

Waldemar Bober

ARCHITEKTONICZNA  
WYDAJNOŚĆ  
NIEREGULARNYCH SIATEK  
KONSTRUKCYJNYCH



Oficina Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej  
Wrocław 2011

## Recenzenci

Tadeusz KOLENDOWICZ

Jan B. OBRĘBSKI

Opracowanie redakcyjne

Kamila WYŚLUCHA

Opracowanie graficzne

Emilia BOBER-KIELT

Wszelkie prawa zastrzeżone. Żadna część niniejszej książki, zarówno w całości, jak i we fragmentach, nie może być reprodukowana w sposób elektroniczny, fotograficzny i inny bez zgody wydawcy i właściciela praw autorskich.

© Copyright by Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2011

OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCLAWSKIEJ

wyb. Stanisława Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

<http://www.oficyna.pwr.wroc.pl>;

e-mail: [oficwyd@pwr.wroc.pl](mailto:oficwyd@pwr.wroc.pl)

[zamawianie.książek@pwr.wroc.pl](mailto:zamawianie.książek@pwr.wroc.pl)

ISBN 978-83-7493-629-3

Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 846/2011.

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Poszukiwania nieregularnych form prętowych</b>	<b>5</b>
1.1	Wprowadzenie . . . . .	5
1.2	Przykłady realizacji obiektów nieregularnych . . . . .	7
1.3	Badania modelowe struktur nieregularnych . . . . .	12
1.4	Cel i zakres pracy. Zastosowane metody badawcze. . . . .	14
<b>2</b>	<b>Własności grafów w kształtowaniu układów siatkowych</b>	<b>17</b>
2.1	Podstawowe pojęcia w teorii grafów . . . . .	17
2.2	Analogie grafów w trajektoriach naprężeń elementów konstrukcyjnych . . . . .	21
2.3	Jednowarstwowe modele podpór prętowych . . . . .	24
2.4	Dwuwarstwowe modele podpór prętowych . . . . .	31
2.5	Jednowarstwowe powłoki sferyczne . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Aperiodyczna tesselacja powierzchni w kształtowaniu siatek nieregularnych</b>	<b>49</b>
3.1	Zasady tesselacji . . . . .	49
3.2	Siatki rusztów o kształcie prętów Ammanna . . . . .	55
3.3	Tesselacje Ammanna w ruszcie dwuwarstwowym . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Elementy geometrii projekcyjnej w przekształcaniu siatek generowanych w FEM</b>	<b>67</b>
4.1	Projekcja grafów na powierzchnie sferyczne . . . . .	67
4.2	Budowa siatek FEM na powierzchniach . . . . .	70
4.3	Budowa siatek FEM w przestrzeni . . . . .	76
4.4	Model siatki sferycznej uzyskany z FEM . . . . .	78
4.5	Model toroidalnej powłoki prętowej z FEM . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Zastosowanie metod probabilistycznych do kształtowania siatek konstrukcyjnych</b>	<b>91</b>
5.1	Losowe generowanie rusztu kołowego . . . . .	91

---

5.2	Redukcja prętów w ruszcie kołowym . . . . .	94
5.3	Losowe wstawianie grup prętów w rusztach płaskich . . .	99
5.4	Losowa modyfikacja nieregularnych rusztów przestrzennych	106
<b>6</b>	<b>Ocena możliwości kształtowania nieregularnych siatek konstrukcyjnych z wykorzystaniem narzędzi matematyki dyskretnej</b>	<b>111</b>
<b>7</b>	<b>Wnioski i oryginalne metody pracy</b>	<b>117</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>121</b>
	<b>Dodatki</b>	<b>131</b>
0.1	Skrypt do losowego modyfikowania konstrukcji wygenerowanych w <i>Robot</i> z zastosowaniem <i>Visual Basic</i> . . . . .	131
0.2	Skrypt do losowego generowania płaskich rusztów kołowych	135
0.3	Wyniki obliczeń statyczno-wytrzymałościowych modeli powłok prętowych . . . . .	143
	<b>Słownik pojęć podstawowych użytych w rozprawie</b>	<b>171</b>
	<b>Spis rysunków</b>	<b>175</b>
	<b>Streszczenie w języku angielskim</b>	<b>179</b>



# Rozdział 1

## Poszukiwania nieregularnych form prętowych

### 1.1 Wprowadzenie

W kształtowaniu formy obiektów unikalnych konstrukcja może mieć swój istotny wkład. W wyniku znacznego postępu technologicznego zastosowanie lekkich układów prętowych i prętowo-ciężnowych stało się powszechne. Ażurowe konstrukcje prętowe mają już swoją historię, która w odniesieniu do konstrukcji metalowych została stworzona przy realizacji XIX wiecznych konstrukcji żeliwnych i kontynuowana z wykorzystaniem elementów stalowych na przełomie XIX i XX wieku. W znanym nurcie poszukiwań coraz lepszych rozwiązań konstrukcyjnych nawet żebrowe rozwiązania żelbetowe z pierwszej połowy XX wieku aspirowały do miana lekkich<sup>1</sup>, odpowiadających stałemu kryterium oceny, jakim jest racjonalne zużycie materiału konstrukcyjnego. Współczesne metody optymalizacyjne zdają się wprawdzie odchodzić od minimalizowania zużycia materiałowego na rzecz bardziej złożonych parametrów, opartych o rachunek ekonomiczny, jednak dla twórców systemów konstrukcyjnych lekkość przykryć budynków unikalnych pozostaje nadal wyzwaniem, czę-

---

<sup>1</sup>Wyznacznikami tego fenomenu są realizacje konstrukcji żelbetowych pierwszej połowy XX wieku, począwszy od Hali Stulecia M. Berga do Hali Wystawowej w Turynie P. L. Nervi.

sto wychodzącym poza kategorie ekonomiczne i lokującym się w ambicjach zawodowych podsycających odwieczną konkurencję wzywającą do przekraczania rekordów rozpiętości i wysokości konstrukcji. Rozwiązania konstrukcji obiektów kubaturowych stanowiły zawsze służebną część rozwiązań technicznych projektu architektonicznego, chociaż nie zawsze w tym projekcie były wyodrębniane. Realizacje obiektów inżynierskich, głównie mostów kolejowych i drogowych, wyszczególniły w ostatnich wiekach i podniosły rangę roli inżyniera-konstruktora, tworząc dziś odrębną gałąź poszukiwań twórczych i badawczych. Można stwierdzić, że ubiegły wiek został dobrze wykorzystany na rozwój technologii konstrukcji budowlanych w oparciu o podbudowę teoretyczną stworzoną w naukach ścisłych na przełomie XIX i XX wieku. Unowocześnienie metod obliczeniowych zainicjowało rewolucyjny proces przekształcania narzędzi pracy także w budownictwie wraz ze wszystkimi dziedzinami teoretycznymi i praktycznymi, wpływającymi na realizację obiektów budowlanych. Można w tym kontekście postawić hipotezę, że proces powstawania konstrukcji budynków osiągnął poziom interdyscyplinarny i jego dalszy rozwój jest uzależniony od szerokiej współpracy specjalistów z różnych dziedzin, takich jak matematyka, informatyka, mechanika, chemia i wielu pochodnych.

Kształtowanie konstrukcji prętowych od samego początku było związane z zasadami geometrii euklidesowej i z czasem podążyło za wynikami poszukiwań badawczych w tej dziedzinie. Szczególnie płodne okazały się rezultaty uzyskane w krystalografii, wykorzystującej od starożytności teorię brył platońskich. Nie wkraczając w aspekty estetyczne, znajdujące się poza obszarem niniejszych rozważań, należy podkreślić rolę symetrii w kształtowaniu omawianych form prętowych stosowanych w konstrukcjach<sup>2</sup>. Ukształtowane na tej bazie systemy charakteryzowała duża powtarzalność elementów i ich połączeń przegubowych kratownic przestrzennych (określanych mianem struktur przestrzennych), do których rozwoju i spopularyzowania przyczynili się tacy twórcy jak Stefan Du Chateau i Zygmunt Makowski [33]. Zrealizowane według projektów Du Chateau obiekty cechuje oryginalna forma, lekkość oraz logiczny układ konstrukcji prętowych. Du Chateau był twórcą kilku systemów struktur przestrzennych, w tym systemu „unibat”, powszechnie stosowanego w przykryciach obiektów sportowych i wystawowych. Makowski swoimi pracami teoretycznymi i zaangażowaniem organizacyjnym w międzynarodowym środowisku inżynierów przyczynił się do powstania cyklu konferencji na temat struktur przestrzennych, o zasięgu ogólnosiwiatowym<sup>3</sup>.

<sup>2</sup>Należy w tym miejscu przywołać obszerną twórczość w tym zakresie M. Burta [18];[19], który sformułował tak zwaną „tablicę Mendelejewa” dla wielościanów.

<sup>3</sup>Organizowane co dziewięć lat w University of Surrey w Guilford konferencje zebra-

Dalszy rozwój technologii (w tym zautomatyzowanie z wykorzystaniem komputerów) procesów wytwarzania i montażu elementów konstrukcji stalowej pozwolił odejść od wymaganej unifikacji składowych części konstrukcji. Ta nowa jakość technologiczna wychodzi naprzeciw oczekiwaniom twórców teorii architektury, umożliwiając znaczną swobodę kształtowania i indywidualizowania unikalnych obiektów budowlanych. Kierunek owych poszukiwań twórczych zyskał angielską nazwę *free form design* i od początku swego istnienia stanowił wyzwanie dla inżynierów konstruktorów oraz teoretyków konstrukcji [13]. Odejście od uswięconych tradycją schematów konstrukcji wymaga przebudowania całego procesu jej tworzenia, począwszy od badań teoretycznych zarówno w zakresie pojęć, jak i narzędzi badawczych. Mamy w tym miejscu przypadek paradoksu rozwojowego, kiedy technologia realizacji, głównie w zakresie oprzyrządowania wyprzedziła pewne procesy projektowania.

Nie mniej jednak faza projektowania wstępnego oparta na opracowaniu koncepcji obiektu zachowała swoją autonomię i stanowi domenę twórcy, chociażby ze względu na jej czasową uprzedniość w stosunku do całego procesu inwestycyjnego. Do podstawowych własności dowolnych form (*free form*) należy zaliczyć nieregularność. W przeciwieństwie do symetrii pojęcie to nie jest precyzyjne. W dalszej części pracy omówiono szczegółowo przytoczone określenia i przykłady tej geometrycznej własności. Biorąc jednak wstępnie jej najbardziej intuicyjne i potoczne znaczenie, nieregularność wprowadza do procesu twórczego swoiste zamieszanie, które najłatwiej zobrazować pojęciowo porównując fizyczny proces statyczny z procesem dynamicznym. Tego rodzaju zmiany w odniesieniu do procesu tworzenia konstrukcji muszą skutkować deprecjacją części narzędzi w procesie powstawania konstrukcji budynków unikalnych.

## 1.2 Przykłady realizacji obiektów nieregularnych

Przyjmowanie w procesie projektowania dowolnych form następuje już na etapie inspiracji twórczych, stanowiących istotny element pracy twórców architektury. Nieliczne jeszcze, zrealizowane nieregularne konstrukcje prętowe zdają się potwierdzać wstępne fazy rozwoju tego rodzaju obiektów. Należy tutaj podkreślić istotne dla tych rozważań rozróżnienie

---

ly w publikacjach pokonferencyjnych najnowsze osiągnięcia badawcze i realizacyjne w zakresie struktur przestrzennych.

między formą bryły obiektu a układem prętów, który może przyjmować kształt regularny dla nieregularnych form bryły obiektu<sup>4</sup>. W tym znaczeniu regularność konstrukcji stanowi cechę wewnętrzną układu prętów i ich połączeń. Jako przykład można podać przebudowę fragmentu budynku, Milano Convention Center, autorstwa Mario Bellini, dla którego inspiracją kształtu przykrycia o powierzchni około 37000 m<sup>2</sup> była zmięta kartka papieru<sup>5</sup>, przedstawiona na rysunku 1.1 [5]. Proces twórczy oparto w dużej mierze na digitalizacji modelu papierowego. Do utworzonego modelu cyfrowego została dopasowana systemowa konstrukcja prętowa, głównie dwuwarstwowa o zróżnicowanych długościach prętów. Problem nieregularności przykrycia został „zminimalizowany” w warstwie oparcia paneli pokrycia dachowego. W przestrzeni konstrukcji prętowej występują przeważnie układy trójkątne, a więc regularne w sensie topologicznym, natomiast nieregularność została utrzymana na poziomie afinicznym i metrycznym geometrii układu konstrukcji.

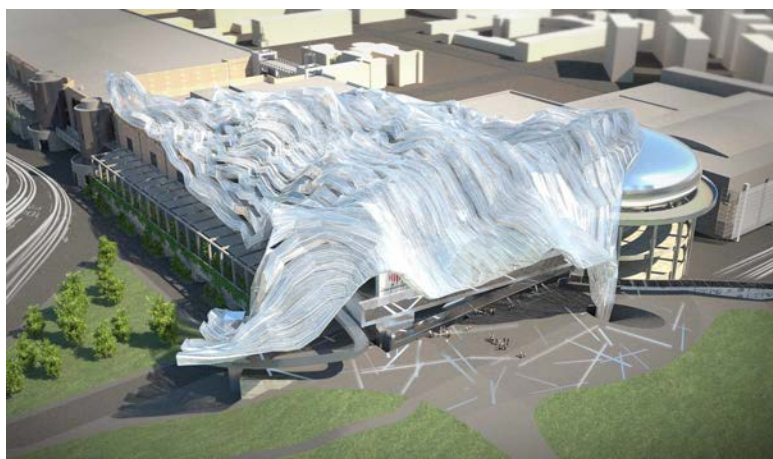
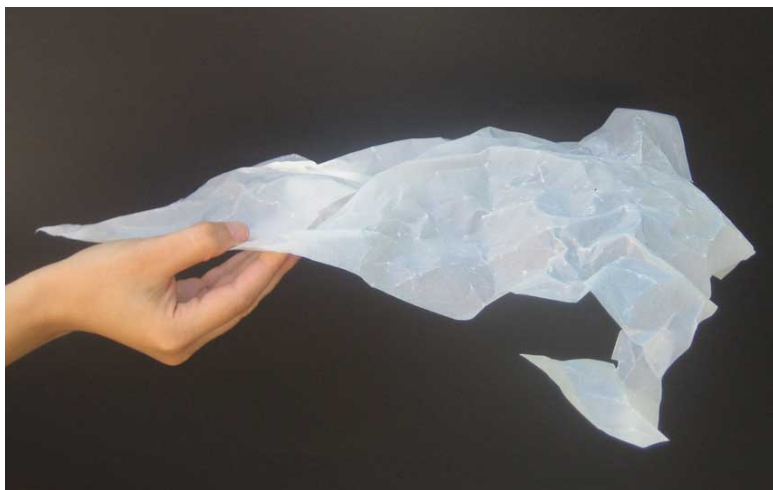
Podobny sposób rozwiązywania konstrukcji został przyjęty w koncepcji narożnika budynku ekspozycyjnego autorstwa Massimiliano Fuksas w Rzymie. Zdeformowana przestrzennie siatka prętowa o oczkach trójkątnych zamyka przestrzeń narożnika budynku o bryle tradycyjnej. Pionowe elementy nośne zostały ukryte w liniach siatki i uległy deformacji odchodząc geometrycznie od osi pionowych typowych dla słupów nośnych. Nieregularne układy prętowe znalazły też swoje wykorzystanie w niezrealizowanym jeszcze projekcie Michała Tellera wież ekspozycyjnych dla obiektu wystawienniczego w centrum Wrocławia (rys. 1.3). Inspirowany układem „tulipanowca” kształt siatek prętowych wykazuje zmienne zagęszczenie na wysokości wieży. Geometria układu konstrukcyjnego będzie widoczna dzięki przeziernemu pokryciu ścian za pomocą tafli szklanych.

Elementy konstrukcji budynku użyteczności publicznej, zlokalizowanego w Melbourne na Federation Square również można określić mianem nieregularnych. Fasada szklana Atrium w czworokątnych ramach z prętów stalowych została oparta na nieregularnym układzie prętów stalowych, w większości o schemacie wspornikowym. Układ konstrukcji koresponduje z bryłą budynku, w której panele przezierny zostały uzupełnione układami wypełnień nieprzeziernych. Geometria układu konstrukcyjnego jest eksponowana zarówno od zewnątrz jak i od wewnątrz budynku. W kształtowaniu układów prętów wykorzystano tesselację Conway’a [28].

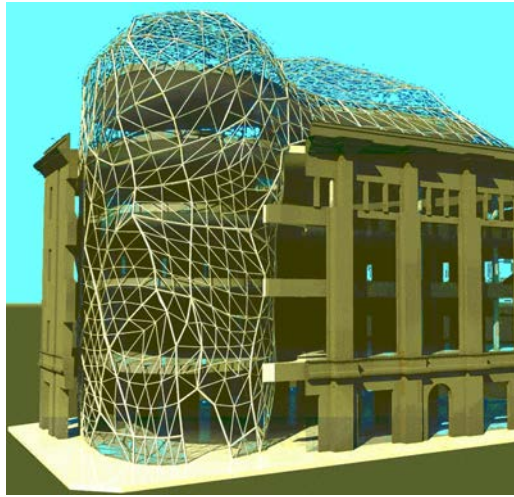
Prosty w swojej formie zewnętrznej, prostopadłościenny budynek pły-

<sup>4</sup>Nieregularność kształtu powłoki wielokrzywiznowej może być realizowana przez regularny system prętowy rusztu o siatce trójkątnej.

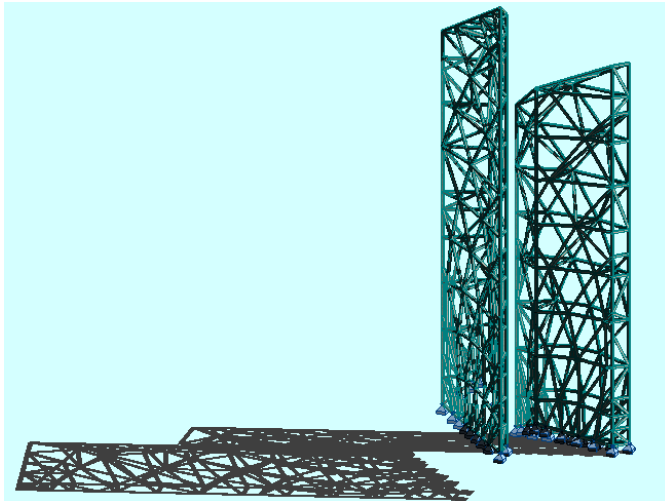
<sup>5</sup>wg strony internetowej i wystąpienia autora na konferencji SEWC w Como w 2011.



Rysunek 1.1: Inspiracje twórcze i forma przekrycia Milano Convention Center (na podstawie projektu M. Bellini) [ i 1].



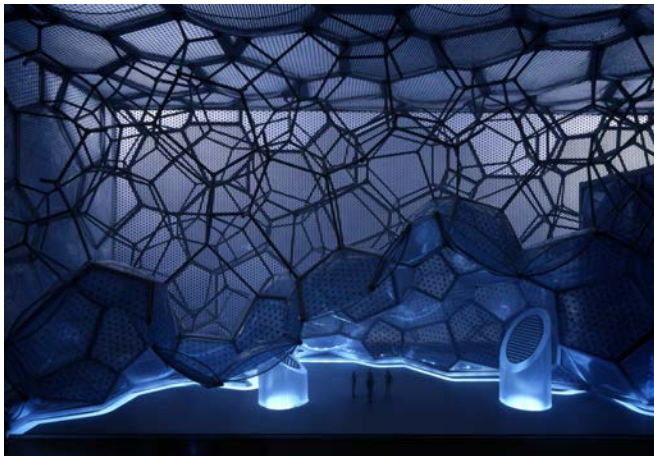
Rysunek 1.2: Siatka konstrukcyjna naroża budynku (na podstawie koncepcji M. Fuksas) [i 2].



Rysunek 1.3: Konstrukcja wież ekspozycyjnych (proj. konstr. W. Bober).



Rysunek 1.4: Konstrukcja atrium na Federation Square w Melbourne [i 3].



Rysunek 1.5: Pływalnia olimpijska „Water Cube” w Pekinie (fragment wnętrza) [i 4].

walni na Olimpiadę w roku 2008 w Pekinie o angielskiej nazwie *Water Cube* jest pod względem morfologii konstrukcji chyba najciekawszym obiektem ze znanych hal sportowych (por. rys. 1.5). Ściany zewnętrzne i przykrycie basenów zostało ukształtowane na podstawie modelu geometrycznego struktury piany mydlanej. Teoretyczny model piany w formie wielościanów wypukłych opracowany przez Weaire-Phelan, został przecięty zewnętrznymi płaszczyznami ścian, sufitów i dachu, zamykając przestrzeń konstrukcyjną wypełnioną spawaną *megastrukturą*<sup>6</sup>. Z uwagi na to, że oczka siatek wypełniono półprzezroczystymi poduszkami pneumatycznymi z PTFE (polytetrafluoroetylen), widoczną częścią struktury są w zasadzie tylko nieregularne siatki na powierzchniach zewnętrznych. Sąsiedni budynek stadionu olimpijskiego, inspirowany rysunkiem ptasiego gniazda, znacząco odbiega od lekkości pierwowzoru, a zewnętrznie pasy stalowych stężeń skrzynkowych, aczkolwiek nieregularne, maskują regularny układ powtarzalnych ram stalowych, stycznych do wewnętrznego otworu eliptycznego nad płytą boiska. Zbyt ciężką i sztywną konstrukcję stalową przykrycia stadionu realizatorzy motywowali koniecznością uwzględnienia obciążeń sejsmicznych występujących w tej lokalizacji.

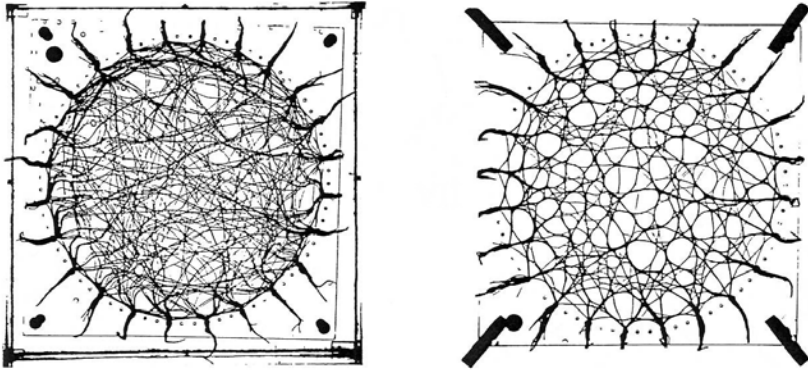
### 1.3 Badania modelowe struktur nieregularnych

Odrębną grupę poszukiwań, na które należałoby zwrócić uwagę, są badania modelowe nieregularnych układów prętowych w zakresie kształtowania ich geometrii. Spośród wielu ośrodków badawczych wyróżniające wyniki osiągnęły ośrodki uniwersyteckie w Stuttgarcie i Delft. Zainicjowane przez Frei Otto [111] badania nad układami liniowymi i prętowymi w dużej mierze oparte są na modelach tekstylnych i sznurkowych, zanurzanych w wodzie lub roztworze wodnym<sup>7</sup>. Kształt modeli uzyskiwany pod wpływem sił ciężkości i kohezji był analizowany dla celów poszukiwania form konstrukcji rzeczywistych, najczęściej linowych i powłokowych. Przedstawiony na rys. 1.6 model siatkowy autorstwa Marka Kołodziejczyka został zrealizowany w ramach programu badań Instytutu w Stuttgarcie. W opracowaniu wyników badań [79] uzyskane układy zostały określone jako obiekty nie zawierające symetrii ani punktów charakterystycznych, czyli bez wyraźnych tendencji w budowie wewnętrznej układu.

<sup>6</sup>Opis modelowania obiektu jest zawarty w [101].

<sup>7</sup>Próby te stanowią jedynie część bogatych poszukiwań prowadzonych przez F. Otto, którego kariera badawcza ma wiele punktów stycznych z drogą poszukiwań B. Fullera [41].





Rysunek 1.6: Model siatkowy bez tendencji (za [80]).

W poszukiwaniu formy układów prętowych nadal generatywną rolę odgrywają zasady geometryczne. Powszechnie stosowane zależności geometrii euklidesowej wyczerpały już, jak się wydaje, swój twórczy potencjał, stąd badacze nowych form układów konstrukcyjnych sięgają powszechnie po zdobycze matematyki wyższej w celu kreowania i weryfikowania nowych modeli. Stopień skomplikowania pojęciowego i wąska specjalizacja w badaniu problemów matematycznych utrudnia implementację wyników badań matematycznych do kształtowania formy konstrukcji<sup>8</sup>. Ponadto faza koncepcyjna poszukiwań formy związana jest z wielowariantową analizą rozwiązań wstępnych, podejmowaną najczęściej w ograniczonym przedziale czasowym. Uwarunkowania te wymagają uproszczonych procedur i posługiwania się szerzej zrozumiałymi narzędziami definiującymi model konstrukcji, biorąc pod uwagę zespołowy charakter projektowania obiektu budowlanego. W aspekcie kształtowania układów nieregularnych siatek konstrukcyjnych podane argumenty kierują uwagę na uproszczone metody generowania modeli komputerowych, stanowiących podstawową inspirację twórczą. W niniejszej pracy geometrię układów prętowych rozważa się przede wszystkim na poziomie topologicznym, a więc bez sztywnych założeń metrycznych i afinicznych. Takie uproszczenie narzędzi matematycznych umożliwi swobodniejsze

<sup>8</sup>Próbie interdyscyplinarnej współpracy podjęła w tym zakresie w latach 80-tych XX w. grupa badaczy, związanych z Uniwersytetem w Montrealu. Efektem ich pracy było wydawnictwo periodyku *Structural Topology*.

kreowanie formy i znacznie upraszcza jej zapis. Dopiero po wstępnym zaakceptowaniu układu konstrukcji prętowej następuje weryfikacja jej własności mechanicznych i przydatności do zastosowania w konstrukcji budynku, chociaż jeszcze przy uproszczonych kryteriach oceny. Taki algorytm postępowania ma pewne cechy optymalizacji rozwiązania projektowego w obszarze *forma – konstrukcja* [42] oraz stanowi próbę zbudowania narzędzi do racjonalizowania procesu projektowania nieregularnych siatek konstrukcyjnych.

## 1.4 Cel i zakres pracy. Zastosowane metody badawcze.

Jako cel podjętej próby należy przyjąć prezentację możliwości i przydatności zastosowania układów nieregularnych siatek konstrukcyjnych do kreowania unikalnych form architektonicznych w budynkach użyteczności publicznej, a także halach magazynowych i produkcyjnych, gdzie wymagane jest zachowanie dużych przestrzeni wolnych od podpór wewnętrznych. Poszukiwane formy mogą znaleźć zastosowanie w konstrukcjach obiektów nietypowych, gdzie oryginalny kształt struktury jest prezentowanym na zewnątrz elementem budynku. W kolejnych rozdziałach podano metody generowania różnorodnych siatek konstrukcyjnych w oparciu o modele badawcze, będące jednocześnie wzorami struktur do zastosowania w budynkach unikalnych. Topologiczny poziom opisu geometrii modeli umożliwi uzyskanie zróżnicowanych efektów formalnych w założonej grupie nieregularnych układów konstrukcyjnych.

W rozdziale drugim kreację modeli oparto na podstawowych pojęciach z teorii grafów, wykorzystując je do przekształcania wielogałęziowych podpór prętowych i żebrowych powłok sferycznych, stanowiących model przykrycia o dużych rozpiętościach.

W rozdziale trzecim nieregularne siatki prętowe utworzono na bazie aperiodycznych tesselacji powierzchni. Wykreowane modele uzyskały formę przykryć prętowych o charakterze rusztów płaskich, dwukierunkowo zakrzywionych powłok prętowych oraz płaskich rusztów wielowarstwowych (zaliczanych do struktur przestrzennych). Dla ostatniego modelu podjęto próbę wprowadzenia cięgien sprężających w dolnej warstwie struktury.

Rozdział czwarty zawiera modele nieregularnych powłok prętowych uzyskanych w drodze projekcji płaskich siatek na powierzchnie zakrzy-

wione. Inspiracją do budowy siatek stały się zasady podziału powierzchni i przestrzeni używane w metodzie elementów skończonych (FEM). Użyte struktury lokalizują się w klasach przykryć powłokowych o dużych rozpiętościach i megastruktur nawiązujących do problematyki obiektów mostowych.

Elementy metod probabilistycznych zostały zastosowane w badaniach rozdziału piątego do generowania i modyfikacji siatek prętowych. Dla uzyskanych losowo siatek rusztu o rzucie kołowym zastosowano metodę modyfikacji przez usunięcie prętów o małym wyężeniu statycznym pod zadaniem obciążeniem. Kolejną grupę modeli regularnych rusztów płaskich modyfikowano poprzez dodawanie grup prętów w obszarach dużego wyężenia statycznego struktury. Działania te prowadzą w założeniu do przełamania regularnej formy konstrukcji poddanych modyfikacji, z jednoczesnym optymalizowaniem pracy ustroju w kierunku zrównoważonego wyężenia prętów składowych. Ostatni model rozdziału opisuje przypadek losowego generowania przestrzennej siatki prętowej, zamkniętej w powierzchni sferycznej.

Modele badawcze zaprezentowane w dalszej części pracy zostały wygenerowane przy użyciu programów *Autocad* i *Robot Professional ver. 2010*, z zastosowaniem dla niektórych zagadnień rozdziału piątego dodatkowych aplikacji załączonych w dodatku. Modelom numerycznym nadano podstawowe cechy konstrukcyjne w module „rama przestrzenna”, co implikuje realizację schematu węzłów sztywnych w połączeniach prętów. Tylko lokalnie dopuszczono zwolnienia więzi w połączeniach elementów. Zasadniczym rodzajem podpory teoretycznej jest w badaniach podpora przegubowa nieprzesuwna. Do zrealizowania funkcji „ściągnięcia” opisanej dla grafów w rozdziale drugim, wykorzystano moduł korekty konstrukcji, dla której uprzednio wprowadzono podziały prętów liniowymi układami węzłów dodatkowych.

Jako podstawowej metody badawczej użyto analizy porównawczej badanych modeli. Dodatkowo do oceny utworzonych struktur prętowych przeprowadzono wstępną analizę statyczno-wytrzymałościową, której częściowe wyniki (w postaci map rozkładów naprężeń w prętach) zamieszczono na rysunkach modeli. Mapy zawierają wartości maksymalne naprężeń normalnych liczonych w złożonym stanie naprężenia z uwzględnieniem sił osiowych i dwukierunkowego zginania. W obliczeniach naprężeń moduł programu *Robot* nie uwzględnia wpływu wybożenia ani stateczności miejscowej, ze względu na orientacyjny charakter wyników we wstępnej fazie kształtowania. Załączona do map skala podaje w MPa wartości naprężeń, przy czym wartości dodatnie oznaczają ściskanie, a ujemne rozciąganie. Dla wybranych modeli zestawienie oznakowanych węzłów

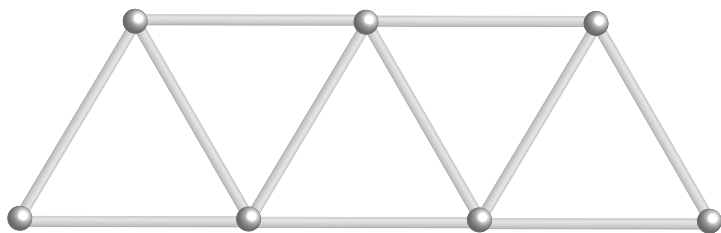
na mapach i odpowiadające im wartości podano w dodatku 3. Elementem ułatwiającym interpretację geometrii modelu są dołączone na rysunkach cienie ukośne i prostopadłe modeli rzucane na płaszczyznę poziomą  $x, y$ . W rzutowaniu prostopadłym cienie odzwierciedlają grafy planarne geometrii struktury.

## Rozdział 2

# Własności grafów w kształtowaniu układów siatkowych

### 2.1 Podstawowe pojęcia w teorii grafów

Grafy należą do najprostszych przedstawień konstrukcji prętowych na płaszczyźnie. Wiele określeń używanych w teorii grafów jest zbieżnych z terminami używanymi w konstrukcjach, chociaż nie zawsze ich obrazy znaczeniowe się pokrywają. Analogia obiektów badań teorii grafów i teorii konstrukcji jest najlepiej widoczna w zestawieniu przedstawień graficznych obu teorii. Podobnie jak schematy kratownic i rusztów, prezentacje grafów zawierają węzły (wierzchołki), stanowiące punkty końcowe krawędzi, które w sposób naturalny kojarzą się z prętami w konstrukcjach (por. rys. 2.1). Krawędzie w grafach nie muszą być odcinkami prostymi, ale mogą mieć formę zakrzywioną w postaci łuków, pętli, lub tym podobnych. Graf prosty jest definiowany jako zbiór wierzchołków i zbiór krawędzi, opisany przez nieuporządkowane, różne pary wierzchołków znajdujących się na końcach tych krawędzi. Dla własności grafów nie są istotne wartości kątów ani odległości pomiędzy węzłami. Stąd przyjmuje się, że dwa grafy są izomorficzne, jeżeli istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość ich wierzchołków, polegająca na tym, że liczba krawędzi łączących



Rysunek 2.1: Przykład grafu prostego spójnego.

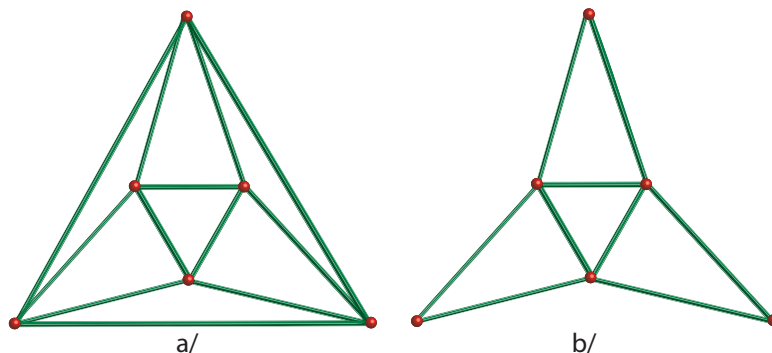
odpowiadające sobie wierzchołki jest jednakowa dla obu grafów<sup>1</sup>.

Grafy mogą być sumowane, ale ich składowych nie łączą dodatkowe krawędzie. Istotną cechą grafów, z punktu widzenia teorii konstrukcji, jest spójność. Graf jest uważany za spójny, jeżeli nie można go przedstawić w postaci sumy grafów. W opisie grafów istotną relacją jest sąsiedztwo (incydencja), dotyczące zarówno węzłów, jak i krawędzi. Dwa wierzchołki są incydentne, jeżeli istnieje krawędź, która je łączy. Wtedy także z tą krawędzią te wierzchołki są incydentne. Podobnie, dwie krawędzie są incydentne, jeżeli mają wspólny wierzchołek. Także z tym wierzchołkiem te krawędzie są incydentne. Podgrafy grafu powstają przez usunięcie części jego wierzchołków i incydentnych z nimi krawędzi. Możliwe jest takie usunięcie wybranych krawędzi, bez usuwania incydentnych z nimi wierzchołków, ale ta operacja może prowadzić do powstania odizolowanych wierzchołków. Tak podzielone grafy nie są przydatne dla rozważań na temat konstrukcji prętowych. Kolejnym, istotnym działaniem jest ściągnięcie krawędzi przez zidentyfikowanie jej końców i pominięcie samej krawędzi. Ściągnięcie może wprowadzać do grafu krawędzie wielokrotne, które mają identyczne wierzchołki na końcach. Liczbę krawędzi incydentnych z danym wierzchołkiem nazywa się stopniem wierzchołka. Graf, którego wszystkie wierzchołki mają ten sam stopień jest określany jako graf regularny. Definicja regularności grafu odbiega zatem w znaczącym stopniu od pojęcia regularności w geometrii euklidesowej, gdzie kwintesencją regularności wierzchołków i brył jest ich foremność.

Dla zobrazowania odmienności prezentacji obiektów w tych dwóch systemach geometrycznych zestawiono na rys. 2.3<sup>2</sup> podstawowe bryły

<sup>1</sup>Podstawowe pojęcia i własności grafów przytoczono za [157].

<sup>2</sup>Przedstawione na rysunku klasyczne bryły platońskie znalazły szerokie zastosowanie

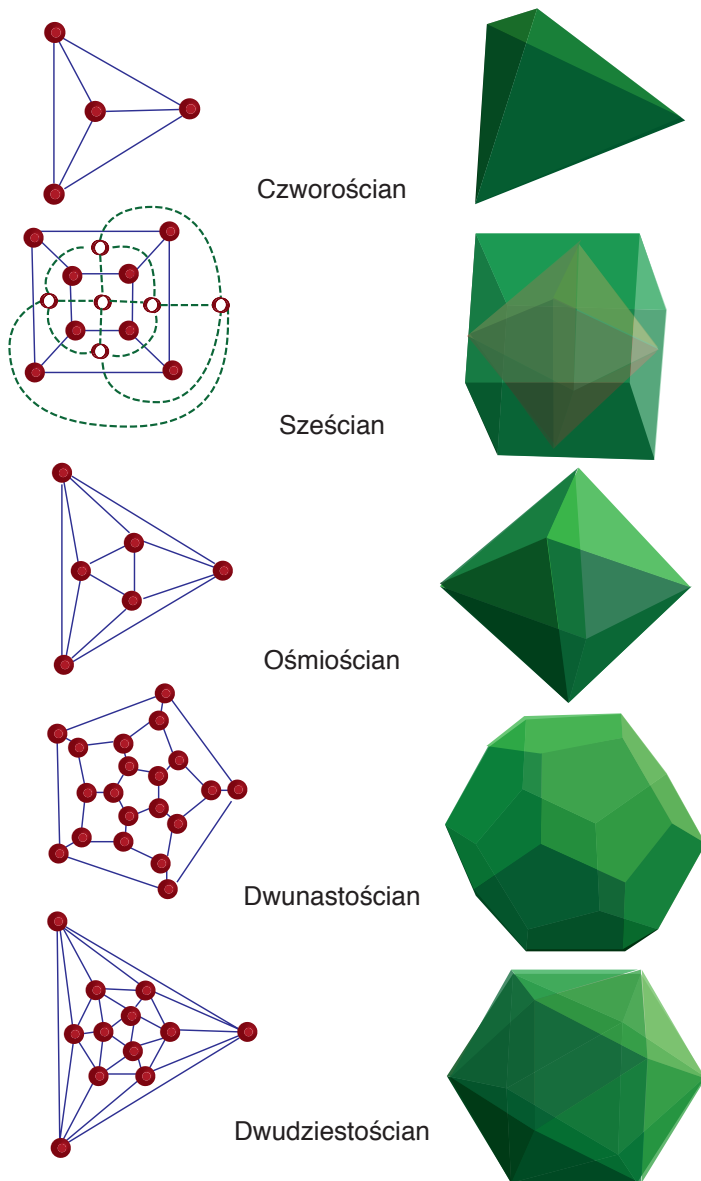


Rysunek 2.2: Regularność grafów: a/ regularny b/ nieregularny.

platońskie w ujęciu projekcyjnym i kombinatorycznym (teorii grafów). Na rysunku sześciianu zaprezentowano dodatkowo inną istotną własność grafów, ich wzajemną dualność. Graf dualny do danego powstaje przez połączenie krawędziami wierzchołków leżących na ścianach (fasetach) grafu podstawowego tak, że nowe krawędzie odpowiadają (przecinają) krawędziom incydentnym ze ścianami, na których leżą ich punkty końcowe. Grafy wzajemnie dualne zachowują wiele wspólnych własności. Jeżeli rozdzieli się zbiór wierzchołków na dwa rozłączne podzbiory, to można zbudować graf dwudzielny przez połączenie krawędziami tych dwóch zbiorów w taki sposób, że nie będzie krawędzi łączących wierzchołki należące do tego samego podzbioru. W badaniach morfologicznych siatek konstrukcyjnych podstawowe znaczenie ma spójność grafu. Pojęcie to wynika z własności ciągów krawędzi w grafie. Dowolny ciąg krawędzi incydentnych nosi miano trasy. Jeżeli trasa ma wszystkie krawędzie różne, staje się ścieżką, jeżeli dodatkowo także wierzchołki są różne uzyskujemy drogę. Jeżeli ścieżka ma początek i koniec w tym samym wierzchołku uzyskuje miano cyklu. Najprostszą formą cyklu jest pętla, a więc krawędź, dla której początek i koniec jest jednym wierzchołkiem. Badanie dróg w grafie służy ocenie spójności układu. Warunkiem koniecznym i dostatecznym spójności jest połączenie drogą dowolnych dwóch wierzchołków grafu. Dla grafów prostych o  $n$  wierzchołkach i więcej niż  $(n-1)(n-2)/2$  krawędziach spełniony jest warunek spójności<sup>3</sup>. Grafu spójnego nie można ponadto przedstawić w formie sumy grafów. W teorii grafów drzewem

wanie w kształtowaniu geometrii wielowarstwowych struktur prętowych i prętowych powłok sferycznych.

<sup>3</sup>Dla ustrojów konstrukcyjnych zagadnienie spójności przekłada się na stopień geometrycznej niezmienności układu prętowego i stateczność konstrukcji [22];[29].



Rysunek 2.3: Podstawowe bryły platońskie w ujęciu projekcyjnym i teorii grafów.

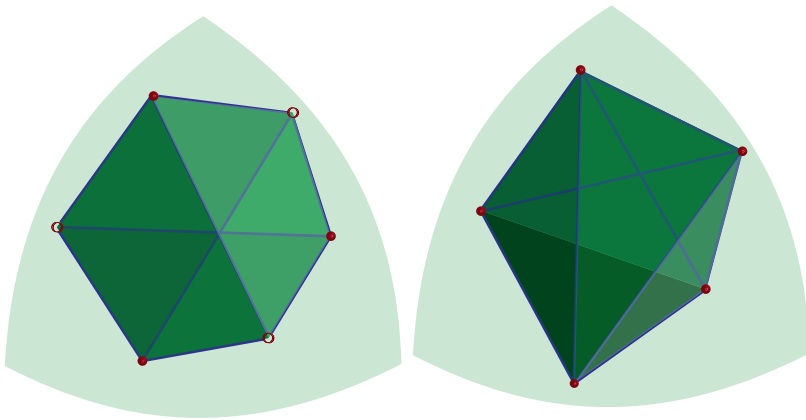


nazywa się graf spójny, nie zawierający cykli. W grafach zawierających cykle, zbiór krawędzi rozcinających jest drzewem spinającym, którego ilość elementów jest równa rzędowi rozcięcia (równomiernemu rzędowi spójności). Jeżeli do grafu – drzewa wprowadzimy numerację węzłów (drzewo oznakowane) to istnieje  $n^{n-2}$  różnych drzew mających  $n$  wierzchołków (twierdzenie Cayley’a). Własność ta może być przydatna przy kształtowaniu siatek prętowych, dla których spójność wiąże się z geometryczną niezmiennością układu. Dla grafów z wagami poszukiwania drzewa spinającego o najmniejszej sumie wag polega na dołączaniu do krawędzi o najmniejszej wadze kolejnych, incydentnych krawędzi o najmniejszej wadze, tak żeby nie utworzyć cyklu, ale w efekcie uzyskać drzewo. Dla opisu konstrukcji prętowych szczególne znaczenie mają grafy planarne, a więc takie grafy, które na płaszczyźnie można narysować bez przecięcia ich krawędzi. Przy sporządzaniu takiego rysunku należy oczywiście pamiętać, że krawędź może być reprezentowana przez linię krzywą, a wzajemne położenie wierzchołków grafu nie jest istotne. Grafami nieplanarnymi są między innymi: graf dwudzielny  $K_{3,3}$  i graf zupełny  $K_5$  przedstawione na rys. 2.4. Dlatego dany graf jest planarny, jeżeli nie zawiera podgrafu  $K_{3,3}$  lub  $K_5$ . Dla spójnych, prostych grafów planarnych zawierających  $V$  wierzchołków i  $E$  krawędzi zachodzi nierówność  $E \leq 3V - 6$ , jeżeli dodatkowo krawędzie grafów nie tworzą trójkątów to  $E \leq 2V - 4$ . Natomiast dla spójnych grafów płaskich zależność pomiędzy ilościami wierzchołków  $[V]$ , krawędzi  $[E]$  i ścian  $[F]$  jest ściśle określona:  $V - E + F = 2$ . Wzór ten dotyczy w szczególności wielościanów.

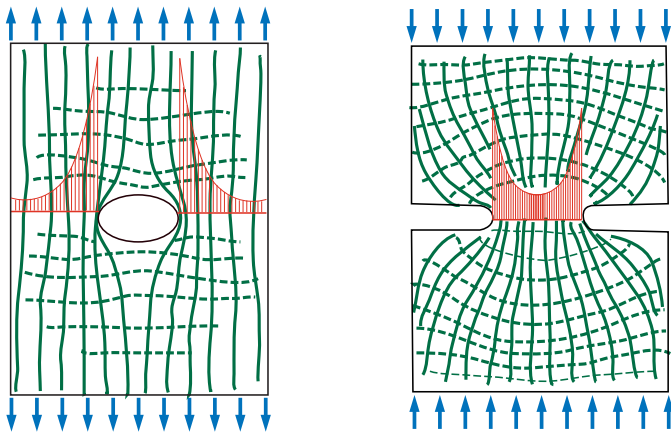
Badanie tras w grafach może służyć do opisu przepływu w sieciach. Tego rodzaju analizy wykorzystywane są do rozwiązywania problemów logistycznych w transporcie, układach elektronicznych, przepływach cieczy i innych. W poszukiwaniach optymalnych tras konieczne jest przypisanie krawędziom pewnych wartości, zwanych wagami, które umożliwiają ocenę wyboru drogi, na przykład, na podstawie długości jej odcinków lub przepustowości profilu. Grafy z wagami mogą znaleźć zastosowanie także w analizach statycznych sieci prętowych. W tym przypadku wagi powinny opisywać parametry wytrzymałościowe pręta.

## 2.2 Analogie grafów w trajektoriach naprężeń elementów konstrukcyjnych

Zagadnienie przepływu w sieciach jest związane z hipotezą przepływu sił w ustroju konstrukcyjnym. Jednym z badaczy zajmujących się

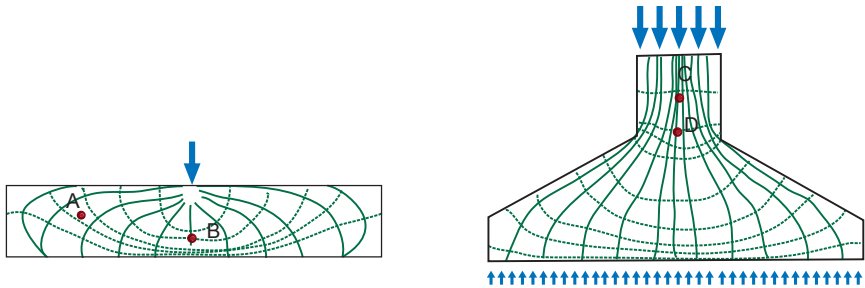


Rysunek 2.4: Graf dwudzielny  $K_{3,3}$  i zupełny  $K_5$ .

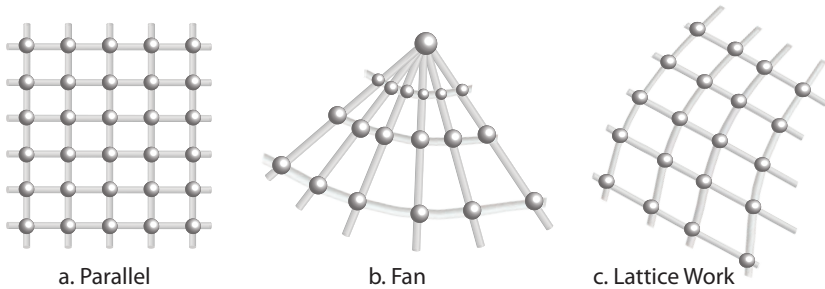


Rysunek 2.5: Hipoteza przepływu sił w elemencie konstrukcyjnym.

- a. element osłabiony otworem.
- b. element przewężony z tzw. karbem (za [161]).



Rysunek 2.6: Trajektorie przepływu sił w belce zginanej i stopie fundamentowej (za [161]).



Rysunek 2.7: Typy siatek dla przepływów sił.  
a/ równoległa b/ wachlarzowa c/ rombowa (za [161]).

tym problemem jest Waclaw Zalewski, który w notatkach do wykładów w MIT zawarł ideę wytrzymałości w strukturach wewnętrznych konstrukcji [161]. Przedstawione na rys. 2.5 ścieżki przepływu sił mają charakter grafu z wagami, zależnymi od własności mechanicznych materiału konstrukcyjnego. Identyfikacja siatek przepływu sił jest ściśle związana ze schematami pracy elementu konstrukcyjnego. Na rys. 2.6 zacytowano układy siatek dla belki i stopy fundamentowej. Analiza szczegółowych przepływów sił doprowadziła do sformułowania przez W. Zalewskiego typów kształtów siatek przedstawionych na rys. 2.7.

Siatki równoległe (a. *parallel*) są charakterystyczne dla elementów osiowo ściskanych lub rozciąganych. Wachlarzowy (b. *fan*) układ siatki występuje pod obciążeniem skupionym, natomiast zbieżne układy łukowe (c. *lattice work*) zostają przypisane wewnętrznej strukturze elementów

zginanych. Przedstawioną hipotezę pracy konstrukcji można uwzględnić przy kształtowaniu płaskich siatek konstrukcyjnych. Takie działanie można określić mianem dyskretyzacji przestrzeni konstrukcyjnej przez zastąpienie *continuum* materiałowego przez obiekty z przestrzeni geometrycznej niższego rzędu.

## 2.3 Jednowarstwowe modele podpór prętowych

Dla struktur podpierających dachy o dużych rozpiętościach odpowiednią formą grafu są drzewa. Drzewo jako jedno z kluczowych pojęć teorii grafów, poprzez potoczne skojarzenie znajduje analogię w podporach wielogałęziowych struktur prętowych. Wielopunktowe podparcie struktury przestrzennej znajduje uzasadnienie w dystrybucji sił wewnętrznych w prętach przykrycia poprzez rozłożenie reakcji podpory na większą ilość węzłów<sup>4</sup>. Jednak sprowadzenie gałęzi drzewa do *pnia* poprzez wielogałęziowy układ prętowy, obciążony reakcjami częściowymi do trzonowego odcinka dolnej części podpory, nie jest korzystne dla pracy statyczno-wytrzymałościowej podstawy słupa drzewiastego. Skutkuje to znacznym zwiększeniem przekroju podstawy analogicznie do proporcji przekrojów gałęzi i pnia drzewa. Stąd w niektórych rozwiązaniach takich podpór konstrukcję gałęzi opiera się bezpośrednio na fundamencie lub masywnym cokole żelbetowym. Pomijając więc, analogię drzew-grafów i podpór wielogałęziowych zbieżnych, przeprowadzono analizę podpór o schemacie rusztu przestrzennego. Tego rodzaju podpory mogą znaleźć zastosowanie w konstrukcjach przykryć dachowych o dużych rozpiętościach lub budynkach wielokondygnacyjnych jako konstrukcja słupów dla wysokich kondygnacji (na przykład hallu wejściowego).

W poszukiwaniu formy struktury słupa przyjęto wstępnie geometrię grafu dwudzielnego, nieplanarnego, ze zbiorem węzłów górnych obciążonych konstrukcją podpieraną i zbiorem węzłów w poziomie przekazywania reakcji słupa na fundament. Ułożone na obwodzie elipsy węzły połączono krawędziami położonymi na prostych wichrowatych w przestrzeni. Układy węzłów podporowych w górnej i dolnej części struktury tworzą w rzucie zestawy niesymetryczne. Taki układ, zgodnie z teorią prętów ściskanych podlega oddziaływaniu obciążeń mimośrodowych jednak przy zastosowaniu rozwiązań powłokowych wpływ ten nie jest szcze-

<sup>4</sup>Analizę podparcia przestrzennych struktur prętowych przeprowadził W. Bober w pracy doktorskiej p.t.: „Wielowarstwowe struktury przestrzenne jako konstrukcje płaskich przykryć dachowych”, Wrocław 2003.

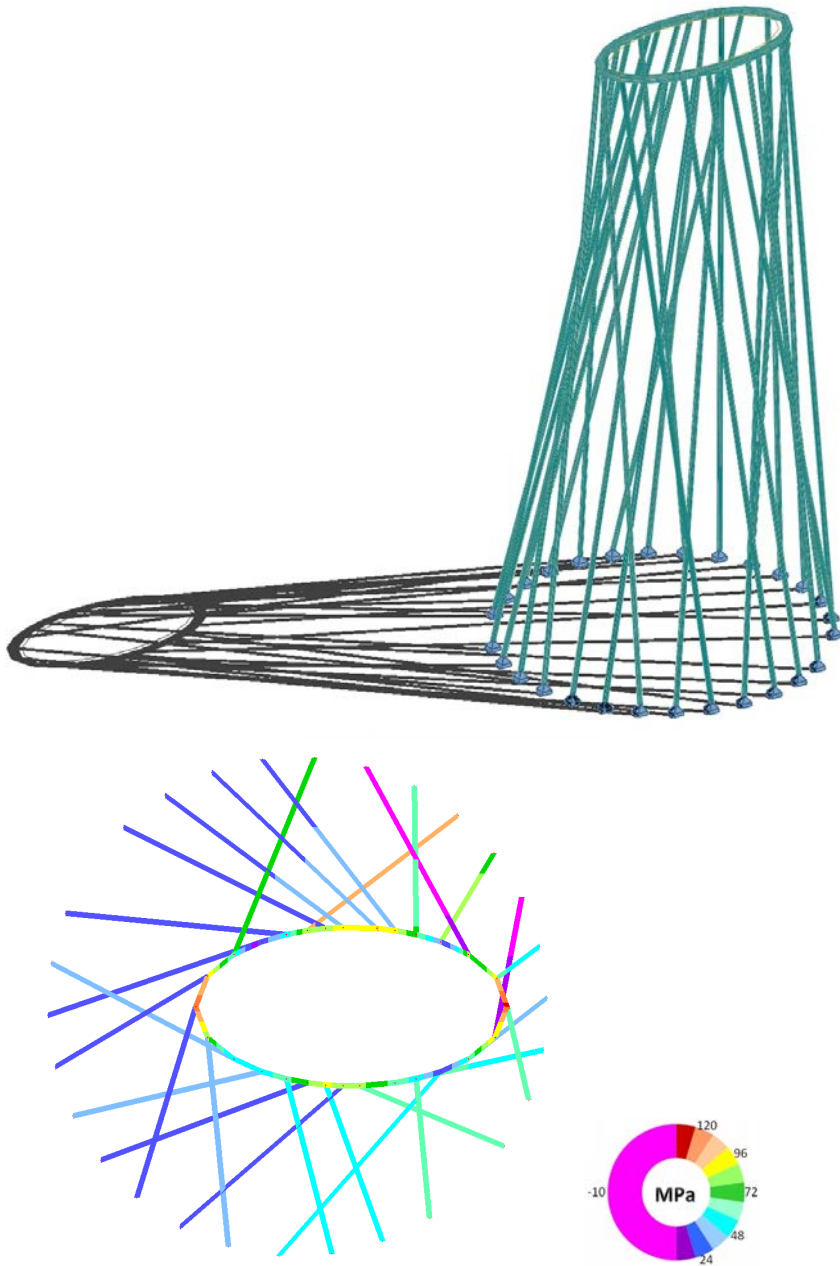
gólnie istotny. Wygenerowane modele geometryczne poddano wstępnej analizie statyczno-wytrzymałościowej. Do przeprowadzenia analiz wykorzystano program *Robot Professional*. W celu przeprowadzenia obliczeń nadano modelowi podstawowe cechy fizyczne. Przy wysokości słupa 15m, przyjęto średnią podstawy 7,9m i krótszą przekątną elipsy górnej 2,5m. Elementom prętowym nadano przekrój rur okrągłych o średnicy 0,12m. Założono funkcję nośną podpory w układzie podpierającym strukturalne przykrycie dachowe, przejmując obciążenie o wartości jednostkowej z powierzchni  $2500m^2$ .

Uzyskane wartości naprężeń maksymalnych w prętach konstrukcji świadczą o nierównomiernej dystrybucji sił przenoszonych przez konstrukcję, co wynika wprost z założeń geometrycznych dla wygenerowanego modelu. Koncentrację wyężenia obserwujemy przy krawędzi elipsy zbliżającej się w rzucie do okręgu podporowego. W obszarze tym występuje zmniejszone zagęszczenie prętów układu, ponadto ich nachylenie do poziomu jest zróżnicowane, co potęguje wpływ zginania na wyężenie prętów. W rozkładzie naprężeń maksymalnych w prętach daje się zaobserwować tendencję do skręcania całej podpory w kierunku prawego obrotu elipsy, co wynika z porównania wyężenia prętów niemal symetrycznych względem osi krótszej elipsy, położonych na rysunku powyżej jej krawędzi i oznaczonych kolorem zielonym i amarantowym, odpowiadających naprężeniom ok. 70 MPa, a więc znacznemu zmniejszeniu naprężeń ściskających dla prętów w układach zbieżnych z kierunkiem obrotu podpory. Odrebnym zagadnieniem jest wyężenie pierścienia eliptycznego, który generalnie nie ma wpływu na kształtowanie prętów podpory. Jednak zróżnicowane i lokalnie duże wartości naprężeń zwracają uwagę na konieczność nadania pokryciu odpowiedniej sztywności lub ukształtowania sztywnego pierścienia w płaszczyźnie podpieranego przykrycia<sup>5</sup>. W badanym modelu przyjęto rurę o średnicy 0,20m.

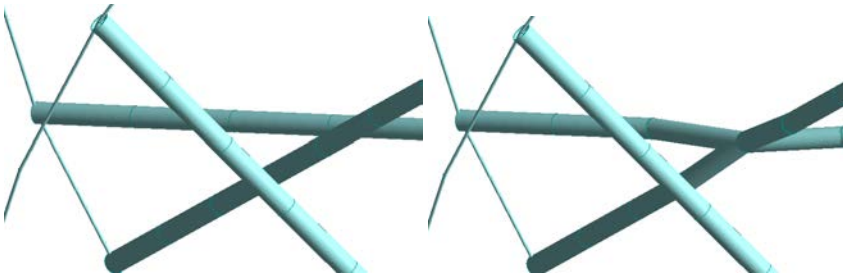
Z uwarunkowań konstrukcyjnych wynika konieczność przewiązania układu niezależnych prętów podporowych w celu zmniejszenia wpływu wyboczenia pojedynczych gałęzi. Do deformacji wiązki prętów, traktowanych jako krawędzie grafu, zastosowano metodę ściągnięcia grafu. Operacja ściągnięcia dotyczy węzłów układu prętowego, dla których odległości w przestrzeni są mniejsze od iteracyjnie wzrastających wartości przyjmowanych arbitralnie. W celu rozpoczęcia procesu ściągnięcia należało wprowadzić na prętach podporowych węzły pośrednie. Przyjęto równomierny podział wszystkich prętów podporowych na dwadzieścia odcinków podzielonych węzłami. Węzły mają charakter sztywny (z zablokowaniem

---

<sup>5</sup>Wybór rozwiązania brzegowego jest zależny od rodzaju i kształtu podpieranej konstrukcji przykrycia. Przykład ukształtowania połączenia podano na rysunku 4.22.



Rysunek 2.8: Model wyjściowy podpory jednowarstwowej z mapą naprężeń.

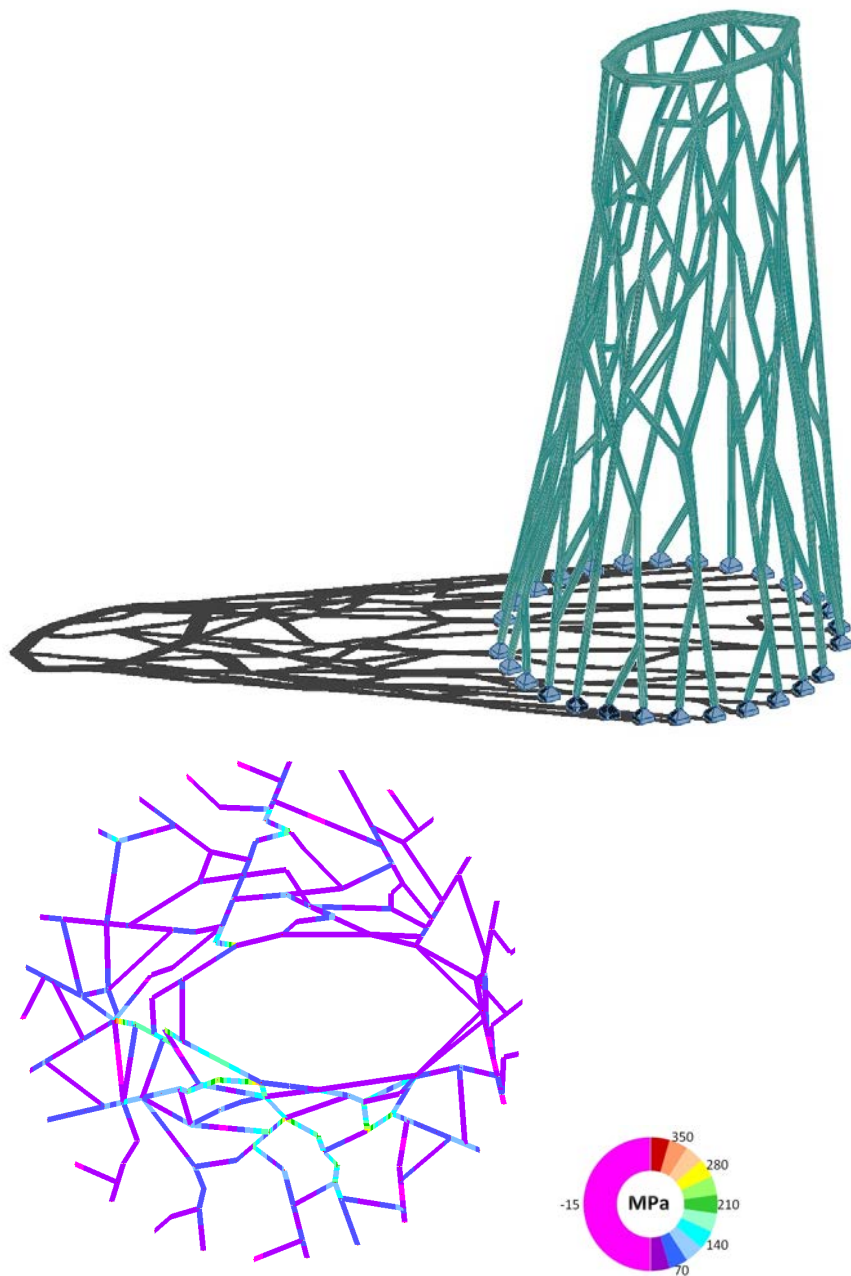


Rysunek 2.9: Metoda ściągania prętów

wszystkich stopni swobody), co pozwala zachować ciągłość rusztową całej struktury, poddanej modyfikacji. Na poszczególnych krawędziach wprowadzono więc, węzły tworząc graf liniowy na każdej z gałęzi podpory. W celu zmniejszenia długości wyboczeniowej przeprowadzono procedurę ściągnięcia węzłów dla sąsiednich krawędzi układu w założonych przedziałach odległości pomiędzy węzłami w przestrzeni. Procedura ma charakter dyskretny z arbitralnie przyjętymi granicami przedziałów ściągania. Uzyskane efekty ściągania modelu w poszczególnych przedziałach zaprezentowano na rysunkach jako modele pośrednie i końcowe odpowiednich faz modyfikacji. W kolejnych krokach uzyskano przekształcenia struktury, która zmieniła się w nieregularną siatkę przestrzenną, złożoną z wydłużonych wielokątów wypukłych. Dla wyższego stopnia niż 3 węzły wielokątów nie tworzą figur płaskich (por. rys. 2.10).

W wyniku ściągnięcia węzłów zostały zdeformowane proste odcinki tworzące pręty. Powstały też załamania osi prętów oraz węzły wielokrotne stopnia wyższego niż 3. Duża dysproporcja dotyczy długości prostych odcinków prętów tworzących taką strukturę. Zdeformowaniu uległ także pierścień eliptyczny, zmniejszając stopień swojej dyskretyzacji, która stała się znacząco mniej regularna, także wskutek zmiany długości tworzących ją odcinków. Biorąc pod uwagę zmniejszenie ogólnej długości prętów i ich nieregularność przyjęto w modelu przekrój prętów i rur o średnicy 0,18m.

Nastąpiła znacząca różnica w dystrybucji obciążenia w poszczególnych obszarach układu prętowego. Generalnie doszło do wyrównania wyężenia prętów, ze względu na ich współpracę po wprowadzeniu węzłów łączących pręty powłoki. W stosunku do naprężeń z modelu wyjściowego wartości naprężeń wzrosły ponad dwukrotnie. Jednak należy wziąć pod uwagę mniejszą smukłość prętów rusztu, co znacząco wpływa na zmniejszenie wyboczenia przy szczegółowej analizie wyężenia konstrukcji, sta-



Rysunek 2.10: Model pośredni podpory jednowarstwowej z mapą naprężeń.



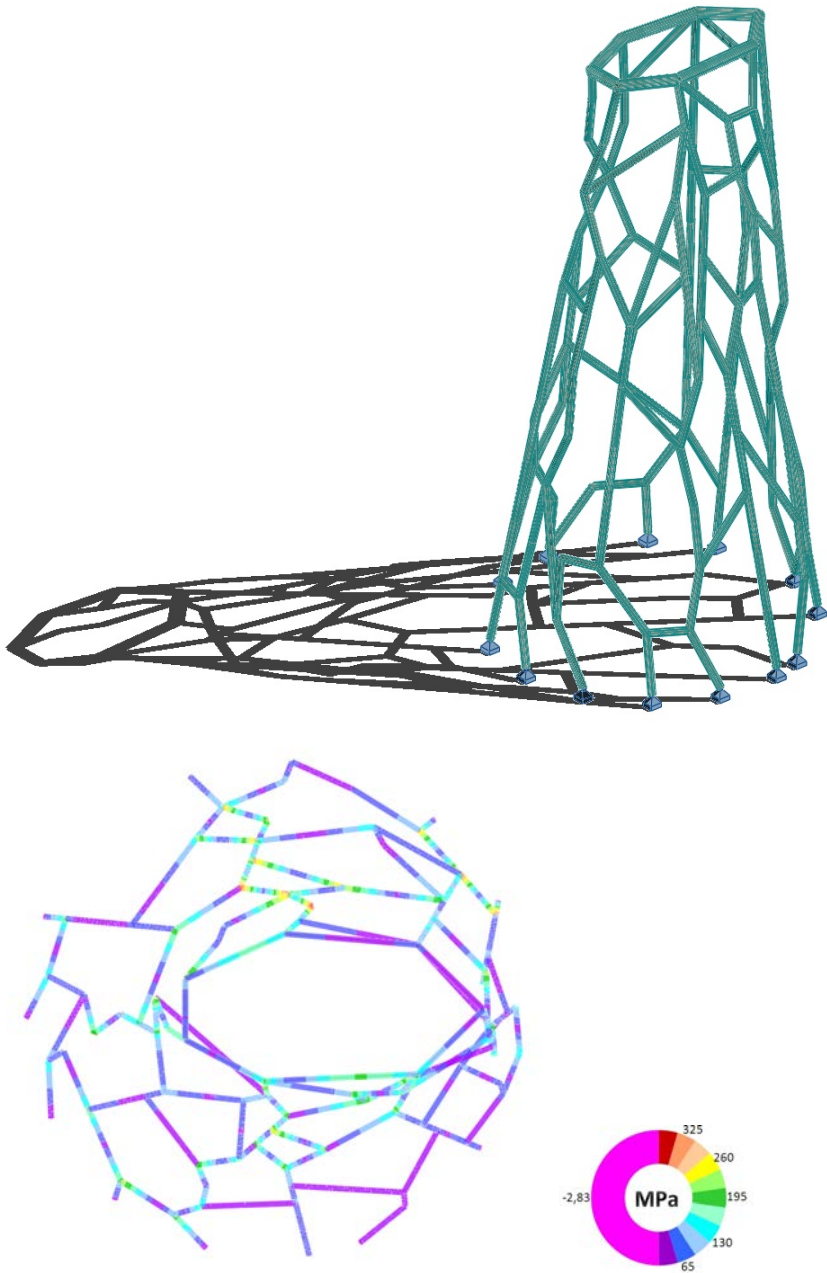
nowiącej etap projektowy, wykraczający poza przyjęty zakres niniejszych rozważań. W analizowanym rozkładzie naprężeń należy także zwrócić uwagę na lokalne ekstremalne wartości przy węzłach powłoki prętowej. W większości przypadków sytuacja taka powstaje w prętach załamanych w planie, pomiędzy węzłami, gdzie dochodzi większy wpływ zginania. Istotnym czynnikiem geometrycznym jest także kąt natężenia połączenia pręta z płaszczyzną węzła, gdzie przy dużych jego wartościach także dochodzi dodatkowe zginanie węzła. Korzystną własnością analizowanego układu jest zmniejszenie wyteżenia pierścienia górnego relatywnie do modelu wyjściowego. Jednocześnie występuje równomierny rozkład naprężeń na obwodzie pierścienia, zakłócony jedynie lokalnie pomiędzy połączeniami z prętami zakrzywionymi<sup>6</sup>.

Kolejna deformacja przeprowadzona na modelu podpory jednowarstwowej doprowadziła do dalszego „rozrzedzenia” struktury, to jest znacznego zmniejszenia gęstości siatki rusztu przestrzennego (por. rys. 2.11). Powstałe oczka siatki konstrukcji są nieregularne, chociaż w większości przypadków quasi-wypukłe, to jest wypukłe w rzucie na płaszczyznę aproksymującą planarność węzłów. Przy węzłach podporowych nastąpiła także redukcja prętów i pojedyncze przypadki załamania w planie osi pręta. Pierścień górny został zdeformowany do siedmiokąta.

Ze względu na zmianę kształtu siatki konstrukcyjnej zwiększono w modelu średnicę prętów do 0,20m. Przy małej gęstości siatki konstrukcyjnej trudno określić stan jej globalnego wyteżenia. Można jedynie podzielić obszary siatki na dwie grupy: o równomiernym i nierównomiernym wyteżeniu. Równomierne co do wartości naprężenia występują przy prętach o kierunkach zbliżonych do położenia pionowego, przenoszących obciążenie od górnego pierścienia do podpór dolnych, a także dolne odcinki tak ułożonych prętów, które w części górnej przejmują obciążenia z obszarów drugiego rodzaju. Geometryczne własności wyróżniające pręty w grupie nierównomiernego wyteżenia związane są, podobnie jak w modelu pośrednim, z załamaniami prętów i znacznymi wartościami kąta połączenia prętów z płaszczyzną węzłów. Analizowany rozkład naprężeń w prętach struktury pozwala wnioskować, że przy osiągniętym małym zagęszczeniu siatki konstrukcyjnej zanikają własności powłoki prętowej, charakterystyczne dla ramy przestrzennej na rzecz powrotu do wyjściowego modelu struktury pojedynczych prętów ściskanych.

---

<sup>6</sup> Wskazanie położenia ekstremalnych naprężeń w prętach struktur ma na celu ustalenie miejsc lokalnej modyfikacji układu geometrycznego oraz stanowi podstawę do oceny przydatności badanego modelu w procesie kształtowania konstrukcji.



Rysunek 2.11: Model końcowy podpory jednowarstwowej z mapą naprężeń (por. D3.1.).

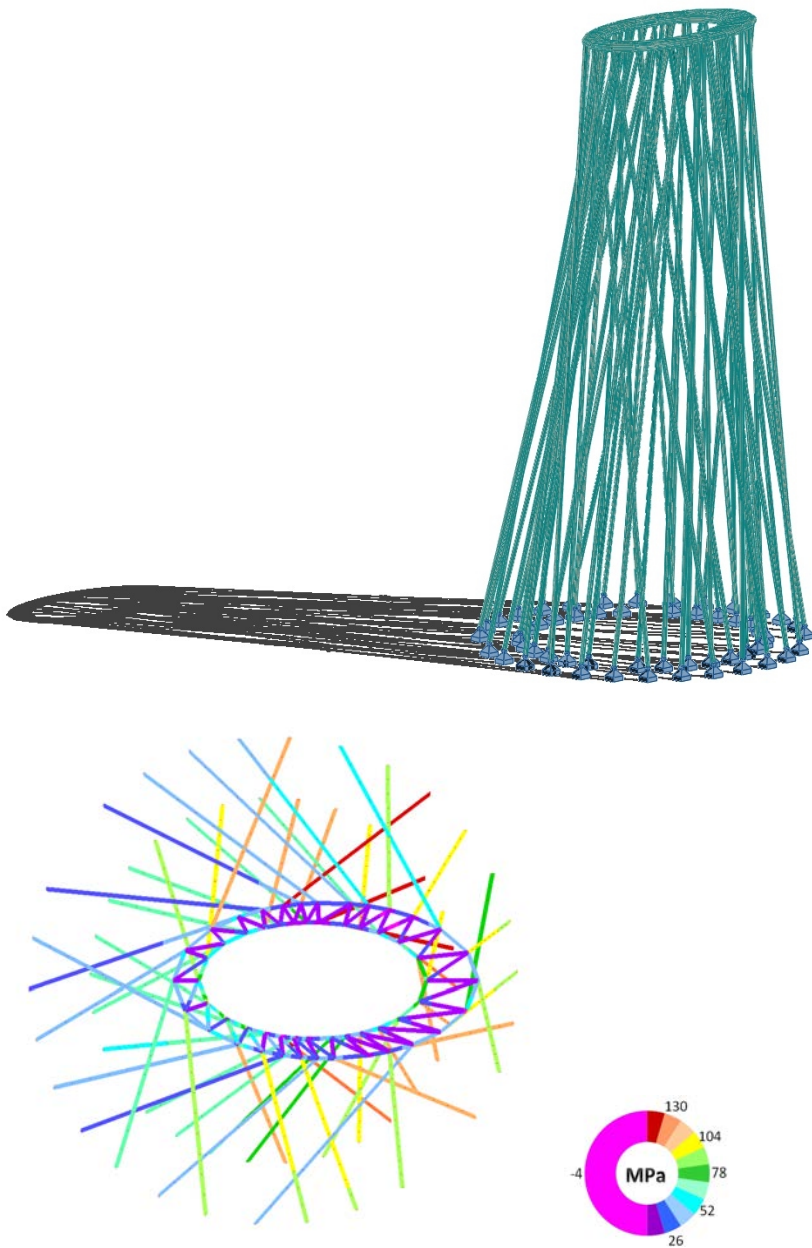
## 2.4 Dwuwarstwowe modele podpór prętowych

W przypadku kształtowania przestrzennych podpór prętowych dla zwiększonych obciążeń i gabarytów ustroju należy rozważyć generowanie siatek nieregularnych przy zwiększonej ilości prętów tworzących w modelu wyjściowym. Kolejnym argumentem przemawiającym za analizą takiego modelu jest obserwacja redukcji zagęszczenia siatki w przyjętej metodzie kształtowania, wykorzystującej własność ściągania, zapożyczoną z teorii grafów. Jedną z metod zagęszczenia prętów jest zwiększenie ilości rzędów (warstw prętów) w modelowanej strukturze<sup>7</sup>. W celu zachowania możliwości porównania osiągniętych wyników model podpory dwuwarstwowej zbudowano w oparciu o geometrię podpory jednowarstwowej, wprowadzając do niej drugą warstwę prętów, opartą na koncentrycznym okręgu podporowym i mimośrodkowo położonej elipsie pierścienia górnego podpory. W celu zachowania warunków sztywności dla eliptycznych pierścieni górnych wprowadzono pomiędzy nimi płaskie skratowanie prętowe. Zasadą założonej dwuwarstwowości układów prętowych jest brak prętów łączących zewnętrzne i wewnętrzne powłoki prętowe struktury. Dla zbudowanego modelu wirtualnego przeprowadzono uproszczoną analizę statyczno-wytrzymałościową przy założeniach jak dla modelu podpory jednowarstwowej. Otrzymany rozkład naprężeń w prętach wykazuje dużą niejednorodność, chociaż można w nim określić pewne tendencje. Mniejsze wartości naprężeń dotyczą prętów o większym nachyleniu, skierowanych w obszar większych odległości pomiędzy pierścieniami górnymi a dolnymi (mierzone w rzucie). W prętach ukośnych, skierowanych przeciwnie, do powyższej grupy, naprężenia w modelu osiągają wartości dwu- trzy-krotnie wyższe. W obszarze, gdzie pierścienie górne i dolne są zbliżone w rzucie, wartości naprężeń są do siebie zbliżone. Wyteżenie skratowanego pierścienia górnego, ze względu na jego dużą sztywność jest niewielkie. Można dostrzec pewną zasadę w wyteżeniu krzyżulców, które podlegają działaniu mniejszych naprężeń przy większej wysokości konstrukcyjnej pierścienia kratowego, co jest zgodne z zasadami pracy kratownic płaskich.

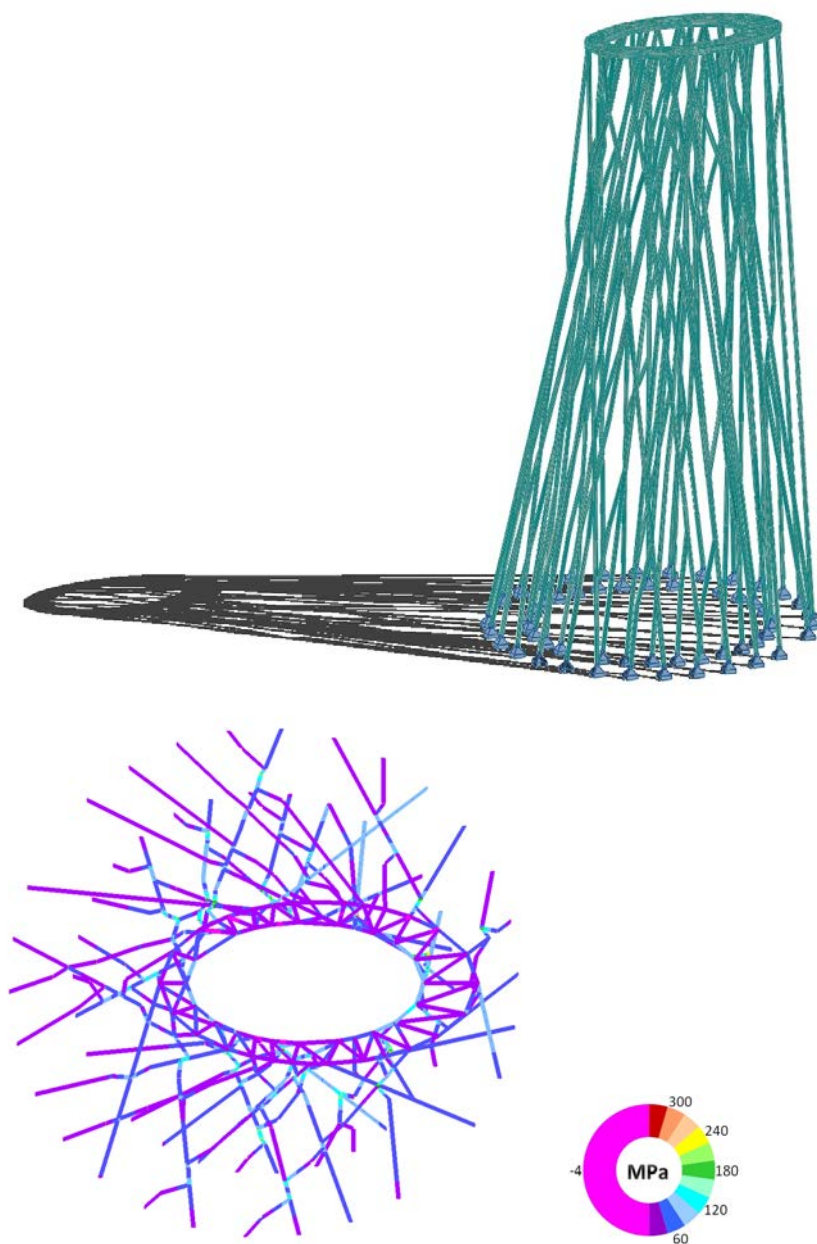
Operacja ściągania węzłów w prętach podpory dwuwarstwowej w fazie pośredniej zachowuje w dużej mierze wstępną kierunkowość układu. W widoku bocznym konstrukcji na rys. 2.13 zmiany wywołane transformacją są niewielkie. Doszło do powstania przecięć prętów w obu war-

---

<sup>7</sup> Wielowarstwowość rusztu wpływa też na zwiększenie sztywności powłoki prętowej, co może mieć znaczenie w analizie wybojczy konstrukcji.



Rysunek 2.12: Model wyjściowy podpory dwuwarstwowej z mapą naprężeń.



Rysunek 2.13: Model pośredni podpory dwuwarstwowej z mapą naprężeń.

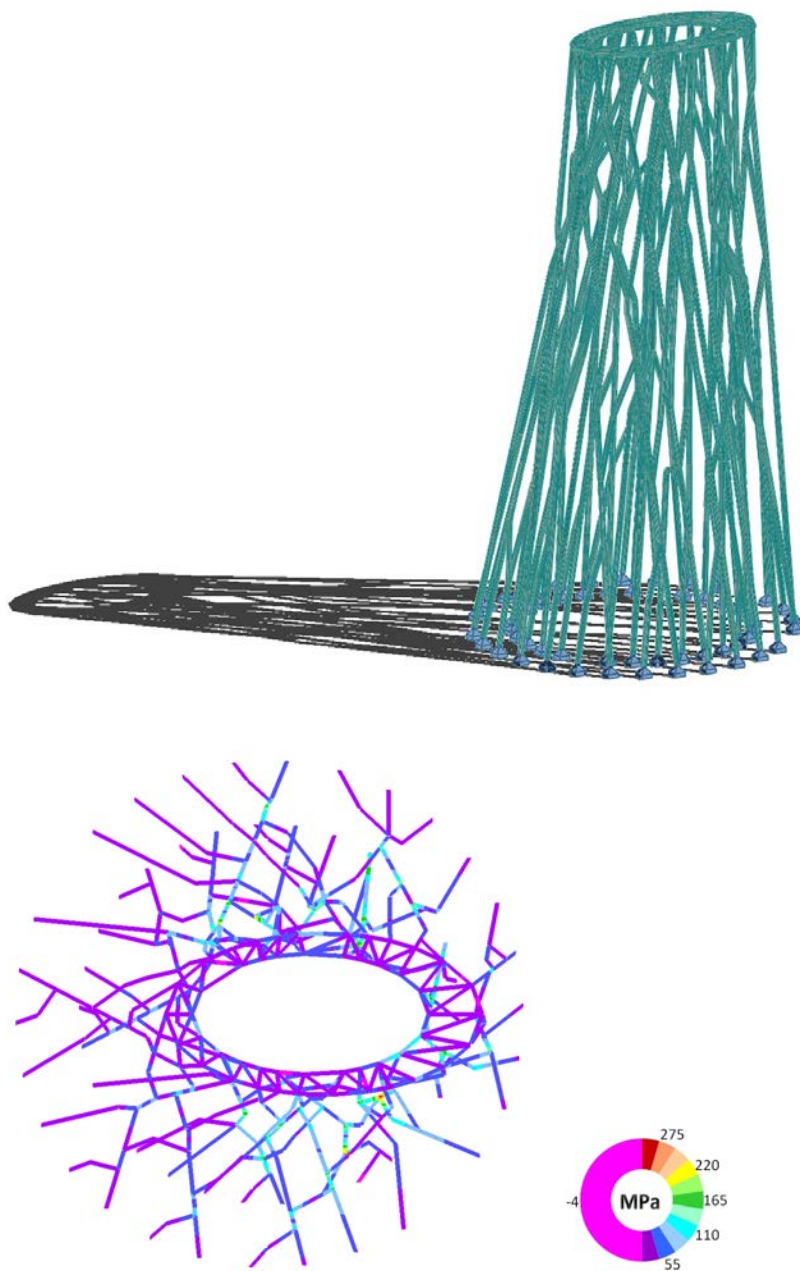
stwach z nielicznymi połączeniami pomiędzy warstwami. Redukcja ilości prętów nie jest znacząca dla sztywności układu. W wyniku dokładnej analizy geometrii modelu można zauważyć powstałe podłużne pola wielokątne oraz dodatkowe załamania osi prętów w planie. W wyniku redukcji zmniejszyła się także ilość podpór, przy zachowaniu ich położenia na linii koncentrycznych okręgów. Ze względu na duże zagęszczenie prętów przyjęto ich przekrój o średnicy 0,10m.

W układzie naprężeń model pośredni struktury wykazuje dużą jednorodność wartości. Lokalne znaczne zwiększenia wartości naprężeń występują w prętach, które stanowią formę „pni przejściowych” zbierających obciążenie z gałęzi górnych i opartych na rozbudowanych „korzeniach” schodzących do podpór struktury. Pręty te są swoistymi przewężeniami na trasach przepływu sił. Można je traktować jak fundamentalny zbiór rozcięć w lesie spinającym graf, którym jest badany układ prętowy. Wyteżenie prętowych przewężeń struktury jest większe, jeżeli pręt zbiera obciążenie z prętów pochodzących z obu warstw rusztu przestrzennego. Ogólnie duża sztywność przestrzenna struktury zapewnia niewielkie, równomierne wyteżenie prętów w płaskiej kratownicy górnego pierścienia.

W ostatniej fazie deformacji uzyskano efekt znacznego rozkrzewienia kształtu prętów podpory (por. rys. 2.14). Widoczne jest zmniejszenie gęstości prętów w stosunku do poprzedniej fazy badania modelu. Zwiększyła się też ilość prętów o kierunkach znacznie odbiegających od pionu, jednocześnie pełniących rolę przewiązania pierwotnie ukształtowanych dwóch warstw prętowych. Pod pierścieniem górnym występuje pewna ilość krótkich gałęzi pochodzących z obu warstw spiętych jednym węzłem. Na wysokości struktury występują oczka trójkątne w położeniu zbliżonym do poziomego, znacznie zwiększające lokalnie sztywność układu prętowego.

Wskutek znacznej deformacji geometrycznej układu doszło do pojawienia się dużych wartości naprężeń w prętach przy węzłach ustroju. Pręty te są zlokalizowane w górnej połowie podpory w układach zbieżnych opisanych powyżej dla zmian geometrycznych. Ponadto większe wyteżenie dotyczy prętów-przewężeń w strukturze oraz odcinków prętów przy załamaniach osi. Relatywnie mała deformacja dolnych części rusztu umożliwia równomierną dystrybucję obciążenia na podpory przegubowe struktury.

Lokalnie występujące nadmierne wyteżenia prętów zdeformowanej struktury mogą zostać odciążone przez dodanie pojedynczych prętów pomiędzy istniejącymi węzłami. Węzły te, zasadniczo różne od węzłów, do których dochodzą pręty przeciążone, powinny być tak dobrane, aby



Rysunek 2.14: Model końcowy podpory dwuwarstwowej z mapą naprężeń (por. D3.2.).

utworzyć lokalny układ bryłowy, z przewagą prętów o ukierunkowaniu możliwie zbliżonym do pionowego. Tak zdefiniowane nowe, boczne gałęzie wpływają na zmniejszenie wyężenia przeciążonych prętów. Analogicznie, w obszarach, gdzie wyężenie prętów jest małe, można wprowadzać dalsze zmniejszenie zagęszczenia siatki, usuwając pręty o dużym odchyleniu od pionu jednocześnie leżące w płaszczyznach, na których zagęszczenie prętów sąsiednich jest relatywnie duże<sup>8</sup>.

Zastosowana metoda ściągania węzłów sąsiednich w procesie poszukiwania nieregularnych siatek konstrukcyjnych prowadzi do interesujących efektów w przypadku pewnych grup prętowych układów regularnych.

## 2.5 Jednowarstwowe powłoki sferyczne

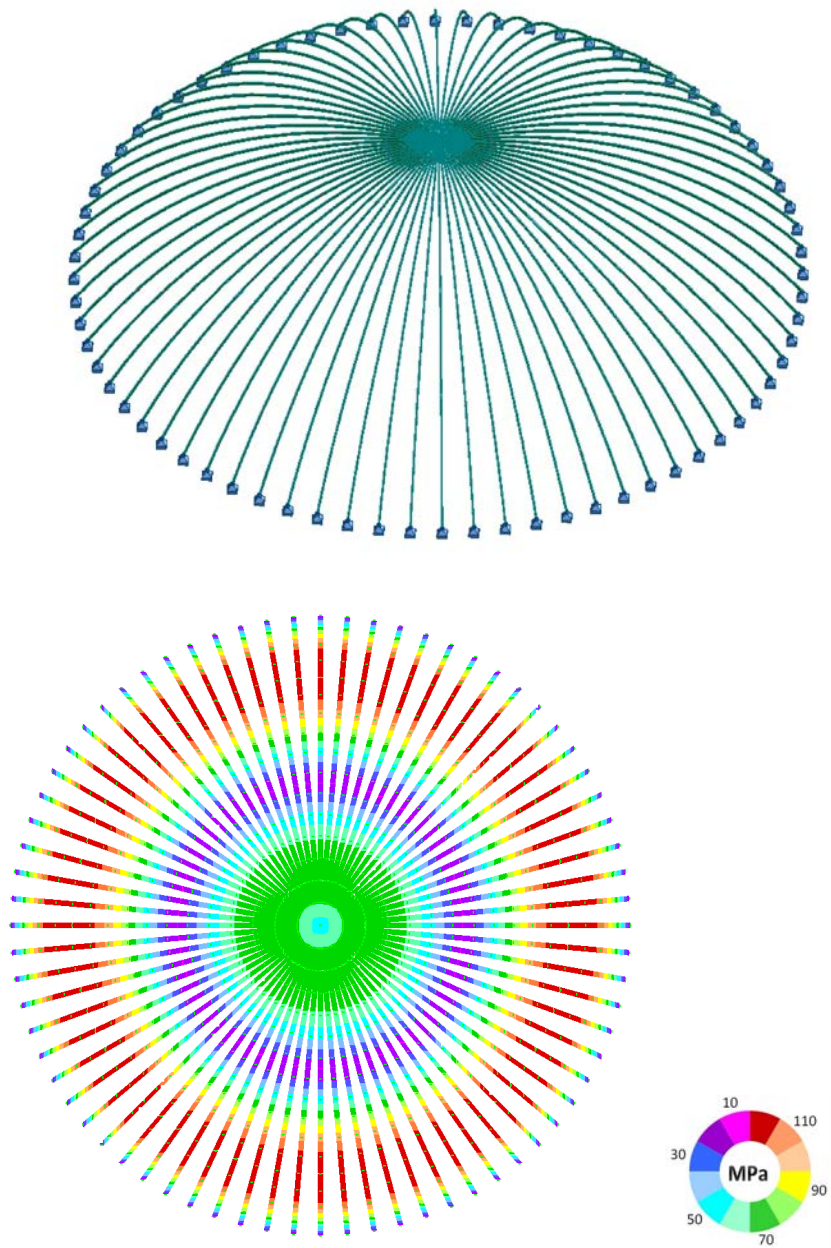
Kolejną grupą powłok prętowych, znajdującą zastosowanie w przykryciach obiektów nietypowych, o dużych rozpiętościach są oparte na pierścieniu obwodowym powłoki sferyczne. Dla regularnych układów prętowych tradycja tego rodzaju konstrukcji sięga dziewiętnastowiecznych kopuł Schwedlera, przez nowsze rozwiązania Kiewitta i współczesne układy kopuł geodezyjnych, uzyskanych z regularnych podziałów powierzchni sferycznej.

Modelem wyjściowym, poddanym dalszym transformacjom jest klasyczna powłoka sferyczna, żebrowa, w układzie osiowo-symetrycznym<sup>9</sup> (por. rys. 2.15). W rozważaniach pominięto problemy o charakterze technologicznym związane z połączeniem łuków w zworniku oraz z ich podparciem przegubowym na obwodzie, co może mieć wpływ na geometrię powłoki. Jedynie w ostatnim modelu (przedstawionym na zamieszczonym dalej rysunku 2.20) uwzględniono pierścień górny, tworzący układ rusztowy z opartymi na nim łukami. Dla celów obliczeniowych przyjęto wartości podstawowych cech geometrycznych układu prętowego. Średnica powłoki wynosi 60m, a jej wysokość to 15m, rozstaw koncentrycznych żeber po obwodzie wynika z kąta  $4,5^\circ$  pomiędzy żebrami, co daje wartość 2,36m. W praktyce zwornikowy punkt zbieżności żeber powinien być zastąpiony pierścieniem o średnicy umożliwiającej technologiczne wykonanie połączeń żeber, jednak dla celów modelowania pozostawiono przedstawione na rysunku uproszczenie geometryczne.

<sup>8</sup>Przy dalszej modyfikacji struktur mogą znaleźć zastosowanie metody opisane w rozdziale piątym.

<sup>9</sup>Ten rodzaj konstrukcji oparty na łukach kołowych znalazł szerokie zastosowanie we wszystkich technologiach konstrukcji zarówno żelbetowych, stalowych jak również drewnianych.





Rysunek 2.15: Model wyjściowy sferycznej powłoki prętowej z mapą naprężeń.

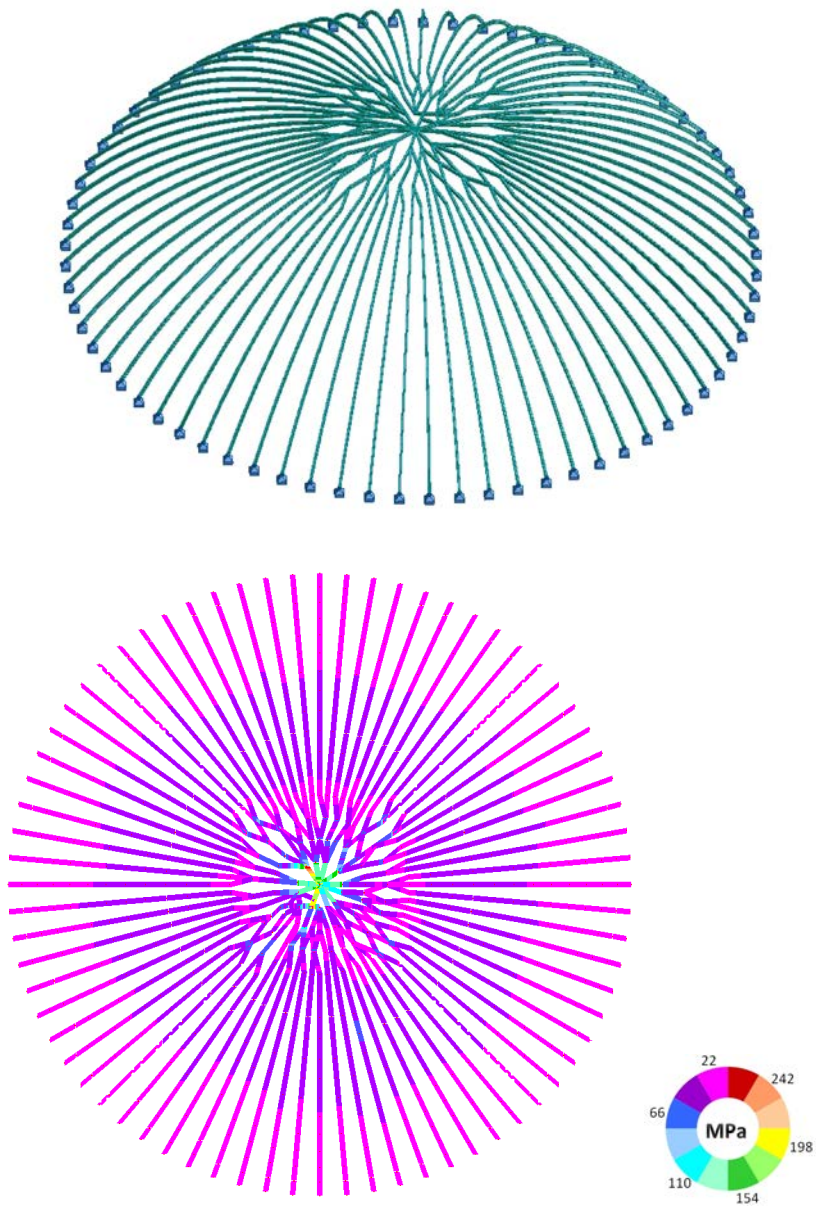
Obciążenie modelu przyjęto jako jednostkowe, o kierunku pionowym, rzutowane na powierzchnię przykrycia. Żebra o przekroju rury prostokątnej mają wymiar  $0,1 \times 0,2 \text{ m}$ . Podparcie prętów na obwodzie ma charakter przegubu nieprzesuwnego, co realizuje zasadę sztywnego pierścienia obwodowego. Podobnie do cech geometrycznych rozkład naprężeń w żebrawach powłoki jest identyczny. Ze względu na zwiększający się rozstaw żebrowy w kierunku podparcia obwodowego, naprężenia zwiększają się do wartości ekstremalnych, żeby przy samej podporze osiągnąć małe wartości, ze względu na założony przegubowy schemat podparcia łuków.

Stosując w pierwszej fazie przekształcania modelu metodę ściągnięcia węzłów grafu struktury uzyskano deformację geometrii w środkowej części powłoki prętowej (por. rys. 2.16). Proces ściągnięcia prowadzono na ciągu odległości pomiędzy węzłami o gradacji  $0,1 \text{ m}$ , generując dla poszczególnych przedziałów ściągnięcia cztery fazy pośrednie. Każde żebro zostało podzielone na 16 odcinków między-węzłowych. Modyfikacja części zwornikowej spowodowała zmniejszenie zagęszczenia prętów w tej strefie. Powstały też nieregularne układy oczek wielokątnych, z przewagą oczek czworokątnych. Połączenie z niezdeformowaną częścią łuków przyjęło formę rozgałęzień drugiego i trzeciego rzędu. Zwornik łączy po deformacji tylko 10 prętów z liczby 80 prętów w modelu wyjściowym.

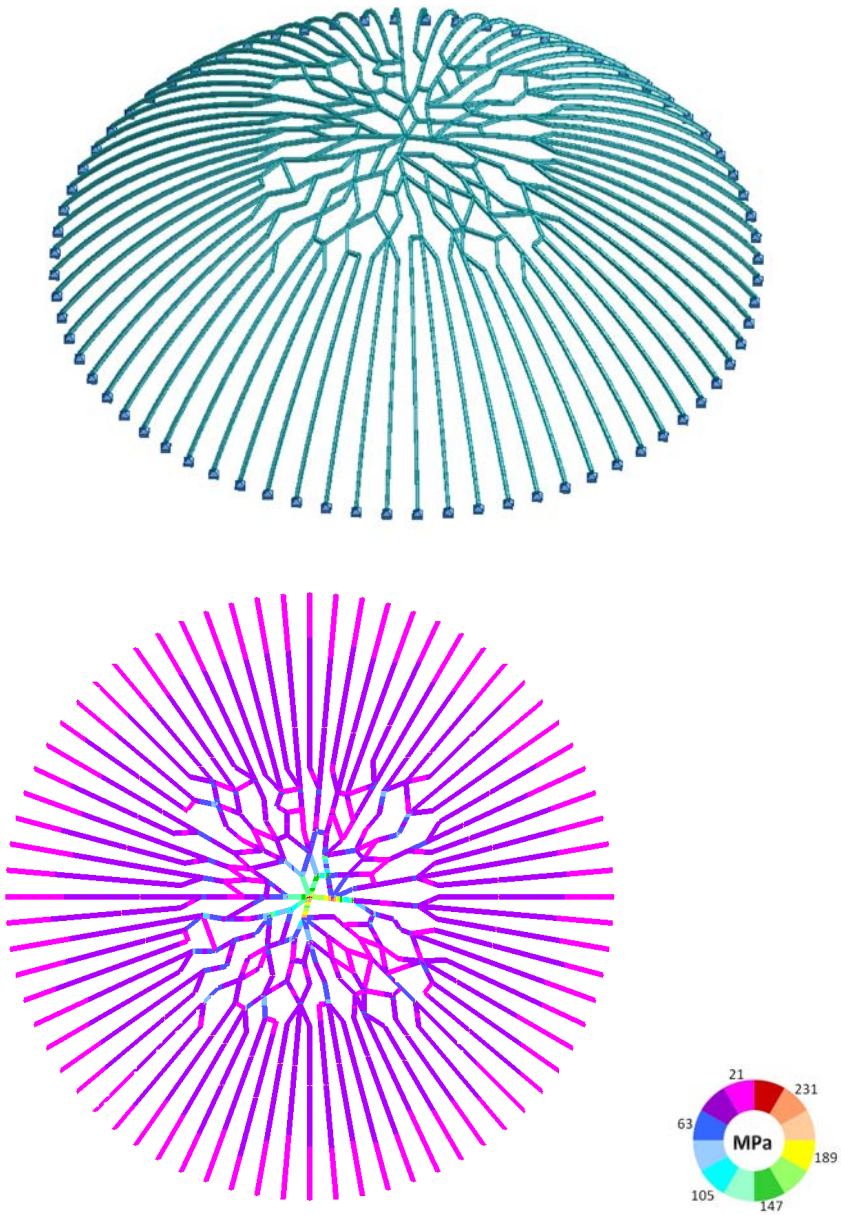
Przy zwiększonym przekroju elementów do wymiarów  $0,15 \times 0,3 \text{ m}$  redystrybucja naprężeń objęła obszar środkowy układu. Największe wartości naprężeń występują w prętach zwornikowych, tam gdzie doszło do ich rozrzedzenia kąтового, któremu towarzyszy wielostopniowe rozgałęzienie w kierunku niezdeformowanych łuków. Wystąpiły też cztery szczeliny od punktu zwornikowego do obwodu układu. Na długości szczelin nie występuje skratowanie prętów. Pręty krawędziowe szczelin przy zworniku powłoki poddane zostały naprężeniom ekstremalnym w badanym układzie. Najlepsza propagacja obciążenia wystąpiła w przecinających się układach rusztowych o oczkach czworokątnych, wydłużonych po osi żebrowej. Na obszarach tych, w części zdeformowanej rozkład naprężeń w prętach jest równomierny.

Deformacja powłoki prętowej w drugiej fazie badania modelu osiągnęła połowę rozpiętości łuków (por. rys. 2.17). Zdeformowana powierzchnia rusztowa zachowała swój pierwotny, sferyczny kształt, co jest istotną własnością dla rozwiązania pokrycia powłoki. Wprawdzie wielokąty siatki o stopniu wyższym niż 3 nie są płaskie, ale systemy pokrycia mogą kompensować pewne imperfekcje geometryczne w punktach połączeń z konstrukcją nośną<sup>10</sup>. Przeważająca ilość oczek siatki ma kształt wypu-

<sup>10</sup>Poszczególne fazy deformacji modelu mogą stanowić formę docelową konstrukcji.



Rysunek 2.16: Model pierwszej fazy deformacji powłoki prętowej z mapą naprężeń.



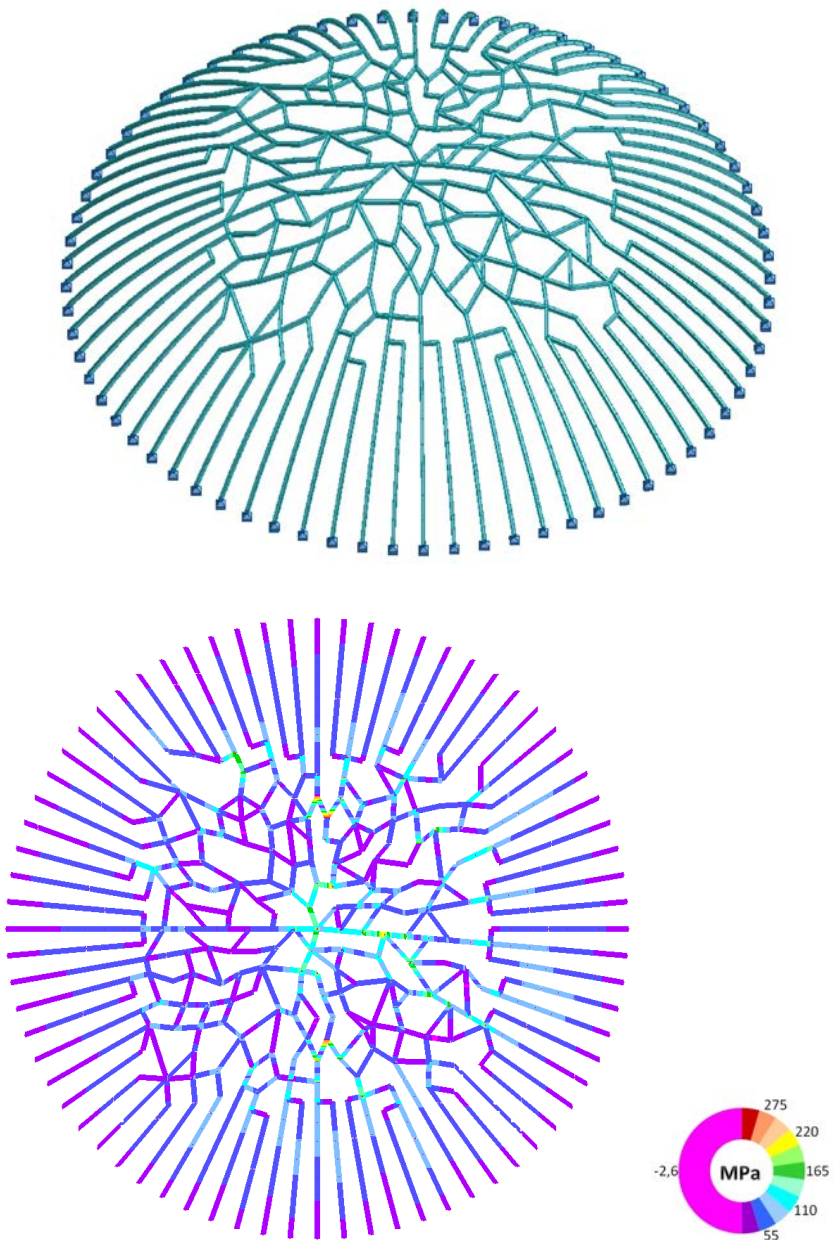
Rysunek 2.17: Model drugiej fazy deformacji powłoki prętowej z mapą naprężeń.

kły, jednak dla kilku przypadków wydłużonych wielokątów i wielokątów otwartych na szczeliny pomiędzy żebrami niezdeformowanymi występują pojedyncze wierzchołki przy krawędziach wklęsłych. Ilość prętów zbieżnych w węźle zwornikowym uległa redukcji do sześciu, przy utworzeniu układu kątów ostrych (poza jednym kątem rozwartym).

Ze względu na koncentracje naprężeń zwiększono przekrój prętów do 0,25x0,35m. Obszar ekstremalnego wyężenia prętów w zasadzie dotyczy krawędzi kąta rozwartego w układzie zwornikowym. Wyężenie pozostałych prętów przy zworniku jest zdecydowanie mniejsze. Następnym obszarem relatywnego zwiększenia naprężeń w prętach jest strefa połączenia układu zdeformowanego z żebrami zachowującymi pierwotny kształt. Przy połączeniach prętów występują rozgałęzienia dwu- i trzystopniowe. Jeśli któreś z nich mają ukierunkowanie odwrotne (rozgałęzienia występują po stronie rusztu), wtedy zwiększone naprężenia występują na końcach prętów żeber niezdeformowanych. W świetle przeanalizowanego układu naprężeń można dojść do wniosku, że przy zastosowaniu przekroju prętów jak w fazie pierwszej badanego modelu (0,15x0,30m) przekroczenie naprężeń w modelu fazy drugiej dotyczyłoby tylko nielicznej grupy prętów w obszarze przy zworniku i końcach prętów przy połączeniu z układem żeber niezdeformowanych.

Deformacja modelu w trzeciej fazie charakteryzuje się powstaniem w części środkowej rzutu nieregularnej siatki prętowej, która nie wykazuje tendencji kierunkowych, zgodnych z układem żeber wyjściowych (por. rys. 2.18). Jedynym wyjątkiem jest układ dwóch żeber w położeniu średnicowym, do którego obustronnie zostały nadbudowane nieregularne oczka siatki. Istotną różnicą w stosunku do fazy drugiej jest likwidacja głębokich szczelin pomiędzy żebrami. W fazie trzeciej szczeliny kończą się na początku obszaru deformacji. W ten sposób został wygenerowany układ hybrydowy rusztu nieregularnego, opartego na pozostałych łukach żeber w układzie radialnym. Rozgałęzienie prętów łączących ruszt z żebrami następuje z przewagą rozgałęzień dwustopniowych, gdzie jedno z żeber połączone jest poprzeczką prostopadłą do węzła w stosunku do pręta łączonego z drugim żebrzem współliniowo. Podobny schemat występuje obustronnie dla rozgałęzień trójstopniowych. W węźle zwornikowym łączy się 5 prętów, w tym dwa żebra pierwotne. Analizę statyczno-wytrzymałościową przeprowadzono dla przekroju prętów jak w fazie drugiej (0,25x0,35m).

Badany układ wykazuje w miarę jednorodny rozkład naprężeń w prętach struktury. Lokalne ekstremalne wartości naprężeń w pobliżu połączenia pręta z węźłem można zaobserwować w dwóch węzłach usytuowanych po obu stronach linii układu dwóch ciągłych żeber pierwotnych.



Rysunek 2.18: Model trzeciej fazy deformacji powłoki prętowej z mapą naprężeń.

Węzły zbudowane są w ten sposób, że od strony środka struktury dochodzi do nich pojedynczy pręt załamany, zaś wychodzą z niego w stronę obwodu dwa pręty w układzie „V”. W obu przypadkach węzły są elementami zamykającymi głęboką szczelinę, biegnącą do obwodu struktury. Jednocześnie ścieżka łącząca te węzły z węzłem zwornikowym jest linią łamaną o dużych wartościach kąta załamania. Węzły rusztu w modelu nadal znajdują się na powierzchni sferycznej, co przy stosunkowo krótkich odcinkach prętów budujących ruszt wpływa na zachowanie kształtu powierzchni przy skomplikowanym układzie jej dyskretyzacji.

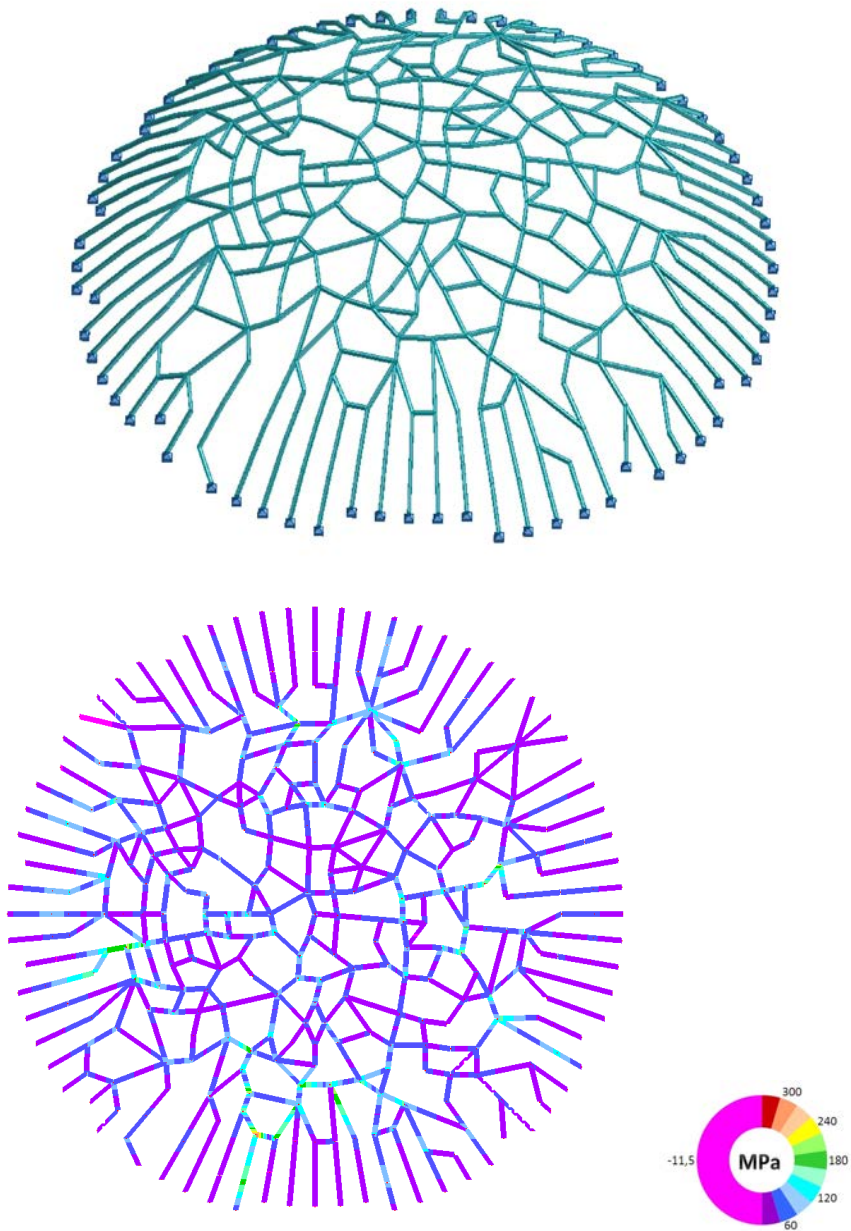
W czwartej fazie deformacja osiągnęła lokalnie punkty obwodowe, w których pierwotne żebra łukowe zostały podparte<sup>11</sup>. Wystąpiły przesunięcia przestrzenne węzłów podporowych całej powłoki (por. rys. 2.19). Jeden punkt podporowy został zupełnie zredukowany, a pręt uprzednio w nim podparty, poprzez wprowadzone załamanie, został oparty na sąsiedniej podporze. W części środkowej doszło do przerwania ciągłości układu dwóch żeber pierwotnych, występujących jeszcze w trzeciej fazie. W ruszcie pojawiły się dłuższe ścieżki prętowe o kształcie zbliżonym do ciągłego (bez wyraźnych załamań). Położenie tych ścieżek można określić jako zbliżone do równoleżnikowego, w przeciwieństwie do południkowego układu struktury wyjściowej. W strefie połączenia układu rusztowego z resztkami żeber pierwotnych powstały pojedyncze węzły wyższych stopni (6 i 8), skupiające pręty zarówno rusztu, jak i połączeń żeber.

W układzie naprężeń w prętach struktury w czwartej fazie pojawiły się duże nieregularności. Niemal na całym obszarze rusztu struktury pojawiły się odcinki prętów o zwiększonym wyężeniu. Lokalne ekstremalne naprężenia przy węzłach mające głównie miejsce na ścieżkach prętowych zbliżonych do położenia równoleżnikowego, dotyczą w większości węzłów trójstopniowych w układzie „Y”, a także przy załamaniach prętów leżących na ścieżce. Ze względu na duży stopień deformacji geometrycznej struktury, rozkład naprężeń w pozostałych odcinkach żeber pierwotnych jest podobnie nierównomierny. Chociaż w tym zakresie nie występują naprężenia ekstremalne, to jednak zwiększone naprężenia dotyczą przede wszystkim odcinków pojedynczych żeber, stanowiących kontynuację wyżej opisanych ścieżek w części rusztowej struktury. W węźle zwornikowym łączą się tylko trzy pręty o średnich wartościach naprężeń w nich działających.

W końcowej fazie deformacji powstała w całości nieregularna siatka prętowa dyskretyzowana na powierzchni sferycznej (por. rys. 2.20). Pa-

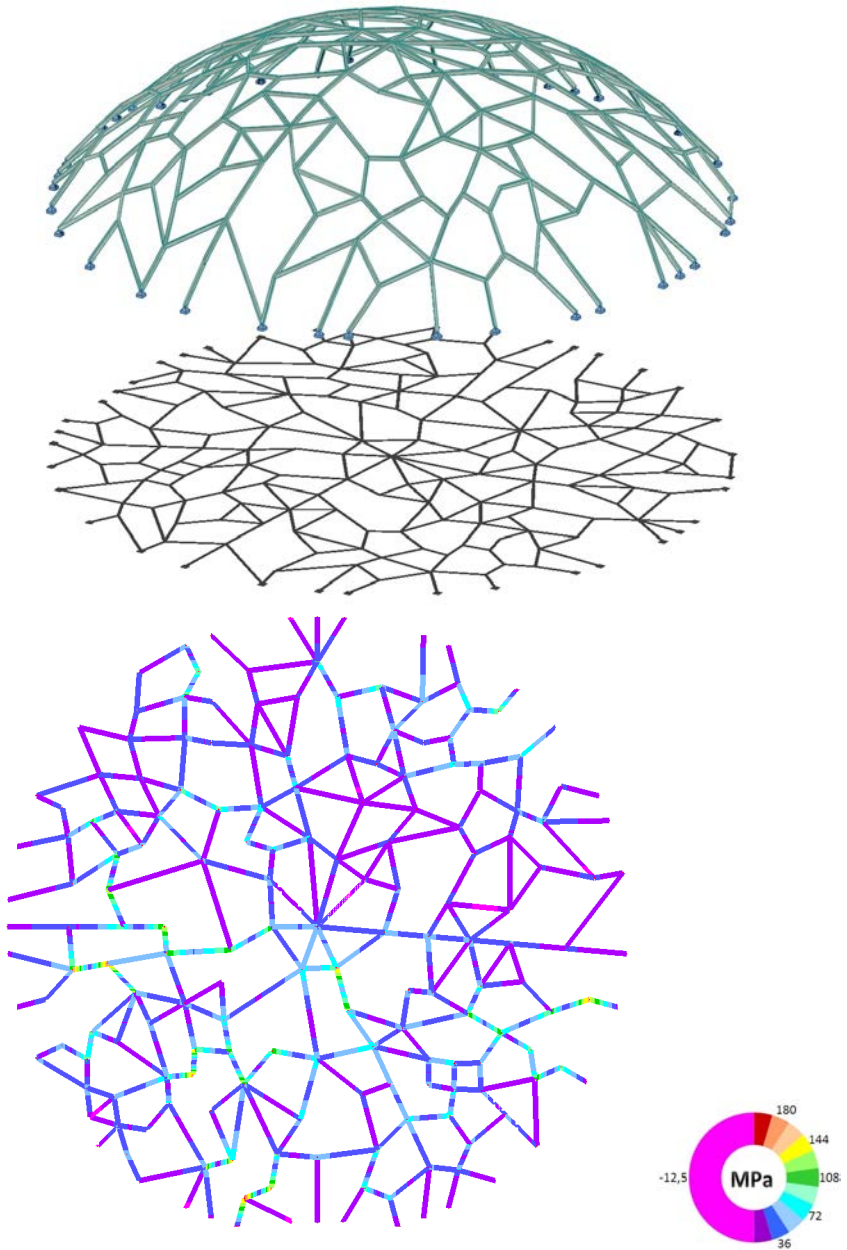
<sup>11</sup>Dodatkowym efektem zastąpienia układu żeberowego przez system rusztowy jest zmniejszenie wartości sił rozciągających w pasie pierścienia podporowego, co ułatwia rozwiązanie techniczne podpór struktury.





Rysunek 2.19: Model czwartej fazy deformacji powłoki prętowej z mapą naprężeń.





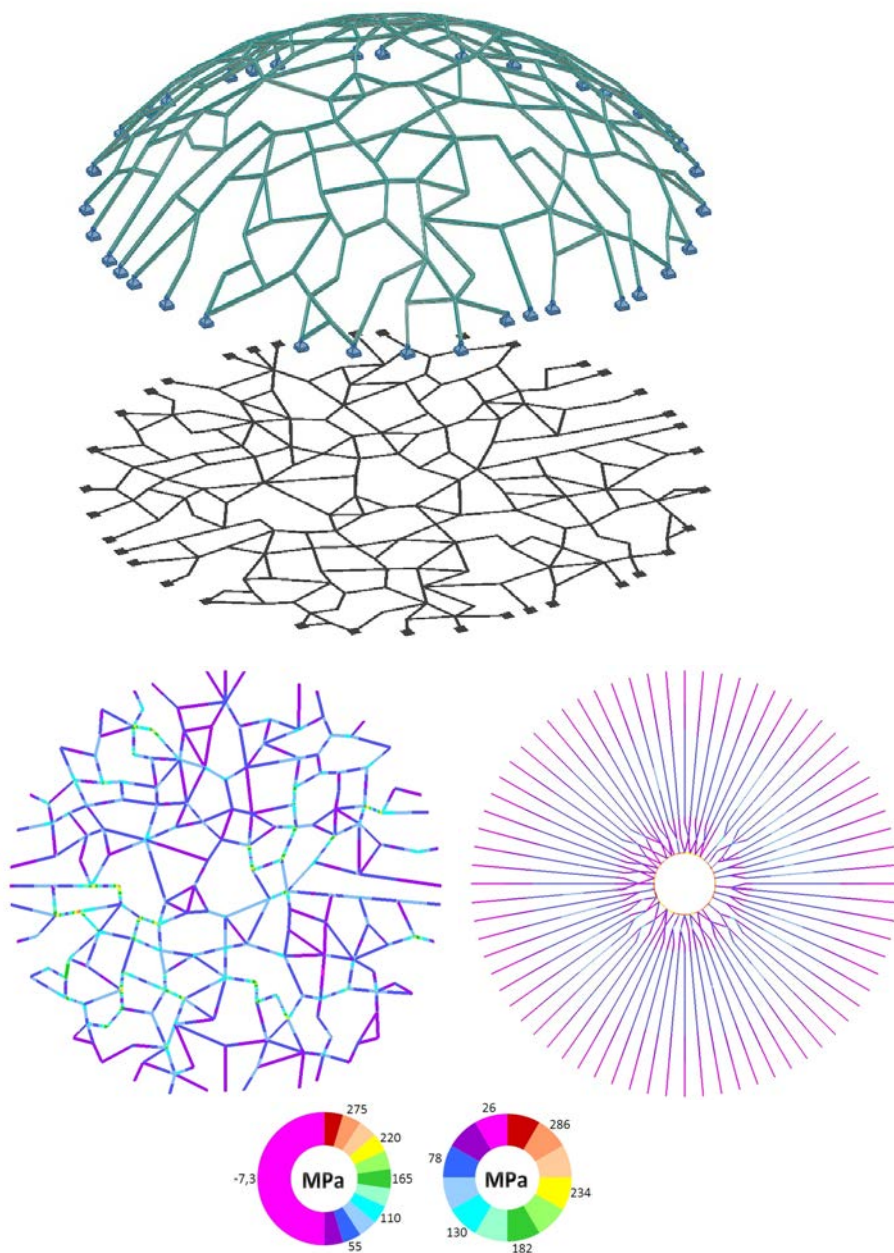
Rysunek 2.20: Model końcowy powłoki prętowej z cieniem i mapą naprężeń (por. D3.3.).

radoksalnym reliktem układu wyjściowego żeber lukowych jest jeden łuk odtworzony po zerwaniu jego ciągłości w czwartej fazie. Podobnie został odtworzony węzeł zwornikowy, łączący w tej fazie 8 prętów. Generalnie jednak układ nie odzwierciedla cech pierwotnej regularności. W sąsiedztwie węzła zwornikowego powstał układ z węzłem centralnym siedmiostopniowym o zbliżonych wartościach kątów środkowych pomiędzy prętami. Większość wielokątnych oczek siatki jest wypukła. W strefie podporowej rusztu parę wielokątów jest wklęsłych. Występują wielokąty stopnia trzeciego (trójkąty) czwartego, piątego i szóstego bez widocznej, ilościowej przewagi jednego z wyliczonych typów. Na zdeformowanym obwodzie rusztu zostały utworzone wielokąty otwarte o zróżnicowanych kształtach. Wskutek redukcji znaczącej liczby podpór, rozkład punktów podparcia w rzucie nie jest jednostajny. Przeważają węzły podporowe z jednym prętem, chociaż występują też podpory dwuprętowe.

Zwiększone wyteżenie obejmuje w równomiernym rozkładzie cały obszar struktury. Ekstremalne wartości naprężeń działają przy węzłach ścieżek, które biegnąc w miarę liniowo od węzła zwornikowego, nie znajdują kontynuacji w drodze do punktu podparcia na skutek gwałtownego zalamania w układzie prętów.

Uzyskana w badanym procesie deformacji siatka konstrukcyjna wykazuje wyraźne cechy nieregularności geometrycznej, graficznej, a także konstrukcyjnej mierzonej rozkładem naprężeń w prętach struktury. Lokalne ekstremalne wartości naprężeń mogą być zredukowane poprzez arbitralną korektę układu prętów, polegającą na dodaniu pojedynczych prętów do sąsiednich węzłów, obciążonych prętami o ekstremalnym wyteżeniu. W widoku modelu końcowego naniesiono cień prostopadły, tworzący w rzucie grafowy obraz siatki uzyskanej w procesie deformacji struktury wyjściowej.

Biorąc pod uwagę wyniki badań modelu żebrowej powłoki prętowej, zbieżnej w punkcie zwornikowym, przeprowadzono analogiczne badania modelu z centralnym pierścieniem, korzystnym dla technologii realizacji takiego ustroju konstrukcyjnego (por. rys. 2.21). Podobnie jak w powyżej badanym modelu, uzyskano siatkę konstrukcyjną, nieregularną o podobnym stopniu nasycenia powierzchni prętami. Lokalnie występują też podobne w obu modelach konfiguracje prętowe, obejmujące kilka sąsiednich oczek struktury. W zdeformowanej powłoce z otworem centralnym występuje też podobny rozkład ilościowy i jakościowy wielokątów wypukłych siatki. Jednak jeżeli przeanalizujemy wielokąty wklęsłe, to ich ilość jest znacząco większa. W tej liczbie występują także wielokąty stopnia niższego niż 8. W fazie końcowej generacji siatki modelu uzyskano ponadto kilka wklęsłych wielokątów otwartych w stosunku do brzegu struktury.



Rysunek 2.21: Model zdeformowanej powłoki prętowej z otworem środkowym w fazie pierwszej i końcowej z mapami naprężeń w fazie pierwszej i końcowej (por. D3.4.).

Powstały w części środkowej wielokąt wklęsły jest pozostałością zdeformowanego pierścienia struktury pierwotnej.

Wyężenie ogólne prętów struktury jest podobne do modelu bez pierścienia środkowego, jednak liczba węzłów, przy których występują lokalne ekstremalne naprężenia w prętach, jest znacząco większa. Węzły te związane są z załamaniami prętów, tworzących wielokąty wklęsłe, połączeniami prętów o układzie „Y” oraz pojedynczymi mostami łączącymi ruszt z prętami podporowymi. W wyniku analizy porównawczej obu badanych modeli należy stwierdzić, że własności konstrukcyjne powłoki prętowej powstałej przez deformację układu żeber zbieżnych zwornikowo są lepsze niż powłoki zbudowanej z pierścieniem środkowym.

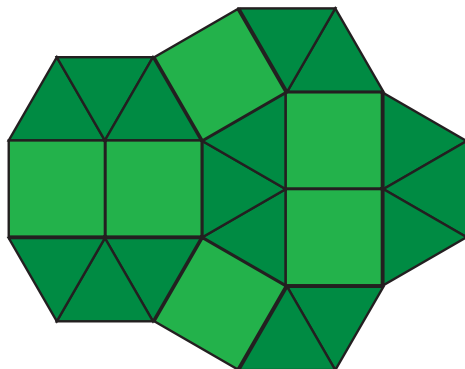
Przedstawiona metoda deformacji siatki struktury z wykorzystaniem operacji dla grafów płaskich, polegająca głównie na ściągnięciu węzłów układu, może być arbitralnie modyfikowana w każdym kroku iteracyjnym modelowania, poprzez dodawanie lub usuwanie prętów i węzłów konstrukcji. Przy wprowadzeniu modyfikacji można kierować się różnymi kryteriami decyzyjnymi. Oprócz omówionych podczas analizy modeli kryteriów konstrukcyjnych można wprowadzać do procesu modyfikacji układu prętów wynikające z aspektów estetycznych, technologicznych oraz funkcjonalnych. Modyfikacja modelu może mieć także charakter losowy, polegający na usuwaniu lub dodawaniu prętów w losowo wybranych węzłach.

## Rozdział 3

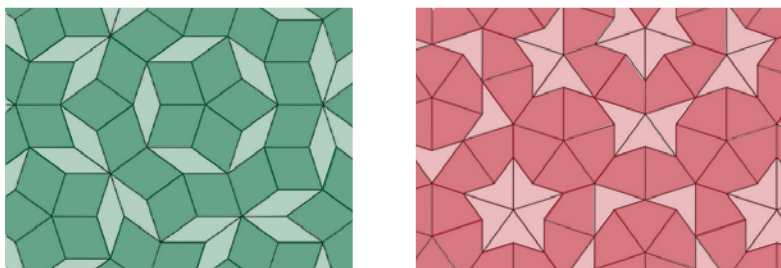
# Aperiodyczna tesselacja powierzchni w kształtowaniu siatek nieregularnych

### 3.1 Zasady tesselacji

Siatki konstrukcyjne, tworzone z układów osi (reprezentujące proste na płaszczyźnie) charakteryzuje pewna modułowość wynikająca z kształtów oczek. Ta cecha morfologiczna układów konstrukcyjnych zachęca do próby generowania siatek w formie kombinacji wielokątów. Dla pojedynczych, płaskich figur foremnych, takich jak trójkąt, kwadrat czy sześciokąt, budowane na ich bazie siatki tworzą układy naturalne, które w sensie badawczym można określić jako trywialne. Większą uwagę projektantów zwracają geometryczne układy posadzek, towarzyszących reprezentacyjnym wnętrzym budynków od tysiącleci. Dla celów opisu badawczego układy te zdobyły określenie tesselacji powierzchni (2D) lub przestrzeni (3D). Morfologiczne zasady tesselacji znalazły szeroki opis w publikacjach Coxetera ([26], [27], [28]). Większość układów tesselacyjnych cechuje regularność wynikająca z powtarzalności układów kafelków w trybie translacji. Tesselacje płaskie, których sekwencji nie można nałożyć na siebie poprzez proste przesunięcie, określone są mianem nieregularnych. Ich



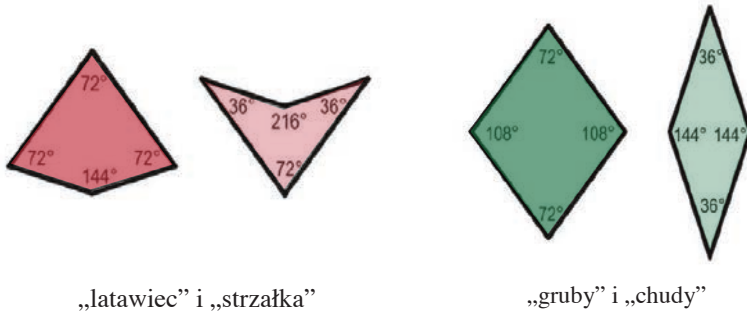
Rysunek 3.1: Tesselacja z użyciem kwadratów i trójkątów równobocznych.



Rysunek 3.2: Kafelki tesselacji Penrose'a.

samopodobieństwo jest oparte o złożenie przekształceń geometrycznych w postaci symetrii osiowej, obrotu i przesunięcia. Kolejność zastosowania tych funkcji decyduje o końcowym kształcie i braku powtarzalności przy zwielokrotnieniu tesselacji. Ze względu na swoją prostotę techniczną popularność wśród badaczy zdobyły tesselacje nieregularne, dwuelementowe. Z kształtu płytek nie wynika jednoznacznie nieregularność układu, który można osiągnąć przestrzegając kolejności przekształceń przy generowaniu tesselacji<sup>1</sup>. Najprostszym układem tesselacyjnym, w którym można osiągnąć aperiodyczność są kombinacje trójkątów równobocznych i kwadratów ([74]).

<sup>1</sup>Szczegółowy opis generowania tesselacji podano w artykule [53], gdzie podkreślono, że podstawowym kryterium aperiodyczności jest brak w tesselacji nieskończonych „ścieżek” uzyskiwanych przez translację bez udziału rotacji.

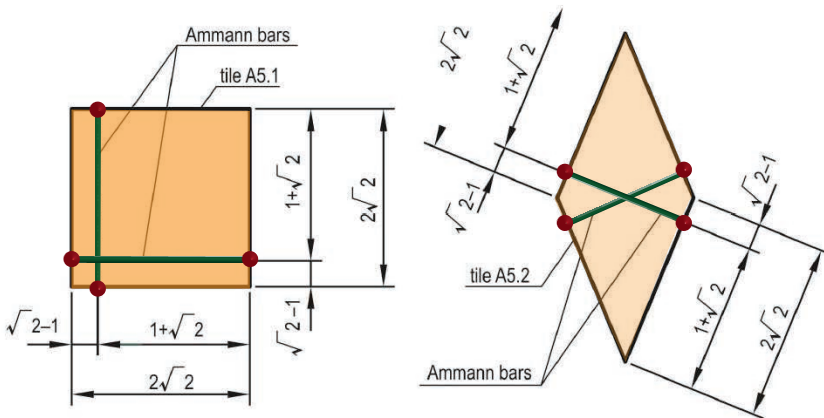


Rysunek 3.3: Aperiodyczne tessellacje Penrose’a.

Przykładem aperiodycznej tessellacji są układy kafelków Penrose’a w dwóch zestawach par elementów o nazwach skojarzonych z wyglądem geometrycznym: „gruby”, „chudy” oraz „latawiec” i „strzałka”. Kompozycje ułożone z tych proto-elementów można traktować jako siatki konstrukcyjne o powtarzalnych oczkach, tworzących jednak nieregularne układy.

Przyjmując krawędzie kafelków jako pręty układu rusztowego, można przeprowadzić analizę przydatności zestawionych na rys. 3.3 konfiguracji do kształtowania konstrukcji prętowych. W obu przypadkach krawędzie elementów nie tworzą ciągłych kierunków (linii tworzących siatkę). Układ złożony z rombów ma wszystkie oczka siatki wypukłe, co jest oczywiście konsekwencją budowy elementów podstawowych tessellacji. Natomiast układ „latawców” i „strzałek”, przedstawiony na rysunku 3.2, ze względu na wklęsły kształt jednego z elementów, ma oczka siatki wklęsłe. Dodatkowo węzeł w załamaniu wklęsłym oczka jest zawsze trzeciego stopnia, co wpływa niekorzystnie na pracę połączenia w ramach hipotetycznej konstrukcji rusztowej. Znaczący wpływ na wyężenie konstrukcji rusztowej ma kształt i ułożenie krawędzi struktury względem oczek siatki. Dla obu układów ukształtowanie prostych lub łukowych krawędzi siatki jest związane z modyfikacją układu krawędzi i idącym za tym zaburzeniem oczek siatki.

Jedną z bardziej wydajnych tessellacji powierzchni są aperiodyczne układy płytek Ammanna. Szczególne zastosowanie mogą znaleźć typy oznaczone w literaturze symbolami A4 i A5 [16]. Dla obu układów zostały opracowane po dwa rodzaje kompatybilnych płytek, które umożliwiają zrealizowanie układów niepowtarzalnych wypełnień powierzchni. Kafelki typu A4 są wielokątami wklęsłymi. W ustaleniu proporcji długości boków



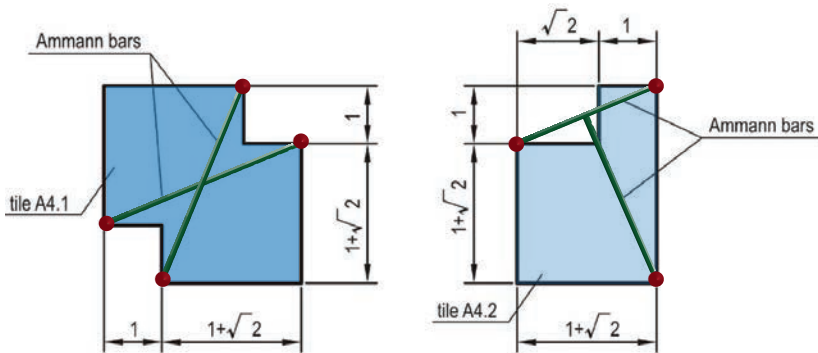
Rysunek 3.4: Kafelki z oznaczonymi prętami Ammanna typu A4.

zastosowano zasadę *srebrnego podziału*  $(1 + \sqrt{2})$ . W ukształtowaniu obu kafelków można wyodrębnić kwadraty o wyżej podanej długości boku i kwadrat o boku jednostkowym. W elemencie A4.1 występuje symetria dwuosiowa. Element A4.2 nie ma osi symetrii wewnętrznej. W oparciu o wierzchołki elementów zostało zdefiniowane położenie prętów Ammanna. Dla A4.1 położenie prętów wpisuje się w symetrię elementu. Dla A4.2 pręty łączące wierzchołki mają punkt wspólny poprzez przedłużenie jednego z nich poza wierzchołek, jednocześnie punkt ten dzieli drugi z prętów na połowy.

Kafelki z oznaczonymi prętami Ammanna typu A5 składają się z kwadratu o boku  $2\sqrt{2}$  (element A5.1) i rombu o tej samej długości boku i kącie ostrym równym  $45^\circ$  (element A5.2). Położenie prętów na powierzchni płytek jest ustalone warunkiem „srebrnego” podziału. Dla elementu A5.2 pręty Ammanna tworzą układ symetryczny.

Zgodnie z ideą tesselacji płytki wypełniają w sposób spójny powierzchnię bez odstępów i obszarów nakładania się płytek. Chociaż powtarzalność elementów tesselacji zmniejsza nieregularność siatki konstrukcyjnej zbudowanej na ich podstawie, to jednak otrzymany układ rusztowy wykazuje dużą dowolność kompozycyjną, wzmocnioną dodatkowo poprzez wariacje konfiguracyjne, możliwe do uzyskania dla tak zdefiniowanych obiektów. Chociaż płytki typu A5 cechuje pewne podobieństwo do wcześniej opisanych układów Penrose’a, to jednak dalsza przydatność badawcza płytek Ammanna wynika z ich dodatkowych własności geometrycznych. Zestawione na rysunku 3.6 tesselacje płytek Ammanna tworzą in-

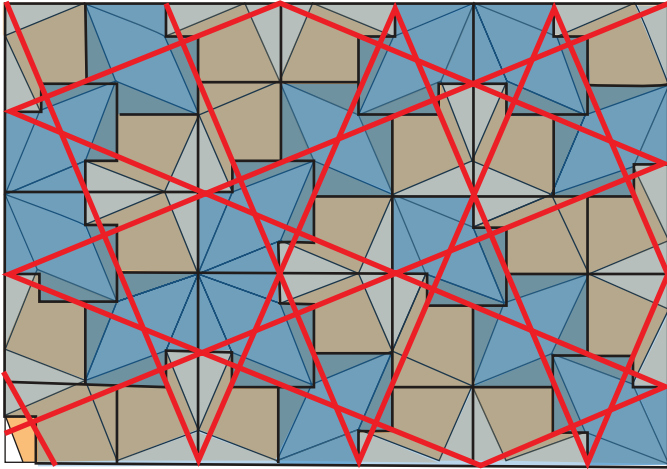




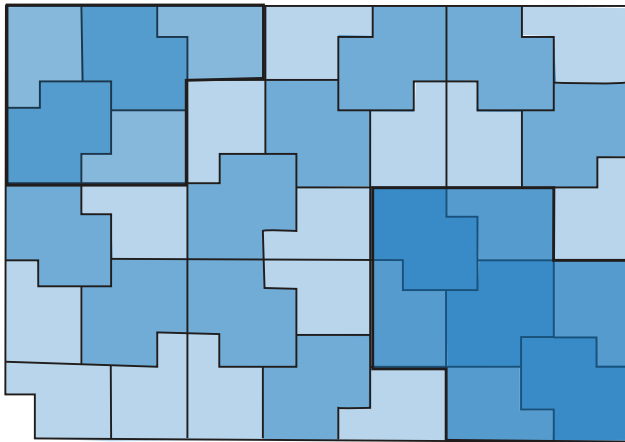
Rysunek 3.5: Kafelki z oznaczonymi prętami Ammanna typu A5.

teresującą, aperiodyczną kompozycję. Zestawy elementów A4 i A5 są względem siebie dualne, z zachowaniem ciągłości wpisanych w nie prętów. Przy czym element A5.2 wpisuje się w środek elementu A4.1, natomiast kwadratowy element A5.1 pokrywa części dwóch A4.1 i jednego A4.2. Taki układ geometryczny umożliwia zamienne łączenie z *prętami Ammanna* rusztów zbudowanych z A4 i A5. Układ *prętów Ammanna* tworzy dodatkowy warunek tessellacji, w której należy zapewnić ciągłość *prętów* w układzie liniowym. Prawidłowa budowa aperiodycznego układu wypełniającego powierzchnię prowadzi do powstania siatki konstrukcyjnej, trójkierunkowej o dyskretnie zmiennej odległości linii równoległych. Z założeń geometrycznych układu wynika występowanie dwóch wartości odległości linii równoległych w siatce: większa odległość  $L$  i mniejsza odległość  $S$ . Występowanie tych odległości w strukturze tessellacji tworzy ciągi postaci:  $\dots LSLSLLSLLSLLSLLSLL \dots$  znane pod nazwą ciągów Fibonacciego. W tych występują parami tylko odległości większe ( $L$ ), podczas gdy mniejsze ( $S$ ) są rozdzielone. Proporcje odległości linii równoległych określamy wielkością  $\nu = L/S$ . Kolejną istotną własnością tessellacji złożonej z płytek Ammanna jest samo-podobieństwo układów płytek, które składają się w kształty jednokładnościowo izomorficzne z płytkami podstawowymi.

Właściwość ta umożliwia modyfikację struktury tessellacji przez dodatkowe podziały o charakterze fraktalnym płytek podstawowych. Działanie to, określane mianem deflacji, jest przeciwne do łączenia płytek w większe struktury o tym samym kształcie krawędzi, co jest określane jako inflacja układu. Skalowanie tych procesów jest opisane wielkością  $\lambda = L/l = S/s$ , współczynnika deflacji, gdzie  $l, s$  są wartościami odległości linii równoległych siatki (zbudowanej z *prętów Ammanna*) po



Rysunek 3.6: Zestawienie tesselacji Ammanna.



Rysunek 3.7: Własność samopodobieństwa tesselacji Ammanna.

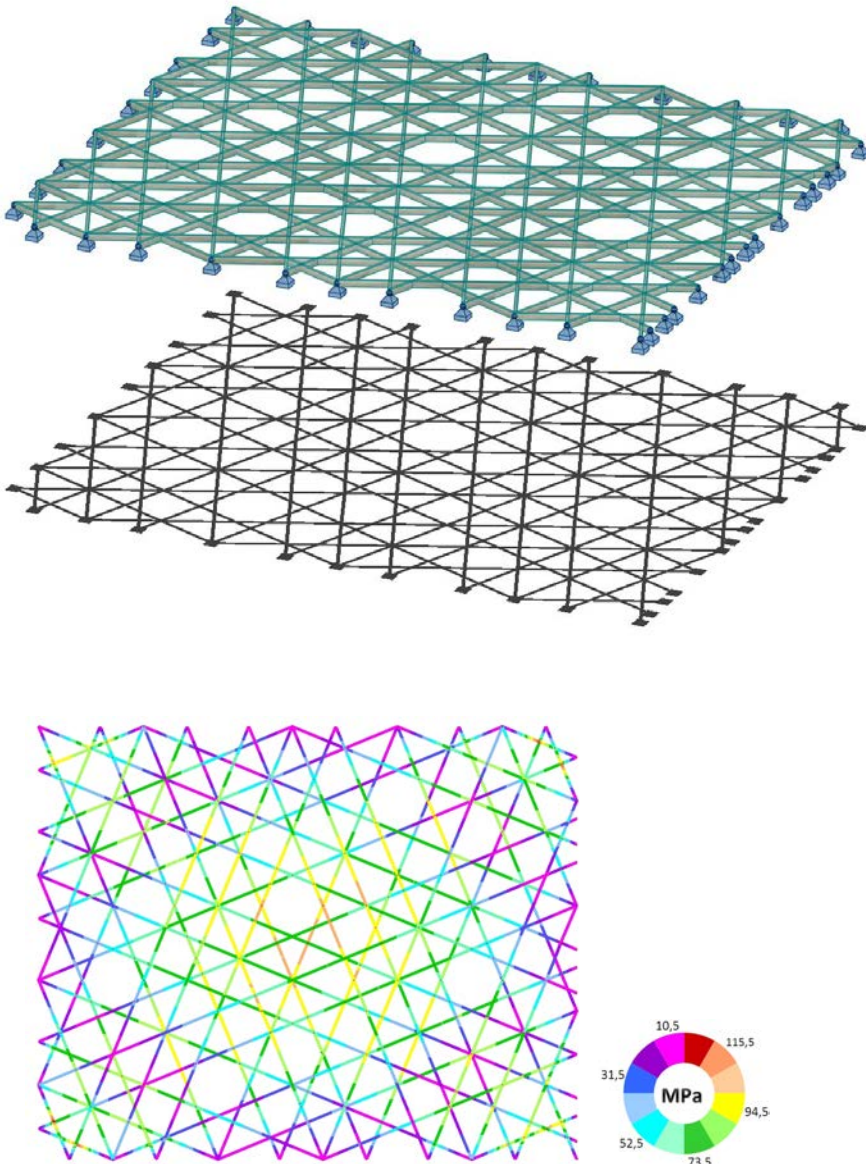
wprowadzeniu podziałów fraktalnych tesselacji. Ponieważ przekształcenia kafelków tesselacji składają się z przesunięć i symetrii wielokrotnych, prawidłowy dobór kolejności tych przekształceń i kątów obrotu jest decydujący o uzyskaniu prawidłowego podziału powierzchni z liniowym przebiegiem *prętów Ammanna*.

## 3.2 Siatki rusztów o kształcie prętów Ammanna

Krawędzie wielokątów tesselacji mogą stanowić siatkę konstrukcyjną realizującą układ rusztowy. Z warunków geometrycznej niezmienności układu prętów ich węzły należy traktować jako połączenia sztywne. Biorąc pod uwagę współpracę prętów sąsiednich w węzłach i siły przenoszone przez ich połączenia, należy unikać załamań na osi prętów oraz węzłów niesymetrycznych, w których osie prętów dochodzących odbiegają znacznie od układów współliniowych.

Biorąc pod uwagę powyższe kryteria, należy stwierdzić, że *pręty Ammanna* stanowią dobry układ geometryczny dla siatki nieperiodycznej konstrukcji rusztowej.

Wygenerowany na tej podstawie model prętowy został pokazany w rzucie na rys. 3.8. Do celów analizy statyczno-wytrzymałościowej przyjęto schemat rusztu płaskiego z węzłami sztywnymi, podpartego przegubowo w węzłach obwodowych. Przyjęto przekrój prostokątny prętów o wymiarze 0,15x0,35m, wykonany ze stalowych rur prostokątnych. Obciążenia powierzchniowe struktury przyjęto o wartości jednostkowej, aproksymując obciążenia dla lekkiej konstrukcji dachowej. Ukształtowanie oczek siatki rusztu umożliwia racjonalne oparcie elementów pokrycia konstrukcji w funkcji pokrycia dachu. W układzie oczek można wyróżnić kilka typów wielokątów wypukłych, począwszy od trójkątów prostokątnych, równoramiennych o różnych długościach boków, poprzez czworokąty w formie symetrycznych deltoidów, pięciokąty z jedną osią symetrii, podobnie symetryczne sześciokąty, aż do regularnych ośmiokątów, powstałych z kwadratów przez odcięcie naroży przy węzłach. Wierzchołki wielokątów, zbiegających się w węzłach rusztu tworzą układy wieloprętowe o stopniach od czwartego do ósmego. Jedynie węzły podporowe na obwodzie mają niższy stopień ze względu na brzegowe zaburzenie siatki przez krawędzie rusztu.



Rysunek 3.8: Rzut rusztu zbudowanego z prętów Ammanna z cieniem i mapą naprężeń.

Rozkład naprężeń w prętach rusztu jest nieregularny, chociaż wykazuje pewną logiczną kierunkowość. Generalnie ruszt jest układem trójkierunkowym o zróżnicowanym rozstawie linii tworzących. Badany model jest w rzucie prostokątem o wymiarach 28x35m. Przy takich założeniach najbardziej wyężonymi prętami są odcinki rusztu położone skośnie w poprzek mniejszej rozpiętości na dwóch kierunkach tworzących siatkę. Maksymalne naprężenie występuje wokół oczek środkowych siatki. Pręty, w których naprężenie jest małe, tworzą pas o kształcie zbieżnym do elipsy wpisanej w prostokąt rzutu struktury. Lokalne ekstremalne naprężenia działają na pręty zamykające naroża rusztu. Ocenia się, że ruszt ukształtowany na bazie *prętów Ammanna* jest wydajnym systemem konstrukcyjnym o dużym stopniu wykorzystania wytrzymałościowego jego elementów, co zostało potwierdzone analizą rozkładu naprężeń maksymalnych w badanym modelu.

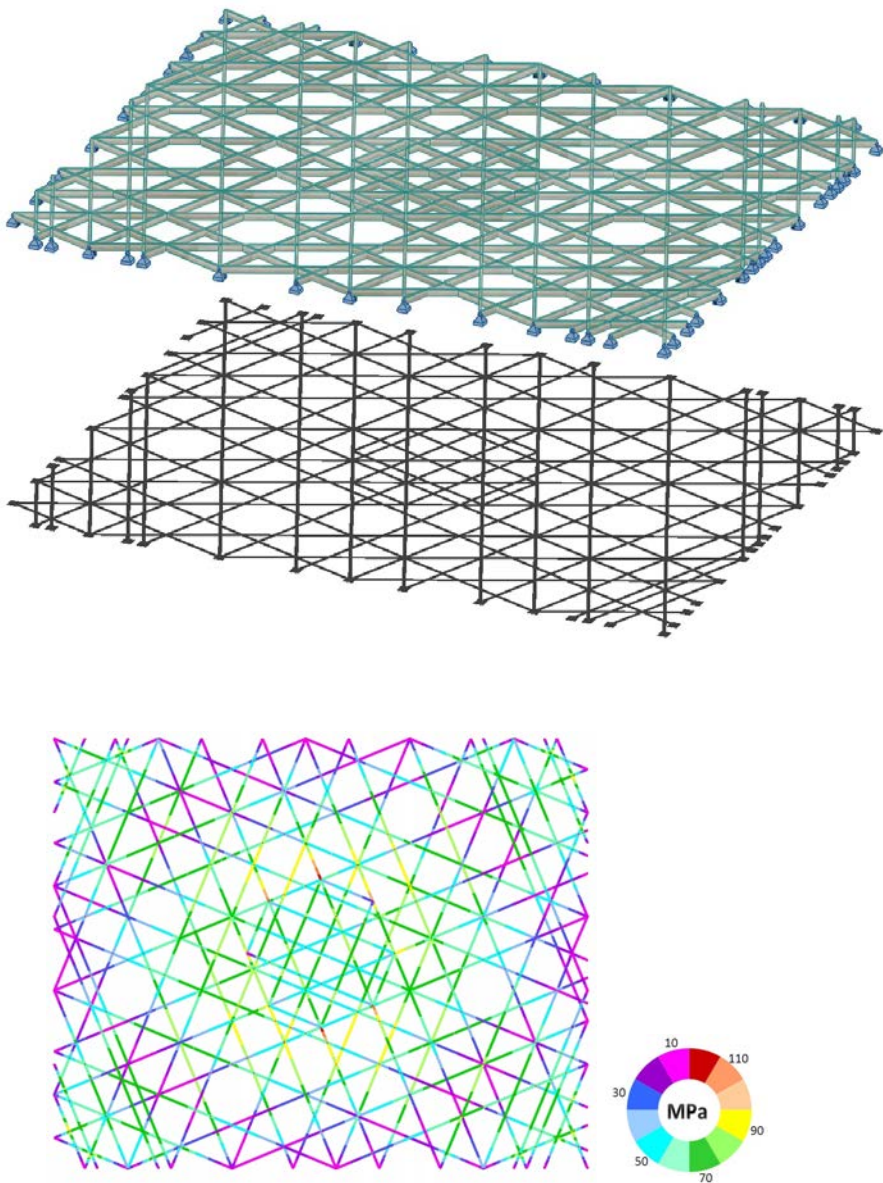
Dla prostokątnych kształtów rzutu rusztu opartego w węzłach krawędziowych, uzyskana struktura wymaga pewnych modyfikacji w części środkowej i przy narożach, gdzie wyężenie prętów konstrukcji może przekraczać wartości graniczne<sup>2</sup>.

Ze względów geometrycznych najbardziej odpowiednią formą wzmocnienia układu jest lokalne zagęszczenie siatki prętami równoległymi do głównych osi ustroju. Wprowadzone pręty wymagają zakończenia w węzłach istniejącego układu prętów lub w nowych połączeniach z dodaniem prętów prostopadłych. Oczywiście, istnieje możliwość wprowadzenia nowych kierunków na całej rozpiętości rusztu, jednak to rozwiązanie będzie przekraczało kryteria optymalizacji materiałowej, zwiększając znacznie nakłady na wykonanie konstrukcji.

W zmodyfikowanym modelu badanej struktury zostały wprowadzone dodatkowe grupy prętów, o kierunkach równoległych do istniejących prętów i zakończone w węzłach leżących na prętach siatki. Tego rodzaju wzmocnienie rusztu wprowadzono w jego części środkowej. Przy narożach rusztu uzupełnienie ogranicza się do jednego z kierunków prętów odcinających naroże, z tym że, w przeciwległe położonych narożach układu prętów uzupełniających się względem siebie równolegle. Pręty uzupełniające w narożach tworzą odcinki łączące punkty podparcia na krawędziach struktury. Wprowadzone układy prętów uzupełniających powodują powstanie dodatkowych kształtów oczek w siatce konstrukcji, poprzez podział oczek istniejących. W ten sposób powstały dodatkowo prostokąty i trapezy o jednakowej wysokości.

---

<sup>2</sup>Określenie zostało odniesione do ścisłych metod projektowania konstrukcji w pierwszym stanie granicznym (nośności).



Rysunek 3.9: Rzut zmodyfikowanego rusztu płaskiego z cieniem i mapą naprężeń.

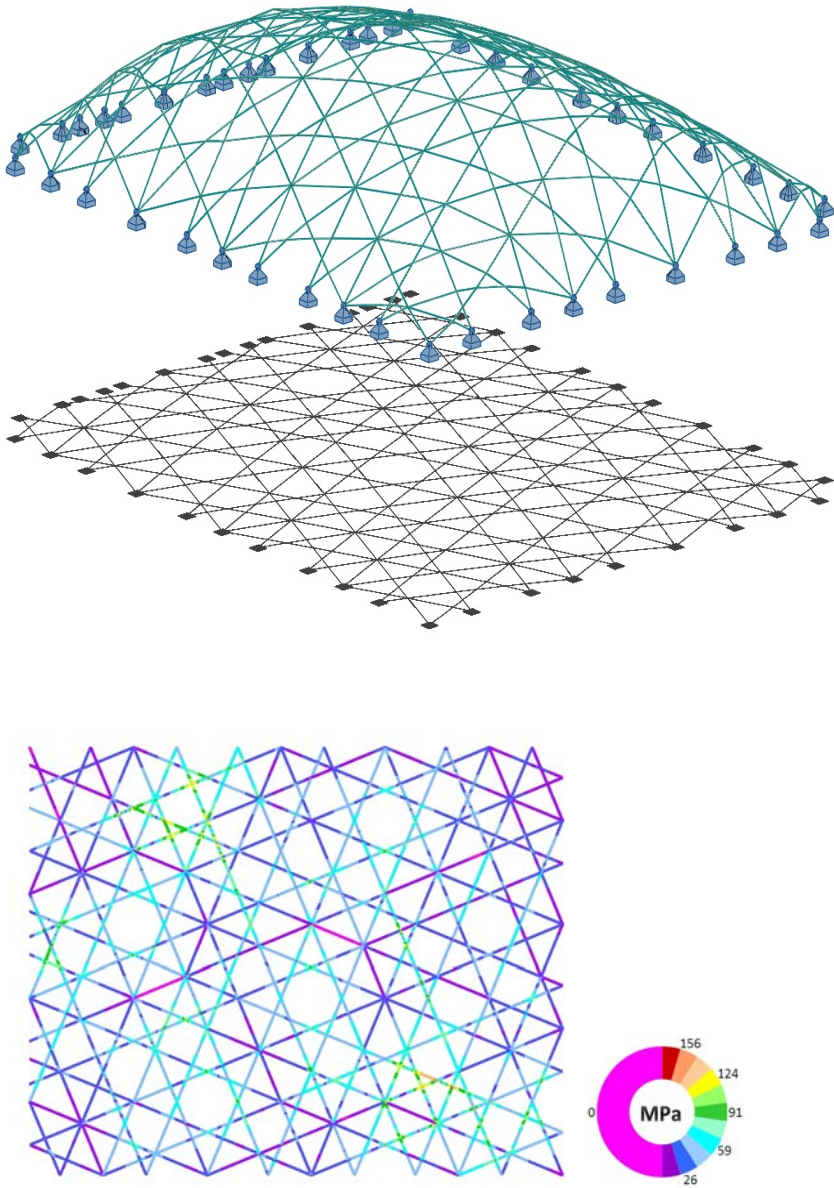
Po przeprowadzonych wstępnych obliczeniach statyczno-wytrzymałościowych uzyskano nowy rozkład naprężeń w prętach rusztu. Zgodnie z oczekiwaniami, w strefach wprowadzonych uzupełnień prętowych doszło do znaczącej redukcji wartości naprężeń. Jednak w części środkowej, przy narożach wzmocnienia w prętach układu pierwotnego pojawiły się ekstremalne wartości naprężeń<sup>3</sup>. Sytuację tę można określić jako efekt *łaty*, gdzie wzmocnienie obszaru środkowego zwiększyło jego sztywność giętną, jednocześnie wywołując zwiększone wyiężenie prętów w punktach zmiany sztywności. Wynik powyższego badania pozwala sformułować negatywną ocenę lokalnego wzmocnienia, przez miejscowe zagęszczenie siatki konstrukcyjnej, co powoduje skokową zmianę jej ustroju. Wzmocnienia powinny być wprowadzane z większym zachowaniem ciągłości zmiany sztywności poprzez stopniowe rozpraszanie zagęszczenia prętów struktury. Można to uzyskać, stosując zróżnicowane długości prętów wzmocnienia.

Zakrzywienie powierzchni przykrycia budynku w sposób oczywisty wpływa na zmianę wyiężenia układu konstrukcyjnego. Także ta modyfikacja siatki zbudowanej z prętów *Ammanna* może stanowić interesującą formę przykrycia dachowego. Układy jednokrzywiznowe, stanowiące wycinki powierzchni walcowych, realizują statyczną analogię łuku. W schemacie tym dochodzi do redukcji zginania na rzecz zwiększania wartości poziomych sił reakcji rozporowych. Przy dużych rozpiętościach dochodzi ponadto istotne zmniejszenie wpływu ugięcia konstrukcji. Podobne wartości konstrukcyjne realizują układy dwukrzywiznowe, bliższe w schemacie statycznym powłokom sferycznym (w szczególności kopule). Wyznaczone dla powłoki sferycznej wartości naprężeń w zdeformowanej przez projekcję siatce Ammanna w porównaniu do siatki płaskiej różnią się dystrybucją i wartościami w poszczególnych obszarach siatki. Należy jednak pamiętać, że konstrukcje powłokowe zakrzywione wymagają odpowiednio wzmocnionych systemów podparcia obwodowego, zdolnego do przeniesienia reakcji poziomych.

Dla modelu przedstawionego na rys. 3.10 przeprowadzono uproszczoną analizę statyczno-wytrzymałościową pod obciążeniem jednostkowym. Wykres rozkładu naprężeń w sposób istotny odbiega od wyników badań modelu płaskiego (por. rys. 3.8). Ogólnie, wyiężenie prętów położonych na dyskretyzowanych liniach eliptycznych jest zdecydowanie mniejsze niż dla rusztu płaskiego. Występują tylko dwa obszary lokalnego zwiększenia naprężeń w prętach przy połączeniach z węzłami. Wzrost naprężeń w tych strefach wynika ze zmiany krzywizny łuku eliptycznego prętów, przy podejściu do naroża struktury. Brak tego efektu przy pozo-

<sup>3</sup>Układ ten stanowi analogię do zbrojenia płaskiej płyty żelbetowej.





Rysunek 3.10: Powłoka elipsoidalna z układem prętów Ammanna z cieniem i mapą naprężeń.

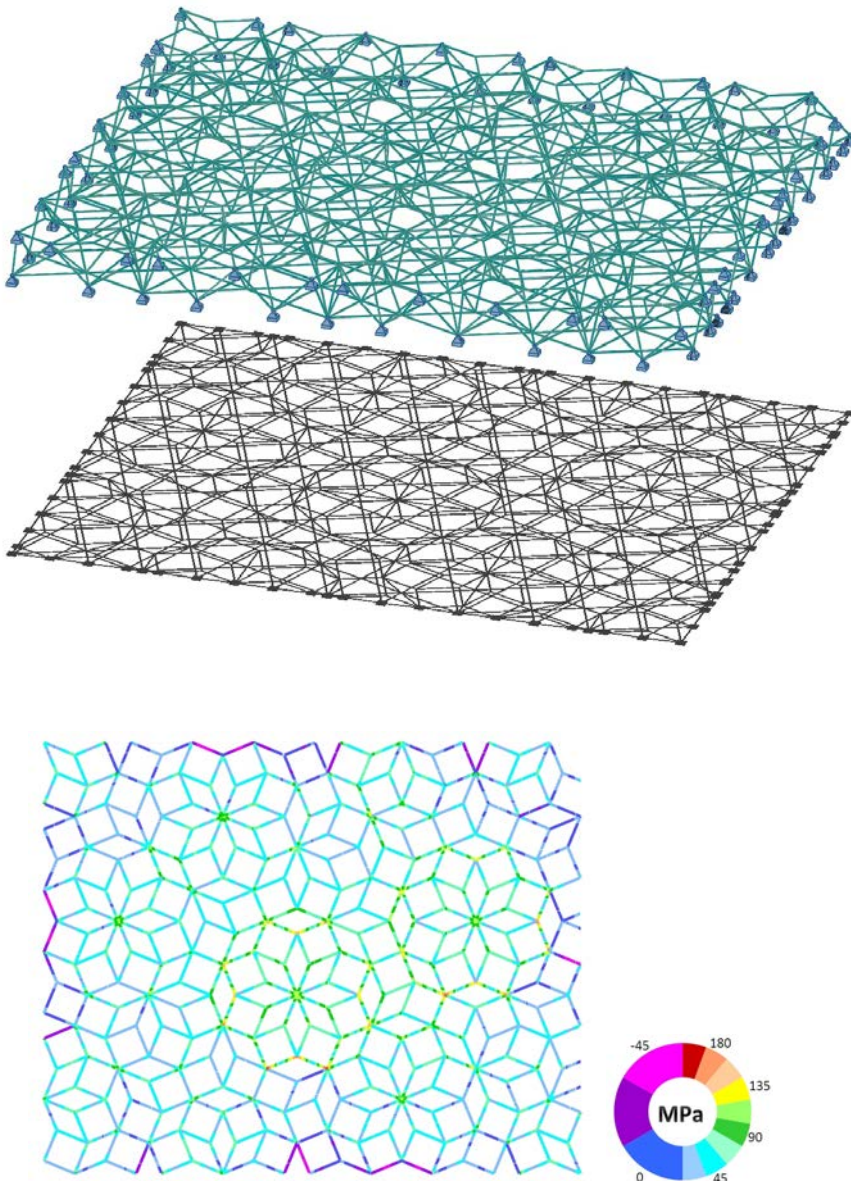


stałych dwóch narożach należy tłumaczyć niesymetrycznym ukształtowaniem powierzchni powłoki. W celu wyeliminowania opisanego efektu należałoby zmienić kształt rusztu powłoki na eliptyczny, nawiązujący do pasa strefy niskiego wyteżenia prętów w ruszcie płaskim. Przeprowadzona obserwacja rozszerza wniosek z badania modelu wzmocnionego (rys. 3.9) o negatywny wpływ zmiany krzywizny powłoki prętowej na nierównomierną dystrybucję naprężeń w elementach struktury. W miejscu zmiany krzywizny pojawiają się zaburzenia pracy prętów w postaci wzrostu wartości naprężeń przy węzłach struktury. W tym obszarze można podjąć próbę korekty tego układu przez zmianę sposobu połączenia wyteżonych prętów w węzłach na przegubowe. Jednak o pozytywnym efekcie tego działania decyduje układ zwolnionych węzłów. Przy tego rodzaju działaniach należy w praktyce brać pod uwagę konsekwencje technologiczne, wynikające ze zmiany sposobu połączenia. Ponadto należy się liczyć z możliwością zwiększenia odkształceń w miejscach zmniejszenia sztywności węzłów.

### 3.3 Tesselacje Ammanna w ruszcie dwuwarstwowym

Koncepcja tesselacji powierzchni płytkami Ammanna może również znaleźć zastosowanie do zdefiniowania przestrzennej struktury prętowej. Na rys. 3.11 przedstawiono propozycję ukształtowania płaskiej struktury dwuwarstwowej, połączonej układem krzyżulców. Wykorzystując dualność kafelków A4 i A5 w tesselacji Ammanna, zaproponowano kafelki typu A5 do zbudowania warstwy górnej<sup>4</sup>. Ukształtowana z ich krawędzi siatka górna o nieregularnym układzie ma lepsze uwarunkowania połączeń prętów, tworząc układy zbliżone do ciągłych w liniach siatki. Warstwę dolną struktury ukształtowano z wykorzystaniem geometrycznego układu *prętów Ammanna* jak dla omówionego modelu rusztu płaskiego. Przestrzenny układ spinający obie warstwy został zdefiniowany przy użyciu prętów ukośnych, łączących wybrane węzły obu warstw. Przez analogię do modelu kratownicowego grupę tych prętów można określać mianem krzyżulców. Wysokość konstrukcyjna struktury wynosi 2m, przy wymiarach rzutu 28x35m. W celu przeprowadzenia analizy statyczno-wytrzymałościowej przyjęto przekrój prętów z rur kwadratowych o boku 0,07m. Układ krzyżulców nawiązuje do układu tesselacji warstwy górnej,

<sup>4</sup>Przyjęcie tesselacji typu A5 wynika z analizy kształtu przeprowadzonej w podrozdziale 3.2 o jej wyborze decyduje przede wszystkim wypukłość kafelków i brak kątów wklęsłych w siatce (por. rys. 3.7).

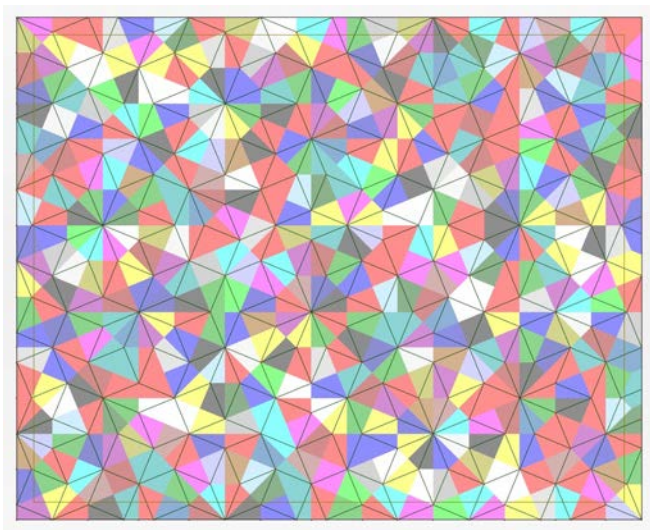


Rysunek 3.11: Struktura dwuwarstwowa wg tesselacji Ammanna z cieniem i mapą naprężeń.

tworząc podobnie do niej nietranslacyjne konfiguracje prętowe. Przyjęty układ krzyżulców zapewnia dostateczną sztywność przestrzenną struktury. Wykorzystując większą sztywność warstwy rusztu górnego, dopuszczono zginanie niektórych węzłów w warstwie górnej. Zabieg ten umożliwił ograniczenie ilości prętów krzyżulcowych, których wyężenie w strukturach dwuwarstwowych jest poza węzłami podporowymi niewielkie (por. górna część rys. 3.13). Ponadto rozrzedzenie warstwy środkowej uwalnia przestrzeń wewnętrzną struktury dla celów instalacyjnych i poprawia warunki doświetlenia przestrzeni pod przykryciem.

W wyniku uproszczonej analizy statyczno-wytrzymałościowej uzyskano wartości naprężeń we wszystkich prętach struktury. W górnej warstwie prętów występują dwa interesujące obszary rozkładu naprężeń o zbliżonych wartościach. W ukształtowanych w formie pięciu rozet układach prętów do ekstremalnego wzrostu naprężeń dochodzi w narożach oczek zewnętrznych układu. Sytuacja ta powtarza się w rozecie usytuowanej z boku rzutu struktury, chociaż wartości są tam relatywnie mniejsze niż na środku warstwy. Taką dystrybucję naprężeń w prętach opisywanych obszarów można wytłumaczyć sposobem podparcia krzyżulcami oraz faktem lokalizacji tych grup prętów w pobliżu środka rzutu struktury. Dla pozostałych prętów w warstwie górnej rozkład jest dosyć jednorodny, co należy ocenić jako pozytywny aspekt przyjętego kształtu warstwy. Jedynie przy krawędziach dochodzi do zaburzeń układu naprężeń, co jest prostą konsekwencją modyfikacji geometrycznej w strefie brzegowej i sposobu podparcia struktury.

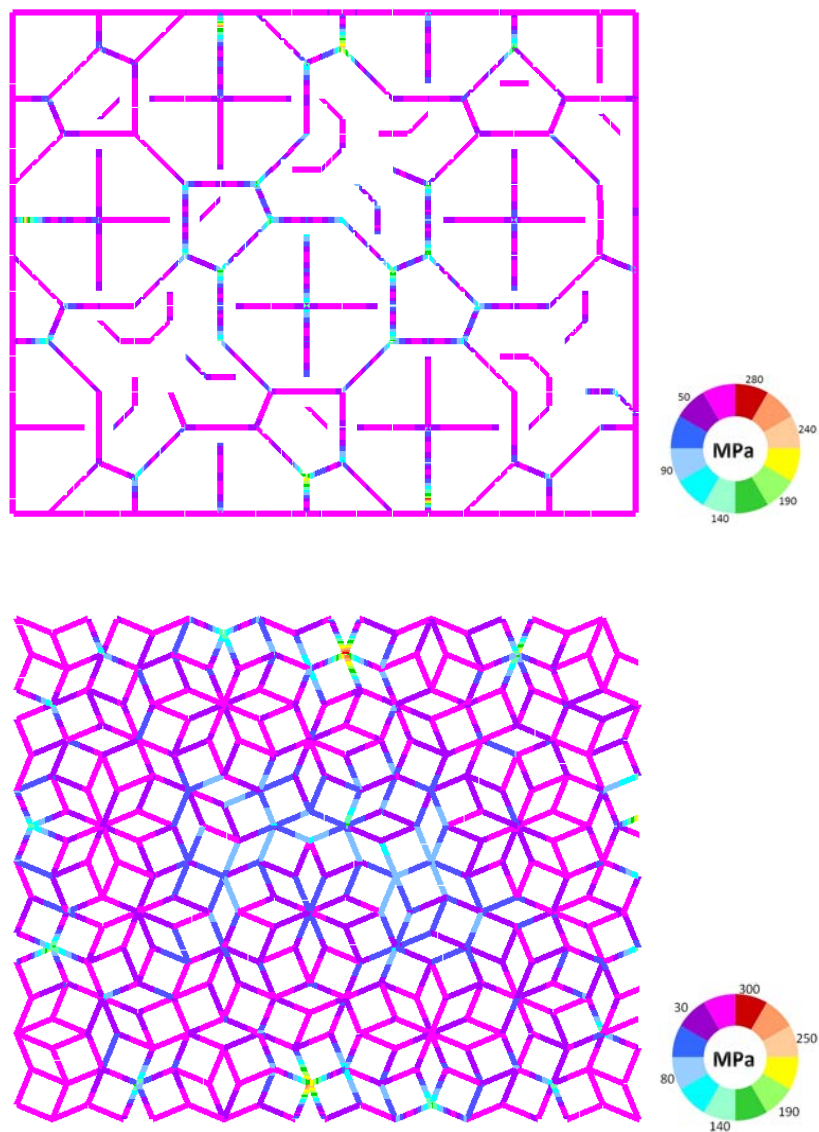
W prętach warstwy dolnej struktury działają przeważnie naprężenia rozciągające, tylko lokalnie przy sztywnych węzłach łączących pręty warstwy dolnej i górnej z krzyżulcami następuje zmiana znaku naprężeń. Linie maksymalnie wyężonych prętów warstwy dolnej nie są układem regularnym. Zwiększone naprężenia są związane z węzłami podpierającymi krzyżulce biegnące do węzłów opisanych wyżej rozet w warstwie górnej prętów. Nieregularny charakter rozkładu naprężeń w warstwach prętowych badanej struktury potwierdza ogólną nieregularność badanego modelu. W nieregularnym układzie prętów warstwy górnej należy w badanych modelach zwrócić uwagę na rozdział obciążenia powierzchniowego na osie prętów struktury. Ze względu na różne przypadki incydencji oczek siatki, kształt pól obciążających tworzy swoistą tesselację, pochodną w stosunku do kształtu rusztu warstwy górnej. Dla podkreślenia wymiaru geometrycznego dystrybucję tę przedstawiono na rysunku w formie kolorowych wielokątów. Dla wszystkich powierzchni wielokątnych przyjęto jednakową wartość (jednostkową) obciążenia zewnętrznego konstrukcji (rys. 3.12).



Rysunek 3.12: Rozkład obciążeń na prętach warstwy górnej struktury.

Układ *prętów Ammanna* jest możliwy do zrealizowania zarówno przy pomocy prętów sztywnych jak i cięgien wiotkich. Układy ciągnowe, ze względu na występujące w narożach dolnej warstwy siły ściskające, wymagają wstępnego sprężenia. Wprowadzenie sił naciągu w dolnej warstwie struktury będzie ponadto skutkowało zmniejszeniem odkształceń w porównaniu z konstrukcją niesprężoną. W badanym uprzednio modelu dwuwarstwowym w miejsce prętów wprowadzono ciągną sprężające. Wstępne naprężenie cięgien przyjęto o wartości 100kN w warstwie dolnej struktury. Przeanalizowano rozkład naprężeń w warstwie górnej struktury sprężonej.

Wprowadzenie cięgien sprężających w dolnej warstwie struktury zmieniło dystrybucję naprężeń w prętach warstwy górnej, w stosunku do modelu niesprężonego. Punktami koncentracji naprężeń stały się wielostopniowe węzły przypodporowe, zlokalizowane w środku dłuższych krawędzi. Zwiększone naprężenia występują także w innych wielostopniowych, zbierających po kilka prętów, węzłach przypodporowych. Natomiast w części środkowej rusztu naprężenia ściskające przyjmują mało zróżnicowane wartości. To w miarę zbliżone wyteżenie prętów warstwy górnej wynika ze zmiany dystrybucji sił działających w strukturze po wprowadzeniu jej sprężenia. Usytuowanie prętów krzyżulcowych, w których działają ekstremalne wartości, jest analogiczne do usytuowania w warstwie górnej prętów przypodporowych. Ponadto zwiększone wartości naprężeń za-



Rysunek 3.13: Rozkład naprężeń w krzyżulcach (góra) i warstwie górnej (dół) struktury dwuwarstwowej z ciągniami w warstwie dolnej.

obserwowano w części środkowej struktury, co ma bezpośredni związek z przeniesieniem naciągu kabli warstwy dolnej na warstwę górną struktury.

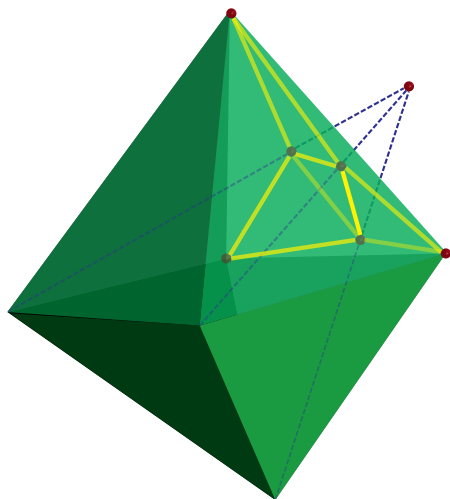
Porównując rozkłady naprężeń w warstwach górnych struktury niesprężonej i sprężonej można wnioskować, że sprężenie ma pozytywny wpływ na dystrybucję sił w warstwie górnej badanego modelu struktury dwuwarstwowej.

## Rozdział 4

# Elementy geometrii projekcyjnej w przekształcaniu siatek generowanych w FEM

### 4.1 Projekcja grafów na powierzchnie sferyczne

Prezentacja obiektów przestrzennych na płaszczyźnie była od początku związana z pracą architekta. Współczesna technika komputerowa udoskonaliła znacznie ten proces dostarczając atrakcyjnych narzędzi do prezentacji graficznej obiektów architektonicznych. Pomimo tego, iż w wielu przypadkach wizualizacja oparta jest o parametry geometrii przestrzennej (tak zwane 3D) to jednak przeważnie odbywa się na płaskich ekranach komputerów i rzutników komputerowych. Jednocześnie płaski obraz jest dużo łatwiejszy do szczegółowego przeanalizowania niż obraz przestrzenny [27]. Dotyczy to również kreacji elementów konstrukcji, a w szczególności siatek konstrukcyjnych, których rysunek jest związany przede wszystkim z płaszczyzną. Jednak, jak wykazały prezentowane powyżej modele, zakrzywienie powierzchni siatki konstrukcyjnej, poza wieloma korzyściami estetycznymi i funkcjonalnymi, niesie ze sobą racjonalizację wykorzystania siatki w funkcji ustroju nośnego. Traktując



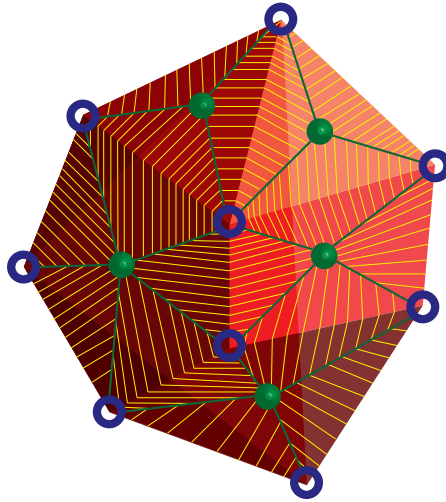
Rysunek 4.1: Diagram Schlegla dla ośmiościanu.

model siatki konstrukcyjnej jako graf planarny można postawić problem jej przestrzennej projekcji. Teoretyczną podstawą przestrzennej realizacji grafu planarnego jest warunek trój-spójności, przekładający się na rząd wierzchołków, który nie może być mniejszy niż 3. Mocy tego twierdzenia nie pomniejszają przekształcenia grafów, polegające na usuwaniu krawędzi i ściąganiu węzłów oraz operacje do nich przeciwne, czyli dodawanie krawędzi. W czasie tych przekształceń należy usuwać ze struktury grafu wierzchołki rzędu niższego niż 3. Procedurą przydatną do zrozumienia istoty projekcji grafu w przestrzeni jest diagram Schlegla. Konstrukcja geometryczna tego wykresu w odniesieniu do wielościanu polega na rzucie środkowym jego krawędzi na jedną ze ścian, przy której środku zlokalizowany jest środek rzutowania. Diagram Schlegla dla ośmiościanu przedstawiono na rys. 4.1.

Rzut bryły na ścianę jest odwzorowaniem obiektu przestrzennego na płaszczyznę w formie grafu planarnego. Procedury przekształcania grafu planarnego w bryłowy układ przestrzenny są niestety skomplikowane pod względem pojęciowym i trudne do zastosowania w algorytmach obliczeniowych programowania liniowego, ponieważ w ogólnym przypadku zadanie sprowadza się do rozwiązania układów równań nieliniowych<sup>1</sup>.

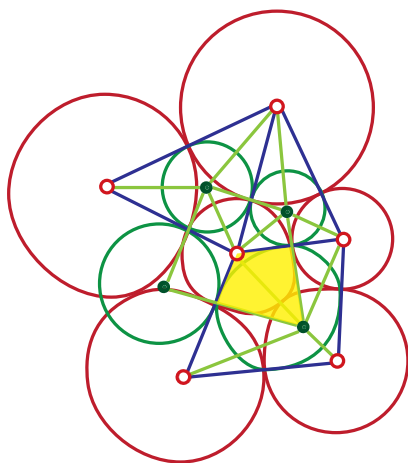
<sup>1</sup>Zasady projekcji przestrzennej grafów płaskich zostały teoretycznie opracowane w pracach A.I. Bobenki [6];[8] i omówione w wykładach G.M. Zieglera [162]. Prace te nie zawierają rozwiązań szczegółowych i przykładów.





Rysunek 4.2: Bryła z naniesionym podziałem dualnym.

Dodatkowo dla grafów planarnych trój-spójnych rozwiązania nie są unikatowe (jednoznaczne), ale wymagają arbitralnego przyjęcia części parametrów. Rozwiązanie upraszcza się przy ograniczeniu do projekcji wielościanu kombinatorycznego na powierzchnię sferyczną. Fazą pośrednią tej konstrukcji jest zbudowanie na wyprostowanych krawędziach grafu trójkątów w taki sposób, że trzecim wierzchołkiem wspólnym dla wszystkich trójkątów danej ściany jest punkt należący do grafu dualnego. Punkt ten leży w środku ściany grafu podstawowego (rys. 4.2.). Na każdej krawędzi wewnętrznej grafu powstają dwa przeciwległe trójkąty, które tworzą czworokąt. Dwa wierzchołki tego czworokąta należą do grafu wyjściowego, pozostałe dwa do dualnego. Wierzchołki te są odpowiednio środkami wzajemnie stycznych okręgów. Na rys. 4.3 linią czerwoną oznaczono okręgi na wierzchołkach grafu wyjściowego (w kolorze niebieskim), natomiast zieloną - okręgi na wierzchołkach grafu dualnego (w kolorze jasnoniebieskim). W punktach styczności czerwone i zielone okręgi przecinają się pod kątem prostym. Głównym problemem o dużym skomplikowaniu matematycznym jest przejście na poziom metryczny i wyznaczenie długości krawędzi czworokąta i jego kątów wewnętrznych (wypełniony na rysunku 4.3 kolorem żółtym). Jednym z rozwiązań jest zastosowanie funkcjonału Bobenki-Springborna ([8]) do rozwiązania układu równań nieliniowych. Rozwiązawszy ten problem, można przystąpić do odtworzenia wielościanu kombinatorycznego w przestrzeni.



Rysunek 4.3: Układ okręgów stycznych zbudowany na wierzchołkach grafu i grafu dualnego.

## 4.2 Budowa siatek FEM na powierzchniach

Problemy związane z dyskretyzacją powierzchni i rozwiązaniem funkcji na niej opisanych leżą u podstaw metody elementów skończonych (FEM – *finite elements method*) [165]. Ta szeroko stosowana do badania obiektów fizycznych metoda znalazła wykorzystanie w naukach technicznych i przyrodniczych. Najogólniej rzecz ujmując, metoda sprowadza się do określania zależności przemieszczeń od sił działających na obiekt, przy uwzględnieniu jego cech geometrycznych i fizycznych zebranych w macierzy sztywności. Problem ten odniesiony do dowolnie małych fragmentów obiektu (elementów skończonych) prowadzi do rozwiązania układów równań z wieloma niewiadomymi, określonymi dla konstrukcji mianem stopnia swobody układu elementów skończonych. Dodatkowo przy formułowaniu układów równań należy brać pod uwagę warunki brzegowe charakterystyczne dla badanego obiektu. Tak skomplikowane układy równań, głównie nieliniowych z wieloma niewiadomymi, wymagały rozwoju metod matematycznych i technik obliczeniowych, które okazały się możliwe do zrealizowania dopiero po wprowadzeniu elektronicznych maszyn

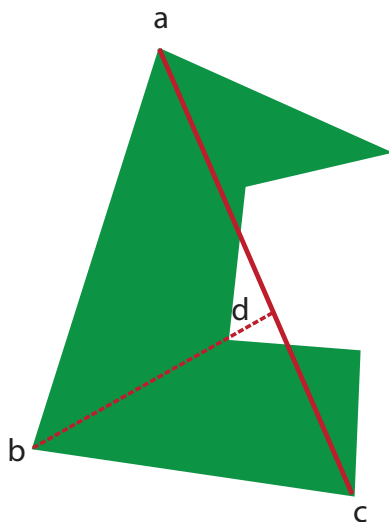
liczących (komputerów) w latach pięćdziesiątych XX wieku. Matematyczne podwaliny pod rozwiązanie problemu położył Richard Courant<sup>2</sup>, który wraz z Friedrichs'em i Lewy'm opublikował w *Mathematische Annalen*, vol.100 (1928) artykuł na temat częściowych równań różnicowych w matematyce fizycznej. Raport, przetłumaczony w 1956 na język angielski, został opublikowany powtórnie w pracach badawczych Uniwersytetu Nowojorskiego [25]. Praca zawiera matematyczną analizę problemu rozwiązania klasycznego układu równań liniowych, z wykorzystaniem częściowych równań różnicowych przez przybliżenie algebraiczne na siatce kwadratowej z uwzględnieniem wartości brzegowych obszaru. Równania różnicowe określające położenia węzłów na płaszczyźnie zostały uzupełnione o badanie funkcji Green'a, na brzegach obszaru. Duży wkład w rozwój metody elementów skończonych mieli polscy naukowcy Jan Szmelter i Olgierd Zienkiewicz [165].

W metodzie elementów skończonych definicja siatki podziału obiektu ma kluczowe znaczenie. W trakcie rozwoju metody zostało opracowanych wiele strategii i algorytmów służących do budowy siatek elementów skończonych, problemów jej zagęszczania i modyfikacji ze względu na geometrię obiektu oraz obciążenia i podparcie konstrukcji. Najczęściej stosowaną siatką podziałów powierzchni jest siatka trójkątna. Opracowanie podstawowych zasad triangulacji należy do Delaunay'a. Wyróżnia się ogólnie dwa rodzaje siatek, siatki strukturalne złożone z czworokątów oraz siatki niestructuralne zbudowane z trójkątów [132]. Powstały też siatkowania łączące oba te rodzaje kształtów oczek siatek. Siatki strukturalne są prostsze w zdefiniowaniu, przez co zajmują mniejszą objętość pamięci obliczeniowej komputera. Jednocześnie współrzędne siatek strukturalnych umożliwiają większą kontrolę wielkości oczek i zagęszczenia siatki. Niestety czworokątny kształt oczek ogranicza elastyczność formowania siatki przy skomplikowanych kształtach i otworach w dyskretyzowanej powierzchni. Podstawowymi problemami przy triangulacji powierzchni jest uzyskanie pól trójkątnych zwartych, a więc takich, dla których kąty wewnętrzne nie są ani zbyt małe, ani zbyt duże. W literaturze przyjęto przedział  $20^\circ < \alpha < 90^\circ$  jako racjonalny dla kształtów trójkątów [4]. Zasadę podziału wielokątów o stopniu wyższym niż 3 oparto o przekątną wielokąta siatki (rys. 4.4).

Znaleziono przekątne, które nie przecinają linii siatki, dzieli się na pół i buduje w oparciu o odcinki podziału na nowe trójkąty, prowadząc krawędzie do najbliższych istniejących węzłów. Utworzona siatka triangu-

---

<sup>2</sup>Urodzony w Lublińcu, kuzyn Edyty Stein, wyemigrował w 1933 do USA, gdzie założył Institute of Mathematical Science na Uniwersytecie w Nowym Jorku, noszący jego nazwisko.

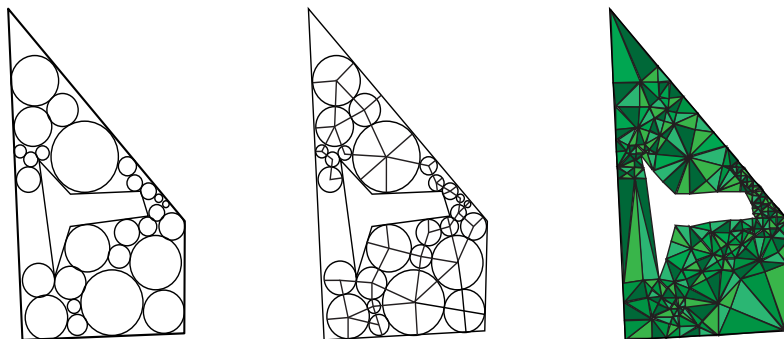


Rysunek 4.4: Położenie przekątnej obszaru.

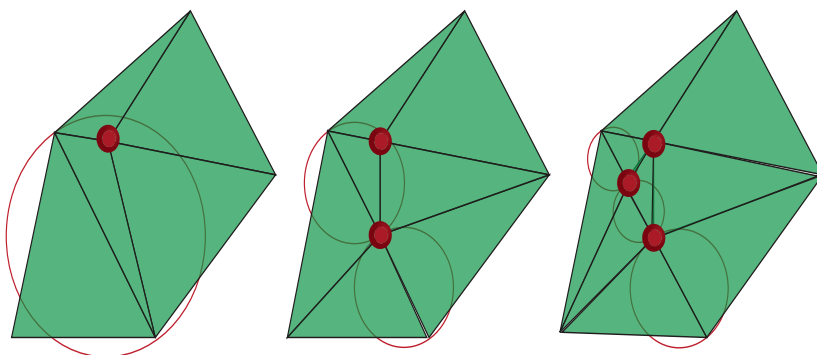
lacji może być traktowana jako płaski graf o prostoliniowych krawędziach (ang. *Planar straight line graph-PSLG*) [132].

W ujęciu teorii grafów triangulacja FEM jest dualna do diagramu Woronoja. W obu układach istotna jest generacja punktów stałych, które należy brać pod uwagę w budowaniu siatki (punkty Steiner'a). Przy budowaniu siatki z uwzględnieniem punktów szczególnych należy brać pod uwagę pewne kryteria optymalizacyjne, do których należą: minimalny kąt, minimalna wysokość trójkąta oraz całkowita długość krawędzi siatki. Problem wysokości trójkąta można mierzyć proporcją odległości wierzchołka od najdłuższej krawędzi do długości jej krawędzi. W generowaniu punktów Steiner'a można posłużyć się metodą polegającą na upakowaniu okręgów na ograniczonym obszarze, połączeniu ich środków (co tworzy pierwszy krok przybliżenia siatki) i następnie triangulacji powstałych wielokątów z pominięciem linii okręgów (rys. 4.5).

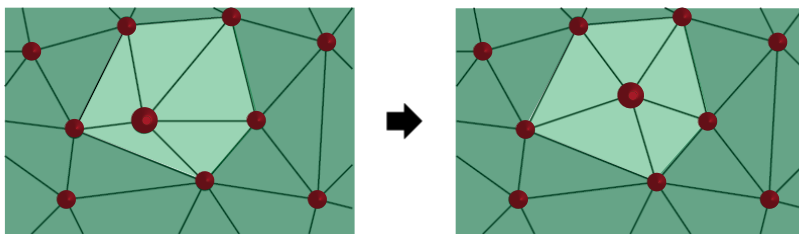
Ostatni z kroków – lokalne zastosowanie algorytmu może prowadzić do pozostawienia w siatce oczek o innym kształcie niż trójkątny, jak przedstawiono to wariantowo na omówionym rysunku. W ramach wygenerowanych siatek mogą być wprowadzone typowe przekształcenia topologiczne węzłów i krawędzi, takie jak ściąganie węzłów, czy usuwanie lub dodawanie krawędzi. W pewnych sytuacjach modelowania można też uzyskać regularność układu trójkątów poprzez wygładzanie siatki, pole-



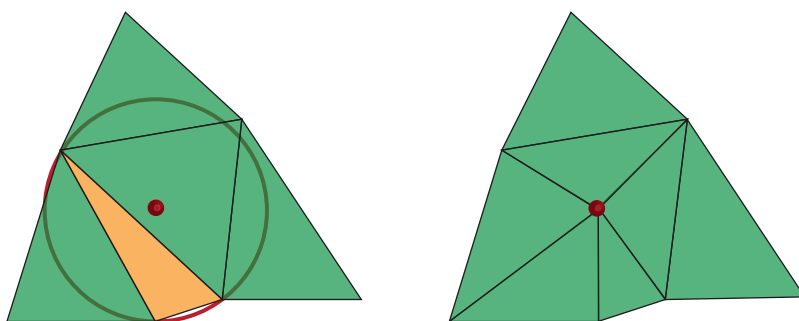
Rysunek 4.5: Tworzenie siatki w obszarze z otworem.



Rysunek 4.6: Wygładzanie siatki.



Rysunek 4.7: Zasada podziału przy punkcie stałym.

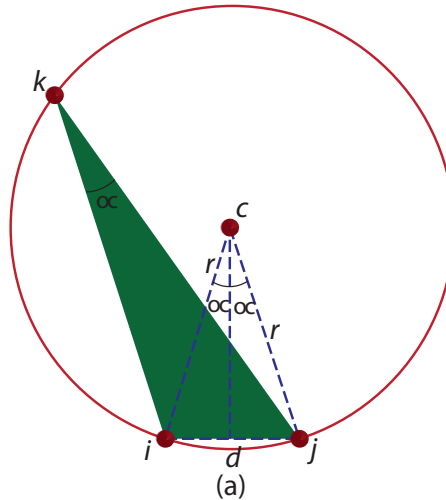


Rysunek 4.8: Korekta triangulacji przy punkcie stałym.

gające na takim przemieszczaniu wężła tak, aby pola dochodzących do niego trójkątów były wyrównane (rys. 4.6).

W kolejnych krokach generacji siatki głównym problemem jest przyjęcie położenia punktu stałego w odniesieniu do wygenerowanych już wierzchołków trójkątów. Położenie to należy przyjąć możliwie daleko, ze względu na zagrożenie uzyskania zbyt „płaskich” trójkątów opartych na tym wierzchołku. W takiej sytuacji (przy zbyt „płaskim” trójkącie) należy wprowadzić dodatkowy podział, oparty na dłuższej krawędzi trójkąta, której przeciwległym wierzchołkiem jest punkt stały (jak na rysunku 4.7).

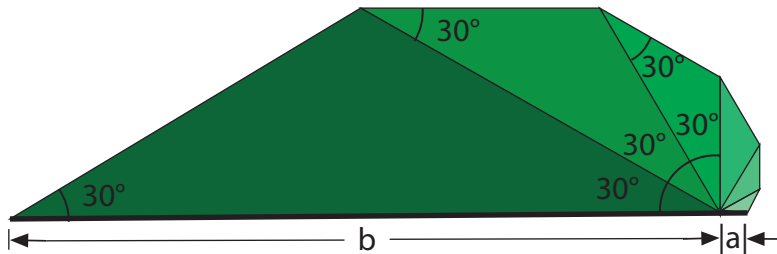
Przy punktach stałych, położonych zbyt blisko krawędzi trójkąta, należy przeprowadzić korektę siatki, przyjmując punkt stały, jako nowy wierzchołek elementów trójkątnych. Z wierzchołka tego prowadzi się krawędzie tworzące nowe trójkąty, oparte na przeciwległych krawędziach trójkątów starego podziału, na których kończy się zakres korekty triangulacji (jak na rysunku 4.8).



Rysunek 4.9: Zależność metryczna krawędzi od okręgu opisanego na elemencie.

Jedną z efektywnie stosowanych wielkości metrycznych, określających jakość elementu trójkątnego jest stosunek promienia opisanego na nim okręgu do długości najkrótszego boku tego trójkąta ( $r/d$  na rys. 4.9). Wartość tej metryki uzyskujemy z zależności trygonometrycznej  $r/d = 1/(2\sin\alpha)$ , zakładając minimalną, dopuszczalną wartość kąta  $\alpha$ . Ukształtowanie brzegów obiektu wpływa na redefinicję siatki trójkątnej. W celu uniknięcia zbyt „płaskich” trójkątów, powstają dodatkowe podziały, zagęszczające oczka siatki w tej strefie.

Na rys. 4.10 przedstawiono zagęszczenie siatki przy zdyskretyzowanym łuku brzegowym. Przy zmianie krzywizny konturu brzegowego dochodzi do zagęszczenia siatki ze względu na mniejsze długości odcinków dyskretyzacji. Sytuacja ta może mieć korzystny wpływ na wyniki analizy FEM dla takich obszarów, gdzie często dochodzi do zaburzeń układów naprężeń i przyjęcie mniejszych elementów skończonych zwiększa dokładność wyników. Przy założeniu stałej wartości minimalnego kąta  $\alpha = 30^\circ$  stosunek długości krawędzi największego i najmniejszego trójkąta podziału wynosi  $b/a = 27$ .



Rysunek 4.10: Zagęszczenie triangulacji przy zakrzywionym brzegu obiektu.

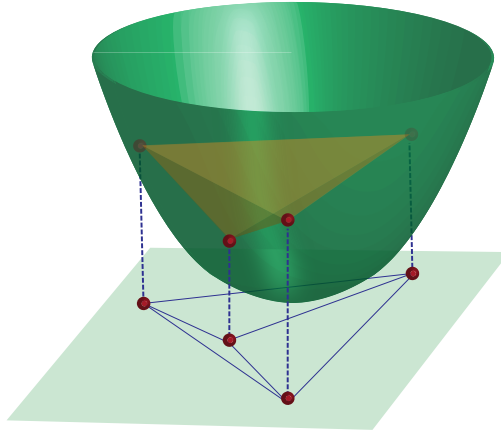
### 4.3 Budowa siatek FEM w przestrzeni

Budowa siatki elementów skończonych dla obiektów objętościowych jest zagadnieniem bryłowego wypełnienia przestrzeni 3D [49]. Odzworowanie płaskiego grafu czworościanu przedstawiono na rysunku 4.11. Funkcją odwzorowującą jest rzut prostokąta na zakrzywioną powierzchnię (w tym przypadku parabolę obrotową), którą można traktować jako powierzchnię brzegową dzielonego obiektu objętościowego. Dokładność podziału można zwiększać przez dokładanie czworościanów o mniejszej objętości w obszarach pomiędzy powierzchnią brzegową a powierzchnią ścian czworościanów już wprowadzonych w dyskretyzowaną objętość.

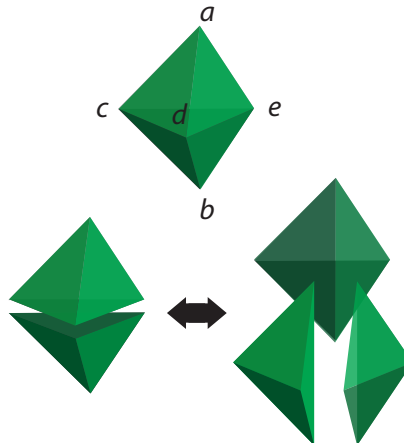
Podobnie do siatki płaskiej w algorytmach Delaunay'a stosuje się elementy trójkątne, jako ściany nieregularnych czworościanów. Kolejne podziały brył wypełniających objętość obiektu powinny być takie, żeby dwie ściany w elementach podziału nie stanowiły części ściany elementu pierwotnego, co oznaczałoby ich koplanarność.

Przedstawiony na rysunku 4.12 układ czworościanów może zostać podzielony pod warunkiem, że odcinek  $c < b$  przecina wewnątrz trójkąta  $cde$ . Jeżeli odcinek  $ab$  przecina krawędź  $ce$ , to ściany  $ace$  i  $cbe$  są koplanarne, a więc przy kolejnym podziale nie mogą należeć do dwóch nowych czworościanów. Analogicznie do zasad budowania siatki płaskiej, formowanie kolejnego elementu czworościennego polega na poszukiwaniu za pomocą rozrastającej się sfery czwartego wierzchołka dla istniejącej ściany trójkątnej  $abc$  (rys. 4.13). Na rysunku zaznaczono przypadek szczególnie, w którym wierzchołek  $d$  jest koplanarny z trójkątem  $abc$ , co oznaczono

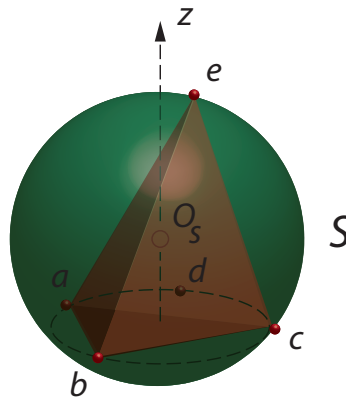




Rysunek 4.11: Zasada mapowania na powierzchnię dwukrzywiznową.



Rysunek 4.12: Zasada podziału czworościanów w elementach objętościowych.

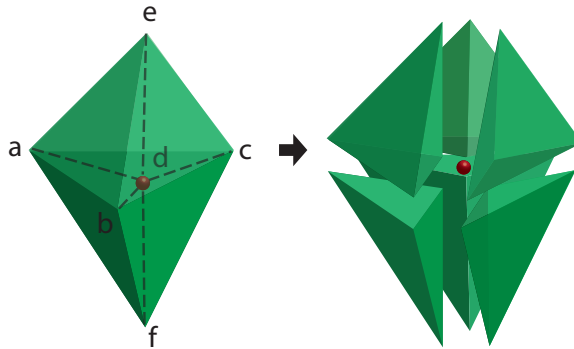


Rysunek 4.13: Metoda budowania elementu czworościennego.

przerywanym okręgiem na sferze. W budowaniu kolejnego czworościanu siatki taki wierzchołek musi być, z oczywistych względów, pominięty. W przypadku, kiedy kolejny wierzchołek stały siatki znajdzie się wewnątrz dwóch czworościanów, należy wprowadzić nowy, wewnętrzny podział na czworościany, których wspólnym wierzchołkiem będzie  $d$  (rys. 4.14). Przy czym należy podkreślić, że  $d$  nie jest koplanarne z trójkątem  $abc$ . Wygenerowane czworościany  $dace$  i  $dbce$ ,  $dabe$ ,  $dabf$ ,  $dbcf$  i  $dacf$  nie mają ścian koplanarnych. Problemy zbyt małych kątów w trójkątach ścian i zbyt małych wysokości brył w siatkach przestrzennych znajdują analogiczne rozwiązanie do siatek płaskich, chociaż stopień ich geometrycznego skomplikowania jest większy.

#### 4.4 Model siatki sferycznej uzyskany z FEM

Wykorzystując metodę budowy siatek dla FEM Delaunay'a, wygenerowano układ siatki mieszanej dla obiektu kołowego o średnicy 60m, przedstawionej na rys. 4.15. W celu determinacji punktów stałych podziału, wprowadzono krawędzie w formie żeber wewnętrznych, tworzących przecinające się części okręgu obwodowego. Wygenerowany układ

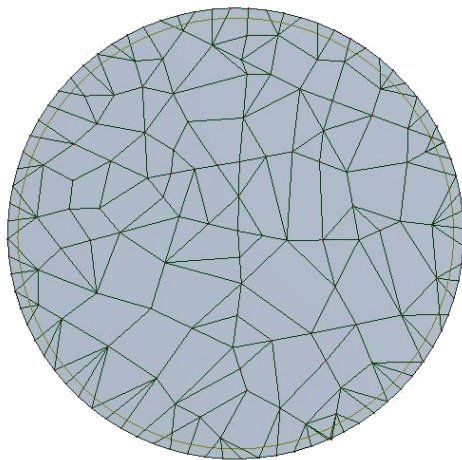


Rysunek 4.14: Podział wewnętrzny czworoscianów przy szczególnym położeniu wierzchołka stałego.

siatki elementów skończonych wykazuje dużą nieregularność, wynikającą z podziału wykorzystującego elementy trójkątne i czworokątne.

W strefie przy podparciu obwodowym występuje zagęszczenie podziałów o przewadze trójkątów. Dzięki wprowadzonym krawędziom żeber uzyskany podział wykazuje równomierne zagęszczenie, wyrażające się niewielką wartością proporcji długości najdłuższej do najkrótszej krawędzi siatki. Płaski układ siatki został odwzorowany poprzez mapowanie na powierzchnię sferyczną, z zastosowaniem rzutu prostokątnego wierzchołków i powtórzenie krawędzi grafu utworzonego przez siatkę FEM. Na podstawie uzyskanego układu geometrycznego zdefiniowano nieregularną powłokę prętową dyskretyzującą powłokę sferyczną o wyniosłości równej  $\frac{1}{4}$  rozpiętości.

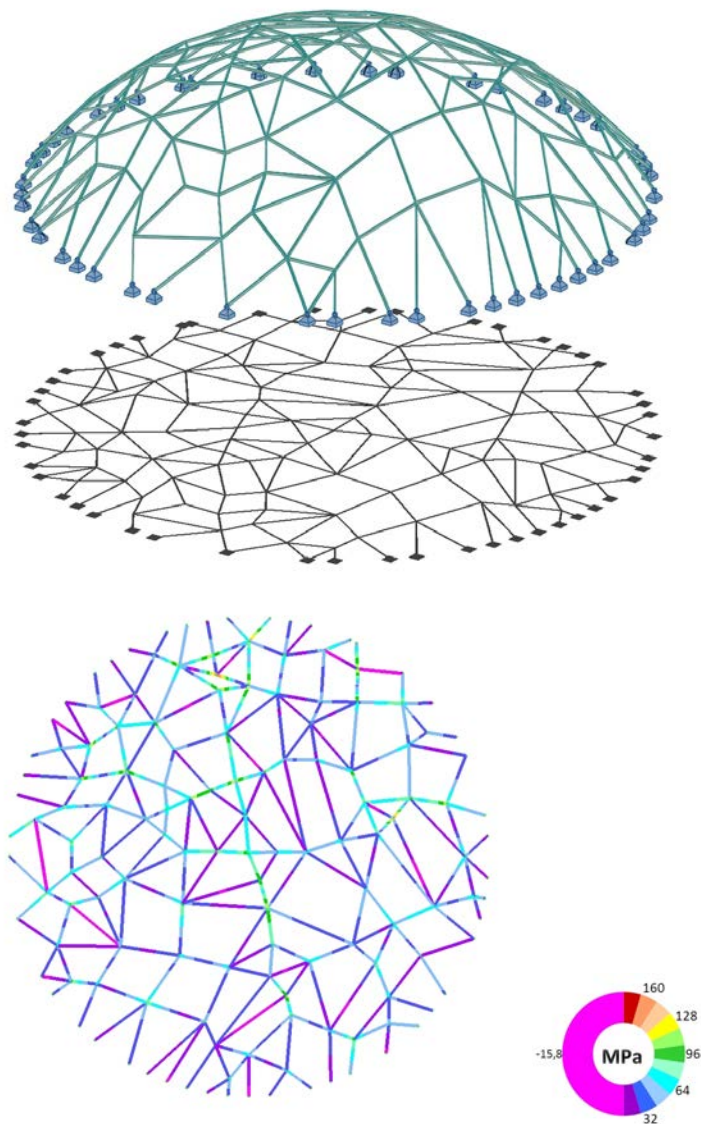
Przyjęto proste pręty o przekroju rurowym 0,35x0,15m połączone w sposób sztywny i założono obwodowe podparcie przegubowe nieprzesuwne oraz jednostronne obciążenie pionowe, rzutowane na powierzchnię powłoki. Pola czworokątne nie tworzą powierzchni płaskich, co jest pewnym utrudnieniem technologii pokrycia tego rodzaju konstrukcji, wymagającym dodatkowych elementów dystansowych, w celu zastosowania płaskich elementów kryjących. Problem nie występuje dla pokryć pneumatycznych, komorowych lub membran z materiałów technicznych. Wi-



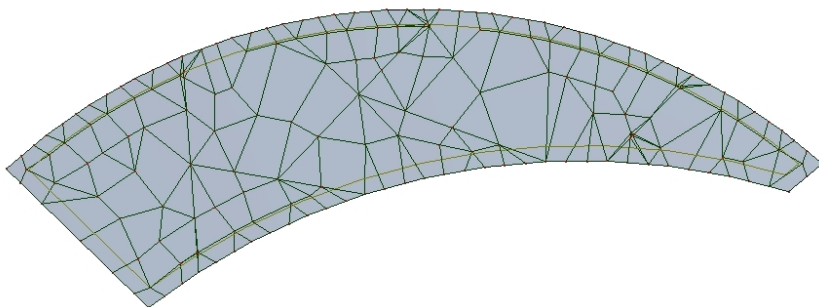
Rysunek 4.15: Siatka FEM dla elementu kołowego, wygenerowana w programie *Robot*.

doczny na rys. 4.16 cień konstrukcji ukazuje jej planarny charakter, ponadto uwidacznia przeprowadzoną redukcję kilku elementów siatki FEM, w celu zmniejszenia zagęszczenia prętów w węzłach przypodporowych.

Model powłoki prętowej został poddany wstępnej analizie statyczno-wytrzymałościowej, w wyniku której uzyskano wykres naprężeń maksymalnych w prętach ustroju konstrukcyjnego. Rozkład naprężeń w prętach powłoki, pomimo jej nieregularnego charakteru, wykazuje dużą równomierność wyężenia elementów ustroju. Większe wartości naprężeń występują w prętach o kierunkach zbliżonych do położenia południkowego powłoki sferycznej, a w prętach o ukierunkowaniu równoleżnikowym, szczególnie przy obwodzie powłoki, wartości naprężeń są zdecydowanie mniejsze. Ekstremalne wartości naprężeń występują przy węźle pręta o ukierunkowaniu równoleżnikowym położonego w strefie podporowej na kierunku ciągu prętów silnie wyężonych, biegnących do zwornika powłoki. Koncentracja naprężeń występuje w miejscu przerwania na kierunku południkowym przez płaski element trójkątny ciągu prętów. Poprawę własności konstrukcyjnych siatki w tym miejscu zapewniłby dodatkowy podział elementu trójkątnego w taki sposób, aby uzyskać ciągłość prętów przebiegających w jego otoczeniu w układzie południkowym. Analiza rozkładu naprężeń w badanym modelu potwierdza wnioski z wyników badań modeli powłokowych o rzucie kołowym w rozdziale drugim, o pew-



Rysunek 4.16: Model prętowej powłoki sferycznej z FEM z cieniem i mapą naprężeń (por. D3.5.).



Rysunek 4.17: Siatka FEM dla wycinka kołowego.

nej kierunkowości wyężenia prętów związanej z układem południkowo-równoleżnikowym. Można w tym miejscu nawiązać do typu konstrukcji prętowych określonych, jako kopuły Schwedlera, gdzie charakter opisanego rozkładu jest zdeterminowany geometrią powłoki.

## 4.5 Model toroidalnej powłoki prętowej z FEM

Siatki płaskiego podziału dla metody elementów skończonych mogą być stosunkowo łatwo budowane dla dowolnych rzutów obiektów i ich kształtów na brzegach i przy otworach wewnętrznych. W obiektach objętościowych kształtowanie układów bryłowych jest zdecydowanie trudniejsze i w praktyce inżynierskiej ogranicza się jedynie do wykorzystania modeli czworościennych, a więc o układach siatek przestrzennych, trójkątnych. W tej sytuacji prezentowane modele przestrzenne, zbudowane poprzez mapowanie siatek płaskich na powierzchnie zakrzywione są realizacją metody, która może znaleźć zastosowanie w kształtowaniu nieregularnych siatek prętowych w przestrzeni 3D.

Wydajną formą do kształtowania siatek nieregularnych są układy eliptyczne. Dla obszaru ograniczonego dwoma łukami okręgów wygenerowano siatkę FEM, stosując zasady kształtowania siatki jak dla rzutu kołowego z poprzedniego modelu. Wprowadzenie żeber ukośnych, jako wymuszonych krawędzi podziału urozmaica układ, jednocześnie prowa-

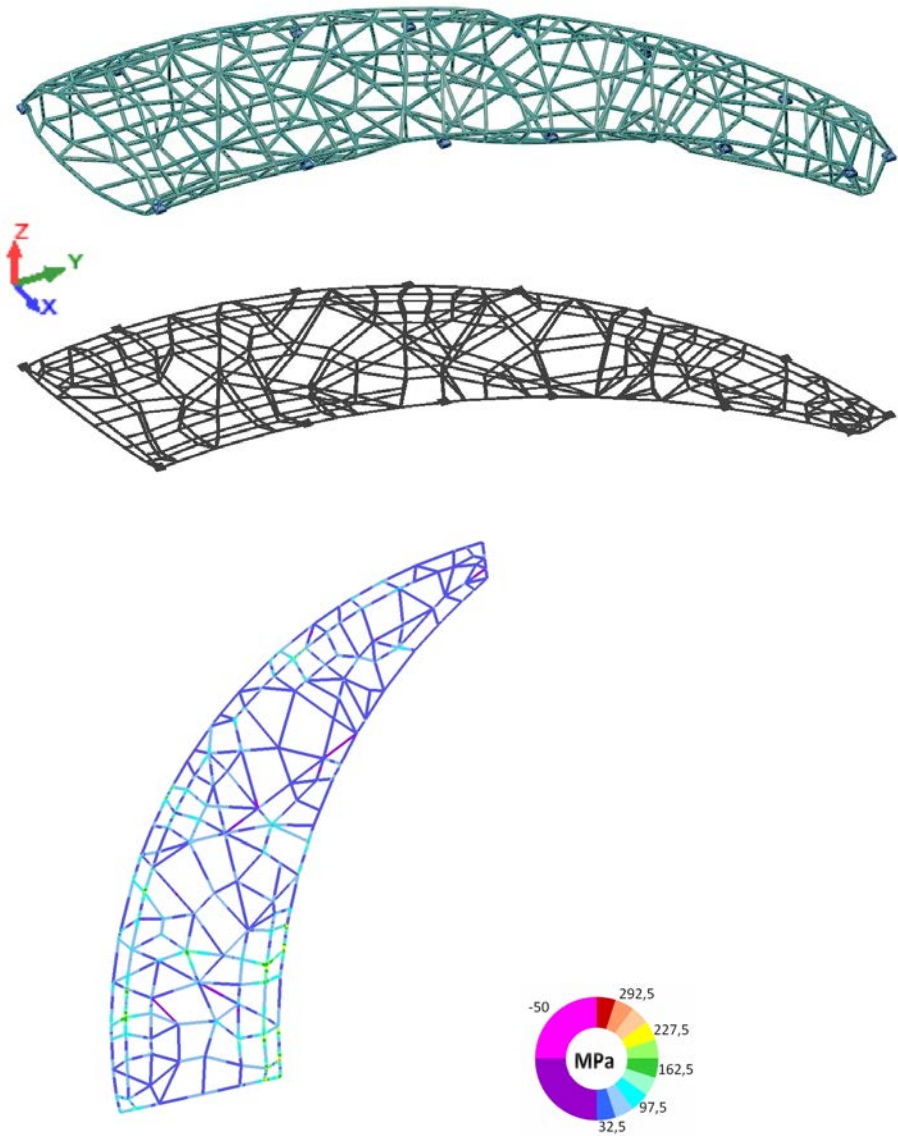
dzi do zagęszczenia siatki w środku obiektu. Takie ukształtowanie siatki w jej strefie środkowej jest korzystne także z punktu widzenia wyteżenia konstrukcji na niej odwzorowanej. Oczywiście, to arbitralne oddziaływanie na układ siatki ma również swoje negatywne aspekty. W omawianym modelu należy do nich zaliczyć powstanie „płaskich” trójkątów pomiędzy wymuszonymi krawędziami a trójkątami w zagęszczonej strefie brzegowej siatki. Wady tego rodzaju mogą być eliminowane w fazie odwzorowania siatki na powierzchnię kształtowania konstrukcji prętowej, z pominięciem zbędnych krawędzi siatki płaskiej. Należy też zwrócić uwagę na elementy czworokątne występujące w siatce. Z jednej strony wpływają one na wzbogacenie ukształtowania sieci i odwzorowanej z niej konstrukcji, z drugiej strony wpływają na deformację krzywizny powierzchni odwzorowania. W tym aspekcie korzystne dla kształtowania konstrukcji są czworokąty zwarte o mniejszej, w stosunku do trójkątów, powierzchni, ze względu na zmniejszenie opisanego powyżej efektu deformacji.

Wykorzystując zasady rzutowania prostopadłego, utworzono prętową powłokę dwukrzywiznową. Krzywą tworzącą powłokę bryły elipsy o dłuższej półosi 10–5m ustawionej poziomo, równoległe do promieni okręgu wewnętrznego rzutu siatki FEM<sup>3</sup>. Krótsza półoś elipsy ma stałą wartość 5m. Odwzorowanie przeprowadzono obustronnie w kierunku dodatnim i ujemnym osi pionowej, co doprowadziło do powstania układu symetrycznego siatki górnej i dolnej, widocznego na cieniu ukośnym układu konstrukcyjnego. Krawędzie okręgów brzegu siatki zamieniono na proste pręty dyskretyzujące luki brzegowe. W wybranych węzłach krawędzi umieszczono podpory przegubowe, nieprzesuwne, w których zbiegają się pręty powłoki górnej i dolnej. Przyjmując otwarty sposób ukształtowania funkcjonalnego wnętrza powłoki konstrukcyjnej, przyjęto rzutowane pionowo obciążenie modelu o wartości  $10kN/m^2$ , z podziałem po  $5kN/m^2$  rzutu dla górnej i dolnej części powłoki. Realizacja tego obciążenia jest możliwa w systemie podwieszenia do górnej części powłoki lub podparcia na prętach dolnej części powłoki, oczywiście z zastrzeżeniem równomierności rozkładu dla poszczególnych obszarów konstrukcji. Przyjęte zagęszczenie siatki FEM ma wpływ na długości wygenerowanych prętów w powloce i skutkuje widocznymi załamaniem jej powierzchni. Jednak powstałe imperfekcje kształtu powłoki są do zniwelowania przez system pokrycia konstrukcji dla różnych technologii obudowy.

W wyniku wstępnej analizy statyczno-wytrzymałościowej uzyskano rozkład naprężeń w prętach konstrukcji. Nieregularna siatka prętów wy-

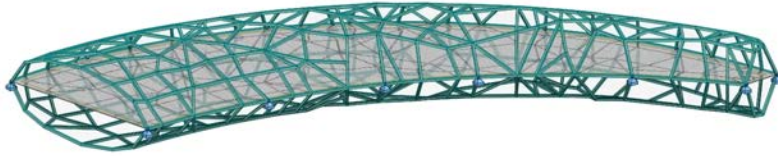
---

<sup>3</sup>Utworzona bryła ma kształt toroidalny, o przekroju eliptycznym, korzystnym ze względów funkcjonalnych, przy ewentualnym podziale płaszczyznami poziomymi przetrzeni obiektu.



Rysunek 4.18: Model eliptycznej powłoki podpartej obwodowo z cieniem i mapą naprężeń w rzucie pionowym (por. D3.6.).



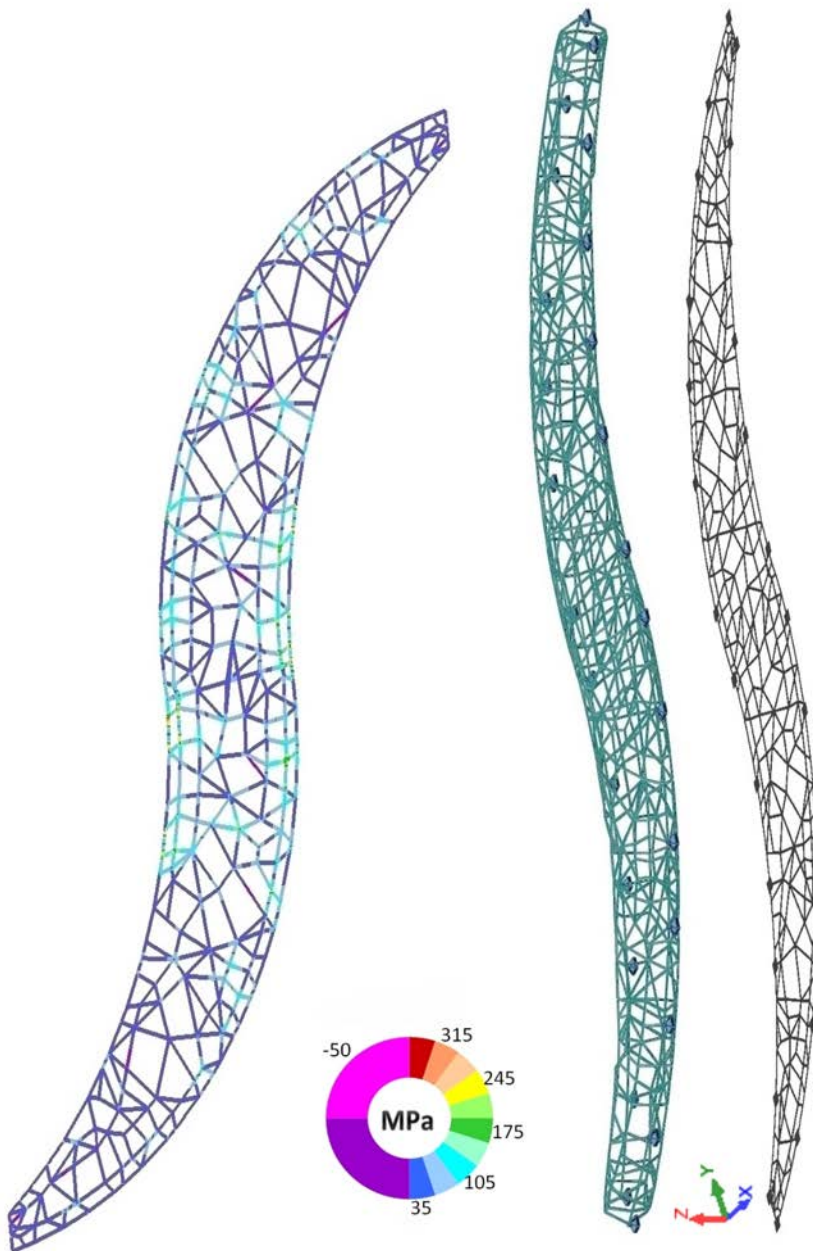


Rysunek 4.19: Model powłoki podpartej obwodowo z panelem środkowym.

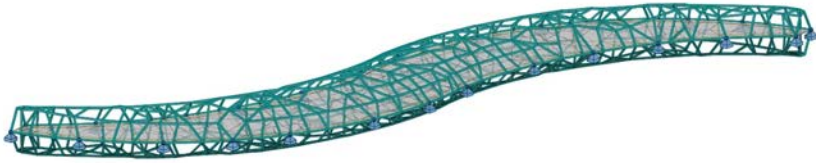
kazuje równomierne wyężenie jej poszczególnych elementów. Do zwiększenia naprężeń dochodzi przy brzegach struktury i w strefie zwornikowej dla największych rozpiętości powłoki eliptycznej wzdłuż prętów w miarę równoległych do krawędzi elips, tworzących powłokę. Wartości ekstremalne naprężeń występują w prętach położonych w strefach przypodporowych dla dużych rozpiętości struktury. W miejscach tych siatka FEM została utworzona w przeważającej ilości przez czworokąty. Po przeciwnej stronie rzutu elementy brzegowe o kształcie trójkątnym wpływają na zmniejszenie naprężeń przywęzłowych. Istotną rolę w przenoszeniu zginania powłoki prętowej, pracującej w schemacie rusztu przestrzennego, pełnią pręty poziome, położone powyżej (i poniżej) krawędzi podparcia struktury. W prętach tych, należących do oczek czworokątnych występują ekstremalne wartości naprężeń przy węzłach łączących elementy horyzontalne z wertykalnymi.

W badanym modelu pominięto rozwiązania płaszczyzn zamknięcia konstrukcji, traktując je, jako element wypełniający analizowaną strukturę. Na rys. 4.19 wprowadzono środkowy panel płytowy dzielący przestrzeń wewnętrzną struktury. Propozycja ta nie ma na celu podania rozwiązań funkcjonalnych obiektu, ale związana jest z realizacją schematów statycznych, przede wszystkim podpór konstrukcji. Ponieważ realizacja podpór nieprzesuwnych w kierunku prostopadłym do powłoki w rozwiązaniu inżynierskim może skutkować powstaniem rozbudowanych elementów przesłaniających strukturę, wprowadzenie elementów przeponowych pomiędzy podporami, zachowuje lepszą ekspozycję obiektu w przestrzeni.

Wygenerowany w poprzednim modelu układ konstrukcyjny może zostać zwielokrotniony poprzez przekształcenie geometryczne, polegające na obrocie wokół pionowej osi elipsy, zamykającej powłokę przestrzenną o kąt  $180^\circ$  aż do utworzenia układu ciągłego powłoki. Zastosowana metoda duplikacji obiektu podstawowego jest bardziej korzystna niż prosta symetria płaszczyznowa, ponieważ zmniejsza efekt widocznej powta-



Rysunek 4.20: Model dwuelementowej powłoki podpartej obwodowo z cieniem i mapą naprężeń w rzucie pionowym.



Rysunek 4.21: Model dwuelementowej powłoki podpartej obwodowo z panelem środkowym.

rzalności układu geometrycznego siatki obiektu. Cięż obiektu uzyskany w rzucie pionowym zawiera złożenie siatek, z których została odwzorowana struktura (por. rys. 4.20). W miejscu połączenia składowych powłok powstała strefa korzystnej, zwiększonej gęstości siatek z przeważającym udziałem elementów trójkątnych. Zagęszczenie siatki dotyczy całego obwodu struktury, która w miejscu połączenia uzyskała dostateczną sztywność. Podparcie konstrukcji zamodelowano jak dla elementu wyjściowego, gdzie mniejsza odległość podpór wzdłuż krawędzi wypukłej rzutu spowodowała zmniejszenie rozstawu podpór po obu stronach rzutu w pasie połączenia elementów składowych struktury.

Dla połączonych elementów przestrzennej powłoki prętowej przeprowadzono analizę statyczno-wytrzymałościową przy założeniach przyjętych dla elementu pojedynczego. Rozkład naprężeń w złożonym układzie prętowym jest zbliżony z układem uzyskanym dla pojedynczego elementu. Jedynie w strefie zbliżonej do płaszczyzny połączenia, ze względu na uzyskaną ciągłość powłoki, doszło do niewielkiej redystrybucji naprężeń. Zmniejszeniu, w stosunku do modelu jednoelementowego, uległy naprężenia w części zwornikowej powłoki eliptycznej. Ze względu na usztywnienie powłoki wzdłuż linii zwornikowej zmniejszeniu uległy także naprężenia w pierścieniu połączenia. Nieregularny układ prętów w siatce powłoki spowodował też zróżnicowanie wzrostu naprężeń w strefach podporowych po obu stronach struktury, w strefie połączenia. Na podstawie przeprowadzonej analizy układu naprężeń należy stwierdzić, że połączenie siatek składowych elementów wpłynęło korzystnie na wyrównanie wytrzymałości prętów budujących złożoną strukturę.

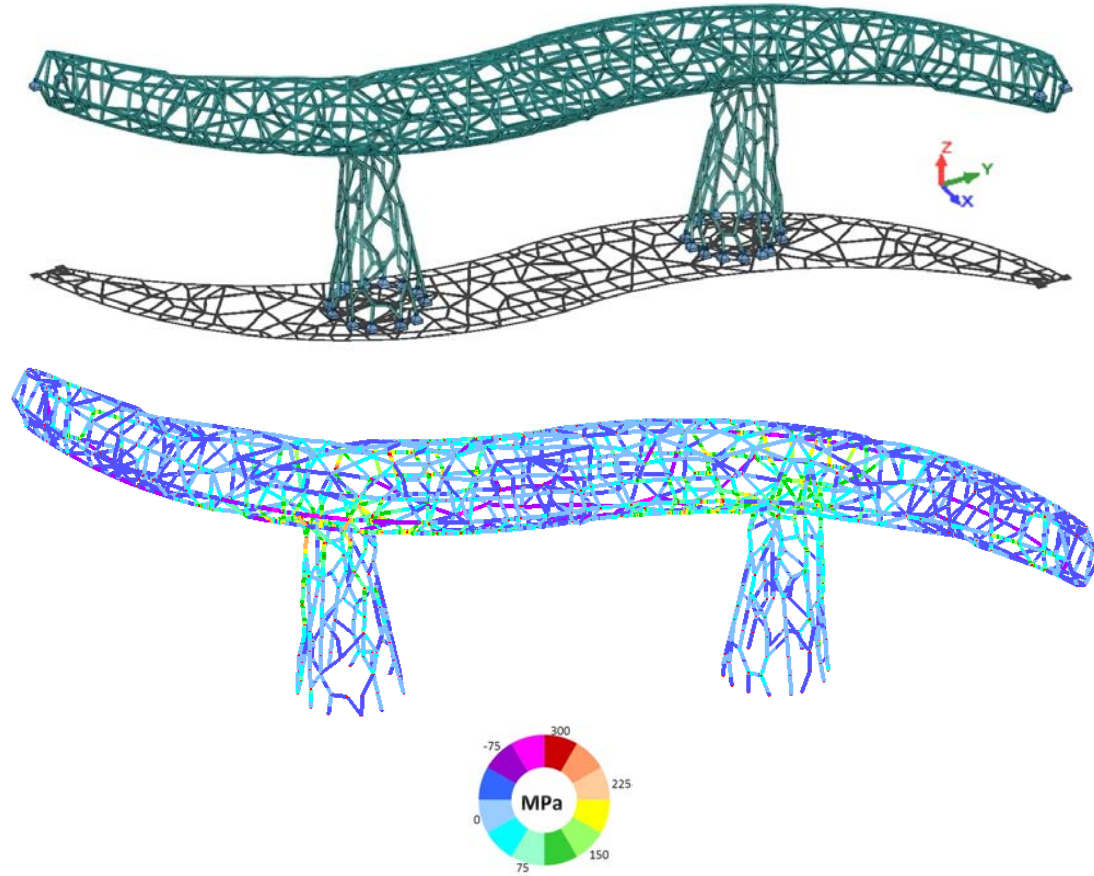
Wprowadzenie panelu konstrukcyjnego w płaszczyźnie środka struktury, analogicznie jak w układzie jednoelementowym, może skutkować korzystnym rozwiązaniem podparcia struktury, z wyeliminowaniem sił poziomych, działających na podpory przegubowe. W przypadku prowadzenia analizy funkcjonalnej wnętrza badanej bryły konstrukcyjnej, prze-

strzeń pod panelem mogłaby być wykorzystana dla wyposażenia instalacyjnego i zaplecza magazynowego obiektu budowlanego. Ukształtowanie przestrzenne dwuelementowej powłoki prętowej o wydłużonym kształcie, skłania do przeanalizowania sposobu podparcia konstrukcji.

W modelu wprowadzono zmianę podparcia obwodowego na dwie podpory punktowe. Podpory ukształtowano z wykorzystaniem modeli wygenerowanych w rozdziale drugim. W strefie podparcia połączono pręty podporowe z węzłami dolnej powłoki struktury. Przyjęty schemat podparcia struktury przestrzennej zmienia warunki pracy prętowej konstrukcji powłokowej, której schemat można traktować jako belkę trójprętową. Wariantowo, podjęto także analizę układu bez podparć końcowych, analogicznie do schematu belki dwuwspornikowej. W tym przypadku długość wsporników wynosi ok. 50m.

Analizę stanu naprężeń w prętach przeprowadzono w pierwszej kolejności dla układu podpór w środku i na końcach konstrukcji jak przedstawiono w modelu na rys. 4.22. W prętach powłoki prętowej poza obszarami podparcia działają wyrównane naprężenia o średniej wartości. Jedynie w części dolnej pomiędzy podporami ma miejsce zwiększone wyężenie pod wpływem rozciągania struktury. Do koncentracji naprężeń dochodzi w obszarach podparcia powłoki. W prętach dolnej części, aż do płaszczyzny rzutowania modelu FEM naprężenia w węzłach siatki osiągają wartości ekstremalne. Na tę sytuację ma wpływ rozrzedzenie siatki powłoki oraz w miarę prostopadle jej usytuowanie w stosunku do podpór. W strukturach podporowych zwiększenie naprężeń dotyczy prętów styku z podpieraną powłoką, jedynie w pionowej gałęzi, rozwidlającej się pod podparciem powłoki, działają znaczne naprężenia ściskające. Osiągnięcie naprężeń ekstremalnych należy także odnotować przy podporach, w linii płaszczyzny rzutowania modelu, na krawędziach oczek czworokątnych, o proporcjach zbliżonych do prostokąta. W obszarach omówionych koncentracji naprężeń należy przeprowadzić korektę wygenerowanego modelu przez modyfikację siatki z dodaniem pewnej ilości elementów tworzących oczka trójkątne.

Przy próbie modyfikacji modelu przez usunięcie podpór na końcach powłoki uzyskano duże wartości przemieszczeń pionowych, ze względu na niewystarczającą sztywność przestrzenną powłoki prętowej dla takiego schematu statycznego, przy łącznej długości modelu wynoszącej ok. 150m. Rozwiązaniem tego problemu przy dalszym kształtowaniu modelu byłoby wprowadzenie prętów w układzie tarczowym, pionowym na powierzchniach utworzonych przez krótsze półosie elips tworzących powłokę. Przepony te, przejmując część zginania nad podporami, wpłynęłyby na zmniejszenie przemieszczeń pionowych końca wsporników. Mo-



Rysunek 4.22: Model dwuelementowej powłoki podpartej punktowo z cieniem i mapą naprężeń w rzucie pionowym (por. D3.7.).

dele uzyskane metodą projekcji siatek FEM na powierzchnie zakrzywione mogą przybierać nietypowe, interesujące kształty. Układy prętów odwzorowane z metody elementów skończonych posiadają dobre własności konstrukcyjne. Zagęszczeniu krawędzi siatek przy podporach odpowiada zwiększona sztywność ukształtowanych na ich wzór powłok prętowych. Wykorzystanie możliwości składania obiektów w megastruktury prowadzi do wzbogacenia formy modeli. Przy użyciu rotacji do przekształceń części składowych efekt powtarzalności elementów w układzie jest znacznie osłabiony. Uzyskane formy toroidalnych powłok prętowych mogą być łączone z podporami ukształtowanymi w rozdziale drugim.

## Rozdział 5

# Zastosowanie metod probabilistycznych do kształtowania siatek konstrukcyjnych

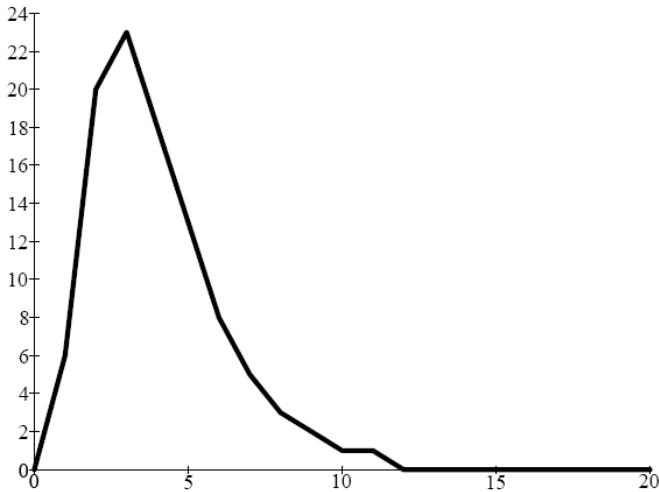
### 5.1 Losowe generowanie rusztu kołowego

W kształtowaniu nieregularnych siatek prętowych elementy probabilistyki znajdują zastosowanie w zakresie opisanych grafów losowych (*random graphs*). Analizy rozkładów statystycznych dotyczą przede wszystkim samego ukształtowania geometrycznego struktury i związków budujących ją elementów<sup>1</sup>. W tym zakresie opisano takie zależności jak prawdopodobne ilości wierzchołków danego stopnia, ustalając maksymalną ich ilość w płaskim grafie losowym na 11, przy czym największe prawdopodobieństwo osiągają wierzchołki stopni 2-4, których ilość dla grafu losowego o stu wierzchołkach wynosi odpowiednio 20; 23; 18 sztuk ([31]).

Zbliżonym badaniem zostały objęte także ilości krawędzi w odniesieniu do ilości wierzchołków oraz prawdopodobieństwo powstania wierzchołków odizolowanych. Ten ostatni przypadek jest o tyle istotny, że

---

<sup>1</sup>Podstawowe zależności i wstępne przykłady zastosowań grafów losowych w modelowaniu konstrukcji podano w [139].



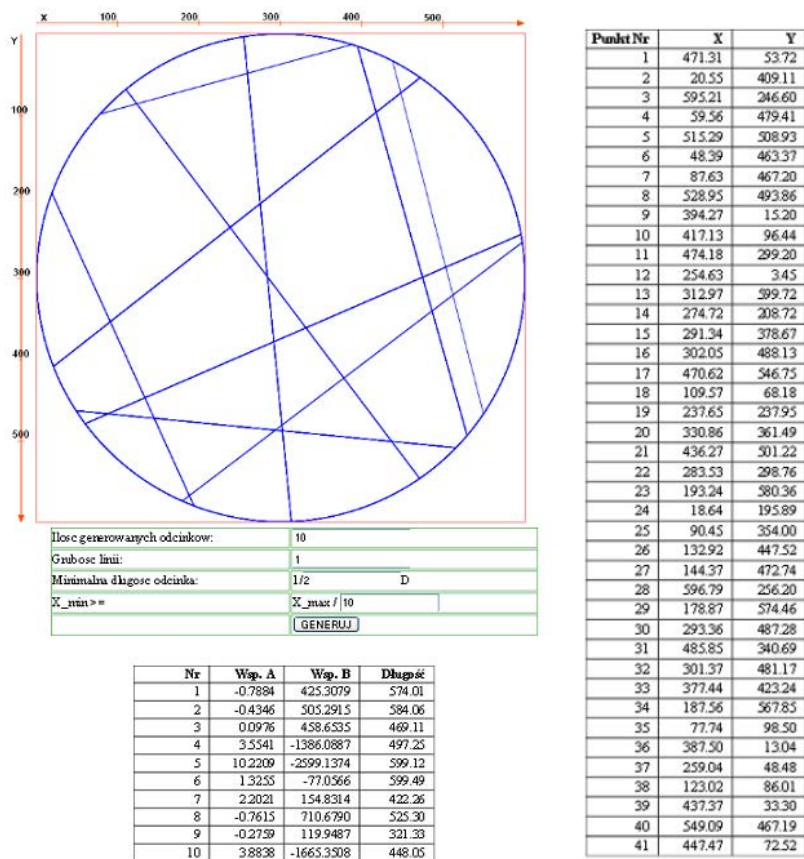
Rysunek 5.1: Rozkład prawdopodobieństwa stopni wierzchołków w grafie losowym (za [31]).

określa stan rozpojenia grafu, co przekłada się na sytuację utraty stateczności przez opisaną na nim konstrukcję. Ogólnie zdarzenia losowe zaistnienia pojedynczego wierzchołka lub pręta traktuje się jako równoprawdopodobne.

Przyjęto w literaturze przedmiotu stosować dwie strategie generowania grafów losowych. Jedna zakłada w punkcie wyjściowym istnienie grafu pustego, do którego w drodze losowania dokłada się pręty i wierzchołki. Druga ścieżka postępowania badawczego rozpoczyna się od przyjęcia za model wyjściowy graf pełny  $K_n$  o  $n$  wierzchołkach, który jest losowo redukowany przez kolejne usuwanie prętów lub wierzchołków [31]. Do przekształcenia losowych grafów w obu procedurach stosuje się także inne działania na grafach opisane w rozdziale drugim. Dla budowania obiektów fizycznych na drodze niezależnych prób losowych istotne jest uwzględnienie parametrów stałych struktury, które należy przyjąć arbitralnie. W przypadku modelowania konstrukcji prętowej najwięcej parametrów jest związanych z własnościami statyczno-wytrzymałościowymi struktury. W tym aspekcie procesy stochastyczne są często wykorzystywane do optymalizacji układu konstrukcyjnego.

W celu zbudowania grafu losowego jako modelu nieregularnego układu prętowego opracowano algorytm w aplikacji *Java Script*, zamieszczono





Rysunek 5.2: Graf losowy rusztu kołowego na dziesięciu cięciwach (AB) wraz ze współrzędnymi punktów przecięć.

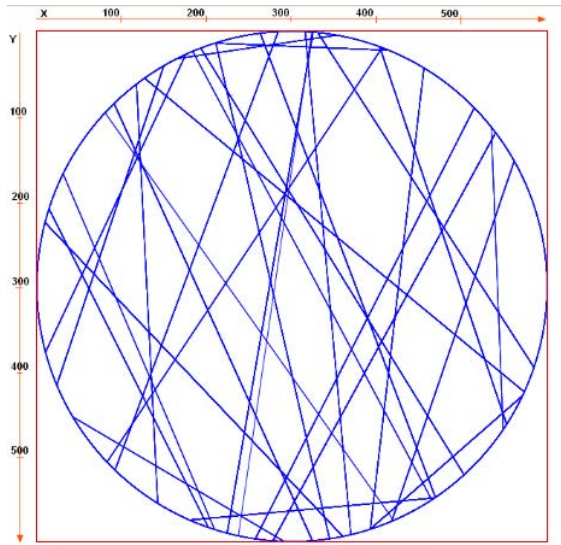
ny w dodatku pierwszym do niniejszego opracowania. Założono wstępnie położenie wierzchołków grafu na okręgu w drodze losowania. W celu ograniczenia generacji układów o małej przydatności do kształtowania układów prętowych, wprowadzono ograniczenia parametryczne. Dla wylosowanych punktów określono zdefiniowaną w układzie współrzędnych łączącą je prostą i przeliczono długość cięciwy, jaką tworzy krawędź pomiędzy punktami. Zdefiniowano parametr proporcji długości średnicy do wylosowanej krawędzi oraz parametr proporcji najdłuższego wylosowanego odcinka do najkrótszego. W kolejnym etapie algorytmu wyznaczono współrzędne przecięć krawędzi grafu utworzonego przez cięciwy okręgu. Przyjmując nowe wierzchołki w punktach przecięcia, zmieniono charakter grafu, uzyskując graf planarny, a więc możliwy do realizacji w przestrzeni 3D. Losowość opracowanego algorytmu umożliwia szybką generację kolejnych układów rusztowych, zbudowanych na planie kołowym i dzięki wizualizacji grafu daje szansę wstępnej oceny jego wydajności do zastosowania konstrukcyjnego. Wygenerowany dla dziesięciu cięciw model przedstawiono wraz ze współrzędnymi na rys. 5.2.

Do podstawowych kryteriów oceny geometrycznego nieregularnego rusztu płaskiego należy zaliczyć gęstość siatki prętów, kształt oczek siatki oraz rozmieszczenie prętów podporowych na obwodzie struktury. Gęstość, związana z wypełnieniem konstrukcji, jest też istotną cechą, wpływającą na dystrybucję obciążeń. Kształt oczek wpływa na ukształtowanie węzłów konstrukcji, a więc na podpory konstrukcji i realizację założonego schematu statycznego ustroju.

Dla rusztu zbudowanego na trzydziestu cięciwach przedstawiono dwa grafy nieregularne, wygenerowane dla tych samych parametrów proporcji długości odcinków. Układy cechuje podobny stopień zagęszczenia siatki i zbliżona kierunkowość linii tworzących. Do własności geometrycznych wartościujących wyżej graf *b/* należy zaliczyć większą zwartość oczek siatki, większe kąty przecięć krawędzi oraz mniejszą ilość pojedynczych krawędzi o znacznej długości, dochodzących do okręgu podporowego. W modelu *a/* grafu występuje większa ilość kierunków wzajemnie równoległych (w analizie optycznej) w stosunku do modelu *b/*. Własność ta obniża wrażenie nieregularności generowanego układu prętów.

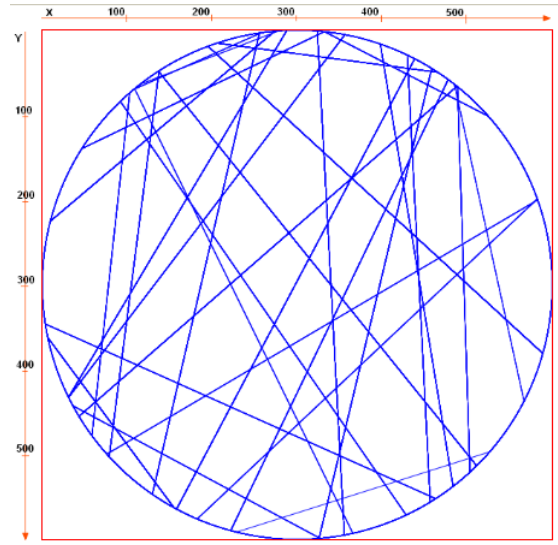
## 5.2 Redukcja prętów w ruszcie kołowym

Wygenerowany losowo układ rusztowy jest zbiorem cięciw okręgu. W punktach przecięcia odcinków zdefiniowano węzły sztywne połączeń



Ilość generowanych odcinków:	30
Grubość linii:	1
Minimalna długość odcinka:	$1/4 \cdot D$
$X_{min} \geq$	$X_{max} / 5$
<input type="button" value="GENERUJ"/>	

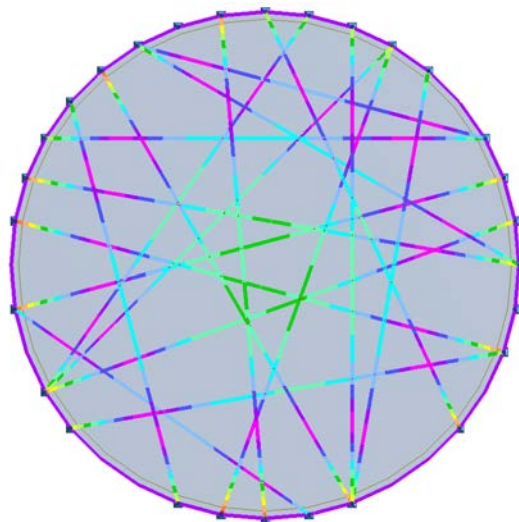
a/



Ilość generowanych odcinków:	30
Grubość linii:	1
Minimalna długość odcinka:	$1/4 \cdot D$
$X_{min} \geq$	$X_{max} / 5$
<input type="button" value="GENERUJ"/>	

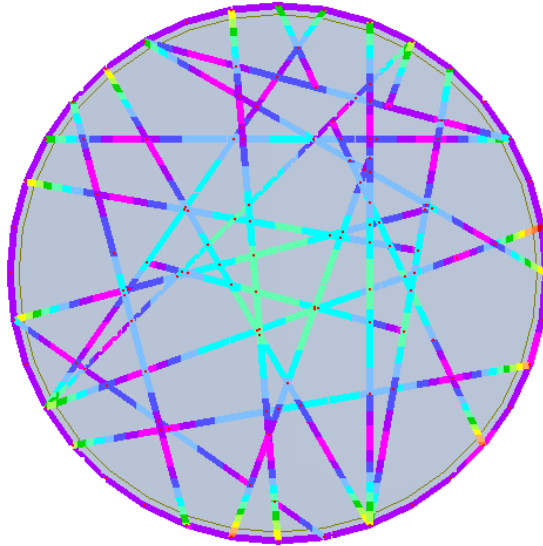
b/

Rysunek 5.3: Wariantowe generacje grafów losowych na trzydziestu cięciwach.



Rysunek 5.4: Układ naprężeń początkowych w ruszcie kołowym, zbudowanym z trzydziestu sześciu cięciw.

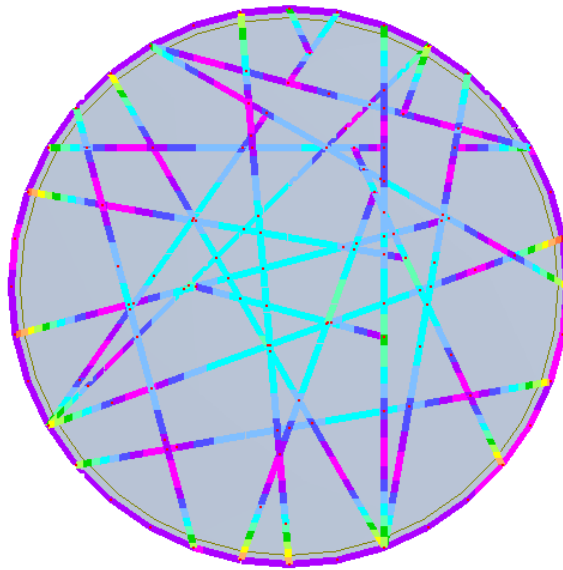
prętów siatki konstrukcyjnej. Oczka powstałej, nieregularnej siatki mają kształt wielokątny z przewagą trójkątów i czworokątów dla podziałów o większej gęstości. W obszarach rozrzedzenia siatki występują wielokąty wyższego stopnia, aż do siedmiokątów nieforemnych. Przy sztywnym pierścieniu obwodowym przeważają węzły podporowe pojedynczych elementów rusztu. Tylko lokalnie do podpory dochodzą dwa lub trzy pręty. Poddany obciążeniu jednostkowemu układ przeanalizowano wstępnie pod względem statyczno-wytrzymałościowym. Uzyskany rozkład naprężeń jest zbliżony do znanej analogii prętowej wyężenia rusztu, z dużymi naprężeniami w centrum układu prętowego, poprzez strefę małego wyężenia w połowie promienia koła, aż do ekstremalnie wyężonej strefy podporowej, gdzie pojedyncze pręty, zamocowane sztywno do pierścienia doznają dużych wartości zginania. Analizując poszczególne układy w tej ostatniej strefie można zauważyć, że w miarę symetryczne układy typu „X” cięciw omijających centralną strefę rusztu są rozwiązaniem najlepiej przenoszącym obciążenia rusztu na podporę. Kolejnym wydajnym układem są pręty dochodzące do podpory w formie „V”, jednak z zastrzeżeniem przebiegu tworzących je cięciw poza częścią środkową rusztu. Dla przypadków pojedynczego oparcia jedynie pręty położone na cięciwach przebiegających w strefach małego wyężenia nie są nadmiernie wyężone w węźle podporowym.



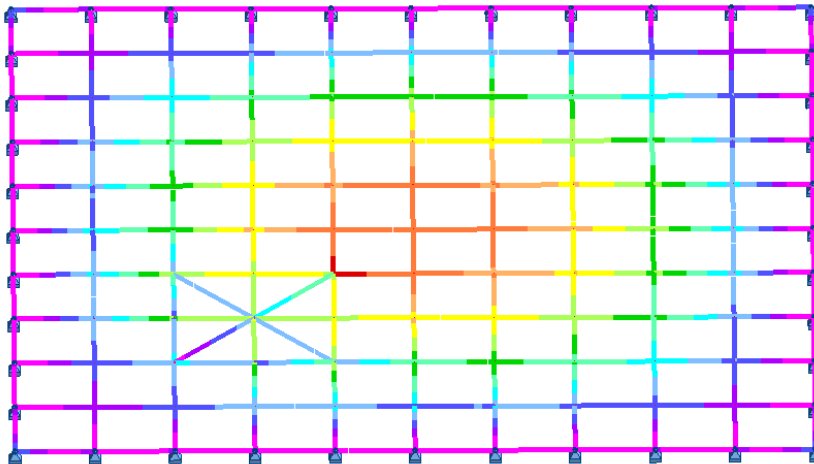
Rysunek 5.5: Układ naprężeń po redukcji dziesięciu elementów.

Dla badanego modelu zaimplementowano algorytm usuwania prętów, w których występują najmniejsze wartości naprężeń. Po usunięciu każdego pręta następuje przeliczenie modelu numerycznego, w celu znalezienia pręta o najmniejszym wyężeniu. Po usunięciu dziesięciu elementów nastąpiło zwiększenie wielokątnych oczek siatki konstrukcyjnej przy brzegu modelu. Dodatkowo wskutek usunięcia krótkich prętów zmniejszył się stopień niektórych węzłów wewnętrznych. W większości węzłów podporowych doszło do zwiększenia wartości naprężeń. Natomiast wartości naprężeń w obszarze środkowym wyrównały się, przy niewielkiej redukcji wartości maksymalnych.

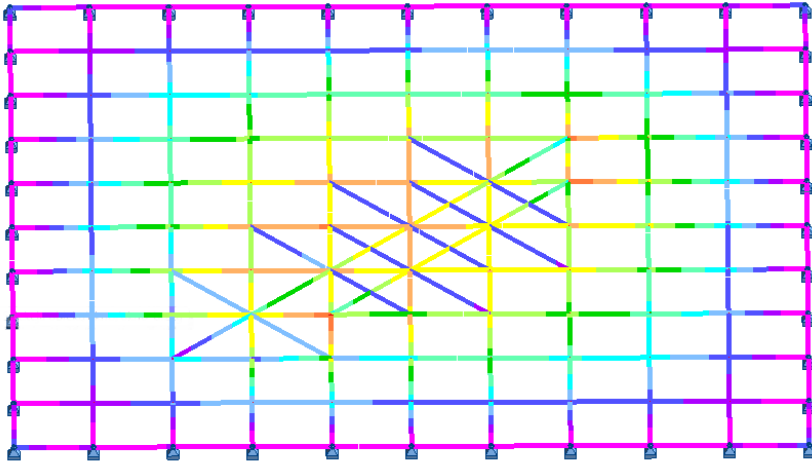
Usunięcie kolejnych dwudziestu elementów w badanym ruszcie na ruszcie kołowym wprowadziło dalsze uporządkowanie układu prętów z usunięciem prętów z jednej z cięciw okręgu obwodowego. W efekcie zredukowana została wartość naprężeń w strefie środkowej struktury. Wyniki wstępnych badań procedury modyfikacji rusztu płaskiego o dowolnym układzie prętów pozwalają ocenić pozytywnie proponowaną metodę kształtowania układu prętowego.



Rysunek 5.6: Układ naprężeń po redukcji trzydziestu elementów.



Rysunek 5.7: Układ naprężeń w ruszcie prostokątnym z dodanym elementem przekątniowym.

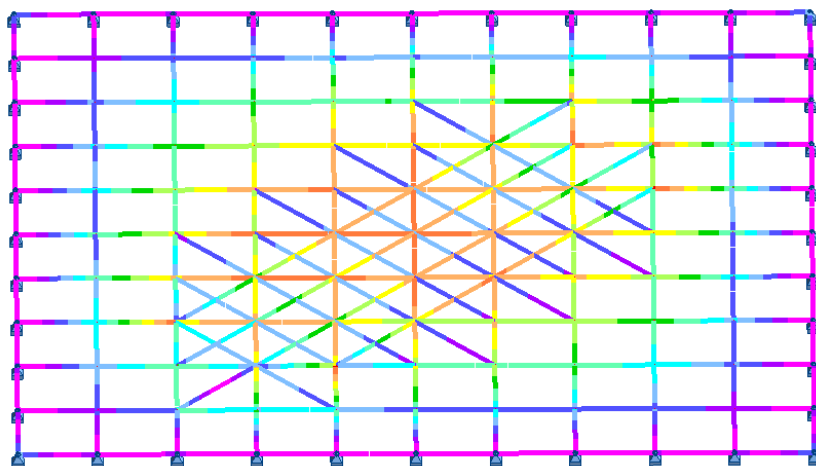


Rysunek 5.8: Układ naprężeń po dodaniu pięciu elementów przekątniowych.

### 5.3 Losowe wstawianie grup prętów w rusztach płaskich

Kolejna metoda generowania nieregularnych układów prętowych polega na uzupełnianiu konstrukcji bazowej przez dodawanie nowych elementów. Procedurę tę można implementować zupełnie losowo lub z uwzględnieniem pewnych parametrów własności statyczno-wytrzymałościowych modyfikowanego obiektu. Do podstawowych kryteriów rozmieszczania nowych elementów w strukturze należy zaliczyć zmniejszenie ekstremalnego wyężenia prętów. Dla przyjętego, prostego modelu rusztu ortogonalnego przyjęto układ czterech prętów przekątniowych, zbieżnych w jednym węźle rusztu. Wprowadzenie pojedynczego zestawu tych prętów prowadzi w sposób ewidentny do redystrybucji naprężeń w sąsiedztwie modyfikowanego układu. W zestawie prętów dodanych układ naprężeń wykazuje logiczną kierunkowość wzrostu wraz ze zbliżeniem położenia przekroju w pręcie do środka struktury, podczas gdy na drugiej prostopadłej utrzymują się stałe, średnie wartości naprężenia.

Wprowadzenie kolejnych pięciu zestawów przekątniowych wywołało redukcję naprężeń w strefie środkowej struktury (por. rys. 5.8). Element losowego wstawienia pierwszego zestawu przekątniowego skutkuje zaburzeniem symetrii układu, poprzez usytuowanie prętów dodanych wzdłuż



Rysunek 5.9: Układ naprężeń po dodaniu piętnastu elementów przekątniowych.

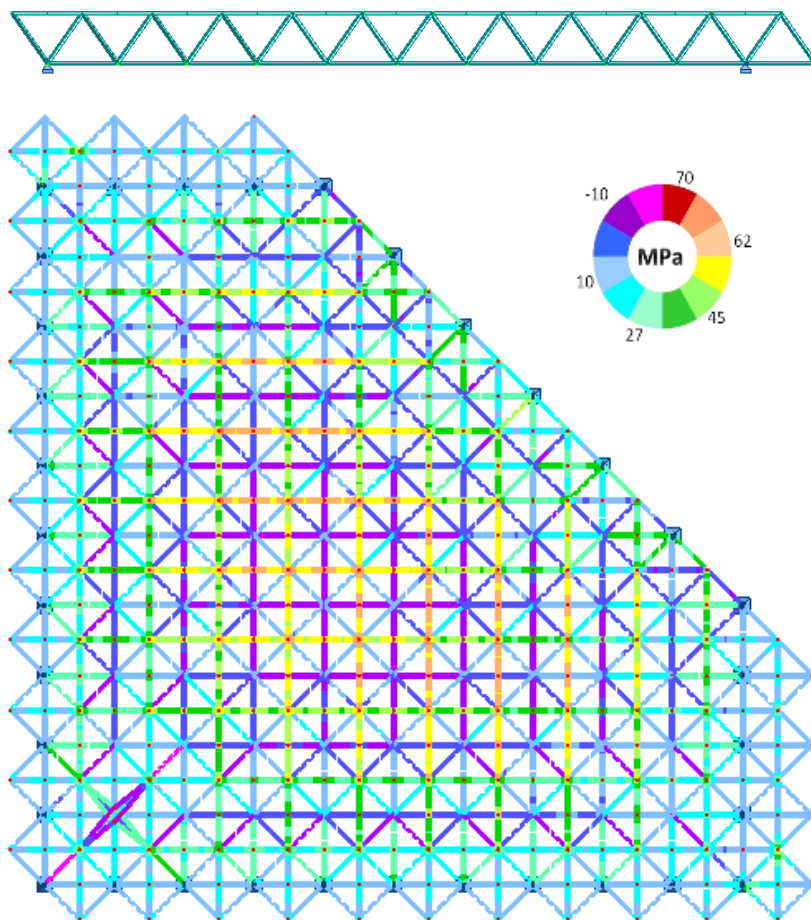
jednej przekątnej rzutu rusztu<sup>2</sup>. Również wewnętrzne naprężenia dla prętów ukośnych są ułożone kierunkowo z większymi wartościami równoległe do opisanej wyżej przekątnej. Dodanie kolejnych dziesięciu zestawów elementów przekątniowych wywołuje modyfikację strefy środkowej rusztu. W układzie naprężeń dochodzi do kolejnej redystrybucji zarówno w prętach dodanych, przez stopniowe zwiększanie się w nich naprężeń, przy niewielkiej redukcji dla prętów podstawowych.

Widoczna pewna kierunkowość propagacji elementów dodatkowych jest związana z krawędziową zmianą sztywności giętej rusztu w węzłach jednostronnie połączonych z elementem przekątniowym. W prętach położonych po drugiej stronie takiego węzła dochodzi do zwiększenia naprężeń wskutek ograniczenia odkształcenia węzła przez dodatkowy pręt usztywniający (w położeniu przekątniowym). W tej sytuacji strefa zwiększonych naprężeń w prętach rusztu ortogonalnego rozszerza się wraz z obszarem pokrycia struktury przez dodatkowe pręty przekątniowe. W świetle powyższej obserwacji można wnioskować, że na kierunek wzrostu obszaru pokrytego przez pręty dodatkowe ma wpływ także początkowe położenie zestawu prętów przekątniowych.

W celu weryfikacji wyników uzyskanych dla rusztu płaskiego prze-

<sup>2</sup>Model rusztu jest przeliczany po każdym wstawieniu zestawu prętów i automatycznie wyszukiwane jest nowe miejsce wstawienia w węzle, przy którym działają ekstremalne wartości naprężeń.





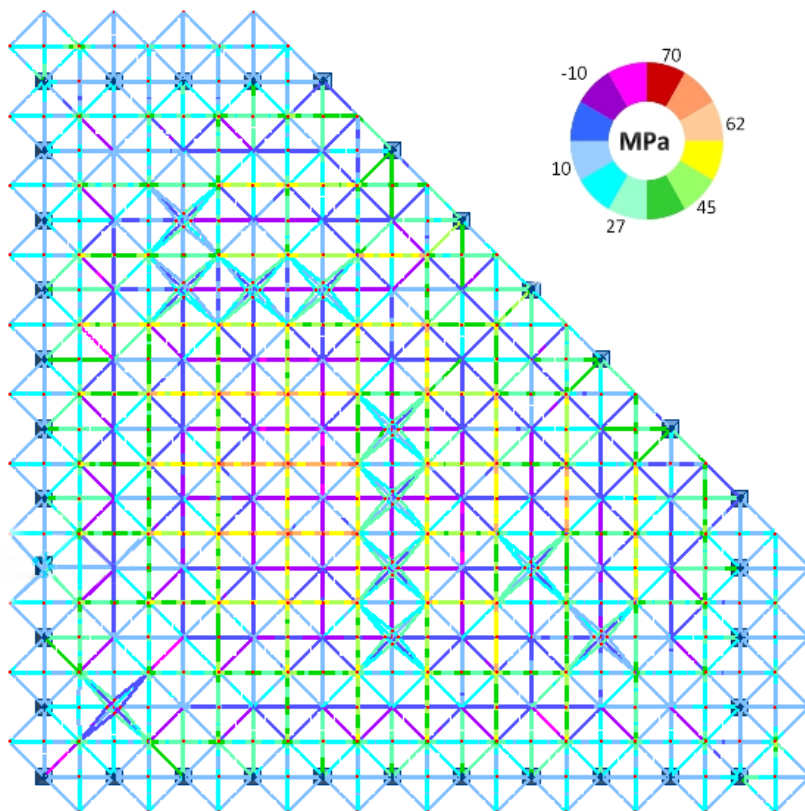
Rysunek 5.10: Układ naprężeń w ruszcie dwuwarstwowym (zbudowanym z czworoscianów pokazanych w przekroju) z dodanym elementem przekątniowym.

proawdzono analizę modelu numerycznego przestrzennego rusztu dwuwarstwowego zbudowanego z czworoscianów foremnych w układzie diagonalnym. W efekcie otrzymano ruszt złożony z połówek ośmiościanów, z wierzchołkami w warstwie dolnej, połączonymi siatką kwadratową. Dla ograniczenia efektu kierunkowości rozbudowy obszaru prętów dodanych rzut struktury ma kształt kwadratowy z odcięтым narożem. W celu lepszej wizualizacji dodawanym elementom nadano kształt wydłużonej gwiazdy czteroramiennej. Budując model statyczny usytuowano podpory przegubowe w dolnych węzłach obwodowych struktury. Wyteżenie prętów struktury o większych wartościach naprężeń dotyczy warstwy górnej i dolnej w ich środkowych obszarach, przy czym wartości maksymalnych naprężeń ściskających w warstwie górnej są dwukrotnie większe od wartości naprężeń rozciągających w warstwie dolnej.

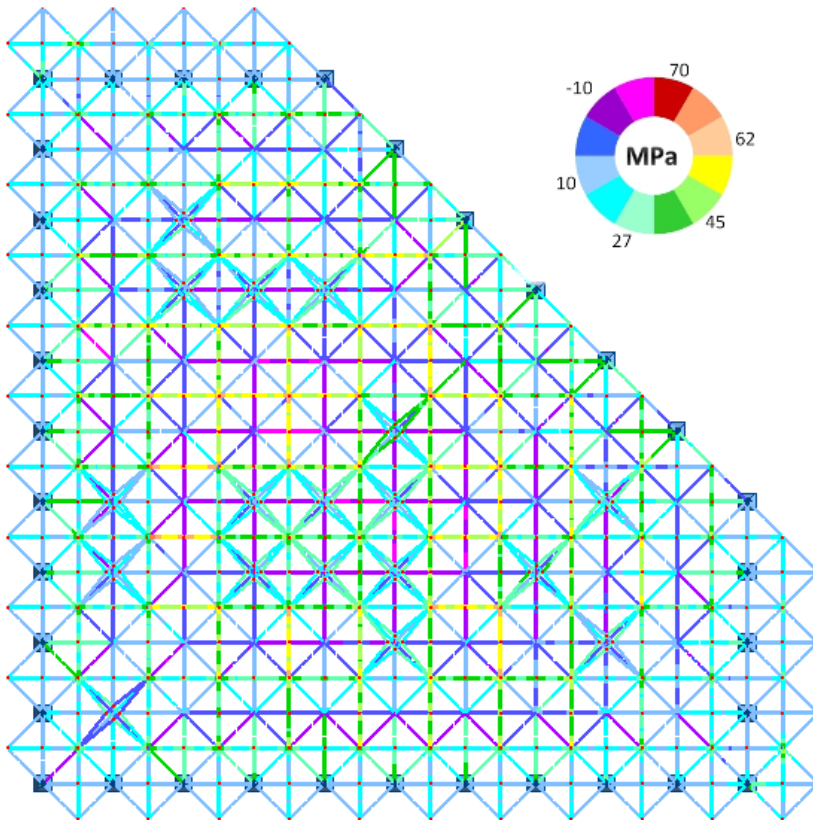
Elementy dodane przy węzłach warstwy górnej prętów, gdzie występowały ekstremalne wartości naprężeń ściskających, wpłynęły na zmianę dystrybucji naprężeń głównie w obszarze wstawienia. Układ dodanych dziesięciu zestawów nie jest regularny, chociaż tworzy grupy liniowo zorientowane. W czasie prowadzonej analizy modelu po dodaniu kolejnego zestawu prętów następuje przeliczenie wartości naprężeń dla całej struktury. Dopiero na tej podstawie następuje wybór miejsca wstawienia prętów przekątniowych przy węźle w miejscu maksymalnie wyteżonego pręta.

W wyniku kontynuacji algorytmu badania struktury wstawiono kolejne zestawy prętów przekątniowych, które zaczęły wypełniać obszar zwiększonego wyteżenia prętów warstwy górnej w strukturze wyjściowej. Zmniejszeniu naprężeń w prętach warstwy górnej towarzyszy zwiększenie wyteżenia krzyżulców przypodporowych, w szczególności w oczkach siatek, gdzie dochodzą pręty przekątniowe. Ogólnie efekt redystrybucji naprężeń dla rusztu dwuwarstwowego jest nie wielki.

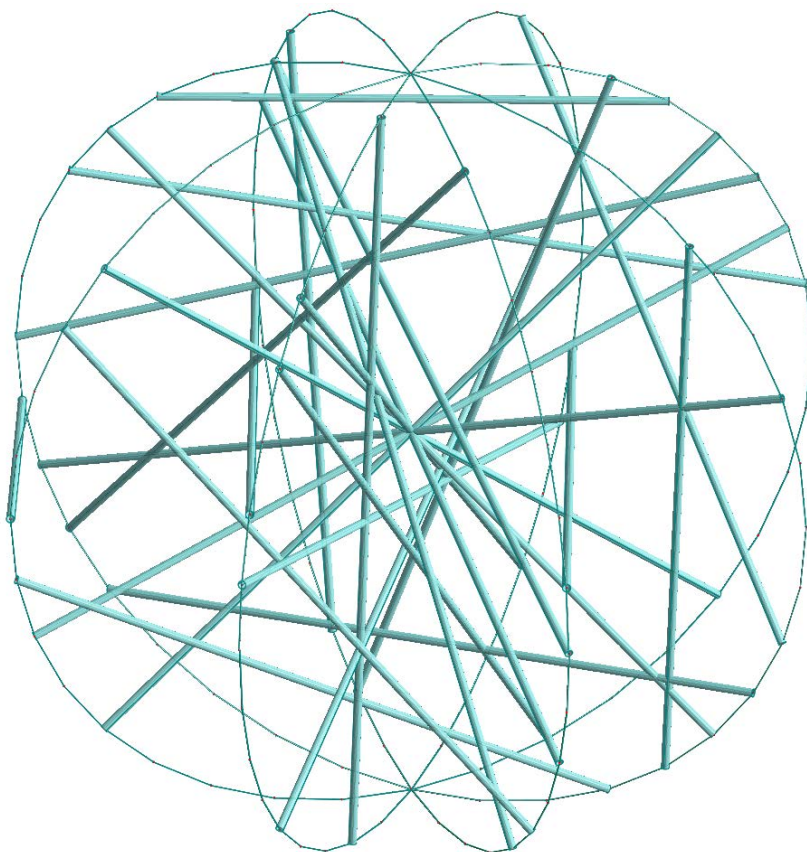
Przedstawiona metoda uzupełniania prętów w siatkach prętowych jest działaniem optymalizacyjnym, zmierzającym do wyrównania wartości naprężeń w prętach konstrukcji. Jednocześnie możliwość losowego wprowadzania uzupełnień przełamuje monotonię modularnych struktur prętowych. Istotnym ograniczeniem metody jest problem dopasowania układów uzupełniających do kształtu siatki struktury podstawowej, co zmniejsza efekt formalny modyfikacji konstrukcji.



Rysunek 5.11: Układ naprężeń po dodaniu dziesięciu elementów przekątniowych.



Rysunek 5.12: Układ naprężeń po dodaniu dwudziestu elementów przekątniowych.

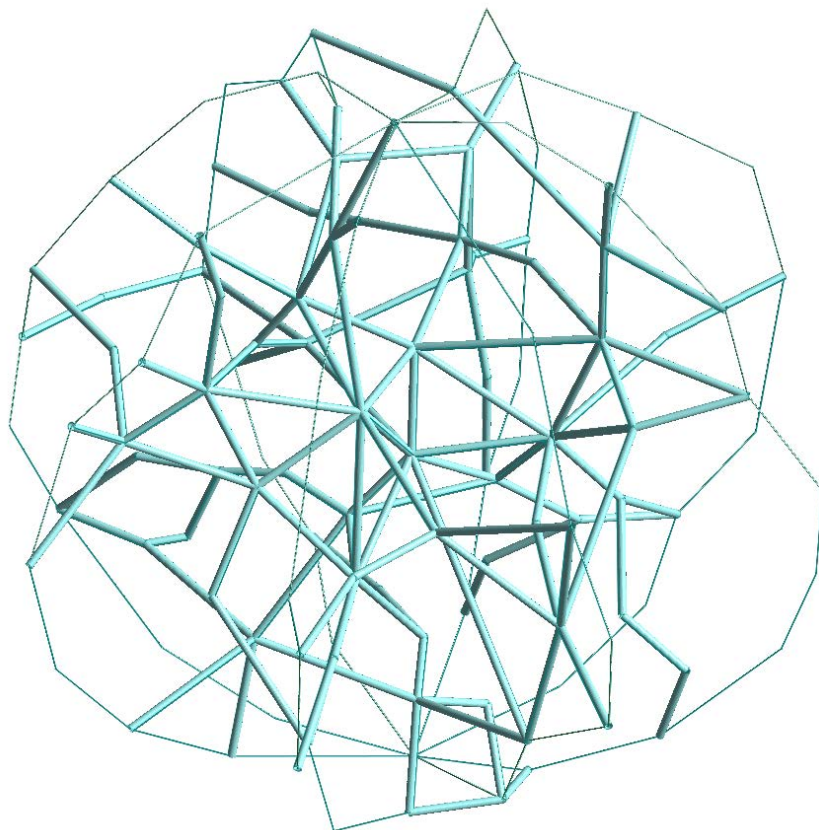


Rysunek 5.13: Nieregularny układ prętów w przestrzeni kuli.

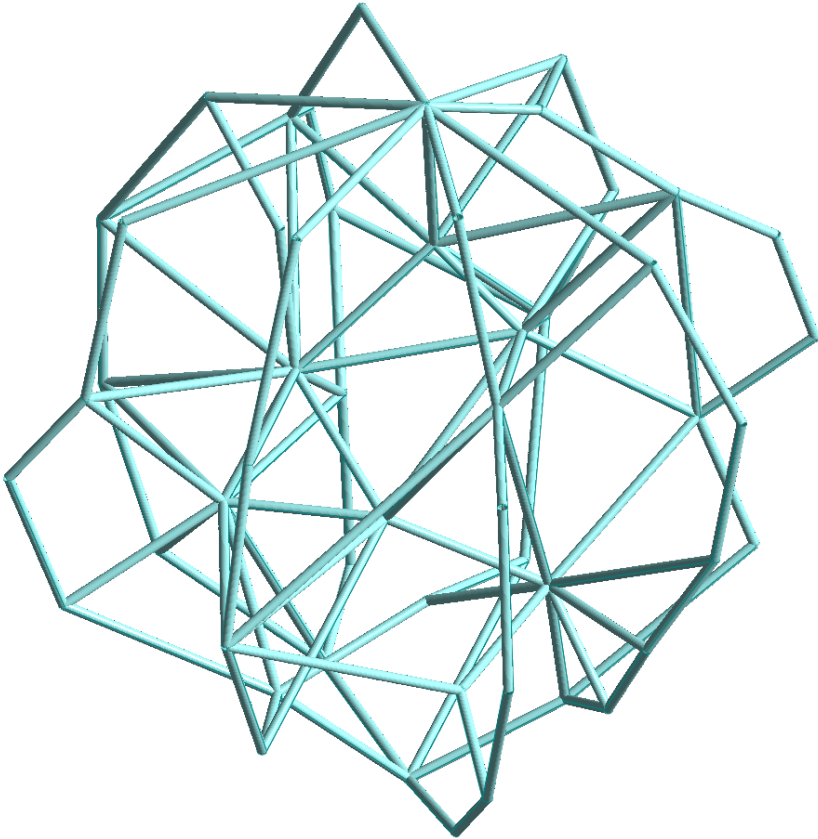
## 5.4 Losowa modyfikacja nieregularnych rusztów przestrzennych

Kształtowanie nieregularnych konstrukcji przestrzennych jest zadaniem trudnym [54]. Fakt ten potwierdzają realizacje obiektów budowlanych, wspomnianych w rozdziale pierwszym, oraz tesselacje przestrzeni, ze szczególnym przypadkiem tworzenia czworościennych podziałów elementów objętościowych dla FEM, opisanych w rozdziale czwartym. Kontynuując rozważania z pierwszej części niniejszego rozdziału, podjęto próbę wygenerowania przestrzennego układu prętowego o dużym stopniu nieregularności. W tym celu wybrano losowo zbiór odcinków na cięciwach powłoki sferycznej o średnicy 15m, z zagęszczeniem w pobliżu środka kuli. Zbiór prętów jest rozłączny, a więc mógłby stanowić też bazę prętową do budowy struktury typu *tensegrity*, jednak ze względu na procedurę modyfikacji założono dla modelu schemat statyczny ramy przestrzennej. Narzędziem modyfikacji układu prętowego jest, podobnie jak w rozdziale drugim, „ściągnięcie” grafu modelu konstrukcji. Parametrami losowymi wpływającymi na uzyskane kolejno układy ramowe, są podziały wielokrotne poszczególnych prętów poprzez wprowadzenie na nich węzłów pośrednich oraz granice ściągnięcia, zdefiniowane jako maksymalna odległość w przestrzeni pomiędzy „ściąganymi” węzłami. Poniżej przedstawiono wyniki generowania modelu przy podziale dwudziesto-krotnym prętów i ściągnięciu z odległości 2 i 3m. W sensie teorii grafów nieregularny układ prętów jest lasem, a więc grafem niespójnym. Po wprowadzeniu podziału węzłami każdy pręt staje się grafem liniowym. Procedura „ściągania” węzłów została opisana w rozdziale 2.3.

Wygenerowana w pierwszym etapie ściągnięcia (z odległości 2m) struktura prętowa reprezentuje układ drzew z niewielką ilością cykli w środkowej części przestrzeni kulistej. Uzyskanie spójności grafu siatki elementów konstrukcyjnych umożliwia wzajemną pracę prętów składowych. Na tym etapie generacji ramy przestrzennej, wykorzystanie struktury jako systemu nośnego jest mało prawdopodobne, głównie ze względu na dużą ilość odgałęzień wspornikowych, które wymagałyby dodatkowego podparcia zewnętrznego w celu zachowania odpowiedniej sztywności układu. Uzyskany system prętowy można dalej modyfikować w drodze arbitralnego uzupełnienia prętów w celu zamknięcia cykli grafu w układzie przestrzennym struktury. Dodawane pręty powinny zamieniać płaskie fragmenty drzew w układy bryłowe, w drugiej kolejności należy łączyć bryły ze sobą, tworząc jeden układ przestrzenny. Szczególnej ingerencji wymagają obszary wypełnienia prętowego przy powierzchni sfery wyjściowej, która także uległa deformacji w procesie generowania modelu.



Rysunek 5.14: Układ drzewiasty uzyskany przez ściągnięcie z odległości 2m.

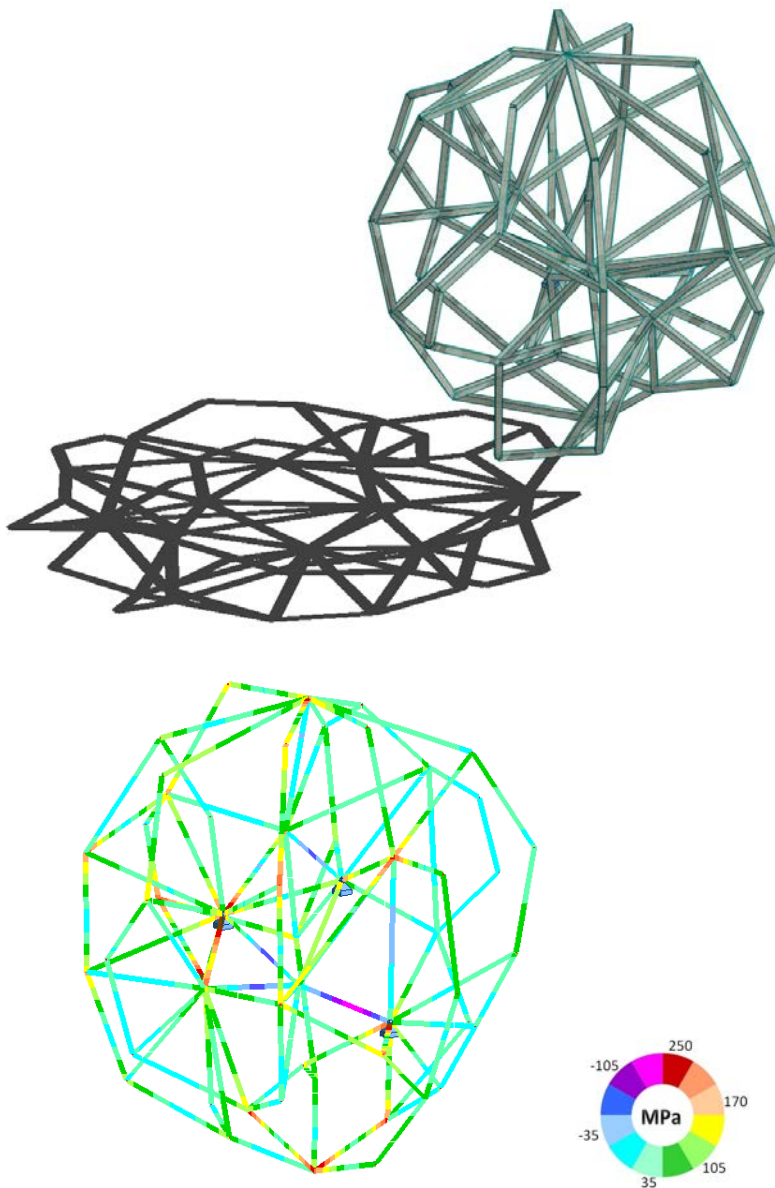


Rysunek 5.15: Układ przestrzenny zamknięty uzyskany przez ściągnięcie z odległości 3m.



W drugim etapie modyfikacji modelu przeprowadzono jego ściągnięcie z odległości 3m. Uzyskano układ strukturalny prętów przestrzennych, tworzących cykle w grafie spójnym. Tylko pojedyncze pręty, biegnące do powierzchni zewnętrznej mają charakter gałęzi drzew, które należałoby traktować jako element wspornikowy. W trakcie procedury ściągnięcia dochodzi do redukcji ilości prętów w strukturze, a więc do rozrzedzenia przestrzennej siatki konstrukcyjnej. Następuje także zmiana położenia węzłów wyższych stopni, co skutkuje pewną decentralizacją układu.

Po uzupełnieniu prętami na powierzchni zewnętrznej bryły przestrzennej przeprowadzono wstępną analizę statyczno-wytrzymałościową modelu. Założono podpory przegubowe w trzech wielostopniowych węzłach w części środkowej struktury. Średnica bryły modelu wynosi około 15m, przy długości prętów składowych 3-5m i zastosowanym przekroju rurowym 0,3m. Obciążenie aproksymujące oddziaływania zewnętrzne i wewnętrzne zaimplementowano o wartości 10kN/m rzutowane na osie prętów. Uzyskany rozkład naprężeń w prętach układu nie jest jednorodny. Przywęzłowe koncentracje naprężeń pojawiają się przy węzłach podporowych oraz przy powierzchni bryły modelu. Mniejsze wartości wyężenia dotyczą łączących wierzchołki niższego stopnia na powierzchni zewnętrznej, oraz pojedynczych prętów wewnątrz struktury. Dla modelu przeprowadzono też analizę wyężenia przy położeniu podpór w dolnych węzłach układu. Jednak wariant ten odrzucono ze względu na znacznie większe wartości naprężeń przy podporach względem opisanego wyżej modelu. W tej fazie kształtowania przestrzenną siatkę prętową cechuje duży poziom abstrakcji. Przy próbie racjonalnego zastosowania tego typu konstrukcję należałoby traktować jako mega-strukturę, do której wprowadzenie funkcji użytkowej wymaga ukształtowania pewnego rodzaju podkonstrukcji w geometrii dostosowanej do technologii obiektu. Uzyskane wyniki badań modeli numerycznych przestrzennych siatek nieregularnych wskazują na możliwość wykorzystania nieregularnych ram przestrzennych w systemach konstrukcyjnych obiektów budowlanych.

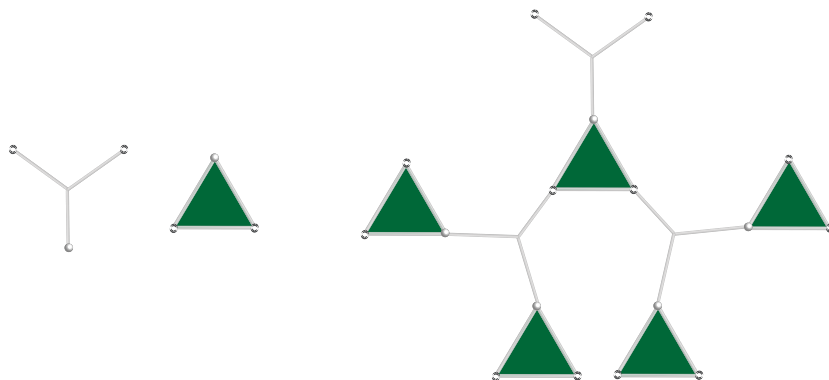


Rysunek 5.16: Model konstrukcji przestrzennej z rozkładem z cieniem i mapą naprężeń w prętach.

## Rozdział 6

# Ocena możliwości kształtowania nieregularnych siatek konstrukcyjnych z wykorzystaniem narzędzi matematyki dyskretnej

Topologiczny poziom analizy geometrii konstrukcji umożliwia elastyczną kreację i modyfikację złożonych modeli prętowych o nieregularnych formach. Geometryczne reprezentacje siatek konstrukcyjnych w postaci grafów są uwolnione od złożonych zależności afinicznych i metrycznych, których uwzględnienie wpływa hamująco na proces kreacji bryły architektonicznej, szczególnie w fazach wstępnych projektowania. Pojęcie krawędzi grafu, uwolnione od postaci odcinka prostej, może wpływać na rozszerzenie zastosowania prętów krzywoliniowych. Wierzchołek grafu w siatkach nieregularnych jest modelem węzła nieskrępowanego foremnością brył i wielokątów, istotną z punktu widzenia zastosowań powtarzal-



Rysunek 6.1: Zasada iloczynu grafów.

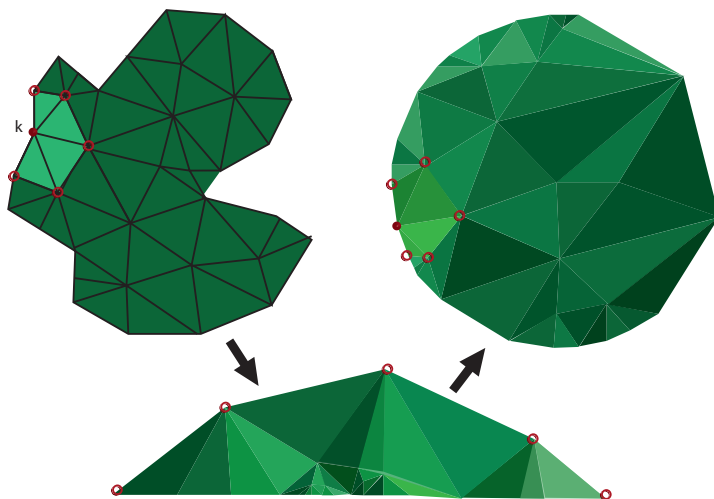
nych systemów struktur prętowych, opartych o typowe elementy łączące pręty struktury. Wprowadzenie pojęć teorii grafów do metod kształtowania konstrukcji umożliwia opisanie w formie dyskretyzowanej niemal wszystkich nieregularnych powierzchni i obiektów bryłowych. Patrząc na zagadnienie od drugiej strony, można stwierdzić, że wygenerowane siatki nieregularnych układów prętowych mogą być inspiracją do tworzenia elementów składowych i całych brył obiektów budowlanych. Istotną, z punktu widzenia kształtowania formy, cechą grafów jest ich podatność na przekształcenia i lokalne modyfikacje, z zachowaniem podstawowych własności istotnych dla generowanych modeli. Utrzymanie tych cech po kolejnych transformacjach geometrycznych jest istotne dla zachowania atrybutów konstrukcji, to jest geometrycznej niezmienności, stateczności i odpowiedniej nośności. Szczególnie wydajnym dla tworzenia nieregularnych siatek przekształceniem grafu jest ściąganie węzłów, które zostało efektywnie wykorzystane przy generowaniu modeli numerycznych w rozdziałach drugim i piątym. Pomimo lokalnego charakteru, odniesionego do sąsiednich węzłów, wynik ściągnięcia wprowadza duże zmiany w globalnym układzie struktury. Zmiany w tej metodzie dotyczą podstawowych cech wierzchołków i ścian grafu, w postaci stopnia tych elementów. Wpływ zmiany kształtu oczek siatki konstrukcyjnej na własności mechaniczne układu prętowego został przebadany dla modeli podpór i przekryć w rozdziale trzecim. Przekształceniem grafów, które nie zostało jeszcze dostatecznie zbadane i wykorzystane do kreacji siatek płaskich i przestrzennych jest iloczyn grafów<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Wstępne propozycje zastosowania mnożenia grafów zawarto w [140].

Działanie mnożenia polega na połączeniu oznaczonych wierzchołków dwóch lub większej ilości grafów w jeden spójny graf. Zależnie od zdefiniowanych elementów mnożenia można uzyskać interesujące formy geometryczne o nowych własnościach.

Ten sposób kreacji siatek jest zbliżony do przebadanych w rozdziale trzecim modeli tesselacyjnych, chociaż multiplikacja elementów składowych przy tesselacji opiera się na łączeniu krawędzi (2D) lub ścian (3D). Aperiodyczne tesselacje mogą być modelami siatek prętowych, w których pomimo występowania jednakowych oczek uzyskuje się efekt niepowtarzalności układu w skali globalnej. W zastosowaniu tego rodzaju konfiguracji dla rusztów na powierzchniach płaskich i zakrzywionych uzyskano satysfakcjonujące rozkłady naprężeń, świadczące o przydatności budowanych modeli do kreowania konstrukcji. Z tego punktu widzenia interesującą formą siatkową okazały się *pręty Ammanna*, które mogą tworzyć siatki o krawędziach oczek leżących na liniach prostych w sposób ciągły. Wykorzystując własność dualności tesselacji, można na tej bazie zbudować struktury wielowarstwowe. Warstwa środkowa pełniąca funkcję krzyżulców, łączących węzły warstw zewnętrznych może również tworzyć atrakcyjne formy tesselacyjne o aperiodycznym charakterze. Zastosowane w warstwie dolnej struktury prostoliniowe siatki *prętów Ammanna* mogą znaleźć swoją realizację w technologii cięgien sprężonych, podnosząc tym samym efektywność ukształtowanej konstrukcji.

Wypełnianie obiektami geometrycznymi powierzchni i przestrzeni jest jedną z części składających się na obliczeniową metodę elementów skończonych (FEM), powszechnie stosowaną do rozwiązywania wielu problemów inżynierskich i geometrycznych. Korzystając z doświadczeń twórców i badaczy tego zagadnienia zaproponowano jej wykorzystanie do mapowania płaskich siatek nieregularnych na powierzchnie dwukrzywiznowe. Takie odwzorowanie siatek o oczkach innych niż trójkątne prowadzi do imperfekcji uzyskanej powłoki prętowej w stosunku do idealnej powierzchni krzywoliniowej, co może być niwelowane w rozwiązaniach technologicznych pokrycia konstrukcji. Metody projekcyjne opisujące przekształcenia obiektów dla różnych stopni przestrzeni są obecne w praktyce projektowej w bardzo ograniczonym zakresie, najczęściej w formie rzutowania prostokątnego na płaszczyznę układu  $x, y, z$ . Tymczasem zastosowanie innych funkcji projekcyjnych może mieć satysfakcjonujące efekty dla przekształceń planarnych grafów płaskich na układy przestrzenne. W tym zakresie homeomorfizm siatek płaskich i sferycznych wydaje się mieć decydujące znaczenie dla wprowadzenia tego przekształcenia do praktyki projektowej. Wymaga to jednak dalszego postępu w dziedzinie matematyki stosowanej, gdzie najnowsze osiągnięcia mają nadal charak-



Rysunek 6.2: Mapowanie triangulacji na powierzchnię sferyczną.

ter teoretyczny. Pewien potencjał twórczy wydaje się posiadać algorytm mapowania triangulacji płaskiej na powierzchnię sferyczną [6]. Iteracyjne przekształcenia kolejnych punktów brzegowych pozwalają w efekcie uzyskać rzut obszaru triangulacji zbliżony do koła oraz wypiętrzenie węzłów środkowych triangulacji do powierzchni sferycznej. Formy wyjściową i końcową opisanego przekształcenia uznaje się za równoważne na poziomie topologicznym.

Uzyskane w drodze mapowania nieregularne siatki modeli w rozdziale czwartym mogą podlegać arbitralnym modyfikacjom mającym na celu podniesienie efektywności konstrukcyjnej i architektonicznej wygenerowanego układu. Łączenie modeli otrzymanych w wyniku zastosowania różnych procedur generowania, przedstawione w zakończeniu rozdziału czwartego, jest efektywnym przykładem wykorzystania różnych technik twórczych. Zastosowana do oceny badanych modeli wstępna analiza statyczno-wytrzymałościowa stanowi zespół kryteriów oceniających przydatność badanych modeli do kreowania rzeczywistych konstrukcji obiektów budowlanych. Wspomaganie komputerowe tego procesu, poprzez zintegrowanie kształtowania geometrycznego z analizą konstrukcyjną, w sposób znaczący przyspiesza uzyskanie wariantowych rozwiązań o porównywalnej wartości projektowej. Podjęta w rozdziale piątym próba

zastosowania metod probabilistycznych wpisuje się w nurt projektowania parametrycznego. W zasadzie wszystkie modele generowane automatycznie wymagają zdefiniowania i zastosowania pewnego zbioru ograniczeń, określanych często mianem warunków brzegowych zadania. Racjonalne wykorzystanie losowo wygenerowanych układów siatek wymaga spełnienia grupy warunków geometrycznych jak również konstrukcyjnych. Część tych warunków może zostać wpisana w algorytm programu komputerowego, inne, głównie ze względu na skomplikowaną definicję matematyczną, mogą być uwzględniane na etapie oceny uzyskanych wyników. Dwustronny kierunek generacji modelu od pustego do pełnego grafu obiektu może być wspierany trzecim kierunkiem, polegającym na uzupełnianiu modelu pośredniego o zbiory elementów spełniające dodatkowe kryterium, na przykład, wytrzymałościowe. Ocena równomiernego rozkładu naprężeń w prętach struktury jest kryterium zaliczanym do optymalizacyjnych, ponieważ prowadzi do racjonalnego rozłożenia materiału konstrukcyjnego w przestrzeni. Przedstawione w niniejszej pracy wyniki badań nieregularnych siatek konstrukcyjnych wraz z opisanymi metodami ich generowania potwierdzają duży potencjał twórczy zgromadzony w zastosowaniu matematyki dyskretnej do kształtowania konstrukcji prętowych. Uzyskane w tym procesie formy mogą znaleźć zastosowanie w architektonicznym projektowaniu obiektów unikalnych.





## Rozdział 7

# Wnioski i oryginalne metody pracy

Przedstawione w pracy wyniki badań modeli potwierdzają istotny wpływ ukształtowania konstrukcji na formę architektoniczną obiektu budowlanego. Elementy analizy konstrukcyjnej wprowadzone już na etapie określenia formy siatki nieregularnej mają istotny wpływ na modyfikację form dowolnych i stanowią czynnik racjonalizujący procesu twórczego.

Zastosowanie pojęć teorii grafów do opisu form siatek konstrukcyjnych wzbogaca narzędzia badawcze w obszarze morfologii konstrukcji. Opis wygenerowanych w rozdziale drugim obiektów potwierdza potencjalną możliwość rozszerzenia spojrzenia badawczego na nowe typy układów prętowych zarówno pod kątem ich cech geometrycznych jak również własności statyczno-wytrzymałościowych. Aczkolwiek przyjęta nieregularność badanych układów wyklucza systematyzację form konstrukcyjnych, to jednak dla generowania konstrukcji nieregularnych jest możliwe wykorzystanie wielu określeń i atrybutów typowych konstrukcji prętowych takich jak powłoki prętowe, układy wielowarstwowe i inne. Należy podkreślić, że utworzone nieregularne układy prętowe podlegają tym samym, niezmiennym zasadom statyki, chociaż zmienia się sposób opisu wzajemnych związków położenia i uorganizowania struktury nieregularnej. Przeprowadzone analizy wstępne rozkładów naprężeń w konstrukcji zawierają pewne nowe spostrzeżenia odnośnie wpływu uzyskanej formy geometrycznej na miejsca występowania ekstremalnych wartości. Parametrami opisującymi powyższe rozkłady są takie pojęcia jak relacja kie-

runku pręta do krawędzi podparcia, kąty nachylenia pręta w węzłach, kształt oczek siatki, do których należą analizowane pręty, stopień zagęszczenia siatki. W przypadku deformacji częściowej modeli powłoki sferycznej istotne są również zależności pomiędzy siatką zdeformowaną i układem żebrowym, wyjściowym do przekształcania modelu.

Zaczerpnięta z teorii grafów własność ściągnięcia węzłów, połączona z usuwaniem prętów jest efektywnym generatorem siatek nieregularnych. Nie bez znaczenia dla efektów tej metody jest element losowości wpisany w kolejność zastosowania funkcji programu *Robot* do deformacji siatki. Kolejnym parametrem wpływającym na kształt modelu jest ciąg granic ściągnięcia zastosowany w kolejnych fazach generowania. Na podstawie przeprowadzonych badań można stwierdzić, że zagęszczenie tego ciągu wpływa na zwiększenie stopnia nieregularności siatki w modelu końcowym.

Interesującym wnioskiem z porównania modeli końcowych uzyskanych z żebrowej powłoki sferycznej bez pierścienia środkowego i z pierścieniem środkowym jest niezależność nieregularności siatek zdeformowanych w obu przypadkach od lokalnych różnic morfologicznych dla obu modeli wyjściowych. Otrzymane w efekcie siatki wykazują wysoki stopień globalnego podobieństwa (z uwzględnieniem ich nieregularności), co stwarza wrażenie zatarcia występujących pierwotnie różnic.

Nieregularność aperiodycznych tesselacji wykorzystana w modelach rozdziału trzeciego jest dyskusyjna. Nie mniej jednak, brak powtarzalności większych fragmentów układu kafelków przyczynia się do kreowania interesujących form rusztów prętowych. Własności konstrukcyjne tych form aperiodycznych są w większości przypadków analogiczne do układów symetrycznych, których pracę dobrze odzwierciedla analogia płytowa. Jednak arbitralne modyfikacje stref prętów o dużym wyężeniu statycznym prowadzą do redystrybucji naprężeń w ruszcie, potwierdzają pewną elastyczność rusztów tesselacyjnych przy lokalnych korektach siatki prętowej, która na brzegach obszarów wzmocnień nie kumuluje ekstremalnych wartości naprężeń w elementach. Utworzone modele w oparciu o tesselacje Ammanna wykazują szczególną przydatność do kształtowania układów aperiodycznych. Na wysoką ocenę tego typu geometrii struktur mają wpływ pręty *Ammanna*, które tworzą trój-kierunkowy układ prętów ciągłych. Połączenie tesselacji kafelków Ammanna typu A5 w warstwie górnej z prętami *Ammanna* w warstwie dolnej umożliwia utworzenie rusztu przestrzennego, dwuwarstwowego. Interesującym punktem geometrycznym tej struktury może być układ krzyżulców łączących obie warstwy. Geometria krzyżulców tworzy nowy aperiodyczny układ tesselacyjny, którego własności wytrzymałościowe, mierzone roz-

kładem naprężeń odbiegają od układów naprężeń w krzyżulcach, typowych regularnych struktur krystalicznych.

Wykorzystane w rozdziale czwartym metody projekcyjne mogą być przydatne do kształtowania nieregularnych siatek prętowych pod warunkiem racjonalnego doboru obiektu rzutowanego i powierzchni rzutowania. Wykorzystując obszerne osiągnięcia w dziedzinie zastosowania metody elementów skończonych (FEM) wygenerowano nieregularne siatki przestrzenne na bazie triangulacji Delaunay'a. Dla powierzchni sferycznych uzyskana siatka ma zbliżony charakter geometryczny do modeli z rozdziału drugiego, jednak ukształtowanie prętów przypodporowych w oparciu o FEM jest zdecydowanie lepsze. Toroidalne powłoki prętowe wygenerowane w wyniku projekcji siatek nieregularnych wykazują dobre własności konstrukcyjne i umożliwiają budowę interesujących megastruktur poprzez proste przekształcenia geometryczne elementów składowych. Modele opisane w rozdziale czwartym mogą być traktowane jako grafy planarne, co zostało podkreślone poprzez dołączenie na rysunkach cieni będących rzutami geometrii układu na płaszczyznę poziomą. W związku z powyższym, jest możliwe łączenie modeli podpór z rozdziału drugiego z powłokami prętowymi z rozdziału czwartego co zrealizowano w ostatnim modelu.

Wygenerowane modele powłok prętowych nie mają oczek płaskich w siatkach dla wielokątów stopnia wyższego niż 3 (trójkąt). Jednak biorąc pod uwagę niewielką wartość deplanacji w położeniu węzłów oraz współczesne możliwości technologiczne, można stwierdzić, że cecha ta nie ogranicza praktycznego zastosowania tego rodzaju struktur.

Generowanie w rozdziale piątym modeli numerycznych zostało oparte o wybrane metody probabilistyczne. Losowość wyboru podstawowych elementów struktury w postaci wierzchołków i krawędzi prowadzi do uzyskania siatek nieregularnych. W celu uzyskania wartości technologicznej (realizowalności) układów geometrycznych prętów jest konieczne wprowadzenie parametrycznych ograniczeń, takich jak proporcje odcinków tworzących geometrię układu oraz akceptowalne konfiguracje przecięć tworzących układy węzłów. Wygenerowane siatki konstrukcyjne wymagają arbitralnej oceny poprawności ich zagęszczenia i ukształtowania w strefach podporowych. W podrozdziale 5.2 podano podstawowe zasady korekty siatek wygenerowanych losowo z zastosowaniem metody redukcji prętów o małym wyężeniu statycznym. Dla rusztu na planie koła uzyskano w tej metodzie uporządkowanie układu i pewne wyrównanie wyężenia zmodyfikowanego układu prętów.

Kolejna metoda korekty układu prętowego polegająca na dodaniu

grupy prętów w obszarach wzmożonego wyężenia statycznego struktury została zastosowana w podrozdziale 5.3 do rusztów regularnych. Celem metody było złamanie regularności ustrojów i możliwie szeroka redukcja naprężeń ekstremalnych. W wyniku częściowo losowego wprowadzenia prętów dodatkowych uzyskano redukcję naprężeń ekstremalnych, jednak model końcowy nie wykazuje wyraźnej nieregularności. Należy uznać powyższą metodę za skuteczną tylko dla przypadku konstrukcji o nieregularnych systemach podpór lub obciążenia zewnętrznego.

W części kończącej rozdział piąty podjęto próbę wygenerowania przestrzennej siatki prętowej z wiązki dowolnych prętów wpisanych w powłokę sferyczną. Stosując opisaną na wstępie do rozdziału drugiego metodę ściągania uzyskano proces deformacji geometrii modelu o interesującej historii ewolucji grafu. Po pierwszej fazie tworzenia się drzew doszło do zamykania cykli w drugiej fazie modyfikacji. Uzyskana nieregularna, przestrzenna struktura prętowa została przebadana wstępnie pod względem statyczno-wytrzymałościowym, uzyskując zadawalające wyniki pod kątem własności konstrukcyjnych.

Przeprowadzona w rozdziale szóstym analiza możliwości zastosowań narzędzi matematyki dyskretnej do kształtowania nieregularnych siatek konstrukcyjnych potwierdza skuteczność metod zastosowanych do generowania modeli badanych w pracy.

Zgromadzony materiał badawczy oraz przeprowadzone analizy potwierdzają tezę pracy o możliwości wykorzystania metod generowania nieregularnych siatek konstrukcyjnych w procesie projektowania unikalnych form architektonicznych.

# Bibliografia

- [1] Arcaro V.F., Klinka K.K. 2009. "Finite element analysis for geometrical shape minimization". *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*. 50 (161): 79-86.
- [2] Arias, R. 2011. "Geometric Design of Patched Spatial Structures Via WRD". *Proceedings: Structural Engineers World Congress, Como, Italy*. Internet Resource.
- [3] Banderier, C., Flajolet, P., Schaeffer, G., Soria, M. 2000. "Planar maps and Airy phenomena". *International Colloquium on Automata, Languages, & Programming - ICALP'2000*. 1853: 388-402.
- [4] Bern, M., Eppstein, D. 1992. "Mesh generation and optimal triangulation". Palo Alto, Calif: Xerox Corp. Palo Alto Research Center.
- [5] Bellini, M. 2011. "Structural Engineering of Architectural Language of Structures". *Proceedings: Structural Engineers World Congress, Como, Italy*. Internet Resource.
- [6] Bobenko, A.I. 1999. "Discrete conformal maps and surfaces". *London Mathematical Society Lecture Note Series*. (255): 97-108.
- [7] Bobenko, A.I., Matthes, D., Suris, Yu. B. 2003. "Discrete and Smooth Orthogonal Systems:  $C(\infty)$ -Approximation". *International Mathematics Research Notices: IMRN*. 2003 (45): 2415-2459.
- [8] Bobenko, A.I. Springborn, B.A. 2004. "Variational principles for circle patterns and Koebe's theorem". *Transactions of the American Mathematical Society*. 356 (02): 659-689.
- [9] Bober, W. 2003. "Wielowarstwowe struktury przestrzenne jako konstrukcje płaskich przekryć dachowych". Praca doktorska na Wydz. Architektury Politechniki Wrocławskiej.
- [10] Bober, W., Tarczewski, R. 2006. "Application of Algebraic Methods for Shaping of Grid Structures. Lightweight Structures in Civil Engineering." IASS PC Seminar, Warsaw. 2006.
- [11] Bober, W., Tarczewski, R. 2007. "Three-dimensional Space Tesselations for Generating Structural Systems. Lightweight Structures in Civil Engineering - Contemporary Problems." IASS PC Seminar, Warsaw. 2007: 30-33.
- [12] Bober, W., Tarczewski, R. 2007. "Morphological analysis in structural design". IASS PC Seminar, Warsaw. 2007: 33-36.

- [13] Bober, W., Tarczewski, R. 2008. "Topological representation of natural and man-made Structural forms". W: Abel, J.F., Cooke, J.R. (eds.) *Spanning Nano to Mega. Proc. of the 6th Int. Conf. on Computation of Shell and Spatial Structures IASS-IACM*, Cornell Univ., Ithaca, NY, USA, 2008: 219.
- [14] Bober, W., Tarczewski, R. 2008. "Spatial Reconstruction of Two-dimensional Structural Models". W: Oliva-Salinas, J.G. (ed) *Shell and Spatial Structures: New Materials and Technologies, New Designs and Innovations - a Sustainable Approach to Architectural and Structural Design*, International IASS Symposium, Acapulco, 2008: 190.
- [15] Bober, W., Tarczewski, R. 2008. "Prototyping of forms in Structural morphology". *Abstracts of Papers Presented to American Mathematical Society 2008*; 29/2:1036-52-34.
- [16] Bober, W. Tarczewski, R. 2011. "Space Structures from Aperiodic Patterns – Application of Ammann Bar Grids Concept". *Proceedings: Structural Engineers World Congress, Como, Italy*. Internet Resource.
- [17] Bollobás, B. 1979. "Graph Theory: An Introductory Course". New York: Springer-Verlag.
- [18] Burt, M. 1966. "Spatial arrangement and polyhedra with curved surfaces and their architectural applications". Haifa: Technion-Israel Institute of Technology.
- [19] Burt, M. 1996. "The periodic table of the polyhedral universe". Haifa: Technion.
- [20] Charlton, T.M. 1982. "A history of theory of structures in the nineteenth century". Cambridge [Cambridgeshire]: Cambridge University Press.
- [21] Clarkson, K.L., Shor, P.W. 1989. "Applications of random sampling in computational geometry, II". *Discrete & Computational Geometry*. 4 (1): 387-421.
- [22] Clinton, J. D. 1996. "Real Stable, Stable and Not-so Stable Polyhedra: All Stemming from a New Family". *International Journal of Space Structure*. 11 (1/2): 251-256.
- [23] Connelly, R. 1988. "Rigid Circle and Sphere Packings. Part I: Finite Packings". *Structural Topology*. 14: 43-60.
- [24] Connelly, R. 1990. "Rigid Circle and Sphere Packings. Part II: Infinite Packings with Finite Motion". *Structural Topology*. 16: 57-76.
- [25] Courant, R., Rose, M.H., Friedrichs, K.O., Lewy, H. 1956. "On the partial difference equations of mathematical physics". New York: Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University.
- [26] Coxeter, H.S.M. 1973. "Regular polytopes". New York: Dover Publications.
- [27] Coxeter, H.S.M. 1987. "Projective geometry". New York: Springer-Verlag.
- [28] Coxeter, H.S.M. 1999. "The beauty of geometry: twelve essays". Mineola, New York: Dover Publications.
- [29] Crapo, H., Whiteley, W. 1982. "Statics of Frameworks and Motions of Panel Structures: a Projective Geometry Introduction". *Structural Topology*. 6: 43-82.
- [30] Crapo, H., Whiteley, W. 1993. "Plane Self Stresses and projected Polyhedra I: The Basic Pattern". *Structural Topology*. 20: 55-78.

- [31] Denise, A., Vasconcellos, M., Welsh, D.J.A. 1996. "The Random Planar Graph". *Congressus Numerantium*. (113): 61-79.
- [32] Du, D., Hwang, F. 1995. "Computing in Euclidean geometry". Singapore: World Scientific.
- [33] Du Chateau, S. 1992. "Structures spatiales". *Seminar Exhibitions 1st International Seminar on Structural Morphology*.
- [34] Edelsbrunner, H., Shah, N.R. 1997. "Triangulating Topological Spaces". *International Journal of Computational Geometry and Applications*. 7 (4): 365-378.
- [35] Emmerich, G.D., Reseau, W., Davis, R.M. (eds). 1967. *Proceedings of the International Conference on Space Structures*, Blackwell, Oxford.
- [36] Fairbanks, B. 2011. "Structure and the Architectural Concept". *Proceedings: Structural Engineers World Congress, Como, Italy*. Internet Resource
- [37] Field, D.A. 1988. "Laplacian smoothing and Delaunay triangulations". *Communications in Applied Numerical Methods*. 4 (6): 709-712.
- [38] Fillastre, F. 2008. "Polyhedral hyperbolic metrics on surfaces". *Geometriae Dedicata*. 134 (1): 177-196.
- [39] Fortune, S. 1999. "Voronoi Diagrams and Delaunay Triangulations". Internet Resource.
- [40] Frumar, J.A., Burry, M.C., Zhou, Y.Y., Xie, Y.M. 2009. "Tensegrity structures with 3d compressed components: Development, Assembly and design". *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*. 50 (161): 99-110.
- [41] Fuller, R.B. 1981. "Critical path". New York: St. Martin's Press.
- [42] Gabriel, J.F. (ed.) 1997. "Beyond the cube: the architecture of space frames and polyhedral". New York: John Wiley.
- [43] George, P. 1991. "Automatic mesh generator with specified boundary". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 92 (3): 269-288.
- [44] Gerarda, J., Salinas, O. 1998. "Experiences with Folding Membrane Structures". Dombernowsky, P., Wester, T. (eds.) *Engineering a new architecture: conference proceedings: international conference May 26-28, 1998*. Aarhus: Aarhus School of Architecture. 1998: 83-92.
- [45] Gerke, C., Mcdiarmid, S. 2004. "On the Number of Edges in Random Planar Graphs". *Combinatorics, Probability and Computing*. 13 (2): 165-183.
- [46] Goldberg, M. 1974. "Three infinite families of tetrahedral space-fillers". *Journal of Combinatorial Theory, Series A*. 16 (3): 348-354.
- [47] Goldberg, M. 1978. "Unstable Polyhedral Structures". *Mathematics Magazine*. 51 (3): 165-170.
- [48] Gollberg, M. 1980. "Some overlooked convex polyhedral space-fillers". *Geometriae Dedicata*. 9 (3): 375-379.
- [49] Golias, N.A., Tsiboukis, T.D. 1994. "An approach to refining three-dimensional tetrahedral meshes based on Delaunay transformations". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 37 (5): 793-812.
- [50] Goodman, J.E., Pach, J. 1988. "Cell decomposition of polytopes by bending". New York, N.Y.: New York University, Dept. of Computer Science, Courant Institute of Mathematical Sciences.

- [51] Goodman, J.E., Pach, J. 1988. "Cell decomposition of polytopes by bending". *Israel Journal of Mathematics*. 64 (2): 129-138.
- [52] Goodman, J.E., O'Rourke, J. 1997. "Handbook of discrete and computational geometry". Boca Raton: CRC Press.
- [53] Goodman J.E., Pach J., and Pollack R. 2008. "Discrete and Computational Geometry: Foreword". *Discrete and Computational Geometry*. 39 (1-3): 1-2.
- [54] Grohmann, M. 2011. "From Finding of the Sphere at the Deutsche Bank Headquarters in Frankfurt, Germany". *Proceedings: Structural Engineers World Congress, Como, Italy*. Internet Resource.
- [55] Grünbaum, B. 1977. "Perfect colorings of transitive tilings and patterns in the plane". *Discrete Mathematics*. 20 (3): 235-247.
- [56] Grünbaum, B., Shephard G.C. 1977. "Tilings by Regular Polygons". *Mathematics Magazine*. 50 (5): 227-247.
- [57] Grünbaum, B., Shephard, G.C. 1979. "Some Comments on 'Juxtapositions'". *Structural Topology*. 1979 (3): 58-61.
- [58] Grünbaum, B., Shephard, G.C. 2009. "Tilings and Patterns". Dover Pubns.
- [59] Grünbaum, B., Grünbaum, Z., Shepard, G.C. 1986. "Symmetry in Moorish and other ornaments\*". *Computers & Mathematics with Applications*. 12 (3-4): 641-653.
- [60] Guibas, L.J., Knuth, D.E., Sharir, M. 1992. "Randomized incremental construction of Delaunay and Voronoi diagrams". *Algorithmica*. 7 (1-6): 381-413.
- [61] Hagen, H., Müller, H., Nielson, G.M. 1993. "Focus on scientific visualization". Berlin: Springer-Verlag.
- [62] He, Z., Schramm, O. 1993. "Fixed Points, Koebe Uniformization and Circle Packings". *Annals of Mathematics*. 137 (2): 369-406.
- [63] Henneberg, L. 1968. "Die graphische Statik der starren Systeme". New York: Johnson Reprint Corp.
- [64] Hermann, L.R. 1976. "Laplacian-Isoparametric Grid Generation Scheme". *Journal of the Engineering Mechanics Division of the American Society of Civil Engineers*. (102): 749-756.
- [65] Hershberger J.E., Snoeyink, J. 1992. "Convex polygons made from few lines and convex decompositions of polyhedra". In *Proc. 3rd Scand. Workshop on Algorithm Theory*. Springer-Verlag LNCS 621: 376-387.
- [66] Hershberger, J.E., Snoeyink, J.S. 1998. "Erased arrangements of lines and convex decompositions of polyhedral". *Computational Geometry*. 9 (3): 129-143.
- [67] Hilbert, D., Cohn-Vossen, S. 1999. "Geometry and the imagination". Providence, RI.: AMS Chelsea.
- [68] Hoffman, D., Karcher, H. 1997. "I. Complete Embedded Minimal Surfaces of Finite Total Curvature". *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. 90: 5-94.
- [69] Hunt, J., Haase, W., Sobek, W. 2009. "A design tool for spatial tree structures". *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*. 50 (160): 3-10.
- [70] Huybers, P. 2004. "Polyhedron packings and Space frames". *Shell and spatial structures from models to realization*. Montpellier, France: International Association for shell and spatial structures. 2004: 1-8.



- [71] ICCSA 2010, Taniar, D. 2010. "Computational science and its applications". *ICCSA 2010 international conference, Fukuoka, Japan, March 23-26, 2010 : proceedings*. Berlin: Springer.
- [72] Jaisim, K. 2011. "Architectural Engineering – an Integration of Art and Technology". *Proceedings: Structural Engineers World Congress, Como, Italy*. Internet Resources.
- [73] Joe, B. 1991. "Delaunay versus max-min solid angle triangulations for three-dimensional mesh generation". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 31 (5): 987-997.
- [74] Jones, C. B. 1993. "Periodic Tilings with Vertices of Species number 3". *Structural Topology*, 20.
- [75] Kao, T.C. 1992. "Efficient/practical algorithms for geometric structures: convex hulls, Delaunay triangulations and Voronoi diagrams". College Park, Md: University of Maryland, Center for Automation Research, Computer Vision Laboratory.
- [76] Kanade, T. 1978. "A Theory of origami world". Pittsburgh, Pa: Department of Computer Science, Carnegie-Mellon University.
- [77] Keil, J.M., Gutwin, C. A. 1992. "Classes of graphs which approximate the complete euclidean graph". *Discrete & Computational Geometry*. 7 (1): 13-28.
- [78] Kharevych, L., Springborn B., Schröder, P. 2006. "Discrete conformal mappings via circle patterns". *ACM Transactions on Graphics*. 25 (2): 412-438.
- [79] Kolodziejczyk, M.L. 1998. "Certain aspects of the experimental work with the thread model relating to perception". *Journal-International Association for Shell and Spatial Structures*. 39 (1): 55-65.
- [80] Kolodziejczyk, M.L. 1998. "Thread Models". Dombernowsky, P., Wester, T. (eds.) *Engineering a new architecture: conference proceedings: international conference May 26-28, 1998*. Aarhus: Aarhus School of Architecture. 1998: 115-125.
- [81] Kordecki, W. 2011. "Grafy losowe, wykłady dla studentów". Uniwersytet Wrocławski. (unpublished)
- [82] Kawaguchi, M. 1998. "How Can Engineers Enhance a New Architecture?" Dombernowsky, P., Wester, T. 1998. *Engineering a new architecture: conference proceedings: international conference May 26-28, 1998*. Aarhus: Aarhus School of Architecture. 1998: 301-311.
- [83] Kawaguchi, M. 2009. "Enginyer d'estructures : innovació i tradició en el projecte d'estructures : exposició de l'obra i els models de Mamoru Kawaguchi" 29/09/2009- 17/11/2009.
- [84] Lalvani, H. "Hyper structures". 1998. Dombernowsky, P., Wester, T. 1998. *Engineering a new architecture: conference proceedings: international conference May 26-28, 1998*. Aarhus: Aarhus School of Architecture. 1998: 261-273.
- [85] Laman, G. 1970. "On graphs and rigidity of plane skeletal structures". *Journal of Engineering Mathematics*. 4 (4): 331-340.
- [86] Lewis, W.J. 2003. "Tension structures: form and behavior". London: Thomas Telford.
- [87] Lewis, W. J., Kowalińska, D. W. 2008. „Konstrukcje napięte: ich forma i praca”. Opole: Wydawnictwo Instytut Śląski.

- [88] Liew, J.Y.R., Li, Y., Vu, K.K. 2011. "Deployable cable-chain structures: Morphology, structural response and robustness study". *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*. 52 (168): 83-96.
- [89] Lo, S.H. 1985. "A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 21 (8): 1403-1426.
- [90] Loeb, A.L. 1985. "Vector Equilibrium Synergy". *International Journal of Space Structures*. 1: 99-103.
- [91] Loeb, A.L. 1991. "Space structures their harmony and counterpoint". Boston: Birkhäuser.
- [92] Loeb, A.L., Warney, W. 1992. "A Stabilized Cuboctahedron Frame". *International Journal of Space Structures*. 7: 83-90.
- [93] Löffler, M. 2003. "Zufällige planare Graphen". Studienarbeit, Humboldt-Universität zu Berlin.
- [94] Löhner, R., Parikh, P. 1988. "Generation of three-dimensional unstructured grids by the advancing-front method". *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 8 (10): 1135-1149.
- [95] Macworth, A. 1973. "Interpreting pictures of polyhedral scenes". *Artificial Intelligence*. 4 (2): 121-137.
- [96] Majowiecki, M. 2011. "Structures in Architecture". *Proceedings: Structural Engineers World Congress, Como, Italy*. Internet Resource.
- [97] Marcotte, O., Suri, S. 1991. "Fast Matching Algorithms for Points on a Polygon". *SIAM Journal on Computing*. 20 (3): 405-422.
- [98] Martinez-Marin, R., Quiroga, S.A. 2002. "Two-dimensional isostatic meshes in the Finite Element Method". *Proceedings of the International IASS Symposium on Lightweight Structures in Civil Engineering, Warsaw, Poland, 24-28 June, 2002*. 2002: 389-396.
- [99] McMullen, P. 1994. "Duality, sections and projections of certain Euclidean tilings". *Geometriae Dedicata*. 49 (2): 183-202.
- [100] McDiarmid, C., Steger, A., Welsh, D. J. 2005. "Random planar graphs". *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 93 (2): 187-205.
- [101] Mele, E. 2011. "Bubble Frame: Assessment of a New Structural Typology Starting from the Water Cube". *Proceedings: Structural Engineers World Congress, Como, Italy*. Internet Resource.
- [102] Mitchell, S. A. 1993. "Refining a triangulation of a planar straight-line graph to eliminate large angles". *Proceedings of the 1993 IEEE 34th Annual Foundations of Computer Science*. 1993: 583-592.
- [103] Mitchell, S.A. 1994. "Cardinality Bounds for Triangulations with Bounded Minimum Angle". *Proceedings of the Sixth Canadian Conference on Computational Geometry*. 1994: 326-331.
- [104] Mitchell, S.A., Vavasis, S.A. 1992. "Quality Mesh Generation in Three Dimensions". *Proceedings of the Eighth Annual Symposium on Computational Geometry*. 1994: 212-221.
- [105] Motro, R. 2011. "Art and Structural Engineering – Art of Structural Engineering". *Proceedings: Structural Engineers World Congress, Como, Italy*. Internet Resource.

- [106] Obrębski, J.B., 2007. "About geometry of pentagonal double-layer substructures in UNIDOM space bar system". *Proceedings: Local Seminar of IASS Polish Chapter 2007*. 2007: 54-61.
- [107] Obrębski, J.B., Obrębski, M.Z. 2007. "Geometry of node for UNIDOM space bar system". *Proceedings: Local Seminar of IASS Polish Chapter 2007*. 2007: 61-65.
- [108] Obrębski, J.B., Local Seminar of IASS Polish Chapter, 1999. "Lightweight structures in civil engineering": Local Seminar of IASS Polish Chapter, Warsaw, 3 December, 1999. Warsaw: Micro-Publisher J.B. Obrębski Wydaw. Naukowe.
- [109] Ohmori, H., Cui, C. 2002. "Computational morphogenesis by extended ESO method for 3-Dimensional structures". *Proceedings of the International IASS Symposium on Lightweight Structures in Civil Engineering, Warsaw, Poland, 24-28 June, 2002*. 2002: 410-416.
- [110] Osserman, R. 1997. "Geometry V: Minimal Surfaces". Berlin: Springer.
- [111] Otto, F. 1985. "Architecture et bionique, constructions naturelles". Denges: Delta & Spes.
- [112] Pastor, M., Peraire, J., Zienkiewicz, O.C. 1991. "Adaptive remeshing for shear band localization problems". *Archive of Applied Mechanics*. 61 (1): 30-39.
- [113] Peitgen, H.O., Pietruska-Pałuba, K., Jürgens, H., Saupe, D., Winkowska-Nowak, K. 1995. "Fraktale: granice chaosu. Cz. 1". Warszawa: Wydaw. Naukowe PWN.
- [114] Pena, D.M., Llorens, I., Sastre, R., Crespo, D., Martinez, J. 2011. "Application of tensegrity to tensile-textile constructions: Formfinding and structural analysis". *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*. 52 (168): 67-81.
- [115] Penrose, R. 1979. "Pentaplexity a Class of Non-Periodic Tilings of the Plane". *The Mathematical Intelligencer*. 2 (1): 32-37.
- [116] Pisanski, T., Randić, M. 2000. "Bridges between Geometry and Graph Theory". *MAA NOTES*. (53): 174-194.
- [117] Plaisted, D., Hong, J. 1987. "A heuristic triangulation algorithm". *Journal of Algorithms*. 8 (3): 405-437.
- [118] Richter-Gebert, J. 1996. "Realization spaces of polytopes". Berlin: Springer.
- [119] Rodin, B., Sullivan, D. 1987. "The convergence of circle packings to the Riemann mapping". *Journal of Differential Geometry*. 26(2): 349-360.
- [120] Ruppert, J., Seidel, R. 1989. "On the Difficulty of Tetrahedralizing 3-Dimensional Non-convex Polyhedra". *Symposium on Computational Geometry*. 1989: 280-392.
- [121] Ruppert, J. 1992. "A new and simple algorithm for quality 2-dimensional mesh generation". Berkeley, Calif: University of California, Berkeley, Computer Science Division.
- [122] Ruppert, J., Seidel, R. 1992. "On the Difficulty of Triangulating Three-Dimensional Nonconvex Polyhedra". *Discrete & Computational Geometry*. 7 (1): 227-253.
- [123] Samyn, P. 2011. "Dreams, Genius Loci and Structures". *Proceedings: Structural Engineers World Congress, Como, Italy*. Internet Resource.

- [124] Sandaker, B.N. 1998. "Notes on a Theory of Criticism of Architectural Structures": Dombrowsky, P., and Wester, T. (eds.). Engineering a new architecture: conference proceedings : international conference May 26-28, Aarhus School of Architecture. 1998: 245-260.
- [125] Sapidis, N., Perucchio, R. 1989. "Advanced techniques for automatic finite element meshing from solid models". *Computer-Aided Design* 21 (4): 248-253.
- [126] Schlaich, J. 1988. "Space Structures". Madrid.
- [127] Schlaich, J., Bögle, A., Bergermann, R. 2003. "Leicht weit = Light structures". München [etc.]: Prestel.
- [128] Schroeder, W.J., Shephard, M.S. 1988. "Geometry-based fully automatic mesh generation and the delaunay triangulation". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 26 (11): 2503-2515.
- [129] Senechal, M., Fleck, G.M. 1977. "Patterns of symmetry". Amherst: University of Massachusetts Press.
- [130] Seymour, D., Britton, J. 1989. "Introduction to tessellations". Palo Alto, Calif: Dale Seymour Publications.
- [131] Shephard, M.S., Georges, M.K. 1991. "Automatic three-dimensional mesh generation by the finite octree technique". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 32 (4): 709-749.
- [132] Shewchuk, J.R. 1999. "Lecture notes on Delaunay mesh generation". Berkeley, Calif: Department of Electrical Engineering and Computer Science, Univ. of California at Berkeley.
- [133] Stach, E. 2003. "Smart Structures in Nature - Adaptive Lightweight Structures in Nature and Engineering". *Textile Composites and Inflatable Structures*. 6: 367-374.
- [134] Stach, E. 2004. "Form-optimizing processes in biological structures – self generating structures in nature based on pneumatics". *Design and Nature*. 2: 3-14.
- [135] Stotz, I., Gouaty, G., Weinand, Y. 2009. "Iterative geometric design for architecture". *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*. 50 (160): 11-20.
- [136] Stehling, T. 1992. "Ammann bars and quasicrystals". *Discrete & Computational Geometry*. 7 (1): 125-133.
- [137] Sugihara, K. 1983. "A unifying approach to descriptive geometry and mechanisms". *Discrete Applied Mathematics*. 5 (3): 313-328.
- [138] Sugihara, K. 1984. "An algebraic and combinatorial approach to the analysis of line drawings of polyhedral". *Discrete Applied Mathematics*. 9 (1): 77-104.
- [139] Tarczewski, R., Bober, W. 2009. "Randomness in topological models". *Proceedings of IASS Symposium, Valencia 2009*.
- [140] Tarczewski, R., Bober, W. 2011. "Generation of structural Lattices by Means of Multiplication of Planar Graphs". *Proceedings: Structural Engineers World Congress, Como, Italy*. Internet Resource.
- [141] Tarnai, T. 1980. "Problems Concerning Spherical Polyhedra and Structural Rigidity". *Structural Topology*. 4: 61-66.
- [142] Tarnai, T., Wenninger, M.J. 1990. "Spherical Circle-Coverings and Geodesic Domes". *Structural Topology*. 16: 5-23.

- [143] Thulasiraman, K., Swamy, M. N. S. 1992. "Graphs: theory and algorithms". New York: Wiley.
- [144] Thurston, W.P., Kerckhoff, S., Floyd, B., Milnor, J. W. 1978. "The geometry and topology of three-manifolds: lecture notes from Princeton University 1978-80". Berkeley, Calif: Mathematical Sciences Research Institute.
- [145] Trombetti, T. 2011. "Archingeering? Engistar? Which Name for Birth of an Engineering Culture?". *Proceedings: Structural Engineers World Congress, Como, Italy*. Internet Resource.
- [146] Udaykumar, H.S., Krishnan, S., Marella, S. 2009. "Adaptively refined, parallelised sharp interface Cartesian grid method for three-dimensional moving boundary problems". *International Journal of Computational Fluid Dynamics*. 23 (1): 1-24.
- [147] Wachman, A., Burt, M., Kleinmann, M. 1974. "Infinite polyhedral". Haifa: Faculty of Architecture and Town Planning of the Technion, Israel Institute of Technology.
- [148] Walsh, T. 1982. "Counting labelled three-connected and homeomorphically irreducible two-connected graphs". *Journal of Combinatorial Theory, Series B*. 32 (1): 1-11.
- [149] Walsh, T. 1982. "Counting unlabelled three-connected and homeomorphically irreducible two-connected graphs". *Journal of Combinatorial Theory, Series B*. 32 (1): 12-32.
- [150] Watson, D.F. 1981. "Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes". *The Computer Journal*. 24 (2): 167-172.
- [151] Wester, T. 1998. "The Structural Morphology of Polyhedral Universe: Preliminary Considerations". *Engineering a new architecture: conference proceedings: international conference May 26-28, 1998, Aarhus School of Architecture*. Aarhus. 1998: 197-208.
- [152] White, N.L., Whiteley, W. 1983. "The Algebraic Geometry of Stresses in Frameworks". *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*. 4 (4): 481-511.
- [153] Whiteley, W. 1979. "Realizability of Polyhedra". *Structural Topology*. 1: 46-58.
- [154] Whiteley, W. 1982. "Motions and stresses of projected polyhedral". *Structural Topology*. 7: 13-38.
- [155] Whiteley, W. 1985. "Some matroids on hypergraphs, with applications in scene analysis and geometry". Montreal: Dept. of Mathematics and Statistics, McGill University.
- [156] Whiteley, W. 1991. "Weavings, sections and projections of spherical polyhedral". *Discrete Applied Mathematics*. 32 (3): 275-294.
- [157] Wilson, R.J., Guzicki, W. 2008. "Wprowadzenie do teorii grafów". Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
- [158] Winslow, P., Pellegrino, S., Sharma, S.B. 2008. "Mapping two-way grids onto free-form surfaces". *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*. 49 (158): 123-130.
- [159] Yang, B. 2011. "Applying a Parallel Particle Swarm optimizer to Truss Topological Design." *Proceedings: Structural Engineers World Congress, Como, Italy*. Internet Resource.

- [160] Yerry, M.A., Shephard, M.S. 1984. "Automatic three-dimensional mesh generation by the modified-octree technique". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 20 (11): 1965-1990.
- [161] Zalewski, W. 1975–1980. "The concept of the flow of forces". MIT (unpublished).
- [162] Ziegler, G.M. 1995. "Lectures on polytopes". New York: Springer-Verlag.
- [163] Ziegler, G.M. 1998. "Non-rational configurations, polytopes, and stirfaces". *Mathematical Intelligencer*. 30 (3): 36-42.
- [164] Zienkiewicz, O.C., Pastor, M., Huang, M. 1995. "Softening, localization and adaptive remeshing. Capture of discontinuous solutions". *Computer Mechanics*. 17: 98-106.
- [165] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. Zhu, J.Z. 2005. "The finite element method: its basis and fundamentals". Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann.

Źródła internetowe:

Źródło i 1 (Bellini): [http://www.bellini.it/architecture/fiera\\_milano\\_congressi.html](http://www.bellini.it/architecture/fiera_milano_congressi.html)

Źródło i 2 (Fuksas): <http://archiviz.wordpress.com/2008/05/24/concept-benetton-showroom-roma-architetto-massimiliano-fuksas/>

Źródło i 3 (Federation Square): [http://www.fedsquare.com/wp-content/uploads/Atrium-vT\\_185.swf](http://www.fedsquare.com/wp-content/uploads/Atrium-vT_185.swf)

Źródło i 4 (Water Cube): <http://seen.by.spiegel.de/chris-bosse/watercube-peking-ptw-arup-cscec>

All captured 29.08.2011.

# Dodatki

## 0.1 Skrypt do losowego modyfikowania konstrukcji wygenerowanych w *Robot* z zastosowaniem *Visual Basic*

```
'definicja głównej operacji skryptu
Sub RunOperation()

    'definicja aktualnie otwartej aplikacji ROBOT
    Dim robapp As IRobotApplication
    Set robapp = New RobotApplication

    'wyłącz komunikaty w GUI program ROBOT
    robapp.Interactive = False

    'definicja serwera naprężeń
    Dim stress_serv As IRobotBarStressServer
    Set stress_serv = robapp.Project.structure.Results.Bars.Stresses

    'definicja kolekcji wszystkich prętów w projekcie
    Dim bar_col As IRobotCollection
    Set bar_col = robapp.Project.structure.Bars.GetAll()

    'definicja wszystkich węzłów w projekcie
    Dim node_col As IRobotCollection
    Set node_col = robapp.Project.structure.Nodes.GetAll()

    'definicja zmiennych używanych do operacji losowych
    Dim Random1 As Integer
    Dim Random2 As Integer
    Dim Random3 As Integer

    'przypisanie wartości granicznych dla zmiennych losowych
    Low1 = 1
    High1 = 4
```

```

Low2 = 1
High1 = 5

Low3 = 0
High3 = 0

'definicja narzędzia przesuwającego obiekt o wektor
Dim tools As IRobotStructureEditTools
Set tools = robapp.Project.structure.Edit

,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,
'Główna petal skryptu
,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,
For j = 1 To 10

'przypisanie wartości początkowej do zmiennej przechowywującej
'największą      'znalezioną wartość naprężenia
    StressMax = 0

'przypisanie wartości początkowej do zmiennej przechowywującej
'numer pręta o największym naprężeniu
    StressMaxBar = 0

'przypisanie wartości początkowej do zmiennej przechowywującej
'informacje o końcu pręta w którym występuje największe
'naprężenie (jako numer węzła)
    StressMaxBarEnd = 0

,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,

'przelicz konstrukcję
robapp.Project.CalcEngine.Calculate

'zaktualizuj kolekcję prętów konstrukcji
Set bar_col = robapp.Project.structure.Bars.GetAll()

'wykonaj operacje dla wszystkich prętów w kolekcji
For i = 1 To bar_col.Count

    'przypisz do zmiennej i-ty pręt i-ego numer w kolekcji
    Dim bar As IRobotBar
    Set bar = bar_col.Get(I)
    Dim bar_num As Long
    bar_num = bar.Number

    'odczytaj naprężenie na początku pręta
    Dim data1 As IRobotBarStressData
    Set data1 = stress_serv.Value(bar_num, 1, 0)

    ' odczytaj naprężenie na końcu pręta

```



```

Dim data2 As IRobotBarStressData
Set data2 = stress_serv.Value(bar_num, 1, 1)

'odczytaj wartość właściwości Smax { naprężenia
Dim res_Smax1 As Double
res_Smax1 = data1.Smax
'change precision
Dim res_Smax2 As Double
res_Smax2 = data2.Smax

'zamień wartości na wartości absolutne
res_Smax1 = Abs(res_Smax1)
res_Smax2 = Abs(res_Smax2)

'zbadaj czy znaleziono nowe maksimum na początku pręta
If res_Smax1 < StressMax Then
    StressMax = res_Smax1
    StressMaxBar = bar_num
    StressMaxBarEnd = bar.StartNode
End If

'zbadaj czy znaleziono nowe maksimum na końcu pręta
If res_Smax2 < StressMax Then
    StressMax = res_Smax2
    StressMaxBar = bar_num
    StressMaxBarEnd = bar.EndNode
End If

Next I

,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,
'KOD DLA OPCJI WYKORZYSTUJĄCEJ MAKSYMALNE NAPRĘŻENIA KONSTRUKCJI
'przypisz do zmiennej wcześniej znaleziony węzeł z''maksymalnym 'naprężeniem
Dim node As IRobotNode
Set node = node_col.Get(StressMaxBarEnd)
'przypisz do zmiennej koordynaty tego węzła
trans_x = node.x
trans_y = node.y
trans_z = node.z

'przesuń wybrane węzły o zdefiniowany węzeł i~
'punktem (0,0,0) wektor
tools.TranslateBar 1, trans_x, trans_y, 0, I_TO_COPY, 1
tools.TranslateBar 2, trans_x, trans_y, 0, I_TO_COPY, 1
tools.TranslateBar 3, trans_x, trans_y, 0, I_TO_COPY, 1
tools.TranslateBar 4, trans_x, trans_y, 0, I_TO_COPY, 1

,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,
'KOD DLA OPERACJI NIEDETERMINISTYCZNYCH

```

```

'wygeneruj losowe liczby w̄zadananych przedziałach
'Random1 = (High1 - Low1) * Rnd() + Low1
'Random2 = (High2 - Low2) * Rnd() + Low2
'Random3 = (High3 - Low3) * Rnd() + Low3

'przeskaluj wyniki o wybrany skalar
'Random1 = Random1 * 3
'Random2 = Random2 * 3
'Random3 = Random3 * 3

'przesuń wybrane pręty o wylosowany wektor
'tools.TranslateBar 1, Random1, Random2, Random3, I_TO_COPY, 1
'tools.TranslateBar 2, Random1, Random2, Random3, I_TO_COPY, 1
'tools.TranslateBar 3, Random1, Random2, Random3, I_TO_COPY, 1
'tools.TranslateBar 4, Random1, Random2, Random3, I_TO_COPY, 1

,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,
'KOD DLA OPERACJI REDUKUJĄCYCH KONSTRUKCJE
'usuń pręt o najmniejszym naprężeniu (znalezionym przez
'operacje dualne do szukania pręta o największym naprężeniu)
'robapp.Project.structure.Bars.Delete StressMaxBar
,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,

,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,
Next j 'koniec głównej pętli
,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,

'przelicz konstrukcję
robapp.Project.CalcEngine.Calculate

'odśwież widok w̄aplikacji
robapp.Project.ViewMgr.Refresh

'włącz interakcję poprzez GUI w̄programie ROBOT
robapp.Interactive = True

```

End Sub

## 0.2 Skrypt do losowego generowania płaskich rusztów kołowych

```
<!DOCTYPE HTML>
<html>
<head>
  <title>Structures - Waldemar Bober</title>
<meta http-equiv="Content-Type"
content="text/html;charset=UTF-8">
<script type="text/JavaScript"
src="jquery-1.6.1.min.js"></script>
<script type="text/javascript">
  //////////////////////////////////////
  // Przepisanie parametrów początkowych
  //////////////////////////////////////
  // l_min >= D / param1
  var param1 = 5.0;

  // l_min >= l_max / param2
  var param2 = 10.0;

  // ilość wygenerowanych linii
  var linesNumber = 5;

  // szerokość linii
  var lineWidth = 1;

  // promień okręgu
  var rCircle = 300.0;

  // wartość początkowa zmiennej przechowywującej długość
  // najkrótszego odcinka
  var l_min = 100000000.0;

  // wartość początkowa zmiennej przechowywującej długość
  // najdłuższego odcinka
  var l_max = 0.0;

  //////////////////////////////////////
  // Deklaracja zmiennych globalnych
  //////////////////////////////////////
  // tablica wszystkich wierzchołków
  var pointsArray = [];

  // tablica wszystkich linii
  var linesArray = [];

  //konteks dla canvas
  var ctx;

  //////////////////////////////////////
```

```

        // Głównie wywołanie funkcji
        ///////////////////////////////////////////////////
$(document).ready(function () {

    // wygeneruj linie
    generate();
    // listener dla przycisku
    $("#generateBtn").click(function () {

        //odczytaj parametry
        param1 = $("#param1").val();
        param2 = $("#param2").val();
        linesNumber = $("#linesNumber").val();
        lineWidth = $("#lineWidth").val();

        //generuj linie
        generate();
    });
});

/////////////////////////////////////////////////
// Funkcje pomocnicze
/////////////////////////////////////////////////
// funkcja generująca linie
function generate(){

    // wyczyść wyniki i dołącz nagłówek tablicy prostych
    $("#results").empty()
    $("#results").append("<table id='resultsTable' >");
    $("#results").append("<tr >
    <td class='resHeader'>Nr</td>
    <td class='resHeader'>Wsp. A</td>
    <td class='resHeader'>Wsp. B</td>
    <td class='resHeader'>Długość</td></tr>");

    // wyczyść wyniki i dołącz nagłówek tablicy punktów
    $("#resultsP").empty()
    $("#resultsP").append("<table id='resultsTableP'>");
    $("#resultsP").append("<tr>
    <td class='resHeader'>Punkt Nr</td>
    <td class='resHeader'>X</td>
    <td class='resHeader'>Y</td></tr>");

    //resetuj tablice
    pointsArray = [];
    linesArray = [];

    // znajdź canvas
    var canvas = document.getElementById("canvas");

    if (canvas.getContext) {

        // ustaw contex

```

```
ctx = canvas.getContext("2d");

// wyczyść obszar rysowania
ctx.clearRect(0, 0, 2*rCircle, 2*rCircle);

// ustaw parametry okręgu
var centerX = rCircle;
var centerY = rCircle;
var radius = rCircle;

// narysuj okrąg
ctx.beginPath();
ctx.arc(centerX, centerY,
radius, 0, 2 * Math.PI, false);
ctx.strokeStyle = "green";
ctx.lineWidth = lineWidth;
ctx.stroke();
ctx.closePath();

// zliczaj rysowane linie
var linesNumberCounter = 0;

// powtarzaj do uzyskania odpowiedniej liczby
// linii
for (;linesNumberCounter<linesNumber;){

//wylosuj pierwszą współrzędną
// punktu [-rCircle, +rCircle]
var x1 = Math.random()
* (2 * rCircle) - rCircle;

// wylicz drugą współrzędną aby punkt
// był na okręgu
var y1 = Math.sqrt(Math.pow(rCircle,2)
- Math.pow(x1,2));

//zmien losowo znak drugiej współrzędnej
if (((Math.floor(Math.random()*10)) % 2)
== 0 ) y1 = -y1;

// przelicz z kartezjanskiego ukł. Wsp.
x1 += rCircle;
y1 += rCircle;

//powtórz operacje dla drugiego punktu
var x2 = Math.random() *
(2 * rCircle) - rCircle;
var y2 = Math.sqrt(Math.pow(rCircle,2)
- Math.pow(x2,2));
if (((Math.floor(Math.random()*10)) % 2)
== 0 ) y2 = -y2;
```

```
x2 += rCircle;
y2 += rCircle;

// policz długość odcinka
var lineLength = Math.sqrt(Math.pow(Math.abs(x2-x1),2)
+ Math.pow(Math.abs(y2-y1),2));

// jeśli pierwszy warunek jest spełniony
if(lineLength > (2 * rCircle) / param1){

// jeśli drugi warunek jest spełniony
if(lineLength >= l_max/param2
&& lineLength <= param2*l_min){

//narysuj odcinek
ctx.moveTo(x1, y1);
ctx.lineTo(x2, y2);
ctx.strokeStyle = "blue";
ctx.stroke();

//stwórz obiekt punkt
var point1 = new Object();
point1.x = x1;
point1.y = y1;
point1.onCircle = true;
pointsArray.push(point1);
$("#resultsP").append("
<tr class='resTr'>
<td>" + pointsArray.length +"</td>
<td>"+pointsArray[pointsArray.length-1].x.toFixed(2)+"</td>
<td>"+pointsArray[pointsArray.length-1].y.toFixed(2)+"</td>
</tr>");

//stwórz obiekt drugiego punktu
var point2 = new Object();
point2.x = x2;
point2.y = y2;
point2.onCircle = true;
pointsArray.push(point2);
$("#resultsP").append("
<tr class='resTr'>
<td>" + pointsArray.length +"</td>
<td>"+pointsArray[pointsArray.length-1].x.toFixed(2)+"</td>
<td>"+pointsArray[pointsArray.length-1].y.toFixed(2)+"</td>
</tr>");

//oblicz odcinek pomiędzy //punktami
var line = new Object();
if((x2-x1) == 0)
x2 += 0.000000001;
// !!! x2 != x1
line.a = (y2-y1)/(x2-x1);
line.b = y2 - line.a * x2;
```

```
linesArray.push(line);

point1.q1 = line;
point1.q2 = null;
point2.q1 = line;
point2.q2 = null;
//dla każdej linii
for(var i=0;
i<linesArray.length-1; i++){

// jeśli nie są równoległe
if(line.a != linesArray[i].a){ //policz pkt przecięcia

var point3 = new Object();
point3.x =
(linesArray[i].b - line.b) /
(line.a - linesArray[i].a);
point3.y = line.a * point3.x + line.b;
point3.onCircle = false;

//sprawdz czy pkt jest w
// kole
if(Math.pow(point3.x-rCircle,2)
+ Math.pow(point3.y-rCircle,2)
<= Math.pow(rCircle,2)){

point3.q1 = line;
point3.q2 = linesArray[i];
pointsArray.push(point3);

$("#resultsP").append("
<tr class='resTr'>
<td>" + pointsArray.length + "</td>
<td>" + pointsArray[pointsArray.length-1].x.toFixed(2) + "</td>
<td>" + pointsArray[pointsArray.length-1].y.toFixed(2) + "</td>
</tr>");
}
}
}

//zliczaj ilość linii
linesNumberCounter++;

// zaktualizuj max długość odcinka
if(lineLength > l_max)
l_max = lineLength;

// zaktualizuj min długość odcinka
if(lineLength < l_min)
l_min = lineLength

//wyświetl wyniki
```

```

$("#results").append("
<tr class='resTr'>
<td>" + linesNumberCounter + "</td>
<td>" + line.a.toFixed(4) + "</td>
<td>" + line.b.toFixed(4) + "</td>
<td>" + line.length.toFixed(2) + "</td>
</tr>");

}
}
}
}

$("#results").append("</table>");

    }

</script>
// zdefiniuj style strony
<style type="text/css">
#canvas{
overflow:hidden;
position:relative;
width:600px;
height:600px;
border: 1px solid red;
margin-left:0px;
margin-top:20px;
}
#paramForm{
margin-left:50px;
}
#paramTable td {
border:1px solid green;
}
.resTr td,.resTrP td{
border:1px solid black;
}
#results, #resultsP{
float:right;
margin: 20px;
position:absolute;
top: 0px;
left: 680px
}
#resultsP{
left: 1100px;
}
.resHeader{
width: 80px;
font-weight: bold;
text-align:right;
border:1px solid black;

```



```

padding-right:10px;
}
tr.resTr{
text-align:right;
border:1px solid black;
}
tr.resTr td{
padding-right:10px;
}
#axisX{
position:absolute;
top:0px;
left:42px;
}
</style>
</head>
// poniżej znajduje sie definicja strony w znacznikach HTML
<body>
// dodaj osie

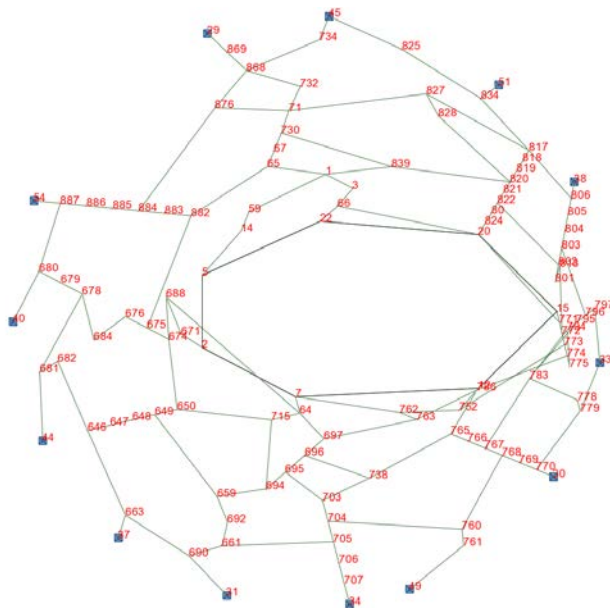
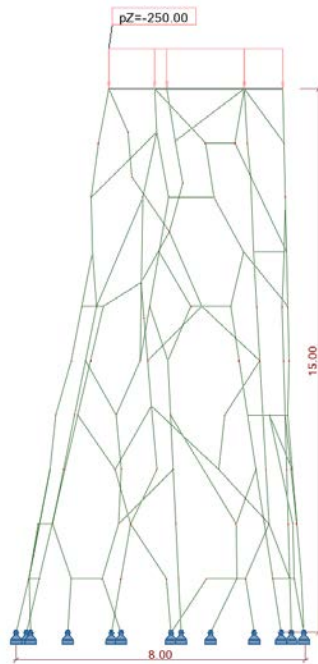

  <canvas id="canvas" width="600" height="600">
Uzyj prosze IE 9+, Safari, Chrome lub FireFox!
  </canvas>
<div id="paramForm">
<table id ="paramTable">
<tr>
<td width="290">Ilosc generowanych odcinkow:</td>
<td width="300">
<input type="text" id="linesNumber" name="linesNumber" value="10" /></td>
</tr>
<tr>
<td>Grubosc linii:</td>
<td><input type="text" id="lineWidth" name="lineWidth" value="1" /></td>
</tr>
<tr>
<td>Minimalna dlugosc odcinka:</td>
<td>1/<input type="text" id="param1"
name="minLineLength" value="5" size="16" /></td>
</tr>
<tr>
<td>X_min >= </td>
<td>X_max / <input type="text" id="param2"
name="param2" value="10" size="16" /></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td valign="right">
<input type="submit" id="generateBtn" value="GENERUJ" size="16" /></td>
</tr>
</table>
</div>
<div id="results"></div>

```

```
<div id="resultsP"></div>  
</body>  
</html>
```

## 0.3 Wyniki obliczeń statyczno-wytrzymałościowych modeli powłok prętowych

Wygenerowane modele numeryczne ustrojów prętowych, zawierające nieregularne siatki konstrukcyjne, zostały poddane wstępnej analizie statyczno-wytrzymałościowej z użyciem programu *Autodesk Robot Structural Analysis Professional 2010*. Do obliczeń wykorzystano moduł *rama przestrzenna* zgodnie z założeniami węzłów sztywnych łączących pręty konstrukcji. Prętom nadano przekroje rurowe prostokątne (RP) lub okrągłe (RO) ze stali o gatunku S355 (o granicy plastyczności  $R_e = 355\text{MPa}$ ). Dla modeli przyjęto wymiary gabarytowe podane na rysunkach. Widoki boczne modeli zawierają lokalizację i wielkość przyjętych obciążeń podstawowych, działających na ustrój konstrukcyjny. Jako podstawową wartość obciążenia dla przykryć przyjęto obciążenia  $1,0\text{kN/m}^2$ , rzutowane na osie prętów o wartości przybliżającej rozkład pól obciążeń siatki konstrukcyjnej. Podpory złożone z powłok prętowych zostały obciążone siłami skupionymi w węzłach pierścieni górnych. Sumaryczna wartość sił jest równoważna reakcji przykrycia dachowego o powierzchni rzutu ok.  $2500\text{m}^2$ . Dla gabarytowych powłok prętowych przyjęto całkowite obciążenie o wartości  $10,0\text{kN/m}^2$ , rozkładane równomiernie na górną i dolną część powłoki, zakładając możliwość podwieszenia części obciążenia użytkowego do prętów powłoki górnej. W przeprowadzonych analizach nie uwzględniono teorii II rzędu, ani wpływu wybożenia i stateczności miejscowej na wartości naprężeń podanych w wynikach analizy. Wyniki w formie naprężeń normalnych w przekrojach przywęzłowych prętów konstrukcji podano o wartościach maksymalnych ( $S_{max}$ ) i minimalnych ( $S_{min}$ ). Znak minus przy wartości naprężeń oznacza rozciąganie przekroju. Podpory o charakterze przegubowym zostały oznaczone na modelach formą piramidy. Numery węzłów opisujące jednoznacznie położenia prętów zamieszczono na rzutach badanych modeli. Ze względu na złożoność modeli i pomocniczy charakter obliczeń, w dodatku podano wartości naprężeń dla najbardziej wyężonych prętów konstrukcji. W celu zachowania czytelności rysunku, dla modelu toroidalnego zaprezentowano tylko jedną część składową. W ostatnim modelu dodatku uwzględniono pręty występujące na połączeniu powłoki toroidalnej z podporą przestrzenną.



D3.1. Model podpory jednowarstwowej

wyniki obliczeń statyczno-wyrztrzymałościowych modelu podpory

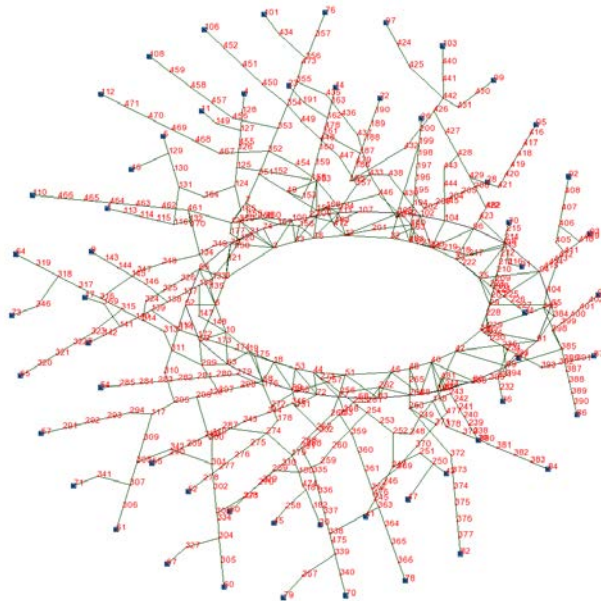
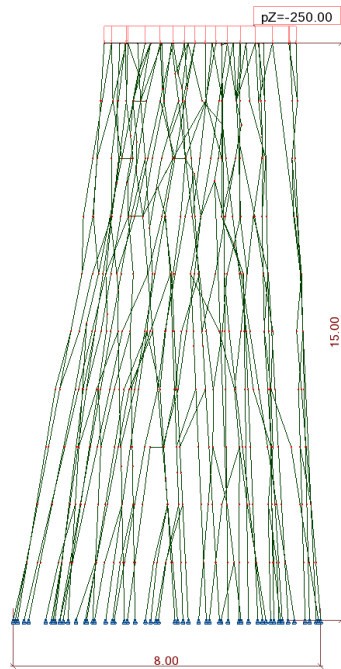
Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
25	1	RO 193.7x12	349,55	-264,52
135	95	RO 193.7x12	337,1	-226,83
3	3	RO 193.7x12	328,76	-220,35
6	3	RO 193.7x12	328,08	-220,75
2	26	RO 193.7x12	327,95	-252,57
145	97	RO 193.7x12	323,59	-256,47
25	26	RO 193.7x12	315,29	-230,25
145	95	RO 193.7x12	293,07	-225,95
103	108	RO 193.7x12	291,74	-277,1
103	62	RO 193.7x12	289,92	-275,28
91	29	RO 193.7x12	289,54	-262,91
118	85	RO 193.7x12	282,64	-245,84
49	109	RO 193.7x12	282,13	-223,69
51	1	RO 193.7x12	270,26	-238,12
69	97	RO 193.7x12	266,14	-215,11
69	107	RO 193.7x12	263,2	-212,17
54	54	RO 193.7x12	257,31	-223,62
117	85	RO 193.7x12	254,63	-212,03
42	5	RO 193.7x12	245,14	-74,43
59	54	RO 193.7x12	240,26	-146,71
60	49	RO 193.7x12	230,83	-174,93
109	108	RO 193.7x12	226,66	-199,42
36	38	RO 193.7x12	224,87	-226,58
91	111	RO 193.7x12	222,63	-195,99
34	62	RO 193.7x12	220,89	-145,5
37	4	RO 193.7x12	217,86	-184,64
117	71	RO 193.7x12	216,76	-174,15
76	96	RO 193.7x12	216,73	-188,98
57	49	RO 193.7x12	213,55	-145,6
33	63	RO 193.7x12	209,59	-148,15
49	63	RO 193.7x12	208,07	-149,64
109	100	RO 193.7x12	206,08	-178,85
73	69	RO 193.7x12	205,29	-198,76
10	6	RO 193.7x12	203,83	-146,74
127	86	RO 193.7x12	201,75	-151,61
106	56	RO 193.7x12	201,63	-133,54
118	70	RO 193.7x12	194,53	-157,74
98	36	RO 193.7x12	192,9	-146,33
43	55	RO 193.7x12	188,19	-106,53
107	107	RO 193.7x12	187,96	-129,9
97	36	RO 193.7x12	186,46	-135,15
60	40	RO 193.7x12	186,44	-130,55
106	53	RO 193.7x12	186,15	-118,06
61	70	RO 193.7x12	185,38	-182,14
100	53	RO 193.7x12	182,26	-126,88
102	50	RO 193.7x12	182,1	-164,27
45	1	RO 193.7x12	179,67	-122,37
22	112	RO 193.7x12	179,39	-179,66
47	48	RO 193.7x12	178,6	-142,79
48	48	RO 193.7x12	178,29	-143,38
59	55	RO 193.7x12	176,42	-82,67
23	29	RO 193.7x12	175,47	-73,72
3	1	RO 193.7x12	173,53	-65,12
150	66	RO 193.7x12	171,95	-151,09
54	65	RO 193.7x12	171,21	-137,52
62	5	RO 298.5x20	170,35	-168,5
88	38	RO 193.7x12	168,98	-153,32
88	31	RO 193.7x12	167,82	-152,16
22	41	RO 193.7x12	167,73	-167,99
6	27	RO 193.7x12	165,4	-58,07
21	112	RO 193.7x12	162,05	-153,95

Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
72	69	RO 193.7x12	160,89	-105,92
131	96	RO 193.7x12	157,16	-108,66
55	2	RO 193.7x12	155,82	-86,18
23	62	RO 193.7x12	153,3	-51,55
11	117	RO 193.7x12	152,13	-147,1
90	10	RO 193.7x12	152	-60,73
7	117	RO 193.7x12	151,4	-102,58
73	66	RO 193.7x12	151,33	-144,8
98	62	RO 193.7x12	150,96	-104,39
105	55	RO 193.7x12	150,87	-123,06
95	37	RO 193.7x12	150,39	-104,28
126	81	RO 193.7x12	149,85	-97,47
141	96	RO 193.7x12	149,81	-150,46
53	109	RO 193.7x12	149,81	-117,83
127	81	RO 193.7x12	149,16	-99,03
29	31	RO 193.7x12	142,89	-141,76
42	25	RO 193.7x12	142,1	28,62
55	39	RO 193.7x12	141,29	-71,65
57	39	RO 193.7x12	140,57	-72,62
125	79	RO 193.7x12	138,44	-81,08
144	45	RO 193.7x12	138,02	-120,98
105	56	RO 193.7x12	137,3	-109,49
4	5	RO 298.5x20	135,71	-127,85
124	100	RO 193.7x12	134,94	-12,06
11	45	RO 193.7x12	133,47	-128,44
76	78	RO 193.7x12	132,4	-104,64
140	105	RO 193.7x12	128,45	-126,38
150	79	RO 193.7x12	126,64	-105,78
35	6	RO 298.5x20	125,88	-121,01
75	30	RO 193.7x12	125,02	-17,74
20	30	RO 193.7x12	124,95	-17,87
96	37	RO 193.7x12	124,94	-72,62
92	111	RO 193.7x12	123,61	-84,97
12	78	RO 193.7x12	122,71	-55,08
34	28	RO 193.7x12	122,52	-47,13
2	28	RO 193.7x12	122,52	-47,14
130	14	RO 193.7x12	122,39	-93,06
122	97	RO 193.7x12	121,66	1,22
74	8	RO 193.7x12	121,39	-53,87
58	71	RO 193.7x12	121,05	-123,46
68	46	RO 193.7x12	120,01	-110,27
116	14	RO 193.7x12	119,53	-96,48
148	5	RO 193.7x12	118,56	-100,33
1	41	RO 193.7x12	116,15	-79,06
18	40	RO 193.7x12	114,65	-105,4
90	27	RO 193.7x12	113,64	-22,37
110	71	RO 193.7x12	113,58	-58,14
10	66	RO 193.7x12	111,62	-54,53
89	25	RO 193.7x12	110,87	-12,85
130	89	RO 193.7x12	109,87	-80,53
129	89	RO 193.7x12	109,82	-79,27
132	90	RO 193.7x12	109,63	-59,99
99	52	RO 193.7x12	109,08	-121,59
140	29	RO 193.7x12	108,59	-106,51
131	90	RO 193.7x12	108,36	-59,86
75	102	RO 193.7x12	108,08	-0,81
139	111	RO 193.7x12	107,77	-103,95
43	25	RO 193.7x12	107,43	-25,77
108	100	RO 193.7x12	106,79	-113,84
141	102	RO 193.7x12	106,67	-107,32
92	109	RO 193.7x12	106,27	-67,62

wyniki obliczeń statyczno-wyrztrzymałościowych modelu podpory

Pręt	Wzrost	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
65	9	RO 193.7x12	106,25	1,09
124	99	RO 193.7x12	105,3	17,57
123	99	RO 193.7x12	105,3	17,57
24	86	RO 193.7x12	104,2	-64,13
66	102	RO 193.7x12	104,09	-14,75
45	108	RO 193.7x12	103,33	-46,03
64	56	RO 193.7x12	103,13	-2,21
9	105	RO 193.7x12	102,33	-106,81
36	50	RO 193.7x12	100,49	-102,21
38	10	RO 298.5x20	99,84	-99,09
89	61	RO 193.7x12	99,32	-1,3
122	98	RO 193.7x12	97,94	24,94
123	98	RO 193.7x12	97,94	24,94
148	69	RO 193.7x12	97,52	-79,28
26	41	RO 193.7x12	95,39	-40,3
95	50	RO 193.7x12	94	-47,89
44	64	RO 193.7x12	93,38	-60,56
53	64	RO 193.7x12	92,38	-60,4
1	42	RO 193.7x12	92,1	-55,02
48	42	RO 193.7x12	91,05	-56,14
32	38	RO 193.7x12	90,17	-42,07
16	86	RO 193.7x12	89,17	-81,46
93	109	RO 193.7x12	86,39	-15,26
26	40	RO 193.7x12	86,07	-30,98
18	35	RO 193.7x12	83,67	-74,42
33	29	RO 193.7x12	83,27	-21,84
27	84	RO 193.7x12	82,43	-52,32
146	35	RO 193.7x12	82,32	-43,47
31	46	RO 193.7x12	79,85	-85,27
67	107	RO 193.7x12	79,84	-77,74
116	83	RO 193.7x12	79,74	-56,69
100	54	RO 193.7x12	79,34	-23,96
71	73	RO 193.7x12	79,24	-23,8
14	92	RO 193.7x12	79,04	-39,03
5	4	RO 298.5x20	78,73	-71,58
46	58	RO 193.7x12	75,39	25,26
133	92	RO 193.7x12	74,4	-24,76
128	87	RO 193.7x12	74,34	-53,86
12	77	RO 193.7x12	74,31	-6,68
65	103	RO 193.7x12	74,03	33,3
72	70	RO 193.7x12	73,87	-18,9
20	103	RO 193.7x12	73,75	33,33
134	95	RO 193.7x12	72,94	-32,92
15	47	RO 193.7x12	70,29	-53,22
86	76	RO 193.7x12	69,83	-11,7
5	2	RO 298.5x20	68,87	-61,72
16	84	RO 193.7x12	68,65	-60,94
87	35	RO 193.7x12	68,41	-27,18
52	24	RO 193.7x12	68,26	-33,51
146	61	RO 193.7x12	68,23	-29,38
51	24	RO 193.7x12	67,99	-35,85
115	100	RO 193.7x12	67,67	21,68
64	57	RO 193.7x12	67,05	33,87
40	43	RO 193.7x12	66,07	-22,99
46	57	RO 193.7x12	65,95	34,7
30	10	RO 298.5x20	65,33	-72,99
62	6	RO 298.5x20	63,88	-62,03
77	112	RO 193.7x12	63,27	-32,31
115	101	RO 193.7x12	62,9	26,44
66	101	RO 193.7x12	62,9	26,44
29	47	RO 193.7x12	62,48	-61,35

Pręt	Wzrost	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
24	87	RO 193.7x12	62,1	-22,03
56	27	RO 193.7x12	61,75	-30,66
93	110	RO 193.7x12	60,97	10,15
94	110	RO 193.7x12	60,97	10,15
96	51	RO 193.7x12	60,93	-8,61
87	34	RO 193.7x12	60,92	-19,69
111	73	RO 193.7x12	60,57	-3,54
97	51	RO 193.7x12	60,43	-9,12
142	88	RO 193.7x12	59,36	-48,68
149	9	RO 298.5x20	58,93	-56,2
44	20	RO 193.7x12	57,17	-24,36
27	82	RO 193.7x12	56,43	-26,32
63	82	RO 193.7x12	56,22	-26,1
135	17	RO 193.7x12	55,13	55,13
104	58	RO 193.7x12	54,1	51,37
19	59	RO 193.7x12	53,64	51,82
104	59	RO 193.7x12	53,64	51,82
50	60	RO 193.7x12	53,19	52,28
19	60	RO 193.7x12	53,19	52,28
50	15	RO 193.7x12	52,73	52,73
4	2	RO 298.5x20	52,21	-44,34
139	114	RO 193.7x12	51,97	-48,15
30	9	RO 298.5x20	51,31	-58,98
126	80	RO 193.7x12	51,31	1,08
17	78	RO 193.7x12	50,2	-14,16
111	74	RO 193.7x12	50,04	6,99
74	77	RO 193.7x12	48,97	18,54
14	93	RO 193.7x12	48,83	-8,81
13	93	RO 193.7x12	48,83	-8,81
71	72	RO 193.7x12	47,17	8,27
110	72	RO 193.7x12	47,17	8,27
113	76	RO 193.7x12	46,71	5,8
147	61	RO 193.7x12	46,49	15,74
8	97	RO 193.7x12	46,31	-41,04
133	91	RO 193.7x12	46,09	3,54
132	91	RO 193.7x12	46,09	3,54
47	43	RO 193.7x12	46,03	-10,22
17	79	RO 193.7x12	45,69	-9,65
147	52	RO 193.7x12	45,48	16,75
13	94	RO 193.7x12	44,56	-4,55
134	94	RO 193.7x12	44,56	-4,55
35	8	RO 298.5x20	44,43	-39,56
39	44	RO 193.7x12	44,33	-1,25
40	44	RO 193.7x12	44,33	-1,25
143	85	RO 193.7x12	44,16	-50,67
37	7	RO 193.7x12	44,14	-10,93
129	88	RO 193.7x12	44,13	-13,58
125	80	RO 193.7x12	43,66	13,71
78	114	RO 193.7x12	43,18	-12,23
101	34	RO 193.7x12	42,73	-39,67
15	46	RO 193.7x12	42,07	-25
63	83	RO 193.7x12	41,9	-11,77
52	7	RO 193.7x12	41,67	-6,92
38	4	RO 298.5x20	41,17	-40,43
114	20	RO 193.7x12	40,42	-41,54
83	31	RO 193.7x12	40,39	-2,34
70	73	RO 193.7x12	39,89	-42,9
82	83	RO 193.7x12	39,65	-36,93
81	117	RO 193.7x12	37,84	-13,6
39	45	RO 193.7x12	37,28	5,8
112	74	RO 193.7x12	36,72	15,8



D3.2. Model podpory dwuwarstwowej

wyniki obliczeń statyczno-wyrztrzymałościowych modelu podpory

Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
126	118	RO 139.7x6	292,51	-214,14
315	49	RO 139.7x6	287,15	-212,14
24	397	RO 139.7x6	284,44	-182,28
143	118	RO 139.7x6	263,38	-200,81
123	118	RO 139.7x6	240,7	-185,36
118	118	RO 139.7x6	240,59	-172,67
409	247	RO 139.7x6	236,52	-158,91
88	49	RO 139.7x6	213,33	-137,48
129	184	RO 139.7x6	212,13	-161,85
338	7	RO 139.7x6	209,36	-121,1
141	480	RO 139.7x6	196,05	-100,75
88	150	RO 139.7x6	195,82	-119,97
28	123	RO 139.7x6	190,98	-103,53
389	433	RO 139.7x6	185,54	-140,43
390	480	RO 139.7x6	185,24	43,71
118	263	RO 139.7x6	184,54	-116,63
473	213	RO 139.7x6	180,8	-48,21
494	235	RO 139.7x6	174,89	-138,19
338	351	RO 139.7x6	173,06	-84,8
562	385	RO 139.7x6	171,87	-133,37
293	332	RO 139.7x6	171,52	-97,33
438	195	RO 139.7x6	169,39	-17,37
409	252	RO 139.7x6	168,61	-91
29	55	RO 139.7x6	167,98	-73,14
543	208	RO 139.7x6	167,75	-124,69
222	175	RO 139.7x6	162,67	-88,6
140	480	RO 139.7x6	162,53	-136,01
408	247	RO 139.7x6	160,72	-129,01
42	178	RO 139.7x6	158,67	-59,87
66	178	RO 139.7x6	158,58	-59,85
390	193	RO 139.7x6	156,59	72,37
24	481	RO 139.7x6	156,1	-53,93
127	180	RO 139.7x6	155,69	-51,16
524	208	RO 139.7x6	154,66	-108,91
489	199	RO 139.7x6	154,12	48,41
473	214	RO 139.7x6	153,36	-20,78
295	333	RO 139.7x6	153	-26,16
548	231	RO 139.7x6	151,87	-94,71
454	263	RO 139.7x6	150,65	-64,02
526	210	RO 139.7x6	149,4	-15,12
389	185	RO 139.7x6	148,19	-103,08
375	362	RO 139.7x6	147,97	-15,4
341	473	RO 139.7x6	145,8	-43,47
342	473	RO 139.7x6	145,73	-43,57
374	363	RO 139.7x6	144,3	-11,57
495	235	RO 139.7x6	142,9	-121,5
292	331	RO 139.7x6	141,61	-67,63
154	385	RO 139.7x6	141	-105,4
27	157	RO 139.7x6	140,49	-88,91
539	429	RO 139.7x6	139,73	-112,77
222	176	RO 139.7x6	139,18	-65,12
465	428	RO 139.7x6	138,45	-94,55
247	120	RO 139.7x6	138,3	-69,81
261	165	RO 139.7x6	137,44	-49,61
28	165	RO 139.7x6	137,25	-49,79
331	256	RO 139.7x6	136,98	-65,6
129	157	RO 139.7x6	134,93	-84,65
26	257	RO 139.7x6	134,81	-22,59

Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
26	273	RO 139.7x6	134,68	-22,46
525	208	RO 139.7x6	133,57	0,71
467	429	RO 139.7x6	132,63	-104,12
547	234	RO 139.7x6	131,73	-74,02
548	234	RO 139.7x6	131,5	-74,35
448	252	RO 139.7x6	130,75	-100,46
42	274	RO 139.7x6	129,54	-30,74
71	154	RO 139.7x6	128,3	-57,25
489	200	RO 139.7x6	127,69	74,84
490	200	RO 139.7x6	127,69	74,84
610	480	RO 139.7x6	127,64	4,25
542	207	RO 139.7x6	127,6	3,75
439	195	RO 139.7x6	126,82	-92,41
5	120	RO 139.7x6	126,28	-59,3
450	244	RO 139.7x6	124,62	-42,04
6	7	RO 139.7x6	123,85	-98,26
372	338	RO 139.7x6	123,32	-48,41
464	426	RO 139.7x6	123,08	-79,18
374	476	RO 139.7x6	123,08	9,65
375	476	RO 139.7x6	122,9	9,68
30	123	RO 139.7x6	122	-117,65
126	244	RO 139.7x6	121,96	-43,58
474	213	RO 139.7x6	121,83	-92,22
72	27	RO 139.7x6	121,48	-40,08
484	480	RO 139.7x6	120,71	-91,58
128	180	RO 139.7x6	120,28	-117,21
542	208	RO 139.7x6	119,15	12,2
569	403	RO 139.7x6	118,23	-68,99
154	403	RO 139.7x6	117,9	-82,29
245	461	RO 139.7x6	117,15	-95,86
2	350	RO 139.7x6	116,61	-57,58
348	474	RO 139.7x6	116,5	-20,36
349	474	RO 139.7x6	116,45	-20,41
127	179	RO 139.7x6	115,56	-11,03
113	42	RO 193.7x12	114,66	-97,87
268	352	RO 139.7x6	113,61	-14,66
66	272	RO 139.7x6	113,28	-14,55
485	195	RO 139.7x6	113,1	4,19
545	230	RO 139.7x6	112,43	-39,2
546	230	RO 139.7x6	112,35	-39,25
341	355	RO 139.7x6	112,34	-10,01
557	210	RO 139.7x6	111,26	-8,51
137	453	RO 139.7x6	111,09	-136,1
141	192	RO 139.7x6	111,08	-15,78
130	184	RO 139.7x6	110,39	-97,4
29	192	RO 139.7x6	110,06	-15,21
348	180	RO 139.7x6	109,94	-13,8
429	333	RO 139.7x6	109,14	-9,82
173	123	RO 139.7x6	107,2	-73,55
371	339	RO 139.7x6	106,62	-31,7
12	296	RO 139.7x6	104,92	-55,04
366	255	RO 139.7x6	104,36	-40,93
137	49	RO 139.7x6	104,34	-129,35
418	426	RO 139.7x6	103,88	-53,44
274	257	RO 139.7x6	103,78	-59,5
373	338	RO 139.7x6	103,31	-75,97
72	156	RO 139.7x6	103,26	-21,86
393	331	RO 139.7x6	103,24	-55,81



wyniki obliczeń statyczno-wytrzymałościowych modelu podpory

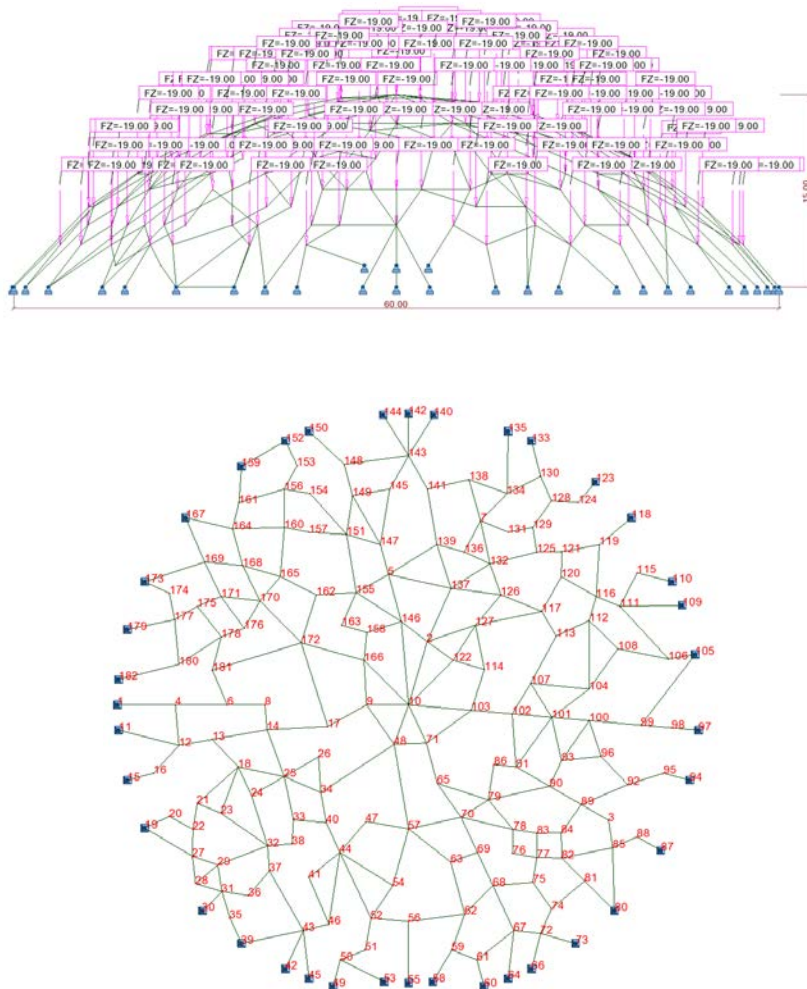
Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
572	412	RO 139.7x6	102,48	-12,78
515	263	RO 139.7x6	101,68	-104,46
527	210	RO 139.7x6	101,63	-70,15
490	26	RO 139.7x6	101,26	101,26
510	428	RO 139.7x6	101,1	-58,7
27	433	RO 139.7x6	101,08	-49,5
48	332	RO 139.7x6	100,36	-54,76
438	194	RO 139.7x6	99,45	52,58
553	228	RO 139.7x6	99,32	-69,78
488	199	RO 139.7x6	98,58	18,7
232	351	RO 139.7x6	98,43	-24,79
124	118	RO 139.7x6	98,28	-67,82
365	254	RO 139.7x6	97,97	-82,81
286	304	RO 139.7x6	97,57	-40,62
366	254	RO 139.7x6	96,98	-33,54
493	393	RO 139.7x6	96,62	-58,79
610	194	RO 139.7x6	96,01	35,87
494	393	RO 139.7x6	95,99	-59,29
349	181	RO 139.7x6	95,66	0,38
287	303	RO 139.7x6	95,25	-38,35
14	297	RO 139.7x6	95,02	-45,13
48	345	RO 139.7x6	94,28	-48,69
450	481	RO 139.7x6	94,26	-11,69
373	363	RO 139.7x6	94,06	-66,73
31	350	RO 139.7x6	94,01	-87,27
572	411	RO 139.7x6	93,06	-3,37
455	378	RO 139.7x6	92,9	-33,9
38	7	RO 139.7x6	92,52	-31,76
560	214	RO 139.7x6	92,27	23,69
37	155	RO 139.7x6	92,21	-31,09
210	38	RO 193.7x12	92,07	-66,46
559	213	RO 139.7x6	92,04	10,71
261	124	RO 139.7x6	91,92	-4,09
523	222	RO 139.7x6	91,89	-45,67
524	222	RO 139.7x6	91,62	-45,87
38	155	RO 139.7x6	91,57	-30,82
516	263	RO 139.7x6	91,25	-79,42
123	378	RO 139.7x6	90,66	-35,31
342	356	RO 139.7x6	89,79	12,36
485	196	RO 139.7x6	89,67	27,61
486	196	RO 139.7x6	89,67	27,61
556	29	RO 139.7x6	89,64	8,43
50	183	RO 139.7x6	88,77	-0,75
173	461	RO 139.7x6	88,64	-54,98
525	209	RO 139.7x6	88,2	46,08
526	209	RO 139.7x6	88,2	46,08
430	359	RO 139.7x6	88	11,39
429	359	RO 139.7x6	87,97	11,34
71	27	RO 139.7x6	87,79	-16,74
479	32	RO 139.7x6	87,77	-13,82
420	185	RO 139.7x6	86,9	-80,97
34	55	RO 139.7x6	84,99	-92,07
293	358	RO 139.7x6	84,65	-10,46
346	272	RO 139.7x6	84,5	-28,72
432	362	RO 139.7x6	84,27	15,12
357	433	RO 139.7x6	84,26	-62,78
292	358	RO 139.7x6	84,1	-10,12
198	139	RO 139.7x6	83,81	-15,56

Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
334	268	RO 139.7x6	83,69	-12,08
333	268	RO 139.7x6	83,69	-12,08
569	384	RO 139.7x6	83,61	-34,37
544	228	RO 139.7x6	83,57	-10,34
505	243	RO 139.7x6	83,15	-17,1
332	266	RO 139.7x6	82,99	-11,39
331	266	RO 139.7x6	82,85	-11,47
295	368	RO 139.7x6	82,74	44,09
456	379	RO 139.7x6	82,33	-23,33
455	379	RO 139.7x6	82,33	-23,33
3	295	RO 139.7x6	82,29	-31,7
268	353	RO 139.7x6	82,25	16,7
447	247	RO 139.7x6	82,01	-35,12
67	10	RO 193.7x12	81,92	-55,57
546	235	RO 139.7x6	81,66	-8,57
410	252	RO 139.7x6	81,6	-33,49
2	21	RO 139.7x6	81,55	-22,52
47	345	RO 139.7x6	81,28	-33,43
50	472	RO 139.7x6	81,16	6,86
326	124	RO 139.7x6	80,95	3,44
557	211	RO 139.7x6	80,67	22,08
558	211	RO 139.7x6	80,67	22,08
143	243	RO 139.7x6	80,1	-17,52
554	236	RO 139.7x6	79,93	-50,03
314	153	RO 139.7x6	79,58	-0,98
552	231	RO 139.7x6	79,52	-67,44
135	27	RO 139.7x6	79,15	-44,83
421	184	RO 139.7x6	79,12	-21,39
553	236	RO 139.7x6	78,38	-48,84
3	117	RO 139.7x6	78,17	-27,57
315	153	RO 139.7x6	77,55	-2,54
135	453	RO 139.7x6	77,54	-43,23
607	385	RO 139.7x6	77,35	-26,71
210	42	RO 193.7x12	77,17	-51,57
556	207	RO 139.7x6	76,93	21,14
207	136	RO 139.7x6	76,67	-9,1
339	354	RO 139.7x6	76,66	14,47
6	123	RO 139.7x6	76,33	-50,74
68	27	RO 139.7x6	75,59	-51,16
33	297	RO 139.7x6	75,34	-48,43
488	198	RO 139.7x6	75,3	41,98
487	198	RO 139.7x6	75,3	41,98
208	138	RO 139.7x6	75,29	-7,72
23	133	RO 139.7x6	75,18	-53,3
414	273	RO 139.7x6	75,15	-3,05
294	332	RO 139.7x6	75,13	-44,83
561	215	RO 139.7x6	75,12	40,83
560	215	RO 139.7x6	75,12	40,83
246	177	RO 139.7x6	75,12	-5,22
316	12	RO 139.7x6	75,07	-4,02
505	242	RO 139.7x6	74,8	-8,75
504	242	RO 139.7x6	74,8	-8,75
247	177	RO 139.7x6	74,1	-5,61
608	7	RO 139.7x6	74,01	-19,23
379	477	RO 139.7x6	73,83	-41,68
549	231	RO 139.7x6	73,79	-28,29
223	176	RO 139.7x6	73,6	-54,19
32	55	RO 139.7x6	73,48	-54,18

wyniki obliczeń statyczno-wyrztrzymałościowych modelu podpory

Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
246	123	RO 139.7x6	72,71	-2,82
121	477	RO 139.7x6	72,63	-41,76
483	25	RO 139.7x6	72,13	1,82
451	42	RO 139.7x6	72,08	-54,4
457	380	RO 139.7x6	71,76	-12,77
456	380	RO 139.7x6	71,76	-12,77
523	33	RO 139.7x6	71,28	-25,06
121	397	RO 139.7x6	71,05	-40,18
506	397	RO 139.7x6	71,01	-4,3
493	392	RO 139.7x6	70,71	-32,89
492	392	RO 139.7x6	70,71	-32,89
37	350	RO 139.7x6	70,57	-9,45
232	352	RO 139.7x6	69,95	3,69
607	89	RO 139.7x6	69,48	-18,84
449	249	RO 139.7x6	69,2	-38,31
541	35	RO 139.7x6	69,05	-35,44
124	249	RO 139.7x6	68,35	-37,89
346	176	RO 139.7x6	67,79	-12,01
487	197	RO 139.7x6	66,81	50,48
486	197	RO 139.7x6	66,81	50,48
33	299	RO 139.7x6	66,76	-39,84
47	151	RO 139.7x6	66,59	-18,74
504	241	RO 139.7x6	66,44	-0,39
503	241	RO 139.7x6	66,44	-0,39
197	141	RO 139.7x6	66,39	1,86
65	107	RO 193.7x12	66,38	-53,73
391	24	RO 139.7x6	66,24	2,16
558	212	RO 139.7x6	66,02	36,73
559	212	RO 139.7x6	66,02	36,73
360	102	RO 139.7x6	65,92	-39,32
282	461	RO 139.7x6	65,58	-48,22
326	125	RO 139.7x6	65,57	18,83
317	105	RO 139.7x6	65,44	-78,87
609	55	RO 139.7x6	64,92	20,36
451	397	RO 139.7x6	64,9	-47,23
10	119	RO 139.7x6	64,66	-31,77
498	481	RO 139.7x6	64,65	-42,44
547	235	RO 139.7x6	64,54	-6,83
376	362	RO 139.7x6	64,53	-30,36
78	38	RO 193.7x12	64,41	-38,93
430	360	RO 139.7x6	64,36	35,03
431	360	RO 139.7x6	64,36	35,03
388	185	RO 139.7x6	64,33	-24,2
345	175	RO 139.7x6	64,01	-9,31
370	339	RO 139.7x6	63,84	-35,03
437	12	RO 139.7x6	63,84	-34,17
427	77	RO 139.7x6	63,63	22,29
440	202	RO 139.7x6	63,61	-28,6
545	229	RO 139.7x6	63,53	9,7
544	229	RO 139.7x6	63,53	9,7
358	438	RO 139.7x6	63,53	-37
472	214	RO 139.7x6	63,52	-46,89
11	119	RO 139.7x6	63,49	-32,93
204	18	RO 139.7x6	63,46	-24,6
359	438	RO 139.7x6	63,43	-36,84
91	80	RO 193.7x12	63,38	-69,84
172	460	RO 139.7x6	63,37	-28,33
439	202	RO 139.7x6	63,28	-28,87

Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
172	109	RO 139.7x6	63,22	-28,18
314	158	RO 139.7x6	62,95	15,66
447	246	RO 139.7x6	62,49	-15,6
446	246	RO 139.7x6	62,49	-15,6
333	267	RO 139.7x6	62,38	9,23
332	267	RO 139.7x6	62,38	9,23
32	194	RO 139.7x6	62,38	-43,08
204	175	RO 139.7x6	62,16	-23,3
81	460	RO 139.7x6	62,08	-63,2
330	262	RO 139.7x6	61,91	-27,41
25	273	RO 139.7x6	61,7	-18,38
413	257	RO 139.7x6	61,68	8,19
34	433	RO 139.7x6	61,65	-68,73
285	304	RO 139.7x6	61,38	-36,47
458	381	RO 139.7x6	61,2	-2,2
457	381	RO 139.7x6	61,2	-2,2
418	442	RO 139.7x6	61,12	-10,68
543	228	RO 139.7x6	61,11	-18,05
329	262	RO 139.7x6	61,09	18,67
25	51	RO 139.7x6	61,05	-17,73
330	256	RO 139.7x6	61,03	-26,53
89	19	RO 193.7x12	60,98	-43,98
275	286	RO 139.7x6	60,95	-16,49
347	274	RO 139.7x6	60,89	-26,48
432	361	RO 139.7x6	60,86	38,54
431	361	RO 139.7x6	60,86	38,54
274	286	RO 139.7x6	60,76	-16,48
79	296	RO 139.7x6	60,63	-33,62
479	193	RO 139.7x6	60,31	13,64
354	355	RO 139.7x6	60,03	-38,43
421	183	RO 139.7x6	59,77	-2,04
483	193	RO 139.7x6	59,68	28,97
79	300	RO 139.7x6	59,61	-32,59
11	300	RO 139.7x6	59,48	-28,92
136	453	RO 139.7x6	59,22	-69,66
413	256	RO 139.7x6	59,04	10,82
334	179	RO 139.7x6	58,67	12,94
275	272	RO 139.7x6	58,66	-14,2
414	44	RO 139.7x6	58,5	13,6
340	354	RO 139.7x6	58,41	23,1
51	105	RO 193.7x12	58,4	-53,54
57	91	RO 193.7x12	58,25	-69,29
347	179	RO 139.7x6	58,11	-23,7
502	240	RO 139.7x6	58,09	7,96
503	240	RO 139.7x6	58,09	7,96
383	162	RO 139.7x6	58,01	27,61
561	30	RO 139.7x6	57,98	57,98
538	421	RO 139.7x6	57,53	-29,68
81	350	RO 139.7x6	57,31	-58,43
64	107	RO 193.7x12	57,14	-43,35
10	301	RO 139.7x6	57,14	-24,25
539	421	RO 139.7x6	57,08	-30,12
403	161	RO 139.7x6	57,03	27,13
511	443	RO 139.7x6	56,71	-14,05
113	40	RO 193.7x12	56,7	-39,92
510	443	RO 139.7x6	56,57	-14,18
433	363	RO 139.7x6	56,54	48,93
585	384	RO 139.7x6	56,39	-11,1



D 3.3. Model powłoki prętowej

wyniki obliczeń statyczno-wyrztrzymałościowych modelu powłoki prętowej

Pręt	Wzwał	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
98	50	RP 350x250x6	334,28	-296,75
26	13	RP 350x250x6	306,17	-248,09
18	13	RP 350x250x6	298,85	-262,82
41	38	RP 350x250x6	293,81	-257,86
26	12	RP 350x250x6	292,51	-234,44
98	51	RP 350x250x6	276,96	-239,43
182	95	RP 350x250x6	274,81	-232,27
90	71	RP 350x250x6	272,97	-213,49
168	50	RP 350x250x6	267,64	-220,2
55	33	RP 350x250x6	265,3	-237,16
131	46	RP 350x250x6	256,44	-237,05
55	38	RP 350x250x6	251,37	-223,24
105	95	RP 350x250x6	237,96	-190,62
86	44	RP 350x250x6	232,14	-191,72
176	51	RP 350x250x6	227,98	-188,94
24	8	RP 350x250x6	226,6	-214,48
131	43	RP 350x250x6	224,04	-204,65
18	18	RP 350x250x6	222,13	-186,1
1	181	RP 350x250x6	217,26	-205,01
219	85	RP 350x250x6	210,68	-191,21
155	90	RP 350x250x6	207,59	-173,88
28	181	RP 350x250x6	206,56	-198,58
35	8	RP 350x250x6	205,85	-191,39
90	65	RP 350x250x6	205,09	-145,6
28	178	RP 350x250x6	203,56	-195,57
53	14	RP 350x250x6	198,9	-169,29
71	9	RP 350x250x6	198,88	-171,59
155	89	RP 350x250x6	198,75	-165,04
65	156	RP 350x250x6	197,94	-173,78
182	92	RP 350x250x6	190,1	-147,56
25	40	RP 350x250x6	187,38	-150,32
62	47	RP 350x250x6	186,51	-167,4
53	17	RP 350x250x6	185	-155,39
38	12	RP 350x250x6	176,4	-172,25
85	44	RP 350x250x6	175,86	-156,61
187	85	RP 350x250x6	172,47	-153,64
104	33	RP 350x250x6	171,54	-136,18
17	21	RP 350x250x6	171,44	-160,42
3	175	RP 350x250x6	169,66	-152,09
11	22	RP 350x250x6	168,81	-153,66
251	124	RP 350x250x6	166,85	-143,49
113	59	RP 350x250x6	166,77	-152,28
160	90	RP 350x250x6	164,11	-143,19
60	153	RP 350x250x6	163,8	-132,78
17	22	RP 350x250x6	163,08	-152,07
226	92	RP 350x250x6	162,93	-138,63
192	124	RP 350x250x6	162,62	-145,54
51	165	RP 350x250x6	162,4	-119,91
65	153	RP 350x250x6	161,68	-137,53
13	175	RP 350x250x6	160,63	-135,64
41	32	RP 350x250x6	160,46	-124,51
201	89	RP 350x250x6	160	-131,67
85	47	RP 350x250x6	159,64	-140,39
86	40	RP 350x250x6	158,42	-118
87	71	RP 350x250x6	156,75	-109,19
71	17	RP 350x250x6	156,51	-129,22
5	178	RP 350x250x6	155,63	-121,6
225	138	RP 350x250x6	155,34	-159,14
6	6	RP 350x250x6	154,79	-136,79
51	162	RP 350x250x6	153,37	-110,89
114	62	RP 350x250x6	153,23	-141,08

Pręt	Wzwał	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
176	52	RP 350x250x6	150,87	-111,83
160	93	RP 350x250x6	150,6	-129,68
202	143	RP 350x250x6	147,79	-124,43
223	88	RP 350x250x6	144,78	-117,26
122	46	RP 350x250x6	144,52	-141,32
180	3	RP 350x250x6	143,58	-125,16
246	75	RP 350x250x6	142,31	-123,16
70	162	RP 350x250x6	141,79	-98,76
114	59	RP 350x250x6	141,73	-129,59
246	68	RP 350x250x6	138,94	-119,8
219	88	RP 350x250x6	138,23	-118,77
187	3	RP 350x250x6	137,95	-119,13
250	77	RP 350x250x6	136,54	-119,57
58	21	RP 350x250x6	136,45	-125,47
39	5	RP 350x250x6	135,72	-91,05
25	34	RP 350x250x6	134,61	-97,56
250	75	RP 350x250x6	134,33	-117,36
237	119	RP 350x250x6	133,15	-55,07
254	155	RP 350x250x6	131,19	-118,72
226	89	RP 350x250x6	128,74	-104,44
254	163	RP 350x250x6	128,71	-116,24
140	141	RP 350x250x6	128,7	-114,37
113	61	RP 350x250x6	127,87	-113,39
62	57	RP 350x250x6	126,61	-107,5
127	54	RP 350x250x6	126,24	-118,15
35	6	RP 350x250x6	126,1	-111,65
216	83	RP 350x250x6	125,86	-105,76
221	48	RP 350x250x6	124,68	-123,92
39	147	RP 350x250x6	124,34	-79,67
184	128	RP 350x250x6	123,44	-109,36
118	32	RP 350x250x6	122,79	-76,89
120	70	RP 350x250x6	120,4	-84,61
127	57	RP 350x250x6	120,32	-112,23
112	71	RP 350x250x6	119,78	-88,78
133	146	RP 350x250x6	118,12	-110,72
70	155	RP 350x250x6	118,11	-75,08
133	158	RP 350x250x6	118,05	-110,66
163	46	RP 350x250x6	117,27	-98,26
205	70	RP 350x250x6	115,32	-55,26
255	158	RP 350x250x6	114,12	-108,67
205	65	RP 350x250x6	113,16	-53,11
73	34	RP 350x250x6	112,94	-114,08
87	48	RP 350x250x6	111,8	-64,24
33	37	RP 350x250x6	111,69	-97,12
277	111	RP 350x250x6	111,29	-92,88
136	7	RP 350x250x6	110,4	-86,83
48	170	RP 350x250x6	109,83	-88,33
76	156	RP 350x250x6	109,46	-113,6
154	74	RP 350x250x6	106,64	-93,74
174	68	RP 350x250x6	106,26	-82,89
106	103	RP 350x250x6	106,15	-81,4
242	125	RP 350x250x6	104,04	-50,75
154	72	RP 350x250x6	103,54	-90,64
75	18	RP 350x250x6	103,08	-93,61
92	33	RP 350x250x6	102,23	-85,21
13	177	RP 350x250x6	102,01	-77,02
277	116	RP 350x250x6	101,78	-83,37
159	125	RP 350x250x6	101,14	-54,62
255	163	RP 350x250x6	100,78	-95,33
50	34	RP 350x250x6	100,66	-63,79
201	84	RP 350x250x6	100,51	-72,17

wyniki obliczeń statyczno-wyrztrzymałościowych modelu powłoki prętowej

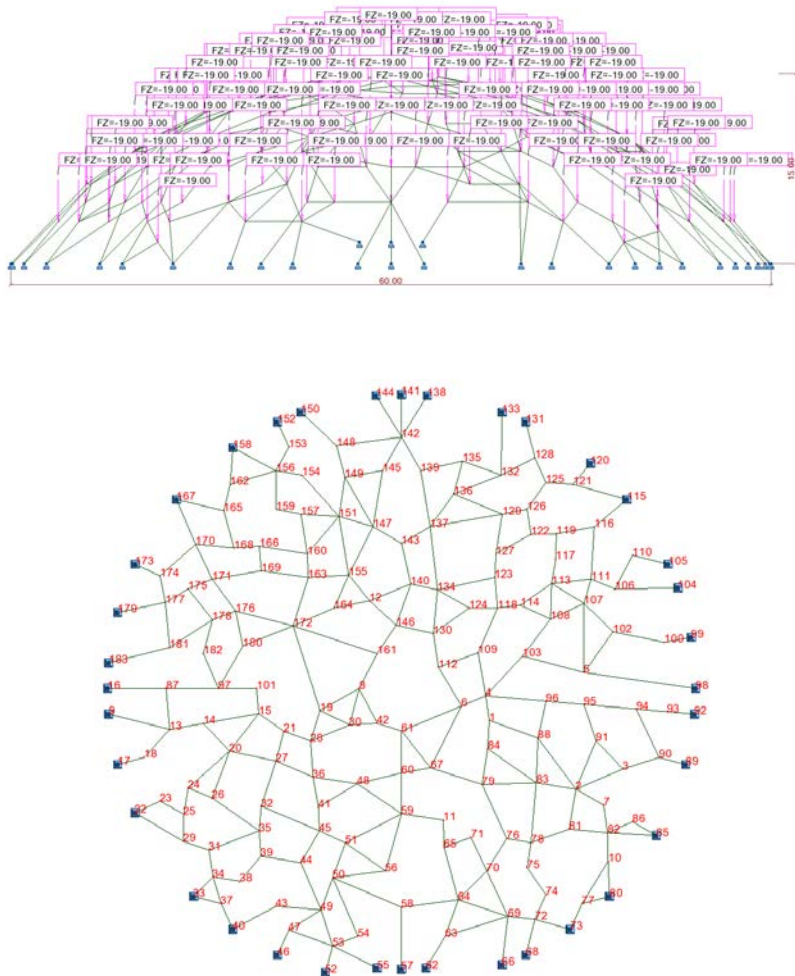
Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
195	119	RP 350x250x6	100,24	-47,29
202	141	RP 350x250x6	100,18	-76,82
108	32	RP 350x250x6	99,74	-100,95
192	128	RP 350x250x6	99,57	-82,49
95	103	RP 350x250x6	99,03	-33,36
157	129	RP 350x250x6	99,02	-79,11
138	102	RP 350x250x6	98,8	-81,61
136	134	RP 350x250x6	98,4	-74,83
163	44	RP 350x250x6	98,14	-79,14
49	165	RP 350x250x6	97,07	-63,93
132	7	RP 350x250x6	97,06	-85,8
134	134	RP 350x250x6	96,48	-60,28
79	10	RP 350x250x6	95,63	-75,35
249	90	RP 350x250x6	95,53	-83,49
166	77	RP 350x250x6	95,37	-87,47
274	82	RP 350x250x6	95,21	-47,03
4	14	RP 350x250x6	95	-74,01
242	132	RP 350x250x6	93,77	-40,47
48	172	RP 350x250x6	93,31	-71,81
216	78	RP 350x250x6	93,1	-73
137	56	RP 350x250x6	93,05	-67,46
159	121	RP 350x250x6	92,9	-46,38
108	24	RP 350x250x6	92,77	-93,99
166	83	RP 350x250x6	92,1	-84,19
258	56	RP 350x250x6	92,1	-66,57
79	9	RP 350x250x6	91,96	-71,67
10	20	RP 350x250x6	91,59	-69,79
249	79	RP 350x250x6	91,39	-79,36
191	54	RP 350x250x6	91,22	-81,58
3	171	RP 350x250x6	90,66	-73,1
165	65	RP 350x250x6	90,63	-92,25
54	91	RP 350x250x6	90,55	-88,2
189	129	RP 350x250x6	90,11	-63,88
80	156	RP 350x250x6	90,07	-60,71
49	170	RP 350x250x6	89,91	-56,78
34	14	RP 350x250x6	89,57	-73,43
245	7	RP 350x250x6	88,99	-69,57
199	84	RP 350x250x6	88,52	-54,74
156	48	RP 350x250x6	88,37	-35,61
91	71	RP 350x250x6	88,11	-51,3
206	70	RP 350x250x6	87,46	-27,25
72	7	RP 350x250x6	87,43	-75,39
165	79	RP 350x250x6	87,3	-88,92
60	152	RP 350x250x6	86,82	-55,8
111	69	RP 350x250x6	86,65	-25,4
128	68	RP 350x250x6	86,44	-29,9
119	160	RP 350x250x6	86,39	-53,08
111	68	RP 350x250x6	86,38	-25,14
37	18	RP 350x250x6	86,18	-44,04
11	20	RP 350x250x6	85,22	-70,07
112	10	RP 350x250x6	84,56	-53,56
174	62	RP 350x250x6	84,42	-61,05
5	180	RP 350x250x6	84,29	-50,27
210	78	RP 350x250x6	83,99	-80,06
243	134	RP 350x250x6	83,18	-84,55
140	139	RP 350x250x6	83,09	-68,76
14	12	RP 350x250x6	82,74	-24,43
142	101	RP 350x250x6	82,64	-47,02
212	70	RP 350x250x6	82,53	-59,21
204	61	RP 350x250x6	82,25	-79,57
164	9	RP 350x250x6	81,92	-63,52

Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
63	138	RP 350x250x6	81,75	-91,14
189	128	RP 350x250x6	81,41	-55,18
118	29	RP 350x250x6	81,36	-35,46
178	111	RP 350x250x6	81,2	-82,06
64	48	RP 350x250x6	81,2	-59,96
157	125	RP 350x250x6	81,04	-61,13
59	176	RP 350x250x6	81,02	-51,56
142	93	RP 350x250x6	80,92	-45,3
21	27	RP 350x250x6	80,73	-76,35
278	74	RP 350x250x6	80,43	-76,67
106	114	RP 350x250x6	80,19	-55,45
217	86	RP 350x250x6	80,02	-69,38
103	10	RP 350x250x6	79,99	-61,21
221	57	RP 350x250x6	79,83	-79,07
195	121	RP 350x250x6	79,12	-26,17
32	152	RP 350x250x6	78,91	-78,91
164	166	RP 350x250x6	78,6	-60,2
27	27	RP 350x250x6	78,47	-63,2
214	81	RP 350x250x6	78,37	-22,94
184	130	RP 350x250x6	77,95	-63,87
210	76	RP 350x250x6	77,45	-73,52
209	76	RP 350x250x6	77,43	-67,85
50	25	RP 350x250x6	77	-40,13
77	21	RP 350x250x6	76,95	-76,52
4	13	RP 350x250x6	76,91	-55,92
36	43	RP 350x250x6	76,47	-55,54
81	5	RP 350x250x6	76,42	-42,44
95	102	RP 350x250x6	76,37	-10,7
61	166	RP 350x250x6	76,23	-50,67
99	67	RP 350x250x6	76,15	-50,89
206	69	RP 350x250x6	76,06	-15,85
7	12	RP 350x250x6	75,91	-75,17
103	48	RP 350x250x6	75,42	-56,64
44	31	RP 350x250x6	75,13	-22,41
19	35	RP 350x250x6	74,94	-22,11
228	102	RP 350x250x6	74,62	-16,58
63	134	RP 350x250x6	74,16	-83,55
158	43	RP 350x250x6	73,76	-14,5
94	19	RP 350x250x6	73,35	-2,15
156	34	RP 350x250x6	73,3	-20,53
23	178	RP 350x250x6	72,78	-55,69
44	35	RP 350x250x6	72,2	-19,48
258	52	RP 350x250x6	72,02	-46,49
56	24	RP 350x250x6	71,79	-74,43
257	165	RP 350x250x6	71,67	-45,2
43	176	RP 350x250x6	71,37	-45,27
207	44	RP 350x250x6	70,76	-66,44
213	116	RP 350x250x6	70,52	-39,56
228	101	RP 350x250x6	70,4	-12,37
15	174	RP 350x250x6	69,95	-70,65
61	172	RP 350x250x6	69,93	-44,37
45	91	RP 350x250x6	69,91	-61
115	31	RP 350x250x6	69,45	-77,69
196	61	RP 350x250x6	69	-42,65
91	103	RP 350x250x6	68,95	-32,14
37	25	RP 350x250x6	68,88	-26,74
232	100	RP 350x250x6	68,67	-39,84
137	62	RP 350x250x6	68,4	-42,82
84	77	RP 350x250x6	67,89	-36,26
270	177	RP 350x250x6	67,74	-32,09
76	161	RP 350x250x6	67,74	-71,88

wyniki obliczeń statyczno-wyrztrzymałościowych modelu powłoki prętowej

Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
213	119	RP 350x250x6	66,78	-35,82
144	101	RP 350x250x6	65,69	-33,36
8	29	RP 350x250x6	64,79	-22,86
16	29	RP 350x250x6	64,51	0,09
54	86	RP 350x250x6	64,32	-61,97
58	23	RP 350x250x6	64,22	-53,24
208	130	RP 350x250x6	63,35	-49,02
175	147	RP 350x250x6	63,25	-35,81
180	89	RP 350x250x6	62,89	-44,47
104	40	RP 350x250x6	62,77	-27,41
151	101	RP 350x250x6	62,55	-24,02
266	171	RP 350x250x6	62,43	-51,51
179	83	RP 350x250x6	62,33	-50,29
204	67	RP 350x250x6	62,05	-59,36
193	78	RP 350x250x6	61,87	-53,85
211	78	RP 350x250x6	61,83	-41,1
84	82	RP 350x250x6	61,3	-29,67
215	116	RP 350x250x6	60,95	-20,53
33	32	RP 350x250x6	60,55	-45,98
2	4	RP 350x250x6	60,12	-32,31
245	132	RP 350x250x6	59,97	-40,55
72	138	RP 350x250x6	59,67	-47,63
94	27	RP 350x250x6	59,57	11,63
125	136	RP 350x250x6	59,41	-21,55
151	100	RP 350x250x6	59,26	-20,73
100	10	RP 350x250x6	58,67	-82,81
263	169	RP 350x250x6	58,51	-39,85
179	84	RP 350x250x6	58,12	-46,08
81	146	RP 350x250x6	58,11	-24,13
57	5	RP 350x250x6	57,65	-27,55
117	63	RP 350x250x6	57,51	-60,95
171	10	RP 350x250x6	57,41	-18,38
57	139	RP 350x250x6	57,39	-27,29
153	10	RP 350x250x6	57,36	-37,42
217	79	RP 350x250x6	57,16	-46,52
150	10	RP 350x250x6	57	-14,99
43	170	RP 350x250x6	56,7	-30,61
175	151	RP 350x250x6	56,61	-29,17
138	91	RP 350x250x6	56,59	-39,41
99	72	RP 350x250x6	56,56	-31,3
24	14	RP 350x250x6	56,4	-44,28
274	81	RP 350x250x6	56,38	-8,2
229	93	RP 350x250x6	56,35	-46,37
46	31	RP 350x250x6	56,02	-52,46
69	143	RP 350x250x6	55,76	-21,54
130	37	RP 350x250x6	55,26	-56,78
107	32	RP 350x250x6	55,13	-50,35
40	155	RP 350x250x6	54,91	-19,28
64	9	RP 350x250x6	54,79	-33,55
123	146	RP 350x250x6	54,74	-29,59
21	22	RP 350x250x6	54,71	-50,33
75	23	RP 350x250x6	54,41	-44,95
34	25	RP 350x250x6	54,4	-38,26
186	102	RP 350x250x6	54,09	-39,33
102	154	RP 350x250x6	53,98	-54,73
238	116	RP 350x250x6	53,95	-44,69
261	165	RP 350x250x6	53,9	-33,34
36	37	RP 350x250x6	53,89	-32,95
121	41	RP 350x250x6	53,86	-51,72
83	161	RP 350x250x6	53,75	-45,47
197	111	RP 350x250x6	53,4	-25,01

Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
190	113	RP 350x250x6	53,06	-20,52
12	16	RP 350x250x6	52,86	-48,69
59	178	RP 350x250x6	52,76	-23,29
236	114	RP 350x250x6	52,58	-26,55
9	174	RP 350x250x6	52,58	-57,39
145	43	RP 350x250x6	52,47	-46,46
177	151	RP 350x250x6	52,37	-36,78
211	70	RP 350x250x6	52,34	-31,6
147	96	RP 350x250x6	52,25	-26,95
141	101	RP 350x250x6	52,19	-31,92
146	166	RP 350x250x6	51,78	-29,45
92	25	RP 350x250x6	50,9	-33,88
40	5	RP 350x250x6	50,84	-15,21
139	131	RP 350x250x6	50,31	-45,46
241	132	RP 350x250x6	50,23	-16,51
191	52	RP 350x250x6	50,22	-40,58
267	171	RP 350x250x6	50,13	-21,72
230	106	RP 350x250x6	50,02	-23,38
78	52	RP 350x250x6	49,76	-26,35
135	149	RP 350x250x6	49,28	-28,78
120	57	RP 350x250x6	49,17	-13,37
116	117	RP 350x250x6	49,1	-28,48
8	31	RP 350x250x6	49,05	-7,12
6	4	RP 350x250x6	48,98	-30,98
77	18	RP 350x250x6	48,85	-48,41
16	27	RP 350x250x6	48,36	16,24
83	164	RP 350x250x6	48,29	-40,01
198	143	RP 350x250x6	48,28	-5,94
132	136	RP 350x250x6	48,16	-36,91
88	157	RP 350x250x6	48,08	-16,41
119	157	RP 350x250x6	47,84	-14,54
78	44	RP 350x250x6	47,72	-24,31
121	44	RP 350x250x6	47,56	-45,42
20	177	RP 350x250x6	47,26	-53,68
247	143	RP 350x250x6	46,73	-22,17
257	160	RP 350x250x6	46,66	-20,18
128	67	RP 350x250x6	46,55	9,99
203	136	RP 350x250x6	46,53	-14,27
260	164	RP 350x250x6	46,12	-27,73
235	63	RP 350x250x6	46,05	-54,48
88	151	RP 350x250x6	45,59	-13,92
7	16	RP 350x250x6	45,57	-44,83
150	2	RP 350x250x6	45,32	-3,31
80	160	RP 350x250x6	45,2	-15,85
82	155	RP 350x250x6	45,06	-42,88
171	103	RP 350x250x6	44,69	-5,66
199	82	RP 350x250x6	44,57	-10,79
207	54	RP 350x250x6	44,49	-40,17
10	19	RP 350x250x6	43,81	-22,02
253	154	RP 350x250x6	43,59	-47,32
256	164	RP 350x250x6	43,39	-11,57
181	107	RP 350x250x6	43,29	-10,76
214	80	RP 350x250x6	43,23	12,21
122	41	RP 350x250x6	43,21	-40,01
29	31	RP 350x250x6	43,04	-26,4
162	106	RP 350x250x6	42,97	-17,72
265	173	RP 350x250x6	42,97	-26,31
240	127	RP 350x250x6	42,71	-14,07
263	168	RP 350x250x6	42,32	-23,66
20	180	RP 350x250x6	42,03	-48,45
256	160	RP 350x250x6	41,85	-10,03



D3.4. Model powłoki prętowej z otworem środkowym

## wyniki obliczeń statyczno-wyrztrzymałościowych modelu prętowej powłoki z otworem środkowym

Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
224	111	RP 350x250x8	290,13	-233,9
9	14	RP 350x250x8	281,98	-223,48
39	28	RP 350x250x8	258,77	-208,66
9	13	RP 350x250x8	236,83	-178,33
28	101	RP 350x250x8	235,46	-219,34
27	97	RP 350x250x8	234,38	-218,41
224	106	RP 350x250x8	229,54	-173,31
94	35	RP 350x250x8	228,63	-195,16
27	101	RP 350x250x8	223,17	-207,21
72	156	RP 350x250x8	220,93	-187,25
134	112	RP 350x250x8	218,96	-184,47
110	21	RP 350x250x8	214,98	-185,85
122	70	RP 350x250x8	213,62	-196,6
114	35	RP 350x250x8	212,1	-204,29
22	14	RP 350x250x8	211,37	-181,79
39	21	RP 350x250x8	206,23	-156,13
34	51	RP 350x250x8	205,64	-174,72
134	130	RP 350x250x8	203,37	-168,87
81	11	RP 350x250x8	201,74	-186,15
230	154	RP 350x250x8	194,51	-160,97
149	109	RP 350x250x8	194,24	-163,6
72	154	RP 350x250x8	190,96	-157,28
90	4	RP 350x250x8	188,01	-116,24
149	118	RP 350x250x8	180,03	-149,38
75	65	RP 350x250x8	179,42	-170,73
113	90	RP 350x250x8	179,16	-145,55
189	108	RP 350x250x8	177,72	-143,25
36	29	RP 350x250x8	175,8	-124,23
61	38	RP 350x250x8	174,29	-150,4
22	20	RP 350x250x8	173,97	-144,39
114	39	RP 350x250x8	173,68	-165,88
82	11	RP 350x250x8	173,5	-156,87
180	127	RP 350x250x8	169,1	-140,6
110	27	RP 350x250x8	167,89	-138,77
59	156	RP 350x250x8	164,89	-148,62
94	32	RP 350x250x8	164,8	-131,32
180	123	RP 350x250x8	160,05	-131,55
112	39	RP 350x250x8	159,81	-139,78
20	13	RP 350x250x8	158,87	-155,62
177	111	RP 350x250x8	158,78	-132,96
46	112	RP 350x250x8	157,27	-150,7
12	25	RP 350x250x8	155,95	-148,4
34	45	RP 350x250x8	155,39	-124,48
21	25	RP 350x250x8	152,72	-137,76
70	156	RP 350x250x8	150,99	-135,93
15	27	RP 350x250x8	149,97	-126,71
112	38	RP 350x250x8	149,41	-129,38
5	97	RP 350x250x8	149,03	-115,41
59	159	RP 350x250x8	147,47	-131,2
81	65	RP 350x250x8	146,31	-130,71
148	118	RP 350x250x8	143,58	-98,98
71	41	RP 350x250x8	142,78	-74,81
37	168	RP 350x250x8	142,24	-133,26
115	32	RP 350x250x8	141,79	-132,07
42	49	RP 350x250x8	141,42	-95,44
165	90	RP 350x250x8	140,1	-110,18
82	59	RP 350x250x8	140,04	-123,41
162	81	RP 350x250x8	139,16	-72,07
46	109	RP 350x250x8	139,1	-132,52
115	45	RP 350x250x8	135,33	-125,6
236	170	RP 350x250x8	134,63	-81,61

Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
230	151	RP 350x250x8	131,7	-98,16
90	6	RP 350x250x8	130,29	-58,52
98	4	RP 350x250x8	130,25	-82,54
12	24	RP 350x250x8	129,91	-122,36
61	34	RP 350x250x8	128,55	-104,66
108	82	RP 350x250x8	128,52	-121,34
32	28	RP 350x250x8	128,26	-83,11
15	36	RP 350x250x8	127,7	-104,43
75	71	RP 350x250x8	127,12	-118,43
160	106	RP 350x250x8	126,6	-125,81
122	71	RP 350x250x8	126,35	-109,34
30	174	RP 350x250x8	126,01	-140,44
244	2	RP 350x250x8	124,03	-100,03
218	70	RP 350x250x8	123,82	-64,1
162	78	RP 350x250x8	123,37	-56,28
169	122	RP 350x250x8	123,12	-93,55
36	31	RP 350x250x8	118,89	-67,33
89	168	RP 350x250x8	118,62	-97,98
18	175	RP 350x250x8	118,08	-66,42
29	14	RP 350x250x8	117,31	-88,56
111	28	RP 350x250x8	116,48	-77,82
172	53	RP 350x250x8	115,18	-112,18
177	107	RP 350x250x8	115,05	-89,23
166	100	RP 350x250x8	114,58	-86,47
249	29	RP 350x250x8	114,17	-61,73
150	72	RP 350x250x8	114,17	-103,85
70	153	RP 350x250x8	113,81	-98,76
276	49	RP 350x250x8	113,27	-37,27
229	60	RP 350x250x8	113,18	-71,55
71	45	RP 350x250x8	112,53	-44,56
208	100	RP 350x250x8	112,11	-88,48
80	159	RP 350x250x8	112,02	-101,65
60	24	RP 350x250x8	111,4	-108,44
219	127	RP 350x250x8	111,39	-81,02
6	97	RP 350x250x8	111,1	-82
266	153	RP 350x250x8	110,74	-88,2
182	123	RP 350x250x8	110,57	-91,99
37	166	RP 350x250x8	109,87	-100,89
274	172	RP 350x250x8	109,84	-73,13
204	135	RP 350x250x8	109,83	-102,73
33	23	RP 350x250x8	109,43	-87,7
135	143	RP 350x250x8	109,04	-60,52
152	79	RP 350x250x8	108,8	-64,54
189	103	RP 350x250x8	108,54	-74,07
221	132	RP 350x250x8	108,34	-96,17
14	166	RP 350x250x8	108,27	-101,48
55	172	RP 350x250x8	108,13	-78,96
87	59	RP 350x250x8	107,71	-72,55
31	15	RP 350x250x8	106,77	-69,35
44	20	RP 350x250x8	106,76	-108,29
184	60	RP 350x250x8	106,72	-73,18
49	51	RP 350x250x8	105,86	-61,16
25	97	RP 350x250x8	105,79	-113,1
19	20	RP 350x250x8	105,17	-66,39
259	116	RP 350x250x8	103,73	-40,83
253	170	RP 350x250x8	103,73	-51,84
135	147	RP 350x250x8	103,39	-54,86
101	31	RP 350x250x8	103,15	-62,3
258	106	RP 350x250x8	100,62	-40,31
235	170	RP 350x250x8	99,71	-100,8
213	78	RP 350x250x8	99,59	-36,47



wyniki obliczeń statyczno-wyrztrzymałościowych modelu prętowej powłoki z otworem środkowym

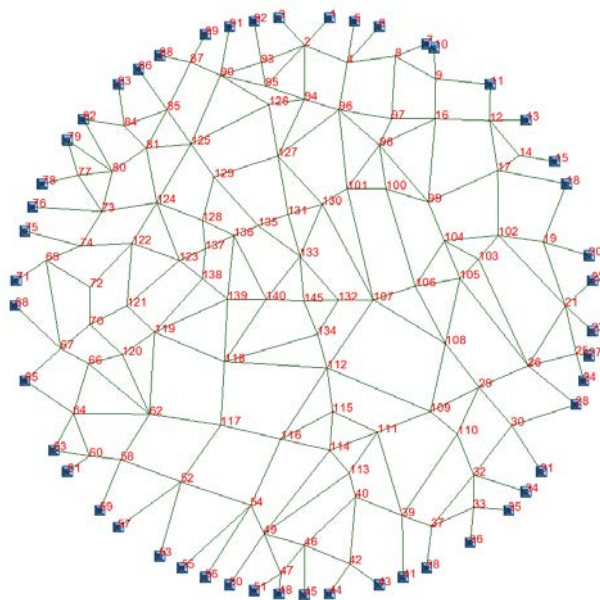
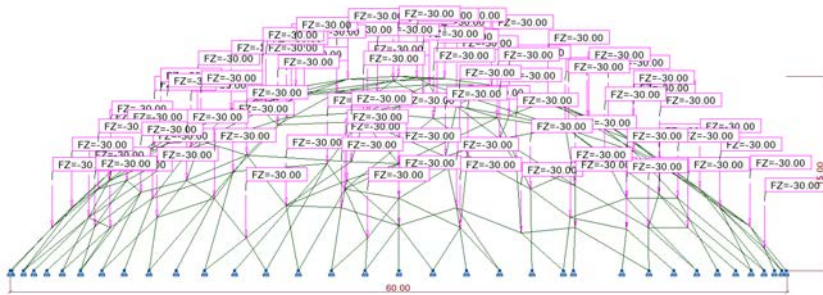
Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
49	50	RP 350x250x8	99,44	-54,74
42	50	RP 350x250x8	98,56	-52,57
176	111	RP 350x250x8	98,23	-73,39
222	132	RP 350x250x8	97,48	-92,06
23	36	RP 350x250x8	97,47	-48,11
255	177	RP 350x250x8	96,7	-27,78
274	164	RP 350x250x8	96,06	-59,35
23	28	RP 350x250x8	95,7	-46,34
141	143	RP 350x250x8	95,52	-55,52
184	59	RP 350x250x8	95,17	-61,63
128	127	RP 350x250x8	94,83	-86,39
198	103	RP 350x250x8	94,73	-56,51
80	157	RP 350x250x8	94,44	-84,07
235	168	RP 350x250x8	94,05	-95,14
168	119	RP 350x250x8	93,78	-54,24
74	61	RP 350x250x8	93,64	-33,23
17	160	RP 350x250x8	93,51	-68,99
60	20	RP 350x250x8	92,86	-89,91
236	171	RP 350x250x8	92,64	-39,62
126	48	RP 350x250x8	92,38	-53,3
244	81	RP 350x250x8	91,64	-67,64
18	177	RP 350x250x8	91,23	-39,57
89	165	RP 350x250x8	90,75	-70,12
3	174	RP 350x250x8	90,02	-109,64
129	151	RP 350x250x8	89,89	-49,44
165	3	RP 350x250x8	89,19	-59,27
51	172	RP 350x250x8	89,19	-68,16
193	95	RP 350x250x8	88,53	-45,41
125	49	RP 350x250x8	88	-84,92
11	18	RP 350x250x8	87,8	-75,9
229	67	RP 350x250x8	87,31	-45,69
246	129	RP 350x250x8	87,28	-45,92
140	125	RP 350x250x8	87,27	-29,49
168	116	RP 350x250x8	87,22	-47,68
62	130	RP 350x250x8	86,62	-46,17
120	48	RP 350x250x8	86,54	-64
104	6	RP 350x250x8	86,47	-30,35
126	60	RP 350x250x8	85,68	-46,6
74	42	RP 350x250x8	85,04	-24,62
164	142	RP 350x250x8	84,93	-51,74
21	23	RP 350x250x8	84,9	-69,94
158	121	RP 350x250x8	84,85	-32,55
237	171	RP 350x250x8	84,2	-47,66
151	91	RP 350x250x8	84,19	-83,29
237	169	RP 350x250x8	84,17	-47,64
140	126	RP 350x250x8	84,17	-26,38
268	13	RP 350x250x8	83,81	-30,68
4	178	RP 350x250x8	83,48	-53,21
50	34	RP 350x250x8	83	-48,92
64	45	RP 350x250x8	82,76	-32,5
85	64	RP 350x250x8	82,57	-73,73
10	25	RP 350x250x8	81,97	-79,48
176	116	RP 350x250x8	81,96	-57,12
216	129	RP 350x250x8	81,65	-42,05
57	151	RP 350x250x8	81,28	-55,89
10	29	RP 350x250x8	81,13	-78,64
79	70	RP 350x250x8	80,77	-45,73
150	74	RP 350x250x8	80,74	-70,42
219	122	RP 350x250x8	80,69	-50,31
250	87	RP 350x250x8	80,55	-37,65
5	87	RP 350x250x8	80,12	-46,49

Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
106	82	RP 350x250x8	80,06	-82,22
118	130	RP 350x250x8	79,68	-66,74
169	119	RP 350x250x8	79,59	-50,02
32	19	RP 350x250x8	79,46	-34,31
249	22	RP 350x250x8	79,39	-26,95
245	118	RP 350x250x8	79,39	-24,86
97	4	RP 350x250x8	79,29	-39,41
270	108	RP 350x250x8	79,28	-35,66
171	155	RP 350x250x8	79,23	-48
203	50	RP 350x250x8	79,1	-84,26
270	107	RP 350x250x8	78,75	-35,13
145	135	RP 350x250x8	78,4	-73,18
211	4	RP 350x250x8	78,39	-38,41
196	136	RP 350x250x8	77,93	-80,26
188	51	RP 350x250x8	77,66	-73,74
206	63	RP 350x250x8	77,21	-24,28
158	125	RP 350x250x8	77,01	-24,71
181	74	RP 350x250x8	76,48	-68,57
218	76	RP 350x250x8	76,33	-16,61
91	44	RP 350x250x8	76,33	-25,83
232	94	RP 350x250x8	76,31	-28,68
152	67	RP 350x250x8	76,13	-31,87
13	169	RP 350x250x8	76,12	-65,12
138	128	RP 350x250x8	75,95	-32,34
197	83	RP 350x250x8	75,77	-65,81
225	95	RP 350x250x8	75,72	-32,87
171	12	RP 350x250x8	75,45	-44,22
252	53	RP 350x250x8	75,26	-8,68
120	41	RP 350x250x8	74,96	-52,42
183	60	RP 350x250x8	73,66	-46,23
148	124	RP 350x250x8	72,98	-28,38
273	90	RP 350x250x8	72,87	-71,34
63	44	RP 350x250x8	72,63	-36,45
54	178	RP 350x250x8	72,36	-46,64
161	82	RP 350x250x8	71,81	1,62
146	136	RP 350x250x8	71,77	-73,24
44	26	RP 350x250x8	71,44	-72,96
17	163	RP 350x250x8	71,37	-46,85
16	172	RP 350x250x8	71,28	-29,02
91	49	RP 350x250x8	71,25	-20,74
69	162	RP 350x250x8	71,24	-59,2
245	114	RP 350x250x8	71,19	-16,66
109	72	RP 350x250x8	70,64	-47,9
208	102	RP 350x250x8	70,51	-46,87
103	35	RP 350x250x8	70,46	-21,23
129	147	RP 350x250x8	70,1	-29,65
2	175	RP 350x250x8	70,08	-24,45
84	6	RP 350x250x8	69,98	-50,91
104	61	RP 350x250x8	69,73	-13,62
1	18	RP 350x250x8	69,44	-61,88
86	112	RP 350x250x8	69,43	-42,48
83	157	RP 350x250x8	69,41	-57,77
48	24	RP 350x250x8	69,14	-64,63
35	41	RP 350x250x8	68,5	-17,19
276	53	RP 350x250x8	68,38	7,63
212	111	RP 350x250x8	68,33	-22,27
178	93	RP 350x250x8	68,31	-16,13
213	76	RP 350x250x8	67,91	-4,79
53	12	RP 350x250x8	67,87	-33,12
132	129	RP 350x250x8	67,35	-65,85
105	72	RP 350x250x8	67,3	-33,62

## wyniki obliczeń statyczno-wyrztrzymałościowych modelu prętowej powłoki z otworem środkowym

Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
56	176	RP 350x250x8	67,25	-47,19
64	44	RP 350x250x8	67,07	-16,81
207	63	RP 350x250x8	67,04	-22,94
127	8	RP 350x250x8	66,83	-38,37
175	107	RP 350x250x8	66,42	-52,32
121	53	RP 350x250x8	66,36	-76,51
161	81	RP 350x250x8	66,17	7,26
265	156	RP 350x250x8	66,04	-25,24
232	93	RP 350x250x8	65,86	-18,22
47	160	RP 350x250x8	65,6	-42,99
155	2	RP 350x250x8	65,51	-69,11
275	82	RP 350x250x8	65,32	18,7
214	79	RP 350x250x8	65,14	3,29
131	64	RP 350x250x8	65,03	-19,2
87	51	RP 350x250x8	64,97	-29,8
243	123	RP 350x250x8	64,96	-42,08
128	129	RP 350x250x8	64,89	-56,45
93	35	RP 350x250x8	64,1	-66,4
226	107	RP 350x250x8	63,91	-74,93
68	151	RP 350x250x8	63,82	-62,28
84	67	RP 350x250x8	63,5	-44,42
54	176	RP 350x250x8	63,23	-37,5
211	96	RP 350x250x8	62,92	-22,94
277	121	RP 350x250x8	62,76	-18,35
100	5	RP 350x250x8	62,73	-49,49
19	27	RP 350x250x8	62,5	-23,72
4	181	RP 350x250x8	62,29	-32,02
55	163	RP 350x250x8	61,92	-32,75
164	139	RP 350x250x8	61,55	-28,37
2	171	RP 350x250x8	61,53	-15,91
93	26	RP 350x250x8	61,46	-63,76
223	124	RP 350x250x8	61,22	-27,04
159	108	RP 350x250x8	61,06	-33,22
16	19	RP 350x250x8	60,83	-18,56
116	82	RP 350x250x8	60,71	-54,98
8	177	RP 350x250x8	59,98	-66,88
43	170	RP 350x250x8	59,67	-64,3
67	162	RP 350x250x8	59,52	-42,3
133	59	RP 350x250x8	59,23	-64,14
99	139	RP 350x250x8	59,17	-33,41
224	111	RP 350x250x8	58,95	-48,59
191	59	RP 350x250x8	58,86	-71,4
193	94	RP 350x250x8	58,73	-15,61
45	172	RP 350x250x8	58,36	-11,49
38	36	RP 350x250x8	58,3	-46,12
225	96	RP 350x250x8	57,93	-15,09
220	130	RP 350x250x8	57,52	-42,53
251	165	RP 350x250x8	57,46	-38,91
138	125	RP 350x250x8	57,43	-13,81
260	34	RP 350x250x8	57,13	-25,54
131	70	RP 350x250x8	56,92	-11,09
123	12	RP 350x250x8	56,91	-19,46
109	69	RP 350x250x8	56,53	-33,79
214	76	RP 350x250x8	56,51	11,93
253	167	RP 350x250x8	56,47	-4,57
3	177	RP 350x250x8	56,05	-75,67
199	122	RP 350x250x8	55,79	-28,64
212	113	RP 350x250x8	55,66	-9,6
153	84	RP 350x250x8	54,97	-13,02
35	36	RP 350x250x8	54,88	-3,57
134	112	RP 350x250x8	54,68	-45,31

Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
69	165	RP 350x250x8	54,63	-42,6
275	85	RP 350x250x8	54,44	29,57
68	157	RP 350x250x8	54,39	-52,86
99	137	RP 350x250x8	54,34	-28,58
33	22	RP 350x250x8	54,31	-32,59
194	108	RP 350x250x8	53,93	-50,65
221	128	RP 350x250x8	53,84	-41,67
9	14	RP 350x250x8	53,6	-41,83
34	51	RP 350x250x8	53,48	-46,92
215	117	RP 350x250x8	53,21	-38,73
40	155	RP 350x250x8	53,05	-19,28
132	136	RP 350x250x8	52,96	-51,46
151	95	RP 350x250x8	52,51	-51,61
45	176	RP 350x250x8	52,39	-5,52
167	155	RP 350x250x8	52,28	-36,15
267	117	RP 350x250x8	52,08	-34,95
97	109	RP 350x250x8	52,03	-12,14
111	30	RP 350x250x8	51,98	-13,32
127	161	RP 350x250x8	51,96	-23,5
101	34	RP 350x250x8	51,67	-10,82
155	91	RP 350x250x8	51,61	-55,21
90	4	RP 350x250x8	51,34	-35,54
157	164	RP 350x250x8	51,24	-12,57
41	175	RP 350x250x8	51,01	-47,34
198	4	RP 350x250x8	50,92	-12,69
29	15	RP 350x250x8	50,9	-22,15
73	149	RP 350x250x8	50,75	-20,08
246	126	RP 350x250x8	50,7	-9,33
233	75	RP 350x250x8	50,69	-45,55
210	140	RP 350x250x8	50,68	-2,69
204	139	RP 350x250x8	50,42	-43,32
100	103	RP 350x250x8	50,06	-36,82
58	156	RP 350x250x8	50,05	-48,2
238	176	RP 350x250x8	49,93	-4,08
103	31	RP 350x250x8	49,81	-0,58
38	48	RP 350x250x8	49,8	-37,63
119	42	RP 350x250x8	49,66	2,93
202	50	RP 350x250x8	49,41	-32,16
185	84	RP 350x250x8	49,4	-7,13
52	49	RP 350x250x8	49,16	-22,29
186	78	RP 350x250x8	49,12	-68,97
137	61	RP 350x250x8	48,99	-36,69
26	169	RP 350x250x8	48,89	-15,7
14	160	RP 350x250x8	48,74	-41,94
145	132	RP 350x250x8	48,57	-43,35
123	140	RP 350x250x8	48,54	-11,09
85	65	RP 350x250x8	48,5	-39,66
222	136	RP 350x250x8	48,39	-42,97
234	155	RP 350x250x8	48,2	-48,22
271	3	RP 350x250x8	48,19	-28,1
146	135	RP 350x250x8	48,12	-49,59
242	42	RP 350x250x8	47,62	-29,71
9	13	RP 350x250x8	47,5	-35,32
242	8	RP 350x250x8	47,32	-29,41
205	7	RP 350x250x8	47,31	-40,2
195	113	RP 350x250x8	47,08	-8,75
62	146	RP 350x250x8	47,05	-6,6
272	5	RP 350x250x8	46,97	-37
251	167	RP 350x250x8	46,84	-28,29
189	108	RP 350x250x8	46,83	-38,64
157	12	RP 350x250x8	46,82	-8,15



D3.5. Model prętowej powłoki sferycznej z FEM

wyniki obliczeń statyczno-wyrztrzymałościowych modelu prętowej powłoki sferycznej | 'HGO

Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
113	95	RP 250x150x6	162,25	-169,94
133	103	RP 250x150x6	150,88	-131,54
112	95	RP 250x150x6	142,8	-164,09
1	2	RP 250x150x6	140,19	-72,2
138	103	RP 250x150x6	124,45	-95,22
222	131	RP 250x150x6	116,17	-33,23
14	9	RP 250x150x6	115,09	-70,75
201	126	RP 250x150x6	114,84	-114,08
93	80	RP 250x150x6	114,56	-80,74
107	93	RP 250x150x6	112,88	-75,5
218	112	RP 250x150x6	111,94	-0,17
190	124	RP 250x150x6	111,64	-83,37
9	9	RP 250x150x6	111,06	-35,6
224	136	RP 250x150x6	110,25	-25,04
109	94	RP 250x150x6	110,09	-32,39
159	113	RP 250x150x6	107,86	-20,98
14	16	RP 250x150x6	106,52	-62,19
104	90	RP 250x150x6	105,69	-86,12
132	19	RP 250x150x6	105,44	-35,28
203	94	RP 250x150x6	104,92	-40,02
190	73	RP 250x150x6	104,92	-76,65
211	131	RP 250x150x6	104,29	-30,35
200	126	RP 250x150x6	102	-75,89
108	93	RP 250x150x6	100,62	-61,35
205	124	RP 250x150x6	99,25	-46,94
170	112	RP 250x150x6	98,48	-5,01
135	99	RP 250x150x6	97,07	-40,92
93	81	RP 250x150x6	96,8	-62,98
162	113	RP 250x150x6	95,86	-28,56
243	134	RP 250x150x6	94,33	9,24
218	134	RP 250x150x6	93,61	18,16
212	127	RP 250x150x6	92,79	-4,87
222	135	RP 250x150x6	91,72	-8,77
240	141	RP 250x150x6	91,63	0,07
132	102	RP 250x150x6	89,01	-18,84
207	125	RP 250x150x6	88,57	-34,79
133	102	RP 250x150x6	86,39	-67,05
224	135	RP 250x150x6	85,51	-0,3
42	37	RP 250x150x6	85,03	-16,15
210	130	RP 250x150x6	84,92	6,13
65	60	RP 250x150x6	83,6	-61,09
177	118	RP 250x150x6	83,28	-45,62
109	2	RP 250x150x6	82,41	-4,71
135	104	RP 250x150x6	81,7	-25,54
183	66	RP 250x150x6	81,23	-17,77
15	12	RP 250x150x6	81,2	-37,66
192	124	RP 250x150x6	79,95	-18,02
10	12	RP 250x150x6	79,13	-22,35
112	90	RP 250x150x6	77,36	-98,66
152	110	RP 250x150x6	77,01	-19,28
240	140	RP 250x150x6	76,8	14,9
41	37	RP 250x150x6	76,45	-12,23
82	72	RP 250x150x6	76,33	-48,22
134	102	RP 250x150x6	75,68	-17,02
159	40	RP 250x150x6	75,58	11,3
22	21	RP 250x150x6	75,06	-71,49
80	69	RP 250x150x6	74,07	29,86
108	2	RP 250x150x6	73,84	-34,58
75	67	RP 250x150x6	73,53	-5,28
62	52	RP 250x150x6	73,3	-64,74
76	66	RP 250x150x6	72,15	-51,73

Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
202	127	RP 250x150x6	71,78	-52,14
203	127	RP 250x150x6	71,72	-6,82
238	140	RP 250x150x6	71,48	15,32
6	8	RP 250x150x6	71,2	-8,52
19	19	RP 250x150x6	70,87	-56,95
210	101	RP 250x150x6	69,91	21,14
91	80	RP 250x150x6	69,77	-61,14
242	141	RP 250x150x6	68,26	-9,17
173	52	RP 250x150x6	68,17	-26,86
188	74	RP 250x150x6	68,07	-18,13
140	105	RP 250x150x6	67,61	-29,25
187	72	RP 250x150x6	67,6	-42,99
178	118	RP 250x150x6	66,77	-67,71
134	104	RP 250x150x6	66,06	-7,39
28	25	RP 250x150x6	65,71	-9,42
154	110	RP 250x150x6	65,58	-55,07
115	4	RP 250x150x6	65,53	-11,86
2	2	RP 250x150x6	65,45	-19,17
63	52	RP 250x150x6	64,83	-52,68
202	126	RP 250x150x6	64,6	-44,97
205	128	RP 250x150x6	64,57	-12,26
113	94	RP 250x150x6	64,53	-72,22
76	67	RP 250x150x6	64,32	-43,9
26	21	RP 250x150x6	64,3	-59,07
211	130	RP 250x150x6	63,93	10
170	115	RP 250x150x6	63,55	29,92
96	84	RP 250x150x6	63,41	-10,98
243	141	RP 250x150x6	62,99	40,57
233	138	RP 250x150x6	62,76	4,03
214	132	RP 250x150x6	62,58	13,18
84	69	RP 250x150x6	62,31	8,86
126	100	RP 250x150x6	62,24	-6,78
42	39	RP 250x150x6	62,14	6,74
115	96	RP 250x150x6	62,01	-8,33
157	111	RP 250x150x6	61,98	-28,05
185	119	RP 250x150x6	61,94	-43,17
27	25	RP 250x150x6	61,33	-19,74
83	73	RP 250x150x6	60,84	-36,43
146	29	RP 250x150x6	60,74	-7,25
225	136	RP 250x150x6	60,66	-29,27
79	70	RP 250x150x6	60,49	21,41
84	74	RP 250x150x6	60,4	10,76
166	111	RP 250x150x6	59,96	-26,6
227	137	RP 250x150x6	59,87	2,78
152	32	RP 250x150x6	59,79	-2,06
180	119	RP 250x150x6	59,7	3,69
30	26	RP 250x150x6	59,68	-22,09
212	131	RP 250x150x6	59,45	28,46
100	81	RP 250x150x6	59,35	-10,65
20	19	RP 250x150x6	59,14	11,2
241	133	RP 250x150x6	58,74	29,04
79	67	RP 250x150x6	58,6	23,3
123	17	RP 250x150x6	58,5	-26,83
39	37	RP 250x150x6	58,34	2,19
90	80	RP 250x150x6	58,09	-12,4
126	99	RP 250x150x6	57,85	-2,38
114	96	RP 250x150x6	57,73	-38,89
17	17	RP 250x150x6	57,58	-29,97
174	116	RP 250x150x6	57,55	-23,73
238	139	RP 250x150x6	57,48	29,32
56	46	RP 250x150x6	57,43	-43,1

wyniki obliczeń statyczno-wyrzmałościowych modelu prętowej powłoki sferycznej | HGO

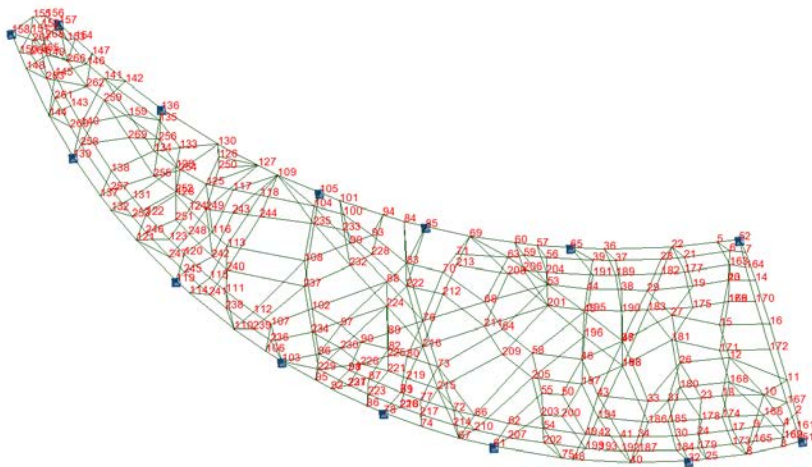
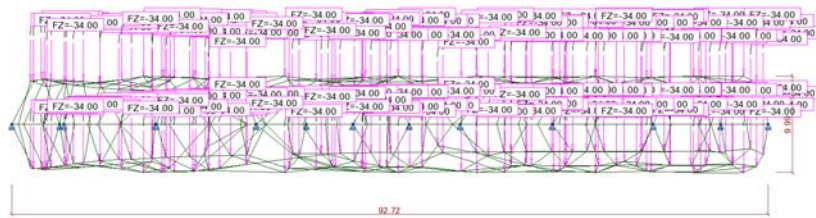
Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
216	133	RP 250x150x6	57,4	18,71
227	136	RP 250x150x6	57,24	5,41
184	70	RP 250x150x6	57,23	-0,06
207	129	RP 250x150x6	56,79	-3,02
183	120	RP 250x150x6	56,76	6,7
27	26	RP 250x150x6	56,72	-15,13
31	29	RP 250x150x6	55,79	-7,62
111	93	RP 250x150x6	55,22	-29,1
73	64	RP 250x150x6	55,19	-4,18
81	72	RP 250x150x6	55,15	-27,05
142	104	RP 250x150x6	55,13	-15,25
188	122	RP 250x150x6	54,78	-4,85
174	117	RP 250x150x6	54,77	-20,95
45	42	RP 250x150x6	54,76	-17,32
229	137	RP 250x150x6	54,63	0,1
12	12	RP 250x150x6	54,19	-31,58
11	12	RP 250x150x6	53,87	-31,82
144	106	RP 250x150x6	53,57	13,09
77	67	RP 250x150x6	53,42	2,15
208	127	RP 250x150x6	53,16	-19,01
198	90	RP 250x150x6	53,09	24,28
234	139	RP 250x150x6	52,84	-18,37
67	58	RP 250x150x6	52,56	-3,29
87	77	RP 250x150x6	52,5	0,38
193	122	RP 250x150x6	52,34	-10,13
139	105	RP 250x150x6	52,18	-2,83
144	107	RP 250x150x6	52,05	14,6
97	84	RP 250x150x6	52,05	-38,58
80	71	RP 250x150x6	51,96	51,96
228	123	RP 250x150x6	51,54	-0,03
122	16	RP 250x150x6	51,51	-22,13
196	125	RP 250x150x6	51,35	-25,03
226	137	RP 250x150x6	51,33	-1,77
52	47	RP 250x150x6	51,05	-13,1
66	60	RP 250x150x6	50,94	-12
228	137	RP 250x150x6	50,35	1,16
127	100	RP 250x150x6	50,06	1,12
158	112	RP 250x150x6	49,45	-23,79
73	66	RP 250x150x6	49,41	1,6
106	93	RP 250x150x6	49,21	-23,31
214	107	RP 250x150x6	49,07	26,69
196	81	RP 250x150x6	49,03	-22,72
208	129	RP 250x150x6	49,02	-14,86
151	108	RP 250x150x6	48,94	-34,33
198	125	RP 250x150x6	48,73	28,64
51	47	RP 250x150x6	48,51	-7,54
241	141	RP 250x150x6	48,34	39,44
153	110	RP 250x150x6	48,27	-6,64
22	19	RP 250x150x6	48,14	-44,57
81	69	RP 250x150x6	47,92	-19,82
140	104	RP 250x150x6	47,82	-9,47
234	118	RP 250x150x6	47,65	-13,19
180	120	RP 250x150x6	47,55	15,84
131	17	RP 250x150x6	47,19	-17,7
216	131	RP 250x150x6	47,17	28,94
43	40	RP 250x150x6	47,13	4,56
139	26	RP 250x150x6	46,6	2,75
69	60	RP 250x150x6	46,4	-29,23
199	125	RP 250x150x6	46,38	-62,93
29	26	RP 250x150x6	46,27	-23,18
226	128	RP 250x150x6	46,27	3,29

Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
200	90	RP 250x150x6	46,16	-20,05
192	81	RP 250x150x6	46,16	15,77
178	119	RP 250x150x6	46,1	-47,05
67	62	RP 250x150x6	46,08	3,2
105	90	RP 250x150x6	45,94	23,02
118	97	RP 250x150x6	45,68	-27,38
50	40	RP 250x150x6	45,68	-12,71
233	139	RP 250x150x6	45,58	21,22
154	29	RP 250x150x6	45,58	-35,06
166	115	RP 250x150x6	45,48	-12,11
147	108	RP 250x150x6	45,36	-29,19
199	126	RP 250x150x6	45,18	-61,73
116	8	RP 250x150x6	45,18	-2,82
10	11	RP 250x150x6	44,88	11,89
165	114	RP 250x150x6	44,72	29,51
16	12	RP 250x150x6	44,6	-12,78
3	2	RP 250x150x6	44,44	-29,21
13	14	RP 250x150x6	44,25	-0,3
33	30	RP 250x150x6	44,23	17,03
100	85	RP 250x150x6	44,13	4,57
31	30	RP 250x150x6	44,12	4,05
49	46	RP 250x150x6	44,02	-29,13
25	21	RP 250x150x6	43,83	-26,49
173	117	RP 250x150x6	43,63	-2,32
242	132	RP 250x150x6	43,59	15,5
7	8	RP 250x150x6	43,43	-30,07
119	98	RP 250x150x6	42,6	-0,11
110	2	RP 250x150x6	42,39	-59,18
30	29	RP 250x150x6	42,22	-4,63
232	139	RP 250x150x6	42,15	-2,95
230	123	RP 250x150x6	41,93	-6,68
82	70	RP 250x150x6	41,76	-13,65
184	121	RP 250x150x6	41,69	15,48
4	4	RP 250x150x6	41,5	3,22
50	46	RP 250x150x6	41,07	-8,1
49	42	RP 250x150x6	41,03	-26,14
162	114	RP 250x150x6	40,71	26,58
127	101	RP 250x150x6	40,68	10,49
62	54	RP 250x150x6	40,41	-31,85
165	115	RP 250x150x6	40,37	33,86
206	128	RP 250x150x6	40,26	6,15
176	118	RP 250x150x6	40,15	-38,56
116	97	RP 250x150x6	40,14	2,22
86	73	RP 250x150x6	40,03	-25,52
230	138	RP 250x150x6	39,85	-4,59
223	135	RP 250x150x6	39,79	-31,78
136	103	RP 250x150x6	39,37	-66,41
37	33	RP 250x150x6	39,18	31,65
39	33	RP 250x150x6	39,08	21,46
75	65	RP 250x150x6	39,04	29,21
111	95	RP 250x150x6	39,03	-12,9
138	105	RP 250x150x6	38,97	-9,74
171	107	RP 250x150x6	38,77	-27,62
24	25	RP 250x150x6	38,66	-35,62
69	64	RP 250x150x6	38,56	-21,39
43	39	RP 250x150x6	38,5	13,19
158	109	RP 250x150x6	38,28	-12,62
171	112	RP 250x150x6	38,19	-27,04
146	108	RP 250x150x6	38,13	15,36
57	52	RP 250x150x6	38,11	-6,49
195	125	RP 250x150x6	37,85	-33,32

wyniki obliczeń statyczno-wyrztrzymałościowych modelu prętowej powłoki sferycznej | 'HGO

Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
9	10	RP 250x150x6	37,73	37,73
95	84	RP 250x150x6	37,63	8,16
187	122	RP 250x150x6	37,58	-12,96
21	21	RP 250x150x6	37,27	-18,85
83	74	RP 250x150x6	37,22	-12,81
35	33	RP 250x150x6	37,19	-10,27
117	97	RP 250x150x6	37,17	-33,48
137	103	RP 250x150x6	37,16	-63,64
225	128	RP 250x150x6	37,15	-5,77
156	111	RP 250x150x6	37,13	-19,89
168	54	RP 250x150x6	36,95	-4,69
179	62	RP 250x150x6	36,83	-5,84
231	119	RP 250x150x6	36,71	10,22
157	109	RP 250x150x6	36,57	-2,64
90	77	RP 250x150x6	36,48	9,2
148	106	RP 250x150x6	36,36	-6
101	87	RP 250x150x6	36,23	-1,65
176	112	RP 250x150x6	35,97	-34,38
194	124	RP 250x150x6	35,86	-18,96
107	90	RP 250x150x6	35,75	1,63
153	109	RP 250x150x6	35,69	5,93
64	58	RP 250x150x6	35,69	11,95
191	122	RP 250x150x6	35,55	10,12
37	35	RP 250x150x6	35,41	35,41
168	116	RP 250x150x6	35,32	-3,06
20	20	RP 250x150x6	35,17	35,17
182	62	RP 250x150x6	35,15	-6,71
141	106	RP 250x150x6	35,13	-2,77
191	124	RP 250x150x6	35,07	10,6
114	94	RP 250x150x6	34,98	-16,14
194	123	RP 250x150x6	34,95	-18,05
155	110	RP 250x150x6	34,68	-46,64
36	32	RP 250x150x6	34,58	6,81
105	91	RP 250x150x6	34,48	34,48
229	138	RP 250x150x6	34,47	20,26
7	4	RP 250x150x6	34,18	-20,82
47	40	RP 250x150x6	34,09	6,34
1	1	RP 250x150x6	34	34
179	119	RP 250x150x6	33,84	-2,86
103	87	RP 250x150x6	33,83	9,35
177	117	RP 250x150x6	33,69	3,97
231	138	RP 250x150x6	33,61	13,31
232	119	RP 250x150x6	33,28	5,93
172	112	RP 250x150x6	33	-13,68
41	38	RP 250x150x6	32,11	32,11
121	16	RP 250x150x6	32,01	-6,34
131	102	RP 250x150x6	31,94	-2,46
193	123	RP 250x150x6	31,86	10,35
54	49	RP 250x150x6	31,81	7,48
96	81	RP 250x150x6	31,59	20,83
6	7	RP 250x150x6	31,34	31,34
150	109	RP 250x150x6	31,24	-4,42
71	63	RP 250x150x6	30,98	19,56
197	124	RP 250x150x6	30,89	-8,05
101	85	RP 250x150x6	30,65	3,93
33	31	RP 250x150x6	30,63	30,63
141	105	RP 250x150x6	30,45	1,91
71	64	RP 250x150x6	30,32	20,22
117	96	RP 250x150x6	30,32	-26,63
147	105	RP 250x150x6	30,17	-14
89	77	RP 250x150x6	30,17	-17,44

Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
142	106	RP 250x150x6	30,01	9,88
206	129	RP 250x150x6	29,9	16,52
189	121	RP 250x150x6	29,87	12,06
130	102	RP 250x150x6	29,67	-20,82
89	73	RP 250x150x6	29,67	-16,94
125	98	RP 250x150x6	29,65	-3,14
61	52	RP 250x150x6	29,64	-12,46
221	135	RP 250x150x6	29,39	-21,19
235	136	RP 250x150x6	29,35	-20,68
175	117	RP 250x150x6	29,24	-13,86
236	136	RP 250x150x6	29,24	-19,69
53	47	RP 250x150x6	29,17	-18,66
175	62	RP 250x150x6	29,13	-13,75
44	39	RP 250x150x6	29,12	-24,58
59	54	RP 250x150x6	29,09	-5,09
3	4	RP 250x150x6	28,88	-13,65
118	16	RP 250x150x6	28,65	-10,35
121	98	RP 250x150x6	28,58	-2,91
128	101	RP 250x150x6	28,58	14,63
23	21	RP 250x150x6	28,21	-31,47
163	49	RP 250x150x6	28,16	7,29
28	27	RP 250x150x6	28,15	28,15
88	77	RP 250x150x6	28,09	-9,43
15	16	RP 250x150x6	28,08	15,46
40	37	RP 250x150x6	28,07	-21,36
201	94	RP 250x150x6	27,92	-27,16
16	17	RP 250x150x6	27,8	4,02
77	68	RP 250x150x6	27,79	27,79
209	127	RP 250x150x6	27,77	-46,59
221	133	RP 250x150x6	27,28	-19,07
148	108	RP 250x150x6	27,1	3,26
128	98	RP 250x150x6	27,04	16,17
26	26	RP 250x150x6	26,93	-21,7
143	106	RP 250x150x6	26,85	-17,77
124	99	RP 250x150x6	26,85	-29,99
119	97	RP 250x150x6	26,8	15,7
185	121	RP 250x150x6	26,73	-7,95
151	109	RP 250x150x6	26,58	-11,97
87	78	RP 250x150x6	26,44	26,44
129	101	RP 250x150x6	26,35	3,9
38	33	RP 250x150x6	25,75	-34,96
99	85	RP 250x150x6	25,6	-3,25
189	123	RP 250x150x6	25,59	16,33
217	132	RP 250x150x6	25,48	-9,83
182	120	RP 250x150x6	25,41	3,03
17	14	RP 250x150x6	25,19	2,43
63	58	RP 250x150x6	25,1	-12,95
167	114	RP 250x150x6	24,9	-2,33
167	116	RP 250x150x6	24,9	-2,33
122	99	RP 250x150x6	24,88	4,5
51	46	RP 250x150x6	24,87	16,09
25	25	RP 250x150x6	24,85	-7,5
47	42	RP 250x150x6	24,48	15,94
55	47	RP 250x150x6	24,34	-1
219	134	RP 250x150x6	23,95	-13,14
12	14	RP 250x150x6	23,88	-1,27
64	59	RP 250x150x6	23,82	23,82
220	118	RP 250x150x6	23,76	-29,36
172	116	RP 250x150x6	23,67	-4,36
219	132	RP 250x150x6	23,36	-12,56
2	3	RP 250x150x6	23,14	23,14



D3.6. Model prętowej powłoki eliptycznej

wyniki obliczeń statyczno-wytrzymałościowych modelu prętowej powłoki eliptycznej

Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
307	163	RK 300x300x10	315,62	-312,54
3	6	RK 300x300x10	312,58	-315,66
307	5	RK 300x300x10	287,05	-283,97
3	5	RK 300x300x10	284	-287,08
308	164	RK 300x300x10	249,67	-245,56
4	7	RK 300x300x10	245,6	-249,7
83	22	RK 300x300x10	241,36	-241,35
107	65	RK 300x300x10	240,21	-240,2
308	163	RK 300x300x10	221,73	-217,63
57	39	RK 300x300x10	221,58	-187,69
304	7	RK 300x300x10	219,21	-165,1
4	6	RK 300x300x10	217,66	-221,76
491	245	RK 300x300x10	216,48	-209,63
491	247	RK 300x300x10	210,62	-203,77
83	5	RK 300x300x10	210,08	-210,07
107	57	RK 300x300x10	209,97	-209,97
214	120	RK 300x300x10	209,55	-216,22
163	78	RK 300x300x10	206,58	-206,58
23	21	RK 300x300x10	206,09	-180,51
214	123	RK 300x300x10	203,68	-210,36
48	30	RK 300x300x10	203,61	-175,32
88	57	RK 300x300x10	200,9	-193,93
384	57	RK 300x300x10	193,92	-200,88
163	86	RK 300x300x10	190,95	-190,96
105	39	RK 300x300x10	188,11	-100,24
361	191	RK 300x300x10	187,68	-221,56
52	37	RK 300x300x10	184,8	-170,55
108	62	RK 300x300x10	183,71	-177,21
327	177	RK 300x300x10	180,49	-206,07
43	30	RK 300x300x10	178,83	-90,42
48	34	RK 300x300x10	177,63	-149,34
401	207	RK 300x300x10	177,29	-183,79
352	184	RK 300x300x10	175,36	-203,66
431	222	RK 300x300x10	174,78	-149,07
356	189	RK 300x300x10	170,55	-184,8
81	52	RK 300x300x10	165,96	-165,95
562	164	RK 300x300x10	165,08	-219,19
386	191	RK 300x300x10	162,19	-145,67
23	6	RK 300x300x10	160,75	-135,17
88	56	RK 300x300x10	160,69	-153,72
44	30	RK 300x300x10	159,52	-151,8
106	65	RK 300x300x10	156,62	-156,62
65	39	RK 300x300x10	155,24	-100,65
434	220	RK 300x300x10	153,84	-142,93
384	204	RK 300x300x10	153,7	-160,66
304	52	RK 300x300x10	152,19	-98,08
108	66	RK 300x300x10	152,02	-145,52
348	184	RK 300x300x10	151,83	-159,55
24	21	RK 300x300x10	150,72	-141,75
352	187	RK 300x300x10	149,38	-177,67
146	83	RK 300x300x10	149,08	-174,86
372	197	RK 300x300x10	148,01	-148,01
68	46	RK 300x300x10	148,01	-148,01
414	207	RK 300x300x10	147,24	-144,83
431	212	RK 300x300x10	147,09	-121,39
128	48	RK 300x300x10	146,84	-146,83
90	39	RK 300x300x10	145,69	-162,2
401	210	RK 300x300x10	145,6	-152,1

Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
125	62	RK 300x300x10	144,84	-147,25
28	24	RK 300x300x10	144,08	-135,21
149	81	RK 300x300x10	142,9	-153,78
415	75	RK 300x300x10	142,07	-106,93
328	177	RK 300x300x10	141,74	-150,72
415	202	RK 300x300x10	141,15	-106,01
53	37	RK 300x300x10	139,48	-122,5
305	161	RK 300x300x10	139,23	-131,63
40	30	RK 300x300x10	138,98	-81,33
59	34	RK 300x300x10	138,13	-99,7
269	85	RK 300x300x10	136,82	-136,81
299	2	RK 300x300x10	136,33	-89,51
73	46	RK 300x300x10	135,62	-88,87
332	179	RK 300x300x10	135,23	-144,1
327	163	RK 300x300x10	135,15	-160,73
25	21	RK 300x300x10	134,23	-111,67
424	220	RK 300x300x10	133,66	-128,49
2	4	RK 300x300x10	133,58	-130,52
269	69	RK 300x300x10	132,11	-132,09
1	2	RK 300x300x10	131,62	-139,22
105	65	RK 300x300x10	130,67	-42,79
306	162	RK 300x300x10	130,54	-133,59
386	204	RK 300x300x10	129,24	-112,71
81	5	RK 300x300x10	129,04	-129,03
138	81	RK 300x300x10	128,53	-133,68
148	86	RK 300x300x10	128,3	-100,2
357	189	RK 300x300x10	122,47	-139,45
146	70	RK 300x300x10	121,41	-147,18
434	223	RK 300x300x10	121,39	-110,49
148	87	RK 300x300x10	120,94	-92,84
69	46	RK 300x300x10	119,86	-92,66
326	175	RK 300x300x10	118,22	-118,22
22	19	RK 300x300x10	118,22	-118,22
228	119	RK 300x300x10	117,7	-117,66
116	67	RK 300x300x10	117,65	-117,65
104	32	RK 300x300x10	117,23	-117,23
210	120	RK 300x300x10	117,05	-99,04
52	36	RK 300x300x10	116,97	-102,72
228	114	RK 300x300x10	116,29	-116,25
128	75	RK 300x300x10	115,82	-115,8
2	3	RK 300x300x10	115,78	-112,72
424	217	RK 300x300x10	115,65	-110,47
97	62	RK 300x300x10	115,43	-45,96
168	96	RK 300x300x10	114,12	-114,12
452	229	RK 300x300x10	114,12	-114,12
423	219	RK 300x300x10	112,99	-110,68
306	3	RK 300x300x10	112,73	-115,78
90	56	RK 300x300x10	112,72	-129,24
409	212	RK 300x300x10	112,58	-96,71
202	115	RK 300x300x10	112,22	-96,61
329	177	RK 300x300x10	111,67	-134,22
116	61	RK 300x300x10	111,47	-111,47
136	78	RK 300x300x10	111,47	-111,46
446	222	RK 300x300x10	111,22	-95,33
137	80	RK 300x300x10	110,68	-112,99
138	77	RK 300x300x10	110,52	-115,68
149	87	RK 300x300x10	110,47	-121,35
303	7	RK 300x300x10	110,38	-96,08



wyniki obliczeń statyczno-wytrzymałościowych modelu prętowej powłoki eliptycznej

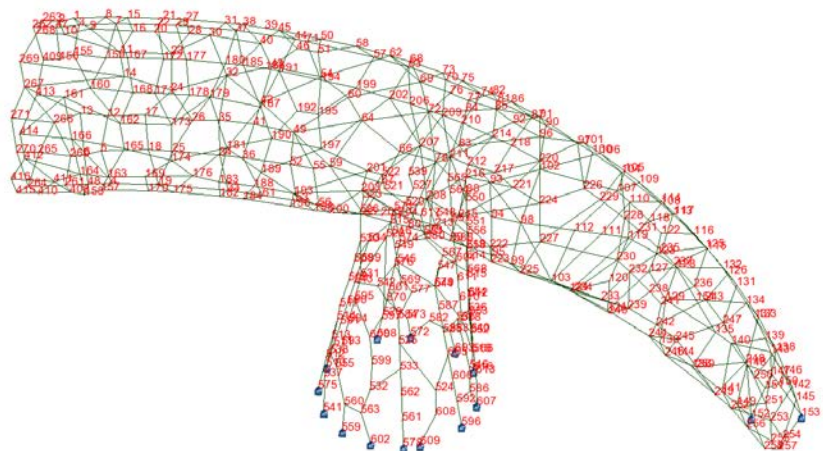
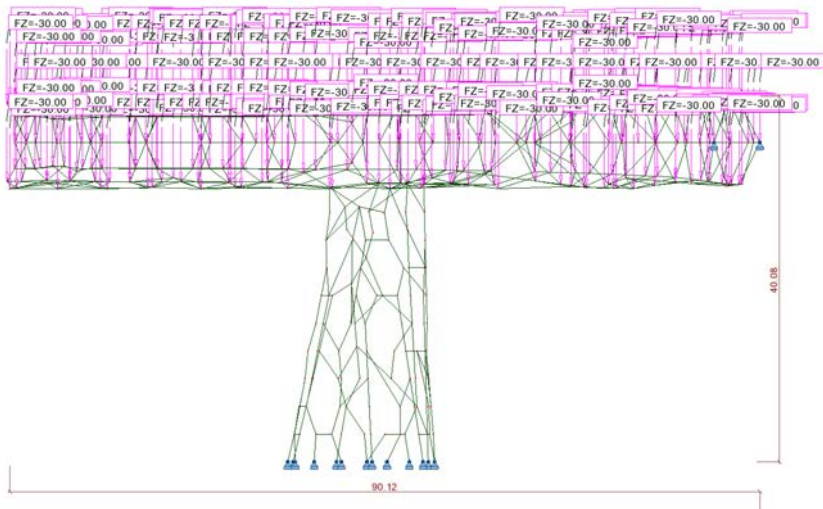
Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
77	32	RK 300x300x10	108,57	-108,57
25	19	RK 300x300x10	108,05	-85,5
126	75	RK 300x300x10	106,95	-142,1
343	175	RK 300x300x10	106,89	-87,72
126	54	RK 300x300x10	106,01	-141,16
35	28	RK 300x300x10	105,41	-69,37
198	107	RK 300x300x10	104,84	-101,26
399	187	RK 300x300x10	104,25	-65,04
238	135	RK 300x300x10	103,96	-66,32
98	62	RK 300x300x10	103,8	-51,97
56	28	RK 300x300x10	102,84	-61,48
356	36	RK 300x300x10	102,7	-116,95
150	82	RK 300x300x10	102,62	-76,79
475	236	RK 300x300x10	101,37	-104,94
104	40	RK 300x300x10	101,25	-101,25
151	83	RK 300x300x10	100,87	-85,64
369	191	RK 300x300x10	100,62	-155,2
300	2	RK 300x300x10	100,53	-79,53
210	116	RK 300x300x10	100,38	-82,37
433	86	RK 300x300x10	100,31	-128,44
145	85	RK 300x300x10	100,3	-100,32
400	191	RK 300x300x10	100,21	-188,08
140	80	RK 300x300x10	100,14	-74,81
150	87	RK 300x300x10	99,78	-73,95
363	187	RK 300x300x10	99,74	-138,17
487	245	RK 300x300x10	99,43	-117,43
562	52	RK 300x300x10	98,07	-152,18
486	245	RK 300x300x10	97,95	-83,39
57	37	RK 300x300x10	97,51	-63,62
467	236	RK 300x300x10	97,42	-92,59
479	241	RK 300x300x10	96,89	-112,5
46	31	RK 300x300x10	96,82	-73,74
28	25	RK 300x300x10	96,81	-87,94
118	70	RK 300x300x10	96,77	-112,65
29	24	RK 300x300x10	96,44	-83,63
24	22	RK 300x300x10	96,31	-87,34
561	164	RK 300x300x10	96,07	-110,37
33	27	RK 300x300x10	96,02	-74,23
161	83	RK 300x300x10	95,37	-111,34
80	3	RK 300x300x10	95,32	-95,32
202	114	RK 300x300x10	95,15	-79,54
35	21	RK 300x300x10	94,47	-58,43
433	223	RK 300x300x10	92,94	-121,06
373	197	RK 300x300x10	92,66	-119,88
183	107	RK 300x300x10	92,48	-97,31
244	135	RK 300x300x10	90,76	-70,66
347	184	RK 300x300x10	90,45	-178,88
92	60	RK 300x300x10	90,09	-87,05
557	161	RK 300x300x10	89,52	-136,34
139	78	RK 300x300x10	89	-60,08
55	29	RK 300x300x10	88,97	-81,83
377	197	RK 300x300x10	88,86	-135,62
252	140	RK 300x300x10	88,82	-80,55
60	41	RK 300x300x10	87,98	-41,11
106	36	RK 300x300x10	87,97	-87,97
332	25	RK 300x300x10	87,91	-96,78
39	19	RK 300x300x10	87,71	-106,89
115	60	RK 300x300x10	87,37	-87,36

Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
328	22	RK 300x300x10	87,32	-96,3
388	60	RK 300x300x10	87,05	-90,09
92	59	RK 300x300x10	86,94	-83,9
144	83	RK 300x300x10	86,44	-28,16
436	222	RK 300x300x10	85,61	-100,84
329	175	RK 300x300x10	85,5	-108,05
272	139	RK 300x300x10	84,62	-84,65
399	40	RK 300x300x10	84,29	-45,09
249	140	RK 300x300x10	84,05	-81,43
75	46	RK 300x300x10	83,99	-53,49
140	73	RK 300x300x10	83,91	-58,58
388	206	RK 300x300x10	83,89	-86,93
333	179	RK 300x300x10	83,64	-96,44
209	120	RK 300x300x10	83,58	-98,01
299	51	RK 300x300x10	83,5	-36,67
27	17	RK 300x300x10	83,39	-74,11
467	234	RK 300x300x10	82,96	-78,14
70	49	RK 300x300x10	82,89	-50,1
176	96	RK 300x300x10	82,62	-39,93
487	242	RK 300x300x10	82,6	-100,6
272	137	RK 300x300x10	82,57	-82,61
58	41	RK 300x300x10	82,53	-87,93
490	247	RK 300x300x10	82,51	-54,08
80	51	RK 300x300x10	82,41	-82,41
198	112	RK 300x300x10	81,89	-78,31
359	183	RK 300x300x10	81,82	-88,98
59	41	RK 300x300x10	81,79	-43,37
344	184	RK 300x300x10	81,37	-139,03
516	258	RK 300x300x10	81,17	-83,47
46	33	RK 300x300x10	81,11	-58,03
479	114	RK 300x300x10	79,84	-95,46
98	55	RK 300x300x10	79,67	-27,84
558	161	RK 300x300x10	79,53	-100,54
519	258	RK 300x300x10	79,3	-87,17
70	48	RK 300x300x10	78,91	-46,12
232	122	RK 300x300x10	78,88	-71,2
84	44	RK 300x300x10	78,45	-73,18
229	119	RK 300x300x10	78,35	-78,33
475	239	RK 300x300x10	78,3	-81,87
183	102	RK 300x300x10	78,04	-82,86
72	49	RK 300x300x10	77,38	-71,65
69	43	RK 300x300x10	77,29	-50,09
75	50	RK 300x300x10	77,17	-46,66
435	221	RK 300x300x10	76,84	-102,68
208	120	RK 300x300x10	76,12	-22,14
426	219	RK 300x300x10	74,79	-100,12
215	124	RK 300x300x10	74,79	-70,74
26	18	RK 300x300x10	74,57	-74,09
389	206	RK 300x300x10	74,3	-70,75
56	37	RK 300x300x10	74,27	-32,91
337	181	RK 300x300x10	74,23	-96,02
40	31	RK 300x300x10	74,21	-16,57
402	210	RK 300x300x10	74,19	-61,11
331	173	RK 300x300x10	74,11	-83,38
330	174	RK 300x300x10	74,08	-74,56
435	223	RK 300x300x10	74,01	-99,85
493	242	RK 300x300x10	73,8	-67,67
350	185	RK 300x300x10	73,78	-96,88

wyniki obliczeń statyczno-wyrztrzymałościowych modelu prętowej powłoki eliptycznej

Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
32	27	RK 300x300x10	73,36	-56,3
380	195	RK 300x300x10	73,17	-78,45
64	44	RK 300x300x10	72,55	-69,35
89	56	RK 300x300x10	72,42	-65,6
82	22	RK 300x300x10	72,26	-72,26
134	77	RK 300x300x10	72,03	-67,86
249	138	RK 300x300x10	71,79	-69,17
376	199	RK 300x300x10	71,67	-77,39
49	35	RK 300x300x10	71,34	-70,09
502	246	RK 300x300x10	71,33	-78,73
215	123	RK 300x300x10	71,29	-67,24
492	248	RK 300x300x10	70,98	-75,07
93	59	RK 300x300x10	70,77	-74,31
353	188	RK 300x300x10	70,1	-71,36
514	256	RK 300x300x10	69,9	-90,23
510	257	RK 300x300x10	69,87	-69,48
16	15	RK 300x300x10	69,68	-34,94
78	8	RK 300x300x10	69,47	-69,47
240	138	RK 300x300x10	69,41	-69,79
339	182	RK 300x300x10	69,37	-105,41
368	195	RK 300x300x10	69,33	-72,54
97	61	RK 300x300x10	69,22	0,25
516	257	RK 300x300x10	69,17	-71,48
27	24	RK 300x300x10	69,09	-59,81
142	80	RK 300x300x10	68,71	-43,52
61	41	RK 300x300x10	68,71	-48,81
244	133	RK 300x300x10	67,93	-47,82
421	217	RK 300x300x10	67,83	-72,01
44	24	RK 300x300x10	67,7	-59,98
216	116	RK 300x300x10	67,69	-73,92
492	247	RK 300x300x10	67,57	-71,66
510	137	RK 300x300x10	67,56	-67,16
346	185	RK 300x300x10	67,16	-62,47
240	137	RK 300x300x10	67,01	-67,39
136	74	RK 300x300x10	66,9	-66,89
459	229	RK 300x300x10	66,89	-61,17
33	19	RK 300x300x10	66,88	-45,08
508	256	RK 300x300x10	66,61	-104,14
58	40	RK 300x300x10	66,35	-21,76
91	55	RK 300x300x10	66,15	-57,26
77	25	RK 300x300x10	66,11	-66,11
79	8	RK 300x300x10	65,9	-65,9
15	15	RK 300x300x10	65,7	-36,08
385	204	RK 300x300x10	65,6	-72,41
87	55	RK 300x300x10	65,45	-30,03
66	45	RK 300x300x10	65,21	-15,77
103	34	RK 300x300x10	65,05	-104,23
409	213	RK 300x300x10	64,45	-48,58
127	61	RK 300x300x10	63,95	-63,93
71	49	RK 300x300x10	63,7	-16,82
361	189	RK 300x300x10	63,6	-97,47
232	131	RK 300x300x10	63,5	-55,82
91	58	RK 300x300x10	63,46	-54,56
192	105	RK 300x300x10	63,43	-63,41
102	58	RK 300x300x10	63,37	-57,26
192	101	RK 300x300x10	62,63	-62,61
42	31	RK 300x300x10	62,44	-67,14
85	53	RK 300x300x10	62,32	-56,81

Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
17	9	RK 300x300x10	62,11	-52,99
43	32	RK 300x300x10	61,76	26,65
360	182	RK 300x300x10	61,49	-102,85
480	238	RK 300x300x10	61,19	-59,96
175	96	RK 300x300x10	61,1	-66,86
109	66	RK 300x300x10	61,1	-74,18
154	76	RK 300x300x10	60,98	-42,66
389	204	RK 300x300x10	60,87	-57,32
76	48	RK 300x300x10	60,56	-60,55
144	85	RK 300x300x10	60,54	-2,27
212	123	RK 300x300x10	60,53	-55,26
493	248	RK 300x300x10	60,51	-54,37
425	78	RK 300x300x10	60,15	-89,06
348	179	RK 300x300x10	59,97	-67,7
6	9	RK 300x300x10	59,89	-50,3
331	179	RK 300x300x10	59,81	-69,08
203	111	RK 300x300x10	59,7	-60,82
382	203	RK 300x300x10	59,62	-36,35
12	6	RK 300x300x10	59,53	-31,33
390	197	RK 300x300x10	59,45	-59,14
221	128	RK 300x300x10	59,33	-53,04
446	228	RK 300x300x10	59,24	-43,35
252	143	RK 300x300x10	59,22	-50,94
534	208	RK 300x300x10	59,13	-49,28
94	46	RK 300x300x10	59,1	-59,43
147	83	RK 300x300x10	59,08	-22,24
351	187	RK 300x300x10	59,02	-39,23
237	135	RK 300x300x10	58,88	-42,16
221	122	RK 300x300x10	58,86	-52,57
490	121	RK 300x300x10	58,74	-30,31
158	91	RK 300x300x10	58,7	-54,85
426	215	RK 300x300x10	58,61	-83,94
38	27	RK 300x300x10	58,44	-26,53
339	177	RK 300x300x10	58,42	-94,45
130	73	RK 300x300x10	58,33	-41,27
114	69	RK 300x300x10	58,09	-36,92
350	186	RK 300x300x10	58,06	-81,16
101	64	RK 300x300x10	57,64	-41,02
93	56	RK 300x300x10	57,34	-60,88
402	67	RK 300x300x10	57,33	-44,25
387	203	RK 300x300x10	57,27	-66,19
398	205	RK 300x300x10	57,26	-63,4
176	103	RK 300x300x10	57,2	-14,5
50	27	RK 300x300x10	57,05	-42,73
135	73	RK 300x300x10	56,98	-39,57
381	201	RK 300x300x10	56,8	-62,33
229	121	RK 300x300x10	56,45	-56,43
26	23	RK 300x300x10	56,36	-55,89
336	181	RK 300x300x10	56,31	-73,37
459	234	RK 300x300x10	55,95	-50,24
502	253	RK 300x300x10	55,92	-63,31
330	178	RK 300x300x10	55,88	-56,36
55	38	RK 300x300x10	55,51	-48,37
489	247	RK 300x300x10	55,16	-60,2
443	227	RK 300x300x10	55	-58,85
387	205	RK 300x300x10	54,56	-63,48
216	124	RK 300x300x10	54,37	-60,61
213	123	RK 300x300x10	54,17	-82,63



D3.7. Fragment modelu prętowej powłoki eliptycznej na podporze

## Wyniki obliczeń statyczno-wyrzymałościowych modelu powłoki eliptycznej na podporze

Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
979	464	RK 400x400x16	517,86	-372,1
1300	449	RK 450x450x15	481,12	-414,46
377	53	RK 400x400x16	477,62	-446,58
963	459	RK 400x400x16	464,86	-386,33
968	459	RK 400x400x16	459,86	-296,49
925	306	RK 400x400x16	446,18	-414,57
1074	453	RK 400x400x16	445,24	-364,91
902	430	RK 400x400x16	432,63	-405,89
902	432	RK 400x400x16	417,87	-391,12
106	53	RK 400x400x16	414,13	-404,38
941	314	RK 400x400x16	409,15	-449,63
393	61	RK 400x400x16	405,38	-458,77
939	449	RK 400x400x16	395,11	-225
106	61	RK 400x400x16	387,37	-377,61
973	334	RK 400x400x16	382,41	-418,31
941	432	RK 400x400x16	381,81	-422,29
397	203	RK 400x400x16	379,58	-266,3
394	202	RK 400x400x16	379,48	-321,35
1156	201	RK 450x450x15	376,74	-339,52
393	184	RK 400x400x16	372,38	-425,77
654	306	RK 400x400x16	370,13	-348,09
386	199	RK 400x400x16	369,4	-410,95
983	462	RK 400x400x16	367,91	-471,91
983	466	RK 400x400x16	364,47	-468,47
942	450	RK 400x400x16	364,14	-331,86
1187	216	RK 450x450x15	361,37	-297,57
386	57	RK 400x400x16	357,26	-398,81
897	430	RK 400x400x16	356,67	-363,46
934	310	RK 400x400x16	355,45	-395,27
966	459	RK 400x400x16	352,96	-168,06
934	447	RK 400x400x16	351,48	-391,3
740	332	RK 400x400x16	350,49	-338,46
963	458	RK 400x400x16	350,1	-271,57
411	208	RK 400x400x16	349,91	-291,51
349	182	RK 400x400x16	348,01	-349,5
399	203	RK 400x400x16	343,48	-225,96
928	443	RK 400x400x16	341,22	-199,7
115	63	RK 400x400x16	340,48	-448,28
435	214	RK 400x400x16	339,74	-396,04
965	327	RK 400x400x16	339,23	-250,71
945	451	RK 400x400x16	337,82	-134,88
354	182	RK 400x400x16	337,74	-297,96
897	288	RK 400x400x16	337,63	-344,42
1346	650	RK 450x450x15	336,87	-282,94
929	309	RK 400x400x16	334,58	-323,22
654	314	RK 400x400x16	333,26	-311,23
424	208	RK 400x400x16	332,38	-202,21
1346	455	RK 450x450x15	331,63	-277,7
1276	650	RK 450x450x15	329,08	-277,91
984	466	RK 400x400x16	328,56	-268,28
663	316	RK 400x400x16	328,27	-457,43
394	199	RK 400x400x16	327,82	-269,69
381	56	RK 400x400x16	325,74	-315,99
436	218	RK 400x400x16	325,11	-265,3
192	79	RK 400x400x16	324,16	-340,27
354	184	RK 400x400x16	323,94	-284,16
924	443	RK 400x400x16	323,85	-350,14
942	447	RK 400x400x16	323,44	-291,16

Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
391	201	RK 400x400x16	322,67	-185,67
467	226	RK 400x400x16	321,43	-356,73
674	324	RK 400x400x16	319,42	-378,94
982	464	RK 400x400x16	319,01	-183,09
115	57	RK 400x400x16	318,81	-426,61
1415	451	RK 400x400x16	317,71	-170,55
435	218	RK 400x400x16	316,96	-373,27
126	71	RK 400x400x16	315,58	-356,61
413	70	RK 400x400x16	314,87	-284,69
349	33	RK 400x400x16	314,75	-316,24
635	306	RK 400x400x16	311,93	-296,37
425	81	RK 400x400x16	311,57	-313
417	74	RK 400x400x16	309,82	-258,57
965	458	RK 400x400x16	308,78	-220,26
1288	660	RK 450x450x15	308,57	-177,75
924	440	RK 400x400x16	307,98	-334,27
1015	474	RK 400x400x16	307,51	-342,17
1405	442	RK 400x400x16	307,1	-279,01
663	310	RK 400x400x16	306,49	-435,65
928	445	RK 400x400x16	306,44	-164,93
674	299	RK 400x400x16	306,01	-365,53
405	206	RK 400x400x16	305,39	-167,71
1403	194	RK 400x400x16	305,35	-253,38
975	462	RK 400x400x16	304,95	-277,36
1131	539	RK 450x450x15	304,83	-254,53
377	196	RK 400x400x16	304,22	-273,18
947	451	RK 400x400x16	303,86	-170,42
639	309	RK 400x400x16	303,29	-304,64
126	44	RK 400x400x16	303,12	-344,15
953	455	RK 400x400x16	303,11	-170,98
961	323	RK 400x400x16	302,74	-277,35
923	442	RK 400x400x16	302,66	-187,37
979	464	RK 400x400x16	301,81	-216,4
955	324	RK 400x400x16	301,48	-163,17
434	216	RK 400x400x16	301,39	-226,28
425	214	RK 400x400x16	300,75	-302,18
407	71	RK 400x400x16	300,71	-168,09
953	454	RK 400x400x16	296,63	-164,5
404	206	RK 400x400x16	294,9	-148,1
978	464	RK 400x400x16	293,91	-282,94
404	63	RK 400x400x16	292,87	-146,07
952	316	RK 400x400x16	292,71	-148,4
952	454	RK 400x400x16	289,67	-145,36
1394	455	RK 450x450x15	289,56	-201,35
379	196	RK 400x400x16	289,48	-209,17
955	442	RK 400x400x16	286,39	-148,08
407	194	RK 400x400x16	286,08	-153,46
925	444	RK 400x400x16	285,36	-253,75
380	195	RK 400x400x16	284,64	-165,25
415	211	RK 400x400x16	282,82	-239,34
405	207	RK 400x400x16	282,64	-144,97
943	316	RK 400x400x16	281,55	-366,51
1120	203	RK 450x450x15	281,34	-235,96
376	195	RK 400x400x16	280,82	-311,4
388	198	RK 400x400x16	280,76	-181,22
1300	449	RK 450x450x15	279,63	-241,52
936	446	RK 400x400x16	279,59	-208,78
467	229	RK 400x400x16	279,31	-314,6

Wyniki obliczeń statyczno-wytrzymałościowych modelu powłoki eliptycznej na podporze

Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
1288	661	KK 450x450x15	278,53	-147,7
1299	675	KK 450x450x15	276,95	-231,96
973	462	KK 400x400x16	276,25	-312,15
436	87	KK 400x400x16	276,1	-216,29
1413	459	KK 400x400x16	276,04	-292,46
87	53	KK 400x400x16	275,95	-261,98
395	63	KK 400x400x16	274,62	-366,68
740	342	KK 400x400x16	273,44	-261,4
1251	207	KK 450x450x15	273,32	-166,97
821	383	KK 400x400x16	272,84	-157,29
388	200	KK 400x400x16	271,85	-172,31
418	211	KK 400x400x16	271,57	-46,57
936	448	KK 400x400x16	270,44	-199,63
381	198	KK 400x400x16	269,6	-259,85
401	203	KK 400x400x16	268,27	-246,4
146	81	KK 400x400x16	267,68	-246,92
377	53	KK 400x400x16	267,52	-250,61
968	460	KK 400x400x16	267,5	-104,13
984	340	KK 400x400x16	267,05	-206,77
1015	477	KK 400x400x16	266,95	-301,61
1265	451	KK 450x450x15	266,91	-246,07
1156	522	KK 450x450x15	265,82	-228,61
880	423	KK 400x400x16	265,48	-243,91
273	130	KK 400x400x16	265,46	-158,36
963	459	KK 400x400x16	265,28	-220,61
968	459	KK 400x400x16	264,78	-171,71
375	194	KK 400x400x16	263,64	-157,22
1074	453	KK 400x400x16	263,21	-217,47
96	58	KK 400x400x16	262,69	-236,79
694	334	KK 400x400x16	261,24	-238,34
972	456	KK 400x400x16	261,02	-148,56
820	389	KK 400x400x16	260,52	-144,98
402	205	KK 400x400x16	259,06	-192,66
1118	617	KK 450x450x15	258,43	-180,43
915	299	KK 400x400x16	258,16	-361,21
813	318	KK 400x400x16	257,89	-287,06
1249	211	KK 450x450x15	257,86	-232,27
1406	442	KK 400x400x16	257,53	-281,05
376	192	KK 400x400x16	257,32	-287,89
1184	565	KK 450x450x15	257,12	-152,31
439	89	KK 400x400x16	257,1	-291,82
981	465	KK 400x400x16	256,66	-103,29
91	56	KK 400x400x16	256,32	-264,82
882	423	KK 400x400x16	255,94	-163,53
830	402	KK 400x400x16	255,52	-159,66
962	455	KK 400x400x16	255,33	-210,83
137	74	KK 400x400x16	255,23	-249,29
1327	675	KK 450x450x15	255,16	-215,11
961	457	KK 400x400x16	254,42	-229,04
272	136	KK 400x400x16	254,33	-147,24
1418	211	KK 400x400x16	254,3	-144,98
1064	500	KK 400x400x16	254,2	-280,08
1327	459	KK 450x450x15	253,83	-213,77
975	460	KK 400x400x16	253,67	-226,08
1414	211	KK 400x400x16	253,39	-225,72
1250	526	KK 450x450x15	252,59	-187,7
969	332	KK 400x400x16	252,43	-170,82
644	311	KK 400x400x16	251,83	-226,04

Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
980	464	KK 400x400x16	251,33	-252,13
1142	208	KK 450x450x15	251,28	-237,57
421	79	KK 400x400x16	250,66	-178,34
685	327	KK 400x400x16	249,96	-248,97
652	291	KK 400x400x16	249,64	-228,78
1404	194	KK 400x400x16	249,5	-250,88
925	306	KK 400x400x16	249,48	-232,14
379	184	KK 400x400x16	249,31	-168,99
987	342	KK 400x400x16	247,77	-286,06
599	289	KK 400x400x16	247,61	-227,02
945	449	KK 400x400x16	247,49	-44,55
282	149	KK 400x400x16	246,77	-155,29
414	207	KK 400x400x16	246,35	-235,77
367	44	KK 400x400x16	245,83	-346,14
380	197	KK 400x400x16	245,5	-126,11
680	323	KK 400x400x16	244,83	-234,82
966	455	KK 400x400x16	244,43	-59,53
991	465	KK 400x400x16	244,06	-22,75
516	252	KK 400x400x16	243,56	-265,63
1155	565	KK 450x450x15	243,12	-139,03
1383	647	KK 450x450x15	243,1	-161,89
332	175	KK 400x400x16	242,71	-219,64
830	394	KK 400x400x16	242,23	-146,38
192	89	KK 400x400x16	242,05	-258,15
413	209	KK 400x400x16	242,01	-211,83
709	327	KK 400x400x16	241,94	-417,42
1381	678	KK 450x450x15	240,56	-148,61
424	213	KK 400x400x16	239,91	-109,73
1058	497	KK 400x400x16	239,14	-216,14
1304	451	KK 450x450x15	238,31	-93,26
1064	497	KK 400x400x16	238,16	-264,05
900	424	KK 400x400x16	237,95	-292,57
957	456	KK 400x400x16	237,66	-122,46
430	216	KK 400x400x16	235,94	-235,53
132	70	KK 400x400x16	235,73	-223,42
282	141	KK 400x400x16	235,62	-144,14
432	216	KK 400x400x16	235,48	-245,54
656	316	KK 400x400x16	235,43	-183,39
902	430	KK 400x400x16	234,2	-219,79
526	65	KK 400x400x16	233,98	-156,11
399	200	KK 400x400x16	233,88	-116,36
104	36	KK 400x400x16	233,56	-214,99
1248	519	KK 450x450x15	232,55	-153,21
927	444	KK 400x400x16	232,53	-178,47
1330	464	KK 450x450x15	232,31	-157,53
1406	439	KK 400x400x16	232,09	-255,6
1203	539	KK 450x450x15	231,97	-180,84
108	63	KK 400x400x16	231,48	-173,61
510	249	KK 400x400x16	231,3	-209,77
419	211	KK 400x400x16	230,24	-148,89
929	446	KK 400x400x16	229,56	-218,2
1416	449	KK 400x400x16	229,13	-91,62
106	53	KK 400x400x16	228,8	-222,4
1374	677	KK 450x450x15	227,19	-167,39
516	249	KK 400x400x16	227	-249,07
1144	550	KK 450x450x15	226,74	-153,18
879	423	KK 400x400x16	226,69	-130,98
51	34	KK 400x400x16	226,64	-206,29

## Wyniki obliczeń statyczno-wytrzymałościowych modelu powłoki eliptycznej na podporze

Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
397	203	RK 400x400x16	226,56	-164,55
902	432	RK 400x400x16	226,41	-212
1300	632	RK 450x450x15	226,12	-159,46
939	449	RK 400x400x16	224,96	-128,52
417	210	RK 400x400x16	224,18	-172,93
941	314	RK 400x400x16	222,69	-245,52
923	443	RK 400x400x16	221,69	-106,39
398	203	RK 400x400x16	221,54	-126,25
393	61	RK 400x400x16	221,2	-251,3
420	211	RK 400x400x16	220,14	-63,33
1257	625	RK 450x450x15	220,08	-180,08
1404	191	RK 400x400x16	220,08	-221,46
265	65	RK 400x400x16	219,72	-249,32
402	204	RK 400x400x16	219,68	-153,27
331	175	RK 400x400x16	219,44	-129,58
973	334	RK 400x400x16	219,41	-240,5
910	432	RK 400x400x16	218,2	-179,64
740	332	RK 400x400x16	218,2	-211,12
1156	201	RK 450x450x15	218,04	-197,73
982	465	RK 400x400x16	217,88	-81,97
334	175	RK 400x400x16	217,75	-135,27
1282	630	RK 450x450x15	217,08	-137,38
449	223	RK 400x400x16	217,04	-180,23
1415	453	RK 400x400x16	216,78	-69,62
1160	571	RK 450x450x15	216,51	-129,66
397	201	RK 400x400x16	216,3	-103,02
1304	681	RK 450x450x15	215,1	-70,05
1058	389	RK 400x400x16	214,89	-191,89
983	462	RK 400x400x16	214,78	-275,04
353	175	RK 400x400x16	214,72	-191,56
1074	318	RK 400x400x16	214,68	-134,36
967	459	RK 400x400x16	214,51	-204,75
652	314	RK 400x400x16	213,6	-192,74
653	288	RK 400x400x16	213,57	-167,61
106	61	RK 400x400x16	213,25	-206,84
1187	216	RK 450x450x15	213,21	-175,54
431	216	RK 400x400x16	212,59	-148,53
901	423	RK 400x400x16	212,26	-194,8
403	202	RK 400x400x16	211,97	-277,33
983	466	RK 400x400x16	211,74	-272
394	202	RK 400x400x16	211,1	-177,22
904	433	RK 400x400x16	210,32	-219,98
510	136	RK 400x400x16	208,53	-187
941	432	RK 400x400x16	207,92	-230,31
411	208	RK 400x400x16	207,36	-172,73
985	466	RK 400x400x16	207,31	-213,01
386	199	RK 400x400x16	206,33	-229,19
1231	567	RK 450x450x15	205,86	-154,7
437	218	RK 400x400x16	205,48	-205,68
976	463	RK 400x400x16	204,7	-267,8
399	203	RK 400x400x16	204,65	-137,86
1302	678	RK 450x450x15	204,45	-198,21
945	451	RK 400x400x16	204,35	-88,97
951	450	RK 400x400x16	204,34	-304,2
1418	214	RK 400x400x16	204,1	-94,77
946	451	RK 400x400x16	204,07	-131,4
654	306	RK 400x400x16	203,87	-190,17
192	79	RK 400x400x16	203,71	-213,3

Pręt	Węzeł	Przekrój	S max (MPa)	S min (MPa)
599	288	RK 400x400x16	203,44	-182,86
393	184	RK 400x400x16	203,27	-232,94
942	450	RK 400x400x16	203,19	-184,05
424	208	RK 400x400x16	203	-124,19
408	202	RK 400x400x16	202,95	-73,09
956	455	RK 400x400x16	202,43	-62,81
255	140	RK 400x400x16	202,07	-153,05
966	459	RK 400x400x16	201,93	-97,53
356	185	RK 400x400x16	201,71	-200,47
1	1	RK 400x400x16	201,48	-161,09
667	316	RK 400x400x16	201,39	-241,55
104	61	RK 400x400x16	201,23	-182,66
1252	571	RK 450x450x15	201,18	-153,97
956	450	RK 400x400x16	200,91	-61,29
428	215	RK 400x400x16	200,56	-246,32
1330	660	RK 450x450x15	200,3	-125,52
911	437	RK 400x400x16	200,06	-170,6
433	212	RK 400x400x16	199,84	-57,8
947	448	RK 400x400x16	199,77	-66,33
382	196	RK 400x400x16	199,73	-98,57
352	176	RK 400x400x16	199,68	-244,37
386	57	RK 400x400x16	199,66	-222,95
934	310	RK 400x400x16	199,09	-221,51
916	439	RK 400x400x16	199,05	-233,18
635	305	RK 400x400x16	199,01	-183,45
604	291	RK 400x400x16	198,17	-169,6
963	458	RK 400x400x16	197,5	-153,07
1151	558	RK 450x450x15	197,46	-148,38
435	214	RK 400x400x16	197,4	-230,64
948	318	RK 400x400x16	197,26	-253,09
814	318	RK 400x400x16	197,19	-219,36
934	447	RK 400x400x16	196,81	-218,79
363	189	RK 400x400x16	196,3	-209,8
1392	459	RK 450x450x15	196,3	-115,07
1250	522	RK 450x450x15	196,22	-131,33
1187	550	RK 450x450x15	195,98	-132,18
440	90	RK 400x400x16	195,98	-237,52
897	430	RK 400x400x16	195,69	-198,72
1346	650	RK 450x450x15	194,19	-162,75
803	393	RK 400x400x16	194,11	-134,59
368	191	RK 400x400x16	193,82	-214,15
981	460	RK 400x400x16	193,79	-40,42
965	327	RK 400x400x16	193,48	-143,64
415	210	RK 400x400x16	193,45	-149,98
1415	451	RK 400x400x16	192,22	-104,24
931	438	RK 400x400x16	192,2	-128,48
141	79	RK 400x400x16	192,1	-190,59
349	182	RK 400x400x16	191,57	-191,61
967	456	RK 400x400x16	191,56	-181,8
888	425	RK 400x400x16	191,3	-162,11
51	33	RK 400x400x16	191,25	-170,91
452	220	RK 400x400x16	191,24	-90,77
1230	579	RK 450x450x15	191,1	-145,83
984	466	RK 400x400x16	191,02	-155,71
929	309	RK 400x400x16	190,96	-184,8
977	456	RK 400x400x16	190,6	-131,42
928	443	RK 400x400x16	190,24	-110,1
1276	650	RK 450x450x15	189,83	-159,97

# Słownik pojęć podstawowych użytych w rozprawie

**aproksymacja** – przybliżenie położenia w przestrzeni lub na płaszczyźnie

**cykl w grafie** – zamknięty ciąg krawędzi

**dwuwarstwowość struktury** – układ prętów na dwóch, równoległych powierzchniach oddalonych o wysokość konstrukcyjną struktury

**drzewo** – graf bez cykli

- drzewo oznakowane – drzewo z oznaczonymi (ponumerowanymi) wierzchołkami
- drzewo spinające – drzewo łączące części grafu w spójną całość
- gałąź drzewa – fragment drzewa
- korzenie drzewa – fragment drzewa w bazowej części konstrukcji
- pień drzewa – krawędź łącząca gałęzie drzewa
- pień przejściowy – krawędź pomiędzy gałęziami a korzeniem drzewa
- las – zbiór drzew lub pojedynczych krawędzi
- układ drzewiasty – graf z przewagą drzew, w których występują tylko pojedyncze cykle

**dyskretyzacja przestrzeni** – zamiana ciągłego materiału (continuum) na obiekty niższego rzędu poprzez zdefiniowanie siatek bryłowych zastępujących objętość przez elementy powierzchniowe (ściany)

**FEM** – metoda elementów skończonych (ang. finite element method)

**funkcjonał** – funkcja, dla której argumentem jest inna funkcja (nie liczba)

**homeomorfizm siatek płaskich** – siatki zbudowane z tego samego grafu, różniące się tylko wierzchołkami stopnia drugiego.

**graf** – wykres układu krawędzi z wierzchołkami

- graf dualny – łączący krawędziami wierzchołki leżące na ścianach grafu wyjściowego
- graf liniowy – zawierający wierzchołki stopnia co najwyżej drugiego
- graf losowy – zbudowany z zastosowaniem prawdopodobieństwa w odniesieniu do krawędzi i łączących je wierzchołków
- graf nieplanarny – nie dający się przedstawić bez przecięć krawędzi na płaszczyźnie
- graf niespójny – składający się z niepołączonych wierzchołków lub krawędzi
- graf pełny – złożony z kombinatorycznych par wszystkich wierzchołków
- graf planarny – możliwy do przedstawienia bez przecięć krawędzi na płaszczyźnie
- graf prosty – nie zawierający krawędzi ani pętli
- graf pusty – nie zawierający wierzchołków ani krawędzi
- graf spójny – nie zawierający odseparowanych wierzchołków ani krawędzi
- graf z wagami – graf z wartościami przypisanymi do krawędzi

**iloczyn grafów** – działanie polegające na łączeniu wierzchołków dwóch grafów w jeden graf spójny

**incydencja elementów grafu** – związek wzajemnego sąsiedztwa wierzchołków, krawędzi ścian grafu

**izomorfizm** – wzajemna odpowiedniość wierzchołków grafów, mierzona ilością schodzących się w nich krawędzi

**koplanarność** – współpłaszczyznowość

**krawędź grafu** – odcinek lub łuk łączący wierzchołki grafu



- 
- krawędź rozcinająca** – krawędź dzieląca graf na części
- mapowanie** – odwzorowanie za pomocą przypisanej funkcji ze zbioru punktów na prostą, powierzchnię lub przestrzeń
- megastruktura** – konstrukcja o dużych gabarytach i wysokim stopniu złożoności wewnętrznej
- metoda ściągnięcia** – zidentyfikowanie wierzchołków grafu, leżących w odległości mniejszej niż granica ściągania, z jednoczesną redukcją krawędzi wierzchołkowych
- morfologia grafu** – wewnętrzna budowa, ukształtowanie grafu
- panel konstrukcyjny** – płaski element wypełnienia konstrukcji, może być utworzony z siatki prętów
- panel płytowy** – element wypełnienia konstrukcji o charakterze ciągłym
- pętla grafu** – krawędź grafu o końcach w jednym wierzchołku
- planarność węzłów** – położenie węzłów na jednym wielokącie płaskim
- płaszczyzna aproksymująca** – powierzchnia płaska w przestrzeni uśredniająca położenie danych obiektów (krawędzi, wierzchołków)
- podgraf** – element składowy grafu
- powłoka dwuwarstwowa** – struktura przestrzenna złożona z dwóch warstw położonych na powierzchniach w miarę równoległych, połączonych elementami spinającymi
- powłoka prętowa** – siatka prętowa położona na powierzchni zakrzywionej
- projekcja** – odwzorowanie obiektu za pomocą rzutowania na powierzchnię lub wybrane punkty w przestrzeni
- rama przestrzenna** – przestrzenny układ prętów połączonych węzłami sztywnymi
- rozpojenie grafu** – zerwanie spójności grafu, rozdzielenie na części
- rozrzedzenie struktury** – zmniejszenie zagęszczenia prętów przez ich częściowe, równomierne usunięcie
- ruszt** – płaski układ prętów połączonych węzłami sztywnymi obciążony prostopadle

**rząd rozcięcia** – ilość prętów w grafie rozcinającym

**rząd spójności** – ilość prętów w grafie spinającym

**ściągnięcie grafu** – usunięcie krawędzi i zidentyfikowanie jej końców

**ścieżka prętowa** – ciąg sąsiednich prętów w strukturze

**tesselacja** – konfiguracja wielokątów lub brył wypełniająca bez przerw powierzchnię lub przestrzeń

**tesselacja aperiodyczna** – fragmenty konfiguracji nie nakładające się na siebie poprzez proste przesunięcie

**tarcza** – płaski dźwigar powierzchniowy z obciążeniem równoległym do swojej płaszczyzny

**trasa** – skończony ciąg krawędzi

**triangulacja** – wypełnienie powierzchni przez układ trójkątów

**węzeł** – wierzchołek łączący krawędzie grafu (pręty struktury)

- węzeł centralny – wierzchołek położony w środku struktury
- węzeł nieskrępowany – węzeł o charakterze przegubowym
- węzeł podporowy – połączenie pręta z podporą
- węzeł pośredni – dwustopniowy węzeł łączący pręty współliniowe
- węzeł wielostopniowy – węzeł łączący więcej niż trzy krawędzie
- węzeł zwornikowy – węzeł położony w zworniku łuku lub kołu

**wielościan kombinatoryczny** – wielościan przedstawiony w postaci grafu, bez związków afinicznych i metrycznych

**wyężenie pręta** – stopień wykorzystania konstrukcyjnego, mierzony najczęściej wartością działających w nim naprężeń

**wyężenie układu** – stopień wykorzystania konstrukcyjnego wszystkich prętów tworzących układ

**zależność metryczna** – wielkość określająca w jednostkach miary wzajemne położenie wierzchołków lub krawędzi

**założenia arbitralne** – składowe decyzji podejmowanych przez kierującego procesem w oderwaniu od zasad stosowanej metody

# Spis rysunków

1.1	Inspiracje twórcze i forma przekrycia Milano Convention Center . . . . .	9
1.2	Siatka konstrukcyjna naroża budynku (koncepcja: M. Fuk- sas) . . . . .	10
1.3	Konstrukcja wież ekspozycyjnych. . . . .	10
1.4	Konstrukcja atrium na Federation Square w Melbourne. .	11
1.5	Pływalnia olimpijska „Water Cube” w Pekinie . . . . .	11
1.6	Model siatkowy bez tendencji. . . . .	13
2.1	Przykład grafu prostego spójnego. . . . .	18
2.2	Regularność grafów. . . . .	19
2.3	Podstawowe bryły platońskie w ujęciu projekcyjnym i teo- rii grafów. . . . .	20
2.4	Graf dwudzielny $K_{3,3}$ i zupełny $K_5$ . . . . .	22
2.5	Hipoteza przepływu sił w elemencie konstrukcyjnym. . . .	22
2.6	Trajektorie przepływu sił w belce zginanej i stopie funda- mentowej. . . . .	23
2.7	Typy siatek dla przepływów sił. . . . .	23
2.8	Model wyjściowy podpory jednowarstwowej. . . . .	26
2.9	Metoda ściągania prętów . . . . .	27
2.10	Model pośredni podpory jednowarstwowej. . . . .	28

2.11	Model końcowy podpory jednowarstwowej. . . . .	30
2.12	Model wyjściowy podpory dwuwarstwowej. . . . .	32
2.13	Model pośredni podpory dwuwarstwowej . . . . .	33
2.14	Model końcowy podpory dwuwarstwowej. . . . .	35
2.15	Model wyjściowy sferycznej powłoki prętowej . . . . .	37
2.16	Model pierwszej fazy deformacji powłoki prętowej. . . . .	39
2.17	Model drugiej fazy deformacji powłoki prętowej. . . . .	40
2.18	Model trzeciej fazy deformacji powłoki prętowej. . . . .	42
2.19	Model czwartej fazy deformacji powłoki prętowej. . . . .	44
2.20	Model końcowy powłoki prętowej. . . . .	45
2.21	Model zdeformowanej powłoki prętowej z otworem środ- kowym . . . . .	47
3.1	Tesselacja z użyciem kwadratów i trójkątów równobocznych.	50
3.2	Kafelki tesselacji Penrose'a. . . . .	50
3.3	Aperiodyczne tesselacje Penrose'a. . . . .	51
3.4	Kafelki z oznaczonymi prętami Ammanna typu A4. . . . .	52
3.5	Kafelki z oznaczonymi prętami Ammanna typu A5. . . . .	53
3.6	Zestawienie tesselacji Ammanna. . . . .	54
3.7	Własność samopodobieństwa tesselacji Ammanna. . . . .	54
3.8	Rzut rusztu zbudowanego z prętów Ammanna. . . . .	56
3.9	Rzut zmodyfikowanego rusztu płaskiego . . . . .	58
3.10	Powłoka elipsoidalna z układem prętów Ammanna. . . . .	60
3.11	Struktura dwuwarstwowa wg tesselacji Ammanna . . . . .	62
3.12	Rozkład obciążeń na prętach warstwy górnej struktury . . . . .	64
3.13	Rozkład naprężeń w krzyżulcach i warstwie górnej struktury	65
4.1	Diagram Schlegla dla ośmiościanu. . . . .	68
4.2	Bryła z naniesionym podziałem dualnym. . . . .	69

4.3	Układ okręgów stycznych zbudowany na wierzchołkach grafu i grafu dualnego . . . . .	70
4.4	Położenie przekątnej obszaru. . . . .	72
4.5	Tworzenie siatki w obszarze z otworem. . . . .	73
4.6	Wyglądanie siatki. . . . .	73
4.7	Zasada podziału przy punkcie stałym. . . . .	74
4.8	Korekta triangulacji przy punkcie stałym. . . . .	74
4.9	Zależność metryczna krawędzi od okręgu opisanego na elemencie . . . . .	75
4.10	Zagęszczenie triangulacji przy zakrzywionym brzegu obiektu	76
4.11	Zasada mapowania na powierzchnię dwukrzywiznową . . .	77
4.12	Zasada podziału czworościanów w elementach objętościowych . . . . .	77
4.13	Metoda budowania elementu czworościennego. . . . .	78
4.14	Podział wewnętrzny czworościanów przy szczególnym położeniu wierzchołka stałego . . . . .	79
4.15	Siatka FEM dla elementu kołowego . . . . .	80
4.16	Model prętowej powłoki sferycznej. . . . .	81
4.17	Siatka FEM dla wycinka kołowego. . . . .	82
4.18	Model eliptycznej powłoki podpartej obwodowo. . . . .	84
4.19	Model powłoki podpartej obwodowo z panelem środkowym	85
4.20	Model dwuelementowej powłoki podpartej obwodowo. . .	86
4.21	Model dwuelementowej powłoki podpartej obwodowo z panelem środkowym . . . . .	87
4.22	Model dwuelementowej powłoki podpartej punktowo . . .	89
5.1	Rozkład prawdopodobieństwa stopni wierzchołków w grafie losowym . . . . .	92
5.2	Graf losowy rusztu kołowego na dziesięciu cięciwach. . . .	93
5.3	Wariantowe generacje grafów losowych na trzydziestu cięciwach . . . . .	95

5.4	Układ naprężeń początkowych w ruszcie kołowym. . . . .	96
5.5	Układ naprężeń po redukcji dziesięciu elementów. . . . .	97
5.6	Układ naprężeń po redukcji trzydziestu elementów. . . . .	98
5.7	Układ naprężeń w ruszcie prostokątnym z dodanym elementem przekątniowym . . . . .	98
5.8	Układ naprężeń po dodaniu pięciu elementów przekątniowych . . . . .	99
5.9	Układ naprężeń po dodaniu piętnastu elementów przekątniowych . . . . .	100
5.10	Układ naprężeń w ruszcie dwuwarstwowym z dodanym elementem przekątniowym . . . . .	101
5.11	Układ naprężeń po dodaniu dziesięciu elementów przekątniowych . . . . .	103
5.12	Układ naprężeń po dodaniu dwudziestu elementów przekątniowych . . . . .	104
5.13	Nieregularny układ prętów w przestrzeni kuli. . . . .	105
5.14	Układ drzewiasty uzyskany przez ściągnięcie z odległości 2m . . . . .	107
5.15	Układ przestrzenny zamknięty uzyskany przez ściągnięcie z odległości 3m . . . . .	108
5.16	Model konstrukcji przestrzennej z rozkładem naprężeń w prętach . . . . .	110
6.1	Zasada iloczynu grafów. . . . .	112
6.2	Mapowanie triangulacji na powierzchnię sferyczną. . . . .	114

# Architecural efficiency of irregular structural mesh

The structure can significantly contribute to shaping the form of unique objects. In the result of considerable technological progress the application of light bar and strut systems has become widespread. Further development of technology (including automatisisation with computers), production and assembly processes of steel structure elements allowed to withdraw from required unification of structure constituents. This new technological quality meets the expectations of theoreticians of architecture, enabling significant freedom in shaping and individualization of unique building objects. The course of this creative search was named free form design and from its very beginning constituted a challenge for engineers, constructors and theoreticians of structure. In the search for bar systems the generative role is invariably played by geometric rules.

Commonly applied dependencies of Euclidean geometry have spent their creative potential which compelled searchers for new shapes of structure systems to reach for acquirements of advanced mathematics in order to create and verify new models. The level of concept complexity and narrow specialization in inquiry in mathematic questions hinders the implementation of the results of mathematic research to shaping of structure form. These determinants require simplified procedures and handling broadly understood tools that define structural model. In the case of shaping irregular mesh systems the given arguments direct the attention to simplified methods of generation computer models which constitute fundamental creative inspiration. The aim of this thesis is to present the potential and applicability of system of irregular constructional meshes in order to create unique architectural forms. Research models presented in this thesis were generated with the use of *Robot Professional version 2010* and additional applications attached in the appendix.

Graphs constitute the easiest depiction of (bar structure) on the surface. Manifold terms used in graph theory coincide with constructional ones, though their semantic fields are not always matching. The analogy between objects of research in graph theory and structure theory is most visible in the juxtaposition of graphic depiction of both theories. Similarly to the schemes of truces and grids graph representations incorporate nodes which constitute end points of edges and can be quite naturally associated with bars in structures. Owing to the analogies between tree-graphs and multi-branch supports the analysis of supports in the system of space lattice was conducted. The supports of this kind can be applied in the structures of roof covers of large span or multistory buildings as structure of columns for high stories, for instance entrance halls.

In order to deform a bundle of bars treated as graph edges a method of graph contracting was applied. Operation of contracting concerns nodes of bar system, for which the distances in space are smaller than assigned values. In order to initiate the process of contracting it is necessary to introduce intermediate values to the support bars. An even division of all bars with additional nodes was adopted. The analysis of support structure was performed for subsequent phases of deformation. In the case of shaping spatial bar supports for the system of increased loads and dimensions it is necessary to consider generating irregular lattices with increased number of bars composed into two-layer systems. The applied method of contracting adjacent nodes in the process of shaping supports enables to obtain interesting forms of bar shells.

Subsequent research on models was conducted for spherical bar shells. With the use of contracting property of graphs the system of coincident structural arch-ribs was subjected to deformation. The deformation advancing from the centre led to the development of irregular lattice of bar shell, which possesses useful constructional properties, verified with the means of analysis of distribution of stress in the structural elements. Similar results of lattice deformation were obtained for a shell with central ring.

The attention of designers is often drawn to geometrical arrangement of tiling, that can be found in representative interiors of historical buildings. Most of the tessellation arrangements are characterized by regularity streaming from repetitiveness of tiling arrangement in translation mode. Flat tessellations, whose sequences cannot be placed over each other with the means of simple translation, were termed irregular. Aperiodic arrangements of Ammann tiles belong to the most effective surface tessellations. The structure of aperiodic arrangement filling the surface leads to the creation of structure three-directional mesh, characterized



---

by variable distances of parallel lines. The edges of tessellation polylines may constitute structural mesh forming grid arrangement. In the thesis models of flat and curved grids were analysed, whose geometrical shape corresponds to Ammann's tessellation. The results of analyses confirm applicability of tessellations to irregular structure meshes. In the described method the possibility of modifying the tessellation with additional bars (in justified cases) was taken into consideration.

The representation of spatial object on the surface was considered from the very beginning architect's task. Modern computer technique significantly facilitated this process providing efficient tools that enable graphic presentation of architectural objects. However, it is worth stressing that a flat visualization can be easier analyzed in detail than a spatial one. Treating the model of a structure mesh as a planar graph, it is possible to perceive the question of its spatial projection. The condition of 3-connectivity reflected in the vertices degree (which cannot be smaller than three) constitutes the theoretic basis of the spatial realization of a planar graph. The perpendicular projection belongs to the simple visualizations of flat figures on curved surfaces. This kind of transformation was applied to flat irregular bar lattices. The problems linked with surface discretization and solution of functions represented on it, form the basis of FEM – finite elements method. This method, broadly used in research on physical objects, has also been applied in technical and environmental sciences.

In the finite elements method the definition of the mesh of object division is of great significance. In the course of the development of the method a lot of strategies and algorithms were contrived that serve to construct the mesh of finite elements, to solve the problems of its condensing and modifying with regard to object geometry, loads and support of the structure. The triangular mesh is the most frequently applied mesh of surface divisions. The elementary principals of triangulation were developed by Delaunay. The essential question of surface triangulation is obtaining triangular conforming fields, such, whose internal angles are neither too small nor too large. The construction of the finite elements mesh for volume objects is associated with the question of solid filling of three-dimensional space. Similarly to the flat mesh, in Delaunay's algorithms triangular elements are used as faces of irregular tetrahedron. Subsequent divisions of solid figures filling the volume of the object should not allow the division elements to be co-planar. With the use of the mesh construction method for Delaunay's FEM, the system of mixed grid for circular object was generated. Next, the projection of FEM grid on spherical surface was performed, which allowed to obtain the bar shell,

whose properties were next analyzed. Subsequent model was generated for toroid bar shell. Its structural properties enable integrating models into double sets. For complex structure, there is a possibility of applying the support generated in the form of a bar shell. The obtained mega-structure has an interesting shape and can be applied as the building structure.

In shaping of irregular bar lattice the elements of probability theory can be applied with reference to the described random graphs. The analysis of static distribution chiefly concerns the geometry of the structure and relationship between its elements. In order to construct random graph as a model irregular bar system, an algorithm in *Java Script* application was invented, which is attached in the appendix. The location of graph vertices was tentatively assumed in drawing. In order to limit generating of systems of low utility to constructing of system graph, parameter constraints were introduced. For the drawn points a straight line defined in the coordinate system joining them was determined and the length of chord, forming edges between the points was counted. The randomness of the devised algorithms enables fast generating of subsequent grid systems, constructed on circular plan and owing to graph visualization enables preliminary assessment its efficiency to structure application.

The randomly generated grid system underwent the structural analysis, which led to reduction of bars of low stress value. The deletion of subsequent twenty elements in the examined grid of circular projection introduced further arrangement of bar system with the deletion of bars from one of the chords of perimeter circle. Consequently, the value of stress in the structure central zone was reduced. The results of preliminary research on the modification procedure of the flat grid with facultative bar system allow to asses approvingly the proposed method of shaping the bar system.

Subsequent method of generating bar systems is based on supplementing the entry-level structure by adding new elements. The procedure might be implemented outright arbitrarily or after taking into consideration certain parameters of static-strength properties of the object in question. The decrease of extreme bar strain can be counted in the elementary criteria of distribution of the new elements in the structure. The functioning of the method was verified for flat single and double-layer grids. For structures consisting of large number of bars the effectiveness of this method is rather low.

In the last research model an attempt to generate spatial bar system

of considerable irregularity was made. To that end a random set of line segments on the chords of spherical shell with denseness near the centre of the sphere was chosen. Because of the procedure of modification a static scheme of space grid for the model was assumed. The modifying tool of the bar system is, just as it was the case in previous models, the graph contraction of the structure model. The random parameters influencing the subsequently obtained grid systems are the multiply divisions of respective bars owing to the introduced intermediary nodes and edges of contraction. At this stage of constructing, the spatial bar lattice appears quite abstract. In the attempt of rational application it would be necessary to treat a structure of this type as mega-structure which requires shaping a certain kind of sub-construction in geometry adjusted to the technology of the object in question in order to acquire practical function. The results of research on models constructed with the methods presented in this thesis evidence the possibility of application of some topological rules to shaping of irregular bar lattices. Geometric representations of structural meshes in the shape of graphs are free from complex affine dependencies whose consideration stops the creation of architectural outline, especially in the preliminary phases of design. The forms obtained in this process are applicable in architectural design of unique objects.