

**Politechnika Opolska**  
**Wydział Budownictwa**

**mgr inż. Juliusz Kuś**

***Analiza stateczności belek ze zbieżnymi przekrojami  
poprzecznymi***  
*rozprawa doktorska*



Promotor:

**dr hab. inż. Jan Źmuda,**  
**profesor Politechniki Opolskiej**

Opole, wrzesień 2012 r.

## SPIS TREŚCI

<b>Wykaz ważniejszych oznaczeń</b>	<b>4</b>
<b>1. Wstęp</b>	<b>5</b>
1.1. Wprowadzenie	5
1.2. Cel i zakres rozprawy	5
1.3. Tezy rozprawy	6
1.4. Podstawowe założenia	7
<b>2. Aktualny stan wiedzy</b>	<b>8</b>
2.1. Zagadnienie stateczności belek stalowych	8
2.2. Zagadnienie stateczności elementów stalowych ze zbieżnymi przekrojami poprzecznymi.	8
<b>3. Funkcjonał całkowitej energii potencjalnej belek i warunki brzegowe</b>	<b>10</b>
3.1. Cechy geometryczne belek ze zmiennymi przekrojami	10
3.2. Funkcjonał całkowitej energii potencjalnej w belce o zmiennym przekroju poprzecznym	13
3.3. Warunki brzegowe	19
<b>4. Rozwiązanie ogólne zagadnienia stateczności metodą Rayleigh'a-Ritz'a</b>	<b>20</b>
<b>5. Rozwiązanie szczegółowe zagadnienia stateczności metodą Rayleigh'a-Ritz'a, dla belek obciążonych siłami poprzecznymi skupionymi, rozłożonymi, momentami skupionymi</b>	<b>25</b>
5.1. Belka obciążona obciążeniem ciągłym równomiernie rozłożonym	25
5.2. Belka obciążona momentami skupionymi na końcach	33
5.3. Belka obciążona siłą skupioną	38
5.4. Belka obciążona dwiema siłami skupionymi	46
5.5. Wspornik obciążony obciążeniem ciągłym równomiernie rozłożonym	52
5.6. Wspornik obciążony siłą skupioną na swobodnym końcu	56
<b>6. Rozwiązanie ogólne zagadnienia stateczności belek Metodą Elementów Skończonych w programie ANSYS</b>	<b>59</b>
6.1. Wprowadzenie	59
6.2. Model belkowy	59
6.3. Model powłokowy	60
6.4. Porównanie wybranych obliczeń momentów krytycznych belek ze zbieżnymi przekrojami poprzecznymi metodą analityczną i MES.	61
<b>7. Ocena nośności belek ze zbieżnymi przekrojami poprzecznymi z uwzględnieniem zwichrzenia</b>	<b>77</b>

<b>8. Podsumowanie i wnioski</b>	<b>80</b>
<b>Literatura</b>	<b>82</b>
<b>Normy</b>	<b>85</b>
<b>Spis rysunków</b>	<b>86</b>
<b>Spis tabel</b>	<b>90</b>
<b>Dodatek – pliki wsadowe do programu ANSYS</b>	<b>92</b>

## Wykaz ważniejszych oznaczeń

$A$	–	pole przekroju poprzecznego,
$B_\omega$	–	bimoment,
$b_f$	–	szerokość półki,
$E$	–	moduł Younga dla stali,
$e_z(x)$	–	odległość między punktem zaczepienia siły a środkiem ścinania przekroju poprzecznego w płaszczyźnie środka,
$G$	–	moduł sprężystości poprzecznej,
$h_w$	–	wysokość środka,
$I_y$	–	moment bezwładności przekroju poprzecznego względem osi $y$ ,
$I_z$	–	moment bezwładności przekroju poprzecznego względem osi $z$ ,
$I_{zt}$	–	moment bezwładności części ściskanej przekroju poprzecznego względem osi $z$ ,
$I_{zb}$	–	moment bezwładności części rozciąganej przekroju poprzecznego względem osi $z$ ,
$I_T$	–	moment bezwładności przekroju poprzecznego przy czystym ścinaniu,
$I_\omega$	–	wycinkowy moment bezwładności przekroju poprzecznego,
$M_y, M_z$	–	momenty zginające względem osi $y$ i $z$ ,
$M_{c,Rd}$	–	nośność przy zginaniu,
$M_{b,Rd}$	–	nośność przy zwichrzeniu,
$q_z$	–	obciążenie równomiernie rozłożone w kierunku $z$ ,
$Q_z$	–	siła skupiona w kierunku $z$ ,
$t_f$	–	grubość półki,
$t_w$	–	grubość środka,
$U$	–	energia odkształcenia,
$U_l$	–	liniowy składnik energii odkształcenia,
$U_{nl}$	–	nieliniowy składnik energii odkształcenia,
$W$	–	praca sił zewnętrznych,
$W_{ply}$	–	plastyczny wskaźnik wytrzymałości przekroju poprzecznego względem osi $y$ ,
$u, v, w$	–	przemieszczenia środka ścinania $C$ , na kierunkach $x, y, z$ ,
$u_M, v_M, w_M$	–	składowe przemieszczenia punktu $M$ , na kierunkach $x, y, z$ ,
$x, y, z$	–	osie głównego układu współrzędnych,
$\alpha_{TP}$	–	parametr zbieżności środka,
$\beta_{TP}$	–	parametr zbieżności pasów,
$\beta_y, \beta_z, \beta_\omega$	–	współczynniki Wagnera,
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}$	–	składniki tensora odkształcenia,
$\varepsilon_b, \varepsilon_{nl}$	–	liniowe i nieliniowe składniki tensora odkształcenia,
$\Phi_{LT}$	–	współczynnik krzywej zwichrzenia,
$\bar{\lambda}_{LT}$	–	smukłość przy zwichrzeniu,
$\chi_{LT}$	–	współczynnik zwichrzenia,
$\omega$	–	współrzędna wycinkowa,
$\Pi_{LTB}$	–	funkcjonał energii potencjalnej,

## **1. Wstęp**

### **1.1. Wprowadzenie**

Problem stateczności zginanych belek stalowych nazywany jest powszechnie w literaturze niestatecznością płaskiej postaci zginania lub zwichrzeniem.

Rodzaje i usytuowanie sił obciążających belki, warunki podparcia belek, mają znaczący wpływ na ich stateczność ogólną.

Przy określaniu nośności belek stalowych, zagadnienia stateczności ogólnej i miejscowej środników i pólek ściskanych traktowane są jako zjawiska odrębne, z uwagi na praktyczny aspekt projektowania. W momencie utraty stateczności ogólnej, czyli ugięcia bocznego i skręcenia następuje spadek sztywności przekroju, co w konsekwencji prowadzi do zmniejszenia nośności granicznej belki. Na utratę stateczności narażone są belki niezabezpieczone konstrukcyjnie przed

zwichrzeniem, przekroje z dużym stosunkiem sztywności  $\frac{I_y}{I_z}$ , czyli belki z wysokimi środnikami.

Problem zwichrzenia występuje także w belkach o zmiennych liniowo przekrojach poprzecznych, dla których wysokości środnika i szerokości pólki osiągają znaczne wielkości. W niniejszej pracy nie analizowano zagadnień dotyczących stateczności miejscowej ścianek przekrojów belek.

### **1.2. Cel i zakres rozprawy**

Celem niniejszej rozprawy jest zastosowanie metody rachunku wariacyjnego w określaniu momentów krytycznych zwichrzenia i oceny ich wpływu na nośność obliczeniową przekrojów belek stalowych ze zmiennymi na ich długości przekrojami poprzecznymi, z urozmaiconymi schematami sił obciążających i z różnymi więzami podporowymi.

Cel zrealizowano w oparciu o energetyczną metodę Rayleigh'a-Ritza, bazującej na minimalizowaniu funkcjonału energii potencjalnej belki stalowej, o zmiennym przekroju środnika i pólki.

Rozprawę podzielono na osiem rozdziałów.

W rozdziale pierwszym sformułowano cel rozprawy, opisano zakres, postawiono jej tezy i przedstawiono podstawowe założenia.

W rozdziale drugim podano aktualny przegląd literatury i stan wiedzy dotyczący zagadnienia zwichrzenia belek stalowych, w tym skrótowo belek pryzmatycznych i szczegółowo belek ze zbieżnymi przekrojami poprzecznymi.

Rozdział trzeci zawiera charakterystykę cech geometrycznych pięciu typów belek ze zmiennym na długości przekrojem poprzecznym. W rozdziale tym przedstawiono postacie wzorów

określających funkcjonal całkowitej energii potencjalnej w belce o zmiennym przekroju i warunki brzegowe.

W rozdziale czwartym omówiono podstawy teoretyczne metody energetycznej Rayleigh'a-Ritz'a oraz i podano rozwiązanie na obliczanie momentów krytycznych zwichrzenia belek uogólnione na dowolny schemat i przypadek obciążenia.

W kolejnym rozdziale podano szczegółowe rozwiązania zagadnień stateczności z wyznaczeniem momentów krytycznych w zależności od gradientów momentów zginających generowanych przez:

- obciążenie równomiernie rozłożone na długości,
- momenty skupione na końcach,
- pojedynczą siłę skupioną w środku rozpiętości belki,
- dwie siły skupione.

Przytoczono liczbowe wartości obliczonych momentów krytycznych zwichrzenia. Obliczeń wykonano dla belek jednoprzęsłowych, wieńkowo podpartych na końcach i belek wspornikowych.

Rozdział szósty zawiera opis i rozwiązanie zagadnienia zwichrzenia, bazującego na Metodzie Elementów Skończonych, przy wykorzystaniu programu komputerowego ANSYS, dla dwóch wariantów kształtu elementów skończonych. Rozdział przedstawia także porównanie wyników otrzymanych z rozwiązania metody Rayleigh'a – Ritz'a i Metody Elementów Skończonych z rozdziału piątego.

W rozdziale siódmym określono zasady oceny nośności obliczeniowej przekrojów wybranych typów belek, z uwzględnieniem współczynników niestateczności ogólnej i przedstawiono przykłady liczbowe.

Rozdział ósmy zawiera podsumowanie osiągniętych w pracy wyników i wnioski.

### **1.3. Tezy rozprawy**

Podstawowe tezy niniejszej rozprawy można sformułować następująco:

- a) metoda energetyczna Rayleigh'a-Ritz'a, minimalizująca funkcjonal energii potencjalnej obciążonej belki, może być wykorzystywana do wyznaczania momentu krytycznego inicjującego utratę stateczności stalowej belki zginanej ze zmiennymi przekrojami na długości,
- b) niestateczność ma znaczący wpływ na spadek nośności granicznej zginanych, niezabezpieczonych konstrukcyjnie przed zwichrzeniem, belek ze zmiennymi liniowo wysokościami średnic i szerokościami pasów,
- c) metody numeryczne są skutecznymi narzędziami w ocenie wpływu niestateczności belek na ich nośności.

Według autora, za oryginalne elementy rozprawy można uznać:

- a) opracowanie algorytmu wyznaczania obciążenia krytycznego, przy wykorzystaniu metody energetycznej Rayleigh'a-Ritz'a, dla belek ze zbieżnymi przekrojami poprzecznymi,
- b) wyznaczenie zmodyfikowanych wyrażeń określających energię potencjalną belki stalowej, o liniowo zmiennych przekrojach poprzecznych,
- c) opracowanie sparametryzowanych plików wsadowych do programu ANSYS, umożliwiających generowanie procesu obliczeniowego wyznaczającego obciążenie krytyczne, dla wybranych przypadków belek ze zbieżnymi przekrojami poprzecznymi,
- d) wykonanie analizy wpływu niestateczności na nośność graniczną belek stalowych ze zbieżnymi przekrojami poprzecznymi.

#### **1.4. Podstawowe założenia**

Przyjęto następujące założenia wykorzystane w rozprawie:

- belki są proste, ze zmiennymi na długości przekrojami poprzecznymi,
- elementy wykonane są ze stali konstrukcyjnych niestopowych lub niskostopowych,
- przemieszczenia elementów są małe, w porównaniu do ich wymiarów poprzecznych,
- odkształcenia jednostkowe są małe w porównaniu z jedynką,
- obciążenia elementów mają charakter statyczny,
- przekroje poprzeczne są mono lub bisymetryczne dwuteowe,
- pominięto wpływ imperfekcji geometrycznych i materiałowych belek stalowych.

## **2. Aktualny stan wiedzy**

### **2.1. Zagadnienie stateczności belek stalowych**

Zagadnienie stateczności belek stalowych było analizowane już pod koniec XIX wieku przez Michell'a i Prandtl'a. W kolejnych latach (1905) Timoshenko poszerzył podane przez nich rozwiązanie, a w roku 1959 Vlasow podał ogólną postać równań różniczkowych stateczności ogólnej belek. W latach sześćdziesiątych dwudziestego wieku, pojawiło się dużo monografii dotyczących zagadnienia stateczności konstrukcji metalowych (Timoshenko S. P., Gere J. M., 1961, Brzoska Z, 1965, Brezina V., 1966). Wraz z rozwojem komputerowych technik obliczeniowych, pojawiły się opracowania uwzględniające numeryczne rozwiązania zagadnień stateczności (Weiss S., Gizejowski M., 1991, Trahair N.S., 1993). Z początkiem XXI wieku wielu autorów dokonało podsumowania istniejącego stanu wiedzy dotyczącej stateczności konstrukcji metalowych, uwzględniając osiągnięcia nauki i technik informatycznych (Mohri F., 2003, Żmuda J., 2004, Gosowski B., 2004, Trahair N.S., Bradford M. A., Nethercot D. A., Gardner L., 2008). Kompleksowe opracowanie zagadnień stateczności przedstawia w swoich pracach Galambos (Galambos T. V., Surovek A.E., 2008) i Ziemian (Ziemian R. B., 2010), podając obszerne podstawy teoretyczne jak i praktyczne aspekty projektowania konstrukcji metalowych w budownictwie.

### **2.2. Zagadnienie stateczności elementów stalowych ze zbieżnymi przekrojami poprzecznymi.**

Stateczność belek stalowych ze zmieniającym się liniowo przekrojem poprzecznym na długości elementu było analizowane przez wąską grupę specjalistów. Pierwsze prace dotyczące tego zagadnienia pojawiły się na w latach pięćdziesiątych i sześćdziesiątych XX wieku. Butler (Butler D. J., 1966) przedstawił wyniki badań doświadczalnych dwuteowych i ceowych belek stalowych ze zmiennym przekrojem poprzecznym. W 1972 Kitipornchai i Trahair podali przybliżone wzory do obliczania obciążenia krytycznego, inicjującego utratę stateczności, belek stalowych ze zbieżnymi przekrojami poprzecznymi. Autorzy w tej pracy przeprowadzili również eksperyment na aluminiowych, wolnopodpartych, zbieżnych, belkach dwuteowych, wykazując dużą zgodność wyników obciążeń krytycznych z badań, z wynikami obciążeń krytycznych uzyskanych z formuł analitycznych.

Metoda Różnic Skończonych została zastosowana do rozwiązania zagadnienia stateczności zbieżnych belek stalowych przez Brown'a (1985). Wang, Thevendran i Kitipornchai (1986), i Saka (1997) przedstawili w swoich pracach, zagadnienie optymalnego doboru kształtu średnika belki stalowej, z uwagi na maksymalne obciążenie krytyczne.



Pierwsze zastosowania Metody Elementów Skończonych w wyznaczaniu obciążenia krytycznego zbieżnych belek stalowych zostało zaprezentowane przez Yeong-Bin Yang i Jong-Dar Yau (1986). W ich pracy został zaproponowany belkowy element skończony uwzględniający nierównomierne zginanie, bazujący na membranowej teorii powłok. Autorzy przedstawili zapis wyrazów macierzy sztywności zbieżnych belek, pozwalający na rozwiązanie zagadnienia stateczności. Otrzymane wyniki porównali z istniejącymi wynikami badań eksperymentalnych Kitipornchai'a i Trahair'a. Kolejne zastosowania MES, w rozwiązywaniu zagadnień stateczności, przedstawił Bradford (1987), a także Bradford i Cuk (1988). Badacze w swoich pracach zaproponowali macierze sztywności i bezwładności belkowych elementów skończonych uwzględniające zmieniający się na długości przekrój poprzeczny. Rozwiązanie analityczne, dla belki wolnopodpartej i wspornikowej, autorzy porównali z wynikami badań doświadczalnych Kitipornchai'a i Trahair'a, uzyskując zbliżone wartości obciążeń krytycznych. Podobne rozwiązanie opublikowali w 1996 Gupta, Wang i Blandford. Problematykę stateczności stalowych belek ze zbieżnymi przekrojami poprzecznymi podjął również: Żmuda (2004), Żmuda, Jankowiak, Karasińska (2006), i Żmuda i Kuś (2011). Uproszczony sposób wyznaczania obciążenia krytycznego, dla belki ze zbieżnym środkiem, opublikował Raftoyiannis i inni (2006). Obszerną publikację dotyczącą stateczności belek stalowych, ze zbieżnymi środkami, zaprezentował Andrade i inni (2007). W tej pracy przedstawili zastosowanie metody Rayleigh'a – Ritz'a do wyznaczania obciążenia krytycznego belek swobodnie podpartych i wsporników, z dwoma typami zbieżności przekroju środka, dla różnych rozpiętości. Uzyskane rozwiązania porównali z analizą MES w programie ABAQUS, wykazując dużą zgodność otrzymanych wyników. Rozszerzenie powyższego opracowania, stanowi artykuł autorów: Zhang Lei i Tong Geng Shu (2008). Zaproponowali w swoim artykule, wyrażenie opisujące energię potencjalną w belce ze zbieżnym środkiem, z wyrazami zależnymi od kąta nachylenia półki belki do jej osi. Przeprowadzili także analizę dwóch przypadków belek zbieżnych w programie ANSYS, porównując wyniki obliczeń własnych.

Jong Dar Yau (2006) przedstawił analizę stateczności belek stalowych o liniowo zmiennych przekrojach poprzecznych, pod obciążeniem momentami skręcającymi.

Nieliniową analizę stateczności cienkościennych powłok ze zmiennymi przekrojami poprzecznymi przedstawił, w swoich artykułach, Ronagh i inni (1999).

Zagadnieniem stateczności stalowych słupów o zmiennych przekrojach poprzecznych, zajmował się m. in. Smith (1988), Mendera (1994, 1995), a także Raftoyiannis (2005). Propozycję obliczeń nośności stalowych słupów ze zbieżnymi przekrojami, z uwzględnieniem zwichrzenia, zaproponowano w pracy Marques i inni (2011).

### 3. Funkcjonał całkowitej energii potencjalnej belek i warunki brzegowe

#### 3.1. Cechy geometryczne belek ze zmiennymi przekrojami

Aktualne możliwości technologiczne zakładów wytwarzających stalowe dźwigary blachownicowe, pozwalają na wytwarzanie elementów o zmiennych przekrojach poprzecznych na długości.

Stosowanie elementów o zbieżnych przekrojach w konstrukcjach budowlanych jest dość powszechne, z uwagi na znaczące korzyści ekonomiczne, wynikające z optymalnego wykorzystania przekrojów, stosownie do wartości momentów zginających.

Cechy geometryczne belek ze zbieżnymi przekrojami pasów i średnika są cechami zależnymi od parametru zbieżności średnika  $\alpha_{TP}$  i parametru zbieżności pasów  $\beta_{TP}$ . Tabela 3.1.1 zawiera zestawienie pięciu modeli belek zbieżnych. W pracy poddano analizie cztery pierwsze typy belek, z uwagi na ich najbardziej powszechne zastosowanie w budownictwie. Przyjęto następujące podstawowe właściwości początkowego przekroju poprzecznego:

$$A_0 = (2b_{f0}t_f + h_{w0}t_w) \quad (3.1a)$$

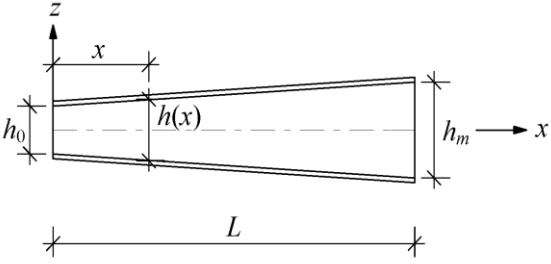
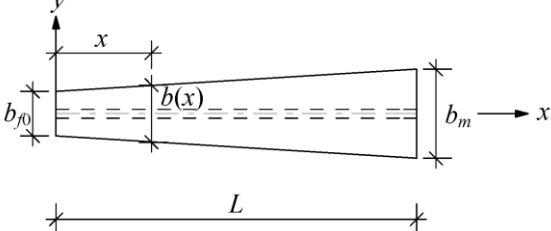
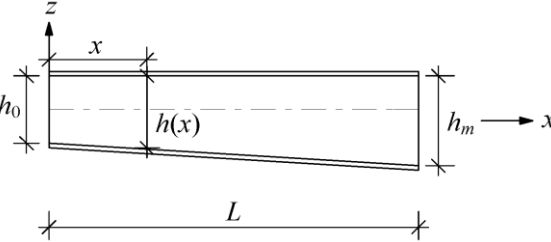
$$I_{T0} = \frac{1}{3}(2b_{f0}t_f^3 + h_{w0}t_w^3) \quad (3.1b)$$

$$I_{z0} = \frac{1}{6}b_{f0}^3t_f \quad (3.1c)$$

$$I_{\omega0} = I_{z0} \frac{h_{d0}^2}{4} \quad (3.1d)$$

Tabela 3.1.1. Parametry geometryczne belek zbieżnych.

Typ	Schemat przekroju poprzecznego	Parametry zbieżności przekroju	Zakres
1		$\alpha_{TP} = \frac{2(h_m - h_0)}{h_0}$ $h(x) = h_0 \left( 1 + \alpha_{TP} \left( 1 - \frac{ x }{L} \right) \right)$ $b(x) = b_{f0}$	$\alpha_{TP} \geq 0$
2		$\beta_{TP} = \frac{2(b_m - b_{f0})}{b_{f0}}$ $b(x) = b_{f0} \left( 1 + \beta_{TP} \left( 1 - \frac{ x }{L} \right) \right)$ $h(x) = h_0$	$\beta_{TP} \geq 0$

3		$\alpha_{TP} = \frac{h_m - h_0}{h_0}$ $h(x) = h_0 \left( 1 + \alpha_{TP} \frac{x}{L} \right)$ $b(x) = b_{f0}$	$\alpha_{TP} \geq 0$
4		$\beta_{TP} = \frac{b_m - b_{f0}}{b_{f0}}$ $b(x) = b_{f0} \left( 1 + \beta_{TP} \frac{x}{L} \right)$ $h(x) = h_0$	$\beta_{TP} \geq 0$
5		$h(x) = \frac{h_0}{2} \left( 2 + \alpha_{TP} \frac{x}{L} \right)$ $b(x) = b_{f0}$	$\alpha_{TP} \geq 0$ $\alpha_{TP} \leq 1$

Zakładając, że grubość środka i półek mają stałe wartości na długości belki, cechy geometryczne dowolnego przekroju poprzecznego zmieniające się na długości, można wyrazić w następujący sposób:

– typ schematu 1, 2

$$A(x) = A_0 + (2b_{f0}t_f\beta_{TP} + h_{w0}t_w\alpha_{TP}) \left( 1 - \left| \frac{x}{L} \right| \right) \quad (3.2a)$$

$$I_T(x) = I_{T0} + \frac{1}{3} (2b_{f0}t_f^3\beta_{TP} + h_{w0}t_w^3\alpha_{TP}) \left( 1 - \left| \frac{x}{L} \right| \right) \quad (3.2b)$$

$$I_z(x) = I_{z0} \left( 1 + 3\beta_{TP} \left( 1 - \left| \frac{x}{L} \right| \right) + 3\beta_{TP}^2 \left( 1 - \left| \frac{x}{L} \right| \right)^2 + \beta_{TP}^3 \left( 1 - \left| \frac{x}{L} \right| \right)^3 \right) \quad (3.2c)$$

$$I_y(x) = I_{y0} \left( 1 + (\beta_{TP} + 5\alpha_{TP}) \left( 1 - \left| \frac{x}{L} \right| \right) + (4\alpha_{TP}^2 + 2\alpha_{TP}\beta_{TP}) \left( 1 - \left| \frac{x}{L} \right| \right)^2 + (\alpha_{TP}^3 + \alpha_{TP}^2\beta_{TP}) \left( 1 - \left| \frac{x}{L} \right| \right)^3 \right) \quad (3.2d)$$

$$I_\omega(x) = I_{\omega0} \left( 1 + (\beta_{TP} + 2\alpha_{TP}) \left( 1 - \left| \frac{x}{L} \right| \right) + (\alpha_{TP}^2 + 3\beta_{TP}^2 + 6\alpha_{TP}\beta_{TP}) \left( 1 - \left| \frac{x}{L} \right| \right)^2 + (3\alpha_{TP}^2\beta_{TP} + 6\beta_{TP}^2\alpha_{TP} + \beta_{TP}^3) \left( 1 - \left| \frac{x}{L} \right| \right)^3 + (3\beta_{TP}^2\alpha_{TP}^2 + 2\beta_{TP}^3\alpha_{TP}) \left( 1 - \left| \frac{x}{L} \right| \right)^4 + \beta_{TP}^3\alpha_{TP}^2 \left( 1 - \left| \frac{x}{L} \right| \right)^5 \right) \quad (3.2e)$$

– typ schematu 3, 4

$$A(x) = A_0 + (2b_{f0}t_f\beta_{TP} + h_{w0}t_w\alpha_{TP})\left(\frac{x}{L}\right) \quad (3.3a)$$

$$I_T(x) = I_{T0} + \frac{1}{3}(2b_{f0}t_f^3\beta_{TP} + h_{w0}t_w^3\alpha_{TP})\left(\frac{x}{L}\right) \quad (3.3b)$$

$$I_z(x) = I_{z0}\left(1 + 3\beta_{TP}\left(\frac{x}{L}\right) + 3\beta_{TP}^2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \beta_{TP}^3\left(\frac{x}{L}\right)^3\right) \quad (3.3c)$$

$$I_y(x) = I_{y0}\left(1 + (\beta_{TP} + 5\alpha_{TP})\left(\frac{x}{L}\right) + (4\alpha_{TP}^2 + 2\alpha_{TP}\beta_{TP})\left(\frac{x}{L}\right)^2 + (\alpha_{TP}^3 + \alpha_{TP}^2\beta_{TP})\left(\frac{x}{L}\right)^3\right) \quad (3.3d)$$

$$I_\omega(x) = I_{\omega0}\left(1 + (\beta_{TP} + 2\alpha_{TP})\left(\frac{x}{L}\right) + (\alpha_{TP}^2 + 3\beta_{TP}^2 + 6\alpha_{TP}\beta_{TP})\left(\frac{x}{L}\right)^2 + (3\alpha_{TP}^2\beta_{TP} + 6\beta_{TP}^2\alpha_{TP} + \beta_{TP}^3)\left(\frac{x}{L}\right)^3 + (3\beta_{TP}^2\alpha_{TP}^2 + 2\beta_{TP}^3\alpha_{TP})\left(\frac{x}{L}\right)^4 + \beta_{TP}^3\alpha_{TP}^2\left(\frac{x}{L}\right)^5\right) \quad (3.3e)$$

– typ schematu 5

$$A(x) = A_0 + (2b_{f0}t_f\beta_{TP} + h_{w0}t_w\alpha_{TP})\left(\frac{x}{L}\right) \quad (3.4a)$$

$$I_T(x) = I_{T0} + \frac{1}{3}(2b_{f0}t_f^3\beta_{TP} + h_{w0}t_w^3\alpha_{TP})\left(\frac{x}{L}\right) \quad (3.4b)$$

$$I_z(x) = I_{z0}\left(1 + 3\beta_{TP}\left(\frac{x}{L}\right) + 3\beta_{TP}^2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \beta_{TP}^3\left(\frac{x}{L}\right)^3\right) \quad (3.4c)$$

$$I_y(x) = I_{y0}\left(1 + (\beta_{TP} + 5\alpha_{TP})\left(\frac{x}{L}\right) + (4\alpha_{TP}^2 + 2\alpha_{TP}\beta_{TP})\left(\frac{x}{L}\right)^2 + (\alpha_{TP}^3 + \alpha_{TP}^2\beta_{TP})\left(\frac{x}{L}\right)^3\right) \quad (3.4d)$$

$$I_\omega(x) = I_{\omega0}\left(1 + (\beta_{TP} + 2\alpha_{TP})\left(\frac{x}{L}\right) + (\alpha_{TP}^2 + 3\beta_{TP}^2 + 6\alpha_{TP}\beta_{TP})\left(\frac{x}{L}\right)^2 + (3\alpha_{TP}^2\beta_{TP} + 6\beta_{TP}^2\alpha_{TP} + \beta_{TP}^3)\left(\frac{x}{L}\right)^3 + (3\beta_{TP}^2\alpha_{TP}^2 + 2\beta_{TP}^3\alpha_{TP})\left(\frac{x}{L}\right)^4 + \beta_{TP}^3\alpha_{TP}^2\left(\frac{x}{L}\right)^5\right) \quad (3.4e)$$

Elementy stalowe ze zbieżnymi średnikami wykorzystywane są na rygle i słupy hal o dużych rozpiętościach, mają też zastosowanie jako belki nośne mostów. Elementy ze zbieżnymi pasami mogą być stosowane jako elementy nośne wspornikowe np. ramp, chodników, mostów.

Pełne zabezpieczenie przed zwichrzeniem belek o zmieniających się przekrojach poprzecznych, prowadzi do oszczędności w ich przekrojach. Jeśli jednak pręt jest niedostatecznie zabezpieczony przed zwichrzeniem, to wpływ niestateczności ogólnej może znacznie obniżyć jego nośność obliczeniową.

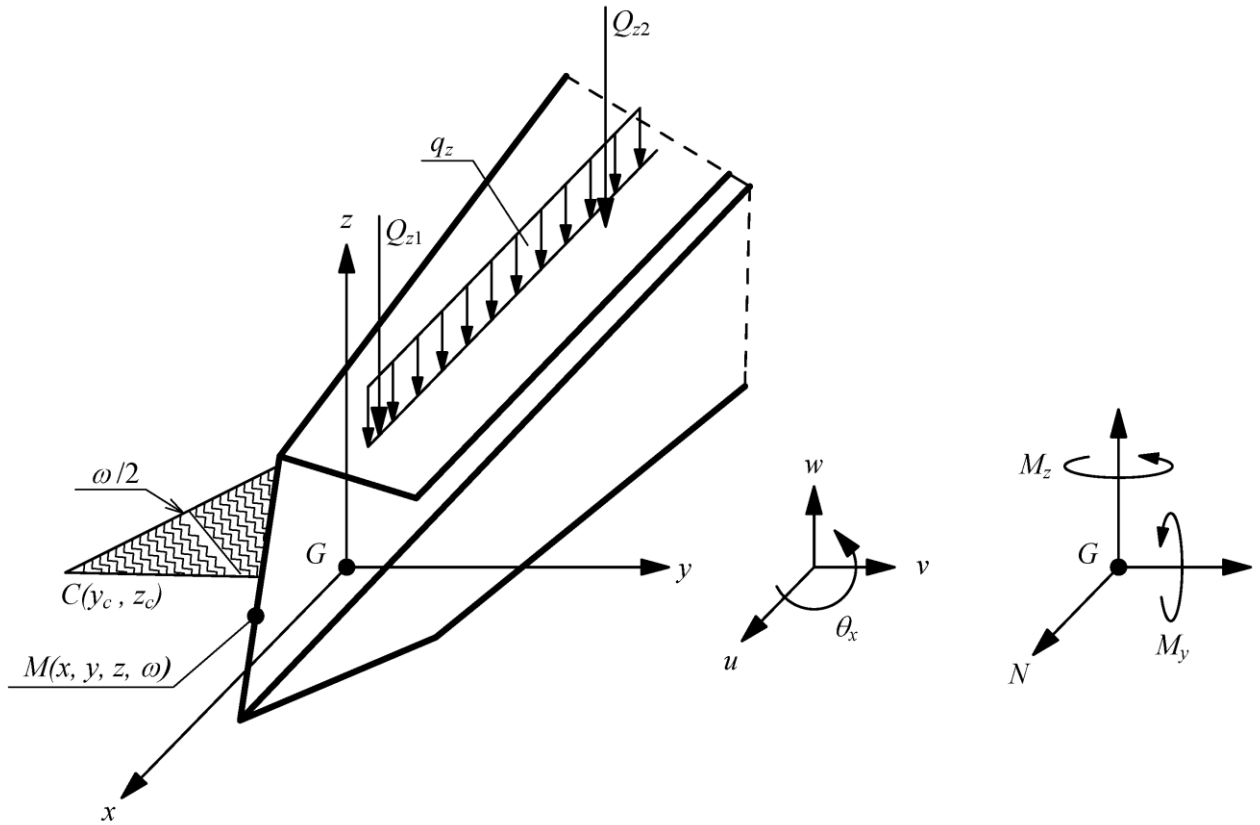
Obciążenia krytyczne belek można wyznaczać metodami analitycznymi np. rozwiązania równań różniczkowych równowagi, minimalizację całkowitej energii potencjalnej belki itp. Rozwiązania takie stanowią wzory przybliżone lub wyniki stabilizowane. Ścisłe rozwiązania są możliwe dla najprostszycch przypadków obciążeń.

Obciążenie krytyczne, powodujące utratę stateczności, może być także wyznaczane Metodą Elementów Skończonych, za pomocą programów komputerowych takich jak ANSYS, ABAQUS, COSMOS/M.

### **3.2. Funkcjonał całkowitej energii potencjalnej w belce o zmiennym przekroju poprzecznym**

Funkcjonały energii potencjalnej dla belek pryzmatycznych podane są w wielu pracach, np. Bleich'a (1952), Vlasov'a (1959), Timoshenko i Gere (1969).

Cienkościenny zbieżny element o otwartym przekroju poprzecznym przedstawiono na rys. 3.2.1. Dla przyjętego prostokątnego układu współrzędnych, w którym  $x$  oznacza oś podłużną, zaś  $y$  i  $z$  główne osie bezwładności. Początek układu współrzędnych znajduje się w punkcie  $C$  o współrzędnych  $(y_c, z_c)$ . Rozważmy punkt  $M$  leżący na przekroju, o współrzędnych  $(y, z, \omega)$ , gdzie  $\omega$  jest współrzędną wycinkową badanego punktu.



Rysunek 3.2.1. Otwarty zbieżny przekrój poprzeczny

Zakładając, że:

1. Przekrój jest sztywny i nie ulega odkształceniom dystorsyjnym.
2. Pomija się wpływ odkształceń postaciowych.

Wykorzystując powyższe założenia, trzy składowe przemieszczenia punktu  $M$  można przedstawić za pomocą liniowych zależności:

$$u_M = u - y \frac{\partial v}{\partial x} - z \frac{\partial w}{\partial x} - \omega \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \quad (3.5)$$

$$v_M = v - (z - z_c) \theta_x, \quad (3.6)$$

$$w_M = w + (y - y_c) \theta_x, \quad (3.7)$$

gdzie  $u$ ,  $v$ ,  $w$  są składowymi przemieszczenia środka ścinania, odpowiednio na kierunkach  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , a  $\theta_x$  oznacza kąt obrotu wokół osi  $x$ .

W przypadku przekrojów cienkościennych, składniki tensora odkształcenia, który zawiera wyrażenia uwzględniające duże przemieszczenia, oznaczane są jako  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{xy}$ ,  $\varepsilon_{xz}$ :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_M}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u_M}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_M}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_M}{\partial x} \right)^2 \right) \cong \frac{\partial u_M}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial v_M}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_M}{\partial x} \right)^2 \right), \quad (3.8)$$

Wprowadzając do wyrażenia (3.8) składniki przemieszczeń (3.5-3.7) można je zapisać jako sumę składników liniowych  $\varepsilon_l$  i nieliniowych  $\varepsilon_{nl}$ :

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_l + \varepsilon_{nl} \quad (3.9)$$

Składniki wyrażenia (3.9) mają postać:

$$\varepsilon_l = \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \omega \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \quad (3.10)$$

$$\varepsilon_{nl} = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + R^2 \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 + (y - y_C) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - (z - z_C) \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \quad (3.11)$$

$$R^2 = (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 \quad (3.12)$$

Pozostałe wyrażenia tensora naprężenia wynoszą:

$$\varepsilon_{xy} = -\frac{1}{2} \left( z - z_C + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \quad (3.13)$$

$$\varepsilon_{xz} = -\frac{1}{2} \left( y - y_C + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \quad (3.14)$$

Wyrażenie na energię odkształcenia belki w przypadku sprężystym, z uwzględnieniem skręcania ma postać:

$$U = \frac{1}{2} \int_{LA} \int E \varepsilon_{xx}^2 dA + \frac{1}{2} \int_{LA} G I_T \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (3.15)$$

$U$  – energia odkształcenia sprężystego,  $E$  – moduł Younga,  $G$  – współczynnik sprężystości poprzecznej,  $I_T$  – moment bezwładności na skręcanie.

Po uwzględnieniu warunku (3.9) wyrażenie (3.15) przyjmuje formę:

$$U = \frac{1}{2} \int_{LA} \int E \left( \varepsilon_l^2 + 2 \cdot \varepsilon_l \cdot \varepsilon_{nl} + \varepsilon_{nl}^2 \right) dA + \frac{1}{2} \int_{LA} G I_T \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (3.16)$$

W zagadnieniach stateczności rozpatrywanej w zakresie liniowym, składnik  $\varepsilon_{nl}^2$  można pominąć, wtedy wyrażenie na energię odkształcenia jest następujące:

$$U = \frac{1}{2} \int_{LA} \int E \varepsilon_l^2 dA dx + \frac{1}{2} \int_{LA} G I_T \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 dx + \int_{LA} \int E \varepsilon_l \varepsilon_{nl} dA dx, \quad (3.17a)$$

$$U_l = \frac{1}{2} \int_{LA} \int E \varepsilon_l^2 dA dx + \frac{1}{2} \int_{LA} G I_T \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (3.17b)$$

$$U_{nl} = \int_{LA} \int E \varepsilon_l \varepsilon_{nl} dA dx. \quad (3.17c)$$

Dodatkowo wprowadzając do (3.9) zależności uwzględniające zmienność przekroju poprzecznego na długości belki (3.18a-d):

$$A(x) = \int_A dA \quad (3.18a)$$

$$I_y(x) = \int_A z^2 dA \quad (3.18b)$$

$$I_z(x) = \int_A y^2 dA \quad (3.18c)$$

$$I_\omega(x) = \int_A \omega^2 dA \quad (3.16d)$$

otrzymano wyrażenie (3.19) na liniowy składnik wyrażenia określającego energię potencjalną w belce o zmiennym przekroju:

$$\begin{aligned}
 U_l = & \frac{1}{2} \int_L \left( EA(x) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + EI_z(x) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + EI_y(x) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx + \\
 & + \frac{1}{2} \int_L \left( EI_\omega(x) \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx + \frac{1}{2} \int_L GI_T(x) \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 dx
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

W podobny sposób, wykorzystując zależności na siłę osiową  $N$  (3.20a), momenty zginające  $M_y$  (3.20b),  $M_z$  (3.18c), bimoment  $B_\omega$  (3.20d):

$$N = \int_A E \varepsilon_l dA = EA(x) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \tag{3.20a}$$

$$M_y = \int_A E \varepsilon_l z dA = -EI_y(x) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \tag{3.20b}$$

$$M_z = \int_A E \varepsilon_l y dA = EI_z(x) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \tag{3.20c}$$

$$B_\omega = -\int_A E \varepsilon_l \omega dA = EI_\omega(x) \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) \tag{3.20d}$$

zbudowano wyrażenie określające nieliniowy składnik energii potencjalnej (3.21) w belce o zmiennym przekroju:

$$U_{nl} = U_{nl}(N) + U_{nl}(M_y) + U_{nl}(M_z) + U_{nl}(B_\omega) \tag{3.21}$$

Składniki wyrażenia (3.22a) mają postać:

$$\begin{aligned}
 U_{nl}(N) = & \int_L N \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} I_0(x) \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 \right) dx + \\
 & + \int_L N \left( z_c \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) - y_c \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \right) dx
 \end{aligned} \tag{3.22a}$$

$$U_{nl}(M_y) = \int_L M_y \left( \beta_z(x) \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \theta_x \right) dx \tag{3.22b}$$

$$U_{nl}(M_z) = -\int_L M_z \left( \beta_y \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \theta_x \right) dx \tag{3.22c}$$

$$U_{nl}(B_\omega) = -\int_L \beta_\omega \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 dx \tag{3.22d}$$

gdzie:

$$\beta_y = \frac{1}{2I_z(x)_S} \int_S y(y^2 + z^2) dS - y_c \tag{3.22e}$$

$$\beta_z(x) = \frac{1}{2I_y(x)_S} \int_S z(y^2 + z^2) dS - z_c \tag{3.22f}$$

$$\beta_\omega = \frac{1}{2I_\omega(x)_S} \int_S \omega(y^2 + z^2) dS \tag{3.22g}$$

$$I_0(x) = \frac{I_y(x) + I_z(x)}{A(x)} + y_c^2 + z_c^2 \tag{3.22h}$$



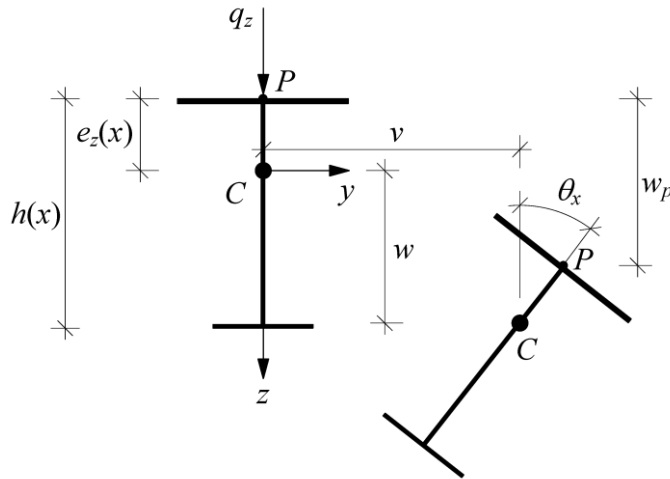
Energia odkształcenia sprężystego wyrażona wzorem (3.19) połączona z wyrazami na energię odkształcenia wyższego rzędu (3.21), może być wykorzystywana do ogólnych analiz stateczności otwartych przekrojów cienkościennych.

$$U = U_l + U_{nl} \quad (3.23)$$

W przypadku obciążeń krytycznych belek zginanych wyrażenie na energię odkształcenia przyjmuje postać (3.24) i w dalszej części pracy będzie ono rozważane.

$$U = U_l + U_{nl}(M_y) \quad (3.24)$$

Rozpatrując dwuteową, monosymetryczną belkę obciążoną w sposób ciągły obciążeniem  $q_z(x)$ , przyłożonym w punktach  $P$ , w odległości  $e_z(x)$  od środka ścinania (rys. 3.2.2),



Rysunek 3.2.2. Monosymetryczny przekrój dwuteowy przy zwirzeniu

pracę sił zewnętrznych  $q_z(x)$  i gradientu momentu zginającego  $M_y$  można wyrazić następująco:

$$W = \int_L q_z w_p dx + \int_L M_y \left( \theta_x \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \beta_z(x) \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 \right) dx, \quad (3.25)$$

gdzie  $w_p$  jest przemieszczeniem pionowym, które można zapisać:

$$w_p = w - e_z(x)(1 - \cos \theta_x), \quad (3.26)$$

Jeżeli założymy w przybliżeniu że  $\cos \theta_x = 1 - \frac{\theta_x^2}{2}$ , to wyrażenie (3.25) przyjmuje postać:

$$W = \int_L q_z w dx - \frac{1}{2} \int_L q_z e_z(x) \theta_x^2 dx + \int_L M_y \left( \theta_x \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \beta_z(x) \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 \right) dx. \quad (3.27)$$

Sumując (3.24) i (3.27), pomijając energię odkształceń osiowych i uwzględniając symetryczność przekroju poprzecznego belki względem osi  $z$  ( $\beta_y = 0$ ), otrzymano wyrażenie określające funkcjonal całkowitej energii potencjalnej w belce o zbieżnym przekroju poprzecznym:

$$\begin{aligned}
 \Pi = U - W &= \frac{1}{2} \int_L \left( EI_y(x) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + EI_z(x) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + GI_T(x) \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 \right) dx \\
 &+ \frac{1}{2} \int_L \left( EI_\omega(x) \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx + \int_L M_y \left( \theta_x \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \beta_z(x) \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 \right) dx - \int_L q_z w dx + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_L q_z(x) e_z(x) \theta_x^2 dx.
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Funkcjonał energii potencjalnej może być zapisany za pomocą dwóch składników zależnych od przemieszczeń:

$$\Pi(w) = \frac{1}{2} \int_L \left( EI_y(x) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx - \int_L q_z(x) w dx, \tag{3.29a}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_{LTB} &= \frac{1}{2} \int_L \left( EI_z(x) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + GI_T(x) \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 + EI_\omega(x) \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx + \\
 &+ \int_L M_y \left( \theta_x \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \beta_z(x) \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 \right) dx + \frac{1}{2} \int_L q_z e_z(x) \theta_x^2 dx.
 \end{aligned} \tag{3.29b}$$

Pierwszy składnik (3.29a) odwołuje się tylko do przemieszczeń pionowych i odpowiada stanowi przed utratą stateczności przy zginaniu. W zagadnieniach liniowej stateczności ten składnik można pominąć, gdyż jego wpływ na obciążenia krytyczne belek jest znikomy. Drugi składnik (3.29b) odpowiada za stan przy zwichrzeniu i pozwala na wyznaczenie z tego wyrażenia obciążenia krytycznego inicjującego utratę stateczności sprężystej przy zginaniu.

Bradford i Cuk (1988) wykazali, że w belce o zmiennym przekroju, w wyniku przemieszczenia i obrotu przy zwichrzeniu następuje wzrost energii odkształcenia w półkach i środku belki i funkcjonal energii potencjalnej powiększa się o:

$$\begin{aligned}
 U_{BC} &= \frac{1}{2} \int_L \left( \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 EI_z + \frac{h(x)^2}{4} \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \right)^2 EI_z + h(x) \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \right) EI_z \right) dx + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_L \left( h(x) (EI_{zt} - EI_{zb}) \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + 2 (EI_{zt} - EI_{zb}) \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \right) dx.
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Implikując wyrażenie (3.30) ze składnikami  $I_z(x)$ ,  $h(x)$ ,  $I_{zt}(x)$ ,  $I_{zb}(x)$  do (3.29b), pomijając elementy związane tylko z wysokością belki  $h(x)$ , otrzymano zmodyfikowany funkcjonal energii potencjalnej dla belki o zmiennych liniowo szerokościach pasów i zmiennej liniowo wysokości środka.

$$\begin{aligned}
 \Pi_{LTB} = & \frac{1}{2} \int_L \left( EI_z(x) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + GI_T(x) \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 + EI_\omega(x) \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx + \\
 & + \frac{1}{2} \int_L \left( EI_z(x) \left( \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 + h(x) \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \right) \right) dx + \\
 & + \int_L \left( (EI_{za}(x) - EI_{zb}(x)) \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \right) dx + \\
 & + \int_L M_y \left( \theta_x \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \beta_z(x) \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 \right) dx + \frac{1}{2} \int_L q_z e_z(x) \theta_x^2 dx.
 \end{aligned} \tag{3.31a}$$

W przypadku siły skupionej  $Q_z$  przyłożonej do belki w odległości  $a$ , do funkcjonału (3.31a) należy podstawić wyrażenie:

$$q_z = Q_z \Delta(x - a). \tag{3.31b}$$

gdzie  $\Delta$  jest funkcją Diraca, dla której  $\Delta = 1 \Leftrightarrow x = a, \Delta = 0 \Leftrightarrow x \neq a$ .

Do dalszej analizy przyjęto postać funkcjonału energii potencjalnej zgodnie ze wzorami (3.31a-b).

### 3.3. Warunki brzegowe

Rozwiązując zagadnienia stateczności metodą rachunku wariacyjnego należy przyjąć odpowiednie funkcje odzwierciedlające kształt osi elementu po zwichrzeniu. Funkcje te powinny spełniać kinematyczne i statyczne warunki brzegowe. Warunki kinematyczne więzów związane są z przemieszczeniami i kątami obrotów. Statyczne warunki brzegowe odnoszą się do wartości naprężeń tj. momentów zginających, sił tnących, bimomentów. Za funkcje opisujące kształt osi belki po zwichrzeniu można przyjmować funkcje paraboliczne, szeregi potęgowe, szeregi trygonometryczne.

W pracy analizowane będą belki podparte widełkowo na obu końcach, a także belki wspornikowe.

Warunki brzegowe określone dla różnych schematów zamocowania określone są zależnościami:

- belka zamocowana widełkowo obustronnie:

$$\begin{aligned}
 v(0) = v(L) = 0, \quad \theta_x(0) = \theta_x(L) = 0, \\
 v''(0) = v''(L) = 0, \quad \theta''_x(0) = \theta''_x(L) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.32a}$$

- belka wspornikowa z pełnym utwierdzeniem:

$$\begin{aligned}
 v(0) = v(L) = 0, \quad \theta_x(0) = \theta_x(L) = 0, \\
 v'(0) = v'(L) = 0, \quad \theta'_x(0) = \theta'_x(L) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.32b}$$

#### 4. Rozwiązanie ogólne zagadnienia stateczności metodą Rayleigh'a-Ritz'a

Zagadnienia brzegowe mechaniki mogą być rozwiązywane przy zastosowaniu metod takich jak Metoda Różnic Skończonych, metoda Kantorowicza, Galerkina, a także metodą Rayleigh'a - Ritz'a. Ta ostatnia bazuje na całkowych sformułowaniach zagadnienia brzegowego, do której zaliczyć można zasadę minimum energii potencjalnej. Wprowadzając dyskretyzację wielkości wyrażen występujących w formułach całkowych, zagadnienie sprowadzane jest do układów równań algebraicznych, z niewiadomymi parametrami  $a_i$  założonych funkcji bazowych. Klasyczne podejście metody Rayleigh'a-Ritz'a polega na poszukiwaniu ekstremum funkcjonału  $\Pi_{LTB}$ , którego funkcje aproksymowane są określonymi funkcjami bazowymi np.:

$$\theta_n = \sum_{i=1}^n a_i \theta_i, \quad (4.1)$$

spełniającymi warunki brzegowe podparć belek, gdzie:  $\theta_i$  – funkcje określone w obszarze całkowania,  $a_i$  – niewiadome stałe współczynniki (parametry).

Ponieważ dla stanu równowagi statycznej belki, energia potencjalna powinna przybierać wartość minimalną, parametry  $a_i$  można określać z warunków ekstremum:

$$\frac{\partial \Pi_{LTB}(\theta_n)}{\partial a_i} = 0, \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.2)$$

Wykorzystując skończoną liczbę składników sumy (4.1) uzyska się  $n$  składników równań, za pomocą których można te parametry określić. Podstawiając znalezione parametry  $a_i$  do wyrażen dla funkcji przemieszczeń, otrzymuje się przybliżone rozwiązanie zadania.

Szczegółowy opis metody Rayleigh'a-Ritz'a znaleźć można w opracowaniu Elsgolca (1960), a zastosowania tej metody w zagadnieniach mechaniki konstrukcji m in. w pracy pod redakcją T. Kozłowskiego (1967) i W. Głabisza (2003).

W pracy przyjęto za funkcję Ritz'a, funkcje trygonometryczne (4.1a-d) spełniające warunki brzegowe (3.32a-b):

- dla belek podpartych widełkowo

$$v = \sum_{i=1}^n v_i \sin\left(i\pi \frac{x}{L}\right), \quad (4.3a)$$

$$\theta_x = \sum_{i=1}^n \theta_i \sin\left(i\pi \frac{x}{L}\right), \quad (4.3b)$$

- dla belek wspornikowych

$$v = \sum_{i=1}^n v_i \left(1 - \cos\left(\pi \frac{(2i-1)x}{2L}\right)\right), \quad (4.3c)$$

$$\theta_x = \sum_{i=1}^n \theta_i \left(1 - \cos\left(\pi \frac{(2i-1)x}{2L}\right)\right). \quad (4.3d)$$

Zastosowanie skończonej liczby składników sumy wyrażeń (4.3a-d) prowadzi do zastąpienia modelu ciągłego, modelem dyskretnym. Chcąc uzyskać żądany poziom dokładności obliczeń należy przyjmować odpowiednio dużą liczbę wyrazów szeregów. W inżynierskiej praktyce projektowej, do oszacowania obciążenia krytycznego belek podpartych na końcach widełkowo, najczęściej wystarczające jest pierwsze przybliżenie ( $i = 1$ ).

W celu wyznaczenia obciążeń krytycznych wprowadzono do funkcjonału energii potencjalnej (3.31a-b) funkcję gradientu momentu zginającego (4.4) zależnego od rodzaju obciążenia belki:

$$m(x) = \frac{M_y}{M}, \quad (4.4)$$

w którym:  $M_y$  - moment zginający w belce od obciążeń zewnętrznych,  $\bar{M}$  - maksymalny moment zginający od obciążeń zewnętrznych w stanie równowagi statycznej, a w stanie utraty stateczności moment krytyczny zwichrzenia, oraz funkcje Ritz'a (4.3a-d), po czym otrzymano następującą postać funkcjonału:

$$\begin{aligned} \Pi_{LTB} = & \frac{1}{2} \int_0^L \left( EI_z(x) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \sum_{i=1}^n v_i \sin \left( \frac{i\pi x}{L} \right) \right) \right)^2 + GI_T(x) \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{i=1}^n \theta_i \sin \left( \frac{i\pi x}{L} \right) \right) \right)^2 \right) dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L \left( EI_\omega(x) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \sum_{i=1}^n \theta_i \sin \left( \frac{i\pi x}{L} \right) \right) \right)^2 \right) dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L \left( EI_z(x) \left( \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{i=1}^n \theta_i \sin \left( \frac{i\pi x}{L} \right) \right) \right)^2 \right) \right) dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L \left( h(x) \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{i=1}^n \theta_i \sin \left( \frac{i\pi x}{L} \right) \right) \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \sum_{i=1}^n \theta_i \sin \left( \frac{i\pi x}{L} \right) \right) \right) \right) dx + \\ & + \int_0^L \left( (EI_{z'}(x) - EI_{z_b}(x)) \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \sum_{i=1}^n v_i \sin \left( \frac{i\pi x}{L} \right) \right) \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{i=1}^n \theta_i \sin \left( \frac{i\pi x}{L} \right) \right) \right) \right) dx + \\ & + \bar{M} \int_0^L \left( m(x) \left( \sum_{i=1}^n \theta_i \sin \left( \frac{i\pi x}{L} \right) \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \sum_{i=1}^n v_i \sin \left( \frac{i\pi x}{L} \right) \right) \right) + \beta_z(x) \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{i=1}^n \theta_i \sin \left( \frac{i\pi x}{L} \right) \right) \right)^2 \right) dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L \left( q_z e_z(x) \left( \sum_{i=1}^n \theta_i \sin \left( \frac{i\pi x}{L} \right) \right)^2 \right) dx. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Łatwo zauważyć, że wprowadzone do funkcjonału (3.31a-b) funkcje Ritz'a  $v(x)$  i  $\theta(x)$ , po zróżniczkowaniu tworzą wielomiany z jednorodnymi funkcjami kwadratowymi, których przykładowe rozwiązanie w 3 przybliżeniu ma postać:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \sum_{i=1}^3 v_i \sin \left( \frac{i\pi x}{L} \right) \right)^2 &= v_1^2 \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) + 8v_1 v_2 \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 \sin \left( \frac{\pi x}{L} \right) \sin \left( \frac{2\pi x}{L} \right) + \\
 &+ 16v_1^2 \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 \sin^2 \left( \frac{2\pi x}{L} \right) + 18v_1 v_3 \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 \sin \left( \frac{\pi x}{L} \right) \sin \left( \frac{3\pi x}{L} \right) + \\
 &+ 72v_2 v_3 \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 \sin \left( \frac{2\pi x}{L} \right) \sin \left( \frac{3\pi x}{L} \right) + 81v_3^2 \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 \sin^2 \left( \frac{3\pi x}{L} \right).
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Bardziej zwięzłą postać wyrażeń (4.5) można przedstawić następująco:

$$\Pi_{LTB} = \sum_{i=1}^n \left( k_{bb(m \times m)} v_i^2 + k_{cc(n \times n)} \theta_i^2 + k_{bc(m \times n)} v_i \theta_i \right), \tag{4.7}$$

w których  $k_{bb}, k_{cc}, k_{cb}$  są symbolami wyrażeń całek występujących w funkcjale (4.5).

Stosując, zgodnie z metodą Rayleigh'a – Ritz'a minimalizację funkcjonału całkowitej energii potencjalnej (4.5) wg poniższych warunków:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Pi_{LTB}}{\partial v_i} &= 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m, \\
 \frac{\partial \Pi_{LTB}}{\partial \theta_i} &= 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n,
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

otrzymano układ jednorodnych algebraicznych równań, które można zapisać:

$$\left[ \begin{array}{c|c} k_{bb(m \times m)} & k_{bc(m \times n)} \\ \hline sym & k_{cc(n \times n)} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} v_{i(m \times 1)} \\ \theta_{i(n \times 1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{4.9}$$

Dla pierwszego przybliżenia ( $i = m = n = 1$ ) postać energii potencjalnej określa wyrażenie (4.10):

$$\begin{aligned}
 \Pi_{LTB} &= \frac{1}{2} v_1^2 \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 E \int_0^L \left( I_z(x) \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) dx + \frac{1}{2} \theta_1^2 \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 G \int_0^L \left( I_T(x) \cos^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) dx + \\
 &+ \frac{1}{2} \theta_1^2 \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 E \int_0^L \left( I_\omega(x) \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) dx + \\
 &+ \frac{1}{2} \theta_1^2 \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 E \int_0^L \left( I_z(x) \left( \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right)^2 \left( \cos^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) \right) \right) dx + \\
 &+ \frac{1}{2} \theta_1^2 \left( \frac{\pi}{L} \right)^3 E \int_0^L \left( I_z(x) h(x) \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right) \left( \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) \left( \sin \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) \right) dx + \\
 &+ v_1 \theta_1 \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 E \int_0^L \left( (I_{za}(x) - I_{zb}(x)) \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right) \left( \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) \left( \sin \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) \right) dx + \\
 &+ \bar{M} v_1 \theta_2 \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \int_0^L \left( m(x) \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) dx + \bar{M} \theta_1^2 \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \int_0^L \left( m(x) \beta_z(x) \cos^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) dx \\
 &+ \frac{1}{2} \theta_1^2 q_z \int_0^L \left( e_z(x) \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) dx + \frac{1}{2} \theta_1^2 Q_z \int_0^L \left( e_z(x) \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) dx.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Pochodne  $\frac{\partial h(x)}{\partial x}$  i parametry  $h(x)$  obliczono wg wzorów z tabeli 3.3.1 w zależności od rodzaju zbieżności środka.

Składniki wyznacznika (4.9) dla pierwszego przybliżenia ( $i = m = n = 1$ ) mają postać:

$$k_{bb} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 E \int_0^L \left( I_z(x) \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) dx, \quad (4.11a)$$

$$\begin{aligned} k_{cc} = & \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 G \int_0^L \left( I_T(x) \cos^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) dx + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 E \int_0^L \left( I_\omega(x) \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) dx + \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 E \int_0^L \left( I_z(x) \left( \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right)^2 \left( \cos^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) \right) \right) dx + \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{L} \right)^3 E \int_0^L \left( I_z(x) h(x) \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right) \left( \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) \left( \sin \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) \right) dx + \end{aligned} \quad (4.11b)$$

$$\begin{aligned} & + \overline{M} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \int_0^L \left( m(x) \beta_z(x) \cos^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) dx + \frac{1}{2} q_z \int_0^L \left( e_z(x) \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) dx + \\ & + \frac{1}{2} Q_z \int_0^L \left( e_z(x) \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{bc} = & \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 E \int_0^L \left( (I_{za}(x) - I_{zb}(x)) \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right) \left( \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) \left( \sin \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) \right) dx + \\ & + \overline{M} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \int_0^L \left( m(x) \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) dx. \end{aligned} \quad (4.11c)$$

Wyznacznik (4.9) przyjmuje wielkości zerowe dla najmniejszej wartości momentu krytycznego  $M_{cr}$  inicjującego utratę stateczności belki. Rozwiązanie wyznacznika jest równaniem kwadratowym z niewiadomą  $\overline{M}$ , którą można obliczyć z tego równania. Szczegółowe określenie momentów krytycznych  $M_{cr}$  zależy od modeli obciążeń i cech geometrycznych belek. Konkretnie przykłady podano w kolejnych podrozdziałach niniejszej pracy.

Rozwiązanie ogólne na obliczanie momentów krytycznych zwichrzenia ma postać:

$$\overline{M}_{cr} = \min \left( \frac{-0,5 \Phi_2 \pm (0,25 \Phi_2^2 - \Phi_1 \Phi_3)^{0,5}}{\Phi_1} \right), \quad (4.12)$$

w którym:

$$\Phi_1 = - \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \int_0^L \left( m(x) \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) dx, \quad (4.13a)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 E \int_0^L \left( (I_{za}(x) - I_{zb}(x)) \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right) \sin \left( \frac{2\pi x}{L} \right) \right) dx - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 E \int_0^L \left( I_z(x) \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) dx \\ & \int_0^L \left( m(x) \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) dx \cdot \int_0^L \left( m(x) \beta_z(x) \cos^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) dx, \end{aligned} \quad (4.13b)$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_3 = & \frac{1}{4} \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 E^2 \left( \int_0^L \left( I_{za}(x) - I_{zb}(x) \right) \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right) \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) dx \right)^2 + \\
 & - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 E \int_0^L \left( I_z(x) \left( \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) \right) dx \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 G \int_0^L \left( I_T(x) \left( \cos^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) \right) dx + \right. \\
 & + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 E \int_0^L \left( I_\omega(x) \left( \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) \right) dx + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{L} \right) E \int_0^L \left( I_z(x) \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right) \left( \cos^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) \right) dx + \quad (4.13c) \\
 & + \frac{1}{4} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 E \int_0^L \left( I_z(x) h(x) \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right) \left( \sin \left( \frac{2\pi x}{L} \right) \right) \right) dx + \frac{1}{2} q_z \int_0^L \left( e_z(x) \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) dx + \\
 & + \frac{1}{2} Q_z \int_0^L \left( e_z(x) \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \right) dx.
 \end{aligned}$$

W następnym rozdziale wykonano obliczenia momentów krytycznych dla wybranych przypadków obciążeń belek stalowych z różnymi parametrami zbieżności przekroju.

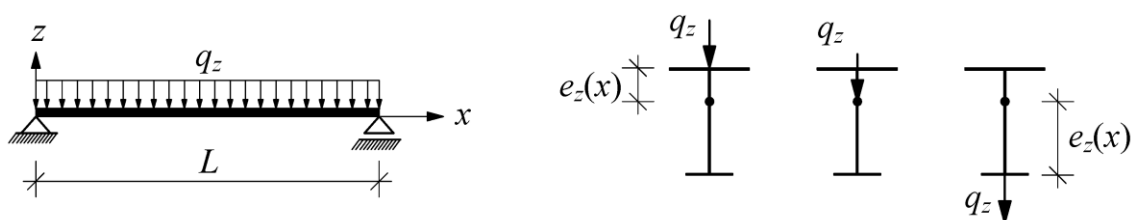


## 5. Rozwiązanie szczegółowe zagadnienia stateczności metodą Rayleigh'a-Ritz'a, dla belek obciążonych siłami poprzecznymi skupionymi, rozłożonymi, momentami skupionymi

Obliczenia wykonano w pakiecie obliczeniowym MATHEMATICA 5.0, w którym wprowadzono pełne formuły obliczeniowe uwzględniające algorytm przedstawiony w rozdziale 4 niniejszej pracy. Do weryfikacji przyjętych formuł obliczeniowych przyjęto belkę ze stali S235, o parametrach materiałowych  $E=210$  GPa,  $G=81$  GPa.

### 5.1. Belka obciążona obciążeniem ciągłym równomiernie rozłożonym

Przyjęto belkę podpartą widełkowo obciążoną obciążeniem ciągłym równomiernie rozłożonym jak na rysunku 5.1.1:



Rysunek 5.1.1. Schemat obciążenia belki obciążeniem ciągłym równomiernie rozłożonym.

Funkcja gradientu momentów zginających dla powyższej belki jest następująca:

$$M_y(x) = \frac{q_z L^2}{2} \left( \frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2} \right) \quad \text{dla } 0 \leq x \leq L, \quad (5.1a)$$

$$M_{\max} = \frac{q_z L^2}{8}, \quad (5.1b)$$

$$m(x) = 4 \left( \frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2} \right). \quad (5.1c)$$

Składowe wyznacznika (4.9) po uwzględnieniu warunku (5.1c) i charakterystyk z tabeli 3.1.1 wynoszą:

$$k_{bb} = \frac{1}{2} \int_0^L \left( EI_z(x) \frac{\pi^4 \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right)}{L^4} \right) dx \quad (5.2a)$$

$$k_{bb} = \frac{1}{2} \int_0^L \left( GI_T(x) \frac{\pi^2 \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^2} + EI_\omega(x) \frac{\pi^4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^4} \right) dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^L \left( EI_z(x) \left( \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right)^2 \frac{\pi^2 \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^2} + h(x) \frac{\partial h(x)}{\partial x} \frac{\pi^3 \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{L^3} \right) \right) dx + \quad (5.2b)$$

$$+ 4\overline{M} \int_0^L \left( \left( \frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2} \right) \beta_z(x) \frac{\pi^2 \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^2} \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left( q_z e_z(x) \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right) dx$$

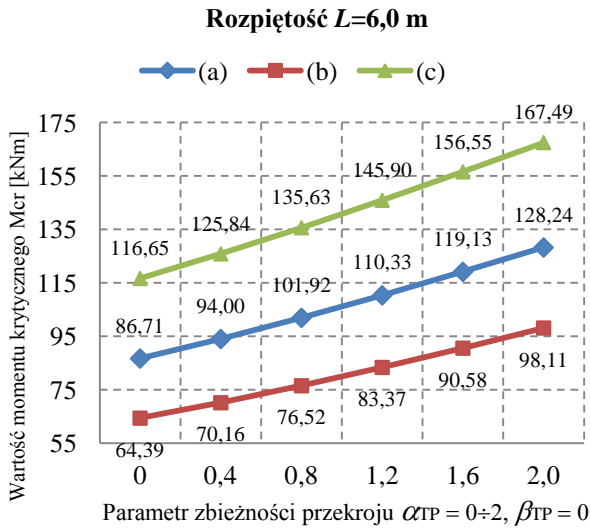
$$k_{bc} = \int_0^L \left( E(I_{yz}(x) - I_{zb}(x)) \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \frac{\pi^3 \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{2L^3} \right) \right) dx + \overline{M} \int_0^L \left( \left( \frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2} \right) \frac{\pi^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^2} \right) dx \quad (5.2c)$$

Wyznaczając wyrażenia podcałkowe, z uwzględnieniem parametrów geometrycznych belek dla różnych schematów zbieżności z tabeli 3.1.1, uzyskano elementy macierzy (4.9). Rozwiązaniem wyznacznika tej macierzy są momenty krytyczne zwichrzenia.

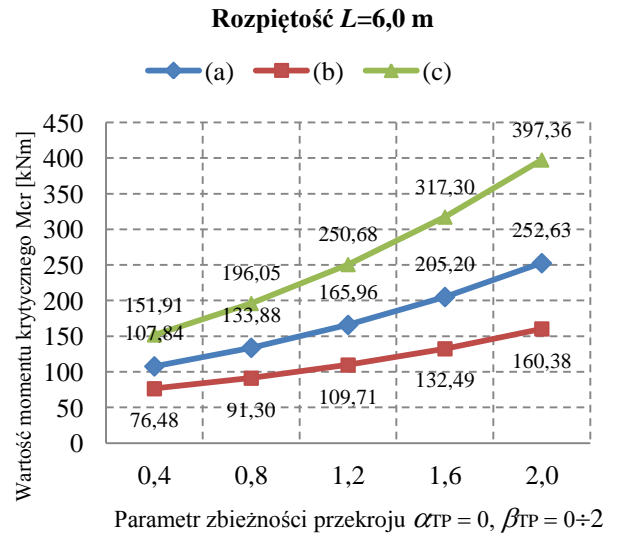
Obliczone wartości momentów krytycznych przedstawiono w tabelach 5.1.1-5.1.3 i na rysunkach 5.1.2 do 5.1.19.

Tabela 5.1.1. Momenty krytyczne bisymetrycznej belki ze zbieżnością przekroju typu 1 i 2 wg tabeli 3.1.1, obciążoną obciążeniem ciągłym równomiernie rozłożonym.

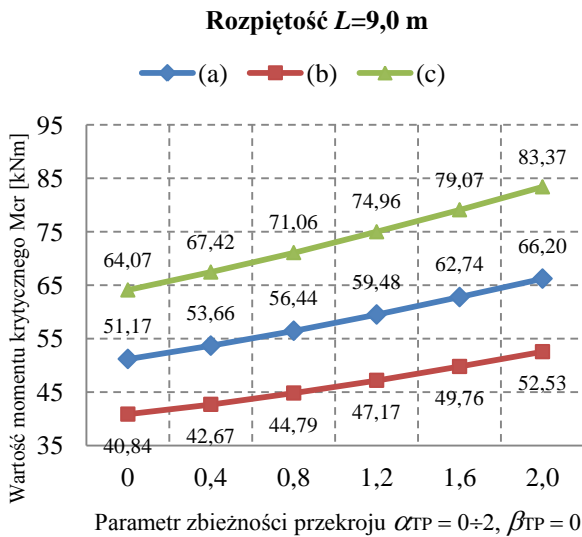
Parametry przekroju poprzecznego		Schemat obciążenia (a)			Schemat obciążenia (b)			Schemat obciążenia (c)			
$b_{o1}$	150										
$b_{o2}$	150										
$h_o$	300										
$h_{wo}$	280										
$t_{f1}$	10										
$t_{f2}$	10										
$t_w$	7										
$A_o$	49,6										
$I_{yo}$	7590,53										
$I_{zo}$	563,3										
$I_{ooy}$	118266										
$\beta_{zo}$	0										
		Parametr zbieżności			$M_{cr}$ [kNm]			$M_{cr}$ [kNm]			
		$\alpha_{TP}=0,0$	$L=6,0$ m	$L=9,0$ m	$L=12,0$ m	$L=6,0$ m	$L=9,0$ m	$L=12,0$ m	$L=6,0$ m	$L=9,0$ m	$L=12,0$ m
		$\alpha_{TP}=0,4$	86,705	51,171	36,477	64,390	40,843	30,515	116,647	64,068	43,580
		$\alpha_{TP}=0,8$	93,999	53,655	37,589	70,155	42,671	31,258	125,838	67,420	45,179
		$\alpha_{TP}=1,2$	101,920	56,439	38,858	76,522	44,793	32,155	135,631	71,064	46,932
		$\alpha_{TP}=1,6$	110,331	59,481	40,268	83,365	47,167	33,192	145,900	74,960	48,825
		$\alpha_{TP}=2,0$	119,130	62,744	41,806	90,584	49,755	34,354	156,545	79,071	50,844
		$\beta_{TP}=0$			$M_{cr}$ [kNm]			$M_{cr}$ [kNm]			
		$\beta_{TP}=0,4$	107,843	62,719	44,379	76,477	48,133	35,926	151,905	81,657	54,783
		$\beta_{TP}=0,8$	133,876	76,245	53,349	91,301	56,405	41,818	196,053	102,961	68,006
		$\beta_{TP}=1,2$	165,960	92,195	63,596	109,713	65,996	48,343	250,679	128,647	83,584
		$\beta_{TP}=1,6$	205,201	111,037	75,352	132,494	77,252	55,673	317,303	159,390	101,876
		$\beta_{TP}=2,0$	252,628	133,239	88,861	160,377	90,511	63,991	397,360	195,854	123,247



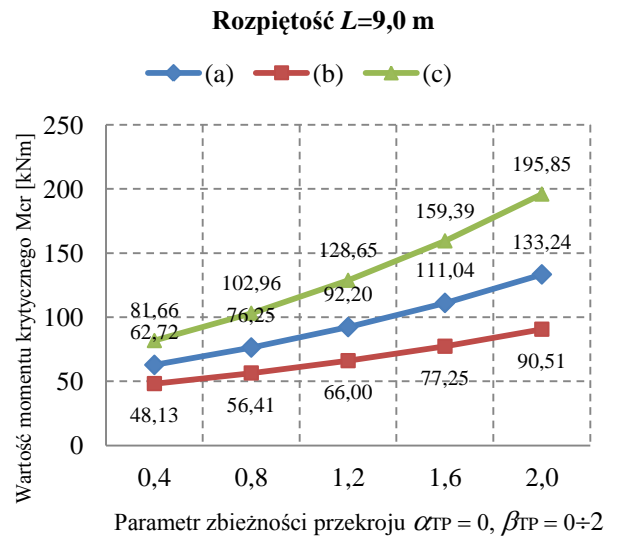
Rysunek 5.1.2. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną obciążeniem ciągłym.



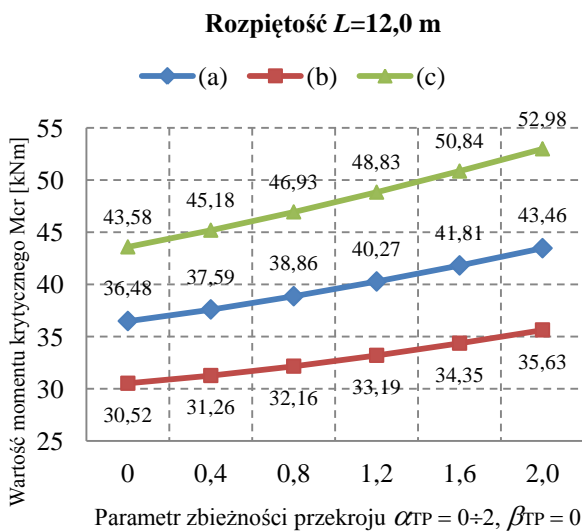
Rysunek 5.1.3. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną obciążeniem ciągłym.



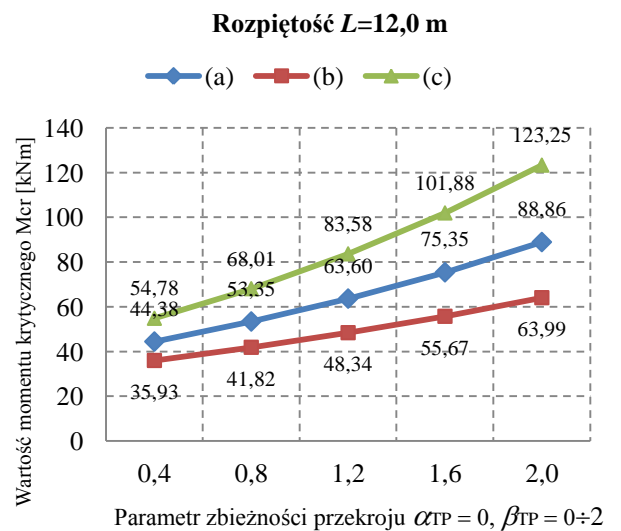
Rysunek 5.1.4. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną obciążeniem.



Rysunek 5.1.5. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną obciążeniem ciągłym.



Rysunek 5.1.6. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną obciążeniem ciągłym.

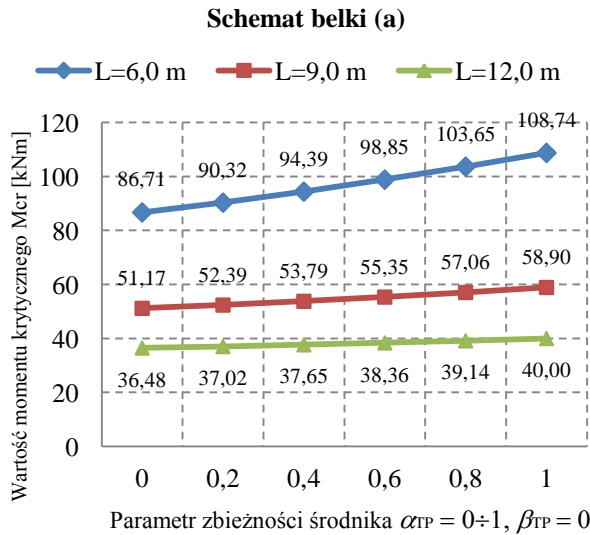


Rysunek 5.1.7. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną obciążeniem ciągłym.

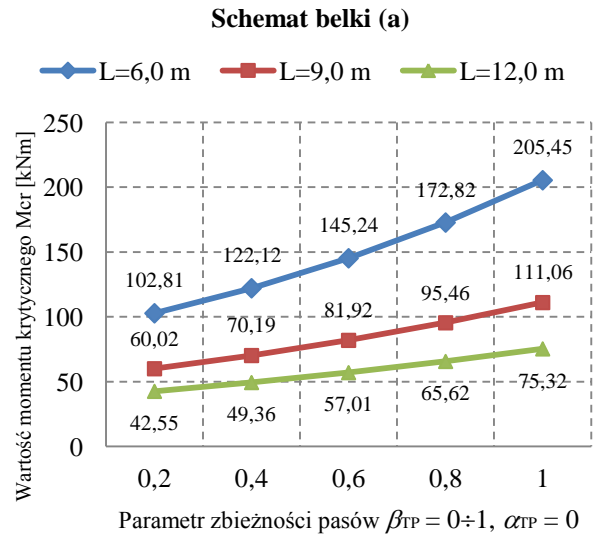
Analiza stateczności belek ze zbieżnymi przekrojami poprzecznymi

Tabela 5.1.2. Momenty krytyczne bisymetrycznej belki ze zbieżnością przekroju typu 3 i 4 wg tabeli 3.1.1, obciążoną obciążeniem ciągłym równomiernie rozłożonym.

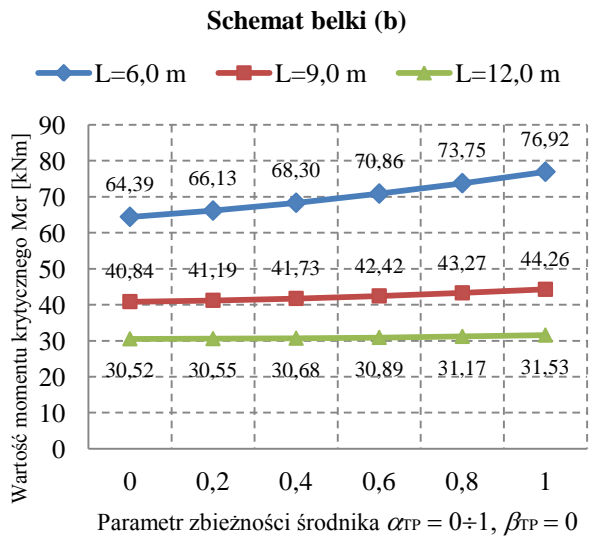
Parametry przekroju poprzecznego		Schemat obciążenia (a)			Schemat obciążenia (b)			Schemat obciążenia (c)											
		$L=6,0$ m	$L=9,0$ m	$L=12,0$ m	$L=6,0$ m	$L=9,0$ m	$L=12,0$ m	$L=6,0$ m	$L=9,0$ m	$L=12,0$ m									
$b_{01}$	150										Parametr zbieżności			$M_{cr}$ [kNm]					
$b_{02}$	150										$\alpha_{TP}=0,0$			$\beta_{TP}=0$			$L=6,0$ m	$L=9,0$ m	$L=12,0$ m
$h_0$	300										$\alpha_{TP}=0,2$			$L=6,0$ m	$L=9,0$ m	$L=12,0$ m	$L=6,0$ m	$L=9,0$ m	$L=12,0$ m
$h_{w0}$	280										$\alpha_{TP}=0,4$			86,705	51,171	36,477	64,390	40,843	30,515
$t_{f1}$	10										$\alpha_{TP}=0,6$			90,324	52,393	37,022	66,125	41,194	30,552
$t_{f2}$	10										$\alpha_{TP}=0,8$			94,389	53,791	37,651	68,299	41,726	30,677
$t_w$	7										$\alpha_{TP}=1,0$			98,847	55,350	38,359	70,858	42,424	30,886
$A_0$	49,6													103,646	57,058	39,143	73,745	43,272	31,173
$I_{y0}$	7590,53													108,741	58,901	39,998	76,917	44,256	31,534
$I_{z0}$	563,3																		
$I_{\omega 0}$	118266																		
$\beta_{z0}$	0																		
		$\beta_{TP}=0,2$			102,810	60,015	42,546	73,621	46,452	34,693	143,411	77,470	52,141						
		$\beta_{TP}=0,4$			122,116	70,189	49,357	84,638	52,736	39,225	175,950	93,319	62,053						
		$\beta_{TP}=0,6$			145,244	81,920	57,009	97,894	59,858	44,178	215,154	111,974	73,493						
		$\beta_{TP}=0,8$			172,821	95,458	65,620	113,831	67,899	49,634	261,904	133,809	86,652						
		$\beta_{TP}=1,0$			205,454	111,06	75,317	132,865	77,345	55,684	317,056	159,207	101,732						



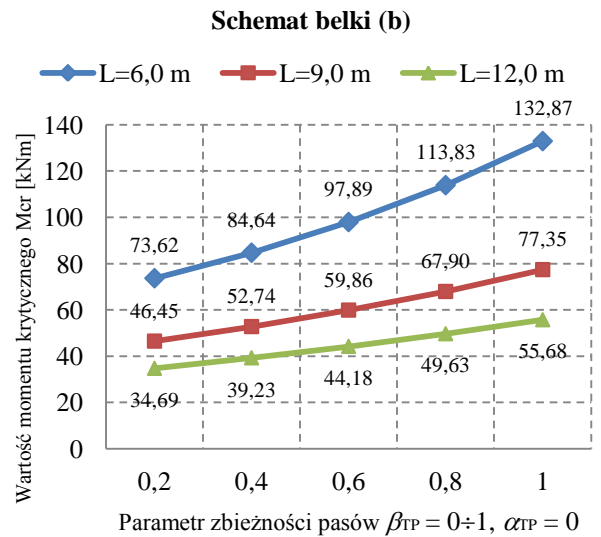
Rysunek 5.1.8. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną obciążeniem ciągłym w środku ścinania.



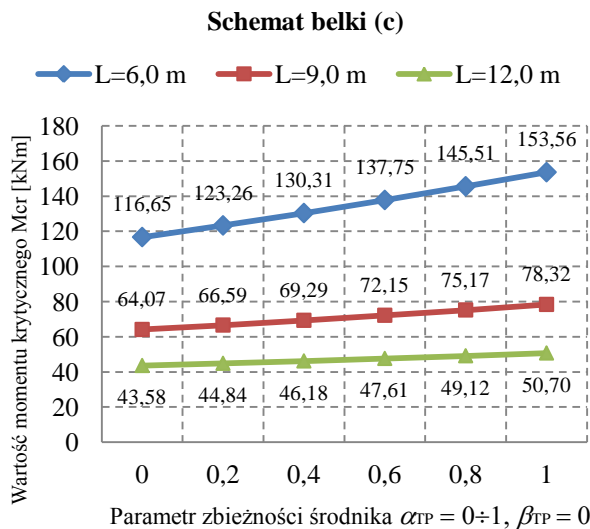
Rysunek 5.1.9. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną obciążeniem ciągłym w środku ścinania.



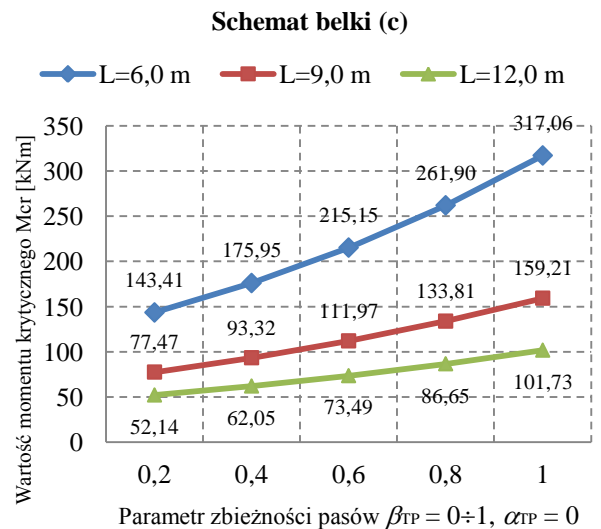
Rysunek 5.1.10. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną obciążeniem ciągłym na pasie górnym.



Rysunek 5.1.11. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną obciążeniem ciągłym na pasie górnym.



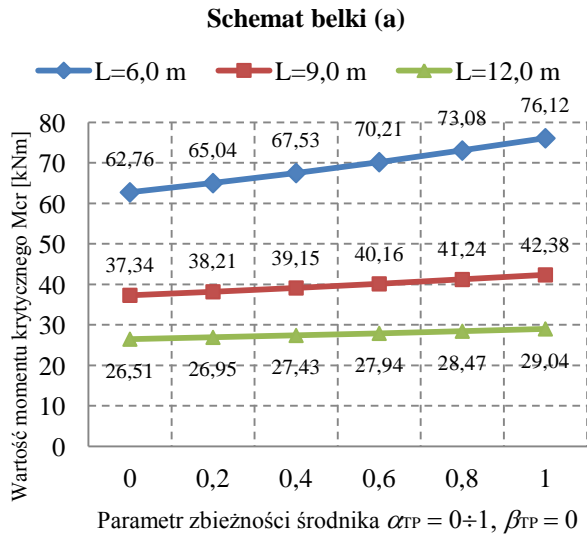
Rysunek 5.1.12. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną obciążeniem ciągłym na pasie górnym.



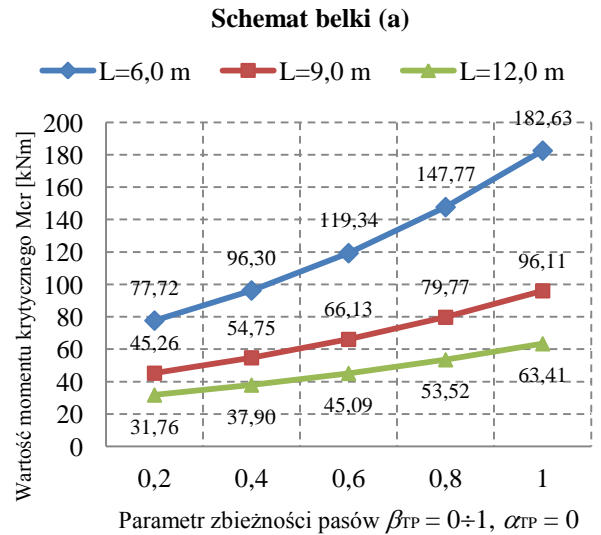
Rysunek 5.1.13. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną obciążeniem ciągłym na pasie górnym.

Tabela 5.1.3. Momenty krytyczne monosymetrycznej belki ze zbieżnością przekroju typu 3 i 4 wg tabeli 3.1.1, obciążoną obciążeniem ciągłym równomiernie rozłożonym.

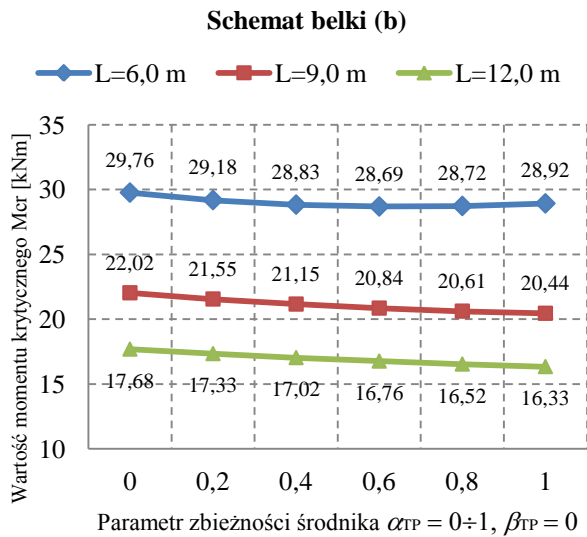
Parametry przekroju poprzecznego		Schemat obciążenia (a)			Schemat obciążenia (b)			Schemat obciążenia (c)					
$b_{01}$	mm												
$b_{02}$	mm												
$h_0$	mm												
$h_{w0}$	mm												
$t_{f1}$	mm												
$t_{f2}$	mm												
$t_w$	mm												
$A_0$	cm <sup>2</sup>												
$I_{y0}$	cm <sup>4</sup>												
$I_{z0}$	cm <sup>4</sup>												
$I_{\omega 0}$	cm <sup>6</sup>												
$\beta_{z0}$	cm												
		<b>Parametr zbieżności</b>			<b><math>M_{cr}</math> [kNm]</b>			<b><math>M_{cr}</math> [kNm]</b>					
		$\alpha_{TP}=0,0$			$L=6,0$ m	$L=9,0$ m	$L=12,0$ m	$L=6,0$ m	$L=9,0$ m	$L=12,0$ m	$L=6,0$ m	$L=9,0$ m	$L=12,0$ m
		$\alpha_{TP}=0,2$			62,757	37,337	26,507	29,755	22,024	17,679	82,689	45,551	30,913
		$\alpha_{TP}=0,4$			65,035	38,207	26,951	29,179	21,545	17,331	87,211	47,337	31,839
		$\alpha_{TP}=0,6$			67,525	39,149	27,427	28,830	21,153	17,023	91,960	49,210	32,806
		$\alpha_{TP}=0,8$			70,213	40,161	27,935	28,686	20,842	16,755	96,914	51,165	33,812
		$\alpha_{TP}=1,0$			73,082	41,238	28,472	28,724	20,607	16,524	102,049	53,196	34,855
					76,117	42,378	29,039	28,923	20,444	16,329	107,345	55,298	35,935
					77,719	45,262	31,759	31,747	23,866	19,392	105,576	56,679	37,849
					96,304	54,753	37,901	33,645	25,552	20,986	134,341	70,306	46,159
			119,339	66,129	45,090	35,544	27,095	22,447	170,117	86,906	56,090		
			147,767	79,769	53,519	37,538	28,528	23,776	214,118	107,009	67,921		
			182,625	96,107	63,408	39,714	29,894	24,988	267,627	131,189	81,966		



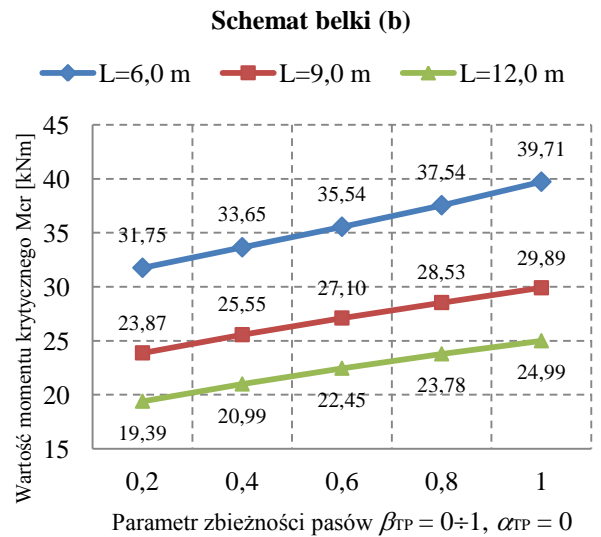
Rysunek 5.1.14. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną obciążeniem ciągłym w środku ścinania.



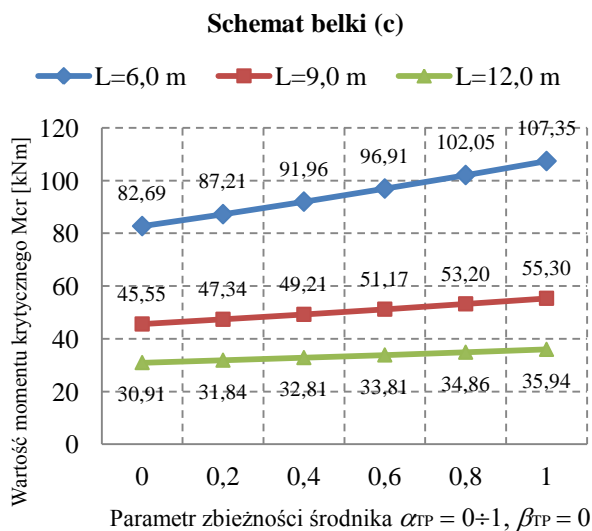
Rysunek 5.1.15. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną obciążeniem ciągłym w środku ścinania.



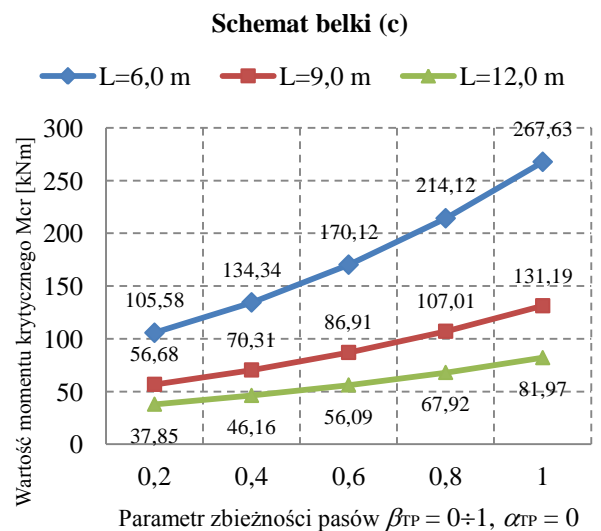
Rysunek 5.1.16. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną obciążeniem ciągłym na pasie górnym.



Rysunek 5.1.17. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną obciążeniem ciągłym na pasie górnym.



Rysunek 5.1.18. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną obciążeniem ciągłym na pasie górnym.

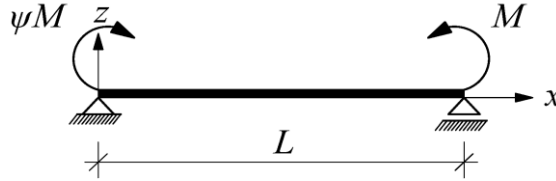


Rysunek 5.1.19. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną obciążeniem ciągłym na pasie górnym.



## 5.2. Belka obciążona momentami skupionymi na końcach

Przyjęto belkę podpartą widełkowo i obciążoną momentami skupionymi na końcach belki jak na rysunku 5.2.1:



Rysunek 5.2.1. Schemat obciążenia belki momentami skupionymi.

Funkcja momentów zginających dla belki jest następująca:

$$M_y(x) = M \left( \psi - \frac{1}{L}(\psi - 1)x \right) \quad \text{dla } 0 \leq \psi < 1, \quad (5.3a)$$

$$M_{\max} = M \quad (5.3b)$$

$$m(x) = \psi - \frac{1}{L}(\psi - 1)x \quad \text{dla } 0 \leq \psi < 1. \quad (5.3c)$$

Elementy wyznacznika  $k_{ij}$  (4.9) uwzględniające funkcje gradientu momentu zginającego  $m(x)$  mają postać:

$$k_{bb} = \frac{1}{2} \int_0^L \left( EI_z(x) \frac{\pi^4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^4} \right) dx \quad (5.4a)$$

$$k_{cc} = \frac{1}{2} \int_0^L \left( GI_T(x) \frac{\pi^2 \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^2} + EI_\omega(x) \frac{\pi^4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^4} \right) dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^L \left( EI_z(x) \left( \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right)^2 \frac{\pi^2 \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^2} + h(x) \frac{\partial h(x)}{\partial x} \frac{\pi^3 \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{L^3} \right) \right) dx + \quad (5.4b)$$

$$+ \overline{M} \int_0^L \left( \left( \psi - \frac{1}{L}(\psi - 1)x \right) \beta_z(x) \frac{\pi^2 \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^2} \right) dx,$$

$$k_3 = \int_0^L \left( E(I_{za}(x) - I_{zb}(x)) \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \frac{\pi^3 \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{2L^3} \right) \right) dx + \overline{M} \int_0^L \left( \left( \psi - \frac{1}{L}(\psi - 1)x \right) \frac{\pi^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^2} \right) dx. \quad (5.4c)$$

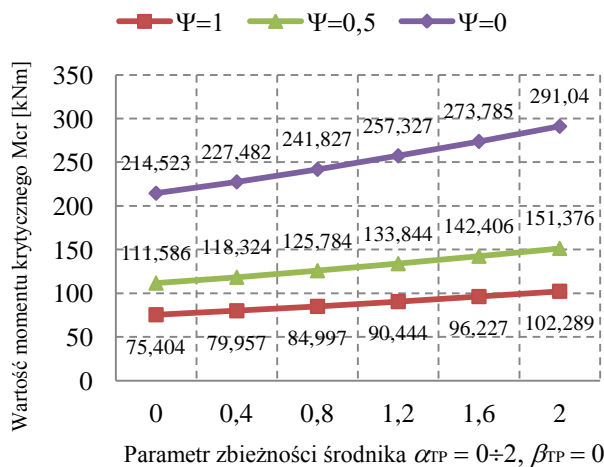
Obliczając wyrażenia podcałkowe, z uwzględnieniem parametrów geometrycznych belek z tabeli 3.1.1, uzyskano składowe wyznacznika (4.9) i rozwiązując z uwagi na  $\overline{M}$ , uzyskano

wartości momentów krytycznych zwichrzenia. Przykłady liczbowe dla konkretnych parametrów zbieżności i rozpiętości belek przedstawiono w tabelach 5.2.1-5.2.4 i na rys. 5.2.2 do 5.2.9.

Tabela 5.2.1. Momenty krytyczne bisymetrycznej belki ze zbieżnością przekroju typu 1 i 2 wg tabeli 3.1.1., obciążoną momentami skupionymi.

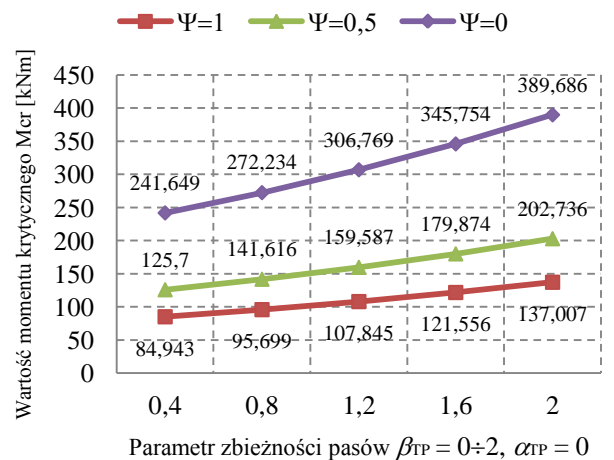
Parametry przekroju poprzecznego			Schemat belki (a)								
$b_{01}$	150	mm									
$b_{02}$	150	mm									
$h_0$	300	mm									
$h_{w0}$	280	mm									
$t_{f1}$	10	mm									
$t_{f2}$	10	mm									
$t_w$	7	mm									
$A_0$	49,6	cm <sup>2</sup>									
$I_{y0}$	7590,53	cm <sup>4</sup>									
$I_{z0}$	563,3	cm <sup>4</sup>									
$I_{\omega 0}$	118433	cm <sup>6</sup>									
$\beta_{z0}$	0	cm									
			$M_{cr}$ [kNm]								
			Parametr zbieżności			$L=6,0$ m		$L=9,0$ m			
			$\alpha_{TP}$	$\beta_{TP}$		$\Psi=1$	$\Psi=0,5$	$\Psi=0$	$\Psi=1$	$\Psi=0,5$	$\Psi=0$
			0,0	0		75,404	111,586	214,523	44,497	65,851	126,609
			0,4	0		79,957	118,324	227,482	46,040	68,134	131,001
			0,8	0		84,997	125,784	241,827	47,791	70,725	135,982
			1,2	0		90,444	133,844	257,327	49,726	73,589	141,490
			1,6	0		96,227	142,406	273,785	51,826	76,697	147,466
			2,0	0		102,289	151,376	291,040	54,071	80,019	153,855
			0,4	0		84,943	125,70	241,649	49,769	73,653	141,606
0,8	0		95,699	141,616	272,234	55,548	82,203	158,039			
1,2	0		107,845	159,587	306,769	61,893	91,591	176,082			
1,6	0		121,556	179,874	345,754	68,869	101,915	195,923			
2,0	0		137,007	202,736	389,686	76,549	113,278	217,760			

Schemat belki (a) - rozpiętość  $L=6,0$  m



Rysunek 5.2.2. Momenty krytyczne belki o rozpiętości  $L=6,0$  m ze zbieżnym średnikiem, obciążoną momentami skupionymi.

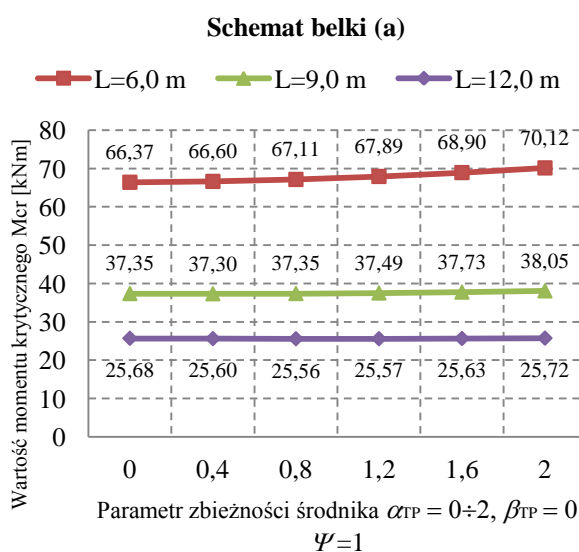
Schemat belki (a) - rozpiętość  $L=6,0$  m



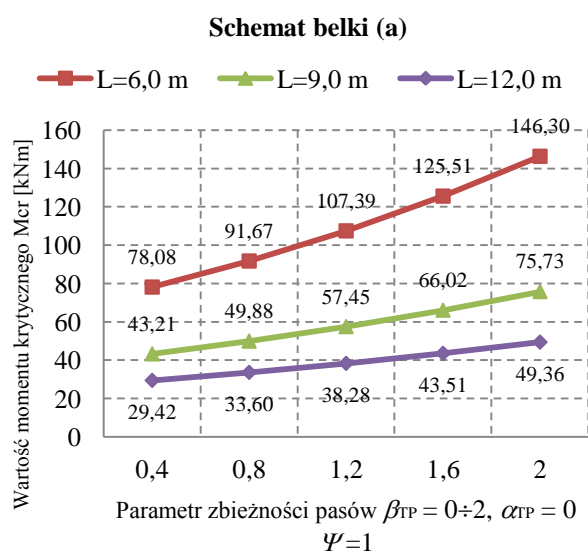
Rysunek 5.2.3. Momenty krytyczne belki o rozpiętości  $L=6,0$  m ze zbieżnymi pasami, obciążoną momentami skupionymi.

Tabela 5.2.2. Momenty krytyczne monosymetrycznej belki ze zbieżnością przekroju typu 1 i 2 wg tabeli 3.1.1, obciążoną momentami skupionymi.

Parametry przekroju poprzecznego			Schemat belki			
$b_{01}$	150	mm				
$b_{02}$	75	mm				
$h_0$	300	mm				
$h_{w0}$	280	mm				
$t_{f1}$	10	mm				
$t_{f2}$	10	mm				
$t_w$	7	mm				
$A_0$	42,1	cm <sup>2</sup>				
$I_{y0}$	5732,12	cm <sup>4</sup>				
$I_{z0}$	317,21	cm <sup>4</sup>				
$I_{\omega 0}$	26281	cm <sup>6</sup>				
$\beta_{z0}$	10,50	cm				
$\Psi$	1,0	-				
			Parametr zbieżności			
			$M_{cr}$ [kNm]			
			$L=6,0$ m	$L=9,0$ m	$L=12,0$ m	
			$\alpha_{TP}=0,0$	66,371	37,347	25,675
			$\alpha_{TP}=0,4$	66,599	37,298	25,596
			$\alpha_{TP}=0,8$	67,113	37,349	25,563
			$\alpha_{TP}=1,2$	67,888	37,494	25,573
			$\alpha_{TP}=1,6$	68,897	37,729	25,625
			$\alpha_{TP}=2,0$	70,115	38,047	25,717
			$\beta_{TP}=0,4$	78,078	43,212	29,415
$\beta_{TP}=0,8$	91,668	49,878	33,599			
$\beta_{TP}=1,2$	107,39	57,445	38,279			
$\beta_{TP}=1,6$	125,509	66,024	43,512			
$\beta_{TP}=2,0$	146,304	75,733	49,358			



Rysunek 5.2.4. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środknikiem, obciążoną momentami skupionymi.



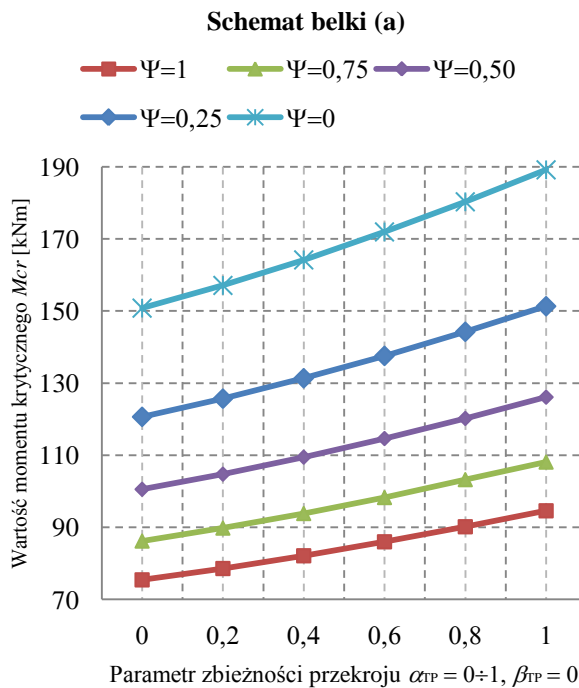
Rysunek 5.2.5. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną momentami skupionymi.

Tabela 5.2.3. Momenty krytyczne bisymetrycznej belki ze zbieżnością przekroju typu 3 i 4 wg tabeli 3.1.1, obciążoną momentami skupionymi.

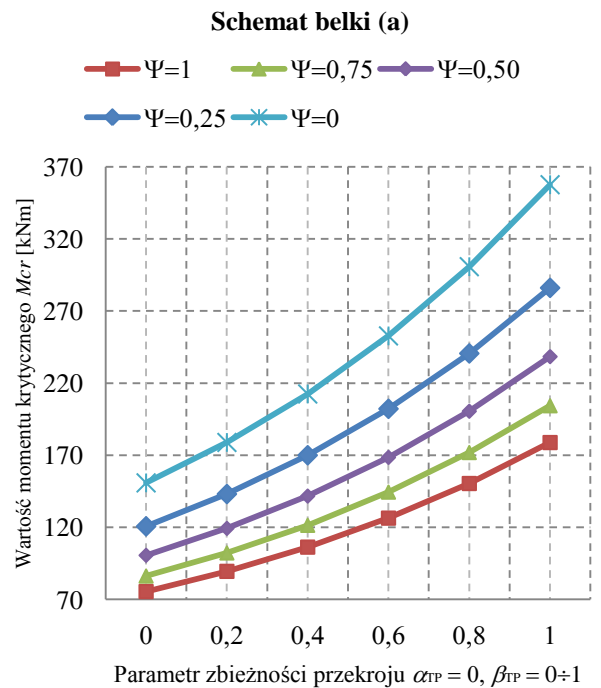
Parametry przekroju poprzecznego			Schemat belki (a)				
$b_{01}$	150	mm					
$b_{02}$	150	mm					
$h_0$	300	mm					
$h_{w0}$	280	mm					
$t_{f1}$	10	mm					
$t_{f2}$	10	mm					
$t_w$	7	mm					
$A_0$	49,6	cm <sup>2</sup>					
$I_{y0}$	7590,53	cm <sup>4</sup>					
$I_{z0}$	563,3	cm <sup>4</sup>					
$I_{\varphi 0}$	118433	cm <sup>6</sup>					
$\beta_{z0}$	0	cm					
$L$	6,0	m					

	Parametr zbieżności	$M_{cr}$ [kNm]					
		$\Psi=1$	$\Psi=0,75$	$\Psi=0,50$	$\Psi=0,25$	$\Psi=0$	
$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=0$	$\alpha_{TP}=0,0$	75,404	86,176	100,538	120,646	150,807
		$\alpha_{TP}=0,2$	78,552	89,774	104,738	125,687	157,110
		$\alpha_{TP}=0,4$	82,089	93,817	109,455	131,35	164,192
		$\alpha_{TP}=0,6$	85,967	98,250	114,628	137,558	171,955
		$\alpha_{TP}=0,8$	90,142	103,220	120,196	144,241	180,312
		$\alpha_{TP}=1,0$	94,575	108,088	126,107	151,336	189,184
$\beta_{TP}=0,2$	$\alpha_{TP}=0$	$\beta_{TP}=0,2$	89,418	102,193	119,226	143,073	178,845
		$\beta_{TP}=0,4$	106,220	121,369	141,631	169,963	212,463
		$\beta_{TP}=0,6$	126,350	144,403	168,476	202,182	252,746
		$\beta_{TP}=0,8$	150,354	171,839	200,489	240,603	300,786
		$\beta_{TP}=1,0$	178,762	204,309	238,376	286,077	357,645



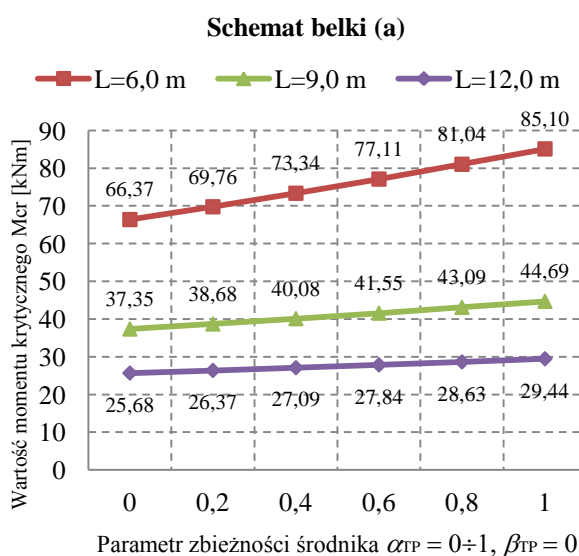
Rysunek 5.2.6. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym średnikiem, obciążoną momentami skupionymi dla różnych wartości parametru  $\Psi$ .



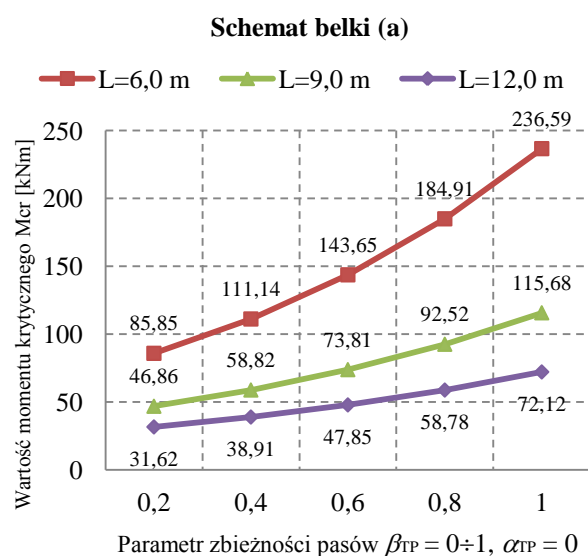
Rysunek 5.2.7. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną momentami skupionymi dla różnych wartości parametru  $\Psi$ .

Tabela 5.2.4. Momenty krytyczne monosymetrycznej belki ze zbieżnością przekroju typu 3 i 4 wg tabeli 3.1.1, obciążoną momentami skupionymi.

Parametry przekroju poprzecznego			Schemat belki (a)					
$b_{01}$	150	mm						
$b_{02}$	75	mm						
$h_0$	300	mm						
$h_{w0}$	280	mm						
$t_{f1}$	10	mm						
$t_{f2}$	10	mm						
$t_w$	7	mm						
$A_0$	42,1	cm <sup>2</sup>						
$I_{v0}$	5732,12	cm <sup>4</sup>						
$I_{z0}$	317,21	cm <sup>4</sup>						
$I_{\omega 0}$	26281	cm <sup>6</sup>						
$\beta_{z0}$	10,50	cm						
$\Psi$	1,0	-						
			Parametr zbieżności			$M_{cr}$ [kNm]		
					$L=6,0$ m	$L=9,0$ m	$L=12,0$ m	
			$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=0$	66,371	37,347	25,675	
			$\alpha_{TP}=0,2$		69,759	38,678	26,365	
			$\alpha_{TP}=0,4$		73,344	40,082	27,087	
			$\alpha_{TP}=0,6$		77,109	41,554	27,842	
			$\alpha_{TP}=0,8$		81,035	43,091	28,628	
			$\alpha_{TP}=1,0$		85,103	44,688	29,444	
			$\beta_{TP}=0,2$	$\alpha_{TP}=0$	85,845	46,857	31,624	
			$\beta_{TP}=0,4$		111,136	58,816	38,913	
$\beta_{TP}=0,6$	143,647	73,813	47,845					
$\beta_{TP}=0,8$	184,914	92,519	58,779					
$\beta_{TP}=1,0$	236,587	115,681	72,120					



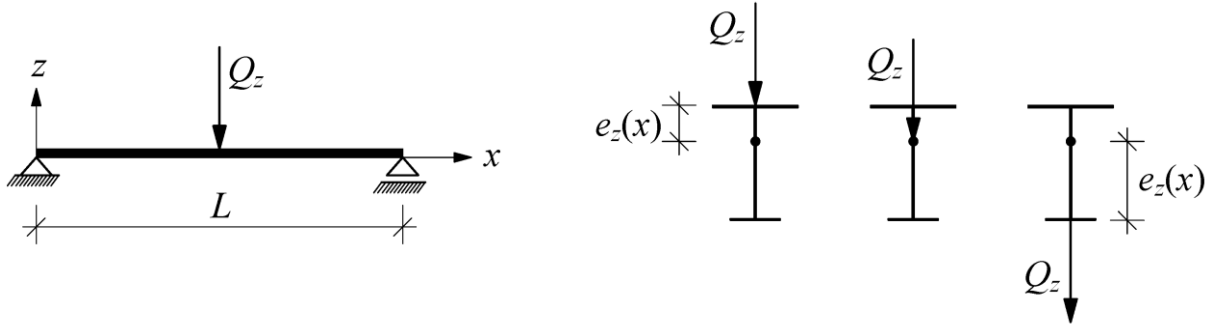
Rysunek 5.2.8. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym średnikiem, obciążoną momentami skupionymi.



Rysunek 5.2.9. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną momentami skupionymi.

### 5.3. Belka obciążona siłą skupioną

Analizowano belkę podpartą widelkowo i obciążoną siłą skupioną, usytuowaną w środku rozpiętości jak na rysunku 5.3.1, zaczepioną do pasa górnego, środka ścinania, pasa dolnego:



Rysunek 5.3.1. Schemat obciążenia belki siłą skupioną.

Dla takiego schematu wyznaczono funkcję gradientu momentów zginających:

$$M_y(x) = \frac{Q_z}{2} x \quad \text{dla} \quad 0 \leq x < \frac{L}{2}, \quad (5.5a)$$

$$\bar{M} = \frac{Q_z L}{4} \quad (5.5b)$$

$$m(x) = 2 \frac{x}{L} \quad (5.5c)$$

Wprowadzając do wyznacznika (4.9) funkcje gradientu momentu zginającego (5.5c) otrzymano następujące składniki  $k_{ii}$  wyznacznika:

$$k_{bb} = \int_0^{\frac{L}{2}} EI_z(x) \frac{\pi^4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^4} dx \quad (5.6a)$$

$$k_{cc} = \int_0^{\frac{L}{2}} \left( GI_T(x) \frac{\pi^2 \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^2} + EI_\omega(x) \frac{\pi^4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^4} \right) dx +$$

$$+ \int_0^{\frac{L}{2}} \left( EI_z(x) \left( \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right)^2 \frac{\pi^2 \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^2} + h(x) \frac{\partial h(x)}{\partial x} \frac{\pi^3 \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{L^3} \right) \right) dx + \quad (5.6b)$$

$$+ 4\bar{M} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{x}{L} \beta_z(x) \frac{\pi^2 \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^2} dx + \int_0^{\frac{L}{2}} \left( Q_z e_z(x) \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right) dx$$

$$\begin{aligned}
 k_{cb} = & 2 \int_0^{\frac{L}{2}} \left( E(I_{zt}(x) - I_{zb}(x)) \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \frac{\pi^3 \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{2L^3} \right) \right) dx + \\
 & + 4M \int_0^{\frac{L}{2}} \left( \frac{x}{L} \frac{\pi^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^2} \right) dx
 \end{aligned} \tag{5.6c}$$

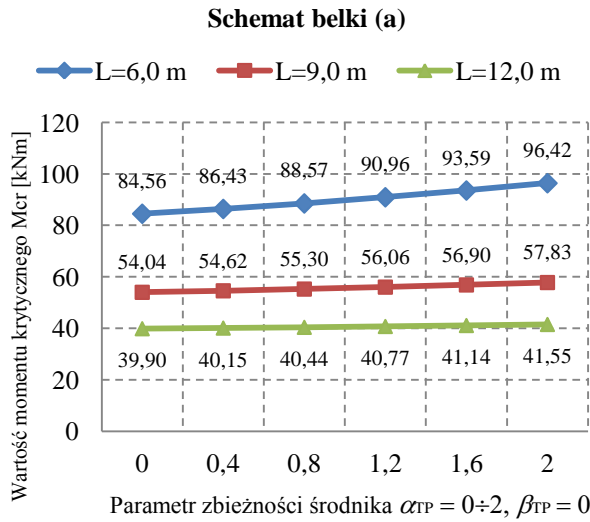
Po wprowadzeniu funkcji momentów zginających (5.5c), odpowiednich charakterystyk geometrycznych przekrojów poprzecznych z tab. 3.1.1, wyznaczono momenty krytyczne zwichrzenia dla belki jak na rysunku 5.3.1, dla różnych parametrów zbieżności pasów i średnika. Wyrażenia podcałkowe są funkcjami złożonymi wymagającymi całkowania przez części. Do obliczeń zastosowano program MATHEMATICA.

W tabelach 5.3.1-5.3.4 przedstawiono wyniki obliczeń momentów krytycznych belki podpartej widelkowo obciążonej siłą skupioną, dla różnych schematów zbieżności przekroju poprzecznego i dla różnych parametrów zbieżności pasów i średnika. Obliczenia zilustrowano graficznie na rysunkach 5.3.2-5.3.17.

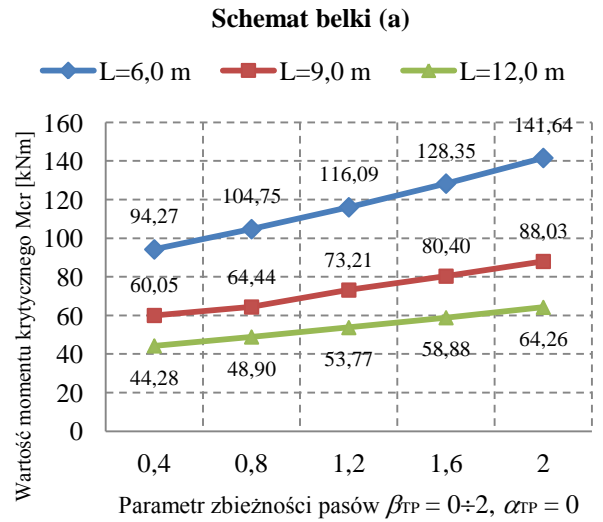
Tabela 5.3.1. Momenty krytyczne bisymetrycznej belki ze zbieżnością przekroju typu 1 i 2 wg tabeli 3.1.1, obciążoną siłą skupioną w środku rozpiętości.

Parametry przekroju poprzecznego		Schemat obciążenia (a)			Schemat obciążenia (b)			Schemat obciążenia (c)					
$b_{01}$	150	$b_{01}$	150	$b_{01}$	$b_{01}$	$b_{01}$	$b_{01}$	$b_{01}$	$b_{01}$	$b_{01}$			
$b_{02}$	150	$b_{02}$	150	$b_{02}$	$b_{02}$	$b_{02}$	$b_{02}$	$b_{02}$	$b_{02}$	$b_{02}$			
$h_0$	150	$h_0$	150	$h_0$	$h_0$	$h_0$	$h_0$	$h_0$	$h_0$	$h_0$			
$h_{w0}$	130	$h_{w0}$	130	$h_{w0}$	$h_{w0}$	$h_{w0}$	$h_{w0}$	$h_{w0}$	$h_{w0}$	$h_{w0}$			
$t_{f1}$	10	$t_{f1}$	10	$t_{f1}$	$t_{f1}$	$t_{f1}$	$t_{f1}$	$t_{f1}$	$t_{f1}$	$t_{f1}$			
$t_{f2}$	10	$t_{f2}$	10	$t_{f2}$	$t_{f2}$	$t_{f2}$	$t_{f2}$	$t_{f2}$	$t_{f2}$	$t_{f2}$			
$t_w$	7	$t_w$	7	$t_w$	$t_w$	$t_w$	$t_w$	$t_w$	$t_w$	$t_w$			
$A_0$	39,1	$A_0$	39,1	$A_0$	$A_0$	$A_0$	$A_0$	$A_0$	$A_0$	$A_0$			
$I_{y0}$	1600,66	$I_{y0}$	1600,66	$I_{y0}$	$I_{y0}$	$I_{y0}$	$I_{y0}$	$I_{y0}$	$I_{y0}$	$I_{y0}$			
$I_{z0}$	562,87	$I_{z0}$	562,87	$I_{z0}$	$I_{z0}$	$I_{z0}$	$I_{z0}$	$I_{z0}$	$I_{z0}$	$I_{z0}$			
$I_{\omega 0}$	27562,5	$I_{\omega 0}$	27562,5	$I_{\omega 0}$	$I_{\omega 0}$	$I_{\omega 0}$	$I_{\omega 0}$	$I_{\omega 0}$	$I_{\omega 0}$	$I_{\omega 0}$			
$\beta_{z0}$	0	$\beta_{z0}$	0	$\beta_{z0}$	0	$\beta_{z0}$	0	$\beta_{z0}$	0	$\beta_{z0}$			
		Parametr zbieżności			$M_{cr}$ [kNm]			$M_{cr}$ [kNm]					
		$\alpha_{TP}=0,0$			$L=6,0$ m	$L=9,0$ m	$L=12,0$ m	$L=6,0$ m	$L=9,0$ m	$L=12,0$ m	$L=6,0$ m	$L=9,0$ m	$L=12,0$ m
		$\alpha_{TP}=0,4$			84,556	54,039	39,899	100,835	64,929	45,128	70,893	44,976	33,113
		$\alpha_{TP}=0,8$			86,426	54,621	40,149	103,749	66,221	48,865	71,982	45,053	32,989
		$\alpha_{TP}=1,2$			88,567	55,295	40,440	106,932	67,608	49,696	73,340	45,224	32,904
		$\alpha_{TP}=1,6$			90,960	56,057	40,771	110,366	69,084	50,596	74,947	45,485	32,871
		$\alpha_{TP}=2,0$			93,585	56,904	41,141	114,029	70,648	51,485	76,785	45,833	32,877
					96,423	57,833	41,548	117,903	72,294	52,440	78,834	46,246	32,918
		$\beta_{TP}=0,4$			94,268	60,052	44,282	114,408	73,532	54,407	77,657	49,035	36,038
		$\beta_{TP}=0,8$			104,754	64,436	48,903	129,388	82,936	61,300	84,786	53,208	39,007
$\beta_{TP}=1,2$			116,087	73,210	53,767	145,904	93,200	68,792	92,333	57,495	42,016		
$\beta_{TP}=1,6$			128,353	80,399	58,881	164,094	104,386	76,919	100,357	61,906	45,063		
$\beta_{TP}=2,0$			141,644	88,028	64,255	184,104	116,561	85,723	108,925	66,457	48,151		

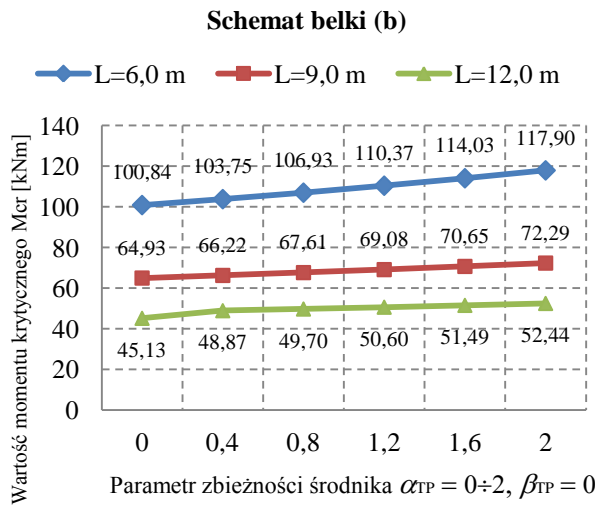




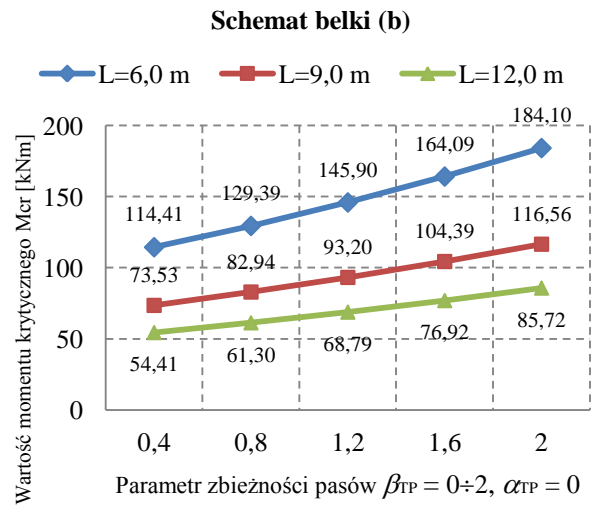
Rysunek 5.3.2. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną siłą skupioną w środku ścinania.



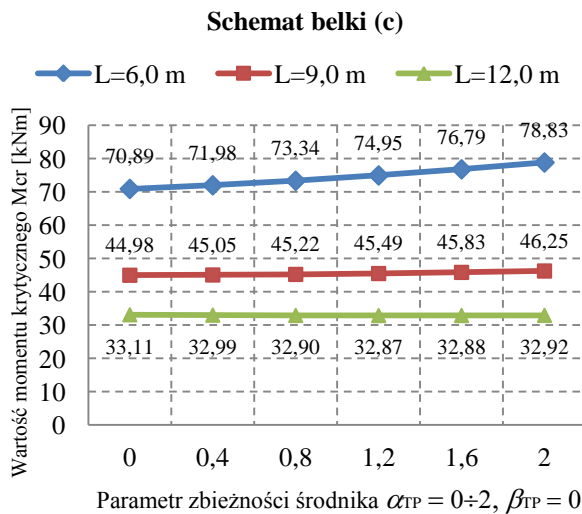
Rysunek 5.3.3. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną siłą skupioną w środku ścinania.



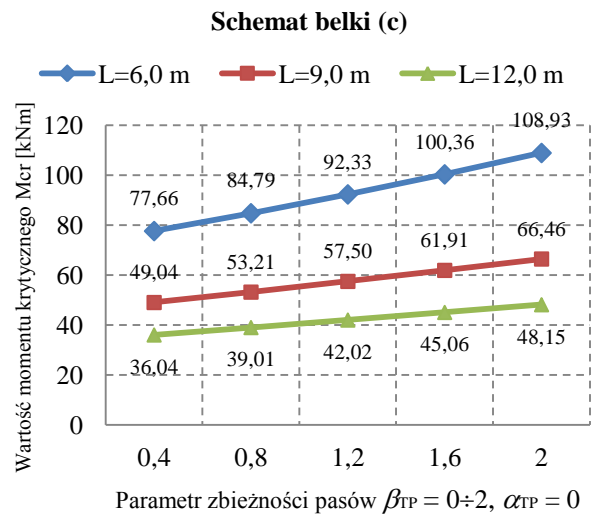
Rysunek 5.3.4. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną siłą skupioną przyłożoną do pasa górnego.



Rysunek 5.3.5. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną siłą skupioną przyłożoną do pasa górnego.



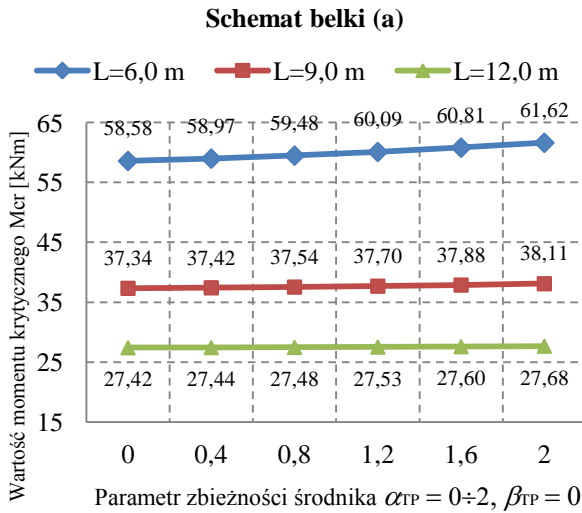
Rysunek 5.3.6. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną siłą skupioną przyłożoną do pasa dolnego.



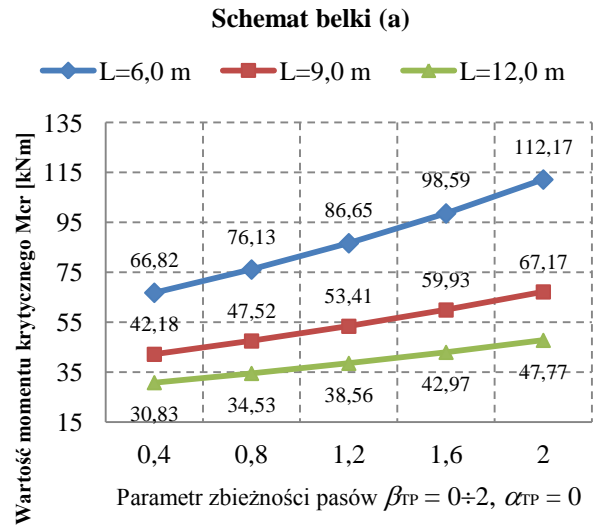
Rysunek 5.3.7. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną siłą skupioną przyłożoną do pasa dolnego.

Tabela 5.3.2. Momenty krytyczne monosymetrycznej belki ze zbieżnością przekroju typu 1 i 2 wg tabeli 3.1.1, obciążoną siłą skupioną w środku rozpiętości.

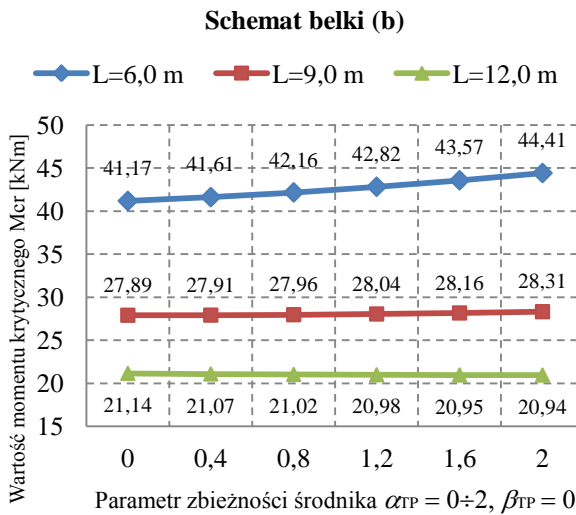
Parametry przekroju poprzecznego		Schemat obciążenia			Schemat obciążenia			Schemat obciążenia		
$b_{01}$	150									
$b_{02}$	75									
$h_0$	150									
$h_{w0}$	130									
$t_{f1}$	10									
$t_{f2}$	10									
$t_w$	7									
$A_0$	31,6									
$I_{y0}$	1145,31									
$I_{z0}$	316,77									
$I_{w0}$	612,5									
$\beta_{z0}$	4,76									
Parametr zbieżności $\alpha_{TP}=0,0$ $\alpha_{TP}=0,4$ $\alpha_{TP}=0,8$ $\alpha_{TP}=1,2$ $\alpha_{TP}=1,6$ $\alpha_{TP}=2,0$		$M_{cr}$ [kNm]			$M_{cr}$ [kNm]			$M_{cr}$ [kNm]		
		$L=6,0$ m	$L=9,0$ m	$L=12,0$ m	$L=6,0$ m	$L=9,0$ m	$L=12,0$ m	$L=6,0$ m	$L=9,0$ m	$L=12,0$ m
		58,582	37,341	27,424	41,172	27,892	21,143	68,473	43,769	32,179
		58,973	37,424	27,444	41,614	27,906	21,072	69,449	44,248	32,498
		59,478	37,543	27,480	42,164	27,956	21,017	70,534	44,763	32,833
		60,090	37,697	27,531	42,817	28,039	20,977	71,721	44,312	33,183
		60,805	37,884	27,596	43,569	28,156	20,953	73,007	45,895	33,549
61,617	38,105	27,678	44,413	28,306	20,944	74,385	46,510	33,930		
$\beta_{TP}=0,4$ $\beta_{TP}=0,8$ $\beta_{TP}=1,2$ $\beta_{TP}=1,6$ $\beta_{TP}=2,0$		$M_{cr}$ [kNm]			$M_{cr}$ [kNm]			$M_{cr}$ [kNm]		
		$L=6,0$ m	$L=9,0$ m	$L=12,0$ m	$L=6,0$ m	$L=9,0$ m	$L=12,0$ m	$L=6,0$ m	$L=9,0$ m	$L=12,0$ m
		66,824	42,181	30,826	43,809	29,873	22,729	79,311	50,248	36,775
		76,125	47,517	34,529	46,212	31,737	24,246	91,735	57,543	41,898
		86,651	53,410	38,564	48,390	33,466	25,677	105,982	65,758	47,607
98,592	59,932	42,965	50,331	35,050	27,011	122,320	75,010	53,969		
112,167	67,166	47,774	52,042	36,479	28,240	141,042	85,429	61,058		



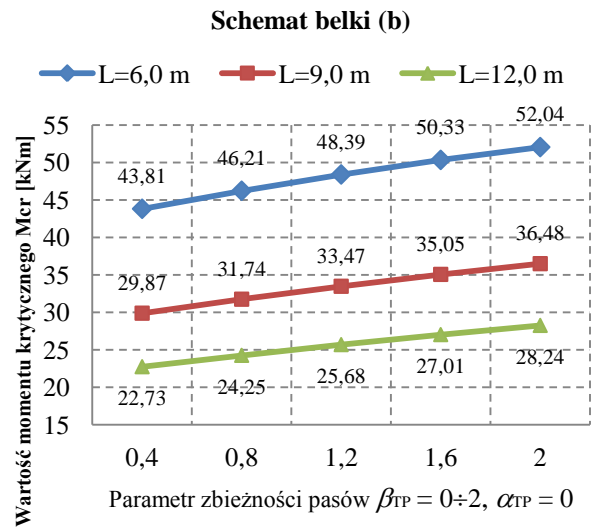
Rysunek 5.3.8. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną siłą skupioną w środku ścinania.



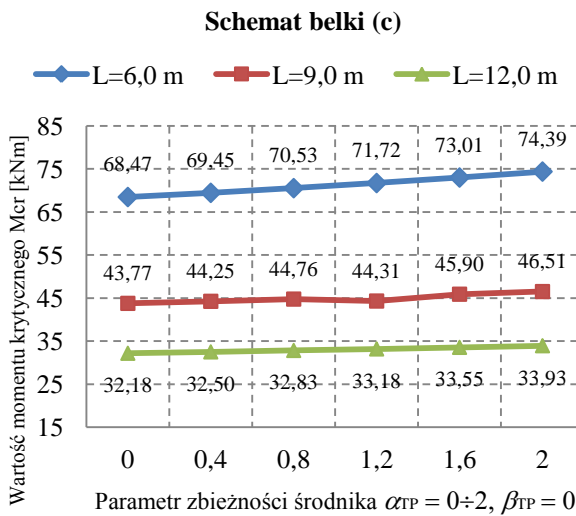
Rysunek 5.3.9. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną siłą skupioną w środku ścinania.



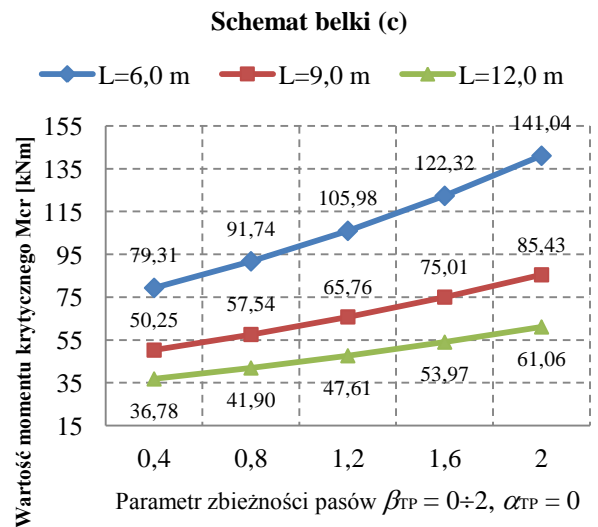
Rysunek 5.3.10. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną siłą skupioną przyłożoną do pasa górnego.



Rysunek 5.3.11. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną siłą skupioną przyłożoną do pasa górnego.



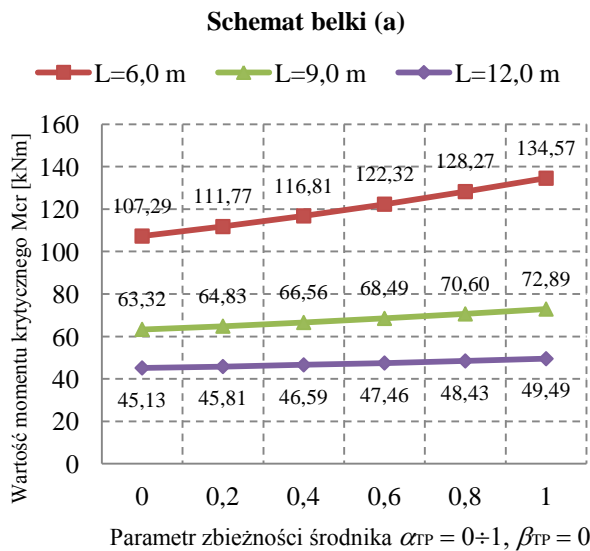
Rysunek 5.3.12. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną siłą skupioną przyłożoną do pasa dolnego.



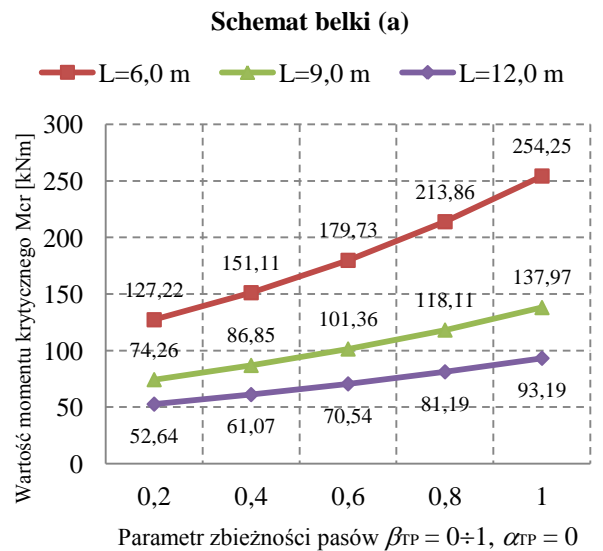
Rysunek 5.3.13. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną siłą skupioną przyłożoną do pasa dolnego.

Tabela 5.3.3. Momenty krytyczne bisymetrycznej belki ze zbieżnością przekroju typu 3 i 4 wg tabeli 3.1.1, obciążoną siłą skupioną w środku rozpiętości.

Parametry przekroju poprzecznego			Schemat belki (a)							
$b_{01}$	150	mm								
$b_{02}$	150	mm								
$h_0$	300	mm								
$h_{w0}$	280	mm								
$t_{f1}$	10	mm								
$t_{f2}$	10	mm								
$t_w$	7	mm								
$A_0$	49,6	cm <sup>2</sup>								
$I_{y0}$	7590,53	cm <sup>4</sup>								
$I_{z0}$	563,3	cm <sup>4</sup>								
$I_{\omega 0}$	118266	cm <sup>6</sup>								
$\beta_{z0}$	0	cm								
						Parametr zbieżności				
						$M_{cr}$ [kNm]				
						$L=6,0$ m	$L=9,0$ m	$L=12,0$ m		
						$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=0$	107,291	63,315	45,131
						$\alpha_{TP}=0,2$		111,772	64,828	45,806
						$\alpha_{TP}=0,4$		116,805	66,558	46,585
						$\alpha_{TP}=0,6$		122,324	68,488	47,462
						$\alpha_{TP}=0,8$		128,265	70,603	48,433
			$\alpha_{TP}=1,0$	134,573	72,886	49,491				
			$\beta_{TP}=0,2$	$\alpha_{TP}=0$	127,22	74,256	52,639			
$\beta_{TP}=0,4$	151,11	86,845	61,067							
$\beta_{TP}=0,6$	179,732	101,361	70,535							
$\beta_{TP}=0,8$	213,859	118,113	81,189							
$\beta_{TP}=1,0$	254,246	137,973	93,188							



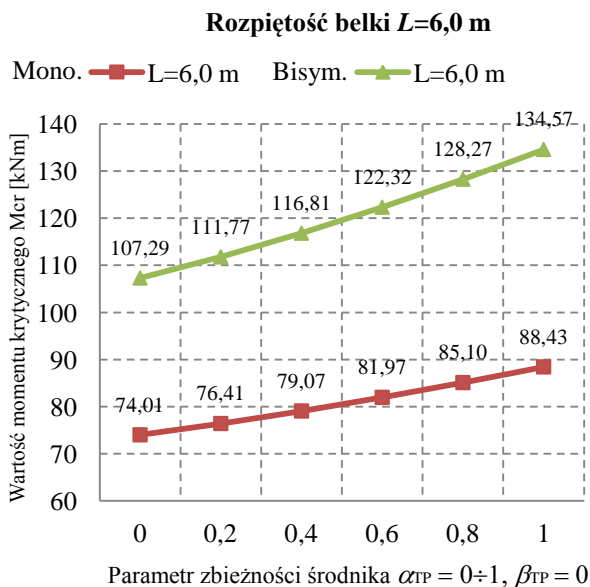
Rysunek 5.3.14. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środknikiem, obciążoną siłą skupioną w środku ścinania.



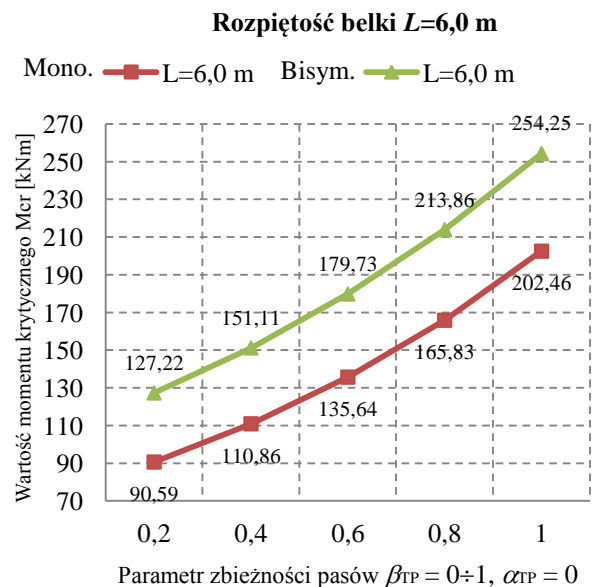
Rysunek 5.3.15. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną siłą skupioną w środku ścinania.

Tabela 5.3.4. Momenty krytyczne monosymetrycznej belki ze zbieżnością przekroju typu 3 i 4 wg tabeli 3.1.1, obciążoną siłą skupioną w środku rozpiętości.

Parametry przekroju poprzecznego			Schemat belki			
$b_{01}$	150	mm				
$b_{02}$	75	mm				
$h_0$	300	mm				
$h_{w0}$	280	mm				
$t_{f1}$	10	mm				
$t_{f2}$	10	mm				
$t_w$	7	mm				
$A_0$	42,1	cm <sup>2</sup>				
$I_{y0}$	5732,12	cm <sup>4</sup>				
$I_{z0}$	317,21	cm <sup>4</sup>				
$I_{\omega 0}$	262812	cm <sup>6</sup>				
$\beta_{z0}$	10,50	cm				
			Parametr zbieżności			
			$M_{cr}$ [kNm]			
			$L=6,0$ m	$L=9,0$ m	$L=12,0$ m	
			$\alpha_{TP}=0,0$	74,008	44,659	31,957
			$\alpha_{TP}=0,2$	76,410	45,563	32,414
			$\alpha_{TP}=0,4$	79,071	46,554	32,909
			$\alpha_{TP}=0,6$	81,974	47,629	33,442
			$\alpha_{TP}=0,8$	85,099	48,783	34,012
			$\alpha_{TP}=1,0$	88,429	50,013	34,617
			$\beta_{TP}=0,2$	90,589	53,670	38,029
$\beta_{TP}=0,4$	110,862	64,299	45,035			
$\beta_{TP}=0,6$	135,635	76,851	53,123			
$\beta_{TP}=0,8$	165,829	91,688	62,473			
$\beta_{TP}=1,0$	202,464	109,223	73,295			



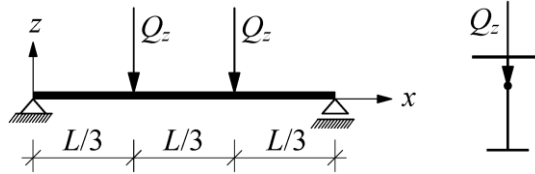
Rysunek 5.3.16. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środknikiem, obciążoną siłą skupioną w środku ścinania.



Rysunek 5.3.17. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną siłą skupioną w środku ścinania.

### 5.4. Belka obciążona dwiema siłami skupionymi

Przyjęto belkę podpartą widelkowo i obciążoną dwiema siłami skupionymi, zaczepionymi w odległości co  $L/3$  jak na rysunku 5.4.1:



Rysunek 5.4.1. Schemat obciążenia belki dwiema siłami skupionymi.

Dla takiego schematu funkcja momentów zginających jest następująca:

$$M_y(x) = Q_z x \quad \text{dla} \quad 0 \leq x < \frac{L}{3}, \quad (5.7a)$$

$$M_y(x) = Q_z x - Q_z \left( x - \frac{L}{3} \right) \quad \text{dla} \quad \frac{L}{3} \leq x < \frac{1}{2} L, \quad (5.7b)$$

$$M_{\max} = \frac{Q_z L}{3}, \quad (5.7c)$$

$$m(x) = 3 \frac{x}{L} \quad \text{dla} \quad 0 \leq x < \frac{1}{3} L, \quad (5.7d)$$

$$m(x) = 1 \quad \text{dla} \quad \frac{L}{3} \leq x < \frac{1}{2} L. \quad (5.7e)$$

Wprowadzając do wyrażen (5.8a-c) funkcje gradientu momentu zginającego  $m(x)$  otrzymano następujące ich postacie:

$$k_{bb} = \frac{1}{2} \int_0^L \left( EI_z(x) \frac{\pi^4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^4} \right) dx, \quad (5.8a)$$

$$\begin{aligned} k_{cc} = & \frac{1}{2} \int_0^L \left( GI_T(x) \frac{\pi^2 \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^2} + EI_\omega(x) \frac{\pi^4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^4} \right) dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L \left( EI_z(x) \left( \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right)^2 \frac{\pi^2 \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^2} + h(x) \frac{\partial h(x)}{\partial x} \frac{\pi^3 \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{L^3} \right) \right) dx + \\ & + 6\bar{M} \int_0^{\frac{L}{3}} \left( \frac{x}{L} \beta_z(x) \frac{\pi^2 \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^2} \right) dx + 2\bar{M} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{L}{2}} \left( \beta_z(x) \frac{\pi^2 \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^2} \right) dx + \\ & + Q_z e_z(x) \sin^2\left(\frac{\pi L}{3}\right), \end{aligned} \quad (5.8b)$$

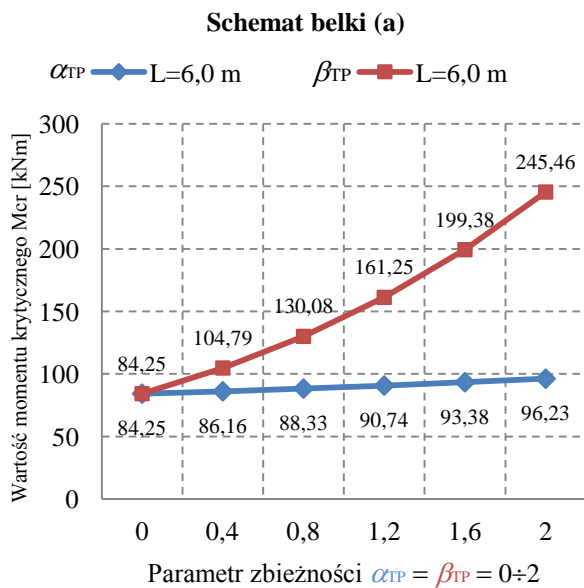
$$\begin{aligned}
 k_{bc} = & \int_0^L \left( E(I_{zt}(x) - I_{zb}(x)) \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \frac{\pi^3 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{2L^3} \right) \right) dx + 6M \int_0^{\frac{L}{3}} \left( \frac{x}{L} \frac{\pi^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^2} \right) dx + \\
 & + 2M \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{L}{2}} \left( \frac{x}{L} \frac{\pi^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{L^2} \right) dx
 \end{aligned} \tag{5.8c}$$

Podstawiając do wyrażen podcałkowych (5.8a-c) funkcje cech geometrycznych belek o zbieżnościach przekrojów wyszczególnionych w tabeli 3.1.1, a następnie po wykonaniu całkowania, uzyskano składowe wartości wyznacznika (4.9), z których obliczono wartości momentów krytycznych.

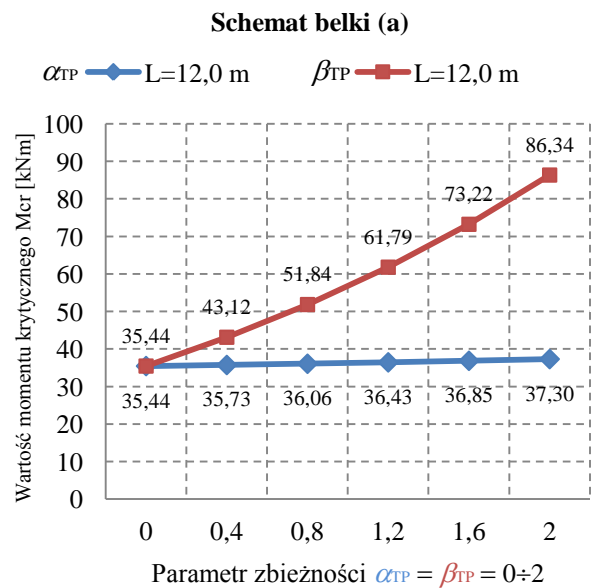
Przykładowe obliczenia momentów krytycznych, wykorzystujące powyższą procedurę dla belki podpartej widełkowo, obciążonej dwiema siłami skupionymi, dla wybranych typów zbieżności zestawiono w tabelach 5.4.1-5.4.9 i przedstawiono graficznie na rysunkach 5.4.2 do 5.4.9.

Tabela 5.4.1. Momenty krytyczne bisy metrycznej belki ze zbieżnością przekroju typu 1 i 2 wg tabeli 3.1.1., obciążoną dwiema siłami skupionymi.

Parametry przekroju poprzecznego			Schemat belki (a)									
$b_{01}$	150	mm										
$b_{02}$	150	mm										
$h_0$	300	mm										
$h_{w0}$	280	mm										
$t_{f1}$	10	mm										
$t_{f2}$	10	mm										
$t_w$	7	mm										
$A_0$	49,6	cm <sup>2</sup>										
$I_{y0}$	7590,53	cm <sup>4</sup>										
$I_{z0}$	563,3	cm <sup>4</sup>										
$I_{\omega 0}$	118266	cm <sup>6</sup>										
$\beta_{z0}$	0	cm										
			Parametr zbieżności			$M_{cr}$ [kNm]						
			$\beta_{TP} = 0$			$L=6,0$ m	$L=9,0$ m	$L=12,0$ m				
						$\alpha_{TP}=0,0$	84,247	49,721	35,443			
						$\alpha_{TP}=0,4$	86,157	50,363	35,729			
						$\alpha_{TP}=0,8$	88,328	51,101	36,059			
						$\alpha_{TP}=1,2$	90,742	51,929	36,432			
						$\alpha_{TP}=1,6$	93,381	52,846	36,846			
						$\alpha_{TP}=2,0$	96,225	53,844	37,301			
						$\alpha_{TP} = 0$			$\beta_{TP} = 0,4$	104,785	60,942	43,121
									$\beta_{TP} = 0,8$	130,079	74,083	51,837
$\beta_{TP} = 1,2$	161,252	89,581							61,793			
$\beta_{TP} = 1,6$	199,379	107,888	73,215									
$\beta_{TP} = 2,0$	245,459	129,460	86,341									



Rysunek 5.4.2. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym przekrojem, obciążoną dwiema siłami skupionymi w środku ścinania, dla różnych parametrów zbieżności.

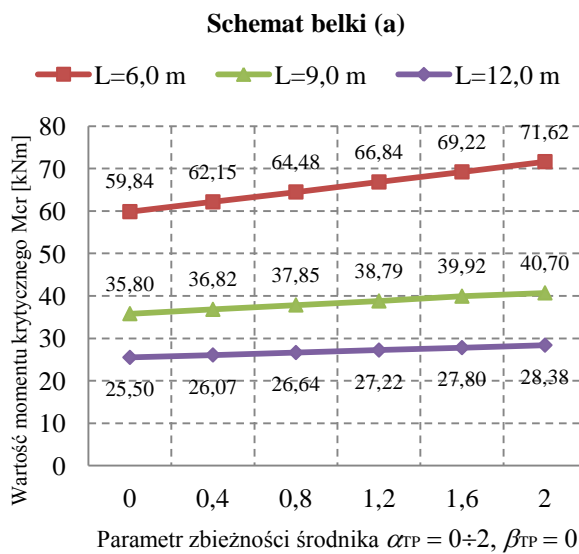


Rysunek 5.4.3. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi przekrojem, obciążoną siłami skupionymi w środku ścinania, dla różnych parametrów zbieżności.

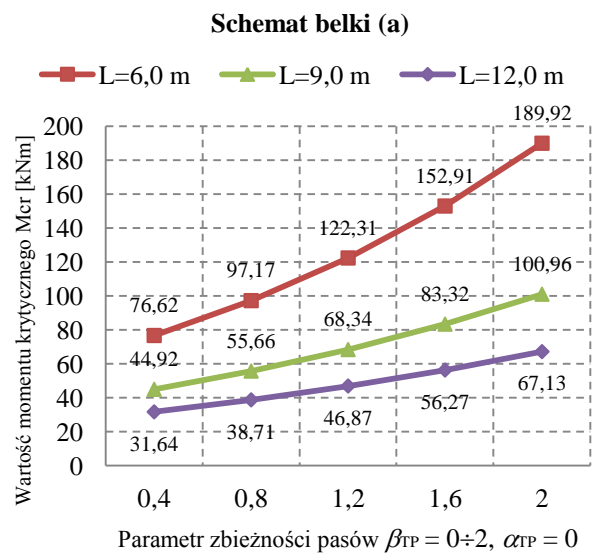


Tabela 5.4.2. Momenty krytyczne monosymetrycznej belki ze zbieżnością przekroju typu 1 i 2 wg tabeli 3.1.1, obciążoną dwiema siłami skupionymi.

Parametry przekroju poprzecznego			Schemat belki (a)									
$b_{01}$	150	mm										
$b_{02}$	75	mm										
$h_0$	300	mm										
$h_{w0}$	280	mm										
$t_{f1}$	10	mm										
$t_{f2}$	10	mm										
$t_w$	7	mm										
$A_0$	42,1	cm <sup>2</sup>										
$I_{y0}$	5732,12	cm <sup>4</sup>										
$I_{z0}$	317,21	cm <sup>4</sup>										
$I_{\omega 0}$	26281	cm <sup>6</sup>										
$\beta_{z0}$	10,50	cm										
			Parametr zbieżności			$M_{cr}$ [kNm]						
			$\beta_{TP} = 0$			$L=6,0$ m	$L=9,0$ m	$L=12,0$ m				
						$\alpha_{TP}=0,0$	59,843	35,801	25,496			
						$\alpha_{TP}=0,4$	62,152	36,820	26,066			
						$\alpha_{TP}=0,8$	64,484	37,846	26,640			
						$\alpha_{TP}=1,2$	66,841	38,789	27,217			
						$\alpha_{TP}=1,6$	69,221	39,921	27,797			
						$\alpha_{TP}=2,0$	71,624	40,696	28,381			
						$\alpha_{TP} = 0$			$\beta_{TP} = 0,4$	76,619	44,915	31,639
									$\beta_{TP} = 0,8$	97,172	55,660	38,713
$\beta_{TP} = 1,2$	122,309	68,343							46,866			
$\beta_{TP} = 1,6$	152,912	83,315	56,273									
$\beta_{TP} = 2,0$	189,916	100,964	67,132									



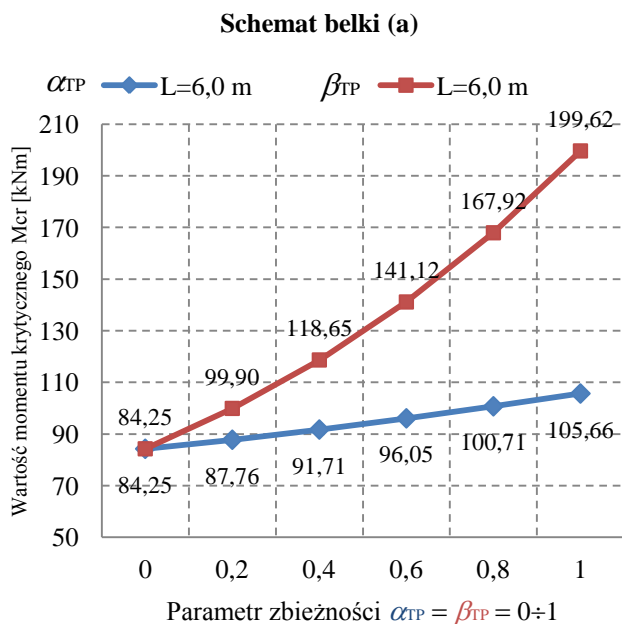
Rysunek 5.4.4. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środknikiem, obciążoną dwiema siłami skupionymi w środku ścinania.



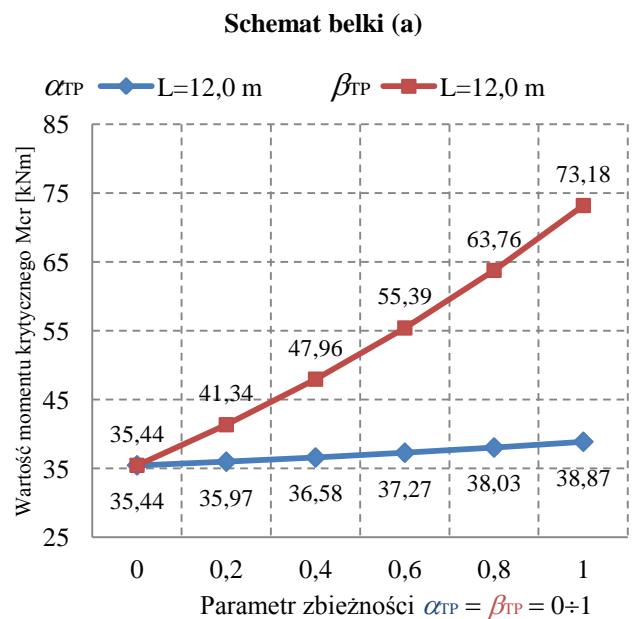
Rysunek 5.4.5. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną siłami skupionymi w środku ścinania.

Tabela 5.4.3. Momenty krytyczne bisymetrycznej belki ze zbieżnością przekroju typu 3 i 4 wg tabeli 3.1.1, obciążoną dwiema siłami skupionymi.

Parametry przekroju poprzecznego			Schemat belki (a)						
$b_{01}$	150	mm							
$b_{02}$	150	mm							
$h_0$	300	mm							
$h_{w0}$	280	mm							
$t_{f1}$	10	mm							
$t_{f2}$	10	mm							
$t_w$	7	mm							
$A_0$	49,6	cm <sup>2</sup>							
$I_{y0}$	7590,53	cm <sup>4</sup>							
$I_{z0}$	563,3	cm <sup>4</sup>							
$I_{\omega 0}$	118433	cm <sup>6</sup>							
$\beta_{z0}$	0	cm							
			Parametr zbieżności			$M_{cr}$ [kNm]			
			$\beta_{TP} = 0$ / $\alpha_{TP} = 0$			$L=6,0$ m	$L=9,0$ m	$L=12,0$ m	
						$\alpha_{TP}=0,0$	84,247	49,721	35,443
						$\alpha_{TP}=0,2$	87,763	50,909	35,973
						$\alpha_{TP}=0,4$	91,713	52,266	36,584
						$\alpha_{TP}=0,6$	96,045	53,781	37,272
						$\alpha_{TP}=0,8$	100,708	55,411	38,034
						$\alpha_{TP}=1,0$	105,659	57,232	38,865
						$\beta_{TP} = 0,2$	99,895	58,314	41,340
						$\beta_{TP} = 0,4$	118,652	68,199	47,958
$\beta_{TP} = 0,6$	141,123	79,597				55,393			
$\beta_{TP} = 0,8$	167,915	92,479	63,759						
$\beta_{TP} = 1,0$	199,621	107,909	73,180						



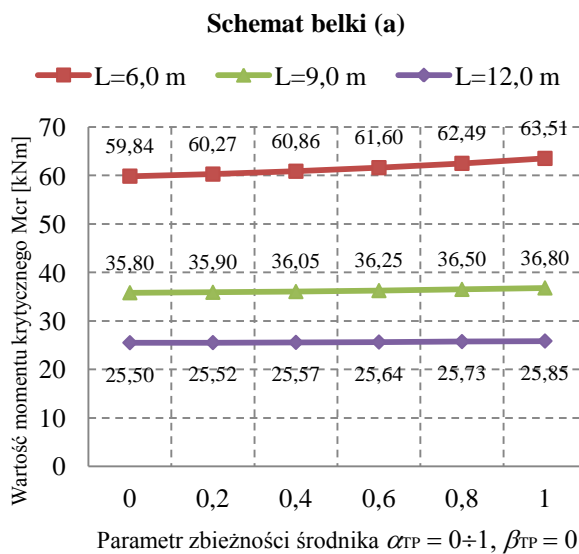
Rysunek 5.4.6. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną dwiema siłami skupionymi w środku ścinania.



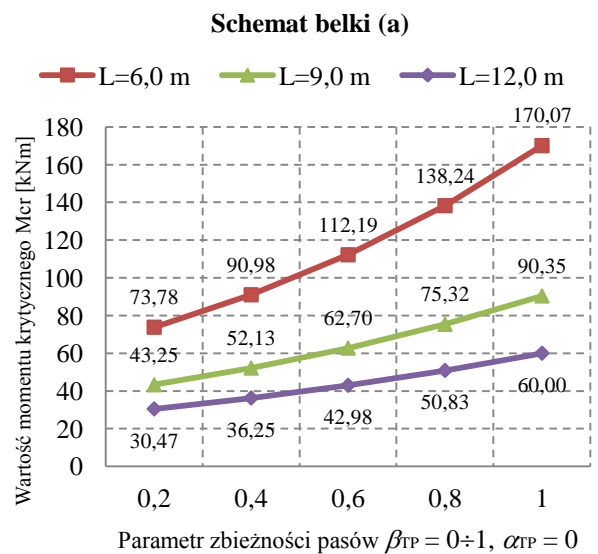
Rysunek 5.4.7. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną siłami skupionymi w środku ścinania.

Tabela 5.4.4. Momenty krytyczne monosymetrycznej belki ze zbieżnością przekroju typu 3 i 4 wg tabeli 3.1.1, obciążoną dwiema siłami skupionymi.

Parametry przekroju poprzecznego			Schemat belki (a)		
$b_{01}$	150	mm			
$b_{02}$	75	mm			
$h_0$	300	mm			
$h_{w0}$	280	mm			
$t_{f1}$	10	mm			
$t_{f2}$	10	mm			
$t_w$	7	mm			
$A_0$	42,1	cm <sup>2</sup>			
$I_{y0}$	5732,12	cm <sup>4</sup>			
$I_{z0}$	317,21	cm <sup>4</sup>			
$I_{\omega 0}$	26281	cm <sup>6</sup>			
$\beta_{z0}$	10,50	cm			
	Parametr zbieżności		$M_{cr}$ [kNm]		
			$L=6,0$ m	$L=9,0$ m	$L=12,0$ m
	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=0$	59,843	35,801	25,496
	$\alpha_{TP}=0,2$		60,268	35,897	25,519
	$\alpha_{TP}=0,4$		60,856	36,045	25,566
	$\alpha_{TP}=0,6$		61,598	36,245	25,637
	$\alpha_{TP}=0,8$		62,486	36,496	25,730
	$\alpha_{TP}=1,0$		63,510	36,795	25,845
	$\beta_{TP}=0,2$	$\alpha_{TP}=0$	73,775	43,254	30,467
	$\beta_{TP}=0,4$		90,978	52,126	36,249
$\beta_{TP}=0,6$	112,188		62,702	42,982	
$\beta_{TP}=0,8$	138,244		75,315	50,833	
$\beta_{TP}=1,0$	170,073		90,348	59,998	



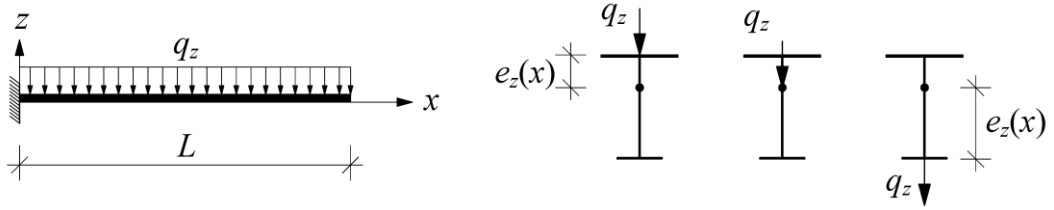
Rysunek 5.4.8. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym średnikiem, obciążoną dwiema siłami skupionymi w środku ścinania.



Rysunek 5.4.9. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną siłami skupionymi w środku ścinania.

## 5.5. Wspornik obciążony obciążeniem ciągłym równomiernie rozłożonym

Analizie poddano belkę wspornikową obciążoną zgodnie z rysunkiem 5.5.1:



Rysunek 5.5.1. Schemat obciążenia wspornika obciążeniem ciągłym równomiernie rozłożonym.

Funkcja gradientów momentów zginających dla belki wspornikowej wynosi:

$$M_y(x) = q_z Lx - \frac{q_z}{2} x^2 - \frac{q_z L^2}{2}, \quad (5.9a)$$

$$M_{\max} = \frac{q_z L^2}{2}, \quad (5.9b)$$

$$m(x) = \left( \frac{2}{L} x - 1 - \frac{x^2}{L^2} \right). \quad (5.9c)$$

Stosując do funkcjonału (4.5) funkcje Ritz'a (3.31c-d) dla przemieszczenia  $v$  i kąta obrotu  $\theta_x$  w pierwszym przybliżeniu ( $i=1$ ):

$$v = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right), \quad (5.11a)$$

$$\theta_x = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right), \quad (5.11b)$$

Otrzymano elementy wyznacznika (4.5):

$$k_{bb} = \frac{1}{2} \int_0^L \left( EI_z(x) \frac{\pi^4 \cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}{16L^4} \right) dx \quad (5.12a)$$

$$k_{cc} = \frac{1}{2} \int_0^L \left( GI_T(x) \frac{\pi^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}{4L^2} + EI_\omega(x) \frac{\pi^4 \cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}{16L^4} \right) dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^L \left( EI_z(x) \left( \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right)^2 \frac{\pi^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}{4L^2} + h(x) \frac{\partial h(x)}{\partial x} \frac{\pi^3 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{16L^3} \right) \right) dx + \quad (5.12b)$$

$$+ \overline{M} \int_0^L \left( \frac{2}{L} x - 1 - \frac{x^2}{L^2} \right) \beta_z(x) \left( \frac{\pi^4 \cos^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{16L^4} \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left( q_z(x) e_z(x) \left( 1 - \cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \right) \right) dx$$

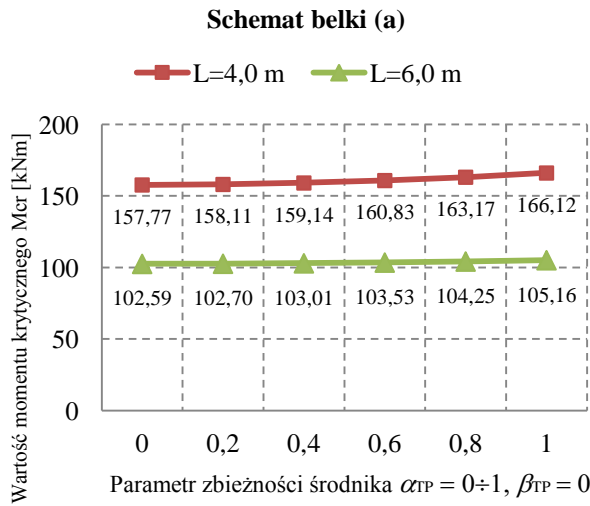
$$\begin{aligned}
 k_{bc} = & \int_0^L \left( E(I_{zt}(x) - I_{zb}(x)) \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \frac{\pi^3 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{16L^3} \right) \right) dx + \\
 & + \overline{M} \int_0^L \left( \left( \frac{2}{L}x - 1 - \frac{x^2}{L^2} \right) \left( 1 - \cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \right) \left( \frac{\pi^2 \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{4L^2} \right) \right) dx
 \end{aligned} \tag{5.12c}$$

Wprowadzając funkcje gradientu momentów zginających  $m(x)$  i cechy geometryczne belki zbieżnej, do składników wyznacznika (5.12a-c) obliczono wartości momentów krytycznych.

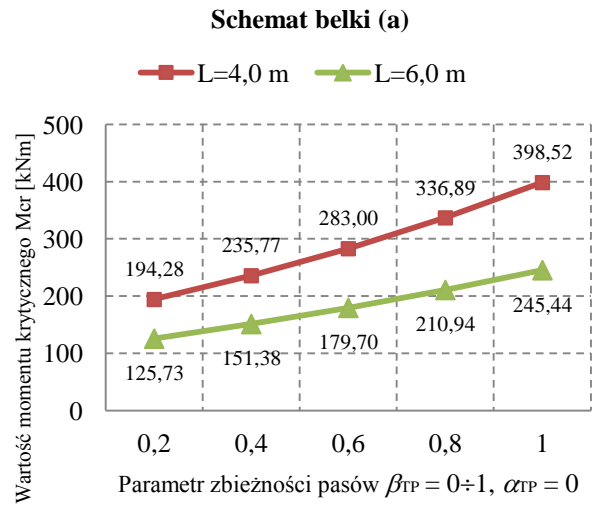
Tabela 5.5.1 zawiera wyniki obliczeń momentów krytycznych dla przykładowej belki wspornikowej z różnymi wartościami parametru zbieżności środnika i pasów. Wyniki te przedstawiono również w postaci graficznej na rysunkach 5.5.2 do 5.5.7.

Tabela 5.5.1. Momenty krytyczne wspornika bisymetrycznego ze zbieżnością przekroju typu 3 i 4 wg tabeli 3.1.1, obciążonego obciążeniem ciągłym równomiernie rozłożonym.

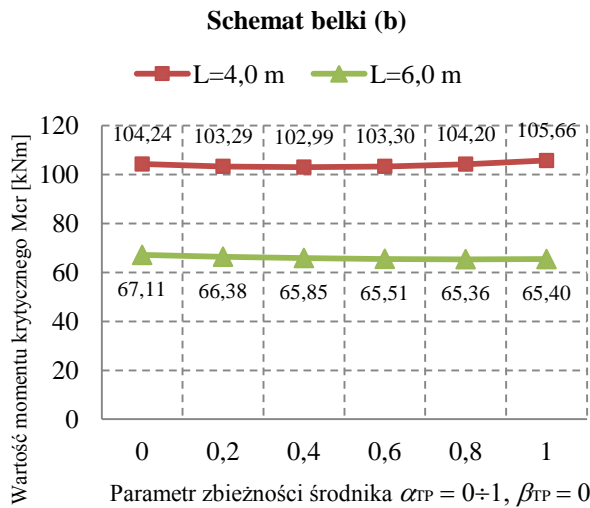
Parametry przekroju poprzecznego		Schemat obciążenia (a)		Schemat obciążenia (b)		Schemat obciążenia (c)		
$b_{01}$	150							
$b_{02}$	150							
$h_0$	150							
$h_{w0}$	130							
$t_{f1}$	10							
$t_{f2}$	10							
$t_w$	7							
$A_0$	39,1							
$I_{y0}$	1600,66							
$I_{z0}$	562,87							
$I_{o0}$	27562							
$\beta_{z0}$	0							
Parametr zbieżności		$M_{cr}$ [kNm]		$M_{cr}$ [kNm]		$M_{cr}$ [kNm]		
		$L=4,0$ m	$L=6,0$ m	$L=4,0$ m	$L=6,0$ m	$L=4,0$ m	$L=6,0$ m	
		$\alpha_{TP}=0,0$	157,765	102,591	104,236	67,111	238,833	156,850
		$\alpha_{TP}=0,2$	158,114	102,697	103,294	66,378	242,082	158,911
		$\alpha_{TP}=0,4$	159,141	103,009	102,987	65,845	245,968	161,174
		$\alpha_{TP}=0,6$	160,831	103,527	103,297	65,509	250,470	163,633
		$\alpha_{TP}=0,8$	163,165	104,246	104,199	65,364	255,564	166,283
$\beta_{TP}=1,0$		$\alpha_{TP}=1,0$	166,116	105,162	105,664	65,404	261,220	169,118
		$\beta_{TP}=0,2$	194,282	125,734	118,406	75,574	318,865	209,224
		$\beta_{TP}=0,4$	235,773	151,380	132,683	83,510	419,098	274,470
		$\beta_{TP}=0,6$	282,996	179,697	147,591	91,086	542,839	354,610
		$\beta_{TP}=0,8$	336,890	210,940	163,738	98,534	639,476	451,729
$\beta_{TP}=1,0$		$\beta_{TP}=1,0$	398,523	245,439	181,733	106,11	874,402	567,938



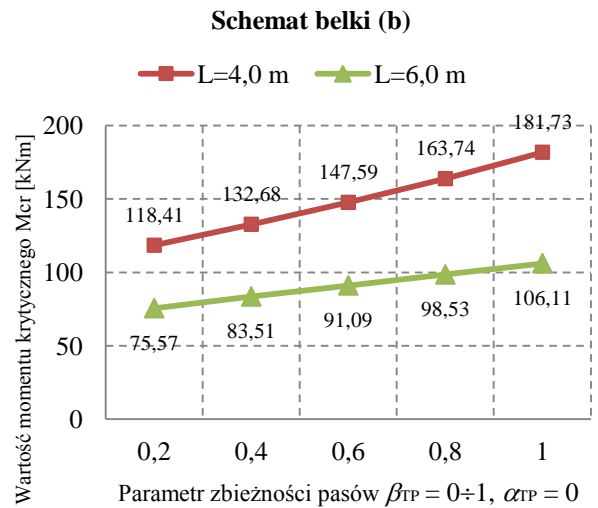
Rysunek 5.5.2. Momenty krytyczne wspornika ze zbieżnym średnikiem, obciążonego obciążeniem ciągłym przyłożonym w środku ścinania.



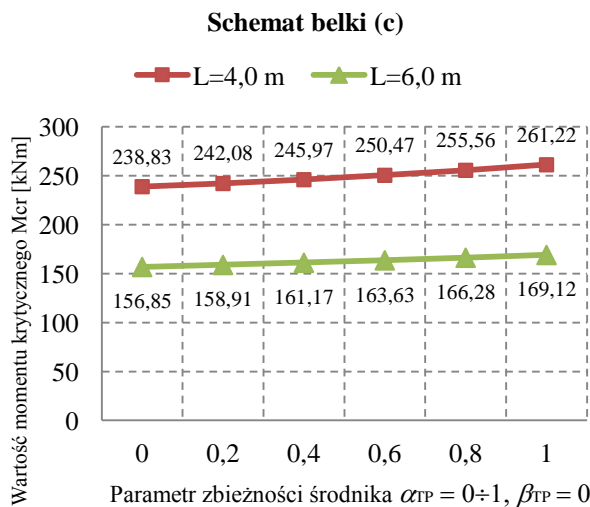
Rysunek 5.5.3. Momenty krytyczne wspornika ze zbieżnymi pasami, obciążonego obciążeniem ciągłym przyłożonym w środku ścinania.



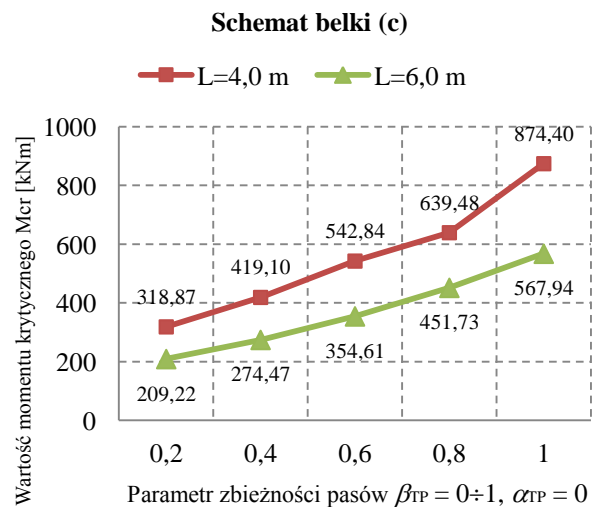
Rysunek 5.5.4. Momenty krytyczne wspornika ze zbieżnym średnikiem, obciążonego obciążeniem ciągłym przyłożonym do górnej półki.



Rysunek 5.5.5. Momenty krytyczne wspornika ze zbieżnymi pasami, obciążonego obciążeniem ciągłym przyłożonym do górnej półki.



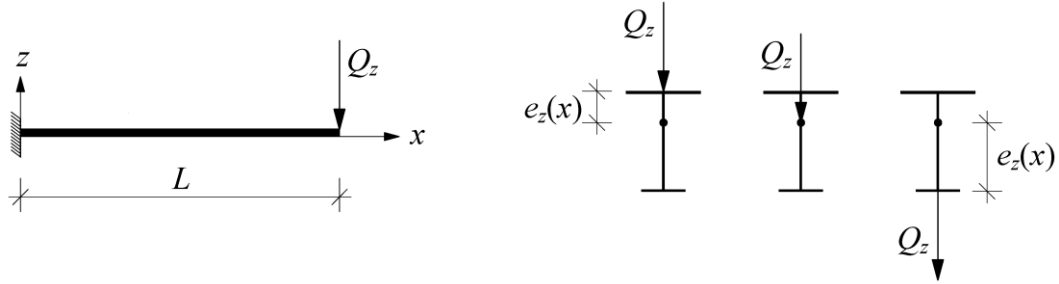
Rysunek 5.5.6. Momenty krytyczne wspornika ze zbieżnym średnikiem, obciążonego obciążeniem ciągłym przyłożonym do dolnej półki.



Rysunek 5.5.7. Momenty krytyczne wspornika ze zbieżnymi pasami, obciążonego obciążeniem ciągłym przyłożonym do dolnej półki.

## 5.6. Wspornik obciążony siłą skupioną na swobodnym końcu

Analizowano belkę wspornikową obciążoną siłą skupioną umieszczoną jak na rysunku 5.6.1, zaczepioną do pasa górnego, dolnego i środka ścinania.



Rysunek 5.6.1. Schemat obciążenia wspornika siłą skupioną

Funkcja gradientu momentów zginających dla belki wspornikowej obciążonej siłą skupioną ma postać:

$$M_y(x) = Q_z(x - L), \quad (5.13a)$$

$$M_{\max} = Q_z L, \quad (5.13b)$$

$$m(x) = \left( \frac{x}{L} - 1 \right). \quad (5.13c)$$

Wprowadzając do wyznacznika (3.34) funkcje gradientu momentów zginających (5.13c) otrzymano następujące wyrażenia:

$$k_{bb} = \frac{1}{2} \int_0^L \left( EI_z(x) \frac{\pi^4 \cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}{16L^4} \right) dx \quad (5.14a)$$

$$k_{cc} = \frac{1}{2} \int_0^L \left( GI_T(x) \frac{\pi^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}{4L^2} + EI_\omega(x) \frac{\pi^4 \cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}{16L^4} \right) dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^L \left( EI_z(x) \left( \left( \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right)^2 \frac{\pi^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}{4L^2} + h(x) \frac{\partial h(x)}{\partial x} \frac{\pi^3 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{16L^3} \right) \right) dx + \quad (5.14b)$$

$$+ \overline{M} \int_0^L \left( \frac{x}{L} - 1 \right) \beta_z(x) \left( \frac{\pi^4 \cos^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{16L^4} \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left( Q_z e_z(x) \left( 1 - \cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \right) \right) dx$$



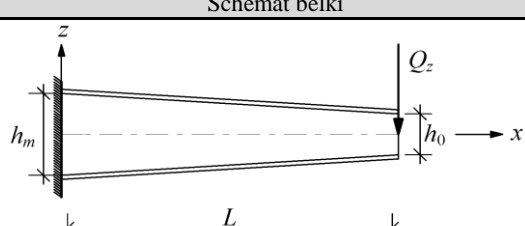
$$k_{bc} = \int_0^L \left( E(I_{zt}(x) - I_{zb}(x)) \left( 2 \frac{\partial h(x)}{\partial x} \frac{\pi^3 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{16L^3} \right) \right) dx +$$

$$+ M \int_0^L \left( \left( \frac{x}{L} - 1 \right) \left( 1 - \cos^2\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \right) \left( \frac{\pi^2 \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{4L^2} \right) \right) dx \quad (5.14c)$$

Obliczając wyrażenia podcałkowe (5.14a-c) z uwzględnieniem cech geometrycznych belek zbieżnych wg tabeli 3.1.1, wykonując niezbędne całkowania wyznaczono wartości momentów krytycznych inicjujące zwichrzenie.

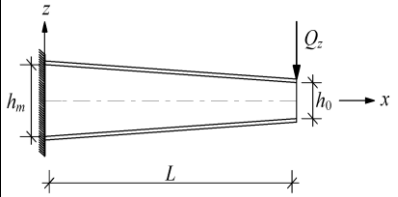
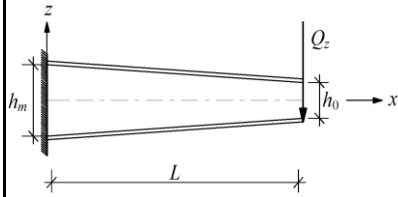
Obliczenia sprawdzające wykonano dla wspornika o rozpiętościach 4,0 m, 6,0 m i 8,0 m. Rozpatrzono przypadek wspornika pryzmatycznego ( $\alpha_{TP} = 0$ ) i ze zbieżnym środkiem ( $\alpha_{TP} = 0,5$ ), z siłą przyłożoną w środku ścinania, do górnej i dolnej półki. Wyniki obliczeń porównano z rozwiązaniem zaprezentowanym przez Andrade et. al. (2007) i przedstawiono w formie tabelarycznej.

Tabela 5.6.1. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie belki wspornikowej obciążonej siłą skupioną na swobodnym końcu wspornika, przyłożoną do środka ścinania.

	Schemat belki					
						
$h_0 = h_{\max} = 300 \text{ mm},$ $b_{01} = b_{02} = 150 \text{ mm},$ $t_f = 10 \text{ mm},$ $t_w = 6 \text{ mm}.$						
Rozpiętość belki $L$	$L=4,0 \text{ m}$		$L=6,0 \text{ m}$		$L=9,0 \text{ m}$	
Parametr zbieżności przekroju	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=0,0$
Moment krytyczny z MES wg Andrade et. al. $M_{cr FEM}^{AD}$ [kNm]	189,6		121,2		84,8	
Moment krytyczny z 1D wg Andrade et. al. $M_{cr 1D}^{AD}$ [kNm]	235,2		127,8		83,2	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr}^{1D}$ [kNm]	181,9		111,4		80,8	
Parametr zbieżności przekroju	$\alpha_{TP}=0,5$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=0,5$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=0,5$	$\beta_{TP}=0,0$
Moment krytyczny z MES wg Andrade et. al. $M_{cr FEM}^{AD}$ [kNm]	214,0		123,0		81,6	
Moment krytyczny z 1D wg Andrade et. al. $M_{cr 1D}^{AD}$ [kNm]	226,4		121,8		81,6	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr}^{1D}$ [kNm]	168,1		81,6		78,9	

*Analiza stateczności belek ze zbieżnymi przekrojami poprzecznymi*

Tabela 5.6.2. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie belki wspornikowej obciążonej siłą skupioną na swobodnym końcu wspornika, przyłożoną do górnej i dolnej półki.

	Schemat belki (a)		Schemat belki (b)			
$h_0=h_{\max}=300$ mm, $b_{01}=b_{02}=150$ mm, $t_f=10$ mm, $t_w=6$ mm.						
	Siła przyłożona do górnej półki (a)		Siła przyłożona do dolnej półki (b)			
Rozpiętość belki $L$	$L=4,0$ m		$L=6,0$ m		$L=9,0$ m	
Parametr zbieżności przekroju	$\alpha_{TP}=0,5$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=0,5$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=0,5$	$\beta_{TP}=0,0$
Moment krytyczny z MES wg Andrade et. al. $M_{cr FEM}^{AD}$ [kNm]	126,4		91,2		67,2	
Moment krytyczny z 1D wg Andrade et. al. $M_{cr 1D}^{AD}$ [kNm]	136,0		93,0		68,0	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr}^{1D}$ [kNm]	104,5		65,1		47,6	
Siła przyłożona do dolnej półki (b)						
Parametr zbieżności przekroju	$\alpha_{TP}=0,5$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=0,5$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=0,5$	$\beta_{TP}=0,0$
Moment krytyczny z MES wg Andrade et. al. $M_{cr FEM}^{AD}$ [kNm]	280,0		142,2		91,2	
Moment krytyczny z 1D wg Andrade et. al. $M_{cr 1D}^{AD}$ [kNm]	281,6		142,8		91,2	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr}^{1D}$ [kNm]	270,5		175,8		130,7	

## 6. Rozwiązanie ogólne zagadnienia stateczności belek Metodą Elementów Skończonych w programie ANSYS

### 6.1. Wprowadzenie

Analiza zagadnienia stateczności w programie ANSYS jest możliwe dzięki specjalnemu modułowi obliczeniowemu „*Buckling Analysis*”, który dostępny jest w strukturze całego pakietu obliczeniowego. Rozwiązanie problemu polega na znalezieniu postaci utraty stateczności i wartości obciążeń odpowiadających przejściu ze stanu równowagi, w której oś belki pozostaje prosta, do stanu odkształconego, w którym oś belki jest wygięta, a przekroje skręcone. Określenie obciążenia krytycznego i postaci wyboczenia następuje poprzez rozwiązanie zagadnienia na wartości własne wyrażenia (6.1):

$$K_0 q = \lambda K_\sigma q \quad (6.1)$$

Gdzie:

$K_0$  - macierz sztywności,  $K_\sigma$  - macierz naprężeń,  $q$  – wektor własny parametrów węzłowych opisujących postać wyboczenia,  $\lambda$  – wartość własna określająca wartość obciążenia krytycznego.

Macierze sztywności i macierze naprężeń wyznaczone są w programie automatycznie, odpowiednio do zastosowanego elementu skończonego.

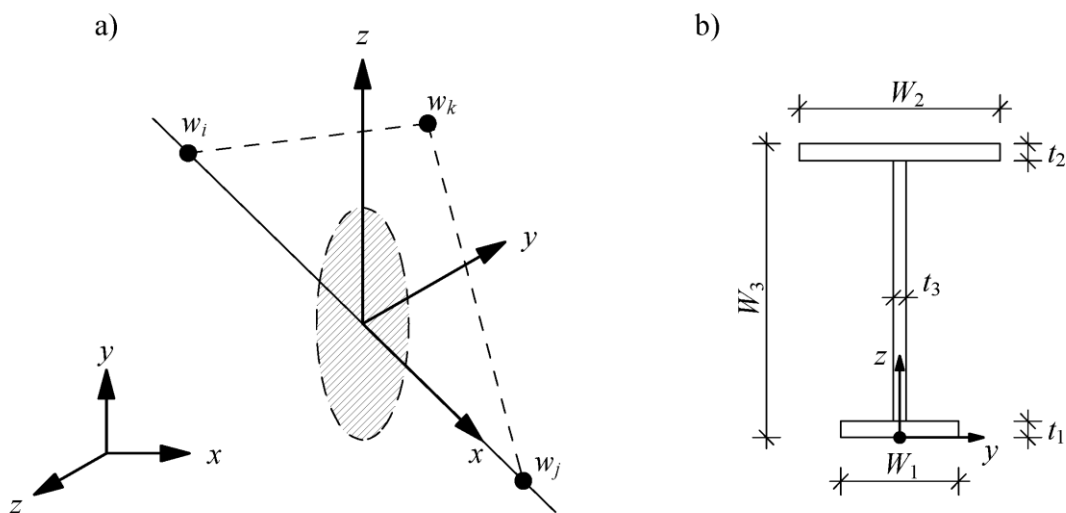
Rozwiązanie równania (6.1) realizowane jest w dwóch krokach. W pierwszym następuje rozwiązanie statyczne od obciążenia  $P$  (6.2), po którym następuje określenie macierzy  $K_\sigma$ .

$$K_0 q = P \quad (6.2)$$

W drugim kroku następuje rozwiązanie wyrażenia (6.1) na wartości własne, czyli wyznaczenie mnożnika obciążenia  $\lambda$ , mówiącego ile razy należy zwiększyć obciążenie statyczne  $P$ , dla którego wyznaczona była macierz naprężeń  $K_\sigma$ , aby stało się ono obciążeniem krytycznym, a także wyznaczenie wektora  $q$  opisującego postać utraty stateczności.

### 6.2. Model belkowy

Do analizy przyjęto prętowy element skończony typu BEAM188, bazujący na teorii belek Timoszenki, uwzględniający wpływ odkształceń postaciowych. Jest to element dwuwęzłowy o siedmiu stopniach swobody – trzech translacyjnych UX, UY, UZ, trzech rotacyjnych ROTX, ROTY, ROTZ i siódmym opcjonalnym, dzięki któremu można ograniczyć swobodę deplanacji przekroju. Ten typ elementu skończonego może być wykorzystywany do modelowania zagadnień stateczności belek pryzmatycznych i o zmiennym liniowo przekroju poprzecznym, tj. wyboczenia i zwichrzenia w zakresie liniowym i nieliniowym z uwzględnieniem dużych odkształceń. Na rysunku 6.2.1 przedstawiono schemat elementu skończonego typu BEAM188 wraz z oznaczeniami przekroju dwuteowego używanymi przez program ANSYS.

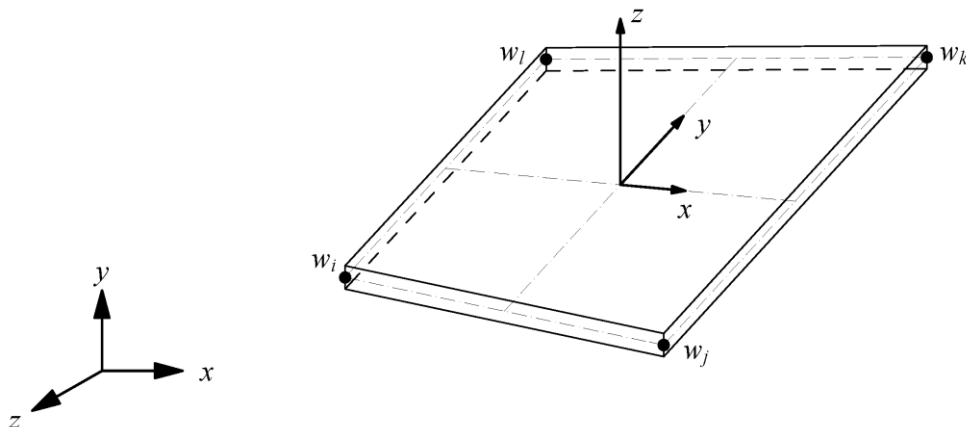


Rysunek 6.2.1. Schemat elementu skończonego BEAM188 (a), oznaczenia parametrów w przekroju dwuteowym używanym przez program ANSYS (b), w których:  $w_i$ ,  $w_j$ ,  $w_k$  - węzły elementu skończonego,  $W_1$ ,  $W_2$  - szerokości półki dolnej i górnej,  $W_3$  - wysokość ogólna przekroju,  $t_1$ ,  $t_2$  - grubości półki dolnej i górnej,  $t_3$  - grubości środnika.

Element BEAM188 został wykorzystany do zamodelowania belek o zmiennych liniowo szerokościach pasów i wysokości środnika. Zamocowanie widelkowe uzyskano poprzez zablokowanie translacyjnych stopni swobody  $U_Y=0$ ,  $U_Z=0$  i zablokowanie rotacyjnego stopnia swobody  $ROT_X=0$ . Swobodę deplanacji zablokowano poprzez funkcję  $KEYOPT(1)=1$  (ANSYS Theory reference, 2007). Przyłożenie obciążenia w środku ścinania, do górnej lub dolnej półki zrealizowano za pomocą offsetów tj. przesunięcia osi belki w dół lub górę na kierunku osi  $z$ .

### 6.3. Model powłokowy

Element skończony SHELL181 służy do modelowania i analizy cienkich powłok ściskanych i zginanych. Jest to czterowęzłowy element skończony, dla którego każdy węzeł posiada sześć stopni swobody: translacyjne  $U_X$ ,  $U_Y$ ,  $U_Z$  i rotacyjne  $ROT_X$ ,  $ROT_Y$ ,  $ROT_Z$ . Element SHELL181 może być wykorzystywany przy analizie liniowej, nieliniowej, pozwala modelować elementy o różnej grubości w węzłach elementu. Na rysunku 6.3.1 przedstawiono schemat i oznaczenia elementu skończonego.



Rysunek 6.3.1. Schemat elementu skończonego SHELL181 w którym:  $w_i$ ,  $w_j$ ,  $w_k$ ,  $w_l$  - węzły elementu skończonego.

Ten typ elementu został wykorzystany do zamodelowania belek podpartych widełkowo i wsporników o zmiennych liniowo półkach i zmiennej liniowo wysokości średnika. Utwierdzenie zostało zrealizowane poprzez zablokowanie wszystkich stopni swobody węzłów podporowych tj.  $UX=UY=UZ=0$ ,  $ROTX=ROTY=ROTZ=0$ .

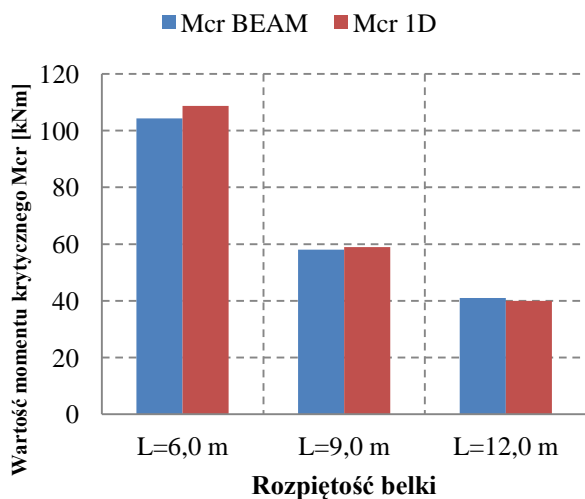
#### **6.4. Porównanie wybranych obliczeń momentów krytycznych belek ze zbieżnymi przekrojami poprzecznymi metodą analityczną i MES.**

W celu weryfikacji poprawności zaprezentowanych w pracy doktorskiej formuł obliczeniowych na momenty krytyczne belek stalowych ze zbieżnymi przekrojami poprzecznymi, wykonano obliczenia sprawdzające w programie ANSYS. Wszystkie przypadki zostały zamodelowane w taki sposób, że niezależnie od rozpiętości i rodzajów zbieżności, podzielono je na 100 elementów skończonych. W dodatku do niniejszej rozprawy zostały dołączone wydruki wybranych plików wsadowych, opracowanych przez Autora rozprawy, pozwalających na generowanie pełnego procesu obliczeniowego w programie ANSYS, pozwalającego na wyznaczenie obciążeń krytycznych dla belek ze zbieżnymi przekrojami poprzecznymi. Tabele 6.4.1 do 6.1.14 zawierają zestawienie wyników obliczeń momentów krytycznych różnych typów belek ze zbieżnymi przekrojami poprzecznymi, dla wybranych parametrów zbieżności pasów i średnika, uzyskanych z obliczeń własnych i z programu ANSYS z użyciem elementów belkowych BEAM188 i powłokowych SHELL181. Graficznie zestawienie wyników przedstawiono na rysunkach 6.4.1 do 6.4.56.

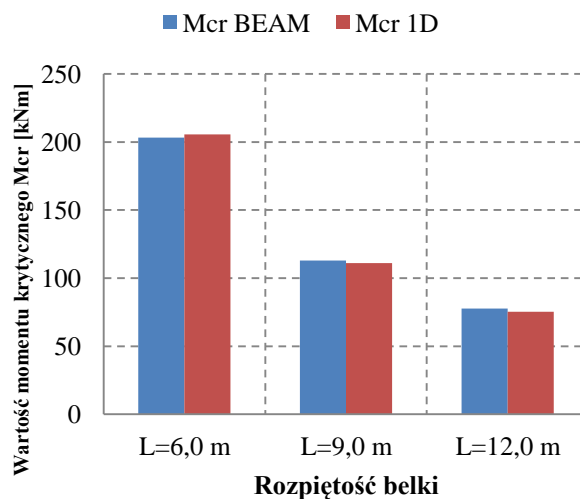
Tabela 6.4.1. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie belki bisymetrycznej obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do środka ścinania.

Parametry przekroju poprzecznego wg tab. 5.1.2 (przekrój dwuteowy bisymetryczny)	Schemat belki					
Rozpiętość belki $L$	$L=6,0$ m		$L=9,0$ m		$L=12,0$ m	
Parametr zbieżności (a)	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr FEM}$ [kNm]	104,328		58,067		40,998	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr ID}$ [kNm]	108,741		58,901		39,998	
Parametr zbieżności (b)	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr FEM}$ [kNm]	203,175		112,803		77,742	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr ID}$ [kNm]	205,454		111,06		25,317	

Parametr zbieżności (a)

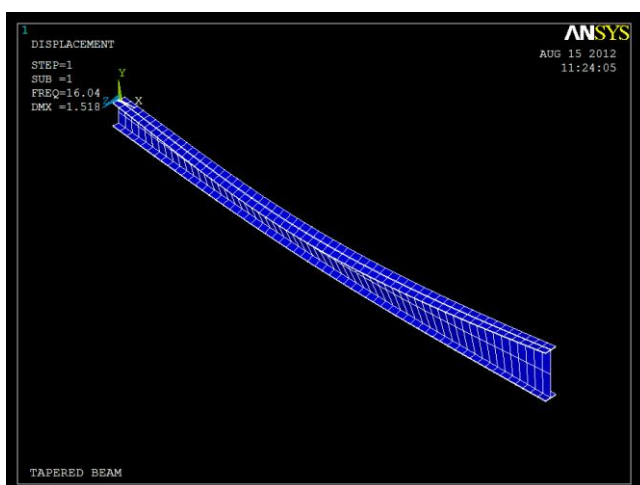


Parametr zbieżności (b)

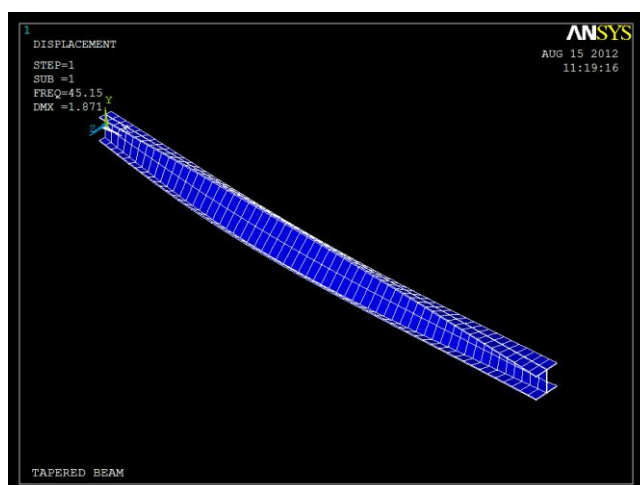


Rysunek 6.4.1. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnym średnikiem, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym w środku ścinania.

Rysunek 6.4.2. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnymi pasami, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym w środku ścinania.

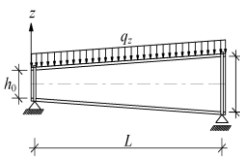
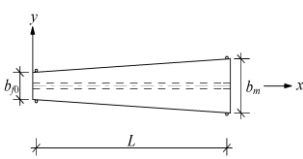


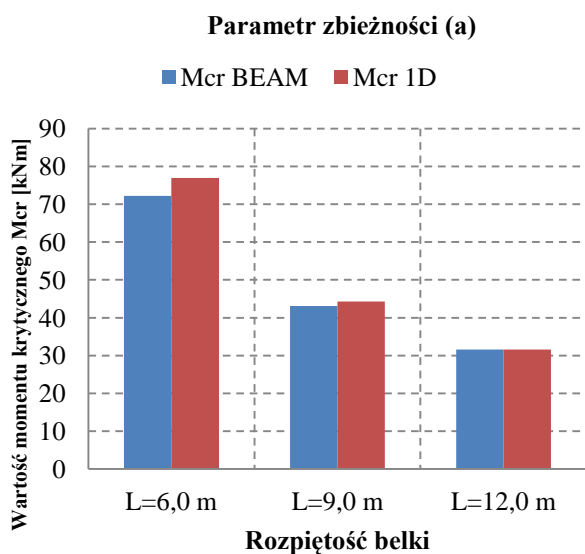
Rysunek 6.4.3. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnym średnikiem, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym w środku ścinania



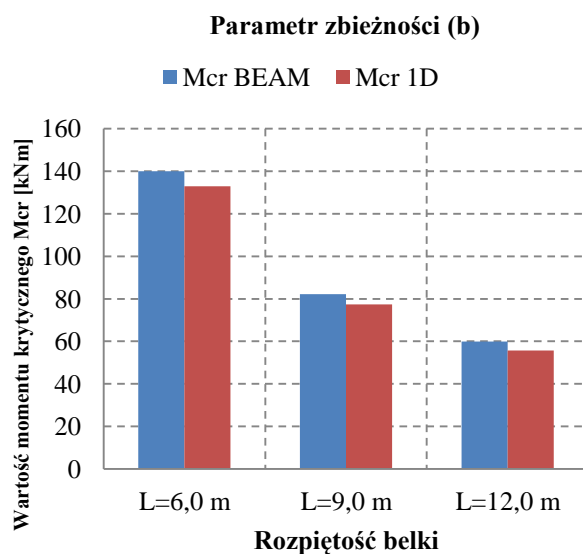
Rysunek 6.4.4. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnymi pasami, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym w środku ścinania

Tabela 6.4.2. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie belki bisymetrycznej obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do górnej półki.

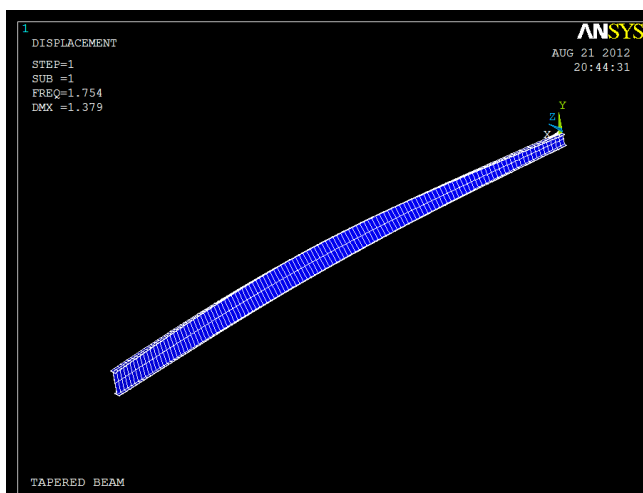
Parametry przekroju poprzecznego wg tab. 5.1.2 (przekrój dwuteowy bisymetryczny)	Schemat belki					
						
Rozpiętość belki $L$	$L=6,0$ m		$L=9,0$ m		$L=12,0$ m	
Parametr zbieżności (a)	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr FEM}$ [kNm]	72,175		43,061		31,572	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr 1D}$ [kNm]	76,917		44,256		31,562	
Parametr zbieżności (b)	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr FEM}$ [kNm]	139,959		82,144		59,976	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr 1D}$ [kNm]	132,865		77,345		55,684	



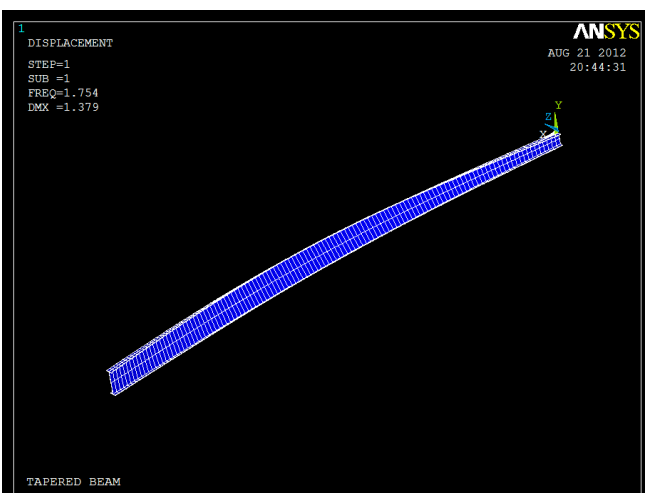
Rysunek 6.4.5. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnym średnikiem, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do górnej półki.



Rysunek 6.4.6. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnymi pasami, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do górnej półki.

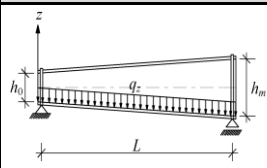
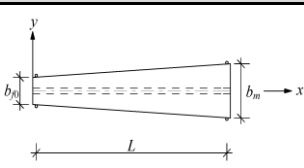


Rysunek 6.4.7. Widok zwihrzonej belki ze zbieżnym średnikiem, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do górnej półki.

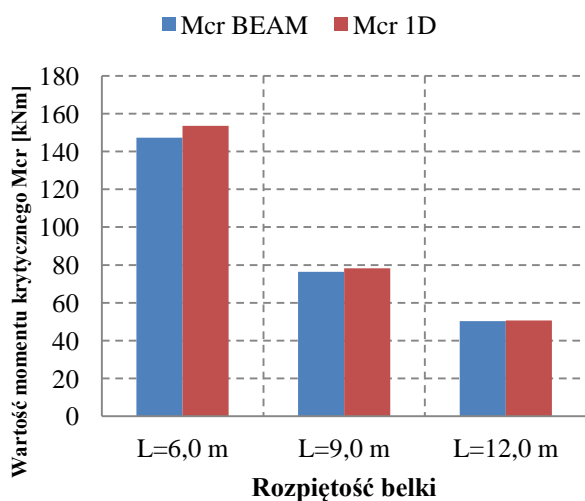


Rysunek 6.4.8. Widok zwihrzonej belki ze zbieżnymi pasami, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do górnej półki.

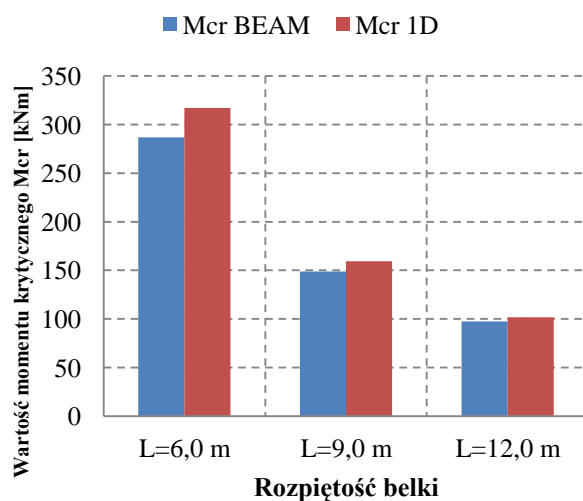
Tabela 6.4.3. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie belki bisymetrycznej obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do dolnej półki.

Parametry przekroju poprzecznego wg tab. 5.1.2 (przekrój dwuteowy bisymetryczny)	Schemat belki					
						
Rozpiętość belki $L$	$L=6,0$ m		$L=9,0$ m		$L=12,0$ m	
Parametr zbieżności (a)	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr FEM}$ [kNm]	147,235		76,302		50,274	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr 1D}$ [kNm]	153,564		78,322		50,696	
Parametr zbieżności (b)	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr FEM}$ [kNm]	286,695		148,787		97,506	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr 1D}$ [kNm]	317,056		159,207		101,732	

Parametr zbieżności (a)

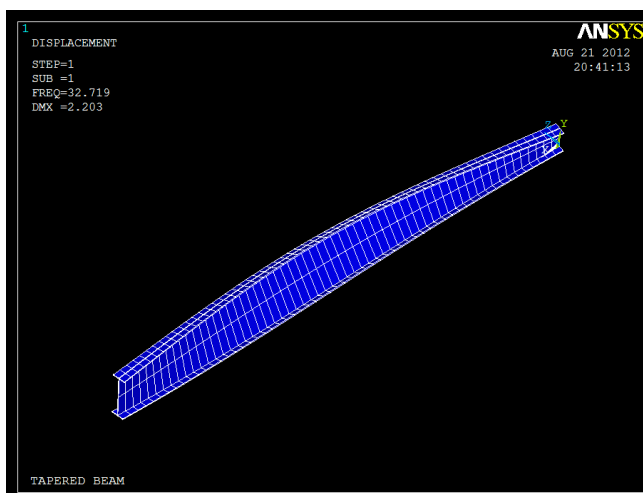


Parametr zbieżności (b)

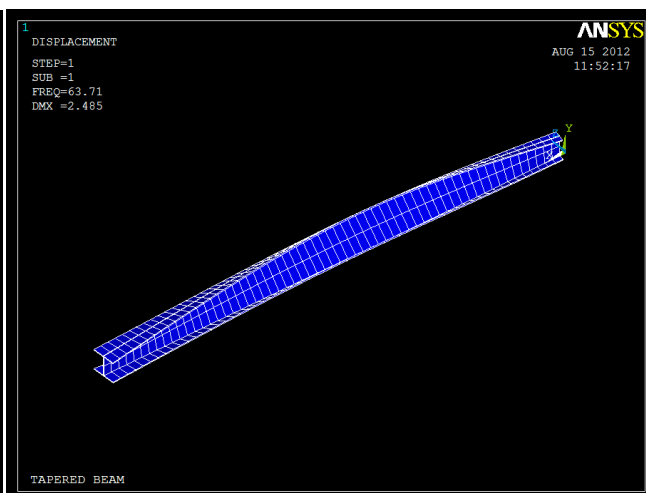


Rysunek 6.4.9. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnym środnikiem, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do dolnej półki.

Rysunek 6.4.10. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnymi pasami, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do dolnej półki.



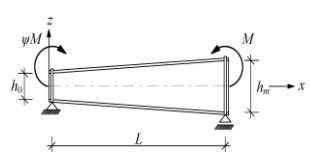
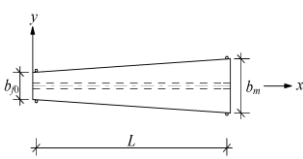
Rysunek 6.4.11. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnym środnikiem, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do dolnej półki.



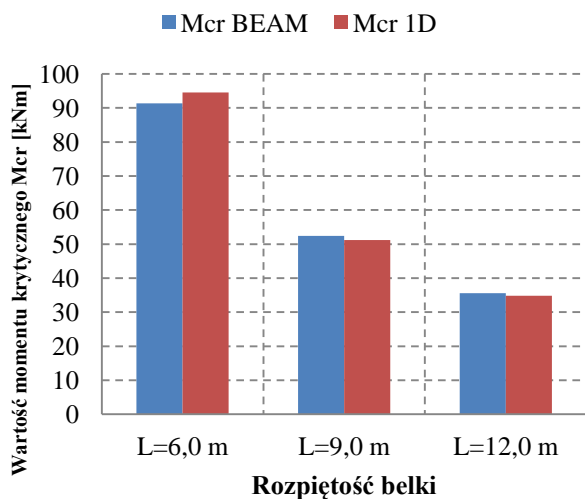
Rysunek 6.4.12. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnymi pasami, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do dolnej półki.



Tabela 6.4.4. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie belki bisymetrycznej obciążonej momentami skupionymi na końcach.

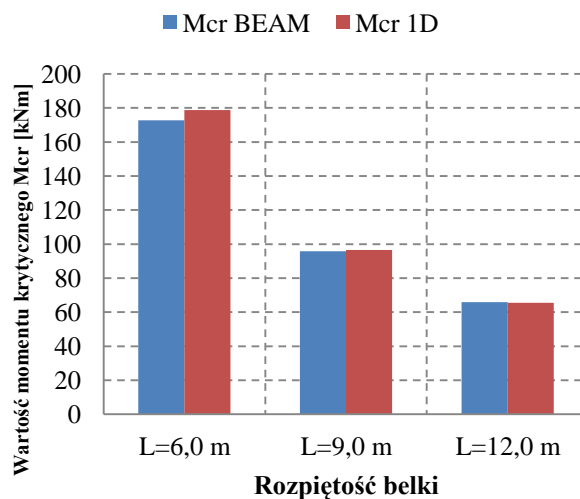
Parametry przekroju poprzecznego wg tab. 5.2.3 (przekrój dwuteowy bisymetryczny)	Schemat belki					
						
Rozpiętość belki $L$	$L=6,0$ m		$L=9,0$ m		$L=12,0$ m	
Parametr zbieżności (a)	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr} FEM$ [kNm]	91,307		52,363		35,553	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr} 1D$ [kNm]	94,575		51,223		34,782	
Parametr zbieżności (b)	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr} FEM$ [kNm]	172,630		95,718		65,903	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr} 1D$ [kNm]	178,762		96,616		65,513	

Parametr zbieżności (a)

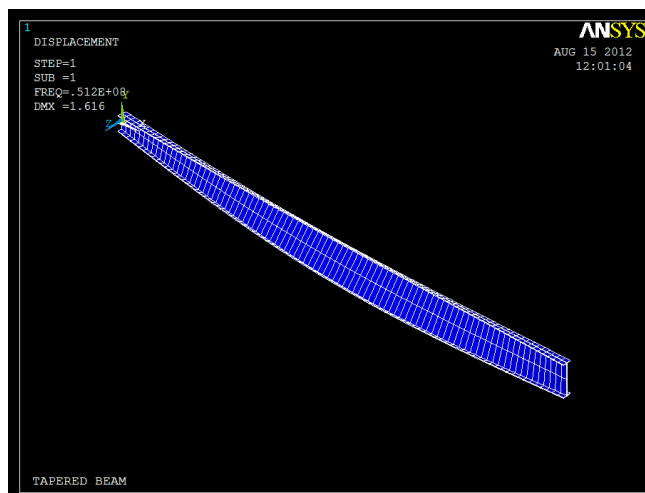


Rysunek 6.4.13. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnym średnikiem, obciążonej momentami skupionymi.

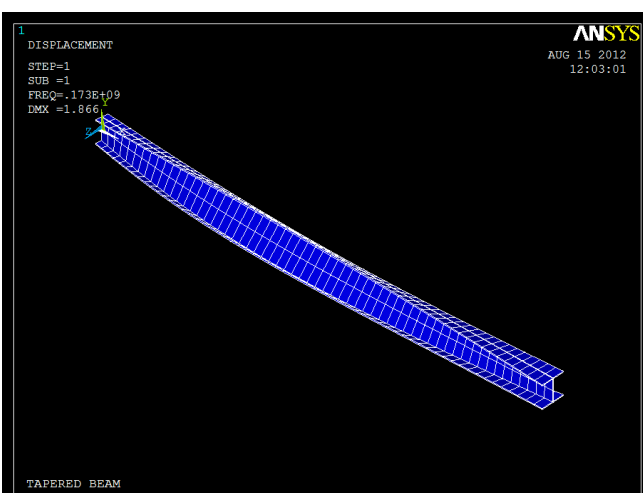
Parametr zbieżności (b)



Rysunek 6.4.14. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnymi pasami, obciążonej momentami skupionymi.



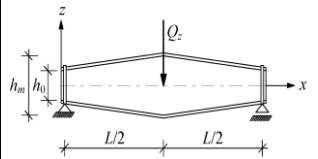
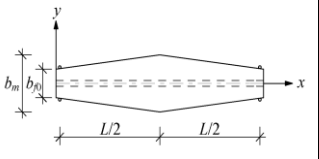
Rysunek 6.4.15. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnym średnikiem, obciążonej momentami skupionymi.



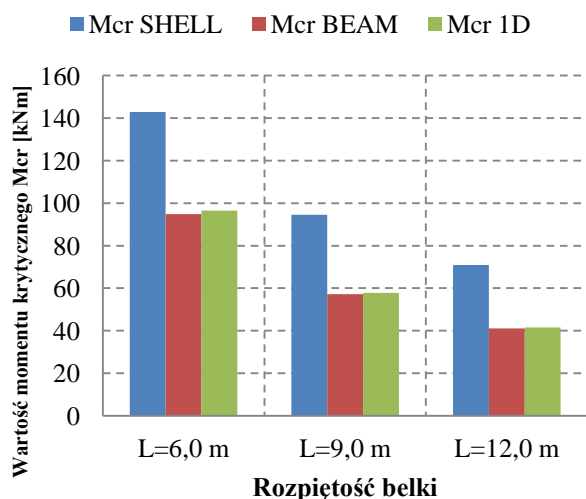
Rysunek 6.4.16. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnymi pasami, obciążonej momentami skupionymi.

## Analiza stateczności belek ze zbieżnymi przekrojami poprzecznymi

Tabela 6.4.5. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie belki obciążonej siłą skupioną w środku rozpiętości, przyłożoną do środka ścinania.

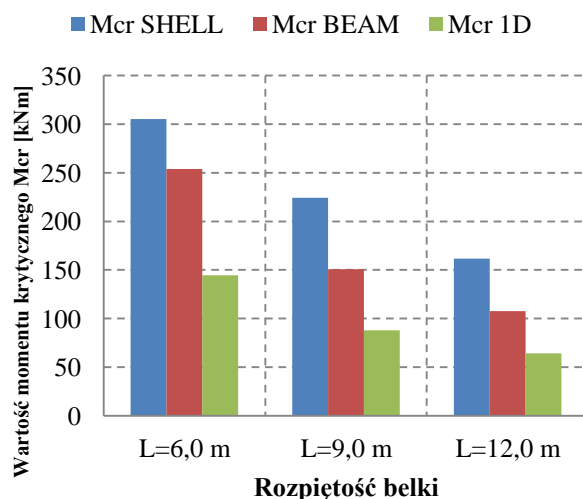
Parametry przekroju poprzecznego wg tab. 5.3.1 (przekrój dwuteowy bisymetryczny)	Schemat belki					
						
Rozpiętość belki $L$	$L=6,0$ m		$L=9,0$ m		$L=12,0$ m	
Parametr zbieżności (a)	$\alpha_{TP}=2,0$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=2,0$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=2,0$	$\beta_{TP}=0,0$
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr SHELL}$ [kNm]	142,77		94,475		70,878	
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr BEAM}$ [kNm]	94,849		57,240		41,175	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr 1D}$ [kNm]	96,423		57,833		41,548	
Parametr zbieżności (b)	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=2,0$	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=2,0$	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=2,0$
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr SHELL}$ [kNm]	305,055		224,075		161,748	
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr BEAM}$ [kNm]	253,92		150,811		107,784	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr 1D}$ [kNm]	144,644		88,028		64,255	

Parametr zbieżności (a)

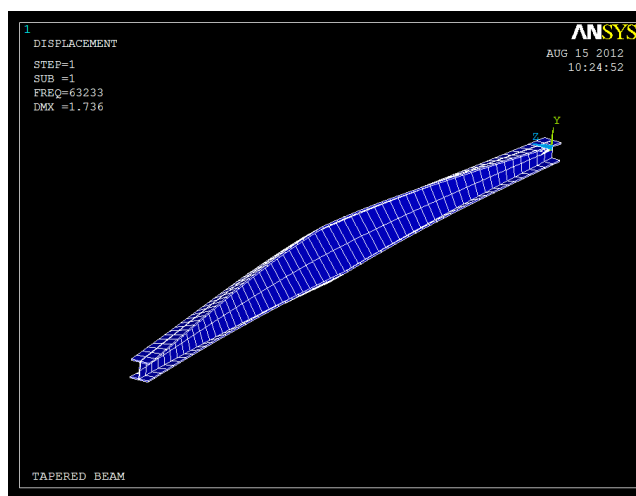


Rysunek 6.4.17. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnym średnikiem, obciążonej siłą skupioną przyłożoną w środku ścinania

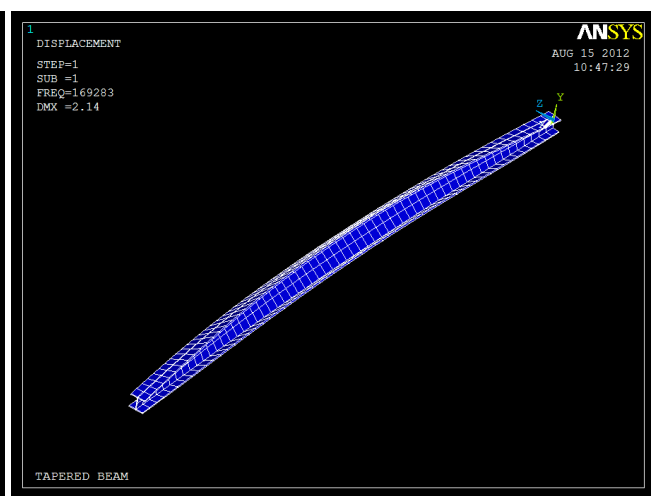
Parametr zbieżności (b)



Rysunek 6.4.18. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnymi pasami, obciążonej siłą skupioną przyłożoną w środku ścinania.

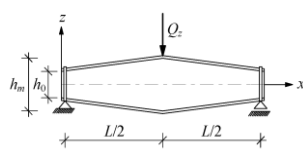
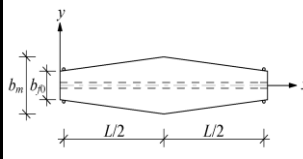


Rysunek 6.4.19. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnym średnikiem, obciążonej siłą skupioną przyłożoną w środku ścinania

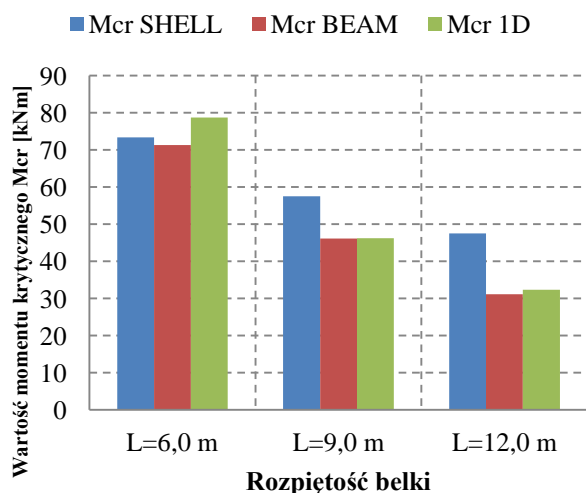


Rysunek 6.4.20. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnymi pasami, obciążonej siłą skupioną przyłożoną w środku ścinania

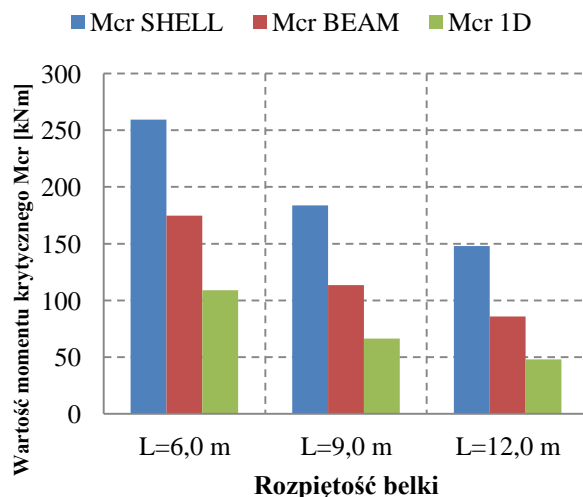
Tabela 6.4.6. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie belki obciążonej siłą skupioną w środku rozpiętości, przyłożoną do górnej półki.

Parametry przekroju poprzecznego wg tab. 5.3.1 (przekrój dwuteowy bisymetryczny)	Schemat belki					
						
Rozpiętość belki $L$	$L=6,0$ m		$L=9,0$ m		$L=12,0$ m	
Parametr zbieżności (a)	$\alpha_{TP}=2,0$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=2,0$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=2,0$	$\beta_{TP}=0,0$
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr} SHELL$ [kNm]	73,348		57,505		47,484	
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr} BEAM$ [kNm]	71,295		46,114		31,158	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr} 1D$ [kNm]	78,686		46,246		32,356	
Parametr zbieżności (b)	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=2,0$	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=2,0$	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=2,0$
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr} SHELL$ [kNm]	259,329		183,643		147,822	
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr} BEAM$ [kNm]	174,69		113,339		85,836	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr} 1D$ [kNm]	108,925		66,457		48,151	

Parametr zbieżności (a)

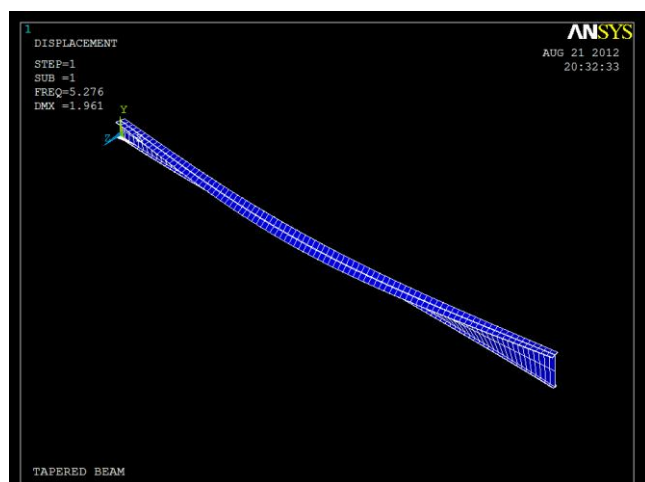


Parametr zbieżności (b)

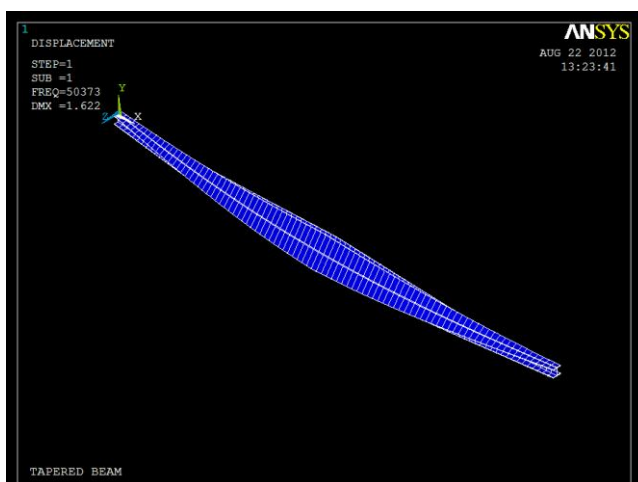


Rysunek 6.4.21. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnym średnikiem, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do górnej półki.

Rysunek 6.4.22. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnymi pasami, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do górnej półki.



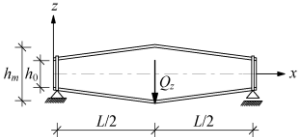
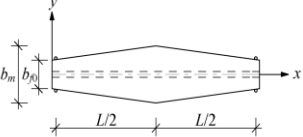
Rysunek 6.4.23. Widok zwichrzzonej belki ze zbieżnym średnikiem, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do półki górnej



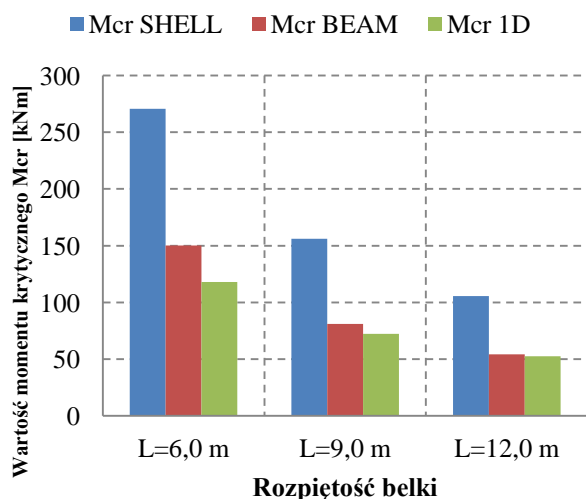
Rysunek 6.4.24. Widok zwichrzzonej belki ze zbieżnymi pasami, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do półki górnej

## Analiza stateczności belek ze zbieżnymi przekrojami poprzecznymi

Tabela 6.4.7. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie belki obciążonej siłą skupioną w środku rozpiętości, przyłożoną do dolnej półki.

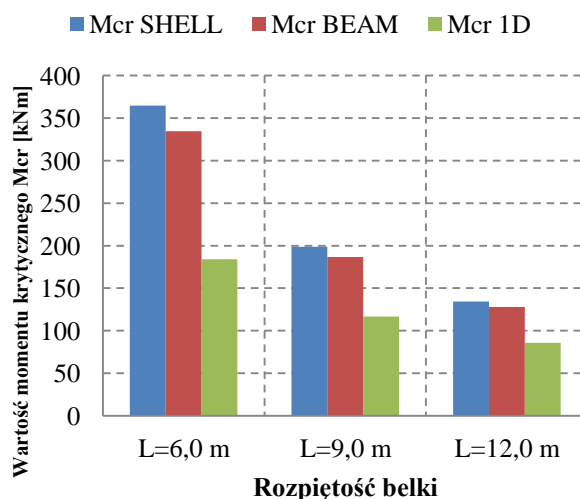
Parametry przekroju poprzecznego wg tab. 5.3.1 (przekrój dwuteowy bisymetryczny)	Schemat belki					
						
Rozpiętość belki $L$	$L=6,0$ m		$L=9,0$ m		$L=12,0$ m	
Parametr zbieżności (a)	$\alpha_{TP}=2,0$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=2,0$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=2,0$	$\beta_{TP}=0,0$
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr SHELL}$ [kNm]	270,51		156,120		105,621	
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr BEAM}$ [kNm]	150,225		80,935		54,189	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr 1D}$ [kNm]	117,903		72,294		52,440	
Parametr zbieżności (b)	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=2,0$	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=2,0$	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=2,0$
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr SHELL}$ [kNm]	364,530		198,621		134,211	
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr BEAM}$ [kNm]	334,425		186,714		127,782	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr 1D}$ [kNm]	184,104		116,561		85,723	

Parametr zbieżności (a)

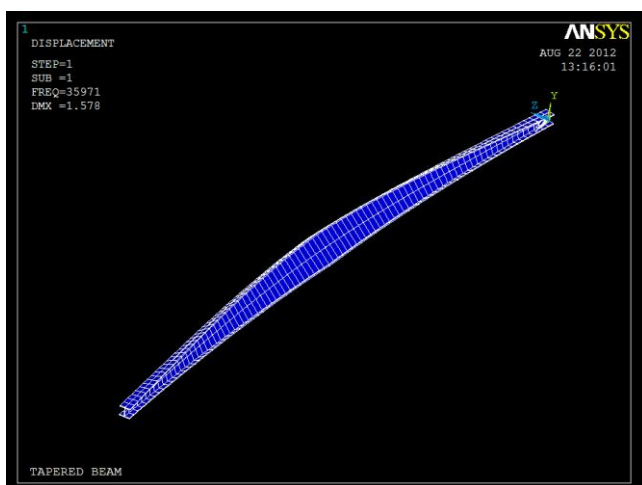


Rysunek 6.4.25. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnym średnikiem, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do dolnej półki.

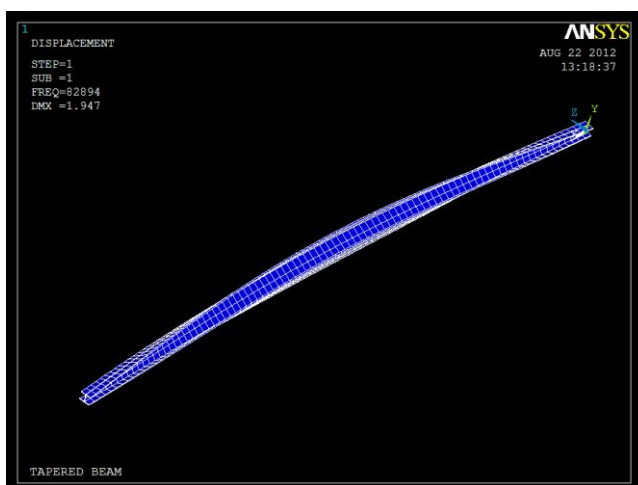
Parametr zbieżności (b)



Rysunek 6.4.26. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnymi pasami, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do dolnej półki.

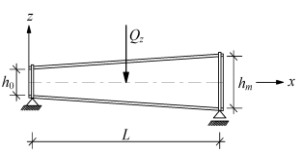
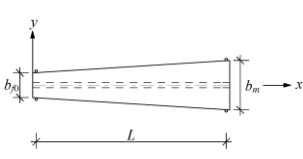


Rysunek 6.4.27. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnym średnikiem, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do półki dolnej

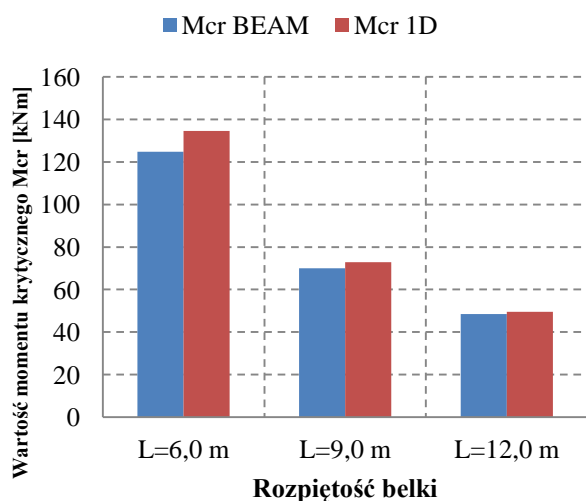


Rysunek 6.4.28. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnymi pasami, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do półki dolnej

Tabela 6.4.8. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie belki obciążonej siłą skupioną w środku rozpiętości, przyłożoną do środka ścinania.

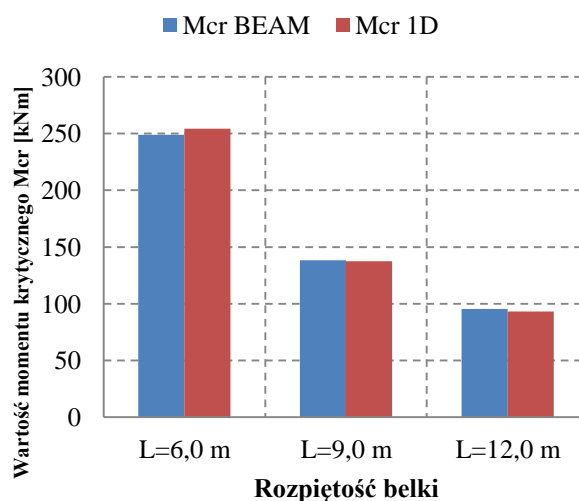
Parametry przekroju poprzecznego wg tab. 5.3.3 (przekrój dwuteowy bisymetryczny)	Schemat belki					
						
Rozpiętość belki $L$	$L=6,0$ m		$L=9,0$ m		$L=12,0$ m	
Parametr zbieżności (a)	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr FEM}$ [kNm]	124,752		69,930		48,447	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr 1D}$ [kNm]	134,573		72,886		49,491	
Parametr zbieżności (b)	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr FEM}$ [kNm]	248,910		138,256		95,283	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr 1D}$ [kNm]	254,246		137,421		93,188	

Parametr zbieżności (a)

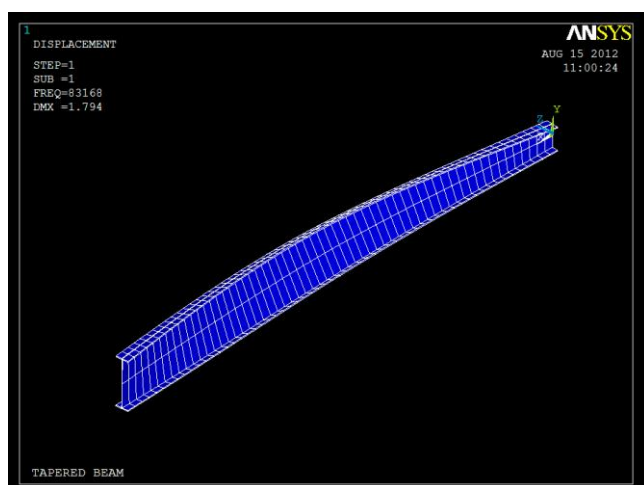


Rysunek 6.4.29. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnym średnikiem, obciążonej siłą skupioną przyłożoną w środku ścinania.

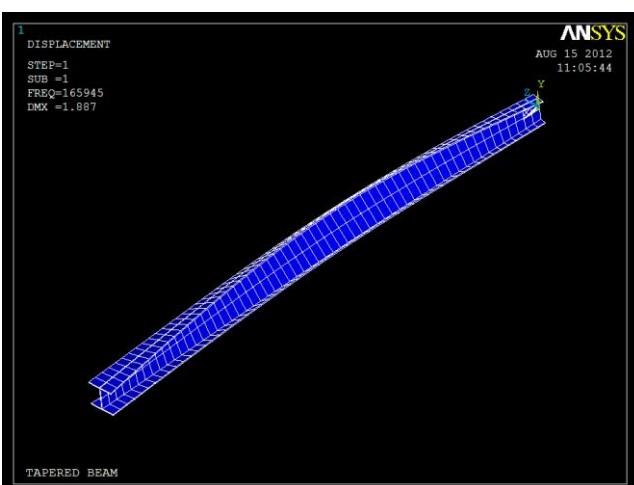
Parametr zbieżności (b)



Rysunek 6.4.30. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnymi pasami, obciążonej siłą skupioną przyłożoną w środku ścinania.



Rysunek 6.4.31. Widok zwichniętej belki ze zbieżnym średnikiem, obciążonej siłą skupioną przyłożoną w środku ścinania

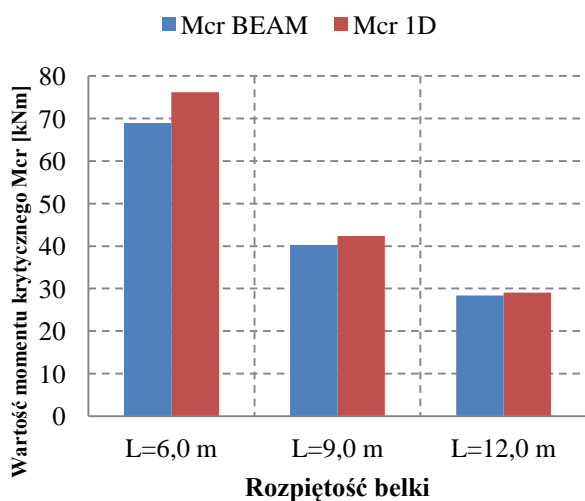


Rysunek 6.4.32. Widok zwichniętej belki ze zbieżnymi pasami, obciążonej siłą skupioną przyłożoną w środku ścinania

Tabela 6.4.9. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie belki monosymetrycznej obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do środka ścinania.

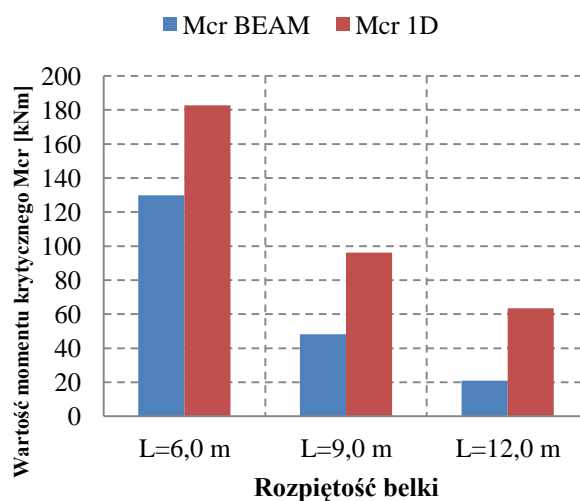
Parametry przekroju poprzecznego wg tab. 5.1.3 (przekrój dwuteowy monosymetryczny)	Schemat obciążenia					
Rozpiętość belki $L$	$L=6,0$ m		$L=9,0$ m		$L=12,0$ m	
Parametr zbieżności (a)	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr FEM}$ [kNm]	68,944		40,287		28,386	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr ID}$ [kNm]	76,117		42,378		29,039	
Parametr zbieżności (b)	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr FEM}$ [kNm]	129,852		48,132		20,951	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr ID}$ [kNm]	182,625		96,107		63,408	

Parametr zbieżności (a)

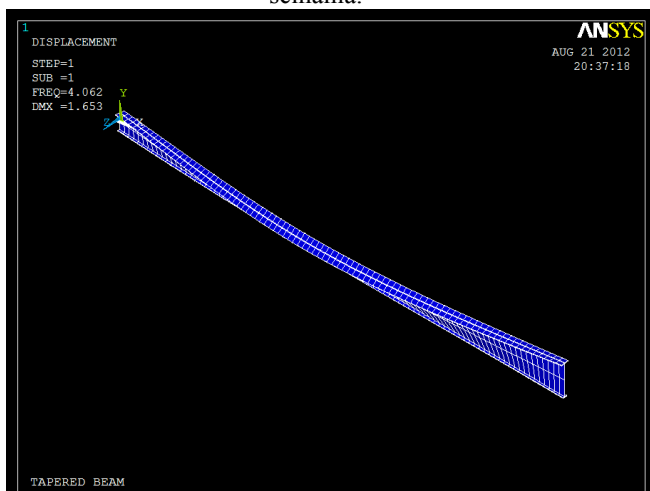


Rysunek 6.4.33. Porównanie momentów krytycznych dla belki monosymetrycznej ze zbieżnym średnikami, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym w środku ścinania.

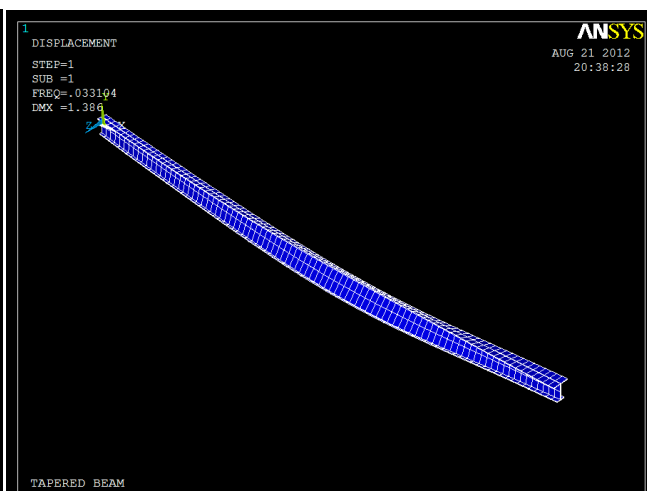
Parametr zbieżności (b)



Rysunek 6.4.34. Porównanie momentów krytycznych dla belki monosymetrycznej ze zbieżnymi pasami, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym w środku ścinania.



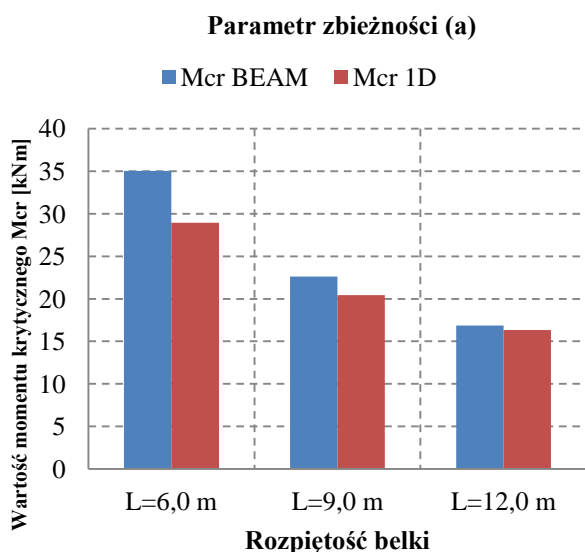
Rysunek 6.4.35. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnym średnikami, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do środka ścinania.



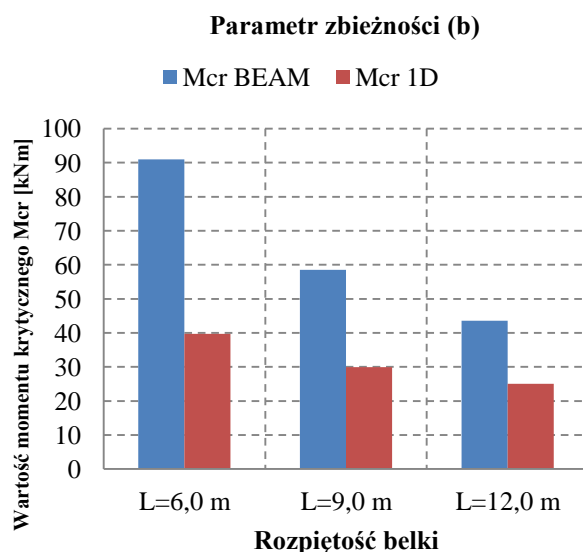
Rysunek 6.4.36. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnymi pasami, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do środka ścinania.

Tabela 6.4.10. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie belki monosymetrycznej obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do górnej półki.

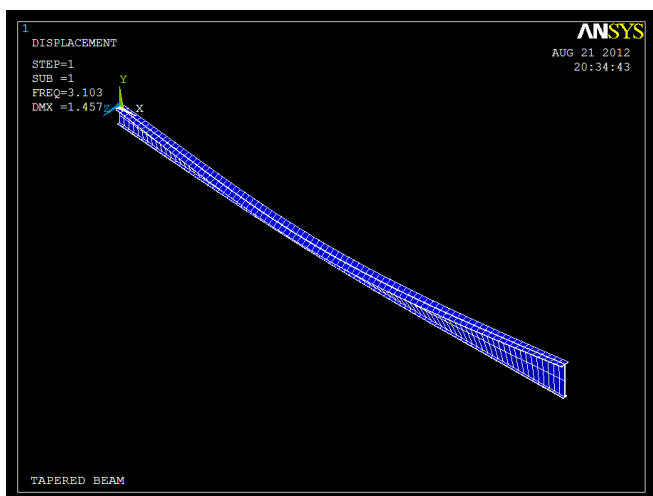
Parametry przekroju poprzecznego wg tab. 5.1.3 (przekrój dwuteowy monosymetryczny)	Schemat obciążenia					
Rozpiętość belki $L$	$L=6,0$ m		$L=9,0$ m		$L=12,0$ m	
Parametr zbieżności (a)	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr FEM}$ [kNm]	35,027		22,624		16,874	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr 1D}$ [kNm]	28,923		20,444		16,329	
Parametr zbieżności (b)	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr FEM}$ [kNm]	91,003		58,542		43,596	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr 1D}$ [kNm]	39,714		29,894		24,988	



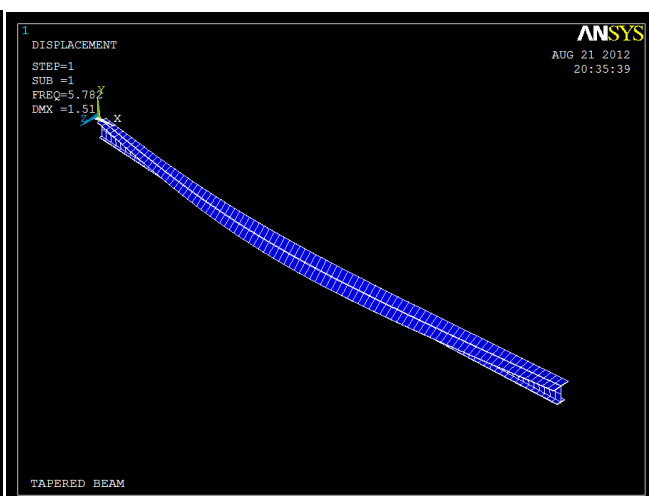
Rysunek 6.4.37. Porównanie momentów krytycznych dla belki monosymetrycznej ze zbieżnym średnikiem, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do górnej półki.



Rysunek 6.4.38. Porównanie momentów krytycznych dla belki monosymetrycznej ze zbieżnymi pasami, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do górnej półki.



Rysunek 6.4.39. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnym średnikiem, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do górnej półki.

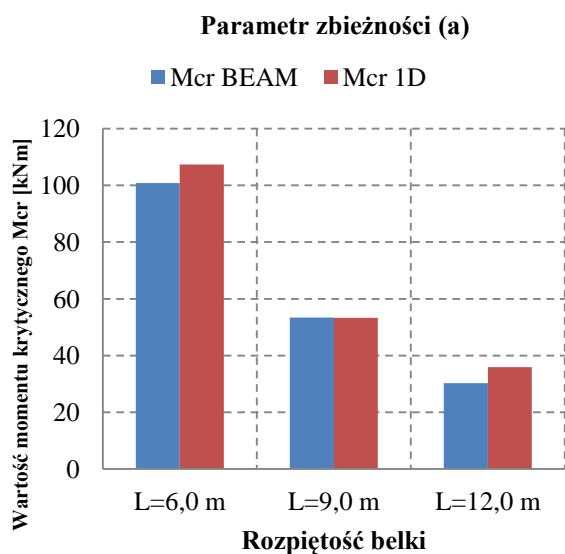


Rysunek 6.4.40. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnymi pasami, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do górnej półki.

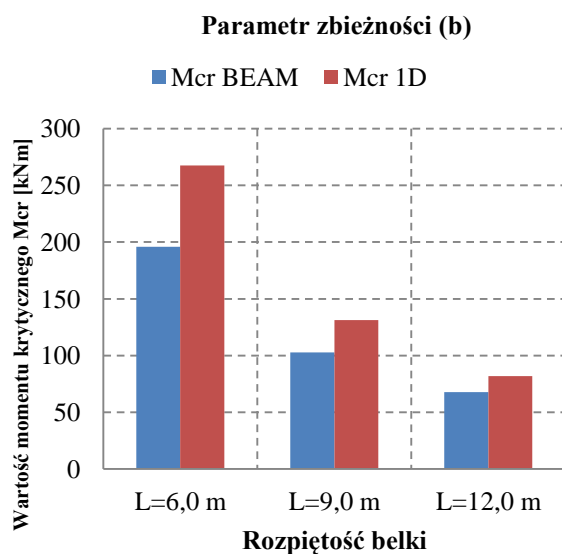


Tabela 6.4.11. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie belki obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do dolnej półki.

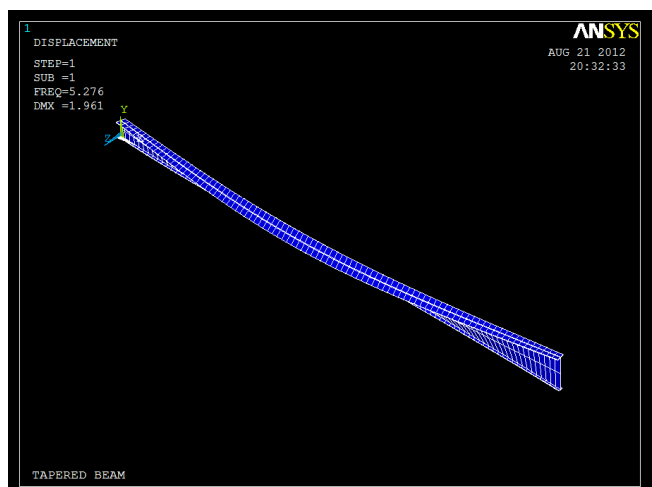
Parametry przekroju poprzecznego wg tab. 5.1.3 (przekrój dwuteowy monosymetryczny)	Schemat obciążenia					
Rozpiętość belki $L$	$L=6,0$ m		$L=9,0$ m		$L=12,0$ m	
Parametr zbieżności (a)	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr FEM}$ [kNm]	100,809		53,419		30,227	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr 1D}$ [kNm]	107,345		53,298		35,935	
Parametr zbieżności (b)	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr FEM}$ [kNm]	195,831		102,819		67,680	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr 1D}$ [kNm]	267,627		131,189		81,966	



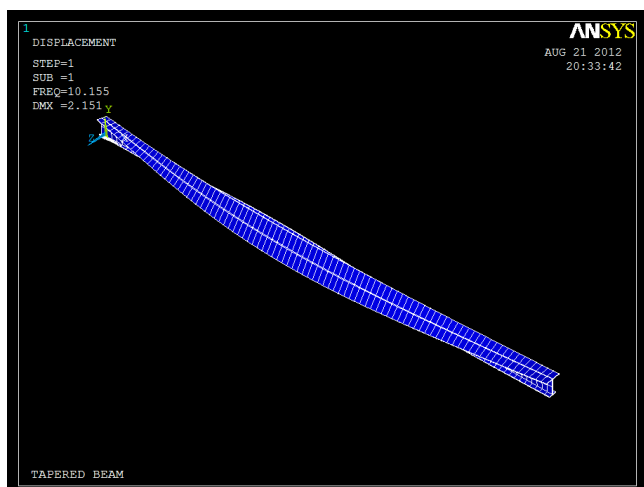
Rysunek 6.4.41. Porównanie momentów krytycznych dla belki monosymetrycznej ze zbieżnym średnikiem, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do dolnej półki.



Rysunek 6.4.42. Porównanie momentów krytycznych dla belki monosymetrycznej ze zbieżnymi pasami, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do dolnej półki.



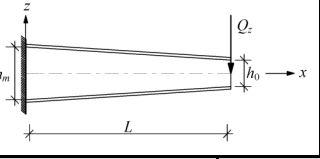
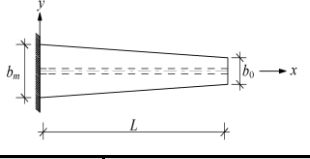
Rysunek 6.4.43. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnym średnikiem, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do dolnej półki.



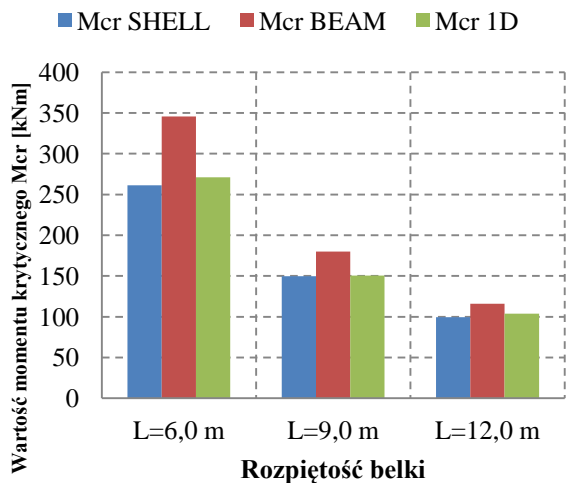
Rysunek 6.4.44. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnymi pasami, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do dolnej półki.



Tabela 6.4.12. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie wspornika obciążonego siłą skupioną przyłożoną do środka ścinania.

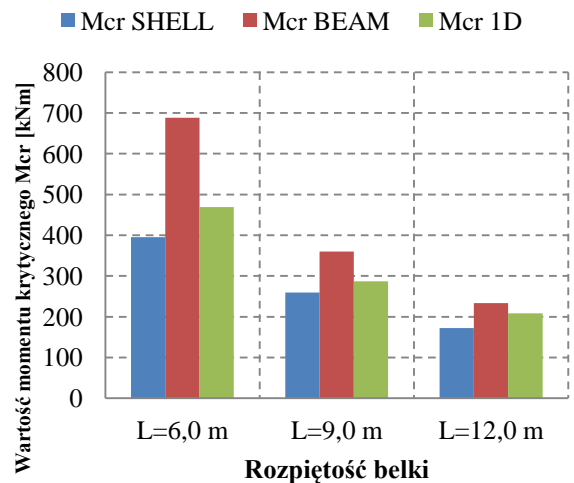
Parametry przekroju poprzecznego wg tab. 5.5.1	Schemat belki					
						
Rozpiętość belki $L$	$L=4,0$		$L=6,0$		$L=8,0$	
Parametr zbieżności (a)	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr} SHELL$ [kNm]	261,268		149,856		99,336	
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr} BEAM$ [kNm]	345,620		179,928		115,864	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr} ID$ [kNm]	271,246		150,490		103,741	
Parametr zbieżności (b)	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr} SHELL$ [kNm]	395,500		259,218		172,064	
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr} BEAM$ [kNm]	688,560		359,844		233,208	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr} ID$ [kNm]	468,971		287,066		208,169	

Parametr zbieżności (a)

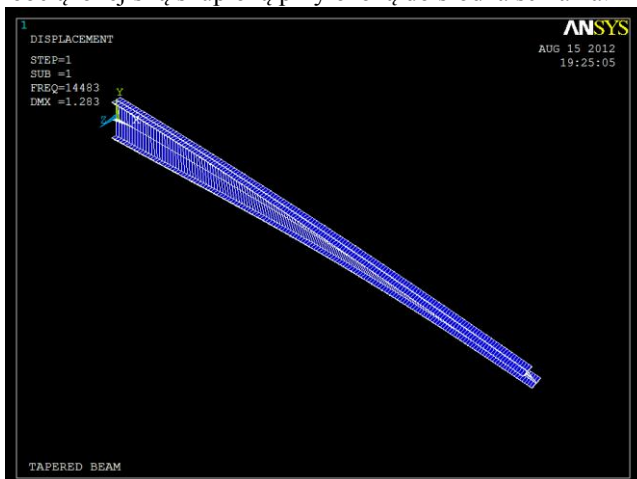


Rysunek 6.4.45. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnym średnikiem, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do środka ścinania.

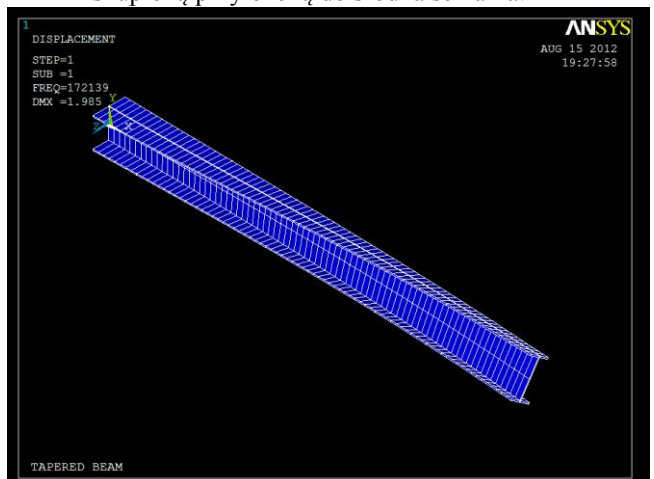
Parametr zbieżności (b)



Rysunek 6.4.46. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnymi pasami, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do środka ścinania.



Rysunek 6.4.47. Widok zwichrzonej belki wspornikowej ze zbieżnym średnikiem, obciążonej siłą skupioną przyłożoną w środku ścinania.

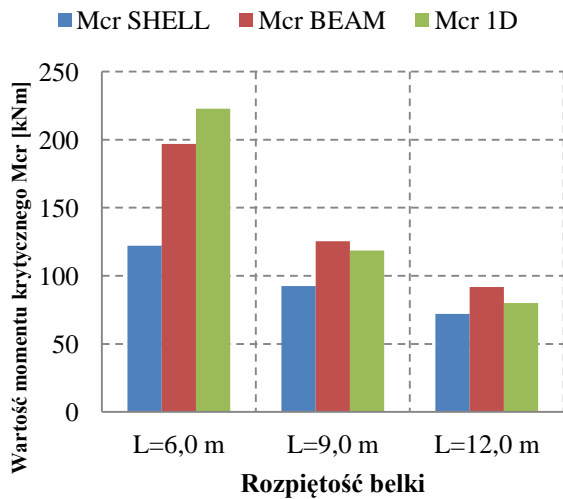


Rysunek 6.4.48. Widok zwichrzonej belki wspornikowej ze zbieżnymi pasami, obciążonej siłą skupioną przyłożoną w środku ścinania.

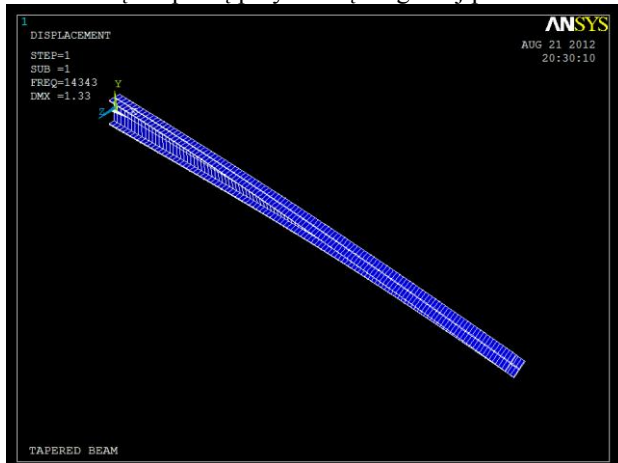
Tabela 6.4.13. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie wspornika obciążonego siłą skupioną przyłożoną do górnej półki.

Parametry przekroju poprzecznego wg tab. 5.5.1	Schemat obciążenia					
Rozpiętość belki $L$	$L=4,0$		$L=6,0$		$L=8,0$	
Parametr zbieżności (a)	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr} SHELL$ [kNm]	122,08		92,382		72,048	
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr} BEAM$ [kNm]	196,84		125,28		91,704	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr} ID$ [kNm]	222,772		118,519		79,908	
Parametr zbieżności (b)	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr} SHELL$ [kNm]	188,084		124,11		77,336	
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr} BEAM$ [kNm]	318,21		141,402		112,04	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr} ID$ [kNm]	195,884		112,762		79,756	

Parametr zbieżności (a)

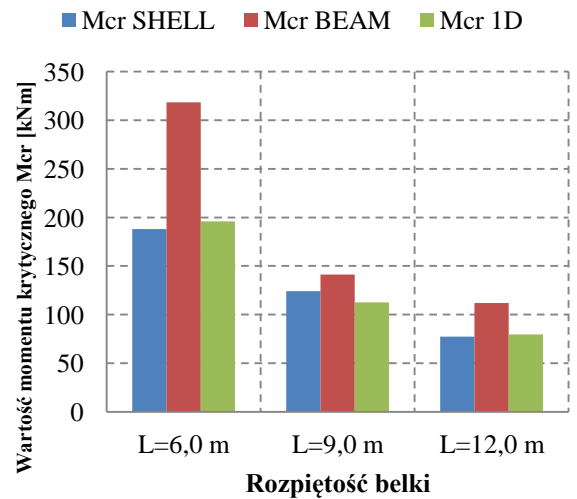


Rysunek 6.4.49. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnym środkiem, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do górnej półki.

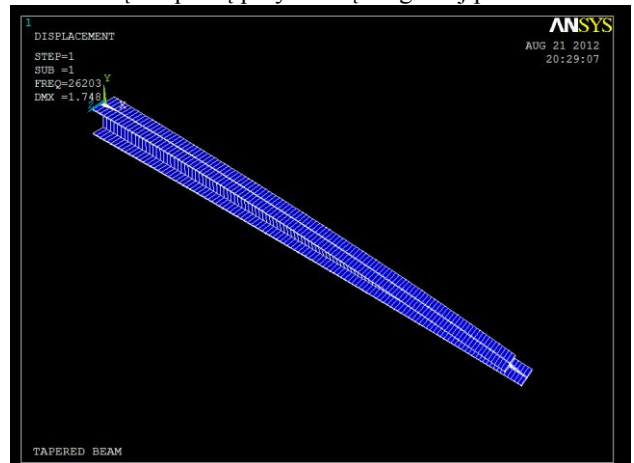


Rysunek 6.4.51. Widok zwichrzonej belki wspornikowej ze zbieżnym środkiem, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do pasa górnego.

Parametr zbieżności (b)



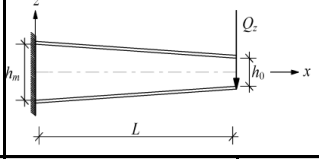
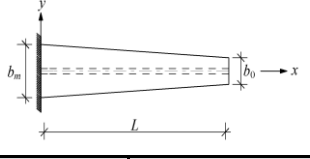
Rysunek 6.4.50. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnymi pasami, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do górnej półki.



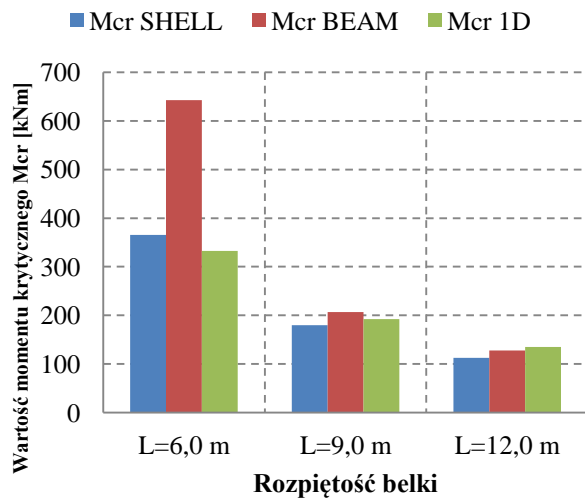
Rysunek 6.4.52. Widok zwichrzonej belki wspornikowej ze zbieżnymi pasami, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do pasa górnego.

*Analiza stateczności belek ze zbieżnymi przekrojami poprzecznymi*

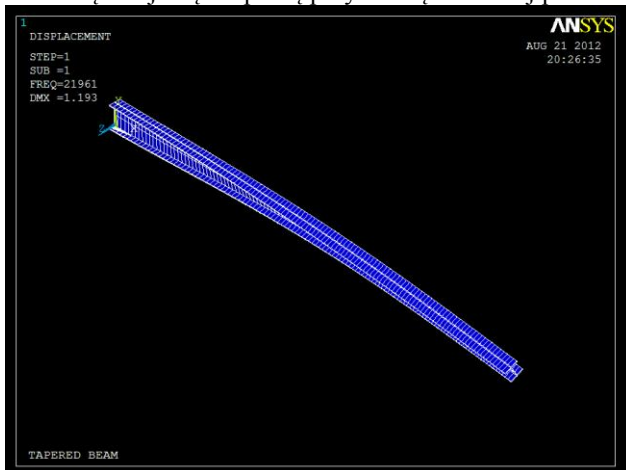
Tabela 6.4.14. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie wspornika obciążonego siłą skupioną przyłożoną do dolnej półki.

Parametry przekroju poprzecznego wg tab. 5.5.1	Schemat obciążenia					
						
Rozpiętość belki $L$	$L=4,0$		$L=6,0$		$L=8,0$	
Parametr zbieżności (a)	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$	$\alpha_{TP}=1,0$	$\beta_{TP}=0,0$
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr} SHELL$ [kNm]	365,504		179,964		112,528	
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr} BEAM$ [kNm]	642,66		206,964		127,56	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr} ID$ [kNm]	332,608		192,17		135,307	
Parametr zbieżności (b)	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$	$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=1,0$
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr} SHELL$ [kNm]	395,504		372,672		519,232	
Moment krytyczny uzyskany z MES $M_{cr} BEAM$ [kNm]	1619,22		512,208		309,936	
Moment krytyczny z obliczeń własnych $M_{cr} ID$ [kNm]	1123,18		730,997		543,446	

**Parametr zbieżności (a)**

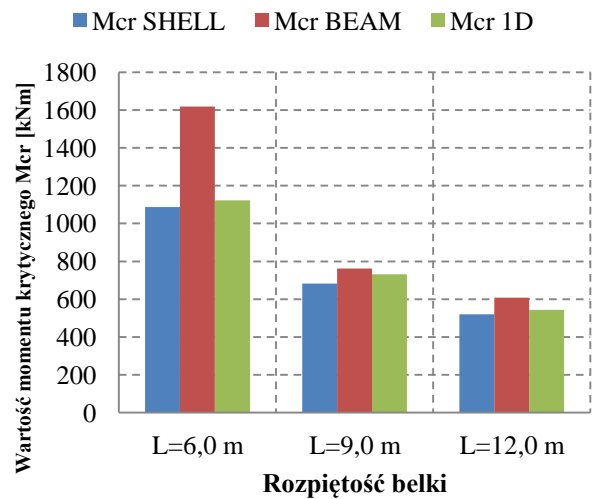


Rysunek 6.4.53. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnym średnikiem, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do dolnej półki.



Rysunek 6.4.55. Widok zwichrzzonej belki wspornikowej ze zbieżnym średnikiem, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do pasa dolnego.

**Parametr zbieżności (b)**



Rysunek 6.4.54. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnymi pasami, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do dolnej półki.



Rysunek 6.4.56. Widok zwichrzzonej belki wspornikowej ze zbieżnymi pasami, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do pasa dolnego.

Z porównania obliczonych wartości wynika duża ich zgodność, co pozwala stwierdzić że przyjęte rozwiązanie analityczne jest poprawne i uzyskane wyniki są prawidłowe. Można zauważyć, że w większości przypadków obliczenia dla modelu prętowego, z użyciem elementu BEAM188, są bardzo zbliżone do obliczeń własnych. Wyniki obciążenia krytycznego, z modelu zbudowanego z elementów powłokowych SHELL181, są bardziej zróżnicowane. Może być to spowodowane lokalną utratą stateczności pólki lub środniczka, która znacząco wpływa na wartość obciążenia krytycznego. Aby ten model był bardziej precyzyjny należałoby wprowadzić dodatkowe poprzeczne elementy usztywniające np. z elementu powłokowego typu SHELL41 (Zhang Lei, Tong Geng Shu, 2008)

## **7. Ocena nośności belek ze zbieżnymi przekrojami poprzecznymi z uwzględnieniem zwiczenia**

Maksymalne sprężyste naprężenia normalne  $\sigma_x$  w belkach o zmiennych przekrojach poprzecznych wzdłuż ich długości można wyznaczać według podstawowego wzoru:

$$\sigma_x = \frac{M_y(x)}{I_y(x)} e(x), \quad (7.1)$$

Gdzie  $M_y(x)$  - rozkład momentów zginających,  $I_y(x)$  - zmieniający się na długości moment bezwładności względem osi  $y$ ,  $e(x)$  - odległość między środkami ciężkości przekrojów a skrajnymi powierzchniami tych przekrojów.

Dla belek pryzmatycznych bity metrycznych i monosymetrycznych zmienność naprężeń  $\sigma_x$  zależy tylko od rozkładu momentów zginających  $M_y(x)$ . Dla obliczenia maksymalnych naprężeń w zmiennych przekrojach belek typów 1÷5 z tabeli 3.1.1 wykonano dyskretyzację współrzędnej  $x = x_j(j-1)$ , w której  $x_j$  - przyjęta do analizy długość odcinka belki,  $j$  - liczba punktów dyskretyzacyjnych. W przekrojach belek  $j$  obliczono wartości  $M_y(x_j, j)$  momentów zginających, momentów bezwładności  $I_y(x_j, j)$  oraz  $e(x_j, j)$ .

Nośność obliczeniowa belki zginanej niezabezpieczonej konstrukcyjnie przed zwiczeniem proponuje się obliczać wg zmodyfikowanych postanowień normy PN-EN 1993-1-1: Eurokod 3 – Projektowanie konstrukcji stalowych – Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków, a mianowicie:

$$\frac{M_y(x) e(x)}{\chi_{LT} I_y(x)} \leq \frac{f_y}{\gamma_{M1}}, \quad (7.2)$$

Współczynnik zwiczenia  $\chi_{LT}$  obliczono zgodnie z postanowieniami normy PN-EN 1993-1-1: Eurokod 3 tj. wyznaczono kolejno:

- smukłość względną przy zwiczeniu

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W'_y f_y}{M_{cr}}}, \quad (7.3)$$

w którym  $W'_y$  jest wskaźnikiem wytrzymałości przekroju poprzecznego o największych naprężeniach normalnych  $\sigma_x$  określonych zgodnie ze wzorem (7.1),  $M_{cr}$  - moment krytyczny zwiczenia wyznaczony wg wzoru (4.12).

- parametr krzywej zwiczenia

$$\Phi_{LT} = 0,5 \left( 1 + \alpha_{LT} (\bar{\lambda}_{LT} - 0,2) + \bar{\lambda}_{LT}^2 \right) \quad (7.4)$$

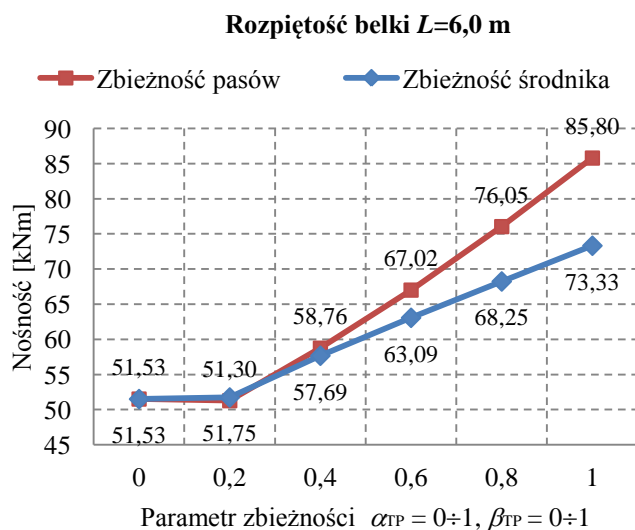
– współczynnik zwichrzenia

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2}}, \text{ lecz } \chi_{LT} \leq 1,0 \quad (7.5)$$

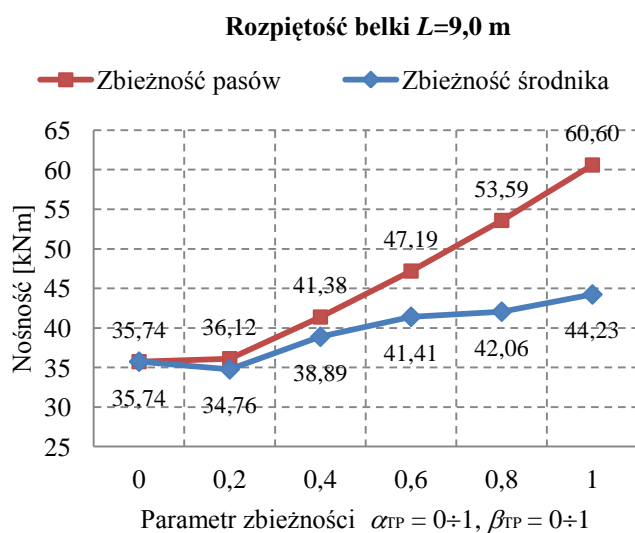
Powyższy tok postępowania został zastosowany w przykładzie liczbowym, gdzie analizie poddano belkę o schemacie i typie zbieżności przekroju jak w tabeli 7.1. Dla rozpiętości 6,0 m dokonano dyskretyzacji na 4 odcinki, a dla rozpiętości 9,0 m i 12,0 m, belkę podzielono na 6 odcinków. Dla każdego z punktów granicznych przedziałów wyznaczono wartości momentu zginającego, momentu bezwładności, naprężeń normalnych. Momenty krytyczne zostały obliczone w rozdziale 5 niniejszej rozprawy. Wielkości potrzebne do wyznaczenia współczynnika zwichrzenia obliczono zgodnie ze wzorami (7.3-7.5) i dla belki o rozpiętości  $L=6,0$  m zestawiono w tabeli 7.1. Na rysunkach 7.1 do 7.3 przedstawiono graficznie zależność pomiędzy nośnością obliczeniową na zginanie z uwzględnieniem zwichrzenia, a parametrami zbieżności środnika i pasów belek o rozpiętościach 6,0 m, 9,0 i 12,0 m.

Tabela 7.1. Nośność na zginanie i nośność na zwichrzenie bisymetrycznej belki obciążonej momentami skupionymi.

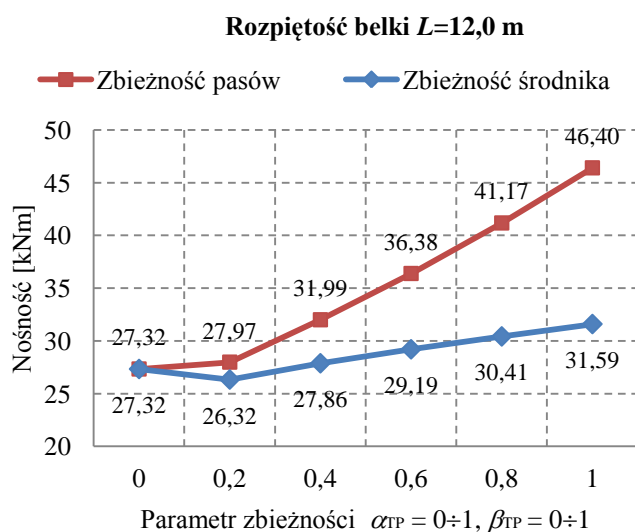
Parametry przekroju poprzecznego			Schemat belki											
$b_{01}$	150	mm												
$b_{02}$	150	mm												
$h_0$	300	mm												
$h_{w0}$	280	mm												
$t_{f1}$	10	mm												
$t_{f2}$	10	mm												
$t_w$	7	mm												
$A_0$	49,6	cm <sup>2</sup>												
$I_{y0}$	7590,53	cm <sup>4</sup>												
$I_{z0}$	563,3	cm <sup>4</sup>												
$I_{\varphi 0}$	118266	cm <sup>6</sup>												
$\beta_{z0}$	0	cm												
								Parametr zbieżności		$\bar{\lambda}_{LT}$	$\Phi_{LT}$	$\chi_{LT}$	Nośność wg wzoru (6.2)	Nośność na zginanie
								$\alpha_{TP}=0,0$	$\beta_{TP}=0$	1,120	1,353	0,474	51,53	108,80
								$\alpha_{TP}=0,2$		1,303	1,768	0,337	51,75	153,34
								$\alpha_{TP}=0,4$		1,451	2,028	0,290	57,69	198,77
								$\alpha_{TP}=0,6$		1,576	2,264	0,257	63,09	245,39
								$\alpha_{TP}=0,8$		1,683	2,479	0,233	68,25	293,44
								$\alpha_{TP}=1,0$		1,776	2,676	0,214	73,33	343,08
								$\beta_{TP}=0,2$	$\alpha_{TP}=0$	1,079	1,416	0,429	51,30	119,68
								$\beta_{TP}=0,4$		1,034	1,351	0,450	58,76	130,56
			$\beta_{TP}=0,6$	0,987	1,286	0,474	67,02	141,44						
$\beta_{TP}=0,8$	0,939	1,221	0,499	76,05	152,32									
$\beta_{TP}=1,0$	0,891	1,160	0,526	85,80	163,20									



Rysunek 7.1. Porównanie nośności na zginanie ze zwichrzeniem dla belki bisymetrycznej w zależności od parametrów zbieżności przekroju.



Rysunek 7.2. Porównanie nośności na zginanie ze zwichrzeniem dla belki bisymetrycznej w zależności od parametrów zbieżności przekroju.



Rysunek 7.3. Porównanie nośności na zginanie ze zwichrzeniem dla belki bisymetrycznej w zależności od parametrów zbieżności przekroju.

## **8. Podsumowanie i wnioski**

Problematyce stateczności stalowych belek ze zbieżnymi przekrojami poprzecznymi została poświęcona niniejsza rozprawa doktorska. Zaproponowano w niej sposób wyznaczania sprężystych momentów krytycznych dla belek o zmiennych liniowo szerokościach pasów i zmiennej liniowo wysokości środka dla różnych typów zbieżności. Analizowane były belki podparte widełkowo i wsporniki o przekrojach bisymetrycznych i monosymetrycznych. Proponowane w pracy formuły na obliczanie momentów krytycznych z wykorzystaniem metody Rayleigh'a-Ritz'a zostały zweryfikowane za pomocą analizy numerycznej w programie ANSYS, opartym na Metodzie Elementów Skończonych. Porównanie obu rozwiązań potwierdziło prawidłowość przyjętych założeń i wyniki uzyskane z podejścia analitycznego można przyjąć za poprawne. Dodatkowo w rozprawie zaproponowano sposób wyznaczania nośności na zwichrzenie elementów ze zbieżnymi przekrojami poprzecznymi i dokonano oceny wpływu zwichrzenia na nośność ogólną tych belek.

Głównymi wnioskami wynikającymi z rozprawy są:

- momenty krytyczne inicjujące utratę stateczności belek ze zmiennymi liniowo przekrojami można wyznaczać metodą energetyczną Rayleigh'a-Ritz'a,
- nośność obliczeniowa przekrojów belka zwiększa się znacznie w przypadku zmiany szerokości pasów, w porównaniu ze zmianą wysokości środków przy tych samych wartościach parametrów zbieżności  $\alpha_{TP}$  i  $\beta_{TP}$  i cechach geometrycznych przekrojów poprzecznych,
- uwzględnienie w metodzie energetycznej Rayleigh'a-Ritz'a tylko pierwszego przybliżenia ( $i=1$ ) umożliwia uzyskanie rozwiązania w postaci zamkniętej przybliżonej,
- z porównania wartości obliczonych momentów krytycznych metodą Rayleigh'a-Ritz'a i metodą elementów skończonych programem ANSYS wynika zadowalająca ich zbieżność,
- metoda energetyczna Rayleigh'a-Ritz'a, minimalizująca funkcjonal energii potencjalnej w belce o zmiennym przekroju, może być z powodzeniem wykorzystywana do wyznaczania sprężystych momentów krytycznych stalowych belek ze zmiennymi liniowo szerokościami pasów i wysokością środka,
- zwichrzenie ma znaczący wpływ na spadek nośności granicznej zginanych, niezabezpieczonych konstrukcyjnie przed zwichrzeniem, belek ze zmiennymi liniowo wysokościami środków i szerokościami pasów,
- metody numeryczne są skutecznymi narzędziami w ocenie wpływu niestateczności belek na ich nośności.



Problemy stateczności belek wymagają dalszych prac badawczych teoretycznych i doświadczalnych. Rozwiązanie zawarte w pracy może być poszerzane dla belek o bardziej złożonych schematach obciążeń a także dla innych przekrojów poprzecznych. Wiąże się to jednak z rozbudowywaniem obliczeń o dodatkowe wyrazy szeregów opisujących funkcje przemieszczeń i kątów obrotu oraz zastosowanie co najmniej trzech przybliżeń. W szczególności zauważono konieczność rozbudowy szeregów dla elementów ze zbieżnymi pasami, gdyż rozbieżność wyników analitycznych z wynikami MES sięgała nawet 55%. Przedstawione w pracy ogólne rozwiązanie na sprężyste momenty krytyczne belek zbieżnych może być także rozszerzone o wpływ stężeń bocznych na nośności graniczne.

## Literatura

- Andrade A., Camotim D., Providencia P., Elastic lateral-torsional buckling of restrained web-tapered I-beams, *Computers and Structures*, **88**, 2010, 1179-1196.
- Andrade A., Camotim D., Borges Dinis P., Lateral-torsional buckling of singly symmetric web-tapered thin-walled I-beams: 1D model vs. Shell FEA, *Computers and Structures*, **85**, 2007, 1343-1359.
- ANSYS Theory reference, Wydanie elektroniczne. SAS IP., 2007.
- Bradford M. A., Stability of Tapered I-Beams, *Journal of Constructional Steel Research*, **9**, 1988, 195-216.
- Bradford M.A., Cuk P.E, Elastic buckling of tapered monosymmetric I-beams, *Journal of Structural Engineering*, vol. **114**, no. 5, 1988, 977-996.
- Bradford M. A., Inelastic buckling of tapered monosymmetric I-beams, *Engineering Structures*, **11**, 1989, 119-126.
- Brezina V., *Stateczność prętów konstrukcji metalowych*, Arkady, Warszawa, 1966.
- Brzoska Z., *Statyka i stateczność konstrukcji prętowych i cienkościennych*, PWN, Warszawa, 1965.
- Butler D. J., Elastic Buckling on Laterally and Torsionally Braced Tapered Beams, *Welding Journal Research Supplement*, vol. **45**, no. 1, 1966, 1-41.
- Elszgulc L. E., *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa 1960.
- Galambos T. V., Surovek A.E., *Structural Stability of Steel: Concepts and Applications for Structural Engineers*, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2008.
- Giżejowski M., Zwichrzenie belek stalowych o ograniczonej zdolności do obrotu na podporach, *Inżynieria i Budownictwo*, 10, 2001, 589-594.
- Glabisz W., *MATHEMATICA w zagadnieniach mechaniki konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 2003.
- Goczek J., Supel Ł., Gajdzicki M., *Przykłady obliczeń konstrukcji stalowych*, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź, 2010.
- Gosowski B., *Stateczność przestrzenna stężonych podłużnie i poprzecznie pełnościennych elementów konstrukcji metalowych*, Prace Naukowe Instytutu Budownictwa Politechniki Wrocławskiej nr 66, Seria: Monografie nr 29, Wrocław, 1992.
- Gosowski B., *Skręcanie i zginanie elementów konstrukcji metalowych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 2004.
- Gupta P., Wang S. T., Blandford G. E., Lateral-torsional buckling of nonprismatic I-beams, *Journal of Structural Engineering*, vol. **122**, no. 7, 1996, 748-755.
- Jong-Dar Yau, Stability of tapered I-Beams under torsional moments, *Finite Elements in Analysis and Design*, **42**, 2006, 914-927.
- Kitipornchai S., Trahair N. S., Elastic stability of tapered I-beams, *Journal of the Structural Division*, ASCE, **98** (ST3), 1972, 713-728.

Kitipornchai S., Trahair N. S., Elastic behavior of tapered monosymmetric I-beams, *Journal of the Structural Division, ASCE*, **101** (ST8), 1975, 1661-1678.

Kozłowski T., Piechnik S., Stojek Z., *Zastosowanie rachunku wariacyjnego do zagadnień mechaniki budowli*, Biblioteka Inżynierii i Budownictwa, Warszawa, 1967.

Kozłowski A. (red.), *Konstrukcje stalowe. Przykłady obliczeń według PN-EN 1993-1*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów, 2009.

Kuś J., Stateczność belek ze zbieżnymi przekrojami, *Zeszyty Naukowe Politechniki Opolskiej s. Mechanika*, **91**, 2008, 45-46.

Kuś J., Zagadnienie zwichrzenia belek o liniowo zmiennym przekroju poprzecznym, *Zeszyty Naukowe Politechniki Opolskiej s. Mechanika*, **93**, 2009, 57-58.

Kuś J., Analiza zwichrzenia stalowej belki ze zbieżnym środkiem, *Zeszyty Naukowe Politechniki Opolskiej s. Mechanika*, **96**, 2010, 58-59.

Kuś J., Numeryczna analiza stateczności stalowej belki ze zbieżnym przekrojem poprzecznym, *Zeszyty Naukowe Politechniki Opolskiej s. Mechanika*, **98**, 2011, 49-50.

Kuś J., Momenty krytyczne zwichrzenia stalowych belek dwuteowych z liniowo zmiennymi wysokością środka i szerokością pasa, *Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej s. Budownictwo i Inżynieria Środowiska*, **59 (Nr 3/2012/II)**, 2012, 217-224.

Marques L., Tarasb A., Simões da Silva L., Greinerb R., Rebelo C., Development of a consistent buckling design procedure for tapered columns, *Journal of Constructional Steel Research*, In Press, Corrected Proof, Available online 17 November 2011.

Mendera Z., Nośność słupów stalowych o zmiennym przekroju, *Inżynieria i Budownictwo*, 9, 1994, 420-423.

Mendera Z., Buckling Strenght of Tapered Steel Columns, *Sthalbau*, **64**, no. 4, 1995, 113-118.

Mohri F., Brouki A., Roth J. C., Theoretical and numerical stability analyses of unrestrained, monosymmetric thin-walled beams, *Journal of Constructional Steel Research*, **59**, 2003, 63-90.

Pałkowski Sz., Kołodziej J., Krytyczne momenty zwichrzenia bisymetrycznych belek dwuteowych, *Inżynieria i Budownictwo*, 8, 1998, 394-395.

Polyzois D., Raftoyiannis I. G., Lateral-torsional stability of steel web-tapered I-beams, *Journal of Structural Engineering*, vol. **124**, no. 7, 1998, 1208-1216.

Raftoyiannis I. G., Ermopoulos J. Ch., A Stability of tapered and stepped steel columns with initial imperfections, *Engineering Structures*, **27**, no. 8, 2005, 1248-1257.

Raftoyiannis I. G., Ermopoulos J. Ch., A simple approach for the determination of the critical lateral-torsional buckling moment of steel web-tapered I-beams, *Progress in Steel, Composite and Aluminium Structures* (edited by Giżejowski, Kozłowski, Ślęczka, Ziółko), Taylor & Francis Group, London, 2006, 517-524.

Ronagh H. R., Bradford M. A., Elastic distortional buckling of tapered I-beams, *Engineering Structures*, **16**, no. 2, 1994, 97-110.

- Ronagh H. R., Bradford M. A., A rational model for the distortional buckling of tapered members, *Computer methods in applied mechanics and and engineering*, **130**, 1996, 263-277.
- Ronagh H. R., Bradford M. A., Attard M. M., Nonlinear analysis of thin-walled members of variable cross-sections. Part I: Theory, *Computers & Structures*, **77**, 2000, 285-299.
- Ronagh H. R., Bradford M. A., Attard M. M., Nonlinear analysis of thin-walled members of variable cross-sections. Part II: Application, *Computers & Structures*, **77**, 2000, 301-313.
- Sabat A. K., *Lateral-torsional buckling analysis of steel frames with corrugated webs. A case study of tapered I-beams with trapezoidalny corrugated webs*, Master's thesis in the Master's programme Structural Engineering and Building Performance Design, Chalmers University of Technology, Goteborg, 2009
- Saka M.P., Optimum design of steel frames with tapered members, *Computers and Structures*, **63**, 1997, 797-811.
- Smith W. G., Analytic solutions for tapered column buckling, *Computers and Structures*, **28**, no. 5, 1988, 677-681.
- Timoshenko S. P., Gere J. M., *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill Book, London, 1961.
- Trahair N. S., *Flexural-Torsional Buckling of Structures*, Chapman & Hall, London, 1993.
- Trahair N. S., Bradford M. A., Nethercot D. A., Gardner L., *The Behaviour and Design of Steel Structures to EC3*, Taylor & Francis, New York, 2008.
- Vlasov V. Z., *Tonkostiennyje uprugie sterżni*, GIFML, Moskwa, 1959.
- Wang C. M., Thevendran V., Teo K. L., Kitipornchai S., Optimal design of tapered beams for maximum buckling strenght, *Engineering Structures*, **8**, 1986, 276-284.
- Weiss S., Giżejowski M., *Stateczność konstrukcji metalowych. Układy prętowe*, Arkady, Warszawa, 1991.
- Yeong-Bin Yang, Jong-Dar Yau, Stability of Beams with Tapered I-Sections, *Journal of Engineering Mechanics*, vol. **113**, no. 9, 1987, 1337-1357.
- Zhang Lei, Tong Geng Shu, Lateral buckling of web-tapered I-beams: A new theory, *Journal of Constructional Steel Research*, **64**, 2008, 1379-1393.
- Ziemian R.B., *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2010.
- Żmuda J., *Problemy niestateczności w projektowaniu dźwigarów stalowych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, Opole, 2004.
- Żmuda J., Jankowiak R., Karasińska U., Stability analysis of bisymmetrical tapered I-beams, *Progress in Steel, Composite and Aluminium Structures* (edited by Giżejowski, Kozłowski, Ślęczka, Ziółko), Taylor & Francis Group, London, 2006, 537-543.
- Żmuda J., Kuś J., Stability of steel beams with tapered cross-sections, *Proceedings of the 12-th International Conference on Metal Structures ICMS 2011, Progress in Steel and Composite Structures* (edited by B. Gosowski, K. Rykaluk, J. Ziółko), Wrocław University of Technology, 15-17 June 2011, 158-159.

## **Normy**

PN-EN 1993-1-1, Projektowanie konstrukcji stalowych: Reguły ogólne i reguły dla budynków. PKN, Warszawa, 2006.

PN-EN 1993-1-5, *Projektowanie konstrukcji stalowych: Blachownice*. PKN, Warszawa, 2007.

PN-EN 1993-1-6, *Projektowanie konstrukcji stalowych: Wytrzymałość i stateczność konstrukcji powłokowych*. PKN, Warszawa, 2009.

PN-EN 1993-1-7, *Projektowanie konstrukcji stalowych: Konstrukcje płytowe*. PKN, Warszawa, 2008.

## Spis rysunków

Rysunek 3.2.1. Otwarty zbieżny przekrój poprzeczny.....	14
Rysunek 3.2.2. Monosymetryczny przekrój dwuteowy przy zwężeniu.....	17
Rysunek 5.1.1. Schemat obciążenia belki obciążeniem ciągłym równomiernie rozłożonym. ....	25
Rysunek 5.1.2. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną obciążeniem ciągłym. ....	28
Rysunek 5.1.3. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną obciążeniem ciągłym. ....	28
Rysunek 5.1.4. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną obciążeniem. ....	28
Rysunek 5.1.5. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną obciążeniem ciągłym. ....	28
Rysunek 5.1.6. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną obciążeniem ciągłym. ....	28
Rysunek 5.1.7. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną obciążeniem ciągłym. ....	28
Rysunek 5.1.8. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną obciążeniem ciągłym w środku ścinania. ....	30
Rysunek 5.1.9. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną obciążeniem ciągłym w środku ścinania. ...	30
Rysunek 5.1.10. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną obciążeniem ciągłym na pasie górnym. ....	30
Rysunek 5.1.11. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną obciążeniem ciągłym na pasie górnym. ...	30
Rysunek 5.1.12. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną obciążeniem ciągłym na pasie górnym. ....	30
Rysunek 5.1.13. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną obciążeniem ciągłym na pasie górnym. ...	30
Rysunek 5.1.14. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną obciążeniem ciągłym w środku ścinania. ....	32
Rysunek 5.1.15. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną obciążeniem ciągłym w środku ścinania. ...	32
Rysunek 5.1.16. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną obciążeniem ciągłym na pasie górnym. ....	32
Rysunek 5.1.17. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną obciążeniem ciągłym na pasie górnym. ...	32
Rysunek 5.1.18. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną obciążeniem ciągłym na pasie górnym. ....	32
Rysunek 5.1.19. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną obciążeniem ciągłym na pasie górnym. ...	32
Rysunek 5.2.1. Schemat obciążenia belki momentami skupionymi. ....	33
Rysunek 5.2.2. Momenty krytyczne belki o rozpiętości $L=6,0$ m ze zbieżnym środkiem, obciążoną momentami skupionymi.....	34
Rysunek 5.2.3. Momenty krytyczne belki o rozpiętości $L=6,0$ m ze zbieżnymi pasami, obciążoną momentami skupionymi.....	34
Rysunek 5.2.4. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną momentami skupionymi. ....	35
Rysunek 5.2.5. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną momentami skupionymi.....	35
Rysunek 5.2.6. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną momentami skupionymi dla różnych wartości parametru $\Psi$ .....	36
Rysunek 5.2.7. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną momentami skupionymi dla różnych wartości parametru $\Psi$ .....	36
Rysunek 5.2.8. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną momentami skupionymi. ....	37
Rysunek 5.2.9. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną momentami skupionymi.....	37
Rysunek 5.3.1. Schemat obciążenia belki siłą skupioną. ....	38
Rysunek 5.3.2. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną siłą skupioną w środku ścinania. ....	41
Rysunek 5.3.3. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną siłą skupioną w środku ścinania. ....	41
Rysunek 5.3.4. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną siłą skupioną przyłożoną do pasa górnego. ....	41
Rysunek 5.3.5. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną siłą skupioną przyłożoną do pasa górnego. ....	41
Rysunek 5.3.6. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną siłą skupioną przyłożoną do pasa dolnego.....	41
Rysunek 5.3.7. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną siłą skupioną przyłożoną do pasa dolnego. ....	41
Rysunek 5.3.8. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną siłą skupioną w środku ścinania. ....	43
Rysunek 5.3.9. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną siłą skupioną w środku ścinania. ....	43

Rysunek 5.3.10. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną siłą skupioną przyłożoną do pasa górnego. ....	43
Rysunek 5.3.11. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną siłą skupioną przyłożoną do pasa górnego. ....	43
Rysunek 5.3.12. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną siłą skupioną przyłożoną do pasa dolnego. ....	43
Rysunek 5.3.13. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną siłą skupioną przyłożoną do pasa dolnego. ....	43
Rysunek 5.3.14. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną siłą skupioną w środku ścinania. ....	44
Rysunek 5.3.15. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną siłą skupioną w środku ścinania. ....	44
Rysunek 5.3.16. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną siłą skupioną w środku ścinania. ....	45
Rysunek 5.3.17. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną siłą skupioną w środku ścinania. ....	45
Rysunek 5.4.1. Schemat obciążenia belki dwiema siłami skupionymi. ....	46
Rysunek 5.4.2. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym przekrojem, obciążoną dwiema siłami skupionymi w środku ścinania, dla różnych parametrów zbieżności. ....	48
Rysunek 5.4.3. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi przekrojem, obciążoną siłami skupionymi w środku ścinania, dla różnych parametrów zbieżności. ....	48
Rysunek 5.4.4. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną dwiema siłami skupionymi w środku ścinania. ....	49
Rysunek 5.4.5. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną siłami skupionymi w środku ścinania. ....	49
Rysunek 5.4.6. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną dwiema siłami skupionymi w środku ścinania. ....	50
Rysunek 5.4.7. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną siłami skupionymi w środku ścinania. ....	50
Rysunek 5.4.8. Momenty krytyczne belki ze zbieżnym środkiem, obciążoną dwiema siłami skupionymi w środku ścinania. ....	51
Rysunek 5.4.9. Momenty krytyczne belki ze zbieżnymi pasami, obciążoną siłami skupionymi w środku ścinania. ....	51
Rysunek 5.5.1. Schemat obciążenia wspornika obciążeniem ciągłym równomiernie rozłożonym. ....	52
Rysunek 5.5.2. Momenty krytyczne wspornika ze zbieżnym środkiem, obciążonego obciążeniem ciągłym przyłożonym w środku ścinania. ....	55
Rysunek 5.5.3. Momenty krytyczne wspornika ze zbieżnymi pasami, obciążonego obciążeniem ciągłym przyłożonym w środku ścinania. ....	55
Rysunek 5.5.4. Momenty krytyczne wspornika ze zbieżnym środkiem, obciążonego obciążeniem ciągłym przyłożonym do górnej półki. ....	55
Rysunek 5.5.5. Momenty krytyczne wspornika ze zbieżnymi pasami, obciążonego obciążeniem ciągłym przyłożonym do górnej półki. ....	55
Rysunek 5.5.6. Momenty krytyczne wspornika ze zbieżnym środkiem, obciążonego obciążeniem ciągłym przyłożonym do dolnej półki. ....	55
Rysunek 5.5.7. Momenty krytyczne wspornika ze zbieżnymi pasami, obciążonego obciążeniem ciągłym przyłożonym do dolnej półki. ....	55
Rysunek 5.6.1. Schemat obciążenia wspornika siłą skupioną. ....	56
Rysunek 6.2.1. Schemat elementu skończonego BEAM188 (a), oznaczenia parametrów w przekroju dwuteowym używanym przez program ANSYS (b), w których: $w_i$ , $w_j$ , $w_k$ - węzły elementu skończonego, $W_1$ , $W_2$ - szerokości półki dolnej i górnej, $W_3$ - wysokość ogólna przekroju, $t_1$ , $t_2$ - grubości półki dolnej i górnej, $t_3$ - grubości środka. ....	60
Rysunek 6.3.1. Schemat elementu skończonego SHELL181 w którym: $w_i$ , $w_j$ , $w_k$ , $w_l$ - węzły elementu skończonego. ....	60
Rysunek 6.4.1. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnym środkiem, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym w środku ścinania. ....	62
Rysunek 6.4.2. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnymi pasami, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym w środku ścinania. ....	62
Rysunek 6.4.3. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnym środkiem, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym w środku ścinania. ....	62
Rysunek 6.4.4. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnymi pasami, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym w środku ścinania. ....	62
Rysunek 6.4.5. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnym środkiem, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do górnej półki. ....	63

Rysunek 6.4.6. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnymi pasami, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do górnej półki. ....	63
Rysunek 6.4.7. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnym środkiem, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do górnej półki. ....	63
Rysunek 6.4.8. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnymi pasami, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do górnej półki. ....	63
Rysunek 6.4.9. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnym środkiem, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do dolnej półki. ....	64
Rysunek 6.4.10. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnymi pasami, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do dolnej półki. ....	64
Rysunek 6.4.11. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnym środkiem, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do dolnej półki. ....	64
Rysunek 6.4.12. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnymi pasami, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do dolnej półki. ....	64
Rysunek 6.4.13. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnym środkiem, obciążonej momentami skupionymi. ....	65
Rysunek 6.4.14. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnymi pasami, obciążonej momentami skupionymi. ....	65
Rysunek 6.4.15. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnym środkiem, obciążonej momentami skupionymi. ....	65
Rysunek 6.4.16. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnymi pasami, obciążonej momentami skupionymi. ....	65
Rysunek 6.4.17. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnym środkiem, obciążonej siłą skupioną przyłożoną w środku ścinania. ....	66
Rysunek 6.4.18. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnymi pasami, obciążonej siłą skupioną przyłożoną w środku ścinania. ....	66
Rysunek 6.4.19. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnym środkiem, obciążonej siłą skupioną przyłożoną w środku ścinania. ....	66
Rysunek 6.4.20. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnymi pasami, obciążonej siłą skupioną przyłożoną w środku ścinania. ....	66
Rysunek 6.4.21. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnym środkiem, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do górnej półki. ....	67
Rysunek 6.4.22. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnymi pasami, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do górnej półki. ....	67
Rysunek 6.4.23. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnym środkiem, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do półki górnej. ....	67
Rysunek 6.4.24. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnymi pasami, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do półki górnej. ....	67
Rysunek 6.4.25. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnym środkiem, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do dolnej półki. ....	68
Rysunek 6.4.26. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnymi pasami, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do dolnej półki. ....	68
Rysunek 6.4.27. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnym środkiem, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do półki dolnej. ....	68
Rysunek 6.4.28. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnymi pasami, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do półki dolnej. ....	68
Rysunek 6.4.29. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnym środkiem, obciążonej siłą skupioną przyłożoną w środku ścinania. ....	69
Rysunek 6.4.30. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnymi pasami, obciążonej siłą skupioną przyłożoną w środku ścinania. ....	69
Rysunek 6.4.31. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnym środkiem, obciążonej siłą skupioną przyłożoną w środku ścinania. ....	69
Rysunek 6.4.32. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnymi pasami, obciążonej siłą skupioną przyłożoną w środku ścinania. ....	69
Rysunek 6.4.33. Porównanie momentów krytycznych dla belki monosymetrycznej ze zbieżnym środkiem, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym w środku ścinania. ....	70
Rysunek 6.4.34. Porównanie momentów krytycznych dla belki monosymetrycznej ze zbieżnymi pasami, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym w środku ścinania. ....	70



Rysunek 6.4.35. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnym środkiem, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do środka ścinania. ....	70
Rysunek 6.4.36. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnymi pasami, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do środka ścinania. ....	70
Rysunek 6.4.37. Porównanie momentów krytycznych dla belki monosymetrycznej ze zbieżnym środkiem, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do górnej półki. ....	71
Rysunek 6.4.38. Porównanie momentów krytycznych dla belki monosymetrycznej ze zbieżnymi pasami, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do górnej półki. ....	71
Rysunek 6.4.39. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnym środkiem, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do górnej półki. ....	71
Rysunek 6.4.40. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnymi pasami, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do górnej półki. ....	71
Rysunek 6.4.41. Porównanie momentów krytycznych dla belki monosymetrycznej ze zbieżnym środkiem, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do dolnej półki. ....	72
Rysunek 6.4.42. Porównanie momentów krytycznych dla belki monosymetrycznej ze zbieżnymi pasami, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do dolnej półki. ....	72
Rysunek 6.4.43. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnym środkiem, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do dolnej półki. ....	72
Rysunek 6.4.44. Widok zwichrzonej belki ze zbieżnymi pasami, obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do dolnej półki. ....	72
Rysunek 6.4.45. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnym środkiem, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do środka ścinania. ....	73
Rysunek 6.4.46. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnymi pasami, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do środka ścinania. ....	73
Rysunek 6.4.47. Widok zwichrzonej belki wspornikowej ze zbieżnym środkiem, obciążonej siłą skupioną przyłożoną w środku ścinania. ....	73
Rysunek 6.4.48. Widok zwichrzonej belki wspornikowej ze zbieżnymi pasami, obciążonej siłą skupioną przyłożoną w środku ścinania. ....	73
Rysunek 6.4.49. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnym środkiem, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do górnej półki. ....	74
Rysunek 6.4.50. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnymi pasami, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do górnej półki. ....	74
Rysunek 6.4.51. Widok zwichrzonej belki wspornikowej ze zbieżnym środkiem, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do pasa górnego. ....	74
Rysunek 6.4.52. Widok zwichrzonej belki wspornikowej ze zbieżnymi pasami, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do pasa górnego. ....	74
Rysunek 6.4.53. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnym środkiem, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do dolnej półki. ....	75
Rysunek 6.4.54. Porównanie momentów krytycznych dla belki bisymetrycznej ze zbieżnymi pasami, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do dolnej półki. ....	75
Rysunek 6.4.55. Widok zwichrzonej belki wspornikowej ze zbieżnym środkiem, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do pasa dolnego. ....	75
Rysunek 6.4.56. Widok zwichrzonej belki wspornikowej ze zbieżnymi pasami, obciążonej siłą skupioną przyłożoną do pasa dolnego. ....	75
Rysunek 7.1. Porównanie nośności na zginanie ze zwichrzeniem dla belki bisymetrycznej w zależności od parametrów zbieżności przekroju. ....	79
Rysunek 7.2. Porównanie nośności na zginanie ze zwichrzeniem dla belki bisymetrycznej w zależności od parametrów zbieżności przekroju. ....	79
Rysunek 7.3. Porównanie nośności na zginanie ze zwichrzeniem dla belki bisymetrycznej w zależności od parametrów zbieżności przekroju. ....	79

## Spis tabel

Tabela 3.1.1. Parametry geometryczne belek zbieżnych. ....	10
Tabela 5.1.1. Momenty krytyczne bisymetrycznej belki ze zbieżnością przekroju typu 1 i 2 wg tabeli 3.1.1, obciążoną obciążeniem ciągłym równomiernie rozłożonym. ....	27
Tabela 5.1.2. Momenty krytyczne bisymetrycznej belki ze zbieżnością przekroju typu 3 i 4 wg tabeli 3.1.1, obciążoną obciążeniem ciągłym równomiernie rozłożonym. ....	29
Tabela 5.1.3. Momenty krytyczne monosymetrycznej belki ze zbieżnością przekroju typu 3 i 4 wg tabeli 3.1.1, obciążoną obciążeniem ciągłym równomiernie rozłożonym. ....	31
Tabela 5.2.1. Momenty krytyczne bisymetrycznej belki ze zbieżnością przekroju typu 1 i 2 wg tabeli 3.1.1., obciążoną momentami skupionymi. ....	34
Tabela 5.2.2. Momenty krytyczne monosymetrycznej belki ze zbieżnością przekroju typu 1 i 2 wg tabeli 3.1.1, obciążoną momentami skupionymi. ....	35
Tabela 5.2.3. Momenty krytyczne bisymetrycznej belki ze zbieżnością przekroju typu 3 i 4 wg tabeli 3.1.1, obciążoną momentami skupionymi. ....	36
Tabela 5.2.4. Momenty krytyczne monosymetrycznej belki ze zbieżnością przekroju typu 3 i 4 wg tabeli 3.1.1, obciążoną momentami skupionymi. ....	37
Tabela 5.3.1. Momenty krytyczne bisymetrycznej belki ze zbieżnością przekroju typu 1 i 2 wg tabeli 3.1.1, obciążoną siłą skupioną w środku rozpiętości. ....	40
Tabela 5.3.2. Momenty krytyczne monosymetrycznej belki ze zbieżnością przekroju typu 1 i 2 wg tabeli 3.1.1, obciążoną siłą skupioną w środku rozpiętości. ....	42
Tabela 5.3.3. Momenty krytyczne bisymetrycznej belki ze zbieżnością przekroju typu 3 i 4 wg tabeli 3.1.1, obciążoną siłą skupioną w środku rozpiętości. ....	44
Tabela 5.3.4. Momenty krytyczne monosymetrycznej belki ze zbieżnością przekroju typu 3 i 4 wg tabeli 3.1.1, obciążoną siłą skupioną w środku rozpiętości. ....	45
Tabela 5.4.1. Momenty krytyczne bisymetrycznej belki ze zbieżnością przekroju typu 1 i 2 wg tabeli 3.1.1., obciążoną dwiema siłami skupionymi. ....	48
Tabela 5.4.2. Momenty krytyczne monosymetrycznej belki ze zbieżnością przekroju typu 1 i 2 wg tabeli 3.1.1, obciążoną dwiema siłami skupionymi. ....	49
Tabela 5.4.3. Momenty krytyczne bisymetrycznej belki ze zbieżnością przekroju typu 3 i 4 wg tabeli 3.1.1, obciążoną dwiema siłami skupionymi. ....	50
Tabela 5.4.4. Momenty krytyczne monosymetrycznej belki ze zbieżnością przekroju typu 3 i 4 wg tabeli 3.1.1, obciążoną dwiema siłami skupionymi. ....	51
Tabela 5.5.1. Momenty krytyczne wspornika bisymetrycznego ze zbieżnością przekroju typu 3 i 4 wg tabeli 3.1.1, obciążonego obciążeniem ciągłym równomiernie rozłożonym. ....	54
Tabela 5.6.1. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie belki wspornikowej obciążonej siłą skupioną na swobodnym końcu wspornika, przyłożoną do środka ścinania. ....	57
Tabela 5.6.2. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie belki wspornikowej obciążonej siłą skupioną na swobodnym końcu wspornika, przyłożoną do górnej i dolnej półki. ....	58
Tabela 6.4.1. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie belki bisymetrycznej obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do środka ścinania. ....	62
Tabela 6.4.2. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie belki bisymetrycznej obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do górnej półki. ....	63
Tabela 6.4.3. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie belki bisymetrycznej obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do dolnej półki. ....	64
Tabela 6.4.4. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie belki bisymetrycznej obciążonej momentami skupionymi na końcach. ....	65
Tabela 6.4.5. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie belki obciążonej siłą skupioną w środku rozpiętości, przyłożoną do środka ścinania. ....	66
Tabela 6.4.6. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie belki obciążonej siłą skupioną w środku rozpiętości, przyłożoną do górnej półki. ....	67
Tabela 6.4.7. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie belki obciążonej siłą skupioną w środku rozpiętości, przyłożoną do dolnej półki. ....	68
Tabela 6.4.8. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie belki obciążonej siłą skupioną w środku rozpiętości, przyłożoną do środka ścinania. ....	69

Tabela 6.4.9. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie belki monosymetrycznej obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do środka ścinania. ....	70
Tabela 6.4.10. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie belki monosymetrycznej obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do górnej półki. ....	71
Tabela 6.4.11. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie belki obciążonej obciążeniem ciągłym przyłożonym do dolnej półki. ....	72
Tabela 6.4.12. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie wspornika obciążonego siłą skupioną przyłożoną do środka ścinania. ....	73
Tabela 6.4.13. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie wspornika obciążonego siłą skupioną przyłożoną do górnej półki. ....	74
Tabela 6.4.14. Porównanie wartości momentów krytycznych wyznaczonych analitycznie i numerycznie wspornika obciążonego siłą skupioną przyłożoną do dolnej półki. ....	75
Tabela 7.1. Nośność na zginanie i nośność na zwichrzenie bisymetrycznej belki obciążonej momentami skupionymi. .	78

## Dodatek – pliki wsadowe do programu ANSYS

/com, BELKA ZE ZBIEŻNYMI PASAMI I STAŁĄ WYSOKOŚCIĄ ŚRODNIAKA - OBCIĄŻENIE ŚRODEK ŚCINANIA (SHELL181)

finish  
/clear

L=6000                   !ROZPIĘTOŚĆ BELKI  
TF=10                   !GRUBOŚĆ PÓLEK  
TW=7                   !GRUBOŚĆ ŚRODNIAKA  
HW1=130               !WYSOKOŚĆ ŚRODNIAKA  
BF1=150               !SZEROKOŚĆ POCZĄTKOWA "b0" PÓLEK  
BF2=300               !SZEROKOŚĆ KOŃCOWA "bm" PÓLEK

/graphics.power  
/triad,lbot  
/auto  
/view,1,1,1,1  
/eshape,1

/prep7  
et,1,181  
keyopt,1,3,2  
r,1,TF  
r,2,TW  
mp,ex,1,210000  
mp,nuxy,1,0.3

/com, x,y,z

k,1,0,(HW1)+(TF/2),0  
k,2,0,0-(TF/2),0  
k,3,0,0-(TF/2),L/2  
k,4,0,(HW1)+(TF/2),L/2

k,13,0,(HW1/2),0  
k,20,0,(HW1/2),L/2

a,1,13,20,4  
a,13,2,3,20

k,5,(BF2/2),(HW1)+(TF/2),L/2  
k,6,(BF1/2),(HW1)+(TF/2),0  
k,7,-(BF1/2),(HW1)+(TF/2),0  
k,8,-(BF2/2),(HW1)+(TF/2),L/2

a,1,4,5,6  
a,1,4,8,7

k,9,(BF2/2),0-(TF/2),L/2  
k,10,(BF1/2),0-(TF/2),0  
k,11,-(BF1/2),0-(TF/2),0  
k,12,-(BF2/2),0-(TF/2),L/2

a,2,3,9,10  
a,2,3,12,11

k,14,0,(HW1)+(TF/2),L  
k,15,0,0-(TF/2),L  
k,21,0,(HW1/2),L

a,4,20,21,14  
a,20,3,15,21

k,16,-(BF1/2),(HW1)+(TF/2),L  
k,17,(BF1/2),(HW1)+(TF/2),L

a,4,5,17,14  
a,4,14,16,8

k,18,-(BF1/2),0-(TF/2),L  
k,19,(BF1/2),0-(TF/2),L

a,9,3,15,19  
a,12,3,15,18

nummrg,kp

```
aesize,all,50

real,1
type,1
mat,1
asel,s,area,,1,2
asel,a,area,,1
asel,a,area,,2
asel,a,area,,7
asel,a,area,,8

amesh,all

real,2
asel,inve
amesh,all

finish

/solu
antype,static
pstres,on

dl,21,,ux,0
dl,21,,uy,0
dl,21,,uz,0
dl,21,,rotz,0

dl,24,,ux,0
dl,24,,uy,0
dl,24,,uz,0
dl,24,,rotz,0

dl,1,,ux,0
dl,1,,uy,0
dl,1,,uz,0
dl,1,,rotz,0

dl,5,,ux,0
dl,5,,uy,0
dl,5,,uz,0
dl,5,,rotz,0

fk,20,fy,-1

allsel,all
solve
finish

/SOLU
ANTYPE,BUCKLE
PSTRES,on
BUCOPT,subsp,3
MXPAND,3,,YES

SOLVE
FINISH
```

## *Analiza stateczności belek ze zbieżnymi przekrojami poprzecznymi*

/com, BELKA ZE ZBIEŻNYM ŚRODNIKIEM I STAŁYMI PASAMI - OBCIĄŻENIE W ŚRODKU ŚCINANIA (SHELL181)

finish  
/clear

L=6000                   !ROZPIĘTOŚĆ BELKI  
TF=10                   !GRUBOŚĆ PÓLEK  
TW=7                   !GRUBOŚĆ ŚRODNIKA  
HW1=130               !WYSOKOŚĆ POCZĄTKOWA "h0" ŚRODNIKA  
HW2=280               !WYSOKOŚĆ MAKSYMALNA "hm" ŚRODNIKA  
BF1=150               !SZEROKOŚĆ POCZĄTKOWA "b0" PÓLEK  
BF2=BF1               !SZEROKOŚĆ KOŃCOWA "bm" PÓLEK  
P0=((HW2-HW1)/2)

/graphics,power  
/triad,lbot  
/auto  
/view,1,1,1,1  
/eshape,1

/prep7  
et,1,181  
keyopt,1,3,2  
r,1,TF  
r,2,TW  
mp,ex,1,210000  
mp,dens,1,1/386.1  
mp,nuxy,1,0.3

/com, x,y,z

k,1,0,(P0+(HW1)+(TF/2)),0  
k,2,0,P0-(TF/2),0  
k,3,0,0-(TF/2),L/2  
k,4,0,((HW2)+(TF/2)),L/2

k,13,0,(P0+(HW1/2)),0  
k,20,0,(P0+(HW1/2)),L/2

a,1,13,20,4  
a,13,2,3,20

k,5,(BF2/2),(HW2)+(TF/2),L/2  
k,6,(BF1/2),(P0+(HW1)+(TF/2)),0  
k,7,-(BF1/2),(P0+(HW1)+(TF/2)),0  
k,8,-(BF2/2),(HW2)+(TF/2),L/2

a,1,4,5,6  
a,1,4,8,7

k,9,(BF2/2),0-(TF/2),L/2  
k,10,(BF1/2),P0-(TF/2),0  
k,11,-(BF1/2),P0-(TF/2),0  
k,12,-(BF2/2),0-(TF/2),L/2

a,2,3,9,10  
a,2,3,12,11

k,14,0,(P0+(HW1)+(TF/2)),L  
k,15,0,P0-(TF/2),L  
k,21,0,(P0+(HW1/2)),L

a,4,20,21,14  
a,20,3,15,21

k,16,-(BF1/2),(P0+(HW1)+(TF/2)),L  
k,17,(BF1/2),(P0+(HW1)+(TF/2)),L

a,4,5,17,14  
a,4,14,16,8

k,18,-(BF1/2),P0-(TF/2),L  
k,19,(BF1/2),P0-(TF/2),L

a,9,3,15,19  
a,12,3,15,18

nummrg,kp  
aesize,all,75

```
real,2
type,1
mat,1
asel,s,area,,1,2
asel,a,area,,1
asel,a,area,,2
asel,a,area,,7
asel,a,area,,8

amesh,all

real,1
asel,inve
amesh,all

finish

/solu
antype,static
pstres,on

dl,21,,ux,0
dl,21,,uy,0
dl,21,,uz,0
dl,21,,rotz,0

dl,24,,ux,0
dl,24,,uy,0
dl,24,,uz,0
dl,24,,rotz,0

dl,1,,ux,0
dl,1,,uy,0
dl,1,,uz,0
dl,1,,rotz,0

dl,5,,ux,0
dl,5,,uy,0
dl,5,,uz,0
dl,5,,rotz,0

fk,20,fy,-1

allsel,all
solve
finish

/SOLU
ANTYPE,BUCKLE
PSTRES,on
BUCOPT,subsp,3
MXPAND,3,,YES

SOLVE
FINISH
```

## *Analiza stateczności belek ze zbieżnymi przekrojami poprzecznymi*

---

```
/com, BELKA ZE ZBIEŻNYM PRZEKROJEM - (BEAM188)

/CLEAR, START
/FILENAME, Stiffness of Tapered Beam,1
/TITLE, TAPERED BEAM
/PREP7
ET,1,BEAM188
KEYOPT,1,1,1
R,1,
MP,EX,1,210000
MP,NUXY,1,,3

sectype,1,beam,1          ! define cross section at first end point
secdata,150,150,150,10,10,7  ! W1,W2,W3,T1,T2,T3
sectype,2,beam,1          ! define cross section at far end
secdata,150,150,300,10,10,7
sectype,3,taper           ! new Section ID for tapered beam analysis
secdata,1,0,0,0           ! section 1 at location (0,0,0)
secdata,2,4500,0,0        ! section 2 at location (0,4500,0)
sectype,4,beam,1          ! define cross section at first end point
secdata,150,150,300,10,10,7  ! W1,W2,W3,T1,T2,T3
sectype,5,beam,1          ! define cross section at far end
secdata,150,150,150,10,10,7
sectype,6,taper           ! new Section ID for tapered beam analysis
secdata,4,4500,0,0        ! section 1 at location (0,4500,0)
secdata,5,9000,0,0        ! section 2 at location (0,9000,0)

K,1,0,0,0
K,2,4500,0,0
K,3,2000,200,0

K,4,9000,0,0
K,5,5000,200,0

ESIZE,100

L,1,2
LATT,1,1,1,,3,,3
LMESH,1,1

L,2,4
LATT,1,1,1,,5,,6
LMESH,1,2

/ESHAPE,1
FINISH

/SOLU
ANTYPE,STATIC
PSTRES,ON

dk,1,,0,UY,UZ,ROTX,,
dk,4,,0,UY,UZ,ROTX,,
fk,2,fy,-1

ALLSEL,ALL
SOLVE
FINISH

/SOLU
ANTYPE,BUCKLE
PSTRES,ON
BUCOPT,subsp,3
MXPAND,3,,YES

SOLVE
FINISH
```