Reinhardt-Zeisberg

Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Schulen

# Detlefs Darstellende Geometrie

## Erstes Heft



Verlag Moritz Diesterweg
Frankfurt am Main

Bestell-Nr. 8371

Reinhardt-Zeisberg
Mathematisches Unterrichtswerk
für höhere Schulen



# Die Anfangsgründe der darstellenden Geometrie

in drei Heften

Von

Prof. Hermann Detlefs
Studienrat in Frankfurt a. M.

★

Erstes Heft

## Die Parallelprojektion auf eine Tafel

Mit 90 Fig~~uren und 300 Übungsau~~fgaben



1928
Verlag Moritz Diesterweg, Frankfurt am Main

Altenburg (Thür.)
Piererſche Hofbuchdruckerei
Stephan Geibel & Co.

# Vorwort.

Nachdem schon Gustav Holzmüller (Einführung in das stereometrische Zeichnen, Teubner 1886) eine mehr zeichnerische Behandlung der Stereometrie unter Anwendung der Methoden der darstellenden Geometrie gefordert hatte und diese Forderung nachdrücklich von Carl Heinrich Müller (Projektionslehre für die Prima des Gymnasiums, Programmabhandlung, Verlag von Auffarth, Frankfurt a. M. 1898) und neuerdings von Georg Scheffers und anderen wiederholt wurde, ist die Überzeugung von der Notwendigkeit dieser Bestrebungen wohl in weite Kreise gedrungen, und die neuen preußischen Richtlinien haben ja auch auf diesem Wege einen weiteren Schritt getan. Aber gut Ding will Weile haben, und so werden wohl noch einige Jahre vergehen, bis auf unseren höheren Schulen das Ziel voll erreicht sein wird. Besonders erschwerend wirkt hierbei die geringe Stundenzahl, die neuerdings dem mathematischen Unterricht eingeräumt worden ist. Will man auch nur die Anfänge der darstellenden Geometrie den Schülern darbieten, so wird dies zur Zeit nur dadurch möglich sein, daß andere minder wichtig erscheinende Gebiete des vielseitigen mathematischen Unterrichts in entsprechender Weise beschnitten werden.

Die vorliegende Arbeit, die den oben erwähnten Verfassern manche Anregung verdankt, ist in erster Linie bestimmt, das mathematische Unterrichtswerk von Reinhardt-Zeisberg zu ergänzen, das bisher nur die ersten Erklärungen der darstellenden Geometrie und die einfachsten Aufgaben enthielt. Sie eignet sich aber auch wohl zur Ergänzung anderer Lehrbücher und zum Selbstunterricht. Der Umstand, daß alle höheren Schularten berücksichtigt werden mußten, nötigten mich, den Stoff nicht allzu sehr zu beschränken. Es schien mir dies auch schon deshalb notwendig, weil über die Auswahl des für viele Schüler zuweilen recht spröden Stoffes und seine Behandlung im obligatorischen Unterricht noch recht wenige Erfahrungen vorliegen. Das vorliegende Heft wird etwa bis zur Untersekunda der Realanstalten reichen. Für Gymnasien dürfte es in Verbindung mit dem schon im Lehrbuch Enthaltenen überhaupt genügen. Was schon im Lehrbuch über Körper und ihre Zeichnung gesagt ist, wird größtenteils als bekannt vorausgesetzt, um Wiederholungen möglichst zu vermeiden. Die zum Verständnis unentbehrlichen stereometrischen Erklärungen und Sätze mußten auf dieser Stufe aus der Anschauung entwickelt werden. Sie sind durch Lateindruck hervorgehoben und sollen die Schüler allmählich in das Lehrgebäude der Stereometrie einführen und dessen unerläßliche strengere Begründung in der Obersekunda vorbereiten. Der Übungsstoff ist den dem Schüler naheliegenden Unterrichtsgebieten entnommen. Auch technische Probleme wurden soweit berücksichtigt, als sie nicht besondere technische Vorkenntnisse voraussetzten. Einige wenige schwierigere Abschnitte und Aufgaben, durch einen * gekennzeichnet, können bei der ersten Durchnahme unbeschadet des Zusammenhanges überschlagen werden. Sie dienen zur Vorbereitung späterer Abschnitte und können später nachgeholt werden. Die meisten Zeichnungen mögen unbedenklich im Klassenzimmer in geeignete Hefte mit Blei gezeichnet werden, selbstverständlich weit größer als im Buche, wo sie notgedrungen teilweise stark verkleinert werden mußten, um den Preis des Buches möglichst niedrig halten zu können. Das Ausziehen wird man in der Regel der häuslichen Arbeit überlassen.

Das später folgende zweite Heft wird die senkrechte Projektion auf mehrere Ebenen und einige geschichtliche Mitteilungen enthalten, das dritte im wesentlichen die Grundlagen der Zentralprojektion und einiges über Kartenprojektion. In diesen Heften, besonders im dritten, wird die Kenntnis der systematischen Stereometrie vorausgesetzt werden.

Der Inhalt der Hefte wird auf Wunsch auch als Anhang in das Unterrichtswerk von Reinhart-Zeisberg eingeheftet und dabei den preußischen Lehrplänen entsprechend auf Teil I—IV verteilt werden. Es ist durchaus erwünscht, daß alle Schüler beim Unterricht die Schaufiguren, welche schwer zu beschaffende Modelle ersetzen sollen und zum Teil nur mit großem Zeitverlust an die Wandtafel gezeichnet werden können, vor Augen haben.

Ich bitte um nachsichtige Prüfung meiner Arbeit und werde für Verbesserungsvorschläge jeder Art sehr dankbar sein.

Frankfurt a. M., Ostern 1927. Hermann Detlefs.

# Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung . . . . . . . . . . 1

## I. Abschnitt. Die Parallelprojektion auf eine Tafel.

### A. Die senkrechte Parallelprojektion (1. Teil).

Erklärung . . . . . . . . . . 2
Darstellung einer Geraden . . . . . . . . . . 6
Zwei Gerade . . . . . . . . . . 10
Darstellung einer Ebene . . . . . . . . . . 12
Darstellung einfacher Körper. Körpernetze . . . . . . . . . . 18

### B. Die senkrechte Parallelprojektion (2. Teil).

Die Ermittelung der wahren Gestalt einer ebenen Figur aus ihrer Projektion . . 23
Zwei Ebenen . . . . . . . . . . 27
Übungsaufgaben aus verschiedenen Gebieten . . . . . . . . . . 28
Darstellung des Kreises . . . . . . . . . . 32
Darstellung der Kugel . . . . . . . . . . 34

### C. Die schiefe Parallelprojektion.

Einleitung . . . . . . . . . . 38
Beispiele . . . . . . . . . . 41
Übungsaufgaben . . . . . . . . . . 47
Skizzierübungen . . . . . . . . . . 49
Kristallformen. Regelmäßige Körper. Axonometrie . . . . . . . . . . 50

### Anhang.

Veränderliche Figuren . . . . . . . . . . 60

# Die Anfangsgründe der darstellenden Geometrie.

## Einleitung.

Eine wichtige Aufgabe für den Ingenieur, den Techniker, den Baumeister und auch für manchen Handwerker ist es, die von ihm herzustellenden Gegenstände, seien es nun Häuser, Brücken, Maschinen, Möbel oder sonstige Dinge, vorher richtig zu zeichnen. Die Zeichnungen müssen so beschaffen sein, daß die Gegenstände nach ihnen genau in der richtigen Größe hergestellt werden können. Solche Zeichnungen pflegt man „Risse" zu nennen („reißen" bedeutet so viel wie „zeichnen"; vgl. Reißfeder, Reißschiene, Reißzeug). Wie sie gemacht werden, lehrt die darstellende Geometrie. Sie zeigt uns, wie man räumliche Gebilde, vor allem die einfachen Körper, in verschiedenen Lagen zeichnerisch darstellen und an ihren Zeichnungen Konstruktionen und Messungen vornehmen kann.

Die erste Schwierigkeit, die bei der Lösung dieser Aufgabe zu beseitigen ist, liegt darin, daß räumliche Gebilde, die drei Dimensionen haben, auf ein Zeichenblatt abgebildet werden sollen, das eben ist, also nur zwei Dimensionen besitzt. Dieselbe Schwierigkeit hat auch der Maler zu überwinden, der deshalb bei der Ausübung seiner Kunst auch die Lehren der darstellenden Geometrie bis zu einem gewissen Grade beherrschen muß.

Die einfachsten Sätze der Planimetrie werden in den folgenden Abschnitten als aus dem planimetrischen Unterricht bekannt vorausgesetzt. Man braucht aber zum Verständnisse der darstellenden Geometrie auch einige Erklärungen und Sätze aus der Stereometrie, die in der Folge an geeigneter Stelle möglichst aus der Anschauung entwickelt werden sollen. Sie sind durch lateinischen Druck gekennzeichnet. Der richtige Gebrauch der Zeichengeräte und die Regeln, die man zu beachten hat, um möglichste Genauigkeit zu erzielen, werden aus dem planimetrischen Unterricht bekannt sein. Man zeichne die Figuren weit größer (etwa doppelt so groß) als hier im Buch und wähle stets andere Lagen der gegebenen Stücke, als hier angenommen sind. Auch mache man die öfters angegebenen Genauigkeitsproben, durch die man sowohl Ungenauigkeiten als auch gröbere Fehler entdeckt.

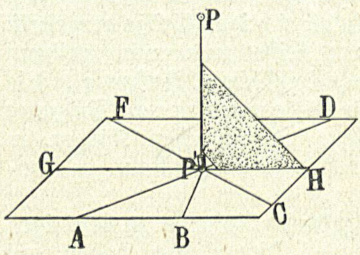
## Erster Abschnitt.

# Die Parallelprojektion auf eine Tafel.

## A. Die senkrechte Parallelprojektion. (Erster Teil.)

### Erklärung.

Die senkrechte Parallelprojektion auf eine Ebene findet hauptsächlich Anwendung zur Abbildung des Geländes in der Feldmeß- und Erdkunde. Wir beginnen mit einigen stereometrischen Betrachtungen.

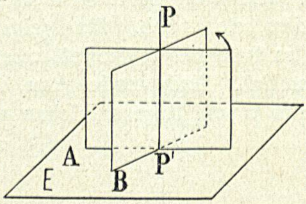



Figur *1*[1]).

Auf ein wagerecht liegendes Reißbrett lege ein Blatt Zeichenpapier, auf dem von einem Punkte $P'$ (Fig. *1*) aus nach verschiedenen Richtungen die Strahlen $P'A$, $P'B$, $P'C$ usw. gezogen sind. Von einem darüber liegenden festen Punkte $P$ laß ein Senklot herab und verschiebe das Papier, bis die Lotspitze $P'$ beinahe berührt. Dann prüfe mittels eines aus Pappe geschnittenen rechten Winkels, der des Lotes wegen am Scheitel einen Ausschnitt haben muß, die Winkel $PP'A$, $PP'B$ usw. Das Ergebnis ist folgende stereometrische Erklärung:

I. Eine Gerade steht auf einer Ebene senkrecht, wenn sie auf allen durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen Geraden (ihren „Fußgeraden") senkrecht steht. Umgekehrt steht dann auch die Ebene auf der Geraden senkrecht.

Die Länge des Lotes $PP'$ ist der Abstand des Punktes $P$ von der Ebene. Denke dir das Lot durch eine im Reißbrett befestigte Stricknadel ersetzt und bringe das Ganze in verschiedene Lagen. Die Erklärung I bleibt in allen Lagen bestehen.




Figur *2*.

1. Wie viele Senkrechte kann man von einem Punkte auf eine Ebene fällen, wie viele in einem Punkte der Ebene auf ihr errichten? 2. Wie viele senkrechte Ebenen kann man durch einen Punkt einer Geraden legen? 3. Welche Lagen hatte der Pappwinkel bei der Winkelmessung in bezug auf die Reißbrettebene? 4. Wie prüft der Maurer mit dem Senklot die richtige Lage einer Wand? Ergebnis aus 3. und 4.:

II. Eine Ebene steht auf einer anderen Ebene senkrecht, wenn sie eine auf dieser senkrecht stehende Gerade enthält. (Fig. *2*.)

---

[1]) Um Irrtümer zu vermeiden, sind die Figuren- und Seitennummern in der ganzen darstellenden Geometrie abweichend von den anderen Abschnitten des Unterrichtswerkes schräg gedruckt.

Aus Fig. 2. oder einem danach zusammengestellten Modell schließt man weiter:

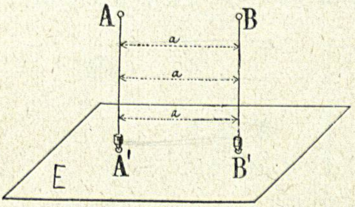
III. Steht eine Gerade auf zweien ihrer in der Ebene liegenden Fußgeraden ($AP'$ und $BP'$) senkrecht, so steht sie auf allen ihren Fußgeraden, also nach I. auch auf der Ebene senkrecht.

1. Wie kann man daher ohne Lot beurteilen, ob eine in den Erdboden gesteckte Stange lotrecht ist?

2. Wie kann man mittels zweier Zeichendreiecke oder eines Buches in einem Punkte einer Ebene das Lot errichten?

Hänge zwei Lote in einiger Entfernung voneinander auf (Fig. 3) und prüfe mittels eines Maßstabes ihre Abstände in verschiedenen Höhen. Ergebnis:

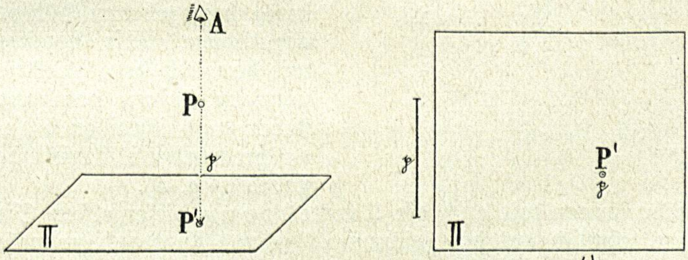
IV. Senkrechte auf einer Ebene sind parallel.



Figur 3.

**Grundaufgabe 1.** Einen gegebenen im Raume liegenden Punkt $P$ auf eine Ebene zu projizieren (abzubilden).

**Lösung.** Die Zeichen- oder Bildebene liege, wie immer in diesem Abschnitte $A$, horizontal und der Punkt $P$ etwa über ihr. Denkt man von $P$ das Lot (I, S. 2) auf sie gefällt, so wird der Fußpunkt $P'$ dieses Lotes als das **Bild** des Punktes $P$ bezeichnet (Fig. 4 $a$). Man nennt $P'$ die senkrechte Projektion des Punktes $P$ auf die Zeichenebene, oder man sagt, der Punkt $P$ sei auf die Zeichenebene

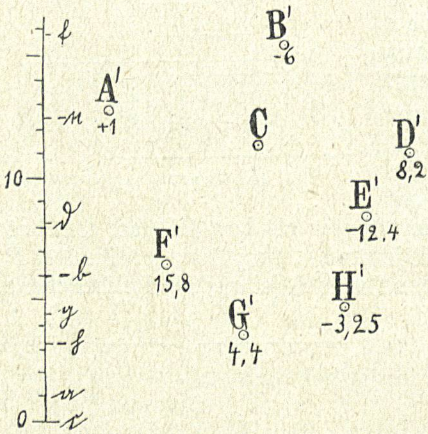


a) b)

Figur 4.

nach $P'$ **senkrecht projiziert** (wörtlich „hingeworfen") worden. Die Zeichenebene heißt deshalb auch die **Projektionsebene.** Wir bezeichnen sie zur Abkürzung mit dem großen griechischen Buchstaben Π (Pi). Die den Punkt $P$ projizierende Gerade $PP'$ nennt man den projizierenden Strahl und denkt dabei an senkrecht von oben auf die Bildebene fallende Lichtstrahlen, in denen der als undurchsichtig betrachtete Punkt $P$ auf die Bildebene sein Schattenbild $P'$ wirft, oder auch an ein in der Geraden $P'P$ über $P$ befindliches Auge $A$, dessen verlängerter „Sehstrahl" $AP$ die Bildebene in $P'$ trifft. Man kann sich $P'$ auch dadurch entstanden denken, daß von $P$ ein winziger Tintentropfen auf das Papier fällt.

Denken wir uns nun $P$ und das Lot entfernt, so daß nur das Zeichenblatt mit dem Punkte $P'$ darauf übrigbleibt (Fig. *4 b*), so haben wir unsere Aufgabe erst teilweise gelöst. Aus Fig. *4 a* geht nämlich hervor, daß nicht nur der Punkt $P$, sondern auch jeder beliebige andere Punkt des Lotes sein Bild in $P'$ hat (nach $P'$ projiziert wird). Um nun eindeutig zu erkennen, von welchem dieser unzähligen Punkte $P'$ das Bild sei, schreibt man den etwa in Zentimetern gemessenen Abstand des Punktes $P$ von der Bildebene oder seine Höhe über ihr, d. h. die Längenzahl der Strecke $PP'$ = 𝔭 (kleiner deutscher Buchstabe) an den Bildpunkt $P'$, und zwar + 𝔭 (oder einfach 𝔭), wenn der Punkt $P$ oberhalb, — 𝔭, wenn er unterhalb der Bildebene liegt. So macht man es bekanntlich auch auf einer Landkarte, um die Höhe eines Punktes über oder die Tiefe unter dem Meeresspiegel anzudeuten. Eine solche bei dem Bilde eines Punktes stehende Höhenzahl wird auch seine „Kote" (franz. cote) genannt, woher der Name „kotierte" Projektion für eine solche Abbildung stammt. Bei einem in der Bildebene liegenden Punkte $P$, bei dem natürlich Punkt und Bild eins sind, läßt man die Kote (0) weg.



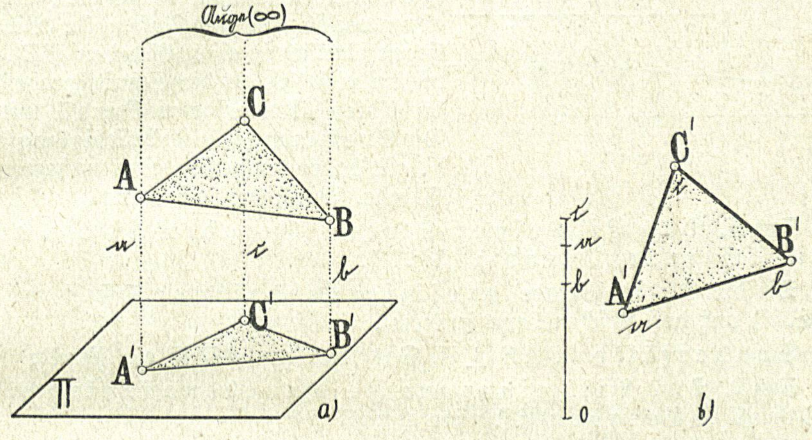
Figur 5.

Statt die Höhenzahlen an die Bildpunkte zu schreiben, ist es oft zweckmäßiger, die Höhen als Strecken auf einem der Zeichnung beigegebenen Höhenmaßstab abzutragen. Wir bezeichnen sie mit dem mit den Punkten gleichnamigen kleinen deutschen Buchstaben und schreiben diese an die entsprechenden Teilstriche des Maßstabes (Fig. *5*).

Nunmehr können wir auch die Umkehrung dieser ersten Grundaufgabe lösen, nämlich aus der Zeichnung $P'$ eines Punktes seine wahre Lage im Raum ermitteln. Wir brauchen nur, etwa mittels zweier Zeichendreiecke (s. die Frage 2. unter III. S. *3*), in $P'$ das Lot auf der Zeichenebene zu errichten (bei negativer Kote nach unten) und eine Strecke 𝔭 darauf von $P'$ aus abzutragen, so ist der Endpunkt der gesuchte Punkt $P$. Gib hiernach die wahren Lagen der in Fig. *5* abgebildeten Punkte an.

Um die senkrechte Projektion eines beliebigen Gegenstandes auf eine Ebene zu erhalten, denke man sich alle Punkte des Gegenstandes auf die Ebene wie in Grundaufgabe 1. projiziert; dann ist die Gesamtheit aller Bildpunkte das Bild des Gegenstandes. Bei der Ausführung wird es darauf ankommen, zunächst die Bilder besonders hervortretender Punkte, wie z. B. in Fig. *6a*) der Eckpunkte eines abzubildenden Dreiecks $ABC$, zu konstruieren, woraus sich dann alles übrige ergibt. Fig. *6b*) ist der Riß.

Da die Projektionsstrahlen $AA'$, $BB'$, $CC'$ usw. (nach IV. S. *3*) sämtlich parallel sind, spricht man auch oft von einer senkrechten Parallelprojektion. Man nennt sie bei horizontaler Zeichenebene, wenn die Koten der einzelnen Punkte weggelassen werden, auch den **Grundriß** der dargestellten Gebilde. Die Zeichenebene heißt dann die *Grundrißebene* oder kurz die *Grundebene*. Wir können das Bild wenigstens des Umrisses eines Gegenstandes leicht dadurch erhalten, daß wir das Zeichenblatt senkrecht zu den Sonnenstrahlen und davor den Gegenstand befestigen. Das leicht nachzuziehende Schattenbild des Gegenstandes auf dem Papier ist ziemlich genau das gewünschte Bild. Führe den Versuch aus! Als Gegenstand eignet sich ein Drahtmodell eines einfachen Körpers. Auf ähnliche Weise wurden vor Erfindung der Photographie sogar Schattenbilder (Silhouetten) von Personen hergestellt.




Figur 6.

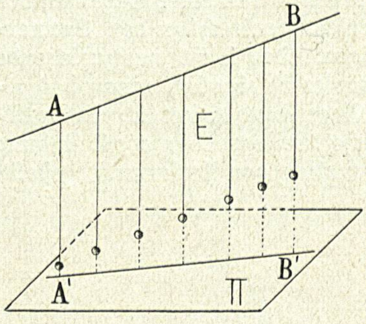
Befinden wir uns in so großer (eigentlich unendlicher) Höhe senkrecht über der Bildebene, daß wir die nach oben verlängerten parallelen projizierenden Strahlen $A'A$, $B'B$, $C'C$ usw. annähernd durch Sehstrahlen ersetzen können, die in unserem Auge zusammenlaufen, so werden sich für uns Gegenstand und Bild scheinbar decken. Der Abstand zwischen Gegenstand und Bild ist aus so großer Entfernung nicht mehr wahrnehmbar, wir erblicken den Gegenstand deshalb scheinbar in der Zeichenebene. Man betrachte nur einmal etwa aus größerer Entfernung einen Mann, der in geringer Entfernung vor einer Wand steht. Gleicht nun das Bild dem Gegenstand auch in der Färbung sowie in der Verteilung von Licht und Schatten, so wird bei Entfernung des Gegenstandes das Bild ihn für unser Auge völlig ersetzen. Hieraus folgt, daß wir eine fertige Projektionszeichnung aus großer Entfernung und senkrecht darauf sehend betrachten müssen, um einen möglichst naturgetreuen Eindruck von dem abgebildeten Gegenstande zu erhalten (sogen. Vogelperspektive).

Wir wollen nun an Beispielen sehen, wie man Raumgebilde in senkrechter Projektion abbildet.

## Darstellung einer Geraden.

An einem geraden Drahtstück sei eine Reihe von Pendeln (Bleikugeln oder große Glasperlen an dünnen Fäden) befestigt. Wir halten den Draht in beliebiger Lage über der horizontalen Zeichenebene Π. Ergebnis:

V. Die von den Punkten einer Strecke gezogenen Parallelen liegen sämtlich in einer Ebene.




Figur 7.

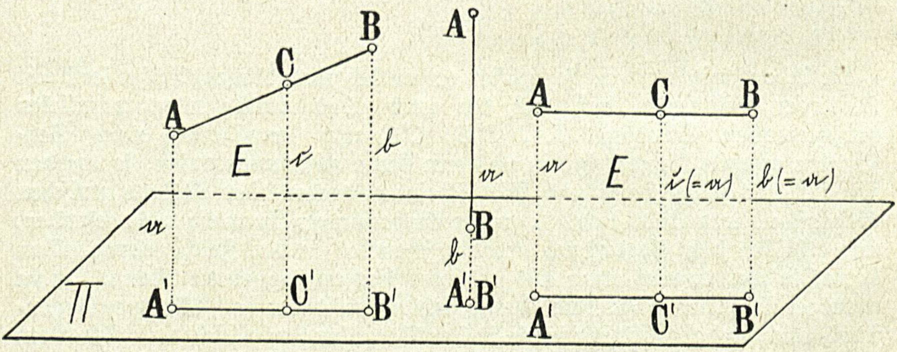
Wir fassen nun die Fäden als projizierende Strahlen der Streckenpunkte auf und denken sie uns alle bis an die Zeichenebene verlängert. Die Fußpunkte (Bilder) liegen sämtlich in einer Geraden $A'B'$, die weiter nichts ist als die Schnittgerade der durch die Fäden gelegten Ebene E mit Π. Die Strecke kann natürlich beliebig lang sein, V. gilt daher auch für eine unbegrenzte Gerade. Wir haben also den

**Satz 1.** Das Bild einer Strecke (Geraden) ist i. a. auch eine Strecke (Gerade) (Fig. *8*).

Die die Strecke (Gerade) projizierende Ebene E steht nach II (S. *2*) auf der Zeichenebene senkrecht.

Sonderfälle. 1. $AB \perp \Pi$. Das Bild von $AB$ ist ein Punkt:

**Satz 2.** Das Bild einer zur Zeichenebene senkrechten Strecke (Geraden) ist ein Punkt.




Figur 8.

2. $AB \parallel \Pi$. (Eine Gerade ist zu einer Ebene parallel, wenn sie keinen Punkt mit ihr gemeinsam hat.) Das Bild $A'B'$ ist dann $\#$ (gleich und parallel) $AB$ (weshalb?):

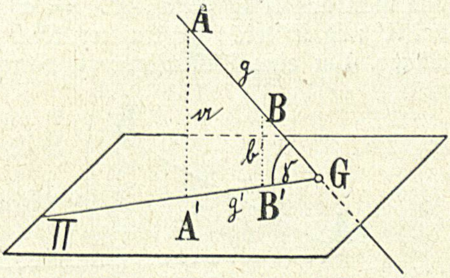
**Satz 3.** Das Bild einer der Zeichenebene parallelen Strecke ist der Strecke gleich und parallel.

Was ist über die Länge des Bildes im allgemeinen Falle (Satz 1.) zu sagen? *[1]) Teile $AB$ (Fig. 8) durch den Punkt $C$ in irgendeinem Verhältnisse $m:n$, so verhält sich auch $A'C' : C'B' = m : n$ (weshalb?). Hieraus folgt:

**Satz 4.** Das Teilungsverhältnis einer geteilten Strecke bleibt bei der Projektion im Bilde erhalten.

Überzeuge dich von der Richtigkeit dieser Sätze, indem du den Schatten eines geraden Drahtes (Stricknadel) auf einem senkrecht gegen die Sonnenstrahlen gehaltenen Schirm auffängst.

Die **Spur** einer Geraden. Wenn wir (Fig. 9) eine Strecke $AB$, die nicht parallel $\Pi$ ist, nach unten (über $B$ hinaus) verlängern, so wächst auch $A'B'$ über $B'$ hinaus. $B$ und $B'$ nähern sich einander und fallen schließlich in $G$ zusammen. (Zwei nicht parallele Gerade in einer Ebene müssen sich in einem Punkte schneiden.) Dieser Schnittpunkt liegt aber auch in $\Pi$ (weshalb?), und wird die **Spur** der Geraden $g$ genannt. Ergebnisse:



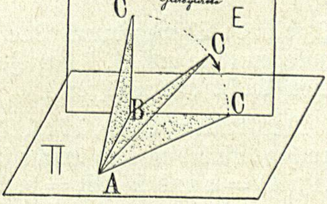
Figur 9.

VI. Eine Gerade, die weder einer Ebene parallel ist noch in ihr liegt, schneidet sie in einem Punkte.

**Satz 5.** Die Spur einer Geraden liegt auf der Projektion der Geraden.

Von der Spur $G$ an verläuft die Gerade $g$ anfänglich unterhalb der Zeichenebene und ist deshalb als unsichtbare (verdeckte) Linie gestrichelt gezeichnet.

**Der Neigungswinkel einer Geraden.** Unter dem Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene versteht man den (spitzen) Winkel, den die Gerade mit ihrer Projektion auf die Ebene bildet. In Fig. 9 ist demnach $\sphericalangle AGA' = \gamma$ der Neigungswinkel der Geraden $g$ gegen $\Pi$. Grenzfälle?



Figur 10.

Über Umlegungen. Stelle ein Zeichendreieck wie in Fig. 10 auf eine horizontale Ebene $\Pi$, so daß eine Kathete, etwa $AB$, in der Ebene liegt, während die andere, $BC$, lotrecht steht. Unmittelbar hinter das Dreieck stelle eine Glas- oder Pappscheibe E lotrecht und zugleich senkrecht zu $AB$ auf. Nun drehe das Dreieck um $AB$ als Achse und lege es ganz in die Horizontalebene um. Was geschieht mit der Kathete $AB$? Welche Bahn durchläuft $C$? Was für eine Fläche beschreibt $BC$? Welche Lage hat diese Fläche zu E ? Lege das Dreieck auch nach der linken Seite um. Ergebnis:

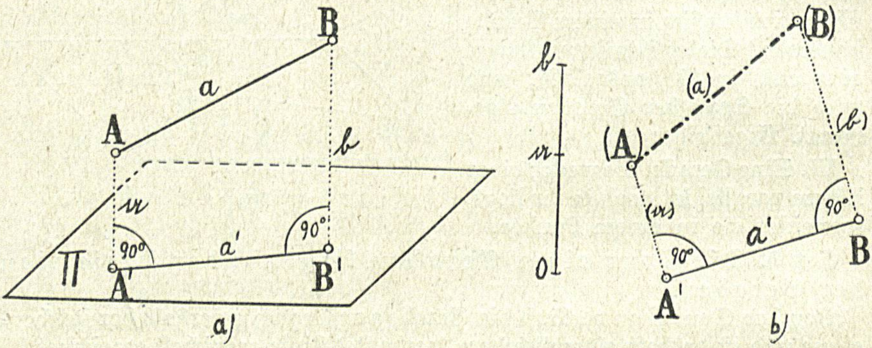
[1]) Sätze und Aufgaben, die bei der ersten Durchnahme als noch zu schwierig übergangen werden können, sind mit einem * bezeichnet.

VII. Wenn ein rechter Winkel sich um einen seiner Schenkel als Achse dreht, so beschreibt der andere Schenkel eine Ebene, die auf dem ersten Schenkel senkrecht steht.

**Beispiele:** Öffnen einer Tür, eines Kastens, Aufschlagen eines Buches usw. Was für eine Fläche beschreibt die Hypotenuse $AC$?

**Grundaufgabe 2.** Die wahre Länge und Lage einer durch ihren Grundriß $A'B'$ und die Höhen der Endpunkte gegebenen Strecke $AB = a$ zu ermitteln.

**Analysis.** Aus dem Schaubild Fig. *11 a)* ersieht man, daß i. a. die projizierende Ebene der Strecke $AB$ die Gestalt eines Trapezes $AA'BB'$ hat, das man aus $A'B' = a'$, $A'A = \mathfrak{a}$, $B'B = \mathfrak{b}$ und den rechten Winkeln bei $A'$ und $B'$ leicht konstruieren könnte. Es ist dann $AB = a$ die gesuchte Länge. Um eine Nebenfigur zu vermeiden, zieht man es vor, das pro-




Figur *11.*

jizierende Trapez durch Drehung um $A'B'$ als Achse in die Bildebene umzulegen (wie auf S. *7* das Zeichendreieck). In dieser Lage ist die Konstruktion leicht auszuführen.

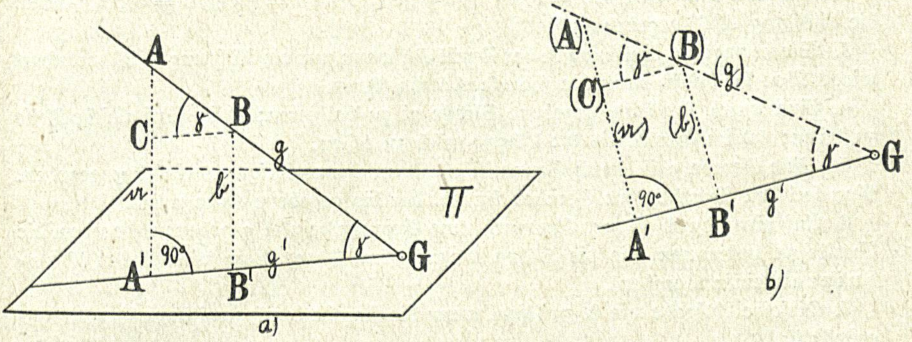
**Konstruktion.** Fig. *11 b)*. Trage an die gegebene Strecke $A'B'$ in $A'$ und $B'$ rechte Winkel an und mache ihre freien Schenkel gleich den gegebenen Höhen $A'$ $(A) = \mathfrak{a}$ und $B'$ $(B) = \mathfrak{b}$. Die Seite $(A)$ $(B)$ hat dann die gesuchte Länge $a$.

Um anzudeuten, daß das Trapez eine in die Bildebene umgelegte Figur ist, zeichnet man die umgelegte Hauptlinie strichpunktiert und klammert die Buchstaben ein. Richtet man das Trapez durch Rückwärtsdrehen um $A'B'$ als Achse wieder auf, bis es vertikal steht, so kommt die Strecke $(A)$ $(B)$ in ihre natürliche Lage $AB$ im Raum.

Löse auch die Sonderfälle: a) $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$; b) $a' = 0$ (s. Satz 3. und 2. S. *6*).

**Grundaufgabe 3.** Eine Gerade $g$ ist durch die Projektionen (d. h. die Grundrisse und Höhen) zweier ihrer Punkte $A$ und $B$ gegeben. Man soll ihre Spur $G$ und ihren Neigungswinkel $\gamma$ ermitteln.

**Analysis.** Um die Spur zu finden (Fig. *12 a*), hätten wir die Gerade $AB$ zu verlängern, bis sie ihre Projektion schneidet. Da sich dies im Raume zeichnerisch nicht ausführen läßt, legen wir, wie in Grundaufgabe 2., das pro-

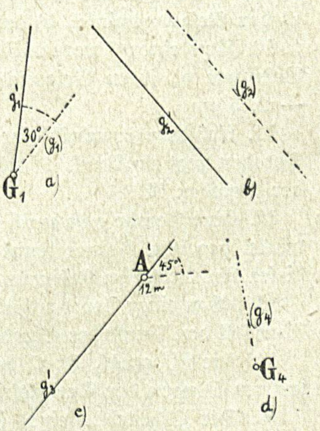



Figur *12*.

jizierende Trapez $AA'BB'$ in die Bildebene um (Fig. *12b*)) und können nun die Verlängerung vornehmen. So erhalten wir beides, Spur und Neigungswinkel.

Es kann dabei vorkommen, daß die Spur $G$ außerhalb der verfügbaren Zeichenfläche liegt. Dann kann man wenigstens den Neigungswinkel finden, indem man durch einen beliebigen Punkt der umgelegten Geraden, z. B. durch $(B)$ die Gerade $(B)(C) \,//\, A'B'$ zieht. Dann ist $\sphericalangle (A)(B)(C) = \gamma$ (weshalb?).

Statt durch zwei ihrer Punkte kann man eine Gerade auch durch Spur (oder einen anderen ihrer Punkte), Grundriß und den umgelegten Neigungswinkel darstellen. Deute danach die in Fig. *13* dargestellten Geraden.




Figur *13*.

### Übungsaufgaben.

**Vorbemerkung.** Wenn ein Punkt „gegeben“ ist, so ist beim Fehlen weiterer Angaben stets gemeint, daß sein Grundriß und seine Kote (oder Höhe) gegeben sind. Wenn eine Gerade ohne nähere Angabe der Bestimmungsstücke „gegeben“ ist, so ist die Wahl der Bestimmungsstücke (z. B. zwei Punkte oder ein Punkt, Grundriß und Neigungswinkel) dem Zeichner freigestellt.

1. Löse die Grundaufgabe 2. für:

a) $a' = 5$ cm, $\mathfrak{a} = 3$ cm, $\mathfrak{b} = 4$ cm;
b) $a' = 3$ cm, $\mathfrak{a} = 5$ cm, $\mathfrak{b} = -2$ cm;
c) $a' = 4$ cm, $\mathfrak{a} = -6$ cm, $\mathfrak{b} = -5$ cm;

d) $a' = 5$ cm, a = 3,7 cm, b = 3,7 cm;
e) $a' = 0$, a = 5,2 cm, b = 9,8 cm;
f) $a' = 7$ cm, a = 0, b = 6,1 cm.

2. Das Bild einer Strecke $a = 6$ cm zu zeichnen, wenn a = 2 cm, b = 5 cm, $A'$ und die Richtung $A'B'$ gegeben sind.

3. Wie bewegt sich in Übung 2. der Punkt $B'$, wenn nur die Richtung $A'B'$ verändert wird? Was beschreibt dann die Strecke $AB$ im Raum?

4. Eine durch ihr Bild gegebene Strecke a) zu halbieren; b) in fünf gleiche Teile zu teilen; *c) im Verhältnis 3 : 1 harmonisch zu teilen.

5. Eine Gerade $g$ ist durch Grundriß $g'$, Spur $G$ und Neigungswinkel $\gamma$ gegeben. Man soll den Punkt $P$ der Geraden finden, der die gegebene Höhe p hat.

6. Auf einer durch Spur, Grundriß und Neigungswinkel gegebenen Geraden die Punkte zu bestimmen, die die Höhen 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm usw. haben (Graduieren einer Geraden).

7. Dieselbe Aufgabe wie 6. zu lösen, wenn die Gerade durch zwei ihrer Punkte dargestellt ist.

8. Mehrere Gerade zu zeichnen, deren gemeinschaftliche Spur und Neigungswinkel ($30^0$) gegeben sind. Welches ist der stereometrische Ort dieser Geraden?

9. Von einer Geraden kennt man die Bilder $A'$ und $B'$ zweier Punkte mit den Koten a = 8 cm, b = 7 cm. Die Spur liege außerhalb der Zeichenebene. Bestimme a) den Neigungswinkel, b) den Punkt der Geraden, der die Kote 7,6 cm hat.

10. Von einer Strecke $AB = a$ sind gegeben $a' = 8{,}5$ cm, a = 5 cm, b = — 4 cm. Bestimme a) ihren Neigungswinkel, b) ihre Spur, c) den Punkt mit der Kote — 2, 5 cm.

11. Auf dem Grundriß einer durch Grundriß, Spur und Neigungswinkel gegebenen Geraden liegt ein Punkt $P'$ mit der Kote p. Wie kann man entscheiden, ob $P$ ein Punkt der Geraden ist?

12. Eine Gerade $g$ ist durch einen ihrer Punkte, ihren Grundriß und ihren Neigungswinkel gegeben. Ferner kennt man die Grundrisse einiger ihrer Punkte Die Koten dieser Punkte sollen bestimmt werden.

*13. Von einer Geraden sind die Spur $G$ und das Bild $A'$ eines Punktes $A$ gegeben. Man soll den Punkt der Geraden ermitteln, der die dreifache Höhe des Punktes $A$ hat.

14. Die Bilder $A'$, $B'$, $C'$ der Ecken eines Dreiecks $ABC$ sind gegeben. Bestimme die wahren Längen der Dreiecksseiten und konstruiere daraus das Dreieck $ABC$.

15. Der Scheitel $A$ eines im Raume liegenden Winkels sowie die Spuren seiner Schenkel sind gegeben. Bestimme die wahre Größe des Winkels (vgl. Aufgabe 14.).

## *Zwei Gerade.

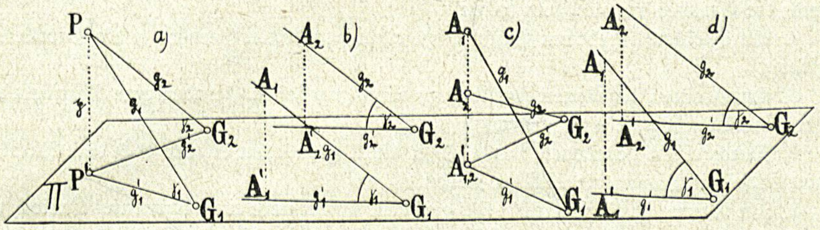
Befestige an der Wandtafel mittels eines Reißnagels einen (weißen) Faden und ziehe auf der Tafel eine Gerade, die nicht durch den festen Punkt des Fadens geht. Dann halte den Faden, der eine zweite Gerade vorstellen soll, gespannt und bewege seinen freien Endpunkt 1. auf der Tafel, 2. außerhalb der Tafel. Ergebnis:

VIII. Zwei Gerade, die in einer Ebene liegen, schneiden sich oder sind parallel. Zwei Gerade, die nicht in einer Ebene liegen, schneiden sich nicht und sind auch nicht parallel. Man sagt, sie kreuzen sich im Raume oder sie sind „windschief".

Gib die windschiefen Geraden (Kanten) an den Zimmerwänden und an Körpermodellen an.

Projiziere ein Drahtmodell eines Würfels mittels der Sonnenstrahlen sowie auch zwei gerade Drahtstücke von gleicher Länge, die du in verschiedene gegenseitige Lagen bringst. Ergebnisse:

**Satz 6.** Die Bilder zweier sich schneidenden Geraden



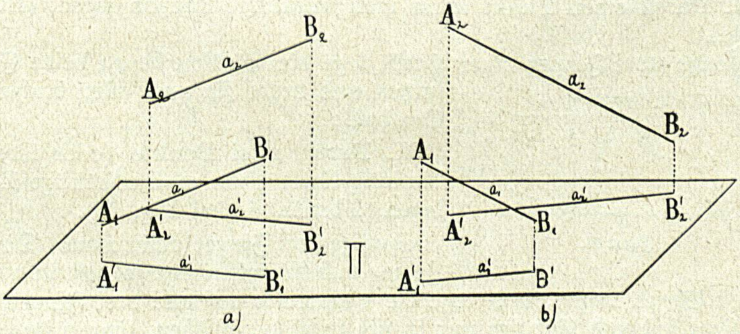

Figur 14.

schneiden sich; die Bilder paralleler Geraden sind parallel; die Bilder windschiefer Geraden schneiden sich oder sind parallel.

1. Läßt sich dies alles auch umkehren?
2. Untersuche die verschiedenen Fälle in Fig. *14*.

**Satz 7.** Gleiche parallele Strecken haben auch gleiche Bilder. Fig. *15 a*).

Aus Satz 7. folgt ohne weiteres:




Figur 15.

***Satz 8.** Die Bilder paralleler Strecken verhalten sich wie die Strecken selbst. Fig. *15 b*). In der Figur ist $A_2B_2 = 2 \cdot A_1B_1$.

**Übungsaufgaben.**

1. Die Projektionen zweier Geraden, die durch Spur, Grundriß und Neigungswinkel gegeben sind, schneiden sich. Untersuche, ob auch die Geraden selbst sich schneiden. Anleitung: Ermittle nach Übung 12. S. *10* für beide Geraden die Höhe des Punktes, in dem die Projektionen sich schneiden.

2. Durch einen gegebenen Punkt $A$ sollen zwei Gerade gezogen werden, deren Grundrisse und Neigungswinkel gegeben sind. Bestimme ihre Spuren.

3. Die Projektionen zweier durch Spur und Grundriß gegebenen Geraden sind parallel. Welche Bedingung müssen die Neigungswinkel der Geraden erfüllen, wenn auch die Geraden parallel sein sollen?

4. Durch einen gegebenen Punkt $P$ zu einer gegebenen Geraden $g$ die Parallele zu ziehen.

5. Durch einen gegebenen Punkt $P$ zu einer gegebenen Geraden eine Parallele von der gegebenen Länge $a$ zu ziehen.

6. Durch einen gegebenen Punkt $P$ zu einer gegebenen Strecke $AB$ eine Parallele von derselben Länge wie $AB$ zu ziehen.

7. Im Raume ist ein Dreieck $ABC$ gegeben. Konstruiere ein kongruentes Dreieck, von dem eine Ecke $A_1$ gegeben ist, und dessen Seiten den entsprechenden Seiten des gegebenen Dreiecks parallel sind.

*8. Zu einem im Raume liegenden gegebenen Dreieck $ABC$ ein ähnliches Dreieck zu konstruieren, von dem eine Ecke $A_1$ gegeben ist, und dessen Seiten sich zu den entsprechenden Seiten des gegebenen Dreiecks wie $3 : 2$ verhalten.

9. Ergänze ein im Raume liegendes gegebenes Dreieck zu einem Parallelogramm. Wie viele Lösungen?

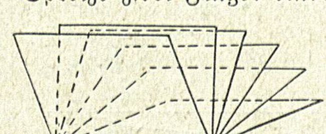
## Darstellung einer Ebene.

### Einleitende Sätze.

Lege eine Glasplatte an eine Fingerspitze und drehe und wende die Platte nach allen Richtungen. Ergebnis:

IX. Durch einen Punkt kann man unzählige Ebenen legen. (Ebenenbündel.)

Spreize zwei Finger einer Hand, lege die Glasscheibe an beide Fingerspitzen und drehe sie nach allen Richtungen. Ergebnis:



Figur *16*.

X. Durch zwei Punkte (oder ihre Verbindungslinie) kann man unzählige Ebenen legen (Ebenenbüschel Fig. *16*).

Spreize drei Finger einer Hand (Daumen, Zeige- und Mittelfinger), so daß sie nicht in einer Ebene liegen, und lege die Glasplatte auf alle drei Fingerspitzen. Sie liegt fest und läßt sich nur in sich selbst verschieben. Ergebnis:

XI a. Durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte läßt sich eine und nur eine Ebene legen.

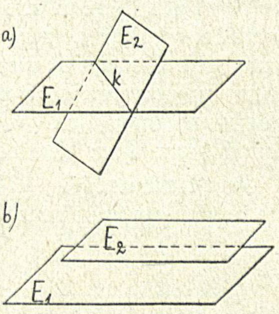
Mit zwei der Länge nach auf den Tisch gestellten Linealen und einer Glasplatte sowie mit einer Fingerspitze, einem Lineal und der Glasplatte veranschauliche folgendes:

XI b. Eine Ebene ist eindeutig bestimmt durch zwei sich schneidende oder durch zwei parallele Gerade oder durch eine Gerade und einen außerhalb der Geraden liegenden Punkt.

Durch zwei windschiefe Gerade läßt sich keine Ebene legen (vgl. S. *11*).

XII. Zwei Ebenen, die nicht zusammenfallen, schneiden sich entweder in einer Geraden ($k$) oder überhaupt nicht. Im letzteren Falle heißen sie parallel. (Fig. *17*.)

Erläutere diesen Satz durch Beispiele an den Zimmerwänden und an verschiedenen Körpern.



Figur *17*.

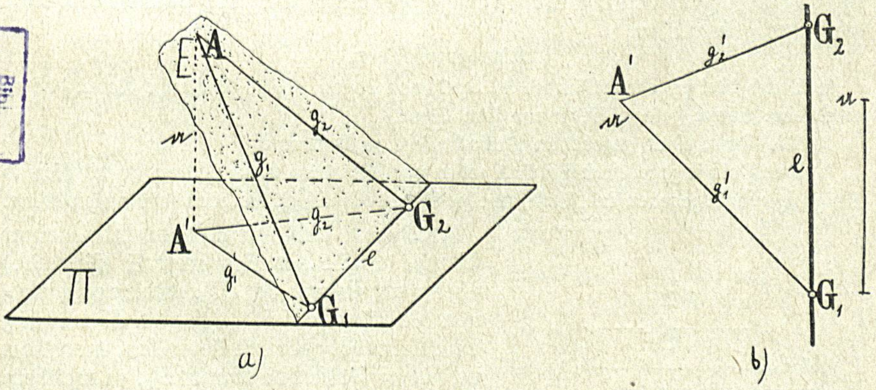
**Das Bild einer Ebene.**

Die Projektion einer auf Π senkrechten Ebene ist die Schnittgerade beider Ebenen (warum?).

Die Projektion einer nicht auf Π senkrecht stehenden unbegrenzten Ebene E erfüllt die ganze ebenfalls unbegrenzte Bildebene Π (weshalb?). Es kann sich deshalb bei Zeichnungen nur um die Projektion einer begrenzten e b e n e n Figur, z. B. des Dreiecks in Fig. *6* S. *5*, handeln. Durch ein solches Dreieck oder durch seine drei Ecken ist nach XI a. die Lage der ganzen Ebene bestimmt. Sie kann aber ebenso durch die in XI b. angegebenen Stücke bestimmt sein. Zur Bezeichnung von unbegrenzten Ebenen benutzen wir die großen griechischen Buchstaben, z. B. Α (Alpha), Β (Beta), Γ (Gamma), Δ (Delta), Ε (Epsilon), Η (Eta), Π (Pi) usw.

**Spur.** Unter der Spur einer (nicht zu Π parallelen) Ebene E versteht man ihre Schnittgerade mit Π. Wenn die Ebene auf Π senkrecht steht (z. B. die





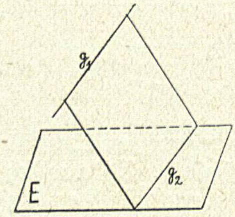
Figur *18*.

Seitenflächen eines auf Π stehenden Kastens), so ist ihre Spur zugleich ihre Projektion. Gehört sie nicht von vornherein zu den Bestimmungsstücken der Ebene, so kann man sie leicht ermitteln nach

**Grundaufgabe 4.** Die Spur $e$ einer durch zwei gegebene sich schneidende Gerade $g_1$ und $g_2$ bestimmten Ebene E zu zeichnen.

**Analysis** (Fig. *18a.*). Wir nehmen an, keine der gegebenen Geraden sei parallel zu $\Pi$, so muß jede von ihnen nach VI. (S. *7*) eine Spur haben, und diese Spuren $G_1$ und $G_2$ müssen sowohl in E als in $\Pi$, also auf $e$ liegen, denn außer ihrer Schnittgeraden $e$ haben die beiden Ebenen nichts gemeinsam. Bestimmt man also $G_1$ und $G_2$, so ist $G_1G_2$ die gesuchte Spur $e$, da eine Gerade durch zwei ihrer Punkte bestimmt ist.

**Konstruktion.** Fig. *18b*). Sind die Spuren $G_1$ und $G_2$ nicht schon gegeben, so konstruiere man sie nach Grundaufgabe 3. oder Übungsaufgabe 2. (S. *12*).



Figur *19.*

Wenn man eine Kante einer rechteckigen Glasplatte oder Pappscheibe an die Wandtafel legt, so erkennt man leicht die Richtigkeit des folgenden Satzes:

XIII. Legt man durch eine Gerade ($g_1$ in Fig. *19.*), die einer Ebene (E) parallel ist, eine Ebene, so ist die Schnittgerade beider Ebenen der ersten Geraden parallel.

Diesen Satz kann man bei Grundaufgabe 4. anwenden, wenn eine der gegebenen Geraden parallel $\Pi$ ist (s. Übungsaufgabe 1.).

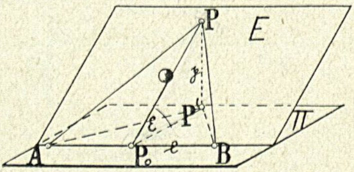
Aus der obigen Analysis ergab sich der

**Satz 9.** Die Spuren aller in einer Ebene liegenden Geraden liegen auf der Spur der Ebene.

Zur Darstellung einer Ebene genügt die Spur nur, wenn die Ebene senkrecht zu $\Pi$ ist. In allen anderen Fällen muß außer der Spur noch ein Punkt der Ebene gegeben sein. In sehr vielen Fällen liegt die Spur außerhalb der verfügbaren Zeichenfläche und ist dann zur Darstellung der Ebene überhaupt nicht zu gebrauchen.

**Übungsaufgaben.**

1. Durch drei gegebene Punkte $A$, $B$, $C$, von denen $A$ und $B$ gleiche Koten haben, wird eine Ebene gelegt. Bestimme ihre Spur.
2. Die Spur einer gegebenen Dreiecksfläche zu bestimmen.
3. Durch einen gegebenen Punkt $A$ gehen zwei Gerade $g_1$ und $g_2$, deren Grundrisse und Neigungswinkel gegeben sind. Bestimme die Spur der durch die Geraden bestimmten Ebene.



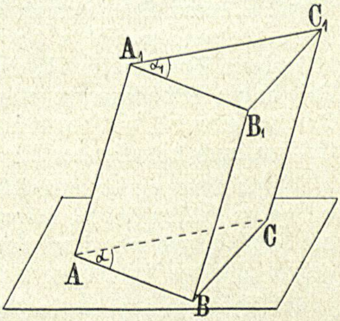
Figur *20.*

**Fallinien** und **Neigungswinkel** einer Ebene. Stelle ein Reißbrett E (Fig. *20.*) schräg auf einen Tisch ($\Pi$). Von verschiedenen Punkten $P$ dieser „schiefen Ebene" laß eine kleine Kugel herunterrollen, merke dir in jedem Falle den Punkt $P_0$, in welchem die Kugel die untere Kante des Reißbrettes (die Spur $e$ der Ebene E) trifft, und verbinde ihn mit $P$. Miß auch jedesmal den Winkel zwischen $e$ und $PP_0$. Ergebnis: Die Kugel rollt stets auf einer Senkrechten zu $e$, also auf dem kürzesten Wege abwärts. Man nennt deshalb alle diese Senkrechten die **Fallinien**

der Ebene E. Sie bestimmen bei einem ebenen Bergabhang oder einem schrägen Dach den Ablauf des Wassers und sind zugleich die steilsten Linien, wie jeder Bergsteiger weiß. Ziehen wir noch $P'P_0$, so ist $P'P_0$ die Projektion der Fallinie. Um nun auch die Lage von $P'P_0$ zu $e$ zu bestimmen, machen wir $P_0A = P_0B$ und verbinden $A$ und $B$ mit $P$ und $P'$. Dann ist zunächst $\triangle AP_0P \cong \triangle BP_0P$ (*sws*), folglich $AP = BP$. Ferner ist $\triangle APP' \cong \triangle BPP'$ (*ssw*), woraus folgt $AP' = BP'$. Schließlich ist $\triangle AP_0P' \cong \triangle BP_0P'$ (*sss*), also $\sphericalangle AP_0P' = \sphericalangle BP_0P'$. Da diese beiden Winkel Nebenwinkel sind, muß $P'P_0 \perp e$ sein. Wir haben somit:

**Satz 10.** Die Projektionen der Fallinien einer Ebene stehen, ebenso wie die Fallinien selbst, auf der Spur der Ebene senkrecht.

Nach der Erklärung auf S. *7* ist $\sphericalangle PP_0P' = \varepsilon$ der Neigungswinkel der Fallinie $PP_0$. Es fragt sich nun, ob alle Fallinien denselben Neigungswinkel haben. Bei jedem senkrechten oder schiefen Prisma (Fig. *21*) finden wir nun, daß die gleichliegenden Winkel der parallelen Grund- und Deckfläche, z. B. $\alpha$ und $\alpha_1$, gleich sind, und schließen daraus:

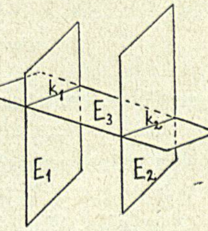



Figur *21*.

XIV. Winkel mit parallelen und gleichgerichteten Schenkeln sind gleich, auch wenn sie in verschiedenen Ebenen liegen.

Aus XIV. folgt nun, daß alle Fallinien in Fig. *20* den gleichen Neigungswinkel $\varepsilon$ haben. Da die Gesamtheit der Fallinien gewissermaßen die Ebene versinnlicht, nennt man $\varepsilon$ auch den **Neigungswinkel der Ebene** gegen die Horizontalebene. Der Neigungswinkel einer Ebene ist also der Neigungswinkel ihrer Fallinien. Bei ebenen Abhängen aus aufgeschüttetem Sand oder sonstigen losen Stoffen nennt man diesen Winkel auch wohl den **Böschungswinkel.** Er ist dann von dem aufgeschütteten Stoff abhängig und liegt zwischen 30° (Sand) und 50° (Koks).

**Streich- oder Schichtlinien.** Betrachte die Grund- und Deckfläche eines beliebigen Prismas (Fig. *21*). Wie liegen sie zueinander? Ihre Kanten entstehen durch den Schnitt beider Flächen mit den Seitenflächen des Prismas. Ergebnis:

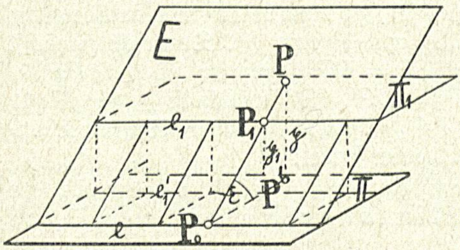



Figur *22*.

XV. Parallele Ebenen werden von einer dritten Ebene in parallelen Geraden geschnitten. (Fig. *22*).

Es sei nun E (Fig. *23*) eine beliebige schiefe Ebene, etwa ein Abhang oder eine Dachfläche. Die wagerechte Ebene $\Pi$ sei die Projektionsebene. Wir denken uns eine Ebene $\Pi_1 \parallel \Pi$, die E in $e_1$ schneidet, so ist nach XV. $e_1 \parallel e$. Eine solche Schnittlinie $e_1$ heißt in der Bergmannssprache eine *Streichlinie* der Ebene E. Sie gibt nämlich die Himmelsrichtung an, in welcher die

Ebene „streicht". Bei einem Dach gibt sie die Richtung der Ziegelreihen an. In der Erdkunde nennt man sie *Niveau-* oder *Höhenlinie*, weil alle ihre Punkte gleich hoch über dem Meeresspiegel (Meeresniveau) liegen. In der darstellenden Geometrie führt sie auch den Namen *Spurparallele* (weshalb?).



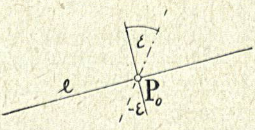
Figur 23.

Welche Lage haben die Spurparallelen zu den Fallinien sowie die Projektionen der Spurparallelen zu den Projektionen der Fallinien?

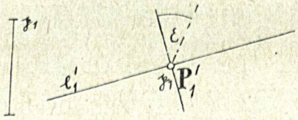
Aus Fig. 23 erkennt man ohne Schwierigkeit, daß man jede schiefe Ebene E, deren Spur innerhalb der Zeichenebene liegt, durch ihre Spur $e$ und ihren Neigungswinkel $\varepsilon$ darstellen kann, den man zweckmäßig in einem beliebigen Spurpunkte $P_0$ an die Projektion der durch $P_0$ gehenden Fallinie in die Bildebene umgelegt anträgt (Fig. 24). Für den über $\Pi$ liegenden Teil der Ebene E gilt der Winkel als positiv, für den unteren Teil als negativ. Erkläre auch die Sonderfälle $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 90^0$.

Ist die Spur $e$ nicht erreichbar, so tritt an ihre Stelle irgendeine Höhenlinie $e_1$, deren Höhenzahl $p_1$ bekannt sein muß. Der Winkel $\varepsilon$ erscheint dann in die durch $e_1$ gehende Horizontalebene umgelegt (Fig. 25). Die Ebene E hat gegen alle der Bildebene parallelen Ebenen gleiche Neigung.

Gib die wahre Lage der in Fig. 24 und 25 dargestellten Ebenen an. Wie wird man eine Ebene darstellen, die parallel $\Pi$ ist, also keine Spur besitzt? (Parallele Ebenen haben überall denselben Abstand.)



Figur 24.



Figur 25.

**Grundaufgabe 5.** *Die Neigung einer durch ihre Spur $e$ und einen Punkt $P$ bestimmten Ebene E zu finden.*

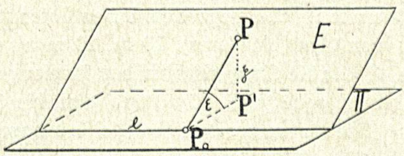
**Analysis.** Fig. 26 a. $\varepsilon$ liegt in dem rechtwinkligen $\triangle\, PP'P_0$, das man durch Drehung um $P'P_0$ leicht umlegen kann.

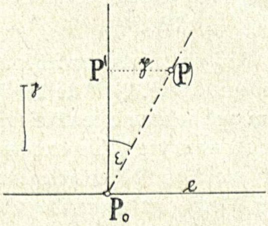
**Konstruktion.** Fig. 26 b. Fälle $P'P_0 \perp e$, errichte darauf in $P'$ die Senkrechte $P'\,(P) = p$, so ist $\sphericalangle\,(P)\,P_0P' = \varepsilon$.

**Grundaufgabe 6.** *In einer durch Spur $e$ und Neigungswinkel $\varepsilon$ bestimmten Ebene E liegt ein Punkt $P$, dessen Grundriß $P'$ gegeben ist. Ermittle seine Höhe $p$.*

**Analysis.** Die Aufgabe ist die Umkehrung der vorigen.

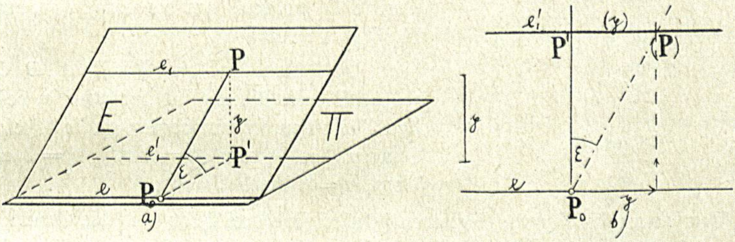
**Konstruktion.** Fig. 26 b. Fälle $P'P_0 \perp e$, trage daran in $P_0$ den Winkel $\varepsilon$ an und errichte in $P'$ auf $P'P_0$ die Senkrechte, die den Schenkel von $\varepsilon$ in $(P)$ schneidet. $P'(P) = \mathfrak{p}$.


Figur 26 a.


Figur 26 b.

**Grundaufgabe 7.** In einer durch Spur $e$ und Neigungswinkel $\varepsilon$ bestimmten Ebene E die Höhenlinie zu ziehen, welche die gegebene Höhe $\mathfrak{p}$ hat.

**Analysis.** Fig. 27 a). Es genügt, einen Punkt $P$ in E zu finden, der die Höhe $\mathfrak{p}$ hat, da die Höhenlinie $\parallel$ e ist. Nach Umlegung des Dreiecks $PP_0P'$


Figur 27.

in die Bildebene sind geometrische Örter für $(P)$: 1. die umgelegte Fallinie $P_0(P)$, 2. die Parallele zu $P_0P'$ im Abstande $\mathfrak{p}$. Bei der Umlegung fallen $P'(P)$ und $e_1'$ in eine Linie.

**Konstruktion.** Fig. 27 b). Trage $\mathfrak{p}$ von $P_0$ aus auf $e$ ab und ziehe durch den erhaltenen Endpunkt die Parallele zu dem auf $e$ senkrechten Schenkel von $\varepsilon$. Ist $(P)$ der Schnittpunkt der Parallele mit dem anderen Schenkel von $\varepsilon$, so ist die Senkrechte $e'_1$ auf $P_0P'$ der Grundriß der gesuchten Schichtlinie.

### Übungsaufgaben.

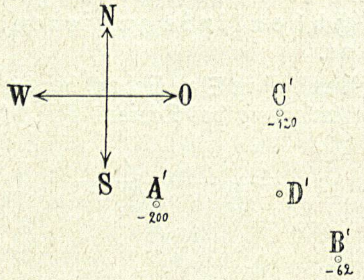
1. Auf einem ebenen Bergabhang, der in der Zeichnung durch Spur $e$ und Neigungswinkel $\alpha = 30^0$ gegeben ist, soll eine Schar von Höhenlinien in den Höhen 5 m, 10 m 15 m usw. gezeichnet werden. Maßstab 1 : 500.

2. In der Zeichnung eines ebenen Abhanges sind zwei Höhenlinien $e_1$ und $e_2$ mit der Höhendifferenz 10 m gegeben. Der Abstand ihrer Grundrisse beträgt 4 cm (Maßstab 1:500). Bestimme den Neigungswinkel des Abhanges. Wie ändert sich mit zunehmender Steilheit der Abstand der Höhenlinien? Grenzfälle?

*3. Auf einem steilen ebenen Abhang ($\varepsilon = 40^0$) geht von einem 30 m hoch gelegenen Punkte $P$ ein gerader Weg nach dem gegebenen Punkte A auf dem Fuße (der Spur $e$) des Abhanges. Konstruiere $e$ und bestimme den Neigungswinkel des Weges. Maßstab 1 : 300.

4. Auf einem ebenen Abhang sind drei Punkte $A$, $B$, $C$ gegeben mit den Koten 24 m, 56 m und 90 m. Zeichne die Höhenlinien von 0 m (die Spur), 10 m, 20 m usw. bis 100 m und bestimme den Neigungswinkel $\varepsilon$. Sollte die Spur nicht auf das Papier gehen, so ersetze man die Bildebene durch eine höher gelegene (z. B. 20 m) und somit die Spur durch die 20 m höher gelegene Höhenlinie. Die Koten der drei Punkte sind dann um diesen Betrag zu vermindern. Maßstab 1 : 1000.

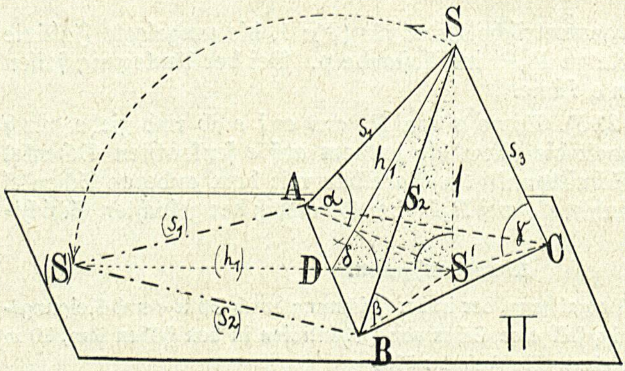
*5. Um die Lage einer ebenen Erzschicht zu bestimmen, bohrt man in der über ihr liegenden horizontalen Erdoberfläche drei vertikale Löcher $A'$, $B'$, $C'$ bis an die Schicht. Die Tiefen der Bohrlöcher seien 200 m, 62 m, 120 m (Fig. *28*). Man bestimme aus der Zeichnung: a) die Spur der Erzschicht, b) ihr „Streichen", d. h. ihre Abweichung von der Nordrichtung, c) ihr „Fallen", d. h. ihren (negativen) Neigungswinkel. d) Wie tief müßte man in einem Punkte $D'$ bohren, um die Schicht zu erreichen? Maßstab 1 : 1000.




Figur *28*.

6. Im Raume sind vier Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ gegeben. Wieviel Ebenen sind dadurch i. a. bestimmt? Was für einen Körper begrenzen sie? Zeichne die Spuren der Ebenen (a = 1 cm, b = 3 cm, c = 5 cm, d = 8 cm).

7. Von einem im Raume liegenden Fünfeck sind drei Ecken und die Grundrisse der beiden anderen gegeben. Man soll die fehlenden Höhen bestimmen. Anleitung: Bestimme zuerst die Spur der Fünfecksebene mittels der drei gegebenen Ecken und verfahre dann nach Grundaufgabe 6. S. *16*.

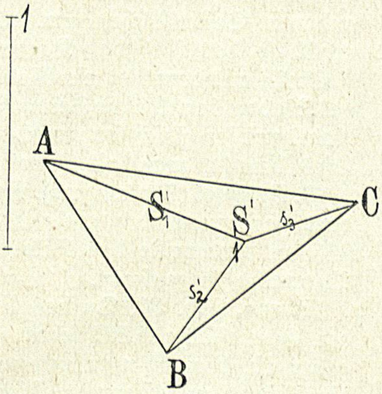



Figur *29a*.

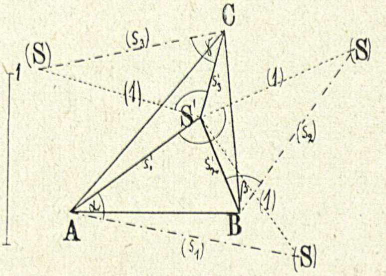
## Darstellung einfacher Körper. Körpernetze.

Wir besprechen die hier sich bietenden Aufgaben an einem ganz einfachen Beispiel, einer dreiseitigen Pyramide, die auf der Bildebene stehen möge. Wir nennen $ABC$ (Fig. *29a*) die Grundfläche, $S$ die Spitze der Pyramide. $AB$, $BC$, $CA$ heißen die Grundkanten, $SA$, $SB$, $SC$ die Seitenkanten, $SAB$,

$SBC$, $SCA$ die Seitenflächen. Das Lot $SS'$ ist die Höhe der Pyramide. Fig. 29 *b* zeigt uns die Projektion des Körpers. Die Grundfläche projiziert sich in sich selbst, $S'$ ist der Grundriß der Spitze $S$, $S'A$, $S'B$, $S'C$ sind die Projektionen der Seitenkanten. Fügen wir noch die Höhe s der Pyramide oder die Kote der Spitze hinzu, so ist das Bild der Pyramide fertig.




Figur 29 *b*.




Figur 30.

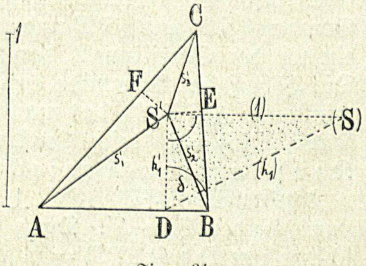
**1. Beispiel.** Bestimme aus dem vorliegenden Bilde (Fig. 30) einer dreiseitigen Pyramide:

a) die Neigungswinkel der drei Seitenkanten.

Anleitung: Um z. B. $\alpha$ zu erhalten, lege man $\triangle SAS'$ um (Grundaufgabe 3. S. 8. Als Analysisfigur für diese und die folgenden Aufgaben diene Fig. 29 *a*).

b) die Neigungswinkel der Seitenebenen.

Anleitung: Fig. 31. Um den Neigungswinkel der Ebene $SAB$ zu erhalten, zieht man die Fallinie $SD$, deren Projektion $S'D$ ist. Den Neigungswinkel $SDS' = \delta$ erhält man durch Umlegen des Dreiecks $SDS'$ (Grundaufgabe 5. S. 16).




Figur 31.

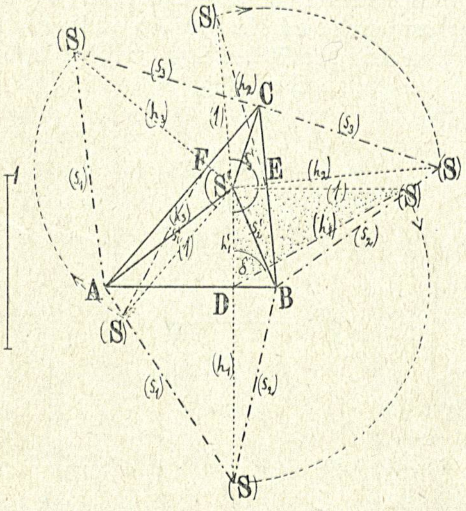
c) die wahren Längen der Seitenkanten.

Anleitung: Sie sind aus den umgelegten Dreiecken der Fig. 30 zu entnehmen. $(S)A = s_1$, $(S)B = s_2$, $(S)C = s_3$. Vgl. Grundaufgabe 2. S. 8.

d) das Netz.

Anleitung: Fig. 32. Da die wahre Gestalt der Grundfläche $ABC$ schon gegeben ist, hat man nur die wahren Gestalten der Seitenflächen zu ermitteln. Man kann sie aus ihren Seiten konstruieren, die nach c) bekannt sind. Man kann aber auch die Seitenflächen durch Drehung um ihre Spuren, die Grundkanten, in die Bildebene umlegen. Legt man z. B. die Seitenfläche $SAB$ durch Drehung um $AB$ um (s. Fig. 29 *a*), so beschreibt die Fallinie $SD$ (die Höhe $h_1$ der Seitenfläche) nach VII. S. 8 eine auf $AB$ senkrechte Kreisfläche (Kreisausschnitt) mit dem Radius $h_1$. Da auch bei der Umlegung

$(S)D \perp AB$ bleibt, so fällt $(S)$ in die Verlängerung von $S'D$, ist also leicht zu ermitteln. Die wahre Länge des Halbmessers $(S)D$ wird, wie schon unter b), durch Umlegung des $\triangle\, S'D\, S$ gefunden. $A(S)B$ ist die umgelegte Seitenfläche. Ebenso legt man die beiden anderen Seitenflächen um und erhält so das Netz des Körpers. Stelle aus dem Netz ein Modell des Körpers her. Welche Seiten des Netzes müssen gleich lang werden? Dies benutze man als P r o b e.




Figur 32.

***2. Beispiel** (Umkehrung). Nach dem gegebenen Netz einer dreiseitigen Pyramide das Bild der Pyramide zu zeichnen.

**Lösung.** Fig. 32. Da das Bild der Grundfläche $ABC$ schon gegeben ist, braucht man nur noch die Spitze $S$ zu bestimmen. Klappt man zwei der Seitenflächen, z. B. $AB(S)$ und $BC(S)$, durch Drehung um $AB$ und $BC$ in die Höhe, bis die beiden gleich langen Seiten in der Seitenkante $SB = s_2$ zusammenfallen, so durchlaufen die Projektionen der beiden Ecken $(S)$ die Geraden $(S)D$ und $(S)E$ und treffen schließlich in $S'$ zusammen. $S'$ ist also einfach der Schnittpunkt der verlängerten Dreieckshöhen $(S)D$ und $(S)E$. Die Höhe f der Pyramide ergibt sich als Kathete in dem umgelegten rechtwinkligen $\triangle\, S'D(S)$, das man aus der andern Kathete $DS'$ und der Hypotenuse $D(S) = h_1$ leicht konstruieren kann. Man nennt dieses Dreieck das K o n s t r u k t i o n s d r e i e c k des Punktes $S$.

**Konstruktion.** Fälle $(S)D \perp AB$ und $(S)E \perp BC$ und nenne den Schnittpunkt beider Lote $S'$. Dann errichte in $S'$ die Senkrechte auf $DS'$ und schlage um $D$ mit $D(S) = h_1$ als Radius den Kreis, der die Senkrechte in $(S)$ schneide. $S('S)$ ist dann die Höhe der Pyramide. Als P r o b e benutze die dritte Senkrechte (S)$F$, die durch $S'$ gehen muß.

## Übungsaufgaben.

1. Das Bild eines Würfels ist gegeben. Konstruiere das Netz.
2. Ermittle (durch Umlegung) die Länge einer Hauptdiagonale eines durch sein Bild gegebenen Würfels.
3. Zeichne die Netze der beiden Teile einer schwedischen Streichholzschachtel.
4. Das Bild und das Netz eines 4 cm langen, 6 cm breiten und 3 cm hohen Quaders zu zeichnen.
5. Eine der ägyptischen Pyramiden hat als Grundfläche ein Quadrat von 233 m Seite. Die Höhe ist 147 m. Zeichne sie im Maßstab 1 : 5000, konstruiere ihr Netz und bestimme die Neigungswinkel der Seitenkanten und Seitenflächen.

6. Eine dreiseitige Pyramide wird von lauter gleichseitigen Dreiecken begrenzt (Tetraeder oder regelmäßiges Vierflach). Zeichne sie und ihr Netz und bestimme ihre Höhe, sowie die Neigungswinkel der Seitenkanten und -flächen. Die Kantenlänge betrage 5 cm.

7. Ein Turmdach hat die Gestalt einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide. Die Trauf-(Grund-)Kanten sind 2 m lang, die Höhe ist 5 m. Zeichne das Dach im Maßstab 1 : 50 und konstruiere das Netz.

8. Eine quadratische Pyramide hat Grundkanten von 5 cm Länge. Die Seitenflächen sind gleichseitige Dreiecke. Zeichne Bild und Netz. Setze aus zwei solchen Pyramiden ein regelmäßiges Achtflach (Oktaeder) zusammen.

9. Ein Turmdach hat die Gestalt einer abgestumpften quadratischen Pyramide. Die Grundfläche hat 4 m Seitenlänge, die Deckfläche nur 1 m und ist 5 m hoch. Zeichne das Dach und fertige ein Modell an im Maßstabe 1 : 100. Bestimme auch die Neigungswinkel der Seitenkanten und -flächen. Anleitung: Die verlängerten Seitenkanten müssen durch einen Punkt (die Spitze der Pyramide) gehen.

10. Zeichne das Bild eines regelmäßigen achteckigen Turmdaches, dessen Netz gegeben ist. Der große Radius des Achtecks sei $r = 3$ m, die Seitenkante $s = 6$ m. Maßstab 1 : 100.

11. Zeichne das Bild sowie das Netz einer regelmäßigen stehenden dreiseitigen Säule. Grundkante $a = 4$ cm, Höhe $h = 5$ cm.

12. Über einer quadratischen Grundplatte von 1 m Grundkante und 20 cm Höhe erhebt sich ein Pyramidenstumpf von gleicher Grundfläche und 190 cm Höhe, dessen Seitenkanten 200 cm lang sind. Der Deckfläche ist eine quadratische Pyramide von 30 cm Höhe aufgesetzt. Zeichne das Bild dieses „Obelisken" im Maßstabe 1 : 20.

13. Eine dreiseitige Pyramide hat als Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten 3 cm und 4 cm lang sind. Die vom Scheitel des rechten Winkels ausgehende Seitenkante hat einen Neigungswinkel von 60°, ihr Grundriß halbiert den rechten Winkel, und ihre Länge beträgt 6 cm. Zeichne die Pyramide und ihr Netz.

*14. Löse dieselbe Aufgabe für ein schiefes dreiseitiges Prisma.

15. Eine quadratische Pyramide von 6 cm Grundkante und 5 cm Höhe soll durch horizontale Schnitte in fünf gleich hohe Schichten zerlegt werden.

16. Ein liegendes regelmäßiges dreiseitiges Prisma (Grundkante 5 cm, Länge 10 cm) soll gezeichnet werden. Konstruiere durch Umlegung der Grund- und Seitenflächen das Netz.

17. Ein einfaches Dach (Satteldach) hat als Giebel ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten von 3 m und 4 m. Die Grundkanten (auch Traufkanten genannt) sind 10 m lang. Zeichne das Dach im Maßstab 1 : 100 und stelle ein Modell von ihm her. Anleitung: Lege das Giebeldreieck um.

18. Zeichne und modelliere ein Haus mit dem in Aufgabe 17. beschriebenen Dach. Mauerhöhe bis zum Dach 6 m.

19. Zeichne ein Dach wie in Aufgabe 17. und versehe die beiden Dachflächen mit Höhenlinien von 0,5 m Höhenunterschied.

20. Ein Stück von 50 m Länge eines geraden Eisenbahndammes soll gezeichnet werden. Untere Dammbreite 10 m, obere 4 m, Höhe 5 m. Maßstab 1 : 200. Bestimme den Böschungswinkel der Dammböschung.

21. Zeichne auf den Böschungen des Dammes in Aufgabe 20. die Höhenlinien in 1, 2, 3, 4 m Höhe.

22. Das Erdreich, aus dem ein Dammweg aufgeworfen werden soll, hat einen Böschungswinkel von 40°. Der Weg soll 4 m breit werden und 5 m über der wagerechten

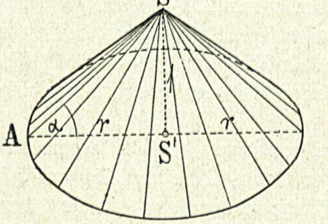
Umgebung liegen. Zeichne ein Stück des Dammes im Maßstab 1 : 100. Anleitung: Lege einen beliebigen vertikalen Querschnitt des Dammes in die Bildebene um.

23. Zeichne einen senkrechten Zylinder a) stehend, b) liegend (mit Netz).

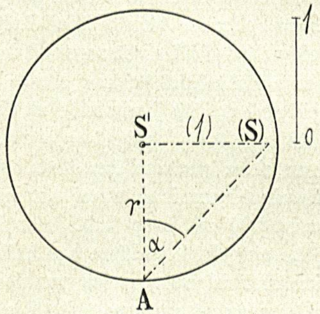
24. Zeichne einen a) senkrechten, b) schiefen Kegel.

25. Zeichne eine Kugel.

*26. Ein aus Sand oder sonstigem losem Stoff aufgeschütteter Kegel heißt ein Böschungskegel. Stelle einen solchen aus gesiebtem trockenem Sand her mittels eines Trichters oder einer Tüte, die an der Spitze ein Loch hat (nach Scheffers-Kramer, Leitfaden der darstellenden und räumlichen Geometrie, I. Teil). Die Seitenlinien dieses Kegels sind Fallinien seines Mantels und haben als Neigungswinkel den Böschungswinkel (S. *15*). Der Grundkreis heißt Böschungskreis, sein Radius $r$ Böschungsradius (Fig. *33a* und *b*). Wie wächst er mit der Höhe des Kegels?

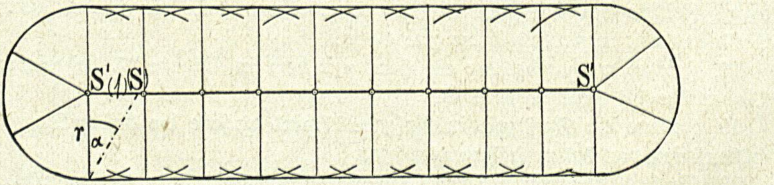



Figur 33 a.




Figur 33 b.

Zeichne Böschungskreise für 30° Böschung und die Höhen 1 cm, 2 cm, 3 cm usw. Eine Dammböschung kann man als gemeinsame Berührungsfläche an die unzähligen Böschungskegel betrachten, deren Spitzen den oberen Dammrand bilden. Versuch (Fig. *34*): Bewege die erwähnte Sandtüte, während der Sand herausrieselt, gleichmäßig in gleicher Höhe ganz langsam in gerader (oder krummer) Linie. Betrachte die Böschungen am Anfang und Ende des entstandenen Sandwalles. Zeichne, wie in Fig. *33b*, eine Anzahl von Böschungskreisen, deren Mittelpunkte die Grundrisse der Kegel-




Figur 34.

spitzen sind. Zeichne auf Grund dieser Betrachtung in Aufgabe 20—22 die Dammböschungen an den Enden der Dämme, wo der Übergang der seitlichen Dammböschungen in die Endböschungen nicht in scharfen Kanten erfolgt, sondern durch die Mäntel der zu den Endpunkten der oberen Dammränder gehörenden Böschungskegel abgerundet wird.

## Fortsetzung der darstellenden Geometrie.

### B. Die senkrechte Parallelprojektion. (Zweiter Teil.)

### Die Ermittlung der wahren Gestalt einer ebenen Figur aus ihrer Projektion.

**Vorbemerkung.** Wir betrachten einen beliebigen von lauter ebenen Flächen begrenzten Körper, z. B. das dreiseitige Prisma Fig. *21*[1]). Aus der Betrachtung der parallelen Endflächen hatten wir schon Satz XV. abgeleitet. Jetzt wollen wir einmal drei Flächen betrachten, von denen keine parallel sind, z. B. die Deckfläche $A_1B_1C_1$ und die beiden Seitenflächen $ABA_1B_1$ und $BCB_1C_1$. Welche Kanten entstehen durch diese drei Flächen? Wie viele Kanten sind es? Welchen Punkt haben die drei Flächen gemeinsam? Welche Beziehung besteht zwischen den drei Schnittkanten und diesem Punkte? Gib an, welche Flächen in den anderen Endpunkten des Prismas zusammenstoßen. Kann man hier dieselben Beobachtungen machen? Sind auch drei nicht parallele Flächen vorhanden, die in keiner Ecke zusammenstoßen? Wie verlaufen die Schnittkanten dieser Ebenen? Untersuche auch andere Körper in derselben Weise. Das Ergebnis lautet: Drei nicht parallele Ebenen haben entweder einen Punkt gemeinsam, in welchen auch ihre Schnittkanten zusammenlaufen, oder ihre Schnittkanten sind parallel. Um nun nicht hier, wie an vielen anderen Stellen, immer zwei Fälle unterscheiden zu müssen, sagen wir im zweiten Falle, die Schnittkanten treffen sich im „Unendlichen". Wir „fingieren", d. h. erdichten nämlich in der Richtung der parallelen Geraden einen und zwar nur einen (weshalb?) unendlich fernen Punkt, der natürlich kein eigentlicher Punkt sein kann, denn der Raum ist nach unserer Anschauung unendlich, d. h. ohne Ende und kann deshalb nicht in einem bestimmten Punkte aufhören. Einige Mathematiker vermeiden den Ausdruck „unendl ch ferner Punkt" und nennen ihn nur den „uneigentlichen Punkt". Praktisch sind für den Zeichner Gerade schon dann von Parallelen kaum zu unterscheiden, wenn sie nach einem etwa 50 m entfernten Punkte laufen, und werden es immer weniger sein, je weiter dieser Punkt sich entfernt. Man denke z. B. an zwei in demselben Zimmer hängende Lote, die sich im Erdmittelpunkte schneiden würden, oder an zwei Visierlinien nach der Mitte der Sonne.

Wir können nach dieser Festsetzung unser Ergebnis kurz so aussprechen:

XVI. Drei nicht parallele Ebenen schneiden sich in drei Geraden, die durch einen Punkt gehen. Fig. *35 a*), *b*), *c*) (siehe nächste Seite).

Ganz aus demselben Grunde, also um die Sätze zu vereinfachen, sagen wir in demselben Sinne von einer Geraden, die einer Ebene parallel ist,

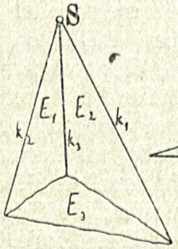
[1]) Die Hinweise auf im ersten Teil enthaltene Figuren und Sätze ließen sich nicht ganz vermeiden. Es wird erwartet, daß die Schüler den Teil noch besitzen. Diese Fußnote gilt nicht für die Ausgabe in Heften.

sie schneide sie im Unendlichen, und von zwei parallelen Ebenen, sie schneiden sich in einer unendlich fernen Geraden, ohne dabei an einen wirklichen „Schnitt“ zu denken.

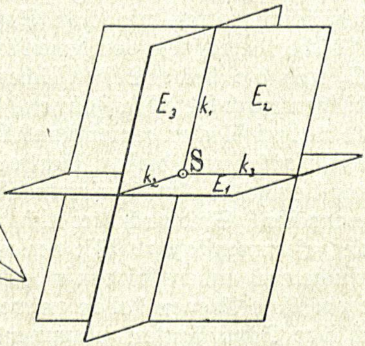
**Erster Fall.** Wenn zunächst die Ebene der Figur, deren wahre Gestalt wir ermitteln wollen, parallel $\Pi$ ist, so folgt aus Satz 3. (S. *6*) und XIV. (S. *15*), daß die gegebene Figur ihrem Bilde kongruent sein muß. Wir merken uns:

**Satz 11.** Eine ebene Figur, die der Bildebene parallel ist, bildet sich unverändert ab.

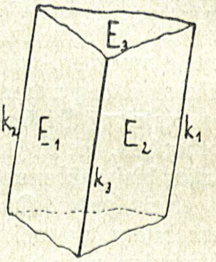
**Zweiter Fall.** Die Ebene E der gegebenen abgebildeten Figur ist nicht parallel $\Pi$. Dann ermittelt man die wahre Gestalt der Figur, indem man Ebene E durch Drehung um ihre Spur $e$ in die Bildebene umlegt, wie wir




Figur 35 *a*.

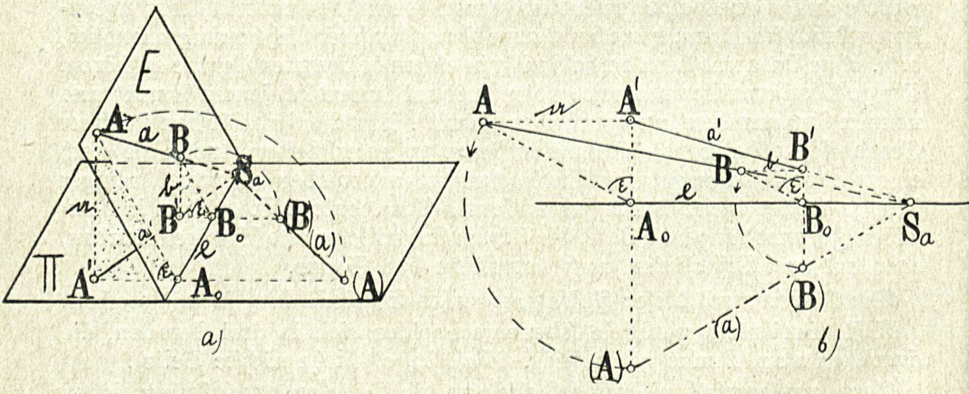



Figur 35 *b*.




Figur 35 *c*.

es schon in einfachen Fällen einige Male ausgeführt haben. (Sollte die Spur nicht erreichbar sein, so erfolgt die Umlegung um eine Höhenlinie




Figur 36.

in die zugehörige Horizontalebene, wobei nur die Höhen aller Punkte der Figur um die Höhe der Horizontalebene zu verkürzen sind.)

Dabei bleibt es gleichgültig, ob die Drehung links- oder rechtsherum geschieht. In Fig. *36* ist die zweite Richtung gewählt (weshalb?). Sei nun $A$

ein beliebiger Punkt der hier nicht gezeichneten gegebenen Figur und $AA_0$ seine Fallinie. Bei der Drehung beschreibt $A$ (vgl. S. 7) durch die Luft einen Kreisbogen mit dem Mittelpunkt $A_0$ und dem Radius $AA_0$ und fällt schließlich auf $(A)$. $A_0A$ bleibt stets $\perp e$, also ist auch in der Endlage $A_0(A) \perp e$. Ebenso verhält sich jeder andere Punkt der gegebenen Figur, z. B. $B$, der nach $(B)$ fällt. Die Verbindungslinie $AB$ $(= a)$ fällt auf $(A)(B)$. Die Ausführung der Zeichnung zeigt Fig. *36 b*). Geometrische Örter für $(A)$ und $(B)$ sind: 1. die Senkrechten $A'A_0$ und $B'B_0$, 2. In die Zeichenebene umgelegte Kreise um $A_0$ und $B_0$ mit den Hypotenusen der ebenfalls umgelegten Dreiecke $AA'A_0$ und $BB'B_0$ als Halbmesser. Man nennt die für die Bestimmung der Punkte $(A)$ und $(B)$ wichtigen Dreiecke $AA'A_0$ und $BB'B_0$ die Konstruktionsdreiecke (vgl. S. *20*) dieser Punkte.

**Bemerkung.** Ist $S_a$ die (nach Satz 9. in $e$ liegende) Spur der Geraden $a$, so geht nach Satz 5. S. *7* auch $A'B'$ durch $S_a$, ebenso aber auch $(A)(B)$, denn der Punkt $S_a$ ändert bei der Umlegung der Ebene E seine Lage nicht. Hieraus folgt: Der Schnittpunkt der Projektion einer in der Ebene E liegenden Geraden mit der umgelegten Geraden liegt auf der Spur der Ebene. Man hat daher, nachdem man einen Punkt $(A)$ der umgelegten gegebenen Figur auf die oben angegebene Weise gefunden hat, als (dritten) geometrischen Ort für die Umlegung jedes anderen Punktes $B$ auf $AS_a$ die Gerade $(A)S_a$. Man kann dies als Probe auf die Genauigkeit der Zeichnung benutzen.

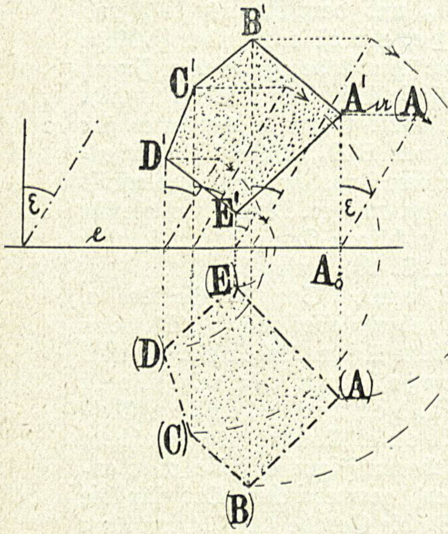
Die Geraden $A'B'$ und $(A)(B)$ stehen in einer merkwürdigen Beziehung zueinander: Die Verbindungslinien entsprechender Punkte $[A'(A), B'(B)]$ sind parallel, und der Schnittpunkt $S_a$ beider Geraden liegt auf einer festen Geraden $(e)$. Diese Beziehung gilt für alle entsprechenden Punkte und Geraden der Projektion einer in E liegenden Figur und der in Π umgelegten Figur, da $e$ unverändert bleibt. Zwei Figuren, welche diese Eigenschaft haben, heißen **affin** (verwandt), die Eigenschaft heißt **Affinität** (Verwandtschaft), die Richtung der parallelen Verbindungslinien entsprechender Punkte **Affinitätsrichtung** und die Gerade, auf welcher die entsprechenden Geraden der beiden Figuren sich treffen, **Affinitätsachse**. Die Affinitätsrichtung braucht nicht, wie hier, senkrecht zur Affinitätsachse zu sein, sondern ist i. a. beliebig.

Stelle ein bewegliches Modell nach Fig. *36 a*) her. Vgl. auch Fig. *90*.

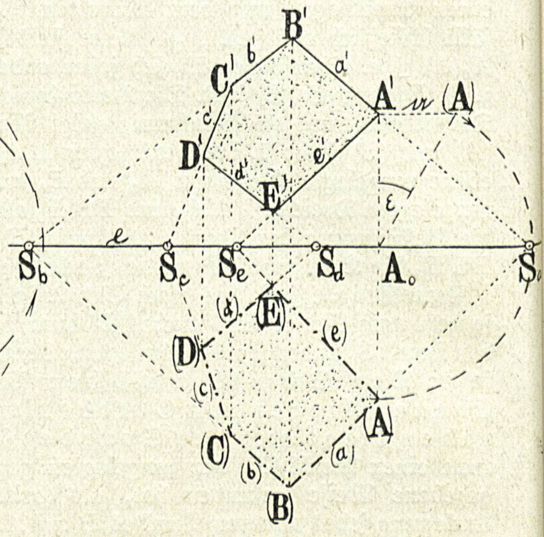
**Grundaufgabe 8.** Aus dem gegebenen Grundrisse $A'B'C'D'E'$ eines in der gegebenen Ebene E liegenden Vielecks $ABCDE$ die wahre Gestalt des Vielecks zu bestimmen.

**Erste Konstruktion.** Fig. *37*. Die Ebene E wird umgelegt, die Umlegungen der einzelnen Eckpunkte des Vielecks werden mittels ihrer Konstruktionsdreiecke konstruiert, wie soeben beschrieben wurde, und verbunden. Legt man E wie in Fig. *37* um, sodaß das Vieleck auf die entgegengesetzte Seite des Grundrisses fällt, so sieht man es von der Unterseite. Will man seine Oberseite haben, so muß man die Ebene in entgegengesetzter Richtung herabschlagen, wobei aber meistens die umgelegte Figur teilweise auf den Grundriß fallen wird.

**Zweite Konstruktion.** Fig. *38*. Mittels der Affinität kann die Aufgabe leicht in folgender Weise gelöst werden. Man fällt wieder von $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$ die




Figur 37.




Figur 38.

Senkrechten auf $e$, zeichnet von einem Punkte, z. B. $A$, die Umlegung $(A)$ wie bei der ersten Konstruktion und findet nun die übrigen Punkte durch die Affinität. Zum Beispiel liegt:

$(B)$ auf der Senkrechten von $B'$ auf $e$ und auf $S_a\,(A)$
$(C)$ „ „ „ „ $C'$ „ „ $S_b\,(B)$
$(D)$ „ „ „ „ $D'$ „ „ $S_c\,(C)$
$(E)$ „ „ „ „ $E'$ „ „ $S_d\,(D)$.

Zur Prüfung der Genauigkeit oder bei ungünstiger Lage des Schnittpunktes $S$ wird man bei einigen Punkten auch die erste Konstruktion anwenden.

### Übungsaufgaben.

1. Führe die Umlegung in der achten Grundaufgabe in entgegengesetzter Drehungsrichtung aus.

2. Bestimme die wahre Größe eines Winkels im Raum, wenn der Scheitel und die Schenkelspuren gegeben sind.

3. Zeichne die wahre Gestalt eines gegebenen im Raume liegenden Dreiecks. Anleitung: Ermittle zuerst $e$ und $\varepsilon$.

4. Ermittle den wahren Flächeninhalt eines im Raume gegebenen a) Dreiecks, b) Parallelogrammes, c) Trapezes.

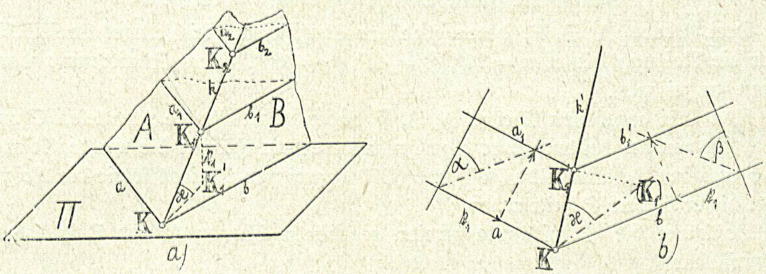
5. Drei Eckpunkte eines Vierecks sind durch ihre Grundrisse und Koten gegeben. Von dem vierten kennt man nur den Grundriß. Man soll die wahre Gestalt des Vierecks bestimmen. (Grundaufgabe 6. S. *16*.)

## Zwei Ebenen.

**Grundaufgabe 9.** Die Schnittkante zweier durch ihre Spuren und Neigungswinkel bestimmten Ebenen (Dachflächen) zu finden.

Erster Fall. Die Spuren der gegebenen Ebenen sind nicht parallel.

**Analysis.** Die Schnittgerade zweier Ebenen (A und B Fig. *39 a*) ist durch zwei ihrer Punkte bestimmt. Ein solcher beiden Ebenen gemeinsamer



Figur 39.

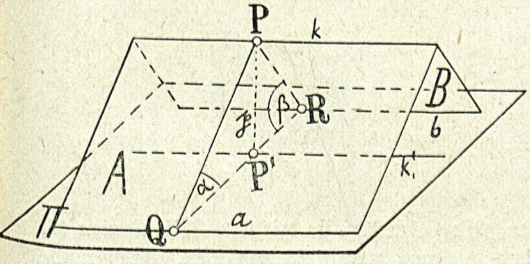
Punkt ist der in $\Pi$ gelegene Schnittpunkt $K$ der beiden Ebenenspuren $a$ und $b$ (nach XVI. S. *24*). Um einen zweiten Punkt zu erhalten, braucht man nur eine Ebene $\Pi_1 \| \Pi$ durch die beiden Ebenen zu legen, wodurch man (s. S. *15*) die beiden in gleicher Höhe $\mathfrak{k}_1$ liegenden Höhenlinien $a_1$ und $b_1$ erhält, deren Schnittpunkt $K_1$ nach XVI. ein zweiter Punkt der Schnittkante $k$ sein muß. $KK_1$ ist die Schnittkante. Ihren Neigungswinkel $\varkappa$ findet man nach der Grundaufgabe 3. aus dem umgelegten Konstruktionsdreieck $KK_1'K_1$. Zur Probe mag man noch einen dritten Punkt $K_2$ bestimmen.

**Konstruktion** (Fig. *39 b*) nach Grundaufgabe 7. S. *17*.

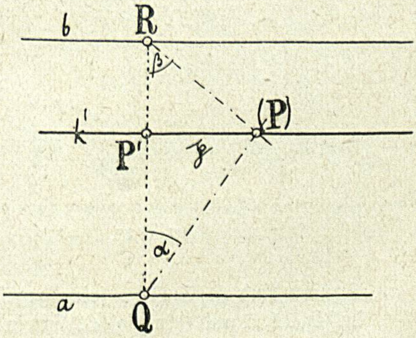
**Bemerkung.** Man kann die Schnittkante auch mittels zweier Schichtlinienpaare in verschiedenen Höhen finden (Fig. *39 a*).

In welchem Falle muß man es so machen? Welche Lage hat $k'$ zu $a$ und $b$, wenn $\beta = \alpha$?

Zweiter Fall. Die gegebenen Spuren sind parallel (Fig. *40 a* und *b*).



Figur 40 a.



Figur 40 b.

**Analysis.** Die Schnittkante $k$ der beiden Ebenen (Fig. *40 a*) ist in diesem Falle nach XVI parallel $a$ und $b$, also auch parallel $\Pi$ (weshalb?). Ein durch $P$ senkrecht zu $a$ (und $b$) gelegter Vertikalschnitt $PQR$ enthält die beiden Fallinien $PQ$ und $PR$, also auch nach S. *15* die Neigungswinkel $\alpha$ und $\beta$ der beiden Ebenen. Seine Umlegung in die Bildebene ist somit leicht zu zeichnen. Die Projektion $k'$ ist nach XVI. parallel $a$ (und $b$).

Dieser Fall liegt bei einem einfachen Satteldach vor. $k$ ist der „Dachfirst".

### Übungsaufgaben aus verschiedenen Gebieten.

1. Drei Ebenen, A, B, Γ, deren gegebene Spuren ein gleichseitiges Dreieck bilden, haben die Neigungswinkel $\alpha = 30^0$, $\beta = 45^0$, $\gamma = 60^0$. Den Schnittpunkt der drei Ebenen zu zeichnen.

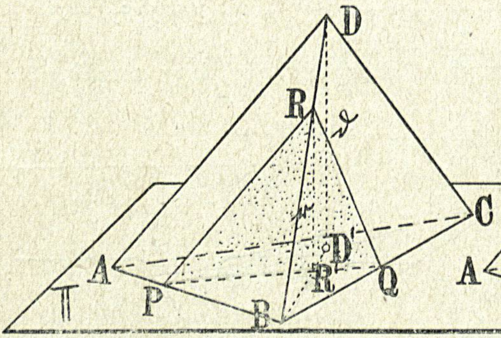
2. Von drei gegebenen Ebenen A, B, Γ haben A und B die parallelen Spuren $a$ und $b$, die von der dritten Spur $c$ geschnitten werden. Zeichne die wahre Gestalt des von $c$ und den Schnittkanten (AΓ) und (BΓ) begrenzten Dreiecks sowie die Neigungswinkel dieser beiden Schnittkanten.

3. Bestimme die Schnittkante zweier gegebenen Ebenen A und B in folgenden Sonderfällen:

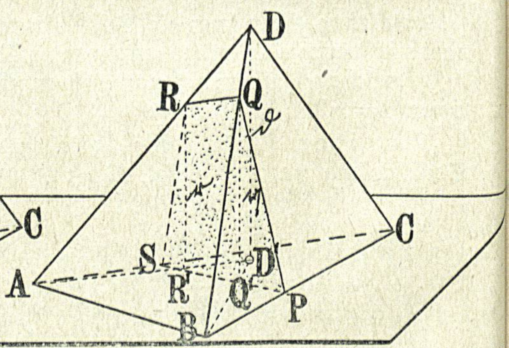
   a) A $\parallel$ Π, B schief,
   b) A $\perp$ Π, B schief,
   c) A $\perp$ Π, B $\perp$ Π.

4. Zerlege die folgenden, 6—10 cm hohen Körper durch ebene Schnitte parallel zur Bildebene in 1 cm dicke Schichten: a) dreiseitiges schiefes Prisma (stehend); b) dreiseitiges liegendes Prisma; c) regelmäßige achtseitige Pyramide; d) senkrechter Halbzylinder auf der Schnittfläche liegend; e) senkrechter Kegel; f) schiefer Kegel; g) Halbkugel, auf der Schnittfläche liegend.

5. Zeichne Vertikalschnitte durch einfache Körper und bestimme die Gestalt der Schnittfläche durch Umlegung. Anleitung: Die Grundrisse der Schnitte, die zugleich ihre




Figur *41.*




Figur *42.*

Spuren sind (s. S. *13*), seien gegeben. Die Schnittpunkte mit den Seitenkanten ($R$ in Fig. *41*, $R$ und $Q$ in Fig. *42*) sind in der Zeichnung unmittelbar gegeben. Ihre Grundrisse sind die Schnittpunkte der Grundrisse der Seitenkanten mit dem Grundriß der

Schnittebene. Ihre Koten ermittelt man durch Umlegung der projizierenden Ebenen (z. B. *DBD'*) der Seitenkanten. Schließlich legt man den ganzen Vertikalschnitt um.

6[1]. Zeichne einen mit 10° Neigung ansteigenden geraden Dammweg von 4 m Breite, der bis zu einer Höhe von 6 m ansteigt, an beiden Seiten Böschungen von 45° Steigung hat und oben in einen horizontalen Dammweg von derselben Breite und Streichrichtung übergeht. Maßstab 1 : 200. Anleitung: Die Spur und die übrigen Höhenlinien eines geneigten Weges sind senkrecht zu den Wegrändern.

7. Auf einen wagerechten Damm von 5 m Höhe soll ein Weg von 4 m Breite und 15° Steigung hinaufgeführt werden, dessen Richtung zur Dammrichtung senkrecht steht. Der Böschungswinkel betrage für alle Böschungen 45°. Maßstab 1 : 200. Anleitung: Lösung nach Grundaufgabe 9. Beachte die entstehenden einspringenden sogenannten Hohl- oder Kehlkanten.

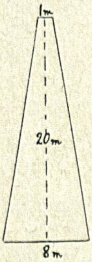
*8. Löse Aufgabe 7. für den Fall, daß die Richtung des Zugangsweges mit der Richtung des Dammes einen Winkel von 30° bildet.

9. Zwei Eisenbahndämme von kongruenten Querschnitten kreuzen sich unter einem gegebenen Winkel. Zeichne die Kreuzungsstelle nach Grundaufgabe 9. Böschungswinkel 30°.

*10. Konstruiere wie in Aufgabe 9. die Kreuzungsstelle zweier Eisenbahndämme, von denen der eine eine kreisförmige Kurve bildet. Anleitung: Um hinreichend viele Punkte der Durchdringungslinien der beiderseitigen Böschungen an der Kreuzungsstelle zu erhalten, gebraucht man eine Anzahl von Höhenlinien der Böschungen.

*11. Führe die Konstruktion der Aufgabe 10. aus, wenn beide Dämme kreisförmige Kurven machen.

12. Es soll das Bild einer Talsperre gezeichnet werden. Die Sperrmauer habe den in Fig. *43* abgebildeten Querschnitt, während die durch sie verbundenen ebenen Bergabhänge Böschungswinkel von 25° und 30° besitzen. Die Talsohle sei 20 m breit. Maßstab 1 : 500.




Figur *43*.

Bei den folgenden Dachzeichnungen nimm als Bildebene nicht den Erdboden, sondern die durch die unteren Dachkanten (die „Traufkanten") gelegte Horizontalebene, so daß diese die Spuren der Dachflächen werden. Die obersten, meistens horizontalen Dachkanten bilden den „First" des Daches, die übrigen sollen als „Grate" bezeichnet werden oder als „Hohl- (Kehl-)Kanten" (Unterschied?). Die wahren Gestalten der Dachflächen sind durch Umlegen zu ermitteln. Fertige auch einige Dachmodelle an. Maßstab 1 : 100.

13. Zeichne auf einen Turm von kreisförmigem ($r = 2$ m) Grundriß ein Kegeldach. Neigungswinkel der Seitenlinien $\alpha = 60°$.

14. Auf ein Haus von rechteckigem Grundriß soll ein Pultdach gesetzt werden. (Ein Pultdach hat nur eine Dachfläche, die von einer Mauer bis an die gegenüberliegende reicht (Fig. *44 I*). Neigungswinkel $\alpha = 60°$.

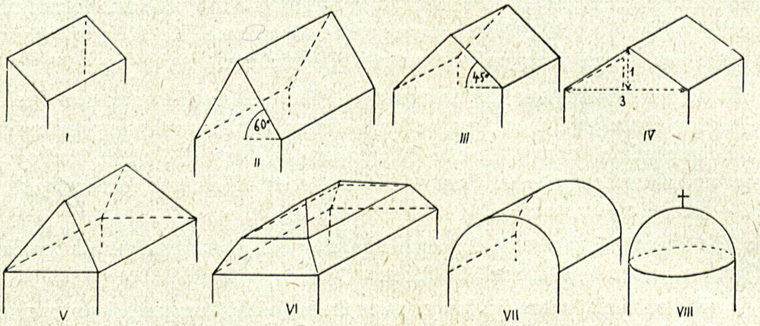
---

[1]) Bei Übungen 6.—8. beachte Übung 26. Seite *22*.

15. Auf ein Haus von rechteckigem Grundriß soll ein a) altdeutsches, b) neudeutsches, c) italienisches Satteldach gesetzt werden. (Siehe Fig. *44 II, III, IV.*)

16. Zeichne auf rechteckigem Grundriß:

a) ein holländisches Dach (Walmdach). Neigungswinkel $\alpha = 60^0$ (Fig. *44 V*);

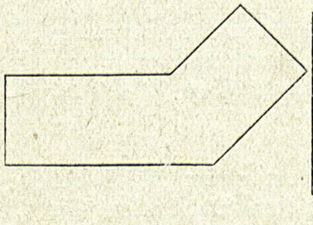



Figur 44.

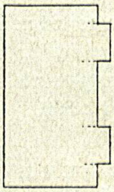
b) ein Mansardendach. Neigungswinkel der unteren Dachflächen $75^0$, der oberen $30^0$ (Fig. *44 VI*);

c) ein Tonnendach (halbzylindrisch) mit Höhenlinien von 1 m Höhenunterschied (Fig. *44 VII*).

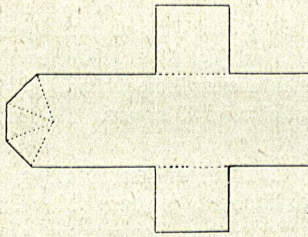
17. Zeichne ein Kuppeldach mit Höhenlinien wie in Übung 4. (Fig. *44 VIII*).



Figur 45a.



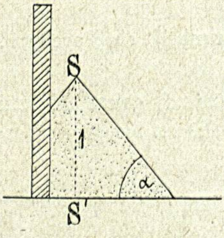
Figur 45b.



Figur 45c.

18. Zeichne Dächer von den in Fig. *45* abgebildeten Grundrissen.

19. An einer Mauer ist ein kegelförmiger Sandhaufen aufgeschüttet (Fig. *46*), dessen Achse von der Mauer 25 cm entfernt ist, während der Halbmesser des Grundkreises 1 m beträgt. Der Böschungswinkel (Neigungswinkel der Seitenlinien des Kegels) sei $\alpha = 30^0$. Bestimme die Gestalt der vom Sande verdeckten Mauerfläche. Anleitung: Zeichne Höhenlinien mit 10 cm Höhenunterschied und lege die gesuchte Fläche um. Maßstab 1 : 20.



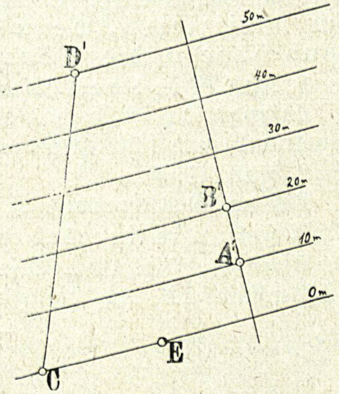

Figur 46.

20. Zwei gleiche Sandkegel sind nebeneinander aufgeschüttet, sodaß sie sich (scheinbar) durchdringen. Ihre Achsen sind 60 cm voneinander entfernt, ihre Halbmesser sind ebenfalls 60 cm. Der Böschungswinkel ist $30^0$. Bestimme die

Gestalt der beiden Kegelflächen gemeinschaftlichen Linie (der sogenannten Durchdringungskurve). Maßstab 1 : 10.

21. In einen ebenen Bergabhang (Böschungswinkel $\alpha = 60^0$) mündet senkrecht zur Spur des Abhanges ein Tunnel, dessen Wände senkrecht sind, und dessen Decke halbzylindrisch gewölbt ist. Zeichne den Tunneleingang.

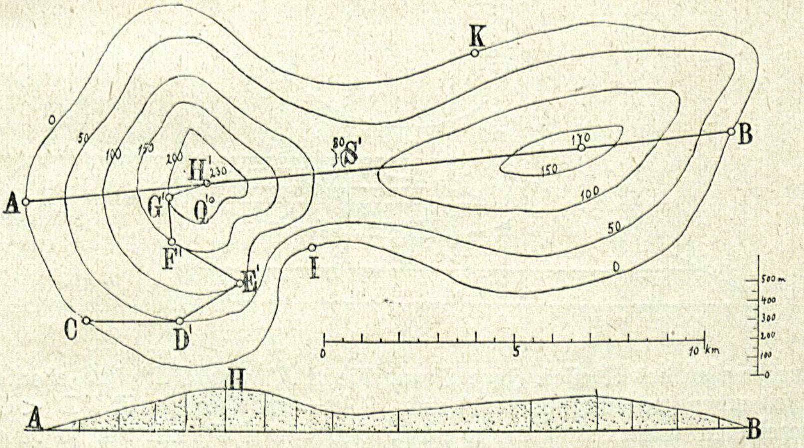
22. Es sei auf einer Karte die Zeichnung eines ebenen Bergabhanges mit Höhenlinien von 10 zu 10 m Höhe gegeben. (Fig. *47.*) Der Maßstab der Karte sei 1 : 1000. Bestimme: a) die Steigung des Hanges aus dem Abstande $A'B'$ der Projektionen zweier Höhenlinien; b) die Steigung eines auf dem Abhange gelegenen geraden Weges $CD$; c) wie ein Weg gelegt werden muß, der von $E$ aus mit einer Steigung von $5^0$ hinaufgeht.




Figur *47.*

23. Die untenstehende Zeichnung *48.* stellt einen Berg auf einer Landkarte im Maßstab 1 : 100 000 (1 cm ∼ 1 km) durch Höhenlinien von 50 m Höhenunterschied dar. a) Wieviel Gipfel sind vorhanden? Wo ist ein Sattel (Paß)? Wo eine Schlucht? An welchen Stellen ist der Abhang am steilsten? b) Zeichne einen Vertikalschnitt (Profil) durch die beiden Gipfel mit fünffacher Übertreibung der Berghöhen. (Anleitung: Zeichne die Strecke $AB$ mit sämtlichen Schnittpunkten der Höhenlinienrisse und errichte in diesen die mit 5 multiplizierten Höhen.)

c) Zeichne auch die Profile zweier Vertikalschnitte senkrecht $AB$ durch die Gipfel.




Figur *48.*

d) Von $C$ führt ein Fußpfad $CDEFG$ im Zickzack auf den Gipfel. Wie groß sind (durchschnittlich) die Steigungen der einzelnen Wegstrecken? Zeichne das Profil des Weges.

(Anleitung: Trage die einzelnen Strecken $CD'$, $D'E'$, ... nacheinander auf einer Geraden ab, errichte in den Teilpunkten die zugehörigen Höhen (etwa auch in fünffacher Übertreibung) und verbinde die aufeinanderfolgenden Punkte.

e) Von $J$ soll über den Sattel $S$ nach $K$ ein möglichst kurzer bequemer Fahrweg angelegt werden, dessen Steigung an keiner Stelle mehr als $2^0$ beträgt.

## Darstellung des Kreises.

**Grundaufgabe 10.** Einen gegebenen Kreis vom Radius $r$ zu projizieren, wenn der Mittelpunkt $M$ (durch Grundriß und Höhe) und die Spur $e$ der Kreisebene E gegeben sind.

**1. Fall.** Die Kreisebene E $\perp$ П.

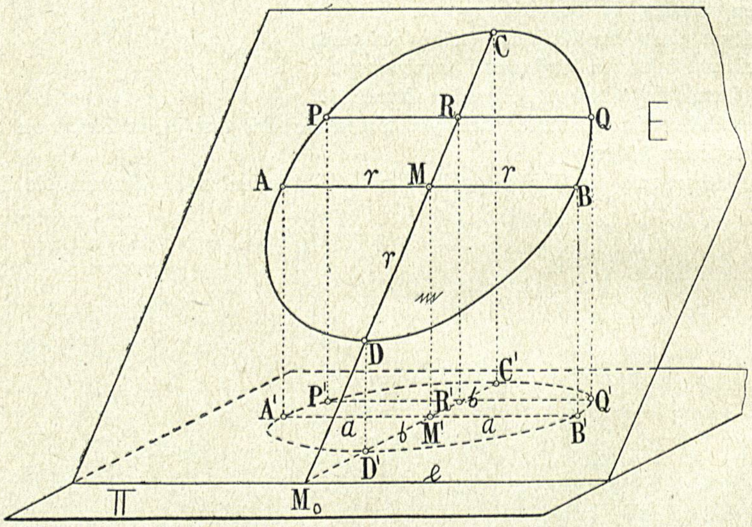
**Lösung.** Das Bild des Kreises ist eine Strecke von der Länge $2r$ (warum?) und fällt in die Spur.

**2. Fall.** E $\parallel$ П.

**Lösung.** Das Kreisbild ist dem gegebenen Kreise kongruent. (Satz 11).

**3. Fall.** Die Kreisebene ist gegen П geneigt.

**Analysis.** Fig. 49 *a*. Die durch den Kreismittelpunkt $M$ gezogene Höhenlinie $AB$ und die Fallinie $CD$ sind zwei aufeinander senkrechte

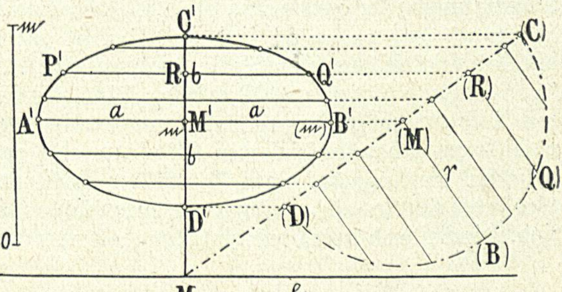



Figur 49 *a*.

Durchmesser des Kreises. Ihre Grundrisse $A'B'$ und $C'D'$ sind ebenfalls aufeinander senkrecht (warum?) und $A'B' = 2r$. Dagegen ist $C'D' < CD$. Bezeichnen wir $A'B' = 2r$ mit $2a$, $C'D' = 2M'C'$ mit $2b$, so ist also $2b < 2a$ oder $b < a$. Die Projektion des Kreises ist offenbar eine geschlossene Kurve, die durch $A'$, $B'$, $C'$ und $D'$ geht. Um weitere Punkte zu erhalten, ziehen wir eine beliebige Sehne $PQ \parallel AB$, so ist $PQ$ ebenfalls eine Höhenlinie, und ihr Riß $P'Q'$ ist parallel $A'B'$ und gleich $PQ$ (weshalb?).

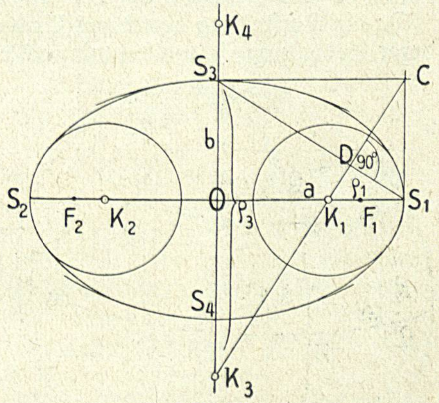
Ist $R$ der (auf $CD$ liegende) Halbierungspunkt von $PQ$, so halbiert $R'$ auch $P'Q'$. Legt man das Konstruktionsdreieck $M_0M'M$ in die Ebene II um, so kann man alle Punkte leicht ermitteln.

**Konstruktion.** Fälle $M'M_0 \perp e$ und ziehe $M'(M) \parallel e$ und $= m$, so ist $M'M_0(M)$ das umgelegte Konstruktionsdreieck des Mittelpunktes. Trage von $(M)$ aus auf $(M)\,M_0$ beiderseits $(M)(C) = (M)(D) = r$ ab und bestimme durch Senkrechte von $(C)$ und $(D)$ auf $M'M_0$ die Punkte $C'$ und $D'$, sowie durch Abtragen von $a$ $(= r)$ auf $MM'$ die Punkte $A'$ und $B'$. Weitere Punkte $P'$ und $Q'$ des Kreisbildes erhältst du am einfachsten, wenn du auch den Halbkreis $CBD$ durch Drehung um $(C)$ $(D)$ in die Grundebene umlegst, auf $(C)$ $(D)$ beliebige Punkte $(R)$ annimmst, von ihnen die Senkrechten auf $C'D'$ fällst, und von den Fußpunkten $R'$[1]) nach beiden Seiten die zugehörigen Kreis-Halbsehnen $(R)$ $(Q)$ abträgst. Die Endpunkte $P'$ und $Q'$ sind Punkte des Kreisbildes.




Figur 49 b.

**Bemerkung.** Die gefundene Kreisprojektion wird eine *Ellipse* genannt. $M'$ heißt ihr *Mittelpunkt*, der (größte) Durchmesser $A'B' = 2a$ die *Hauptachse*, der (kleinste) Durchmesser $C'D' = 2b$ die *Nebenachse*. Die Endpunkte $A'$ und $B'$ der Hauptachse heißen die *Hauptscheitel*, die Endpunkte $C'$ und $D'$ der Nebenachse die *Nebenscheitel*. Beide Achsen sind Symmetrieachsen der Ellipse (weshalb?). Da das Zeichnen einer Ellipse nur aus einer Anzahl ihrer Punkte eine sehr sichere Hand erfordert, benutzt man dazu ein Kurvenlineal. Aber auch die Anwendung eines solchen erfordert Übung. Mechanische Werkzeuge, die sogenannten „Ellipsenzirkel", sind entweder teuer oder unvollkommen. Am besten gelingt die Zeichnung mittels eines gewöhnlichen Zirkels: Es läßt sich nämlich für jeden Punkt der Ellipse (allgemein einer Kurve) ein Kreis angeben, der sich zwar nicht mathematisch genau, aber




Figur 50.

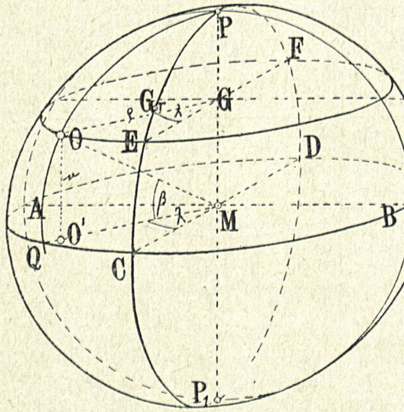
1) In Fig. 49 b steht $R$ statt $R'$.

doch praktisch mit genügender Genauigkeit in der Nähe des Punktes an sie anschmiegt. Er heißt der Krümmungskreis, sein Mittelpunkt der Krümmungsmittelpunkt. (Näheres darüber siehe R.=Z. *A* IV: Anwendungen der Differentialrechnung.) Für die Zeichnung benutze man die Krümmungskreise in den Scheiteln der Ellipse. Die Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte $K_1$, $K_2$, $K_3$, $K_4$ sowie die Längen der Radien $\rho_1$ $(= \rho_2)$ und $\rho_3$ $(= \rho_4)$ sind aus Fig. *50* zu ersehen, aus der man auch die Genauigkeit der Anschmiegung erkennt. In dieser Figur sind die Scheitel $S_1$, $S_2$, $S_3$ und $S_4$ genannt. Die Bogenstücke, die sich nicht mehr genau genug mit Krümmungskreisen decken, können mit dem Kurvenlineal unter Berücksichtigung der konstruierten Ellipsenpunkte gezeichnet werden. Löse auf diese Art die Aufgabe, einer Anzahl von Rechtecken verschiedener Form und Größe die Ellipsen einzubeschreiben, deren Achsen die Mittellinien der Rechtecke sind. Die Seiten des Rechtecks sind Tangenten der Ellipse in den Scheitelpunkten.

## *Darstellung der Kugel.

Läßt man die Sonnenstrahlen senkrecht auf einen ebenen Schirm fallen und fängt auf diesem den Schatten eines Gummiballes auf, so bemerkt man, daß der Schatten stets kreisförmig ist und den Durchmesser des Balles hat. Die senkrechte Projektion einer Kugel ist ein Kreis vom Durchmesser der Kugel. Man beobachte auch den Ballschatten, wenn die Sonnenstrahlen mehr oder weniger schief auf den Schirm fallen. Man erhält dann eine schiefe Parallelprojektion der Kugel.

Da die Darstellung der Kugel für die Erd= und Himmelskunde von besonderer Bedeutung ist, wollen wir uns etwas näher mit ihr beschäftigen. Aus der Stereometrie gebrauchen wir den leicht zu beweisenden Satz, daß jeder ebene Schnitt durch eine Kugel ein Kreis ist. Insbesondere ist jeder Schnitt durch den Kugelmittelpunkt ein Großkreis, dessen Radius gleich dem Kugelradius ist. Großkreise sind z. B. auf der Erdkugel der Äquator und die Meridiane. Der größeren Anschaulichkeit wegen betrachten wir zunächst in Fig. *51* eine schiefe Parallelprojektion der Kugel. Um einen richtigen Eindruck zu erhalten, müssen wir das Bild mit gestrecktem Arm vertikal gerade vor unser rechtes Auge bringen (das linke schließen!) und dann parallel sich selbst soweit nach links unten verschieben, bis es den möglichst naturgetreuen Eindruck einer Kugel erweckt. Es soll die Erdkugel vorstellen. $PP_1$ ist die Erdachse, $M$ der Mittelpunkt, $ABCD$ der Äquator, $PAP_1BP$



Figur 51.

der zur Zeichenebene parallele, $PCP_1DP$ der zu ihr senkrechte Meridian. Der Umriß der Kugel erscheint (s. d. obigen Versuch) als Ellipse. Um die Lage eines Punktes auf der Erdoberfläche festzulegen, benutzt man ähnlich wie in der Ebene ein Koordinatensystem. Da es aber auf der Kugel keine geraden Koordinatenachsen gibt, benutzt man statt ihrer zwei aufeinander senkrechte feste Kreise, statt der X-Achse den Äquator und statt der Y-Achse den Meridian von Greenwich (Gr.), den man auch den Nullmeridian nennt. Die Kugel sei so gedreht, daß $PCP_1DP$ der Nullmeridian ist. Es sei nun $O$ ein beliebiger Punkt der Erdoberfläche, etwa westlich von Greenwich, so lege man durch ihn den Meridianbogen $POQ$ und den Parallelkreis $OEF$ (Mittelpunkt $G$). Man nennt dann, wie in der Erdkunde gelehrt wird, den Bogen $OE$, gemessen durch seinen Zentriwinkel $OGE = \lambda$, die geographische Länge und den Bogen $OQ$, gemessen durch den Zentriwinkel $OMQ = \beta$, die geographische Breite des Punktes $O$. Die Länge kann auch auf dem Äquator durch den Bogen $CQ$ gemessen werden, denn die Winkel $CMQ$ und $EGO$ sind nach XII. gleich. Länge $CQ$ und Breite $QO$ sind nun die Koordinaten des Punktes $O$. Jeder Punkt der Erdoberfläche hat eine bestimmte Länge und Breite, und umgekehrt entspricht einer gegebenen Länge und Breite jedesmal ein bestimmter Punkt. Alle Punkte auf demselben Parallelkreis haben gleiche Breite und alle Punkte desselben Meridians gleiche Länge. Die Länge wird von $C$ ($0^0$) östlich und westlich bis $D$ ($180^0$) gemessen; die Breite nördlich oder südlich von $C$ ($0^0$) bis $P$ oder $P_1$ ($90^0$).

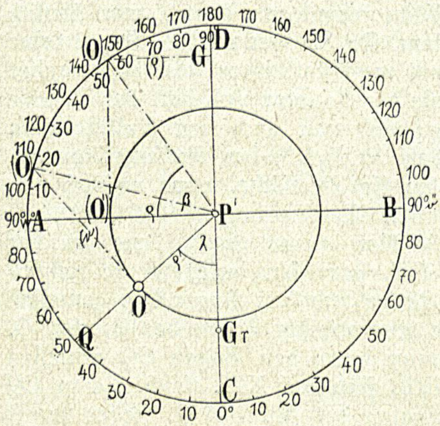
Wir denken uns nun die nördliche Halbkugel auf die Äquatorebene senkrecht projiziert. Der Äquator bildet dann den Umriß der Kugel, der Nordpol projiziert sich in den Mittelpunkt, die Meridiane werden Radien, da ihre projizierenden Ebenen auf der Bildebene senkrecht stehen, und die Parallelkreise bilden sich in natürlicher Größe als konzentrische Kreise ab, da ihre Ebenen der Bildebene parallel sind.

Projizieren wir dagegen etwa die vordere Halbkugel auf die Meridianebene $APBP_1$, so wird dieser Meridian zum Umriß, die Erdachse zum senkrechten, der Äquator zum wagerechten Durchmesser. Die Parallelkreise projizieren sich als wagerechte Sehnen, der vorderste Meridian als senkrechte Durchmesser, die übrigen als Ellipsen, deren große Achsen gleich der Erdachse sind, während die kleinen durch ihre geographischen Längen bestimmt sind. Es sei schon hier erwähnt, daß man eine Projektion auf eine vertikale Ebene als Aufriß bezeichnet.

Man nennt solche Abbildungen der Erdhalbkugeln orthogonale Projektionen. Sie zeigen die Erde, wie sie aus großer Entfernung, etwa vom Monde aus erscheinen würde. Angewandt wird die orthogonale Projektion besonders auf den Mond, weniger auf die Erde (wegen der starken Verzerrung am Rande).

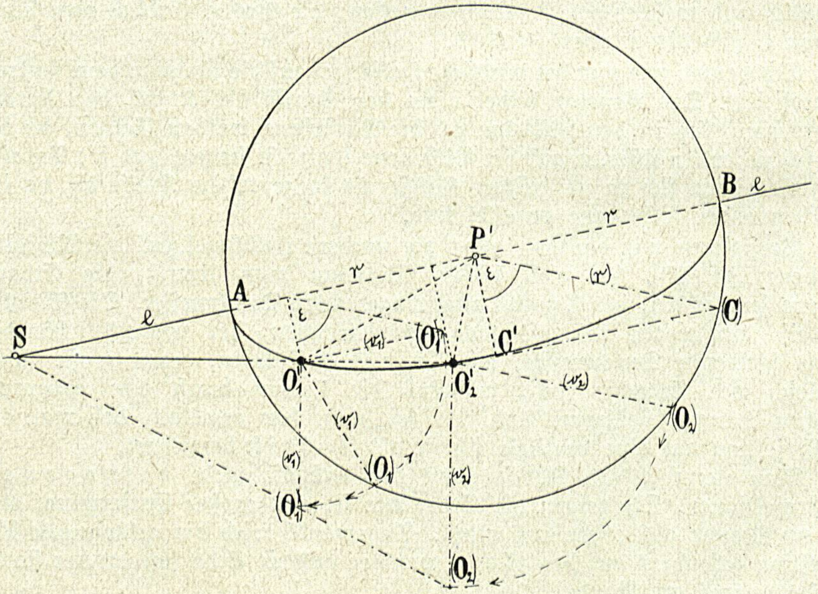
**Beispiel 1.** Man soll die nördliche Erdhälfte auf die Äquatorebene projizieren und die wichtigsten Hauptstädte einzeichnen, deren auf Grade abgerundeten Längen und Breiten einem Atlas zu entnehmen sind.

**Lösung.** Es sei $O$ (Fig. 52) ein durch Länge ($\lambda$) und Breite ($\beta$) gegebener Ort. Durch Antragen von $\lambda$ an den Nullmeridian $P'C$ erhält man ohne weiteres den Meridian $P'Q$ von $O$ als ersten geometrischen Ort für $O'$. Der zweite geometrische Ort ist der Grundriß des Parallelkreises in der Breite $\beta$. Seinen Radius $\rho$ erhält man entweder aus der Umlegung der projizierenden Ebene $QOP$ oder, wenn mehrere Punkte eingezeichnet werden sollen, besser aus der Umlegung der halben Meridianebene $APB$ in die Bildebene, wo sie sich mit dem halben Äquator $ADB$ deckt. Trägt man $\beta$ an $P'A$ in $P'$ an, so ist $(O)\,G = \rho$ der Radius des Parallelkreises in der Breite $\beta$. Der Grundriß des Parallelkreises ist der Kreis um $P'$ mit $P'\,(O') = \rho$ als Radius.



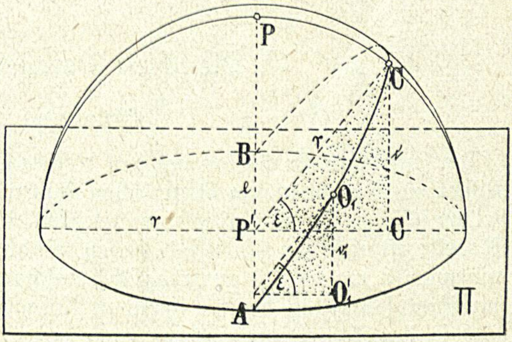
Figur 52.

**Beispiel 2.** In der orthogonalen Projektion einer Halbkugel auf ihre Grundebene sollen zwei Punkte $O_1$ und $O_2$, deren Grundrisse $O_1'$ und $O_2'$ gegeben sind, durch einen Großkreisbogen verbunden werden. (Fig. 53.)



Figur 53.

**Lösung.** Zunächst bestimmen wir die Koten $o_1$ und $o_2$ der gegebenen Punkte durch Umlegen der Dreiecke $P'O_1'O_1$ und $P'O_2'O_2$, wobei $O_1$ und $O_2$ wegen der Gleichheit aller Großkreise in den Grundkreis fallen müssen (vgl. auch Fig. *52*). Dann können wir nach Grundaufgabe 4. (S. *14*) die durch $P'$ (weshalb?) gehende Spur $e$ der Ebene E des gesuchten Großkreises ziehen, nachdem wir vorher nach Grundaufgabe 3. (S. *8*) die Spur $S$ der in E liegenden Geraden $O_1O_2$ ermittelt haben. Der Grundriß des (halben) Großkreises (s. S. *33*) ist eine (halbe) Ellipse, deren große Achse $AB$ unmittelbar gegeben ist. Die kleine Halbachse $P'C'$ (Fig. *54*) kann durch Umlegung des Konstruktionsdreiecks $P'C'C$ des höchsten Punktes $C$ ermittelt werden, in welchem der Kugelradius $r$ und der Neigungswinkel $\varepsilon$ (aus dem Konstruktionsdreieck von $O_1$ oder $O_2$) bekannt sind. Aus den Achsen wird dann die Halbellipse unter Benutzung der Krümmungskreise (S. *33*) konstruiert.




Figur *54*.

## Übungsaufgaben.

1. Projiziere im Maßstab 1 : 100 000 000 die nördliche Halbkugel auf die Äquatorebene und zeichne das Gradnetz für die Zehnergrade. Erdradius 6370 km.

2. Desgleichen die östliche Halbkugel auf die Meridianebene von Greenwich, auch mit dem Gradnetz. Bei Konstruktion der Ellipsen benutze die Krümmungskreise (S. *33*).

3. Trage in die Gradnetze der Übung 1. und 2. einige wichtige Punkte ein, sowie die ungefähren Umrisse der Erdteile.

4. Zeichne den kürzesten Seeweg von S. Franzisko ($\lambda = 118^0$ w.) nach Yokohama ($\lambda = 140^0$ ö.) unter der Annahme, daß beide Häfen unter 35⁰ n. Br. liegen (der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten der Kugeloberfläche ist der Großkreisbogen). Als Projektionsebene ist die Ebene des 90. Meridians zu nehmen.

5. Die Grundrisse $A'$, $B'$, $C'$ dreier Punkte auf einer Halbkugel sind gegeben. Durch die drei Punkte soll ein Schnitt durch die Halbkugel gelegt und seine wahre Gestalt bestimmt werden. Anleitung: Bestimme zuerst die Koten der drei Punkte, sodann die Spur der Schnittebene und lege die Schnittebene um. Da die umgelegte Schnittkurve ein Kreis durch $(A)$, $(B)$, $(C)$ sein muß, kannst du den Grundriß nach Grundaufgabe 10. zeichnen.

*6. Drei Punkte $A$, $B$, $C$ auf einer Halbkugel sind gegeben. Ihre Verbindungen durch Großkreisbogen begrenzen ein „sphärisches Dreieck". Zeichne dieses Dreieck, a) wenn eine Ecke, z. B. $C$, im Scheitel der Halbkugel liegt, b) wenn keine Ecke im Scheitel der Halbkugel liegt.

## C. Die schiefe Parallelprojektion.

### Einleitung.

Die senkrechte Projektion hat den Nachteil, daß die durch sie entstandenen Bilder einen recht wenig körperlichen Eindruck machen. Dieser Nachteil fällt bei der schiefen Parallelprojektion fort. Aus diesem Grunde und weil geeignete Modelle oft nicht zur Hand sind, haben wir diese auch schon bisher immer dort angewandt, wo es sich um möglichst anschauliche Darstellung, insbesondere um Analysisfiguren der zu lösenden Aufgaben handelte, und werden dies auch in der Folge tun, was wir auch den Schülern dringend anraten. Das Zeichnen derartiger Schaufiguren wird beim Durcharbeiten von Abschnitt *A* und *B* den meisten schon geläufig geworden sein. Es ist auch in der Stereometrie bereits behandelt und an einfachen Beispielen eingeübt, weshalb wir uns hier im wesentlichen auf etwas schwierigere Aufgaben beschränken können. Die wenigen einfachen Regeln für die Zeichnung von schiefen Parallelprojektionen (kurz Schrägbildern), sollen zunächst noch einmal zusammengestellt und eingehender erläutert werden. Man vergleiche sie mit den Regeln für die senkrechte Parallelprojektion. Zur Veranschaulichung dienen einige Drähte sowie aus Draht hergestellte einfache Figuren (Dreieck, Rechteck, Quadrat, Vieleck, Kreis) und Körpermodelle, deren Schatten man im Sonnenschein auf einer ebenen senkrechten Wand im Schulzimmer oder im Freien auffängt. Die als Projektionsstrahlen dienenden nahezu parallelen Sonnenstrahlen fallen ja fast stets mehr oder weniger schief auf die Wände. Woher rührt die dabei beobachtete Unschärfe?

**Regel 1.** Fig. *55*. Das Bild eines Punktes $P$ ist ein Punkt $P_s$.

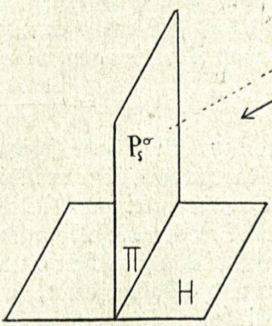
**Regel 2.** Das Bild einer Geraden (Strecke) ist i. a. eine Gerade (Strecke) und nur dann ein Punkt, wenn die Gerade (Strecke) den Projektionsstrahlen parallel ist. (vgl. S. *6*.)

**Regel 3.** Die Bilder paralleler Strecken sind ebenfalls einander parallele Strecken (Ausnahme?), deren Längen sich ebenso verhalten wie die der gegebenen Strecken. (Fig. *56*.)

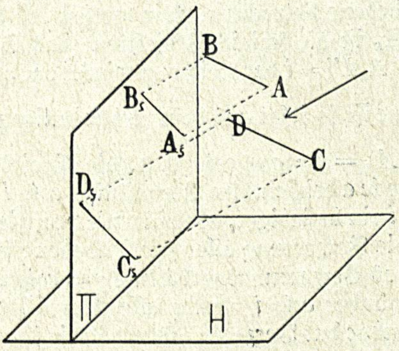
**Regel 4.** Strecken, Winkel und Figuren, die der Bildebene parallel sind, werden unverändert abgebildet. (Führe den Beweis nach Fig. *57* mittels XV. und XIV. S. *15*.)

**Regel 5.** Teilungsverhältnisse einer geteilten Strecke bleiben in der Projektion erhalten. Beweis nach Fig. *58* leicht.

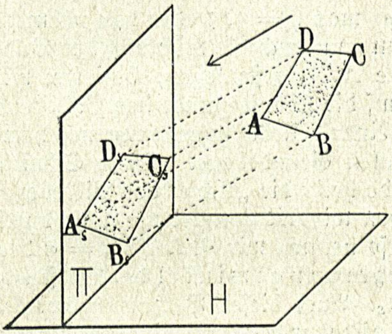
**Regel 6.** Bei einer Parallelverschiebung der Bildebene (Fig. *59a*) oder des projizierten Gegenstandes (Fig. *59b*) bleiben Größe und Gestalt des Bildes unverändert. Man darf daher die Bildebene beliebig hinter, vor oder durch den Gegenstand legen. Durch die letzte Lage wird die Zeichnung oft vereinfacht.



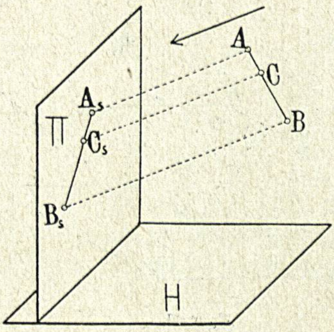

Figur 55.



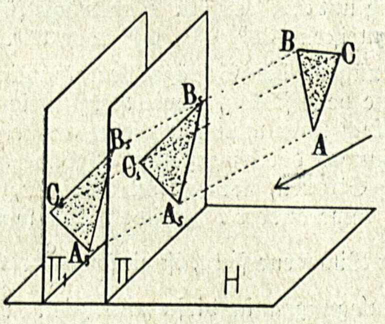

Figur 56.



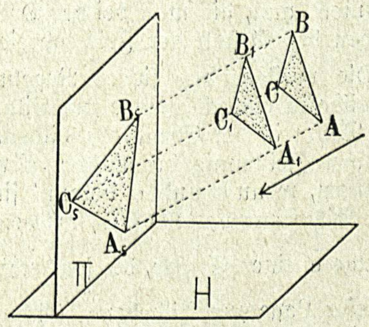

Figur 57.




Figur 58.



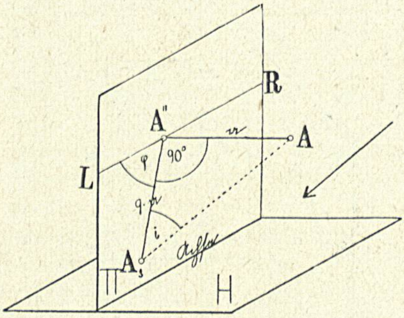

Figur 59a.




Figur 59b.

**Regel 7.** Alle Strecken, die auf der Bildebene s e n k r e c h t stehen, haben im Bilde dasselbe Verzerrungsverhältnis ($q$) und denselben Verzerrungswinkel ($\varphi$).

**Beweis.** (Fig. 60.) Es sei $AA'' =$ a senkrecht $\Pi$ und $A_s$ das Bild von $A$, so können wir $A''$ als die senkrechte Projektion des Punktes $A$ auf die vertikale Bildebene betrachten. Wir wollen $A''$ den Aufriß von $A$ nennen (S. 35). $A''A_s$ ist die schiefe Projektion (das Schrägbild) des Abstandes a. Da nun $\sphericalangle AA_sA'' = i$ der Neigungswinkel der projizierenden Strahlen gegen die Bildebene ist, so folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck $AA''A_s$: $cotg\ i = \frac{A''A_s}{a}$ oder $A''A_s = a \cdot cotg\ i$, d. h. die Projektion einer zur Bildebene senkrechten Strecke a erscheint im Verhältnisse $cotg\ i$ verzerrt (vergrößert oder verkleinert). Da $i$ ein beliebiger, aber für alle projizierenden Strahlen gleicher Winkel ist, so ist die Verzerrung aller zur Bildebene senkrechten Strecken dieselbe, und zwar ist das Verzerrungsverhältnis $q = cotg\ i$. Da $i$ alle Werte zwischen 0 und 90° und daher $cotg\ i$ oder $q$ alle Werte zwischen $\infty$ und 0 haben kann, so kann offenbar das Verzerrungsverhältnis für alle zur Bildebene senkrechten Strecken vom Zeichner ganz beliebig gewählt werden. Als besonders bequeme Werte pflegt man $q = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ oder 1 zu nehmen.



Figur 60.

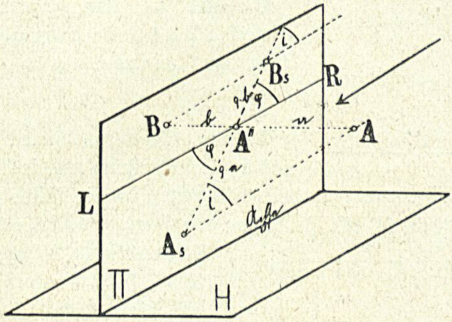
Um nun auch die Richtung der Bildstrecke $A''A_s$ festzulegen, beziehen wir sie auf die Schnittgerade der Bildebene mit einer beliebig angenommenen horizontalen Grundebene. Diese Schnittgerade heißt die „Achse" der Bildebene. Ziehen wir $LR$ parallel zur Achse durch $A''$, so nennen wir $\sphericalangle LA''A_s = \varphi$ den Verzerrungswinkel der Bildstrecke $A''A_s$. Auch dieser Verzerrungswinkel kann offenbar ganz beliebig (aber für alle Strecken senkrecht $\Pi$ gleich groß) gewählt werden, da der Neigungswinkel der Ebene $AA''A_s$ alle möglichen Werte annehmen kann, die man bei der Drehung um $AA''$ erhält. Man wählt für $\varphi$ wegen der Gestalt der Zeichendreiecke meistens 30°, 45°, 60° oder 90°.

Die vorstehenden sieben Regeln genügen, die Schrägbilder räumlicher Gebilde in einfacher Lage zur Bildebene herzustellen, sowie Konstruktionen im Raum in der Ebene abzubilden. Auch kann man umgekehrt aus einer fertigen Zeichnung die wahren Abmessungen der dargestellten Gebilde entnehmen, wenn $q$ und $\varphi$ bekannt sind. Strecken, Winkel und Figuren, die der Bildebene parallel sind, werden ja unverändert abgebildet. Die wahre Länge a einer Strecke, die senkrecht zur Bildebene steht, ist einfach $\frac{a_s}{q}$. Bei schiefer Lage zur Bildebene führen Umlegungen in diese zum Ziel. Der einzige Übelstand der Schrägbilder ist der, daß man in der Zeichnung die Gegenstände so sieht, wie sie aus großer (eigentlich unendlich großer) Ferne erscheinen würden, was aber bei geometrischen Gebilden kaum störend wirkt. Vor der Ausbildung der Zentralperspektive pflegten sich sogar die Maler dieser naheliegenden Projektionsart zu bedienen, freilich ohne ihre noch nicht genügend bekannten Regeln immer streng zu befolgen.

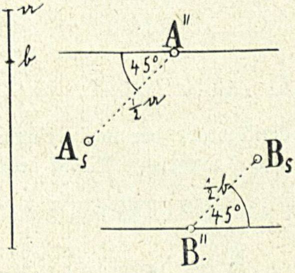
In den Regeln für die schiefe Parallelprojektion sind sämtliche Regeln für die senkrechte Projektion als Sonderfall ($i = 90^0$) der Parallelprojektion enthalten.

## Beispiele.

**Beispiel 1.** Von einem Punkte kennt man den Aufriß und seinen Abstand a von der Bildebene: Das Schrägbild des Punktes für $q = \frac{1}{2}$, $\varphi = 45^0$ zu konstruieren.




Figur *61 a.*




Figur *61 b.*

**Analysis.** Ist $A$ (Fig *61a*) der gegebene Punkt, $A''$ sein Aufriß und $A_s$ sein Schrägbild, so ist $A''A_s = q \cdot a = \frac{1}{2}$ a. Zieht man $LR$ durch $A''$ parallel zur Achse, so ist $\sphericalangle\ LA''A_s = \varphi = 45^0$.

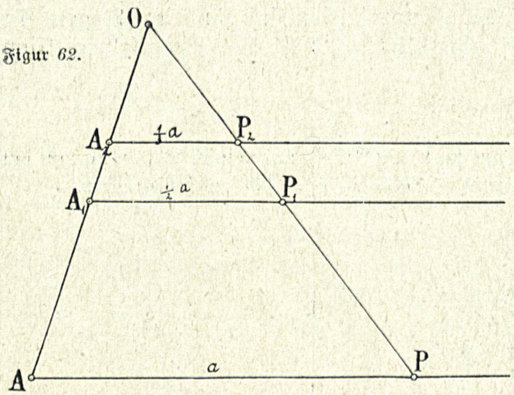
**Konstruktion** siehe Fig. *61 b.*

**Determination.** Der Punkt kann v o r (wie $A$), i n oder h i n t e r der Bildebene liegen Liegt er i n der Bildebene, so fällt sein Bild mit ihm zusammen (z. B. $A''$). Liegt er, wie $B$, hinter der Bildebene, so muß sein Projektionsstrahl die Bildebene durchstechen. Der Durchstichpunkt $B_s$ ist das gesuchte Bild. Der Verzerrungswinkel ist dann entgegengesetzt, hier oben rechts an $LR$ anzutragen und auch hier ist $B''B_s = q \cdot b = \frac{1}{2}\ b$. (Der Einfachheit wegen ist in Fig. *61a* $B$ auf der Verlängerung von $AA''$ angenommen, weswegen $B''$ mit $A''$ zusammenfällt.)

**Bemerkungen.** 1. Aus der Lösung dieser Aufgabe folgt, daß man, um ein Schrägbild irgendeines Raumgebildes zu erhalten, zunächst nur den Aufriß, d. h. die senkrechte Projektion auf die Bildebene (die hier gleichzeitig die Aufrißebene ist) zu zeichnen braucht. Hierfür gelten die Regeln, die im Abschnitt $A$ für die senkrechte Projektion auf eine Ebene befolgt sind. Von den erhaltenen Aufrissen der Punkte aus konstruiert man dann nach Beispiel 1. die Schrägbilder und erhält so je nach den Werten von $q$ und $\varphi$ jedes beliebige Schrägbild. Diese Methode ist bei schwierigeren Aufgaben zu empfehlen, da es oft leichter ist, den Aufriß zu entwerfen, als sofort den Schrägriß. 2. Beim Zeichnen von Schrägbildern hat man oft viele Strecken in demselben

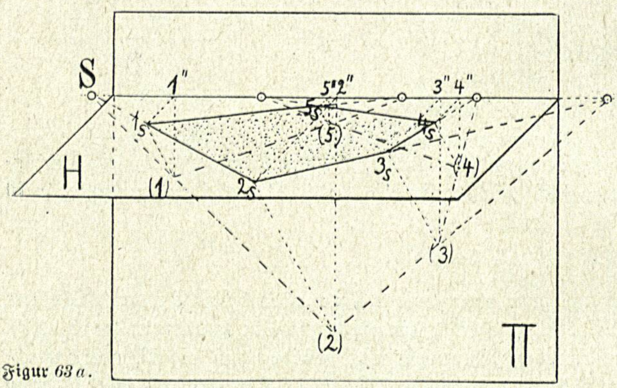
Verhältnis (1 : 2, 1 : 3, 2 : 3 usw.) zu verkürzen. Dazu empfiehlt es sich einen einfachen Verkleinerungsmaßstab herzustellen, wie in Fig. 62. In ihr ist $OA_1 = \frac{1}{2}\, OA$, $OA_2 = \frac{1}{3}\, OA$, ferner sind durch $A$, $A_1$, $A_2$ drei Parallele gezogen. Trägt man nun die zu verkleinernde Strecke $AP = a$ ab und zieht $OP$, so wird $A_1P_1 = \frac{1}{2}\, a$, $A_2P_2 = \frac{1}{3}\, a$. (Beweis!)

Figur 62.

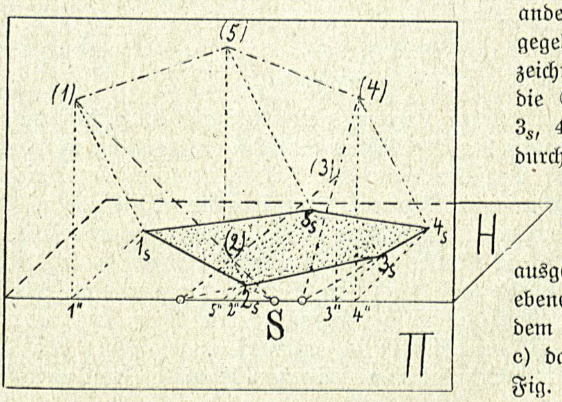



**Beispiel 2.** Ein gegebenes Vieleck 1 2 3 4 5 in horizontaler Lage zu zeichnen. $\varphi = 45^0$, $q = \frac{1}{2}$.

**Lösung.** Lege das Vieleck zunächst durch Drehung um die Achse (Schnittgerade der horizontalen Vielecksebene mit der Bildebene) in die Bildebene um. Das umgelegte Vieleck heiße (1) (2) (3) (4) (5). Fälle von den Ecken des Vielecks die Senkrechten (1) 1″, (2) 2″, (3) 3″, (4) 4″ und (5) 5″ auf die Achse. Denkst du dir nun die Vielecksebene wieder in die horizontale Lage zurückgedreht, so bleiben diese Senkrechten stets senkrecht zur Achse und stehen zuletzt auch senkrecht zur Bildtafel. Sie lassen sich also alle nach Regel 7. unter dem gegebenen Verzerrungswinkel einander parallel und in der gegebenen Verkürzung zeichnen. So erhältst du die Schrägbilder $1_s$, $2_s$, $3_s$, $4_s$, $5_s$ der Ecken und durch ihre Verbindung das verlangte Vieleck. Die Zeichnung ist für alle drei Fälle ausgeführt, daß die Bildebene a) hinter, b) vor dem Vieleck liegt und c) das Vieleck schneidet. Fig. 63 a, b, c.



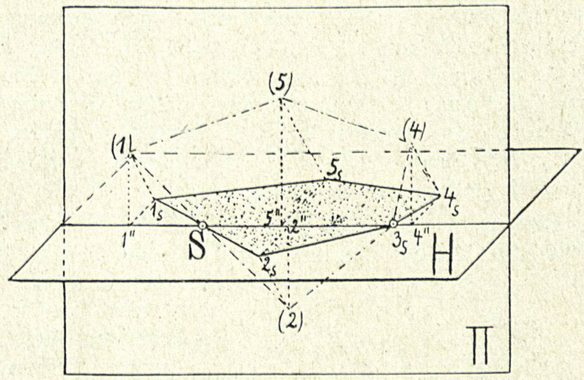

Figur 63 a.




Figur 63 b.

**Bemerkungen.** 1. Die Verbindungslinien (1) $1_s$, (2) $2_s$, (3) $3_s$ usw. sind wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke [(1) 1″ $1_s$], [(2) 2″ $2_s$] usw. parallel. Man wird dies bei der Konstruktion der Punkte $1_s$, $2_s$, $3_s$, . . . benutzen.

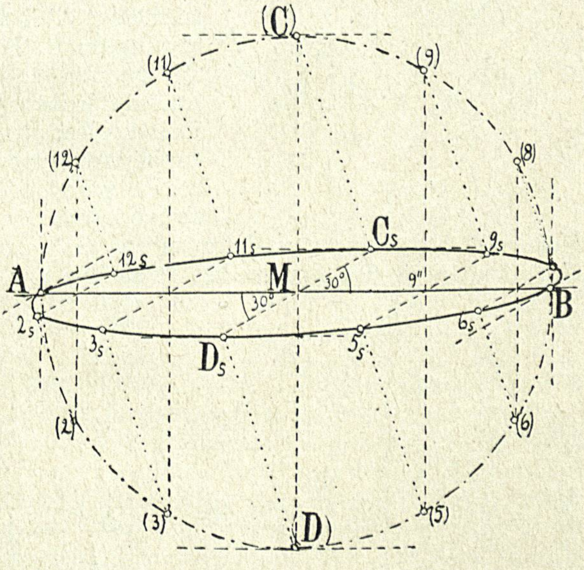
2. Da die ähnlichen Dreiecke (1) 1″ $1_s$ und (2) 2″ $2_s$ in perspektiver Lage sind, so müssen nach der Ähnlichkeitslehre die Verbindungslinien entsprechender Punkte, also (1) (2), $1_s$ $2_s$ und 1″ 2″ durch einen Punkt S, den Ähnlichkeitspunkt der beiden Dreiecke gehen. Der Punkt S liegt auf der Achse (Fig. *63a*). Ebenso müssen sich (2) (3) und $2_s$ $3_s$, (3) (4) und $3_s$ $4_s$, usw. in je einem Punkte der Achse schneiden. Da nun nach Bem. 1. auch (1) $1_s$ // (2) $2_s$ // (3) $3_s$ usw. ist, so erkennt man, daß das Schrägbild des Vielecks und das umgelegte Vieleck affin sind. Affinitätsachse ist die schon als Achse bezeichnete Gerade, die Affinitätsrichtung ist durch $q$ und $\varphi$ bestimmt (vgl. S. *25*). Auch diese Beziehung kann zur Vereinfachung der Konstruktion oder zur Probe benutzt werden.




Figur *63c*.

**Beispiel 3.** Das Schrägbild eines horizontal liegenden Kreises zu zeichnen für $\varphi = 30°$ und $q = \frac{1}{3}$.

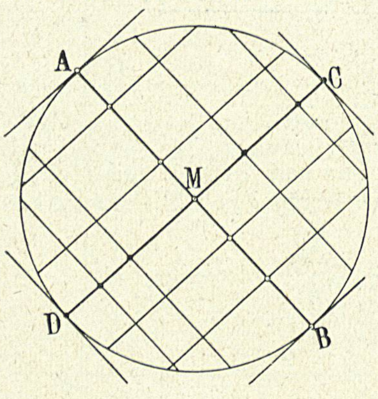
**Lösung.** Fig *64*. Wie erst später bewiesen werden kann, ist nicht nur die senkrechte Projektion, sondern auch das Schrägbild eines Kreises i. a. eine Ellipse, von der wir eine beliebige Anzahl von Punkten konstruieren können. Wir verfahren, wie in Beispiel 2. Es ist zweckmäßig, die Bildebene durch den Mittelpunkt des Kreises zu legen, so daß die Achse zugleich Kreisdurchmesser wird ($AB$). Der Kreis wird zunächst in die Bildebene umgelegt und, da 12 Punkte zur Zeichnung der Ellipse ausreichen, in



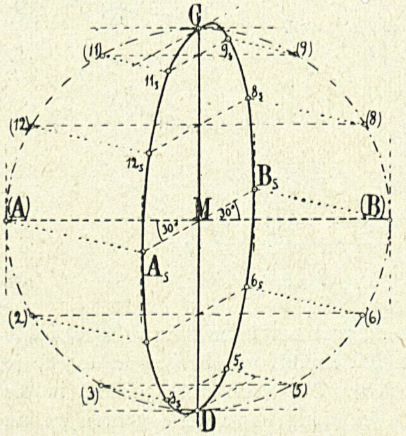

Figur *64*.

12 gleiche Teile geteilt, von denen die Teilpunkte (1), (4), (7) und (10) in die Endpunkte der aufeinander senkrechten Durchmesser $AB$ und $(C)$ $(D)$ fallen. In diesen Endpunkten ziehen wir noch die Tangenten. Nun konstruieren wir zuerst wie in Beisp. 2. die Schrägbilder $C_s$ und $D_s$ von $C$ und $D$ und sodann unter Benutzung von Bem. 1 bei Beisp. 2. die Punkte $2_s$, $3_s$, $5_s$, $6_s$, $8_s$, $9_s$, $11_s$, $12_s$ der Ellipse, sowie die Tangenten in $A$, $B$, $C_s$ und $D_s$. Tangenten bleiben auch bei der Projektion Tangenten und sind zur Bestimmung der Kurvenrichtung in ihren Berührungspunkten wichtig. Aus der Figur ist alles ersichtlich. Um z. B. Punkt $9_s$ zu finden, zieht man $(9)\,9'' \,//\, M(C)$, $(9)\,9_s \,//\, (C)\,C_s$ und $9''\,9_s \,//\, MC_s$. Die 12 Punkte der Ellipse werden sodann durch eine möglichst glatte Kurve verbunden.

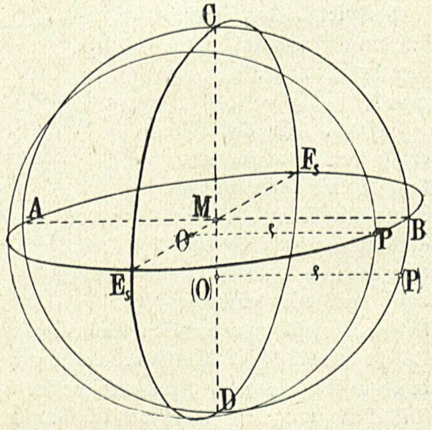
**Konjugierte Durchmesser.** Zieht man in einem Kreise zwei aufeinander senkrechte Durchmesser $AB$ und $CD$ (Fig. 65), so halbiert jeder von ihnen die dem anderen parallelen Sehnen und geht durch die Berührungspunkte der dem anderen parallelen Tangenten. Diese Beziehungen bleiben nun bei jeder Parallelprojektion bestehen. Während der Kreis dabei i. a. zur Ellipse wird, bleibt Mittelpunkt Mittelpunkt, Durchmesser bleibt Durchmesser (Regel 5.), Parallelen bleiben Parallelen (Regel 3.), Halbierungspunkt bleibt Halbierungspunkt, Tangente bleibt Tangente. Die Durchmesser aber stehen i. a. nicht mehr senkrecht, sondern schief aufeinander. Solche Durchmesserpaare nennt man bei der Ellipse **konjugierte** (zugeordnete) Durchmesser. Die beiden Hauptachsen der Ellipse, die aufeinander senkrecht stehen, bilden nur einen Sonderfall der konjugierten Durchmesser. In Fig. 64 sind offenbar $AB$ und $C_sD_s$ konjugierte Durchmesser der Bildellipse und die Figur zeigt uns zu-



Figur 65.



Figur 66.



Figur 67.

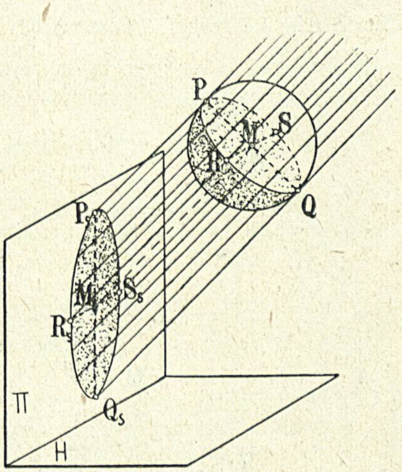
gleich, wenn wir sie ohne Rücksicht auf ihre stereometrische Bedeutung rein planimetrisch auffassen, die Lösung der wichtigen Aufgabe, eine Ellipse aus zwei konjugierten Durchmessern zu konstruieren.

**Beispiel 4.** Das Schrägbild eines vertikalen zur Bildebene senkrechten Kreises zu zeichnen. $\varphi = 30^0$, $q = \frac{1}{3}$.

**Lösung.** Der Kreis wird diesmal um den senkrechten Durchmesser $CD$ in die Bildebene umgelegt (s. Fig. *66*), die durch den Kreismittelpunkt gelegt ist. Die Konstruktion entspricht durchaus der Lösung des Beisp. 3. und ist aus der Figur ersichtlich. $A_sB_s$ und $CD$ sind konjugierte Durchmesser der Bildellipse.

**Beispiel 5.** Das Schrägbild einer Kugel zu zeichnen. $\varphi = 30^0$, $q = \frac{1}{2}$.

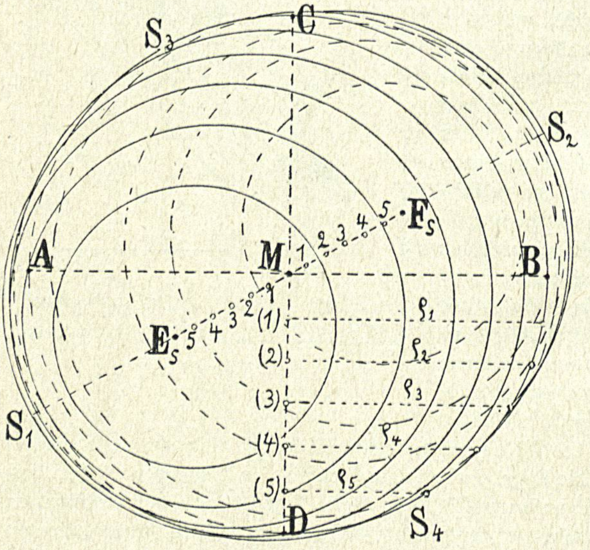
**Lösung.** Legt man die Bildebene durch den Kugelmittelpunkt $M$ (Fig. *67*), so kann man außer dem in der Bildebene liegenden Großkreis $ABCD$ nach Beisp. 3. und 4. die auf ihm senkrechten Großkreise $AE_sBF_s$ und $CE_sDF_s$ zeichnen. Ihre Bilder sind Ellipsen, die bei den Punkten $A$, $B$, $C$ und $D$ henkelartig über den in der Bildebene liegenden Kreis hinausragen. Das so erhaltene Kugelbild befriedigt aber nicht, weil ihm der die „Henkel" umfassende Umriß fehlt, der bei der schiefen Parallelprojektion keineswegs wie bei der senkrechten, durch den Großkreis $ABCD$ dargestellt wird. Wir haben also noch zu untersuchen, wie man diesen Umriß erhält. Er ist offenbar die Umgrenzung des sichtbaren Teiles der Kugeloberfläche. In Fig. *68* erblicken wir eine von den Sonnenstrahlen beschienene Kugel, auf der Ebene Π ihr Schrägbild in Gestalt ihres Schattens. Um eine recht anschauliche Figur zu erhalten, denken wir uns vorübergehend die Kugel in einiger Entfernung vor der Bildebene. Die Entfernung von der Bildebene hat ja auf die Größe und Gestalt des Bildes keinen Einfluß (Regel 6). Betrachten wir nur diejenigen Lichtstrahlen, welche die Kugel streifen oder berühren, so ist leicht zu ersehen, daß die Berührungspunkte sämtlich auf dem Großkreise $PQRS$ liegen, der auf den Lichtstrahlen senkrecht steht. Er bildet die Grenze zwischen der beleuchteten und der unbeleuchteten Hälfte der Kugeloberfläche und heißt ihr w a h r e r  U m r i ß. Seine schiefe Projektion $P_sQ_sR_sS_s$, also die Schattengrenze, heißt der s c h e i n b a r e  U m r i ß der Kugel. Nebenbei bemerken wir, daß die den Umriß erzeugenden Strahlen einen senkrechten Zylindermantel bilden und daß wir den Schattenriß der Kugel als einen schiefen ebenen Schnitt durch den Zylindermantel auffassen können. Da nun, wie später im Lehrbuch bewiesen werden wird, daß jeder schief zur Achse liegende Zylinderschnitt eine Ellipse ist, so muß auch das Schrägbild der Kugel eine E l l i p s e sein. Bei Betrachtung der Kugel von einem möglichst weit in der Richtung der projizierenden Strahlen gelegenen Punkte wird aus dem vorhin von den Sonnenstrahlen beleuchteten Teile der Kugeloberfläche ihr



Figur *68*.

sichtbarer Teil. Der scheinbare Umriß deckt sich mit dem wahren und begrenzt also den sichtbaren Teil der Kugel.

Wie erhalten wir nun auf die einfachste Weise die Umrißellipse? Wir zeichnen auf der Kugeloberfläche eine Reihe von Kurven, die bis an den Umriß heranreichen, wie etwa die Henkel der Ellipsen in Fig. 67. Dann wird der Umriß diejenige Kurve sein, die alle diese Kurven einhüllt. Wir könnten z. B. eine Schar von Kugelkreisen zeichnen, deren Ebenen einer der Hauptschnittebenen in Fig. 67 parallel sind. Am besten wird sich unter diesen Ebenen die Bildebene $ABCD$ eignen, da die zu ihr parallelen Schnittebenen auch im Schrägbilde Kreise liefern. Die Mittelpunkte dieser Parallelkreise liegen auf dem Durchmesser $E_sF_s$. Wie wir ihre Radien ermitteln, ist aus Fig. 67 ersichtlich. Ist $Q$ ein Mittelpunkt eines solchen Parallelkreises, so erhalten wir seinen Radius $\rho = OP$, indem wir $OP \parallel MB$ ziehen. Ist aber die Ellipse $ABE_sF_s$ gar nicht gezeichnet, so denken wir uns den Viertelkreis $E_sMB$ in die Bildebene heruntergeklappt, wo er sich mit dem Viertelkreise $MDB$ deckt. $O$ fällt auf $(O)$, wobei $M(O) = \frac{MO}{q}$ ist, $P$ auf $(P)$. Der gesuchte Halbmesser ist $\rho = (O)(P)$ $(\parallel MB)$. In dieser Weise sind in Fig. 69 zehn Parallelkreise mit den Mittelpunkten 1, 2, 3, 4, 5 und den Radien $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$ in gleichen Abständen gezeichnet, von denen aber nur die größeren an den Umriß heranreichen und deshalb für die Zeichnung genügen würden. Der Umriß ist dann die Kurve, die alle diese Kreise einhüllend berührt. Er braucht aber kaum noch besonders gezeichnet zu werden, da die Kreise ihn schon mit ausreichender Deutlichkeit darstellen. Von der Richtigkeit des Gesagten überzeugt man sich am einfachsten, indem man einen Globus mit deutlich sichtbaren Breitenkreisen in der hier angegebenen Lage betrachtet.




Figur 69.

Fig. 51 zeigte uns das fertige Schrägbild der Erdkugel. Die soeben erwähnten Parallelkreise waren nur mit Blei gezeichnet und wurden nach dem Ausziehen beseitigt.

**Bemerkung.** Die Umrißzeichnung der Fig. 69 ist nur eine Näherungskonstruktion. Die recht einfache genaue Konstruktion der Umrißellipse soll schon hier ohne Beweis mitgeteilt werden. Der Mittelpunkt der Ellipse ist $M$, die kleine Achse $S_3S_4 \perp E_sF_s$ $(MS_3 = MS_4$ gleich dem Kugelradius$)$. $S_1$ und $S_2$ sind die Hauptscheitel (Endpunkte der großen Achse), und zwar ist $MS_1 = MS_2 = E_sS_3$. $E_s$ und $F_s$ sind die sogenannten Brennpunkte der Ellipse. Die Zeichnung der Ellipse s. S. 33.

## Übungsaufgaben.

Eine Reihe von einfachen Beispielen ist bereits im Abschnitt „Das stereometrische Zeichnen" des Lehrbuches enthalten. Die folgenden Aufgaben sollen der weiteren Einübung des Verfahrens dienen.

1. Zeichne in horizontaler, sonst aber beliebiger Lage, in verschiedenen Abständen vor oder hinter der Bildebene:

a) Die Beweisfigur des pythagoreischen Lehrsatzes ($\varphi = 45^0$, $q = \frac{1}{2}$);
b) einen Kreis ($r = 3$ cm, $\varphi = 45^0$, $q = 1$);
c) ein regelmäßiges Fünfeck ($\varphi = 90^0$, $q = \frac{1}{2}$);
d) einen Kreis ($r = 3$ cm) mit einer Tangente ($\varphi = 30^0$, $q = \frac{1}{3}$. Die Tangente ist bis an die Bildachse zu verlängern).
e) einen Kreis mit zwei von einem außerhalb liegenden Punkt gezogenen Tangenten ($\varphi = 30^0$, $q = \frac{1}{2}$);
f) ein Dreieck mit seinem Umkreis ($\varphi = 120^0$, $q = \frac{1}{2}$);
g) ein Dreieck mit dem Inkreis ($\varphi = 120^0$, $q = \frac{1}{2}$);
h) einen Kreisring aus zwei konzentrischen Kreisen ($r_1 = 3$ cm, $r_2 = 2$ cm, $\varphi = 30^0$, $q = \frac{1}{3}$);
i) einen Kreisring aus zwei exzentrischen Kreisen ($r_1 = 3$ cm, $r_2 = 2$ cm, $M_1M_2 = 0{,}5$ cm, $\varphi = 30^0$, $q = \frac{1}{3}$);
k) zwei sich von außen berührende Kreise ($r_1 = 3$ cm, $r_2 = 2$ cm, $\varphi = 90^0$, $q = \frac{1}{3}$).

2. Löse die Aufgaben 1 b), c), d), e), h), i), k), wenn die Figuren in einer zur Bildebene senkrechten Vertikalebene liegen.

### Aufgaben aus der Stereometrie.

3. Zeichne möglichst einfache und anschauliche Figuren zu den folgenden Sätzen, aber in anderen Lagen, wie dort. $\varphi = 30^0$, $q = \frac{1}{3}$.

a) X. S. *12*. Lege die Achse des Ebenenbüschels senkrecht zur Bildebene und zeichne acht quadratisch begrenzte Ebenen in gleichen Winkelabständen;
b) XVI. S. *23*. Eine von den drei Ebenen sei horizontal.
c) XIV. S. *15*. d) IV. S. *3*. e) XIII. S. *14*.

4. Durch einen gegebenen Punkt $P$ einer Geraden $g$ die Ebene zu legen, die auf $g$ senkrecht steht. (III. S. *3*. Nimm $g$ parallel oder senkrecht $\Pi$.)

5. Auf einer Ebene E in einem ihrer Punkte $P$ die Senkrechte zu errichten.

6. Zeichne den geometrischen Ort aller Punkte einer Ebene E, die von einem außerhalb E gelegenen Punkte $P$ die gleiche Entfernung $a$ haben (E horizontal oder parallel $\Pi$).

7. Bestimme den geometrischen Ort aller Punkte im Raum, die von zwei gegebenen Punkten $A$ und $B$ gleich weit entfernt sind. ($AB \perp \Pi$.)

8. Zeichne den geometrischen Ort aller Punkte im Raum, die von drei festen Punkten $A$, $B$, $C$ gleich weit entfernt sind (Ebene $ABC \parallel \Pi$).

9. Durch einen gegebenen Punkt $P$ die Parallele zu einer Geraden $g$ in der Ebene E zu ziehen.

10. Durch eine Gerade $g$, die einer Ebene E parallel ist, eine Ebene zu legen, die mit E den Winkel $\alpha$ bildet. (E horizontal, $g \perp \Pi$.)

11. Zeichne einen Würfel ($a = 3$ cm) mit horizontaler Grundfläche, aber in schiefer Lage zur Bildebene.

12. Ziehe von einer Würfelecke aus in den dort zusammenstoßenden Flächen die Diagonalen und verbinde ihre Endpunkte. Was entsteht?

13. Zeichne ein schiefwinkliges Parallelepipedon (begrenzt von sechs Parallelogrammen, von denen je zwei einander gegenüberliegende parallel und kongruent sind). Zeichne auch das Netz.

14. Zeichne eine fünfseitige schiefe Säule, von der die Grundfläche, die Projektion einer Seitenkante und die Höhe gegeben sind.

15. Das Schrägbild einer fünfseitigen Pyramide zu zeichnen, wenn die Grundfläche, der Fußpunkt der Höhe und diese gegeben sind.

16. Zeichne einen schiefen Zylinder, dessen Radius $r = 3$ cm, Höhe $h = 6$ cm und Achse $a = 8$ cm gegeben sind.

17. Zeichne einen schiefen Kegel aus $r = 2$ cm, $a = 7$ cm, $h = 5$ cm.

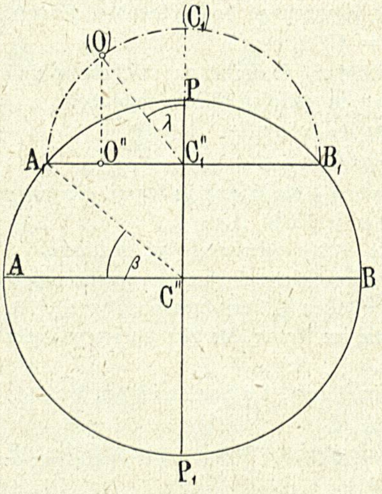
18. Die Pyramide der Aufgabe 15. ist in halber Höhe abzustumpfen.

19. Stumpfe den Kegel Aufgabe 17. in $\frac{1}{3}$ seiner Höhe ab.

20. Zeichne das Schrägbild der Erdkugel ($r = 5$ cm) und trage folgende Orte darin ein, deren Länge und Breite gegeben sind:

a) Berlin ($\lambda = 13^0$, $\beta = 53^0$)
b) Paris ($\lambda = 2^0$, $\beta = 49^0$)
c) London ($\lambda = 0^0$, $\beta = 52^0$)
d) Rom ($\lambda = 12^0$, $\beta = 42^0$)
e) Leningrad ($\lambda = 30^0$, $\beta = 60^0$)
f) Athen ($\lambda = 24^0$, $\beta = 38^0$)
g) New York ($\lambda = 71^0$ w., $\beta = 41^0$)
h) Rio de Janeiro ($\lambda = 43^0$ w., $\beta = 23^0$ s.)
i) Kairo ($\lambda = 31^0$, $\beta = 30^0$)
k) Kapstadt ($\lambda = 18^0$, $\beta = 34^0$ s.)
l) Bombay ($\lambda = 73^0$, $\beta = 19^0$).

Anleitung. Die Bildebene gehe durch den Erdmittelpunkt und sei zugleich Aufrißebene. $PC''P_1$ sei der Meridian von Greenwich (Fig. *70*). Ist nun $O''$ der Aufriß eines Ortes $O$, dessen Schrägbild $O_s$ gesucht wird, so zeichne man seinen Breitenkreis, der im Aufriß als Parallele $A_1B_1$ zum Äquator $AB$ erscheint. $\sphericalangle A_1C''A = \beta$. Legt man nun die vordere Hälfte $A_1C_1B_1$ des Breitenkreises in die Bildebene um $(A_1(C_1)B_1)$, macht $\sphericalangle (C_1)C_1''(O) = \lambda$, und fällt $(O)O'' \perp A_1B_1$, so ist $(O)O''$ der Abstand des Punktes $O$ von der Bildebene. Das Schrägbild $O_s$ kann daher leicht gefunden werden (vgl. S. *41*). Zeichne auch die Schrägbilder des Äquators, des Nullmeridians und den Umriß.



Figur *70*.

*21. Zeichne das Schrägbild der Erdkugel mit dem Großkreisbogen New York—Kapstadt (s. S. *36*).

22. Zeichne einen Kugelabschnitt ($r = 5$ cm, $h = 3$ cm).

23. Das Schrägbild a) eines Kugelausschnittes ($r = 5$ cm, $h = 2$ cm), b) eines Kugelzweiecks zu zeichnen ($\alpha = 30^0$).

24. Zeichne einen Würfel mit einbeschriebenem Zylinder, $a = 4$ cm.

25. Zeichne einen Würfel mit seiner a) Inkugel, b) Umkugel ($a = 4$ cm).

26. Konstruiere a) die Umkugel, b) die Inkugel eines Tetraeders ($a = 5$ cm).

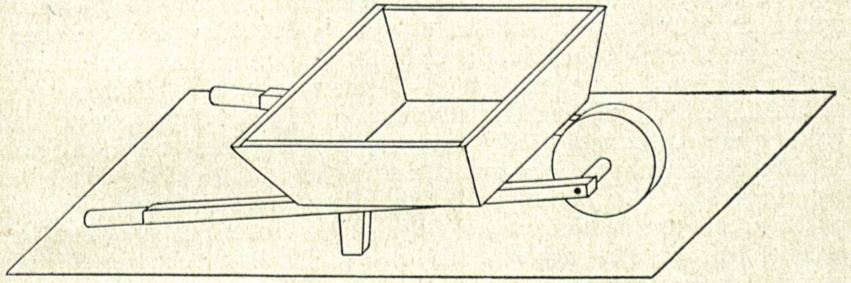
27. Einem gegebenen gleichseitigen Kegel soll eine Kugel a) umbeschrieben, b) einbeschrieben werden. $s = 6$ cm.

28. Es soll ein senkrechter Zylinder mit einer Schraubenlinie gezeichnet werden. $r = 3$ cm, $\alpha$ (Steigungswinkel der Schraubenlinie) $= 30^0$.

Anleitung. Wickelt man den Winkel $\alpha$ so um den Zylindermantel, daß der eine Schenkel sich um den Grundkreis legt, so bildet der andere Schenkel auf dem Mantel eine Schraubenlinie. Schneide den Winkel aus durchscheinendem Papier aus und mache den Versuch! Für die Zeichnung teile den Grundkreis in etwa 12 gleiche Teile, trage den Umfang $2\pi r$ mit den Teilpunkten auf dem einen (wagrechten) Schenkel von $\alpha$ mehrmals ab und errichte in sämtlichen Teilpunkten Senkrechte bis an den anderen Schenkel. Die Längen dieser Senkrechten sind die Höhen der entsprechenden Punkte der Schraubenlinie, die dann leicht gezeichnet werden kann.

## Skizzierübungen.

Die darzustellenden Gegenstände sollen unter Hervorhebung der geometrischen Grundformen nach den Regeln der schiefen Parallelprojektion gezeichnet werden,



Figur 71.

die kleineren möglichst in natürlicher Größe. Alles unwesentliche Beiwerk ist fortzulassen. Lage zur Bildebene möglichst einfach wählen! Beispiel Fig. 71.

Zeichne unter Benutzung selbstgewählter Verzerrung und mit Angabe des Maßstabes Schrägbilder folgender Gegenstände aus verschiedenen Gebieten:

1. Brett; 2. Streichholzschachtel, halb geöffnet; 3. Zigarrenkiste mit halb geöffnetem Deckel; 4. Bilderrahmen aus Flachleisten; 5. Zifferblatt einer Uhr; 6. Schachbrett; 7. Plattenfußboden aus kongruenten sechseckigen Platten (schwarz-weiß); 8 a) Obelisk mit quadratischem Sockel; b) Stehendes und liegendes Kreuz; c) Wegweiser. 9. Lampenschirm; 10. Mühlrad; 11. Faß; 12. Bierglas; 13. Serviettenring; 14. Trauring; 15. Schubkarre; 16. Treppe; 17. Schiefernagel; 18. Pillenschachtel; 19. Rohrstück; 20. Sitzbank; 21. Rechteckiger Tisch mit vier Beinen; 22. Kreisrunder Tisch mit drei Beinen; 23. Achteckiger Tisch mit vier Beinen; 24. Türrahmen mit offener Tür; 25 a) Kommode, eine Schublade etwas geöffnet; b) Bettstelle; c) Sarg; 26. Turm mit quadratischem Grundriß und Pyramidendach; 27. Zylindrischer Turm mit Kuppeldach; 29. Achteckiger Turm mit Kegeldach; 30. Haus mit Giebeldach; 31. Haus mit holländischem (Walm-) Dach; 32. Hundehütte; 33. Haus mit (halbzylindrischem) Tonnendach. 34. Zugespitzter

Bleistift; 35. Lineal mit abgeschrägter Kante; 36. Reißbrett; 37. Reißschiene; 38. Zeichendreieck; 39. Buch; 40. Tintenfaß. 41. Turnreck; 42. Barren; 43. Schaukel; 44. Wippschaukel; 45. Leiter; 46. Rodelschlitten. 47. Reagenzglas, halb mit Wasser gefüllt, in senkrechter und schiefer Stellung; 48. Trichter; 49. Kochflasche; 50. Medizinflasche; 51 a) Bunsenstativ; b) Bunsenbrenner; c) Dreifuß; 52. Pneumatische Wanne mit Brücke. 53. Keil; 54. Wellrad; 55. Seilwinde; 56. Feste Rolle; 57. Lot; 58. Setzwage; 59. Luftballon mit Gondel; 60. Glasglocke; 61. Briefwage; 62. Monochord; 63. Hufeisenmagnet; 64. Deklinationsnadel; 65. Inklinationsnadel; 66. Elektrophor; 67. Goldblatt-Elektroskop; 68. Leydener Flasche; 69. Kugelkonduktor auf Glassäule; 70. Zylinderkonduktor mit halbkugeligen Endflächen; 71. Isolierschemel; 72. Scheiben-Elektrisiermaschine; 73. Bunsenelement; 74. Schattenphotometer; 75. Figur zur Erklärung des Beleuchtungsgesetzes; 76. Projektionsapparat; 77. Gleichseitiges Prisma; 78. Rechtwinkliges Prisma; 79. Hohlspiegel; 80. Die sechs Formen der Linsen.

## Kristallformen. Regelmäßige Körper. Axonometrie.

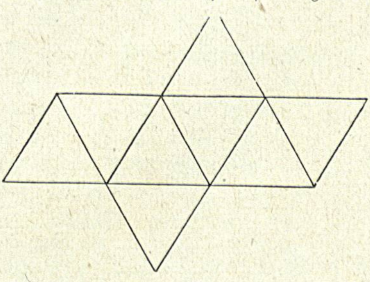
Die Mineralien sowie die festen Stoffe, mit denen uns die Chemie bekannt macht, sind meistens durch eine bestimmte Gestalt ausgezeichnet, die wir „Kristall" (vom griechischen Krystallos, Eis, Bergkristall) nennen. Das äußere Merkmal eines solchen Kristalls ist, daß er von ebenen, nach gewissen Gesetzen gelagerten Flächen begrenzt wird. Das Studium der mannigfaltigen, oft schönen Kristallformen ist für den Mineralogen, den Chemiker und in einigen Fällen auch für den Physiker von Wichtigkeit und bildet die Aufgabe der Kristallkunde oder Kristallographie. Zur zeichnerischen Darstellung der Kristalle eignet sich die schiefe Parallelprojektion, wie wir an einigen Beispielen zeigen wollen. Es empfiehlt sich dabei meistens die Wahl von $\varphi = 20^0$, $q = \frac{1}{2}$. Wir behandeln hier auch die aus der Stereometrie bekannten regelmäßigen Körper, von denen einige auch als Kristalle vorkommen.

Die natürlichen und auf künstlichem Wege erhaltenen Kristalle zeigen mancherlei Unvollkommenheiten, da sie entweder unvollständig oder nicht nach allen Seiten gleichmäßig ausgebildet sind. Wir beschränken uns deshalb auf die Darstellung der idealen Formen, die von diesen Mängeln frei sind, und beginnen mit dem uns schon bekannten regelmäßigen Achtflach oder

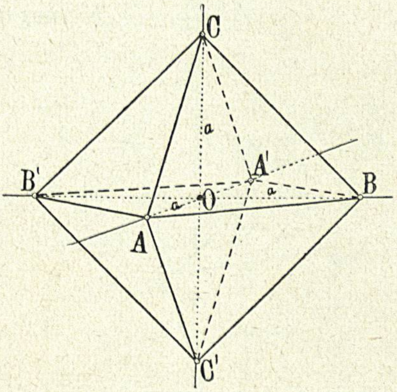
**Oktaeder.** Es wird begrenzt von acht kongruenten gleichseitigen Dreiecken und ist z. B. die Kristallform des Magneteisenerzes und des Alauns. Sein Netz sehen wir in Fig. *72 a*, sein Schrägbild Fig. *72 b*. Bei der Bezeichnung der Schrägbilder der Punkte ist hier und bei den folgenden Schrägbildern der Index $s$ der Einfachheit wegen weggelassen. Stereometrisch können wir das Oktaeder als Doppelpyramide behandeln, kristallographisch ist es üblich, die Lage seiner Flächen auf die drei Achsen $AA'$, $BB'$, $CC'$ zu beziehen, die in den drei Hauptrichtungen des Raumes im Mittelpunkt des Körpers aufeinander senkrecht stehen. Die Fläche $ABC$ z. B. schneidet an jeder Achse das gleiche Stück $a$ ab. Ebenso jede andere Fläche. Von der Länge von $a$ hängt zwar die Größe, nicht aber die Gestalt des

Oktaeders ab, diese ist viel mehr nur bedingt durch das Verhältnis $a : a : a$ der Achsenabschnitte (hier $= 1 : 1 : 1$), das man auch kurz das A ch s e n v e r h ä l t n i s nennt.

**Der Würfel,** der hier auch regelmäßiges Sechsflach oder H e x a e d e r genannt wird, ist uns ein alter Bekannter. Er ist die Kristallform z. B. des

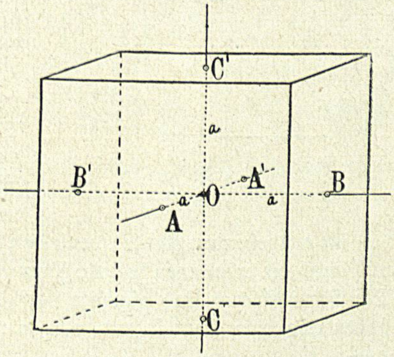


Figur 72*a*.




Figur 72*b*.

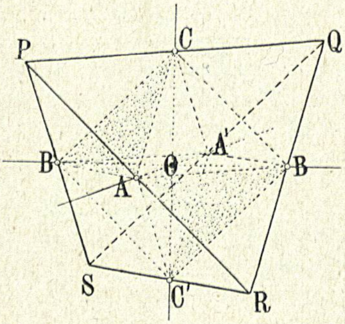
Bleiglanzes und des Kochsalzes. Seine Achsen (Fig. 73) sind die Verbindungslinien der Mittelpunkte der einander gegenüberliegenden Flächen. Um das Achsenverhältnis einer Fläche, z. B. der Vorderfläche zu erhalten, beachten wir, daß sie die eine Achse in $A$, die beiden anderen aber „im Unendlichen", d. h. gar nicht schneidet. Bezeichnet man $OA$ mit $a$, so ist das Achsenverhältnis dieser Fläche $a : \infty a : \infty a$; ebenso das jeder anderen Würfelfläche.



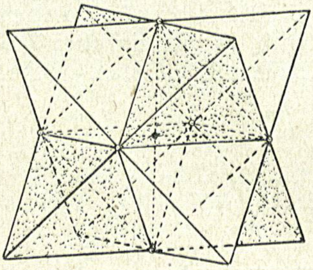

Figur 73.

**Halbflächner.** Es kommt zuweilen vor (z. B. beim Fahlerz), daß die eine Hälfte der Kristallflächen sich soweit ausdehnt, daß die andere verschwindet. Nehmen wir an (Fig. 74), die vier weißen Flächen des Oktaeders dehnen sich soweit aus, bis sie die mit ihnen abwechselnden schattierten Flächen verdeckt haben, dann werden sich die Flächen $ABC$ und $A'B'C$ in der Firstkante $PQ$ (// $AB$ nach XVI. S. 23) schneiden, ebenso $AB'C'$ und $BA'C'$ in der Kielkante $RS$ (// $AB'$), $A'B'C$ und $A'BC'$ in $QS$ (//$BC$) usw. Durch jede Oktaederecke läuft jetzt eine neue Kante. Es entsteht ein Körper, der von vier kongruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird, das uns bereits bekannte regelmäßige Vierflach oder Tetraeder. Man nennt das Tetraeder den H a l b f l ä ch n e r des Oktaeders. Sein kristallographisches Zeichen ist $\frac{1}{2}$ $(a : a : a)$.

**Zwillingskristalle.** Läßt man in dem Oktaeder Fig. 74 die schattierten Flächen auf Kosten der anderen anwachsen, so erhält man ein zweites kongruentes Tetraeder (das Gegentetraeder oder negative Tetraeder, Zeichen: $-\frac{1}{2}(a : a : a)$.



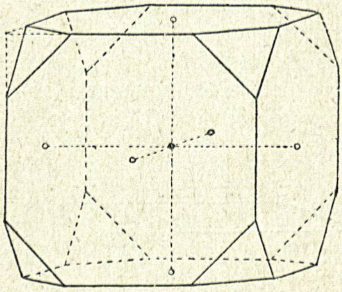

Figur 74.



Figur 75.

Es kann auch vorkommen (Fig. 75), daß beide Tetraeder sich (scheinbar) durchdringen. Solche Kristalle nennt man Durchwachsungszwillinge (Fahlerz). In der Stereometrie gehören sie zu den Sternkörpern.

**Kombinationen.** Sehr oft treten an einem Kristall verschiedene Flächenarten, z. B. Würfel- und Oktaederflächen auf. Man spricht dann von zusammengesetzten Formen oder Kombinationen. Man erhält solche Kombinationen durch Abstumpfung oder Zuspitzung bzw. Zuschärfung der Ecken oder Kanten einer einfachen Kristallform.

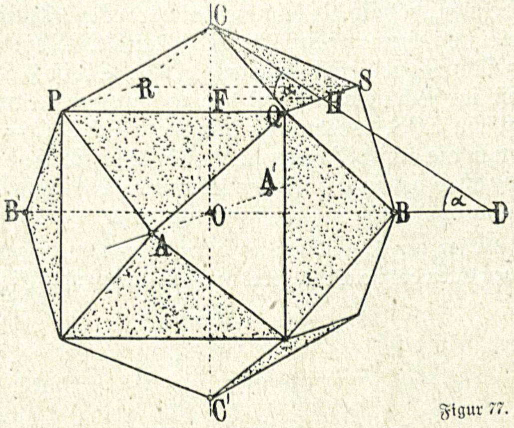


Figur 76.

**Beispiel.** Einem Würfel sollen sämtliche Ecken gleichmäßig abgestumpft werden.

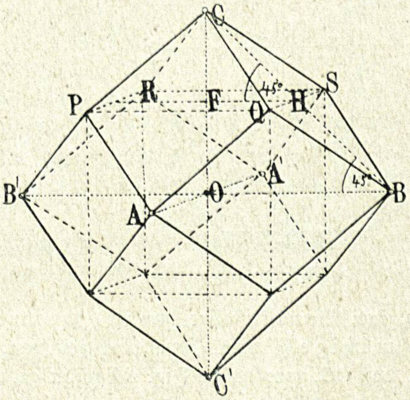
**Lösung.** Da Teilungsverhältnisse durch Parallelprojektion (nach Regel 5. S. 38) nicht verändert werden, hat man nur von jeder Ecke aus auf den von ihr ausgehenden Kanten denselben Bruchteil (z. B. $\frac{1}{4}$) der Kantenlänge abzutragen und durch die erhaltenen Punkte einen Schnitt zu legen, der die Ecke abtrennt. (Fig. 76.) Die Schnittflächen sind offenbar nach ihrer Lage zu den Achsen Oktaederflächen. Wir haben also eine Kombination von $(a : \infty a : \infty a)$ mit $(a : a : a)$.

**Pyramidenwürfel.** Werden den sechs Würfelflächen kongruente quadratische Pyramiden aufgesetzt, so entsteht der in Fig. 77 abgebildete Körper. Er wird von $6 \times 4 = 24$ kongruenten gleichschenkligen Dreiecken begrenzt. Jede Fläche, z. B. $CQS$, schneidet von zwei Achsen endliche Abschnitte ($OC = a$, $OD = ma$) und ist der dritten parallel. Das Kristallzeichen ist demnach $a : ma : \infty a$, wobei $m$ bei natürlichen Kristallen stets einen einfachen rationalen Wert hat (in der Figur ist $m = \frac{3}{2}$). Diese Kristallform kommt z. B. beim Flußspat vor.



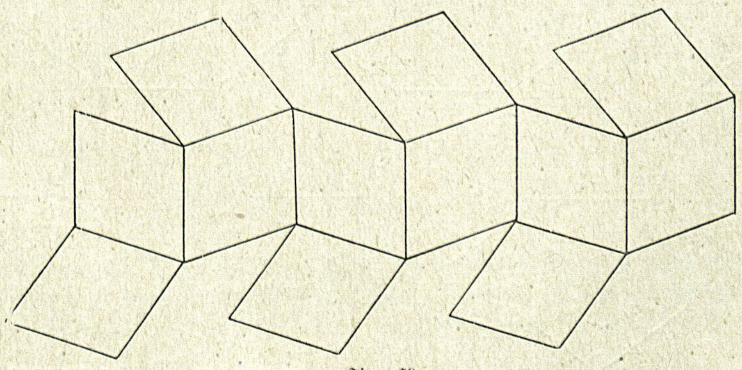

Figur 77.

**Das Rhombendodekaeder oder Rhombenzwölfflach.** Wird in Fig. 77 die Pyramidenhöhe $CF = FH$ oder gleich der halben Würfelkante, so wird der Neigungswinkel der Pyramidenflächen gegen die Würfelflächen $\alpha = 45^0$; je zwei in einer Würfelkante zusammentreffende Pyramidenflächen fallen daher in eine zusammen, und es entsteht ein von zwölf kongruenten Rhomben begrenzter Körper, das Rhombendodekaeder, auch Granatoeder genannt, weil der Granat meistens in dieser Form vorkommt. Sein Zeichen ist $a : a : \infty a$, da $m = 1$ ist. Fig. 78 stellt den Körper, Fig. 79 sein Netz dar. Die wahre Gestalt der Rhomben ergibt sich aus den Längen der Diagonalen, die aus Fig. 78 leicht zu ermitteln sind. Ist das Rhombendodekaeder im stereometrischen Sinne ein „regelmäßiger" Körper?




Figur 78.

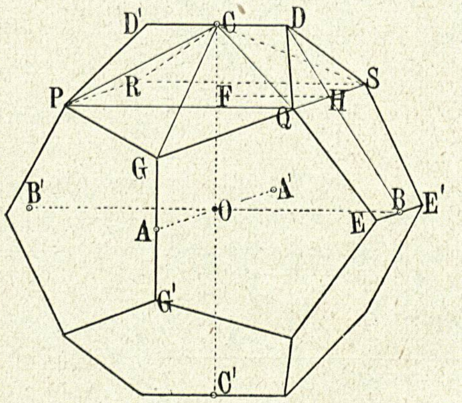
**Das Pentagondodekaeder oder Fünfeckszwölfflach.** Der Pyramidenwürfel hat auch einen Halbflächner, den wir auf dieselbe Weise erhalten, wie das Tetraeder aus dem Oktaeder. Es sollen z. B. die weißen Flächen der Fig. 77 sich soweit aus-



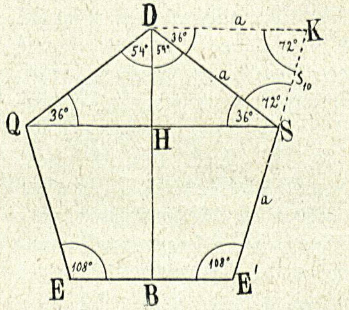
Figur 79.

dehnen, daß sie die schattierten verdecken. Dann bilden die wie Dachflächen geneigten Pyramidenflächen $CPQ$ und $CRS$ die Firstkante $DD'$ (Fig. 80, die Bezeichnung ist dieselbe wie in Fig. 77). Sie ist // $BB'$ (weshalb?). Ihr Endpunkt $D$ ist ihr Schnittpunkt mit der verlängerten Symmetrale $BH$ der Pyramidenfläche $BQS$. Wegen der Symmetrie ist $D'C = DC$. In derselben Weise findet man die durch $C'$ gehende Kielkante sowie die durch $A$ gehende vertikale und die durch $B$ gehende horizontale Kante. Die unsichtbaren Kanten durch $A'$ und $B'$ sind auch leicht zu zeichnen, aber der Deutlichkeit wegen fortgelassen.

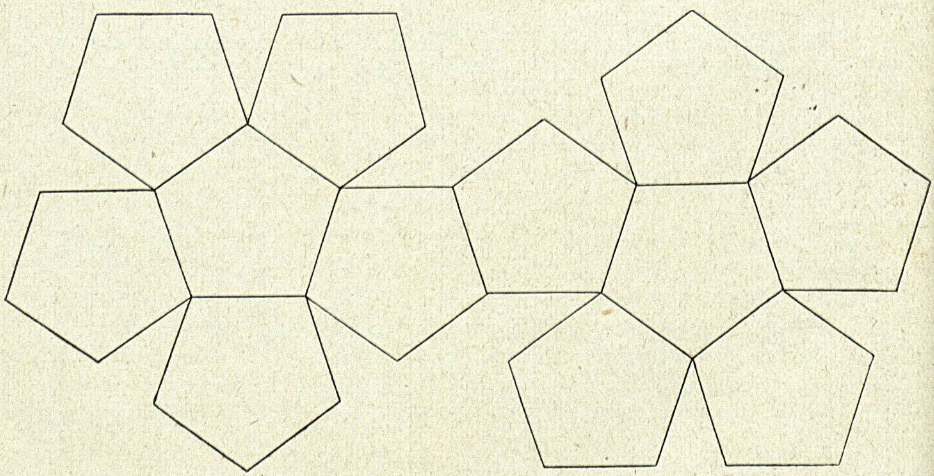
Außer den 12 Endpunkten aller dieser Kanten gehören noch die acht Würfelecken zu den Ecken des neuen Körpers (gib den Grund nach Fig. 80 an). Er wird von 12 (weshalb?) Fünfecken begrenzt, die zwar kongruent und symmetrisch, aber bei natürlichen Kristallen niemals regelmäßig sind. Sein Kristallzeichen ist $\frac{1}{2}$ ($a : ma : \infty a$). Man kann aber auch leicht das regelmäßige Fünfecks-Zwölfflach zeichnen, wenn man die Pyramidenhöhe $CF$ so bemißt, daß $OC$, wie es in Fig. 80 schon gemacht ist, durch $F$ stetig geteilt wird.




Figur 80.



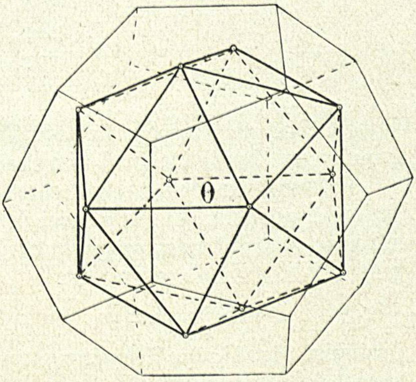

Figur 81.



Figur 82.

**Beweis.** Aus dem Trapez $CDBO$ folgt $OF : FC = BH : HD$. Ist nun das Fünfeck $EE'QSD$ regelmäßig, wie in Fig. 81 und zieht man $DK \parallel EE'$ und verlängert $E'S$, so findet man nach Berechnung der Winkel, daß $\triangle DKS$ das Bestimmungsdreieck eines regelmäßigen Zehnecks ist. Es verhält sich daher $BH : HD = E'S : SK = DS : SK$. Nach dem Satz von der Zehnecksseite ist dies aber das Teilungsverhältnis der stetigen Teilung ($\approx 1 : 0{,}62$).

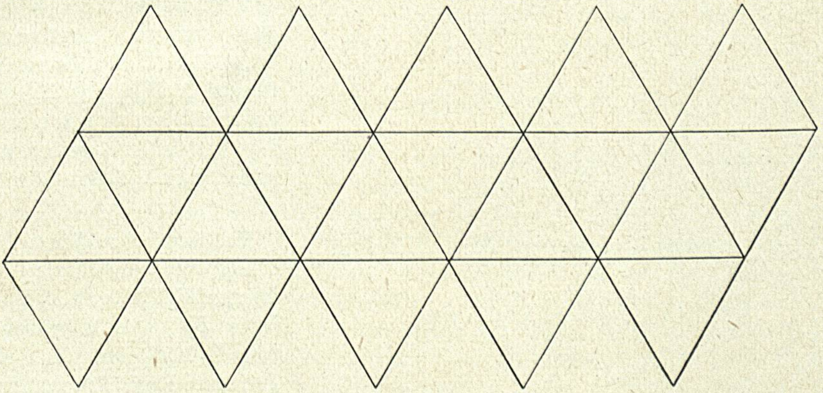
Das Achsenverhältnis einer Fläche des Körpers ist $\approx a : 1{,}62\,a : \infty\,a$. m ist irrational, während es bei natürlichen Kristallen stets rational ist. Fig. 82 zeigt das Netz des regelmäßigen Pentagondodekaeders.



Figur 83.

**Das regelmäßige Ikosaeder oder Zwanzigflach.** Bestimmt man (Fig. 83) die Mittelpunkte sämtlicher Flächen eines regelmäßigen Pentagondodekaeders (wie findet man sie?), so erhält man 12 gleich weit von $O$ entfernte und gleichmäßig im Raum um $O$ herum verteilte Punkte. Die Verbindungslinien je zweier benachbarter Punkte liefern einen Körper, der von 20 kongruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird, also das aus der Stereometrie bekannte regelmäßige Ikosaeder. Das Netz zeigt Fig. 84. Als Kristall kommt dieser Körper nicht vor.

***Allgemeine Konstruktionsmethode für Kristallformen.** Es seien $OX$, $OY$, $OZ$ die drei Achsenrichtungen eines Kristalls, $a : ma : na$ sein Kristall-


Figur 84.

zeichen. In dem sogenannten regulären Kristallsystem, dem die bisher besprochenen Formen angehören, sind alle drei Achsen gleichartig. Wir können sie daher vertauschen. Wenn eine Fläche auf der X-, Y- und Z-Achse die Abschnitte $a$, $ma$ und $na$ hat, so müssen auch Flächen vorhanden sein, die auf den Achsen die Abschnitte

$$\begin{array}{c} a,\ na,\ ma \\ ma,\ a,\ na \\ ma,\ na,\ a \\ na,\ a,\ ma \\ na,\ ma,\ a \end{array}$$

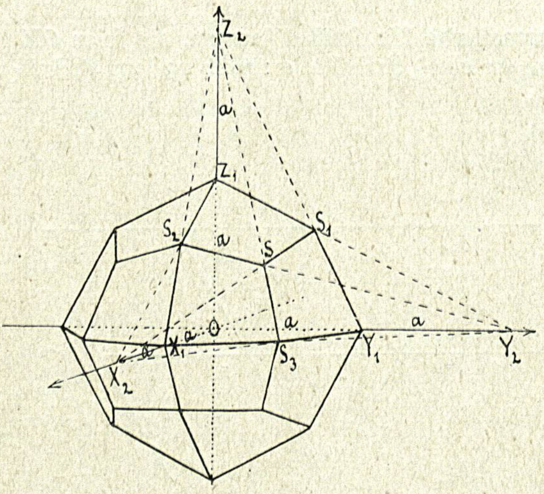
besitzen. Das gilt für jeden der acht Raumachtel (Oktanten), in welche der Kristallraum durch die drei Achsenebenen geteilt wird. Wir haben also die drei Abschnitte in den angegebenen sechs Zusammenstellungen auf den drei Achsen abzutragen, durch je drei so erhaltene Punkte die Ebenen zu legen und ihre Schnittkanten zu zeichnen sowie die Ecken zu bestimmen. Ein Beispiel soll dies näher erläutern.

**Beispiel.** Die Kristallform $a : 2a : 2a$ zu zeichnen.

**Lösung.** Fig. 85. Die Abschnitte $a$, $2a$, $2a$ lassen nur drei Zusammenstellungen zu (weshalb?). Diese lauten

$$\begin{array}{c} a,\ 2a,\ 2a \\ 2a,\ a,\ 2a \\ 2a,\ 2a,\ a. \end{array}$$

Es gibt also in jedem Oktanten nur drei Flächen. Ich trage $OX_1 = OY_1 = OZ_1 = a$ und $OX_2 = OY_2 = OZ_2 = 2a$ ab ($OX_1$ und $OX_2$ in der gegebenen Verkürzung, hier $\frac{1}{3}$, ab) und lege nun durch die Punkte $X_1Y_2Z_2$, $X_2Y_1Z_2$ und $X_2Y_2Z_1$ die Ebenen. Sie schneiden die Achsenebenen in den gleichnamigen „Spurendreiecken" $X_1Y_2Z_2$ usw. Da nun die Ebenen $X_2Y_1Z_2$ und $X_2Y_2Z_1$ außer $X_2$ den Spurenschnittpunkt $S_1$ gemeinsam haben, so ist $X_2S_1$ ihre Schnittlinie.




Figur 85.

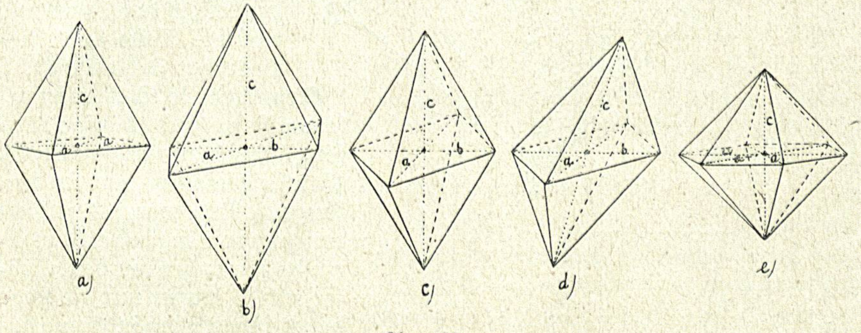
Aus demselben Grunde ist $Y_2S_2$ die Schnittlinie der Ebenen $X_2Y_2Z_1$ und $X_1Y_2Z_2$ sowie $Z_2S_3$ die Schnittlinie von $X_1Y_2Z_2$ und $X_2Y_1Z_2$. Diese drei Schnittlinien müssen nach XVI. S. 23 durch einen Punkt $S$ gehen, der die von den drei Ebenen gebildete Ecke darstellt. $SS_1$, $SS_2$, $SS_3$ sind die von $S$ ausgehenden Kanten. Zieht man noch die Eckabschnitte $X_1S_3$, $X_1S_2$, $Y_1S_1$, $Y_1S_3$, $Z_1S_2$, $Z_1S_1$ der Spuren als Kanten aus, so hat man den vorderen, oberen, rechten Oktanten des

Kristalles fertig. In derselben Weise kann man die übrigen Oktanten zeichnen. Bequemer ist es aber, hierbei von der Symmetrie Gebrauch zu machen. Die drei Achsenebenen sind zugleich Symmetrieebenen.

Der entstandene Körper wird von zwölf kongruenten Drachenvierecken begrenzt. Er heißt Deltoid-Ikositetraeder (Vierundzwanzigflach).

**Kristallsysteme.** Außer dem regulären Kristallsystem, das durch drei gleiche aufeinander senkrechte Achsen gekennzeichnet ist, gibt es noch die folgenden, deren Grundformen, die Doppelpyramiden, aus Fig. *86* ersichtlich sind: Das quadratische System: Drei aufeinander senkrechte Achsen, von denen nur zwei ($a$) gleich und an der dritten ($c$) verschieden sind. Zeichen der quadratischen Doppelpyramide: $a : a : c$. Fig. *86 a*).

Das rhombische System. Drei aufeinander senkrechte, ungleiche Achsen ($a, b, c$). Zeichen der rhombischen Doppelpyramide: $a : b : c$. Fig. *86 b*).

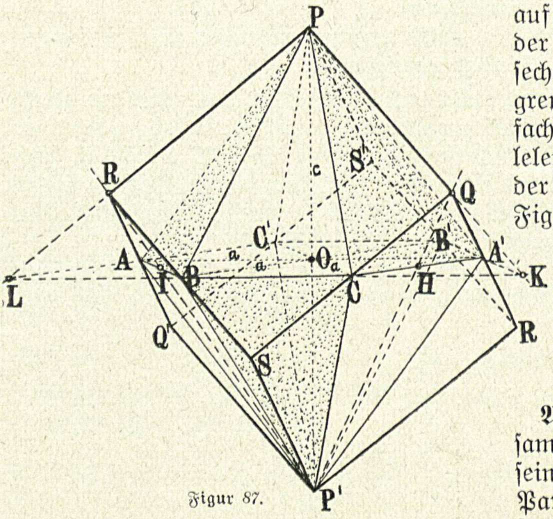



Figur *86*.

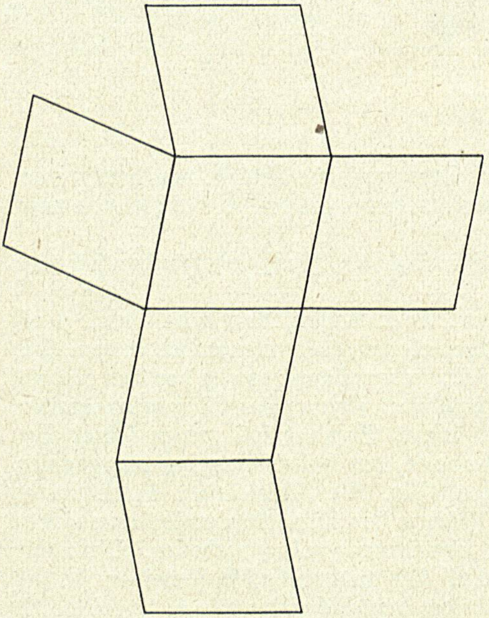
Das monokline System. Drei ungleiche Achsen, von denen zwei ($b$ und $c$) aufeinander senkrecht stehen, während die dritte ($a$) schief von vorn nach hinten aufsteigt. Fig. *86 c*).

Das trikline System. Drei ungleiche, schief aufeinander stehende Achsen ($a$, $b$, $c$). Fig. *86 d*).

Das hexagonale System. Vier Achsen, von denen drei gleich sind, in einer Ebene liegen und Winkel von $60^0$ miteinander bilden. Die vierte, die Hauptachse, steht auf der Ebene im Schnittpunkte der drei Nebenachsen senkrecht. Fig. *86 e*). Zeichen der hexagonalen Doppelpyramide: $a : a : \infty a : c$. Von den Kristallen dieses Systems soll wegen seiner Bedeutung für die Optik das Rhomboeder, der Halbflächner der hexagonalen Doppelpyramide, gezeichnet werden (Fig. *87*). Wir lassen in bekannter Weise die abwechselnden weißen Flächen der Doppelpyramide anwachsen, bis sie die übrigen (in der Figur schattierten) völlig verdecken. Wenn die Flächen $PBC$ und gleichzeitig $PA'B'$ sich ausbreiten, so schneiden sie sich in der neuen Kante $PQ$, die von $P$ nach dem Schnittpunkte $K$ von $BC$ und $B'A'$ laufen muß (Satz XVI. S. *23*), denn $K$ ist der Schnittpunkt der drei Ebenen $PBC$, $PB'A'$ und der Grundebene der Doppelpyramide. Aus Gründen der Symmetrie muß $Q$ der Schnittpunkt von $PK$ mit der Symmetrale $P'H$ des Dreiecks $P'CA'$ sein. Genau in derselben Weise findet man links die Rhomboederkante $PR$. Auch die anderen Kanten kann man einzeln




Figur 87.



Figur 88.

auf diese Weise bestimmen. Da der entstehende Körper aber von sechs kongruenten Rhomben begrenzt wird, kann man ihn einfacher durch Ziehen von Parallelen ergänzen, ähnlich wie bei der Zeichnung eines Würfels. Fig. 88 zeigt das Netz eines Kalkspatrhomboeders, der wegen seiner Eigenschaft, das Licht stark doppelt zu brechen, in der Optik eine wichtige Rolle spielt (isländischer Doppelspat).

**Axonometrie.** Dem aufmerksamen Leser wird es aufgefallen sein, daß in diesem Abschnitt von Parallelprojektion nur im Anfange die Rede war, als die Richtungen und Längen der Kristallachsen besprochen wurden. Später wurde immer nur die Lage der Kristallflächen in Bezug auf die Achsen, nicht aber zur Bildebene betrachtet. Nachdem das Achsenkreuz einmal festgelegt war, konnten wir alle Ebenen, Kanten und Ecken des Kristalles durch ihre Lage zu den Achsen in der Zeichnung darstellen. Diese Methode ist nicht nur auf Kristalle, sondern auf beliebige Raumgebilde anwendbar. Man bezeichnet sie als „Axonometrie" und nennt die nach ihren Regeln erhaltenen Zeichnungen a x o n o m e t r i s c h e  D a r s t e l l u n g e n. Die schiefe Parallelprojektion ist zur Zeichnung der Achsen besonders geeignet, weil man die drei in der Regel aufeinander senkrechten Achsen stets so annehmen kann, daß zwei von ihnen auch in der Zeichnung senkrecht aufeinander und unverkürzt erscheinen, und die dritte in beliebiger Richtung und beliebiger Verkürzung erscheint. Alle den Achsen parallelen Strecken erscheinen auch in der Zeichnung den Achsen parallel und in denselben Verhältnissen verzerrt, wie die Achsen im Vergleich zu ihren wahren Längen verzerrt erscheinen. Die so erhaltenen Bilder lassen auch an Schönheit und Klarheit nichts zu wünschen übrig. In manchen Fällen wendet man auch die schwierigere senkrechte Projektion der Achsen an und spricht dann von orthogonaler Axonometrie.

## Übungsaufgaben.

1. Stumpfe einem Würfel die Ecken so weit ab, daß die Würfelkanten verschwinden.
2. Stumpfe einem Oktaeder die Ecken ab.
3. Desgl. einem Tetraeder.
4. Desgl. einem Pyramidenwürfel die Pyramidenecken.
5. Desgl. einem Rhombendodekaeder a) die vierseitigen, b) die dreiseitigen Ecken. Gib die Kombinationen an, die bei den vorhergehenden Aufgaben entstehen.
6. Bestimme bei folgenden Körpern die Mittelpunkte sämtlicher Flächen und verbinde die benachbarten Mittelpunkte auf alle Arten. Was entsteht? a) Würfel; b) Oktaeder; c) Tetraeder; d) Rhombendodekaeder; e) Ikosaeder.
7. Stumpfe einem regelmäßigen Dodekaeder die Ecken ab.
8. Desgl. einem regelmäßigen Ikosaeder.
9. Konstruiere ein Pyramidenoktaeder durch Aufsetzen von gleichhohen dreiseitigen Pyramiden auf die Oktaederflächen. (Die Pyramidenspitzen sind die Ecken eines Würfels.)

*10. Konstruiere das Pyramidenoktaeder $a : a : 2a$ nach der allgemeinen Methode S. *56*.

*11. Konstruiere das Hexakisoktaeder (Achtundvierzigflach) $a : 2a : 3a$.

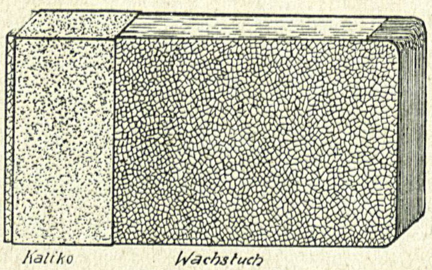
12. Stumpfe der quadratischen Doppelpyramide a) die Endecken; b) die Mittelecken ab.
13. Konstruiere im quadratischen System die Kombination von $a : a : \infty c$ mit $a : a : c$.
14. Desgl. $a : a : \infty c$ mit $a : \infty a : c$.
15. Zeichne eine rhombische Säule mit Endfläche ($a : b : \infty c$ mit $\infty a : \infty b : c$).
16. Zeichne eine sechsseitige Doppelpyramide 2. Ordnung ($a : 2a : 2a : c$).
17. Zeichne eine sechsseitige Doppelpyramide 1. Ordnung ($a : a : \infty a : c$) mit Endflächen ($\infty a : \infty a : \infty a : c$).
18. Zeichne die Kombination der hexagonalen Säule 1. Ordnung ($a : a : \infty a : c$) mit Pyramide 1. Ordnung ($a : a : \infty a : c$).
19. Stumpfe ein Rhomboeder an den Endpunkten der Hauptachse ab.
20. Zeichne durch Erweiterung der schattierten Flächen in Fig. *87* das Gegenrhomboeder. (Zeichen: $-\frac{1}{2}(a : a : \infty a : c)$ mit $\infty a : \infty a : \infty a : c$).

# Anhang.

## Veränderliche Figuren (bisher in A IV).

Die funktionale Abhängigkeit veränderlicher Größen, die für den heutigen mathematischen Unterricht von so großer Bedeutung geworden ist und auch in diesem Lehrbuche überall betont wird, bedeutet in der Geometrie Veränderlichkeit der Figuren. Entweder die ganze Figur oder einzelne Teile derselben müssen als veränderlich vorgestellt werden. Es liegt daher der Wunsch nahe, solche Veränderungen zu veranschaulichen. Hierzu wurde zuerst von Münch (Darmstadt) der Kinematograph benutzt. Als nächstliegendes und fast kostenloses Mittel kann aber auch das Mutoskop in seiner einfachsten Gestalt als mit dem Daumen durchzublätterndes Kinoheft dazu dienen. Solche Kinohefte können mit Leichtigkeit von geschickten Schülern im Linearzeichen- und Handfertigkeitsunterricht unter Anleitung des Lehrers für alle Gebiete des mathematischen Unterrichts hergestellt werden und bieten eine gute Gelegenheit zur Übung im genauen Zeichnen. So kann in kurzer Zeit für die mathematische Sammlung ein reiches, leicht aufzubewahrendes und selbst bei starker Benutzung fast unverwüstliches Anschauungsmaterial angesammelt werden. Um anfänglichen Mißerfolgen vorzubeugen, sei hier nach den Erfahrungen des Verfassers eine kurze Anleitung zur Herstellung dieser Hefte gegeben:

Das zur Zeichnung unerläßliche Reißbrett wird an den Rändern durch Aufkleben von (käuflichen) Papiermaßstäben zweckmäßig mit einer Millimeterteilung versehen. Das Zeichenpapier sei nicht zu stark, aber möglichst elastisch und glatt. Für die meisten Hefte werden $6 \times 8 = 48$ Zeichnungen völlig genügen, oft auch weniger. Das Blatt wird deshalb in 48 rechteckige Felder von der handlichen Größe $6 \times 10{,}5$ cm² geteilt (Fig. *90*). In jedem Felde bleiben links 4 cm von der Zeichnung frei, so daß für diese ein Platz von etwa $6 \times 6$ cm² verfügbar ist. Zuerst werden in alle Felder die festbleibenden Punkte und Linien eingetragen, dann die veränderlichen Teile in ihren verschiedenen, natürlich vorher zu überlegenden, aufeinander folgenden Phasen. Beim Ausziehen der Zeichnungen ist die Verwendung mehrerer Farben sehr zu empfehlen. Größte Sorgfalt und Genauigkeit ist unbedingt erforderlich. Der fertige Bogen wird mit einer Schere in seine 48 Blätter zerschnitten, diese werden aufeinander gelegt, der mit einem Titelblatt versehene



Figur 89.

Block am Rücken verleimt, in einer Schraubenpresse gepreßt, an den anderen Rändern, besonders aber rechts (am besten vom Buchbinder) beschnitten und mit einem schwarzen Wachstucheinbande versehen. Schließlich wird links dicht am Rücken noch ein etwa 2,5 cm breiter schwarzer Kalikostreifen fest um den Block geleimt und die rechte Seitenfläche des Blockes mit Tusche geschwärzt (Fig. *89*). Durchblättert man den Block in bekannter Weise mit Hilfe des Daumens, so erblickt man die Veränderungen der Figur mit vollkommener Deutlichkeit.

Die als Beispiel beigefügte Zeichnung Fig. *90* stellt die Umlegung eines Dreiecks in die Zeichenebene dar. Die einzelnen Bilder sind Schrägbilder mit 90° Verzerrungswinkel. Das letzte zeigt die Affinität des umgelegten Dreiecks mit dem Grundriß.

Zur Veranschaulichung durch Kinohefte eignen sich z. B.:

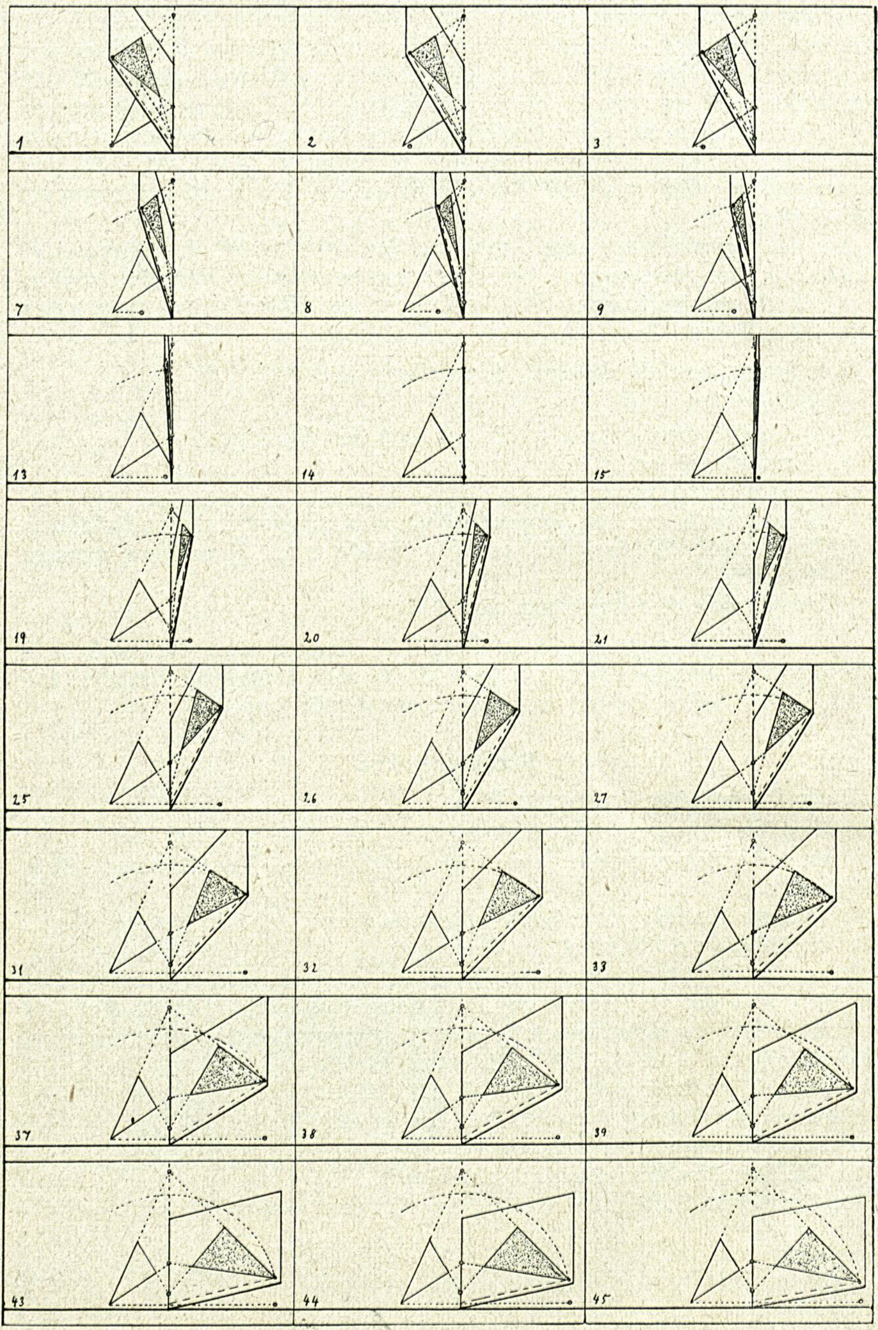
1. geometrische Örter,
2. Flächenverwandlungen (z. B. der Satz des Pythagoras),
3. Grenzübergänge,
4. Maxima und Minima,
5. Determinationen von planimetrischen und trigonometrischen Aufgaben,
6. funktionelle Abhängigkeit gewisser Stücke einer Figur von anderen Stücken,
7. mechanische Konstruktionen von Kurven.

Daß auch viele physikalische (z. B. die Wellenbewegung), technische und astronomische Vorgänge sich auf diese Weise ohne kostspielige Modelle veranschaulichen lassen, bedarf wohl kaum der Erwähnung.

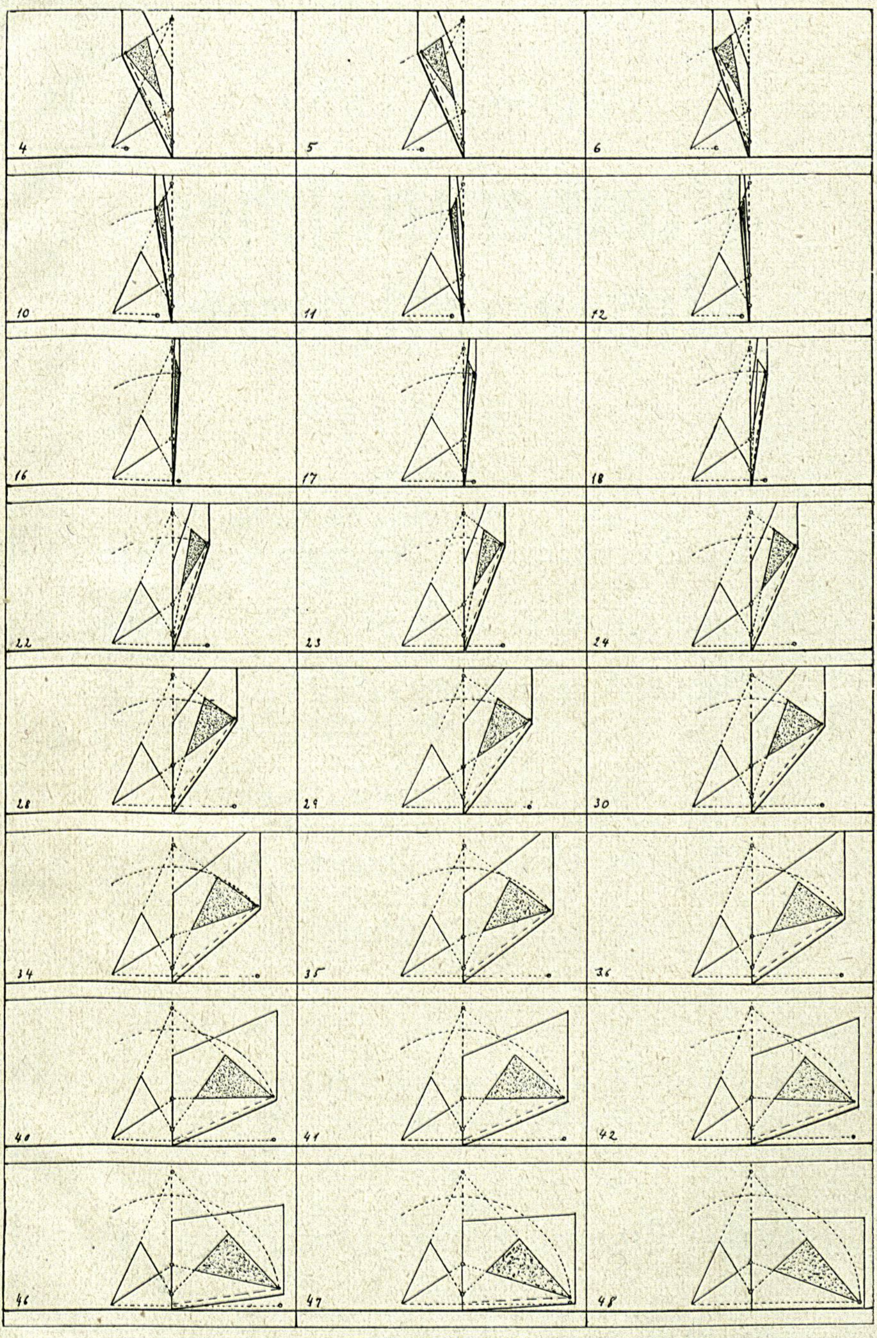
### Übungsaufgaben.

Stelle Kinohefte her für folgende Sätze:

1. Durch die Bewegung eines Punktes entsteht eine Linie (z. B. ein Kreis).
2. Durch die Bewegung einer Linie entsteht eine Fläche. (Parallelogramm, Kreis, Kegelmantel.)
3. Durch die Bewegung einer Fläche entsteht ein Körper. (Quader, Zylinder, Kegel.)
4. Die Tangente als Grenzfall der Sekante.
5. Peripheriewinkel über demselben Bogen sind gleich.
6. Satz des Euklid (1. Verwandlung eines Kathetenquadrats ($a^2$) in ein Parallelogramm, 2. Drehung dieses Parallelogramms, 3. Verwandlung des Parallelogramms in das Rechteck *c. p.* S. Fig. 206 in Reinhardt-Zeisberg A I).
7. Geometrische Örter nach A I Fig. 50, 131, 141, 142.
8. Harmonische Teilung einer Strecke A II Fig. 44.
9. Der apollonische Kreis. A II Fig. 47.
10. Die Projektion einer Strecke ist eine Strecke.
11. Grund- und Aufriß eines Punktes liegen in einer Senkrechten zur Achse.




Figur 90 (linke Hälfte).




Figur 90 (rechte Hälfte).

Reinhardt-Zeisberg

# Mathematisches Unterrichtswerk

(ministeriell genehmigt)

Gliederung:

Hofmann, Rechenbuch für Knaben
Frisch-Staudenmaier, Rechenbuch für Mädchen
je 3 Hefte
Hofmann, Aufgabensammlung für den Rechenunterricht an Aufbauschulen. 1 Heft
Ausgabe A für Realanstalten, 4 Teile in 6 Bänden
„ C „ Gymnasien und Realgymnasien, 4 Teile in 6 Bänden
„ B „ Mädchenschulen, 5 Teile
Hofmann, Vierstellige Logarithmentafel
Detlefs, Darstellende Geometrie, 3 Hefte
Heft 1: Untertertia bis Untersekunda
„ 2: Obersekunda
„ 3: Prima

*

Schlüssel zu allen Teilen (ausschließlich der Darstellenden Geometrie) im Druck bzw. z. T. erschienen

*

Verlag Moritz Diesterweg, Frankfurt a. M.