

Biblioteka Główna i OINT
Politechniki Wrocławskiej



100100143627

11/11/1907
11/11/1907

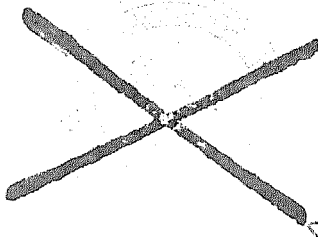
Die Deformationsmethode

Von

Dr. techn. h. c. A. Ostenfeld

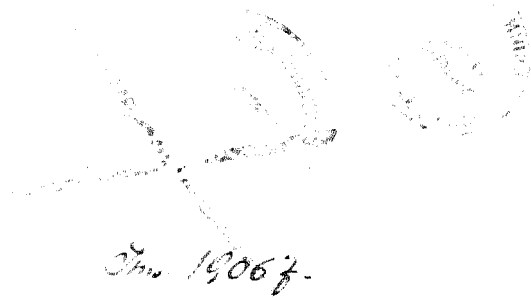
Professor a. d. Technischen Hochschule Kopenhagen

Mit 42 Abbildungen



Berlin
Verlag von Julius Springer
1926

1926.278



Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen, vorbehalten.

Vorwort.

Das hier vorliegende Heftchen ist eine stark erweiterte und durchgearbeitete Sammelausgabe mehrerer gesonderter Arbeiten, die in den Zeitschriften „Ingeniören“ 1920, S. 539 und 1922, S. 285 sowie im „Eisenbau“ 1921, S. 275 und im „Bauingenieur“ 1923, S. 34 u. 69 erschienen sind. Es wird hier gezeigt, daß es bei der Berechnung wenigstens gewisser Arten von statisch unbestimmten Systemen von Vorteil sein kann, Formänderungsgrößen statt wie gewöhnlich Kraftgrößen als Unbekannte einzuführen.

Dieser Vorgang ist gewiß nicht neu. In der mathematischen Elastizitätstheorie ist es bekanntlich sogar der am häufigsten angewandte, und auch in der Baustatik ist die Methode früher zur Anwendung gekommen, vor allem bei der von Mohr angegebenen Berechnung der Sekundärspannungen (1892), und später auch gelegentlich durch andere. Bei diesen früheren Anwendungen war jedoch gewöhnlich nur von der Lösung spezieller Aufgaben die Rede, und die Behandlung blieb ohne eigentlichen Zusammenhang mit den sonst üblichen Berechnungsweisen. Als einzige systematische Arbeit möge hier „Die Methode der Alpha-Gleichungen“ von A. x. Bendixsen (Verlag Julius Springer, Berlin 1914) erwähnt werden.

Hier ist nun erstens erwiesen, daß diese Formänderungs- oder Deformationsmethode der gewöhnlichen Kraftmethode genau gleichwertig ist und dieser sozusagen dualistisch entspricht; und zweitens ist die Methode in ein festes System gebracht, wodurch ihre Anwendung wesentlich erleichtert wird und oft sich als der Kraftmethode überlegen erweist. Dies letztere kommt namentlich dadurch zum Ausdruck, daß die nötigen Gleichungen rein mechanisch, nach festen Formeln, aufgeschrieben werden können.

Weiter ist gezeigt, daß sich die Methode ganz besonders für eine stufenweise Berechnung eignet, wodurch erreicht wird, daß immer nur je eine Gleichung aufzulösen ist. Diese bedeutungsvolle Vereinfachung ist namentlich für alle einstöckigen, aus geraden oder gekrümmten Balken aufgebauten Rahmenkonstruktionen erreichbar und für solche in ein festes System gebracht, so daß die Rechnung ganz mechanisch durchgeführt werden kann.

Speziell sei noch auf die einfache Ermittlung der Einflußlinien (siehe namentlich Kap. 6 und 9), zu der die Methode führt, aufmerksam gemacht.

Schließlich ist im zweiten Abschnitt das Verfahren auf räumliche Rahmenkonstruktionen auszudehnen versucht worden, und für eine spezielle einfache Klasse solcher Konstruktionen, die u. a. bei räumlichen Pfahlrosten vorkommt, sind fertige Formeln für die Berechnung angegeben.

Die verschiedenen Berechnungsverfahren sind durch 9 durchgerechnete Zahlenbeispiele erläutert.

Die Methode macht im Anfang, wegen der vollständigen Umkehrung der Begriffe, einen etwas fremdartigen Eindruck; so verwendet sie, um nur eines zu nennen, im Gegensatz zu der altbekannten Kraftmethode, ein im höheren Grade statisch unbestimmtes Hauptsystem als das vorliegende System; und sie erfordert daher, um damit völlig vertraut zu werden, eine gewisse Arbeit und Übung. Indessen glaubt der Verfasser, daß sich diese Mühe reichlich lohnt, indem die Methode in vielen Fällen bedeutende Abkürzungen der Rechnung möglich macht. Natürlich ist sie jedoch kein Universalmittel; sie vergrößert die Zahl der zur Verfügung stehenden Berechnungsweisen, befreit aber nicht davon, sich im voraus in jedem einzelnen Falle überlegen zu müssen, welches Verfahren das zweckmäßigste ist.

Kopenhagen, im Dezember 1925.

A. O.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
1. Einleitung	1
A. Ebene Rahmenkonstruktionen.	
Konstruktion, ausschließlich aus geraden Balken zusammengebaut.	
2. Grundbegriffe, Knotenpunktfigur	8
3. Grundgleichungen für gerade Balken	10
a) Unveränderliches Trägheitsmoment	10
b) Veränderliches Trägheitsmoment	11
4. Rahmenkonstruktionen mit unbeweglicher Knotenpunktfigur	14
a) Berechnung mittels eines Systems von gleichzeitig aufgestellten Gleichungen	14
b) Stufenweise Berechnung	17
5. Konstruktionen mit beweglicher Knotenpunktfigur	23
a) Alle Gleichungen auf einmal aufgestellt	23
b) Stufenweise Berechnung	27
6. Einflußlinien	30
7. Knoten mit zwei und drei Bewegungsmöglichkeiten; Erweiterung der stufenweisen Berechnung	37
8. Krumme Balken (Bogen) als Teil von Rahmenkonstruktionen	50
1. Zweigelenbogen	50
2. Gelenkloser Bogen	51
9. Kontinuierliche Bogenträger auf elastischen Zwischenpfeilern	63
10. Mehrstöckige Rahmenkonstruktionen	78
11. Vierendeelbalken	86
B. Räumliche Rahmenkonstruktionen.	
12. Grad der statischen Unbestimmtheit; allgemeine Berechnungsmethoden	99
13. Stufenweise Berechnung; Vereinfachung der Knotengleichungen	104
14. Spezielle Fälle allgemeinerer Bedeutung	108
a) Ein starrer Körper als Teil der Konstruktion (räumliche Pfahlroste)	108
b) Eine starre Scheibe als Teil der Konstruktion	117
c) Elastische Scheibe (oder Körper) als Teil der Konstruktion	117

1. Einleitung.

Bei der Berechnung statisch unbestimmter Systeme kann bekanntlich statt einer einfachen Stabkraft, eines Momentes oder dergleichen auch eine Funktion einer oder mehrerer Kräfte oder Momente als überzählig eingeführt werden, und auf diese Weise hat man oft die Auflösung der Elastizitätsgleichungen zu vereinfachen versucht. Es ist also eigentlich nur ein besonderes Eliminationsverfahren, wovon hier die Rede ist. Als ein Weiterführen dieses Verfahrens kann natürlich auch die Einführung einer Verschiebung (Formänderung) als überzählig, wie bisweilen versucht, aufgefaßt werden; dieser Gedanke kann indessen auch mit Recht dem erstgenannten, nach welchem eine Kraft als überzählig betrachtet wird, als völlig gleichwertig zur Seite gestellt werden. Bei Berechnung von Tragkonstruktionen kann überhaupt nach diesen beiden Arten von Größen gefragt werden: „Spannungen“ und „Formänderungen“, und bei vielen Aufgaben, so z. B. in der Elastizitätstheorie, denkt man sich ebenso natürlich die Formänderungen als die in erster Linie Unbekannten. In der Baustatik geht die Anwendung dieses Verfahrens wenigstens bis zum Jahre 1892 zurück, wo Mohr mit dessen Hilfe seine Berechnung der Nebenspannungen aufstellte. Seitdem ist der Gedanke zwar wiederholt zur Lösung vereinzelter Aufgaben benutzt worden, blieb jedoch immer ohne richtigen Zusammenhang mit der sonst üblichen „Kraftmethode“.

Nachdem erkannt worden war, daß sich die Berechnung verschiedener Tragkonstruktionen, insbesondere von Rahmenkonstruktionen, auf diesem Wege einfacher gestalten läßt, ist zwar auch des öfteren der Versuch gemacht worden, das Verfahren systematisch zu behandeln¹⁾. Trotzdem ist die Methode bisher, wie gesagt, im allgemeinen als etwas für sich, ohne eigentliche Verbindung mit der

¹⁾ Besonders sei hier die Arbeit des dänischen Ingenieurs A. x. Bendixsen, „Die Methode der Alpha-Gleichungen“ (Verlag Julius Springer, Berlin 1914) erwähnt.

gewöhnlichen Theorie der statisch unbestimmten Systeme, betrachtet worden. Hier soll nun gezeigt werden, daß die „Kraftmethode“, nach der eine Spannung, eine Stabkraft, ein Moment oder dergleichen, und die „Deformationsmethode“, wo eine Formänderung als überzählig eingeführt wird, zwei genau parallele, sozusagen einander dualistisch entsprechende Methoden sind.

Die überzähligen Formänderungen werden im folgenden $\zeta_a, \zeta_b \dots$ genannt (wir benutzen fernerhin auch in dieser Verbindung die Bezeichnung „überzählig“, obschon diese, wie sich im folgenden zeigen wird, hier nicht besonders passend erscheint). Da sowohl Formänderungen wie Spannungen lineare Funktionen der Belastung sind, kann eine beliebige Stabkraft (Moment usw.) als:

$$S = S_0' - S_a' \zeta_a - S_b' \zeta_b \dots \quad (1)$$

geschrieben werden. Die Bedeutung von $S_0', S_a' \dots$ kann aus der Gl. (1) entnommen werden und ist der Bedeutung der Größen $S_0, S_a \dots$, wenn die Spannkkräfte $X_a, X_b \dots$ als überzählig eingeführt worden sind, ganz analog. Ebenso wie man immer als $X_a, X_b \dots$ Spannkkräfte überzähliger Stäbe, eventuell Stützstäbe, innere Momente usw. wählen kann, so daß $X_a, X_b \dots$ immer innere Kräfte im System bezeichnen, ist es hier möglich, wenn ζ_a die Verschiebung eines Punktes a in einer bestimmten Richtung bedeutet, sich einen Stab hinzugefügt zu denken, welcher von a ausgeht und mit der nämlichen Richtung nach einem festen Punkt läuft, und somit ζ_a als die Verlängerung dieses gedachten Stabes aufzufassen. Ist ζ_a die gegenseitige Verschiebung zweier Punkte a , wird der gedachte Stab als Verbindung dieser zwei Punkte eingefügt. Bedeutet ζ_a eine Winkeländerung, so denke man sich statt des Stabes einen biegefesten Arm, vom Punkte a ausgehend, usw. — S_0' in Gl. (1) bezeichnet dann die Stabkraft (das Moment usw.), welche entsteht, wenn allen hinzugefügt gedachten Stäben die Längenänderung Null zugeschrieben wird (den erwähnten gedachten Armen die Drehung Null). S_a' bedeutet die Stabkraft, welche durch eine Verlängerung -1 des in a hinzugefügten Stabes (oder eine Drehung -1 des in a gedachten Armes) hervorgerufen wird, während alle übrigen gedachten Stäbe die Verlängerung Null erhalten und die äußere Belastung entfernt worden ist.

Hierdurch tritt der Unterschied zwischen der Kraft- und der Deformationsmethode deutlich hervor. Wenn $X_a, X_b \dots$ überzählige Kräfte bezeichnen, ergibt sich durch Nullsetzen von $X_a, X_b \dots$ ein Hauptsystem, das entweder statisch bestimmt oder jedenfalls weniger statisch unbestimmt ist als das vorliegende System; wenn dagegen $\zeta_a, \zeta_b \dots$ Verschiebungen bedeuten, führt die Nullsetzung von

$\zeta_a, \zeta_b \dots$ zu einer statischen Unbestimmtheit höheren Grades, indem die hinzugefügten Stäbe (Arme) dann als Stützen (Einspannungen) auftreten. Prinzipiell tut dies natürlich nichts zur Sache; wenn es überhaupt möglich ist, die Gleichungen (1) aufzuschreiben und dadurch alle gesuchten Größen als Funktionen von $\zeta_a, \zeta_b \dots$ auszudrücken, ist damit die Aufgabe auf die Bestimmung der letzteren reduziert. Praktisch aber bedeutet der Unterschied, daß die Deformationsmethode nur dann von Wert ist, wenn das anscheinend kompliziertere Hauptssystem (wie wir auch hier das System bezeichnen wollen, das sich mit $\zeta_a = \zeta_b = \dots = 0$ ergibt) in der Tat einigermaßen einfach zu behandeln ist.

Die Bestimmung von $\zeta_a, \zeta_b \dots$ ist jetzt ganz analog der Bestimmung von $X_a, X_b \dots$ bei der Kraftmethode. Die in den hinzugefügten Stäben (Armen) auftretenden Spannkkräfte (Momente) werden mit $Z_a, Z_b \dots$ bezeichnet, und wenn man zum vorliegenden System zurückkehrt, muß sein:

$$Z_a = 0, \quad Z_b = 0 \dots \quad (2)$$

Andererseits können die Gleichungen (1) ebenso gut für $Z_a, Z_b \dots$ wie für die übrigen Spannkkräfte des Systems angewandt werden. Somit erhält man zur Bestimmung der Verschiebungen $\zeta_a, \zeta_b \dots$ die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} Z_a = 0 &= Z_{a0} - Z_{aa} \zeta_a - Z_{ab} \zeta_b \dots, \\ Z_b = 0 &= Z_{b0} - Z_{ba} \zeta_a - Z_{bb} \zeta_b \dots, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

In betreff der Vorzeichen setzen wir fest, daß die Größen Z immer in den Richtungen $\zeta = -1$ positiv gezählt werden sollen. Wenn ζ_a eine lineare Verschiebung darstellt, wird diese, wie gesagt, als Längenänderung eines gedachten Stabes aufgefaßt, und es erscheint natürlich, ζ_a dann als positiv einzuführen, wenn von einer Verlängerung des Stabes die Rede ist. $\zeta_a = -1$ bedeutet somit eine Verkürzung des Stabes, und wenn die Spannkraft Z_a in der Richtung $\zeta_a = -1$ positiv gezählt wird, muß demnach ein positives Z_a eine Zugspannung bedeuten. Ist ζ_a eine Winkeldrehung, so wollen wir eine Rechtsdrehung (mit dem Uhrzeiger) als positiv annehmen, und das Moment Z_a (und ebenso Z_{a0}, Z_{aa}, \dots) wird dann entgegen dem Uhrzeiger positiv gezählt.

Die vollständige Gegenseitigkeit der Kraft- und der Deformationsmethode geht jetzt aus der folgenden Zusammenstellung deutlich hervor:

Die überzähligen Kräfte $X_a, X_b \dots$ greifen in den Punkten $a, b \dots$ an und werden immer als innere Kräfte (evtl. in gedachten Stützstäben) aufgefaßt; die Verschiebungen von a, b, \dots in den Richtungen $X_a = -1, X_b = -1 \dots$ werden mit $\delta_a, \delta_b \dots$ bezeichnet.

Um die Größen $X_a, X_b \dots$ zu bestimmen, drückt man $\delta_a, \delta_b \dots$ als Funktionen der Belastung und der X -Kräfte aus und setzt diese Ausdrücke gleich Null, also:

$\delta_a = 0 = \delta_{a0} - \delta_{aa} X_a - \delta_{ab} X_b \dots; (3a)$
die Indizes der hier vorkommenden Größen $\delta_{ab}, \delta_{ac} \dots$ können vertauscht werden, d. h. es ist allgemein:

$$1_m \cdot \delta_{mk} = 1_k \cdot \delta_{km}. \quad (4a)$$

Die Gl. (4) kann mittels der Arbeitsgleichung auf genau dieselbe Weise wie der Maxwellsche Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen bewiesen werden. Übrigens folgt der Satz unmittelbar aus dem Maxwellschen; eine Kraft 1 im Punkte m (d. h. eine Spannkraft 1 im Stabe m) ruft eine Verschiebung δ_{km} von k hervor, somit entspricht eine Spannkraft $\frac{1}{\delta_{km}}$ im Stabe m einer Verlängerung 1 des Stabes k , und eine Stabkraft $\frac{1}{\delta_{mk}}$ im Stabe k einer Verlängerung 1 des Stabes m , oder:

$$Z_{mk} = \frac{1}{\delta_{km}} = \frac{1}{\delta_{mk}} = Z_{km}.$$

Wie oben erwähnt, wird das Hauptsystem, wenn Verschiebungen als überzählig eingeführt werden, in höherem Grade statisch unbestimmt als das gegebene System. Hieraus folgt, daß die Methode in vielen Fällen unpraktisch wird, weil es sich als zu beschwerlich herausstellt, die Spannungen und andere gesuchte Größen als Funktionen der überzähligen auszudrücken. Indessen folgt hieraus zugleich, daß man in gewissen Beziehungen freier gestellt wird als bei der Kraftmethode; so braucht namentlich die Zahl der Verschiebungen, die als überzählig eingeführt werden, nicht mit der Zahl der wirk-

Die überzähligen Verschiebungen $\zeta_a, \zeta_b \dots$ treten in den Punkten $a, b \dots$ auf und werden als Verlängerungen hinzugefügter Stäbe (Drehungen gedachter Arme) aufgefaßt; die Spannkkräfte dieser Stäbe werden $Z_a, Z_b \dots$ genannt und in den Richtungen $\zeta_a = -1, \zeta_b = -1 \dots$ positiv gezählt.

Um die Größen $\zeta_a, \zeta_b \dots$ zu bestimmen, drückt man $Z_a, Z_b \dots$ als Funktionen der Belastung und der ζ aus und setzt diese Ausdrücke gleich Null:

$Z_a = 0 = Z_{a0} - Z_{aa} \zeta_a - Z_{ab} \zeta_b \dots; (3b)$
die Indizes der hier vorkommenden Größen $Z_{ab}, Z_{ac} \dots$ können vertauscht werden, d. h. es ist allgemein:

$$Z_{mk} \cdot 1_m = Z_{km} \cdot 1_k. \quad (4)$$

lich statisch unbestimmbaren Größen übereinzustimmen; sie kann nicht nur kleiner sein, was bekanntlich auch für als überzählig eingeführte Spannkkräfte möglich ist, sondern auch größer. Das diesbezügliche Verhältnis wird deutlich dem folgenden Beispiel entnommen werden können.

Beispiel 1.

Die in Abb. 1 gezeigte Konsolkonstruktion ist mit der lotrechten Kraft P belastet. — Die lotrechte und die wagerechte Verschiebung des Angriffspunktes von P werden als überzählig gewählt; die Punkte a und b fallen zusammen, die hinzugefügt gedachten Stäbe mit den Spannungen Z_a und Z_b sind punktiert und die Stablängen und Querschnittsinhalte in die Abbildung eingeschrieben.

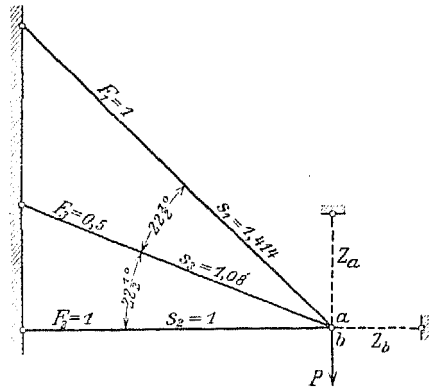


Abb. 1.

Für $\zeta_a = \zeta_b = 0$ ist:

$$Z_{a0} = P, \quad Z_{b0} = 0, \quad S_{1,0} = S_{2,0} = S_{3,0} = 0;$$

für $\zeta_a = -1$ ist:

$$\Delta s_1 = -1 \cdot \cos 45^\circ, \quad \Delta s_2 = 0, \quad \Delta s_3 = -1 \cdot \cos 67\frac{1}{2}^\circ;$$

für $\zeta_b = -1$:

$$\Delta s_1 = +1 \cdot \cos 45^\circ, \quad \Delta s_2 = +1, \quad \Delta s_3 = +1 \cdot \cos 22\frac{1}{2}^\circ;$$

alsdann werden die Spannkkräfte aus $S = \frac{E F \Delta s}{s}$ berechnet. Im ganzen ergibt sich:

Stab-Nr.	1	2	3
$F : s =$	0,707	1,00	0,462
$\Delta s_a =$	-0,707	0	-0,383
$S_a' : E =$	-0,5	0	-0,177
$\Delta s_b =$	+0,707	+1,0	+0,924
$S_b' : E =$	+0,5	+1,0	+0,426

Aus den beiden Gleichgewichtsbedingungen für die Konsolspitze erhält man, indem der Divisor E weggelassen wird, für $\zeta_a = -1$:

$$Z_{aa} = 0,5 \cdot \cos 45^\circ + 0,177 \cos 67\frac{1}{2}^\circ = +0,421, \\ Z_{ba} = -0,5 \cdot \cos 45^\circ - 0,177 \cos 22\frac{1}{2}^\circ = -0,517,$$

und für $\zeta_b = -1$ auf dieselbe Weise:

$$Z_{ab} = -0,517, \quad Z_{bb} = +1,747.$$

Die Gl. (3) zur Bestimmung von ζ_a und ζ_b lauten sodann:

$$0 = P - 0,421 \zeta_a + 0,517 \zeta_b, \\ 0 = +0,517 \zeta_a - 1,747 \zeta_b.$$

Aus ihnen folgt:

$$\zeta_a = + 3,74 P; \quad \zeta_b = + 1,105 P.$$

Hiermit erhält man schließlich:

$$\begin{aligned} S_1 &= + 0,5 \cdot 3,74 P - 0,5 \cdot 1,105 P &= + 1,32 P, \\ S_2 &= - 1,0 \cdot 1,105 P &= - 1,10 P, \\ S_3 &= + 0,177 \cdot 3,74 P - 0,427 \cdot 1,105 P = + 0,19 P. \end{aligned}$$

Aus diesem Beispiel geht hervor, daß man äußerst einfach zu den Gl. (1) und (3) kommt, wenn die beiden Verschiebungskomponenten als überzählig eingeführt werden; viel schwieriger ist es, sich mit einer einzigen zu begnügen. Natürlich ist die Kraftmethode in diesem Falle einfacher; das Beispiel zeigt indessen deutlich, daß die Zahl der als überzählig eingeführten Unbekannten in keiner Verbindung steht mit der Zahl der wirklich überzähligen Größen im System. Die Berechnungen werden mit denselben beiden Überzähligen ebenso leicht durchgeführt, gleichgültig ob das System drei oder beliebig viele Stäbe enthält (alle von der Konsolspitze ausgehend); ja, die Methode ist sogar noch brauchbar für ein System mit nur zwei Stäben, also im Falle statischer Bestimmtheit.

Der Vorteil bei Anwendung der Methode, wenn ein solcher erwartet werden kann, hängt natürlich ausschließlich davon ab, ob es möglich wird, die Zahl der Überzähligen zu reduzieren. Dies wird wohl nur ausnahmsweise für Fachwerkkonstruktionen der Fall sein. Als weiteres Beispiel mag hier ein solches System erwähnt werden, wo eine Anzahl Stäbe von verschiedenen Punkten einer starren Scheibe oder (im Raume) eines starren Körpers ausgehen und von hier nach festen Stützpunkten laufen, wie bei einem Pfahlrost, wo die Pfähle als oben und unten gelenkig gelagert betrachtet werden, und wo das Betonfundament als unendlich starr angesehen werden kann¹). Für ein solches System kommt man nach der Deformationsmethode immer mit drei oder, im Raume, sechs Gleichungen aus, indem die Bewegung der Scheibe (des Körpers) durch drei (sechs) Verschiebungskomponenten gegeben erscheint. Für vollwandige Konstruktionen läßt die Methode dagegen, wie wir sehen werden, sehr oft eine Reduktion der Zahl der Überzähligen zu.

Beispiel 2.

Um auch eine vollwandige Konstruktion zu behandeln, betrachten wir einen durchgehenden Balken ABC über zwei gleichweite Felder (Abb. 2). Der Balken ist bei A eingespannt, bei B und C einfach gestützt und in der Mitte jedes Feldes mit P belastet. Das Trägheitsmoment ist unveränderlich.

¹) Siehe des Verfassers „Berechnung von Pfahlrosten“ in „Beton und Eisen“ 1922, S. 21, sowie weiter unten in Kap. 14.

Der Tangentenwinkel bei B wird als überzählig (ζ_b) eingeführt und mit dem Uhrzeiger positiv gerechnet. Das Hauptsystem (für $\zeta_b = 0$) ist in A und B eingespannt, bei C einfach gestützt. Die Momentenkurve für $\zeta_b = 0$ ist in Abb. 2a gezeigt; unten in derselben Abbildung ist ein Element des Balkens herausgezeichnet, von zwei Schnitten unendlich nahe beiderseits von B begrenzt, und hier ist der gedachte Arm hinzugefügt, durch welchen das Moment Z_{b0} (positiv in der Richtung $\zeta_b = -1$) auf den Balken einwirkt. Man findet somit:

$$Z_{b0} = \frac{2}{15} Pl - \frac{1}{5} Pl = + \frac{1}{15} Pl.$$

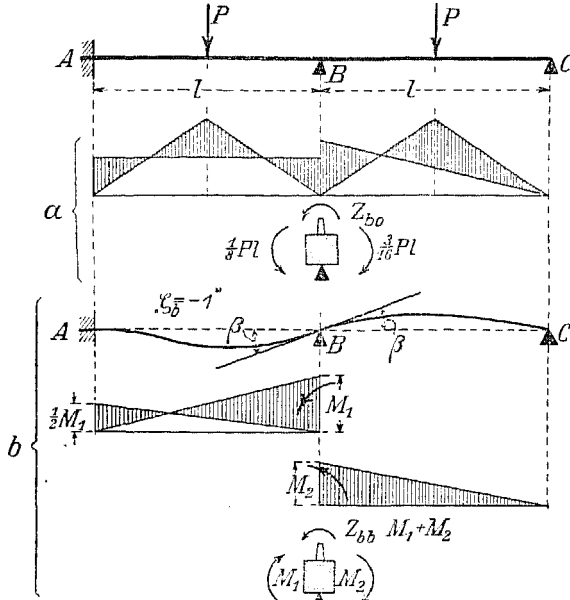


Abb. 2.

Der Zustand $\zeta_b = -1$ ist in Abb. 2b gezeigt. Um diesen Zustand herzustellen, muß man auf den Balken AB (bei A eingespannt, bei B einfach gestützt und von BC unabhängig) ein Moment M_1 bei B einwirken lassen; das Reaktionsmoment bei A ist dann von der Größe $\frac{1}{2} M_1$ und der Tangentenwinkel β wird:

$$\beta = \frac{l}{6 EJ} \left(2 M_1 - \frac{1}{2} M_1 \right) = \frac{M_1 l}{4 EJ};$$

wenn dieser Wert gleich 1 werden soll, muß sein:

$$M_1 = \frac{4 EJ}{l}.$$

Auf den Balken BC muß auf dieselbe Weise ein Moment M_2 (siehe Abb. 2b) einwirken, wodurch die Verdrehung

$$\beta = \frac{l}{6 EJ} \cdot 2 M_2$$

8 Konstruktionen, ausschließlich aus geraden Balken zusammengebaut.

hervorgerufen wird; mit $\beta = 1$ ergibt sich somit

$$M_2 = \frac{3 EJ}{l}.$$

Die Gleichgewichtsbedingung für das unten in Abb. 2b gezeigte unendlich kleine Balkenelement ergibt dann:

$$Z_{bb} = M_1 + M_2 = \frac{7 EJ}{l},$$

und hiermit wird Gl. (3):

$$Z_b = 0 = + \frac{1}{16} Pl - \frac{7 EJ}{l} \zeta_b, \quad \zeta_b = \frac{Pl^2}{112 EJ}.$$

Die Momente in den verschiedenen Punkten werden jetzt nach Gl. (1) berechnet. In A ist

$$M_A = M'_{A,0} - M'_{A,b} \zeta_b,$$

wo $M'_{A,0}$ nach Abb. 2a gleich $-\frac{1}{8}Pl$, $M'_{A,b}$ nach Abb. 2b gleich $-\frac{1}{2}M_1 = -\frac{2 EJ}{l}$ ist; somit wird:

$$M_A = -\frac{1}{8}Pl + \frac{2 EJ}{l} \cdot \frac{Pl^2}{112 EJ} = -\frac{3}{28}Pl.$$

Auf ähnliche Weise findet man unmittelbar links und rechts von B , indem die Momente positiv gezählt werden, wenn sie oben Druck hervorrufen:

$$M_{B, \text{links}} = -\frac{1}{8}Pl - \frac{4 EJ}{l} \cdot \frac{Pl^2}{112 EJ} = -\frac{9}{56}Pl,$$

$$M_{B, \text{rechts}} = -\frac{3}{16}Pl + \frac{3 EJ}{l} \cdot \frac{Pl^2}{112 EJ} = -\frac{9}{56}Pl.$$

Auch in diesem Beispiel, wie es hier durchgerechnet ist, dürfte die Methode wohl kaum der gewöhnlichen vorzuziehen sein, obwohl man mit einer Gleichung (statt deren zwei nach der Kraftmethode) auskommt; die gewöhnliche Methodo wird ja sogar in den Zwischenrechnungen benutzt, um die Momente M'_0 und M'_b zu finden. Betrachtet man indessen einen beiderseits eingespannten Balken und einen Balken, der am einen Ende eingespannt, am anderen einfach gestützt ist, als bekannte Konstruktionen, für welche man sich ein für allemal die nötigen Formeln für M'_0 , M'_a , M'_b ... gebildet hat, stellt sich die Sache anders, wie weiter unten gezeigt werden soll.

A. Ebene Rahmenkonstruktionen.

Konstruktionen, ausschließlich aus geraden Balken zusammengebaut.

2. Grundbegriffe, Knotenpunktfigur.

Die zu der Konstruktion gehörigen Balken oder Säulen gehen teils von festen oder beweglichen Stützpunkten oder Einspannungen aus, teils sind sie miteinander in den Knoten a, b, c ... steif ver-

bunden, so daß alle in einem Knoten zusammenlaufenden Balken dazu gezwungen sind, sich um denselben Winkel zu drehen. Außer den Balken können auch gerade Stäbe vorkommen, die nur auf Zug oder Druck beansprucht und mittels reibungsloser Gelenke angeschlossen sind.

Wenn alle Knoten und Einspannungen durch Gelenke ersetzt werden, erhält man die sogenannte „Knotenpunktfigur“. Die Abb. 3 und 10 zeigen beispielsweise oben ein paar Rahmenkonstruktionen, unten die zugehörige Knotenpunktfigur. Letztere kann unbeweglich (Abb. 3) oder beweglich (Abb. 10) sein; eine bewegliche Knotenpunktfigur kann, wie in Abb. 10 punktiert angegeben, durch Hinzufügung einiger Stäbe unbeweglich gemacht werden, die nach festen Punkten laufen oder zwei der Gelenke verbinden. Eine unbewegliche Knotenpunktfigur kann endlich statisch bestimmt [$s + u = 2k$, wenn alle Balken als Stäbe (s) und alle Gelenke als Knotenpunkte (k) betrachtet werden; $u =$ Zahl der Reaktionskomponenten] oder auch statisch unbestimmt sein.

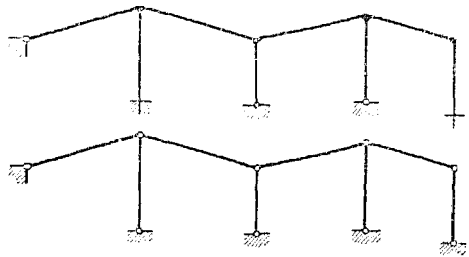


Abb. 3.

Wenn ein gewöhnlicher Fachwerkbalken mit steifen, genieteten Verbindungen ausgeführt ist, werden diese Verbindungen in der Tat „Knoten“ und das Fachwerk eine Rahmenkonstruktion; alle Stäbe gehen in Balken über, die nicht nur durch zentrische Normalkräfte, sondern auch durch Biegemomente beansprucht werden, wodurch die sogenannten Sekundärspannungen entstehen. In der gewöhnlichen Berechnung wird von den Biegungen abgesehen und mit einer idealen Konstruktion gerechnet, d. h. statt der Rahmenkonstruktion wird die Knotenpunktfigur gesetzt; auf diese Weise kommt man, wie die Erfahrung gelehrt hat, den richtigen Stabkräften (Normalkräften in den Balken) sehr nahe.

Hieraus kann umgekehrt gefolgert werden, daß die Normalkräfte der einzelnen Balken einer gewöhnlichen Rahmenkonstruktion mit guter Annäherung dadurch gefunden werden können, daß man die Stabkräfte der Knotenpunktfigur in derselben Weise bestimmt wie in einem gewöhnlichen (idealen) Fachwerkbalken. Die äußeren Kräfte, mit denen man hierbei zu tun hat, sind teils diejenigen, die unmittelbar in den Knoten der Rahmenkonstruktion angreifen, teils die Gegenkräfte der Balken auf die Knoten; letztere sind natürlich etwas von

den Balkenmomenten abhängig und können daher nicht sofort genau angegeben werden; durch eine Wiederholung der Rechnung ist es indessen möglich, die Werte allmählich zu verbessern (siehe weiter unten). Ist die Knotenpunktfigur beweglich, so ist die Aufgabe erst durch Hinzufügung gedachter Stäbe auf eine unbewegliche Knotenpunktfigur zurückzuführen, worauf unten gleichfalls näher eingegangen werden soll.

Weiter sieht man ein, daß die Verschiebungen der einzelnen Knoten einer Rahmenkonstruktion mit guter Annäherung gleich denjenigen der Punkte in der Knotenpunktfigur gesetzt werden können (dieselbe auch hier vorläufig als unbeweglich vorausgesetzt). Die Verschiebungen in der Knotenpunktfigur sind nämlich allein durch die Änderungen der Stablängen bestimmt, und ebenso sind die Verschiebungen in der Rahmenkonstruktion bestimmt, wenn die Abstandsänderungen zwischen den Knoten bekannt sind. Für diese Abstandsänderungen haben die Biegemomente nur eine verschwindende Bedeutung, und da die Normalkräfte, wie wir eben gesehen haben, den Stabkräften der Knotenpunktfigur gleichgesetzt werden können, werden die Längenänderungen die nämlichen. Überdies ist bekanntlich die Bedeutung der Normalkräfte bei Berechnung statisch unbestimmter Systeme gewöhnlich überhaupt klein im Vergleich zu derjenigen der Biegemomente. Wenn wir daher im folgenden die in der angegebenen Weise bestimmten Verschiebungen der Knoten in der Rahmenkonstruktion zur Berechnung der Überzähligen benutzen, leuchtet ein, daß ein kleinerer Fehler im Werte der Normalkräfte von ganz verschwindender Bedeutung sein muß. — Wird ganz von dem Einfluß der Normalkräfte abgesehen, was in den meisten Fällen der Praxis zulässig ist, werden die Längenänderungen der Balken, und somit auch die Verschiebungen der Knoten der Rahmenkonstruktion zu Null, wenn die Knotenpunktfigur unbeweglich ist.

3. Grundgleichungen für gerade Balken.

a) Unveränderliches Trägheitsmoment.

Wir betrachten einen einzelnen der zu der Konstruktion gehörigen Balken (Abb. 4), der durch ein paar Schnitte unendlich nahe den Knoten a und b begrenzt ist. Die ursprüngliche Lage des Balkens $a - b$ ist punktiert; während der Deformation werden aber die Punkte a und b nach a' und b' verschoben (a und a' sind in der Abb. 4 zusammenfallend gezeichnet, da nur die relative Lage von Bedeutung ist), und der Balken verbiegt sich wie gezeichnet. Die

Verbindungsgerade $a - b$ hat sich also um den Winkel $\psi_{ab} = \psi_{ba}$ gedreht, und die Endtangenten bilden mit der Verbindungsgeraden $a - b'$ die Winkel α_{ab} und α_{ba} . Vor der Formänderung befanden sich die beiden Endtangenten in der Verbindungsgeraden $a - b$, so daß die Knotendrehwinkel die in der Abbildung angegebenen ζ_a und ζ_b sind. In jedem Endschnitt ist der Balken von einem Moment (M_{ab} , M_{ba}), einer Normal- und einer Querkraft beansprucht. Als Vorzeichenfestsetzungen werden die folgenden gewählt: alle genannten Winkel (ζ , ψ , α) werden mit dem Uhrzeiger positiv gerechnet, die Momente M_{ab} und M_{ba} ebenso mit dem Uhrzeiger, wenn sie auf den Balken, also gegen den Uhrzeiger, wenn sie auf die Knoten wirken.

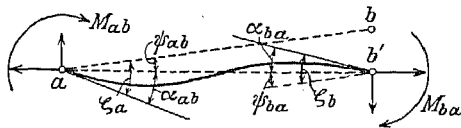


Abb. 4.

Wenn keine äußeren Kräfte zwischen den Knoten angreifen, so daß der Balken ausschließlich von den Momenten M_{ab} und M_{ba} beansprucht wird (auf die Normalkraft wird hier keine Rücksicht genommen), dann gelten die folgenden bekannten Ausdrücke:

$$\alpha_{ab} = \frac{l_{ab}}{6 EJ_{ab}} (2 M_{ab} - M_{ba}), \quad \alpha_{ba} = \frac{l_{ab}}{6 EJ_{ab}} (2 M_{ba} - M_{ab}),$$

oder nach Auflösung:

$$M_{ab} = \frac{2 EJ_{ab}}{l_{ab}} (2 \alpha_{ab} + \alpha_{ba}), \quad M_{ba} = \frac{2 EJ_{ab}}{l_{ab}} (\alpha_{ab} + 2 \alpha_{ba}).$$

Es ist hier praktisch, den Begriff „Steifigkeitskoeffizient“ des Balkens einzuführen, nämlich:

$$\mu_{ab} = \frac{J_{ab} l_c}{J_c l_{ab}}, \quad (5)$$

wo J_c ein unveränderliches Trägheitsmoment und l_c eine unveränderliche Länge bezeichnen. Setzt man weiter:

$$\frac{E J_c}{l_c} \zeta = \zeta', \quad \frac{E J_c}{l_c} \psi = \psi', \quad (6)$$

und beachtet man endlich, daß nach Abb. 4 ist:

$$\zeta_a = \psi_{ab} + \alpha_{ab}, \quad \zeta_b = \psi_{ba} + \alpha_{ba},$$

dann können die Ausdrücke für die Stützenmomente geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} M_{ab} &= M_{ab}^0 + 2 \mu_{ab} (2 \zeta'_a + \zeta'_b - 3 \psi'_{ab}), \\ M_{ba} &= M_{ba}^0 + 2 \mu_{ab} (\zeta'_a + 2 \zeta'_b - 3 \psi'_{ab}), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

indem hier noch die Beiträge M_{ab}^0 und M_{ba}^0 von einer auf den Balken unmittelbar wirkenden Belastung hinzugefügt wurden. M_{ab}^0 und M_{ba}^0 bedeuten offenbar (da $M = M^0$ wird, wenn die Winkel ζ und ψ gleich Null gesetzt werden) die Einspannungsmomente für volle Einspannung in a und b .

Hiermit sind die Stützenmomente durch die Belastung und die Winkel ζ und ψ ausgedrückt. Aus den Grundgleichungen (7) können ohne Schwierigkeit die speziellen Werte der Momente gebildet werden, die für $\zeta = 0$ oder $\zeta = -1$ entstehen, welche zur Ermittlung der Belastungsglieder ($Z_{a0}, Z_{b0} \dots$) und der Koeffizienten ($Z_{aa}, Z_{ab} \dots$) in den Elastizitätsgleichungen weiter unten gebraucht werden sollen.

Die Ausdrücke (7) sind ohne weiteres zu benutzen, wenn a und b zwei Knoten bezeichnen. Ist dagegen z. B. b eine feste Einspannung, wird $\zeta_b' = 0$, und man erhält einfacher für einen Balken $a - i$, wo a einen Knoten, i eine feste Einspannung bezeichnet:

$$\left. \begin{aligned} M_{ai} &= M_{ai}^0 + 2 \mu_{ai} (2 \zeta_a' - 3 \psi_{ai}'), \\ M_{ia} &= M_{ia}^0 + 2 \mu_{ai} (\zeta_a' - 3 \psi_{ai}'). \end{aligned} \right\} \quad (7a)$$

Hat man schließlich einen Balken $a - k$, der in k einfach gestützt ist, dann wird $M_{ka} = 0$, womit nach der unteren der Gl. (7) folgt:

$$\zeta_k' = -\frac{1}{2} \zeta_a' + \frac{3}{2} \psi_{ak}'$$

somit:

$$M_{ak} = M_{ak}^0 + 3 \mu_{ak} (\zeta_a' - \psi_{ak}'); \quad (7b)$$

hier bezeichnet M_{ak}^0 das Einspannungsmoment in a für volle Einspannung in a und einfache Unterstützung in k .

b) Veränderliches Trägheitsmoment.

Für den betrachteten Balken beginnt man damit, die in Abb. 5 angedeuteten Operationen auszuführen, nämlich die Durchbiegungslinien und die Tangentwinkel ($\delta_{aa}, \delta_{ab}, \delta_{bb}$) zu bestimmen für ein Moment 1 in a , und ebenso für ein Moment 1 in b als einzige Belastung, beide Momente positiv gerechnet, wenn sie den Balken nach unten durchbiegen. Hiermit ist man imstande, die folgenden Ausdrücke für diejenigen Tangentwinkel zu bilden, die von den beiden Momenten M_{ab} und M_{ba} (unten in Abb. 5) hervorgerufen werden.

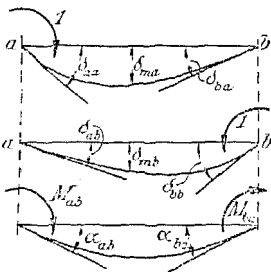


Abb. 5.

Hat man bei der Berechnung von δ_{aa} , δ_{ab} , δ_{bb} den Faktor $\frac{EJ}{l_c^e}$ eingeführt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{EJ}{l_c^e} \alpha_{ab} &= \delta_{aa} M_{ab} - \delta_{ab} M_{ba}, \\ \frac{EJ}{l_c^e} \alpha_{ba} &= -\delta_{ba} M_{ab} + \delta_{bb} M_{ba},\end{aligned}$$

indem die Winkel α (wie oben) beide positiv mit dem Uhrzeiger gezählt werden. Wird die Determinante der Gleichungen mit Δ bezeichnet, also

$$\Delta = \delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2, \quad (8)$$

so erhält man durch Auflösung:

$$\begin{aligned}M_{ab} &= \frac{EJ}{l_c \Delta} (\delta_{bb} \alpha_{ab} + \delta_{ab} \alpha_{ba}), \\ M_{ba} &= \frac{EJ}{l_c \Delta} (\delta_{ab} \alpha_{ab} + \delta_{aa} \alpha_{ba}).\end{aligned}$$

Beachtet man die auch oben benutzten Beziehungen:

$$\alpha_{ab} = \zeta_a - \psi_{ab}, \quad \alpha_{ba} = \zeta_b - \psi_{ab},$$

und führt die Bezeichnungen ein:

$$\frac{EJ}{l_c} \zeta = \zeta', \quad \mu_{ab} = \frac{\delta_{ab}}{2\Delta}, \quad \frac{\delta_{aa}}{\delta_{ab}} = r_{ab}, \quad \frac{\delta_{bb}}{\delta_{ab}} = r'_{ab}, \quad (9)$$

und fügt weiter die von der unmittelbaren Belastung herrührenden Glieder M_{ab}^0 und M_{ba}^0 (mit derselben Bedeutung wie oben, doch selbstverständlich mit Rücksicht auf das veränderliche Trägheitsmoment bestimmt) hinzu, so können die Stützmomente geschrieben werden:

$$\begin{aligned}M_{ab} &= M_{ab}^0 + 2 \mu_{ab} [r'_{ab} \zeta'_a + \zeta'_b - (r'_{ab} + 1) \psi'_{ab}], \\ M_{ba} &= M_{ba}^0 + 2 \mu_{ab} [\zeta'_a + r_{ab} \zeta'_b - (r_{ab} + 1) \psi'_{ab}].\end{aligned} \quad (10)$$

Für einen Balken $a-i$, der in i fest eingespannt ist, erhält man:

$$\begin{aligned}M_{ai} &= M_{ai}^0 + 2 \mu_{ai} [r'_{ai} \zeta'_a - (r'_{ai} + 1) \psi'_{ai}], \\ M_{ia} &= M_{ia}^0 + 2 \mu_{ai} [\zeta'_a - (r_{ai} + 1) \psi'_{ai}].\end{aligned} \quad (10a)$$

Für einen in k einfach gestützten Balken $a-k$, wo $M_{ka} = 0$ ist, kann zwischen den beiden Gleichungen (10), nach Vertauschung von b mit k , ζ'_k eliminiert werden, wodurch erhalten wird:

$$M_{ak} = 2 \mu_{ak} \left(r'_{ak} - \frac{1}{r_{ak}} \right) (\zeta'_a - \psi'_{ak}).$$

Einfacher ist es jedoch, unmittelbar nach Abb. 5 zu setzen:

$$\frac{EJ}{l_c} \alpha_{ak} = \zeta'_a - \psi'_{ak} = M_{ak} \delta_{aa},$$

womit:

$$M_{ak} = 3 \mu'_{ak} (\zeta'_a - \psi'_{ak}), \quad \text{wo } \mu'_{ak} = \frac{1}{3 \delta_{aa}}. \quad (10b)$$

Man erspart auf diese Weise die Berechnung von δ_{ak} und δ_{kk} . — Die Ausdrücke (10) bis (10b) für veränderlichen Querschnitt entsprechen vollständig den früheren (7) bis (7b).

4. Rahmenkonstruktionen mit unbeweglicher Knotenpunktfigur.

a) Berechnung mittels eines Systems von gleichzeitig aufgestellten Gleichungen nach (3).

In der Praxis ist die Berechnung, wie schon ausgeführt, im allgemeinen hinlänglich genau, wenn von dem Einfluß der Normalkräfte abgesehen wird; dies soll daher hier vorläufig geschehen. Dann werden sämtliche Knotenverschiebungen und somit die Winkel ψ in den Gleichungen (7) und (10) zu Null, und man hat daher nicht nötig, andere Unbekannte als die Knotendrehwinkel ζ einzuführen. Um die Elastizitätsgleichungen (3) aufschreiben zu können, hat man dann nur noch die Werte der Größen Z_{a0} , Z_{b0} ... und Z_{aa} , Z_{ab} ... anzugeben.

Zuerst sollen jedoch diese Gleichungen (3) durch Einführung der in (6) gegebenen Größen ζ' statt ζ umgeformt werden. Zu diesem Zweck wird geschrieben:

$$Z_a = 0 = Z_{a0} - Z'_{aa} \zeta'_a - Z'_{ab} \zeta'_b \dots, \quad (11)$$

worin also die Bedeutung von Z'_{aa} , Z'_{ab} ... sein muß:

$$Z'_{aa} = \frac{l_c}{EJ_c} Z_{aa}, \quad Z'_{ab} = \frac{l_c}{EJ_c} Z_{ab} \dots$$

Indessen leuchtet sofort ein, daß die neuen Größen Z'_{aa} , Z'_{ab} ... ebenso gut als die den Zuständen $\zeta'_a = -1$, $\zeta'_b = -1$ entsprechenden Werte von Z_a aufgefaßt werden können.

Indem nun alle auf den Knoten a wirkenden Momente M_{ab} , M_{ai} , M_{ak} ... (und dies gilt auch von dem Moment Z_a) positiv gegen den Uhrzeiger gerechnet werden, hat man allgemein:

$$Z_a = - \sum M_a. \quad (12)$$

Um die speziellen Werte Z_{a0} , Z'_{aa} , Z'_{ab} ... zu erhalten, hat man demnach nur die speziellen Momente zu ermitteln, mit denen die einzelnen Balken bei den Zuständen $\zeta = 0$, $\zeta'_a = -1$... auf den Knoten a einwirken, und diese Momente ergeben sich unmittelbar aus den Gleichungen (7) oder (10) im vorigen Abschnitt.

Zustand $\zeta = 0$. Wenn alle ζ gleich Null sind, geben die Knoten in feste Einspannungen über, und die einzelnen Balken können dann als voneinander unabhängige, beiderseits eingespannte oder einerseits eingespannte, auf der anderen Seite einfach gestützte Balken behandelt werden. Die von einer beliebigen Belastung hervor-
gebrachten Einspannungsmomente $M_{ab}^0, M_{ai}^0, M_{ak}^0 \dots$ bestimmen sich dann in bekannter Weise, und es ergibt sich nach (12):

$$Z_{a0} = - \sum M_a^0, \quad Z_{b0} = - \sum M_b^0 \dots, \quad (13)$$

wobei sich die Summenbildung über alle von dem betrachteten Knoten ausgehenden Balken erstrecken muß.

Unveränderlicher Querschnitt. Zustand $\zeta'_a = -1$. Wenn alle $\psi' = 0$ und alle $\zeta' = 0$ sind bis auf ζ'_a , während $\zeta'_a = -1$ ist, und wenn weiter die Momente M^0 verschwinden, so ergibt sich aus (7) bis (7b), indem a und b Knoten, i eine feste Einspannung und k eine einfache Stützung bezeichnen:

$M_{ab} = -4\mu_{ab}, \quad M_{ba} = -2\mu_{ab}, \quad M_{ai} = -4\mu_{ai}, \quad M_{ak} = -3\mu_{ak},$
und somit nach (12):

$$Z'_{aa} = +4 \sum \mu_{ab} + 4 \sum \mu_{ai} + 3 \sum \mu_{ak}, \quad (14)$$

$$Z'_{ab} = Z'_{ba} = +2 \mu_{ab}. \quad (15)$$

Die Summenbildungen in (14) sollen über alle vom Knoten a ausgehenden Balken (Säulen) ausgedehnt werden. Eine Größe Z'_{ac} , wo c einen Knoten bezeichnet, der nicht unmittelbar durch einen Balken mit a verbunden ist, wird Null.

Für veränderlichen Querschnitt wird auf dieselbe Weise aus den Gl. (10) bis (10b) erhalten:

$$\left. \begin{aligned} Z'_{aa} &= 2 \sum \mu_{ab} \nu'_{ab} + 2 \sum \mu_{ai} \nu'_{ai} + 3 \sum \mu'_{ak}, \\ Z'_{bb} &= 2 \sum \mu_{ab} \nu_{ab} + 2 \sum \mu_{bi} \nu_{bi} + 3 \sum \mu'_{bk}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$Z'_{ab} = Z'_{ba} = 2 \mu_{ab}. \quad (17)$$

Hiermit sind alle Koeffizienten und Belastungsglieder in den Gl. (11) bekannt, und wenn $\zeta'_a, \zeta'_b \dots$ hieraus berechnet worden sind, ergeben sich die Balkenmomente nach (7) oder (10). Die Gl. (11) werden sehr oft Clapeyronscher Art, ein Fall, in welchem die Lösung, selbst bei größerer Anzahl der Gleichungen, verhältnismäßig einfach vor sich geht.

Berücksichtigung der Normalkräfte. Wünscht man diese Kräfte nicht zu vernachlässigen, so kann eine Verbesserung der oben gefundenen Werte folgendermaßen ausgeführt werden. Von den schon annäherungsweise ermittelten Momenten $M_{ab}, M_{ba}, M_{ai} \dots$ ausgehend, berechnet man zuerst die von der Belastung sowie den genannten Momenten herrührenden Drücke der einzelnen Balken auf

die Knoten. Diese Drücke (zusammen mit den evtl. unmittelbar in den Knoten angreifenden Belastungsdrücken) betrachtet man dann als äußere, auf die Knotenpunktfigur einwirkende Kräfte, und ermittelt wie für ein gewöhnliches Fachwerk die entsprechenden Spannkkräfte und hieraus die Längenänderungen der Balken. Nun hat man alles Nötige zur Bestimmung der Winkel ψ' (der Stabdrehwinkel der Knotenpunktfigur), wenn nicht auf einfachere Weise, dann wenigstens mit Hilfe eines Verschiebungsplanes. Die Einflüsse auf die Stützennomente M_{ab} , M_{ba} ... ergeben sich dann nach (7) und (7a) zu:

$$\Delta M_{ab} = \Delta M_{ba} = -6 \mu_{ab} \psi'_{ab} = -\frac{6 E J_{ab}}{l_{ab}} \cdot \psi_{ab}, \quad (18)$$

oder, wenn k eine einfache Stützung ist:

$$\Delta M_{ak} = -3 \mu_{ak} \psi'_{ak} = -\frac{3 E J_{ak}}{l_{ak}} \psi_{ak}. \quad (18a)$$

Eine genauere Berechnung unter Berücksichtigung der Normalkräfte wird wohl niemals notwendig sein, könnte indessen auf folgende Weise durchgeführt werden. Anstatt von den oben ermittelten M_{ab} , M_{ba} ... auszugehen, bestimmt man sowohl die Belastungsglieder Z_{a0} , Z_{b0} ... wie die Koeffizienten Z'_{aa} , Z'_{ab} ... in den Gl. (11), indem dabei auch die Längenänderungen der Balken in Rechnung gestellt werden. — Um die berichtigten Belastungsglieder zu erhalten, bestimmt man die Einspannungsmomente M^0 , dann die aus diesen M^0 -Werten und der unmittelbaren Belastung folgenden Normalkräfte (Spannkkräfte in der Knotenpunktfigur) und hiermit die entsprechenden Winkel ψ_0 ; die berichtigten Einspannungsmomente ergeben sich dann nach (7) bis (7b) zu:

$$M_{ab}^0 - 6 \mu_{ab} \psi'_{0,ab} \quad \text{bzw.} \quad M_{ak}^0 - 3 \mu_{ak} \psi'_{0,ak}.$$

Mit diesen Werten bildet man dann Z_{a0} , Z_{b0} ... nach (12). — Die berichtigten Koeffizienten Z'_{aa} , Z'_{ab} ... werden mittels derselben Operationen gebildet, indem hierbei von denjenigen Normalkräften, die den Zuständen $\zeta'_a = -1$, $\zeta'_b = -1$... entsprechen, ausgegangen wird. Wie gesagt, wird jedoch diese etwas umständliche Berechnung sehr selten erforderlich sein.

Zusatzbeanspruchungen. Eine ungleichmäßige Temperaturänderung behandelt man durch Benutzung der entsprechenden Einspannungsmomente bei Bildung der Belastungsglieder nach (12). Bei einer Balkenhöhe h und einer Temperaturdifferenz Δt zwischen Ober- und Unterseite des Balkens hat man für einen beiderseits eingespannten Balken $a - b$:

$$M_{ab, \epsilon}^0 = -M_{ba, \epsilon}^0 = \frac{\epsilon E J_{ab} \Delta t}{h}, \quad (19)$$

und für einen in a eingespannten, in k frei drehbaren Balken:

$$M_{ak, t}^0 = \frac{3 \varepsilon E J_{ab} \Delta t}{2 h}. \quad (19a)$$

Die Vorzeichen, mit denen diese Momente in (12) einzuführen sind, ergeben sich nach den obigen Festsetzungen in jedem einzelnen Falle von selbst.

Eine gleichförmige Temperaturänderung t_0 ruft eine Verlängerung $\varepsilon t_0 l$ in allen Balken hervor; die daraus folgenden Drehungen ψ_t können wie für die Knotenpunktfigur, evtl. mittels eines Verschiebungsplanes, bestimmt werden. Die entsprechenden Einspannungsmomente im Hauptsystem (d. h. für den Zustand $\zeta = 0$) ergeben sich nach (7) bis (7b) zu:

$$M_{ab, t}^0 = M_{ba, t}^0 = -\frac{6 E J_{ab} \psi_{ab, t}}{l_{ab}}, \quad \text{bzw.} \quad M_{ak, t}^0 = -\frac{3 E J_{ak} \psi_{ak, t}}{l_{ak}}, \quad (20)$$

hiermit werden die Belastungsglieder wie oben nach (12) gebildet.

Die durch ein Nachgeben der Stützpunkte hervorgerufenen Drehungen ψ werden wie für die Knotenpunktfigur ermittelt; die entsprechenden Einspannungsmomente können dann ebenso nach (20) berechnet werden.

b) Stufenweise Berechnung.

In der bisherigen Entwicklung erscheint die Behandlung von Rahmenkonstruktionen auf die Berechnung von Balken zurückgeführt, deren Unterstüzungen entweder feste Einspannungen oder feste (d. h. nicht nachgiebige), frei drehbare Stützpunkte waren. Indessen können die Betrachtungen auch auf elastische Unterstüzungen erweitert werden, wo die Verschiebung des Stützpunktes oder die Tangendrehung dem Stützendruck oder dem Einspannungsmoment proportional ist. Auf diesem Wege ist es möglich, zu einer stufenweisen Berechnung zu gelangen, die immer nur die Auflösung einer einzigen Gleichung mit einer Unbekannten erfordert. In diesem Abschnitt, wo die Knotendrehwinkel die einzigen Unbekannten sind, braucht man sich nur mit elastischen Einspannungen zu beschäftigen; später wird auch noch von elastisch verschiebbaren Stützpunkten die Rede sein.

Wir betrachten einen Balken $m - a$, der von einer elastischen Einspannung m nach dem Knoten a läuft. Der Drehwinkel ζ_m ist dann dem Moment M_{ma} proportional, oder allgemeiner:

$$\zeta_m = \zeta_{0m} - \tau_m M_{ma},$$

wo ζ_{0m} einen unelastischen Beitrag bezeichnet. Mit derselben Bezeichnungsweise wie in (6) kann auch geschrieben werden:

$$\zeta'_m = \zeta'_{0m} - \tau'_m M_{ma}. \quad (21)$$

Wenn dieser Wert in die erste der beiden folgenden Gleichungen eingeführt wird, die aus (7) durch Vertauschung von b mit m erhalten werden:

$$\left. \begin{aligned} M_{ma} &= M_{ma}^0 + 2 \mu_{ma} (2 \zeta'_m + \zeta'_a - 3 \psi'_{ma}), \\ M_{am} &= M_{am}^0 + 2 \mu_{ma} (\zeta'_m + 2 \zeta'_a - 3 \psi'_{ma}), \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

so ergibt sich:

$$M_{ma}(1 + 4 \mu_{ma} \tau'_m) = M_{ma}^0 + 2 \mu_{ma} (2 \zeta'_{0m} + \zeta'_a - 3 \psi'_{ma}), \quad (23)$$

und weiter, nach Elimination von ζ'_m und M_{ma} aus der unteren der Gl. (22) mittels (21) und (23):

$$\begin{aligned} M_{am} &= \frac{2 \mu_{ma}}{1 + 4 \mu_{ma} \tau'_m} [\zeta'_{0m} + 2(1 + 3 \mu_{ma} \tau'_m) \zeta'_a - 3(1 + 2 \mu_{ma} \tau'_m) \psi'_{ma}] \\ &\quad + M_{am}^0 - \frac{2 \mu_{ma} \tau'_m}{1 + 4 \mu_{ma} \tau'_m} M_{ma}^0. \end{aligned} \quad (24)$$

Mit Hilfe von (24) kann nun zuerst der Fall behandelt werden, wo m wirklich eine elastische Einspannung ist, so z. B. wo das Fundament einer Zwischensäule für eine Eisenbetonbrücke nicht als vollkommen eingespannt betrachtet werden kann, sondern angenommen werden muß, daß infolge eines elastischen Nachgebens des Baugrundes eine Drehung eintreten kann. Der Beiwert τ ist dann als eine Funktion der Abmessungen der Fundamentfläche und der Nachgiebigkeit des Baugrundes auszudrücken.

Die Hauptsache hierbei ist indessen, daß mittels (24) auch ein Balken $a - m$ behandelt werden kann, dessen elastische Einspannung in m davon herrührt, daß der Balken hier mit der übrigen Konstruktion steif verbunden ist und daß es dadurch möglich wird, die Berechnung so aufzuteilen, daß nicht alle Knotengleichungen auf einmal aufgestellt und aufgelöst zu werden brauchen.

Es sei z. B. das in Abb. 6 gezeigte System $0 - b \dots m - a - i - k$ für eine beliebige Belastung zu berechnen. Wir nehmen an, daß die Berechnung vorläufig nur für das in der Abbildung voll ausgezogene System $0 - b - c - m - 3$ durchgeführt sei und daß dadurch ermittelt wurde: der von der Belastung hervorgerufene Knotendrehwinkel ζ_m und außerdem der besondere Wert τ_m des Drehwinkels ζ_m , der von einem in m als einzige Belastung angreifenden Momente 1 verursacht wird. Wenn danach der punktierte Systemteil $m - a - i - k$ hinzugefügt werden soll, so wird dadurch natürlich eine Änderung des früher gefundenen ζ_m bewirkt werden; das endgültige ζ'_m kann

aber nach (21) ausgedrückt werden, indem als ζ'_{0m} das früher berechnete ζ'_m eingeführt wird. Dadurch erhält man nach (24) das Moment M_{am} als Funktion der einzigen Unbekannten ζ'_a , und wenn die gewöhnliche Elastizitätsgleichung für den Knoten a aufgestellt wird, sieht man ein, daß auch diese nur die einzige Unbekannte ζ'_a enthält und somit lautet:

$$Z_a = 0 = Z_{a0} - Z'_{aa} \zeta'_a. \quad (25)$$

Die beiden Größen Z_{a0} und Z'_{aa} werden wie früher mittels (12) ermittelt: $Z_a = -\sum M_a$, indem hierin die Momente M_a , die den Zuständen $\zeta'_a = 0$ und $\zeta'_a = -1$ entsprechen, einzuführen sind; speziell für den Balken $m-a$ sind die hierbei zu gebrauchenden Momente M_{am} aus (24) herzuleiten. Man findet daher, indem hier in (24) $\psi' = 0$ zu setzen ist:

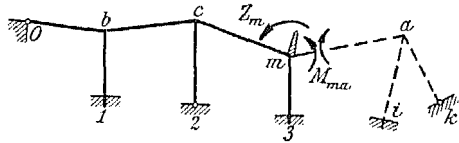


Abb. 6.

$$\left. \begin{aligned} Z_{a0} &= - \left[M_{am}^0 + \frac{2 \mu_{ma}}{1 + 4 \mu_{ma} \tau_m} (\zeta'_{0m} - \tau_m M_{ma}^0) \right] - M_{ai}^0 - M_{ak}^0, \\ Z'_{aa} &= + 4 \mu_{ma} \frac{1 + 3 \mu_{ma} \tau_m}{1 + 4 \mu_{ma} \tau_m} + 4 \mu_{ai} + 3 \mu_{ak}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Aus (25) kann weiter die Drehung $\zeta'_a = \tau'_a$ hergeleitet werden, die von einem am Knoten a als einzige Belastung angreifenden Momente 1 verursacht wird. Man hat nur in (25) $Z_{a0} = 1$ zu setzen und erhält somit:

$$\tau'_a = \frac{1}{Z'_{aa}}, \quad (27)$$

worin Z'_{aa} durch (26) gegeben ist.

Falls nun noch ein weiterer, von a ausgehender Systemteil hinzugefügt werden soll, hat man jetzt alles Nötige für den nächsten Schritt: τ'_a ist aus (27) bekannt, und ζ'_{0a} ist der mittels (25) bis (26) bestimmte Wert von ζ'_a . Auf dieselbe Weise bestimmt (mittels der Gleichung für den Knoten m) sind die oben benutzten τ'_m und ζ'_{0m} anzunehmen.

Ein System wie das in Abb. 6 gezeigte läßt sich jetzt offenbar folgendermaßen berechnen: Alle Systemteile rechts von b werden fortgenommen und die Elastizitätsgleichung für den einzig übrigbleibenden Knoten b (System $0-b-1$) aufgeschrieben; hieraus ergibt sich erstens das der Belastung entsprechende ζ'_b , das in die folgende Rechnung als ζ'_{0b} eingehen soll, und weiter das $Z_{b0} = +1$ entsprechende $\zeta'_b = \tau'_b$. Dann werden die Systemteile $b-c-2$ hin-

zugefügt und als in b elastisch eingespannt betrachtet, so daß man wieder mit nur einer Gleichung (für den Knoten c) zu tun hat, woraus ζ'_c und τ'_c ermittelt werden. Hierauf werden die Systemteile $c - m - 3$ hinzugefügt usw.

Wenn man die Rechnung auf diese Weise für das ganze System durchgeführt hat, ist das zuletzt gefundene ζ' sofort das richtige, während alle übrigen ζ' nach (21) zu berichtigen sind. Wird das Moment $M_{m a}$ in (21) mittels (23) fortgeschafft, bekommt man die folgende Rekursionsformel:

$$\zeta'_m = \frac{1}{1 + 4 \mu_{m a} \tau'_m} (\zeta'_{0 m} - 2 \mu_{m a} \tau'_m \zeta'_a - \tau'_m M_{m a}^0), \quad (28)$$

nach welcher ζ'_m aus ζ'_a herzuleiten ist, dann (siehe Abb. 6) ζ'_c aus ζ'_m , weiter ζ'_b aus ζ'_c usw.

Für veränderlichen Querschnitt erhält man mit Benutzung der Gl. (10), wenn auch hierin $\zeta'_m = \zeta'_{0 m} - \tau'_m M_{m a}$ gesetzt wird, die folgenden Ausdrücke, indem μ, ν, ν', τ' statt $\mu_{a m}, \nu_{a m}, \nu'_{a m}, \tau'_{a m}$ geschrieben wird:

$$\left. \begin{aligned} Z_{a 0} &= - \left[M_{a m}^0 + \frac{2 \mu}{1 + 2 \mu \nu \tau'} (\zeta'_{0 m} - \tau' M_{m a}^0) \right] - M_{a i}^0 - M_{a k}^0, \\ Z'_{a a} &= \frac{2 \mu}{1 + 2 \mu \nu \tau'} [\nu' + 2 \mu \tau' (\nu \nu' - 1)] + 4 \mu_{a i} + 3 \mu_{a k}, \end{aligned} \right\} \quad (26 a)$$

$$\zeta'_m = \frac{1}{1 + 2 \mu \nu \tau'} (\zeta'_{0 m} - 2 \mu \tau' \zeta'_a - \tau' M_{m a}^0). \quad (28 a)$$

Diese Ausdrücke sind hier statt (26) und (28) zu benutzen. Es ist

$$\nu = \frac{\delta_{a a}}{\delta_{m a}} \quad \text{und} \quad \nu' = \frac{\delta_{m m}}{\delta_{m a}}.$$

Beispiel 3.

Die in Abb. 7 gezeigte Rahmenkonstruktion ist in den Punkten 1, 2 und 3 fest eingespannt. Die Trägheitsmomente sind für jeden Balken für sich unveränderlich, nämlich $J_{a b} = J$, $J_{a 1} = J_{b 2} = J_{b 3} = \frac{1}{2} J$, und die Balkenlängen sind: $l_{a b} = l$, $l_{a 1} = l_{b 2} = l_{b 3} = \frac{1}{2} l$. Die Belastung ist, wie in der Abbildung gezeigt, p pro Längeneinheit (lotrecht) für den Balken $a - b$ und q pro Längeneinheit (wagerecht) für den Balken $a - 1$. Der Einfluß der Normalkräfte ist zu vernachlässigen. — Da die Knotenpunktfigur unbeweglich ist, braucht man nur die beiden Knotendrehwinkel ζ_a und ζ_b als überzählig einzuführen, obwohl das System im ganzen 6fach statisch unbestimmt ist.

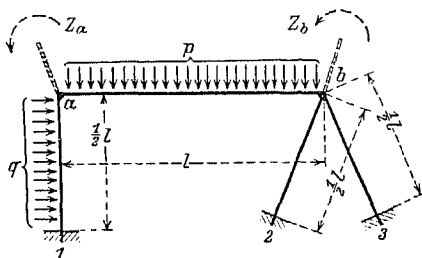


Abb. 7.

Es sollen hier die beiden Elastizitätsgleichungen auf einmal aufgestellt werden.

Für $\zeta_a = \zeta_b = 0$ erhält man die Einspannungsmomente (positiv mit dem Uhrzeiger, wenn auf die Balken einwirkend):

$$M_{a1}^0 = +\frac{1}{12} q \left(\frac{1}{2} l\right)^2, \quad M_{ab}^0 = -\frac{1}{12} p l^2, \quad M_{ba}^0 = +\frac{1}{12} p l^2,$$

mithin nach (13):

$$Z_{a0} = +\frac{1}{12} p l^2 - \frac{1}{48} q l^2, \quad Z_{b0} = -\frac{1}{12} p l^2.$$

Mit $J_c = J$ und $l_c = l$ ist nach (5):

$$\mu_{ab} = 1, \quad \mu_{a1} = \mu_{b2} = \mu_{b3} = 1;$$

nach (14) und (15) ergibt sich dann:

$$Z'_{aa} = 4(\mu_{a1} + \mu_{ab}) = 8, \quad Z'_{ab} = 2\mu_{ab} = 2, \\ Z'_{bb} = 4(\mu_{ab} + \mu_{b2} + \mu_{b3}) = 12.$$

Die Elastizitätsgleichungen lauten somit:

$$Z_a = 0 = \frac{1}{12} l^2 \left(p - \frac{1}{4} q\right) - 8 \zeta_a' - 2 \zeta_b', \\ Z_b = 0 = -\frac{1}{12} p l^2 - 2 \zeta_a' - 12 \zeta_b',$$

woraus folgt:

$$\zeta_a' = \frac{l^2}{8 \cdot 23} \left(\frac{7}{3} p - \frac{1}{2} q\right), \quad \zeta_b' = -\frac{l^2}{24 \cdot 23} \left(5 p - \frac{1}{4} q\right).$$

Die Momente in den verschiedenen Punkten lassen sich sodann berechnen aus (7) und (7a), mit $\psi' = 0$; beispielsweise ist:

$$M_{a1} = +\frac{1}{48} q l^2 + 4 \zeta_a' = 0,0507 p l^2 + 0,0100 q l^2, \\ M_{ab} = -\frac{1}{12} p l^2 + 4 \zeta_a' + 2 \zeta_b' = -0,0507 p l^2 - 0,0100 q l^2.$$

Beispiel 4.

Die in Abb. 8 gezeigte Rahmenkonstruktion ist im Felde $a-b$ mit 1 t/lfd. m belastet. Das Trägheitsmoment des ganzen Balkens $a-e$ ist unveränderlich gleich J , dasjenige aller Säulen gleich $\frac{1}{2} J$; die Stützpunkte 1 und 5 sind feste Einspannungen, 2, 3 und 4 feste Gelenke. $o-a$ ist ein zum System gehöriger Stab, der den Knoten a festhält. Die Normalkräfte sollen nicht berücksichtigt werden.

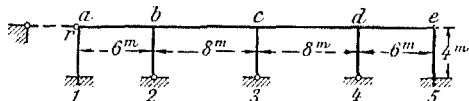


Abb. 8.

Mit $J_c = J$ und $l_c = 8$ m werden die Steifigkeitsbeiwerte nach (5):

$$\text{für alle Säulen } \mu = 1, \quad \text{für } a-b \text{ und } d-e: \mu = \frac{4}{3}, \\ \text{für } b-c \text{ und } c-d: \mu = 1.$$

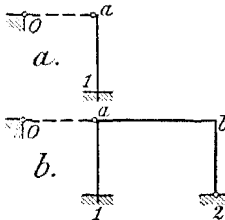
Es soll hier die stufenweise Berechnung angewandt werden.

Nach (26) und (27) erhält man dann, indem die Größe $\frac{1+3\mu\tau'}{1+4\mu\tau'}$ der Kürze halber mit $(\mu\tau)$ bezeichnet wird:

1. für das System in Abb. 9a:

$$Z_{a0} = 0 \text{ (keine Belastung)}, \quad Z'_{aa} = 4 \cdot 1 = 4, \\ \zeta'_{0a} = 0, \quad \tau'_a = \frac{1}{4};$$

2. für das System in Abb. 9b:



$$M_{ab}^0 = -\frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 6^2 = -3 \text{ tm}, \quad M_{ba}^0 = +3 \text{ tm}, \quad \zeta'_{0a} = 0, \\ 1 + 4 \mu \tau' = 1 + 4 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{3}, \quad (\mu \tau) = \frac{6}{7}, \\ Z_{b0} = -\left[+3,0 + 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{7} \left(0 + \frac{1}{4} \cdot 3,0 \right) \right] = -\frac{27}{7}, \\ Z'_{bb} = 4 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{7} + 3 \cdot 1 = \frac{53}{7},$$

Abb. 9.

somit

$$\zeta'_{0b} = -\frac{27}{53} = -0,5094, \quad \tau'_b = \frac{7}{53};$$

3. nach Hinzufügung von b-c-3:

$$M_{bc}^0 = M_{cb}^0 = 0, \quad \zeta'_{0b} = -\frac{27}{53}, \\ 1 + 4 \mu \tau' = 1 + 4 \cdot 1 \cdot \frac{7}{53} = \frac{81}{53}, \quad (\mu \tau) = \frac{74}{81}, \\ Z_{c0} = -2 \cdot 1 \cdot \frac{53}{81} \cdot \left(-\frac{27}{53} \right) = +\frac{2}{3}, \\ Z'_{cc} = 4 \cdot 1 \cdot \frac{74}{81} + 3 \cdot 1 = \frac{539}{81},$$

somit

$$\zeta'_{0c} = +\frac{54}{539} = +0,1002, \quad \tau'_c = \frac{81}{539};$$

4. nach Hinzufügung von c-d-4:

$$M_{cd}^0 = M_{dc}^0 = 0, \quad \zeta'_{0c} = +\frac{54}{539}, \\ 1 + 4 \mu \tau' = 1 + 4 \cdot 1 \cdot \frac{81}{539} = \frac{863}{539}, \quad (\mu \tau) = \frac{782}{863}, \\ Z_{d0} = -2 \cdot 1 \cdot \frac{539}{863} \cdot \frac{54}{539} = -\frac{108}{863}, \\ Z'_{dd} = 4 \cdot 1 \cdot \frac{782}{863} + 3 \cdot 1 = \frac{5717}{863},$$

somit

$$\zeta'_{0d} = -\frac{108}{5717} = -0,0189, \quad \tau'_d = \frac{863}{5717};$$

5. nach Hinzufügung von d-e-5:

$$M_{de}^0 = M_{ed}^0 = 0, \quad \zeta'_{0d} = -\frac{108}{5717}, \\ 1 + 4 \mu \tau' = 1 + 4 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{863}{5717} = \frac{30959}{17151}, \quad (\mu \tau) = \frac{27507}{30959}, \\ Z_{e0} = -2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{17151}{30959} \cdot \left(-\frac{108}{5717} \right) = +\frac{864}{30959}, \\ Z'_{ee} = 4 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{27507}{30959} + 4 \cdot 1 = \frac{270540}{30959},$$

somit

$$\zeta'_{0e} = + \frac{864}{270540} = + 0,0032 .$$

Das hier zuletzt gefundene ζ'_e ist sofort das richtige; hieraus leitet man die übrigen ζ' durch Rückwärtsrechnung nach (28) her. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \zeta'_e &= \dots \dots \dots = + 0,0032 , \\ \zeta'_d &= \frac{17151}{30959} \left(- 0,0189 - 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{863}{5717} \cdot 0,0032 \right) = - 0,0112 , \\ \zeta'_c &= \frac{539}{863} \left(+ 0,1002 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{81}{539} \cdot 0,0112 \right) = + 0,0647 , \\ \zeta'_b &= \frac{53}{81} \left(- 0,5094 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{7}{53} \cdot 0,0647 \right) = - 0,3445 , \\ \zeta'_a &= \frac{3}{7} \left(0 + 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,3445 + \frac{1}{4} \cdot 3,0 \right) = + 0,4199 . \end{aligned}$$

5. Konstruktionen mit beweglicher Knotenpunktfigur.

a) Alle Gleichungen auf einmal aufgestellt.

Wenn die Knotenpunktfigur, wie in Abb. 10, beweglich ist, sind die Winkel ψ in den Gl. (7) und (10) vorläufig unbekannt, selbst wenn der Einfluß der Normalkräfte auf die Formänderungen auch hier noch vernachlässigt wird.

Man kann sich indessen die Knotenpunktfigur in eine unbewegliche umgeformt denken durch Hinzufügung einer passenden, gewöhnlich nicht sehr großen Zahl von Stäben, die von den Punkten $r, s, t \dots$ (siehe Abb. 10) ausgehen. Wenn die Verlängerungen dieser gedachten Stäbe bekannt wären, so könnten die Verschiebungen der Punkte in der Knotenpunktfigur ermittelt werden; diese Verschiebungen sind annähernd gleich den-

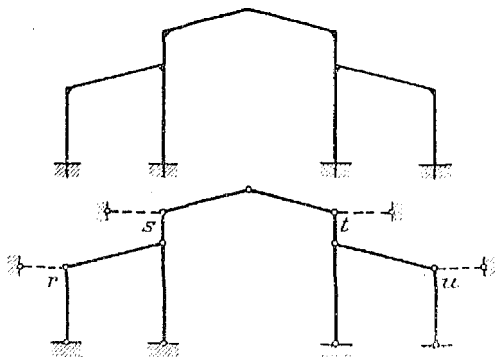


Abb. 10.

jenigen der Knoten in dem vorliegenden System. Hiernit sind die Winkel ψ bekannt, und der Fall ist somit auf denjenigen einer unbeweglichen Knotenpunktfigur zurückgeführt, mit dem einzigen Unterschied, daß jetzt außer den Knotendrehwinkeln $\zeta_a, \zeta_b \dots$ noch die Längenänderungen $\zeta_r, \zeta_s \dots$ der hinzugefügten Stäbe als überzählig eingeführt werden müssen.

Die Elastizitätsgleichungen lauten daher jetzt, indem die Schreib-

weise (6), wonach alle ζ - und ψ -Größen mit $\frac{EJ}{l_c}$ multipliziert erscheinen, beibehalten wird:

$$\left. \begin{aligned} Z_a = 0 &= Z_{a0} - Z'_{aa} \zeta'_a - Z'_{ab} \zeta'_b \dots - Z'_{ar} \zeta'_r - Z'_{as} \zeta'_s \dots, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ Z_r = 0 &= Z_{r0} - Z'_{ra} \zeta'_a - Z'_{rb} \zeta'_b \dots - Z'_{rr} \zeta'_r - Z'_{rs} \zeta'_s \dots \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Alle Größen Z , in deren Indizes $r, s \dots$ nicht eingehen, berechnen sich nach den im vorigen Abschnitt aufgestellten Formeln (13) bis (15); übrig bleibt nur, die Ausdrücke anzugeben für die Größen

$$Z_{r0}, Z_{s0} \dots, Z'_{ra}, Z'_{rb} \dots, Z'_{rr}, Z'_{rs}.$$

Die Spannkraften $Z_{r0}, Z_{s0} \dots$ werden von der äußeren, auf das Hauptsystem einwirkenden Belastung hervorgerufen. Die Knoten dieses Systems sind alle festgehalten (weil $\zeta_r = \zeta_s = \dots = 0$), und alle zur Konstruktion gehörigen Balken sind fest eingespannt (da $\zeta_a = \zeta_b = \dots = 0$). Man berechnet dann ohne Schwierigkeit die Spannungsmomente und damit die Drücke, die von den einzelnen Balken auf die Knoten ausgeübt werden, und findet so mit großer Annäherung die richtigen Stabkräfte (Normalkräfte in den Balken, Spannkraften der Z -Stäbe) mittels der Voraussetzung reibungsloser Gelenke in den Knoten. Um die Spannkraften $Z_{r0}, Z_{s0} \dots$ zu ermitteln, hat man daher nur eine gewöhnliche Kräfteermittlung für die Knotenpunktfigur durchzuführen, mit den erwähnten Knotendrücken sowie den eventuell unmittelbar in den Knoten angreifenden Belastungsdrücken als äußeren Kräften. Wenn die Normalkräfte der Balken vernachlässigt werden sollen und man daher nur die Spannkraften der Z -Stäbe braucht, wird man oft mit Vorteil das Prinzip der virtuellen Verschiebungen für diese Ermittlung ausnützen.

Gleichzeitig sei bemerkt, daß man auch diejenigen Werte von $Z_{r0}, Z_{s0} \dots$ in genau derselben Weise bestimmt, die einzuführen sind, wenn die von einer Temperaturänderung oder einem Nachgeben der Stützpunkte herrührenden Zusatzbeanspruchungen berechnet werden sollen. Anstatt von den durch die Belastung hervorgerufenen Spannungsmomenten geht man hierbei nur von den durch (19) oder (20) gegebenen Momenten aus.

Die Größen $Z'_{ar} = Z'_{ra}$ können, indem Z'_{ar} ein Moment und Z'_{ra} eine Spannkraft bedeuten, auf zweierlei Weise berechnet werden. Um die Momente Z'_{ar} zu bestimmen, schreibt man dem Stabe Z_r eine Verkürzung $1 (\zeta_r = -1)$ zu und ermittelt die hieraus folgenden Verdrehungswinkel ψ der Balken, eventuell mit Hilfe eines Verschiebungsplanes. Durch diese Drehungen werden nach (7) bis (7b) die folgenden Spannungsmomente hervorgerufen:

Für einen beiderseits eingespannten Balken $a - b$:

$$M_{ab,r} = M_{ba,r} = -6 \mu_{ab} \psi'_{ab,r} = -6 \mu_{ab} \psi_{ab,r} \cdot \frac{EJ_c}{l_c}; \quad (30)$$

für einen in a eingespannten, in k einfach gestützten Balken $a - k$:

$$M_{ak,r} = -3 \mu_{ak} \psi'_{ak,r} = -3 \mu_{ak} \psi_{ak,r} \cdot \frac{EJ_c}{l_c}, \quad (30a)$$

und somit nach (12):

$$Z'_{ar} = \frac{l_c}{EJ_c} Z_{ar} = +6 \sum \mu_{ab} \psi_{ab,r} + 6 \sum \mu_{ai} \psi_{ai,r} + 3 \sum \mu_{ak} \psi_{ak,r}, \quad (31)$$

worin a und b Knoten, i eine feste Einspannung und k eine einfache Stützung bezeichnen. Die erste Summenbildung ist über alle Balken, die vom Knoten a zu einem andern Knoten (b) hin laufen, auszudehnen, die beiden letzten sind über alle Balken, die den Knoten a mit einer Einspannung (i) oder einem einfachen Stützpunkt (k) verbinden, zu erstrecken.

Man könnte zwar auch die Spannkraft Z'_{ra} ermitteln, indem zuerst die dem Verschiebungszustand $\zeta_a = -1$ entsprechenden Einspannungsmomente und die daraus sich ergebenden Drücke der Balken auf die Knoten berechnet werden müßten und schließlich eine Spannkraftermittelung für die durch diese Drücke belastete Knotenpunktfigur auszuführen wäre. Der durch (31) angegebene Weg wird jedoch wohl immer vorzuziehen sein.

Schließlich ist noch ein Ausdruck für die Spannkräfte Z'_{rr} , $Z'_{sr} \dots$ zu bilden. Z'_{sr} bedeutet die Spannkraft im Stabe s für den Zustand $\zeta'_r = -1$ (d. h. alle übrigen $\zeta = 0$ und das System sonst unbelastet). Die diesem Zustand entsprechenden Momente sind schon oben benutzt und durch (30) und (30a) gegeben. Man ermittelt nun die Drücke, die von diesen Momenten auf die Knoten ausgeübt werden, betrachtet diese als äußere Kräfte für die Knotenpunktfigur und bestimmt die hierdurch hervorgerufenen Spannkräfte, speziell im s -Stab. Benutzt man hierzu das Prinzip der virtuellen Verschiebungen, so ergibt sich:

$$-Z_{sr} \cdot 1_s = \sum P \delta_s,$$

wo P die erwähnten Knotendrucke und δ_s die einer Verschiebung $\zeta_s = -1$ entsprechenden Wege dieser Kräfte bezeichnen.

Für einen beliebigen, von M_{ab} und M_{ba} beanspruchten Balken $a - b$ (Abb. 11) sind die Stützendrucke nach (30):

$$\frac{1}{l_{ab}} (M_{ab} + M_{ba}) = -\frac{12 \mu_{ab}}{l_{ab}} \cdot \psi'_{ab,r}.$$

Keht man die Pfeilspitzen in der Abb. 11 um, so erhält man die Drücke des Balkens auf die Knoten a und b ; diese bilden zusammen ein rechtsdrehendes Kräftepaar mit dem Moment $-12 \mu_{ab} \psi'_{ab,r}$. Der „Weg“ δ_s dieses Kräftepaares ist der Stabdrehwinkel $\psi_{ab,s}$, der auf dieselbe Weise wie $\psi_{ab,r}$ bestimmt werden kann. Der Beitrag des Balkens zu $\sum P \delta_s$ wird somit: $-12 \mu_{ab} \psi'_{ab,r} \psi_{ab,s}$, der Beitrag zur Spannung $Z_{s,r}$:

$$+12 \mu_{ab} \psi'_{ab,r} \psi_{ab,s} = +12 \mu_{ab} \psi_{ab,r} \psi_{ab,s} \cdot \frac{EJ_c}{l_c^3},$$

mithin zur „Spannung“ $Z'_{s,r}$:

$$+12 \mu_{ab} \psi_{ab,r} \psi_{ab,s}.$$

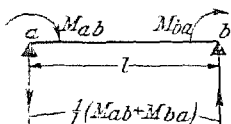


Abb. 11.

Für einen in k einfach gestützten Balken $a - k$ erhält man in derselben Weise mit Benutzung von (30a) den Beitrag zu $Z'_{s,r}$:

$$+3 \mu_{ak} \psi_{ak,r} \psi_{ak,s},$$

und durch Summierung der Beiträge aller Balken schließlich:

$$Z'_{s,r} = 12 \sum \mu_{ab} \psi_{ab,r} \psi_{ab,s} + 12 \sum \mu_{ai} \psi_{ai,r} \psi_{ai,s} + 3 \sum \mu_{ak} \psi_{ak,r} \psi_{ak,s}, \quad (32)$$

wo die Summenbildungen über alle in die Konstruktion eingehenden Balken, die zwei Knoten (a, b) verbinden oder von einer festen Einspannung (i) oder einer einfachen Unterstüzung (k) ausgehen, auszudehnen sind.

Mit $r = s$ wird aus (32) erhalten:

$$Z'_{r,r} = 12 \sum \mu_{ab} \psi_{ab,r}^2 + 12 \sum \mu_{ai} \psi_{ai,r}^2 + 3 \sum \mu_{ak} \psi_{ak,r}^2. \quad (33)$$

Für veränderlichen Querschnitt ist statt (31) zu setzen:

$$Z'_{ar} = 2 \sum \mu_{ab} (v'_{ab} + 1) \psi_{ab,r} + 2 \sum \mu_{ai} (v'_{ai} + 1) \psi_{ai,r} + 3 \sum \mu'_{ak} \psi_{ak,r}, \quad (31a)$$

und statt (32):

$$Z'_{s,r} = 2 \sum \mu_{ab} (v'_{ab} + v_{ab} + 2) \psi_{ab,r} \psi_{ab,s} + 2 \sum \mu_{ai} (v'_{ai} + v_{ai} + 2) \psi_{ai,r} \psi_{ai,s} + 3 \sum \mu'_{ak} \psi_{ak,r} \psi_{ak,s}; \quad (32a)$$

aus $Z'_{s,r}$ wird $Z'_{r,r}$ mit $r = s$ wie oben hergeleitet.

Die Auflösung der Gl. (29) wird am einfachsten so bewerkstelligt, daß man zuerst $\zeta'_r = \zeta'_s = \dots = 0$ setzt und die zugehörigen $\zeta'_a, \zeta'_b, \dots$ aus den ersten der Gl. (29) bestimmt; darauf werden die Belastungsglieder weggelassen und mittels derselben Gleichungen diejenigen Werte $\zeta'_a, \zeta'_b, \dots$ berechnet, die dem Zustand $\zeta'_r = -1 (\zeta'_s = \zeta'_t = \dots = 0)$ entsprechen; dann folgen dieselben Berechnungen für den Zustand $\zeta'_s = -1 (\zeta'_r = \zeta'_t = \dots = 0)$ usw. Das Verfahren läuft darauf hinaus, daß die Knotendrehwinkel ausgedrückt werden durch:

$$\zeta'_a = \zeta'_{a0} - \zeta'_{ar} \zeta'_r - \zeta'_{as} \zeta'_s \dots \quad (34)$$

und die speziellen Werte $\zeta'_{a0}, \zeta'_{ar}, \zeta'_{as} \dots$ mittels der für eine unbewegliche Knotenpunktfigur geltenden Gleichungen ermittelt werden. Schließlich hat man dann noch $\zeta'_r, \zeta'_s \dots$ aus den letzten der Gl. (29) zu berechnen, indem $\zeta'_a, \zeta'_b \dots$ mittels (34) hieraus eliminiert werden.

Man hat hiernach die folgenden Berechnungen auszuführen:

a) Bestimmung der Werte $\zeta'_{a0}, \zeta'_{b0} \dots$, die der äußeren Belastung entsprechen, während $\zeta'_r = \zeta'_s = \dots = 0$;

b) Bestimmung von $\zeta'_{ar}, \zeta'_{br} \dots$ für den Zustand $\zeta'_r = -1$ [d. h. die Belastungsglieder $Z_{a0}, Z_{b0} \dots$ in (29) werden durch $Z'_{ar}, Z'_{br} \dots$ ersetzt];

c) ebenso von $\zeta'_{as}, \zeta'_{bs} \dots$ für den Zustand $\zeta'_s = -1$ usw.;

d) aus den letzten der Gl. (29) $\zeta'_r, \zeta'_s \dots$ zu ermitteln, nach Elimination von $\zeta'_a, \zeta'_b \dots$ mittels (34).

b) Stufenweise Berechnung.

Es folgt von selbst, daß die hier eben unter a) bis c) aufgezählten Berechnungen nach der im vorigen Kapitel auseinandergesetzten sukzessiven Methode ausgeführt werden können. Bei den Berechnungen unter a) werden die Formeln (26) für die unbewegliche Knotenpunktfigur unverändert benutzt; unter b) und c) ist zwar Z'_{aa} unverändert nach (26) zu nehmen, während für Z_{a0} hier nach (24) zu setzen ist:

$$Z_{a0} = - \frac{2 \mu_{am}}{1 + 4 \mu_{am} \tau'_m} [\zeta'_{0m} - 3(1 + 2 \mu_{am} \tau'_m) \psi'_{am}] + 6 \sum \mu_{ai} \psi'_{ai} + 3 \sum \mu_{ak} \psi'_{ak}, \quad (35)$$

worin m eine elastische, i eine feste Einspannung und k eine gelenkige Lagerung bezeichnet. Man bemerkt, daß die hier mit ψ' bezeichneten Winkel, die den Zuständen $\zeta'_r = -1, \zeta'_s = -1 \dots$ entsprechen, denjenigen Winkeln ψ gleich sind, die den Zuständen $\zeta_r = -1, \zeta_s = -1 \dots$ entsprechen.

Die Rückwärtsrechnung zur Berichtigung der zuerst gefundenen Knotendrehwinkel wird unter a) unverändert nach (28) ausgeführt, unter b) und c) dagegen nach der Formel:

$$\zeta'_m = \frac{1}{1 + 4 \mu_{am} \tau'_m} (\zeta'_{0m} - 2 \mu_{am} \tau'_m \zeta'_a + 6 \mu_{am} \tau'_m \psi'_{am}). \quad (36)$$

Die hier auseinandergesetzte Berechnungsweise einer Konstruktion mit beweglicher Knotenpunktfigur ist an und für sich prinzipiell sehr einfach, wird aber doch ziemlich umständlich, falls mehr als einige wenige Z -Stäbe nötig sind, um die Unbeweglichkeit herzustellen. In einem späteren Kapitel (Kap. 7) wird eine Weiterentwicklung der stufenweisen Berechnung vorgenommen, die eine weniger umständliche Behandlung zuläßt.

Beispiel 5.

Die in Abb. 8 gezeigte Rahmenkonstruktion sei im Felde $a - b$ mit 1 t/ld. m belastet. In Beispiel 4 im vorigen Kapitel ist dieselbe Aufgabe schon behandelt, jedoch mit dem Unterschied, daß damals der Stab $0 - a$ zum System gehörig und daher die Knotenpunktfigur unbeweglich war, während hier kein solcher Stab vorhanden ist. Die Knotenpunktfigur ist somit hier beweglich, kann aber unbeweglich gemacht werden mittels eines einzigen Z -Stabes, $0 - a = Z_r$. Als überzählig sind dann die fünf Knotendrehwinkel $\zeta_a \dots \zeta_e$ und die Verlängerung ζ_r des hinzugefügten Stabes einzuführen.

Die Steifigkeitsbeiwerte μ sind wie in Beispiel 4:

$$\text{für alle Säulen: } \mu = 1, \quad \text{für } a - b \text{ und } d - e: \mu = \frac{4}{3},$$

$$\text{für } b - c \text{ und } c - d: \mu = 1.$$

Die Berechnung soll in die oben aufgezählten Abteilungen a), b) und d) gegliedert werden.

a) Für $\zeta_r = 0$ wird die Berechnung genau die nämliche wie in Beispiel 4; sie liefert die Werte:

$$\begin{aligned} \zeta'_{a0} &= +0,4199; & \zeta'_{b0} &= -0,3445; & \zeta'_{c0} &= +0,0647; \\ \zeta'_{d0} &= -0,0112; & \zeta'_{e0} &= +0,0032. \end{aligned}$$

b) Wir werden zuerst

1. alle Gl. (29) auf einmal aufstellen. Nach (16) und (17) ergeben sich dann die folgenden Koeffizienten:

$$\begin{aligned} Z'_{aa} &= 4 \left(1 + \frac{4}{3}\right) = \frac{28}{3} = Z'_{ee}, & Z'_{bb} &= Z'_{dd} = 4 \left(\frac{4}{3} + 1\right) + 3 \cdot 1 = \frac{37}{3}, \\ Z_{cc} &= 4(1 + 1) + 3 \cdot 1 = 11, & Z'_{ab} &= Z'_{cd} = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}, & Z'_{ac} &= Z'_{ec} = Z'_{bd} = 0, \\ Z'_{bc} &= Z_{dc} = 2 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

Wenn in der Knotenpunktfigur dem Z_r -Stab die Verkürzung 1 erteilt wird, werden alle Säulen um den Winkel $\psi_r = -\frac{1}{4}$ gedreht (wenn die Längen in Meter ausgedrückt werden), während der Balken keine Drehung ausführt. Nach (31) und (33) wird daher erhalten:

$$\begin{aligned} Z'_{ar} &= Z'_{er} = 6 \left[1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{4}{3} \cdot 0\right] = -\frac{3}{2}, \\ Z'_{br} &= Z'_{cr} = Z'_{dr} = 6 \left(\frac{4}{3} \cdot 0 + 1 \cdot 0\right) + 3 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{4}, \\ Z'_{rr} &= 12 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 2 + 3 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^3 \cdot 3 = \frac{33}{16}. \end{aligned}$$

Die Gl. (29) lauten somit:

$$\begin{aligned} Z_a &= 0 = Z_{a0} - \frac{28}{3} \zeta'_a - \frac{8}{3} \zeta'_b + \frac{3}{2} \zeta'_r, \\ Z_b &= 0 = Z_{b0} - \frac{8}{3} \zeta'_a - \frac{37}{3} \zeta'_b - 2 \zeta'_c + \frac{3}{4} \zeta'_r, \\ Z_c &= 0 = Z_{c0} - 2 \zeta'_b - 11 \zeta'_c - 2 \zeta'_d + \frac{3}{4} \zeta'_r, \end{aligned}$$

$$Z_d = 0 = Z_{d0} - 2 \zeta_c' - \frac{37}{3} \zeta_d' - \frac{8}{3} \zeta_e' + \frac{3}{4} \zeta_r',$$

$$Z_c = 0 = Z_{c0} - \frac{8}{3} \zeta_d' - \frac{28}{3} \zeta_e' + \frac{3}{2} \zeta_r',$$

$$Z_r = 0 = Z_{r0} + \frac{3}{2} \zeta_a' + \frac{3}{4} \zeta_b' + \frac{3}{4} \zeta_e' + \frac{3}{4} \zeta_d' + \frac{3}{2} \zeta_e' - \frac{33}{16} \zeta_r'.$$

Aus den ersten fünf Gleichungen ergibt sich, mit $Z_{a0} = Z_{b0} = \dots = Z_{e0} = 0$ und $\zeta_r' = -1$:

$$\begin{aligned} \zeta_a' &= -0,1558, & \zeta_b' &= -0,0171, & \zeta_c' &= -0,0620, \\ \zeta_d' &= -0,0171, & \zeta_e' &= -0,1558. \end{aligned}$$

d) Jetzt können nach (34) die Knotendrehwinkel aufgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \zeta_a' &= +0,4198 + 0,1558 \zeta_r'; & \zeta_b' &= -0,3445 + 0,0171 \zeta_r'; \\ \zeta_c' &= +0,0647 + 0,0620 \zeta_r'; & \zeta_d' &= -0,0112 + 0,0171 \zeta_r'; \\ \zeta_e' &= +0,0032 + 0,1558 \zeta_r'; \end{aligned}$$

wenn diese Werte in die letzte der obigen Gleichungen eingeführt werden, ergibt sich:

$$\zeta_r' = +0,2733.$$

Hiermit werden schließlich die endgültigen Werte erhalten:

$$\begin{aligned} \zeta_a' &= +0,4624, & \zeta_b' &= -0,3398, & \zeta_c' &= +0,0816, & \zeta_d' &= -0,0065, \\ \zeta_e' &= +0,0458. \end{aligned}$$

Die einzelnen Momente lassen sich jetzt ohne Schwierigkeit mittels (7) berechnen, indem (siehe Beisp. 4) die Belastungsmomente werden: $M_{ab}^0 = -3 \text{ tm}$, $M_{ba}^0 = +3 \text{ tm}$, und für die Säulen $\psi' = +\frac{\zeta_r'}{h}$, für die Balken $\psi' = 0$. Beispielsweise werden aufgeführt:

$$M_{ab} = -3,0 + 4 \mu_{ab} \zeta_a' + 2 \mu_{ab} \zeta_b' = -1,440 \text{ tm},$$

$$M_{a1} = 0 + 4 \mu_{a1} \zeta_a' - 6 \mu_{a1} \frac{\zeta_r'}{4} = +1,440 \text{ tm},$$

$$M_{ba} = +3,0 + 2 \mu_{ba} \zeta_a' + 4 \mu_{ba} \zeta_b' = +2,421 \text{ tm},$$

$$M_{bc} = 0 + 4 \mu_{bc} \zeta_b' + 2 \mu_{bc} \zeta_c' = -1,196 \text{ tm},$$

$$M_{b2} = 0 + 3 \mu_{b2} \zeta_b' - 3 \mu_{b2} \frac{\zeta_r'}{4} = -1,225 \text{ tm}.$$

2. Will man die stufenweise Berechnung zur Ermittlung von ζ_{ar}' , $\zeta_{br}' \dots$ verwenden, hat man die nämlichen Werte von Z_{aa}' , $Z_{bb}' \dots$ und τ_a' , $\tau_b' \dots$ zu benutzen wie in Beisp. 4, während Z_{a0} , $Z_{b0} \dots$ nach (35) zu nehmen sind. Die Winkel ψ sind, wie oben, für den ganzen Balken $a - e$ gleich Null, für alle Säulen gleich $-\frac{1}{4}$.

Die ersten Schritte der Berechnung gestalten sich dann folgendermaßen:

α) für das System in Abb. 9a:

$$Z_{a0} = 6 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{2}, \quad Z_{aa}' = 4, \quad \zeta_{ar,0} = -\frac{3}{8}, \quad \tau_a' = \frac{1}{4};$$

β) für das System in Abb. 9b:

$$Z_{b_0} = -\frac{2 \cdot \frac{4}{3}}{1 + 4 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4}} \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) + 3 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{9}{28},$$

$$Z'_{bb} = \frac{53}{7}, \quad \zeta'_{br,0} = -\frac{9}{28} \cdot \frac{7}{53} = -\frac{9}{212}, \quad r'_b = \frac{7}{53}$$

usw.

Aus den so gefundenen $\zeta'_{ar,0} \dots$ werden demnächst die endgültigen Werte von $\zeta'_{ar}, \zeta'_{br} \dots$ durch Rückwärtsrechnung nach (36) ermittelt.

6. Einflußlinien.

In erster Linie wird es sich hier um die Einflußlinien für die überzähligen ζ -Größen handeln. Diese können selbstverständlich so ermittelt werden, daß man eine lotrechte Kraft 1 als einzige Belastung einführt und die Gl. (11) oder (29) auflöst. Die ζ -Einflußordinaten werden dadurch als Funktionen der bekannten Einflußordinaten für die Stützenmomente voll eingespannter Balken erhalten. Dieses Verfahren ist indessen nicht besonders übersichtlich, u. a. weil es nötig ist, die Berechnung für eine Kraft 1 in jedem Feld für sich durchzuführen.

Bedeutend schneller und übersichtlicher gelangt man zum Ziele, wenn von dem Maxwell'schen Satz Gebrauch gemacht wird. Demzufolge können nämlich die gesuchten ζ -Linien als diejenigen Durchbiegungslinien aufgefaßt werden, die von einer der betreffenden Formänderung ζ entsprechenden Belastung 1 hervorgerufen werden. Wenn z. B. ζ_b einen Knotendrehwinkel bedeutet, hat man hiernach nur die Durchbiegungslinie für ein an dem Knoten b angreifendes Moment 1 als einzige Belastung zu bestimmen; wenn ζ_r eine Stabverlängerung bedeutet, handelt es sich um die Durchbiegungslinie für eine in r angreifende und in den Z_r -Stab fallende Kraft 1. — Die genannte Belastung erzeugt gewisse Knotendrehwinkel $\zeta_a, \zeta_b \dots$ und (gedachte) Stabverlängerungen $\zeta_r, \zeta_s \dots$, auf deren Bestimmung im einzelnen unten näher eingegangen werden soll; hieraus können die Stützenmomente $M_{ab}, M_{ba}, M_{bc} \dots$ nach (7) oder (10) hergeleitet werden. Endlich ergibt sich aus der hierdurch bekannten Momentenfläche die Durchbiegungslinie als Seilpolygon oder Momentenkurve in bekannter Weise.

Schneller kommt man indessen zum Ziele, wenn man beachtet, daß jeder einzelne Balken $a - b, b - e \dots$ nur von den beiden Stützenmomenten beansprucht ist, der Balken $a - b$ beispielsweise nur von M_{ab} und M_{ba} (beide, wie oben, positiv mit dem Uhrzeiger).

Für eine solche Belastung lautet die Gleichung der Durchbiegungslinie, wenn vorläufig unveränderliches Trägheitsmoment für jeden Balken für sich vorausgesetzt wird:

$$y = \frac{l_{ab}^2}{6 EJ_{ab}} (M_{ab} \eta' - M_{ba} \eta), \quad (37)$$

worin

$$\eta = \frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^3, \quad \eta' = \frac{x'}{l} - \left(\frac{x'}{l}\right)^3, \quad x' = l - x. \quad (37a)$$

Die Zahlenwerte η und η' werden auch sonst des öfteren bei Behandlung von durchgehenden Trägern und dergleichen Konstruktionen benutzt, und können ein für allemal berechnet werden. Es ist:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \frac{x}{l} = 0, & 0,1, & 0,2, & 0,3, & 0,4, & 0,5, & 0,6, & 0,7, & 0,8, & 0,9, & 1,0, \\ \eta = 0, & 0,099, & 0,192, & 0,273, & 0,336, & 0,375, & 0,384, & 0,357, & 0,288, & 0,171, & 0, \\ \eta' = 0, & 0,171, & 0,288, & 0,357, & 0,384, & 0,375, & 0,336, & 0,273, & 0,192, & 0,099, & 0. \end{array}$$

Aus (37) können indessen sofort die Stützenmomente eliminiert werden mittels der Ausdrücke (7), so daß man unmittelbar eine Gleichung der Einflußlinie erhält, die außer den Veränderlichen (η und η') nur noch bekannte Beiwerte enthält, nämlich die der in Rede stehenden Belastung 1 entsprechenden speziellen ζ -Größen.

a) Unbewegliche Knotenpunktfigur.

1. Unveränderliches Trägheitsmoment der einzelnen Balken. Die ζ -Größe, deren Einflußlinie gesucht ist, z. B. ζ_c , kann hier nur einen Knotendrehwinkel bedeuten. Die anzuwendende „Belastung 1“ ist dann ein im Knoten c angreifendes Moment 1. Nennt man nun die speziellen Werte der $\frac{EJ_c}{l_c}$ -fachen Knotendrehwinkel, die der Momentenbelastung 1 in c entsprechen, φ'_{ac} , φ'_{bc} , φ'_{cc} ..., so hat man nach (7) für M_{ab} und M_{ba} in (37) zu setzen:

$$M_{ab} = 2 \mu_{ab} (2 \varphi'_{ac} + \varphi'_{bc}), \quad M_{ba} = 2 \mu_{ab} (\varphi'_{ac} + 2 \varphi'_{bc}),$$

und findet so die Gleichung der ζ_c -Linie im Felde $a - b$:

$$\zeta_c = \frac{1}{3} l_{ab} [(2 \varphi'_{ac} + \varphi'_{bc}) \eta' - (\varphi'_{ac} + 2 \varphi'_{bc}) \eta] \cdot \frac{l_c}{EJ_c},$$

durch Multiplikation mit $\frac{EJ_c}{l_c}$ also die ζ'_c -Linie im Felde $a - b$:

$$\zeta'_c = \frac{1}{3} l_{ab} [(2 \varphi'_{ac} + \varphi'_{bc}) \eta' - (\varphi'_{ac} + 2 \varphi'_{bc}) \eta], \quad (38)$$

und in einem beliebigen anderen Felde $c - d$:

$$\zeta'_c = \frac{1}{3} l_{cd} [(2 \varphi'_{cc} + \varphi'_{dc}) \eta' - (\varphi'_{cc} + 2 \varphi'_{dc}) \eta]. \quad (38a)$$

Speziell im Felde $k - a$, wo k eine einfache Stützung ist, findet man mittels (7b):

$$\zeta_c' = -\frac{1}{2} l_{ak} \varphi_{ac}' \cdot \eta, \quad (38b)$$

wobei x von k aus gerechnet werden muß.

Aus den ζ' -Linien leitet man die Einflußlinien für die Stützmomente her mittels (7), wo (für die unbewegliche Knotenpunktfigur) $\eta' = 0$; die Gleichungen der M^0 -Linien, die man hierbei zu benutzen hat, lauten für volle Einspannung in a und b :

$$M_{ab}^0 = -\frac{1}{3} l_{ab} (2\eta' - \eta), \quad M_{ba}^0 = +\frac{1}{3} l_{ab} (2\eta - \eta'), \quad (39)$$

und für einfache Stützung in k :

$$M_{ak}^0 = +\frac{1}{2} l_{ak} \eta \quad (x \text{ von } k \text{ aus gerechnet}). \quad (39a)$$

Das Säulenmoment M_{b_2} (siehe z. B. Abb. 8) ergibt sich, wenn keine unmittelbare Belastung auf die Säule einwirkt, nach (7a) und (7b) zu:

$$M_{b_2} = 4 \mu_{b_2} \zeta_b', \quad \text{bzw.} \quad M_{b_2} = 3 \mu_{b_2} \zeta_b', \quad (40)$$

je nachdem die Säule unten eingespannt oder gelenkig gelagert ist.

Es bleibt jetzt nur noch die Ermittlung der speziellen Knotendrehwinkel φ übrig, die für die Momentenbelastung 1 in Knoten c entstehen. Diese Ermittlung kann, genau wie für eine beliebige andere Belastung, entweder mittels der Elastizitätsgleichungen (11) ausgeführt werden, oder man kann eine stufenweise Berechnung vorziehen.

In den Gleichungen (11) ist nur zu setzen:

$$Z_{a0} = Z_{b0} = 0, \quad Z_{c0} = +1, \quad Z_{d0} = Z_{e0} = \dots = 0; \quad (41)$$

für die meisten einstöckigen Rahmenkonstruktionen sind die Gleichungen von Clapeyronscher Form, sie können daher verhältnismäßig leicht, rechnerisch oder graphisch, aufgelöst werden.

Bei der stufenweisen Berechnung benutzt man die Ausdrücke (26) und (27) für Z'_{da} und τ'_a unverändert. In denjenigen Knoten ($a, b \dots$), die früher als der belastete Knoten (c) behandelt werden, ist $Z_{a0} = 0$, $Z_{b0} = 0 \dots$ zu setzen, im belasteten Knoten selbst ist $Z_{c0} = +1$, und in den folgenden Knoten nach (26):

$$Z_{d0} = -\frac{2 \mu_{cd}}{1 + 4 \mu_{cd} \tau'_c} \cdot \zeta'_{0c}, \quad Z_{e0} = -\frac{2 \mu_{de}}{1 + 4 \mu_{de} \tau'_d} \cdot \zeta'_{0d} \dots \quad (42)$$

Die Rückwärtsrechnung ist nach (28) mittels der Formel:

$$\zeta'_d = \frac{1}{1 + 4 \mu_{de} \tau'_d} (\zeta'_{0d} - 2 \mu_{de} \tau'_d \zeta'_e) \quad (43)$$

vorzunehmen.

Beispiel 6.

Für den in Beisp. 4 (Abb. 8) behandelten Portalträger ist die ζ_c -Linie zu ermitteln. — Die Knotenpunktfigur ist unbeweglich, da der Knoten a durch den zum System gehörigen Stab $0-a$ festgehalten ist ($0-a$ ist kein Balken). Trägheitsmomente und Steifigkeitsbeiwerte μ sind in Beisp. 4 angegeben. Dieselbe Konstruktion, ohne den Stab $0-a$, also mit beweglicher Knotenpunktfigur, ist in Beisp. 5 behandelt, aber auch die ersten hier mitgeteilten Berechnungen beziehen sich auf eine unbewegliche Knotenpunktfigur, da der Knoten a hier durch den gedachten Z_r -Stab festgehalten erscheint.

Wir beginnen damit, die Drehwinkel $\zeta' = \varphi'$ zu ermitteln, die von einem Momente 1 im Knoten c hervorgerufen werden. Wünscht man dazu alle Knotengleichungen auf einmal aufzustellen, können die Koeffizienten Z'_{aa} , Z'_{ab} ... von Beisp. 5 (b, 1) übernommen werden, so daß die Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned} \frac{28}{3} \zeta'_a + \frac{8}{3} \zeta'_b &= 0, \\ \frac{8}{3} \zeta'_a + \frac{37}{3} \zeta'_b + 2 \zeta'_c &= 0, \\ 2 \zeta'_b + 11 \zeta'_c + 2 \zeta'_d &= 1; \end{aligned}$$

die beiden letzten Gleichungen, für die Knoten d und e , brauchen nicht aufgeschrieben zu werden, da der Symmetrie wegen $\zeta'_d = \zeta'_b$ und $\zeta'_e = \zeta'_a$.

Die Auflösung ergibt:

$$\begin{aligned} \zeta'_a = \varphi'_{ac} = \varphi'_{ec} &= +0,00479; & \zeta'_b = \varphi'_{bc} = \varphi'_{dc} &= -0,01677; \\ \zeta'_c = \varphi'_{cc} &= +0,09701. \end{aligned}$$

Hieraus wird gebildet:

$$\begin{aligned} 2 \varphi'_{bc} + \varphi'_{cc} &= +0,06347, & \varphi'_{bc} + 2 \varphi'_{cc} &= +0,17725, \\ 2 \varphi'_{ac} + \varphi'_{bc} &= -0,00719, & \varphi'_{ac} + 2 \varphi'_{bc} &= -0,02875. \end{aligned}$$

Nach (38) und (38a) lautet daher die Gleichung der ζ'_c -Linie:

$$\text{im Felde } a-b: \quad \zeta'_c = \frac{1}{3} l_{ab} (-0,00719 \eta' + 0,02875 \eta),$$

$$\text{im Felde } b-c: \quad \zeta'_c = \frac{1}{3} l_{bc} (0,06347 \eta' - 0,17725 \eta).$$

Die stufenweise Berechnung, falls man diese zur Bestimmung der Größen φ' vorzieht, gestaltet sich folgendermaßen, indem die Werte von

$$1 + 4 \mu \tau', \quad \frac{1 + 3 \mu \tau'}{1 + 4 \mu \tau'} = (\mu \tau'), \quad Z'_{aa}, \quad \tau'_a \text{ usw. vom Beisp. 4 übernommen werden}$$

können:

Knoten a :

$$Z_{a0} = 0, \quad Z'_{aa} = 4, \quad \zeta'_{0a} = 0, \quad \tau'_a = \frac{1}{4};$$

Knoten b :

$$\begin{aligned} 1 + 4 \mu \tau'_a &= \frac{7}{3}, & (\mu \tau'_a) &= \frac{6}{7}, \\ Z_{b0} = 0, & \quad Z'_{bb} = \frac{53}{7}, & \zeta'_{0b} = 0, & \quad \tau'_b = \frac{7}{53}; \end{aligned}$$

Knoten c:

$$1 + 4 \mu \tau_b' = \frac{81}{53}, \quad (\mu \tau_b') = \frac{74}{81},$$

$$Z_{c0} = 1, \quad Z'_{cc} = \frac{539}{81}, \quad \zeta'_{0c} = \frac{81}{539} = +0,15028, \quad \tau_c' = \frac{81}{539};$$

Knoten d:

$$1 + 4 \mu \tau_c' = \frac{863}{539}, \quad (\mu \tau_c') = \frac{782}{863},$$

$$Z_{d0} = -2 \cdot 1 \cdot \frac{539}{863} \cdot \frac{81}{539} = -\frac{162}{863}, \quad Z'_{dd} = \frac{5717}{863},$$

$$\zeta'_{0d} = -\frac{162}{5717} = -0,02834, \quad \tau_d' = \frac{863}{5717};$$

Knoten e:

$$1 + 4 \mu \tau_d' = \frac{30959}{17151}, \quad (\mu \tau_d') = \frac{27507}{30959},$$

$$Z_{e0} = -2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{17151}{30959} \cdot \left(-\frac{162}{5717}\right) = +\frac{1296}{30959},$$

$$Z'_{ee} = \frac{270540}{30959}, \quad \zeta'_{0e} = \frac{1296}{270540} = +0,00479.$$

Die Rückwärtsrechnung nach (43) ergibt sodann:

$$\zeta'_e = \varphi'_{ec} = \dots \dots \dots +0,00479,$$

$$\zeta'_d = \varphi'_{dc} = \frac{17151}{30959} \left(-0,02834 - 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{863}{5717} \cdot 0,00479\right) = -0,01677,$$

$$\zeta'_c = \varphi'_{cc} = \frac{539}{863} \left(0,15028 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{81}{539} \cdot (-0,01677)\right) = +0,09701,$$

usw.

Bei dieser zweiten Berechnungsweise kann die Symmetrie nur in der Rückwärtsrechnung ausgenutzt werden.

2. Balken mit veränderlichem Trägheitsmoment. Mit den Bezeichnungen in Abb. 5, die schon im Kap. 3 bei der Entwicklung der Gleichungen (10) benutzt wurden, kann die Durchbiegungslinie eines Balkens $a - b$, der nur von den beiden Stützenmomenten M_{ab} und M_{ba} beansprucht ist, geschrieben werden:

$$\frac{EJ_c}{l_c} y = M_{ab} \delta_{ma} - M_{ba} \delta_{mb};$$

der Faktor $\frac{EJ_c}{l_c}$ rührt davon her, daß die „ v -Kräfte“, die zur Berechnung von δ_{ma} und δ_{mb} benutzt werden, mit diesem Faktor multipliziert angenommen wurden. δ_{ma} und δ_{mb} bedeuten (vgl. Abb. 5) die Durchbiegungen, die von einem (den einfachen Balken nach abwärts biegenden) Momente 1 in a oder in b erzeugt werden. Um die Gleichung der Einflußlinie irgendeines Knotendrehwinkels, z. B. ζ_c , zu erhalten, hat man jetzt in diese

Durchbiegungslinie nur diejenigen Werte von M_{ab} und M_{ba} einzuführen, die der Belastung $Z_{c_0} = +1$ entsprechen.

Nennt man, wie oben, die speziellen Knotendrehwinkel, die von dieser Momentenbelastung ($Z_{c_0} = +1$) verursacht werden, φ'_{ac} , φ'_{bc} , ..., so hat man nach (10):

$$M_{ab} = 2 \mu_{ab} (\nu'_{ab} \varphi'_{ac} + \varphi'_{bc}); \quad M_{ba} = 2 \mu_{ab} (\varphi'_{ac} + \nu_{ab} \varphi'_{bc});$$

die Gleichung der ζ'_c -Linie lautet daher:

im Felde $a - b$:

$$\zeta'_c = 2 \mu_{ab} [(\nu'_{ab} \varphi'_{ac} + \varphi'_{bc}) \delta_{ma} - (\varphi'_{ac} + \nu_{ab} \varphi'_{bc}) \delta_{mb}], \quad (44)$$

im Felde $b - c$:

$$\zeta'_c = 2 \mu_{bc} [(\nu'_{bc} \varphi'_{bc} + \varphi'_{cc}) \delta_{mb} - (\varphi'_{bc} + \nu_{bc} \varphi'_{cc}) \delta_{mc}]; \quad (44a)$$

speziell im Felde $k - a$, wo k eine einfache Stützung ist (mittels (10b)):

$$\zeta'_c = -3 \mu'_{ak} \varphi'_{ac} \delta_{ma}. \quad (44b)$$

Die φ' -Größen endlich können genau wie oben berechnet werden, entweder mittels der auf einmal aufgestellten Knotengleichungen (11), wobei die Koeffizienten hier (für veränderlichen Querschnitt) nach (16) und (17) zu nehmen sind, oder mittels einer stufenweisen Berechnung nach den Formeln (26a) bis (28a), wobei für die Anwendung hier alle M^0 gleich Null werden, (wie oben) $Z_{a_0} = Z_{b_0} = \dots = 0$ für alle Knoten, die früher als der belastete Knoten behandelt werden, und für diesen selbst $Z_{c_0} = 1$ zu setzen ist.

b) Bewegliche Knotenpunktfigur.

Auch hier können die gesuchten Einflußlinien als Durchbiegungslinien aufgefaßt werden. Da ferner die einzelnen Balken bei dem Belastungszustande, für welchen diese Durchbiegungslinien zu ermitteln sind, nur von den Stützenmomenten M_{ab} , M_{ba} , ... beansprucht sind, behalten die Gleichungen der Durchbiegungslinien, und somit der Einflußlinien, die oben angegebene Form bei; es sind nur die Werte der einzuführenden Stützenmomente unter Berücksichtigung der Beweglichkeit der Knotenpunktfigur zu bestimmen.

Wenn von einer ζ'_c - oder einer ζ'_r -Linie die Rede ist, handelt es sich also wieder darum, diejenigen speziellen Werte $\zeta' = \varphi'_c$ oder $= \varphi'_r$ zu bestimmen, die der Belastung $Z_{c_0} = +1$ oder $Z_{r_0} = +1$ entsprechen. Diese Bestimmung kann mittels der Gleichungen (29) oder (als stufenweise Berechnung) nach (35) und (36) ausgeführt werden. Sind erst die φ' -Werte bekannt, so sind die Stützenmomente M_{ab} , M_{ba} , ... durch (7) oder (10) gegeben. Ganz allgemein

erhält man daher die Gleichung der ζ'_c -Linie im Felde $a - b$, für unveränderlichen Querschnitt:

$$\zeta'_c = \frac{1}{3} l_{ab} [(2 \varphi'_{ac} + \varphi'_{bc} - 3 \psi'_{ab,c}) \eta' - (\varphi'_{ac} + 2 \varphi'_{bc} - 3 \psi'_{ab,c}) \eta], \quad (45)$$

speziell im Felde $k - a$, wo k eine einfache Stützung ist:

$$\zeta'_c = -\frac{1}{2} l_{ak} (\varphi'_{ac} - \psi'_{ak,c}) \cdot \eta, \quad (45a)$$

wobei x von k aus zu rechnen ist;

für veränderlichen Querschnitt, im Felde $a - b$:

$$\zeta'_c = 2 \mu_{ab} [(\nu'_{ab} \varphi'_{ac} + \varphi'_{bc} - (\nu'_{ab} + 1) \psi'_{ab,c}) \delta_{ma} - (\varphi'_{ac} + \nu_{ab} \varphi'_{bc} - (\nu_{ab} + 1) \psi'_{ab,c}) \delta_{mb}], \quad (46)$$

speziell im Felde $k - a$:

$$\zeta'_c = -3 \mu'_{ak} (\varphi'_{ac} - \psi'_{ak,c}) \cdot \delta_{ma}. \quad (46a)$$

Für die ζ'_r -Linie sind die φ'_c - und ψ'_c -Größen nur durch φ'_r und ψ'_r zu ersetzen.

Die in (45) und (46) eingehenden Stabdrehwinkel ψ'_c sind durch die der Belastung $Z_{c0} = +1$ entsprechenden Werte von $\zeta'_r = \varphi'_{rc}$, $\zeta'_s = \varphi'_{sc}$... gegeben. Für eine Konstruktion wie z. B. die in Abb. 8 gezeigte, aus einem wagerechten Balken und lotrechten Säulen bestehend, wo die äußere Belastung nur am Balken angreift, sind alle ψ'_r in (45) und (46) gleich Null zu setzen, weil die Beweglichkeit keine Drehung des Balkens mit sich führen kann.

Beispiel 7.

Für die Konstruktion in Abb. 8, ohne den Stab $0 - a$, sind die ζ'_c - und ζ'_r -Linien zu ermitteln.

ζ'_c -Linie. Um die erforderlichen φ' -Werte zu berechnen, ist in den Gleichungen (29) zu setzen: $Z_{a0} = Z_{b0} = 0$, $Z_{c0} = +1$, $Z_{d0} = Z_{e0} = Z_{r0} = 0$. Mit $\zeta'_r = 0$ ergeben sich die schon in Beisp. 6 gefundenen Werte:

$$\zeta'_{a0} = \zeta'_{e0} = +0,00479, \quad \zeta'_{b0} = \zeta'_{d0} = -0,01677, \quad \zeta'_{c0} = +0,09701.$$

Für $\zeta'_r = -1$ sind weiter die ersten der Gl. (29) schon im Beisp. 5 aufgestellt und aufgelöst worden, sie ergaben:

$$\zeta'_{ar} = \zeta'_{er} = -0,15583; \quad \zeta'_{br} = \zeta'_{dr} = -0,01707; \quad \zeta'_{cr} = -0,06197.$$

Auch die letzte der Gleichungen (29) ist im Beisp. 5 aufgestellt worden. Wird hierin $Z_{r0} = 0$ gesetzt und werden die Knotenwinkel mittels der Formel: $\zeta'_a = \zeta'_{a0} - \zeta'_{ar} \zeta'_r$ und der eben aufgeführten Zahlenwerte von ζ'_{a0} , ζ'_{ar} und den analogen eliminiert, so lautet diese Gleichung:

$$2 \cdot \frac{3}{2} (0,00479 + 0,15583 \zeta'_r) + 2 \cdot \frac{3}{4} (-0,01677 + 0,01707 \zeta'_r) + \frac{3}{4} (0,09701 + 0,06197 \zeta'_r) - \frac{33}{16} \zeta'_r = 0,$$

woraus folgt:

$$1,52293 \zeta'_r = 0,06197; \quad \zeta'_r = +0,04069.$$

Hiermit ergeben sich schließlich die endgültigen Knotendrehwinkel:

$$\zeta'_a = \varphi'_{ac} = \varphi'_{ec} = +0,01113; \quad \zeta'_b = \varphi'_{bo} = \varphi'_{dc} = -0,01608;$$

$$\zeta'_c = \varphi'_{cc} = +0,09953.$$

Um die Einflußlinie zu erhalten, bildet man jetzt die Werte:

$$2\varphi'_{bc} + \varphi'_{cc} = +0,06737, \quad \varphi'_{bc} + 2\varphi'_{cc} = +0,18298,$$

$$2\varphi'_{ac} + \varphi'_{bc} = +0,00618, \quad \varphi'_{ac} + 2\varphi'_{bc} = -0,02103.$$

Somit lautet die Gleichung der ζ'_c -Linie nach (45) (mit $\psi' = 0$):

$$\text{im Felde } a-b: \zeta'_c = \frac{1}{3} l_{ab} (0,00618 \eta' + 0,02103 \eta),$$

$$\text{im Felde } b-c: \zeta'_c = \frac{1}{3} l_{bc} (0,06737 \eta' - 0,18298 \eta),$$

also nicht viel von der im Beispiel 6 gefundenen verschieden.

ζ'_r -Linie. Aus den fünf ersten der Gl. (29) erhält man, mit $Z_{a0} = Z_{b0} = \dots = Z_{c0} = 0$ und mit $\zeta'_r = 0$, alle Drehwinkel $\zeta'_{a0} = \zeta'_{b0} = \dots = \zeta'_{c0} = 0$. In die letzte Gl. (29) ist sodann $Z_{r0} = +1$ einzusetzen; mit den schon oben ermittelten Werten von ζ'_{ar} , $\zeta'_{br} = \dots$ lautet dann diese Gleichung:

$$1,52293 \zeta'_r = 1; \quad \zeta'_r = 0,65663.$$

Nach der Formel $\zeta'_a = \zeta'_{a0} - \zeta'_{ar} \zeta'_r$ werden jetzt die der Belastung $Z_{r0} = 1$ entsprechenden endgültigen Knotendrehwinkel:

$$\varphi'_{ar} = \varphi'_{er} = 0,15583 \zeta'_r = 0,10232,$$

$$\varphi'_{br} = \varphi'_{dr} = 0,01707 \zeta'_r = 0,01121,$$

$$\varphi'_{cr} = 0,06197 \zeta'_r = 0,04069,$$

womit die ζ'_r -Linie in derselben Weise wie oben bestimmt ist. — Diese Einflußlinie hat man für die Untersuchung der Säulen nötig. Nach (7a) und (7b) ist nämlich beispielsweise für die unten eingespannte Säule $a-1$, da $\psi'_{a1} = +\frac{\zeta'_r}{h_1}$ und die Säule von keiner unmittelbaren Belastung beansprucht ist:

$$M_{a1} = 2 \mu_{a1} \left(2 \zeta'_a - \frac{3}{h_1} \zeta'_r \right),$$

und für die unten gelenkig gelagerte Säule $b-2$:

$$M_{b2} = 3 \mu_{b2} \left(\zeta'_b - \frac{1}{h_2} \zeta'_r \right);$$

hieraus lassen sich die Einflußlinien für diese Momente ohne weiteres ermitteln.

7. Knoten mit zwei und drei Bewegungsmöglichkeiten; Erweiterung der stufenweisen Berechnung.

Bisher sind eigentlich nur Knoten mit einer einzigen Bewegungsmöglichkeit (einer Drehung) in Betracht gezogen. Es sind zwar auch Konstruktionen mit beweglicher Knotenpunktfigur behandelt worden, wo also die Knoten außer einer Drehung noch eine lineare Verschiebung erleiden konnten; dieser Fall wurde indessen durch Hinzufügung einiger Z -Stäbe auf denjenigen einer unbeweglichen Knoten-

punktfigur zurückgeführt, so daß die Drehung und die Verschiebung gesondert behandelt wurden. Dieses Verfahren ist indessen nur dann praktisch, wenn man mit verhältnismäßig wenigen Z -Stäben auskommen kann, und es soll daher hier eine Erweiterung der bisherigen Berechnungsverfahren und namentlich der stufenweisen Berechnung vorgenommen werden, wodurch es möglich wird, sämtliche Verschiebungen eines Knotens auf einmal in Rechnung zu stellen.

Zur Festhaltung eines Knotens a sind ganz allgemein drei Bedingungen erforderlich; um die Drehung ζ_a zu verhindern, muß auf einen von a ausgehenden steifen Arm ein Moment Z_a einwirken, und gegen Verschiebungen ζ_r und ζ_s in zwei beliebigen Richtungen muß der Knoten durch zwei Z -Stäbe, Z_r und Z_s , festgelegt werden. In den meisten Fällen der Praxis ist jedoch die eine dieser Verschiebungen durch die Konstruktion selbst verhindert (es ist z. B. der Knoten durch eine Säule gegen einen festen Stützpunkt abgestützt); wir werden daher vorläufig den einfacheren Fall, wo der Knoten nur die beiden Bewegungen ζ_a und ζ_r ausführen kann, in Betracht ziehen.

Zuerst sei bemerkt, daß der Z_r -Stab zur Festhaltung des Knotens a nicht notwendig vom Knoten a selbst auszugehen braucht; durch denselben kann ebensogut ein beliebiger Punkt O_a des steifen Armes, auf den das Moment Z_a einwirkt, festgehalten werden (siehe beispielsweise Abb. 12 und 14). Eine solche Anordnung kann oft von Vorteil sein, indem der Abstand c_r des Punktes O_a vom Knoten a (c_r senkrecht zum Z_r -Stab gemessen) später so gewählt werden kann, daß irgendeine Erleichterung der Rechnung erreicht wird, beispielsweise so, daß der Koeffizient Z'_a in den Elastizitätsgleichungen zu Null wird. Die Anordnung bringt es indessen mit sich, daß einige neue Formeln für die vom Knoten a ausgehenden Balken und Säulen aufgestellt werden müssen.

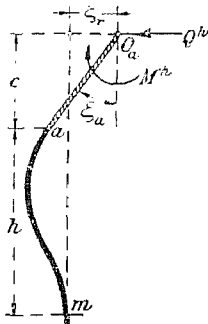


Abb. 12.

a) Wir beginnen mit einer Säule $a - m$ (Abb. 12), die den Knoten a mit einem festen Stützpunkt m (Gelenk oder Einspannung) verbindet; die Säule ist oben über den Knoten a hinaus mit einem steifen Arm verlängert, und in der Höhe c über a ist der Punkt O_a durch eine wagerechte Kraft Q^h festgehalten; die Säule ist von dem Moment M^h beansprucht. Q^h und M^h sollen mit den in der Abbildung angegebenen Pfeilspitzen positiv gerechnet werden, wenn sie auf die Säule einwirken. Die Säule zeichnet sich gegenüber den früher betrachteten Säulen und Balken dadurch aus, daß ihr Trägheitsmoment auf der oberen Strecke c unendlich groß

ist, während dasselbe auf der unteren Länge h unveränderlich, gleich J^h , angenommen wird. Zwischen a und m möge die Säule durch eine beliebige Belastung auf Biegung beansprucht werden.

Mit den früheren Bezeichnungen, nur mit dem Unterschied, daß das Moment $M_{am} = M^h$ im Stützpunkt O_a , nicht im Knoten a , angreift, und daß der Steifigkeitsbeiwert μ durch

$$\mu = \frac{J^h l_c}{J_c h}, \quad \left(\text{nicht } \mu = \frac{J^h l_c}{J_c (h + c)} \right) \quad (47)$$

gegeben ist, gelten dann statt (7) die folgenden allgemeinen Gleichungen (indem der Einfachheit halber μ statt μ_{am} und ψ statt ψ_{am} geschrieben wird):

$$\left. \begin{aligned} M_{ma} &= M_{ma}^0 + 2\mu \left[2\zeta'_m + \left(1 + 3\frac{c}{h}\right)\zeta'_a - 3\left(1 + \frac{c}{h}\right)\psi' \right], \\ M_{am} &= M_{am}^0 \\ &+ 2\mu \left\{ \left(1 + 3\frac{c}{h}\right)\zeta'_m + 2\left[1 + 3\frac{c}{h}\left(1 + \frac{c}{h}\right)\right]\zeta'_a - 3\left(1 + \frac{c}{h}\right)\left(1 + 2\frac{c}{h}\right)\psi' \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

wobei der Winkel ψ' durch die wagerechten Verschiebungen der Punkte O_a und m bestimmt ist; sind diese ζ_r und z_m , beide nach rechts positiv, so ist zu setzen:

$$\psi' = \frac{\zeta_r - z_m}{h + c}. \quad (48a)$$

Für eine feste Einspannung in m ist $\zeta'_m = 0$. Für eine einfache Stützung in m ist $M_{ma} = 0$; wenn hierdurch ζ'_m eliminiert wird, ergibt sich:

$$M_{am} = M_{am}^0 + 3\mu \left(1 + \frac{c}{h}\right)^2 (\zeta'_a - \psi'). \quad (48b)$$

Die Momente M^0 bedeuten die von der Belastung herrührenden Einspannungsmomente für den Balken $O_a m$ mit der Länge $(h + c)$ und dem Trägheitsmoment $J = \infty$ auf der Strecke c , in (48) für volle Einspannung an beiden Enden, in (48b) für gelenkige Lagerung in m . Die folgenden speziellen Fälle werden am häufigsten vorkommen:

Gleichförmige Belastung p über die ganze Höhe h :
in (48):

$$\left. \begin{aligned} M_{ma}^0 &= -\frac{1}{12} p h^2, \\ M_{am}^0 &= +\frac{1}{12} p h^2 + \frac{1}{2} p h c, \end{aligned} \right\} \quad (48c)$$

in (48b):

$$M_{am}^0 = +\frac{1}{8} p h^2 \left(1 + \frac{c}{h}\right) + \frac{1}{2} p h c;$$

Einzellast P in Punkt a : sowohl in (48) wie in (48 b):

$$M_{ma}^0 = 0, \quad M_{am}^0 = +Pc. \quad (48d)$$

Für den beiderseits voll eingespannten Balken $O_a m$ ergeben sich weiter die Stützendrücke:

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} Q_0^h &= \frac{1}{2} p h \\ Q_0^h &= P. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Für den oben voll eingespannten, unten einfach gestützten Balken $O_a m$ dagegen:

$$Q_0^h = \frac{5}{8} p h \quad \text{und} \quad Q_0^h = P. \quad (49a)$$

In den Anwendungen mag die Säule unten fest eingespannt oder gelenkig gelagert sein oder auch von einem Knoten m ausgehen. Die für jeden dieser Fälle geltenden Ausdrücke für die auf die Säule einwirkenden Kräfte M^h und Q^h lassen sich praktisch folgendermaßen schreiben:

Feste Einspannung (i) unten: in (48) und (48a) ist $\zeta'_m = \zeta'_i = 0$ und $z_m = 0$ zu setzen, so daß wird

$$\left. \begin{aligned} M^h &= M_{ai}^0 + 4\mu \left[1 + 3\frac{c}{h} \left(1 + \frac{c}{h} \right) \right] \zeta'_a - 6\frac{\mu}{h} \left(1 + 2\frac{c}{h} \right) \zeta'_r, \\ Q^h &= Q_0^h + \frac{6\mu}{h} \left(1 + 2\frac{c}{h} \right) \zeta'_a - \frac{12\mu}{h^2} \zeta'_r; \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

einfache Stützung (k) unten: in (48a) ist $z_m = 0$,

$$\left. \begin{aligned} M^h &= M_{ak}^0 + 3\mu \left(1 + \frac{c}{h} \right)^2 \zeta'_a - 3\frac{\mu}{h} \left(1 + \frac{c}{h} \right) \zeta'_r, \\ Q^h &= Q_0^h + \frac{3\mu}{h} \left(1 + \frac{c}{h} \right) \zeta'_a - \frac{3\mu}{h^2} \zeta'_r; \end{aligned} \right\} \quad (50a)$$

die Säule geht unten von einem Knoten m aus:

$$\left. \begin{aligned} M^h &= M_{am}^0 \text{ und } M_{ma}^0 \text{ sind unverändert nach (48) zu} \\ &\text{nehmen, indem } \left(1 + \frac{c}{h} \right) \psi' = \frac{1}{h} (\zeta'_r - z'_m), \\ Q^h &= Q_0^h + \frac{6\mu}{h} \left[\zeta'_m + \left(1 + 2\frac{c}{h} \right) \zeta'_a \right] - \frac{12\mu}{h^2} (\zeta'_r - z'_m). \end{aligned} \right\} \quad (50b)$$

Hieraus werden jetzt in der gewöhnlichen Weise die von der Säule herrührenden Beiträge zu den Belastungsgliedern und Koeffizienten in den Elastizitätsgleichungen für den Knoten a gebildet, indem (siehe Abb. 13, wo die Pfeilspitzen für M^h und Q^h die umgekehrten von denjenigen in Abb. 12 sind, weil hier von der Einwirkung auf den Knoten die Rede ist):

$$Z_a = -M^h, \quad Z_r = +Q^h. \quad (51)$$

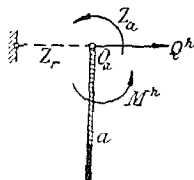


Abb. 13.

Für eine untere Einspannung (*i*) ergibt sich:

$$Z_{a0} = -M_{ai}^0, \quad Z_{r0} = +Q_0^h, \quad (52)$$

$$Z'_{aa} = +4\mu \left[1 + 3\frac{c}{h} \left(1 + \frac{c}{h} \right) \right], \quad Z'_{ra} = -\frac{6\mu}{h} \left(1 + 2\frac{c}{h} \right),$$

$$Z'_{rr} = +\frac{12\mu}{h^2}; \quad (53)$$

für einfache Stützung (*k*) unten:

$$Z_{a0} = -M_{ak}^0, \quad Z_{r0} = +Q_0^h, \quad (52a)$$

$$Z_{aa} = +3\mu \left(1 + \frac{c}{h} \right)^2, \quad Z'_{ra} = -\frac{3\mu}{h} \left(1 + \frac{c}{h} \right), \quad Z'_{rr} = +\frac{3\mu}{h^2}; \quad (53a)$$

die Säule geht unten von einem Knoten *m* aus:

$$\left. \begin{aligned} Z_{a0} &= -M_{am}^0 + \frac{6\mu}{h} \left(1 + 2\frac{c}{h} \right) (\zeta'_r - z'_m), \\ Z_{r0} &= +Q_0^h - \frac{12\mu}{h^2} (\zeta'_r - z'_m); \end{aligned} \right\} \quad (52b)$$

Z_{aa} , Z'_{ra} und Z'_{rr} sind die nämlichen wie bei einer unteren Einspannung; hier werden indessen auch die folgenden Größen (in der Elastizitätsgleichung für den Knoten *m*) benötigt:

$$Z_{m0} = -M_{ma}^0 + \frac{6\mu}{h} (\zeta'_r - z'_m), \quad (52c)$$

$$Z'_{mm} = +4\mu, \quad Z'_{ma} = +2\mu \left(1 + 3\frac{c}{h} \right), \quad Z'_{mr} = -\frac{6\mu}{h}. \quad (53c)$$

Die von $(\zeta'_r - z'_m)$ abhängigen Glieder in den Gl. (52b) und (52c) sind bei einer solchen Teilung der Berechnung zu benutzen, wo die Verlängerungen der *Z*-Stäbe zuerst gleich Null und sodann gleich -1 gesetzt werden; ζ_r und z_m sind dann die den letztgenannten Verschiebungszuständen entsprechenden wagerechten Bewegungen von O_a und *m* (positiv nach rechts). — Das letzte Glied obiger Formeln (52b) und (52c) ist übrigens in den folgenden allgemeineren Ausdrücken enthalten, die die Beiträge einer solchen Säule zu den Koeffizienten Z_{at} , Z_{mt} , Z_{rt} angeben, wo *t* einen beliebigen *Z*-Stab bezeichnet:

Einspannung oder Knoten am unteren Ende (*m*):

$$\left. \begin{aligned} Z'_{at} &= +6\mu \left(1 + 2\frac{c}{h} \right) \left(1 + \frac{c}{h} \right) \psi'_t, \\ Z'_{mt} &= +6\mu \left(1 + \frac{c}{h} \right) \psi'_t, \\ Z'_{rt} &= +12\mu \left(1 + \frac{c}{h} \right)^2 \psi'_r \psi'_t; \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

einfache Stützung unten:

$$Z'_{at} = +3\mu \left(1 + \frac{c}{h}\right)^2 \psi'_t, \quad Z'_{rt} = +3\mu \left(1 + \frac{c}{h}\right)^2 \psi'_r \psi'_t; \quad (54a)$$

ψ_r und ψ_t sind die Stabdrehwinkel der $(h+c)$ langen Säule, die den Verschiebungen $\zeta_r = -1$ und $\zeta_t = -1$ entsprechen.

b) Stufenweise Berechnung im allgemeinen für Knoten mit zwei Bewegungsmöglichkeiten. In Abb. 14 sind zwei Knoten a und b eines Systems gezeigt, zu deren Festhaltung je zwei Bedingungen (Z_a, Z_r , bzw. Z_b, Z_s) erforderlich sind. Denkt man sich nun die Berechnung durchgeführt für den links vom Knoten a gelegenen Teil des Systems und wünscht sodann den neuen Systemteil $a-b-2$ hinzuzufügen, dann ist zu setzen:

$$\zeta_a = \zeta_{0a} + \tau_a Z_a + \tau_r Z_r, \quad \zeta_r = \zeta_{0r} + \varepsilon_a Z_a + \varepsilon_r Z_r, \quad (55)$$

wo Z_a und Z_r ausschließlich von der Einwirkung des neuen Systemteils auf den Knoten a herrühren. Die Bedeutung der Beiwerte τ und ε geht aus den aufgeschriebenen Ausdrücken hervor; so sind τ_a und ε_a die speziellen Werte von ζ_a und ζ_r , die erhalten werden, wenn ζ_{0a} und ζ_{0r} Null sind (d. h. der links von a gelegene Systemteil unbelastet), und wenn weiter $Z_a = 1, Z_r = 0$.

Die ζ -Größen bestimmen sich indessen aus den Elastizitätsgleichungen, die für den Knoten a lauten:

$$\begin{aligned} Z_a = 0 &= Z_{a0} - Z_{aa} \zeta_a - Z_{ar} \zeta_r, \\ Z_r = 0 &= Z_{r0} - Z_{ra} \zeta_a - Z_{rr} \zeta_r. \end{aligned}$$

Wenn die einzige äußere Einwirkung auf den Knoten a vom Momente $Z_a = 1$ herrührt, finden sich die entsprechenden Werte von ζ_a und ζ_r , mit $Z_{a0} = 1, Z_{r0} = 0$, zu:

$$\zeta_a = \tau_a = \frac{Z_{rr}}{Z_{aa} Z_{rr} - Z_{ar}^2}, \quad \zeta_r = \varepsilon_a = -\frac{Z_{ar}}{Z_{aa} Z_{rr} - Z_{ar}^2};$$

ebenso erhält man τ_r und ε_r , wenn in den Gleichungen $Z_{a0} = 0$ und $Z_{r0} = 1$ gesetzt wird. Hiernach leuchtet ein, daß die beiden Größen ε_a und τ_r , die übrigens dem Maxwell'schen Satze zufolge gleich groß sind, Null werden, wenn nur die Bedingung $Z_{ar} = 0$ erfüllt werden kann, und dieser Bedingung kann eben durch die Wahl des Abstandes c , in Abb. 14 entsprochen werden. Wenn also nur c_r so gewählt wird, daß $Z_{ar} = 0$, so vereinfachen sich die Ausdrücke (55) zu:

$$\zeta'_a = \zeta'_{0a} + \tau'_a Z_a, \quad \zeta'_r = \zeta'_{0r} + \varepsilon'_r Z_r, \quad (56)$$

wo sogleich die Bezeichnungen $\zeta', \tau' \dots$ nach (6), und mit der näm-

lichen Bedeutung wie dort, eingeführt wurden, und die Beiwerte τ'_a und ε'_r sind demgemäß gegeben durch:

$$\tau'_a = \frac{1}{Z'_{aa}}, \quad \varepsilon'_r = \frac{1}{Z'_{rr}}. \quad (57)$$

Durch die angegebene Wahl von c_r , nämlich so, daß $Z_{ar} = 0$ wird, erreicht man somit nicht nur die einfacheren Ausdrücke (56) statt (55), sondern auch, daß jede der beiden Elastizitätsgleichungen für den Knoten a nur eine Unbekannte enthält.

Um nun die nötigen Formeln herzuleiten zur Aufstellung der Elastizitätsgleichungen für den Knoten b in Abb. 14, hat man: erstens die Beanspruchungen des Balkens $a-b$ durch die vier Formänderungsgrößen ζ_a , ζ_r und ζ_b , ζ_s aus-

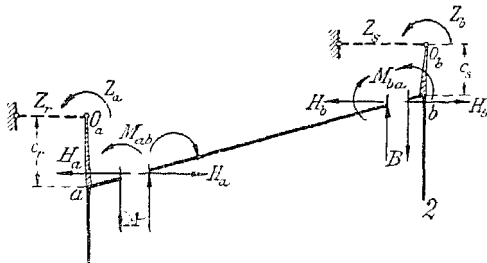


Abb. 14.

zudrücken, und zweitens hieraus die beiden Größen ζ_a und ζ_r mittels (56) zu eliminieren, so daß schließlich die erwähnten Beanspruchungen ausschließlich durch ζ_b und ζ_s bestimmt erscheinen.

Der Balken $a-b$ wirkt auf den Knoten a ein mit M_{ab} , H_a , A , deren positive Richtungen in der Abb. 14 gezeigt sind. Aus den Gleichgewichtsbedingungen für den Knoten a wird erhalten:

$$Z_a = -M_{ab} + H_a c_r, \quad Z_r = -H_a, \quad (58)$$

womit die Ausdrücke (56) werden:

$$\zeta'_a = \zeta'_{0a} - \tau'_a M_{ab} + \tau'_a c_r H_a, \quad \zeta'_r = \zeta'_{0r} - \varepsilon'_r H_a; \quad (59)$$

zu erinnern ist daran, daß nach obigem hierin c_r so bestimmt vorausgesetzt werden muß, daß $Z_{ar} = 0$.

Die Beanspruchungen des Balkens sind durch die drei Größen M_{ab} , M_{ba} und H_a gegeben. Um diese durch die ζ -Größen auszudrücken hat man erstens die beiden allgemeinen Gl. (7) für M_{ab} und M_{ba} , und weiter die Beziehung, daß die wagerechten Verschiebungen der Knoten a und b gleich sein müssen:

$$\zeta_r - c_r \zeta_a = \zeta_s - c_s \zeta_b, \quad (60)$$

wenn von der Längenänderung des Balkens abgesehen wird; hieraus folgt auch, daß der Stabdrehwinkel ψ_{ab} in den Gl. (7) gleich Null sein muß. Prinzipiell wäre es natürlich leicht möglich, die Längenänderung des Balkens zu berücksichtigen, indem hierdurch der Unterschied zwischen den genannten wagerechten Verschiebungen gegeben erscheint; hier werden wir jedoch von dieser Komplikation als gewöhnlich unnötig absehen.

Werden nun in (60) und in den beiden Gl. (7), wo also $\psi' = 0$ ζ'_a und ζ'_r mittels (59) fortgeschafft, so erhält man:

$$\begin{aligned} \zeta'_{0r} - \varepsilon'_r H_a - c_r \zeta'_{0a} + \tau'_a c_r M_{ab} - \tau'_a c_r^2 H_a &= \zeta'_a - c_s \zeta'_b, \\ M_{ab} &= M_{ab}^0 + 2\mu(2\zeta'_{0a} - 2\tau'_a M_{ab} + 2\tau'_a c_r H_a + \zeta'_b), \\ M_{ba} &= M_{ba}^0 + 2\mu(\zeta'_{0a} - \tau'_a M_{ab} + \tau'_a c_r H_a + 2\zeta'_b). \end{aligned}$$

Mit Benutzung folgender Abkürzungen:

$$\left. \begin{aligned} m &= 1 + 4\mu\tau'_a, & n &= 2\mu\varepsilon'_r, \\ k &= 2\mu\tau'_a c_r, & \Delta &= m\varepsilon'_r + \tau'_a c_r^2, \\ q &= 2\mu\varepsilon'_r(1 + 3\mu\tau'_a) & &= n(1 + 3\mu\tau'_a) \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

ergibt sich hieraus durch Auflösung:

$$\left. \begin{aligned} H_a &= \frac{1}{\Delta} [m(\zeta'_{0r} - \zeta'_b) - c_r(\zeta'_{0a} - \tau'_a M_{ab}^0) + (k + m c_s) \zeta'_b], \\ M_{ab} &= \frac{1}{\Delta} \{ 2k(\zeta'_{0r} - \zeta'_b) + 2n(\zeta'_{0a} - \tau'_a M_{ab}^0) \\ &\quad + [n + k(c_r + 2c_s)] \zeta'_b \} + M_{ab}^0, \\ M_{ba} &= \frac{1}{\Delta} \{ k(\zeta'_{0r} - \zeta'_b) + n(\zeta'_{0a} - \tau'_a M_{ab}^0) \\ &\quad + [2q + k(2c_r + c_s)] \zeta'_b \} + M_{ba}^0. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Hiermit werden nun die speziellen Werte von H_a , M_{ab} und M_{ba} gebildet, die den Zuständen ($\zeta'_b = 0$, $\zeta'_s = 0$) oder ($\zeta'_b = -1$, $\zeta'_s = 0$) oder ($\zeta'_b = 0$, $\zeta'_s = -1$) entsprechen, und sodann weiter die Beiträge des Balkens zu den Belastungsgliedern und Koeffizienten der beiden Elastizitätsgleichungen für den Knoten b , indem eingesetzt wird:

$$Z_b = -M_{ba} - H_b c_s, \quad Z_y = +H_b, \quad (63)$$

wo H_b aus H_a und den wagerechten Projektionen der auf den Balken einwirkenden Kräfte hergeleitet werden kann. Es ergeben sich die Beiträge des Balkens zu:

$$\left. \begin{aligned} Z'_{bb} &= \frac{1}{\Delta} [2q + 2k(c_r + c_s) + m c_s^2], \\ Z'_{sb} &= -\frac{1}{\Delta} [k + m c_s], & Z'_{ss} &= \frac{m}{\Delta}, \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

und wenn gesetzt wird:

$$\begin{aligned} H_b &= H_a + \Delta H: \\ Z_{b0} &= -\frac{1}{\Delta} [(k + m c_s) \zeta'_{0r} + (n - c_r c_s)(\zeta'_{0a} - \tau'_a M_{ab}^0) \\ &\quad - M_{ba}^0 - c_s \Delta H], \\ Z_{s0} &= \frac{1}{\Delta} [m \zeta'_{0r} - c_r(\zeta'_{0a} - \tau'_a M_{ab}^0)] + \Delta H. \end{aligned} \quad (65)$$

Aus (64) bestimmt man c_s , indem Z'_{sb} gleich Null gesetzt wird, wobei jedoch daran erinnert werden muß, daß auch der Beitrag der Säule $b - 2$ zu Z'_{sb} mitzunehmen ist; und ferner:

$$\tau'_b = \frac{1}{Z'_{bb}}, \quad \varepsilon'_s = \frac{1}{Z'_{ss}}.$$

Man ist somit imstande, die Rechnung für einen neu hinzugefügten Systemteil fortzuführen.

Zuletzt ist wie gewöhnlich eine Rückwärtsrechnung auszuführen, um die endgültigen ζ -Werte zu erhalten. Aus den korrigierten ζ'_b und ζ'_s leitet man die richtigen Werte von H_a , M_{ab} und M_{ba} mittels (62) her, und dann weiter die richtigen ζ'_a und ζ'_r mittels (59).

Um die Elastizitätsgleichungen für den Knoten b in Abb. 14 aufzustellen, ist es noch notwendig, die von der Säule $b - 2$ herührenden Beiträge zu den Koeffizienten und Belastungsgliedern zu ermitteln. Wir betrachten daher nochmals die in Abb. 12 gezeigte Säule $a - m$ mit unendlich großem Trägheitsmoment der oberen Strecke c . Am unteren Ende m möge die Säule außer fester Einspannung oder einfacher Stützung auch noch eine elastische Einspannung haben; der Einfachheit halber beschränken wir uns jedoch auf einen elastischen Widerstand gegen Drehung des Knotens m , während die Verschiebung von m entweder gleich Null oder als gegeben angenommen wird.

Es wird also gesetzt:

$$\zeta'_m = \zeta'_{0m} - \tau'_m M_{ma}; \quad (66)$$

wenn dies in die beiden Gl. (48) eingeführt wird, so ergibt sich:

$$M_{ma} (1 + 4 \mu \tau'_m) = M_{ma}^0 + 2 \mu \left[2 \zeta'_{0m} + \left(1 + 3 \frac{c}{h} \right) \zeta'_a - 3 \left(1 + \frac{c}{h} \right) \psi' \right], \quad (67)$$

$$\begin{aligned} M_{am} &= M_{am}^0 - \frac{2 \mu \tau'_m}{1 + 4 \mu \tau'_m} \left(1 + 3 \frac{c}{h} \right) M_{ma}^0 \\ &+ \frac{2 \mu}{1 + 4 \mu \tau'_m} \left\{ \left(1 + 3 \frac{c}{h} \right) \zeta'_{0m} + 2 \left[1 + 3 \frac{c}{h} \left(1 + \frac{c}{h} \right) + 3 \mu \tau'_m \left(1 + \frac{c}{h} \right)^2 \right] \zeta'_a \right. \\ &\left. - 3 \left(1 + \frac{c}{h} \right) \left[1 + 2 \frac{c}{h} + 2 \mu \tau'_m \left(1 + \frac{c}{h} \right) \right] \psi' \right\}, \quad (68) \end{aligned}$$

und für die Rückwärtsrechnung, mittels (66) und (67):

$$\zeta'_m = \frac{1}{1 + 4 \mu \tau'_m} \left[\zeta'_{0m} - 2 \mu \tau'_m \left(1 + 3 \frac{c}{h} \right) \zeta'_a + 6 \mu \tau'_m \left(1 + \frac{c}{h} \right) \psi' - \tau'_m M_{ma}^0 \right]. \quad (69)$$

Hieraus werden die folgenden Beiträge zu den Koeffizienten der Elastizitätsgleichungen für den Knoten a hergeleitet:

$$\left. \begin{aligned} Z'_{aa} &= \frac{4\mu}{1+4\mu\tau'_m} \left[1 + 3\frac{c}{h} \left(1 + \frac{c}{h} \right) + 3\mu\tau'_m \left(1 + \frac{c}{h} \right)^2 \right], \\ Z'_{ar} &= -\frac{6\mu}{1+4\mu\tau'_m} \left[1 + 2\frac{c}{h} + 2\mu\tau'_m \left(1 + \frac{c}{h} \right) \right] \cdot \frac{1}{h}, \\ Z'_{rr} &= \frac{12\mu}{h^2} \cdot \frac{1 + \mu\tau'_m}{1 + 4\mu\tau'_m}, \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

und zu den Belastungsgliedern:

$$\left. \begin{aligned} Z_{a0} &= -M_{am}^0 + \frac{2\mu}{1+4\mu\tau'_m} \left(1 + 3\frac{c}{h} \right) \left[\tau'_m M_{ma}^0 - \zeta'_{0m} \right], \\ Z_{r0} &= Q_0^h + \frac{6\mu}{1+4\mu\tau'_m} (\zeta'_{0m} - \tau'_m M_{ma}^0) \cdot \frac{1}{h}, \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

wo M^0 und Q_0^h die Stützenmomente und -drücke für volle Einspannung bedeuten und für spezielle Belastungen durch (48c) bis (49b) gegeben sind. Der Ausdruck für Z_{r0} ist mittels der Formeln:

$$Q^h = Q^h_{\text{einf. Unterst.}} + \frac{M_{am} + M_{ma}}{h+c} \quad \text{und} \quad Q_0^h = Q^h_{\text{einf. Unterst.}} + \frac{M_{am}^0 + M_{ma}^0}{h+c}$$

gebildet. — In (71) sind nur die Beiträge, die von der eigentlichen Belastung und von ζ'_{0m} herrühren, enthalten. Wenn von einer gegebenen Drehung ψ der Säule die Rede ist (wie beispielsweise bei Behandlung des Verschiebungszustandes $\zeta_t = -1$, wo t einen beliebigen Z -Stab bezeichnet), so ergeben sich aus dieser Ursache die folgenden Beiträge:

$$\left. \begin{aligned} Z_{a0} &= +\frac{6\mu}{1+4\mu\tau'_m} \left[1 + 2\frac{c}{h} + 2\mu\tau'_m \left(1 + \frac{c}{h} \right) \right] \left(1 + \frac{c}{h} \right) \cdot \psi', \\ Z_{r0} &= -\frac{12\mu}{h} \cdot \frac{1 + \mu\tau'_m}{1 + 4\mu\tau'_m} \left(1 + \frac{c}{h} \right) \cdot \psi'. \end{aligned} \right\} \quad (71a)$$

Hierin wird eingeführt: $\left(1 + \frac{c}{h} \right) \psi' = \frac{1}{h} (\zeta'_r - z'_m)$, wo ζ_r und z_m die Verschiebungen (positiv nach rechts) von O_a und m bezeichnen.

Ist die Säule unten fest eingespannt, so hat man $\tau'_m = 0$ und $\zeta'_{0m} = 0$ zu setzen; für eine unten gelenkig gelagerte Säule ist $\tau'_m = \infty$. Die Formeln gehen hiermit in die früher aufgestellten (52) und (53) über.

c) Stufenweise Berechnung für Knoten mit drei Bewegungsmöglichkeiten. Der Fall, wo drei Z -Größen erforderlich sind, um einen Knoten a festzuhalten (also ein Moment Z_a und zwei

Z -Stäbe, Z_r und Z_s), kommt zwar sehr selten in der Praxis vor, wohl eigentlich nur dann, wenn die elastische Zusammendrückung der Säulen, oder also allgemeiner der Einfluß der Normalkräfte, berücksichtigt werden soll. Der allgemeine Vorgang soll daher auch nur kurz besprochen werden.

Wenn die Berechnung für das links von a gelegene und in a endigende System durchgeführt ist und sodann ein neuer Systemteil $a - b \dots$ hinzugefügt werden soll, hat man jetzt für die drei Verschiebungen des Knotens a , nämlich ζ_a , ζ_r , ζ_s , zu setzen:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_a &= \zeta_{0a} + \tau_a Z_a + \tau_r Z_r + \tau_s Z_s \\ \text{und die analogen Werte für } \zeta_r \text{ und } \zeta_s. \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

ζ_{0a} ist der für das in a endigende System berechnete Wert von ζ_a , während die drei letzten Glieder die von dem neuen Systemteil herrührende Wirkung angeben. Die in (72) einzuführenden Werte von Z_a , Z_r , Z_s , die aus den Gleichgewichtsbedingungen für den Knoten a zu ermitteln sind, hängen daher ausschließlich von der Einwirkung des Balkens $a - b$ auf den Knoten a ab (also beispielsweise in Abb. 14 von M_{ab} , H_a , A).

Die drei Z -Größen in (72), oder M_{ab} , H_a , A in Abb. 14, können durch die Belastung rechts von a und die sechs den Knoten a und b entsprechenden ζ -Größen ausgedrückt und hieraus dann mittels (72) ζ_a , ζ_r und ζ_s eliminiert werden. Weiter können M_{ba} , H_b , B (Abb. 14), und somit die drei Z -Größen, Z_b , Z_t , Z_u , für den Knoten b , durch die Belastung und M_{ab} , H_a , A ausgedrückt werden, so daß letztere drei Z -Größen als Funktionen von ζ_b , ζ_t , ζ_u , der bekannten Belastung im Felde $a - b$ und der bekannten Werte ζ_{0a} , ζ_{0r} , ζ_{0s} erscheinen. Hiermit können dann endlich die einzelnen Belastungsglieder und Koeffizienten der drei Elastizitätsgleichungen für den Knoten b :

$$Z_b = 0 = Z_{b0} - Z_{bb} \zeta_b - Z_{bt} \zeta_t - Z_{bu} \zeta_u \quad (73)$$

usw. gebildet werden.

Aus (73) ergeben sich nun nicht nur die gesuchten Werte der Unbekannten ζ_b , ζ_t , ζ_u , sondern auch die Beiwerte τ , ε , \varkappa , die den elastischen Widerstand des Knotens b zum Ausdruck bringen, falls ein neuer Systemteil $b - c \dots$ hinzugefügt werden soll. Aus den Ausdrücken:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_b &= \zeta_{0b} + \tau_b Z_b + \tau_t Z_t + \tau_u Z_u, \\ \zeta_t &= \zeta_{0t} + \varepsilon_b Z_b + \varepsilon_t Z_t + \varepsilon_u Z_u, \\ \zeta_u &= \zeta_{0u} + \varkappa_b Z_b + \varkappa_t Z_t + \varkappa_u Z_u \end{aligned} \right\} \quad (72a)$$

ersieht man, daß τ_b , ε_b , \varkappa_b diejenigen Werte von ζ_b , ζ_t , ζ_u bedeuten, die sich für $Z_b = 1$, $Z_t = Z_u = 0$ ergeben, d. h. diejenigen ζ -Werte, die aus (73) mit $Z_{b0} = 1$, $Z_{t0} = Z_{u0} = 0$ gefunden werden. Durch

Auflösung dieser Gleichungen (73) wird erhalten, wenn die Determinante mit D bezeichnet wird:

$$\varepsilon_b = \frac{Z_{ub} Z_{tu} - Z_{tb} Z_{uu}}{D}, \quad \varkappa_b = \frac{Z_{tb} Z_{ut} - Z_{ub} Z_{tt}}{D}.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß alle Beiwerte τ , ε , \varkappa Null werden, mit Ausnahme von τ_b , ε_t , \varkappa_u , wenn dafür gesorgt werden kann, daß:

$$Z_{bt} = Z_{tb} = 0, \quad Z_{bu} = Z_{ub} = 0, \quad Z_{tu} = Z_{ut} = 0. \quad (74)$$

Diesen drei Bedingungen kann nun immer dadurch entsprochen werden, daß man die beiden Z -Stäbe, Z_t und Z_u , von einem Punkte O_b des steifen Armes im Knoten b ausgehen und miteinander einen vorläufig unbekanntes Winkel α bilden läßt. Man verfügt so über drei Größen, nämlich die beiden Koordinaten des Punktes O_b und den Winkel α , und ist imstande, diese so zu bestimmen, daß die Bedingungen erfüllt werden.

Es ist somit eine sehr bedeutende Erleichterung, mit der Erfüllung der Bedingungen (74) zu erreichen. Erstens vereinfachen sich die Elastizitätsgleichungen (73) zu:

$$\zeta_b = \frac{Z_{b0}}{Z_{bb}}, \quad \zeta_t = \frac{Z_{t0}}{Z_{tt}}, \quad \zeta_u = \frac{Z_{u0}}{Z_{uu}}, \quad (75)$$

und zweitens gehen die Ausdrücke (72a) über in:

$$\zeta_b = \zeta_{0b} + \tau_b Z_b, \quad \zeta_t = \zeta_{0t} + \varepsilon_t Z_t, \quad \zeta_u = \zeta_{0u} + \varkappa_u Z_u, \quad (76)$$

worin

$$\tau_b = \frac{1}{Z_{bb}}, \quad \varepsilon_t = \frac{1}{Z_{tt}}, \quad \varkappa_u = \frac{1}{Z_{uu}}. \quad (77)$$

Im Knoten a können die nämlichen Vorteile erreicht werden, indem die Koordinaten von O_a (dem Angriffspunkte der beiden Z -Stäbe Z_r und Z_s im Knoten a) und der Winkel zwischen Z_r und Z_s so bestimmt werden, daß $Z_{ar} = Z_{as} = Z_{rs} = 0$.

Die Berechnung eines beliebigen Systems, vorausgesetzt, daß es durch allmähliche Hinzufügung neuer Systemteile gebildet werden kann, die nur einen Knoten gemeinsam mit dem früheren System haben, ist somit auf die Auflösung von Gleichungen mit einer einzigen Unbekannten zurückgeführt.

Die Methode setzt voraus, daß allgemeine Formeln für beispielsweise M_{ab} , H_a , A in Abb. 14 gebildet werden, ausgedrückt durch die Belastung und die Verschiebungen ζ , und daß hieraus ζ_a , ζ_r , ζ_s mittels (76) oder der analogen Gleichungen fortgeschafft werden. Diese Arbeit kann ein wenig umständlich sein, und die Schlußformeln können etwas weitläufig ausfallen, aber die erwähnte Arbeit ist nur

einmal auszuführen, und dieser Umstand bedeutet daher in der Tat keine Herabsetzung der praktischen Brauchbarkeit der Methode.

Schließlich sei noch bemerkt, daß die hier auseinandergesetzte Vereinfachung der Elastizitätsgleichungen auch etwas allgemeiner gefaßt werden kann. Die Gleichungen haben die allgemeine Form:

$$\left. \begin{aligned} P_r &= Z_{rr} \zeta_r + Z_{rs} \zeta_s + Z_{ra} \zeta_a, \\ P_s &= Z_{sr} \zeta_r + Z_{ss} \zeta_s + Z_{sa} \zeta_a, \\ M_a &= Z_{ar} \zeta_r + Z_{as} \zeta_s + Z_{aa} \zeta_a, \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

wo P_r, P_s, M_a statt $Z_{r,0}, Z_{s,0}, Z_{a,0}$ geschrieben wurde, um festzuhalten, daß $Z_{r,0}$ und $Z_{s,0}$ Kraftprojektionen auf die r - und s -Richtungen, und $Z_{a,0}$ eine Momentensumme bedeuten.

Es werden nun r und s als zwei zueinander senkrechte, sonst aber beliebig für den Knoten a festgelegte Koordinatenachsen aufgefaßt. Eine Verschiebung 1 in einer beliebigen Richtung, die mit der r -Achse den Winkel α einschließt, ist gleichbedeutend mit den zwei Verschiebungskomponenten $1 \cdot \cos \alpha$ und $1 \cdot \sin \alpha$, und entspricht somit nach (78) den Kraftprojektionen

$$P_r = Z_{rr} \cos \alpha + Z_{rs} \sin \alpha, \quad P_s = Z_{sr} \cos \alpha + Z_{ss} \sin \alpha, \quad (79)$$

und die Resultierende dieser Kräfte ist der Verschiebung gleichgerichtet, wenn $P_r = P \cos \alpha$, $P_s = P \sin \alpha$. Nach Einführung dieser Werte in (79) und Elimination von P findet man:

$$\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{tg} 2 \alpha = \frac{2 Z_{rs}}{Z_{rr} - Z_{ss}}, \quad (80)$$

womit die „Hauptachsen“-Richtungen für den Knoten bestimmt sind.

Eine Verschiebung 1 in der r -Hauptachse erzeugt sodann:

$$P_r = Z_{rr}, \quad P_s = 0, \quad M_a = Z_{ar},$$

woraus folgt, daß eine Verlegung des vorläufig willkürlich gewählten Koordinatenursprungs zum Punkte:

$$s_1 = \frac{Z_{ar}}{Z_{rr}}, \quad r_1 = \frac{Z_{as}}{Z_{ss}} \quad (81)$$

die Momente Z_{ar} und Z_{as} vernichtet, so daß sich die Gleichungen (im Hauptachsensystem mit diesem neuen Anfangspunkt) zu:

$$P_r = Z_{rr} \zeta_r, \quad P_s = Z_{ss} \zeta_s, \quad M_a = Z_{aa} \zeta_a$$

vereinfachen. — Es existieren also für jeden Knoten zwei zueinander senkrechte Achsen, für welche Kraft- und Verschiebungsrichtung zusammenfallen; Kräfte nach diesen Richtungen rufen nur Parallelverschiebungen (keine Drehung) hervor, und durch ein Moment wird nur eine Drehung um den Pol (r_1, s_1) , aber keine Verschiebung erzeugt.

8. Krumme Balken (Bogen) als Teil von Rahmenkonstruktionen.

Wenn zwei Knoten a und b durch einen krummen Balken (Bogen) verbunden sind, ist es in erster Linie notwendig, anstatt (7) neue Gleichungen zu bilden, um die Beanspruchungen des Bogens durch die Belastung und die Verschiebungen der beiden Knoten auszudrücken. Um nicht die folgenden Rechnungen unnötig kompliziert zu machen, beschränken wir uns hier wieder darauf, nur zwei Bewegungsmöglichkeiten der Knoten, nämlich eine Drehung und eine wagerechte Verschiebung, in Betracht zu ziehen. Mehr der Vollständigkeit halber soll zuerst ein Zweigelenkbogen und sodann der viel wichtigere Fall eines gelenklosen Bogens behandelt werden.

a) Zweigelenkbogen.

In Abb. 15 stützt sich der betrachtete Bogen auf die Knoten a und b , deren wagerechte Verschiebungen ζ_r und ζ_s sind; die Drehungen der Knoten sind ohne Einfluß auf die Beanspruchungen des Bogens. Mit den gewöhnlichen Bezeichnungen lautet die Gleichung für den Horizontalschub X_a :

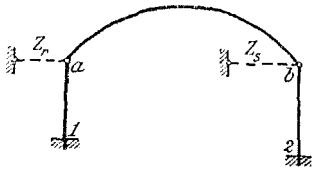


Abb. 15.

$$X_a \delta_{aa} = \sum P_m \delta_{ma} + \delta_{at} + \delta_{au},$$

wo
$$\delta_{au} = -K \cdot \Delta l = +K(\zeta_r - \zeta_s),$$

indem bei der Berechnung von δ_{ma} und δ_{au} der Faktor K (beispielsweise EJ_c oder dgl.) eingeführt wurde. Wird hier auf ähnliche Weise wie im vorausgehenden

$$\zeta_r' = K \cdot \zeta_r, \quad \zeta_s' = K \cdot \zeta_s \tag{82}$$

gesetzt, indem darauf Rücksicht genommen wird, den nämlichen Wert von K zu gebrauchen wie bei der Berechnung der übrigen Konstruktion, also gewöhnlich $\frac{EJ_c}{l_c}$, so erhält man:

$$X_a = \frac{1}{\delta_{aa}} (\sum P_m \delta_{ma} + \delta_{at} + \zeta_r' - \zeta_s'). \tag{83}$$

Hieraus können jetzt die Beiträge des Bogens zu den Stabkräften Z_r und Z_s ermittelt werden, indem (siehe Abb. 15):

$$Z_r = -X_a = -Z_s$$

wird.

Für $\zeta_r' = \zeta_s' = 0$ und für $\zeta_r' = -1$ ergibt sich:

$$Z_{r0} = -\frac{1}{\delta_{aa}} (\sum P_m \delta_{ma} + \delta_{at}), \quad Z'_{rr} + \frac{1}{\delta_{aa}} = -Z'_{ss}. \tag{84}$$

Um eine stufenweise Berechnung vorzunehmen, ist zu setzen:

$$\zeta'_r = \zeta'_{0r} + \varepsilon'_r Z_r = \zeta'_{0r} - \varepsilon'_r X_a. \quad (85)$$

Ist nun die Berechnung für das in a endigende System durchgeführt und dabei $\zeta'_r = \zeta'_{0r}$ sowie derjenige Wert ε'_r von ζ'_r ermittelt, der einer Belastung $Z_{0r} = 1$ entspricht, und soll dann der Systemteil $a - b - 2$ hinzugefügt werden, so ist nur ζ'_r in (83) mittels (85) auszudrücken, und man findet:

$$X_a = + Z_s = \frac{1}{\delta_{aa} + \varepsilon'_r} (\sum P_m \delta_{ma} + \delta_{at} + \zeta'_{0r} - \zeta'_s), \quad (86)$$

woraus sich für $\zeta'_s = 0$ und $\zeta'_s = -1$ die folgenden Beiträge zu Z_{s0} und Z'_{ss} ergeben:

$$\left. \begin{aligned} Z_{s0} &= \frac{1}{\delta_{aa} + \varepsilon'_r} (\sum P_m \delta_{ma} + \delta_{at} + \zeta'_{0r}); \\ Z'_{ss} &= \frac{1}{\delta_{aa} + \varepsilon'_r}; \quad \varepsilon'_s = \frac{1}{Z'_{ss}}. \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Bei der Rückwärtsrechnung wird das richtige ζ'_s in (86) eingeführt und so der korrigierte Wert von X_a ermittelt, womit dann das korrigierte ζ'_r sich aus (85) ergibt.

b) Gelenkloser Bogen.

Es muß hier sowohl eine Drehung wie eine wagerechte Verschiebung der Knoten berücksichtigt werden; zur Festhaltung der Knoten a und b (Abb. 16) sind daher sowohl die Momente Z_a und Z_b , die auf steife, von den Knoten ausgehende Arme einwirken, wie die Z -Stäbe Z_r und Z_s erforderlich. Diese Z -Stäbe denkt man sich von vorläufig unbekanntem Punkten O_a und O_b der steifen Arme ausgehend, in den Höhen c_r und c_s über den Knoten. Es handelt sich jetzt darum, die Beanspruchungen des Bogens durch die Belastung sowie die Verschiebungen und Drehungen ζ_r , ζ_s , ζ_a und ζ_b auszudrücken.

Als Berechnungssystem wird das in Abb. 16 ange deutete gewählt. Die Über-

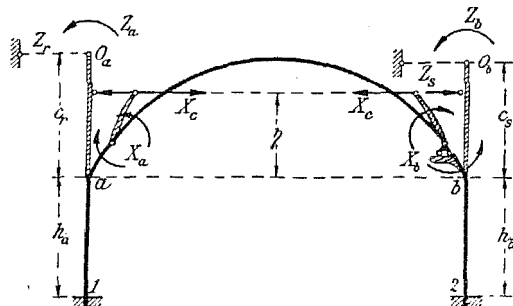


Abb. 16.

zähligen sind die beiden Kräftepaare X_a und X_b , die in Querschnitten unendlich nahe bei den Widerlagern angreifen, sowie der Horizontalschub X_c , in der Schwerachse der elastischen Kräfte

$\frac{J}{l} ds$ gelegen (in der Höhe η über den Widerlagern). Wenn wir uns vorläufig auf einen symmetrischen Bogen beschränken und wenn die

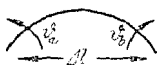


Abb. 16a.

in Abb. 16a angedeuteten Widerlagerbewegungen (Drehungen ϑ_a und ϑ_b , positiv in Richtung der Pfeilspitzen, und wagerechte Vergrößerung Δl der Spannweite) berücksichtigt werden sollen, lauten die Gleichungen zur Bestimmung der drei Überzähligen:

$$\left. \begin{aligned} X_a \delta_{aa} + X_b \delta_{ab} &= \sum P_m \delta_{ma} + \delta_{at} + \vartheta_a, \\ X_a \delta_{ba} + X_b \delta_{bb} &= \sum P_m \delta_{mb} + \delta_{bt} + \vartheta_b, \\ X_c \delta_{cc} &= \sum P_m \delta_{mc} + \delta_{ct} - \Delta l - \eta(\vartheta_a + \vartheta_b). \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Hierin ist nun einzuführen: $\vartheta_a = -\zeta_a$, $\vartheta_b = +\zeta_b$, indem die Knotendrehwinkel mit dem Uhrzeiger positiv gezählt werden, und:

$$\Delta l = -\zeta_r + \zeta_s + c_r \zeta_a - c_s \zeta_b;$$

alle ζ -Größen sind mit dem nämlichen Faktor K zu vervielfachen, der in der Berechnung von $\delta_{ma} \dots, \delta_{aa}, \delta_{ab} \dots$ benutzt wurde, was hier dadurch ausgedrückt werden soll, daß ζ' statt ζ geschrieben wird.

Wenn mit X_a^0, X_b^0, X_c^0 diejenigen Werte der Überzähligen bezeichnet werden, die einer vollen Einspannung entsprechen, d. h. die Werte, die sich aus (88) ergeben, wenn ϑ_a, ϑ_b und Δl gleich Null gesetzt werden, und wenn weiter D die Determinante der beiden ersten Gl. (88) bezeichnet:

$$D = \delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2, \quad (89)$$

so findet man durch Auflösung von (88):

$$\left. \begin{aligned} X_a &= X_a^0 - \frac{1}{D} (\delta_{ab} \zeta_a' + \delta_{ab} \zeta_b'), \\ X_b &= X_b^0 + \frac{1}{D} (\delta_{ab} \zeta_a' + \delta_{aa} \zeta_b'), \\ X_c &= X_c^0 + \frac{1}{\delta_{cc}} [\zeta_r' - \zeta_s' - (c_r - \eta) \zeta_a' + (c_s - \eta) \zeta_b']. \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Sodann werden die Gleichgewichtsbedingungen für den Knoten a , der von den Kräften Z_a, Z_r, X_a und X_c beansprucht wird (siehe Abb. 16), aufgeschrieben:

$$Z_a = X_a + X_c(c_r - \eta), \quad Z_r = -X_c, \quad (91)$$

und ebenso für den Knoten b :

$$Z_b = -X_b - X_c(c_s - \eta), \quad Z_s = +X_c; \quad (91a)$$

aus (90) bis (91a) können dann die speziellen Werte der Z -Größen hergeleitet werden, die in die Elastizitätsgleichungen eingeführt werden sollen, d. h. die vom Bogen herrührenden Beiträge.

Als Beiträge zu den Belastungsgliedern findet man:

$$\left. \begin{aligned} Z_{a0} &= X_a^0 + X_c^0(c_r - \eta), & Z_{r0} &= -X_c^0, \\ Z_{b0} &= -X_b^0 - X_c^0(c_s - \eta), & Z_{s0} &= +X_c^0. \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Wird $\zeta'_c = -1$ gesetzt, für die übrigen ζ' aber Null, so ergibt sich

$$X_a = \frac{\delta_{bb}}{D}, \quad X_b = -\frac{\delta_{ab}}{D}, \quad X_c = \frac{c_r - \eta}{\delta_{cc}};$$

somit werden nach (92) die Beiträge zu:

$$\left. \begin{aligned} Z'_{aa} &= \frac{\delta_{bb}}{D} + \frac{(c_r - \eta)^2}{\delta_{cc}}, & Z'_{ba} &= \frac{\delta_{ab}}{D} - \frac{(c_r - \eta)(c_s - \eta)}{\delta_{cc}}, \\ Z'_{ra} &= -\frac{c_r - \eta}{\delta_{cc}} = -Z'_{sa}, \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

und auf ähnliche Weise:

$$\left. \begin{aligned} Z'_{bb} &= \frac{\delta_{aa}}{D} + \frac{(c_s - \eta)^2}{\delta_{cc}}, & Z'_{rb} &= \frac{c_s - \eta}{\delta_{cc}} = -Z'_{sb}, \\ Z'_{rr} &= \frac{1}{\delta_{cc}}, & Z'_{sr} &= -\frac{1}{\delta_{cc}}, & Z'_{ss} &= \frac{1}{\delta_{cc}}. \end{aligned} \right\}$$

Die Beiträge des Bogens zu allen übrigen Koeffizienten, z. B. Z'_{at} , Z'_{rt} , wo t einen beliebigen Z -Stab (nur nicht Z_r oder Z_s) bezeichnet, sind Null.

Bevor eine Wahl der bisher unbestimmten Größen c_r und c_s getroffen werden kann, müssen noch die Beiträge der übrigen Balken (Säulen) oder Bogen, die von den Knoten a und b ausgehen, ermittelt und mitgenommen werden; beispielsweise hat man für die Säulen die im vorigen Kapitel entwickelten Formeln (53) zu benutzen. Sobald diese Beiträge aber bekannt sind, können c_r und c_s möglicherweise so bestimmt werden, daß sich gewisse Vorteile ergeben. Namentlich kann davon die Rede sein, $c_r = c_s = \eta$ zu setzen, wodurch $Z'_{rb} = Z'_{sa} = 0$ werden und die Ausdrücke für mehrere der übrigen Koeffizienten bedeutend einfacher ausfallen; oder auch davon, c_r so zu bestimmen, daß $Z'_{ra} = 0$, und c_s so, daß $Z'_{sb} = 0$ wird.

Stufenweise Berechnung. Indem c_r als so bestimmt angenommen wird, daß $Z'_{ar} = 0$, kann nach (56) im vorigen Kapitel gesetzt werden:

$$\zeta'_a = \zeta'_{0a} + \tau'_a Z_a, \quad \zeta'_r = \zeta'_{0r} + \varepsilon'_r Z_r, \quad (94)$$

wo die Beiwerte τ'_a und ε'_r durch (57) ebenda gegeben und Z_a und Z_r nach (91) einzuführen sind. Die so erhaltenen Ausdrücke für ζ'_a und ζ'_r sind dann in (88) einzuführen und diese Gleichungen (88) nach X_a , X_b , X_c aufzulösen.

Wenn der Kürze halber gesetzt wird:

$$\left. \begin{aligned} P_a &= \sum P_m \delta_{ma} + \delta_{at}, & P_b &= \sum P_m \delta_{mb} + \delta_{bt}, \\ P_c &= \sum P_m \delta_{mc} + \delta_{ct}, \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

lauten die Gl. (88) nach Einführung von (94):

$$\left. \begin{aligned} X_a(\delta_{aa} + \tau_a') + X_b \delta_{ab} &= P_a - \zeta'_{0a} - \tau_a'(c_r - \eta) X_c; \\ X_a \delta_{ab} + X_b \delta_{bb} &= P_b + \zeta'_b; \\ X_a \tau_a'(c_r - \eta) + X_c [\delta_{cc} + \varepsilon_r' + \tau_a'(c_r - \eta)^2] \\ &= P_c + \zeta'_{0r} - \zeta'_s - (c_r - \eta) \zeta'_{0a} + (c_s - \eta) \zeta'_b. \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

Um die Auflösung dieser Gleichungen einigermaßen einfach gestalten zu können, werden die folgenden Abkürzungen eingeführt, die in der aufgeführten Reihenfolge zu berechnen sind:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{cc}^1 &= \delta_{cc} + \varepsilon_r' + \tau_a'(c_r - \eta)^2; & k_a &= \frac{\tau_a'(c_r - \eta)}{\delta_{cc}^1}; \\ \delta_{aa}^1 &= \delta_{aa} + \tau_a' - k_a^2 \delta_{cc}^1; & D^1 &= \delta_{aa}^1 \delta_{bb} - \delta_{ab}^2; \\ \frac{1}{[\delta_{cc}]} &= \frac{1}{\delta_{cc}^1} + k_a^2 \frac{\delta_{bb}}{D^1}; & m &= 1 - k_a(c_r - \eta); \\ n_a &= \frac{\delta_{ab}}{\delta_{bb}} + k_a(c_s - \eta); & n_b &= \frac{\delta_{aa}^1}{\delta_{ab}} + k_a(c_s - \eta); \\ q_a &= \frac{c_r - \eta}{[\delta_{cc}]} - k_a \frac{\delta_{bb}}{D^1}; & q_b &= \frac{c_s - \eta}{[\delta_{cc}]} + k_a \frac{\delta_{ab}}{D^1}; \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

und weiter für die Belastungsglieder:

$$\left. \begin{aligned} X_a^1 &= \frac{1}{D^1} [(P_a - k_a P_c) \delta_{bb} - P_b \delta_{ab}]; \\ X_b^1 &= \frac{1}{D^1} [P_b \delta_{aa} - (P_a - k_a P_c) \delta_{ab}]; \\ X_c^1 &= \frac{P_c}{\delta_{cc}^1}. \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

Mit diesen Bezeichnungen wird durch Auflösung der Gleichungen erhalten:

$$\left. \begin{aligned} X_a &= X_a^1 - \frac{\delta_{bb}}{D^1} [k_a(\zeta'_{0r} - \zeta'_s) + m \zeta'_{0a} + n_a \zeta'_b]; \\ X_b &= X_b^1 + \frac{\delta_{ab}}{D^1} [k_a(\zeta'_{0r} - \zeta'_s) + m \zeta'_{0a} + n_b \zeta'_b]; \\ X_c &= X_c^1 - k_a X_a^1 + \frac{1}{[\delta_{cc}]} (\zeta'_{0r} - \zeta'_s) - q_a \zeta'_{0a} + q_b \zeta'_b. \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

Hieraus können jetzt endlich die Beiträge des Bogens zu den Belastungsgliedern und Koeffizienten der Elastizitätsgleichungen für den Knoten b gebildet werden, indem nach (91a) wird:

$$Z_b = -X_b - X_c(c_s - \eta); \quad Z_s = +X_c.$$

Es wird erhalten:

$$\left. \begin{aligned} Z_{b0} &= -X_b^1 - (X_c^1 - k_a X_a^1)(c_s - \eta) - q_b \zeta'_{0r} \\ &\quad + \left[q_b (c_s - \eta) - n_a \frac{\delta_{bb}}{D^1} \right] \zeta'_{0a}, \\ Z_{s0} &= X_c^1 - k_a X_a^1 + \frac{1}{[\delta_{cc}]} \zeta'_{0r} - q_a \zeta'_{0a}, \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

und die Koeffizienten, indem hier sofort der von der Säule her-rührende Beitrag nach (53) mitgenommen wird:

$$\left. \begin{aligned} Z'_{bb} &= \frac{\delta_{ab}}{D^1} n_b + (c_s - \eta) q_b + 4\mu_b \left[1 + 3 \frac{c_s}{h_b} \left(1 + \frac{c_s}{h_b} \right) \right]; \\ Z'_{sb} &= -q_b - \frac{6\mu_b}{h_b} \left(1 + 2 \frac{c_s}{h_b} \right); \quad Z'_{ss} = \frac{1}{[\delta_{cc}]} + \frac{12\mu_b}{h_b^2}. \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

Man beginnt damit, die fünf ersten der Größen (97) zu berechnen, und geht sodann an die Bestimmung von c_s mittels der Bedingung $Z'_{sb} = 0$. Hieraus ergibt sich:

$$c_s - \eta = -\frac{1}{Z'_{ss}} \left[k_a \frac{\delta_{ab}}{D^1} + \frac{6\mu_b}{h_b} \left(1 + \frac{2\eta}{h_b} \right) \right]; \quad (102)$$

hiermit berechnet man die fünf letzten Größen (97), wonach die Elastizitätsgleichungen für den Knoten b lauten:

$$\zeta'_b = \frac{Z_{b0}}{Z'_{bb}}; \quad \zeta'_s = \frac{Z_{s0}}{Z'_{ss}}. \quad (103)$$

Die hieraus sich ergebenden ζ'_b und ζ'_s werden in der Berechnung für den folgenden Knoten als ζ'_{0b} und ζ'_{0s} benutzt; gleichzeitig hat man die Elastizitätsbeiwerte für den Knoten b :

$$\tau'_b = \frac{1}{Z'_{bb}}; \quad \varepsilon'_s = \frac{1}{Z'_{ss}}. \quad (104)$$

Ist die Berechnung auf diese Weise für das ganze System durch-geführt, so bleibt noch übrig, die gefundenen ζ' mittels einer Rück-wärtsrechnung zu korrigieren. Hat man hierbei die richtigen Werte von ζ'_b und ζ'_s ermittelt, so berechnet man die entsprechenden richtigen Werte von X_a , X_b , X_c mittels (99) und schließlich die richtigen Werte von ζ'_a und ζ'_r nach:

$$\zeta'_a = \zeta'_{0a} + \tau'_a [X_a + (c_r - \eta) X_c]; \quad \zeta'_r = \zeta'_{0r} - \varepsilon'_r X_c. \quad (105)$$

Beispiel 8.

Die in Abb. 17 dargestellte dreischiffige Hallenkonstruktion soll für die gezeigte Belastung berechnet werden. Alle vier Säulen sind unten fest ein-

gespannt. Die Verhältnisse der Querschnittsabmessungen sind in der folgenden Zusammenstellung gegeben:

	Länge m	J	μ	
$a-1$ und $d-4$. . .	5,0	0,2	0,40	} $J_z = 1,0,$ $l_c = 10,0$ m.
$a-b$ " $c-d$. . .	10,3	0,5	0,48	
$b-2$ " $c-3$. . .	7,5	0,6	0,80	
$b-(e)$ " $c-(f)$. . .	4,0	0,4	1,00	
Bogen $(e)-(f)$ $J \cos \varphi = \text{konst.} =$		1,0		

Der Bogen sei parabolisch, mit unveränderlichem $J \cos \varphi$.

Die einfachste Berechnung erhält man, wenn nur a, b, c und d als Knoten betrachtet werden, während $b-(e)-(f)-c$ als ein zusammenhängender Bogen aufgefaßt wird; man beginnt dann damit, die Berechnung für

$$b-(e)-(f)-c$$

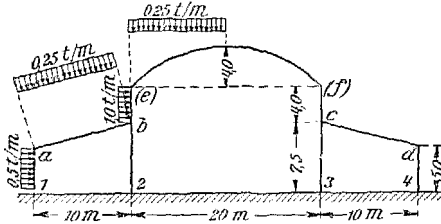


Abb. 17.

als fest eingespannten Bogen durchzuführen. Diese Rechnung enthält nichts Neues, so daß wir uns hier mit der Aufführung der Ergebnisse begnügen können. Indem der nämliche konstante Faktor $E J_c : l_c$ wie sonst überall eingeführt wird, erhält man :

$$\delta_{aa} = \delta_{bb} = \frac{5}{3}; \quad \delta_{ab} = \frac{1}{3}; \quad D = \delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2 = \frac{8}{3};$$

$$\eta = \frac{13}{3} \text{ m}; \quad \delta_{cc} = 27,289;$$

weiter findet sich, mit den Bezeichnungen in (95)

$$(P_a = \sum P_m \delta_{ma} = \int M_b M_a \frac{J_c ds}{J l_c}, \text{ usw.}):$$

$$P_a = +15,355; \quad P_b = +6,313; \quad P_c = +32,776;$$

und endlich:

$$X_a = 8,808 \text{ tm}; \quad X_b = 2,026 \text{ tm}; \quad X_c = 1,201 \text{ t.}$$

Außer dem Horizontalschub X_c wirkt im Knoten b die Gegenkraft $4,0 \text{ t}$ gegen die auf $b-(e)$ angreifende wagenrechte Belastung.

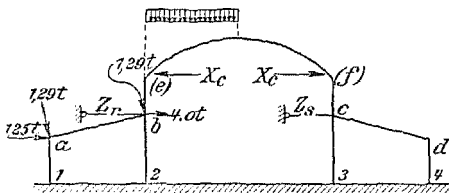


Abb. 18a.

1. Gleichzeitige Aufstellung aller Gleichungen. Durch Hinzufügung zweier Z-Stäbe, r und s in Abb. 18a, wird die Knotenpunktfigur unbeweglich gemacht; es sind dann die 4 Knotendrehwinkel $\zeta_a \dots \zeta_d$ und die 2 Stab-

verlängerungen ζ_r und ζ_s zu bestimmen.

Gleichung $Z_a = 0$. Nach (14) und (15) hat man:

$$Z'_a = 4\mu_{a1} + 4\mu_{ab} = 4 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,48 = 3,52;$$

$$Z'_b = 2\mu_{ab} = 2 \cdot 0,48 = 0,96;$$

und indem die Verschiebung $\zeta_r' = -1$ eine Drehung der Säule $a-1$ gleich $\psi_{a1,r}' = -\frac{1}{5}$ hervorruft, während $\psi_{ab,r}' = 0$, nach (31):

$$Z_{ar}' = 6\mu_{a1} \psi_{a1,r}' = -6 \cdot 0,4 \cdot \frac{1}{5} = -0,48.$$

Weiter ist

$$M_{a1}^0 = +\frac{1}{12} \cdot 0,5 \cdot 5^2 = +1,042 \text{ tm};$$

$$M_{ab}^0 = -\frac{1}{12} \cdot 0,25 \cdot 10,3^2 = -2,210 \text{ tm};$$

somit nach (13):

$$Z_{a0} = -(1,042 - 2,210) = +1,168 \text{ tm}.$$

Die erste Gleichung lautet dann:

$$3,52 \zeta_a' + 0,96 \zeta_b' - 0,48 \zeta_r' = +1,168.$$

Gleichung $Z_b = 0$. Z_{ba}' ist schon bekannt. Für Z_{bb}' ergibt sich nach (14) und (93), indem Z_{bb}' hier gleich Z_{aa}' in (93), und $c_r = 0$ ist, zu:

$$Z_{bb}' = 4\mu_{ab} + 4\mu_{b2} + \frac{\delta_{bb}}{D} + \frac{\eta^2}{\delta_{ec}} = 4 \cdot 0,48 + 4 \cdot 0,80 + \frac{5}{8} + \frac{169}{9 \cdot 27,289} = 6,433.$$

Ebenso findet sich nach (93), mit $c_r = c_s = 0$:

$$Z_{bs}' = \frac{1}{8} - \frac{169}{9 \cdot 27,289} = -0,563,$$

und nach (31) und (93), indem $\psi_{ab,r}' = 0$, $\psi_{b2,r}' = -\frac{1}{7,5}$:

$$Z_{br}' = 6 \cdot 0,8 \cdot \left(-\frac{1}{7,5}\right) + \frac{13}{3 \cdot 27,289} = -0,481;$$

$$Z_{bs}' = -\frac{13}{3 \cdot 27,289} = -0,159.$$

Endlich ist $M_{ba}^0 = +2,210 \text{ tm}$ und somit nach (13) und (92):

$$Z_{b0} = -2,210 + 8,808 - 1,201 \cdot \frac{13}{3} = +1,394 \text{ tm}.$$

Die ganze zweite Gleichung lautet also:

$$0,96 \zeta_a' + 6,433 \zeta_b' - 0,563 \zeta_c - 0,481 \zeta_r' - 0,159 \zeta_s' = +1,394.$$

Gleichung $Z_r = 0$. Z_{ar}' und Z_{br}' sind schon bekannt, Z_{cr}' ist wegen der Symmetrie gleich $Z_{bs}' = -0,159$. Nach (33) und (93) ergibt sich, mit $\psi_{a1,r}' = -\frac{1}{5}$, $\psi_{ab,r}' = 0$, $\psi_{b2,r}' = -\frac{1}{7,5}$:

$$Z_{rr}' = 12 \left(\frac{0,4}{5^2} + \frac{0,8}{7,5^2} \right) + \frac{1}{27,289} = 0,399,$$

und weiter nach (93):

$$Z_{rs}' = -\frac{1}{27,289} = -0,0366.$$

Um die Spannkraft Z_{r0} zu finden, ist in Abb. 18a die äußere Belastung auf die Knoten verteilt; indem dann die beiden zu $a-b$ senkrechten Kräfte 1,29 t je eine wagerechte Seitenkraft 0,31 t liefern, ergibt sich:

$$Z_{r0} = 1,25 + 2 \cdot 0,31 + 4,0 - X_c = 4,669 \text{ t}.$$

Die dritte Gleichung lautet somit:

$$-0,480 \zeta_a' - 0,481 \zeta_b' - 0,159 \zeta_c + 0,399 \zeta_r' - 0,0366 \zeta_s' = 4,669.$$

Die Gleichungen $Z_d = 0$, $Z_c = 0$ und $Z_s = 0$ ergeben sich aus den schon gefundenen mit Hilfe der Symmetrie; nur die Belastungsglieder sind neu zu bilden. Diese Belastungsglieder sind: $Z_{d0} = 0$, und nach (92):

$$Z_{c0} = -X_b^0 + X_c^0 \cdot \eta = -2,026 + 1,201 \cdot \frac{13}{3} = 3,178;$$

$$Z_{s0} = +X_c^0 = +1,201.$$

Das ganze Gleichungssystem kann jetzt geschrieben werden:

$$(a): 3,52 \zeta_a' + 0,96 \zeta_b' - 0,48 \zeta_r' = 1,168;$$

$$(b): 0,96 \zeta_a' + 6,433 \zeta_b' - 0,563 \zeta_c' - 0,481 \zeta_r' - 0,159 \zeta_s' = 1,394;$$

$$(c): 0,96 \zeta_d' + 6,433 \zeta_c' - 0,563 \zeta_b' - 0,481 \zeta_s' - 0,159 \zeta_r' = 3,178;$$

$$(d): 3,52 \zeta_d' + 0,96 \zeta_c' - 0,48 \zeta_s' = 0;$$

$$(r): -0,480 \zeta_a' - 0,481 \zeta_b' - 0,159 \zeta_c' + 0,399 \zeta_r' - 0,0366 \zeta_s' = 4,669;$$

$$(s): -0,480 \zeta_d' - 0,481 \zeta_c' - 0,159 \zeta_b' + 0,399 \zeta_s' - 0,0366 \zeta_r' = 1,201.$$

Die Auflösung ist wegen der Symmetrie verhältnismäßig leicht zu bewerkstelligen, indem sich die Gleichungen durch Addition und Subtraktion von a und d , b und c und endlich r und s in zwei Systeme von je drei Gleichungen zerlegen lassen. Das Ergebnis ist:

$$\begin{aligned} \zeta_a' &= 2,328; & \zeta_b' &= 1,523; & \zeta_c' &= 1,558; & \zeta_d' &= 0,653; \\ \zeta_r' &= 17,686; & \zeta_s' &= 7,904. \end{aligned}$$

Hieraus werden die Beanspruchungen (Knotenmomente, X -Größen für den Bogen usw.) in bekannter Weise mittels der Ausdrücke (7) und (90) hergeleitet.

2. Stufenweise Berechnung (Abb. 18b).

a) Für ein ausschließlich aus der Säule $a-1$ und dem Z_r -Stab bestehendes System ergibt sich, indem Z_{ar}' nach (53) gleich Null gesetzt wird:

$$1 + 2 \frac{c_r}{h_a} = 1 + \frac{2c_r}{5} = 0;$$

$$c_r = -2,5 \text{ m},$$

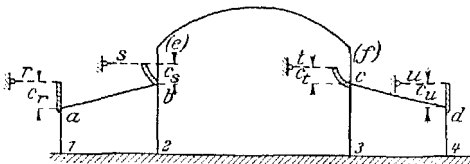


Abb. 18b.

und weiter nach (53):

$$Z_{aa}' = 4 \cdot 0,4 \left[1 - 3 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) \right] = 0,40;$$

$$Z_{rr}' = \frac{12 \cdot 0,4}{5,0^2} = 0,192.$$

Nach (52) und (48c) bis (49) findet sich:

$$Z_{a0} = - \left[\frac{1}{12} \cdot 0,5 \cdot 5,0^2 + \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 5,0 \cdot (-2,5) \right] = +2,083 \text{ tm},$$

$$Z_{r0} = + \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 5,0 = +1,25 \text{ t},$$

und somit:

$$\zeta_a' = \frac{2,083}{0,40} = +5,208;$$

$$\zeta_r' = \frac{1,25}{0,192} = +6,510,$$

und:

$$\tau_a' = \frac{1}{Z_{aa}'} = \frac{1}{0,4} = 2,5;$$

$$\varepsilon_r' = \frac{1}{Z_{rr}'} = \frac{1}{0,192} = 5,208.$$

b) Der Systemteil $a-b-2$ mit dem Z_s -Stab wird hinzugefügt. Zuerst werden die folgenden Zahlenwerte nach (61) berechnet:

$$\begin{aligned} m &= 1 + 4 \cdot 0,8 \cdot 2,5 = 5,80; \\ n &= 2 \cdot 0,48 \cdot 5,208 = 5,00; \\ k &= 2 \cdot 0,48 \cdot 2,5 \cdot (-2,5) = -6,00; \\ \Delta &= 5,8 \cdot 5,208 + 2,5 \cdot (-2,5)^2 = 45,831; \\ q &= 5,0 \cdot (1 + 3 \cdot 0,48 \cdot 2,5) = 23,00. \end{aligned}$$

Sodann wird Z'_{sb} (nach (53) und (64) für Säule und Balken) gebildet und gleich Null gesetzt:

$$Z'_{sb} = -\frac{6 \cdot 0,8}{7,5} \left(1 + 2 \frac{c_s}{7,5}\right) - \frac{1}{45,831} (-6,0 + 5,8 c_s) = 0;$$

daraus:

$$c_s = -1,708.$$

Weiter nach (53) und (64):

$$Z'_{bb} = 4 \cdot 0,8 \left[1 - 3 \cdot \frac{1,708}{7,5} \left(1 - \frac{1,708}{7,5}\right)\right] + \frac{1}{45,831} [46,0 - 12,0 (-2,5 - 1,708) + 5,8 \cdot 1,708^2] = 3,985;$$

$$Z'_{ss} = \frac{12 \cdot 0,8}{7,5^2} + \frac{5,80}{45,831} = 0,297.$$

Sodann nach (65), indem $\zeta'_{0a} = +5,208$; $\zeta'_{0r} = +6,510$; $M_{ab}^0 = -2,21$ tm; $M_{ba}^0 = +2,21$ tm; $\Delta H =$ wagerechte Seitenkraft der ganzen Belastung des Balkens $a-b = 0,62$ t:

$$Z_{b0} = -\frac{1}{45,831} \{[-6,0 + 5,8 \cdot (-1,708)] \cdot 6,510 + (5,0 - 2,5 \cdot 1,708) [5,208 - 2,5 \cdot (-2,21)] - 2,21 - (-1,708) \cdot 0,62\} = +0,939;$$

$$Z_{s0} = \frac{1}{45,831} [5,80 \cdot 6,510 + 2,5 (5,208 - 2,5 \cdot (-2,21)) + 0,62] = +2,032.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\zeta'_b = \frac{0,939}{3,985} = +0,236; \quad \zeta'_s = \frac{2,032}{0,297} = 6,842$$

und

$$r'_b = \frac{1}{3,985} = 0,251; \quad e'_s = \frac{1}{0,297} = 3,367.$$

Bevor zum Knoten c weiter gegangen wird, soll noch im Knoten b die äußere Kraft 4,0 t (siehe Abb. 18a) hinzugefügt werden, die hier als Reaktion gegen die wagerechte Belastung der Wandstrecke $b-(e)$ auftritt. Dem letzten Glied der beiden Formeln (65) zufolge erzeugt diese wagerechte Kraft:

$$\begin{aligned} \Delta Z_{b0} &= -(-1,708) \cdot 4,0 = +6,832, \\ \Delta Z_{s0} &= +4,0 \end{aligned}$$

und somit:

$$\Delta \zeta'_b = +\frac{6,832}{3,985} = +1,714;$$

$$\Delta \zeta'_s = +\frac{4,0}{0,297} = +13,468,$$

wonach mit den Werten:

$$\zeta'_b = 0,236 + 1,714 = +1,950; \quad \zeta'_s = 6,842 + 13,468 = 20,310$$

weiter zu rechnen ist.

c) Der Systemteil (Bogen $b-c$) — (Säule $c-3$) mit dem Z_c -Stab wird hinzugefügt. Von den aus der Berechnung des Bogens $b-c$ als beiderseits fest eingespannt bekannten Werten:

$$\delta_{aa} = \delta_{bb} = \frac{5}{3}; \quad \delta_{ab} = \frac{1}{3}; \quad \delta_{cc} = 27,289; \quad \eta = \frac{13}{3};$$

$$c_s - \eta = -1,708 - 4,333 = -6,041$$

ausgehend, berechnet man zuerst die folgenden, durch (97) gegebenen Hilfsgrößen:

$$\delta_{cc}^1 = 27,289 + 3,367 + 0,251 \cdot 6,041^2 = 39,816;$$

$$k_a = \frac{0,251 \cdot (-6,041)}{39,816} = -0,0381;$$

$$\delta_{aa}^1 = 1,667 + 0,251 - 0,0381^2 \cdot 39,816 = 1,860;$$

$$D^1 = 1,860 \cdot \frac{5}{3} - \frac{1}{9} = 2,989;$$

$$\frac{1}{[\delta_{cc}^1]} = \frac{1}{39,816} + 0,0381^2 \cdot \frac{5}{3 \cdot 2,989} = 0,0259;$$

$$m = 1 - 0,0381 \cdot 6,041 = 0,770.$$

Sodann nach (101):

$$Z'_{ii} = 0,0259 + \frac{12 \cdot 0,8}{7,5^2} = 0,1966$$

und nach (102):

$$c_t - \eta = -\frac{1}{0,1966} \left[-0,0381 \cdot \frac{1}{3 \cdot 2,989} + \frac{6 \cdot 0,8}{7,5} \left(1 + \frac{26}{3 \cdot 7,5} \right) \right] = -6,995,$$

somit:

$$c_t = -6,995 + \frac{13}{3} = -2,662.$$

Weiter findet sich nach (97):

$$n_a = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + (-0,0381) \cdot (-6,995) = +0,4665;$$

$$n_b = 3 \cdot 1,86 + 0,0381 \cdot 6,995 = +5,8465;$$

$$q_a = -6,041 \cdot 0,0259 + 0,0381 \cdot \frac{5}{3 \cdot 2,989} = -0,1353;$$

$$q_b = -6,995 \cdot 0,0259 - 0,0381 \cdot \frac{1}{3 \cdot 2,989} = -0,1855.$$

Endlich nach (101):

$$Z'_{cc} = \frac{1}{3 \cdot 2,989} \cdot 5,8465 + (-6,995) \cdot (-0,1855)$$

$$+ 4 \cdot 0,8 \left[1 - 3 \cdot \frac{2,662}{7,5} \left(1 - \frac{2,662}{7,5} \right) \right] = 2,951;$$

$$Z'_{it} = 0,1966 \text{ (schon oben berechnet).}$$

Um schließlich die Belastungsglieder zu bestimmen, geht man von den oben für den Bogen berechneten Werten aus:

$$P_a = 15,355; \quad P_b = 6,313; \quad P_c = 32,776;$$

$$P_a - k_a P_c = 16,604;$$

und findet hiermit nach (98):

$$\begin{aligned} X_a^1 &= \frac{1}{2,989} \left[16,604 \cdot \frac{5}{3} - 6,313 \cdot \frac{1}{3} \right] = 8,554; \\ X_b^1 &= \frac{1}{2,989} \left[6,313 \cdot 1,860 - 16,604 \cdot \frac{1}{3} \right] = 2,077; \\ X_c^1 &= \frac{32,776}{89,816} = 0,823; \end{aligned}$$

Mit

$$\zeta'_{0s} = 20,310, \quad \zeta'_{0b} = 1,950$$

ergibt sich dann nach (100):

$$\begin{aligned} Z_{c0} &= -2,077 - (0,823 + 0,0381 \cdot 8,554) \cdot (-6,995) + 0,1855 \cdot 20,310 \\ &\quad + \left[(-0,1855) \cdot (-6,041) - 0,4665 \cdot \frac{5}{3 \cdot 2,989} \right] \cdot 1,950 = +11,406; \\ Z_{t0} &= 0,823 + 0,0381 \cdot 8,554 + 0,0259 \cdot 20,310 + 0,1353 \cdot 1,950 = 1,939. \end{aligned}$$

Hieraus findet man endlich:

$$\zeta'_c = \frac{11,406}{2,951} = 3,865; \quad \zeta'_t = \frac{1,939}{0,1966} = 9,863$$

und

$$\tau'_c = \frac{1}{2,951} = 0,339; \quad \epsilon'_t = \frac{1}{0,1966} = 5,086.$$

d) Der Systemteil $c-d-4$ mit dem Z_u -Stab wird hinzugefügt. Genau wie unter b) bestimmt man zuerst die Werte (61):

$$\begin{aligned} m &= 1 + 4 \cdot 0,48 \cdot 0,339 = 1,651; & n &= 2 \cdot 0,48 \cdot 5,086 = 4,883; \\ k &= 2 \cdot 0,48 \cdot 0,339 \cdot (-2,662) = -0,866; \\ d &= 1,651 \cdot 5,086 + 0,339 \cdot 2,662^2 = 10,799; \\ q &= 4,883 \cdot (1 + 3 \cdot 0,48 \cdot 0,339) = 7,267. \end{aligned}$$

Sodann wird Z'_{du} nach (53) und (64) gebildet und gleich Null gesetzt:

$$Z'_{du} = -\frac{6 \cdot 0,4}{5,0} \left(1 + 2 \frac{c_u}{5,0} \right) - \frac{1}{10,799} [-0,866 + 1,651 \cdot c_u] = 0,$$

woraus

$$c_u = -1,159.$$

Weiter nach (53) und (64):

$$\begin{aligned} Z'_{da} &= 4 \cdot 0,4 \left[1 - 3 \cdot \frac{1,159}{5,0} \left(1 - \frac{1,159}{5,0} \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{10,799} [2 \cdot 7,267 - 2 \cdot 0,866 (-2,662 - 1,159) + 1,651 \cdot 1,159^2] = 2,9096; \\ Z'_{uu} &= \frac{12 \cdot 0,4}{5,0^2} + \frac{1,651}{10,799} = 0,345. \end{aligned}$$

Sodann nach (65), indem $\zeta'_{0c} = 3,865$; $\zeta'_{0t} = 9,863$; $M_{cd}^0 = M_{dc}^0 = 0$; $\Delta H = 0$:

$$\begin{aligned} Z_{d0} &= -\frac{1}{10,799} [(-0,866 + 1,651 \cdot (-1,159)) \cdot 9,863 + (4,883 - 1,159 \cdot 2,662) \cdot 3,865] \\ &= +1,896; \end{aligned}$$

$$Z_{u0} = \frac{1}{10,799} [1,651 \cdot 9,863 + 2,662 \cdot 3,865] = +2,461.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\zeta'_d = \frac{1,896}{2,9096} = +0,652; \quad \zeta'_u = \frac{2,461}{0,345} = +7,133.$$

Diese zuletzt gefundenen Werte sind sofort die richtigen, und durch Vergleich mit den oben (mittels der Gleichungen) ermittelten $\zeta'_d = 0,653$ und ζ'_s (in Abb. 18a) $\approx 7,904$ ersieht man schon, daß die Übereinstimmung ausreichend ist, indem die wagerechte Verschiebung des Knotens d hier (nach Abb. 18b) ist: $\zeta'_u - c_u \zeta'_d = 7,133 + 1,159 \cdot 0,652 = 7,889$, ein Wert, der mit 7,904 zu vergleichen ist.

Rückwärtsrechnung $d - c$. Mit $\zeta'_{c0} = 3,865$; $\zeta'_{l0} = 9,863$; $\zeta'_d = 0,652$; $\zeta'_u = 7,133$; $\zeta'_{l0} - \zeta'_u = 2,730$ und den für die Strecke $c - d$ geltenden Werten von m , n , k und Δ , ergibt sich nach (62):

$$H_c = \frac{1}{10,799} \{1,651 \cdot 2,730 - (-2,662) \cdot 3,865 \\ + [-0,866 + 1,651 \cdot (-1,159)] \cdot 0,652\} = 1,202; \\ M_{cd} = \frac{1}{10,799} \{-2 \cdot 0,866 \cdot 2,730 + 2 \cdot 4,883 \cdot 3,865 \\ + [4,883 - 0,866 \cdot (-2,662 - 2 \cdot 1,159)] \cdot 0,652\} = 3,612;$$

wonach aus (59) folgt:

$$\zeta'_c = 3,865 - 0,339 \cdot 3,612 + 0,339 \cdot (-2,662) \cdot 1,202 = 1,556; \\ \zeta'_r = 9,863 - 5,086 \cdot 1,202 = 3,748.$$

Kontrolle:

$$\zeta'_r - c_r \zeta'_c = 3,748 + 2,662 \cdot 1,556 = 7,889 = \zeta'_u - c_u \zeta'_d = 7,889.$$

Rückwärtsrechnung $c - b$. Mit $\zeta'_{b0} = 1,950$; $\zeta'_{s0} = 20,310$; $\zeta'_c = 1,556$; $\zeta'_r = 3,748$, $\zeta'_{s0} - \zeta'_r = 16,562$ und den früher für die Strecke $b - c$ benutzten Zahlenwerten, findet sich nach (99):

$$X_a = 8,554 - \frac{5}{3 \cdot 2,989} [(-0,0381) \cdot 16,562 + 0,770 \cdot 1,950 + 0,4665 \cdot 1,556] = 7,664; \\ X_b = 2,077 + \frac{1}{3 \cdot 2,989} [(-0,0381) \cdot 16,562 + 0,770 \cdot 1,950 + 5,8465 \cdot 1,556] = 3,188; \\ X_c = 0,823 + 0,0381 \cdot 8,554 + 0,0259 \cdot 16,562 + 0,1353 \cdot 1,950 - 0,1855 \cdot 1,556 = 1,553.$$

Hiermit ergibt sich nach (105):

$$\zeta'_b = 1,950 + 0,251 (7,664 - 6,041 \cdot 1,553) = 1,519; \\ \zeta'_s = 20,310 - 3,367 \cdot 1,553 = 15,081.$$

Rückwärtsrechnung $b - a$. Mit $\zeta'_{0a} = 5,208$; $\zeta'_{0r} = 6,510$; $\zeta'_b = 1,519$; $\zeta'_r = 15,081$; $\zeta'_{0r} - \zeta'_a = -8,571$ und den für die Strecke $a - b$ früher benutzten Werten: $m = 5,80$, $n = 5,0$, $k = -6,0$, $\Delta = 45,831$ ergibt sich nach (62):

$$H_a = \frac{1}{45,831} \{5,80 \cdot (-8,571) + 2,5 [5,208 - 2,5 \cdot (-2,21)] \\ + [-6,0 + 5,8 \cdot (-1,708)] \cdot 1,519\} = -1,026; \\ M_{ab} = \frac{1}{45,831} \{-12,0 \cdot (-8,571) + 10,0 [5,208 - 2,5 \cdot (-2,21)] \\ + [5,0 - 6,0 \cdot (-2,5 - 2 \cdot 1,708)] \cdot 1,519\} + (-2,21) = 3,718,$$

und hiermit schließlich nach (59):

$$\zeta_a' = 5,208 - 2,5 \cdot 3,718 + 2,5 \cdot (-2,5) \cdot (-1,026) = 2,326;$$

$$\zeta_r' = 6,510 - 5,208 \cdot (-1,026) = 11,853;$$

Kontrolle:

$$\zeta_r' - c_r \zeta_a' = 11,853 + 2,5 \cdot 2,326 = 17,668 = \zeta_s' - c_s \zeta_b' = 15,081 + 1,708 \cdot 1,519 = 17,675.$$

Zusammenstellung der mittels der Gleichungen unter 1 und der nach der stufenweisen Berechnung unter 2 gefundenen Werte:

	Knotendrehwinkel				Wagerechte Verschiebungen der Knoten	
	ζ_a'	ζ_b'	ζ_c'	ζ_d'	a und b	c und d
nach 1	2,328	1,523	1,558	0,653	17,686	7,904
" 2	2,326	1,519	1,556	0,652	$\left\{ \begin{array}{l} 17,675 \\ 17,668 \end{array} \right\}$	7,889

9. Kontinuierliche Bogenträger auf elastischen Zwischenfeilern.

Es soll hier nur eine Bogenreihe betrachtet werden, wo alle Bogen und Pfeiler ununterbrochen, ohne Gelenke oder dergleichen, ineinander übergehen (Abb. 19). Die Endpfeiler werden als feste Ein-

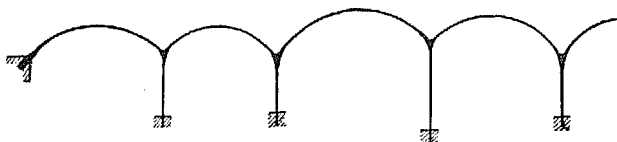


Abb. 19.

spannungen vorausgesetzt, die Zwischenpfeiler (Säulen) bieten einen elastischen Widerstand gegen Drehung und wagerechte Verschiebung, wogegen von deren elastischer Verkürzung abgesehen werden soll. Weiter sollen die Zwischenpfeiler als unten fest eingespannt angesehen werden, obwohl eine gelenkige Lagerung am unteren Ende ebenso leicht mittels der in § 7 entwickelten Formeln behandelt werden könnte. — Zur Berechnung einer solchen Konstruktion sind alle nötigen Vorbereitungen in den beiden vorhergehenden Kapiteln enthalten; was hier übrig bleibt, ist nur eine einfache Anwendung der entwickelten Formeln. Speziell soll gezeigt werden, wie man überaus einfach zu den Einflußlinien gelangen kann.

Gleichzeitige Aufstellung aller Knotengleichungen. In Abb. 20 sind zwei beliebige aufeinander folgende Felder sowie die benutzten Bezeichnungen gezeigt; alle Größen, die sich auf den linken Bogen

beziehen, sind mit einem einzelnen Strich ($X'_a, X'_b \dots \eta'$) versehen, diejenigen des rechten Bogens mit Doppelstrich ($X''_a, X''_b \dots \eta''$). Jeder Knoten wird durch ein Moment (Z_a, Z_b, Z_c) und einen Z -Stab (Z_r, Z_s, Z_t) festgehalten; diese greifen in den Höhen c_r, c_s, c_t über den Knoten an. In jedem Knoten treten somit zwei Unbekannte, in b beispielsweise ζ_b und ζ_s , auf.

Die Elastizitätsgleichungen für den Knoten b lauten:

$$\left. \begin{aligned} Z_b = 0 &= Z_{b0} - Z'_{ba} \zeta'_a - Z'_{bb} \zeta'_b - Z'_{bc} \zeta'_c - Z'_{br} \zeta'_r \\ &\quad - Z'_{bs} \zeta'_s - Z'_{bt} \zeta'_t, \\ Z_s = 0 &= Z_{s0} - Z'_{sa} \zeta'_a - Z'_{sb} \zeta'_b - Z'_{sc} \zeta'_c - Z'_{sr} \zeta'_r \\ &\quad - Z'_{ss} \zeta'_s - Z'_{st} \zeta'_t. \end{aligned} \right\} (106)$$

Sie enthalten keine anderen ζ -Größen als die sechs hier aufgeführten, da sich die Wirkung der „Belastungen“ $\zeta_b = -1$ und $\zeta_s = -1$ nicht über die absolut festgehaltenen Einspannungen bei a und c fortpflanzen können.

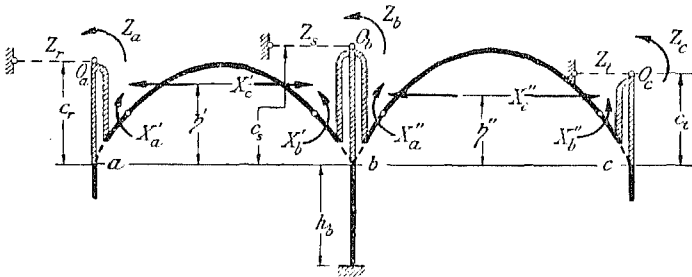


Abb. 20.

Belastungsglieder und Koeffizienten können ohne weiteres nach (92) und (93) für die Bögen und nach (52) und (53) für die Zwischenpfeiler aufgeschrieben werden. Es wird vorausgesetzt, daß die äußeren Kräfte nur an den Bögen angreifen können, nicht an den Säulen, so daß diese nur zu den Koeffizienten Beiträge liefern können. Es muß ferner daran erinnert werden, daß die Beiträge zu den Belastungsgliedern und den drei Koeffizienten Z'_{bb} , Z'_{bs} und Z'_{ss} von beiden Bögen herrühren, diejenigen zu den übrigen Koeffizienten dagegen nur von einem einzigen Bogen. Wenn die Höhen und Steifigkeitsbeiwerte der Säulen mit $h_a, \mu_a, h_b, \mu_b \dots$ bezeichnet werden, hat man dann:

$$\left. \begin{aligned} Z_{b0} &= -X'_b{}^{0'} - X'_c{}^{0'}(c_s - \eta') + X''_a{}^{0''} + X''_c{}^{0''}(c_s - \eta''); \\ Z_{s0} &= X'_c{}^{0'} - X'_c{}^{0''}; \end{aligned} \right\} (107)$$

$$\left. \begin{aligned}
 Z'_{ba} &= \frac{\delta'_{ab}}{D'} - \frac{(c_r - \eta')(c_s - \eta')}{\delta'_{cc}}; \\
 Z'_{bc} &= \frac{\delta''_{ab}}{D''} - \frac{(c_r - \eta'')(c_s - \eta'')}{\delta''_{cc}}; \\
 Z'_{bb} &= \frac{\delta'_{aa}}{D'} + \frac{(c_s - \eta')^2}{\delta'_{cc}} + \frac{\delta''_{bb}}{D''} + \frac{(c_s - \eta'')^2}{\delta''_{cc}} + 4\mu_b \left[1 + 3\frac{c_s}{h_b} \left(1 + \frac{c_s}{h_b} \right) \right]; \\
 Z'_{br} &= \frac{c_s - \eta'}{\delta'_{cc}}; \quad Z'_{bt} = \frac{c_s - \eta''}{\delta''_{cc}}; \\
 Z'_{bs} &= -\frac{c_s - \eta'}{\delta'_{cc}} - \frac{c_s - \eta''}{\delta''_{cc}} - \frac{6\mu_b}{h_b} \left(1 + 2\frac{c_s}{h_b} \right); \\
 Z'_{sa} &= \frac{c_r - \eta'}{\delta'_{cc}}; \quad Z'_{sc} = \frac{c_t - \eta''}{\delta''_{cc}}; \\
 Z'_{sr} &= -\frac{1}{\delta'_{cc}}; \quad Z'_{st} = -\frac{1}{\delta''_{cc}}; \quad Z'_{ss} = \frac{1}{\delta'_{cc}} + \frac{1}{\delta''_{cc}} + \frac{12\mu_b}{h_b^2}.
 \end{aligned} \right\} (108)$$

Wenn $a - b$ das erste Feld bezeichnet, ist $\zeta_a = \zeta_r = 0$, so daß die beiden ersten Gleichungen (106) nur vier ζ -Größen enthalten, und ebenso ist $\zeta_c = \zeta_t = 0$, wenn $b - c$ das letzte Feld bezeichnet.

Die Größen $c_r, c_s \dots$ können an und für sich willkürlich gewählt werden. Sind die Bögen alle verschieden, so bestimmt man am besten c_s so, daß $Z'_{bs} = 0$ wird; in speziellen Fällen können jedoch vielleicht größere Vorteile durch eine andere Wahl erreicht werden, beispielsweise für eine Reihe genau gleicher Bögen (mit demselben η) dadurch, daß $c_r = c_s = \dots = \eta$ gesetzt wird.

Hat man ganz allgemein die c -Größen durch $Z'_{ra} = Z'_{sb} = \dots = 0$ bestimmt, so ergeben sich nach (106) zwei Systeme von Gleichungen; das eine enthält drei aufeinander folgende Knotendrehwinkel und zwei Knotenverschiebungen, das andere umgekehrt zwei Drehwinkel und drei Verschiebungen. Aus solchen Gleichungen kann immer durch Elimination ein System hergestellt werden, das nur fünf aufeinander folgende Unbekannte der einen Art enthält. In der Praxis wird die Felderzahl doch beinahe immer so klein sein, daß es vorteilhafter erscheint, die Elimination in jedem einzelnen Fall für sich auszuführen; anstatt das recht komplizierte Ergebnis einer allgemeinen Elimination zu benutzen.

Hier sollen noch die Gleichungen angegeben werden, die sich in den besonderen Fällen mit nur zwei oder drei Feldern ergeben.

a) Zwei Felder. Man berechnet Z'_{bb} und Z'_{ss} nach (108) und bestimmt c_s so, daß $Z'_{bs} = 0$ wird; alsdann ist

$$c_s = \frac{1}{Z'_{ss}} \left(\frac{\eta'}{\delta'_{cc}} + \frac{\eta''}{\delta''_{cc}} - \frac{6\mu_b}{h_b} \right).$$

Im ganzen hat man mit nur zwei Gleichungen zu tun, nämlich:

$$Z'_{bb} \zeta'_b = Z_{b0}, \quad Z'_{ss} \zeta'_s = Z_{s0}.$$

Wenn ζ'_b und ζ'_s hieraus ermittelt sind, so findet man X_a , X_b , X_c nach (90), für das linke Feld mit $\zeta_a = \zeta_r = 0$, für das rechte Feld mit $\zeta_c = \zeta_t = 0$.

b) Drei Felder. Hier ist es vielleicht am einfachsten, $c_r = c_s$ gleich dem im Mittelfelde geltenden η zu setzen, wodurch $Z'_{bt} = Z'_{cs} = 0$ wird. Die Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned} Z'_{bb} \zeta'_b + Z'_{bc} \zeta'_c &= Z_{b0} - Z'_{bs} \zeta'_s; \\ Z'_{cb} \zeta'_b + Z'_{cc} \zeta'_c &= Z_{c0} - Z'_{ct} \zeta'_t; \\ Z'_{ss} \zeta'_s + Z'_{st} \zeta'_t &= Z_{s0} - Z'_{sb} \zeta'_b; \\ Z'_{ts} \zeta'_s + Z'_{tt} \zeta'_t &= Z_{t0} - Z'_{tc} \zeta'_c. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der ersten und dritten Gleichung ergeben sich ohne weiteres nach (108), diejenigen der zweiten und vierten Gleichung ebenso nach (108), indem hier $(a)bc$ und $(r)st$ mit $bc(d)$ und $st(u)$ vertauscht werden. Hat man Symmetrie, so wird $Z'_{bb} = Z'_{cc}$ usw., es verschwinden aber keine Koeffizienten aus diesem Grunde.

Die stufenweise Berechnung wird nach den Formeln (97) bis (102) ausgeführt, indem die Beiträge der Zwischenpfähler zu den Koeffizienten nach (53) hinzugefügt werden. Die Belastungsglieder werden unmittelbar nach (100) aufgeschrieben, die vollständigen Koeffizienten sind nach (101) und (53):

$$\left. \begin{aligned} Z'_{bb} &= \frac{\delta_{ab}}{D^1} n_b + (c_s - \eta) q_b + 4 \mu_b \left[1 + 3 \frac{c_s}{h_b} \left(1 + \frac{c_s}{h_b} \right) \right]; \\ Z'_{ss} &= \frac{1}{[\delta_{cc}]} + \frac{12 \mu_b}{h_b^2}; \end{aligned} \right\} (109)$$

c_s ist nach (102) zu berechnen.

Für das erste Feld, wo (a, r) eine feste Einspannung bezeichnet, vereinfachen sich die Formeln bedeutend, indem in (99) und (100) ζ'_{0a} und ζ'_{0r} verschwinden und $\tau'_a = \varepsilon'_r = 0$ wird, womit in (97) sich ergibt:

$$\begin{aligned} \delta_{cc}^1 &= \delta_{cc} = [\delta_{cc}]; & k_a &= 0; & \delta_{aa}^1 &= \delta_{aa}; & m &= 1; \\ n_a &= \frac{\delta_{ab}}{\delta_{bb}}; & n_b &= \frac{\delta_{aa}}{\delta_{ab}}; & q_b &= \frac{c_s - \eta}{\delta_{cc}}; \end{aligned}$$

q_a wird gar nicht benutzt. Die Größen X^1 in (99) werden dann die nämlichen wie X^0 , d. h. diejenigen Größen X , die für einen beiderseits fest eingespannten Bogen gelten. Aus (99) wird:

$$\left. \begin{aligned} X_a &= X_a^0 - \frac{\delta_{ab}}{D} \zeta'_b; & X_b &= X_b^0 + \frac{\delta_{aa}}{D} \zeta'_b; \\ X_c &= X_c^0 - \frac{1}{\delta_{cc}} \zeta'_s + \frac{c_s - \eta}{\delta_{cc}} \zeta'_t. \end{aligned} \right\} (110)$$

Wenn $a - b$ das letzte Feld bezeichnet und die Berechnung vom linken Ende bis zum (und einschließlich) Knoten a durchgeführt worden ist, hat man nur in (99) $\zeta'_b = \zeta'_s = 0$ zu setzen, um unmittelbar aus diesen Ausdrücken X_a, X_b, X_c für das letzte Feld zu finden. Hieraus werden sodann die endgültigen Werte von ζ'_a und ζ'_r gebildet mittels der Formeln:

$$\zeta'_a = \zeta'_{0a} + \tau'_a [X_a + (c_r - \eta) X_c], \quad \zeta'_r = \zeta'_{0r} - \varepsilon'_r X_c. \quad (111)$$

Aus diesen für den letzten Zwischenpfeiler geltenden Werten leitet man X_a, X_b, X_c für das vorletzte Feld mittels (99) her, indem ζ'_b und ζ'_s hierin durch die eben gefundenen ζ'_a und ζ'_r ersetzt werden; auf diese Weise wird die Rückwärtsrechnung immer weiter geführt.

Für eine größere Felderzahl als drei, und selbst bei drei Feldern, wenn keine Symmetrie vorhanden ist, wird die stufenweise Berechnung gewöhnlich vorzuziehen sein.

Die Einflußlinien. Durch die oben entwickelten Berechnungsmethoden ist man imstande, eine beliebige Belastung zu behandeln, und es ist daher natürlich möglich, zu den Einflußlinien zu gelangen, indem man als Belastung eine Kraft 1 im willkürlichen Punkte annimmt; indessen ist dieses Verfahren beschwerlich, weil die Kraft 1 in jedem Felde für sich behandelt werden muß. Es wird daher eine erhebliche Erleichterung bedeuten, daß die Einflußlinien für die ζ -Größen hier, ebenso wie in Kap. 6, dem Maxwell'schen Satze zufolge als Durchbiegungslinien ermittelt werden können.

Die Einflußlinie für einen beliebigen Knotendrehwinkel ζ_b ist die einem im Knoten b angreifenden Momente 1 entsprechende Durchbiegungslinie, und ebenso ist die Einflußlinie für eine Knotenverschiebung ζ_s diejenige Durchbiegungslinie, die von einer Stabkraft $Z_s = 1$ als einziger Belastung hervorgerufen wird. Um die Einflußlinien zu bestimmen, beginnt man daher damit, in den obigen Gleichungen $Z_{b0} = 1$, alle anderen $Z_0 = 0$ bzw. $Z_{s0} = 1$, alle anderen $Z_0 = 0$ einzusetzen, alle entsprechenden ζ -Werte zu berechnen und weiter die hieraus folgenden X_a, X_b, X_c in den verschiedenen Feldern. Benutzt man die stufenweise Berechnung, sind diese X_a, X_b, X_c schon von der Rückwärtsrechnung her bekannt.

Die erwähnten Werte von X_a, X_b, X_c sollen im folgenden mit α, β, γ bezeichnet werden, und speziell im n -ten Felde:

die X_a, X_b, X_c -Werte für $Z_{b0} = 1$ mit $\alpha_{nb}, \beta_{nb}, \gamma_{nb}$,

die X_a, X_b, X_c -Werte für $Z_{s0} = 1$ mit $\alpha_{ns}, \beta_{ns}, \gamma_{ns}$.

Weiter wird angenommen, daß in jedem Felde für sich ein für allemal die Durchbiegungslinien $\delta_{ma}, \delta_{mb}, \delta_{mc}$ für $X_a = -1, X_b = -1, X_c = -1$ ermittelt worden sind, indem das betrachtete Feld als ein beiderseits fest eingespannter Bogen behandelt wurde.

Mit Hilfe dieser Durchbiegungen und der Größen α , β , γ kann die Gleichung der $Z_{b_0} = 1$ entsprechenden Durchbiegungslinie und somit der Einflußlinie für ζ_b , oder auch, indem der Faktor $\frac{EJ_c}{l_c}$ schon in δ_{ma} , δ_{mb} , δ_{mc} eingeführt angenommen wird, der Einflußlinie für ζ'_b geschrieben werden:

$$\text{im } n\text{-ten Felde: } \zeta'_b = -\alpha_{nb} \delta_{ma}^{(n)} - \beta_{nb} \delta_{mb}^{(n)} - \gamma_{nb} \delta_{mc}^{(n)}, \quad (112)$$

wobei der obere Index (n) angibt, daß die Durchbiegungen δ für das n -te Feld gelten. Auf dieselbe Weise lautet die Einflußlinie für ζ'_s :

$$\text{im } n\text{-ten Felde: } \zeta'_s = -\alpha_{ns} \delta_{ma}^{(n)} - \beta_{ns} \delta_{mb}^{(n)} - \gamma_{ns} \delta_{mc}^{(n)}. \quad (112a)$$

Hiermit sind alle ζ' -Linien in den verschiedenen Feldern bekannt.

Aus den ζ' -Linien können sodann die X_a -, X_b -, X_c -Linien nach (90) hergeleitet werden. Die Größen X^0 sind hierbei überall gleich Null zu setzen mit Ausnahme desjenigen Feldes, von dessen X_a , X_b , X_c eben die Rede ist; in diesen besonderen Feldern bedeutet X^0 die für beiderseits volle Einspannung geltende Einflußordinate. Es würde natürlich leicht möglich sein, durch Kombination von (112) mit (90) allgemeine Formeln für die X_a -, X_b -, X_c -Linien von folgender Form zu bilden:

$$X_a = (X_a^0) + \xi_{aa} \delta_{ma}^{(n)} + \xi_{ab} \delta_{mb}^{(n)} + \xi_{ac} \delta_{mc}^{(n)},$$

wo die Größen ξ unveränderliche Beiwerte bedeuten, aber die Arbeit wird dadurch nicht wesentlich erleichtert, und die Übersicht wird besser bewahrt, wenn die ζ' -Linien als Zwischenglied eingeschoben und die Zahlenwerte für deren Ordinaten ausgerechnet werden. —

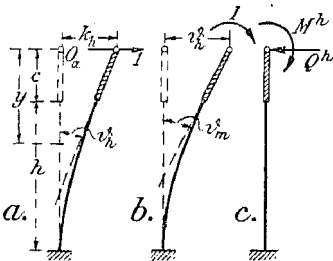


Abb. 21.

Bei Berechnung der X -Linien im ersten Felde sind ζ'_a und ζ'_s in (90) gleich Null zu setzen, so daß X_a und X_b hier nur von ζ'_b abhängig sind, X_c nur von ζ'_b und ζ'_s .

Zwischenpfeiler mit veränderlichem Querschnitt. Ist das Trägheitsmoment der Zwischensäule auf der Strecke h veränderlich, so beginnt man damit, die drei in Abb. 21 angegebenen Größen zu berechnen, nämlich:

- k_h = wagerechte Ausbiegung oben für eine wagerechte Kraft 1,
- ϕ_h = Tangentialwinkel am oberen Ende für die nämliche Kraft 1
= obere wagerechte Ausbiegung für ein Moment 1,
- ϕ_m = Tangentialwinkel für das Moment 1,

alle drei Größen für die unten eingespannte, oben freie Säule. Indem y von O_a aus, wie in Abb. 21 gezeigt, gemessen wird, und indem

der nämliche Faktor K wie sonst überall in den Berechnungen hinzugefügt und das veränderliche Trägheitsmoment durch J^h bezeichnet wird, ist:

$$\left. \begin{aligned} k_h &= \frac{K}{E} \int_c^{h+c} \frac{y^2}{J^h} dy = \frac{K}{E} \sum \frac{y^2}{J^h} \Delta y; \\ \vartheta_h &= \frac{K}{E} \sum \frac{y}{J^h} \Delta y; \quad \vartheta_m = \frac{K}{E} \sum \frac{\Delta y}{J^h}, \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

wo die Summenbildungen nur über die Strecke h auszudehnen sind.

Wenn jetzt die Säule am oberen Endpunkt von dem Momente M^h und der wagerechten Kraft Q^h (mit den in Abb. 21 c gezeigten positiven Richtungen) beansprucht wird, so ergeben sich der Tangentenwinkel ζ_a und die Ausbiegung ζ_r :

$$\zeta_a' = M^h \vartheta_m - Q^h \vartheta_h; \quad \zeta_r' = M^h \vartheta_h - Q^h k_h;$$

durch Auflösung wird hieraus erhalten, indem die Abkürzung $k_h \vartheta_m - \vartheta_h^2 = \Delta_h$ eingeführt wird:

$$M^h = \frac{1}{\Delta_h} (k_h \zeta_a' - \vartheta_h \zeta_r'), \quad Q^h = \frac{1}{\Delta_h} (\vartheta_h \zeta_a' - \vartheta_m \zeta_r'). \quad (114)$$

Die Beiträge der Säule zu den Koeffizienten der Elastizitätsgleichungen werden aus (114) erhalten, indem $\zeta_a' = -1$, $\zeta_r' = 0$ oder $\zeta_a' = 0$, $\zeta_r' = -1$ gesetzt wird, und werden somit:

$$Z'_{aa} = \frac{k_h}{\Delta_h}; \quad Z'_{ar} = -\frac{\vartheta_h}{\Delta_h}; \quad Z'_{rr} = \frac{\vartheta_m}{\Delta_h}. \quad (115)$$

Für einen **unsymmetrischen Bogen** wird als bekannt vorausgesetzt, daß die Berechnung des beiderseits fest eingespannten Bogens mittels der nämlichen Gleichungen (88) wie oben durchgeführt werden kann, indem die schiefe Wirkungslinie $O_1 O_2$ von X_c (siehe Abb. 22) so bestimmt wird, daß $\delta_{ac} = \delta_{bc} = 0$. Hat man die Ordinaten

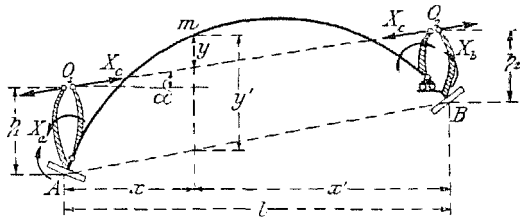


Abb. 22.

η_1 und η_2 der Punkte O_1 und O_2 mit Hilfe dieser Bedingungen ermittelt, und führt man die (im Vergleich zu Abb. 22) geänderte Bezeichnung ein, daß X_c die wagerechte Komponente der in $O_1 O_2$ wirkenden Kraft bedeutet (diese Kraft selbst ist somit $X_c \sec \alpha$), so können alle oben entwickelten Formeln mit der einzigen Änderung benutzt werden, daß überall $(c_r - \eta_1)$ statt $(c_r - \eta)$, und $(c_s - \eta_2)$

statt $(c_s - \eta)$ zu schreiben ist. Die Belastung $X_c = -1$ ruft jetzt zwar auch lotrechte Stützendrücke hervor; da aber eine lotrechte Verschiebung der Widerlager nicht berücksichtigt werden soll, bleibt dies ohne Bedeutung. Die Ausdrücke (90) und (91) bleiben daher unverändert, und aus diesen sind ja alle Formeln für die Koeffizienten Z usw. hergeleitet. Nur muß daran erinnert werden, daß auch δ_{mc} und δ_{cc} der geänderten Bedeutung von X_c entsprechend zu berechnen sind.

Formbestimmung. Wenn es sich darum handelt, eine wirtschaftlich günstige Konstruktion anzugeben, kann das ganze System nach der Stützlinie zur „Normalbelastung“ $(g + \frac{1}{2}p)$ geformt werden oder, vielleicht etwas weniger gut, zur ruhenden Belastung g allein. Hiermit soll nicht nur ausgedrückt werden, daß die einzelnen Bogenachsen nach diesen Stützlinien zu gestalten sind, sondern auch daß die Resultierende der Stützendrücke zweier zusammenstoßenden Bogen für die gewählte Normalbelastung in die Mittellinie des Zwischenpfeilers fallen darf. Letztere Bedingung kann, wenn die Zwischenpfeiler wie gewöhnlich lotrecht sein sollen, dadurch erfüllt werden, daß die Pfeilhöhen der zusammenstoßenden Bogen so einander angepaßt werden, daß die Horizontalschübe gleich groß werden. Bisweilen kann jedoch auch

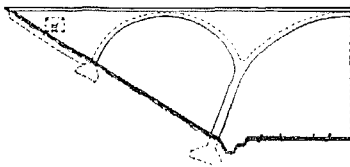


Abb. 23.

davon die Rede sein, die Zwischenstützen schräg zu stellen¹⁾, wodurch größere Freiheit erreicht wird (siehe Abb. 23); die Berechnung einer solchen Konstruktion wird jedoch ein wenig komplizierter als oben entwickelt, weil die Z -Stäbe ($Z_r, Z_s \dots$) senkrecht zu den Stützen hinzugefügt werden müssen und die Verschiebungen $\zeta_r, \zeta_s \dots$ daher nicht wagerecht sind.

Schließlich würde es bei größeren Bögen auch von Vorteil sein, eine Korrektur der Bogenform vorzunehmen, um die von der Zusammendrückung der Bogenelemente herrührenden Anfangsmomente möglichst zu verkleinern oder diese wenigstens vom Bogenscheitel

¹⁾ Abb. 23 zeigt schematisch eine Wegeführung der dänischen Staatsbahnen bei Tolne im nördlichen Jütland. Die Konstruktion ist von Oberingenieur Forchhammer in Fa. Christiani & Nielsen (Kopenhagen) angegeben und von der genannten Firma ausgeführt.

Überhaupt ist die Anwendung der hier behandelten durchgehenden Bogen auf elastischen Zwischenpfeilern nicht auf hohe Viaduktanlagen beschränkt; auch für gewöhnliche Über- und Unterführungen eignet sich die Konstruktion sehr gut. Von den dänischen Staatsbahnen sind z. Z. schon etwa 30 solche Brücken, mit 2 bis 5 Bögen, ausgeführt, davon 2 gleisragend, weitaus die meisten seit 1919. Eine der bedeutendsten ist die unten im Beispiel 9 (Abb. 24) behandelte Brücke.

zu entfernen und zu anderen Querschnitten, wo deren Aufnahme mit weniger Materialaufwand bewerkstelligt werden kann, zu überführen. Das Nähere über die Ausführung einer solchen Korrektur für einen beiderseits fest eingespannten Bogen ist vom Verf. in „Beton und Eisen 1923“, S. 175 angegeben. Bei der Anwendung sollte hier eigentlich darauf Rücksicht genommen werden, daß das positive Moment im Scheitel beim kontinuierlichen Bogen gewöhnlich größer werden wird als im eingespannten Bogen; selbst wenn hiervon abgesehen wird (jedenfalls wird es wohl nur annäherungsweise ausführbar sein, hierauf Rücksicht zu nehmen), darf mit Sicherheit davon ausgegangen werden, daß eine ökonomischere Konstruktion durch die Korrektur erreicht wird, da auch das von der Normalbelastung hervorgerufene Moment im Scheitel positiv ist.

In vielen Fällen wird die Stärke der Zwischenpfeiler (oder deren höchstens zulässige Stärke) durch die lokalen Verhältnisse bestimmt sein, und es kann dann wünschenswert erscheinen, sich im voraus einen Begriff davon bilden zu können, welchen Einfluß eine Änderung dieser Stärke auf die Dimensionen der Bogen ausüben wird, oder ob es überhaupt möglich ist, sich mit der höchstens zulässigen Stärke zu begnügen. In anderen Fällen kann es eine rein ökonomische Frage sein, welche Stärke der Zwischenpfeiler zu wählen ist; eine Abnahme der Steifigkeit der Pfeiler bringt natürlich eine Zunahme der Bogenabmessungen, namentlich des Scheitelquerschnitts, mit sich.

Einen solchen ungefähren Begriff kann man sich mit Hilfe der folgenden empirischen Formel bilden. Diese ist ursprünglich für eine Konstruktion mit drei Öffnungen auf Grundlage von zahlreichen ausgeführten Zahlenrechnungen aufgestellt¹⁾:

$$\frac{J^h}{J_c} = \frac{\left(1 - \alpha - \frac{1}{2} \alpha \frac{\delta''_{cc}}{\delta'_{cc}}\right) h^2 l}{6 \alpha \delta''_{cc}}, \quad (116)$$

wo

J^h = Trägheitsmoment der Zwischensäule, } beide pro 1 lfd. m
 J_c = „ des Scheitelquerschnitts, } der Breite,
 h = Höhe des Zwischenpfeilers,
 l = Spannweite der Mittelöffnung,

δ'_{cc} und δ''_{cc} haben die in den obigen Berechnungen benutzten Bedeutungen, d. h. es sind die Koeffizienten zu X_c für den linken und rechten Bogen (Seiten- und Mittelöffnung) als voll eingespannt betrachtet; als „Faktor“ ist hier jedoch nur EJ_c eingeführt,

¹⁾ Von Ingenieur Dozent A. Engelund.

α ein Zahlenkoeffizient, der gewöhnlich zwischen 0,1 und 0,25 liegen wird, für kleine Öffnungsweiten und hohe, schlanke Zwischenpfeiler jedoch vielleicht bis höchstens 0,5 steigen kann.

Die Formel wird so angewandt, daß man, nach Berechnung jedes Bogens für sich als fest eingespannt, versuchsweise einige verschiedene Werte von α einführt und das entsprechende J^h und die Stärke b des Zwischenpfeilers berechnet. Hat man so einen passenden Wert von α wählen können, ist die Berechnung zu korrigieren, indem man den Bogen nochmals dimensioniert, wobei für den Scheitelquerschnitt eine reduzierte zulässige Beanspruchung, etwa $(1 - \frac{1}{2}\alpha)$ mal der gewöhnlichen, zu benutzen ist.

Die Formel kann auch annäherungsweise für eine größere Felderzahl angewandt werden. Für zwei gleiche Felder wird besser gesetzt:

$$\frac{J^h}{J_c} = \frac{(1 - 2\alpha)h^2 l}{12\alpha\delta_{cc}} \tag{116a}$$

Um einen Begriff davon zu geben, welche Übereinstimmung mit diesen Formeln erwartet werden kann, werden hier einige Ergebnisse von Zahlenrechnungen aufgeführt.

b = Stärke der Zwischenpfeiler	Mit den Ausgangsgrößen			liefern die Formeln	
	α	$J^h : J_c$	$\frac{b}{m}$	$J^h : J_c$	$\frac{b}{m}$
Brücke für „Frederiks Allé“, Aarhus (siehe das folgende Zahlenbeisp.)	0,1	54	1,70	39	1,53
	0,25	11	1,00	11	1,00
Überführung über Bhf. Ringsted (4 Öffn. à $l = 10,0$ m, $f = 2,0$ m)	0,5	9	0,52	10,2	0,54
Brücke mit 2 Öffn. à $l = 11,5$ m, $f = 3,3$ m	0,12	27	0,75	18	0,66
	0,18	8	0,50	10	0,54
„ „ „ „ „ „ „ „ „ „ „ „	0,3	8	0,50	13,5	0,59
„ „ 2 „ à $l = 10,0$ m, $f = 2,0$ m .					

Beispiel 9.

Für die in Abb. 24 schematisch gezeigte „Frederiks Bro“ in Aarhus sollen die Einflußlinien ermittelt werden.

Indem die Seitenbogen in 10 Felder mit $\lambda = 2,40$ m eingeteilt werden und der Mittelbogen in 12 Felder derselben Größe, und indem der Faktor $E J_c : \lambda^2$ eingeführt wird, wo J_c das Trägheitsmoment des Scheitelquerschnitts (dasselbe für alle drei Bogen) bedeutet, werden zuerst für jeden einzelnen Bogen, als beiderseits fest eingespannt betrachtet, die folgenden Größen berechnet (hier genügt es, die Ergebnisse anzuführen):

für die Seitenbogen:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= 3,085 \text{ m,} \\ \delta_{aa} &= \delta_{bb} = 1,0, \\ \delta_{ab} &= 0,586, \\ \delta_{cc} &= 3,36; \end{aligned} \right\} D = 0,656,$$

für den Mittelbogen:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= 3,56 \text{ m,} \\ \delta_{aa} &= \delta_{bb} = 1,08, \\ \delta_{ab} &= 0,657, \\ \delta_{cc} &= 4,42. \end{aligned} \right\} D = 0,736,$$

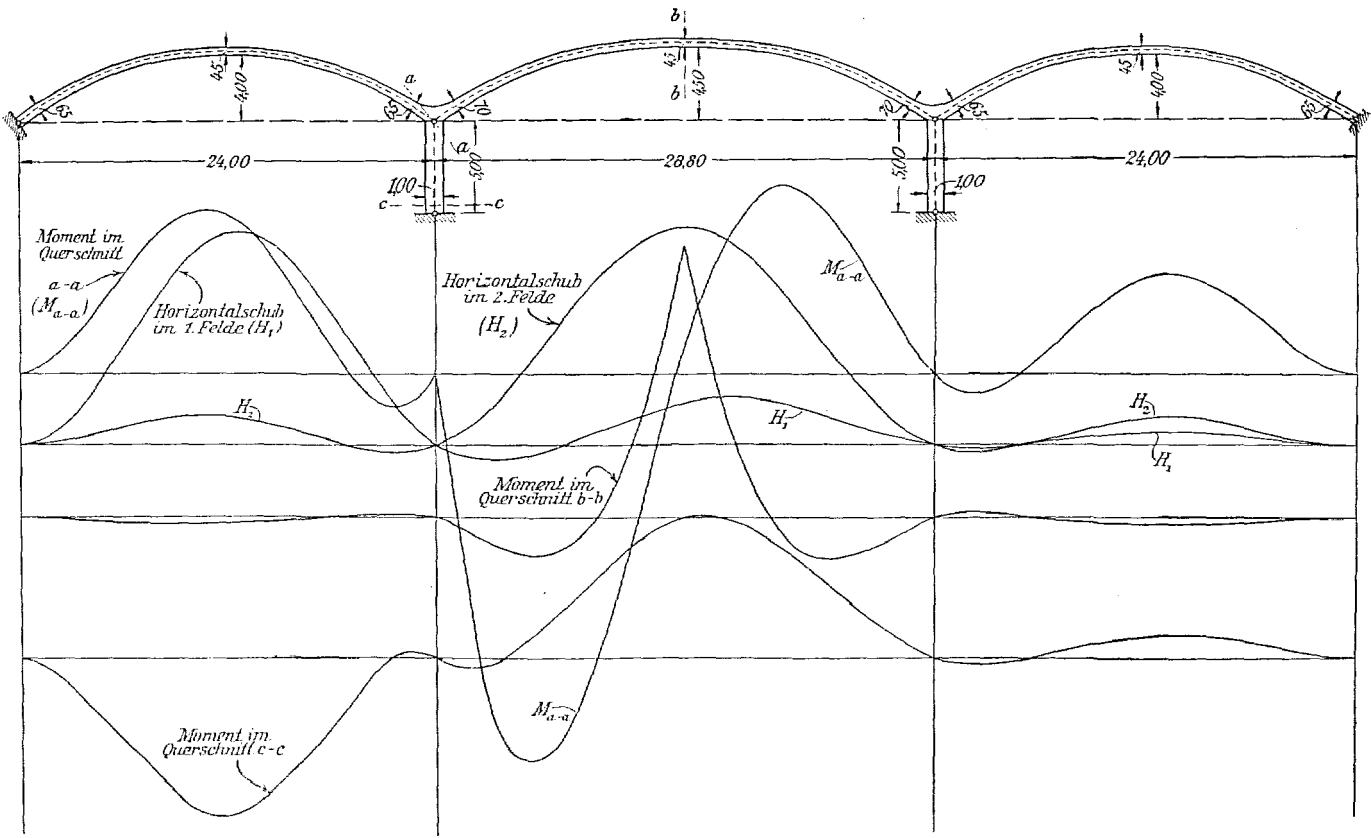


Abb. 24.

Ebenso werden im voraus die Durchbiegungen δ_{ma} , δ_{mb} , δ_{mc} für beide Bogen berechnet; da aber die Zahlenrechnungen hier nur bis zu dem Punkte geführt werden sollen, wo diese Werte einzuführen wären, ist es nicht notwendig, dieselben hier anzugeben.

Mit dem Faktor $K = EJ_c : \lambda^3$ ist weiter für die Zwischensäulen:

$$\mu = \frac{EJh}{h \cdot K} = \frac{E \cdot 1,0^3 \cdot 2,4^2}{5,0 \cdot E \cdot 0,45^3} = 12,68.$$

Es handelt sich nun zuerst darum, die in (112) benutzten Koeffizienten α , β , γ zu berechnen, d. h. die Werte von X_a , X_b , X_c in den verschiedenen Feldern, die den Belastungen $Z_{b_0} = 1$, $Z_{s_0} = 1$, $Z_{c_0} = 1$ und $Z_{t_0} = 1$ entsprechen. Wegen der Symmetrie und der kleinen Öffnungszahl wird hier vorgezogen, diejenige Methode zu benutzen, wonach alle vier Gleichungen auf einmal aufgestellt werden. Als Kontrolle soll dann auch die Anwendung der stufenweisen Berechnung für einen einzelnen Belastungsfall gezeigt werden.

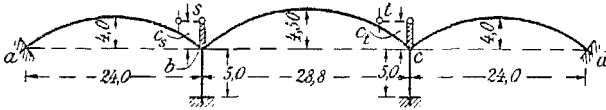


Abb. 25.

Die Koeffizienten der Unbekannten ζ . Mit den Bezeichnungen in Abb. 25 wird gewählt: $c_s = c_t = \eta$ (für die Mittelöffnung) = 3,56 m. Nach (108) wird dann für die in den Gleichungen $Z_b = 0$ und $Z_s = 0$ eingehenden Koeffizienten erhalten, indem $c_s = c_t = \eta''$ und $c_s - \eta' = 0,475$ m:

$$Z'_{bc} = \frac{0,657}{0,736} = 0,893;$$

$$Z'_{bb} = \frac{1,0}{0,656} + \frac{0,475^2}{3,36} + \frac{1,08}{0,736} + 4 \cdot 12,68 \left[1 + 3 \cdot \frac{3,56}{5,0} \left(1 + \frac{3,56}{5,0} \right) \right] = 239,252;$$

$$Z'_{bs} = -\frac{0,475}{3,36} - 0 - \frac{6 \cdot 12,68}{5,0} \left(1 + 2 \cdot \frac{3,56}{5,0} \right) = -37,024;$$

$$Z'_{st} = -\frac{1}{4,42} = -0,226;$$

$$Z'_{ss} = \frac{1}{3,36} + \frac{1}{4,42} + \frac{12 \cdot 12,68}{5,0^2} = 6,610.$$

Die vier Gleichungen lauten somit (die dritte und vierte ergeben sich mit Hilfe der Symmetrie):

$$1. \quad Z_b = 0 = Z_{b_0} - 239,252 \zeta'_b - 0,893 \zeta'_c + 37,024 \zeta'_s;$$

$$2. \quad Z_s = 0 = Z_{s_0} - 6,610 \zeta'_s + 0,226 \zeta'_t + 37,024 \zeta'_b';$$

$$3. \quad Z_c = 0 = Z_{c_0} - 0,893 \zeta'_b' - 239,252 \zeta'_c' + 37,024 \zeta'_t';$$

$$4. \quad Z_t = 0 = Z_{t_0} + 0,226 \zeta'_s' - 6,610 \zeta'_t' + 37,024 \zeta'_c';$$

die Auflösung geht sehr einfach vor sich, indem man Nr. 1 und 3 und Nr. 2 und 4 addiert und subtrahiert.

Für $Z_{b_0} = 1$, die übrigen Belastungsglieder = 0, findet sich:

$$\zeta'_b' = 0,03292; \quad \zeta'_c' = 0,00649;$$

$$\zeta'_s' = 0,18585; \quad \zeta'_t' = 0,04275,$$

und hieraus weiter nach (90), da die X -Größen = 0 sind:

im Felde $a-b$:

$$\zeta_a' = \zeta_r' = 0;$$

$$\alpha_{1,b} = X_a = -\frac{0,586}{0,656} \zeta_b' = -0,8933 \cdot 0,03292 = -0,0294;$$

$$\beta_{1,b} = X_b = +\frac{1,0}{0,656} \zeta_b' = +1,5244 \cdot 0,03292 = +0,0502;$$

$$\gamma_{1,b} = X_c = \frac{1}{3,36} (-\zeta_s' + 0,475 \zeta_b') = -0,2976 \zeta_s' + 0,1414 \zeta_b' = -0,0506;$$

im Felde $b-c$: in (90) werden a, b, r, s mit b, c, s, t vertauscht:

$$\alpha_{2,b} = X_a = -1,4674 \zeta_b' - 0,8927 \zeta_c' = -0,0541;$$

$$\beta_{2,b} = X_b = +0,8927 \zeta_b' + 1,4674 \zeta_c' = +0,0389;$$

$$\gamma_{2,b} = X_c = \frac{1}{4,42} (\zeta_s' - \zeta_t') = +0,0324;$$

im Felde $c-d$: in (90) ist $\zeta_b' = \zeta_s' = 0$ zu setzen und ζ_a' und ζ_r' durch ζ_c' und ζ_t' zu ersetzen:

$$\alpha_{3,b} = X_a = -1,5244 \zeta_c' = -0,0099;$$

$$\beta_{3,b} = X_b = +0,8933 \zeta_c' = +0,0058;$$

$$\gamma_{3,b} = X_c = 0,2976 \zeta_t' - 0,1414 \zeta_c' = +0,0118.$$

Für $Z_{s_0} = 1$, die übrigen Belastungsglieder = 0:

$$\zeta_b' = 0,1860; \quad \zeta_c' = 0,0428;$$

$$\zeta_s' = 1,2028; \quad \zeta_t' = 0,2813,$$

und weiter nach (90):

$$\alpha_{1,s} = -0,1661; \quad \beta_{1,s} = +0,2835; \quad \gamma_{1,s} = -0,3316;$$

$$\alpha_{2,s} = -0,3111; \quad \beta_{2,s} = +0,2288; \quad \gamma_{2,s} = +0,2085;$$

$$\alpha_{3,s} = -0,0652; \quad \beta_{3,s} = +0,0332; \quad \gamma_{3,s} = +0,0777.$$

Aus den so berechneten Werten α, β, γ für $Z_{b_0} = 1$ und $Z_{s_0} = 1$ können die den Belastungen $Z_{c_0} = 1$ und $Z_{t_0} = 1$ entsprechenden Werte mit Hilfe der Symmetrie hergeleitet werden. Hierbei muß man darauf achten, daß X_a und X_b vertauscht werden müssen (X_a im 1. und 2. Felde sind mit X_b im 3. und 2. Felde symmetrisch) und daß überall die Vorzeichen zu ändern sind (es sind die Belastungen $Z_{b_0} = +1$ und $Z_{c_0} = -1$, die symmetrisch sind).

Jetzt lauten nach (112) die Gleichungen der ζ' -Linien:

$$\text{im 1. Felde: } \zeta_b' = +0,0294 \delta_{ma} - 0,0502 \delta_{mb} + 0,0506 \delta_{mc};$$

$$\text{im 2. Felde: } \zeta_b' = +0,0541 \delta_{ma} - 0,0389 \delta_{mb} - 0,0324 \delta_{mc};$$

$$\text{im 3. Felde: } \zeta_b' = +0,0099 \delta_{ma} - 0,0058 \delta_{mb} - 0,0118 \delta_{mc};$$

$$\text{im 1. Felde: } \zeta_s' = +0,1661 \delta_{ma} - 0,2835 \delta_{mb} + 0,3316 \delta_{mc};$$

$$\text{im 2. Felde: } \zeta_s' = +0,3111 \delta_{ma} - 0,2288 \delta_{mb} - 0,2085 \delta_{mc};$$

$$\text{im 3. Felde: } \zeta_s' = +0,0652 \delta_{ma} - 0,0332 \delta_{mb} - 0,0777 \delta_{mc};$$

hieraus können die X -Linien mittels (90) gebildet werden. Beispielsweise sind die X_b - und X_c -Linien der linken Seitenöffnung:

$$X_b = X_b^0 + 1,5244 \zeta_b'; \quad X_c = X_c^0 - 0,2976 \zeta_s' + 0,1414 \zeta_b'.$$

Die Formen einiger der wichtigsten Einflußlinien sind in Abb. 24 dargestellt.

Stufenweise Berechnung der Größen α, β, γ . Man beginnt damit, eine Anzahl Unveränderlicher, die von der Belastung unabhängig sind, zu berechnen, nämlich:

für die linke Seitenöffnung:

$$\tau_a' = 0; \quad \varepsilon_r' = 0; \quad k_a = 0; \quad \delta_{aa}^1 = \delta_{bb} = 1,0; \quad D^1 = 0,656;$$

$$[\delta_{cc}] = \delta_{cc} = 3,36; \quad \mu = 12,68;$$

nach (101):

$$Z'_{ss} = \frac{1}{3,36} + \frac{12 \cdot 12,68}{5,0^2} = 6,384;$$

nach (102):

$$c_s = 3,085 - \frac{1}{6,384} \cdot \frac{6 \cdot 12,68}{5,0} \left(1 + \frac{2 \cdot 3,085}{5,0}\right) = -2,240;$$

nach (97):

$$q_b = \frac{-2,240 - 3,085}{3,36} = -1,585;$$

nach (101):

$$Z'_{bb} = \frac{1,0}{0,656} + 5,325 \cdot 1,585 + 4 \cdot 12,68 \left[1 - \frac{3 \cdot 2,240}{5,0} \left(1 - \frac{2,240}{5,0}\right)\right] = 23,056,$$

und für den Gebrauch bei der Rückwärtsrechnung nach (99), wo die $X^1 = 0$ sind:

$$X_a = -\frac{0,586}{0,656} \zeta_b' = -0,8933 \zeta_b';$$

$$X_b = +\frac{1,0}{0,656} \zeta_b' = +1,5244 \zeta_b';$$

$$X_c = \frac{1}{3,36} \cdot (-\zeta_s') - 1,585 \zeta_b' = -0,2976 \zeta_s' - 1,585 \zeta_b';$$

für die Mittelöffnung:

$$\tau_b' = \frac{1}{23,056} = 0,0433; \quad \varepsilon_s' = \frac{1}{6,384} = 0,1566;$$

$$c_s - \eta = -2,24 - 3,56 = -5,80;$$

$$\delta_{cc}^1 = 4,42 + 0,1566 + 0,0433 \cdot 5,80^2 = 6,036;$$

$$k_a = -\frac{0,0433 \cdot 5,80}{6,036} = -0,0417;$$

$$\delta_{aa}^1 = 1,08 + 0,0433 - 0,0417^2 \cdot 6,036 = 1,133;$$

$$D^1 = 0,793; \quad \frac{1}{[\delta_{cc}]} = \frac{1}{6,036} + \frac{0,0417^2 \cdot 1,08}{0,793} = 0,168;$$

$$Z'_{ll} = 0,168 + \frac{12 \cdot 12,68}{5,0^2} = 6,254;$$

$$c_t = 3,56 - \frac{1}{6,254} \left[-\frac{0,0417 \cdot 0,657}{0,793} + \frac{6 \cdot 12,68}{5,0} \left(1 + 2 \cdot \frac{3,56}{5,0}\right) \right] = -2,332;$$

$$m = 1 - 0,0417 \cdot 5,80 = 0,758;$$

$$n_a = \frac{0,657}{1,08} - 0,0417 (-2,332 - 3,56) = +0,854;$$

$$n_b = \frac{1,133}{0,657} + 0,0417 (-2,332 - 3,56) = +1,972;$$

$$q_a = -5,80 \cdot 0,168 + 0,0417 \cdot \frac{1,08}{0,793} = -0,918;$$

$$q_b = -5,892 \cdot 0,168 - 0,0417 \cdot \frac{0,657}{0,793} = -1,025;$$

$$Z'_{cc} = \frac{0,657}{0,793} \cdot 1,972 + 5,892 \cdot 1,025$$

$$+ 4 \cdot 12,68 \left[1 - 3 \cdot \frac{2,332}{5,0} \left(1 - \frac{2,332}{5,0}\right)\right] = 20,523;$$

und für die Rückwärtsrechnung:

$$X_a = +0,0568 (\zeta'_{0s} - \zeta'_t) - 1,0315 \zeta'_{0b} - 1,1631 \zeta'_c;$$

$$X_b = -0,0345 (\zeta'_{0s} - \zeta'_t) + 0,6281 \zeta'_{0b} + 1,6335 \zeta'_c;$$

$$X_c = +0,168 (\zeta'_{0s} - \zeta'_t) + 0,918 \zeta'_{0b} - 1,025 \zeta'_c;$$

für die rechte Seitenöffnung:

$$\tau'_c = \frac{1}{20,523} = 0,0487; \quad \varepsilon'_t = \frac{1}{6,254} = 0,1599;$$

$$c_t - \eta = -2,332 - 3,085 = -5,417;$$

$$\delta_{cc}^1 = 4,949; \quad k_a = -0,0533; \quad \delta_a^1 \alpha = 1,0346; \quad D^1 = 0,692;$$

$$\frac{1}{[\delta_{cc}]} = 0,2062; \quad m = 0,7113; \quad q_a = -1,0403;$$

$$X_a = +0,0766 \zeta'_{0t} - 1,0220 \zeta'_{0c};$$

$$X_b = -0,0449 \zeta'_{0t} + 0,5989 \zeta'_{0c};$$

$$X_c = +0,2062 \zeta'_{0t} + 1,0403 \zeta'_{0c}.$$

Nach diesen Vorbereitungen geht jetzt die Berechnung für verschiedene Belastungen verhältnismäßig schnell von statten.

Für $Z_{b_0} = 1$ ergibt sich:

im 1. Felde:

$$\zeta'_b = \frac{1}{23,056} = 0,0433; \quad \zeta'_s = 0;$$

im 2. Felde:

$$\zeta'_{0b} = 0,0433; \quad \zeta'_{0s} = 0;$$

$$Z_{c_0} = \left[(-1,025) \cdot (-5,80) - 0,854 \cdot \frac{1,08}{0,793} \right] \cdot 0,0433 = 0,2074;$$

$$Z_{t_0} = 0,918 \cdot 0,0433 = 0,0398;$$

somit:

$$\zeta'_c = \frac{0,2074}{20,523} = 0,0101; \quad \zeta'_t = \frac{0,0398}{6,254} = 0,00636;$$

im 3. Felde:

$$\zeta'_{0c} = 0,0101; \quad \zeta'_{0t} = 0,00636.$$

Hieraus finden sich unmittelbar nach den oben angegebenen Ausdrücken für die Rückwärtsrechnung:

$$X_a = -0,0098; \quad X_b = +0,0058; \quad X_c = +0,0118;$$

und sodann nach (111):

$$\zeta'_c = 0,0101 + 0,0487 (-0,0098 - 5,417 \cdot 0,0118) = +0,0065;$$

$$\zeta'_t = 0,00636 - 0,1599 \cdot 0,0118 = +0,00447;$$

im 2. Felde:

$$\zeta'_{0b} = 0,0433; \quad \zeta'_{0s} = 0;$$

$$X_a = 0,0568 \cdot (-0,00447) - 1,0315 \cdot 0,0433 - 1,1631 \cdot 0,0065 = -0,0525;$$

$$X_b = 0,0345 \cdot 0,00447 + 0,6281 \cdot 0,0433 + 1,6335 \cdot 0,0065 = +0,0380;$$

$$X_c = -0,168 \cdot 0,00447 + 0,918 \cdot 0,0433 - 1,025 \cdot 0,0065 = +0,0324;$$

und nach (111):

$$\zeta'_b = 0,0433 + 0,0433 (-0,0525 - 5,80 \cdot 0,0324) = +0,0329;$$

$$\zeta'_s = 0,1566 \cdot 0,0324 = -0,00507;$$

im 1. Felde:

$$X_a = -0,8933 \cdot 0,0329 = -0,0294;$$

$$X_b = +1,5244 \cdot 0,0329 = +0,0502;$$

$$X_c = -0,2976 \cdot (-0,00507) - 1,585 \cdot 0,0329 = -0,0507.$$

Die hier gefundenen Werte X_a, X_b, X_c für die drei Öffnungen und ebenso die Knotendrehwinkel ζ_b' und ζ_c' stimmen sehr genau mit den oben mittels der Gleichungen berechneten überein. Was dagegen die Verschiebungen ζ_s' und ζ_c' anbelangt, so ist keine solche Übereinstimmung vorhanden, was auch ganz natürlich ist, da höchst verschiedene Werte von c_s und c_c in den beiden Berechnungen benutzt wurden. Indessen müssen selbstverständlich die wagerechten Bewegungen der Knoten b und c selbst gleich groß sein, und dies ist auch hier der Fall, indem:

$$-0,00507 + 2,24 \cdot 0,0329 = +0,0686 = 0,1858 - 3,56 \cdot 0,0329 = +0,0687,$$

und

$$0,00447 + 2,332 \cdot 0,0065 = 0,01963 = 0,04275 - 3,56 \cdot 0,0065 = 0,01961.$$

Wünscht man durch die stufenweise Berechnung die für die Belastung $Z_{s,0} = 1$ gefundenen Werte von ζ unmittelbar zu kontrollieren, muß daher auch eine Belastung eingeführt werden, die wirklich der Belastung $Z_{s,0} = 1$ in der ersten Berechnung gleichwertig ist; und da diese in der Höhe $3,56 + 2,24 = 5,80$ m über dem Z_s -Stab in der stufenweisen Berechnung wirkt, hat man in dieser Rechnung $Z_{s,0} = 1$ und $Z_{b,0} = 1 \cdot 5,80$ als Belastung einzuführen.

10. Mehrstöckige Rahmenkonstruktionen

kommen in sehr vielen verschiedenen Formen vor. Hier soll jedoch nur die in Abb. 26 gezeigte Konstruktion behandelt werden, die ausschließlich aus wagerechten Balken und lotrechten Säulen, mit steifen Verbindungen in allen Knoten besteht, und die sowohl als Gebäudekonstruktion wie als Zwischenstütze für Eisenbeton-Balkenbrücken Verwendung findet. Der obere Abschluß kann mit Rücksicht auf die Dachkonstruktion etwas unregelmäßig ausfallen, unten werden die Säulen als fest eingespannt angenommen. Es kann von einer lotrechten Belastung der Balken oder von einer wagerechten Belastung der Außenwände die Rede sein.

Die Berechnung nach der Deformationsmethode begegnet keiner prinzipiellen Schwierigkeit; sie wird nur recht beschwerlich, wenn eine korrekte Durchführung verlangt wird und die Zahl der Knoten beträchtlich ist. Es soll daher auch weiter unten darauf eingegangen werden, wie man mittels verschiedener Annäherungen unschwer zu einem brauchbaren Ergebnis gelangen kann.

Die Knotenpunktfigur ist beweglich. Um sie unbeweglich zu machen, ist für jedes Stockwerk ein Z -Stab erforderlich. Diese Z -Stäbe werden hier, wie in Abb. 26 punktiert angegeben, hinzugefügt und wie gewöhnlich mit r, s, t, \dots bezeichnet. Doch sollen im folgenden Z_r, Z_s, \dots die wagerechten Komponenten der Diagonalspannkräfte und ζ_r, ζ_s, \dots somit die wagerechten Projektionen der Diagonalverlängerungen bezeichnen.

Genaueres Verfahren. Wie früher wird die Berechnung derart geteilt, daß:

1. alle diejenigen Knotendrehwinkel ($\zeta_a, \zeta_b \dots$) ermittelt werden, die von der äußeren Belastung hervorgerufen werden, wenn dieselbe auf die unbeweglich gemachte Konstruktion einwirkt ($\zeta_r = \zeta_s = \dots = 0$); diese Winkel sollen mit $\zeta_{a0}, \zeta_{b0} \dots$ bezeichnet werden;

2. alle diejenigen Knotendrehwinkel ermittelt werden, die den „Belastungen“ $\zeta_r = -1, \zeta_s = -1 \dots$ entsprechen; diese werden im folgenden mit $\zeta_{ar}, \zeta_{br} \dots \zeta_{as} \dots$ bezeichnet;

3. die Knotendrehwinkel in der Form geschrieben werden:

$$\zeta_a = \zeta_{a0} - \zeta_{ar} \zeta_r - \zeta_{as} \zeta_s \dots; \quad (117)$$

4. die Verschiebungen $\zeta_r, \zeta_s \dots$ durch die besonderen Gleichungen bestimmt werden, die für die Z-Stäbe aufgeschrieben werden können;

5. hiermit endlich die Knotendrehwinkel ζ bekannt sind [zufolge (117)], und die Momente in den verschiedenen Punkten dann nach (7) auszurechnen sind.

Zur Durchführung der Berechnung unter 1. hat man eine Gleichung für jeden Knoten, beispielsweise für den Knoten b in Abb. 26:

$$Z_b = 0 = Z_{b0} - 4\zeta_b' \sum \mu_{bp} - 2 \sum \mu_{bp} \zeta_p', \quad p = a, e, c, h. \quad (118)$$

Gewöhnlich enthält jede Summe 4 Glieder, für die Umrißknoten jedoch nur 3, und für die beiden Knoten in den oberen Ecken nur deren 2; endlich kommen in der letzten Summe der Knotengleichungen für die unterste Balkenlage (z. B. k in Abb. 26) nur 3 Glieder vor, indem für die Einspannungen $\zeta_p = 0$ ist. — Das Belastungsglied ist:

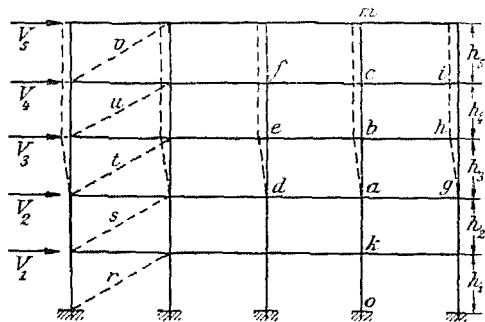


Abb. 26.

für lotrechte Belastung:

$$Z_{b0} = - \sum M_{bp}^0;$$

für Winddruck (in den äußeren Knoten konzentriert):

$$Z_{b0} = 0;$$

(118a)

M_{bp}^0 bedeutet das Einspannungsmoment bei b für den beiderseits eingespannten Balken $b - p$.

In den Berechnungen unter 2. werden die nämlichen Gleichungen (118) benutzt, indem nur Z_{b0} durch $Z_{br}, Z_{bs} \dots$ ersetzt wird,

je nachdem der Zustand $\zeta_r = -1$, $\zeta_s = -1 \dots$ behandelt werden soll. Nach (31) in Kap. 5 ist:

$$Z'_{br} = 6 \sum \mu_{bp} \psi'_{b,p,r}; \quad p = a, e, c, h \text{ (Abb. 26)}, \quad (119)$$

wobei ψ' den Drehwinkel des Balkens (der Säule) $b - p$ bezeichnet, der von $\zeta'_r = -1$ hervorgerufen wird. In Abb. 26 ist die durch $\zeta'_t = -1$ bewirkte Formänderung punktiert gezeigt; die Winkel ψ'_t sind gleich $-\frac{1}{h_3}$ für alle Säulen des dritten Stockwerks, sonst überall gleich Null.

Die Gleichungen unter 4 zur Bestimmung von $\zeta_r, \zeta_s \dots$ können geschrieben werden, entweder:

$$Z_r = 0 = Z_{r,0} - Z'_{ar} \zeta'_a - Z'_{br} \zeta'_b \dots - Z'_{rr} \zeta'_r - Z'_{rs} \zeta'_s \dots$$

oder:

$$Z_r = 0 = Z_{r,0} - Z'_{rr} \zeta'_r - Z'_{rs} \zeta'_s \dots \quad (120)$$

Die zweite Form, die hier vorgezogen werden soll, entspricht ganz der Anwendung eines statisch unbestimmten Hauptsystems nach der Kraftmethode, und die Größen $Z_{r,0}, Z'_{rr}, Z'_{rs} \dots$ haben daher natürlich eine andere Bedeutung wie in der ersten Gleichung. So ist $Z_{r,0}$ diejenige Spannkraft des Z_r -Stabes, die von der äußeren Belastung hervorgerufen wird, wenn diese auf ein System einwirkt, wozu alle Verlängerungen der Z -Stäbe Null sind, von den Knotendrehwinkeln $\zeta'_a, \zeta'_b \dots$ aber nichts gegeben ist; ebenso sind $Z'_{rr}, Z'_{rs} \dots$ die Spannkraft der Z -Stäbe, die den Zuständen $\zeta_r = -1, \zeta_s = -1 \dots$

entsprechen, wenn die Verlängerungen aller übrigen Z -Stäbe gleich Null sind und über $\zeta'_a, \zeta'_b \dots$ nichts gegeben ist.

Indessen sind schon unter 1. und 2. die diesen verschiedenen Zuständen entsprechenden Werte von $\zeta'_a, \zeta'_b \dots$ ermittelt worden, nämlich unter 1. die Werte $\zeta'_{a0}, \zeta'_{b0} \dots$, unter 2. $\zeta'_{ar}, \zeta'_{br} \dots \zeta'_{as}$, und es ist hiernach nicht

schwer, die erwähnten Spannkraft $Z_{r,0}, Z'_{rr} \dots$ zu finden. Wird nämlich in Abb. 27 ein wagerechter Schnitt gelegt, der den Z_t -Stab und alle Säulen desselben Stockwerks überschneidet, so ergibt sich aus der Gleichgewichtsbedingung für den über dem Schnitt gelegenen Teil des Systems:

$$Z_t = Q_3 + \sum \frac{M_{ab} + M_{ba}}{h_3}$$

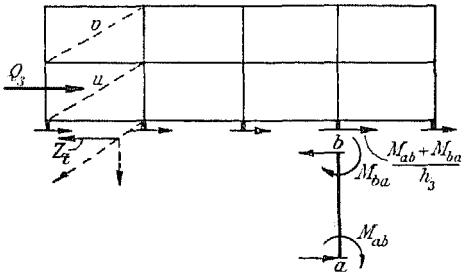


Abb. 27.

indem Q_3 die von der äußeren Belastung herrührende wagerechte Querkraft im dritten Stockwerk, positiv nach rechts, bedeutet; für ausschließlich lotrechte Belastung ist $Q_3 = 0$. Wenn die Momente M_{ab} und M_{ba} hier durch die Knotendrehwinkel ausgedrückt werden (mittels (7)), erhält man:

$$Z_t = Q_3 + \frac{6}{h_3} \sum \mu_{ab} (\zeta'_a + \zeta'_b - 2\psi'_{ab}); \quad (121)$$

die Summenbildung ist über alle Säulen des „t-Stockwerks“ auszudehnen.

Aus (121) werden die speziellen Werte $Z_{t0}, Z'_{tr} \dots$ hergeleitet, wenn diejenigen Werte von ζ und ψ eingeführt werden, die jedem dieser Zustände entsprechen.

Sind sowohl Konstruktion wie Belastung symmetrisch, werden alle Verlängerungen der Z-Stäbe gleich Null und die unter 1. gefundenen Knotendrehwinkel sind sofort die richtigen.

Lotrechte Belastung. Ist eine genaue Klärung über die gefährlichste Belastung erwünscht, können an und für sich un schwer die Einflußlinien ermittelt werden, oder man kann sich wenigstens einen Begriff von deren Verlauf bilden. Beispielsweise ist die Einflußlinie für ζ_a in Abb. 28 diejenige Durchbiegungsfigur, die einem Momente $Z_{a0} = 1$ als einziger Belastung entspricht; hat man mittels der Berechnungen unter 1. bis 4. die von dieser Belastung bewirkten Drehwinkel ζ ermittelt, so können die Durchbiegungslinien der einzelnen Balken und Säulen genau wie in Kap. 6 hergeleitet werden.

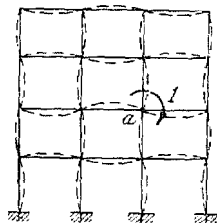


Abb. 28.

Gewöhnlich wird man sich mit einem ungefähren Begriff von der gefährlichsten Belastung begnügen können. Einen solchen zu erhalten, wird durch die folgenden Bemerkungen erleichtert: von größerer Bedeutung ist nur die Belastung der nächst gelegenen Felder; die Wirkung nimmt rasch mit dem Abstände vom betrachteten Querschnitt ab; die für gewöhnliche durchgehende Träger bekannten Regeln können annäherungsweise auf die Balken derselben Balkenlage angewandt werden.

Winddruck. Die äußeren Kräfte können gewöhnlich genau genug in den Knoten konzentriert angenommen werden, wenn von den Beanspruchungen der ganzen Konstruktion die Rede ist. In der Berechnung unter 1. sind dann nach (118a) alle $Z_{a0} = 0$; man findet daher $\zeta_{a0} = \zeta_{b0} = \dots = 0$, so daß diese ganze Berechnung fortfällt. Hieraus und aus (121) folgt dann weiter, daß die Belastungsglieder in den Gleichungen (120) einfach lauten (Abb. 26):

$$Z_{t0} = Q_3, \quad Z_{s0} = Q_2, \dots \quad (121a)$$

Annäherungsberechnung. Wenn es sich darum handelt, Erleichterungen der Berechnung anzugeben, kommt es in erster Linie darauf an, die Auflösung der Gleichungen (118) zu vereinfachen, da diese sowohl für den Zustand $\zeta_r = \zeta_s = \dots = 0$ wie für die Zustände $\zeta_r = -1$, $\zeta_s = -1 \dots$ angewandt werden. Wir beginnen mit den letztgenannten „Belastungen“ (die Berechnung unter 2.).

Belastung $\zeta'_i = -1$. Die Gleichungen (118) mit den Belastungsgliedern nach (119) lauten hier, nach Weglassung des Faktors 2, siehe Abb. 26, wo die $\zeta'_i = -1$ entsprechende Formänderung punktiert ist, für die Knoten

in Balkenlage 2:

$$2\zeta'_a \sum \mu_{ap} + \sum \mu_{ap} \zeta'_p = -\frac{3\mu_{ab}}{h_3}, \quad p = k, d, b, g, \quad \left. \vphantom{\sum \mu_{ap} \zeta'_p} \right\} (122)$$

in Balkenlage 3:

$$2\zeta'_b \sum \mu_{bp} + \sum \mu_{bp} \zeta'_p = -\frac{3\mu_{ab}}{h_3}, \quad p = a, e, c, h;$$

in allen übrigen Gleichungen sind die rechten Seiten Null.

Zieht man das möglichst einfache Verfahren vor, und läßt sich dafür gefallen, lieber ein paarmal die Rechnung zu wiederholen, kann als erste Annäherung gesetzt werden:

$$\sum \mu_{ap} \zeta'_p = \zeta'_a \sum \mu_{ap}; \quad \sum \mu_{bp} \zeta'_p = \zeta'_b \sum \mu_{bp},$$

womit erhalten wird,

$$\left. \begin{array}{l} \text{in Balkenlage 2:} \quad \zeta'_{at} = -\frac{\mu_{ab}}{\sum \mu_{ap}} \cdot \frac{1}{h_3}, \quad p = k, d, b, g, \\ \text{in Balkenlage 3:} \quad \zeta'_{bt} = -\frac{\mu_{ab}}{\sum \mu_{bp}} \cdot \frac{1}{h_3}, \quad p = a, e, e, h, \\ \text{sonst überall:} \quad \zeta'_{kt} = 0. \end{array} \right\} (123)$$

Die so erhaltenen Werte werden in das zweite Glied der linken Seite der Gl. (122) eingeführt; durch eine neue Auflösung ergibt sich dann eine Reihe verbesserter Werte, die in vielen Fällen schon genau genug sein werden; ob dies der Fall ist, kann durch eine dritte Auflösung konstatiert werden.

Eine etwas bessere Annäherung, die oft ohne Korrektion hinlänglich genau sein wird, kann in folgender Weise erreicht werden. Wenn von dem betrachteten Knoten (a in Abb. 26) ein Balken oder eine Säule nach einem unbelasteten Knoten (k) hinläuft, und wenn auch die nächstliegenden Knoten jenseits k unbelastet sind, kann ein einfaches Verhältnis zwischen den Drehungen ζ_a und ζ_k angegeben werden (ein „unbelasteter“ Knoten bedeutet hier einen solchen, für

den das Belastungsglied in der Knotengleichung Null ist). Nach der Grundgleichung (7) ist nämlich für einen solchen Balken $a - k$:

$$M_{ka} = 2\mu_{ak}(\zeta'_a + 2\zeta'_k),$$

und wenn hier $\zeta'_k = -\tau'_k M_{ka}$ gesetzt wird (der Knoten k wird also allein durch den Balken $a - k$ auf Drehung beansprucht angenommen), ergibt sich:

$$-\zeta'_k = 2\mu_{ak}\tau'_k(\zeta'_a + 2\zeta'_k)$$

oder

$$\zeta'_k = -\frac{2\mu_{ak}\tau'_k}{1 + 4\mu_{ak}\tau'_k} \cdot \zeta'_a = -\tau_k \zeta'_a. \quad (124)$$

Hier bedeutet τ'_k den von einem Momente 1 verursachten Drehwinkel des Knotens k , nachdem der Balken $a - k$ entfernt ist. Dieser Winkel hängt natürlich von den Einspannungsverhältnissen am anderen Ende der drei von k ausgehenden Balken ab. Indessen ist die Bedeutung von etwaigen Verschiedenheiten hierin nicht besonders groß; mit fester Einspannung der anderen Balkenenden ist

$\tau'_k = \frac{1}{4 \sum \mu}$, für freie Drehbarkeit $\tau'_k = \frac{1}{3 \sum \mu}$, so daß

$$\frac{1}{3 \sum \mu} > \tau'_k > \frac{1}{4 \sum \mu}, \quad (124a)$$

wo $\sum \mu$ die Summe der Steifigkeitsbeiwerte der (drei) von k ausgehenden Balken bezeichnet. Ist beispielsweise für die Balken $\mu = 1$, für die Säulen $\mu = \frac{1}{2}$, so wird τ'_k zwischen $\frac{1}{7,5}$ und $\frac{1}{10}$ liegen; es ist daher nicht schwer, einen ziemlich genauen Wert von τ'_k zu schätzen und so das annäherungsweise richtige Verhältnis $\zeta'_k : \zeta'_a$ nach (124) zu erhalten. Im ganzen wird sich τ'_k nicht viel von Knoten zu Knoten ändern, so daß man sich ein für allemal ein paar Durchschnittswerte bilden kann. Die Hauptfrage hierbei ist, ob $\sum \mu$ in (124a) über 2 Säulen + 1 Balken oder aber über 2 Balken + 1 Säule ausgedehnt werden soll. Für die Umrißknoten faßt $\sum \mu$ nur 2 Glieder in sich.

Setzt man jetzt in den Gleichungen (122):

$$\zeta'_a = \zeta'_d = \zeta'_g = \dots = \zeta'_b = \zeta'_e = \zeta'_h = \dots$$

und drückt die Winkel ζ für die höheren und niedrigeren Balkenlagen mittels (124) aus, so findet man:

$$\left. \begin{aligned} \zeta'_{at} [3 \sum \mu_{ap} - (1 + \tau_k) \mu_{ak}] &= -\frac{3 \mu_{ab}}{h_3}, & p = k, d, b, g, \\ \zeta'_{bt} [3 \sum \mu_{bp} - (1 + \tau_c) \mu_{bc}] &= -\frac{3 \mu_{ab}}{h_3}, & p = a, e, c, h. \end{aligned} \right\} (125)$$

Hiermit sind alle ζ' der Balkenlagen 2 und 3 bekannt; in der nächsten Balkenlage nach unten sind sie $-\alpha_k \zeta'_a$, in der nächsten nach oben $-\alpha_c \zeta'_b$, in der folgenden $+\alpha_c \alpha_m \zeta'_b$ usw. (die Indizes beziehen sich auf die Knotenbezeichnungen in Abb. 26). Selbstverständlich können auch diese Werte durch eine Umrechnung verbessert werden, indem die zuerst gefundenen ζ' in das zweite Glied der linken Seite in (122) eingeführt werden.

Die Koeffizienten der Gl. (120) können jetzt mit Hilfe der gefundenen ζ' gebildet werden. So ergibt sich nach (121):

$$Z'_{it} = \frac{6}{h_3} \sum \mu_{ab} (\zeta'_{at} + \zeta'_{bt} - 2 \psi'_{ab,t});$$

wenn hier die Werte von ζ'_{at} und ζ'_{bt} aus (123) eingeführt werden und $\psi'_{ab,t} = -\frac{1}{h_3}$ gesetzt wird, folgt:

$$\begin{aligned} Z'_{it} &= \frac{6}{h_3} \sum \mu_{ab} \left(-\frac{\mu_{ab}}{\sum \mu_{ap}} \cdot \frac{1}{h_3} - \frac{\mu_{ab}}{\sum \mu_{bp}} \cdot \frac{1}{h_3} + \frac{2}{h_3} \right) \\ &= \frac{12}{h_3^2} \sum \mu_{ab} \left[1 - \mu_{ab} \left(\frac{1}{2 \sum \mu_{ap}} + \frac{1}{2 \sum \mu_{bp}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (126)$$

Weiter wird Z'_{is} erhalten, indem der Winkel ψ in (121) hier gleich Null zu setzen ist und indem ζ'_b in ζ'_a nach (124) ausgedrückt wird:

$$Z'_{is} = \frac{6}{h_3} \sum \mu_{ab} \zeta'_a (1 - \alpha_b) = -\frac{6}{h_2 h_3} \sum \mu_{ab} \mu_{ak} \cdot \frac{1 - \alpha_b}{\sum \mu_{ap}}, \quad (127)$$

und auf dieselbe Weise:

$$Z'_{iu} = -\frac{6}{h_3 h_4} \sum \mu_{ab} \mu_{bc} \cdot \frac{1 - \alpha_c}{\sum \mu_{bp}}, \quad (127a)$$

während die darauf folgenden Z'_{iv} und Z'_{ir} ohne wesentlichen Fehler gleich Null gesetzt werden können. Beispielsweise ist:

$$Z'_{ir} = \frac{6}{h_1 h_3} \sum \mu_{ab} \mu_{k0} \cdot \frac{\alpha_a (1 - \alpha_b)}{\sum \mu_{kp}},$$

wo α_a eine kleine Größe ist.

Vernachlässigt man also Z'_{ir} und die analogen Werte, so wird erreicht, daß aus (120) ein System von Clapeyronschen Gleichungen hervorgeht, das verhältnismäßig einfach aufzulösen ist. Die Koeffizienten werden nach (126) und (127) berechnet, wo zur ersten Summenbildung jeder Säulenstrang einen Beitrag liefert, während die im Nenner stehende Summe über die verschiedenen Werte von p (vgl. (122)) auszudehnen ist. Z'_{rr} berechnet sich nach (126), wobei jedoch das eine Glied des letzten Klammerausdrucks verschwindet, da der Winkel ζ an der Einspannung Null ist.

Die Belastungsglieder in (120) ergeben sich ebenso nach (121), indem ζ'_a und ζ'_b durch ζ'_{a0} und ζ'_{b0} ersetzt werden und indem $\psi' = 0$. Für Winddruck ist $\zeta'_{a0} = \zeta'_{b0} = 0$ und $Q_3 = V_5 + V_4 + V_3$ (siehe Abb. 26); für lotrechte Belastung ist $Q_3 = 0$.

Will man sich mit einer weniger guten Annäherung begnügen als derjenigen der Clapeyronschen Gleichungen, so kommt in Frage, in (126) das letzte Glied innerhalb der Klammer zu streichen und dementsprechend $Z'_{ts} = Z'_{tu} = 0$ zu setzen, so daß jede Gleichung jetzt nur eine Unbekannte enthält; der Koeffizient dieser Unbekannten, nämlich:

$$Z'_{tu} = \frac{12}{h_3^2} \sum \mu_{ab}, \quad Z'_{ss} = \frac{12}{h_3^2} \sum \mu_{ak}, \quad (128)$$

ist dann der nämliche, wie in der unmittelbar vor (120) aufgeführten Form der Gleichung (vgl. (33) in Kapitel 5).

Bei der Annäherungsberechnung für Winddruck hat man hiernach folgendes zu tun: Die Knotendrehwinkel ζ'_{ar} , ζ'_{as} ... bestimmt man nach (123) oder besser nach (125); ζ'_r , ζ'_s ... werden mittels der Einzelgleichungen, die sich nach (128) ergeben, berechnet oder besser mittels der Clapeyronschen Gleichungen nach (126) und (127); die endgültigen Winkel ζ'_a , ζ'_b ... sind dann durch (117) gegeben.

Für lotrechte Belastung wird es im allgemeinen notwendig werden, einige verschiedene Belastungsfälle zu behandeln. Man denkt sich am besten jedesmal nur eine Balkenlage belastet (abwechselnd in den verschiedenen Feldern) und findet die hierfür geltenden Winkel ζ'_{a0} , ζ'_{b0} ... aus den Clapeyronschen Gleichungen, die sich aus (118) ergeben, wenn in der Gleichung $Z_b = 0$ die beiden hier vorkommenden Winkel ζ_a und ζ_c (siehe Abb. 26) mittels (124) in ζ'_b ausgedrückt werden. Die Gleichung $Z_b = 0$ wird dadurch:

$$2 \mu_{bc} \zeta'_c + (4 \sum \mu_{bp} - 2 \kappa_a \mu_{ba} - 2 \kappa_c \mu_{bc}) \zeta'_b + 2 \mu_{bh} \zeta'_h = Z_{b0}. \quad (129)$$

Als erste Annäherung können dann weiter $\zeta'_r = \zeta'_s = \dots = 0$ gerechnet und somit ohne weiteres die gefundenen Werte ζ'_{a0} , ζ'_{b0} ... als die endgültigen benutzt werden. Der hiermit begangene Fehler hat keine große Bedeutung, wenn die Belastung nicht allzu stark von einer symmetrischen abweicht. — Wünscht man genauer zu rechnen, so sind die Gleichungen (120) zu benutzen, zu Einzelgleichungen oder Clapeyronschen Gleichungen umgeformt, wie oben erklärt; die Belastungsglieder werden nach (121) gebildet, indem hier $\psi' = 0$ gesetzt und für ζ'_a , ζ'_b ... die zuerst gefundenen Werte ζ'_{a0} , ζ'_{b0} ... eingeführt werden.

11. Vierendeel-Balken.

Zur Behandlung dieser Trägerform eignet sich die Deformationsmethode nicht besonders wegen der hochgradigen Beweglichkeit der Knotenpunktfigur. Indessen wird es sich zeigen, daß die Grundgleichungen der Deformationsmethode nichtsdestoweniger auch hier dazu benutzt werden können, um einfacher und schneller zu denjenigen Beziehungen zu gelangen, die der Behandlung der Vierendeel-Träger zugrunde gelegt werden sollen.

An die gewöhnliche, einfachste erste Annäherungsrechnung anschließend, wo Gelenke mitten in jeder Vertikale und in jedem Gurtstück gedacht werden, soll die Behandlung hier folgendermaßen gegliedert werden:

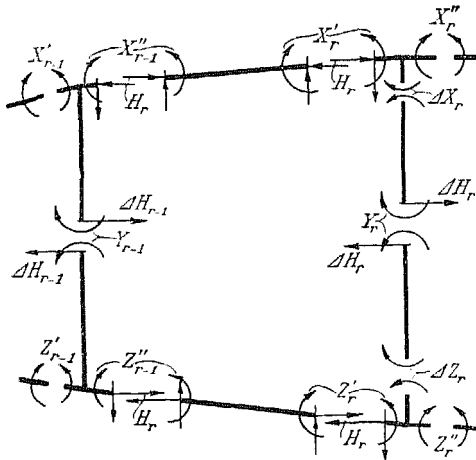


Abb. 29.

Als zweite Annäherungsannahme sollen die gedachten Gelenke in den Vertikalmitten beibehalten werden, die Gelenke in den Gurten dagegen nicht; diese Annahme ist in den meisten Fällen eine äußerst gute Annäherung, bisweilen auch ganz genau, nämlich wenn der Träger mit Rücksicht auf Form und Abmessungen symmetrisch um eine zu den Pfosten senkrechte Achse und nur mit Kräften senkrecht zu dieser Achse belastet ist. Vorausgesetzt ist hierbei jedoch, daß die Belastung nur in den Knoten angreift und daß keine Rücksicht auf die Längenänderungen der Pfosten genommen werden soll; es macht dann keinen Unterschied, ob die halbe Belastung von den Knoten des Obergurts zu denjenigen des Untergurts oder umgekehrt versetzt wird, und somit hat man mit einem spiegelsymmetrischen Belastungsfall zu tun, wo bekanntlich keine Normalspannungen, also auch keine Momente, im Symmetrieschnitt auftreten können. Wie gezeigt werden soll, kommt man mit dieser Annäherung zu einem System Clapeyronscher Gleichungen, mit deren Auflösung die Berechnung erledigt ist.

Als dritte Berechnungsstufe läßt man endlich auch, wenn nötig, die Annahme von Gelenken in den Pfosten fallen. Man kommt

11. Vierendeel-Balken.

Zur Behandlung dieser Trägerform eignet sich die Deformationsmethode nicht besonders wegen der hochgradigen Beweglichkeit der Knotenpunktfigur. Indessen wird es sich zeigen, daß die Grundgleichungen der Deformationsmethode nichtsdestoweniger auch hier dazu benutzt werden können, um einfacher und schneller zu denjenigen Beziehungen zu gelangen, die der Behandlung der Vierendeel-Träger zugrunde gelegt werden sollen.

An die gewöhnliche, einfachste erste Annäherungsrechnung anschließend, wo Gelenke mitten in jeder Vertikale und in jedem Gurtstück gedacht werden, soll die Behandlung hier folgendermaßen gegliedert werden:

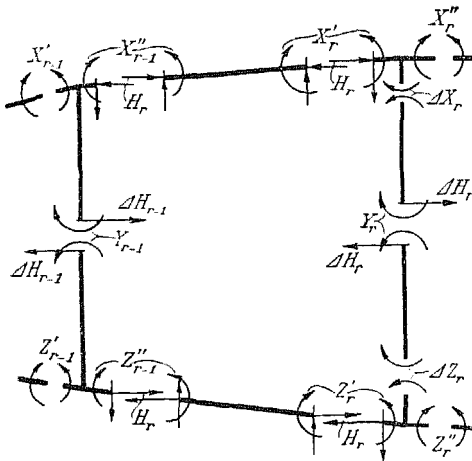


Abb. 29.

Als zweite Annäherungsannahme sollen die gedachten Gelenke in den Vertikalmitten beibehalten werden, die Gelenke in den Gurten dagegen nicht; diese Annahme ist in den meisten Fällen eine äußerst gute Annäherung, bisweilen auch ganz genau, nämlich wenn der Träger mit Rücksicht auf Form und Abmessungen symmetrisch um eine zu den Pfosten senkrechte Achse und nur mit Kräften senkrecht zu dieser Achse belastet ist. Vorausgesetzt ist hierbei jedoch, daß die Belastung nur in den Knoten angreift und daß keine Rücksicht auf die Längenänderungen der Pfosten genommen werden soll; es macht dann keinen Unterschied, ob die halbe Belastung von den Knoten des Obergurts zu denjenigen des Untergurts oder umgekehrt versetzt wird, und somit hat man mit einem spiegelsymmetrischen Belastungsfall zu tun, wo bekanntlich keine Normalspannungen, also auch keine Momente, im Symmetrieschnitt auftreten können. Wie gezeigt werden soll, kommt man mit dieser Annäherung zu einem System Clapeyronscher Gleichungen, mit deren Auflösung die Berechnung erledigt ist.

Als dritte Berechnungsstufe läßt man endlich auch, wenn nötig, die Annahme von Gelenken in den Pfosten fallen. Man kommt

dann zu zwei Systemen von „gemischt-Clapeyronschen“ Gleichungen, deren Auflösung sehr schnell mittels ein paar Proberechnungen bewerkstelligt werden kann.

Die benutzten Bezeichnungen für die Schnittkräfte sowie deren positive Richtungen gehen aus Abb. 29 hervor. Die Momente im Obergurt und Untergurt, unendlich nahe den Knoten, sind X und Z , in den Pfostenmittelpunkten Y , die Querkräfte ebenda ΔH . Da die wagerechten Komponenten der Gurtkräfte H sind, hat man

$$\Delta H_r = H_{r+1} - H_r. \tag{130}$$

Die Bezeichnungen für Feldnummer, Pfosten- und Gurtlängen usw. sind in Abb. 30 angegeben; unten in derselben Abbildung ist die Momentenkurve für die äußere Belastung dargestellt. Die Belastung wird vorläufig lotrecht und mittelbar wirkend angenommen, die Momentenkurve somit geradlinig von Knoten zu Knoten; ihre Ordinaten in den Knoten sind $M_1^0, M_3^0, \dots, M_r^0, \dots$, im Mittelpunkte zwischen zwei Knoten $M_{m,r}^0$, der Ordinatenzuwachs im r -ten Felde ΔM_r^0 . Auf dieselbe Weise ist die Trägerhöhe mitten zwischen zwei Knoten $h_{m,r}$ und der Höhenzuwachs im r -ten Felde Δh_r .

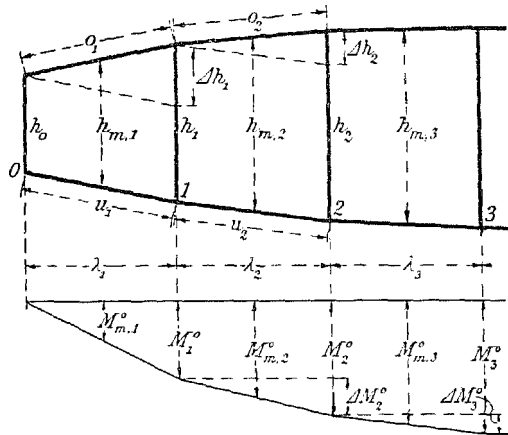


Abb. 30.

Weiter seien die Trägheitsmomente der vier Umrißstäbe des r -ten Feldes $J_r^o, J_r^u, J_{r-1}^h, J_r^h$, und es sollen die Abkürzungen gebraucht werden:

$$o_r' = \frac{J_c}{J_r^o} \frac{o_r}{\lambda_c}; \quad u_r' = \frac{J_c}{J_r^u} \frac{u_r}{\lambda_c}; \quad h_r' = \frac{J_c}{J_r^h} \frac{h_r}{\lambda_r}, \tag{131}$$

wo J_c ein konstantes Trägheitsmoment und λ_c eine konstante Länge, z. B. die Feldlänge, falls dieselbe konstant, bezeichnet; die Größen o', u', h' sind Zahlenwerte und gleich den reziproken Werten der im vorhergehenden benutzten Steifigkeitsbeiwerte μ .

Endlich wird zur Abkürzung gesetzt:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_r &= \frac{u_r'}{o_r' + u_r'}; & \epsilon_r &= 1 - 2\alpha_r = \frac{o_r' - u_r'}{o_r' + u_r'}; \\ \beta_r' &= \frac{2h_r'}{o_r' + u_r'}; & \beta_r'' &= \frac{2h_r'}{o_{r+1}' + u_{r+1}'} \end{aligned} \right\} \tag{132}$$

Wir beginnen damit, einige allgemeine Beziehungen zwischen den Schnittkräften in Abb. 29 herzuleiten. Wenn die Drehwinkel der Ober- und Untergurtnoten ζ^o bzw. ζ^u genannt werden, kann nach (7) in Kapitel 3 für den r -ten Pfosten (dessen Steifigkeitsbeiwert μ sei) aufgeschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} \Delta Z_r &= 2\mu(2\zeta_r^u + \zeta_r^o - 3\psi_r^h), \\ -\Delta X_r &= 2\mu(\zeta_r^u + 2\zeta_r^o - 3\psi_r^h), \end{aligned} \right\} \Delta X_r + \Delta Z_r = 2\mu(\zeta_r^u - \zeta_r^o),$$

und da $\Delta X_r + \Delta Z_r = 2Y_r$ und $\mu = \frac{1}{h_r'}$:

$$h_r' Y_r = \zeta_r^u - \zeta_r^o; \quad h_{r-1}' Y_{r-1} = \zeta_{r-1}^u - \zeta_{r-1}^o. \quad (133)$$

Ebenso hat man für den Ober- und für den Untergurt des r -ten Feldes, indem die Steifigkeitsbeiwerte hier $\frac{1}{o_r'}$ und $\frac{1}{u_r'}$ sind:

$$\left. \begin{aligned} o_r' X_r' &= 2(\zeta_{r-1}^o + 2\zeta_r^o - 3\psi_r^o); \\ u_r' Z_r' &= 2(\zeta_{r-1}^u + 2\zeta_r^u - 3\psi_r^u); \end{aligned} \right\} \quad (134)$$

die Stabdrehwinkel ψ sind gleich dem Unterschied zwischen den lotrechten Durchbiegungen der beiden Knoten im Ober- bzw. Untergurt, durch die wagerecht gemessene Feldlänge dividiert. Da die Durchbiegungen für den Ober- und Untergurt gleich sind, wenn von den Längenänderungen der Pfosten abgesehen wird, was immer im folgenden geschehen soll, muß werden: $\psi_r^o = \psi_r^u$. Durch Subtraktion der beiden Gleichungen (134) ergibt sich daher:

$$o_r' X_r' - u_r' Z_r' = 2(\zeta_{r-1}^o - \zeta_{r-1}^u) + 4(\zeta_r^o - \zeta_r^u),$$

und somit durch Verbindung mit (133):

$$o_r' X_r' - u_r' Z_r' = -2h_{r-1}' Y_{r-1} - 4h_r' Y_r. \quad (134a)$$

Auf dieselbe Weise wird für das $(r+1)$ -te Feld hergeleitet:

$$o_{r+1}' X_{r+1}'' - u_{r+1}' Z_{r+1}'' = +4h_r' Y_r + 2h_{r+1}' Y_{r+1}. \quad (134b)$$

Werden jetzt zwei lotrechte Schnitte unendlich nahe links und rechts dem r -ten Pfosten gelegt, dann erfordert das Gleichgewicht zwischen den äußeren Kräften und den Schnittkräften:

$$M_r^o - H_r h_r = -X_r' - Z_r' \quad \text{und} \quad M_r^o - H_{r+1} h_r = -X_r'' - Z_r'';$$

wenn diese Gleichungen mit (134 a, b) verbunden werden, ergibt sich durch Auflösung (mit Benutzung der Abkürzungen in (132)):

$$\left. \begin{aligned} X_r' &= -\alpha_r(M_r^o - H_r h_r) - \beta_{r-1}'' Y_{r-1} - 2\beta_r' Y_r; \\ X_r'' &= -\alpha_{r+1}(M_r^o - H_{r+1} h_r) + 2\beta_r'' Y_r + \beta_{r+1}' Y_{r+1}; \\ Z_r' &= -(1 - \alpha_r)(M_r^o - H_r h_r) + \beta_{r-1}'' Y_{r-1} + 2\beta_r' Y_r; \\ Z_r'' &= -(1 - \alpha_{r+1})(M_r^o - H_{r+1} h_r) - 2\beta_r'' Y_r - \beta_{r+1}' Y_{r+1}. \end{aligned} \right\} \quad (135)$$

Hiermit sind alle Schnittkräfte durch die Größen H und Y ausgedrückt, so daß es sich im folgenden nur darum handelt, diese beiden Größen zu ermitteln.

1. Annäherung. Werden Momenten-Nullpunkte (Gelenke) in den Mittelpunkten sämtlicher Gurtstäbe und Pfosten (bis auf einen) vorausgesetzt, hat man bekanntlich, mit den Bezeichnungen in Abb. 30:

$$H_r = \frac{M_{m.r}^0}{h_{m.r}}; \quad (136)$$

hiermit sind auch die Momente X und Z nach (135) bekannt, indem hier alle $Y=0$ werden. Die Annäherung ist jedoch nur einigermaßen brauchbar, wenn die beiden Gurte gleiche Abmessungen besitzen, wenn also $o' = u'$, $a = \frac{1}{2}$, womit (135) liefert:

$$\left. \begin{aligned} X_r' = Z_r' &= -\frac{1}{2} \left(M_r^0 - \frac{h_r}{h_{m,r}} M_{m,r}^0 \right); \\ X_r'' = Z_r'' &= -\frac{1}{2} \left(M_r^0 - \frac{h_r}{h_{m,r+1}} M_{m,r+1}^0 \right), \end{aligned} \right\} \quad (137)$$

und die größten Pfostenmomente (oben und unten):

$$\Delta X_r = \Delta Z_r = X_r' - X_r'' = \frac{1}{2} h_r \cdot \Delta H_r. \quad (137a)$$

2. Annäherung. Es werden Momenten-Nullpunkte nur in den Pfostenmitten vorausgesetzt, somit werden alle Größen $Y=0$; es bleibt dann nur übrig, die Größen H zu bestimmen. Die hierzu nötigen Gleichungen werden erhalten, wenn für jedes Feld die Bedingung aufgeschrieben wird, daß sich die Punkte a, b in Abb. 31 ebenso weit voneinander entfernen wie die Punkte a_1, b_1 , also:

$$\Delta(a-b) = \Delta(a_1 - b_1).$$

Läßt man $\Delta(a-b)$ die wagerechte Projektion der Abstandsänderung bedeuten, so kann diese Größe mittels der Arbeitsgleichung ermittelt werden, und es ergibt sich:

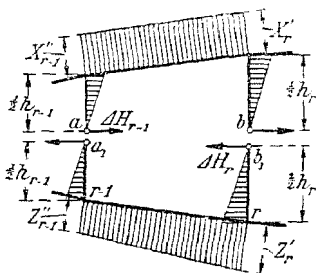


Abb. 31.

$$\begin{aligned} \frac{EJ_c}{\lambda_c} \cdot \Delta(a-b) &= -\frac{J_c}{J_{r-1}^h \lambda_c} \int_0^{\frac{1}{2} h_{r-1}} \Delta H_{r-1} \cdot y^2 dy + \frac{J_c}{J_r^h \lambda_c} \int_0^{\frac{1}{2} h_r} \Delta H_r \cdot y^2 dy \\ &\quad - \frac{J_c}{J_r^0 \lambda_c} \int_0^{o_r} \left(\frac{x'}{o_r} X_{r-1}'' + \frac{x}{o_r} X_r' \right) \left(\frac{x'}{o_r} \cdot \frac{h_{r-1}}{2} + \frac{x}{o_r} \cdot \frac{h_r}{2} \right) dx \\ &= -\frac{1}{24} h_r^2 h_{r-1}^2 h_{r-1}' \Delta H_{r-1} + \frac{1}{24} h_r^2 h_r' \Delta H_r \\ &\quad - \frac{1}{12} o_r' [X_{r-1}'' (2h_{r-1} + h_r) + X_r' (h_{r-1} + 2h_r)], \end{aligned}$$

wo das letzte Glied mit Hilfe von (135), indem alle $Y = 0$, und indem $h_{r-1} = h_{m,r} - \frac{1}{2} \Delta h_r$, $h_r = h_{m,r} + \frac{1}{2} \Delta h_r$, geschrieben werden kann:

$$+ \frac{1}{12} \alpha_r o_r' \{ 6 h_{m,r} M_{m,r}^0 + \frac{1}{2} \Delta h_r \Delta M_r^0 - [6 h_{m,r}^2 + \frac{1}{2} (\Delta h_r)^2] H_r \}.$$

Auf ähnliche Weise wird $\Delta(a_1 - b_1)$ gebildet; die von den Pfosten herrührenden Beiträge sind die nämlichen wie oben, nur mit entgegengesetzten Vorzeichen, der Beitrag vom Untergurt wird aus demjenigen des Obergurtes durch Vertauschung von o' mit u' und Änderung des Vorzeichens erhalten. — Es ist hierbei nur mit den Biegemomenten gerechnet; wünscht man die Beiträge von den Längenänderungen der Gurte mitzunehmen, die bisweilen nicht ganz ohne Bedeutung sind, so hat man die Glieder

$$- o_r' i_{o,r}^2 H_r \quad \text{bzw.} \quad + u_r' i_{u,r}^2 H_r$$

hinzuzufügen, wo i den Trägheitshalbmesser für Ober- und Untergurt bedeutet.

Wird endlich $\Delta(a - b) = \Delta(a_1 - b_1)$ gesetzt, so ergibt sich die Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} & - \frac{1}{12} h_{r-1}' \left(\frac{h_{r-1}}{h_{m,r}} \right)^2 (H_{r-1} - H_r) + \alpha_r o_r' \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\Delta h_r}{h_{m,r}} \right)^2 + \varkappa_r \right] H_r \\ & + \frac{1}{12} h_r' \left(\frac{h_r}{h_{m,r}} \right)^2 (H_r - H_{r+1}) = \alpha_r o_r' \left(\frac{M_{m,r}^0}{h_{m,r}} + \frac{1}{12} \frac{\Delta h_r \Delta M_r^0}{h_{m,r}} \right), \end{aligned} \right\} \quad (138)$$

wo

$$\varkappa_r = \frac{1}{\alpha_r} \left(\frac{i_{o,r}}{h_{m,r}} \right)^2 + \frac{1}{1 - \alpha_r} \left(\frac{i_{u,r}}{h_{m,r}} \right)^2$$

den Beitrag der Normalkräfte in den Gurten angibt und daher oft vernachlässigt werden kann. Die Momente M^0 sind positiv mit dem Uhrzeiger gerechnet, wenn sie sich auf die äußeren Kräfte links des Schnittes beziehen.

Eine solche H -Gleichung kann für jedes Feld aufgestellt werden; wie man sieht, hat diese die gewöhnliche Clapeyronsche Form. Die erste und letzte Gleichung enthält nur zwei Unbekannte, indem für $r = 1$ $H_{r-1} = H_0 = 0$ zu setzen ist. Übrigens wird die erste (und letzte) Gleichung teilweise davon abhängen, wie der Träger an den Enden abschließt; es sind hier die folgenden Möglichkeiten in Betracht zu ziehen:

1. Der Träger endigt in einem Pfosten mit endlichem Trägheitsmoment (wie in Abb. 30); es ist dann $H_0 = 0$, h_0' aber von Null verschieden.

2. Die Gurte laufen zu einer Spitze zusammen, wodurch $h_0 = 0$, so daß $H_0 = 0$ und $h_0' = 0$.

3. Das erste Feld (0 — 1) ist undurchbrochen (Abb. 32); hier wird $h_0' = h_1' = o_1' = u_1' = 0$, indem das Trägheitsmoment für alle vier Umrißstäbe des ersten Feldes unendlich groß zu rechnen ist. Die erste zu ermittelnde Größe H ist H_3 , so daß die erste Gleichung hier mit $r = 2$, $H_1 = 0$, $h_1' = 0$ erhalten wird.

4. Der Träger schließt ab mit einem Pfosten mit unendlich großem Trägheitsmoment, indem z. B. beide Gurte des ersten Feldes in einem Fundament fest eingespannt sind (Abb. 33); die erste Gleichung wird mit $r = 1$, $H_0 = 0$, $h_0' = 0$ erhalten.

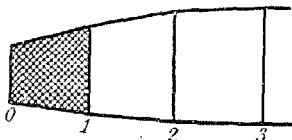


Abb. 32.

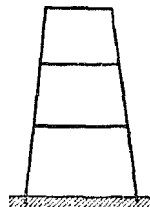


Abb. 33.

Wenn die H nach (138) berechnet worden sind, finden sich die Gurtmomente nach (135), wo alle $Y = 0$, und die Pfostenmomente aus:

$$\Delta X_r = \Delta Z_r = \pm \frac{1}{2} h_r \Delta H_r. \quad (139)$$

Für unmittelbare Belastung einer der Gurte (oder beider Gurte) kann natürlich weiter mit der Annäherung $Y = 0$ gerechnet werden, genau wird diese Annahme aber nur in den seltensten Fällen sein. Betreffend Berücksichtigung einer unmittelbaren Belastung soll daher hier auf die unten folgende genauere Untersuchung hingewiesen werden, deren Ergebnis ist, daß die Beziehungen (135) durch (144) zu ersetzen und daß in der H -Gleichung (138) das in (145a) angegebene Glied der rechten Seite hinzuzufügen ist.

Eine gleichförmige Temperaturänderung ruft keine Spannungen hervor, wenn der Träger äußerlich statisch bestimmt ist. Wird der Obergurt um t^0 höher erwärmt als der übrige Träger, ist auf der rechten Seite in (138) hinzuzufügen:

$$\varepsilon E J_c t \cdot \frac{o_r}{\lambda_c h_{m,r}^2}. \quad (135a)$$

Ob die hier benutzte Annäherung, alle Y gleich Null zu setzen, hinlänglich genau ist oder nicht, kann in folgender Weise untersucht werden. Das Moment Y_r kann durch die Momente ΔX_r und ΔZ_r , an den Pfostenenden (siehe Abb. 29) ausgedrückt werden, und ΔX_r und ΔZ_r wieder durch X_r', X_r'', Z_r', Z_r'' , mittels der Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} Y_r &= \frac{1}{2} (\Delta X_r + \Delta Z_r); \\ \Delta X_r &= X_r' - X_r''; \quad \Delta Z_r = -Z_r' + Z_r''. \end{aligned} \right\} \quad (140)$$

Wenn Y gleich Null sein soll, gelangt man so zu der Bedingung:

$$X_r' - X_r'' - Z_r' + Z_r'' = 0, \quad (141)$$

die im obigen nicht benutzt wurde. Führt man in (141) die Werte von X und Z aus (135), mit $Y=0$, ein, so ergibt sich:

$$M_r^0 [-\alpha_r + \alpha_{r+1} + (1 - \alpha_r) - (1 - \alpha_{r+1})] + H_r h_r [\alpha_r - (1 - \alpha_r)] - H_{r+1} h_r [\alpha_{r+1} - (1 - \alpha_{r+1})] = 0$$

oder mit Hilfe von (132):

$$\frac{1}{2} h_r (\varepsilon_r H_r - \varepsilon_{r+1} H_{r+1}) - \frac{1}{2} (\varepsilon_r - \varepsilon_{r+1}) M_r^0 = 0. \quad (141a)$$

Diese Bedingung ist u. a. erfüllt, wenn der Träger in bezug auf eine zu den Pfosten senkrechte Achse symmetrisch ist, wodurch $\alpha_r = \alpha_{r+1} = \dots = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_r = \varepsilon_{r+1} = \dots = 0$ wird. In anderen Fällen kann man sich durch Ausrechnung der linken Seite in (141a) einen Begriff von dem begangenen Fehler bilden und so entscheiden, ob eine genauere Berechnung notwendig ist. Es wird sich zeigen, daß die Werte der Momente Y gerade von der Größe in (141a) abhängen.

Genaue Berechnung. Wenn die Momente Y nicht Null sind, geben sie erstens einen Beitrag zu den Abstandsänderungen $\Delta(a-b)$ und $\Delta(a_1-b_1)$ in Abb. 31, und somit einige neue Glieder in den H -Gleichungen (138). Diese Beiträge rühren jedoch nur von den Gurten her, indem sich die beiden Punkte a und a_1 , und ebenso b und b_1 , gleich viel infolge der Biegung der Pfosten bewegen. Die Gurte liefern wie oben:

$$\begin{aligned} \Delta(a-b) &= -\frac{1}{12} o_r' [X_{r-1}'' (2h_{r-1} + h_r) + X_r' (h_{r-1} + 2h_r)]; \\ \Delta(a_1-b_1) &= +\frac{1}{12} u_r' [Z_{r-1}'' (2h_{r-1} + h_r) + Z_r' (h_{r-1} + 2h_r)], \end{aligned}$$

und wenn hier die Werte von X und Z aus (135) eingeführt werden, indem die Y jetzt mitgenommen werden, so findet sich nach einiger Ausrechnung, daß auf der rechten Seite in (138) hinzu-zufügen ist:

$$-\frac{1}{2} \varepsilon_r \left(\frac{h_{r-1} h_{r-1}'}{h_{m,r}^2} Y_{r-1} - \frac{h_r h_r'}{h_{m,r}^2} Y_r \right). \quad (142)$$

Zweitens braucht man ein neues Gleichungssystem zur Bestimmung der Momente Y . Ebenso wie die H -Werte dadurch bestimmt wurden, daß die gegenseitigen Verschiebungen $\Delta(a-b)$ und $\Delta(a_1-b_1)$ in Abb. 31 gleich groß sein mußten, würde es naheliegen, die Y durch die Bedingung zu ermitteln, daß die gegenseitigen Drehungen der Querschnitte a, b und a_1, b_1 gleich zu setzen wären; diese Bedingung ist aber in der Tat schon erfüllt zufolge der Herleitung der Ausdrücke (135). Dagegen sind die Beziehungen (140) nicht vorher benutzt; sie führen jetzt, wenn die Y nicht Null sind, anstatt (141) zu:

$$X_r' - X_r'' - Z_r' + Z_r'' = 2Y_r,$$

oder, wenn die Werte von X und Z aus (135) eingeführt werden:

$$\begin{aligned} \beta_{r-1}'' Y_{r-1} + (1 + 2\beta_r' + 2\beta_r'') Y_r + \beta_{r+1}' Y_{r+1} \\ = \frac{1}{2}(\varepsilon_r - \varepsilon_{r+1}) M_r^0 - \frac{1}{2} h_r (\varepsilon_r H_r - \varepsilon_{r+1} H_{r+1}). \end{aligned} \quad (143)$$

Eine solche Gleichung kann für jeden Pfosten aufgeschrieben werden.

Während man bei der „2. Annäherung“ nur mit einem Systeme reiner Clapeyronschen Gleichungen zu tun hatte, beruht die Ermittlung der Größen H und Y hier auf den beiden Gleichungssystemen (138) mit (142) und (143), die nicht mehr die reine Clapeyronsche Form haben. Indessen kann die Auflösung verhältnismäßig leicht auf folgende Weise bewerkstelligt werden: zuerst werden die H aus (138), ohne Hinzufügung der Glieder (142), berechnet, dann bildet man hiermit die rechten Seiten in (143); diese liefern eine Reihe von Y -Werten, die in (142) + (138) eingesetzt zu verbesserten H -Werten führen usw. Natürlich wird die Rechnung am besten so durchgeführt, daß man das zweitemal nur die Korrekturen für H bestimmt [man läßt also das zweitemal die Belastungsglieder in (138) fort und ersetzt diese durch (142) allein]. In den meisten Fällen sind die Y so kleine Größen, daß eine einzelne Umrechnung genügen wird.

Über die ersten (und letzten) Gleichungen, an den Trägerenden, ist folgendes zu bemerken:

1. Der Träger endigt in einem Pfosten mit endlichem Trägheitsmoment. Die erste Y -Gleichung wird am besten direkt hergeleitet. Indem für den Endpfosten $2Y_0 = -X_0'' + Z_0''$ ist, wird mit Hilfe von (135) erhalten:

$$(1 + 2\beta_0'') Y_0 + \beta_1' Y_1 = -\frac{1}{2} \varepsilon_1 M_0^0 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 h_0 H_1. \quad (143a)$$

Die erste H -Gleichung wird aus (138) + (142) mit $r = 1$ erhalten.

2. Die Gurte laufen in einer Spitze zusammen. Hier ist $h_0 = 0$, $h_0' = 0$, $\beta_0' = \beta_0'' = 0$. Die Größe Y_0 hat keine Bedeutung (man kann $Y_0 = 0$ setzen); die erste Y -Gleichung ist:

$$\begin{aligned} (1 + 2\beta_1' + 2\beta_1'') Y_1 + \beta_2' Y_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) M_1^0 \\ - \frac{1}{2} h_1 (\varepsilon_1 H_1 - \varepsilon_2 H_2). \end{aligned} \quad (143b)$$

X_0'' und Z_0'' ergeben sich ohne weiteres nach (135) mit $r = 0$, $\beta_0'' = 0$ und $Y_0 = 0$.

3. Erstes Feld undurchbrochen. $h_0' = h_1' = \alpha_1' = u_1' = 0$; $\beta_0'' = \beta_1' = \beta_1'' = 0$. Die erste zu berechnende Y -Größe ist Y_2 ; die erste Y -Gleichung wird aus (143) mit $r = 2$ erhalten, oder aus (143b) durch Vertauschung der Indizes 1 und 2 mit 2 und 3.

4. Der Träger endigt in einem Pfosten mit unendlich großem Trägheitsmoment. $h_0' = 0$, $\beta_0'' = 0$; die erste Y -Gleichung ist (143b).

Unmittelbare Belastung. Wenn die Belastung auch zwischen den Knoten angreift, ergibt sich die in Abb. 34 dargestellte M^0 -Fläche. Im vorhergehenden ist nur mit dem Momentenpolygone mit den Ordinaten $M_{r-1}^0, M_r^0 \dots$ gerechnet, jetzt sollen auch die schraffierten „sekundären“ Momentenflächen berücksichtigt werden, mit der Ordinate m^x im beliebigen Punkte x . Es bezeichnen m_{r-1}'' und m_r' die

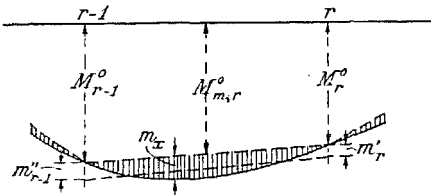


Abb. 34.

Einspannungsmomente, die von der unmittelbaren Belastung an den Knoten $(r-1)$ und r hervorgerufen werden würden, wenn der belastete Gurt an diesen Knoten fest eingespannt wäre; m_{r-1}'' und m_r' werden in der nämlichen Richtung

wie die Größen X und Z positiv gezählt.

Bei Berücksichtigung der sekundären Momentenflächen bleiben die Gleichungen (134) und die analogen für X'' und Z'' nicht mehr richtig. Nach (7) in Kap. 3 ist (134) jetzt, wenn der Obergurt belastet ist, durch:

$$o_r'(X_r' - m_r') = 2(\zeta_{r-1}^0 + 2\zeta_r^0 - 3\psi_r^0)$$

zu ersetzen, und ebenso (134a) durch:

$$o_r' X_r' - u_r' Z_r' = -2h_{r-1}' Y_{r-1} - 4h_r' Y_r + o_r' m_r';$$

ist der Untergurt belastet, hat man Z_r' durch $Z_r' - m_r'$ zu ersetzen. Wenn diese Gleichungen mit den Gleichgewichtsbedingungen für die lotrechten Schnitte links und rechts der r -ten Vertikalen verbunden werden, ergeben sich anstatt (135) die folgenden Ausdrücke:

	Obergurt belastet	Untergurt belastet	
$X_r' =$	+(1 - \alpha_r) m_r'	-\alpha_r m_r',	(144)
$X_r'' =$	+(1 - \alpha_{r+1}) m_r''	-\alpha_{r+1} m_r'',	
$Z_r' =$	-(1 - \alpha_r) m_r'	+\alpha_r m_r',	
$Z_r'' =$	-(1 - \alpha_{r+1}) m_r''	+\alpha_{r+1} m_r''.	

Wenn mit diesen Ausdrücken weiter gearbeitet wird, so gelangt man nach einer längeren Ausrechnung dazu, daß auf der rechten Seite der H -Gleichungen hinzugefügt werden muß:

$$\frac{\alpha_r o_r'}{2 h_{m,r}} \left[(m_{r-1}'' + m_r') - \frac{1}{6} \frac{\Delta h_r}{h_{m,r}} (m_{r-1}'' - m_r') \right], \quad (145)$$

oder immer genau genug:

$$\frac{1}{2} \alpha_r o_r' \cdot \frac{m_{r-1}'' + m_r'}{h_{m,r}}. \quad (145a)$$

Es ist hier gleichgültig, ob die Belastung am Ober- oder Untergurt wirkt; sind beide Gurte belastet, hat man nur unter m_{r-1}'' und m_r' die Summen der sekundären Spannungsmomente für beide Gurte zu verstehen.

Durch Einführung der Werte aus (144) in den Ausdruck $Y_r = \frac{1}{2}(X_r' - X_r'' - Z_r' + Z_r'')$ findet man endlich, daß auf der rechten Seite der Y -Gleichungen hinzuzufügen ist:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Obergurt belastet: } (1 - \alpha_r)m_r' - (1 - \alpha_{r+1})m_r'', \\ \text{Untergurt } \quad \quad : \quad -\alpha_r m_r' + \alpha_{r+1} m_r''. \end{array} \right\} \quad (146)$$

Spezielle Fälle.

a) Parallelträger mit $J_r^o = J_r^u$; $o_r' = u_r'$, $\alpha_r = \frac{1}{2}$, $\epsilon_r = 0$. Die Momente Y sind Null, die H -Gleichung vereinfacht sich zu:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{6} h_{r-1}' (H_{r-1} - H_r) + o_r' \left(1 + 4 \frac{i_r^2}{h^2}\right) H_r + \frac{1}{6} h_r' (H_r - H_{r+1}) \\ = o_r' \frac{\overline{M}_{m,r}^0}{h}, \end{aligned}$$

wo i_r den Trägheitshalbmesser des Gurts bedeutet, oder nach Division mit $o_r' = \frac{1}{2}(o_r' + u_r')$ und mit Vernachlässigung des Einflusses der Normalkräfte:

$$-\frac{1}{6} \beta_{r-1}'' H_{r-1} + \left(\frac{1}{6} \beta_{r-1}'' + 1 + \frac{1}{6} \beta_r'\right) H_r - \frac{1}{6} \beta_r' H_{r+1} = \frac{M_{m,r}^0}{h}. \quad (147)$$

Die erste Gleichung wird mit $r = 1$, $H_0 = 0$, $\beta_0'' > 0$ erhalten.

Für konstante Feldlänge λ und gleiches Trägheitsmoment sowohl der Gurte wie der Pfosten, eine Voraussetzung, die zu ganz brauchbaren Ergebnissen zu führen scheint, vereinfacht sich (147) zu:

$$\left. \begin{array}{l} -H_{r-1} + \left(2 + 6 \frac{\lambda}{h}\right) H_r - H_{r+1} = 6 \frac{\lambda}{h} \cdot \frac{M_{m,r}^0}{h}, \\ \text{und die erste Gleichung zu:} \end{array} \right\} \quad (147a)$$

$$\left(2 + 6 \frac{\lambda}{h}\right) H_1 - H_2 = 6 \frac{\lambda}{h} \frac{M_{m,1}^0}{h}.$$

b) Ober- oder Untergurt reduziert sich auf einen reinen Druck- oder Zugstab, der an den Pfosten mittels Gelenken angeschlossen ist. Ist dies beispielsweise für den Obergurt der Fall, werden:

$$\begin{aligned} o_r' = o_{r+1}' = \dots = \infty, \quad \alpha_r = \alpha_{r+1} = \dots = 0, \\ \epsilon_r = \epsilon_{r+1} = \dots = 1, \quad \text{alle } \beta = 0. \end{aligned}$$

Aus der Y -Gleichung (143) wird:

$$Y_r = -\frac{1}{2} h_r (H_r - H_{r+1}),$$

ein Ausdruck, der auch für unmittelbare Belastung gültig ist. Diese kann hier nur am Untergurt angreifen, womit das in den Y -Gleichungen hinzuzufügende Glied (146) verschwindet. (135) liefert das selbstverständliche Ergebnis $X_r' = X_r'' = 0$, und durch Einführung des gefundenen Wertes von Y_r in (138) und (142) geht die H -Gleichung über in die reine Clapeyronsche Gleichung:

$$-\frac{1}{3} \left(\frac{h_{r-1}}{h_{m,r}} \right)^2 h_{r-1}' (H_{r-1} - H_r) + u_r' \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\Delta h_r}{h_{m,r}} \right)^2 + \varkappa_r \right] H_r + \frac{1}{3} \left(\frac{h_r}{h_{m,r}} \right)^2 h_r' (H_r - H_{r+1}) = \frac{u_r'}{h_{m,r}} \left(M_{m,r}^0 + \frac{1}{12} \frac{\Delta h_r}{h_{m,r}} \Delta M_r^0 \right). \quad (148)$$

Bei unmittelbarer Belastung ist auf der rechten Seite der Ausdruck (145a) hinzuzufügen, worin $\alpha_r o_r' = u_r'$ zu setzen ist.

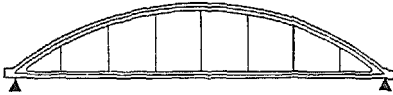


Abb. 35.

c) Die Gurte laufen zu einer Spitze über den Stützen zusammen und die Steifigkeit

aller Zwischenpfosten ist verschwindend (Abb. 35). Hier sind alle H gleich groß:

$$H_1 = H_2 = \dots = H_r = H.$$

Ferner sind alle $Y = 0$, die Größen h' aber unendlich groß, so daß die Ausdrücke (135) unbrauchbar werden. Überhaupt kann die Behandlung nicht ohne weiteres als besonderer Fall der obigen allgemeinen Berechnung durchgeführt werden.

Bei Bestimmung von H kann auf ganz ähnliche Weise wie oben vorgegangen werden. Denkt man sich vorläufig die Höhe der Endpfosten nicht gleich Null, überschneidet sie durch einen wagerechten Schnitt und bezeichnet die beiden Seiten des Schnittes mit a, a_1 und b, b_1 (wie für die Zwischenpfosten in Abb. 31), so muß auch hier

$$\Delta(a - b) - \Delta(a_1 - b_1) = 0$$

sein. Als Beitrag der Gurte eines einzelnen Feldes zu

$$\Delta(a - b) - \Delta(a_1 - b_1)$$

wurde oben gefunden:

$$\alpha_r o_r' h_{m,r}^2 \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\Delta h_r}{h_{m,r}} \right)^2 + \varkappa_r \right] H - \alpha_r o_r' h_{m,r} \left(M_{m,r}^0 + \frac{1}{12} \frac{\Delta h_r}{h_{m,r}} \Delta M_r^0 \right);$$

dieser Beitrag ist von der Höhenlage des wagerechten Schnittes unabhängig, wovon man sich leicht überzeugt. Indem hier in der Tat

gar kein Beitrag von den Pfosten erhalten wird, findet sich durch Summierung über die verschiedenen Felder die folgende Gleichung zur Bestimmung von H :

$$\begin{aligned}
 H \cdot \sum_{r=1}^{r=n} \alpha_r o_r' h_{m,r}^2 \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\Delta h_r}{h_{m,r}} \right)^2 + \varkappa_r \right] \\
 = \sum_{r=1}^{r=n} \alpha_r o_r' h_{m,r} \left(M_{m,r}^0 + \frac{1}{12} \frac{\Delta h_r}{h_{m,r}} \Delta M_r^0 \right). \quad (149)
 \end{aligned}$$

Bei unmittelbarer Belastung ist nur der Ausdruck (145 a), mit $h_{m,r}^2$ vervielfältigt, innerhalb des Summenzeichens auf der rechten Seite hinzuzufügen.

Um die Gurtmomente X und Z zu bestimmen, ist dagegen eine neue Entwicklung vorzunehmen. Man kann zwar hierbei von den nämlichen Gleichungen wie früher, (134) und den analogen, ausgehen, muß aber vermeiden, die Pfostenmomente Y als Zwischenglieder in die Rechnung einzuführen. Zuerst sei noch bemerkt, daß die Momente ΔX und ΔZ (Abb. 29) hier Null sind, und somit:

$$X_r' = X_r'' = X_r \quad \text{und} \quad Z_r' = Z_r'' = Z_r; \quad (150)$$

vorläufig ist es indessen praktisch, die Bezeichnungen X' und X'' beizubehalten. — Nach (134) hat man:

$$\begin{aligned}
 2 o_r' X_r' &= 4 (\zeta_{r-1}^o + 2 \zeta_r^o - 3 \psi_r^o); \\
 - o_r' X_{r-1}'' &= 2 (2 \zeta_{r-1}^o + \zeta_r^o - 3 \psi_r^o);
 \end{aligned}$$

und durch Subtraktion erhält man:

$$o_r' (X_{r-1}'' + 2 X_r') = 6 \zeta_r^o - 6 \psi_r^o;$$

ebenso wird hergeleitet:

$$u_r' (Z_{r-1}'' + 2 Z_r') = 6 \zeta_r^u - 6 \psi_r^u,$$

und, da $\psi_r^o = \psi_r^u$:

$$o_r' (X_{r-1}'' + 2 X_r') - u_r' (Z_{r-1}'' + 2 Z_r') = 6 (\zeta_r^o - \zeta_r^u).$$

Für das folgende Feld gelangt man auf ähnliche Weise zu:

$$- o_{r+1}' (2 X_r'' + X_{r+1}') + u_{r+1}' (2 Z_r'' + Z_{r+1}') = 6 (\zeta_r^o - \zeta_r^u);$$

werden die linken Seiten dieser Ausdrücke gleichgesetzt, X' , X'' , Z' , Z'' durch X und Z ersetzt und die Untergurtmomente Z mittels der auch früher benutzten Gleichgewichtsbedingung:

$$Z_r = - M_r^0 + H h_r - X_r \quad (151)$$

fortgeschafft, so ergibt sich schließlich die folgende Clapeyronsche Gleichung zur Bestimmung der X :

$$\begin{aligned}
 (o_r' + u_r') (X_{r-1} + 2 X_r) + (o_{r+1}' + u_{r+1}') (2 X_r + X_{r+1}) \\
 = - u_r' [(M_{r-1}^0 - H h_{r-1}) + 2 (M_r^0 - H h_r)] \\
 - u_{r+1}' [2 (M_r^0 - H h_r) + (M_{r+1}^0 - H h_{r+1})], \quad (152)
 \end{aligned}$$

wonach die Z durch (151) gegeben sind.

Für das erste Feld ist $\zeta_0^o = \zeta_0^u$; wodurch die erste Gleichung nach einiger Ausrechnung wird:

$$2X_0 + X_1 = -\alpha_1(2M_0^o + M_1^o - Hh_1), \quad (152a)$$

wo M_0^o für eine einfache Stützung in 0 gleich Null ist.

Bei unmittelbarer Belastung, z. B. längs des Untergurtes, ist auf der rechten Seite in (152) hinzuzufügen:

$$-u_r'(m_{r-1}'' + 2m_r') - u_{r+1}'(2m_r'' + m_{r+1}'). \quad (152b)$$

Diese Trägerform ist sehr oft als Eisenbeton-Bogenbrücke mit Zugband ausgeführt; in den meisten Fällen hat man jedoch die Steifigkeit des Zugbandes für die Aufnahme der Biegemomente nicht ausgenutzt, obwohl diese Steifigkeit gewöhnlich eigentlich nicht vernachlässigbar ist. Es würde sich offenbar hier lohnen, die genaue Berechnung durchzuführen.

Wenn o' und u' (und somit auch α) für die ganze Länge unveränderlich sind, d. h. Feldlänge λ und Trägheitsmoment J^u konstant, und für den Obergurt (Bogen) $J^o \cos \varphi$ konstant, ergibt sich aus (152) und (151):

$$X_r = -\alpha(M_r^o - Hh_r); \quad Z_r = -(1 - \alpha)(M_r^o - Hh_r); \quad (153)$$

oder

$$\frac{X_r}{Z_r} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} = \frac{u_r'}{o_r'} = \frac{J^o \cos \varphi}{J^u};$$

Ober- und Untergurt teilen dann die Momente ($M^o - Hh$) im Verhältnis zu deren Steifigkeit, d. h. man kann wie für einen gewöhnlichen Zweigelenbogen rechnen und die hier gefundenen Momente auf Bogen und Zugband im angegebenen Verhältnis verteilen. Selbst wenn α nicht genau konstant ist, kann man annäherungsweise auf dieselbe Weise vorgehen, indem für jeden Knoten der Mittelwert $\alpha = \frac{1}{2}(\alpha_r + \alpha_{r+1})$ benutzt wird.

d) Wenn die Steifigkeit sowohl der End- wie der Zwischenpfosten verschwindend klein ist, wird $H = 0$, und man hat nur mit den (durch $H = 0$ vereinfachten) Clapeyronschen Gleichungen (152) und den Beziehungen (151) zu tun, um die Biegemomente zu bestimmen. Die Konstruktion ist dann nur als eine Kombination zweier Balken zu betrachten.

Die erste Gleichung (152a) nimmt aber eine etwas verschiedene Form an, je nach der eventuell verschiedenen Unterstützung der beiden Balken. Sind sie beide einfach gestützt, wird $X_0 = Z_0 = 0$, und die erste Gleichung, die X_1 und X_2 enthält, wird aus (152) mit $r = 1$, $X_0 = 0$ erhalten. Für genau oder annäherungsweise unveränderliches α kann auch hier mit (153) gerechnet werden.

Hierher gehört auch der in Abb. 36 dargestellte Träger, wo der Untergurt, für sich betrachtet, ein eingespannter oder Zweigelenkbogen ist. Auch hier hat man gewöhnlich nicht, ebensowenig wie in Abb. 35, die Steifigkeit des Obergurts (des Streckgurts) ausgenutzt. Die genaue Berechnung ist jedoch hier beschwerlicher wegen der äußerlichen statischen Unbestimmtheit; wenn der Bogen und der Streckgurt beide gleichartig

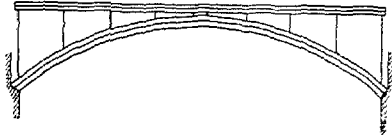


Abb. 36.

gestützt sind (beide eingespannt oder beide gelenkig gelagert), kann indessen (153) noch als eine gute Annäherung angesehen werden.

B. Räumliche Rahmenkonstruktionen.

12. Grad der statischen Unbestimmtheit; allgemeine Berechnungsmethoden.

Außer festen, einzel- oder doppelbeweglichen einfachen Unterstützungen kann hier auch von festen, einzel- oder doppelbeweglichen Einspannungen die Rede sein, je nachdem eine Drehung um 3, 2 oder 1 Achse verhindert ist. Durch Verbindung von Einspannungen mit den verschiedenen Arten einfacher Unterstützungen können somit Stützungen mit 2 bis 6 Reaktions-(Kraft- oder Momenten-)Komponenten hergestellt werden; gewöhnlich wird jedoch der Einspannungspunkt *absolut festgehalten sein, so daß man mit 4, 5 oder 6 Reaktionskomponenten zu tun hat, je nachdem die Drehung um 1, 2 oder 3 Achsen verhindert ist.*

Wir denken uns nun ein System, aufgebaut aus einer beliebigen Zahl von „Balken“ (d. h. Konstruktionsteilen, die sowohl Biegungsbeanspruchungen in verschiedenen Richtungen wie Drehungsbeanspruchungen aufnehmen können) und „Stäben“ (die nur von Zug- und Druckspannungen beansprucht werden können), unter sich mittels Knotenpunkten, Gelenken oder Knoten verbunden. Von den Knotenpunkten gehen nur Stäbe aus, die Gelenke sind frei drehbare Verbindungen von zwei oder mehr Balken (und eventuell Stäben), die Knoten endlich sind steife Verbindungen von Balken. Es ist dann Gleichgewicht vorhanden, wenn jeder Knotenpunkt für sich und jeder Balken im Gleichgewicht ist. Mit k Knotenpunkten und β Balken können also alles in allem $3k + 6\beta$ Gleichungen aufgeschrieben werden. Als Unbekannte treten auf: Stabspannungen (s an Zahl), Reaktionskomponenten (w), Gelenkdrücke (c) und Knotendrücke (z).

Gelenke und Knoten werden als 1., 2. ... Ordnung unterschieden, je nachdem 2, 3 ... Balken hier zusammenstoßen, und dementsprechend treten für Gelenke 3, 6 ... und für Knoten 6, 12 ... unbekannte Balkendrücke (Kräfte oder Kräftepaare) auf. Mit $c_1, c_2 \dots$ Gelenken 1., 2. ... Ordnung und $\varkappa_1, \varkappa_2 \dots$ Knoten 1., 2. ... Ordnung wird daher die Gesamtzahl der Unbekannten:

$$s + u + 3(c_1 + 2c_2 + \dots) + 6(\varkappa_1 + 2\varkappa_2 + \dots),$$

und die erste notwendige Bedingung für statische Bestimmtheit ist:

$$3k + 6\beta = s + u + 3(c_1 + 2c_2 + \dots) + 6(\varkappa_1 + 2\varkappa_2 + \dots).$$

Außerdem muß, wie gewöhnlich, die Determinante der Gleichungen von Null verschieden sein.

Praktisch genommen werden die hier zu behandelnden Systeme immer statisch unbestimmt sein, und die aufgestellte Bedingung wird daher immer nur dazu benutzt werden, die Anzahl m der Überzähligen zu bestimmen:

$$m = s + u + 3(c_1 + 2c_2 + \dots) + 6(\varkappa_1 + 2\varkappa_2 + \dots) - 3k - 6\beta, \quad (154)$$

oder, falls das System ausschließlich von Balken, die in Knoten verbunden sind, besteht:

$$m = u + 6(\varkappa_1 + 2\varkappa_2 + \dots) - 6\beta. \quad (154a)$$

Für die in Abb. 37a gezeigte Konstruktion mit zwei festen Einspannungen und zwei festen einfachen Unterstützungen ist

$$u = 3 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = 18, \quad \beta = 8, \quad \varkappa_1 = 0, \quad \varkappa_2 = 4,$$

somit

$$m = 18 + 12 \cdot 4 - 6 \cdot 8 = 18.$$

Für das zweistöckige System in Abb. 37b, mit vier festen Einspannungen, wird $m = 48$ erhalten.

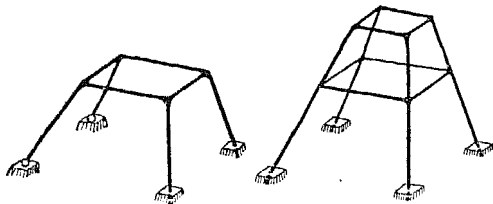


Abb. 37a.

Abb. 37b.

Bei der Spannungsberechnung kann entweder von der Kraft- oder von der Deformationsmethode Gebrauch gemacht werden. Nach der ersten können die Elastizitätsgleichungen an und

für sich ohne prinzipielle Schwierigkeit aufgestellt werden, da alle Beanspruchungen des Hauptsystems leicht zu ermitteln sind. Gewöhnlich können natürlich die Schubspannungen und in der Regel auch die Normalkräfte vernachlässigt werden, wogegen Biegemomente um die beiden Hauptachsen und Drehmomente zu berücksichtigen

sind. Indessen wird die Zahl der Überzähligen fast immer so groß sein (vgl. die obigen Beispiele in Abb. 37), daß die Berechnung undurchführbar wird, falls es nicht auf irgendeine Weise gelingt, Vereinfachungen ausfindig zu machen, so z. B. durch Verwendung eines statisch unbestimmten Hauptsystems oder durch eine spezielle Wahl der Überzähligen, wodurch die Zahl der in die einzelnen Gleichungen eingehenden Unbekannten beträchtlich verkleinert wird, oder auch durch annäherungsweise Vernachlässigung der Steifigkeit einiger der Verbindungen, so daß mit Gelenken statt steifer Knoten an solchen Stellen gerechnet wird, wo die Steifigkeit weniger von Bedeutung ist. Die verhältnismäßig wenigen vorliegenden Untersuchungen über räumliche Rahmenkonstruktionen versuchen daher alle den einen oder den anderen dieser Wege zu gehen; allgemeine Methoden zur Erreichung der genannten Vorteile können nicht angegeben werden.

Die Deformationsmethode dagegen kann gewissermaßen in ein System gebracht werden, auf ähnliche Weise wie für ebene Konstruktionen. Um dies einzusehen, beginnen wir damit, einen Balken, der zwei Knoten a und b verbindet, mittels zweier Schnitte, unendlich nahe den Knoten, loszuschneiden. In den Schnittflächen treten außer Normal- und Schubkräften drei Kräftepaare auf, nämlich die beiden Biegemomente M^I und M^{II} für die Querschnittshauptachsen I und II sowie das Drehmoment M^v um die Balkenachse. Die drei Achsen I , II und v (= Balkenachse) bilden ein rechtwinkliges Koordinatensystem, für welches die positiven Achsen- und Umdrehungsrichtungen in irgendeiner Weise zu wählen sind.

Analog den für ebene Konstruktionen benutzten hat man dann die folgenden Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} M_{ab}^I &= M_{ab}^{I,0} + 2\mu^I(2\varphi_a^I + \varphi_b^I); \\ M_{ab}^{II} &= M_{ab}^{II,0} + 2\mu^{II}(2\varphi_a^{II} + \varphi_b^{II}); \\ M_{ab}^v &= M_{ab}^{v,0} + \mu^v(\varphi_a^v - \varphi_b^v). \end{aligned} \right\} \quad (155)$$

Hier bedeuten $M^{I,0}$, $M^{II,0}$, $M^{v,0}$ die einer vollen, beiderseitigen Einspannung entsprechenden Momente; φ_a^I , φ_b^I , φ_a^{II} , φ_b^{II} die Tangentenwinkel bei a und b in den Hauptebenen I und II , von der nach der Deformation sich ergebenden Verbindungsgeraden $a - b$ aus gemessen, φ_a^v , φ_b^v endlich die Winkel, um die sich die Querschnitte bei a und b um die Balkenachse gedreht haben. Genauer ausgedrückt sind die Größen φ gleich den genannten, mit $EJ_c:l_c$ vervielfachten Winkeln, und die Steifigkeitsbeiwerte μ sind:

$$\mu^I = \frac{J_{ab}^I l_c}{J_c l_{ab}}; \quad \mu^{II} = \frac{J_{ab}^{II} l_c}{J_c l_{ab}}; \quad \mu^v = \frac{G J_{ab}^v l_c}{E J_c l_{ab}}. \quad (156)$$

Hier sollen nun die Winkel φ durch die Drehungen und Verschiebungen der Knoten ausgedrückt werden, die wie früher als die eigentlichen Unbekannten eingeführt werden sollen. Die Bewegung eines Knotens erfordert zu ihrer Bestimmung drei Drehungs- und drei Verschiebungskomponenten. Die zuletzt genannten brauchen jedoch gewöhnlich nicht alle als Unbekannte betrachtet zu werden; ist die Knotenpunktfigur unbeweglich, sind gar keine Verschiebungen unbekannt, und für eine bewegliche Knotenpunktfigur nur so viele als erforderlich sind, um die Figur unbeweglich zu machen, also $3k - (s + u)$, wenn k , s und u die Zahl der Knotenpunkte, Stäbe und Reaktionskomponenten der Knotenpunktfigur ist, d. h. des Systems, das erhalten wird, wenn die Konstruktion als ein Fachwerk betrachtet wird, wo also alle Balken durch Stäbe, alle Knoten durch Knotenpunkte und alle Einspannungen durch einfache Unterstützungen ersetzt werden.

Für jeden Knoten wird ein Koordinatensystem x, y, z gewählt. Für den Knoten a werden die Knotendrehwinkel mit $\zeta_a^x, \zeta_a^y, \zeta_a^z$ bezeichnet, und für den oben erwähnten Umdrehungssinn positiv gezählt. Die auf die Knoten einwirkenden Momente, die von den Balken übertragen werden, und ebenso die Momente Z (im Knoten a : Z_a^x, Z_a^y, Z_a^z), die einer Drehung um die Achsen entgegenwirken, werden dagegen im entgegengesetzten Sinne positiv gezählt.

Um nicht zu weitläufig zu werden, begnügen wir uns damit, die Berechnung für den Fall anzudeuten, daß die Knotenpunktfigur unbeweglich ist.

Wenn die Richtungscoss. der Achsen I, II, v des Balken-Koordinatensystems im Verhältnis zum Knoten-Koordinatensystem im Knoten a mit $(\alpha_a^I, \beta_a^I, \gamma_a^I)$, $(\alpha_a^{II}, \beta_a^{II}, \gamma_a^{II})$ und $(\alpha_a^v, \beta_a^v, \gamma_a^v)$ bezeichnet werden, ergeben sich für die Winkel φ_a in (155) Ausdrücke der folgenden Form:

$$\varphi_a^I = \alpha_a^I \zeta_a^x + \beta_a^I \zeta_a^y + \gamma_a^I \zeta_a^z. \quad (157)$$

Analog werden die Winkel φ_b durch die Drehungswinkel im Knoten b ausgedrückt. Wenn diese Werte in (155) eingeführt werden, ergibt sich:

$$\begin{aligned} M_{ab}^I &= M_{ab}^{I,0} + 4\mu^I (\alpha_a^I \zeta_a^x + \beta_a^I \zeta_a^y + \gamma_a^I \zeta_a^z) \\ &\quad + 2\mu^I (\alpha_b^I \zeta_b^x + \beta_b^I \zeta_b^y + \gamma_b^I \zeta_b^z) \end{aligned} \quad (158)$$

und die analogen. Gewöhnlich sind natürlich die x, y, z -Systeme der Knoten a und b verschieden, obwohl hier die nämlichen Bezeichnungen benutzt wurden. — Wenn b eine Einspannung ist, sind die Winkel ζ_b gleich Null zu setzen; für eine einfache Unterstützung

in b vereinfachen sich die beiden ersten Ausdrücke (155) zu:

$$M_{ab}^I = M_{ab}^{I,0} + 3\mu^I \varphi_a^I, \quad M_{ab}^{II} = M_{ab}^{II,0} + 3\mu^{II} \varphi_a^{II},$$

worin dann (157) einzuführen ist, und aus dem letzten Ausdruck (155) wird, wenn die Unterstüztung auch keinen Widerstand gegen Drehung leisten kann, nur:

$$M_{ab}^v = M_{ab}^{v,0}.$$

Für eine unbewegliche Knotenpunktfigur lauten jetzt die Elastizitätsgleichungen mit leicht verständlichen Bezeichnungen:

$$\left. \begin{aligned} Z_a^x = 0 &= Z_{a0}^x - Z_{aa}^{xx} \zeta_a^x = Z_{aa}^{xy} \zeta_a^y - Z_{aa}^{xz} \zeta_a^z - Z_{ab}^{xx} \zeta_b^x \dots, \\ Z_a^y = 0 &= Z_{a0}^y - Z_{aa}^{yx} \zeta_a^x - Z_{aa}^{yy} \zeta_a^y - Z_{aa}^{yz} \zeta_a^z - Z_{ab}^{yx} \zeta_b^x \dots, \end{aligned} \right\} \quad (159)$$

wo

$$Z_{aa}^{xy} - Z_{aa}^{yx}, \quad Z_{ab}^{xx} = Z_{ba}^{xx}, \quad \text{usw.}$$

Alle hier eingehenden speziellen Z -Werte ergeben sich mit Hilfe der Ausdrücke:

$$Z_a^x = - \sum M_{ai}^x, \quad Z_a^y = - \sum M_{ai}^y, \quad Z_a^z = - \sum M_{ai}^z, \quad (160)$$

wo $M_{ai}^x \dots$ diejenigen Momente um die x -, y - und z -Achsen bezeichnen, womit alle vom Knoten a ausgehenden Balken, die nach einem anderen Knoten, einer Einspannung oder einfachen Unterstüztung (i) hinlaufen, auf den Knoten a einwirken. Diese Momente bestimmen sich nach:

$$\left. \begin{aligned} M_{ab}^x &= \alpha_a^I M_{ab}^I + \alpha_a^{II} M_{ab}^{II} + \alpha_a^v M_{ab}^v, \\ M_{ab}^y &= \beta_a^I M_{ab}^I + \beta_a^{II} M_{ab}^{II} + \beta_a^v M_{ab}^v, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (161)$$

worin $M_{ab}^I, M_{ab}^{II} \dots$ aus (158) einzuführen sind.

So wird beispielsweise für $\zeta_a^x = -1$ erhalten:

$$M_{ab}^I = -4\mu^I \alpha_a^I; \quad M_{ab}^{II} = -4\mu^{II} \alpha_a^{II}; \quad M_{ab}^v = -\mu^v \alpha_a^v,$$

und somit:

$$\begin{aligned} M_{ab}^x &= -4\mu_{ab}^I (\alpha_a^I)^2 - 4\mu_{ab}^{II} (\alpha_a^{II})^2 - \mu_{ab}^v (\alpha_a^v)^2; \\ M_{ab}^y &= -4\mu_{ab}^I \alpha_a^I \beta_a^I - 4\mu_{ab}^{II} \alpha_a^{II} \beta_a^{II} - \mu_{ab}^v \alpha_a^v \beta_a^v; \\ M_{ab}^z &= -4\mu_{ab}^I \alpha_a^I \gamma_a^I - 4\mu_{ab}^{II} \alpha_a^{II} \gamma_a^{II} - \mu_{ab}^v \alpha_a^v \gamma_a^v; \end{aligned}$$

hiermit sind die Beiträge des Balkens $a - b$ zu den Koeffizienten $Z_{aa}^{xx}, Z_{aa}^{yx}, Z_{aa}^{zx}$ bekannt.

Hat man eine bewegliche Knotenpunktfigur, so sind in den beiden ersten Gleichungen (155) die von den Stabdrehwinkeln ψ^I

und φ'' in den beiden Hauptebenen herrührenden Gliedern hinzuzufügen. Wenn dann die Knotenpunktfigur mit Hilfe von einigen Z -Stäben $Z_r, Z_s \dots$ unbeweglich gemacht worden ist, hat man weiter in den Elastizitätsgleichungen (159) die Glieder $Z_{ar}^x \zeta_r + Z_{as}^x \zeta_s + \dots$ mitzunehmen und bekommt außerdem die neuen Gleichungen

$$Z_r = 0 = Z_{r0} - Z_{ra}^x \zeta_a^x - Z_{ra}^y \zeta_a^y \dots - Z_{rb}^x \zeta_b^x \dots - Z_{r,r} \zeta_r - Z_{r,s} \zeta_s \dots$$

Aus dieser allgemeinen Übersicht über die Berechnung geht hervor, daß man zwar bei Anwendung der Deformationsmethode denselben Vorteil erreicht wie in der Ebene, daß nämlich die Aufstellung der Elastizitätsgleichungen ziemlich mechanisch ausgeführt werden kann, ohne große Rechenarbeit. In den meisten Fällen wird sich wohl auch eine etwas kleinere Zahl von Elastizitätsgleichungen ergeben als nach der Kraftmethode. Indessen sind doch die durch das skizzierte Verfahren erzielten Vorteile nicht so groß, daß die allgemeine Behandlung viel aussichtsreicher geworden ist; die ganze Arbeit wird immer so erheblich sein, daß von einer wirklichen Durchführung nur in den einfachsten Fällen die Rede sein kann, wenn, wie bisher vorausgesetzt, sämtliche Elastizitätsgleichungen auf einmal aufgestellt werden.

Es kann zwar noch eine Vereinfachung dadurch erzielt werden, daß man die Achsen der Knotendrehwinkel $\zeta_a^x, \zeta_a^y, \zeta_a^z$ von dem Knoten a selbst hinweg verschiebt und eine solche Wahl dieser Achsen trifft, daß dadurch einige der Koeffizienten in den Elastizitätsgleichungen verschwinden. Erst jedoch wenn dieser Kunstgriff mit dem Prinzip der stufenweisen Berechnung verbunden wird, scheint die Aussicht auf praktische Durchführbarkeit wirklich verbessert zu sein. Im folgenden Kapitel soll daher noch diese Möglichkeit etwas näher untersucht werden.

13. Stufenweise Berechnung; Vereinfachung der Knotengleichungen.

Wenn das System nach und nach durch Hinzufügung immer neuer Systemteile aufgebaut gedacht wird, so daß die Berechnung jedesmal nur für einen Knoten auszuführen ist, dann hat man immer nur mit sechs Gleichungen zu tun zur Bestimmung der sechs Verschiebungskomponenten des betrachteten Knotens.

Um die Schreibweise zu vereinfachen, so daß nicht allzu viel Indizes nötig werden, lassen wir im folgenden den Knotenindex fortfallen und bezeichnen:

durch $\zeta_r, \zeta_s, \zeta_t$ die drei Knotenverschiebungen in drei zueinander senkrechten Richtungen r, s, t , und

durch $\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c$ die drei Knotendrehwinkel um die zueinander senkrechten Achsen a, b, c ;

die drei Richtungen r, s, t brauchen nicht notwendig mit den a, b, c -Achsen zusammen zu fallen.

Indem weiter für $Z_{r0} \dots Z_{a0} \dots$ die Bezeichnungen $P_r, P_s, P_t, M_a, M_b, M_c$ hier vorgezogen werden, lauten ganz allgemein die sechs Elastizitätsgleichungen für den betrachteten Knoten:

$$\left. \begin{aligned} P_r &= Z_{rr} \zeta_r + Z_{rs} \zeta_s + Z_{rt} \zeta_t & + Z_{ra} \zeta_a + Z_{rb} \zeta_b + Z_{rc} \zeta_c, \\ P_s &= Z_{sr} \zeta_r + Z_{ss} \zeta_s + Z_{st} \zeta_t & + Z_{sa} \zeta_a + Z_{sb} \zeta_b + Z_{sc} \zeta_c, \\ P_t &= Z_{tr} \zeta_r + Z_{ts} \zeta_s + Z_{tt} \zeta_t & + Z_{ta} \zeta_a + Z_{tb} \zeta_b + Z_{tc} \zeta_c, \\ M_a &= Z_{ar} \zeta_r + Z_{as} \zeta_s + Z_{at} \zeta_t & + Z_{aa} \zeta_a + Z_{ab} \zeta_b + Z_{ac} \zeta_c, \\ M_b &= Z_{br} \zeta_r + Z_{bs} \zeta_s + Z_{bt} \zeta_t & + Z_{ba} \zeta_a + Z_{bb} \zeta_b + Z_{bc} \zeta_c, \\ M_c &= Z_{cr} \zeta_r + Z_{cs} \zeta_s + Z_{ct} \zeta_t & + Z_{ca} \zeta_a + Z_{cb} \zeta_b + Z_{cc} \zeta_c. \end{aligned} \right\} \quad (162)$$

Es soll nun zuerst gezeigt werden, daß diese Gleichungen durch eine spezielle Wahl der r, s, t - und a, b, c -Achsen ganz bedeutend vereinfacht werden können.

Aus (162) geht hervor, daß eine Verschiebung ζ_r , selbst wenn alle anderen ζ gleich Null sind, eine Kraft P mit Seitenkräften nach allen drei r, s, t -Achsen gibt (außer natürlich den Momenten um die a, b, c -Achsen). Es existieren aber drei spezielle, zueinander senkrechte Achsen r, s, t mit der Eigenschaft, daß eine Verschiebung nach einer dieser Richtungen eine hiermit gleichlaufende Kraft P hervorruft. Nehmen wir eine willkürlich gerichtete Verschiebung 1 an, mit den Komponenten λ, μ, ν nach den drei ursprünglichen r, s, t -Achsen; einer solchen entsprechen nach (162) die Seitenkräfte P :

$$\left. \begin{aligned} P_r &= Z_{rr} \lambda + Z_{rs} \mu + Z_{rt} \nu; \\ P_s &= Z_{sr} \lambda + Z_{ss} \mu + Z_{st} \nu; \\ P_t &= Z_{tr} \lambda + Z_{ts} \mu + Z_{tt} \nu; \end{aligned} \right\} \quad (163)$$

Kraft und Verschiebung sind gleichgerichtet, wenn:

$$\frac{P_r}{\lambda} = \frac{P_s}{\mu} = \frac{P_t}{\nu} = k. \quad (164)$$

Werden hier die Werte aus (163) eingeführt und λ, μ, ν eliminiert, gelangt man zu der Gleichung dritten Grades in k :

$$\left| \begin{array}{ccc} Z_{rr} - k & Z_{rs} & Z_{rt} \\ Z_{sr} & Z_{ss} - k & Z_{st} \\ Z_{tr} & Z_{ts} & Z_{tt} - k \end{array} \right| = 0, \quad (165)$$

eine Gleichung, die bekanntlich drei reelle Wurzeln hat. Sind diese ermittelt, können λ, μ, ν mittels zwei der Gleichungen (164) in Verbindung mit $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ bestimmt werden. Wählt man jetzt die r, s, t -Achsen mit diesen Richtungen, so werden für das neue Koordinatensystem:

$$Z_{r,s} = Z_{s,r} = Z_{r,t} = Z_{t,r} = Z_{s,t} = Z_{t,s} = 0,$$

und der erste Quadrant der Gleichungen (162) reduziert sich auf die Diagonalreihe.

Die nämliche Betrachtung kann sodann für Momenten- und entsprechende Drehachsen angestellt werden. Auch hier kommt man auf drei zueinander senkrechte Richtungen, die, als Momentenachsen benutzt, Drehungen um gleichlaufende Achsen hervorrufen; diese Richtungen können mittels derselben Gleichungen (163) bis (165) bestimmt werden, wenn nur die Indizes r, s, t mit a, b, c vertauscht werden. Wählt man die a, b, c -Achsen in diesen Richtungen, so wird:

$$Z_{a,b} = Z_{a,c} = Z_{b,c} = 0,$$

und der dritte Quadrant in (162) auf die Diagonalreihe reduziert.

Hiermit sind nur die Richtungen der Achsen festgelegt; mit Hilfe einer passenden Wahl ihrer Lage können außerdem die beiden übrig bleibenden Quadranten der Gl. (162) auf die Diagonalreihe reduziert werden. Man geht hierbei von einem beliebigen r, s, t -System aus, nur mit den erwähnten Hauptachsen-Richtungen, und bestimmt mit Bezug hierauf die a, b, c -Hauptachsen-Richtungen. Einer Verschiebung $\zeta_r = 1$ (alle anderen $\zeta = 0$) entsprechen dann die Werte:

$$P_r = Z_{r,r}, \quad P_s = P_t = 0; \quad M_a = Z_{a,r}; \quad M_b = Z_{b,r}; \quad M_c = Z_{c,r}.$$

Die beiden Momente M_b und M_c werden nach der a -Richtung und einer zu P_r senkrechten zerlegt, und letztere Komponente wird mittels einer Parallelverschiebung von P_r vernichtet. Wir bezeichnen die Kraft P_r in dieser speziellen Lage (nach der Verschiebung) mit P_r' . Der Verschiebung $\zeta_r = 1$ entsprechen somit die Kraft P_r' und ein Moment M_a' ($= Z_{a,r} +$ die eben erwähnten Komponenten von M_b und M_c nach der a -Richtung), und das Moment von P_r' sowie M_a' verschwindet für irgendeine Achse, die senkrecht zur a -Richtung P_r' schneidet. — Auf dieselbe Weise kommt man für die Verschiebungen $\zeta_s = 1$ und $\zeta_t = 1$ auf (P_s', M_b') und (P_t', M_c') .

Wählt man daher als c -Achse die spezielle Gerade in der c -Hauptrichtung, die sowohl P_r' wie P_s' schneidet, werden die Momente M_c , die den beiden Verschiebungen $\zeta_r = 1$ und $\zeta_s = 1$ entsprechen, gleich Null, d. h. man erhält: $Z_{c,r} = 0$ und $Z_{c,s} = 0$. Und wenn

die a - und b -Achsen so gewählt werden, daß sie P'_s , P'_t und P'_r , P'_t schneiden, werden in (162) ebenso die übrigen Koeffizienten außerhalb der Diagonalreihe gleich Null.

Bei Benutzung der so bestimmten r , s , t - und a , b , c -Achsen (letztere werden sich im allgemeinen nicht schneiden) vereinfachen sich die Gleichungen (162) zu:

$$\left. \begin{aligned} P_r &= Z_{rr} \zeta_r + Z_{ra} \zeta_a \\ M_a &= Z_{ar} \zeta_r + Z_{aa} \zeta_a \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} P_s &= Z_{ss} \zeta_s + Z_{sb} \zeta_b \\ M_b &= Z_{bs} \zeta_s + Z_{bb} \zeta_b \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} P_t &= Z_{tt} \zeta_t + Z_{tc} \zeta_c \\ M_c &= Z_{ct} \zeta_t + Z_{cc} \zeta_c \end{aligned} \right\} \quad (166)$$

Wie von der früheren Behandlung ebener Systeme bekannt, erreicht man durch Wahl dieser speziellen Achsen nicht nur, daß die Auflösung der Elastizitätsgleichungen für den eben betrachteten Knoten erheblich vereinfacht wird, sondern auch, was beinahe noch wichtiger ist, daß diejenigen Elastizitätsbeiwerte möglichst einfach ausgedrückt werden, die die elastische Einspannung des folgenden Systemteils in dem hier betrachteten Knoten definieren (wenn die Berechnung nach Hinzufügung eines solchen neuen Systemteils weiter geführt werden soll). Wird nämlich in (166) gesetzt: $P_r = Z_{r,0} = 1$, alle übrigen linken Seiten gleich Null, so ergibt sich:

$$\zeta_r = \frac{Z_{aa}}{Z_{rr} Z_{aa} - Z_{ar}^2} = \varepsilon_r; \quad \zeta_a = -\frac{Z_{ar}}{Z_{rr} Z_{aa} - Z_{ar}^2} = \varkappa_{ar};$$

ebenso wird für $M_a = 1$ erhalten:

$$\zeta_r = -\frac{Z_{ra}}{Z_{aa} Z_{rr} - Z_{ar}^2} = \varkappa_{ar}; \quad \zeta_a = \frac{Z_{rr}}{Z_{aa} Z_{rr} - Z_{ar}^2} = \tau_a;$$

ähnliche einfache Ausdrücke werden für $P_s = 1$, für $M_b = 1$, usw. erhalten.

Mithin kann in die Berechnung für den folgenden Knoten eingesetzt werden:

$$\zeta_r = \zeta_{0r} - \varepsilon_r Z_r - \varkappa_{ar} Z_a; \quad \zeta_a = \zeta_{0a} - \varkappa_{ar} Z_r - \tau_a Z_a, \quad \text{usw.};$$

während man bei Benutzung des ursprünglichen, beliebig gewählten Achsensystems hätte setzen müssen:

$$\zeta_r = \zeta_{0r} - \varepsilon_r Z_r - \varepsilon_s Z_s - \varepsilon_t Z_t - \tau_a Z_a - \tau_b Z_b - \tau_c Z_c,$$

wodurch die Berechnung sozusagen undurchführbar gewesen wäre.

Die wirkliche Durchführung der Achsenbestimmung soll im folgenden Kapitel an einem auch an und für sich wichtigen Beispiel gezeigt werden.

Ist die Knotenpunktfigur unbeweglich, vereinfachen sich die Verhältnisse erheblich. Die Verschiebungen ζ_r , ζ_s , ζ_t sind dann

gleich Null, und es sind in jedem Knoten nur die drei Drehwinkel $\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c$ zu bestimmen. Die Elastizitätsgleichungen (162) reduzieren sich dann auf den rechten unteren Quadranten, und aus diesen drei Gleichungen wird nur noch, wenn man die a, b, c -Hauptachsen benutzt:

$$Z_{aa} \zeta_a = Z_{a0}; \quad Z_{bb} \zeta_b = Z_{b0}; \quad Z_{cc} \zeta_c = Z_{c0}.$$

In der Weiterführung der Berechnung hat man dann nur mit den drei einfachen Elastizitätsbeiwerten zu tun:

$$\tau_a = \frac{1}{Z_{aa}}; \quad \tau_b = \frac{1}{Z_{bb}}; \quad \tau_c = \frac{1}{Z_{cc}}.$$

Nach dem hier angedeuteten stufenweisen Verfahren ist die Berechnung einer beliebigen räumlichen Rahmenkonstruktion ohne weiteres möglich und durchführbar, vorausgesetzt, daß die Konstruktion durch allmähliche Hinzufügung neuer Systemteile gebildet werden kann, die nur einen Knoten mit dem früheren System gemeinsam haben.

14. Spezielle Fälle allgemeinerer Bedeutung.

a) Ein starrer Körper als Teil der Konstruktion.

Ein starrer Körper geht als Teil der Konstruktion ein. Dies kommt vor in mehreren praktisch wichtigen Fällen, so u. a. bei Pfahlrosten, wo die äußeren Kräfte durch ein Betonfundament auf die Pfähle übertragen werden, das gewöhnlich mit hinlänglicher Annäherung als unendlich steif betrachtet werden kann, bei Eisenbetongerüsten für Hochbehälter, wenn die Säulen oben von Punkten lotrecht unter der Behälterwand ausgehen, u. a. m. Der Fall ist besonders einfach, weil die Bewegung des starren Körpers, die der Formänderung des Systems entspricht, vollständig durch 6 Verschiebungskomponenten gegeben ist, beispielsweise durch 3 zueinander senkrechte Parallelverschiebungen $\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z$ und 3 Drehwinkel, $\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c$, um 3 zueinander senkrechte Achsen a, b, c . Man hat daher in der Tat nur diese 6 Unbekannten zu bestimmen. Schneidet man nämlich alle Balken (Säulen, Pfähle), die vom starren Körper ausgehen, durch Schnitte unendlich nahe dem genannten Körper los, können die 6 Schnittkräfte jedes Schnittes als lineare Funktionen der dem Schnitte entsprechenden Verschiebungskomponenten und dadurch der genannten sechs ζ -Größen ausgedrückt werden.

Es soll hier der einfachste Fall eines räumlichen Pfahlrosts etwas näher untersucht werden, wo die einzelnen Pfähle sowohl

oben im Betonfundament wie unten an der Spitze als gelenkig gelagert angesehen werden können; es ist dies eine Voraussetzung, die natürlich nicht immer zutrifft, die aber, wenn die Pfähle nicht besonders kurz und steif sind, im allgemeinen als erste Annäherung brauchbar ist. Eine Verbesserung kann dann später gewöhnlich auf die nämliche Weise wie bei Berechnung von Sekundärspannungen in Fachwerken erzielt werden. Auch ist es natürlich möglich, die Pfähle sofort als Balken zu betrachten und die Rechnung dementsprechend durchzuführen, was uns jedoch hier zu weit führen würde.

Weiter wird vorausgesetzt, daß die gesuchten Pfahldrücke den elastischen Verschiebungen der Pfahlköpfe in der Pfahlrichtung proportional sind¹⁾.

Unter diesen Voraussetzungen kommen, wie gesagt, nur die 6 genannten ζ -Größen als Unbekannte im Problem vor, und die Berechnung beruht daher nur auf den 6 Gleichungen (162) des vorigen Kapitels. Man kann dann auch die daselbst gezeigten Vereinfachungen dieser Gleichungen benutzen und so schließlich zu den einfachen Gleichungen (166) gelangen. Hier bleibt nur übrig die wirkliche Durchführung der Bestimmung der r , s , t - und a , b , c -Hauptachsen zu zeigen und die endgültigen Koeffizienten der Gleichungen (166) zu ermitteln.

Die Pfahlrichtung möge im r , s , t -System mittels der drei in Abb. 38 angegebenen Winkel festgelegt worden, nämlich des Winkels α zwischen Pfahl und t -Achse und der beiden Winkel α_r und α_s , die die Pfahlprojektionen auf die rt - und st -Ebene mit der t -Achse einschließen. Denkt man sich wie in Abb. 38 eine Parallele zum Pfahl durch den Koordinatenursprung (sowohl Pfahl wie t -Achse positiv nach oben), so sollen α_r und α_s positiv in den Richtungen $t-r$ und $t-s$ gezählt werden; beide Winkel sind somit positiv, wenn die genannte Parallele in den ersten Quadranten zu liegen kommt; α_r ist positiv, α_s negativ, wenn die Parallele in den zweiten Quadranten kommt usw. Bei Betrachtung der Projektionen von OP auf die r - und s -Achsen ergibt sich, daß:

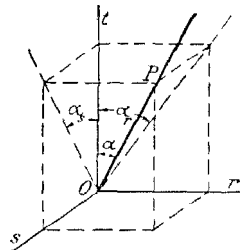


Abb. 38.

$$\cos(O r - O P) = \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha_r; \quad \cos(O s - O P) = \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha_s. \quad (167)$$

¹⁾ Eine Behandlung „ebener Pfahlroste“ unter diesen Voraussetzungen hat Verf. in „Beton u. Eisen“ 1922, S. 21, geliefert. Räumliche Pfahlroste sind m. W. zuerst von Chr. Nökkentved in seiner Doktorarbeit (Techn. Hochschule, Kopenhagen): „Beregning af Pålvråker“, Kopenhagen, 1924, behandelt.

Wir beginnen nun damit, ein beliebiges r, s, t -System zu wählen und hierin die Koeffizienten des ersten Quadranten der Gl. (162) zu berechnen und sodann mittels (163) bis (165) die Richtungen der r, s, t -Hauptachsen zu bestimmen. In einem neuen r, s, t -System mit diesen Achsrichtungen und einem hiermit vorläufig zusammenfallenden a, b, c -System werden demnächst die Koeffizienten des dritten Quadranten und die a, b, c -Hauptrichtungen berechnet. Schließlich behält man das r, s, t -System bei und bestimmt hierin diejenige Lage der a, b, c -Achsen, die alle Koeffizienten des 2. und 4. Quadranten außerhalb der Diagonalreihe zu Null macht. Übrig bleibt sodann nur, in den beiden so festgelegten Systemen die endgültigen Koeffizienten der Gl. (166) zu berechnen.

Die Koeffizienten des 1. Quadranten. Wenn der starre Körper die Parallelverschiebungen $\zeta_r, \zeta_s, \zeta_t$ bekommt, findet sich die Bewegung Δs eines beliebigen Pfahlkopfs in der Pfahlrichtung durch Projektion von $\zeta_r, \zeta_s, \zeta_t$ auf den Pfahl, also (mittels (167)):

$$\Delta s = \zeta_r \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha_r + \zeta_s \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha_s + \zeta_t \cos \alpha. \quad (168)$$

Δs ist hier positiv gezählt, wenn eine Verlängerung des Pfahls erfolgt; aus Abb. 38 ist ersichtlich, daß alle drei Glieder in (168) positive Beiträge zu Δs geben, wenn die ζ und die Winkel α_r und α_s positiv sind.

Für einen Pfahl mit positivem α_r und α_s muß diejenige Kraft S , durch die der Pfahl auf den starren Körper einwirkt, ein Druck sein, wenn die Seitenkräfte S_r, S_s, S_t nach den positiven Achsrichtungen zeigen (siehe Abb. 39). Rechnet man daher einen Druck als positiv und führt die Bezeichnung ein:

$$v = \frac{EF}{s} \cos^3 \alpha, \quad (169)$$

wo F und s Querschnitt und Länge des Pfahls bezeichnen, so ergeben sich nach (168) die folgenden Seitenkräfte des Pfahldrucks:

$$S_r = -\frac{EF}{s} \Delta s \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha_r = -v \operatorname{tg} \alpha_r (\zeta_r \operatorname{tg} \alpha_r + \zeta_s \operatorname{tg} \alpha_s + \zeta_t) \quad (170)$$

und die analogen.

In Abb. 40 ist ein r, s, t -System im starren Körper festgelegt und die drei Z -Stäbe sind so hinzugefügt, daß die Verlängerungen $\zeta_r, \zeta_s, \zeta_t$ dieser Stäbe Verschiebungen in den positiven r, s, t -Rich-

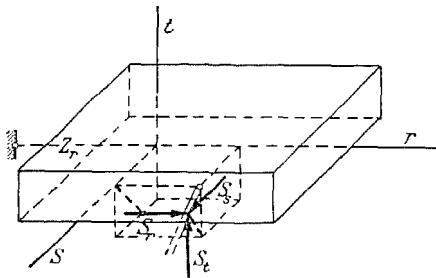


Abb. 39.

tungen bedeuten; eine Zug-Stabkraft Z_r wirkt somit auf den starren Körper nach der negativen r -Richtung. Ebenso sollen die übrigen Z -Kräfte (Z_s, Z_t) und -Momente (Z_a, Z_b, Z_c) in den negativen Achs- und Umdrehungsrichtungen positiv gezählt werden, während alle übrigen Kräfte und Momente in den positiven Koordinaten- und Umdrehungsrichtungen positiv gerechnet werden sollen.

Wenn die äußeren, auf den starren Körper einwirkenden Kräfte die Resultierende ($P_r, P_s, P_t, M_a, M_b, M_c$) haben und die Schnittkräfte, wie schon oben eingeführt, ($S_r, S_s, S_t \dots$) genannt werden, ergibt sich aus den Gleichgewichtsbedingungen für den starren Körper:

$$Z_r = P_r + \sum S_r \text{ usw.}, \quad (171)$$

wo $S_r, S_s \dots$ nach (170) Funktionen der ζ -Werte sind und mit diesen Größen verschwinden. Hieraus folgt, daß

$$Z_{r0} = P_r, \quad Z_{s0} = P_s, \dots \quad Z_{a0} = M_a \dots, \quad (172)$$

so daß die Elastizitätsgleichungen ohne weiteres dieselbe Form (162) annehmen wie für den Knoten im vorigen Kapitel. Die Koeffizienten $Z_{rr}, Z_{rs} \dots$ werden aus (171) erhalten, wenn hierin ($P = 0, \zeta_r = -1$), ($P = 0, \zeta_s = -1$), usw. gesetzt wird.

Auf diese Weise ergeben sich mit Hilfe von (170) die folgenden Werte der Koeffizienten des ersten Quadranten in (162):

	r	s	t	
r	$\sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_r$	$\sum v \operatorname{tg} \alpha_r \operatorname{tg} \alpha_s$	$\sum v \operatorname{tg} \alpha_r$	(173)
s	$\sum v \operatorname{tg} \alpha_r \operatorname{tg} \alpha_s$	$\sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_s$	$\sum v \operatorname{tg} \alpha_s$	
t	$\sum v \operatorname{tg} \alpha_r$	$\sum v \operatorname{tg} \alpha_s$	$\sum v$	

Diese Werte werden in (165) eingesetzt, und durch Auflösung und Benutzung von (163) und (164) können dann die r, s, t -Hauptachsen bestimmt werden.

Wenn die st -Ebene eine Symmetrieebene ist, haben zwei symmetrische Pfähle dasselbe α_s und gleich große α_r mit entgegengesetzten Vorzeichen. Es ist daher $Z_{rs} = 0$ und $Z_{rt} = 0$, und somit die eine Hauptachse senkrecht zur Symmetrieebene. Ist sowohl die rt - wie die st -Ebene eine Symmetrieebene, so sind alle drei r, s, t -Achsen Hauptachsen.

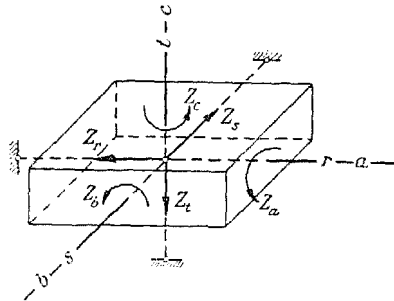


Abb. 40.

Die Koeffizienten des dritten Quadranten. Es wird ein r, s, t -System mit den jetzt bekannten Hauptachsenrichtungen gewählt (und die entsprechenden neuen Werte von α, α_r und α_s berechnet) und ein hiermit zusammenfallendes a, b, c -System; als gemeinsame Bezeichnung wird im folgenden (und in Abb. 41) das „ x, y, z -System“ gebraucht.

Um die Projektionen der Pfahlkopfbewegungen auf den Pfahl, den Drehungen $\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c$ zufolge, zu bestimmen, kann der bekannte Satz benutzt werden, daß diese Projektionen die nämlichen sind für alle Punkte einer Geraden von unveränderlicher Länge; statt des Pfahlkopfes kann daher der Schnittpunkt x_p, y_p des Pfahls mit der xy -Ebene betrachtet werden. — Durch die Drehungen ζ_a und ζ_b erhält dieser Schnittpunkt die lotrechten Bewegungen $y_p \zeta_a$ nach oben und $x_p \zeta_b$ nach unten (wenn ζ_a und ζ_b positiv), und somit die Verschiebungsprojektion

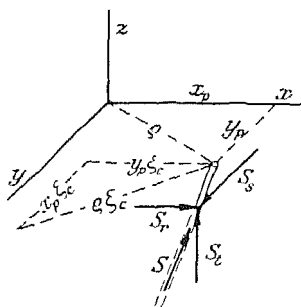


Abb. 41.

$$\Delta s = (y_p \zeta_a - x_p \zeta_b) \cos \alpha,$$

indem ein positives Δs wie oben eine Verlängerung bedeutet. Die Drehung ζ_c erzeugt eine Bewegung in der xy -Ebene, die (Abb. 41) in die mit den Achsen gleichlaufenden Komponenten $y_p \zeta_c$ und $x_p \zeta_c$ zerlegt werden kann und somit eine Verlängerung

$$\Delta s = (-y_p \operatorname{tg} \alpha_r + x_p \operatorname{tg} \alpha_s) \zeta_c \cos \alpha$$

gibt. Die durch alle drei Drehungen erzeugte Verlängerung wird sodann, indem die Abkürzung eingeführt wird:

$$\eta_p = y_p \operatorname{tg} \alpha_r - x_p \operatorname{tg} \alpha_s; \quad (174)$$

$\Delta s = (y_p \zeta_a - x_p \zeta_b - \eta_p \zeta_c) \cos \alpha$; die entsprechende lotrechte Seitenkraft des Pfahldrucks (Druck positiv) wird:

$$S_t = -v(y_p \zeta_a - x_p \zeta_b - \eta_p \zeta_c). \quad (175)$$

Die beiden übrigen Seitenkräfte des Pfahldrucks sind gegeben durch:

$$S_r = S_t \operatorname{tg} \alpha_r; \quad S_s = S_t \operatorname{tg} \alpha_s, \quad (176)$$

und die Momente dieser Kräfte um die Achsen sind:

$$+ S_t y_p; \quad - S_t x_p; \quad - S_r y_p + S_s x_p = - S_t \eta_p. \quad (177)$$

Den Gleichgewichtsbedingungen (171) für den starren Körper zufolge ist weiter:

$$Z_a = M_a + \sum S_t y_p; \quad Z_b = M_b - \sum S_t x_p; \quad Z_c = M_c - \sum S_t \eta_p,$$

woraus

$$Z_{aa} = (\sum S_t y_p)_{z_a} = -1; \quad Z_{cb} = (-\sum S_t \eta_p)_{z_b} = -1 \text{ usw.};$$

mit Benutzung von (175) und (176) ergeben sich daher die folgenden Koeffizienten im dritten Quadranten:

	a	b	c
a	$+\sum v y_p^2$	$-\sum v x_p y_p$	$-\sum v y_p \eta_p$
b	$-\sum v x_p y_p$	$+\sum v x_p^2$	$+\sum v x_p \eta_p$
c	$-\sum v y_p \eta_p$	$+\sum v x_p \eta_p$	$+\sum v \eta_p^2$

(178)

Mit diesen Werten berechnet man mittels (163) bis (165) die Richtungen der *a*-, *b*-, *c*-Hauptachsen. Hat man Symmetrie um die *bc*-Ebene, wird die *a*-Achse die eine Hauptachse. Mit der *ac*- wie mit der *bc*-Ebene als Symmetrieebene werden alle drei *abc*-Achsen Hauptachsen, und die *rst*- und *abc*-Hauptachsen fallen zusammen.

Die so bestimmten *abc*-Hauptrichtungen seien im folgenden durch ihre Richtungscoss. $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$, $(\lambda_3, \mu_3, \nu_3)$ gegeben.

Die Lage der *abc*-Hauptachsen. Im vorigen Kapitel wurde gezeigt, daß es eine zur *a*-Hauptachse gleichlaufende Gerade gibt, für welche die beiden Momente Z_{as} und Z_{at} verschwinden. Diese *a*-Achse ist in Abb. 42 mit *a* bezeichnet, sie schneidet die *yz*-Ebene im vorläufig unbekanntem Punkte (y_1, z_1) . Ebenso existiert eine *b*-Achse, für welche $Z_{br} = Z_{bt} = 0$, und eine *c*-Achse, für die $Z_{cr} = Z_{cs} = 0$ wird; die Schnittpunkte dieser beiden letztgenannten Achsen mit der *xz*-Ebene und der *xy*-Ebene sind (x_2, z_2) und (x_3, y_3) . Es handelt sich jetzt darum, diese drei Schnittpunkte zu bestimmen.

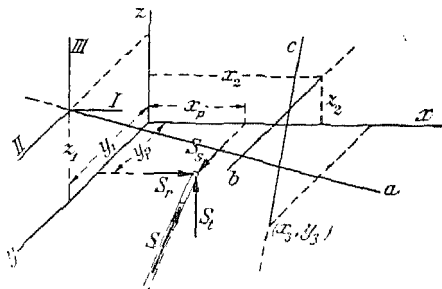


Abb. 42.

Die Verschiebung $\zeta_s = -1$ erzeugt die in der mittleren lotrechten Kolonne in (173) aufgeführten Pfahldruck-Komponenten; wenn α_r und α_s positiv, ist die Pfahlkraft ein Druck und alle drei Seitenkräfte S_r, S_s, S_t wirken auf den starren Körper ein in den positiven Koordinatenrichtungen, wie in Abb. 42 angegeben. Um die Momenten-

summe (M_a) dieser drei Seitenkräfte um die a -Achse in Abb. 42 zu bestimmen, kann man durch den Schnittpunkt (y_1, z_1) dieser Achse mit der yz -Ebene drei neue Achsen, I, II, III , zu den Koordinatenachsen gleichlaufend, führen, die Momente um diese Achsen aufschreiben und sodann auf die a -Achse projizieren. Man findet:

$$M_I = + S_s z_1 - S_t (y_1 - y_p); \quad M_{II} = - S_r z_1 - S_t x_p;$$

$$M_{III} = + S_r (y_1 - y_p) + S_s x_p,$$

$$\text{und} \quad (M_a) = M_I \lambda_1 + M_{II} \mu_1 + M_{III} \nu_1. \quad (179)$$

$$\text{Indem nun} \quad Z_{a_r} = \sum (M_a)_{\zeta_r = -1}, \quad Z_{a_s} = \sum (M_a)_{\zeta_s = -1} \quad (180)$$

ist, hat man zur Bestimmung von y_1 und z_1 :

$$\sum (M_a)_{\zeta_s = -1} = 0; \quad \sum (M_a)_{\zeta_r = -1} = 0.$$

Werden die Werte von M_I, M_{II}, M_{III} eingeführt und wird über sämtliche Pfähle summiert, so ergibt sich:

$$\sum (M_a) = \lambda_1 z_1 \sum S_s - \lambda_1 y_1 \sum S_t - (\mu_1 z_1 - \nu_1 y_1) \sum S_r$$

$$+ \lambda_1 \sum S_t y_p - \mu_1 \sum S_t x_p - \nu_1 (\sum S_r y_p - \sum S_s x_p). \quad (181)$$

Wenn hierin zuerst $\zeta_s = -1$ und dann $\zeta_t = -1$ gesetzt wird und die entsprechenden Werte von S_r, S_s, S_t aus (173) eingeführt werden, und wenn man sich weiter daran erinnert, daß die r -, s -, t -Haupttrichtungen so bestimmt wurden, daß $\sum S_r = \sum S_t = 0$ für $\zeta_s = -1$, und daß $\sum S_r = \sum S_s = 0$ für $\zeta_t = -1$, so wird nach Ausführung der Rechnungen:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\lambda_1 \sum v} [\lambda_1 \sum v y_p - \mu_1 \sum v x_p - \nu_1 \sum v \eta_p]; \\ z_1 &= - \frac{1}{\lambda_1 \sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_s} [\lambda_1 \sum v y_p \operatorname{tg} \alpha_s - \mu_1 \sum v x_p \operatorname{tg} \alpha_s \\ &\quad - \nu_1 \sum v \eta_p \operatorname{tg} \alpha_s]. \end{aligned} \right\} (182a)$$

Auf ganz ähnliche Weise bestimmen sich die b - und c -Achsen durch:

$$\left. \begin{aligned} z_2 &= \frac{1}{\mu_2 \sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_r} [\lambda_2 \sum v y_p \operatorname{tg} \alpha_r - \mu_2 \sum v x_p \operatorname{tg} \alpha_r \\ &\quad - \nu_2 \sum v \eta_p \operatorname{tg} \alpha_r]; \end{aligned} \right\} (182b)$$

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= - \frac{1}{\mu_2 \sum v} [\lambda_1 \sum v y_p - \mu_2 \sum v x_p - \nu_2 \sum v \eta_p]; \\ x_3 &= \frac{1}{\nu_3 \sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_s} [\lambda_3 \sum v y_p \operatorname{tg} \alpha_s - \mu_3 \sum v x_p \operatorname{tg} \alpha_s \\ &\quad - \nu_3 \sum v \eta_p \operatorname{tg} \alpha_s]; \end{aligned} \right\} (182c)$$

$$\left. \begin{aligned} y_3 &= - \frac{1}{\nu_3 \sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_r} [\lambda_3 \sum v y_p \operatorname{tg} \alpha_r - \mu_3 \sum v x_p \operatorname{tg} \alpha_r \\ &\quad - \nu_3 \sum v \eta_p \operatorname{tg} \alpha_r]. \end{aligned} \right\}$$

Hat man Symmetrie sowohl um die xz - wie um die yz -Ebene, werden die Richtungscoss. für die a -, b -, c -Hauptachsen $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$, so daß sich die Ausdrücke vereinfachen zu:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= -\frac{\sum v y_p \operatorname{tg} \alpha_s}{\sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_s}; & z_2 &= +\frac{\sum v x_p \operatorname{tg} \alpha_r}{\sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_r}, \\ y_1 &= x_2 = x_3 = y_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (183)$$

Mit Rücksicht auf das folgende soll noch bemerkt werden, daß man in (181), wenn die Summenzeichen fortgelassen werden, einen Ausdruck hat für das Moment um die a -Achse in Abb. 42 der drei an einem beliebigen Pfahlkopf angreifenden Seitenkräfte S_r, S_s, S_t . Dieser Ausdruck und die analogen für die b - und c -Achsen können auch, mit Hilfe von (174) und (176), geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} (M_a) &= [\lambda_1 (z_1 \operatorname{tg} \alpha_s - y_1) - (\mu_1 z_1 - \nu_1 y_1) \operatorname{tg} \alpha_r \\ &\quad + \lambda_1 y_p - \mu_1 x_p - \nu_1 \eta_p] \cdot S_t = q_1 S_t; \\ (M_b) &= [\mu_2 (x_2 - z_2 \operatorname{tg} \alpha_r) - (\nu_2 x_2 - \lambda_2 z_2) \operatorname{tg} \alpha_s \\ &\quad + \lambda_2 y_p - \mu_2 x_p - \nu_2 \eta_p] \cdot S_t = q_2 S_t; \\ (M_c) &= [\nu_3 (y_3 \operatorname{tg} \alpha_r - x_3 \operatorname{tg} \alpha_s) - (\lambda_3 y_3 - \mu_3 x_3) \\ &\quad + \lambda_3 y_p - \mu_3 x_p - \nu_3 \eta_p] \cdot S_t = q_3 S_t. \end{aligned} \right\} \quad (184)$$

Die resultierenden Koeffizienten in (166). Die Koeffizienten des 1. Quadranten sind durch die Diagonalreihe in (173) gegeben, indem sich α_r und α_s jetzt auf die r -, s -, t -Hauptachsen beziehen, also:

$$Z_{r,r} = \sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_r; \quad Z_{s,s} = \sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_s; \quad Z_{t,t} = \sum v. \quad (185)$$

Die Koeffizienten des 4. (und 2.) Quadranten sind nach (180):

$$Z_{ar} = \sum (M_a)_{;r=-1}; \quad Z_{bs} = \sum (M_b)_{;s=-1}; \quad Z_{ct} = \sum (M_c)_{;t=-1},$$

und können daher gefunden werden, indem man die Momente (184) für jeden Pfahl berechnet und über sämtliche Pfähle summiert. Durch die Summierung verschwinden zwar die vom 1. Glied innerhalb der Klammer in (184) herrührenden Beiträge, weil beispielsweise (y_1, z_1) so bestimmt wurden, daß $\sum S_s = \sum S_t = 0$; mit Rücksicht auf das folgende ist es jedoch praktischer, hiervon abzusehen und die Ausdrücke (184) unverändert zu benutzen. Es wird so erhalten:

$$Z_{ar} = \sum v q_1 \operatorname{tg} \alpha_r; \quad Z_{bs} = \sum v q_2 \operatorname{tg} \alpha_s; \quad Z_{ct} = \sum v q_3. \quad (186)$$

Die Koeffizienten des 3. Quadranten endlich, Z_{aa}, Z_{bb}, Z_{cc} , bedeuten die Momente um die a -, b - und c -Hauptachsen der den

Drehungen $\zeta_a = -1$, $\zeta_b = -1$ und $\zeta_c = -1$ entsprechenden Pfahlkräfte. Die r -, s - und t -Komponenten dieser Pfahlkräfte sind indessen gleich den Momenten (um die a -, b -, c -Achsen), die den Parallelverschiebungen $\zeta_r = -1$, $\zeta_s = -1$ und $\zeta_t = -1$ entsprechen; da diese Verschiebungen die lotrechten Pfahlkraft-Komponenten $S_t = v \operatorname{tg} \alpha_r$, $S_t = v \operatorname{tg} \alpha_s$ und $S_t = v$ erzeugen, ergeben sich augenscheinlich die der Drehung $\zeta_a = -1$ entsprechenden S_r , wenn man im ersten der Ausdrücke (184) S_t durch $v \operatorname{tg} \alpha_r$ ersetzt, oder es ergibt sich das der Drehung $\zeta_a = -1$ entsprechende S_t durch Vertauschung von S_t in (184) mit v . Im ganzen ist ersichtlich, daß die den Drehungen $\zeta_a = -1$, $\zeta_b = -1$ und $\zeta_c = -1$ entsprechenden lotrechten Pfahl-Seitenkräfte S_t durch die drei Ausdrücke (184) gegeben sind, wenn hierin v statt S_t geschrieben wird. — Aus den so ermittelten Seitenkräften S_t finden sich die gesuchten Momente Z_{aa} , Z_{bb} , Z_{cc} durch eine erneute Anwendung von (184), so daß wird:

$$Z_{aa} = \sum v q_1^2; \quad Z_{bb} = \sum v q_2^2; \quad Z_{cc} = \sum v q_3^2. \quad (187)$$

Sind die xz - und yz -Ebenen Symmetrieebenen, so werden die Richtungscos. der Hauptachsen $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$, wodurch (vgl. (183)) wird:

$$q_1 = z_1 \operatorname{tg} \alpha_s + y_p; \quad q_2 = -z_2 \operatorname{tg} \alpha_r - x_p; \quad q_3 = -\eta_p.$$

Setzt man:

$$y_p' = z_1 \operatorname{tg} \alpha_s + y_p; \quad x_p'' = z_2 \operatorname{tg} \alpha_r + x_p,$$

wo y_p' die Ordinate zum Schnittpunkt des Pfahls mit der wagerechten Ebene in der Höhe z_1 bedeutet, und ebenso x_p'' die Abszisse des Schnittpunktes der Pfahlachse mit der wagerechten Ebene in der Höhe z_2 , und beachtet man, daß der vorausgesetzten Symmetrie zufolge:

$$\sum v \operatorname{tg} \alpha_r \operatorname{tg} \alpha_s = 0; \quad \sum v y_p \operatorname{tg} \alpha_r = 0; \quad \sum v x_p \operatorname{tg} \alpha_s = 0,$$

so gelangt man zu den folgenden einfachen Ausdrücken für sämtliche Koeffizienten:

$$\left. \begin{array}{lll} Z_{rr} = \sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_r; & Z_{ss} = \sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_s; & Z_{tt} = \sum v; \\ Z_{ar} = 0; & Z_{bs} = 0; & Z_{ct} = 0; \\ Z_{aa} = \sum v y_p'^2; & Z_{bb} = \sum v x_p''^2 & Z_{cc} = \sum v \eta_p^2, \end{array} \right\} (188)$$

und die Elastizitätsgleichungen vereinfachen sich zu:

$$\left. \begin{array}{lll} P_r = Z_{rr} \zeta_r; & P_s = Z_{ss} \zeta_s; & P_t = Z_{tt} \zeta_t; \\ M_a = Z_{aa} \zeta_a; & M_b = Z_{bb} \zeta_b; & M_c = Z_{cc} \zeta_c. \end{array} \right\} (189)$$

Die Pfahldrücke. Hat man die sechs Größen ζ ermittelt, so finden sich die lotrechten Seitenkräfte der Pfahldrücke nach der Formel:

$$S_i = -v(\zeta_r \operatorname{tg} \alpha_r + \zeta_s \operatorname{tg} \alpha_s + \zeta_t + q_1 \zeta_a + q_2 \zeta_b + q_3 \zeta_c). \quad (190)$$

b) Eine starre Scheibe als Teil der Konstruktion.

Die Konstruktion enthält eine starre Scheibe. Es wird angenommen, daß die Scheibe keinen Widerstand gegen Kräfte senkrecht zu ihrer Ebene darbietet und daher auch keinen Einfluß ausübt auf die so gerichteten Seitenkräfte der von der Scheibe ausgehenden Konstruktionsteile. Dagegen sind die Verschiebungen in der Scheibenebene aller einzelnen Punkte der Scheibe durch drei Verschiebungskomponenten gegeben, z. B. zwei Parallelverschiebungen ζ_r und ζ_s und eine Drehung ζ_a . Die in der Scheibenebene gelegenen Seitenkräfte der Spannungen aller an die Scheibe angeschlossenen Konstruktionsteile können dann als Funktionen der drei ζ -Größen ausgedrückt werden, und diese können mittels der drei gewöhnlichen Elastizitätsgleichungen ermittelt werden. Diese Gleichungen endlich sind die nämlichen wie für einen Knoten einer ebenen Rahmenkonstruktion und können genau wie am Schluß von Kapitel 7, (78) bis (81), vereinfacht werden.

Sind alle äußeren Kräfte und alle Konstruktionsteile in der Scheibenebene gelegen, so liegt ein Spezialfall einer ebenen Rahmenkonstruktion vor, das besonders einfach zu berechnen ist. Der „ebene Fall“ eines Pfahlrostes, der in der Praxis am häufigsten vorkommt, und in „Beton und Eisen“ 1922, S. 21 behandelt ist, gehört hierher.

c) Eine elastische Scheibe (oder Körper) als Teil der Konstruktion.

Die Konstruktion enthält eine elastische Scheibe. Bisweilen ist es natürlich eine zu grobe Annäherung, eine in der Konstruktion enthaltene Scheibe als unendlich starr zu betrachten. Die Berechnung wird jedoch erheblich beschwerlicher, wenn Rücksicht auf die Formänderungen der Scheibe genommen werden soll, so daß hier nur ein paar Andeutungen gegeben werden können.

Wenn die Scheibe durch Hinzufügung einiger weniger Z-Stäbe unbeweglich (d. h. bei Vernachlässigung der Normalkräfte: starr) gemacht werden kann, ist die Anwendung der Deformationsmethode gewissermaßen angezeigt, indem die Stabkraft eines beliebigen Stabes, das Moment in einem beliebigen Schnitte usw. als

$$S = S_0' - S_r' \zeta_r - S_s' \zeta_s \dots$$

ausgedrückt werden kann, wo S_0' die Spannung (Moment ...) bedeutet, die sich unter Voraussetzung einer starren Scheibe ergibt. Um die Spannkkräfte S_r' , S_s' ... zu ermitteln, läßt man die Kraft $Z_r = 1$ als einzige Belastung auf die Scheibe wirken, bestimmt die entsprechenden Spannungen sowohl in der Scheibe wie in den übrigen Teilen der Konstruktion und schließlich auch die hieraus sich ergebende Verlängerung δ_r des Z_r -Stabes; die $\zeta_r = -1$ entsprechenden Spannungen S_r' werden dann durch Division mit δ_r erhalten.

Das nämliche Verfahren kann endlich auch auf einen elastischen Körper, wenn ein solcher in der Konstruktion enthalten ist, angewandt werden. Doch dürfte es selten vorkommen, daß ein solcher Körper durch so wenige Z -Stäbe unbeweglich gemacht werden kann, als daß diese Berechnungsweise eine Erleichterung bedeuten sollte.



Die Methode der Alpha-Gleichungen zur Berechnung von Rahmenkonstruktionen. Von Ing. Axel Bendixsen. Mit 31 Textfiguren. (90 S.) 1914. RM 4.—

Die Berechnung des symmetrischen Stockwerkrahmens mit geneigten und lotrechten Ständern mit Hilfe von Differenzgleichungen. Von Dr. techn. Ing. Josef Fritsche, Prag. Mit 17 Abbildungen. (96 S.) 1923. RM 4.—

Berechnung von Rahmenkonstruktionen und statisch unbestimmten Systemen des Eisen- und Eisenbetonbaues. Von Ing. P. Ernst Glaser, Ilmenau i. Th. Mit 112 Textabbildungen. (140 S.) 1919. RM 4.50

Mehrteilige Rahmen. Verfahren zur einfachen Berechnung von mehrstieligen, mehrstöckigen und mehrteiligen geschlossenen Rahmen (Rahmenbalkenträgern). Von Ingenieur Gustav Spiegel. Mit 107 Textabbildungen. (198 S.) 1920. RM 7.—

Die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke nach der Methode des Viermomentensatzes. Von Dr.-Ing. Friedrich Bleich. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 117 Abbildungen im Text. (225 S.) 1925. Gebunden RM 15.—

Die Statik des ebenen Tragwerkes. Von Prof. Martin Grüning, Hannover. Mit 434 Textabbildungen. (714 S.) 1925. Gebunden RM 45.—

Statik für den Eisen- und Maschinenbau. Von Prof. Dr.-Ing. Georg Unold, Chemnitz. Mit 606 Textabbildungen. (350 S.) 1925. Gebunden RM 22.50

Die Knickfestigkeit. Von Dr.-Ing. Rudolf Mayer, Privatdozent an der Technischen Hochschule in Karlsruhe. Mit 280 Textabbildungen und 87 Tabellen. (510 S.) 1921. RM 20.—

Die Methode der Festpunkte zur Berechnung der statisch unbestimmten Konstruktionen mit zahlreichen Beispielen aus der Praxis insbesondere ausgeführten Eisenbetontragwerken. Von Dr.-Ing. Ernst Suter. Mit 591 Figuren im Text und auf 15 Tafeln. (745 S.) 1923. RM 19.—; gebunden RM 21.—

Statik der Vierendeelträger. Von Dr.-Ing. Karl Kriso, Graz. Mit 185 Textfiguren und 11 Tabellen. (298 S.) 1922.
RM 13.—; gebunden RM 15.—

Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage und ihre Anwendung auf den Tiefbau nebst einer Tafel der Kreis- und Hyperbelfunktionen. Von japanisch. Prof. Dr.-Ing. Keiichi Hayashi, Japan. Mit 150 Textfiguren. (312 S.) 1921.
RM 11.—

Zur Berechnung des beiderseits eingemauerten Trägers unter besonderer Berücksichtigung der Längskraft. Von japan. Prof. Dr.-Ing. Fukuhei Takabeja, Japan. Mit 28 Textabbildungen und 2 Formeltafeln. (56 S.) 1924.
RM 3.—

Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten unter besonderer Berücksichtigung der trägerlosen Pilzdecken. Von Dr.-Ing. H. Marcus, Direktor der HUTA, Hoch- und Tiefbau-Aktiengesellschaft, Breslau. Mit 123 Textabbildungen. (376 S.) 1924.
RM 21.—; gebunden RM 21.80

Die vereinfachte Berechnung biegsamer Platten. Von Dr.-Ing. H. Marcus, Direktor der HUTA, Hoch- und Tiefbau-Aktiengesellschaft, Breslau. (Erweiterter Sonderabdruck aus „Der Bauingenieur“, Zeitschrift für das gesamte Bauwesen, 5. Jahrgang 1924, Heft 20 und 21.) Mit 33 Textabbildungen. (92 S.) 1925.
RM 5.10

Die elastischen Platten. Die Grundlagen und Verfahren zur Berechnung ihrer Formänderungen und Spannungen, sowie die Anwendungen der Theorie der ebenen zweidimensionalen elastischen Systeme auf praktische Aufgaben. Von Privatdozent Dr.-Ing. A. Nádai, Göttingen. Mit 187 Abbildungen im Text und 8 Zahlentafeln. (334 S.) 1925. Gebunden RM 24.—

Kreisplatten auf elastischer Unterlage. Theorie zentral-symmetrisch belasteter Kreis- und Kreisringplatten auf elastisch nachgiebiger Unterlage. Mit Anwendungen der Theorie auf die Berechnung von Kreisplattenfundamenten und die Einspannung in elastische Medien. Von Dr.-Ing. Ferdinand Schleicher, Privatdozent an der Technischen Hochschule Karlsruhe. Mit 52 Textabbildungen.
Erscheint im Frühjahr 1926.

Theorie und Berechnung der statisch unbestimmten Tragwerke. Elementares Lehrbuch. Von H. Buchholz. Mit 303 Textabbildungen. (218 S.) 1921.
RM 8.—

Die linearen Differenzgleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen. Von Privatdozent Dr. Paul Funk, Prag. Mit 24 Textabbildungen. (91 S.) 1920.
RM 3.—



BIBLIOTEKA GŁÓWNA

100135N/1