zu erhalten, so sind drei Gleichungen erforderlich, um jeden einzelnen Werth aus einem gegebenen zu bestimmen. Man setze daher, daß der Körper BC, Figur 104., in die parallele Lage $B'C'$ komme, und daß der Punkt B' in die Ebene Aa falle, so sind die nach parallelen Richtungen zurückgelegten Wege, von $Q = gG$, von $C = - cC$, von $R = - BB'$ und von $N = 0$, also §. 69.

Taf. IV Fig. 104.

$Q \cdot gG - C \cdot cC - R \cdot BB' = 0$, oder wenn $BB' = GG' = CC' = 1$ gesetzt wird, so ist $gG = \cos \varphi$ und $cC = \sin \varphi$, daher

$$Q \cos \varphi - C \sin \varphi - R = 0 \text{ [I]}.$$

Um zur zweiten Gleichung zu gelangen, nehme man an, daß BC in die parallele Lage $B''C''$ komme, so daß C'' in die verlängerte Vertikallinie DC fällt, so ist der Weg von $Q = - GG''$, von $C = 0$, von $R = bB$ und von $N = bB''$, also

$R \cdot bB - Q \cdot GG'' + N \cdot bB'' = 0$, oder wenn man $GG'' = BB'' = CC'' = 1$ setzt, so ist $bB = \cos \varphi$ und $bB'' = \sin \varphi$, daher

$$R \cos \varphi - Q + N \sin \varphi = 0 \text{ [II]}$$

und wenn endlich angenommen wird, daß der Punkt B unverändert an derselben Stelle bleibt, so daß BC in die Lage BC''' kommt, wobei die Bogen CC''' und GG''' so äußerst klein angenommen werden, daß man sie als grade Linien in Rechnung bringen kann, so ist $- g'G'''$ der Weg von Q, und $c'C$ der Weg von C, die Wege von R und N aber $= 0$, daher

$$C \cdot c'C - Q \cdot g'G''' = 0.$$

Es ist ferner der Voraussetzung gemäß in den ähnlichen rechtwinklichten Dreiecken $g'GG'''$ und $c'CC'''$ der Winkel $g'GG''' = c'CC''' = \omega$, und weil sich verhält

$$GG''' : CC''' = BE : BD = e : e + c, \text{ so ist}$$

$$CC''' = \frac{e+c}{e} . GG''', \text{ folglich}$$

$$c'C = CC''' \cos\omega = \frac{e+c}{e} . GG''' . \cos\omega \text{ und}$$

$$g'G''' = GG''' . \sin\omega, \text{ daher}$$

$$C . \frac{e+c}{e} . GG''' . \cos\omega - Q . GG''' \sin\omega = 0 \text{ oder}$$

$$\frac{e+c}{e} C - Q \operatorname{tgt}\omega = 0. \text{ Es ist aber}$$

$$BD = CD . \operatorname{tgt}\omega \text{ oder } e + c = h \operatorname{tgt}\omega; \text{ dies giebt}$$

$$C \frac{h \operatorname{tgt}\omega}{e} - Q \operatorname{tgt}\omega = 0, \text{ oder}$$

$$\text{(I) } C = \frac{e}{h} Q$$

Diesen Werth in die Gleichung [I] gesetzt, giebt

$$\text{(II) } R = Q \cos\varphi - \frac{e}{h} Q \sin\varphi$$

und diesen Werth in [II] gesetzt und abgekürzt, giebt

$$\text{(III) } N = Q \sin\varphi + \frac{e}{h} Q \cos\varphi.$$

§. 209.

Aufgabe. Ein schwerer Viertelkreis oder Quadrant soll dergestalt auf eine schiefe Ebene gestellt werden, daß eine am Obertheil desselben angebrachte Horizontalkraft ein Gleichgewicht hervorbringe; man sucht die Größe dieser Kraft und die Lage der schiefen Ebene, vorausgesetzt, daß der Mittelpunkt vom Viertelkreise mit dem Stützpunkt auf der schiefen Ebene in einerlei Horizontale falle.

Auflösung. Des Viertelkreises CFB, Figur 105., Halbmesser sei CD = DB = r, sein Gewicht Q und Taf. Fig.

sein Schwerpunkt liege in G. Für die Vertikale GE sei BE = e, und der gesuchte Winkel, welchen die schiefe Ebene BO mit der Vertikale CO einschließen muß, oder BOC = α. Nach §. 85. (I) ist

$$BE = e = r\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = 0,36388\ r$$

Hieraus erhält man für den Neigungswinkel der schiefen Ebene, auf welcher der Viertelkreis im Gleichgewichte ist (§. 206. I.)

$$\cot\alpha = \frac{e}{r} = 0,36383 = \cot 70^\circ \tfrac{2'}{3}.$$

Die in C für das Gleichgewicht erforderliche Horizontalkraft ist alsdann (§. 206. II) $C = \frac{e}{r}\,Q$, oder

$$C = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) Q = 0,36388\ Q$$

und eben so groß ist der Horizontaldruck im Punkte B.

Wäre das Gewicht des Viertelkreises durch seine Länge ausgedrückt, so ist $Q = \frac{1}{2}\pi r$, daher die Horizontalkraft

$$C = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) r = 0,570796\ r.$$

§. 210.

Taf. IV. Fig. 106. Zusatz. Wäre der Bogen CB, Figur 106., ein Theil desjenigen Viertelkreises, dessen Scheitel in C liegt, die Länge des Bogens BC = v, sein Gewicht = Gv; CD = x, BD = y, der Halbmesser = r und BE = e der Horizontalabstand des Schwerpunkts, so ist §. 84. I.

$$e = y - \frac{r\,x}{v}$$

also §. 206. I. für den Neigungswinkel α der schiefen Ebene BO

$$\cot \alpha = \frac{y}{x} - \frac{r}{v}$$

und für die zur Erhaltung des Gleichgewichts in C oder B erforderliche Horizontalkraft §. 204. I.

$$C = \left(\frac{y}{x} - \frac{r}{v}\right) Gv = \left(\frac{yv}{x} - r\right) G.$$

Je kleiner x wird, desto näher wird $y = v$, und endlich für $x = 0$ wird $y = v$, also $\frac{yv}{x} = \frac{y^2}{x}$ $= \frac{2rx - x^2}{x} = 2r - x$, oder weil $x = 0$, so wird $\frac{yv}{x} = 2r$. Dies in die vorstehende Gleichung gesetzt, giebt für $x = 0$

$$C = (2r - r) G = rG$$

oder der Horizontaldruck von dem letzten Kreiselemente bei C ist $= rG$, also eine beständige Größe.

§. 211.

Aufgabe. Auf der schiefen Ebene aA, Figur 102., befinde sich der Körper BC, die Richtung der in C erforderlichen Horizontalkraft C gehe nicht durch den Schwerpunkt; man sucht die Bedingungen für das Gleichgewicht zwischen der Kraft C, dem Gewichte Q des Körpers AC, und der Reibung bei B, damit der Körper am Herabsinken nach BA verhindert werde. Taf. IV. Fig. 102.

Auflösung. Der Neigungswinkel der Ebene sei $Aao = \varphi$, und GE die durch den Schwerpunkt des Körpers BC gezogene Vertikale; $BE = e$ und $CD = h$, so ist der Normaldruck in B §. 204. III. oder

$$N = Q\left(\frac{e}{h} \cos\varphi + \sin\varphi\right) = Q \sin\varphi + C \cos\varphi$$

und die davon entstehende Reibung

$$\mu N = \mu Q \left(\sin\varphi + \frac{e}{h}\cos\varphi\right).$$

Die Kraft, mit welcher der Körper in B nach BA abwärts zu gehen strebt, ist §. 204. II.

$$R = Q\left(\cos\varphi - \frac{e}{h}\sin\varphi\right).$$

Soll zwischen dieser Kraft und der Reibung dergestalt ein Gleichgewicht erfolgen, daß die geringste Kraft den Körper nach BA bewegen kann, oder daß durch die geringste Verkleinerung des Winkels φ der Körper herabsinkt, so wird erfordert, daß $R = \mu N$ sei; man erhält daher für diese Bedingung

$$\cos\varphi - \frac{e}{h}\sin\varphi = \mu\sin\varphi + \frac{\mu e}{h}\cos\varphi, \text{ oder}$$

$$1 - \frac{e}{h}\,\mathrm{tgt}\,\varphi = \mu\,\mathrm{tgt}\,\varphi + \frac{\mu e}{h} \text{ oder}$$

man findet den Winkel φ, unter welchem die schiefe Ebene gegen die Vertikale geneigt seyn kann, ohne ein Herabsinken des Körpers zu befürchten,

$$\text{(I) } \mathrm{tgt}\,\varphi = \frac{h - \mu e}{e + \mu h} \text{ und}$$

$$\frac{e}{h} = \frac{1 - \mu\,\mathrm{tgt}\,\varphi}{\mathrm{tgt}\,\varphi + \mu}.$$

Nach §. 204. I. ist ferner die Horizontalkraft $C = \frac{e}{h} Q$, daher für den vorliegenden Fall

$$\text{(II) } C = \frac{1 - \mu\,\mathrm{tgt}\,\varphi}{\mu + \mathrm{tgt}\,\varphi} Q$$

und eben so groß ist der Horizontaldruck in B (§. 204. VI), so wie der Vertikaldruck in B dem Gewichte Q des Körpers BC gleich ist.

§. 212.

Taf. IV. Fig. 102. 1. Zusatz. Sucht man die Bedingungen, unter welchen der Körper CB, Figur 102., nach der aufwärts gehenden Richtung nicht ausgleitet, so muß die Kraft, mit welcher er nach B a zu gehen strebt, mit der Reibung im Gleichgewichte seyn. Nach §. 204. II. findet man die Kraft, mit welcher der Körper nach B a zu gleiten strebt, oder

$$R = Q\left(\frac{e}{h}\sin\varphi - \cos\varphi\right)$$

wird diese $= \mu N$ gesetzt, so erhält man

$$\frac{e}{h}\sin\varphi - \cos\varphi = \mu\sin\varphi + \frac{\mu e}{h}\cos\varphi$$

und hieraus findet man den Winkel φ, unter welchem der Körper noch in Ruhe bleibt, und nach B a nicht ausgleiten kann

$$\text{(I)}\quad \operatorname{tgt}\varphi = \frac{h + \mu e}{e - \mu h} \text{ und}$$

$$\frac{e}{h} = \frac{1 + \mu \operatorname{tgt}\varphi}{\operatorname{tgt}\varphi - \mu}.$$

Wird φ größer als der gefundene Werth, so muß der Körper ausgleiten.

Weil $C = \frac{e}{h} Q$ ist, so erhält man die Horizontalkraft

$$\text{(II)}\quad C = \frac{1 + \mu \operatorname{tgt}\varphi}{\operatorname{tgt}\varphi - \mu} Q.$$

§. 213.

2. Zusatz. Bezeichnet man die abwärtsgehende Bewegung des Körpers nach B A durch absinken, und die aufwärts gehende Bewegung nach B a durch aufsteigen, so ist ganz allgemein

$$\text{(I)}\quad \operatorname{tgt}\varphi = \frac{h \mp \mu e}{e \pm \mu h} \text{ und}$$

$$\text{(II)}\quad C = \frac{1 \mp \mu \operatorname{tgt}\varphi}{\mu \pm \operatorname{tgt}\varphi} Q$$

wo die obern Zeichen für absinken, und die untern für aufsteigen gelten. Ein Körper kann daher nur auf der schiefen Ebene in Ruhe bleiben, wenn die Werthe von φ und C innerhalb der vorstehenden Grenzen fallen.

Beispiel. Ein Körper, dessen Gewicht 1000 Pfund beträgt, soll in einer gegebenen Lage auf eine schiefe Ebene gestellt werden, so daß $e = 4$ und $h = 10$ Fuß ist. Man sucht die möglichen Stellungen der schiefen Ebene, bei welchen der Körper noch in Ruhe bleibt.

Hier ist $Q = 1000$, $e = 4$, $h = 10$, und wenn $\mu = \frac{1}{6}$ gesetzt wird, so erhält man

$$\text{tgt}\,\varphi = \frac{10 \mp \frac{4}{6}}{4 \pm \frac{10}{6}} = \begin{cases} 1,64706 = \text{tgt}\,58^\circ\,44' \\ 4,57143 = \text{tgt}\,77^\circ\,40' \end{cases}$$

der Körper wird also unter einem Winkel von 58 Grad 44 Minuten noch nicht absinken, und unter einem Winkel von 77 Grad 40 Minuten noch nicht aufsteigen, oder bei allen möglichen Lagen der schiefen Ebene, wo φ nicht kleiner als $58^\circ\,44'$, und nicht größer als $77^\circ\,40'$ ist, muß der Körper in Ruhe bleiben.

§. 214.

Taf. IV. Fig. 107. Aufgabe. Auf dem wagerechten Boden BD, Figur 107., steht eine Stange oder Leiter BC, welche bei C gegen die vertikale Wand CD so angelehnt ist, daß die Punkte B, C in einerlei auf der Wand CD senkrechten Vertikalebene liegen. In E hängt eine Last Q; man sucht die möglichst geneigte Stellung der Leiter, damit solche noch durch die Reibung in B und C am Ausgleiten nach BH verhindert werde.

Auflösung. Die Länge BC sei a, BE = b, der Schwerpunkt der Leiter liege in der Mitte von BC in G, so ist $BG = \frac{1}{2}a$. Das Gewicht der Leiter sei W, und für den Fall, daß ein Gleichgewicht mit der Reibung in B und C erfolgt, sei der Winkel, welchen die Leiter mit der vertikalen Wand einschließt, oder $BCD = \psi$.

Der Horizontaldruck in C sei C, und der Vertikaldruck in B $= N$, so ist die Reibung in C $= \mu C$, in B $= \mu N$, wovon erstere nach der Richtung DC und letztere nach BD eben so wirken, als wenn Kräfte μQ und μN nach diesen Richtungen angebracht wären. Werden nun statt der Wand CD und des Bodens BD die Kräfte C und N angebracht, so müssen, wenn die Leiter in Ruhe bleiben soll, die Kräfte μC, C, Q, W, μN und N einander das Gleichgewicht halten.

Man setze, daß BC, Figur 108., in die parallele Lage $B'C'$ komme, so daß BB' vertikal und $= 1$ sei, so ist der Weg, welchen Q nach paralleler Richtung (§. 35.) durchlaufen hat, $= 1$, der Weg von $\mu C = - CC' = - 1$, von $Q = EE' = 1$, von $W = GG' = 1$, von $\mu N = 0$, und von $N = - BB' = - 1$, daher §. 69. Taf. IV. Fig. 108.

$-\mu C + Q + W - N = 0$ also $N + \mu C = Q + W$ [I]

Kommt BC in die parallele Lage $B''C''$, so daß BB'' wagerecht und $= 1$ wird, so ist der Weg von $C = - CC'' = - 1$, von $\mu N = BB'' = 1$, die übrigen Wege aber $= 0$, daher

$$- C + \mu N = 0 \text{ oder } C = \mu N.$$

Hieraus erhält man in Verbindung mit [I] den Vertikaldruck

$$\text{(I)}\quad N = \frac{Q + W}{1 + \mu^2}$$

und den Horizontaldruck

$$\text{(II)}\quad C = \frac{\mu (Q + W)}{1 + \mu^2}.$$

Um den Winkel ψ zu bestimmen, setze man, daß sich BC um B drehe und in die Lage BC''' komme, so daß der

Winkel CBC''' nur äußerst klein sei. Man ziehe die Horizontalen Cc, Ee, Gg, und die Vertikalen $C'''c$, $E'''e$, $G'''g$, so sind die Dreiecke $CC'''c$, $EE'''e$, $GG'''g$ und BCD einander ähnlich, also der Winkel

$CC'''c = EE'''e = GG'''g = \psi$, daher für $CC''' = \delta$,

$$EE''' = \frac{b\delta}{a} \text{ und } GG''' = \tfrac{1}{2}\delta, \text{ also}$$

$$Cc = \delta \cos\psi;\quad cC''' = \delta \sin\psi;$$

$$eE''' = \frac{b\delta}{a}\sin\psi;\quad gG''' = \tfrac{1}{2}\delta\sin\psi.$$

Nun ist der nach paralleler Richtung zurückgelegte Weg von der Kraft $C = cC$, von $\mu Q = cC'''$, von $Q = -eE'''$, von $W = -gG'''$, von μN und $N = 0$, daher §. 69.

$$Q\delta\cos\psi + \mu Q\delta\sin\psi - Q\frac{b\delta}{a}\sin\psi - \tfrac{1}{2}W\delta\sin\psi = 0$$

oder mit $\frac{a}{\delta\cos\psi}$ multiplizirt, und für C seinen Werth $\frac{\mu(Q+W)}{1+\mu^2}$ gesetzt, giebt

$$\frac{\mu a(Q+W)}{1+\mu^2} + \frac{\mu^2 a(Q+W)}{1+\mu^2}\operatorname{tgt}\psi - bQ\operatorname{tgt}\psi - \frac{aW}{2}\operatorname{tgt}\psi = 0.$$

Hieraus findet man den Winkel ψ, unter welchem die Leiter noch nicht ausgleiten kann

$$\text{(III)}\quad \operatorname{tgt}\psi = \frac{\mu a(Q+W)}{(1+\mu^2)(bQ+\frac{1}{2}aW) - \mu^2 a(Q+W)}.$$

Wird der Winkel ψ nur etwas größer angenommen als der vorstehende Ausdruck angiebt, so muß die Leiter ausgleiten.

Hängt die Last Q in der Mitte der Leiter, so wird $b = \frac{1}{2}a$, daher in diesem Falle

$$\text{(IV)}\quad \operatorname{tgt}\psi = \frac{2\mu}{1-\mu^2}.$$

Es wird daher ein Stab, dessen Schwerpunkt in seiner Mitte liegt, wenn man ihn auf horizontalem Boden gegen eine vertikale Wand lehnt, nothwendig ausgleiten müssen, wenn die Tangente des Neigungswinkels, welchen der Stab mit der Wand bildet, größer als $\frac{2\mu}{1-\mu^2}$ ist; vorausgesetzt daß die Reibung auf dem Boden und an der Wand einerlei sei.

Beispiel. Eine 20 Fuß lange Leiter soll in einer Entfernung von 15 Fuß mit 300 Pfund belastet werden, unter welchem Winkel wird man sie gegen eine vertikale Wand stellen können, wenn die Leiter 200 Pfund wiegt, und die Reibung dem dritten Theile des Drucks gleich ist.

Weil hier $Q = 300$, $W = 200$ Pfund; $a = 20$, $b = 15$ Fuß und $\mu = \frac{1}{3}$ ist, so erhält man

$$\operatorname{tgt} \psi = \frac{\frac{20}{3} \cdot 500}{\frac{10}{9} \cdot 6500 - \frac{20}{9} \cdot 500} = 0{,}5454 = \operatorname{tgt} 28^\circ\, 37'.$$

§. 215.

Zusatz. Wird die Last $Q = 0$, so ist

$\operatorname{tgt} \psi = \frac{2\mu}{1-\mu^2}$, und für $Q = \infty$ ist

$\operatorname{tgt} \psi = \frac{\frac{a}{b}\,\mu}{1-\left(\frac{a}{b}-1\right)\mu^2}$. Letzterer Ausdruck ist größer als der erste, wenn $\frac{a}{b} > 2$, und kleiner als der erste wenn $\frac{a}{b} < 2$ ist; oder wenn die Last Q unterhalb der Mitte der Leiter (näher bei B als bei C) aufgehängt ist, so wird ψ mit Q wachsen; wenn aber die Last Q oberhalb der Mitte der Leiter hängt, so wird ψ mit Q abnehmen.

Bei unveränderter Last Q wächst ψ, wenn b abnimmt, oder der Winkel ψ kann desto größer werden, je näher die Last am Boden hängt.

II. Vom Keile.

§. 216.

Ein fester prismatischer Körper, dessen Querschnitt ein
Taf. IV. Fig. 109. Dreieck ABC, Figur 109., bildet, heißt ein Keil (Cuneus. *Coin*), dessen man sich zum Auseinandertreiben oder Spalten anderer Körper bedient. Befindet sich der Keil zwischen zwei Körpern, welche dem Eindringen desselben widerstehen, oder in der Spalte EHF eines Körpers EHFIKLN, so läßt sich nach den Bedingungen fragen, unter welchen die Kraft, welche den Keil eintreibt, mit dem Widerstande des Körpers im Gleichgewichte ist. Setzt man AC = BC, so ist AB der Rücken, BC = AC die Seiten, und die auf AB senkrechte Linie CD die Länge des Keils.

Der Körper NK widerstehe bei jedem der Punkte E, F, welche von C gleich weit entfernt sind, mit einer Kraft R dem Eindringen des Keils dergestalt, daß die Richtung des Widerstandes auf die Seiten AC, BC senkrecht gehe, so werden sich diese Richtungen EG und FG in einem Punkte G schneiden, welcher in der Länge DC liegt, weil CE = CF ist. Es muß daher irgend eine Kraft Q nach der Richtung DG angebracht mit den Widerständen R, R im Gleichgewichte seyn. Der Winkel ACD = DCB sei = α, so ist EGC = CGF = $90^\circ - \alpha$, und die drei Kräfte Q, R, R wirken auf den Punkt G unter gegebenen Winkeln, daher ist §. 21. II.

$$Q = 2R\cos(90^\circ - \alpha) = 2R\sin\alpha \text{ und}$$

$$R = \frac{Q}{2\sin\alpha}$$

oder weil $\sin\alpha = \frac{AD}{AC}$, also $2\sin\alpha = \frac{AB}{AC}$ ist, so verhält sich

$$Q : R = AB : AC,$$

d. h. die Kraft, welche den Keil eintreibt, verhält sich zum Widerstande auf der einen Seite desselben, wie der Rücken des Keils zu seiner Seite.

Bei den vorstehenden Untersuchungen ist lediglich vorausgesetzt, daß die Richtung des Widerstandes senkrecht auf die Seiten des Keils gehe, welches man auch die Regel des Borelli nennt. Wird angenommen, daß die Richtung des Widerstandes horizontal oder auf die Länge des Keils senkrecht stehe, so erhält man des Mersenni Regel; auch läßt sich in gewissen Fällen mit de la Hire annehmen, daß die Richtung des Widerstandes auf den Spalten EH und FH senkrecht sei. Übrigens läßt sich von den zuletzt angeführten Vorstellungsarten wenig Gebrauch machen, und weil die Ausführung der Rechnung sehr leicht ist, so kann solche hier wegbleiben.

§. 217.

Aufgabe. Zwischen zwei festen Ebenen A′I, B′I, Figur 110, wovon die eine A′I vertikal ist, sei ein Keilstück ABB′A′, dessen Gewicht = Q ist, so eingeklemmt, daß die Seiten AA′, BB′ desselben genau die Ebenen berühren; man sucht die Pressungen, welche vom Gewichte Q gegen beide Ebenen entstehen. Taf. IV. Fig. 110.

Auflösung. Das Gewicht Q, welches in der durch den Schwerpunkt gezogenen Vertikale GQ wirkt, läßt sich auf AA′ und BB′ dergestalt senkrecht zerlegen, daß die Richtungen GC und GN noch innerhalb der Flächen AA′ und BB′ fallen. Die daraus entspringende Kraft nach horizontaler Richtung sei $= C$, und die Kraft, welche nach GN auf BB′ senkrecht wirkt, $= N$; ferner der Winkel $A'IB' = \alpha$, also $NGQ = 90° - \alpha$, $CGQ = 90°$ und $CGN = 180° - \alpha$. Es ist daher $\sin CGQ = 1$; $\sin NGQ = \cos\alpha$ und $\sin CGN = \sin\alpha$. Nach §. 19. ist aber
$C \sin CGN = Q \sin NGV$ und $N \sin CGN = Q \sin CGQ$
oder

$$C \sin\alpha = Q \cos\alpha \text{ und } N \sin\alpha = Q$$

daher findet man den Horizontaldruck gegen AA′, oder

$$\text{(I)}\quad C = Q \cot\alpha$$

und den Normaldruck auf BB′, oder

$$\text{(II)}\quad N = \frac{Q}{\sin\alpha} = Q \operatorname{cosec}\alpha.$$

Der Normaldruck N läßt sich wieder nach horizontaler Richtung NH und nach vertikaler NL zerlegen. Nach horizontaler Richtung erhält man (§. 20.)

$$N \cos\alpha = Q \cot\alpha,$$

daher ist der horizontale Druck auf die Ebene BB′ eben so groß als der horizontale Druck auf die Ebene AA′.

Den von N herrührenden vertikalen Druck auf BB′ findet man (§. 20.) $= N \sin\alpha = Q$, es ist daher der vertikale Druck auf die Ebene BB′ dem Gewichte des Körpers AA′B′B gleich.

§. 218.

Aufgabe. Die Kraft V zu finden, welche erfordert wird, den Keil ABC, Figur 109., in die Spalte EHF zu treiben, damit der Widerstand R und die Reibung überwältigt werde. Taf. IV. Fig. 109.

Auflösung. Auf beiden Seiten des Keils entstehet von dem Widerstande R eine Reibung μR, welche bei E nach der Richtung EA dem Eindringen des Keils widersteht. Von der Kraft V entsteht auf E nach ME ein Vertikaldruck $= \frac{1}{2}V$. Es müssen daher am Punkte E die von den Kräften R und μR nach der Richtung EM entstehende Pressungen dem Druck $\frac{1}{2}V$ gleich seyn. Nun ist der Winkel $AEM = \alpha$, $MEG = 90^\circ - \alpha$; zerlegt man daher die Widerstände R und μR nach der Richtung EM und darauf senkrecht, so sind die beiden nach EM entspringenden Seitenkräfte $R \sin\alpha$ und $\mu R \cos\alpha$, oder

$$\frac{1}{2}V = R\sin\alpha + \mu R\cos\alpha$$

oder man findet die Kraft

$$V = 2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)R.$$

* § 219.

Zusatz. Bleibt der Widerstand R unverändert, so wird die Kraft V zur Ueberwältigung desselben ein Größtes, wenn $\cot\alpha = \mu$ wird. Denn man nehme α als veränderlich an, und setze $z = \sin\alpha + \mu\cos\alpha$, so ist

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \cos\alpha - \mu\sin\alpha;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} = -\sin\alpha - \mu\cos\alpha,$$ also eine negative Größe.

Wenn also $\cos\alpha - \mu\sin\alpha = 0$ gesetzt wird, so erhält man hieraus $\mu = \cot\alpha$, wenn $z = V$ ein Größtes wird.

Wäre $\mu = \frac{1}{6}$, so ist

$$\cot\alpha = 0,1666666 = \cot 80^\circ\, 33'\, 44''.$$

Für $\alpha = 0$ wird $V = 2\mu R$, und für $\alpha = 90^\circ$ wird $V = 2R$, wie nach §. 6. und 187. erfordert wird.

§. 220.

Bei der Beurtheilung des Drucks, welcher entsteht, wenn Körper zwischen zwei unter beliebigen Winkeln gegen einander geneigte Ebenen befindlich sind, wird ganz auf eine ähnliche Art wie §. 203. verfahren. Ein besonderer Fall ist derjenige, wenn eine Kugel zwischen zwei

Taf. IV. Ebenen AB, AB', Figur 111., welche bei A fest mit

Fig. 111. einander verbunden sind, eingeklemmt wird. Ist alsdann die Neigung der Ebene AB gegen die Vertikale, oder der Winkel $ABO = \varphi$, und für die Ebene AB' der Winkel $AB'O' = \varphi'$, ferner Q das Gewicht der Kugel, und G ihr Schwerpunkt, von welchem auf AB und AB' die senkrechten Linien GD, GD' gezogen werden, so ist, wenn GQ vertikal ist, der Winkel $DGQ = 90^\circ - \varphi$ und $D'GQ = 90^\circ - \varphi'$. Der auf AB in D entstehende Normeldruck sei N, und auf AB' in $D' = N'$, so erhält man §. 19. I.

$$N = \frac{\sin(90^\circ - \varphi')}{\sin(180^\circ - \varphi - \varphi')} Q = \frac{\cos\varphi'}{\sin(\varphi + \varphi')} Q$$

und eben so

$$N' = \frac{\cos\varphi}{\sin(\varphi + \varphi')} Q.$$

Wird die Ebene AB' vertikal, so ist $\varphi' = 0$, also

$$N = \frac{1}{\sin\varphi} Q = Q \operatorname{cosec}\varphi \text{ und}$$

$$N' = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} Q = Q \cot\varphi.$$

Für $\varphi = 0$ wird $N = \infty$ und $N' = \infty$, oder es wird eine unendliche Kraft erfordert, die schwere Kugel zwischen zwei parallelen Ebenen im Gleichgewichte zu erhalten, vorausgesetzt, daß keine Reibung vorhanden ist.

III. Von der Schraube.

§. 221.

Die Grundfläche AB, Figur 112., eines Cylinders AE stehe auf seiner Axe KC senkrecht. Man nehme auf einer Ebene, aa' so groß als den Umfang der Grundfläche AB, und zeichne über aa' ein Rechteck $aa'd'd$, dessen Höhe ad der Höhe $CK = AD$ des Cylinders gleich ist. Jede der Seiten ad und $a'd'$ des Rechtecks werde in eine gleiche Anzahl gleicher Theile, wie af, fg ... $a'f'$, $f'g'$ ... getheilt, und die Linien af', fg' ... gezogen, so kann man sich vorstellen, daß das Rechteck $aa'd'd$ dergestalt um den Cylinder gelegt werde, daß a auf A, die Linie aa' genau in den Umfang der Grundfläche AB, und die ganze Fläche des Rechtecks genau auf die krumme Oberfläche des Cylinders passe. Alsdann werden die Punkte a und a' auf A; f und f' auf F ...., d und d' auf D fallen. Die Linien af', fg', gh', hd' bilden alsdann auf der Oberfläche des Cylinders eine zusammenhängende krumme Linie, welche man eine Schraubenlinie nennt. Taf. IV. Fig. 112.

Weil alle Linien wie af', fg' ..., welche die Schraubenlinie bildeten, gleiche Neigung gegen die Grundlinie

aa' haben, so müssen auch alle kleine Theile oder Elemente der Schraubenlinie verlängert, die erweiterte Grundfläche AB des Cylinders durchgängig unter gleichem Winkel schneiden, oder die Tangenten der Schraubenlinie schneiden die verlängerte Grundfläche AB unter einerlei Winkel. Dieser Winkel, welcher die Neigung der Schraubenlinie heißen kann, wird durch den Winkel $a'af'$ dargestellt, und wenn man denselben $= \alpha$ setzt, so müssen sich zwei Tangenten, welche durch den Punkt A gehn, und wovon die eine den Umfang der Grundfläche AB, die andere aber die Schraubenlinie berührt, unter dem Winkel α schneiden.

Ein jeder Theil der Schraubenlinie wie ALF = af heißt ein Schraubengang (Helix. *Filet de la vis*), und die Entfernung der Schraubengänge von einander, parallel mit der Axe gemessen, wie AF = af, die Höhe eines Schraubenganges (*Pas de la Vis*).

Anstatt der Schraubenlinie kann man auf der Oberfläche des Cylinders eine Hervorragung so anbringen, daß alle Durchschnitte derselben, welche durch die Axe KC gehen, gleich groß sind, alsdann heißt der Cylinder eine Schraubenspindel (Cochlea mas), und seine Hervorragungen das Schraubengewinde. Man hat dreieckigte und viereckigte Schraubengewinde, wie Figur 113. und 114., bei welchen ab die Höhe des Schraubenganges, ad der äußere und ce der innere Halbmesser der Spindel ist. Wenn lediglich vom Halbmesser der Spindel die Rede ist, so wird allemal der mittlere Halbmesser oder das arithmetische Mittel zwischen ad und ce darunter verstanden.

Taf. V. Fig. 113. 114.

Ein cylindrisch ausgehöhlter Körper, in dessen Höhlung Vertiefungen eingeschnitten sind, in welche die Gewinde der Spindel genau passen, heißt eine Schraubenmutter (Cochlea femina. *Écrou*). Spindel und Mutter geben eine Schraube (Cochlea. *Vis*), bei deren Gebrauch entweder die Mutter festgehalten und die Spindel umgedreht oder die Spindel festgehalten und die Mutter umgedreht wird, so daß in beiden Fällen bei jeder Umdrehung entweder die Spindel oder die Mutter um die Höhe eines Schraubenganges weiter rückt. Auch kann man Spindel und Mutter zugleich umdrehen.

§. 222.

Die Höhe eines Schraubenganges, Figur 112., $AF = a'f'$ sei h, und der Halbmesser der Spindel $CA = r$, so ist der Umfang der Spindel $= 2\pi r = aa'$, aber $\operatorname{tgt} a'af = \operatorname{tgt} \alpha = \frac{a'f'}{aa'}$, daher findet man Taf. IV. Fig. 112.

$$\operatorname{tgt} \alpha = \frac{h}{2\pi r}$$

oder man erhält die Tangente des Winkels, welcher der Neigung des Schraubengewindes entspricht, wenn die Höhe des Schraubenganges durch den Umfang der Spindel dividirt wird.

Der vorstehende Ausdruck gilt unbedingt von der Schraubenlinie, welche auf der Oberfläche eines Cylinders beschrieben werden kann. Wenn aber über der Schraubenlinie ein Gewinde von einer bestimmten Gestalt angebracht wird, so liegen zwar alle Punkte der Oberfläche dieses Gewindes, welche von der Spindelaxe gleich weit entfernt sind, in einerlei Schraubenlinie, und jede dieser Linien, welche vom äußersten Punkte b, Figur 113. und 114., bis zum innersten c auf dem Gewinde beschrieben werden kann, hat zwar mit den übrigen gleiche Höhe des Schraubenganges, aber nicht gleichen Neigungswinkel α, weil dieser Winkel für jede auf dem Umfange des Gewindes angebrachte Schraubenlinie desto kleiner wird, je größer der zugehörige Halbmesser r, oder je weiter die Schraubenlinie von der Spindelaxe entfernt ist. Gesetzt, der Halbmesser für diejenige Schraubenlinie, welche durch den einen der innersten Punkte c des Gewindes geht, sei $ec = r'$, so ist

Taf. V. Fig. 113. 114.

$$\operatorname{tgt} \alpha' = \frac{h}{2 \pi r'}.$$

Für eine Schraubenlinie, welche durch einen der äußersten Punkte b des Gewindes geht, sei $ac = r''$, so ist

$$\operatorname{tgt} \alpha'' = \frac{h}{2 \pi r''}.$$

Aber $r'' > r'$, also $\alpha'' < \alpha'$. Nimmt man daher als mittleren Halbmesser der Spindel $r = \frac{r' + r''}{2}$, welcher in der Folge kurz der Halbmesser der Spindel heißen soll, und es ist $\operatorname{tgt} \alpha = \frac{h}{2 \pi r}$, so erhält man für α einen Mittelwerth, größer als α'' und kleiner als α', welchen man mit hinlänglicher Genauigkeit in der Rechnung beibehalten kann.

§. 223.

Aufgabe. In der unbeweglichen und hinlänglich befestigten Mutter DEFG, Figur 115., befindet sich eine vertikale Spindel CK, auf welcher eine Last Q ruhet; Man soll die Größe der am Umfange der Spindel anzu-

Fig. 115.

bringenden Kraft P finden, damit zwischen Kraft und Last ein Gleichgewicht entsteht.

Auflösung. Vorausgesetzt, daß das Gewicht der Spindel mit zur Last Q gerechnet sei, so ist der gesammte Druck vom Gewinde der Spindel auf das Gewinde der Mutter $= Q$. Die gesammte Fläche der Mutter, welche von der Spindel gedrückt wird, werde in eine sehr große Menge gleicher Flächen eingetheilt, von welchen die Verlängerung zweier Seiten jedesmal die Axe schneidet, so ist für den mittlern Halbmesser der Spindel der Neigungswinkel, nach welchem die Last auf einer jeden dieser kleinen Flächen abgleitet, $= \alpha$, also $\operatorname{tgt} \alpha = \frac{h}{2 \pi r}$, wo h die Höhe des Schraubenganges, und r den Halbmesser der Spindel bezeichnet. Ist nun die Anzahl dieser kleinen Flächen $= n$, so ist der Druck auf jede solche kleine Fläche $= \frac{1}{n} Q$. Diese Last kann man sich in der Mitte der kleinen Fläche vereinigt denken, und weil solche nur wie auf einer unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigten Ebene ausweichen kann, so sei die für das Gleichgewicht mit $\frac{1}{n} Q$ erforderliche Horizontalkraft $= \frac{1}{n} P$, alsdann ist §. 194.

$$\frac{1}{n} P = \frac{1}{n} Q \operatorname{tgt} \alpha \text{ oder}$$

$$P = Q \operatorname{tgt} \alpha = \frac{h}{2 \pi r} Q.$$

Da nun die Kraft P an jedem Punkte des Umfangs der Spindel angebracht werden kann (§. 64.), wenn nur ihre Richtung senkrecht auf den Halbmesser AC ist, und in eine Ebene fällt, welche auf der Axe KC senkrecht stehet, so folgt aus der letzten Gleichung

$$P : Q = h : 2\pi r$$

oder für das Gleichgewicht verhält sich die Kraft am Umfange der Schraubenspindel zur Last, welche die Spindel nach der Richtung ihrer Axe preßt, wie die Höhe des Schraubenganges zum Umfange der Spindel.

Wäre die Spindel befestigt, dagegen aber die Mutter belastet und frei, so läßt sich dieser Satz eben so erweisen.

§. 224.

Zusatz. Soll eine Kraft P' am Hebelsarme $CA' = r'$ mit der Last Q im Gleichgewichte seyn, vorausgesetzt daß die Richtung $A'P'$ auf $A'C$ senkrecht steht, und in einer auf der Axe der Spindel senkrechten Ebene liegt, so muß, wenn P' eben die Wirkung als P hervorbringen soll, $r'P' = rP$ seyn (§. 64.). Dies giebt $P = \frac{r'P'}{r}$, also $\frac{r'P'}{r} = \frac{h}{2\pi r} Q$, folglich die Kraft

$$P' = \frac{h}{2\pi r'} Q$$

oder für das Gleichgewicht verhält sich die Kraft P' zur Last Q wie die Höhe des Schraubenganges zum Umfange des Kreises, welcher die Länge des Hebelarms, woran die Kraft wirkt, zum Halbmesser hat.

§. 225.

Weil die Höhe des Schraubenganges gegen die Länge des Hebelarms, woran die Kraft wirkt, nur klein ist, so folgt hieraus, daß man sich der Schrauben mit vielem

Vortheile bedienen kann, wenn es darauf ankommt, eine große Last mit einer geringen Kraft fortzubewegen. Die Reibung erfordert zwar einen ansehnlichen Ueberschuß an Kraft, wenn solche überwältigt werden soll, sie verhindert aber auch, daß die Schraube, wenn ein Gegendruck entsteht, nicht leicht zurückgehen kann. Anwendungen der Schraube, bei welchen die Mutter unbeweglich bleibt, und nur die Spindel umgedreht wird, findet man bei den Hauspressen zur Wäsche, bei den Druckpressen, Münzpressen, Keltern ꝛc. Dagegen bei den großen Buchbinder- und Zeugpressen, beim Zusammenschrauben mittelst Bolzen ꝛc. bleibt die Spindel unbeweglich, und die Mutter wird umgedreht. Noch giebt es einen dritten Fall, bei welchem die Spindel zwar umgedreht wird, aber nicht fortrückt, dagegen rückt die Mutter weiter, ohne umgedreht zu werden, wie beim Erhöhen der Schiffe auf dem Bauplatze, beim Anfschrauben gesenkter Gebäude ꝛc. Als ein besonderer Fall kann auch noch die Schraube ohne Ende (Cochlea infinita. *Vis sans fin*) hieher gerechnet werden, wo eine um ihre Axe bewegliche Spindel ohne Fortrücken umgedreht wird. Anstatt der Mutter greifen aber die Zähne eines Rades zwischen die Schraubengewinde, und diese Zähne werden alsdann eben so wie die Mütter durch die Umdrehung der Spindel fortgeschoben, so daß auch hier in Bezug auf Kraft und Widerstand, die vorher erwiesenen Bedingungen für das Gleichgewicht gelten. Die Schraube ohne Ende gehört übrigens zu den zusammengesetzten Maschinen, und daher in die Maschinenlehre.

§. 226.

Aufgabe. Die Kraft zu finden, welche bei der Schraube sowohl zum Erheben als auch zum Erhalten der Last mit Rücksicht auf Reibung erforderlich ist.

Auflösung. Mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung sei V die Kraft, welche der Last Q, die nach der Richtung der Spindelaxe wirkt, und der Reibung das Gleichgewicht hält, oder wo beim geringsten Ueberschuß an Kraft eine Bewegung der Last erfolgen muß, so kann man sich wie §. 223. vorstellen, daß die Last Q auf derjenigen Schraubenlinie vertheilt sei, welche durch den mittlern Spindelhalbmesser geht, so daß die Last unter einem Winkel α gegen den Horizont abzugleiten strebt. Dieser wirkt die Kraft V horizontal entgegen, daher ist nach §. 198. (wenn daselbst $90° - \alpha$ statt α gesetzt wird) die zum Erheben nöthige Kraft

$$V = \frac{Q\,(1 + \mu \cot \alpha)}{\cot \alpha - \mu}$$

und eben so findet man, wenn V′ die zum Erhalten der Last nöthige Kraft bezeichnet, nach §. 201.

$$V' = \frac{Q\,(1 - \mu \cot \alpha)}{\cot \alpha + \mu}.$$

Es ist aber §. 223. $\operatorname{tgt} \alpha = \frac{h}{2\pi r}$, also $\cot \alpha = \frac{2\pi r}{h}$.

Diesen Werth in die obigen Gleichungen gesetzt, giebt die zum Erheben nöthige Kraft

$$\text{(I)}\quad V = \frac{h + 2\pi\mu r}{2\pi r - \mu h}\, Q$$

und für die zum Erhalten nöthige Kraft ist

$$\text{(II)}\quad V' = \frac{h - 2\pi\mu r}{2\pi r + \mu h}\, Q.$$

Der letztere Ausdruck dient dazu, um zu beurtheilen, wie viel Kraft V' angewandt werden muß, damit die Schraube durch die Last Q nicht zurückgedreht werden kann.

Wollte man wissen, unter welchen Umständen eine Schraube von der Last nicht zurückgedreht werden kann, ohne daß zum Festhalten der Schraube eine andere Kraft als die Reibung angewandt werde, so muß $V' = 0$, also $h - 2\pi\mu r = 0$ seyn. Hieraus erhält man die Bedingung

$$\frac{h}{2\pi r} = \mu$$

d. h. wenn das Gewinde einer Schraube so angeordnet ist, daß die Höhe des Schraubenganges, durch den Umfang der Spindel dividirt, dem Reibungskoeffizienten gleich ist, so kann die Schraube in keinem Falle durch die Last zurückgedreht werden.

Es sei $\mu = \frac{1}{6}$, so ist $2\pi\mu = 1{,}047 = \frac{h}{r}$. Wenn also die Reibung dem sechsten Theile des Drucks gleich ist, so wird eine Schraube von der Last noch nicht zurückgedreht werden können, wenn auch die Höhe ihrer Schraubengänge noch etwas größer, als der Halbmesser der Schraubenspindel ist.

Neuntes Kapitel.

Vom Rade an der Welle.

§. 227.

Taf. V. Fig. 116. An einem Cylinder AB, Figur 116., welcher hier eine Welle (Axis) genannt wird, ist eine kreisförmige Scheibe DE, ein Rad (Peritrochium. *Roue*) so befestigt, daß die Fläche des Rades senkrecht auf der Axe der Welle steht, und eins ohne das andere nicht umgedreht werden kann. An den Enden der Welle bei F und G sind Zapfen (*Tourillons*) in der verlängerten Wellaxe angebracht, welche auf Pfannen (*Sous-bandes*) fest liegen und sich in denselben leicht umdrehen können. Diese Einrichtung heißt ein Rad an der Welle (Axis in peritrochio. *Axe dans une roue*), wo gewöhnlich am Umfange des Rades nach der Richtung der Tangente eine Kraft wirkt, die einer Last am Umfange der Welle, oder auch an einem zweiten Rade das Gleichgewicht halten soll.

Liegt die Welle wagerecht, so heißt das Rad an der Welle ein Haspel (Sucula. *Treuil, Tour*); und wenn die Welle vertikal steht, eine Winde oder ein Göpel (Ergata. *Cabestan*).

Weil die Kraft am Umfange des Rades auf verschiedene Weise angebracht seyn kann, so unterscheidet man noch bei den Haspeln:

das Seilrad, wenn die Kraft an einem Seile wirkt, welches sich an dem Umfange des Rades befindet;

den Kreuzhaspel (Sucula), wenn statt des Rades mittelst kreuzweis durchgesteckter Arme (Scytalæ. *Barres*) die Welle umgedreht wird;

das Spillrad (*roue de carrière*), wo am Umfange des Rades Sprossen, parallel mit der Wellaxe, angebracht sind;

das Hornrad, wo diese Sprossen in der verlängerten Richtung der Halbmesser des Rades angebracht werden;

den Hornhaspel, bei welchem statt des Rades am Ende der Welle, wo sich die Zapfen befinden, Handgriffe oder Kurbeln (Haspelhörner) (Manubria. *Manivelles*) angebracht sind;

das Laufrad, welches aus einem hohlen Rade oder einer Trommel (*Tambour*) bestehet, innerhalb dessen Umfang Menschen oder Thiere durch ihr Gewicht eine Umdrehung bewirken.

Bei den Winden oder Göpeln unterscheidet man die Erdwinde, welche von Menschen mittelst Stangen oder Arme, die durch die Welle gesteckt sind, umgedreht werden, von den Pferdegöpeln, bei welchen lange Arme oder Zugbäume an der Welle befestigt sind, die man aber durch Pferde in Bewegung setzt.

Hat die Welle eine schiefe Stellung, und besteht das Rad aus einer Scheibe, auf welcher sich Menschen oder Thiere bewegen, um dadurch eine Umdrehung zu bewirken, so heißt diese Einrichtung eine Tretscheibe.

§. 228.

Wirken Kraft und Last nach Richtungen, welche auf den Halbmessern des Rades und der Welle senkrecht sind, so ist es einerlei, ob die Welle stehend oder liegend angenommen wird. Nur in Absicht der Reibung an den Zapfen entsteht ein Unterschied in Absicht der Kraft für das Gleichgewicht. Wird die Reibung noch bei Seite gesetzt, und man nennt den Halbmesser des Rades
Taf. V. Fig. 116. CD = a, Figur 116, den Halbmesser der Welle
$\frac{a}{r}$ IK = r, die Kraft in D = P, die Last am Umfange der Welle = Q, so ist §. 64. aP = rQ, oder die Kraft

$$P = \frac{rQ}{a} \text{ oder auch}$$

$$P : Q = r : a$$

d. h. die Kraft verhält sich zur Last umgekehrt wie der Halbmesser des Rades zum Halbmesser der Welle.

§. 229.

Bei dem Laufrade, wo sich ein Mensch oder Thier am Umfange innerhalb des Rades befindet, und nur durch sein Gewicht vertikal abwärts wirkt, kann nur ein Theil dieses Gewichts auf die Umdrehung des Rades verwandt
Fig. 117. werden. Es sei Figur 117. AC = a der Halbmesser des Rades, an welchem in A ein Gewicht P vertikal abwärts wirkt; BC = r der Halbmesser der Welle, an deren Umfange die Last Q hängt, und der Winkel, welchen AC mit dem vertikalen Halbmesser CD einschließt, oder ACD = α. Zerlegt man nun die Kraft P nach AE in der verlängerten Richtung des Halbmessers CA,

und nach AT in der Richtung der Tangente, weil der Punkt A nur nach dieser Richtung ausweichen kann, so ist die Kraft nach

$$AE = P \cos \alpha$$

welche keine Bewegung des Rades hervorbringen kann. Ferner ist die Kraft nach

$$AT = P \sin \alpha$$

und diese allein hält der Last das Gleichgewicht. Es ist daher wie §. 228.

$a \,.\, P \sin \alpha = r Q$, und hieraus die Kraft

$$P = \frac{rQ}{a \sin \alpha}.$$

Hieraus folgt, daß die erforderliche Kraft desto kleiner ist, je größer der Winkel α wird, oder je höher der Punkt A gegen D liegt. Sie erhält ihren kleinsten Werth in F am wagerechten Halbmesser, und ihren größten in D am vertikalen Halbmesser, wo sie unendlich groß seyn müßte, um der Last das Gleichgewicht zu halten.

Gewöhnlich ist für Menschen beim Laufrade der Winkel $\alpha = 30$ Grad. Bei einem größern Winkel würde man zwar ein größeres Moment erhalten, allein die Stellung des Menschen wird so steil und das Aufsteigen so beschwerlich, daß man alsdann nicht auf eine Dauer der Bewegung von einer bis zwei Stunden rechnen kann. Für $\alpha = 30$ Grad ist $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, daher in diesem Falle die Kraft

$$P = \frac{2r}{a} Q.$$

§. 230.

Aufgabe. An einem Haspel die Kraft zu finden, welche mit der Last und der Reibung an den Zapfen in den Pfannen das Gleichgewicht hält.

Taf. V. Fig. 118. V a r M ϱ

Auflösung. Die Kraft V, Figur 118., wirke am Halbmesser AC = a des Rades, und die Last Q am Halbmesser BC = r der Welle. Das Gewicht des Haspels sei = M, welches im Mittelpunkte C des Zapfens, dessen Halbmesser CD = ϱ ist, vertikal abwärts nach CM wirkt. Der Haspel hat zwar an beiden Enden der Welle Zapfen, die auf Pfannen ruhen, welche die Zapfen umgeben, und man müßte daher die Reibung eines jeden Zapfens besonders untersuchen. Weil aber hier beide Zapfen gleich groß und von einerlei Materie angenommen werden, und weil die drückenden Kräfte eben so stark beide Zapfen pressen, als wenn solche vereint nur auf einen Zapfen wirkten, so wird man hier wegen der kürzern Darstellung die letztere Voraussetzung beibehalten.

Weil von der ganzen Zurüstung, an welcher die Kräfte und Widerstände wirken, nur die Zapfen an ihrem Umfange durch die Pfannen unterstützt sind, so muß die mittlere Kraft, welche aus sämmtlichen Kräften entspringt, durch irgend einen Punkt im Umfange des Zapfens gehen, weil sonst kein Gleichgewicht möglich ist.

Ist G dieser Punkt, so müssen sich sämmtliche Kräfte, wenn derselbe unterstützt wird, einander im Gleichgewicht erhalten; auch entsteht auf den Punkt G ein eben so großer Druck, als wenn die Kräfte V, Q, M an G nach ihren parallelen Richtungen in v, q, m angebracht wären (§. 58.). Man ziehe durch CG die Linie CR, und darauf senkrecht in G die Linie HI, so lassen sich die in G wirkenden Pressungen nach den Richtungen GR und HI zerlegen, wovon der Druck nach GR keine Bewegung, aber Reibung in der Pfanne verursacht. Der Druck nach GI fällt in die Tangente der Pfanne, verursacht also keine Reibung, und muß Bewegung erzeugen, wenn solche nicht von der Reibung am Umfange des Zapfens aufgehoben wird, weshalb zur Erhaltung des Gleichgewichts der nach GI entstehende Druck der Reibung gleich seyn muß.

Um die Richtung der Kräfte anzugeben, sei OZ eine wagerechte Linie, welche von der verlängerten Richtung der Kraft V unter dem Winkel OEV $= \alpha$, und von Q unter dem Winkel OFQ $= \beta$ geschnitten wird. Auch sei der Winkel GHC $= \varphi$, daher auch Taf. V Fig. 18. α β

GCD $=$ RGm $= \varphi$, und man erhält die Winkel

HGv$=\alpha+\varphi$; HGm$=90^\circ+\varphi$; HGq$=\beta+\varphi$;

also $\sin(90^\circ+\varphi)=\cos\varphi$ und $\cos(90^\circ+\varphi)=-\sin\varphi$.

Durch Zerlegung der auf den Punkt G wirkenden Kräfte V, M, Q entspringe nach der Richtung GR eine Kraft R, und nach GI eine Kraft R′, so erhält man §. 24.

$R = V\sin(\alpha+\varphi) + M\cos\varphi + Q\sin(\beta+\varphi)$ und

$R' = V\cos(\alpha+\varphi) - M\sin\varphi + Q\cos(\beta+\varphi)$.

Die von der Kraft R entstehende Reibung sei $= \mu R$, so widersteht solche der Umdrehung des Zapfens nach der Richtung GH, und ist der Kraft R′ grade entgegengesetzt, daher für das Gleichgewicht $R' = \mu R$, oder

$V\cos(\alpha+\varphi) + Q\cos(\beta+\varphi) - M\sin\varphi = \mu R$, aber auch

$$[V \sin(\alpha + \varphi) + Q \sin(\beta + \varphi) + M \cos\varphi]^2 = R^2 \text{ und}$$
$$[V \cos(\alpha + \varphi) + Q \cos(\beta + \varphi) - M \sin\varphi]^2 = \mu^2 R^2.$$

Die Parenthesen aufgelöst, beide Gleichungen addirt, und die Glieder, welche sich aufheben, weggelassen, so erhält man, weil

$$\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2 = 1$$
$$\sin(\alpha+\varphi)\sin(\beta+\varphi) + \cos(\alpha+\varphi)\cos(\beta+\varphi) = \cos(\beta-\alpha)$$
$$\sin(\alpha+\varphi)\cos\varphi - \cos(\alpha+\varphi)\sin\varphi = \sin\alpha \text{ u. s. w. ist,}$$

$$V^2 + Q^2 + M^2 + 2VQ\cos(\beta-\alpha) + 2VM\sin\alpha + 2QM\sin\beta = (1+\mu^2)R^2$$

Weil die Umdrehung um den Punkt C erfolgt, so müssen die entgegengesetzten Momente in Bezug auf diesen Punkt einander gleich seyn, §. 53., also

$$aV = rQ + \mu\varrho R, \text{ daher } R^2 = \frac{(aV - rQ)^2}{\mu^2\varrho^2}.$$

Diesen Werth statt R^2 in die obige Gleichung eingeführt, solche nach V geordnet, und

$$\frac{\mu^2\varrho^2}{1+\mu^2} = f^2$$

gesetzt, giebt

$$V^2 - 2V\frac{arQ + f^2[Q\cos(\beta-\alpha) + M\sin\alpha]}{a^2 - f^2} + \frac{r^2Q^2 - f^2(Q^2 + M^2 + 2MQ\sin\beta)}{a^2 - f^2} = 0$$

und wenn

$$A = arQ + f^2[Q\cos(\beta-\alpha) + M\sin\alpha] \text{ und}$$
$$B = r^2Q^2 - f^2[Q^2 + M^2 + 2QM\sin\beta]$$

gesetzt wird, so findet man die für das Gleichgewicht erforderliche Kraft

$$V = \frac{A + \sqrt{[A^2 - (a^2 - f^2)B]}}{a^2 - f^2}.$$

Beispiel. Der Halbmesser des Rades sei 10 Fuß, der Welle 1 Fuß, und des Zapfens 1 Zoll. An der Welle sei eine Last von 1000 Pfund angebracht, und die ganze Zurüstung, welche auf den Pfannen ruht, wiege 2000 Pfund. Die Richtung der Kraft schneide den Horizont unter einem Winkel von 50, und die der Last unter einem Winkel von 120 Grad. Ist ferner $\mu = \frac{1}{5}$, so erhält man

$$a = 10;\ r = 1;\ \varrho = \tfrac{1}{12}\ \text{Fuß.}$$

$$Q = 1000;\ M = 2000\ \text{Pfund}$$

$$\alpha = 50;\ \beta = 120\ \text{Grad, also}$$

$$f^2 = \frac{\frac{1}{25} \cdot \frac{1}{144}}{1 + \frac{1}{25}} = 0{,}000267$$

$$A = 10.1000 + 0{,}000267\,[1000.\cos 70^\circ + 2000.\sin 50^\circ] = 10000{,}5004$$

$$B = 1000000 - 0{,}000267\,[5000000 + 4000000\,\sin 120^\circ] = 997740{,}085$$

und hieraus die erforderliche Kraft

$$V = \frac{10000{,}5004 + \sqrt{236299{,}0724}}{99{,}9997} = 104{,}867\ \text{Pfund.}$$

Anmerkung. In den Lehrbüchern von Karsten, Mönnich 2c. wird vorausgesetzt, daß der Punkt G, Figur 118., vertikal unter C in D falle. Dies erleichtert zwar die Untersuchung, und die entstehenden Resultate sind nur wenig abweichend von den hier gefundenen; (m. s. §. 238.) allein da diese Vorstellung nicht ganz wahr ist, so hat man hier die richtigere gewählt. M. s. hierüber Taf. V. Fig. 118.

Euleri, Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum. Rostochii 1765. Supplementum, Caput III. p. 464. etc.

§. 231.

1. Zusatz. Weil ϱ gegen a sehr klein ist, und f ebenfalls sehr klein ausfällt, wie man sich aus den berechneten Werthen §. 238. leicht überzeugt, so kann man f^2 gegen a^2 als unbedeutend weglassen, und a^2 statt $a^2 - f^2$ setzen. Dies giebt die Kraft

$$V = \frac{A + \sqrt{(A^2 - a^2 B)}}{a^2}.$$

Beispiel. Mit Beibehaltung der Abmessungen in dem Beispiele des vorigen §. ist hier die Kraft

$$V = \frac{10000{,}5004 + \sqrt{235999{,}75}}{100} = 104{,}863 \text{ Pfund},$$

welches von 104, 867 Pfund nur wenig verschieden ist.

§. 232.

2. Zusatz. Wird das Gewicht des Haspels bei Seite gesetzt, so ist $M = 0$, und man erhält

$A = [ar + f^2 \cos(\beta - \alpha)]\, Q$ und

$B = (r^2 - f^2)\, Q^2$

daher erhält man, wenn man §. 230. $f^2 = 0$ setzt, welches ohne Bedenken geschehn kann, nach gehöriger Abkürzung die Kraft

$$(\mathrm{I})\ V = \frac{ar + f^2 \cos(\beta - \alpha) + f\sqrt{[a^2 + r^2 + 2ar\cos(\beta - \alpha)]}}{a^2 - f^2} \cdot Q$$

wo $\beta - \alpha$ den Winkel bezeichnet, welchen die Richtungen der Kräfte V, Q nach oben verlängert einschließen, und $f^2 = \frac{\mu^2 \varrho^2}{1 + \mu^2}$ ist. Weil aber dieser Ausdruck jederzeit nur sehr klein ausfällt, und $\cos(\beta - \alpha)$ nie größer als ± 1 wird, so kann man auch das Glied $f^2 \cos(\beta - \alpha)$ ohne Nachtheil weglassen, und erhält alsdann

$$(\mathrm{II})\ V = \frac{ar + f\sqrt{[a^2 + r^2 + 2ar\cos(\beta - \alpha)]}}{a^2} \cdot Q$$

Bleiben alle Größen bis auf den Winkel α, unter welchem die Kraft V den Horizont schneidet, ungeändert, so erhält V seinen kleinsten Werth, wenn $\cos(\beta - \alpha)$ seinen größten negativen Werth erhält. Dieser ist -1, wenn $\beta - \alpha$ oder $\alpha - \beta = 180°$, oder wenn $\alpha = \beta - 180°$ oder $\alpha = \beta + 180°$ ist. Soll daher die kleinste Kraft zur Umdrehung des Haspels angewandt werden, so muß die Differenz der beiden Winkel, unter welchen die Richtungen der Kräfte V, Q den Horizont schneiden, 180 Grade betragen, oder beide Richtungen müssen nach entgegengesetzten Seiten liegen und parallel seyn.

Wäre z. B. $\beta = 60°$, so müßte $\alpha = 240°$ seyn. Für $\beta = 220°$ wäre $\alpha = 40°$.

Eben so können die Umstände angegeben werden, unter welchen die Kraft V am nachtheiligsten wirkt, oder ihren größten Werth erhält. Dies geschiehet, wenn $\cos(\beta - \alpha)$ am größten, oder $= +1$ ist. Dieser Fall tritt ein, wenn $\beta - \alpha = 0$ wird. Die erforderliche Kraft erhält daher ihre nachtheiligste Richtung, oder wird am größten, wenn ihre Richtung mit dem Horizonte einen eben so großen Winkel als die Last einschließt, oder wenn beide Richtungen nach einerlei Seite liegen und parallel sind.

1. Beispiel. Für $a = 10$, $r = 1$, $\varrho = \frac{1}{10}$ Fuß, und für $Q = 1000$ Pfund findet man, wenn $\alpha = 60°$ und $\beta = 240°$ ist, für $\mu = \frac{1}{5}$

$$f^2 = \frac{\frac{1}{25} \cdot \frac{1}{100}}{1 + \frac{1}{25}} = 0{,}0003846 \text{ und } f = 0{,}0196$$

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos 180° = -1, \text{ daher die Kraft}$$

$$V = \frac{10 + 0{,}0196\sqrt{81}}{100} \cdot 1000 = 101{,}764 \text{ Pfund.}$$

2. Beispiel. Für $\alpha = \beta = 70°$ erhält man mit Beibehaltung der übrigen vorstehenden Werthe

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos 0° = 1, \text{ also}$$

$$V = \frac{10 + 0{,}0196\sqrt{121}}{100} \cdot 1000 = 102{,}156 \text{ Pfund.}$$

§. 233.

3. Zusatz. Die Richtung der Last Q bilde mit dem Horizont einen Winkel $\beta = 90°$ oder sei vertikal unter-

wärts gerichtet, so ist $\cos(\beta - \alpha) = \sin\alpha$ und $\sin\beta = 1$ also §. 230.

$$A = a r Q + f^2 (M + Q) \sin\alpha$$
$$B = r^2 Q^2 - f^2 (M + Q)^2$$

daher wenn wieder, wie solches in der Folge immer geschehen wird $f^2 = 0$ gesetzt wird, so erhält man die Kraft

$$\text{(I)}\ V = \frac{a r Q + f^2 (M+Q) \sin\alpha + f\sqrt{[a^2 (M+Q)^2 + r^2 Q^2 + 2 a r Q (M+Q) \sin\alpha]}}{a^2 - f^2}$$

Wirkt die Kraft vertikal aufwärts, so ist $\alpha = 270°$ also $\sin\alpha = -1$ und man erhält

$$\text{(II)}\ V = \frac{r Q + f (M + Q)}{a + f}$$

Wirkt die Kraft V vertikal unterwärts, so ist $\alpha = 90°$ also $\sin\alpha = 1$ daher

$$\text{(III)}\ V = \frac{r Q + f (M + Q)}{a - f}$$

Fällt die Richtung der Kraft horizontal, so ist $\alpha = 0$ oder $= 180°$ also $\sin\alpha = 0$, folglich die Kraft

$$\text{(IV)}\ V = \frac{a r Q + f\sqrt{[a^2 (M + Q)^2 + r^2 Q^2]}}{a^2 - f^2}$$

wo man im Nenner $f^2 = 0$ setzen kann.

Beispiel. Für $\alpha = 30°$; $a = 10$, $r = 1$, $\varrho = \frac{1}{10}$ Fuß, für $Q = 1000$ und $M = 2000$ Pfund findet man, wenn $\mu = \frac{1}{5}$ gesetzt wird

$f^2 = 0{,}0003846$ und $f = 0{,}0196$, daher

nach (I) $V = \frac{10000{,}5769 + 0{,}0196 \sqrt{931000000}}{100} = 105{,}986$ Pfund,

nach (II) $V = \frac{1058{,}8}{10{,}0196} = 105{,}673$ Pfund,

nach (III) $V = \frac{1058{,}8}{9{,}9804} = 106{,}088$ Pfund,

nach (IV) $V = \frac{10588{,}91}{100} = 105{,}889$ Pfund.

Will man den vorstehenden Ausdrücken (II) und (III) eine zur Berechnung noch bequemere Gestalt geben, bei welcher zugleich der Antheil, welcher auf die Reibung kommt, abgesondert ist, so kann man folgendergestalt verfahren. Man dividire mit dem Zähler a + f in den Nenner $rQ + f(M + Q)$, so erhält man zum Quotienten $\frac{rQ}{a}$ und der Rest ist $-\frac{rfQ}{a} + f(M+Q) = f\left(\frac{a-r}{a}Q + M\right)$.

Wird nun von diesem Reste nur allein der Faktor f durch a + f dividiret, so erhält man

$$\frac{f}{a+f} = \frac{f}{a} - \frac{f^2}{a^2} + \frac{f^3}{a^3} - \frac{f^4}{a^4} + \ldots\ldots \text{ folglich}$$

$$\frac{rQ + f(M+Q)}{a+f} = \frac{rQ}{a} + \left(\frac{a-r}{a}Q + M\right)\left(\frac{f}{a} - \frac{f^2}{a^2} + \ldots\ldots\right)$$

Da nun f gegen a sehr klein ist, so können $\frac{f^2}{a^2}$; $\frac{f^3}{a^3}$; ..... als unbedeutend weggelassen werden, und man erhält, wenn die Kraft V vertikal aufwärts wirkt,

$$[\text{II}]\ V = \frac{rQ}{a} + \frac{f}{a}\left(\frac{a-r}{a}Q + M\right).$$

Durch ein ganz ähnliches Verfahren findet man, wenn die Kraft V vertikal unterwärts wirkt,

$$[\text{III}]\ V = \frac{rQ}{a} + \frac{f}{a}\left(\frac{a+r}{a}Q + M\right).$$

Diese Darstellung ist vom Hrn. Prof. Gerstner angegeben, m. s. dessen Abhandlung:

Vergleichung der Kraft und Last beim Räderwerk mit Rücksicht auf die Reibung; in den neuen Abhandlungen der k. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. 1. Band. Wien und Prag, 1791. S. 257. u. f.

§. 234.

4. Zusatz. Die Last Q sei vertikal aufwärts gerichtet, so ist $\beta = 270°$, also $\cos(\beta - \alpha) = -\sin\alpha$ und $\sin\beta = -1$, daher §. 230.

$$A = arQ + f^2(M - Q)\sin\alpha$$
$$B = r^2Q^2 - f^2(M - Q)^2,$$

und man findet die Kraft

$$\text{(I)}\ V = \frac{arQ + f^2(M-Q)\sin\alpha + f\sqrt{[a^2(M-Q)^2 + 2arQ(M-Q)\sin\alpha + r^2Q^2]}}{a^2 - f^2}.$$

Wirkt die Kraft vertikal aufwärts, so ist $\alpha = 270°$, also $\sin\alpha = -1$, daher

$$\text{(II)}\ V = \frac{rQ + f(M - Q)}{a + f}.$$

Wirkt die Kraft vertikal unterwärts, so ist $\alpha = 90°$, also $\sin\alpha = 1$, daher

$$\text{(III)}\ V = \frac{rQ + f(M - Q)}{a - f}.$$

Wenn endlich die Richtung der Kraft horizontal ist, also $\sin\alpha = 0$ wird, so erhält man

$$\text{(IV)}\ V = \frac{arQ + f\sqrt{[a^2(M-Q)^2 + r^2Q^2]}}{a^2 - f^2}.$$

Beim Gebrauche der Ausdrücke (I) und (IV) kann f^2 im Nenner wie §. 231. weggelassen werden.

Beispiel. Für $\alpha = 30$ Grad; $a = 10$, $r = 1$, $\varrho = \frac{1}{10}$ Fuß; $Q = 1000$, $M = 2000$ Pfund findet man, wenn $\mu = \frac{1}{5}$ gesetzt wird,

nach (I) $V = \frac{10208,428}{100} = 102,084$ Pfund,

nach (II) $V = \frac{1019,6}{10,0196} = 101,761$ Pfund,

nach (III) $V = \frac{1019,6}{9,9804} = 102,160$ Pfund.

Durch ein ähnliches Verfahren wie am Ende §. 233. erhält man nahe genug, wenn die Kraft vertikal aufwärts wirkt,

$$[\text{II}]\ V = \frac{rQ}{a} + \frac{f}{a}\left(M - \frac{a+r}{a}Q\right),$$

und wenn die Kraft vertikal unterwärts wirkt,

$$[\text{III}]\ V = \frac{rQ}{a} + \frac{f}{a}\left(M - \frac{a-r}{a}Q\right).$$

§. 235.

5. Zusatz. Wäre die Kraft V vertikal abwärts gerichtet, so ist $\alpha = 90^\circ$, also $\sin\alpha = 1$, daher §. 230.

$A = arQ + f^2[Q\sin\beta + M]$ und

$B = r^2Q^2 - f^2[Q^2 + M^2 + 2QM\sin\beta]$, also §. 231.

$$V = \frac{arQ + f^2(Q\sin\beta + M) + f\sqrt{[2arQ(Q\sin\beta + M) - a^2(Q^2 + M^2 + 2QM\sin\beta)]}}{a^2}$$

§. 236.

6. Zusatz. Wäre r der Halbmesser einer festen Rolle, um welche ein Seil geschlagen ist, an dessen Ende die Last Q frei herunter hängt, so ist hier $r = a$, und man erhält die zur Erhaltung der Last und Ueberwältigung der Reibung erforderliche Kraft §. 233. III.

$$(\text{I})\ V = \frac{(r+f)Q + fM}{r-f}.$$

Für $M = 0$ wird

$$(\text{II})\ V = \frac{r+f}{r-f}Q.$$

Es ist zur Bestimmung der Reibung gleichgültig, ob der Zapfen an der Rolle fest ist, und sich mit derselben herum dreht, oder ob sich die Rolle um einen Bolzen dreht, wenn nur im ersten Falle der Halbmesser des Zapsens, und im zweiten der Halbmesser von der Oeffnung in der Rolle statt ϱ in Rechnung gebracht wird.

Beispiel. Für $r = \frac{1}{2}$, $\varrho = \frac{1}{24}$ Fuß, $Q = 1000$ und $M = 40$ Pfund erhält man ohne Rücksicht auf das Gewicht und die Steifigkeit des Seils, für $\mu = \frac{1}{5}$

$$f = \frac{\varrho \mu}{\sqrt{(1 + \mu^2)}} = \frac{\frac{1}{24} \cdot \frac{1}{5}}{\sqrt{(1 + \frac{1}{25})}} = \frac{\sqrt{26}}{24 \cdot 26} = 0,00817$$

also die Kraft

$$V = \frac{5,0817 \cdot 1000 + 0,0817 \cdot 40}{4,9183} = 1033,89 \text{ Pfund.}$$

Für $M = 0$ wäre

$$V = \frac{5,0817}{4,9183} \cdot 1000 = 1033,22 \text{ Pfund.}$$

§. 237.

Taf. IV. Fig. 90. 7. Zusatz. An einer beweglichen Rolle B, Figur 90., sei eine Last W aufgehängt, und die Rolle werde mittelst eines um sie geschlagenen Seils A B V dergestalt gehalten, daß an dem einen Ende desselben die Kraft V vertikal aufwärts wirke, das andere Ende aber bei A befestiget sei. Der Punkt A werde mit der Kraft Q vertikal abwärts gezogen, so ist, wenn man das Gewicht der Rolle $= M$ setzt,

$$W + M = Q + V \text{ oder } Q = W + M - V.$$

Weil der Obertheil der Hülse hier die Stelle der Pfanne vertritt, so denke man sich die ganze unveränderte Zurüstung umgekehrt, dann wird M negativ, und man erhält §. 233. III., weil $a = r$ ist,

$$V = \frac{rQ + f(Q - M)}{r - f} \text{ oder } Q = \frac{(r - f)V + fM}{r + f},$$

und hieraus in Verbindung mit dem zuerst für Q gefundenen Werthe findet man die zur Ueberwältigung der Last W und der Reibung erforderliche Kraft

$$\text{(I) } V = \frac{r(W + M) + fW}{2r}.$$

Für $M = 0$ wird

$$\text{(II) } V = \frac{r + f}{2r} W.$$

Beispiel. Die Last, welche an der Rolle hängt, wiege 1000, und die Rolle mit dem Zubehör 40 Pfund. Ferner sei $r = \frac{1}{2}$, $\varrho = \frac{1}{24}$, und $\mu = \frac{1}{5}$, so ist, wie §. 236.,

$$f = 0{,}00817$$

$$V = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1040 + 0{,}00817 \cdot 1000}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 528{,}17 \text{ Pfund}$$

und wenn $M = 0$ gesetzt wird

$$V = 0{,}50817 \cdot 1000 = 508{,}17 \text{ Pfund.}$$

§. 238.

Bei der allgemeinen Untersuchung §. 230. ist der Unterstützungspunkt G, Figur 118., von der gesammten Zurüstung da angenommen worden, wo solchen das Gleichgewicht erfordert. Wollte man der leichtern Rechnung wegen, wie gewöhnlich, annehmen, daß der Unterstützungspunkt G in die Vertikallinie CD fällt, welche durch den Mittelpunkt des Zapfens geht, so erhält man, mit Beibehaltung der angenommenen Bezeichnung, wenn man die Kräfte V und Q vertikal und horizontal zerlegt, die Taf. V. Fig. 118.

Summe der Vertikalpressungen $= V \sin\alpha + Q \sin(180^\circ - \beta) + M$
$= V \sin\alpha + Q \sin\beta + M$

Summe der Horizontalpressungen $= V \cos\alpha + Q \cos(180^\circ - \beta)$
$= V \cos\alpha + Q \cos\beta$

hieraus findet man, wenn R die entspringende Mittelkraft bezeichnet (§. 20. VI.)

$$R^2 = (V \sin\alpha + Q \sin\beta + M)^2 + (V \cos\alpha + Q \cos\beta)^2$$

oder

$$R^2 = V^2 + Q^2 + M^2 + 2VQ\cos(\beta - \alpha) + 2VM\sin\alpha + 2QM\sin\beta$$

Nimmt man die Momente in Bezug auf den Umdrehungspunkt C, so erhält man

$$aV = rQ + \mu\varrho R \text{ daher } R^2 = \frac{(aV - rQ)^2}{\mu^2\varrho^2}$$

und wenn man diesen Werth statt R^2 in die obige Gleichung setzt, so erhält man

$$V^2 - 2V\frac{arQ + \mu^2\varrho^2[Q\cos(\beta - \alpha) + M\sin\alpha]}{a^2 - \mu^2\varrho^2} + \frac{r^2Q^2 - \mu^2\varrho^2(Q^2 + M^2 + 2QM\sin\beta)}{a^2 - \mu^2\varrho^2} = 0$$

Dieser Ausdruck ist mit dem §. 230. gefundenen ganz einerlei, nur daß daselbst f^2 oder $\frac{\mu^2\varrho^2}{1 + \mu^2}$ steht, wo hier nur $\mu^2\varrho^2$ vorkommt. Es ist aber für

$\mu = \frac{1}{3}$; $\mu^2 = 0{,}1111$ und $\frac{\mu^2}{1 + \mu^2} = 0{,}1000$

$\mu = \frac{1}{4}$; $\mu^2 = 0{,}0625$ - - - $= 0{,}0588$

$\mu = \frac{1}{5}$; $\mu^2 = 0{,}0400$ - - - $= 0{,}0385$

$\mu = \frac{1}{6}$; $\mu^2 = 0{,}0278$ - - - $= 0{,}0270$

$\mu = \frac{1}{10}$; $\mu^2 = 0{,}0100$ - - - $= 0{,}0099$

Da nun überdies ϱ^2 gewöhnlich sehr klein ist, so kann man in der Ausübung um so mehr $\mu\varrho$ statt f setzen, weil sich doch der Werth von μ nicht ganz genau bestimmen läßt. Man kann daher alle in den vorhergehenden §. §. für V abgeleitete Werthe beibehalten, wenn man $\mu\varrho$ statt f setzt. Aus diesen Gründen wird man sich in der Folge jederzeit die Vorstellung erlauben, daß der Mittelpunkt sämmtlicher Pressungen in die Vertikallinie fällt, welche durch den Mittelpunkt des Zapfens geht.

§. 239.

Aufgabe. Das Moment der Reibung auf der Grundfläche eines stehenden Zapfens zu finden.

Taf. V. Fig. 119. 1. Auflösung. Es sei AA', Figur 119., die ebene und kreisförmige Grundfläche eines vertikal aufwärts stehenden Zapfens, über welcher eine Last M gleichförmig verbreitet ist, so werden gleich große Theile dieser Fläche gleich

gleich stark gedrückt. Man setze den Halbmesser $CA = r$, und theile denselben in eine sehr große Anzahl von n gleichen Theilen, wie Pp, so ist $Pp = \frac{1}{n} r$, und wenn man $CP = x$ setzt, und annimmt, daß sich der Zapfen um C dreht, so werden die Punkte P, p zwei concentrische Kreise beschreiben, zwischen welchen eine ringförmige Fläche liegt, deren Inhalt $= \frac{1}{n} r \cdot 2\pi x = \frac{2\pi r x}{n}$ ist. Den Druck auf diese Ringfläche findet man

$$\pi r^2 : \frac{2\pi r x}{n} = M : \frac{2x}{nr} M$$

daher ist die davon entstehende Reibung $= \frac{2\mu x}{nr} M$, und das Moment derselben $= x \cdot \frac{2\mu x}{nr} M = \frac{2\mu x^2}{nr} M$, wobei vorausgesetzt ist, daß n außerordentlich groß, also $\frac{1}{n}$ ein äußerst kleiner Bruch wird.

Sucht man nun für jedes Theilchen wie Pp das zugehörige Moment der Reibung, indem x nach einander die Werthe $\frac{1}{n} r$, $\frac{2}{n} r$, $\frac{3}{n} r \ldots$ bis $\frac{n}{n} r$ erhält, so muß die Summe dieser Momente dem Momente der Reibung von der ganzen Fläche AA' gleich seyn.

Für das erste Theilchen bei C ist $x = \frac{1}{n} r$, also das Moment der Reibung $= \frac{2\mu r^2}{n^3 r} M = \frac{2\mu r}{n^3} M$.

Für das zweite Theilchen ist $x = \frac{2}{n} r$, also das Moment $= \frac{2 \cdot 4\mu r}{n^3} M$.

Für das dritte Theilchen, $= \frac{2 \cdot 9\mu r}{n^3} M$ u. s. w.

Endlich für das nte oder letzte Theilchen findet man das Moment $= \frac{2 n^2 \mu r}{n^3} M.$

Die Summe aller Momente ist alsdann

$$= \frac{2 \mu r}{n^3} M \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots n^2\right)$$

Nun ist nach bekannten Regeln die Summe von den Quadraten der natürlichen Zahlen $= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ oder weil n eine äußerst große Zahl ist, wie es die vorhergehenden Bedingungen erfordern, so kann ohne Nachtheil eine Einheit mehr oder weniger weggelassen werden, und man erhält die Summe der Quadrate $= \frac{2n^3}{6} = \frac{n^3}{3}$, daher das Moment der Reibung von der Grundfläche des stehenden Zapfens =

$$\frac{2 \mu r}{n^3} \cdot \frac{n^3}{3} M = \tfrac{2}{3} \mu r M.$$

Am Umfange des Zapfens nach der Richtung der Tangente sei eine Kraft F angebracht, welche mit der Reibung im Gleichgewichte ist, so ist das Moment der Kraft $rF = \frac{2}{3} \mu r M$, und man findet hieraus die Kraft, welche am Umfange des Zapfens der Reibung auf der Grundfläche desselben das Gleichgewicht hält, oder

$$F = \tfrac{2}{3} \mu M.$$

* 2. Auflösung. Mittelst der höhern Analysis erhält man mit Beibehaltung der vorstehenden Bezeichnung eben dieses Resultat, wenn man $Pp = \partial x$ setzt, so ist der Inhalt für die zu ∂x gehörige Ringfläche $= 2 \pi x \partial x$; der Druck darauf $= \frac{2 x \partial x}{r^2} M$; die Reibung

$= \frac{2\mu x \partial x}{r^2} M$; das Moment derselben $= \frac{2\mu x^2 \partial x}{r^2} M$; also die Summe der Momente von C bis P für den Halbmesser $CP = x$

$$\int \frac{2\mu x^2 \partial x}{r^2} M = \frac{2\mu x^3}{3r^2} M$$

wo keine Constante hinzukommt, weil das Moment mit $x = 0$ verschwindet. Für $x = r$ erhält man das Moment der Reibung für die ganze Fläche $AA' = \frac{2}{3}\mu r M$ und wenn dies $= rF$ gesetzt wird, so ist die zur Ueberwältigung der Reibung am Umfange des Zapfens erforderliche Kraft $F = \frac{2}{3}\mu M$.

Mit Hülfe dieses Satzes und der Auflösung §. 230. läßt sich die Reibung bei der stehenden Welle oder Winde leicht finden.

Anmerkung. In Karstens Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften, 2. Band. 1780. S. 713. findet man diesen Satz noch auf eine andere Art, ohne höhere Analysis erwiesen.

§. 240.

Die Axe AB, Figur 120., von der Welle einer Tretscheibe sei gegen die Vertikale CD unter dem Winkel $BCD = \gamma$ geneigt, auch sei FG die Durchschnittslinie, in welcher die erweiterte Vertikalebene BCD die Tretscheibe schneidet. Im Punkte E sei der mittlere Stand des Menschen oder Thieres, welches durch sein Gewicht P auf die Umdrehung der Scheibe wirkt, und in N wirke am Umfange der Welle eine Kraft Q in einer mit der Tretscheibe parallelen Ebene. Man setze EC oder den Halbmesser der Scheibe $= a$; den Halbmesser der Welle $= b$, und den Winkel $GCE = \alpha$, und zerlege

Taf. V. Fig. 120.

γ

a
b
α

die Kraft P nach EK mit FG parallel, und nach EL auf die Scheibe senkrecht, so ist der Winkel IEL $=$ DCB $= \gamma$, also die Kraft nach EK oder $P' = P \sin \gamma$ und

die Kraft nach EL oder $P'' = P \cos \gamma$.

Die Kraft P'' wirkt parallel mit der Axe AB, und verursacht Druck auf den untern Zapfen, aber keine Bewegung; wenn man aber EK rückwärts nach H in der Ebene der Scheibe verlängert, und CH auf EH senkrecht zieht, so ist CH die Länge des Hebelarms, an welchem die Kraft P' senkrecht wirkt. Nun ist

$$CH = EC \,.\, \sin \alpha = a \sin \alpha,$$

daher das Moment der Kraft P', welches mit dem Momente der Last im Gleichgewichte seyn muß,

$$= CH \,.\, P' = a P' \sin \alpha.$$

Ohne Rücksicht auf Reibung ist dies Moment $= bQ$, daher

$$a \sin \alpha \sin \gamma \, P = b\,Q$$

und hieraus die Kraft

$$P = \frac{bQ}{a \sin \alpha \,.\, \sin \gamma}.$$

Die Kraft P wird daher unter übrigens gleichen Umständen am kleinsten, wenn $\sin \alpha$ und $\sin \gamma$ so groß als möglich genommen werden. Dies giebt $\alpha = \gamma = 90^\circ$. Da nun γ nicht leicht größer als 15 Grad genommen werden kann, wenn $\alpha = 90$ Grad gesetzt wird, weil sonst der Gang für Menschen oder Vieh zu beschwerlich wird, so erhält man in diesem Falle für $\sin \alpha = 1$ und $\sin \gamma = \sin 15^\circ = 0{,}258819$, die Kraft

$$P = \frac{bQ}{0{,}258819 \,.\, a} \text{ oder beinahe } = \frac{7bQ}{27\,a}.$$

§. 241.

Aufgabe. Die Kraft zu bestimmen, welche zur Ueberwältigung der Last und Reibung an der Tretscheibe erfordert wird.

Auflösung. Mit Beibehaltung der Bezeichnung im vorigen §. sei M das Gewicht der Welle und Scheibe, und P bezeichne hier diejenige Kraft, welche sowohl mit der Last Q, als auch mit den Widerständen, welche von der Reibung entstehen, im Gleichgewichte ist, so zerlegt sich das Gewicht M in der erweiterten Ebene FGB, Figur 120., senkrecht auf die Axe AB in eine Kraft M Taf. V. Fig. 120.

$$M' = M \sin \gamma$$

und nach der Richtung AB in eine Kraft

$$M'' = M \cos \gamma$$

welche die Grundfläche des untern Zapfens gegen die Pfanne preßt. Der gesammte Druck gegen die Pfanne nach der Richtung AB ist alsdann =

$$P'' + M'' = (P + M) \cos \gamma$$

also das Moment der von diesem Drucke entstehenden Reibung §. 239., wenn ϱ den Halbmesser der Zapfen bezeichnet, $= \frac{2}{3}\mu\varrho\,(P + M) \cos \gamma$. Zur Ueberwältigung ϱ dieser Reibung werde in H nach HE eine Kraft p erfordert, so ist

$$p \,.\, a \sin \alpha = \tfrac{2}{3}\mu\varrho\,(P + M) \cos \gamma \text{ oder}$$

$$p = \frac{2\mu\varrho \cos \gamma}{3a \sin \alpha}\,(P + M).$$

Die aus dem Gewichte P in H nach HE entspringende Kraft P′ ist = P sin γ, daher ist P sin γ — p diejenige Kraft, welche mit der Last Q und der Reibung an den Seitenflächen im Gleichgewichte seyn muß. In der

Ebene der Scheibe sei $N'Q'$ die Projection von der Richtung NQ der Kraft Q, und β der Winkel, welchen $N'Q'$ mit der Linie CH (in dem Sinne §. 230.) bildet, so ist die Richtung der Kraft P' auf CH senkrecht, daher, weil p keinen Seitendruck gegen die Zapfen verursachen kann, und weil $CH = a \sin \alpha$ ist, nach §. 231.

$$P' - p = \frac{A + \sqrt{[A^2 - a^2 \sin \alpha^2 B]}}{a^2 \sin \alpha^2}$$

wo nach §. 235.

$A = a r Q \sin \alpha + f^2 [Q \sin \beta + M \sin \gamma]$ und

$B = r^2 Q^2 - f^2 [Q^2 + M^2 \sin \gamma^2 + 2 Q M \sin \beta \sin \gamma]$ ist.

Werden für P' und p die gefundenen Werthe gesetzt, und daraus P entwickelt, so findet man die Kraft

$$P = \frac{3A + 2\mu a \varrho M \sin \alpha \cos \gamma + 3\sqrt{(A^2 - a^2 B \sin \alpha^2)}}{a \sin \alpha (3 a \sin \alpha \sin \gamma - 2\mu \varrho \cos \gamma)}.$$

§. 242.

Zusatz. Wäre der Winkel $\alpha = 90$ Grad, so wird

$$A = a r Q + f^2 [Q \sin \beta + M \sin \gamma]$$

$$B = r^2 Q^2 - f^2 [Q^2 + M^2 \sin \gamma^2 + 2 Q M \sin \beta \sin \gamma]$$

und die Kraft

$$P = \frac{3A + 2\mu a \varrho M \cos \gamma + 3\sqrt{(A^2 - a^2 B)}}{3 a^2 \sin \gamma - 2\mu a \varrho \cos \gamma}.$$

Beispiel. Es sei $Q = 1000$, $M = 400$ Pfund; $a = 10$, $r = \frac{2}{3}$, $\varrho = \frac{1}{12}$ Fuß; $\beta = 90$, $\gamma = 15$ Grad und $\mu = \frac{1}{5}$, so ist $f^2 = 0{,}000267$ (§. 230.)

$$A = \frac{20000}{3} + 0{,}000267 . (1000 + 103{,}5276) = 6666{,}9613$$

$$B = 444444{,}444 - 0{,}000267 . 1217756{,}39 = 444119{,}303$$

und hieraus die Kraft

$$P = \frac{20000{,}884 + 128{,}788 + 572{,}697}{77{,}646 - 0{,}322} = 267{,}73 \text{ Pfund}.$$

Zehntes Kapitel.

Vom Räderwerk und der Gestalt der Zähne, Kämme und Daumen.

§. 243.

Zwei oder mehrere Räder welche sich an verschiedenen Axen befinden, so daß durch die Umdrehung des einen Rades das andere ebenfalls bewegt wird, bilden ein Räderwerk (Systema rotarum, *Rouage*). Die wechselseitige Umdrehung der Räder kann dadurch bewirkt werden, daß Erhöhungen des einen Rades in passende Vertiefungen des andern eingreifen. Liegen die Erhöhungen in der Ebene des Rades nach der Richtung seiner Halbmesser, so heißen sie Zähne (Dentes. *Aluchons*, *Dents*) und das Rad ein Stirnrad, auch wohl Sternrad (Rota stellata. *Roue platte*). Stehen sie hingegen senkrecht auf der Ebene des Rades, so heißen diese Erhöhungen Kämme (Paxilli) und das Rad ein Kammrad oder Kronrad (Rota coronaria, R. pectinata. *Roue à couronne*, *Roue à chan*). Statt der Stirnräder bedient man sich auch der Trillinge (Laterna. *Lanterne*), welche aus zwei parallelen Scheiben (*Tourtes* ou *Tourteaux*) bestehen, die vermittelst mehrerer am Umfange angebrachter Stäbe, Triebstöcke (Bacilli. *Fuseaux*) mit einander verbunden sind. Diese Triebstöcke vertreten die Stelle der Zähne. Große Trillinge werden auch Drehlinge genannt. Sind die Triebstöcke nicht zwischen parallelen Scheiben eingesetzt, sondern in dem Umfang einer Welle ausgearbeitet, so entsteht ein Kumpf (Axis dentatus), dessen Zähne Stäbe (*Ailes*) heißen. Uebrigens sind unter dem allgemeinen Namen Zähne (*Dents*), die Zähne, Stöcke, Stäbe oder Kämme eines Rades begriffen. Durch Verbindung eines Stirnrades und Trillings wird gewöhnlich die Umdrehung zweier Räder in einerlei Ebene bewirkt. Sind aber die Ebenen zweier Räder auf einander senkrecht, so bedient man sich hiezu eines Kammrades und Trillings. Das kleinere Rad bei der Zusammensetzung zweier Räder, wird ein Getriebe (Rotula. *Pignon*) genannt, und ist gewöhnlich ein Trilling oder Drehling.

Stehen die Ebenen zweier Räder nicht senkrecht auf einander sondern schneiden sich unter einem spitzen oder stumpfen Winkel, so heißen sie konische Räder, welche Benennung überhaupt von allen den Rädern gilt, bei welchen die Kämme schief auf der Ebene des Rades stehen.

Die Umdrehung zweier Räder kann auch ohne Zähne und Kämme bewirkt werden, wenn um die Umfänge derselben, welche deshalb eine Vertiefung erhalten, eine an beiden Enden zusammen gefügte Schnur, oder Schnur ohne Ende gelegt wird. Diese Räder heißen Seilräder, bei welchen man sich auch lederner Riemen statt der Schnüre bedienen kann.

§. 244.

Aufgabe. Mehrere Räder sind so mit einander verbunden, daß immer zwei an einer gemeinschaftlichen Welle befestigt und das Getriebe einer Welle in das nächste Rad der andern eingreift, dergestalt daß durch die Umdrehung des ersten Rades das ganze Räderwerk in Bewegung kommt. Am Umfange des ersten Rades A, Figur 121., wirkt nach der Richtung der Tangente eine Kraft P und am Umfange des letzten Rades F eine Last Q; man sucht die Bedingungen für das Gleichgewicht. Taf. V. Fig. 121.

Auflösung. Man bezeichne die Halbmesser der Räder A, B, C, durch a, a′, a″ und der Getriebe D, E nebst dem letzten Rade F durch r, r′, r″, so wird die Kraft P am Umfange des ersten Getriebes D gegen den Zahn des Rades B einen Druck $P' = \frac{a}{r} P$ verursachen (§. 48.). Dieser Druck P′ pflanzt sich fort und bewirkt am Umfange des dritten Rades C einen Druck $P'' = \frac{a'}{r'} P' = \frac{a\ a'}{r\ r'} P$ welcher mit der Last Q am letzten Rade F im Gleichgewichte seyn muß. Für diesen Fall ist $a'' P'' = r'' Q$ und hieraus die Last

$$Q = \frac{a\ a'\ a''}{r\ r'\ r''} P$$

und die Kraft

$$P = \frac{r\ r'\ r''}{a\ a'\ a''} Q.$$

Es läßt sich einsehn, daß dieß eben so für mehrere Räder gilt, daher verhält sich ganz allgemein die Kraft zur Last, wie das Produkt aus den Halbmessern der Getriebe, zum Produkt aus den Halbmessern der Räder.

Je kleiner unter übrigens gleichen Umständen die Halbmesser der Getriebe sind, eine desto größere Last Q kann man alsdann mit einerlei Kraft P überwältigen.

Liegen die Räder nicht in parallelen Ebenen, so läßt sich die Auflösung auf gleiche Art ableiten.

§. 245.

Zusatz. Damit von zwei zusammengehörigen Rädern welche in einander greifen, gleich lange Bogen ihres Umfanges in gleicher Zeit fortgeschoben werden, müssen diese Bogen gleich viel Zähne haben. Die Anzahl der Zähne solcher Räder verhält sich alsdann wie ihre Umfänge und diese wie ihre Halbmesser. Sind daher m, m', m'' die Anzahl der Zähne von den Rädern A, B, C und n, n', n'' die Anzahl der Zähne von den Getrieben D, E, F, so verhält sich $a : r = m : n$, oder es ist überhaupt $\frac{r\,r'\,r''}{a\,a'\,a''} = \frac{n\,n'\,n''}{m\,m'\,m''}$, daher die Kraft

$$P = \frac{n\;n'\;n''}{m\;m'\;m''}\,Q.$$

§. 246.

Bei Beurtheilung der besten Gestalt der Zähne, Triebstöcke und Kämme sind die Fälle zu unterscheiden, wo Zähne und Stöcke, Zähne und Zähne, Kämme und Stöcke oder Kämme und Zähne zweier Räder wechselseitig in einander greifen. Damit diese Untersuchung möglichst vereinfacht werde, wird jeder dieser Fälle besonders aus einander gesetzt, und dabei die im Anhange erwiesenen Eigenschaften der Epicykloide und die Art wie solche gezeichnet werden kann, als bekannt angenommen.

Soll nun ein Rad das andere so forttreiben, daß die Bewegung ohne Erschütterung und mit unveränderter Kraft erfolgt, so müssen

I. in gleichen Zeiten gleich große Bogen von dem Umfange eines jeden Rades fortgeschoben werden. Dies muß aber von jedem noch so kleinen Bogen eben so wie von jedem größern gelten.

II. Für jede Lage der Zähne muß die Kraft mit welcher ein Rad das andere umtreibt gleich groß bleiben.

Nur unter diesen Bedingungen finden die Sätze der vorhergehenden §. §. ihre Anwendung. Auch läßt sich einsehen daß alsdann keine Kraft ohne Nutzen verwandt wird, und das Räderwerk eine regelmäßige Bewegung erhalten muß.

§. 247.

Aufgabe. Die vortheilhafteste Gestalt der Zähne eines Stirnrades anzugeben, wenn das zugehörige Getriebe mit Triebstöcken versehn ist.

1. Auflösung. Wenn die Triebstöcke als Linien ohne Dicke vorausgesetzt werden.

Es sei, Figur 122., C A = a der Halbmesser des Rades und G A = r der Halbmesser des Getriebes; beide Räder welche sich frei um ihre unbewegliche Mittelpunkte drehen können, berühren sich in A und ihre Mittelpunkte sind durch die grade Linie C A G welche die Mittelpunktslinie (*Ligne des centres*) heißt, mit einander verbunden. Auf dem Umfange X A Z des Rades sei eine Epicykloide A A′ beschrieben, deren erzeugender Kreis mit dem Umfange des Getriebes überein kommt. Diese Epicykloide sei eine feste unbiegsame Linie und in ihrem Anfangspunkte A mit dem Rade X Z so verbunden, daß bei der Umdrehung des Rades der Bogen A A′ mit bewegt werde. Senkrecht auf die Ebene des Getriebes sei am Umfange desselben in A, ein Triebstock ohne Dicke befestigt, welcher sich mit dem Getriebe zugleich umdreht. Wird nun der Punkt A des Rades von A bis B gedreht und der Triebstock A befindet sich vor dem Bogen A A′, so ist

Taf. V. Fig. 122.

solcher durch diesen Bogen von A bis O geschoben, wenn nunmehr AA' in die Lage BB' gekommen ist.

Weil C A der Halbmesser des Grundkreises und $AG = GO$ der Halbmesser des erzeugenden Kreises der Epicykloide BB' ist, so muß (Anhang §. 13.) der Bogen AB dem Bogen AO gleich seyn, und weil dies für jeden kleinern oder größern Bogen wie AB eben so gilt, so ist durch die Anbringung der Epicykloide BB' die erste Bedingung §. 246. erfüllt.

Man ziehe die Sehne AO, so wird der Zahn BB' in den Stock O nach der Richtung AO wirken, weil das Element des Zahns im Berührungspunkte O die Linie AO zur Normale hat. (§. 17. Anhang). Ist nun P die Kraft welche am Umfange des Rades in A nach der Richtung der Tangente AE wirkt, so läßt sich P in zwei andere Kräfte zerlegen, wovon die eine nach AC wirkt und vom festen Punkte C aufgehoben wird; die andere wirkt nach AO auf den Zahn und sei $= P'$, so ist $P' \sin AOE = P$. Aber $AOE = OAG$, daher ist die Kraft welche den Triebstock O nach der Richtung OH forttreibt oder

$$P' = \frac{P}{\sin OAG} \text{ und } P = P' \sin OAG.$$

Der Halbmesser des Getriebes GO werde unbestimmt bis I verlängert, so kann man die Kraft P' nach OI und senkrecht auf OG nach der Tangente des Getriebes OK zerlegen, wovon die Kraft nach OI durch den festen Punkt O aufgehoben wird, die andere nach OK welche $= Q$ seyn kann, drückt das Getriebe nach der Richtung seiner Tangente. Alsdann ist $P' \sin OHK = Q$ oder weil $OHK = OAG$, so findet man auch

$Q = P' \sin OAG$, folglich ist

$Q = P$.

Der Triebstock O wird daher von dem Bogen BB' in jeder Lage desselben eben so fortgeschoben, als wenn die Kraft P welche am Umfange des Rades wirkt, unmittelbar am Umfange des Getriebes nach der Richtung seiner Tangente angebracht wäre.

Daß $Q = P$ seyn muß, hätte man auch aus dem Gesetz der Statik §. 69. ableiten können, denn wenn w den Weg von P, und w' den Weg von Q bezeichnet, welche bei der geringsten Fortbewegung durchlaufen werden, so ist erwiesen, daß in allen Lagen des Systems $w = w'$ ist, daher muß auch $P = Q$ seyn.

Bestehen daher die Triebstöcke aus festen Linien ohne Dicke, so erhält man die vortheilhafteste Gestalt für die Zähne des Rades, wenn man dazu den Bogen einer Epicykloide wählt, deren Grundkreis der Umfang des Rades, und deren Erzeugungskreis der Umfang des Getriebes ist.

Sollte der Triebstock O nicht durch den Bogen BB', sondern das Rad mittelst des Bogens BB' durch den Triebstock O fortgetrieben werden, so bleibt alles wie bisher, nur daß die Bewegung des Rades von A nach X, und nicht nach AZ geht.

2. Auflösung. Wenn die Triebstöcke aus cylindrischen Stäben von gegebener Dicke bestehen.

Die Halbmesser AC, Figur 123., des Rades und AG des Getriebes liegen in der Mittelpunktslinie CG, und in A sei der Durchschnitt eines Stocks, dessen Halbmesser Aa ist. Durch A als Anfangspunkt sei die Epi- Taf. V. Fig. 123.

cykloide A A′ nach den Bedingungen der vorigen Auflösung gezeichnet. Mit dem Halbmesser A a zeichne man auf der konkaven Seite des Bogens A A′ lauter Halbkreise, und ziehe durch die Scheitel derselben die krumme Linie a a′, so ist diese eine Parallele der Epicykloide A A′, und zugleich die erforderliche Gestalt des Zahns. Kommt alsdann der Mittelpunkt A des Stocks nach O, und der Bogen A A′ nach B B′, also a a′ nach b b′, und man zieht die zum Punkte O der Epicykloide gehörige Normale O A, so ist da, wo solche den Umfang des Stocks und Zahns in o schneidet, der Berührungspunkt beider Oberflächen, weil O o = A a ist. Es gelten daher hier vom Punkte O eben die Sätze, welche bei der ersten Auflösung erwiesen sind, daher findet man, wenn Zähne und Triebstöcke in einander greifen, die beste Gestalt der Zähne, wenn der Umfang (Z X) des Rades als Grundkreis angenommen, und darauf eine Epicykloide (A A′) beschrieben wird, deren Erzeugungskreis dem Umfange (V W) des Getriebes gleich ist. Wird hierauf in einer Entfernung, welche dem Halbmesser (A a) der Triebstöcke gleich ist, eine parallele Kurve (a a′) mit der Epicykloide gezogen, so erhält man die Rundung der Zähne.

§. 248.

Taf. V. Fig. 123. Weil nur der Bogen a a′, b b′, Figur 123., der Zähne mit den Stöcken in Berührung kommt, so ist es ziemlich gleichgültig, welche Gestalt der übrige Theil des Zahns erhält, wenn nur dadurch die Bewegung der Triebstöcke nicht verhindert wird. Es ist aber am zuträglichsten, die Zähne, wie bei b b′ d, symmetrisch zu formen, weil alsdann auch eine Rückwärtsbewegung des Rades statt haben kann, und weil in diesem Falle die Zähne an ihrem abgerundeten Theile noch die größte Stärke erhalten, welche die freie Bewegung der Stöcke gestattet.

Der Theil b b′ d des Zahns, welcher über den Bogen XZ fällt, und der Obertheil heißen kann, ist von dem Untertheile b d e f darin verschieden, daß dieser bei b f und d e nach graden Linien geformt wird, welche sich in C vereinigen, weil man diese Linien als Tangenten von den Bogen b b′ und d b′ in den Punkten b und d ansehen kann. Nach §. 17. des Anhanges ist CB eine Tangente in B von BB, also eine mit BC durch b gezogene Parallellinie, eine Tangente von b′ b in b, wofür man b f ohne Nachtheil annehmen kann. Die Höhe d e vom Untertheile des Zahns darf nur etwas größer als der Halbmesser des Triebstocks seyn.

Bei einem symmetrischen Zahne f b′ e′ ist b′ der Scheitel oder Kopf, b d die Brust oder Breite, und f e der Fuß des Zahns, welcher mit der Stirn des Radekranzes RS zusammenfällt. Die Dicke des Zahns kommt hier nicht in Betrachtung, weil der Zahn als ein prismatischer Körper angesehen werden kann, dessen Grundfläche die Ebene f b′ e, und dessen Höhe die Dicke des Zahns ist.

Damit in der Folge keine Ungewißheit über die Größe vom Halbmesser des Stirnrades entsteht, so wird hier allemal der Halbmesser CA = CE, vom Mittelpunkte C bis zur Brust der Zähne darunter verstanden werden, weil nur dieser Halbmesser bei der Anordnung des Räderwerks und bei der Bestimmung der Kraft in Betrachtung kommt. Man nennt ihn auch den ursprünglichen

Halbmesser (*Rayon primitiv*), um ihn vom wirklichen oder Totalhalbmesser (*Rayon vrai*) Cb', welcher bis zum Kopf des Zahns reicht, zu unterscheiden. Der zum Halbmesser CA gehörige Kreis XZ heißt der Umfang des Stirnrades, auch der Theilriß oder Theilkreis, weil auf demselben die Zähne eingetheilt werden. Die Breite bd eines Zahns (*le plein*), nebst der Zwischenweite da (*le vuide*) zusammmengenommen, der Bogen ab, oder der Abstand von der Mitte eines Zahns bis zur Mitte des nächsten, wird die Theilung genannt. Berührt der Stock A bei a den Zahn F, so heißt der Abstand dieses Stocks A vom nächsten Zahne E oder die Weite cd der Spielraum (*Jeu*) zwischen Zahn und Stock, welchen man aber so klein als möglich annehmen muß.

Eben so ist GA der Halbmesser des Getriebes, welcher jedesmal vom Mittelpunkte G bis zum Mittel des Stocks gerechnet wird. Der zu diesem Halbmesser gehörige Kreis VW heißt der Umfang oder Theilriß des Getriebes. Die Theilung AO desselben ist der Theilung des Rades gleich.

§. 249.

Taf. V. Fig. 122. Das Rad XZ, Figur 122., sei mit den Zähnen AA', BB' und das Getriebe VW mit den Stöcken A, O versehen, so daß beide gleiche Theilung AB = AO haben, so wird bei der erforderlichen Gestalt und Länge der Zähne, wenn im Berührungspunkt A beider Theilkreise Zahn und Stock zusammentreffen, auch bei O eine Berührung zwischen Zahn und Stock statt finden (§. 247.). Dreht man nun das Rad und Getriebe von A nach X und W so weit rückwärts, daß der Stock aus A nach a und der

Zahn von A nach b komme, dergestalt daß der Bogen Aa dem Bogen Ab gleich ist, so kann der Zahn bb′ den Stock a nicht berühren, weil in jedem Falle wenn AC > AG ist, der Winkel ACa kleiner als ACb seyn muß. Da dies von jedem noch so kleinen Bogen Aa gilt, so folgt daraus daß wenn ein Getriebe mit Stöcken durch ein Rad mit Zähnen bewegt wird, so kann kein Zahn vor der Mittelpunktslinie (CG) einen Stock treffen; nur in der Mittelpunktslinie kann der Zahn mit dem Stock in Berührung kommen, welche hinter der Mittelpunktslinie so lange fortwähren muß, bis sich der Stock vom äußersten Ende des Zahns abgewunden hat. Dieser Satz läßt sich eben so auf Triebstöcke von gegebener Dicke Figur 123. anwenden. Nur daß alsdann wenn das Getriebe vom Rade bewegt wird, die erste Berührung zwischen Zahn und Stock erfolgt, wenn der Mittelpunkt des Stocks in den Berührungspunkt A der Mittelpunktslinie fällt. Taf. V. Fig. 123.

Wird das Rad vom Getriebe bewegt, so folgt umgekehrt daß der Zahn den Stock verlassen muß, wenn der Mittelpunkt des Stocks in die Mittelpunktslinie beider Räder fällt.

Aus der nähern Betrachtung der Figur 123. sieht man ferner, daß wenn der Stock A vom Zahn F von A bis O getrieben wird, so ist der Bogen bo des Zahns mit dem Stock in Berührung gewesen, dagegen kommen von dem Stocke nur die beiden kleinen Bogen ah und op mit dem Zahn in Berührung. Daher ist die Bewegung der Zähne und Stöcke auf einander nicht wälzend, sondern wälzend und gleitend. Auch sieht man hieraus daß die Stöcke verhältnißmäßig weit mehr als die Zähne abgenutzt werden.

Treibt der Zahn den Stock, so bewegt sich der Stock auf dem Zahne von b nach o; treibt aber der Stock den Zahn, so bewegt sich der Stock von o nach b. Bei metallenen Zähnen ist beides gleichgültig; bei hölzernen aber, wo die Fläche o b gewöhnlich über den Spahn geschnitten ist, wird die Bewegung deshalb erschwert und sofern ist es vortheilhafter, wenn der Zahn den Stock als wenn der Stock den Zahn fort treibt.

Es ist zureichend wenn jedesmal nur ein Zahn mit einem Stock in Berührung kommt, weil sonst die Zähne unnöthig lang werden müssen. Man kann daher die Anordnung so machen, daß in dem Augenblick wenn ein Zahn einen Stock berührt, der vorhergehende Zahn seinen Stock verläßt oder sich auswindet. Fällt nun der Mittelpunkt des Stocks A in die Mittelpunkslinie C G und man zieht die Sehne A O bis zum Mittel des nächsten Stocks, so ist o der Berührungspunkt zwischen Zahn und Stock (§. 17. Anh.). Da nun a der Ort ist, wo der Zahn F den Stock A einholt und solchen von a bis o fortführt, so ist es zureichend wenn man mit dem Halbmesser C o den Zahn von o nach r abrundet, oder, damit bei o keine scharfe Ecke entsteht, wenn man dem Zahn eine geringe Wölbung o s r giebt, welche die beiden Bogen o b und r d bei o und r berührt. Die größte Länge, welche der Obertheil des symmetrischen Zahns erhalten kann ist E b', und die kleinste Länge vom Obertheile des Zahns o k. Noch kleiner darf kein Obertheil des

Zahns werden, weil sonst ein Stoßen der Zähne gegen die Stöcke erfolgt.

§. 250.

Um zu übersehen, wie diejenigen Größen, welche bei der Anordnung eines Räderwerks vorkommen können, von einander abhangen, sei Figur 123. Taf. V. Fig. 123.

$a = AC$ der Halbmesser vom Theilkreise des Rades,

$r = AG$ der Halbmesser vom Theilkreise des Getriebes,

$t = AO = AB$ die Theilung,

m die Anzahl der Zähne des Rades,

n die Anzahl der Stöcke des Getriebes,

$\alpha = ACB$ der Mittelpunktswinkel für die Theilung AB des Rades in Graden ꝛc. ausgedrückt,

$\beta = AGO$ der Mittelpunktswinkel für die Theilung AO des Getriebes,

$\text{Arc}\,\alpha$ der Bogen für den Halbmesser $= 1$, welcher dem Winkel α entspricht, und eben so

$\text{Arc}\,\beta$ der zum Winkel β gehörige Bogen.

Nun verhält sich $\alpha : 360° = \text{Arc}\,\alpha : 2\pi$, es ist daher

$$\text{Arc}\,\alpha = \frac{\pi\alpha}{180} \text{ und eben so } \text{Arc}\,\beta = \frac{\pi\beta}{180} \quad [\text{I}]$$

Ferner verhält sich $1 : \text{Arc}\,\alpha = a : t$, daher ist

$$t = a\,\text{Arc}\,\alpha = r\,\text{Arc}\,\beta \quad [\text{II}].$$

Aus [I] und [II] folgt ferner

$$t = \frac{\pi\alpha a}{180} = \frac{\pi\beta r}{180} \quad [\text{III}]$$

und hieraus

$$\alpha a = \beta r \quad [\text{IV}].$$

Der Umfang des Theilkreises vom Rade ist $= 2\pi a$,

daher

$$mt = 2\pi a \text{ und } nt = 2\pi r \ [V]$$

woraus noch folgt

$$na = mr \ [VI].$$

Aus diesen sechs Gleichungen erhält man folgende Zusammenstellung

$$(I)\ a = \frac{\beta r}{\alpha} = \frac{mr}{n} = \frac{mt}{2\pi} = \frac{180 t}{\pi\alpha}$$

$$(II)\ r = \frac{\alpha a}{\beta} = \frac{na}{m} = \frac{nt}{2\pi} = \frac{180 t}{\pi\beta}$$

$$(III)\ t = \frac{\pi\alpha a}{180} = \frac{2\pi a}{m} = a \operatorname{Arc} \alpha = \frac{mr}{n} \operatorname{Arc} \alpha$$

$$= \frac{\pi\beta r}{180} = \frac{2\pi r}{n} = r \operatorname{Arc} \beta = \frac{na}{m} \operatorname{Arc} \beta$$

$$(IV)\ m = \frac{360}{\alpha} = \frac{360 a}{r\beta} = \frac{na}{r} = \frac{2\pi a}{t}$$

$$(V)\ n = \frac{360}{\beta} = \frac{360 r}{\alpha a} = \frac{mr}{a} = \frac{2\pi r}{t}$$

$$(VI)\ \alpha = \frac{360}{m} = \frac{360 r}{na} = \frac{r\beta}{a} = \frac{180 t}{\pi a}$$

$$(VII)\ \beta = \frac{360}{n} = \frac{360 a}{mr} = \frac{\alpha a}{r} = \frac{180 t}{\pi r}$$

$$(VIII)\ \operatorname{Arc} \alpha = \frac{\pi\alpha}{180} = \frac{2\pi}{m} = \frac{t}{a} = \frac{2\pi r}{na}$$

$$(IX)\ \operatorname{Arc} \beta = \frac{\pi\beta}{180} = \frac{2\pi}{n} = \frac{t}{r} = \frac{2\pi a}{mr}.$$

Hiebei ist $\frac{1}{\pi} = 0{,}318309886$

also $\frac{1}{2\pi} = 0{,}159154943$.

§. 251.

Aufgabe. Aus dem Halbmesser $AC = a$, Figur 123., des Stirnrades, dem Halbmesser $GA = r$ des Getriebes, der halben Dicke eines Stocks $Oo = d$, und dem Winkel $AGO = \beta$, welcher am Mittelpunkte des

Taf. V. Fig. 123.

Getriebes zur Theilung AO gehört, die kleinste Länge vom Obertheile des Zahns oder $ok = l$ durch Rechnung zu finden.

Auflösung. Zieht man aus G auf die Sehne AO eine senkrechte Linie, so erhält man in einem der entstandenen rechtwinklichten Dreiecke $\frac{1}{2} AO = r \sin \frac{1}{2}\beta$, also $AO = 2r \sin \frac{1}{2}\beta$, oder, wenn $Oo = d$ weggenommen wird, $Ao = 2r \sin \frac{1}{2}\beta - d$. Es ist aber der Winkel $oAC = 180^\circ - OAG = 90^\circ + \frac{1}{2}\beta$, daher

$$\cos oAC = \cos(90^\circ + \tfrac{1}{2}\beta) = -\sin \tfrac{1}{2}\beta$$

und man erhält im Dreieck ACo

$$Co^2 = AC^2 + Ao^2 - 2.AC.Ao.\cos oAC$$

oder

$$(a+l)^2 = a^2 + (2r \sin\tfrac{1}{2}\beta - d)^2 + 2a(2r \sin\tfrac{1}{2}\beta - d)\sin\tfrac{1}{2}\beta$$

Hieraus findet man die kleinste Länge vom Obertheile des Zahns, oder

$$l = -a + \sqrt{[a^2 + (2r\sin\tfrac{1}{2}\beta - d)^2 + 2a(2r\sin\tfrac{1}{2}\beta - d)\sin\tfrac{1}{2}\beta]}.$$

Beispiel. Das Rad habe 32 Zähne, und das Getriebe 7 Stöcke, beide Räder aber 4 Zoll Theilung, so ist §. 250. (I) der Halbmesser des Rades

$$a = \frac{mt}{2\pi} = \frac{32.4}{2\pi} = 20,371 \text{ Zoll, und}$$

$$r = \frac{nt}{2\pi} = \frac{7.4}{2\pi} = 4,456 \text{ Zoll.}$$

Ferner ist §. 250. (VII)

$$\beta = \frac{360}{n} = \frac{360}{7} = 51^\circ\, 26' \text{ also } \tfrac{1}{2}\beta = 25^\circ\, 43', \text{ und}$$

$\sin \frac{1}{2}\beta = 0,4339$. Wird nun $d = 1$ gesetzt, so ist $2r \sin \frac{1}{2}\beta - d = 2,8669$ und $2,8669^2 = 8,2191$; man findet daher die kleinste Länge vom Obertheile des Zahns, oder

$l = -20,371 + \sqrt{473,879} = 1,398$ oder beinahe $1\frac{2}{5}$ Zoll.

§. 252.

Aufgabe. Aus der gegebenen Theilung und der Anzahl der Zähne und Stöcke beim Rade und Getriebe, die Zähne und Stöcke anzuordnen und eine Lehre (Chablone) für die Zähne zu verfertigen.

Auflösung. Die Theilung sei $= t$, die Zahl der Zähne $= m$, und die Anzahl der Stöcke $= n$, so findet man hieraus nach §. 250. (I) den Halbmesser des Rades $a = \frac{m\,t}{2\,\pi}$ und den Halbmesser des Getriebes $r = \frac{n\,t}{2\,\pi}$. Weil die Stöcke sich mehr als die Zähne abnutzen und auch länger als diese sind, so macht man sie gewöhnlich dicker als die Zähne. Ein Spielraum zwischen beiden wäre unnöthig, wenn alles im höchsten Grade vollkommen gearbeitet werden könnte. Giebt man dem Spielraume $c\,d$, Figur 123., den acht und vierzigsten Theil der Theilung, so wird dies in den meisten Fällen zureichen; alsdann ist $c\,d = \frac{1}{48}\,t$. Soll nun die Dicke des Stocks der Hälfte der Theilung gleich seyn, so ist, wenn d den Halbmesser des Stocks bezeichnet, $2\,d = \frac{1}{2}\,t$. Zieht man nun von der ganzen Theilung t, die Dicke des Stocks $\frac{1}{2}\,t$ und den Spielraum $\frac{1}{48}\,t$ ab, so bleibt $\frac{23}{48}\,t$ für die Breite des Zahns auf dem Theilkreise des Rades übrig. Wäre z. B. die Theilung $t = 4$ Zoll, so ist

die Dicke des Stocks $a\,c = \frac{1}{2}\,t = 2$ Zoll,
der Spielraum $c\,d = \frac{1}{48}\,t = \frac{1}{12}$ Zoll,
die Breite des Zahns $b\,d = \frac{23}{48}\,t = 1\frac{11}{12}$ Zoll.

Um nun die Lehre zu verfertigen, wonach sämmtliche Zähne bearbeitet werden können, ziehe man auf einem
Taf. V. Fig. 124. ebenen Brette eine Linie $C\,G$, Figur 124., trage von

C bis A den Halbmesser des Rades, und von A bis G den Halbmesser des Getriebes. Aus C und G schlage man die Bogen AX und AW, nehme den Bogen $AO = A3 =$ der Theilung (hier 4 Zoll); ziehe die Sehne AO, und nehme Oo der halben Dicke des Stocks gleich, so wird ein Bogen on, welcher aus C geschlagen wird, die Länge des Zahns begrenzen (§. 249.). Nun theile man den Bogen AO in mehrere gleiche Theile $A\alpha$, $\alpha\beta$, βO, und in eben so viel gleiche Theile A, 1; 1, 2; 2, 3; werde A3 getheilt (hier sind der Deutlichkeit wegen nur drei Theile angenommen, ob gleich eine größere Anzahl besser ist), alsdann schlage man aus C durch α, β, γ die Bogen aa', bb', cc', und aus C ziehe man die Linien $1a'$, $2b'$, $3c'$; nehme $a\alpha' = a'\alpha$, $b\beta' = b'\beta$, $c\gamma' = c'\gamma$; so liegen die Punkte A, α', β', γ' in einer Epicykloide (§. 15. Anhang), und man kann die Epicykloide $A\beta'\gamma'$ desto genauer zeichnen, je mehr dergleichen Punkte gefunden sind. Nun nehme man die halbe Dicke des Stocks in den Zirkel, und schlage aus A und aus mehrern Punkten der Linie $A\gamma'$ Kreisbogen, und ziehe durch die äußersten Enden derselben die krumme Linie Be bis an den Bogen on, so ist Be die Krümmung des Zahns über dem Theilkreise AX. Von B nach E und von E nach D setze man die halbe Dicke des Zahns, ziehe durch C und E die Linie CF, so ist EF die Axe vom Obertheile des Zahns. Macht man nun den Theil EDFE der andern Hälfte EBFE des Zahns gleich, und giebt demselben bei F eine geringe willkürliche Wölbung, so ist der Obertheil BFD des Zahnes fertig.

Um den Untertheil zu bilden, nehme man EH etwas größer, als die halbe Dicke der Stöcke, ziehe durch H aus C den Bogen IK, und aus B und D nach C die Linien BI, DK, so ist BDKI der Untertheil des Zahns, und der Fuß IK desselben fällt mit der Stirne von dem Radekranze zusammen.

Mit Hülfe dieser Lehre IBFDK lassen sich nun sämmtliche Zähne des Stirnrades verfertigen.

§. 253.

Taf. V. Fig. 124. Es kann sich der Fall ereignen, daß der Durchschnittspunkt der Bogen Be und Dg, Figur 124., unterhalb des Bogens on fällt. Alsdann muß bei ungeänderten Halbmessern a und r entweder die Dicke BD des Zahns vergrößert, oder die Theilung OA = A3 verkleinert werden, weil sonst der vorgehende Zahn seinen Stock früher verläßt, ehe der folgende Zahn seinen Stock ergriffen hat, wodurch nachtheilige Erschütterungen des Räderwerks entstehen müssen. Bei übrigens gleichen Umständen kann man auch durch Vergrößerung des Halbmessers vom Getriebe und Rade, für den Zahn die erforderliche Länge erhalten.

Wollte man mit weniger Weitläuftigkeit und doch noch erträglich genau eine Lehre zum Zahn verfertigen, so kann man folgendergestalt verfahren. Auf dem Theilkreise des Getriebes trage man die Theilung von A nach L, ziehe AL und nehme für Lu die halbe Dicke des Stocks. Ferner sei auf dem Theilkreise des Rades AM die halbe Dicke des Stocks, MN der Spielraum, und NP = PQ die halbe Breite des Zahns. Durch u schlage man aus C den Bogen un, und durch C und P ziehe man SR. Ferner sei Rv = Ru; alsdann werde aus u und Q mit der Weite u A der Durchschnittspunkt x, und mit eben dieser Weite aus v und N der Durchschnittspunkt y gesucht, so daß aus x der Bogen u Q, und aus y der Bogen v N geschlagen werde, so erhält man hiedurch den Obertheil Q u v N des Zahns. Der Untertheil wird eben so wie im vorigen §. bestimmt.

§. 254.

Aufgabe. Die Kraft zu bestimmen, welche am Theilkreise des Rades oder Getriebes angebracht werden muß, um die Reibung zwischen Zahn und Stock zu überwältigen.

Auflösung. Mit Beibehaltung der Bezeichnung §. 250. sei P die Kraft, welche, Figur 122., am Umfange B A X des Rades erfordert wird, um dem Gegendruck vom Getriebe das Gleichgewicht zu halten, so entstehet hieraus (§. 247.) nach der Richtung O H gegen den Stock O ein Normaldruck $= \frac{P}{\sin OAG}$. Für $OGA = \beta$ ist aber $OAG = 90° - \frac{1}{2}\beta$, also $\sin OAG = \cos \frac{1}{2}\beta$, daher ist der Normaldruck $= \frac{P}{\cos \frac{1}{2}\beta}$, und die davon herrührende Reibung, welche nach der auf A O senkrechten Richtung O L′ der Bewegung widersteht Taf. V. Fig. 122.

$$= \frac{\mu P}{\cos \frac{1}{2}\beta}$$

oder am Zahne B B′ muß in O nach O L eine Kraft $\frac{\mu P}{\cos \frac{1}{2}\beta}$ angebracht werden, um die Reibung zu überwältigen. Diese Kraft zerlege man nach O N auf den festen Punkt C und nach O M, senkrecht auf O C, so wird die

Kraft nach ON durch den Zapfen C des Rades aufgehoben, die nach OM erforderliche Kraft ist aber

$$= \frac{\mu P}{\cos \frac{1}{2}\beta} \cdot \cos LOM.$$

Nun ist der Winkel $LOM = AOC$, weil der Winkel LON jenen zu einem rechten Winkel ergänzt, daher erhält man, weil $AOL' = 90°$ ist,

$COL' = AOC + 90° = LOM + 90°$, also

$$\sin COL' = \sin (LOM + 90°) = \cos LOM.$$

Ferner ist $OL'C = \frac{1}{2} OGA = \frac{1}{2}\beta$, und es verhält sich

$$CO : CL' = \sin OL'C : \sin COL' \text{ oder}$$

$$CO : a + 2r = \sin \tfrac{1}{2}\beta : \cos LOM \text{ also ist}$$

$$\cos LOM = \frac{(a + 2r) \sin \frac{1}{2}\beta}{CO}$$

folglich die nach OM erforderliche Kraft

$$\frac{\mu P}{\cos \frac{1}{2}\beta} \cdot \cos LOM = \frac{\mu (a + 2r) \operatorname{tgt} \frac{1}{2}\beta}{CO} \cdot P$$

oder es müssen, wenn am Umfange des Theilkreises in D oder A eine Kraft f eben die Wirkung hervorbringen soll, die Momente beider Kräfte einander gleich seyn, also

$$a \cdot f = CO \cdot \frac{\mu (a + 2r) \operatorname{tgt} \frac{1}{2}\beta}{CO} \cdot P$$

und hieraus findet man die am Theilrisse erforderliche Kraft zur Ueberwältigung der Reibung zwischen Zahn und Stock, oder

$$(\text{I})\ f = \frac{\mu (a + 2r) \operatorname{tgt} \frac{1}{2}\beta}{a} P.$$

Bei einerlei Räderwerk ist daher die Reibung veränderlich, und wächst mit dem Winkel $\beta = AGO$. Fällt die Berührung zwischen Zahn und Stock in die Mittelpunktslinie CG bei A, so ist die Reibung $= 0$, und sie wird da am größten, wo der Zahn den Stock verläßt. Der Sicherheit wegen bringt man den größten Werth, welchen der Winkel β erhalten kann, zur Bestimmung der Reibung in Rechnung, also wird β der Winkel, welcher der Theilung am Getriebe entspricht. Dies giebt §. 250. VII. $\frac{1}{2}\beta = \frac{180^\circ}{n}$, wo n die Anzahl der Stöcke des Getriebes vorstellt, daher ist auch

$$(\text{II})\ f = \frac{\mu\,(a + 2r)}{a}\, P \operatorname{tgt} \frac{180^\circ}{n}.$$

Die Reibung zwischen Zahn und Stock wird daher unter übrigens gleichen Umständen desto größer, je kleiner der Halbmesser des Rades, je größer der Halbmesser des Getriebes, oder je kleiner die Anzahl der Stöcke ist.

Für $n = 6$ wird $\operatorname{tgt} \frac{180^\circ}{n} = 0,57735$

$n = 7$	- - -	=	0, 48137
$n = 8$	- - -	=	0, 41421
$n = 9$	- - -	=	0, 36397
$n = 10$	- - -	=	0, 32492
$n = 20$	- - -	=	0, 15838
$n = 30$	- - -	=	0, 10510

Weil $f = \mu \left(1 + \frac{2r}{a}\right) P \operatorname{tgt} \frac{180^\circ}{n}$, und §. 250. [VI] $\frac{r}{a} = \frac{n}{m}$ ist, so erhält man auch

$$(\text{III})\ f = \frac{\mu\,(m + 2n)}{m}\, P \operatorname{tgt} \frac{180^\circ}{n}$$

so daß die Reibung lediglich durch die Anzahl der Zähne und Stöcke bestimmt wird.

Die gesammte Kraft, welche am Theilkreise des Rades zur Erhaltung des Gleichgewichts und zur Ueberwältigung der Reibung erfordert wird, sei V, so ist

$$V = P + f$$

wo f nach den verschiedenen Umständen bestimmt werden kann.

Beispiel. Ein Rad habe 52 Zähne, das zugehörige Getriebe 6 Stöcke, und es widerstehe der Bewegung mit einer Kraft von 100 Pfund, so ist hier $m = 52$, $n = 6$, $\operatorname{tgt} \frac{180^\circ}{n} = \operatorname{tgt} 30^\circ$; $P = 100$ Pfund, und wenn man $\mu = \frac{1}{3}$ setzt, so findet man die zur Ueberwältigung der Reibung erforderliche Kraft

$$f = \frac{52 + 12}{3 \cdot 52} \cdot 0,57735 \cdot 100 = 23,68 \text{ Pfund.}$$

Für $\mu = \frac{1}{6}$ wird $f = 11,84$ Pfund.

Für $n = 8$, $m = 52$, $\mu = \frac{1}{6}$ und $P = 100$ wird

$$f = \frac{52 + 16}{6 \cdot 52} \cdot 0,41421 \cdot 100 = 9,03 \text{ Pfund.}$$

Belidor (Archit. Hydraul. 1. B. 2 K. §. 288.) nimmt im Durchschnitt $f = \frac{1}{18} P$.

§. 255.

Will man zu Vermeidung der Tangente im Ausdruck für f statt derselben einen Näherungswerth annehmen, so ist $\operatorname{Arc} \frac{180^\circ}{n} = \frac{\pi}{n}$, und weil (§. 157. Anhang) nahe genug $\operatorname{tgt} \varphi = \frac{3 \pi \varphi}{\pi^2 - 4 \varphi^2}$ ist, so erhält man

$$\operatorname{tgt} \frac{180^\circ}{n} = \operatorname{tgt} \frac{\pi}{n} = \frac{3 \pi \frac{\pi}{n}}{\pi^2 - 4 \frac{\pi^2}{n^2}} = \frac{3n}{n^2 - 4}.$$

Diesen Werth in die Gleichung §. 254. III. gesetzt, giebt für die Reibung zwischen Zahn und Stock die am Theilriß erforderliche Kraft

$$f = \frac{3\mu n (m + 2n)}{m (n^2 - 4)} P.$$

Nach dem Beispiele des vorigen §. erhält man hier für $n = 6$, $m = 52$, $\mu = \frac{1}{3}$ und $P = 100$

$$f = 23,07$$

und für $\mu = \frac{1}{6}$ ist $f = 11,53$, welches hinlänglich genau ist.

§. 256.

Aufgabe. Ein Getriebe oder Kumpf wird vom Stirnrade umgetrieben, man soll die vortheilhafteste Gestalt der Stäbe und Zähne für beide Räder angeben.

Auflösung. Der Halbmesser des Rades sei AC, Taf. VI.
Figur 125, und des Getriebes oder Kumpfes AG; beide Fig. 125.
liegen in der Mittelpunktslinie CG und im Berührungspunkte A treffe der Theilkreis XZ des Rades mit dem Theilkreise VW des Getriebes zusammen. Auf dem Umfange XZ als Grundkreis beschreibe der Kreis AOGA, dessen Durchmesser AG dem Halbmesser des Getriebes gleich ist, eine Epicykloide AM, und AG sei ein fester unbiegsamer Halbmesser des Getriebes oder Kumpfs, dessen Zahn oder Stab derselbe vorstellt. Wird nun der Bogen AM als Zahn des Rades mit dem Umfange XZ desselben genau verbunden und man bewegt das Rad von A nach B, so kommt der Zahn AM in die Lage BD und der Stab AI wird von dem Zahne bis in irgend eine Lage KL′ fortgeschoben. Durch den Punkt O, wo die Epicykloide BD den erzeugenden Kreis AOG schneidet, ziehe man die Sehne AO, so ist solche eine Normale der Epicykloide in O.

Es ist aber der Winkel A O G im Halbkreise ein rechter, daher O G auf O A senkrecht, folglich O G eine Tangente, welche den Bogen B D in O berührt, daher muß auch der Stab K L, welcher mit dieser Tangente zusammenfällt, den Zahn B D in O berühren.

Nach §. 13. des Anhanges ist alsdann der Bogen A O = A B, und weil man die grade Linie A G als eine Hypocykloide ansehn kann, deren Grundkreis der Bogen V A W und deren Erzeugungskreis A O G ist, so muß nach §. 27. des Anhanges, der Bogen A O dem Bogen A K gleich seyn. Aber A O = A B, daher ist der

Bogen A B = Bogen A K.

Nun ist A B der Weg welchen der Umfang X Z des Rades, und A K der Weg welchen der Umfang W V des Getriebes durchlaufen hat, wenn der Zahn von A nach B fortgerückt ist, daher sind gleich große Theile von den Umfängen des Rades und Getriebes fortgeschoben und hiedurch die erste Forderung § 246. erfüllt.

Eben so wie §. 247. läßt sich beweisen, daß, wenn P die Kraft am Umfange X Z des Rades und Q der Widerstand am Umfange V W des Getriebes ist, alsdann für jeden Angriffspunkt O zwischen Zahn und Stab, P = Q bleibt, weil man in Absicht des Punktes O nur
Taf. V. Fig. 122. eben so wie §. 247. Figur 122. verfahren darf. Es ist daher auch der zweiten Forderung, §. 246., genügt, und es folgt hieraus, daß wenn ein Rad mit Zähnen ein Getriebe mit Stäben umtreiben soll, so müssen die Zähne des Rades nach einer Epicykloide gebildet werden, deren Erzeugungskreis den Halbmesser des Getriebes zum Durchmesser, und den

Umfang des Rades zum Grundkreise hat. Die Stäbe des Getriebes werden, so weit sie in Berührung mit den Zähnen kommen, geradlinigt, so daß diese Berührungslinie verlängert durch den Mittelpunkt des Getriebes geht.

§. 257.

Es sei die Theilung AK, Figur 125., des Getriebes, der Theilung AB des Rades gleich, und der Zahn AM falle im Berührungspunkte A der Mittelpunktslinie mit dem Stabe AI zusammen, so wird der vorhergehende Zahn BD den Stab KL' in O berühren. Soll nun, damit die Zähne nicht unnöthig groß werden, jedesmal nur ein Zahn einen Stab fortschieben, so kann die Länge des Zahns BD um den Theil OD verkürzt werden, weil in dem Augenblicke, wo der Punkt O des Zahns BD, mit KL' zusammen fällt, ein nachfolgender Zahn AM den Stab AI im Punkte A trifft. Man kann daher sämmtliche Zähne aus dem Mittelpunkte C mit der Weite CO wie bei OO' abschneiden, und wenn die Breite BE der Zähne gegeben ist, durch die Mitte von BE in H, den Halbmesser CH bis an den Bogen OO' verlängern, und um einen symmetrischen Zahn zu erhalten, den Bogen EO' dem Bogen BO gleich und ähnlich machen. Zu Vermeidung der scharfen Ecken bei O, O' gibt man dem Zahn eine etwas größere Länge, mittelst einer Wölbung, welche die Bogen BO, EO' in O, O' berühret. Taf. VI. Fig. 125.

Nach Abzug des Spielraums EF bleibt für die Breite der Stäbe, die Weite AF übrig. Damit aber die Ecken A, K der Stäbe nicht in die Oberfläche der Zähne einschneiden oder stumpf werden, kann man ihren Kopf nach einem Halbkreise abrunden, wie bei R und W, nur muß alsdann auch der Raum NQQ′ zwischen zweien Zähnen so weit ausgetieft werden, daß die Stäbe freies Spiel behalten,

Die kleinste Breite, welche ein symmetrischer Zahn erhalten kann, zu finden, wenn, Figur 126., AB = AK die Theilung des Rades und Getriebes ist, ziehe man vom Punkt O, wo der erzeugende Kreis den Stab KG schneidet, den Halbmesser OC, welcher den Theilkreis des Rades in H trifft. Nun werde HB = HE genommen, so ist BE die kleinste Breite des Zahns, und nur der übrige Bogen EA kann zur Breite des Stabes verwandt werden. Wäre bei unveränderten Halbmessern, Figur 126., AB′ = AK′ die Theilung, also H′B′ die halbe Breite des Zahns, so wird die andere Hälfte des symmetrischen Zahns von H′ nach E′, also über A hinaus fallen und dadurch die freie Bewegung des Stabes AG verhindern. Es kann daher in dergleichen Fällen kein symmetrischer Zahn statt finden, und man muß demselben, wenn die Theilung nicht kleiner ausfallen kann, etwa die Gestalt B′O′E geben, damit der Stab AG noch die erforderliche Breite erhalten kann. Der Bogen B′O ist alsdann eine durch den Kreis AOG auf XZ erzeugte Epicykloide und O′E eine willkürliche Abrundung.

Taf. VI. Fig. 126.

Die Beschreibung des Bogens der Epicykloide geschieht nach §. 15. des Anhanges, so daß für jeden besondern Fall, das Räderwerk leicht eingerichtet werden kann.

§. 258.

Aufgabe. Die kleinste Länge vom Obertheile des Zahns eines Stirnrades zu finden, welches die Stäbe eines

eines Kumpfs oder Getriebes bewegen soll, wenn, Figur 125, der Halbmesser des Rades $AC = a$, des Getriebes $AG = r$, und der Winkel $AGO = \beta$, welcher am Mittelpunkt des Getriebes zur Theilung AO gehört, gegeben ist. Taf. VI. Fig. 125.

Auflösung. Man ziehe den Halbmesser OC, und es sei die kleinste Länge des Zahns $Oh = l$. Im rechtwinklichten Dreieck AGO erhält man die Seite

$$AO = r \sin\beta.$$

Ferner ist der Winkel $CAO = AOG + AGO = 90° + \beta$ also $\cos CAO = \cos(90° + \beta) = -\sin\beta$

Im Dreieck ACO ist

$$CO^2 = AC^2 + AO^2 - 2 . AC . AO \cos CAO \text{ oder}$$

$$(a+l)^2 = a^2 + r^2 \sin\beta^2 + 2\,a\,r \sin\beta^2$$

und hieraus erhält man die gesuchte kleinste Länge des Zahns oder

$$l = -a + \sqrt{[a^2 + r(2a + r)\sin\beta^2]}$$

§. 259.

Aufgabe. Ein Stirnrad wird vom Getriebe oder Kumpf umgetrieben, man soll die vortheilhafteste Gestalt der Zähne und Stäbe angeben.

Auflösung. Macht man die Anordnung nach §. 256., so sind die Bedingungen §. 246. erfüllt, allein wenn, Figur 125., die Stäbe des Getriebes, die Zähne des Rades nach der Richtung Z X forttreiben, so wird in dem Augenblick, wo der Stab KL den Zahn BO in O berührt, der Zahn AM in A den Stab AI verlassen, und überhaupt die Berührung zwischen Stab und Zahn nur vor der Mittelpunktslinie CG geschehen, hinter derselben nach X, W hin, wird hingegen keine Berührung

vorkommen. Dieses hat nun den Nachtheil, daß die Stäbe wie KL′, welche vor CG die Zähne fortschieben, auf den Zahn OB eine Bewegung von O nach B gegen den Span (der Richtung der Späne oder Fasern des hölzernen Zahns entgegen) verursachen, wodurch die Reibung ansehnlich vermehrt und Zahn und Stab sehr stark abgenutzt werden. Um dies zu vermeiden kommt es darauf an, daß die Stäbe die Zähne des Rades nicht eher als im Punkt A und hinter der Mittelpunktslinie CG berühren, welches man leicht dadurch erhalten kann, wenn man die Anordnung, Figur 125. §. 256., umkehrt und nunmehr die Stäbe nach einer Epicykloide, die Zähne aber nach geraden Linien bildet, welche verlängert nach
Taf. VI. dem Mittelpunkt des Rades gehen. Es sei, Fignr 127.,
Fig. 127. AC der Halbmesser des Rades, AG der Halbmesser des Getriebes, CG die Mittelpunktslinie, und das Getriebe bewege das Rad von A nach X. Auf beiden Theilkreisen werde von A nach B und von A nach K die Theilung der Zähne AB = AK abgesetzt, und auf AW als Grundkreis, mit dem Erzeugungskreise AKC, dessen Durchmesser AC dem Halbmesser des Rades gleich ist, die Epicykloide BD beschrieben, so muß der Halbmesser CK diese Kurve in P, wo sie den Erzeugungskreis schneidet, berühren (§. 17. Anhang). Die halbe Breite vom Zahne des Getriebes werde von B nach H und von H nach E gesetzt, durch H der Halbmesser GD gezogen und der Bogen ED dem Bogen BD gleich und ähnlich gemacht, so entsteht der Obertheil des symmetrischen Getriebzahns, welcher mit dem Halbmesser GP bei Pp abgerundet und daselbst mit einer Wölbung versehen werden kann, weil

in dem Augenblicke, wo der Getriebzahn B E den Radzahn K L im Punkte P berührt, ein anderer Getriebzahn M mit dem Radzahn A im Berührungspunkte der Mittelpunkts-linie zusammenfällt. Die Zähne des Rades werden auf beiden Seiten nach graden Linien gebildet, welche wie K L verlängert in den Mittelpunkt C des Rades treffen. Den Obertheil der Radzähne, so weit er über den Theilkreis X Z fällt, kann man nach einer flachen Wölbung, welche beide Seiten des Zahns berühret, abrunden. Damit also, wenn ein Rad durch ein Getriebe bewegt werden soll, die Zähne nicht gegen den Span arbeiten, so müssen die Getriebzähne nach einer Epicykloide gebildet werden, deren Grundkreis der Theilkreis des Getriebes ist, und deren Erzeugungskreis den Halbmesser des Rades zum Durchmesser hat. Die Radzähne werden nach graden Linien gearbeitet, welche im Mittelpunkt C des Rades zusammenfallen.

§. 260.

Aufgabe. Die kleinste Länge vom Obertheile des Stabes eines Kumpfs oder Getriebes zu finden, welcher die Zähne eines Stirnrades bewegen soll, wenn, Figur 127., der Halbmesser des Rades $AC = a$, des Getriebes $AG = r$ und der Winkel $ACP = \alpha$, welcher am Mittelpunkte des Rades zur Theilung AP gehört, gegeben sind. Taf. VI. Fig. 127.

Auflösung. Die kleinste Länge des Stabes sei $hP = l'$ so ist im Dreieck AGP

$$GP^2 = AG^2 + AP^2 - 2 . AG . AP . \cos GAP.$$

Aber im rechtwinklichten Dreieck ACP ist $AP = a \sin \alpha$

und weil der Winkel $GAP = 90° + \alpha$ ist, so erhält man $\cos GAP = -\sin \alpha$, daher

$$GP^2 = (r + l')^2 = r^2 + a^2 \sin \alpha^2 + 2 a r \sin \alpha^2$$

und hieraus die kleinste Länge des Stabes

$$l' = -r + \sqrt{[r^2 + a(a + 2r) \sin \alpha^2]}.$$

§. 261.

Aufgabe. Die Kraft zu finden, welche am Theilkreise eines Rades erfordert wird, um die Reibung zwischen den Zähnen zweier Räder zu überwältigen.

Auflösung. Mit Beibehaltung der angenommenen Taf. VI. Fig. 125. Bezeichnung sei P die Kraft, welche, Figur 125., am Theilkreise XAZ des Rades erfordert wird, um der eben so großen Last am Theilkreise VAW des zweiten Rades das Gleichgewicht zu halten. Die Kraft P zerlegt sich nach AC auf den festen Punkt C, und nach AO in den Normaldruck P' auf den Zahn L'K, und man findet den Normaldruck

$$P' = \frac{P}{\cos OAP} = \frac{P}{\cos OGA} = \frac{P}{\cos \beta}.$$

Von diesem Normaldrucke entsteht eine Reibung $= \frac{\mu P}{\cos \beta}$ und man muß nach der Richtung OL eine Kraft $\frac{\mu P}{\cos \beta}$ anbringen, um diese Reibung zu überwältigen. Zerlegt man diese Kraft nach ON' und OM' senkrecht auf OC, so wird die nach ON' von dem festen Punkt C aufgehoben. Die Kraft nach OM' ist aber

$$= \frac{\mu P}{\cos \beta} . \cos LOM' = \frac{\mu P}{\cos \beta} \cos AOC.$$

Nun ist $\sin COG = \sin(90° + AOC) = \cos AOC$ und im Dreieck COG verhält sich

$OC : CG = \sin OGC : \sin COG$ oder

$OC : a + r = \sin\beta : \cos AOC$, daher

$$\cos AOC = \frac{(a + r)\sin\beta}{OC}$$

und man findet die zur Ueberwältigung der Reibung nach der Richtung OM' erforderliche Kraft

$$\frac{\mu P}{\cos\beta}\cos AOC = \frac{\mu(a + r)\operatorname{tgt}\beta}{OC}.P$$

Soll am Theilkreise in h oder A eine Kraft f eben die Wirkung hervorbringen, so ist das Moment

$$a.f = OC.\frac{\mu(a + r)\operatorname{tgt}\beta}{OC}.P$$

und man findet hieraus die am Theilkreise zur Ueberwältigung der Reibung zwischen den Zähnen erforderliche Kraft,

$$(I)\ f = \frac{\mu(a + r)\operatorname{tgt}\beta}{a}.P.$$

Diese Kraft ist veränderlich, und wächst mit dem Winkel $\beta = OGA$. Der größte Werth, welchen β erhalten kann, ist der Winkel, welcher der Theilung am zweiten Rade entspricht. Giebt man daher β diese Bedeutung, so wird auf keinen Fall die Reibung zu klein in Rechnung gebracht.

Uebrigens wird hier unter dem ersten Rade dasjenige verstanden, welches das andere umtreibt. Für das erste Rad ist a, und für das zweite r der Halbmesser des Theilkreises, und β ist der Winkel, welcher am Mittelpunkte des zweiten Rades der Theilung entspricht.

Wäre m die Anzahl der Zähne des ersten, und n die Anzahl der Zähne des zweiten Rades, so ist $\beta = \frac{360^{\circ}}{n}$, daher

$$(II)\ f = \frac{\mu\,(a+r)}{a}\ P\ \mathrm{tgt}\ \frac{360^\circ}{n}$$

Ferner ist §. 250. [VI] $\frac{r}{a} = \frac{n}{m}$ daher

$$(III)\ f = \frac{\mu\,(m+n)}{m}\ P\ \mathrm{tgt}\ \frac{360^\circ}{n}.$$

Will man sich mit einem zureichenden Näherungsausdruck begnügen, um die trigonometrische Linie zu vermeiden, so kann man (§. 157. Anhang) $\mathrm{tgt}\ x = \frac{3\pi x}{\pi^2 - 4x^2}$ setzen. Nun ist $\mathrm{Arc}\ \frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n}$, also

$$\mathrm{tgt}\ \frac{360^\circ}{n} = \mathrm{tgt}\ \frac{2\pi}{n} = \frac{3\pi\ \frac{2\pi}{n}}{\pi^2 - 4\cdot\frac{4\pi^2}{n^2}} = \frac{6n}{n^2-16}.$$

und hieraus

$$(IV)\ f = \frac{6\mu n\,(m+n)}{m\,(n^2-16)}\ P$$

Wird V in der Bedeutung §. 254. genommen, so ist die gesammte Kraft, welche am Theilkreise zur Erhaltung des Gleichgewichts und zur Ueberwältigung der Reibung zwischen den Zähnen erfordert wird, oder

$$V = P + f.$$

Beispiel. Das erste Rad habe 52, das zweite 6 Zähne, und widerstehe der Bewegung mit einer Kraft von 100 Pfund, so ist hier $m = 52$, $n = 6$, $P = 100$; also $\mathrm{tgt}\ \frac{360^\circ}{n} = \mathrm{tgt}\ 60^\circ = 1{,}73205$, daher ist, wenn $\mu = \frac{1}{6}$ angenommen wird, die zur Ueberwältigung der Reibung erforderliche Kraft nach (III)

$$f = \frac{(52+6)\,.\,100\,.\,1{,}73205}{6\,.\,52} = 32{,}20\ \text{Pfund}.$$

Wird dies Beispiel nach (IV) berechnet, so findet man

$$f = 33{,}46.$$

§. 262.

Zusatz. Zwischen Zahn und Stock war die Reibung §. 255., oder

$$f = \frac{3\mu n\,(m + 2n)}{m\,(n^2 - 4)}\,P.$$

Wird die Reibung zwischen Zahn und Zahn nach dem vorigen §. $= f'$ gesetzt, so läßt sich leicht einsehn, daß, wenn m und n in f und f' gleichen Werth haben, alsdann f' größer als f ist, oder unter übrigens gleichen Umständen ist die Reibung zwischen Zahn und Zahn größer, als zwischen Zahn und Stock.

§. 263.

Bei den bisherigen Untersuchungen hat jederzeit die stillschweigende Bedingung statt gefunden, daß wenn die Zähne des Rades und Getriebes einander in der Mittelpunktslinie bei A, Figur 125. und 127., berühren, auch bei den nächst vorhergehenden Zähnen bei O, Figur 125., oder P, Figur 127., eine Berührung ausführbar sei. Aber §. 259. ist der Fall erläutert, in welchem bei einer gegebenen Theilung $AB' = AK'$, Figur 126., die zweite Berührung in O' fällt, weshalb der Zahn die Gestalt $B'O'E$ erhalten müßte, und daher nicht symmetrisch werden kann. Diese unförmlichen Zähne gewähren zwar den Vortheil, daß keine Reibung gegen den Span entsteht, weil aber auch diese unter gewissen Umständen kaum ausführbar sind, und besonders in denjenigen Fällen, wo symmetrische Zähne von gegebener Breite angeordnet werden sollen, ihre Länge sehr oft größer ausfällt, als solches die bisherige Anleitung erfordert, so kommt es nicht nur darauf an, diejenigen Fälle anzugeben, bei welchen eine

Taf. VI. Fig. 125. 127.

Fig 126.

Bewegung gegen den Span entsteht, sondern auch die Nachtheile dieser Bewegung so viel wie möglich zu vermindern.

Taf. VI. Fig. 128 Es sei daher, Figur 128., der Halbmesser des Rades AC, des Getriebes AG, und die Theilung AB = AK gegeben, und dabei vorausgesetzt, daß das Getriebe vom Rade bewegt werden soll. Mit dem Erzeugungskreise, dessen Durchmesser AG ist, sei auf dem Theilkreise XZ des Rades als Grundkreis, die Epicykloide BDO′ beschrieben, welche dem Halbmesser GK in O′ berührt, so wäre BDO′ die erforderliche Gestalt des Zahns, wenn derselbe den Stab KO′ in dem Augenblicke verlassen soll, wo ein neuer Zahn AN den Stab AI erreicht. Die unförmliche Gestalt BDO′ ist schon deshalb nicht ausführbar, weil alsdann den Zähnen des Getriebes die nöthige Breite fehlte. Wird aber überdies verlangt, daß die Zähne beider Räder symmetrisch seyn sollen, und die Breite des Radezahns BE ist gegeben, so ziehe man durch C und die Mitte von BE die Linie HD, welche die Epicykloide BO′ in D schneidet, so ist BD die eine Hälfte vom Obertheile des symmetrischen Zahns, welcher die andere Hälfte DE gleich und ähnlich gemacht wird. Mit dem Halbmesser CD beschreibe man den Bogen DO bis an den Erzeugungskreis AG, so ist O der Punkt, wo der Kopf des Zahns BDE den zugehörigen Stab bei der Bewegung des Rades verlassen muß. (§. 249.) Hat in diesem Falle der Punkt B des Zahns BE von der Mittelpunktslinie ab, den Bogen AB, Figur 129., durchlaufen, so wird erfordert, daß in eben dem Augenblicke der nachfolgende Zahn PN mit dem Stabe AI vor der Mit-

Fig. 129.

telpunktslinie CG in Berührung kommt. Damit aber alsdann die Bedingungen §. 246. erfüllt werden, so müssen die Obertheile der Stäbe die Gestalt einer Epicykloide erhalten, deren Grundkreis der Umfang VW des Getriebes ist, und deren Erzeugungskreis den Halbmesser AC des Rades zum Durchmesser hat. (§. 259.)

Dies wird daher allemal der Fall seyn, wenn die Berührung der Zähne vor die Mittelpunktslinie fällt.

§. 264.

Aufgabe. Die vortheilhafteste Anordnung der Zähne anzugeben, wenn ein Getriebe durch ein Stirnrad bewegt wird, und wenn außerdem die Halbmesser der Räder, die Theilung und die Breiten der Zähne gegeben sind, auch die erste Berührung der Zähne nicht in der Mittelpunktslinie, sondern vor derselben erfolgen soll.

Auflösung. Es sei CG, Figur 129., die Mittelpunktslinie. Auf dem Theilkreise XZ als Grundkreis beschreibe man in einem willkürlichen Punkte b eine Epicykloide bd, deren Erzeugungskreis den Halbmesser AG des Getriebes zum Durchmesser hat. Die gegebene halbe Dicke des Zahns werde von b nach h, und von h nach e gesetzt, durch C und h die Linie hd bis an die Epicykloide gezogen, so ist hd die größte Länge vom Obertheile des Zahns, dessen Gestalt man erhält, wenn der Bogen ed dem Bogen bd gleich und ähnlich gemacht wird. Mit dem Halbmesser Cd beschreibe man den Bogen dO bis an den Erzeugungskreis AG, ziehe OC, und setze von H nach B die halbe Breite des Zahns. Taf. VI. Fig. 129.

Ferner werde auf dem Theilkreise VW des Getriebes die halbe Breite der Stäbe aus einem willkürlichen Punkte f von f nach l und von l nach g gesetzt, und über diesem Theilkreise als Grundkreis aus f eine Epicykloide fnk beschrieben, deren Erzeugungskreis den Halbmesser AC des Rades zum Durchmesser hat. Durch Gl sei die Linie lk bis an die Epicykloide fk gezogen, und der Bogen kg dem Bogen fk gleich und ähnlich gemacht, so ist lk die größte Länge, welche der Obertheil des Stabes erhalten kann. Um aber die kleinste erforderliche Länge zu finden, so nehme man auf dem Theilkreise des Rades aus dem vorhin gefundenen Punkte B, den Bogen BQ der gegebenen Theilung gleich; ziehe den Halbmesser QC, so wird solcher den Erzeugungskreis AYC im Punkte P schneiden, welches zugleich derjenige Punkt ist, wo der Zahn QN zuerst mit dem Stabe AI in Berührung kommt (§. 259.), so wie O der Punkt ist, wo der Zahn den Stab verläßt. Mit dem Halbmesser GP beschreibe man den Bogen nom, so ist lo die kleinste Länge, welche der Obertheil des Stabes erhalten kann. Statt des Bogens nom pflegt man aber den Zahn nach irgend einer Krümmung npm dergestalt flach ab zu wölben, daß dieser Bogen in m und n mit den Bogen nf und mg eine gemeinschaftliche Tangente hat.

Die Gründe des hier gezeigten Verfahrens folgen aus dem vorhergehenden §.

Wollte man den Zähnen am Scheitel bei d einige Breite geben, so müssen alsdann die Stäbe verhältnißmäßig schmäler werden.

§. 265.

Aufgabe. Die vortheilhafteste Anordnung der Zähne anzugeben, wenn ein Stirnrad durch ein Getriebe bewegt wird, und wenn außerdem noch die Halbmesser der Räder, die Theilung und die Breiten der Zähne gegeben sind, auch die erste Berührung der Zähne vor der Mittelpunktslinie geschiehet.

Auflösung. Wenn zuvor die Mittelpunktslinie C G, Figur 130., gezogen ist, so beschreibe man auf dem Theilkreise V W des Getriebes als Grundkreis, aus einem willkürlichen Punkte f die Epicykloide f k, deren Erzeugungskreis den Halbmesser A C des Rades zum Durchmesser hat. Hierauf werde, wie bei der vorhergehenden Auflösung, der Getriebzahn f k g beschrieben, und eben so auf dem Theilkreise X Z des Rades, der Radzahn b d e. Mit dem Halbmesser G k schlage man den Bogen k P bis an den Erzeugungskreis A Y C, so ist P der Ort, wo der Stab den Zahn verläßt. Aus P werde der Halbmesser P G gezogen, und vom Durchschnittspunkte H die halbe Breite des Stabes von H nach B gesetzt, aus B aber auf dem Umfange des Theilkreises V W, die gegebene Theilung von B nach K getragen, so wird der Halbmesser K G den Erzeugungskreis A G im Punkte O schneiden, und dadurch den Ort bezeichnen, wo die nachfolgenden Zähne sich in Berührung befinden, wenn die vorhergehenden Zähne einander in P verlassen. Wird daher mit dem Halbmesser C O der Bogen n m beschrieben, welcher die Linie d h in o schneidet, so ist o h die kleinste Länge vom Obertheile der Radzähne, welche man mit einer flachen Wölbung n p m versehen kann.

Taf. VI. Fig. 130.

Sollte der vorläufig gezeichnete Zahn f k g nach Vollendung des Zahns B P E nicht den erforderlichen Abstand von B P E haben, so wird solcher als nicht vorhanden angesehn, weil er nur diente, die Länge lk durch Zeichnung zu finden. Ohne Zeichnung kann man diese Länge auch durch Rechnung nach §. 260. erhalten.

§. 266.

Verbindet man ein Kammrad mit einem Getriebe, so liegen beide Räder nicht in einerlei Ebene, sobald aber der Winkel, unter welchem beide Räder gegen einander geneigt sind, gegeben ist, so weiß man auch, daß dieser demjenigen gleich ist, unter welchem sich beide Axen schneiden (§. 34. Anhang.).

Taf. VII. Fig. 131. Es sei XAZ, Figur 131., der Umfang des Kammrades, CE seine Axe; AOVA der Umfang eines Trillings, und GK seine Axe, welche die Axe des Kammrades in K unter dem Winkel EKG = ω schneidet, wobei vorausgesetzt wird, daß beide Umfänge einander in A berühren. Aus dem Punkte K, welcher hier der Axpunkt heißt, werde KA und durch A und G der Durchmesser AV gezogen, so ist KA = KV. Mit dem Halbmesser KA werde über XZ eine Kugelzone XAZZ'X' beschrieben, deren Parallelkreise XZ und X'Z' durch die Punkte A und V gehen. Der Umfang AV des Getriebes als Erzeugungskreis, wird alsdann auf dem Umfange XZ des Rades als Grundkreis, bei der Fortwälzung von A nach X eine sphärische Epicykloide AA' beschreiben (§. 35. Anhang). Nimmt man an, daß diese Epicykloide AA' bei A am Umfange des Rades befestigt, und daß im Umfange des Getriebes bei A ein fester Punkt A angebracht sei, welcher sich zugleich mit dem Getriebe umdreht, dessen Dicke aber noch bei Seite gesetzt wird, so muß, wenn sich beide Räder um ihre befestigten Mittelpunkte C, G frei umdrehen können, bei der Fortbewegung des Rades von A nach B, der Punkt A von A nach O kommen. Der Umfang des Rades hat alsdann den Bogen AB, und der Umfang des Getriebes den Bogen AO durchlaufen, die Epicykloide AA′ ist nach BB′ gekommen, und weil für diesen Fall der Bogen AB dem Bogen AO gleich ist (§. 32. Anhang), so ist die erste Bedingung §. 246. erfüllt.

Am Umfange des Rades wirke in A nach der Richtung der Tangente die Kraft P, und am Umfange des Getriebes sei nach der Richtung der Tangente in O eine Kraft Q mit P im Gleichgewichte, so wird, wenn w und w′ die Wege bezeichnen, welche die Kräfte P und Q in gleicher Zeit durchlaufen, nach dem eben geführten Beweise, $w = w'$, also auch nach (§. 69.) $P = Q$ seyn. Es ist daher die zweite Bedingung §. 246. erfüllt.

Weil der Theilkreis AV des Getriebes die Grundfläche eines graden Kegels bildet, dessen Scheitel in den Axpunkt K fällt, so kann man diesen Kegel mit der Grundfläche AV parallel durchschneiden, wodurch eine zweite Kreisfläche A′V′, Figur 133., entsteht, welche ebenfalls auf der Axe GK senkrecht ist, und alle Linien, wie AA′, VV′, welche man vom Umfange des Theilkreises AV nach K zieht, werden ebenfalls durch den Umfang des Kreises A′V′ gehen. Sind nun beide Kreise AV, A′V′ an der Axe GK befestigt, und wird durch ihre Fortwälzung von A nach E, durch den Punkt A die Epicykloide ADE, und durch den Punkt A′ die Epicykloide A′D′E′ beschrieben, so wird letztere ebenfalls in einer Kugeloberfläche liegen, deren Mittelpunkt K ist. Auch wird

Taf. VII. Fig. 133.

der Punkt A vom Bogen AD eben so fortbewegt werden, wie A′ vom Bogen A′D′, und man kann daher, wenn AA′ die Dicke eines Kamms bezeichnet, diese beide Bogen als Grenze der Seitenfläche des Kammes ansehn, welcher die Stöcke AA′, VV′ des Getriebes AV bewegt. Hieraus folgt, daß wenn ein Kammrad mit einem Trillinge verbunden werden soll, so müssen die Kämme nach einer sphärischen Epicykloide abgerundet werden, welche den Umfang des Kammrades zum Grundkreise und den Umfang des Trillings zum Erzeugungskreise hat; auch müssen die Seitenflächen (HH′F′F) dieser Kämme so beschaffen seyn, daß alle grade Linien aus dem Axpunkte beider Räder, ganz in diese Seitenflächen fallen (wie HH′, FF′, EE′). Die Stöcke (AA′, VV′) des Trillings erhalten eine solche Lage, daß sie im Axpunkte (K) zusammen treffen.

§. 267.

Aufgabe. Damit ein Trilling durch ein Kammrad umgetrieben werden kann, soll man aus den Halbmessern dieser Räder, der Theilung und der Neigung beider Axen gegen einander, die Kämme und Triebstöcke anordnen.

Taf. VII. Fig. 134. 135. 136. Auflösung. Es sei AC, Figur 134. 135. und 136., der Halbmesser vom Theilrisse des Kammrades, und auf dieser Linie habe man den Winkel CAV dem Winkel, unter welchem sich die Axen beider Räder schneiden sollen, gleich gemacht. Der Halbmesser vom Theilrisse werde von A nach G und von G nach V getragen, und senkrecht auf AV die Linie GK bis an die Axe CK des Rades gezogen, so ist K der Axpunkt beider Räder.

Es sei ferner GA, Figur 137., der Halbmesser, und AOV ein Theil vom Umfange des Getriebes, und der Bogen AO eben so groß als die Theilung des Rades. Man ziehe die Sehne AO, setze die gegebene oder willkürlich angenommene Dicke der Triebstöcke von O nach o, ziehe oo′ auf AG senkrecht, so ist Ao′ die kleinste Höhe eines Kamms, welche Figur 134. 135. oder 136. aus A nach o getragen, und von o nach K die Linie oK gezogen wird. Von A nach a trage man die gegebene oder willkürlich angenommene Dicke der Kämme, und schlage aus K die Bogen AV und an, so ist AanN der Querschnitt, und die Stellung eines Kammes gegen den Halbmesser AC seines Rades, wenn vorausgesetzt wird, daß der Schnitt durch die Mitte des Kamms und die Axe des Kammrades geht. Statt der Bogen AN, an kann man auch grade Linien bei der Verfertigung der Kämme wählen.

Taf. VII. Fig. 137.

Fig. 134. 135. 136.

Auf derjenigen Kugelzone, welche der Bogen AV beschreibt, indem sich die Figur CAVW um die Axe WC dreht, werde eine sphärische Epicykloide beschrieben, (§. 35. 36. Anhang) deren Erzeugungskreis dem Theilrisse des Getriebes gleich ist. Diese Epicykloide sei ADFE, Figur 133., und man setze von E bis L und von L bis H die halbe Breite eines Kamms und Stocks, mache den Bogen HF dem Bogen EF gleich und ähnlich, nehme LN = AN, Figur 134. 135. oder 136., ziehe durch N, Figur 133., die Linie mm′ mit HE parallel, so ist Hmm′E die Vorderansicht des Kamms, von welchem wie Figur 123. die halbe Dicke des Stocks abgeschnitten wird. Die Seitenflächen werden alsdann dadurch be-

Fig. 133.

Taf. V. Fig. 123.

stimmt, daß von allen Punkten im Umfange der Vorderansicht grade Linien nach dem Axpunkte K gezogen werden.
Taf. VII. Fig. 138. Den Obertheil des Kammes kann man, wie Figur 138. bei EH so abrunden, daß die Wölbung beide Seitenflächen berührt; auch müssen die Kämme nach unten zu so viel verlängert werden, daß die Triebstöcke frei spielen können.
Fig. 134. 135. 136. Die Linien Aa, VV', Figur 134. 135. oder 136., geben die Lage der Triebstöcke, welche abgekürzte Kegel bilden, deren fehlende Spitze in den Axpunkt K fällt.

§. 268.

Aufgabe. Die Kraft zu finden, welche am Umfange des Kammrades erfordert wird, um die Reibung zwischen den Kämmen und den Stöcken des zugehörigen Getriebes zu überwältigen.

Auflösung. Zur Vereinfachung der Rechnung kann
Fig. 131. man annehmen, daß die kleine Fläche ABO, Figur 131., welche einen Theil von der Oberfläche einer Kugel bildet, in einerlei Ebene mit dem Theilkreise AOV des Getriebes falle, so daß der Bogen AB der Linie AB in der ebenen Figur 132. gleich sei. Alsdann ist, Figur 132., der Winkel $OAB = \frac{1}{2} AGO = \frac{1}{2}\beta$, und die Kraft P, welche nach AB wirkt, kann senkrecht auf AB nach AF, und nach AO senkrecht auf die Tangente L'O des Zahns zerlegt werden. Diese Kraft verursacht nach der Richtung OP' einen Normaldruck gegen den Stock $O = \frac{P}{\cos\frac{1}{2}\beta}$, wovon eine Reibung $\frac{\mu P}{\cos\frac{1}{2}\beta}$ entsteht, welche einen Widerstand nach der Richtung OL' verursacht. Es wird daher nach OL eine eben so große Kraft erfordert, und wenn man diese parallel mit AB nach OM, und senkrecht

senkrecht auf AB nach ON zerlegt, so wird diese letztere Kraft vom Kammrade aufgehoben, die erste nach OM ist $= \frac{\mu P}{\cos \frac{1}{2}\beta} . \cos LOM$. Aber $LOM = 90° - \frac{1}{2}\beta$, also $\cos LOM = \sin \frac{1}{2}\beta$, daher ist die nach der Richtung OM erforderliche Kraft Taf. VII. Fig. 132.

$$= \frac{\mu P}{\cos \frac{1}{2}\beta} . \sin \frac{1}{2}\beta = \mu P \operatorname{tgt} \frac{1}{2}\beta.$$

Oder wenn die zur Ueberwältigung der Reibung nach der Richtung AP erforderliche Kraft = f gesetzt wird, so ist

$$(I)\ f = \mu P \operatorname{tgt} \frac{1}{2}\beta$$

oder, wenn n die Anzahl der Stöcke des Getriebes ist,

$$(II)\ f = \mu P \operatorname{tgt} \frac{180°}{n}.$$

Nach §. 255. ist nahe genug $\operatorname{tgt} \frac{180°}{n} = \frac{3n}{n^2 - 4}$, daher

$$(III)\ f = \frac{3\mu n}{n^2 - 4} P.$$

Beispiel. Für $n = 8$, $\mu = \frac{1}{6}$, und $P = 100$ findet man nach (II)

$$f = \frac{1}{6} . 100 . 0{,}4142 = 6{,}90 \text{ Pfund}$$

und nach (III)

$$f = \frac{3 . 8 . 100}{6 . 60} = 6{,}66 \text{ Pfund}.$$

§. 269.

Mit dem Theilrisse XAZ, Figur 139., eines Kammrades sei der Theilriß AV des zugehörigen Getriebes bei A in Berührung, so wird die Lage beider Kreise durch den Winkel CKG, welchen die Axen beider Räder bilden, bestimmt, und K ist der Axpunkt. Wird der grade Kegel AKV auf dem Theilkreise XZ so fortgewälzt, daß die Spitze desselben in K bleibt, so beschreibt der Umfang der Taf. VIII. Fig. 139.

Grundfläche AV eine Kugelzone XAZZ′VX′. Der Halbmesser AG werde als Durchmesser eines Kreises AOGA angenommen, dessen Mittelpunkt G′ ist. Man ziehe G′K′ mit GK parallel, so wird K′ in die Linie C′C fallen, weil die Linien AV und CC′ in einerlei Ebene liegen. Auch ist G′K′ auf der Fläche AG senkrecht, weil GK auf der Fläche AV senkrecht ist, und dieserhalb wird G′K′ die Axe eines graden Kegels AGK′, dessen Spitze K′ in CC′ liegt. Wälzt sich der Kegel AGK′ von A nach X, indem seine Spitze im Punkte K′ bleibt, so wird der Punkt A eine sphärische Epicykloide ADE auf der Oberfläche XZzx beschreiben, deren Halbmesser AK′ = GK′ ist. Der Kreis AV werde mit AG zugleich nach E gewälzt, so kommt der Punkt A des Kreises AG nach E, wenn der Punkt V des Kreises AV, von V nach E kommt, oder wenn der halbe Umfang von AV abgewälzt ist. Der beschreibende Punkt A des Kreises AG hat alsdann auch noch innerhalb des Kreises AV eine Hypocykloide beschrieben, welche grade ist und in den Durchmesser AV fällt (§. 27. Anhang.).

Man setze nun voraus, daß die Theilrisse XZ und AV sich frei um ihre unverrückbare Mittelpunkte C und G drehen können, und daß mit dem Umfange XZ des Rades die Epicykloide AD, und mit dem Getriebe AV die Hypocykloide oder der Halbmesser GA so verbunden werde, daß der Bogen AD den Halbmesser GA fortschieben kann. Ist der Bogen AD in BB′ angelangt, so wird der Halbmesser GA nach GA′ kommen, der Bogen AA′ ist = AB, und im gemeinschaftlichen Punkte O wird der Bogen BB′ vom Halbmesser GA′ berührt. Es läßt sich daher auch hier eben so wie §. 266. beweisen, daß durch diese Anordnung die Bedingungen §. 246. erfüllt werden.

Mit der Grundfläche AV des Kegels AVK sei der Querschnitt av, Figur 140., parallel, und der Halbmesser ag desselben werde zum Durchmesser eines Kreises angenommen, welcher in die Kreisfläche av fällt. Aus dem Mittelpunkte g' der Kreisfläche ag ziehe man $g'k$ mit GK parallel, so ist $g'k$ die Axe des senkrechten Kegels agk. Der Kreis AV, mit welchem av an der gemeinschaftlichen Axe GK verbunden ist, wälze sich von A nach E, der Punkt A des Kreises AG beschreibe die sphärische Epicykloide ADE, während der Kreis ag die sphärische Epicykloide ade beschreibt, welche in die Kugeloberfläche $aex''x'z'a$ fällt, deren Halbmesser kx' ist, so wird jede Linie wie AK oder DK, welche durch einen Punkt A oder D der äußersten Epicykloide nach dem Axpunkte K gezogen wird, die innere Epicykloide in dem Punkte a oder d schneiden. So wie der Bogen AD den Halbmesser GA forttreibt, eben so wird ad den Halbmesser ga fortbewegen, und wenn man daher beide Epicykloiden durch eine Fläche ADda verbindet, welche die Seitenfläche der Kämme vorstellt, und durch die Punkte AagG die feste Ebene AagG legt, welche die Seitenfläche der Zähne des Getriebes vorstellt, so wird die Bewegung eben so erfolgen, als wenn der einzige Bogen AD den Halbmesser GA fortgeschoben hätte. Taf. VIII. Fig. 140.

Die vortheilhafte Einrichtung der Kämme eines Rades und der Zähne eines Getriebes erfordert daher, daß zur Bestimmung der Seitenfläche der

Kämme, auf ihrer Vorderseite eine sphärische Epicykloide beschrieben werde, welche zum Grundkreise den Umfang des Kammrades, und als Durchmesser des Erzeugungskreises, den Halbmesser des Getriebes erhält. Von dieser Kurve werden grade Linien nach dem Axpunkte K gezogen, so ist dadurch die Seitenfläche des Kamms bestimmt. Die Zähne des Getriebes erhalten zur Seitenfläche Ebenen, welche durch die Axe des Getriebes gehen.

§. 270.

Aufgabe. Ein Getriebe mit Zähnen soll durch ein Kammrad umgetrieben werden; man sucht die Anordnung und Gestalt der Kämme und Zähne, wenn die Halbmesser der Räder, ihre Theilung und die Neigung beider Axen gegen einander gegeben sind.

Taf. VIII. Fig. 141. 142. 143. Auflösung. Es sei AC, Figur 141. 142. oder 143., der Halbmesser des Kammrades, AV der Durchmesser des Getriebes, und der Winkel CAV dem gegebenen Winkel gleich, unter welchem sich die Axen der Räder schneiden sollen. Aus der Mitte von AV werde GK auf AV senkrecht, bis an die Axe CK des Kammrades, und von K die Linien KA, KV gezogen. Von A nach a werde die Dicke des Kamms gesetzt, und durch a die Linie av mit AV parallel gezogen. Man halbire AG in G′ und ag in g′, ziehe die Linien G′K′, g′k mit GK parallel, schlage aus K′ mit dem Halbmesser AK′ den Bogen AG, und aus k mit dem Halbmesser ak den Bogen ag, so muß der Durchschnitt des Kamms in die Fläche AGga fallen.

Mit dem Halbmesser GA des Getriebes beschreibe man den Kreisbogen AV, Figur 144., und nehme zugleich diesen Halbmesser als Durchmesser des Kreises AOG an. Von A nach A′ werde die Theilung des Rades getragen, die Linie GA′ gezogen, und wo diese den Umfang des kleinen Kreises in O schneidet, ziehe man Oo auf AG senkrecht, so ist Ao die kleinste Höhe des Kamms, welche man, Figur 141. 142. oder 143., auf AV von A bis o trägt, und wenn alsdann durch o und K die Linie KN gezogen wird, so ist ANna derjenige Querschnitt des Kamms, welcher erweitert in die Axe des Kammrades fällt. Eben so ist Aon′a die kleinste Seitenfläche des Zahns am Getriebe.

Taf. VIII. Fig. 144.

Fig. 141. 142. 143.

Auf derjenigen Kugelzone, welche entsteht, wenn sich der Bogen ANG um die Axe K′C dreht, wozu der Kugelhalbmesser AK′ gehört, beschreibe man eine sphärische Epicykloide (§. 35. Anhang), deren Erzeugungskreis den Halbmesser AG des Getriebes zum Durchmesser hat, und verfahre wie §. 267., so erhält man die Gestalt des Kammes Hmm′L, Figur 140. Die Gestalt der Zähne des Getriebes ist auf beiden Seitenflächen eben, man kann aber den Obertheil der Zähne abrunden, wie Figur 145.

Fig. 140.

Fig. 145.

Die Gründe der gegebenen Auflösung sind im vorhergehenden §. auseinander gesetzt.

§. 271.

Aufgabe. Die Kraft zu finden, welche am Umfange des Kammrades erfordert wird, um der Reibung zwischen den Kämmen und den Zähnen des Getriebes das Gleichgewicht zu halten.

Auflösung. Auf eine ähnliche Art wie §. 268. sei, Figur 144, die Ebene, in welcher sich der Kamm BO und der Zahn A'O befindet. Die Kraft P am Umfange des Kammrades wirke nach der Richtung AP, so verursacht solche mittelst des Kammes auf den Zahn bei O, nach der Richtung AO, den Normaldruck $\frac{P}{\cos OAB}$, oder weil $AGO = \beta$, so ist dieser Druck $= \frac{P}{\cos \beta}$, und die davon entstehende Reibung, welche nach der Richtung OG die Bewegung aufhält, $= \frac{\mu P}{\cos \beta}$. Zur Ueberwältigung dieser Reibung werde nach der mit AB parallelen Richtung OM eine Kraft f erfordert, so ist $f = \frac{\mu P}{\cos \beta} \cos A'OM$, oder es ist, weil

Taf. VIII. Fig. 144.

$$A'OM = 90° - \beta, \text{ also } \cos A'OM = \sin \beta,$$

die zur Ueberwältigung der Reibung zwischen Kamm und Zahn erforderliche Kraft

$$\text{(I)} \quad f = \mu P \operatorname{tgt} \beta$$

oder wenn das Getriebe n Zähne hat

$$\text{(II)} \quad f = \mu P \operatorname{tgt} \frac{360°}{n}.$$

Nach §. 161. ist ferner $\operatorname{tgt} \frac{360°}{n} = \frac{6n}{n^2 - 16}$, daher auch

$$\text{(III)} \quad f = \frac{6 \mu n}{n^2 - 16} P.$$

Beispiel. Für $n = 8$, $\mu = \frac{1}{6}$ und $P = 100$ ist nach (II)

$$f = \frac{1}{6} \cdot 100 \cdot 1 = 16,67$$

oder nach (III)

$$f = \frac{6 \cdot 8 \cdot 100}{6 \cdot 48} = 16,67.$$

§. 272.

Mit einem Rade AV, Figur 146., welches um seinen festen Mittelpunkt G frei herumbewegt werden kann, ist eine grade Stange XZ so verbunden, daß solche sich frei nach der Richtung XZ beweget, und zugleich als Tangente das Rad in A berührt. Im Berührungspunkte A beschreibe man auf der Stange eine Cykloide (§. 4. Anhang) AA′, deren Erzeugungskreis dem Umfange AV des Rades gleich ist, und setze voraus, daß solche bei A an die Stange befestiget werde. Ferner sei im Rade AV ein fester Punkt bei A, welcher vom Bogen AA′ fortgeschoben werden kann, so wird bei der Fortbewegung der Stange, wenn der Bogen AA′ nach BB′ kommt, der Punkt A in O anlangen. Alsdann ist aber nach den Eigenschaften der Cykloide, die Weite AB dem Bogen AO gleich; giebt man daher den Zähnen einer graden Stange die Rundung einer Cykloide, so werden die Bedingungen §. 246. erfüllt, welches sich eben so wie §. 266. beweisen läßt. Taf. IX. Fig. 146.

Sollen die Stöcke eine gegebene Dicke erhalten, so wird eben so wie §. 247., Figur 123., verfahren, indem man zur Bestimmung der Rundung des Zahns, eine mit der Cykloide parallele Kurve beschreibt, welche in allen Theilen von der Cykloide um die halbe Dicke des Stocks normal absteht. Taf. V. Fig. 123.

Die grade Stange, welche mit Zähnen oder Kämmen versehen wird, heißt der Kammbaum, und diejenige grade Linie, welche den Theilkreis oder Umfang des Getriebes berührt, der Theilriß des Kammbaumes.

§. 273.

Aufgabe. Eine grade gezahnte Stange oder ein Kammbaum soll einen Trilling bewegen; man sucht die angemessene Gestalt der Zähne und Stöcke.

Taf. IX. Fig. 147. Auflösung. Es sei AOV, Figur 147., der Theilkreis des Trillings, XZ der Theilriß des Kammbaums, und A der Berührungspunkt. Ueber XZ beschreibe man aus A die Cykloide AA′ (§. 4. Anhang), indem der Theilkreis AOV als Erzeugungskreis angenommen wird. Mit AA′ parallel beschreibe man die Kurve DE, so daß alle Normalabstände zwischen beiden Kurven der halben Dicke der Triebstöcke gleich werden. Ferner werde der Bogen AO der gegebenen Theilung des Rades gleich gemacht, die Linie AO gezogen; auf OA von O nach o die halbe Dicke des Stocks gesetzt, und aus o mit ZX parallel die Linie oE bis an den Bogen DE gezogen, so ist durch den gefundenen Punkt E die kleinste Höhe des Zahns bestimmt. Wird nun die gegebene Breite des Zahns von D bis F getragen, so läßt sich daraus die Gestalt des Zahns auf eine ähnliche Art wie §. 249. bestimmen. Die Stöcke werden durchgängig cylindrisch und mit der Axe des Trillings parallel angeordnet.

§. 274.

Zur Bestimmung der Kraft, welche zur Ueberwältigung der Reibung zwischen den Kämmen und Stöcken erfordert wird, kann man auf eine ähnliche Art wie §. 268. verfahren. Man findet alsdann mit Beibehaltung der dortigen Bezeichnung, die längs des Kammbaumes zur Erhaltung des Gleichgewichts mit der Reibung erforderliche Kraft

$$(\mathrm{I})\ f = \mu P \operatorname{tgt} \tfrac{1}{2}\beta = \mu P \operatorname{tgt} \frac{180^\circ}{n},$$

oder auch

$$(\mathrm{II})\ f = \frac{3\mu n}{n^2 - 4} P.$$

§. 275.

Aufgabe. Eine grade gezahnte Stange soll ein mit Zähnen versehenes Getriebe umtreiben; man sucht die erforderliche Gestalt der Zähne.

Auflösung. Es sei A der Berührungspunkt vom Theilrisse des Rades AV, Figur 148., und von der gezahnten Stange XZ. Ueber XZ beschreibe man eine Cykloide AA′, deren Erzengungskreis AOG den Halbmesser AG des Rades zum Durchmesser hat. Der Bogen AA″ sei der Theilung des Rades gleich; man ziehe A″G, und wo diese Linie den Umfang des Erzeugungskreises in O schneidet, ziehe man OD bis an die Cykloide AA′ mit ZX parallel, so wird durch D die kleinste Höhe vom Obertheile des Zahns an der Stange bestimmt. Die grade Linie A″O ist die kleinste Länge von der Seitenfläche des Radzahns, und wenn man auf eine ähnliche Art wie §. 257. verfährt, so erhält man die übrige Anordnung. Taf. IX. Fig. 148.

Die Gründe dieses Verfahrens beruhen auf §. 272. und 256.

§. 276.

Die am Kammbaume erforderliche Kraft zur Ueberwältigung der Reibung zwischen den Kämmen und den Zähnen des Getriebes findet man auf eine ähnliche Art wie §. 271.

$$f = \mu P \operatorname{tgt} \beta = \mu P \operatorname{tgt} \frac{360^\circ}{n},$$

oder auch

$$f = \frac{6 \mu n}{n^2 - 16} P.$$

§. 277.

Aufgabe. Ein Getriebe mit Zähnen soll einen graden Kammbaum umtreiben, man sucht die erforderliche Gestalt der Zähne für das Rad und den Baum.

Auflösung. Wollte man die Anordnung §. 275, Figur 148., beibehalten, so würde an den Zähnen der Stange eine Reibung gegen den Span (§. 249.) entstehen. Diese zu vermeiden wähle man folgende Einrichtung.

Taf. IX. Fig. 148.

Fig 149. Im Berührungspunkte A, Figur 149., wo der Umfang AV des Getriebes mit dem Theilrisse XZ des Kammbaumes zusammenfällt, beschreibe man eine Kreisevolvente (§. 43. Anhang), indem auf dem Umfange vAV eine feine Schnur in v befestigt und bis A angespannt, nachher aber mittelst Abwickelung der angespannten Schnur und eines am Ende A befestigten Stifts die Evolvente oder Abwickelungslinie AA′ beschrieben wird. Auf ZX trage man von A nach O die Theilung der Zähne, und schlage aus G mit der Weite GO den Bogen OD bis an die Evolvente AA′ in D, so wird durch den Punkt D die kleinste Höhe vom Obertheile der Zähne des Rades bestimmt. Verlängert man den Halbmesser GA des Getriebes bis E, so ist die grade Linie AE, die Seitenfläche des Zahns an der Stange, und zugleich die kleinste Länge desselben. Aus der gegebenen Breite AF der Zähne des Getriebes läßt sich nun leicht auf eine ähnliche Art wie

§. 275. ihre Gestalt bestimmen. Dasselbe gilt von den Zähnen der Stange.

Die Gründe dieses Verfahrens lassen sich aus dem Vorhergehenden und theils daher entnehmen, daß bei der Drehung des Rades, wenn der Punkt A nach M kommt, der Punkt A des Kammbaumes von A in O anlangt. Nach den Eigenschaften der Kreisevolvente ist aber AO dem Bogen A M gleich, daher haben die Zähne die erforderliche Eintheilung erhalten.

Auch läßt sich übersehen, daß jederzeit die Berührung zwischen Kamm und Zahn in der Linie XZ geschehen müsse.

§. 278.

Die Reibung zwischen Kamm und Zahn bleibt gleich groß, der Kamm mag den Zahn oder der Zahn den Kamm fortbewegen, wie man sich leicht überzeugen kann. Es ist daher wie §. 276.

$$f = \mu P \operatorname{tgt} \beta = \mu P \operatorname{tgt} \frac{360^\circ}{n}.$$

§. 279.

Eine Stange VW, Figur 150., sei so angeordnet, daß sie vertikal aufwärts gehoben werden kann, und alsdann durch ihr eigenes Gewicht wieder frei herunter fällt, um andere Körper zu zerstoßen, so wird VW ein Stampfer genannt. Zur Bewegung des Stampfers kann man an demselben einen Hebezapfen AB anbringen, welcher durch die Umdrehung einer Welle EG mittelst des Hebedaumen EAD bis zu einer gewissen Höhe AH gehoben wird, wo der Daumen den Zapfen verläßt, und der Stampfer zwischen seinen Scheidelatten frei herun-

Taf. IX. Fig. 150.

ter fällt. Während der Zeit, in welcher der Stampfer fällt, und weil man denselben, wenn er seinen niedrigsten Stand erreicht hat, nicht augenblicklich wieder aufhebt, mußte die Kraft am Umfange der Welle vergeblich wirken, wenn nicht mit der Daumenwelle noch mehrere oder wenigstens noch ein Stampfer verbunden wäre, damit in dem Augenblicke, wenn ein Daumen den Zapfen verläßt, ein anderer Daumen den Zapfen eines andern Stampfers ergreift und so aufhebt, daß unter allen Umständen die erforderliche Kraft gleich groß bleibt.

Es läßt sich leicht einsehn, daß sich auf eine ähnliche Art wie §. 277. mittelst der Kreisevolvente (Anhang §. 42.) diese Anordnung bewirken läßt. Denn es sei AB ein wagerechter Hebezapfen in seinem niedrigsten Stande, und in der Verlängerung von BA liege der Halbmesser AG des Theilkreises der Daumenwelle. Auf diesem Theilkreise als Evolute werde die Evolvente AD beschrieben, und nach ihr der Daumen gestaltet, so wird zur Fortbewegung des Zapfens in allen Lagen des Daumen nur einerlei Kraft am Umfange der Welle erfordert. Wäre der Punkt A des Theilrisses nach M, und der Punkt A des Zapfens nach H gekommen, so ist (§. 42. Anhang) der Bogen AM = AH, also wie §. 266. die Kraft zum Erheben der Daumen in allen Lagen desselben einerlei. Von der Wahrheit dieses Satzes kann man sich auch durch folgende Betrachtung überzeugen. Zur Umdrehung der Daumenwelle wirke am Umfange des Theilkreises in L die Kraft P nach der Richtung der Tangente LP, so ist der von P in H entstehende Druck P′ senkrecht auf LH oder

$$P' = \frac{GL}{GH} \cdot P \ (\S.\ 39.).$$

Die Linie AH ist eine Normale der Evolvente in H (§. 44. Anhang); der Daumen wird daher von der Linie HH' in H berührt, und wenn man die Kraft P' auf die Verlängerung von AH nach HQ und nach dem Mittelpunkte G zerlegt, so wird die Kraft nach HQ, welche hier Q heißen soll, ganz auf die Erhebung des Zapfens verwandt, wogegen die Kraft nach HG von dem festen Mittelpunkte der Welle aufgehoben wird. Man zeichne das Parallelogramm der Kräfte HP'QN, so verhält sich

$$P' : Q = HP' : HQ$$

und weil die Dreiecke HQP' und AGH einander ähnlich sind, so ist auch

$$HP' : HQ = AG : GH, \text{ also}$$
$$P' : Q = AG : GH, \text{ daher}$$
$$P' = \frac{AG}{GH} \cdot Q = \frac{GL}{GH} Q.$$

Es war aber

$$P' = \frac{GL}{GH} \cdot P, \text{ daher ist auch}$$
$$P = Q,$$

wie erfordert wird.

§. 280.

Aufgabe. Die größte Höhe, auf welcher die Stampfer gehoben werden sollen, oder die Erhebungshöhe ist gegeben, man sucht die Anordnung der Daumen, damit von zwei Stampfern jederzeit einer gehoben wird.

Auflösung. Die Erhebungshöhe AH, Figur 150., Taf. IX. Fig. 150.
sei $= h$, der Halbmesser des Theilkreises AG $= a$, und die Anzahl der Daumen für beide Stampfer $= n$,

so ist der abgewickelte Bogen $AM = h$, also $n \cdot AM$ oder der Umfang des Theilkreises $2\pi a = nh$, oder dessen Halbmesser

$$(I) \quad a = \frac{nh}{2\pi} = 0,15915\, nh$$

wo man für n eine grade Zahl annehmen muß, und mittelst der gegebenen Höhe h alsdann den Halbmesser a finden kann. Sollte aber von drei Stampfern stets nur einer gehoben werden, so müßte n eine durch 3 theilbare Zahl seyn.

Man ziehe eine wagerechte Linie GB unbestimmt lang, beschreibe aus G mit dem gefundenen Halbmesser a den Theilkreis AMIA, trage aus A senkrecht auf BG die Höhe $AH = h$, befestige in A am Umfange des Theilkreises einen dünnen Faden, dessen Länge $= AH$ ist, lege denselben um den Theilkreis, und beschreibe mit dem Endpunkte H des Fadens die Kreisevolvente MH. Es versteht sich von selbst, daß man zur Beschreibung der Evolvente MH eine gut abgedrehte kreisrunde Scheibe haben muß, deren Halbmesser $AG = a$ ist. Den Halbmesser der Welle GE nehme man willkürlich aber kleiner als AG an, und beschreibe aus G den Umfang des Wellbaumes EfE. Auf AH nehme man HK willkürlich, hier etwa $\frac{1}{5}$ AH, ziehe GK, welche den Umfang des Wellbaumes in F schneidet, trage von F nach f die Breite des Daumen am Umfange des Wellbaums, und verbinde die Punkte M, f durch einen willkürlichen Bogen Mf, welcher bei M mit MH eine gemeinschaftliche Tangente hat, so ist FfMHKF die Lehre (Chablone) für die Daumen, und wenn man die Weite GH von G nach d trägt, so ist A d die kleinste Länge des Hebezapfen, welcher noch um einen kleinen Theil d B verlängert wird. Der tiefste Stand der Hebezapfen wird alsdann durch A B und der höchste durch H H' angezeigt.

So wie diese Anordnung für zwei Stampfer gemacht ist, kann solche auch auf drei und mehrere, von welchen stets nur einer gehoben wird, angewandt werden. Auch kann man die Einrichtung machen, daß mehrere Stampfer zugleich von der Daumenwelle gehoben werden, weil hiebei dieselbe Verfahrungsart beobachtet wird; nur müssen alsdann nicht alle Daumen zugleich ihre Zapfen verlassen, sondern es muß solches in gleichen Zwischenräumen geschehen.

Sobald aus der Erhebungshöhe h der Halbmesser a des Theilkreises gefunden ist, läßt sich hieraus die Länge der Hebedaumen berechnen. Man rechne diese Länge vom Mittelpunkte der Welle bis zum äußersten Ende des Daumen, indem man solche = l setzt, so ist, Figur 150., G H = l, daher wegen des rechtwinklichten Dreiecks A G H die Länge des Hebedaumen Taf. IX. Fig. 150.

$$(II)\quad l = \sqrt{(a^2 + h^2)} = h\sqrt{(1 + 0,0253287\, n^2)}.$$

§. 281.

Zusatz. Die hier beschriebene Anordnung hat für die Ausübung den Nachtheil, daß der einzige Punkt A, Figur 150., des Hebezapfens, auf der Fläche A D des Daumen abgleitet, und daß sich der Zapfen bei A endlich so stark abnutzt, daß anstatt des Punktes A eine Fläche entsteht, wodurch die gleichförmige Wirkung der Daumen verloren geht. Um diesen Nachtheil zu vermeiden, kann

man am äußersten Ende der Hebezapfen in A kleine metallene Rollen anbringen, welche sich um eiserne Bolzen drehen. In diesem Falle bleibt die ganze Anordnung wie
Taf. IX. Fig. 151. im vorigen §., so daß AD, MH, Figur 151., die Evolventen für die Evolute AM sind. Werden nun in A und H die Mittelpunkte von den Rollen der Hebezapfen angebracht, und man beschreibt mit dem Halbmesser Hh der Rolle lauter Kreisbogen, deren Mittelpunkte in die Evolvente HM fallen, so kann man durch die äußersten Punkte n, n, n ... eine Parallele hnm mit der Evolvente HNM ziehen, wodurch die Gestalt des Daumen hmfFh erhalten wird.

Es läßt sich einsehn, daß bei dieser Einrichtung die Erhebung der Zapfen eben so wie im vorigen § erfolgen muß, nur wird noch der Umstand eintreten, daß der Zapfen in seiner höchsten Stellung nicht sogleich vom Daumen verlassen wird, sondern noch einer geringen Zeit bedarf, bis er herunterfällt.

§. 282.

Aufgabe. Die Kraft zu bestimmen, welche am Theilkreise der Daumenwelle erfordert wird, um einen Stampfer zu erheben, und die Reibung an den Scheidelatten und dem Daumen zu überwältigen.

Auflösung. Der vertikale Stampfer DE, Figur 152., sei zwischen den Scheidelatten M, M′ und
Fig. 152. N, N′ beweglich. Man setze die Länge des Hebezapfens HF, bis zur Mitte des Stampfers gerechnet, = b, die Entfernung der Scheidelatten MN = c, und für irgend eine Lage des Stampfers den Abstand N′F = e. Das Gewicht des Stampfers sei Q, welches im Schwer-

punkte

punkte desselben nach vertikaler Richtung DE abwärts wirkt, auch sei in H nach vertikaler Richtung aufwärts eine Kraft angebracht, welche mit Q im Gleichgewichte ist, so entsteht gegen die Scheidelatte M nach der Richtung Mp' ein horizontaler Druck $p' = \frac{bQ}{c}$ (§. 68.), und eben so groß ist der horizontale Druck p'' gegen die Scheidelatte N' nach der Richtung $N'p''$. Wegen der Last Q und der gesammten Reibung an den Scheidelatten widerstehe das Ende H des Hebezapfens nach vertikaler Richtung HA mit einer Kraft V', so entsteht davon bei H eine Reibung $= \mu V'$; der Daumen strebt daher, den Zapfen FH nach der horizontalen Richtung HK mit der Gewalt $\mu V'$ fortzuziehen, wodurch gegen die Scheidelatte M' nach der Richtung $M'q'$ ein Horizontaldruck $q' = \frac{e.\mu V'}{c}$, und gegen die Scheidelatte N' nach der Richtung $N'q''$ ein Horizontaldruck $q'' = \frac{(c-e).\mu V'}{c}$ (§. 40.) entsteht. An den obern Scheidelatten wird daher der Stampfer gegen M mit der Kraft p', und gegen M' mit der Kraft q' gepreßt. Ist nun p' größer als q', so ist der Druck gegen $M = p' - q' = \frac{bQ}{c} - \frac{\mu e V'}{c}$, so lange daher $bQ > \mu e V'$ ist, bleibt der Druck gegen $M = p' - q'$, und die davon an den obern Scheidelatten entstehende Reibung $= \mu (p' - q')$. Wäre aber $q' > p'$, so ist diese Reibung $= \mu (q' - p')$. Wird eine oder die andere Voraussetzung bei der weitern Ausführung der Rechnung angenommen, so müssen auch danach die Resultate verschieden ausfallen, welches sehr wohl zu merken ist. Setzt man, wie es gemeiniglich der

Fall ist, $p' > q'$, also $bQ > \mu e V'$, so ist die Reibung an den obern Scheidelatten $= \mu (p' - q')$, und an den untern bei $N' = \mu (p'' + q'')$, also die gesammte Reibung an den Scheidelatten

$$\mu (p' + p'' - q' + q'') = \mu \left(\frac{2bQ}{c} + \frac{c - 2e}{c} \mu V'\right)$$

Diese Reibung sowohl als die Last Q verursachen am Hebezapfen den Widerstand V', welcher dem Daumen nach der Richtung HA widersteht, es ist daher

$$V' = Q + \mu \left(\frac{2bQ}{c} + \frac{c - 2e}{c} \mu V'\right), \text{ und hieraus}$$

$$V' = \frac{c + 2\mu b}{c - \mu^2 (c - 2e)} Q.$$

Zur Ueberwältigung dieses Widerstandes V' und der Reibung $\mu V'$ zwischen Daumen und Zapfen werde nach der Richtung AH eine Kraft V erfordert, welche der Kraft V' grade entgegen wirkt, so bleibt noch die Kraft $V - V'$ nach der Richtung HL übrig, um die Reibung $\mu V'$, welche nach der Richtung HF widersteht, zu überwältigen. Man zerlege die Kraft $V - V'$ nach der Richtung HK und nach HI in der Verlängerung des Halbmessers GH, so wird letztere Kraft durch den Mittelpunkt der Daumenwelle aufgehoben, die Kraft nach HK ist aber, wenn KL parallel mit HI gezogen wird, $= \frac{V - V'}{\text{tgt } HKL}$, oder wenn man $AGH = \beta$ setzt, so ist auch $HKL = \beta$, daher die Kraft, welche nach der Richtung HK wirkt, $= \frac{V - V'}{\text{tgt } \beta}$, und weil diese der Reibung $\mu V'$ nach entgegengesetzter Richtung HF das Gleichgewicht halten muß, so ist

$$\frac{V - V'}{\text{tgt } \beta} = \mu V' \text{ oder } V = (1 + \mu \text{ tgt } \beta) V'.$$

Wird nun statt V' der vorhin gefundene Werth gesetzt, so erhält man die Kraft, welche zur Ueberwältigung der Last Q und der Reibungen an den Scheidelatten und dem Daumen erfordert wird, oder

$$(\mathrm{I})\ V = \frac{(c + 2\mu b)(1 + \mu \operatorname{tgt} \beta)}{(1 - \mu^2) c + 2e} Q$$

und wenn f die Kraft bezeichnet, welche nach der Richtung AH angebracht, lediglich den Reibungen an den Scheidelatten und am Daumen das Gleichgewicht hält, so ist $V = f + Q$, also $f = V - Q$, man findet daher die zur Ueberwältigung der Reibungen erforderliche Kraft

$$(\mathrm{II})\ f = \mu \frac{2b + \mu (c - 2e) + (c - 2\mu b) \operatorname{tgt} \beta}{(1 - \mu^2) c + 2e} Q$$

Da nun e und β veränderliche Größen sind, welche von der Lage der Stampfer abhängen, so ist auch die Kraft f veränderlich. Um die Kraft f lediglich von der Veränderlichkeit des Winkels $AGH = \beta$ abhängig zu machen, ziehe man GA' horizontal, und setze den vertikalen Abstand der untern Scheidelatte N' von der Horizontale durch den Mittelpunkt G der Welle oder $N'A' = k$, so ist, wenn der Halbmesser $AG = a$ ist

$A'F = AH = a \operatorname{tgt} \beta$, also $e = k + a \operatorname{tgt} \beta$.

Diesen Werth statt e in die obige Gleichung gesetzt, giebt

$$(\mathrm{III})\ f = \mu \frac{2b + \mu (c - k) + (c - a - 2\mu b) \operatorname{tgt} \beta}{(1 - \mu^2) c - 2k - 2a \operatorname{tgt} \beta} . Q$$

Will man statt β den größten Winkel in Rechnung bringen, bei welchem der Daumen den Zapfen verläßt, und man setzt, daß die größte Höhe, auf welche der Zapfen gehoben wird oder $AH = h$ ist, so erhält man

$a \operatorname{tgt} \beta = h$, oder wenn $\frac{h}{a}$ statt $\operatorname{tgt} \beta$ in Rechnung gebracht wird, so ist

$$(\mathrm{IV})\ f = \mu \frac{2ab + \mu a(c - k) + (c - a - 2\mu b)h}{(1 - \mu^2)ac - 2a(k + h)} \cdot Q$$

Die vorstehenden vier Ausdrücke gelten aber nur unter der Voraussetzung, daß $bQ > \mu e V'$ ist, oder wenn für V' und e die gefundenen Werthe gesetzt werden, so muß $bQ > \frac{\mu(k + a \operatorname{tgt} \beta)(c + 2\mu b)Q}{c - \mu^2(c - 2k - 2a \operatorname{tgt} \beta)}$ seyn, dies giebt

$$\frac{(1 - \mu^2)b - \mu k}{\mu a} > \operatorname{tgt} \beta$$

welches die Bedingung ist, unter der die vorstehenden Ausdrücke anwendbar sind.

§. 283.

Zusatz. Wäre mit Beibehaltung der vorstehenden Bezeichnung $q' > p'$, so ist der Druck bei den obern Scheidelatten $q' - p'$, also die gesammte Reibung an den Scheidelatten

$$\mu(q' - p' + p'' + q'') = \mu^2 V', \text{ also}$$

$$V' = Q + \mu^2 V' \text{ daher } V' = \frac{Q}{1 - \mu^2}.$$

Da nun $V = (1 + \mu \operatorname{tgt} \beta) V'$, so erhält man die zur Ueberwältigung der Last Q und der Reibungen erforderliche Kraft

$$(\mathrm{I})\ V = \frac{1 + \mu \operatorname{tgt} \beta}{1 - \mu^2} Q.$$

Hiebei ist die Voraussetzung $q' > p'$ oder $\frac{\mu e V'}{c} > \frac{bQ}{c}$ oder $\frac{\mu e}{1 - \mu^2} > b$. Nun ist $e = k + a \operatorname{tgt} \beta$, daher erhält man für die Fälle, wo der vorstehende Ausdruck anwendbar ist

$$\operatorname{tgt} \beta > \frac{(1 - \mu^2)b - \mu k}{\mu a}.$$

Weil ferner $f = V - Q$, so erhält man die zur Ueberwältigung der Reibung erforderliche Kraft

$$(II)\ f = \frac{\mu(\mu + \operatorname{tgt}\beta)}{1 - \mu^2}\, Q.$$

Aus der Vergleichung des hier für V gefundenen Werths mit dem im vorigen §. ergiebt sich, daß hier V also auch die Reibung kleiner wird. Es muß daher bei der Anordnung der Stampfer dahin gesehen werden, daß

$$\operatorname{tgt}\beta > \frac{(1 - \mu^2)\, b - \mu k}{\mu a}$$

werde, d. h. man muß die Länge b des Hebezapfens möglichst klein, den Halbmesser vom Theilkreise möglichst groß, und eben so den Abstand der untern Scheidelatten von derjenigen Horizontallinie, welche durch den Mittelpunkt der Daumenwelle geht, möglichst nach unten zu vergrößern.

§. 284.

Die Bedingungen, unter welchen die §. 280. gegebene Anordnung der Daumen anwendbar ist, bestehen vorzüglich darin, daß die Erhebungshöhe h genau in den Umfang $2\pi a$ des Theilkreises aufgehe, und daß, wenn eine von den Größen a, h, l gegeben ist (wo l die Daumenlänge vom Mittelpunkte der Welle bezeichnet), die beiden übrigen daraus bestimmt werden müssen. Gewöhnlich ist h gegeben, alsdann darf weder a noch l willkürlich angenommen werden, weil beide Abmessungen durch die Natur der Kreisevolvente mittelst h und der Anzahl n der Daumen bestimmt sind. Wenn sich hingegen der Fall ereignet, daß zwei von den Größen a, h, l gegeben sind, so kann man zwar leicht durch Zeichnung eines rechtwinklichten Dreiecks oder durch Rechnung (§. 280. II)

die dritte Größe finden, allein dann hängt es vom Zufalle ab, ob h in $2\pi a$ genau aufgeht, welches doch erfordert
Taf. IX. Fig. 150. wird, weil, Figur 150., der abgewickelte Bogen AM der Erhebungshöhe AH gleich seyn muß.

Man nenne den Bogen AM des Theilkreises, welcher durch den Punkt A geht, während ein Daumen den Hebezapfen auf die Höhe AH hebt, die Theilung der Daumen. Wäre diese größer oder kleiner als die Höhe AH, so läßt sich auch die Kreisevolvente zur Bestimmung der Gestalt der Daumen nicht anwenden, und man muß für die Daumen eine andere Kurve aufsuchen, welche die Eigenschaft hat, daß wenn man die Theilung der Daumen in eben so viel gleiche Theile wie die Erhebungshöhe eintheilt, alsdann in gleichen Zeiten gleich viel Theile der Theilung und der Erhebungshöhe durchlaufen werden, weil nur unter dieser Bedingung in jeder Lage der Zapfen gleiche Kraft am Umfange des Theilrisses erfordert wird.

§. 285.

Aufgabe. Zum vertikalen Erheben einer Last
Taf. X. Fig. 153. (eines Hebezapfens) ist die Erhebungshöhe AF, Figur 153., nebst der Theilung der Daumen $AM = AF'$ und dem Halbmesser AC des Theilkreises gegeben, man soll die erforderliche Gestalt der Daumen finden.

Auflösung. Man theile die Höhe AF in eine willkürliche Anzahl gleicher Theile AB, BD, DE, EF (je mehr je besser), und in eben so viel gleiche Theile AB', $B'D'$, $D'E'$, $E'F'$ den Bogen AF'. Durch die Punkte B, D, E, F ziehe man die Linien CB, CD, CE, CF, und nehme

$B'b' = Ab$; $D'd' = Ad$; $E'e' = Ae$; $F'f' = Af$, schlage aus C die Bogen BB'', DD'', EE'', FF'', bis solche die verlängerten Linien Cb', Cd', Ce', Cf' in B'', D'', E'', F'' schneiden, ziehe durch diese Punkte die Kurve $AB''D''E''F''$, so ist solche die erforderliche Rundung des Daumen.

Der Grund dieses Verfahrens läßt sich leicht einsehen; denn angenommen, daß der Punkt B' nach A kommt, so fällt b' auf b, also B'' auf B, daher ist von der Theilung ein Bogen AB' durch A gegangen oder abgewickelt worden, indem die Last auf die Höhe AB gestiegen ist. Kommt D' nach A, so fällt D'' auf D, und es sind zwei Bogen AB' durch A gegangen, indem die Last auf zwei Theile wie AB gehoben ist. Ueberhaupt folgt aus der Konstruktion, daß wenn in irgend einer Zeit eine Anzahl Theile wie AB' durch A gehen, in eben der Zeit die Last um eben so viel Theile wie AB gehoben wird. Setzt man die Höhe $AF = h$, und die Theilung $AF' = t$, so verhält sich $AB : AB' = h : t$, oder wenn man den Weg, welchen ein Punkt des Theilrisses durchläuft, den Weg der Kraft, und die zugehörige Höhe, auf welche die Last gehoben worden, den Weg der Last nennt, so verhält sich der Weg der Kraft, zum Wege der Last, wie t zu h.

Die nach der Richtung AF zu hebende Last sei $= Q$, und die für irgend eine Lage des Daumen zur Erhaltung des Gleichgewichts am Umfange des Theilrisses nöthige Kraft $= P$, so wird nach dem Grundgesetz der Statik §. 69. erfordert, daß sich verhält $P : Q = h : t$, es muß daher $P = \frac{hQ}{t}$ seyn. Da nun h, t, Q unveränderliche Größen sind, so wird auch zur Erhaltung der Last Q in allen Lagen des Daumen einerlei Kraft P am fange des Theilkreises erfordert.

§. 286.

Taf. X. Zusatz. Wäre die Last Q nicht am Ende des wage-
Fig. 153. rechten Halbmessers CA in A, Figur 153., angebracht, sondern sollte in irgend einem andern Punkte des Theilkreises oberhalb CA vertikal aufwärts gehoben werden, so darf man nur ein ganz ähnliches Verfahren wie im vorigen §. beobachten, um die nöthige Rundung des Daumen
Fig. 154. zu finden. Figur 154. wird dies näher erläutern. Auch in dem Falle, wenn AF nicht vertikal ist, sondern irgend eine willkürliche Richtung hat, wird ein ähnliches Verfahren beobachtet.

Fällt die Erhebungshöhe AF in die Verlängerung des vertikalen Halbmessers AC vom Theilkreise, wie Figur 155., so wird dadurch die Konstruktion noch mehr vereinfacht, wie solches leicht aus dem Vorhergehenden und der
Fig. 155. angeführten Figur 155. erhellet. Die Kurve AB″D″E″F″ ist alsdann eine archimedische Spirallinie (§. 56. Anh.).

§. 287.

Aufgabe. Eine Last soll mittelst eines Daumen von
Fig. 156. einem gegebenen Punkte A, Figur 156., des Theilkreises nach irgend einer Richtung von A bis F bewegt, und nach der entgegengesetzten Richtung von F bis A auf dem Daumen wieder herabsinken. Man sucht die erforderliche Gestalt des Daumen.

Auflösung. Es sei CA der gegebene Halbmesser des Theilkreises, und AF′A′ die gegebene Theilung des Daumen. Man theile den Bogen AF′A′ in zwei Theile

$AF' = F'A$, so daß AF' als Theilung für den Vordertheil $AN''F''$, und $F'A'$ als Theilung für den Hintertheil $F''D''A'$ des ganzen Daumen angenommen wird. Mit Hülfe der Theilung AF' und der Höhe AF kann man nach §. 286. die Vorderrundung $AN''F''$ des Daumen beschreiben. Um nun ebenfalls die Hinterrundung $F''D''A'$ anzugeben, zu welcher die Theilung $F'A'$ gehört, werde AF in eben so viel gleiche Theile AB, BD, DE, EF, wie FA' in die gleiche Theile $A'B'$, $B'D'$, $D'E'$, $E'F'$ eingetheilt. Man ziehe durch die Punkte B, D, E, F die Linien CB, CD, CE, CF, und nehme

$B'b' = Ab$; $D'd' = Ad$; $E'e' = Ae$; $F'f' = Af$;

schlage aus C die Bogen BB'', DD'', EE'', FF'', bis solche die verlängerten Linien Cb', Cd', Ce', Cf' in B'', D'', E'', F'' schneiden; ziehe durch diese Punkte die Kurve $A'B''D''E''F''$, so ist solche die gesuchte Hinterrundung des Daumen, auf welcher die Last nach der Richtung FA eben so herabsinkt, wie sie auf $AN''F''$ nach der Richtung AF gehoben wird.

Denn sobald der Punkt F' nach A kommt, so fällt F'' auf F. Geht E' nach A, so muß E'' auf E fallen u. s. w., daher so oft ein Bogen des Theilkreises $= A'B'$ durch den Punkt A geht, wird die Last einen Weg $= AB$ durchlaufen.

Wäre der ganze Umfang des Theilkreises als Theilung für den Daumen gegeben, und die Richtung der Last fiele in die Verlängerung des vertikalen Halbmessers vom Theilkreise, so wird der Umfang des Daumen eine symmetrische herzförmige Gestalt erhalten, wie Figur 157. Taf. X. Fig. 157.

§. 283.

Taf. X. Fig. 158. **Aufgabe.** An einem Hebelsarme A G, Figur 158., welcher um den festen Punkt G beweglich ist, wirkt eine Last Q′ vertikal abwärts, so daß in allen Lagen des Hebels G A, der vertikale Druck auf den Punkt A desselben gleich groß bleibt. Man soll die Gestalt eines Daumen angeben, damit die auf das Ende A des Hebels G A wirkende Last, in allen Lagen des Daumen durch einerlei Kraft am Umfange des Theilkreises im Gleichgewichte erhalten wird.

Auflösung. Der Halbmesser des Theilrisses sei A C, die Theilung für den Daumen A F′, und der Bogen, welchen der Punkt A des Hebels bis zu seiner größten Höhe beschreiben muß, A D F. Man ziehe die Sehne A F, theile solche in die gleichen Theile A, 1; 1, 2; 2, 3; 3, F, und in eben so viel gleiche Theile A B′, B′D′, D′E′, E′F′ werde die Theilung A F′ getheilt. Durch die Punkte 1, 2, 3, ziehe man bis an den Bogen A F, die Horizontallinien 1 B, 2 D, 3 E, und aus C die Linien C B, C D, C E, C F. Nehme

$B'b' = Ab$; $D'd' = Ad$; $E'e' = Ae$; $F'f' = Af$,

schlage aus C die Bogen B B″, D D″, E E″, F F″, bis solche die verlängerten Linien C b′, C d′, C e′, C f′ in B″, D″, E″, F″ schneiden; ziehe durch diese Punkte die Kurve A B″D″E″F″, so ist solche die gesuchte Rundung des Daumen.

Um zu übersehen, daß A D″F″ die erforderliche Gestalt des Daumen ist, ziehe man die Vertikallinien 1 I, 2 II, 3 III, F IV; kommt alsdann B′ nach A, so ist die Last am Ende des Hebels um die vertikale Höhe 1 I gestiegen. Kommt D′ nach A, so ist die Last auf die vertikale Höhe

2II, oder auf die doppelte Höhe 1I gehoben, u. s. w. Ist daher die am Ende des Hebels vertikal abwärts wirkende Last = Q, und die zur Erhaltung des Gleichgewichts am Umfange des Theilrisses erforderliche Kraft = P, so sind 1I, 2II u. s. w. die Wege der Last, wenn AB′, AD′ u. s. w. die Wege der Kraft darstellen. Man setze die ganze Höhe F IV = h, und die Theilung AF′ = t, so verhalten sich die Wege der Last zu den zugehörigen Wegen der Kraft allemal wie h zu t. Nach §. 69. erfordert aber das Gleichgewicht, daß Q h = P t sei, daher ist die Kraft

$$P = \frac{Qh}{t}$$

für alle Lagen des Daumen gleich groß, und die Last wird mit unveränderter Kraft in allen Lagen des Daumen im Gleichgewicht erhalten.

§. 289.

1. Zusatz. Sucht man die Gestalt vom Hintertheile des Daumen, damit die Last Q auf demselben eben so wieder herabsinke, wie solche aufgehoben wird, so sei, Figur 158., F′A′ die Theilung für den Hintertheil des Daumen, und A′B‴, B‴D‴, D‴E‴, E‴F′ gleich groß. Man nehme Taf. X. Fig. 158.

$$B'''b'' = Ab;\quad D'''d'' = Ad;\quad E'''e'' = Ae;$$

verfahre auf eine ähnliche Art wie §. 287., so ist AD′ᵛF″ die gesuchte Rundung.

§. 290.

2. Zusatz. Fällt die Sehne AF des Bogens ADF in die Verlängerung des vertikalen Halbmessers CA, wie Figur 159., und der ganze Umfang des Theilkreises soll als Theilung für die Vorder- und Hinterrundung des Daumen angenommen werden, so lassen sich diese Rundungen auf eine ähnliche Art wie in den vorhergehenden §. §. Fig. 159.

Taf. X. finden. Alsdann ist aber nicht wie §. 287., Figur 157.,
Fig. 157. die Rundung AD''F'' der Rundung AD^{v}F'', Figur 159, gleich, wie man sich leicht überzeugen kann.

§. 291.

3. Zusatz. Wäre in dem Punkte H, Figur 158., des Hebels GA, wo die Last Q' am Faden HL frei herabhängt, mit dem Hebel ein Kreisbogen HK verbunden, dessen Mittelpunkt in G liegt, so daß bei der Aufwärtsbewegung des Hebels GA der Faden HL sich um den Bogen HK herum legt, so wird, wenn K nach H kommt, die Last Q' um den Weg KH aufwärts gestiegen seyn. Der Weg der Last Q' ist also hier ein Bogen, und die davon am Ende des Hebels in A herrührende Last Q hat den Bogen ADF als zugehörigen Weg der Last beschrieben. In diesem Falle muß zur Bestimmung der Gestalt der Daumen, nicht die Sehne AF, sondern der Bogen ADF in die gleichen Theile AB, BD, DE, EF getheilt, und übrigens wie §. 288. und 289. verfahren werden.

§. 292.

Fig. 160. Aufgabe. Ein Hebel AG, Figur 160., welcher um den festen Punkt G beweglich ist, und an dessen Ende in A eine Last Q vertikal abwärts wirkt, soll von einer um den festen Punkt C beweglichen Stange CA' so aufgehoben werden, daß in allen Lagen der Stange CA' gleiche Kraft an derselben erfordert wird, um der Last Q das Gleichgewicht zu halten; man verlangt die erforderliche Gestalt des Hebels, damit solcher durch die Stange CA' um irgend einen Bogen AF gehoben und wieder herabgelassen wird, während der Punkt A' der Stange A'C den Bogen A'F'A'' durchläuft.

Auflösung. Man nehme den Bogen $A'F' = F'A''$, theile die Sehne AF in eine gewisse Anzahl gleicher Theile $A1$; $1,2$; $2,3$; $3,F$; und in eben so viel gleiche Theile $A'B'$, $B'D'$, $D'E'$, $E'F'$ werde der Bogen $A'F'$ und $A''F'$ eingetheilt; durch die Punkte $1, 2, 3$ ziehe man die Horizontallinien $1B$, $2D$, $3E$ bis an den Bogen AF; ziehe aus G die Linien CB, CD, CE, und beschreibe aus G durch B', D', E', F' die Bogen $B'b'$, $D'd'$, $E'e'$, $F'f'$ unbestimmt lang; nehme alsdann

$B'B'' = bb'$, $D'D'' = dd'$; $E'E'' = ee'$; $F'F'' = ff'$ und ziehe durch die Punkte $A'B''D''E''F''$ und $F''E''D''B''A''$ die Kurven $A'D''F''$ und $F''D''A''$, so geben diese die Gestalt, welche der Theil $A'A''$ des Hebels erhalten muß, damit solcher durch die Stange CA', wenn sie den Bogen $A'F'A''$ durchläuft, den Bedingungen gemäß auf und nieder bewegt werde.

Der Grund dieses Verfahrens ist sogleich aus der Konstruktion zu ersehen. Denn wenn der Punkt A' der Stange $A'C$ nach B' kommt, so fällt der Punkt B'' auf B' und b' auf b. Ist nun die Kraft, welche die Stange $A'C$ umtreibt, senkrecht auf $A'C$ in A angebracht, so hat die Kraft den Weg $A'B'$, und die Last den Weg $1I$ nach vertikaler Richtung durchlaufen. Kommt A' nach D', so fällt D'' auf D' und d' auf d; alsdann hat die Kraft den Weg $A'D' = 2 . A'B$, und die Last den doppelten Weg $1I$ nach vertikaler Richtung durchlaufen, woraus wie §. 285. folgt, daß zur Erhebung des Hebels GA in allen Lagen desselben einerlei Kraft am Ende der Stange CA' erforderlich ist.

Hier gelten übrigens eben die Bemerkungen wie §. 291.

§. 293.

Taf. X. Fig. 161. **Aufgabe.** Ein Hebel oder Balancier AK, Figur 161., welcher um den festen Punkt G bewegt werden kann, und an dessen Ende K eine Last Q vertikal herabhängt, soll mittelst der Erhöhungen und Vertiefungen eines horizontalen Rades BD so bewegt werden, daß das Ende A des Hebels durch die Umdrehung des Rades wechselseitig heruntergedrückt wird und wieder aufsteigen kann. Man soll die erforderliche Gestalt der Einschnitte des Rades auf einer Ebene angeben.

Auflösung. Vorausgesetzt, daß der Hebel AK in eine Vertikalebene fällt, welche den Umfang des horizontalen Rades berührt, und daß in dieser Ebene die Einschnitte des Rades gezeichnet werden, so sei, Figur 162., A der höchste und F der niedrigste Punkt für das Ende des Hebels. Durch F ziehe man die Horizontale $F'F''$, und darauf senkrecht die Linie Af. Ist nun die Theilung oder der Abstand zweier Vertiefungen am Umfange des Rades gegeben oder willkürlich angenommen, so trage man die Hälfte der Theilung von f nach f' und von f nach f'', theile Af in eine willkürliche Anzahl gleicher Theile Ab, bd, de, ef, und in eben so viel gleiche Theile die Weite ff' und ff''. Durch diese Theilungspunkte ziehe man mit Af und $f'f''$ parallele Linien, welche das Rechteck $f'a'a''f''$ bilden, und nehme

Fig. 162.

$$b'B' = b''B'' = bB;\ d'D' = d''D'' = dD;$$

$$e'E' = e''E'' = eE;\ f'F' = f''F'' = fF;$$

ziehe durch die Punkte $AB'D'E'F'$ und $AB''D''E''F''$ die Kurven $AD'F'$ und $AD''F''$, so bilden solche den gesuchten Einschnitt auf einer Ebene, welche vertikal um das

Rad gelegt, die erforderliche Gestalt der Erhöhungen und Vertiefungen angeben.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens läßt sich daraus beurtheilen, wenn man sich vorstellt, daß das Ende A des Hebels in die Punkte B, D, E, F, und auf diese die Punkte B′, B″; D′, D″ u. s. w. fallen. Fällt z. B. A auf B, so muß B′ auf B fallen; alsdann ist A um den Theil Ab gesunken, und das Rad um den Theil BB′ = bb′ = Aa fortgerückt. Fällt A auf D, also D′ auf D, so ist A um den Theil 2 . Ab gesunken, und das Rad um den Theil 2 . Aa fortgerückt. Hieraus folgt, wie § 285., daß am Umfange des Rades einerlei Kraft der Last Q′ in allen Lagen des Hebels das Gleichgewicht hält.

§. 294.

Die schicklichste Gestalt der Zähne eines Rades hat zuerst Römer, ein dänischer Astronom, angegeben. Die wichtigsten Schriften, in welchen man Untersuchungen über die Gestalt der Zähne, Kämme und Daumen findet, enthält das nachstehende Verzeichniß, welches nach der Zeitfolge geordnet ist:

de la Hire, Traité des Epicycloides et de leurs usages dans les Mécaniques. Mém. de l'acad. de Paris. Depuis 1666 jusqu'à 1699. Tome IX. p. 223 — 294.

Camus, sur la figure des Dents, des Roues et des Ailes des Pignons, pour rendre les Horloges plus parfaites. Mém. de l'Acad. de Paris, Année 1733. p. 165 — 197. ed. Amst.

de Parcieux, Mémoire sur la manière de tracer méchaniquement la courbure qu'on doit donner aux ondes, dans les machines pour mouvoir des leviers ou balanciers, au lieu des ovales qu'on a substitués aux manivelles en plusieurs endroits. Mém. de l'acad. de Paris, Année 1747. p. 359 — 382. ed. Amst.

Camus, Cours des Mathématique. Troisième Partie. Elémens de Méchanique statique. Tome II. à Paris, 1752. p. 305 — 428.

L. Euler, De aptissima figura rotarum dentibus tribuenda. Novi Comment. Acad. Petrop. Tom. V. ad Annum 1754 et 1755. p. 299 — 316.

L. Euler, Supplementum. De figura dentium rotarum. Novi Comment. Acad. Petrop. Tom. XI. pro Anno 1765. p. 207 — 231.

A. G. Kæstner, De rotarum dentibus. Comment. Soc. Scient. Gottingens. Tom. IV. ad A. 1781. p. 1 — 25.

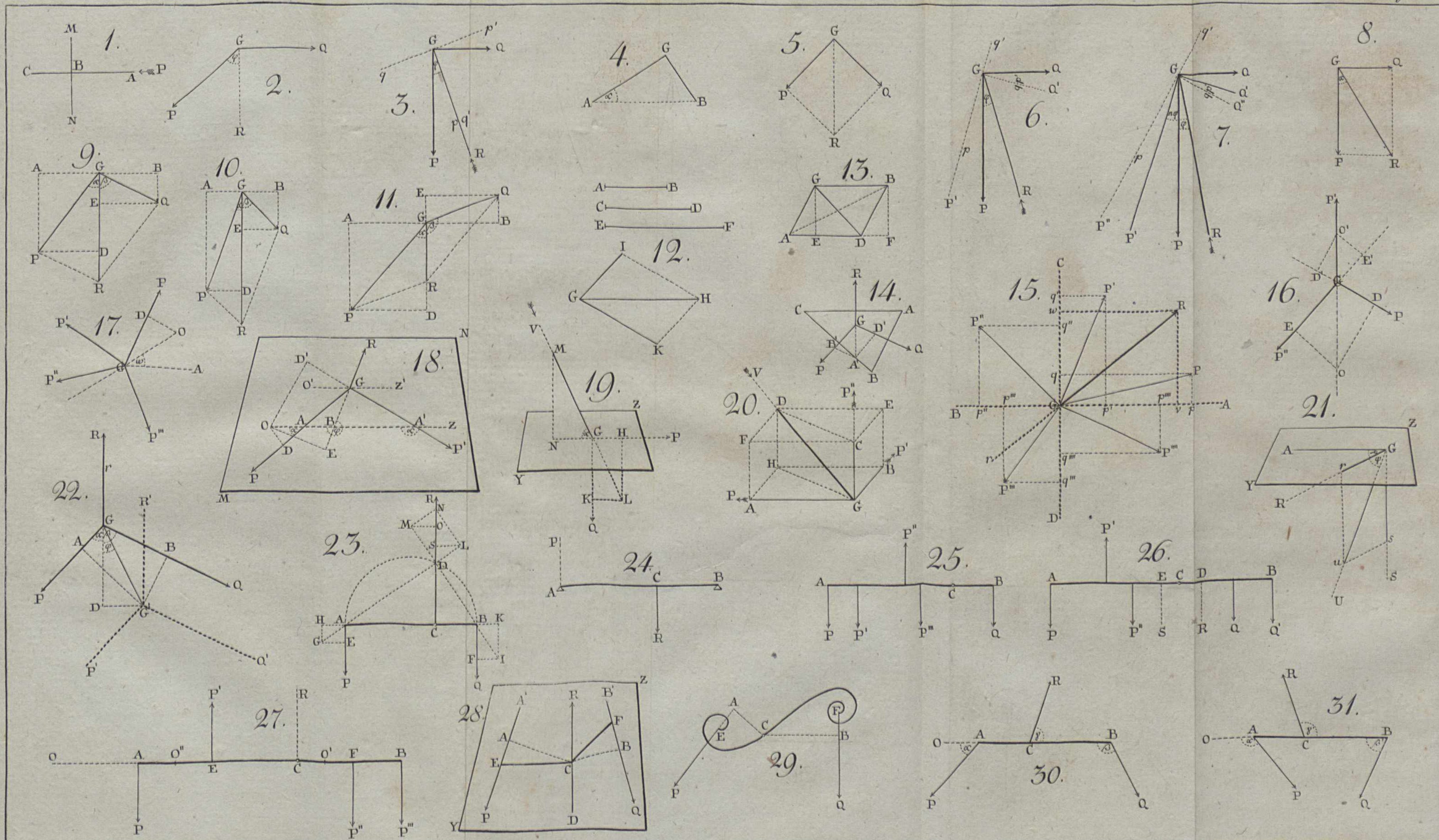
A. G. Kæstner, De dentibus rotarum qui inguntur paxillis rotundis. Comment. soc. sc. Gotting. T. V. ad A. 1782. p. 1 — 27.

Ende des ersten Bandes.

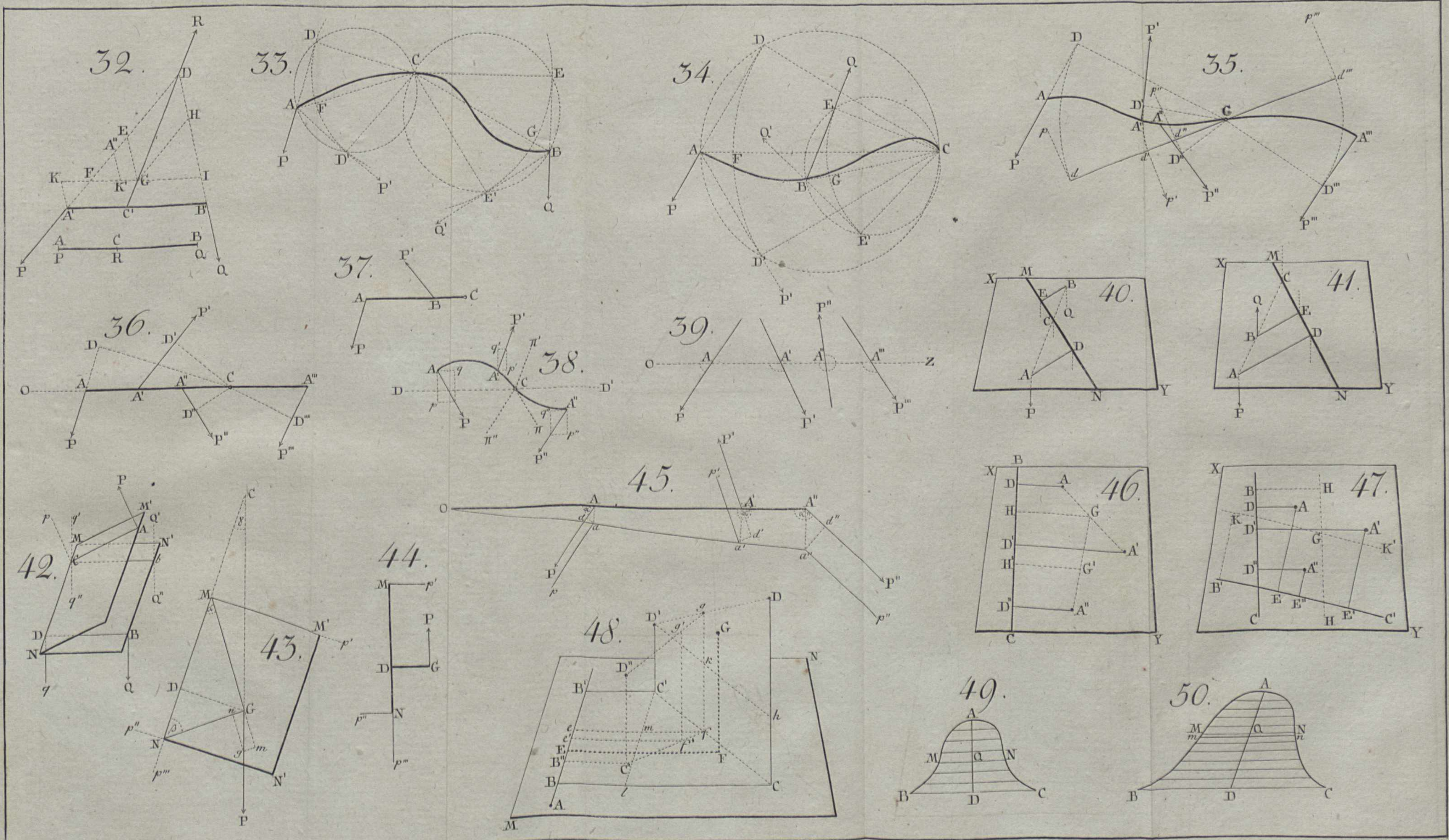
Einige bemerkte Druckfehler.

S. 20	Z. 15	v. o.	statt	Diagonal R G;	lese man	Diagonale R G,
— 28	— 14	—	—	G A′ B	— —	G A′ B′
— 29	— 12	—	—	$Gq' = P'' \sin\gamma''$	— —	$Gq'' = P'' \sin\gamma''$
— 29	— 16	—	—	$\sin\gamma''$, $\sin\gamma'''$	— —	$\sin\gamma'''$, $\sin\gamma''''$
— 54	— 14	—	—	$- f''' P'''$	— —	$+ f''' P'''$
— 62	— 9	—	—	größer	— —	kleiner
— 71	— 11	—	—	CD : CE	— —	CA : CB
— 71	— 14	—	—	CD : CB	— —	CA : CB
— 75	— 6	v. u.	—	$\sin\beta \cos\gamma - \cos\beta \sin\gamma$	lese man	$\sin\alpha \cos\gamma - \cos\alpha \sin\gamma$.
— 92	— 13	v. o.	statt	Herz	lese man	Splint.

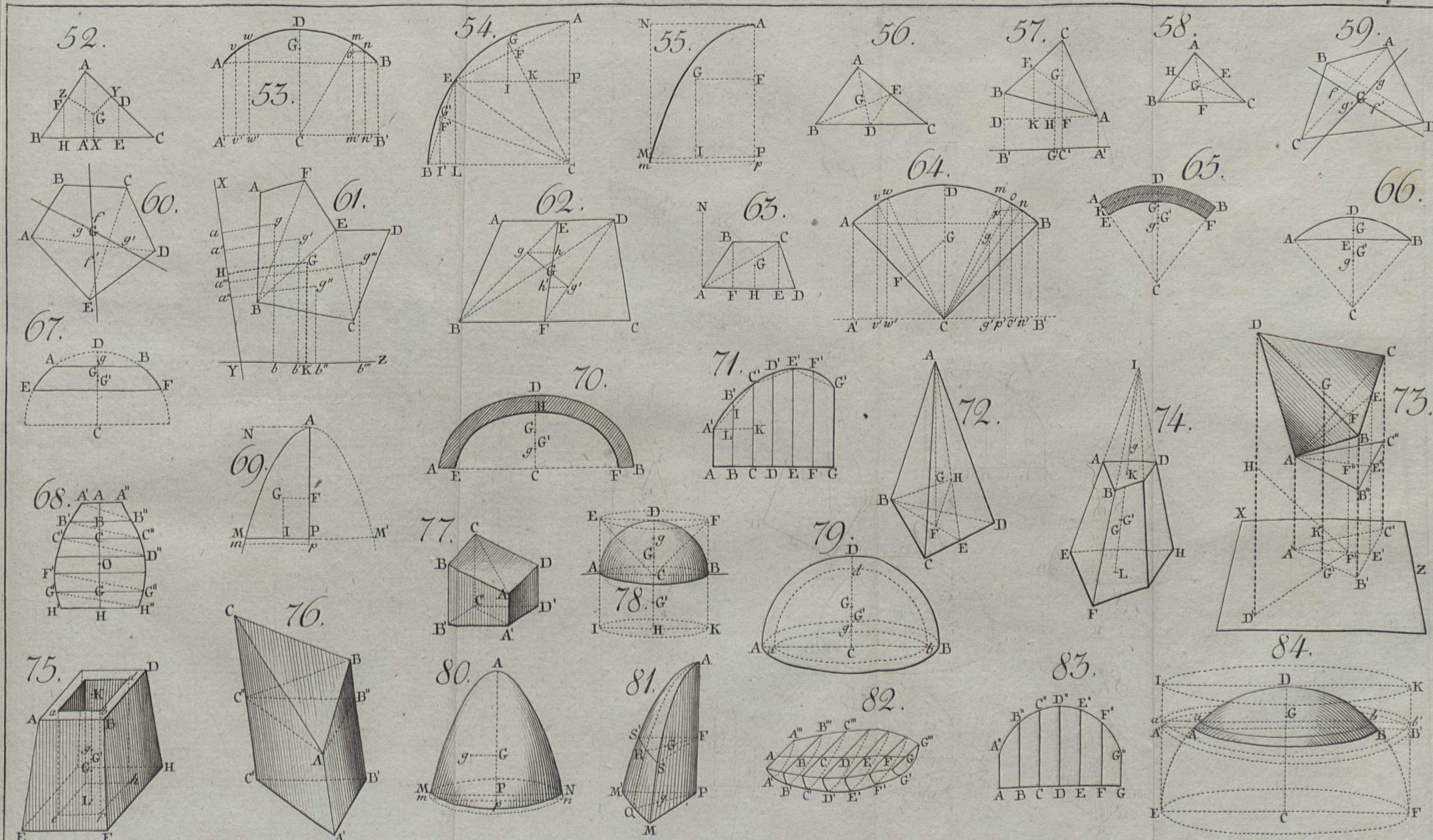
Tafel I.



C.C. Glaßbach Sen: sc:

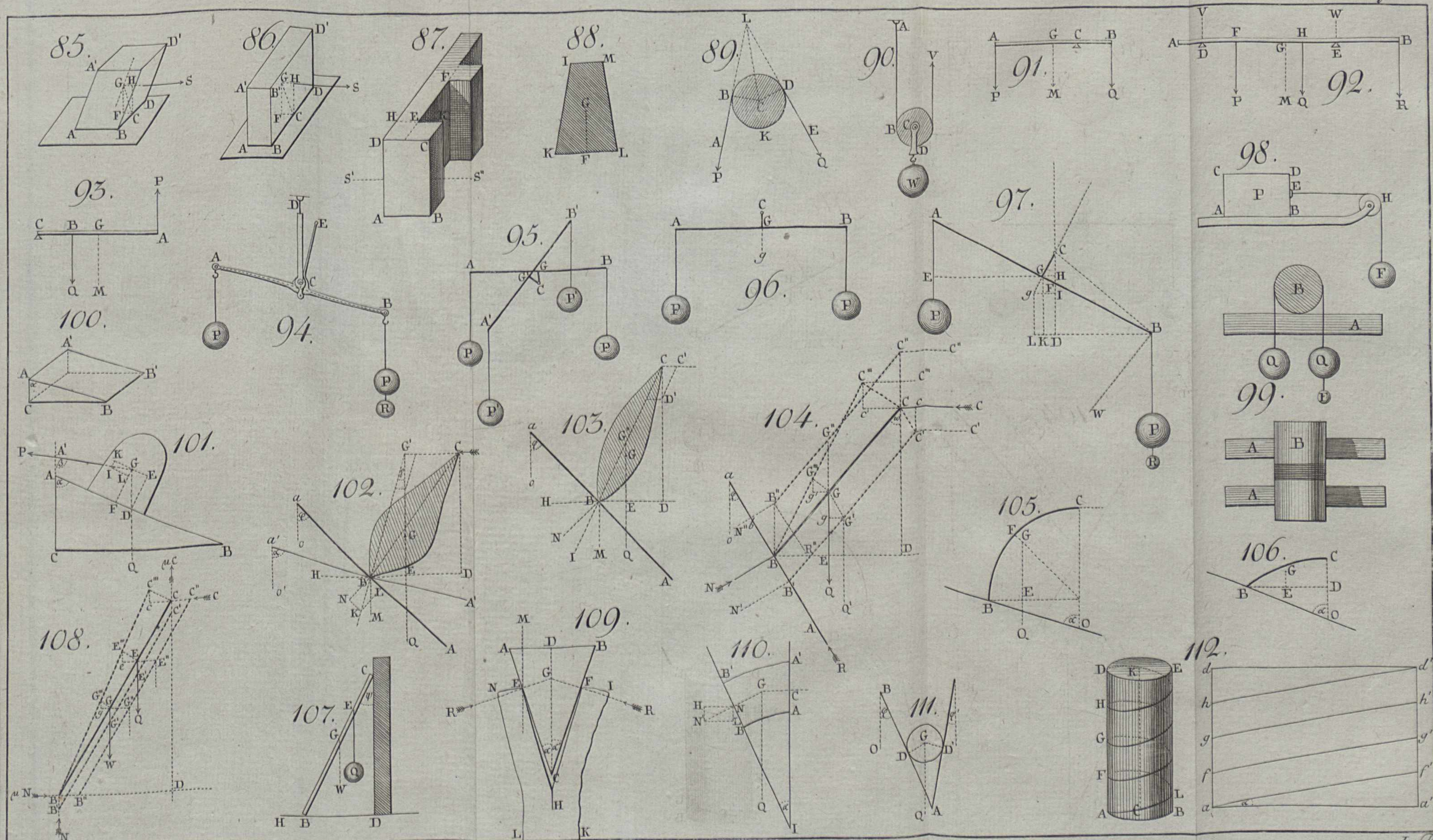


I. B.

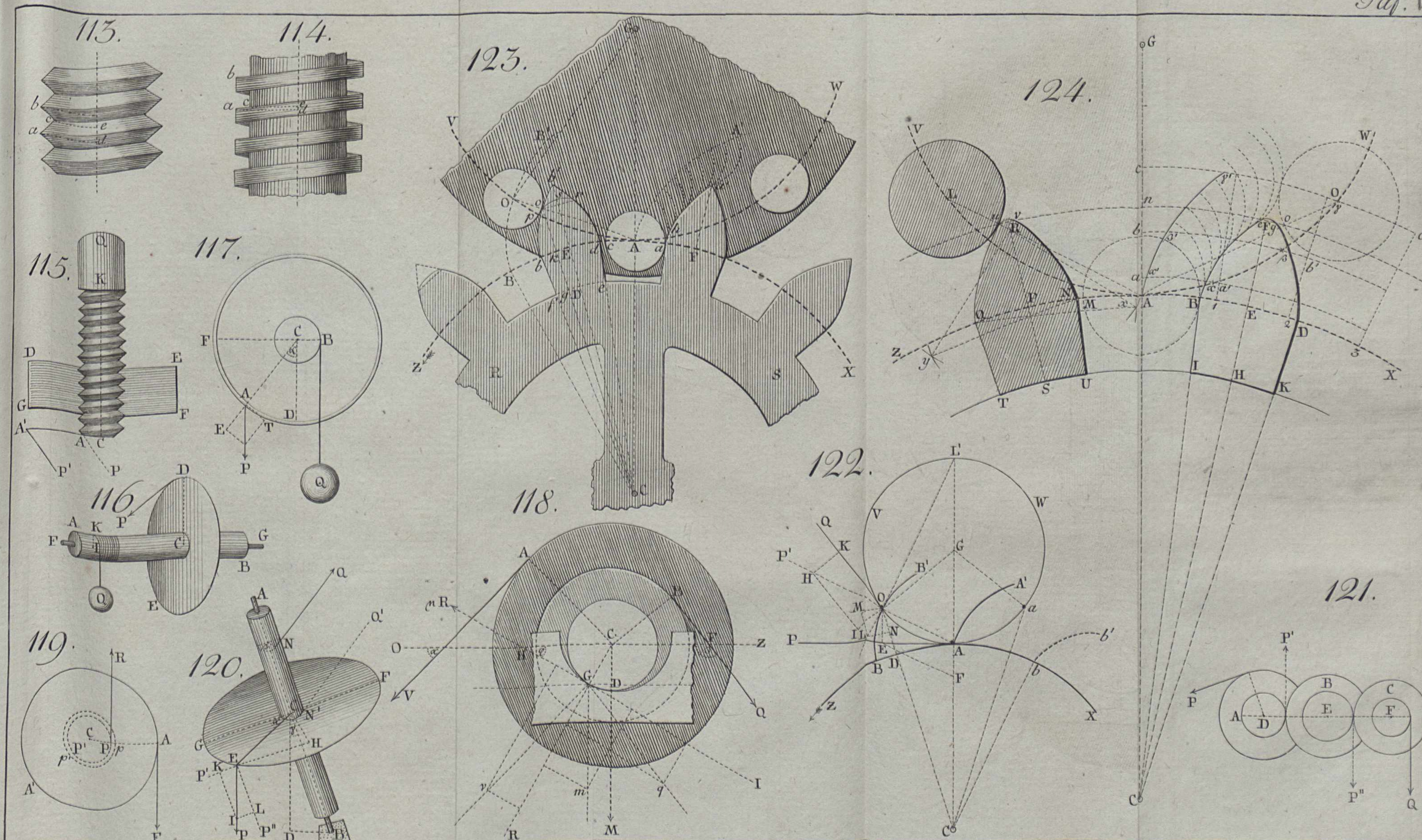

52.
53.
54.
55.
56.
57.
58.
59.
60.
61.
62.
63.
64.
65.
66.
67.
68.
69.
70.
71.
72.
73.
74.
75.
76.
77.
78.
79.
80.
81.
82.
83.
84.

I. B.

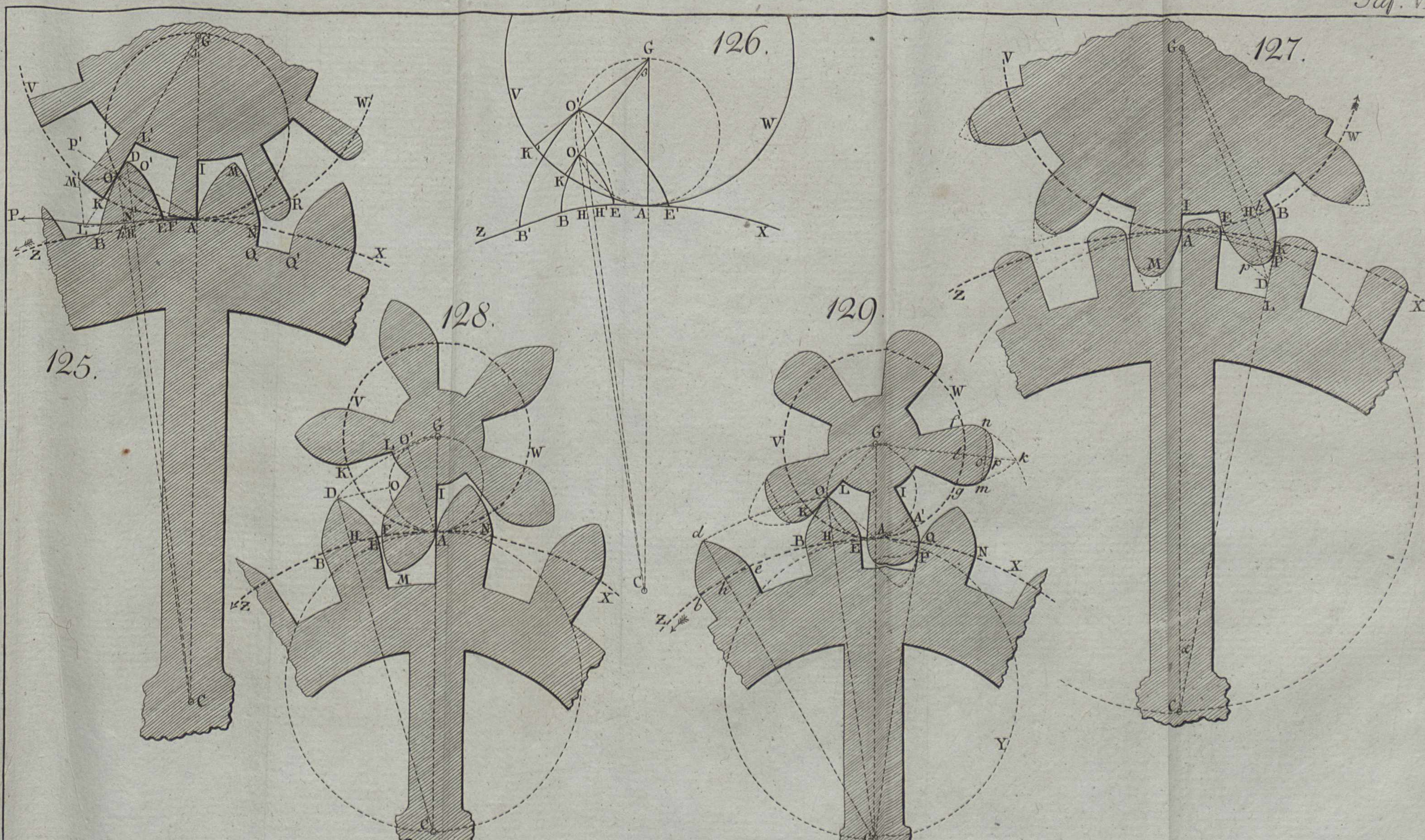
Taf. IV.


85.
86.
87.
88.
89.
90.
91.
92.
93.
94.
95.
96.
97.
98.
99.
100.
101.
102.
103.
104.
105.
106.
107.
108.
109.
110.
111.
112.

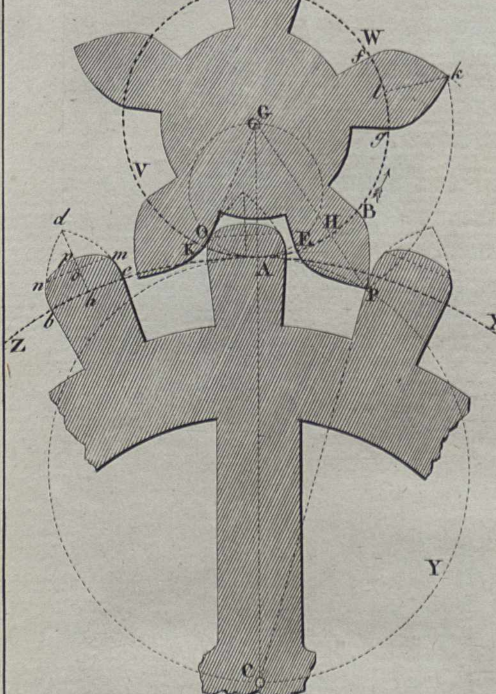
I. B.



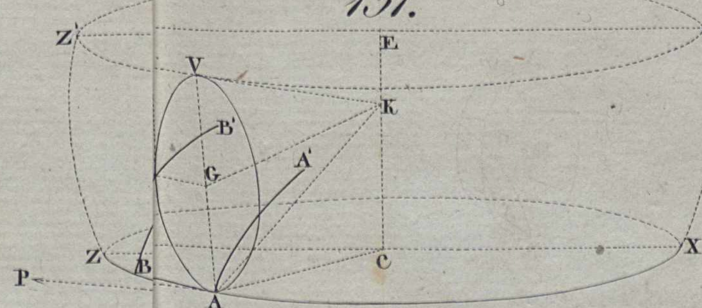
I. B.



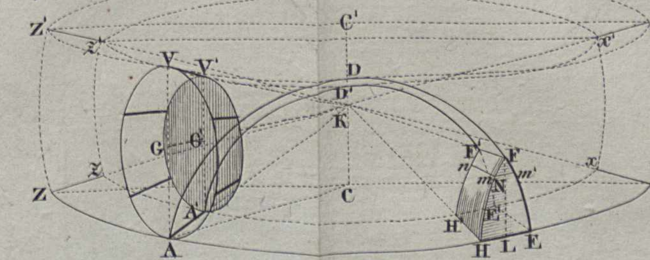
I. B.



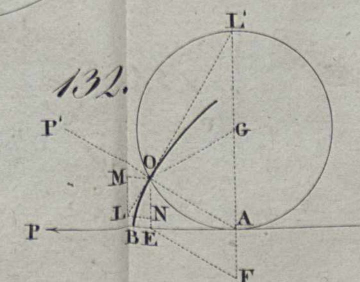
130.



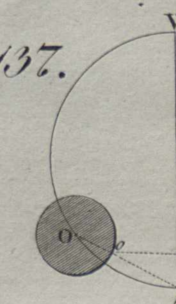
131.



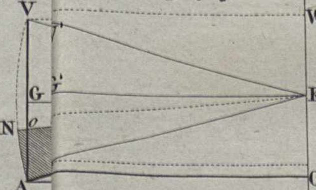
133.



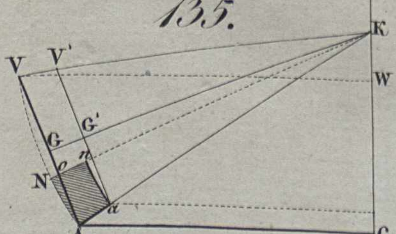
132.



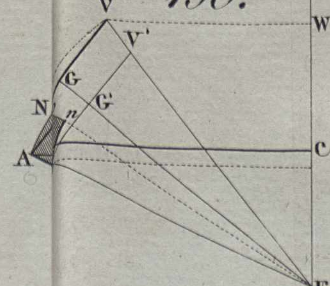
137.



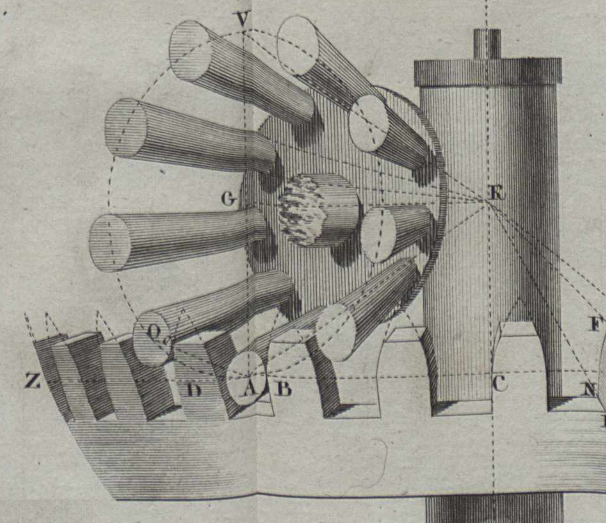
134.



135.



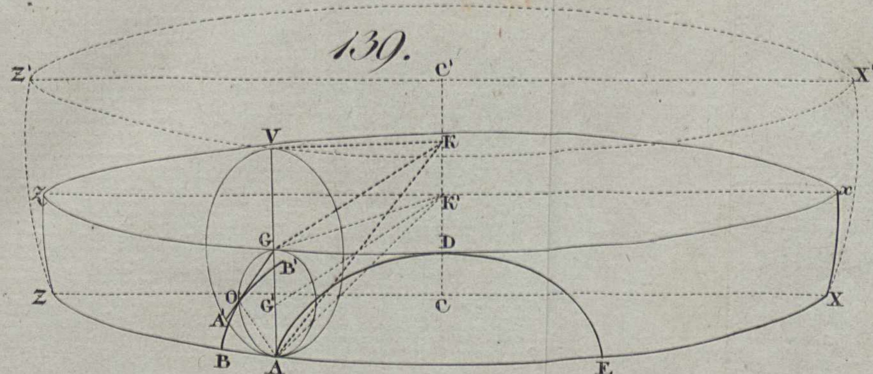
136.



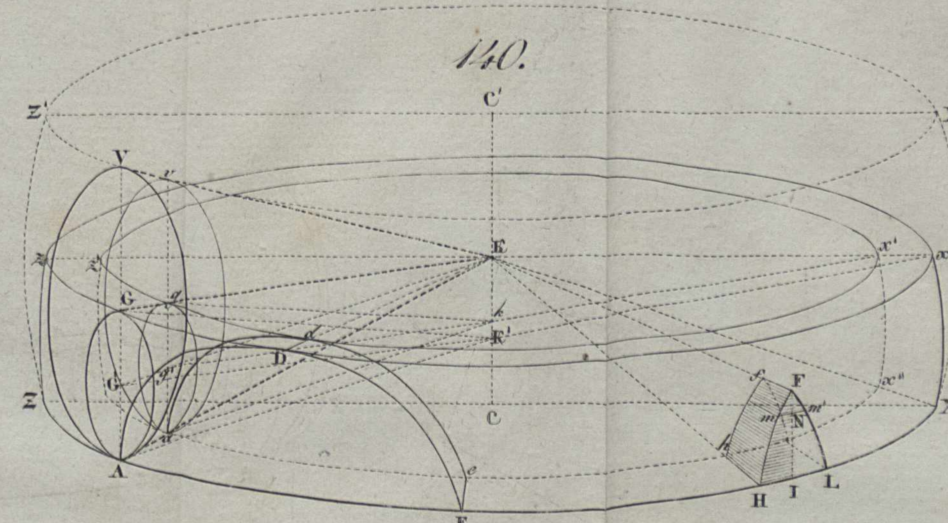
138.

fr. Köbike sc.

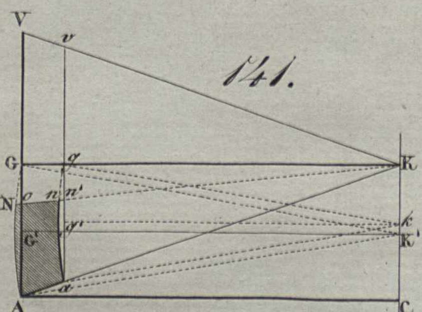
139.



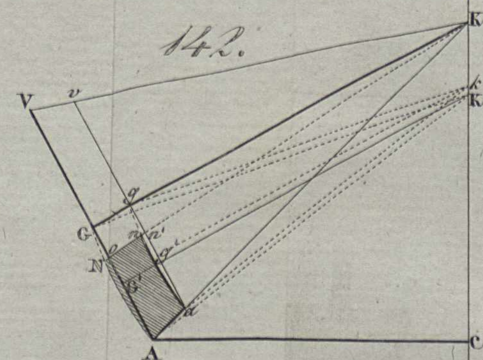
140.



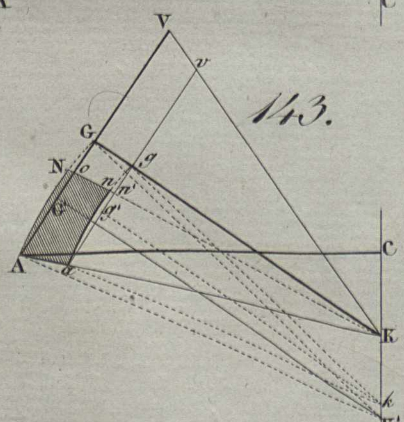
141.



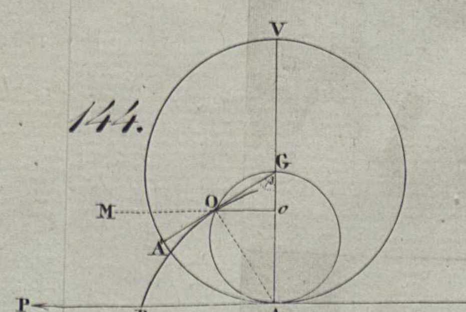
142.



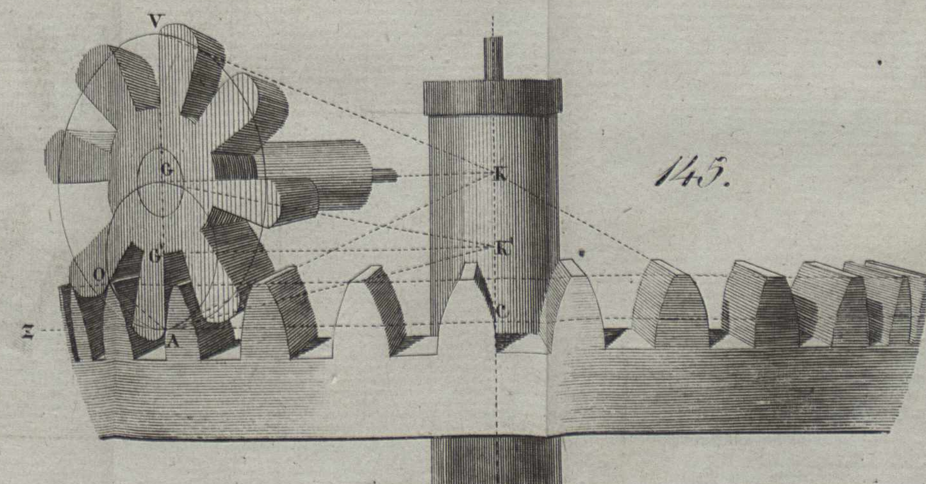
143.



144.

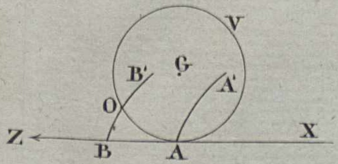


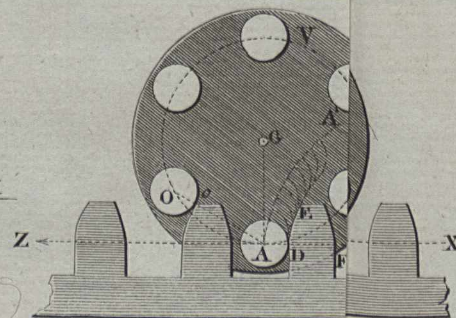
145.



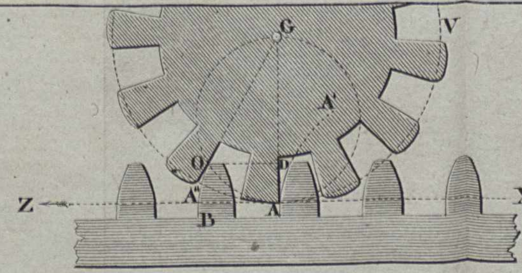
Fr. Köbike sc.

146.

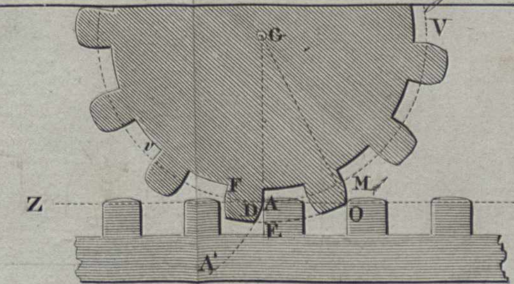




147.

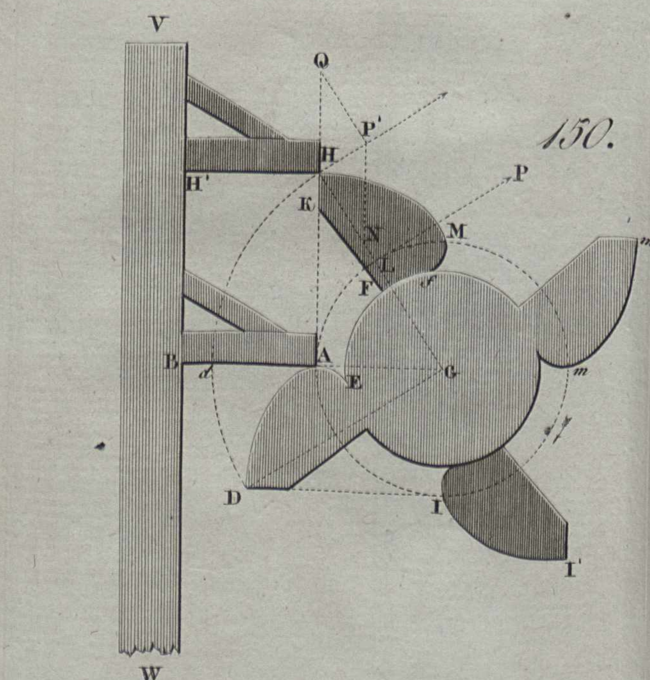


148.

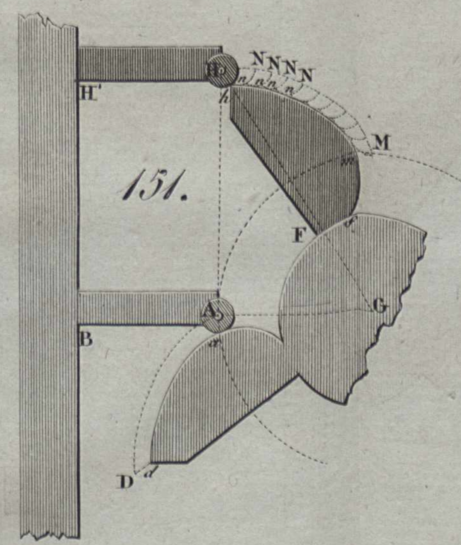


149.

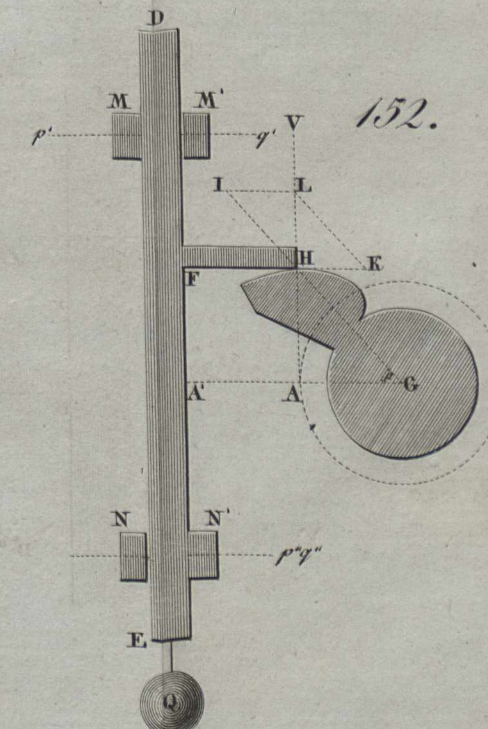
150.

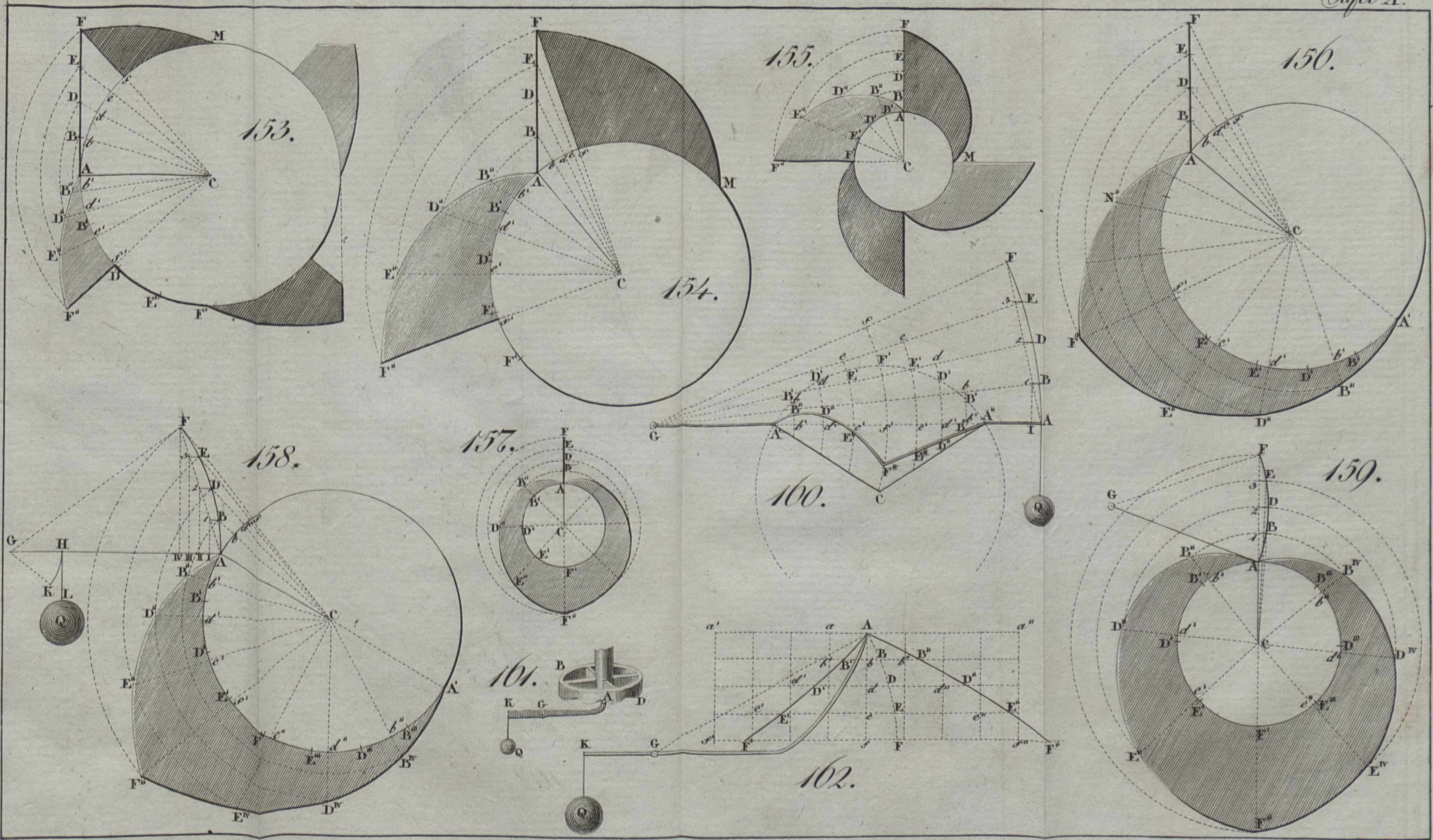


151.



152.




153.
154.
155.
156.
157.
158.
159.
160.
161.
162.