

H. DUBBEL

TASCHENBUCH
FÜR DEN MASCHINENBAU

Taschenbuch für den Maschinenbau

Bearbeitet von

Ing. H. Dubbel-Berlin, Dr. G. Glage-Berlin, Dipl.-Ing. W. Gruhl-Berlin, Dipl.-Ing. R. Hänchen-Berlin, Ing. O. Heinrich-Berlin, Dipl.-Ing. M. Krause-Berlin, Ing. E. Toussaint-Berlin, Dipl.-Ing. H. Winkel-Berlin, Dr.-Ing. K. Wolters-Berlin

Herausgegeben von

Ing. H. Dubbel
Berlin

Mit 2448 Textfiguren und 4 Tafeln

In zwei Teilen
I. Teil (S. 1—568)



Berlin

Verlag von Julius Springer

1914

~~UNIVERSITÄT
Katedra Polowy Maszyn
Prof. Dr. Brodawskiej
L. Inw. C 8
Bibliothek des Mech.-Lab.
an der Technischen Hochschule Braunschweig
Inv.-No. 10.112
aufgegeben am 26. 3. 1914
Ulrich~~

Alle Rechte, insbesondere das der
Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.
Copyright by Julius Springer in Berlin 1914.

Katedry Politechniki
Politechniki Wrocławskiej

L. inw. C 8

Vorwort.

Bei der Bearbeitung des vorliegenden Taschenbuches waren für Herausgeber und Mitarbeiter die folgenden Erwägungen ausschlaggebend:

Mathematik und Mechanik, diese beiden wichtigsten Grundlagen der wissenschaftlichen Ingenieurausbildung, sind in eingehender, besonders die Elemente berücksichtigenden Form dargestellt. Diese Darstellung entspricht den Bedürfnissen der Praxis, die meist nur eine allerdings gründliche Beherrschung der Elemente erfordert. Eine Beschränkung erschien auch deshalb angebracht, weil bei Lösung schwierigerer Aufgaben nicht die knappen Angaben eines Taschenbuches, sondern größere Spezialwerke zu Rate gezogen werden.

Da Gewißheit über den Geltungsbereich nur bei solchen Formeln, deren Entstehung bekannt ist, vorhanden ist, so ist auf Ableitung der Hauptsätze großer Wert gelegt. Die zahlreichen Beispiele dienen nicht nur als Übungsstoff, sondern behandeln auch wichtige Fragen aus dem Gebiete des Maschinenbaus, so die Beschleunigungsverhältnisse unrunder Scheiben, die Berechnung mehrfach gelagerter Wellen, die statische Berechnung der Kranträger usw. Der zunehmenden Bedeutung der rotierenden Kraft- und Arbeitsmaschinen, die im praktischen Teil im Zusammenhang behandelt sind, wurde durch die Berechnung unlaufender Scheiben und der kritischen Verhältnisse raschlaufender Wellen Rechnung getragen.

Der praktische Teil wurde ausschließlich mit Rücksicht auf die Bedürfnisse des Maschineningenieurs bearbeitet. Für die Darstellung der einzelnen Kapitel war die Tatsache maßgebend, daß der Spezialist auf seinem Fachgebiet Taschenbücher selten oder nie zu Rate zieht, da ihm hier eigene Erfahrungswerte und Konstruktionsvorlagen sowie die Fachliteratur zur Verfügung stehen, die das Erforderliche in aller Ausführlichkeit enthalten. Aus diesem Grunde sind die einzelnen Kapitel in der Weise behandelt, daß sie jedem Maschineningenieur einen raschen Überblick auch auf ihm fernliegende Fachgebiete ermöglichen und ihn mit den wichtigsten Methoden und Zahlenwerten bekannt machen. So soll das Taschenbuch den engen Zusammenhang zwischen den verschiedenen Zweigen des gesamten Maschinenbaus zum Ausdruck bringen und gleichzeitig durch Wiedergabe der neuesten Bauarten und besonders der Elemente ein Bild des heutigen Standes der wichtigsten Gebiete der Maschinenteknik geben.

Größter Wert wurde auf die zeichnerische Darstellung und auf die Betonung des Wesentlichen in den Konstruktionen gelegt.

Mit Gebührenordnungen, Normalien für Untersuchungen, polizeilichen und gesetzlichen Vorschriften usw. (die u. a. vom Verein deutscher Ingenieure bezogen werden können) ist das Buch nicht belastet worden.

Den Firmen und Ingenieuren, die durch Überlassung wertvoller Unterlagen ihr Interesse an unserem Unternehmen bekundet haben, sei an dieser Stelle verbindlichst gedankt.

Besonderer Dank gebührt der Verlagsbuchhandlung von Julius Springer, die allen Wünschen und namentlich den hochgespannten Anforderungen der Mitarbeiter in bezug auf die Ausführung der Figuren ohne Einschränkung entsprochen hat.

Berlin, 20. Juni 1914.

Dubbel.

Inhaltsverzeichnis.

I. Teil.

Mathematik.

	Seite
I. Tafeln. Tafeln der Potenzen, Wurzeln, Briggschen Logarithmen, Kreisumfänge und -inhalte — Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen — Natürliche Logarithmen — Tafeln der Kreisfunktionen — Bogenlängen, Bogenhöhen, Tangenten- und Sehnenlängen für den Halbmesser 1 — Tafeln der Hyperbelfunktionen — Einige Zahlenwerte — Bemerkungen zu den Tafeln A bis E	2
II. Arithmetik. Bearbeitet von Dr. G. Glage. Die Potenz-, Wurzel- und Logarithmenrechnung — Zahlensysteme — Gleichungen — Die Kombinationslehre	43
III. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf die Fehler- und Ausgleichsrechnung. Bearbeitet von Dr. G. Glage. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung — Die experimentellen Beobachtungsfehler — Die Methode der kleinsten Quadrate	64
IV. Die Kreis- und Hyperbelfunktionen. Bearbeitet von Dr. G. Glage. Die Trigonometrie — Die Hyperbelfunktionen	70
V. Das Rechnen mit Reihen. Bearbeitet von Dr. G. Glage. Endliche Reihen — Unendliche Reihen — Die Fourierschen Reihen . .	82
VI. Planimetrie und Stereometrie. Umfänge und Flächeninhalte ebener Figuren — Oberflächen und Rauminhalte von Körpern	99
VII. Technische Kurvenlehre. Kurven in der Ebene, analytische Geometrie der Ebene. Bearbeitet von Dipl.-Ing. H. Winkel. Punkt und gerade Linie — Krumme Linien in der Ebene (Allgemeine Sätze und Erklärungen; Die Kegelschnitte; Parameter-Darstellung von Kurven; Kurven, deren Gleichung die Form $y = C \cdot x^n$ hat; Die zyklischen Kurven; Die Spiralen; Die Sinuslinien; Die gemeine Kettenlinie; Kurven, deren Gleichung die Form $r^m = a^m \cdot \cos(m\varphi)$ hat; Gleichungen einiger anderer Kurven)	106
VIII. Infinitesimalrechnung. Bearbeitet von Dipl.-Ing. H. Winkel. Die Differentialrechnung (Allgemeine Regeln; Differentialformeln; Differentialquotienten höherer Ordnung; Anwendung der Differentialformeln; Differentiellinien; Höhere Differentialquotienten der unentwickelten Funktion; Die ausgezeichneten Werte einer Funktion [Maxima und Minima]; Anwendungen der Differentialrechnung auf die Kurvenlehre; Unbestimmte Ausdrücke) — Die Integralrechnung (Allgemeine Regeln; Integralformeln; Anwendung der Integralrechnung)	147
IX. Analytische Geometrie des Raumes. Bearbeitet von Dipl.-Ing. H. Winkel. Punkte, gerade Linien und Ebenen im Raume — Flächen- und Raumkurven	208

Mechanik.

I. Dynamik. Bearbeitet von Dipl.-Ing. M. Krause. Bewegungslehre (Bewegung eines Punktes; Bewegung starrer Körper) — Physikalische Mechanik (Allgemeine Gesetze; Bewegung eines Massenpunktes unter dem Einfluß von Kräften; Schwingungen elastischer Körper; Schwanke Wellen; Bewegung eines Punkthaufens unter dem Einfluß von Kräften)	213
---	-----

II. Statik starrer Körper. Bearbeitet von Dipl.-Ing. H. Winkel.	Seite
Kräfte in der Ebene (Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften mit demselben Angriffspunkt; Anwendungen der Gleichgewichtsbedingungen; Mittelpunkt paralleler Kräfte, Schwerpunkt; Schwerpunktlagen) — Reibungswiderstände (Der Reibungskoeffizient der gleitenden Reibung; Der Reibungskoeffizient der rollenden Reibung; Reibungsarbeit und Wirkungsgrad; Die Zapfenreibung; Rollen und Rollenzüge; Die Seilreibung) — Das ebene Fachwerk (Das Verfahren von Culmann; Das Verfahren von Cremona; Analytisches Verfahren nach Ritter; Bewegliche Lasten, Einflußlinien; Die ungünstigste Laststellung bei beweglicher Last)	269
III. Dynamik flüssiger Körper. Bearbeitet von Dipl.-Ing. M. Krause.	
Ausfluß aus offenen Gefäßen — Ausfluß aus geschlossenen Gefäßen — Strömung der Flüssigkeiten in Rohrleitungen — Rückdruck gegen das Ausflußgefäß — Stoß gegen eine Wand — Vorrichtungen zum Messen von Flüssigkeitsmengen und Geschwindigkeiten	343
IV. Statik flüssiger Körper (Hydrostatik). Bearbeitet von Dipl.-Ing. H. Winkel	351
V. Wärmelehre. Bearbeitet von Dipl.-Ing. M. Krause.	
Allgemeine Eigenschaften — Wärmeübergang durch Berührung und Leitung — Thermodynamik (Mechanik der Gase — Mechanik der Dämpfe — Ausfluß von Dämpfen — Gasmischungen) — Die Entropie und die Wärmedigramme (Gase — Dämpfe)	353
VI. Festigkeitslehre. Bearbeitet von Dipl.-Ing. H. Winkel.	
Allgemeines — Erklärungen und Versuchswerte — Elastizitäts- und Festigkeitszahlen — Zulässige Spannungen (Für den Maschinenbau — für den Hochbau)	389
Festigkeit von Stäben mit gerader Achse — Zug- und Druckfestigkeit — Knickfestigkeit — Schubfestigkeit — Biegezugfestigkeit — Drehzugfestigkeit — Formänderungsarbeit — Zusammengesetzte Festigkeit	407
Festigkeit von Stäben mit gekrümmter Achse.	471
Festigkeit der Federn.	476
Festigkeit von Gefäßen, umlaufenden Scheiben, Platten — Gefäße unter innerem und äußerem Druck — Die Berechnung umlaufender Scheiben — Die Festigkeit von ebenen Platten	479

Chemie.

I. Die Reinigung der technischen Gebrauchswässer. Bearbeitet von Ing. O. Heinrich.	
Fremdstoffe im Wasser — Die Anforderungen an das Gebrauchswasser — Nachteile für den Dampfkesselbetrieb durch Wasserverunreinigung — Die Prüfung des Wassers — Wertung der Härteprüfung für den Kesselbetrieb — Die Wasserreinigung — Mechanische Reinigung — Chemische Reinigung	493
II. Die Brennstoffe und ihre technische Verwendung. Bearbeitet von Ing. O. Heinrich.	
Der Verbrennungsvorgang — Die festen Brennstoffe — Die flüssigen Brennstoffe — Die gasförmigen Brennstoffe — Die Brennstofflagerung — Zusammensetzung der Brennstoffe — Die Verfeuerung der Brennstoffe — Das Rauchen der Feuerungen und seine Beseitigung — Der Luftbedarf der Brennstoffe — Die Rauchgase — Der Heizwert der Brennstoffe — Die Verbrennungstemperatur — Die Erhöhung des Druckes im Verbrennungsraum bei der motorischen Verbrennung — Die Vergasung fester Brennstoffe	499

Stoffkunde.

Bearbeitet von Ing. O. Heinrich.

Internationale Atomgewichte — Chemische Zusammensetzung technisch wichtiger Stoffe — Einheitsgewichte — Mittlere Lagorgewichte	527
Die Maschinenbaustoffe — Eisen — Kupfer — Zink — Blei — Zinn — Aluminium — Die Legierungen — Holz — Steine — Mörtel — Beton — Eisenbeton.	530
Hilfsstoffe des Maschinenbaus — Asbest — Kitten — Schleifmittel — Poliermittel — Schmiermittel	561

II. Teil.

Maschinenteile.

Bearbeitet von Dr.-Ing. K. Wolters.

I. Vernietungen.	Seite
Allgemeines — Berechnung der Vernietungen — Ausführungsbeispiele . .	569
II. Schrumpfringe und -platten	578
III. Keilverbindungen.	
Längskeile — Querskeile.	579
IV. Schrauben.	
Gebräuchliche Gewinde — Berechnung der Schrauben — Muttern — Köpfe — Ausführungsbeispiele — Unterlegscheiben — Schraubensicherungen . .	582
V. Bolzen	592
VI. Zapfen.	
Tragzapfen — Stützzapfen — Kammzapfen	592
VII. Wellen und Achsen.	
Normale Triebwerkswellen — Achsen	600
VIII. Kupplungen.	
Feste Kupplungen — Bewegliche Kupplungen — Während des Stillstandes ein- und ausrückbare Kupplungen — Während des Betriebes ein- und ausrückbare Kupplungen — Sicherheitskupplungen — Kraftmaschinenkupplungen	618
IX. Lager.	
Traglager — Stütz- oder Kammlager	634
X. Zahnräder.	
Stirnräder mit geraden Zähnen — Stirnräder mit Winkelzähnen — Stirnräder mit Schraubenzähnen — Kegelräder — Zahnräder für sich kreuzende Wellen — Unrunde Räder — Ausführung der Räder	646
XI. Reibungsräder	675
XII. Kettenräder	676
XIII. Riemen- bzw. Seiltrieb.	
Allgemeines — Der Riemetrieb — Seiltrieb	677
XIV. Kurbeltrieb.	
Bewegungs- und Kraftverhältnisse — Kurbeln — Exzenter und -stangen — Schubstangen — Kreuzköpfe — Kreuzkopfführungen — Kolbenstangen — Kolben	700
XV. Rohrleitungen.	
Rohre und Formstücke — Zubehörteile	730
XVI. Absperrvorrichtungen.	
Absperrventile und -schieber — Selbsttätige Ventile — Stopfbüchsen . .	745

Die Dampferzeugungsanlagen.

Bearbeitet von Ing. O. Heinrich.

I. Die Leistungsfähigkeit einer Kesselanlage.	
Größe der Leistung — Güte der Leistung	763
II. Die Leistungsfähigkeit der Brennstoffe	765
III. Die Wärmeverluste	766
IV. Bericht über einen Verdampferversuch.	
Mechanische Verhältnisse der Anlage — Versuchsanordnung und -ausführung — Auswertung des Ermittelten — Wärmebilanz — Güte der Kesselleistung	768
V. Feuerungen.	
Lage der Feuerung zum Kessel — Der Rost — Die Rostfläche — Einzelteile der Feuerungen	769

	Seite
VI. Übersicht über besondere Feuerungseinrichtungen.	
Mittel, um den Luftüberschuß gering zu halten — Mittel zur Rauchverhütung — Mittel, um die Verfeuerung schwer brennender Stoffe zu ermöglichen und die Leistungsfähigkeit der Feuerungen zu erhöhen — Mittel zur Selbstbedienung der Feuerung	779
VII. Die Feuerzüge — Zugkanäle	790
VIII. Das Mauerwerk	792
IX. Der Schornstein	794
X. Ausführung der Schornsteine	801
XI. Die Dampfkessel.	
Gemeinsames — Die gebräuchlichsten Kesselbauarten	803
XII. Die Überhitzer.	
Zentralüberhitzer — Kesselzugüberhitzer — Berechnung der Überhitzer — Ausführung der Überhitzer	823
XIII. Die Vorwärmer	829
XIV. Einzelheiten aus dem Kesselbau	835
XV. Festigkeitsrechnungen	843
XVI. Die Kesselausrüstung	849

Die Kraft- und Arbeitsmaschinen mit Kolbenbewegung.

Bearbeitet von H. Dubbel.

I. Die Dampfmaschinen.	
Das Dampfdiagramm — Die Steuerungen — Die Mittel zur Verringerung der Eintrittskondensation	859
II. Die Gasmaschinen.	
Die Theorie — Die Viertaktmaschinen — Die Zweitaktmaschinen — Einzelheiten der Großgasmaschinen — Die Ölmaschinen — Angaben für die Berechnung — Die Kraftgaserzeuger	898
III. Die Kolbenpumpen.	
Die verschiedenen Ausführungsarten. Antrieb — Saug- und Druckwirkung. Die Windkessel — Berechnung der Ventile — Ausführung der Pumpen und Ventile	924
IV. Die Kolbenkompressoren.	
Ermittlung der Abmessungen und des Kraftbedarfs — Ventile — Schiebersteuerungen — Regelung — Ausführung und Anordnung der Kompressoren und Gebläse	940

Die rotierenden Kraft- und Arbeitsmaschinen.

Bearbeitet von H. Dubbel.

Aktions- und Reaktionswirkung — Die Hauptgleichung der rotierenden Maschinen	951
I. Wasserturbinen.	
Berechnung der Aktionsturbinen — Ausführung und Einzelheiten der Aktionsturbinen — Berechnung und Entwurf der Reaktionsturbinen — Regulierung, Anordnung und Einzelheiten der Francis-Turbinen — Die spezifischen Größen — Anwendungsgebiet der Aktions- und Reaktionsturbinen — Angaben über den Entwurf	953
II. Die Zentrifugalpumpen.	
Hauptgleichung. Bedeutung der Schaufelwinkel — Geschwindigkeitsdiagramme — Schaufelform — Spaltdruck und Axial Schub — Regelung der geförderten Wassermengen. — Verhalten im Betrieb — Q/H -Diagramm — Angenäherter Entwurf der Q/H -Kurve — Ausführungen und Einzelheiten	973
III. Die Dampfturbinen.	
Wirkung der Döse — Elementare Theorie der Dampfturbinen — Wirkungsgrade und Dampfverbrauch — Die Berechnung der Dampfturbinen — Konstruktive Angaben — Gesamtanordnung und Einzelheiten	989
IV. Die Turbokompressoren.	
Arbeitsweise — Ausführungen und Einzelheiten — Angenäherte Berechnung der Turbokompressoren	1006

Pumpen und Kompressoren verschiedener Bauart.

Bearbeitet von H. Dubbel.

Pulsometer — Injektoren — Mammutpumpen — Humphrey-Gaspumpe — Hydraulischer Kompressor	Seite 1010
--	---------------

Abwärmeverwertung.

Bearbeitet von H. Dubbel.

Abdampferverwertung — Zwischendampfentnahme — Maschinen von Sonn- leithner und Missong — Abdampfturbinen — Abwärmeverwertung bei Groß- gasmaschinen — Abwärmeverwertung für Dieselmotoren	1012
---	------

Schwungräder und Regulatoren.

Bearbeitet von H. Dubbel.

Schwungradberechnung (Die Wirkungen der Massen; Das Tangentialdruck- diagramm; Schwungradberechnung bei Gasmaschinen; Berücksichtigung der Resonanz bei Wechselstrommaschinen; Widerstand unmittelbar an der Kolbenstange; Ruhe des Ganges)	1021
Die Regulierung (Die Regulatoren; Die Flachregler; Die Leistungsregler; Die indirekt wirkenden Regler)	1026

Die Kondensation.

Bearbeitet von H. Dubbel.

Mischkondensation — Oberflächenkondensation — Strahlkondensatoren — Die Luftpumpen — Abdampfleitung — Entölung — Rückkühlung	1035
---	------

Rohrleitungen.

Bearbeitet von H. Dubbel.

Dampfleitungen — Luftleitungen für Kompressoren — Leitungen für Gas- maschinen — Wasserleitungen für Pumpen	1051
--	------

Hebemaschinen.

Bearbeitet von Dipl.-Ing. R. Hänchen.

I. Einzelteile der Hebemaschinen.

Die Huborgane, deren Rollen und Trommeln (Ketten; Seile; Rollenachsen und Trommelwellen)	1059
Lasthaken (Einfache Haken; Doppelhaken; Lastbügel)	1073
Verbindung des Hakens mit dem Huborgan (Hakengeschirre; Kranflaschen) Handkurbeln und Haspelräder	1078
Sperwerke (Zahn- oder Klinkengesperre; Reibungs- oder Klemmgesperre) Bremsen (Backen-[Klotz]-Bremsen; Kegelsbremsen; Bandbremsen; Lamellen- bremsen; Sicherheitskurbeln; Fliehkraft-[Schleuder]-Bremsen; Lastdruck- bremsen)	1081
Laufträder	1082
Laufträder	1095

II. Aufhängung der Last.

Kranwagen	1097
Fördergefäße (Kippkübel; Klappgefäße; Selbstgreifer)	1097
Lasthebemagnete (Mechanische Sicherheitsvorrichtungen)	1102
Zangen	1104

III. Flaschenzüge.

Gewöhnliche Flaschenzüge — Der Differentialflaschenzug — Schrauben- flaschenzüge mit Drucklagerbremse — Zahnradflaschenzüge	1104
--	------

IV. Winden.

Unmittelbar wirkende Winden (Zahnstangenwinden; Schrauben- winden; Druckwasser-Hebebocke)	1106
Mittelbar wirkende Winden (Räderwinden). Antrieb von Hand-Aus- führung der Winden mit Antrieb von Hand (Feststehende Winden; Fahrbare Winden)	1108

	Seite
Motorischer Antrieb (Weniger gebräuchliche Antriebsarten; Elektrischer Antrieb) — Elektromotoren für unterbrochenen Betrieb (Eigenschaften der Motoren im Betriebe; Wahl der Motoren; Mechanische Ausführung der Motoren)	1113
Steuerung der Motoren (Schaltungen für Fahr- und Drehwerke; Schaltungen für Hubwerke; Leonard-Schaltung)	1120
Berechnung und Ausführung der elektrisch betriebenen Winden (Hubwerk; Winden- und Querfahrwerk; Ausführungen [Feststehende Winden; Fahrbare Winden; Greiferwinden])	1124
V. Krane.	
Laufkrane (Laufkrane mit Antrieb von Hand; Mit Transmissionsantrieb; Mit elektrischem Antrieb)	1134
Berechnung und Ausführung der elektrisch betriebenen Laufkrane — Ausleger-Laufkrane — Lokomotivhebkrane — Kranfahrbahn	1137
Bockkrane (Feststehende, fahrbare Bockkrane)	1150
Hochbahnkrane — Verladebrücken (Anordnung der Laufkatze; Kranbrücke; Kranfahrwerk) — Seilbahnkrane	1153
Konsolkrane (Krane mit festem Ausleger; Krane mit schwenkbarem Ausleger)	1159
Drehkrane — Feststehende Drehkrane (Säulendrehkrane; Drehscheibenkrane) — Fahrbare Drehkrane (Krane mit doppelspurigem Unterwagen; Fahrbare Drehkrane auf erhöhtem Gerüste; Drehkrane mit einspurigem Unterwagen. Veloziped- oder Zweiradkrane)	1162
Schwimmkrane	1187
Sonderkrane für Hütten-, Stahl- und Walzwerke (Gießkrane; Beschickmaschinen, Muldenchargierkrane; Blockeinsetzkrane; Tiefofenkrane; Pratzekrane; Magnetkrane)	1188
Elektrische Ausrüstung der Krane (Motoren; Steuerapparate; Bremsmagnete; Sicherheitsvorrichtungen; Schaltbrett; Stromzuführung)	1192
VI. Aufzüge.	
Handaufzüge	1199
Transmissionsaufzüge	1200
Druckwasser- (hydraulische) Aufzüge — Unmittelbar wirkende Druckwasseraufzüge — Mittelbar wirkende Druckwasseraufzüge	1200
Elektrische Aufzüge — Lastenaufzüge — Personenaufzüge — Elektrische Aufzugmaschine, Gegengewicht, Fahrkorb und Schacht — Steuerung der elektrisch betriebenen Aufzüge — Sicherheitsvorrichtungen — Paternosteraufzüge	1204

Werkzeugmaschinen für spanabhebende Metallbearbeitung.

Bearbeitet von Ing. E. Toussaint.

I. Werkzeuge.	
Ausbildung des Spanes. Werkzeugwinkel. Arbeitswinkel — Schnittgeschwindigkeit, Schaltung — Spezifischer Schnittdruck. Arbeitswiderstände (Hobeln; Stoßen; Drehen; Bohren; Fräsen; Schleifen)	1227
II. Konstruktionselemente der Werkzeugmaschinen.	
Antriebsorgane für Schnitt- und Schaltbewegung (Grundlegende Betrachtungen; Mittel zur Herstellung der Umlaufreihen; Antriebsorgane für geradlinige Wege; Kupplungs- und Schalteinrichtungen)	1234
Führungen zur Fortleitung der erzeugten Bewegung (Grundlegende Betrachtungen; Ausgestaltung der Führungen für gerade Wege; Ausgestaltung der Führungen für kreisförmige Wege)	1279
Einrichtungen zum Aufbringen der Werkzeuge	1286
III. Aufbau der Werkzeugmaschinen.	
Drehbänke: Auftretende Kräfte, Aufnahme derselben — Teile der Drehbank — Ausgeführte Konstruktionen	1288
Hobel- und Stoßmaschinen: Aufnahme der Arbeitsdrücke — Wirkung der Massenkräfte — Teile der Hobel- und Stoßmaschinen — Ausgeführte Konstruktionen	1305
Bohrmaschinen: Aufnahme der Arbeitsdrücke — Teile der Bohrmaschine — Ausgeführte Konstruktionen	1322
Fräsmaschinen: Allgemeine Bemerkungen — Die verschiedenen Arten von Fräsmaschinen — Der Schaltantrieb — Der Universalteilkopf — Ausgeführte Konstruktionen	1331
Schleifmaschinen: Die Schleifscheiben — Spindelstöcke der Schleifscheiben. Schnittbewegung — Aufnahme der Werkstücke — Antrieb der Schaltbewegung — Die Einstellung der Spantiefe	1341

IV. Elektrischer Einzelantrieb von Werkzeugmaschinen.	Seite
Die Vorteile des elektrischen Einzelantriebes — Der Stufenmotor — Der Umkehrmotor	1345
V. Berechnen und Entwerfen von Werkzeugmaschinen.	
Entwurf einer Zugspindeldrehbank von 150 mm Spitzenhöhe mit 8 verschiedenen Drehzahlen — Entwurf einer Wagerechtsstoßmaschine (Shapingmaschine) — Entwurf einer Senkrechtbohrmaschine	1349

Elektrotechnik.

Bearbeitet von Dipl.-Ing. W. Gruhl.

I. Physikalische Grundgesetze.	
Elektrotechnische Maßeinheiten — Magnetismus — Elektrostatik — Der elektrische Strom, seine Gesetze und Wirkungen — Induktion — Wechselströme, ihre Darstellung, Gesetze und Wirkungen	1374
II. Elektrotechnische Meßkunde.	
Konstruktion, Wirkungsweise und Anwendung der gebräuchlichen Meßinstrumente — Meßmethoden	1399
III. Die Erzeugung des elektrischen Stromes.	
Galvanische Elemente, Thermolemente, Akkumulatoren — Dynamomaschinen (Gleichstrommaschinen, Wechselstromgeneratoren)	1411
IV. Elektromotoren.	
Motoren für Gleichstrom — Synchronmotoren — Asynchrone Motoren (Induktionsmotoren; Kommutator-Motoren)	1429
V. Umformung des elektrischen Stromes.	
Motorgeneratoren — Einankerumformer — Transformatoren	1445
VI. Elektrische Beleuchtung.	
Grundbegriffe — Glühlampen — Bogenlampen — Verteilung der Beleuchtung	1451
VII. Anlagen für Stromlieferung (Zentralen).	
Normalschaltungen bei Gleichstrom. Regelung und Parallelschaltung von Gleichstrommaschinen — Normalschaltungen bei Drehstrom — Parallelschalten von Wechselstrommaschinen — Leitungen	1455
VIII. Wahl der Stromart und der Spannung.	
Gleichstrom — Wechselstrom	1468
Sachverzeichnis	1470

Mathematik.

I. Tafeln.

Erläuterungen s. S. 36 und 43 ff.

2 A. a) Tafeln der Potenzen, Wurzeln, Briggschen Logarithmen, Kreisumfänge und -inhalte.

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
1	1	1	1,0000	1,0000	0,00000	1000,000	3,142	0,7854	1
2	4	8	1,4142	1,2599	0,30103	500,000	6,283	3,1416	2
3	9	27	1,7321	1,4422	0,47712	333,333	9,425	7,0686	3
4	16	64	2,0000	1,5874	0,60206	250,000	12,566	12,5664	4
5	25	125	2,2361	1,7100	0,69897	200,000	15,708	19,6350	5
6	36	216	2,4495	1,8171	0,77815	166,667	18,850	28,2743	6
7	49	343	2,6458	1,9129	0,84510	142,857	21,991	38,4845	7
8	64	512	2,8284	2,0000	0,90309	125,000	25,133	50,2655	8
9	81	729	3,0000	2,0801	0,95424	111,111	28,274	63,6173	9
10	100	1000	3,1623	2,1544	1,00000	100,000	31,416	78,5398	10
11	121	1331	3,3166	2,2240	1,04139	90,9091	34,558	95,0332	11
12	144	1728	3,4641	2,2894	1,07918	83,3333	37,699	113,097	12
13	169	2197	3,6056	2,3513	1,11394	76,9231	40,841	132,732	13
14	196	2744	3,7417	2,4101	1,14613	71,4286	43,982	153,938	14
15	225	3375	3,8730	2,4662	1,17609	66,6667	47,124	176,715	15
16	256	4096	4,0000	2,5198	1,20412	62,5000	50,265	201,062	16
17	289	4913	4,1231	2,5713	1,23045	58,8235	53,407	226,980	17
18	324	5832	4,2426	2,6207	1,25527	55,5556	56,549	254,459	18
19	361	6859	4,3589	2,6684	1,27875	52,6316	59,690	283,529	19
20	400	8000	4,4721	2,7144	1,30103	50,0000	62,832	314,159	20
21	441	9261	4,5826	2,7589	1,32222	47,6190	65,973	346,361	21
22	484	10648	4,6904	2,8020	1,34242	45,4545	69,115	380,133	22
23	529	12167	4,7958	2,8439	1,36173	43,4783	72,257	415,476	23
24	576	13824	4,8990	2,8845	1,38021	41,6667	75,398	452,389	24
25	625	15625	5,0000	2,9240	1,39794	40,0000	78,540	490,874	25
26	676	17576	5,0990	2,9625	1,41497	38,4615	81,681	530,929	26
27	729	19683	5,1962	3,0000	1,43136	37,0370	84,823	572,555	27
28	784	21952	5,2915	3,0366	1,44716	35,7143	87,965	615,752	28
29	841	24389	5,3852	3,0723	1,46240	34,4828	91,106	660,520	29
30	900	27000	5,4772	3,1072	1,47712	33,3333	94,248	706,858	30
31	961	29791	5,5678	3,1414	1,49136	32,2581	97,389	754,768	31
32	1024	32768	5,6569	3,1748	1,50515	31,2500	100,531	804,248	32
33	1089	35937	5,7446	3,2075	1,51851	30,3030	103,673	855,299	33
34	1156	39304	5,8310	3,2396	1,53148	29,4118	106,814	907,920	34
35	1225	42875	5,9161	3,2711	1,54407	28,5714	109,956	962,113	35
36	1296	46656	6,0000	3,3019	1,55630	27,7778	113,097	1017,88	36
37	1369	50653	6,0828	3,3322	1,56820	27,0270	116,239	1075,21	37
38	1444	54872	6,1644	3,3620	1,57978	26,3158	119,381	1134,11	38
39	1521	59319	6,2450	3,3912	1,59106	25,6410	122,522	1194,59	39
40	1600	64000	6,3246	3,4200	1,60206	25,0000	125,66	1256,64	40
41	1681	68921	6,4031	3,4482	1,61278	24,3902	128,81	1320,25	41
42	1764	74080	6,4807	3,4760	1,62325	23,8095	131,95	1385,44	42
43	1849	79507	6,5574	3,5034	1,63347	23,2558	135,09	1452,20	43
44	1936	85184	6,6332	3,5303	1,64345	22,7273	138,23	1520,53	44
45	2025	91125	6,7082	3,5569	1,65321	22,2222	141,37	1590,43	45
46	2116	97336	6,7823	3,5830	1,66276	21,7391	144,51	1661,90	46
47	2209	103823	6,8557	3,6088	1,67210	21,2766	147,65	1734,94	47
48	2304	110592	6,9282	3,6342	1,68124	20,8333	150,80	1809,56	48
49	2401	117649	7,0000	3,6593	1,69020	20,4082	153,94	1885,74	49
50	2500	125000	7,0711	3,6840	1,69897	20,0000	157,08	1963,50	50

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
50	25 00	125 000	7,0711	3,6840	1,69897	20,0000	157,08	1963,50	50
51	26 01	132 651	7,1414	3,7084	1,70757	19,6078	160,22	2042,82	51
52	27 04	140 608	7,2111	3,7325	1,71600	19,2308	163,36	2123,72	52
53	28 09	148 877	7,2801	3,7563	1,72428	18,8679	166,50	2206,18	53
54	29 16	157 464	7,3485	3,7798	1,73239	18,5185	169,65	2290,22	54
55	30 25	166 375	7,4162	3,8030	1,74036	18,1818	172,79	2375,83	55
56	31 36	175 616	7,4833	3,8259	1,74819	17,8571	175,93	2463,01	56
57	32 49	185 193	7,5498	3,8485	1,75587	17,5439	179,07	2551,76	57
58	33 64	195 112	7,6158	3,8709	1,76343	17,2414	182,21	2642,08	58
59	34 81	205 379	7,6811	3,8930	1,77085	16,9492	185,35	2733,97	59
60	36 00	216 000	7,7460	3,9149	1,77815	16,6667	188,50	2827,43	60
61	37 21	226 981	7,8102	3,9365	1,78533	16,3934	191,64	2922,47	61
62	38 44	238 328	7,8740	3,9579	1,79239	16,1290	194,78	3019,07	62
63	39 69	250 047	7,9373	3,9791	1,79934	15,8730	197,92	3117,25	63
64	40 96	262 144	8,0000	4,0000	1,80618	15,6250	201,06	3216,99	64
65	42 25	274 625	8,0623	4,0207	1,81291	15,3846	204,20	3318,31	65
66	43 56	287 496	8,1240	4,0412	1,81954	15,1515	207,35	3421,19	66
67	44 89	300 763	8,1854	4,0615	1,82607	14,9254	210,49	3525,65	67
68	46 24	314 432	8,2462	4,0817	1,83251	14,7059	213,63	3631,68	68
69	47 61	328 509	8,3066	4,1016	1,83885	14,4928	216,77	3739,28	69
70	49 00	343 000	8,3666	4,1213	1,84510	14,2857	219,91	3848,45	70
71	50 41	357 911	8,4261	4,1408	1,85126	14,0845	223,05	3959,19	71
72	51 84	373 248	8,4853	4,1602	1,85733	13,8889	226,19	4071,50	72
73	53 29	389 017	8,5440	4,1793	1,86332	13,6986	229,34	4185,39	73
74	54 76	405 224	8,6023	4,1983	1,86923	13,5135	232,48	4300,84	74
75	56 25	421 875	8,6603	4,2172	1,87506	13,3333	235,62	4417,86	75
76	57 76	438 976	8,7178	4,2358	1,88081	13,1579	238,76	4536,46	76
77	59 29	456 533	8,7750	4,2543	1,88649	12,9870	241,90	4656,63	77
78	60 84	474 552	8,8318	4,2727	1,89209	12,8205	245,04	4778,36	78
79	62 41	493 039	8,8882	4,2908	1,89763	12,6582	248,19	4901,67	79
80	64 00	512 000	8,9443	4,3089	1,90309	12,5000	251,33	5026,55	80
81	65 61	531 441	9,0000	4,3267	1,90849	12,3457	254,47	5153,00	81
82	67 24	551 368	9,0554	4,3445	1,91381	12,1951	257,61	5281,02	82
83	68 89	571 787	9,1104	4,3621	1,91908	12,0482	260,75	5410,61	83
84	70 56	592 704	9,1652	4,3795	1,92428	11,9048	263,89	5541,77	84
85	72 25	614 125	9,2195	4,3968	1,92942	11,7647	267,04	5674,50	85
86	73 96	636 056	9,2736	4,4140	1,93450	11,6279	270,18	5808,80	86
87	75 69	658 503	9,3274	4,4310	1,93952	11,4943	273,32	5944,68	87
88	77 44	681 472	9,3808	4,4480	1,94448	11,3636	276,46	6082,12	88
89	79 21	704 969	9,4340	4,4647	1,94939	11,2360	279,60	6221,14	89
90	81 00	729 000	9,4868	4,4814	1,95424	11,1111	282,74	6361,73	90
91	82 81	753 571	9,5394	4,4979	1,95904	10,9890	285,88	6503,88	91
92	84 64	778 688	9,5917	4,5144	1,96379	10,8696	289,03	6647,61	92
93	86 49	804 357	9,6437	4,5307	1,96848	10,7527	292,17	6792,91	93
94	88 36	830 584	9,6954	4,5468	1,97313	10,6383	295,31	6939,98	94
95	90 25	857 375	9,7468	4,5629	1,97772	10,5263	298,45	7088,22	95
96	92 16	884 736	9,7980	4,5789	1,98227	10,4167	301,59	7238,23	96
97	94 09	912 673	9,8489	4,5947	1,98677	10,3093	304,73	7389,81	97
98	96 04	941 192	9,8995	4,6104	1,99123	10,2041	307,88	7542,96	98
99	98 01	970 299	9,9499	4,6261	1,99564	10,1010	311,02	7697,69	99
100	1 00 00	1 000 000	10,0000	4,6416	2,00000	10,0000	314,16	7853,98	100

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
100	10000	1000000	10,0000	4,6416	2,00000	10,0000	314,16	7853,98	100
101	10201	1030301	10,0499	4,6570	2,00432	9,90099	317,30	8011,85	101
102	10404	1061208	10,0995	4,6723	2,00860	9,80392	320,44	8171,28	102
103	10609	1092727	10,1489	4,6875	2,01284	9,70874	323,58	8332,29	103
104	10816	1124864	10,1980	4,7027	2,01703	9,61538	326,73	8494,87	104
105	11025	1157625	10,2470	4,7177	2,02119	9,52381	329,87	8659,01	105
106	11236	1191016	10,2956	4,7326	2,02531	9,43396	333,01	8824,73	106
107	11449	1225043	10,3441	4,7475	2,02938	9,34579	336,15	8992,02	107
108	11664	1259712	10,3923	4,7622	2,03342	9,25926	339,29	9160,88	108
109	11881	1295029	10,4403	4,7769	2,03743	9,17431	342,43	9331,32	109
110	12100	1331000	10,4881	4,7914	2,04139	9,09091	345,58	9503,32	110
111	12321	1367631	10,5357	4,8059	2,04532	9,00901	348,72	9676,89	111
112	12544	1404928	10,5830	4,8203	2,04922	8,92857	351,86	9852,03	112
113	12769	1442897	10,6301	4,8346	2,05308	8,84956	355,00	10028,7	113
114	12996	1481544	10,6771	4,8488	2,05690	8,77193	358,14	10207,0	114
115	13225	1520875	10,7238	4,8629	2,06070	8,69565	361,28	10386,9	115
116	13456	1560896	10,7703	4,8770	2,06446	8,62069	364,42	10568,3	116
117	13689	1601613	10,8167	4,8910	2,06819	8,54701	367,57	10751,3	117
118	13924	1643032	10,8628	4,9049	2,07188	8,47458	370,71	10935,9	118
119	14161	1685159	10,9087	4,9187	2,07555	8,40336	373,85	11122,0	119
120	14400	1728000	10,9545	4,9324	2,07918	8,33333	376,99	11309,7	120
121	14641	1771561	11,0000	4,9461	2,08279	8,26446	380,13	11499,0	121
122	14884	1815848	11,0454	4,9597	2,08636	8,19672	383,27	11689,9	122
123	15129	1860867	11,0905	4,9732	2,08991	8,13008	386,42	11882,3	123
124	15376	1906624	11,1355	4,9866	2,09342	8,06452	389,56	12076,3	124
125	15625	1953125	11,1803	5,0000	2,09691	8,00000	392,70	12271,8	125
126	15876	2000376	11,2250	5,0133	2,10037	7,93651	395,84	12469,0	126
127	16129	2048383	11,2694	5,0265	2,10380	7,87402	398,98	12667,7	127
128	16384	2097152	11,3137	5,0397	2,10721	7,81250	402,12	12868,0	128
129	16641	2146689	11,3578	5,0528	2,11059	7,75194	405,27	13069,8	129
130	16900	2197000	11,4018	5,0658	2,11394	7,69231	408,41	13273,2	130
131	17161	2248091	11,4455	5,0788	2,11727	7,63359	411,55	13478,2	131
132	17424	2299968	11,4891	5,0916	2,12057	7,57576	414,69	13684,8	132
133	17689	2352637	11,5326	5,1045	2,12385	7,51880	417,83	13892,9	133
134	17956	2406104	11,5758	5,1172	2,12710	7,46269	420,97	14102,6	134
135	18225	2460375	11,6190	5,1299	2,13033	7,40741	424,12	14313,9	135
136	18496	2515456	11,6619	5,1426	2,13354	7,35294	427,26	14526,7	136
137	18769	2571353	11,7047	5,1551	2,13672	7,29927	430,40	14741,1	137
138	19044	2628072	11,7473	5,1676	2,13988	7,24638	433,54	14957,1	138
139	19321	2685619	11,7898	5,1801	2,14301	7,19424	436,68	15174,7	139
140	19600	2744000	11,8322	5,1925	2,14613	7,14280	439,82	15393,8	140
141	19881	2803221	11,8743	5,2048	2,14922	7,09220	442,96	15614,5	141
142	20164	2863288	11,9164	5,2171	2,15229	7,04225	446,11	15836,8	142
143	20449	2924207	11,9583	5,2293	2,15534	6,99301	449,25	16060,6	143
144	20736	2985984	12,0000	5,2415	2,15836	6,94444	452,39	16286,0	144
145	21025	3048625	12,0416	5,2536	2,16137	6,89655	455,53	16513,0	145
146	21316	3112136	12,0830	5,2656	2,16435	6,84932	458,67	16741,5	146
147	21609	3176523	12,1244	5,2776	2,16732	6,80272	461,81	16971,7	147
148	21904	3241792	12,1655	5,2896	2,17026	6,75676	464,96	17203,4	148
149	22201	3307949	12,2066	5,3015	2,17319	6,71141	468,10	17436,6	149
150	22500	3375000	12,2474	5,3133	2,17609	6,66667	471,24	17671,5	150

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
150	22500	3375000	12,2474	5,3133	2,17609	6,66667	471,24	17671,5	150
151	22801	3442951	12,2882	5,3251	2,17898	6,62252	474,38	17907,9	151
152	23104	3511808	12,3288	5,3368	2,18184	6,57895	477,52	18145,8	152
153	23409	3581577	12,3693	5,3485	2,18469	6,53595	480,66	18385,4	153
154	23716	3652264	12,4097	5,3601	2,18752	6,49351	483,81	18626,5	154
155	24025	3723875	12,4499	5,3717	2,19033	6,45161	486,95	18869,2	155
156	24336	3796416	12,4900	5,3832	2,19312	6,41026	490,09	19113,4	156
157	24649	3869893	12,5300	5,3947	2,19590	6,36943	493,23	19359,3	157
158	24964	3944312	12,5698	5,4061	2,19866	6,32911	496,37	19606,7	158
159	25281	4019679	12,6095	5,4175	2,20140	6,28931	499,51	19855,7	159
160	25600	4096000	12,6491	5,4288	2,20412	6,25000	502,65	20106,2	160
161	25921	4173281	12,6886	5,4401	2,20683	6,21118	505,80	20358,3	161
162	26244	4251528	12,7279	5,4514	2,20952	6,17284	508,94	20612,0	162
163	26569	4330747	12,7671	5,4626	2,21219	6,13497	512,08	20867,2	163
164	26896	4410944	12,8062	5,4737	2,21484	6,09756	515,22	21124,1	164
165	27225	4492125	12,8452	5,4848	2,21748	6,06061	518,36	21382,5	165
166	27556	4574296	12,8841	5,4959	2,22011	6,02410	521,50	21642,4	166
167	27889	4657463	12,9228	5,5069	2,22272	5,98802	524,65	21904,0	167
168	28224	4741632	12,9615	5,5178	2,22531	5,95238	527,79	22167,1	168
169	28561	4826809	13,0000	5,5288	2,22789	5,91716	530,93	22431,8	169
170	28900	4913000	13,0384	5,5397	2,23045	5,88235	534,07	22698,0	170
171	29241	5000211	13,0767	5,5505	2,23300	5,84795	537,21	22965,8	171
172	29584	5088448	13,1149	5,5613	2,23553	5,81395	540,35	23235,2	172
173	29929	5177717	13,1529	5,5721	2,23805	5,78035	543,50	23506,2	173
174	30276	5268024	13,1909	5,5828	2,24055	5,74713	546,64	23778,7	174
175	30625	5359375	13,2288	5,5934	2,24304	5,71429	549,78	24052,8	175
176	30976	5451776	13,2665	5,6041	2,24551	5,68182	552,92	24328,5	176
177	31329	5545233	13,3041	5,6147	2,24797	5,64972	556,06	24605,7	177
178	31684	5639752	13,3417	5,6252	2,25042	5,61798	559,20	24884,6	178
179	32041	5735339	13,3791	5,6357	2,25285	5,58659	562,35	25164,9	179
180	32400	5832000	13,4164	5,6462	2,25527	5,55556	565,49	25446,9	180
181	32761	5929741	13,4536	5,6567	2,25768	5,52486	568,63	25730,4	181
182	33124	6028568	13,4907	5,6671	2,26007	5,49451	571,77	26015,5	182
183	33489	6128487	13,5277	5,6774	2,26245	5,46448	574,91	26302,2	183
184	33856	6229504	13,5647	5,6877	2,26482	5,43478	578,05	26590,4	184
185	34225	6331625	13,6015	5,6980	2,26717	5,40541	581,19	26880,3	185
186	34596	6434856	13,6382	5,7083	2,26951	5,37634	584,34	27171,6	186
187	34969	6539203	13,6748	5,7185	2,27184	5,34759	587,48	27464,6	187
188	35344	6644672	13,7113	5,7287	2,27416	5,31915	590,62	27759,1	188
189	35721	6751269	13,7477	5,7388	2,27646	5,29101	593,76	28055,2	189
190	36100	6859000	13,7840	5,7489	2,27875	5,26316	596,90	28352,9	190
191	36481	6967871	13,8203	5,7590	2,28103	5,23560	600,04	28652,1	191
192	36864	7077888	13,8564	5,7690	2,28330	5,20833	603,19	28952,9	192
193	37249	7189057	13,8924	5,7790	2,28556	5,18135	606,33	29255,3	193
194	37636	7301384	13,9284	5,7890	2,28780	5,15464	609,47	29559,2	194
195	38025	7414875	13,9642	5,7989	2,29003	5,12821	612,61	29864,8	195
196	38416	7529536	14,0000	5,8088	2,29226	5,10204	615,75	30171,9	196
197	38809	7645373	14,0357	5,8186	2,29447	5,07614	618,89	30480,5	197
198	39204	7762392	14,0712	5,8285	2,29667	5,05051	622,04	30790,7	198
199	39601	7880599	14,1067	5,8383	2,29885	5,02513	625,18	31102,6	199
200	40000	8000000	14,1421	5,8480	2,30103	5,00000	628,32	31415,9	200

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
200	40000	8000000	14,1421	5,8480	2,30103	5,00000	628,32	31415,9	200
201	40401	8120601	14,1774	5,8578	2,30320	4,97512	631,46	31730,9	201
202	40804	8242408	14,2127	5,8675	2,30535	4,95050	634,60	32047,4	202
203	41209	8365427	14,2478	5,8771	2,30750	4,92611	637,74	32365,5	203
204	41616	8489664	14,2829	5,8868	2,30963	4,90196	640,88	32685,1	204
205	42025	8615125	14,3178	5,8964	2,31175	4,87805	644,03	33006,4	205
206	42436	8741816	14,3527	5,9059	2,31387	4,85437	647,17	33329,2	206
207	42849	8869743	14,3875	5,9155	2,31597	4,83092	650,31	33653,5	207
208	43264	8998912	14,4222	5,9250	2,31806	4,80769	653,45	33979,5	208
209	43681	9129329	14,4568	5,9345	2,32015	4,78469	656,59	34307,0	209
210	44100	9261000	14,4914	5,9439	2,32222	4,76190	659,73	34636,1	210
211	44521	9393931	14,5258	5,9533	2,32428	4,73934	662,88	34966,7	211
212	44944	9528128	14,5602	5,9627	2,32634	4,71698	666,02	35298,9	212
213	45369	9663597	14,5945	5,9721	2,32838	4,69484	669,16	35632,7	213
214	45796	9800344	14,6287	5,9814	2,33041	4,67290	672,30	35968,1	214
215	46225	9938375	14,6629	5,9907	2,33244	4,65116	675,44	36305,0	215
216	46656	10077696	14,6969	6,0000	2,33445	4,62963	678,58	36643,5	216
217	47089	10218313	14,7309	6,0092	2,33646	4,60829	681,73	36983,6	217
218	47524	10360232	14,7648	6,0185	2,33846	4,58716	684,87	37325,3	218
219	47961	10503459	14,7986	6,0277	2,34044	4,56621	688,01	37668,5	219
220	48400	10648000	14,8324	6,0368	2,34242	4,54545	691,15	38013,3	220
221	48841	10793861	14,8661	6,0459	2,34439	4,52489	694,29	38359,6	221
222	49284	10941048	14,8997	6,0550	2,34635	4,50450	697,43	38707,6	222
223	49729	11089567	14,9332	6,0641	2,34830	4,48430	700,58	39057,1	223
224	50176	11239424	14,9666	6,0732	2,35025	4,46429	703,72	39408,1	224
225	50625	11390625	15,0000	6,0822	2,35218	4,44444	706,86	39760,8	225
226	51076	11543176	15,0333	6,0912	2,35411	4,42478	710,00	40115,0	226
227	51529	11697083	15,0665	6,1002	2,35603	4,40529	713,14	40470,8	227
228	51984	11852352	15,0997	6,1091	2,35793	4,38596	716,28	40828,1	228
229	52441	12008989	15,1327	6,1180	2,35984	4,36681	719,42	41187,1	229
230	52900	12167000	15,1658	6,1269	2,36173	4,34783	722,57	41547,6	230
231	53361	12326391	15,1987	6,1358	2,36361	4,32900	725,71	41909,6	231
232	53824	12487168	15,2315	6,1446	2,36549	4,31034	728,85	42273,3	232
233	54289	12649337	15,2643	6,1534	2,36736	4,29185	731,99	42638,5	233
234	54756	12812904	15,2971	6,1622	2,36922	4,27350	735,13	43005,3	234
235	55225	12977875	15,3297	6,1710	2,37107	4,25532	738,27	43373,6	235
236	55696	13144256	15,3623	6,1797	2,37291	4,23729	741,42	43743,5	236
237	56169	13312053	15,3948	6,1885	2,37475	4,21941	744,56	44115,0	237
238	56644	13481272	15,4272	6,1972	2,37658	4,20168	747,70	44488,1	238
239	57121	13651919	15,4596	6,2058	2,37840	4,18410	750,84	44862,7	239
240	57600	13824000	15,4919	6,2145	2,38021	4,16667	753,98	45238,9	240
241	58081	13997521	15,5242	6,2231	2,38202	4,14938	757,12	45616,7	241
242	58564	14172488	15,5563	6,2317	2,38382	4,13223	760,27	45996,1	242
243	59049	14348907	15,5885	6,2403	2,38561	4,11523	763,41	46377,0	243
244	59536	14526784	15,6205	6,2488	2,38739	4,09836	766,55	46759,5	244
245	60025	14706125	15,6525	6,2573	2,38917	4,08163	769,69	47143,5	245
246	60516	14886936	15,6844	6,2658	2,39094	4,06504	772,83	47529,2	246
247	61009	15069223	15,7162	6,2743	2,39270	4,04858	775,97	47916,4	247
248	61504	15252992	15,7480	6,2828	2,39445	4,03226	779,11	48305,1	248
249	62001	15438249	15,7797	6,2912	2,39620	4,01606	782,26	48695,5	249
250	62500	15625000	15,8114	6,2996	2,39794	4,00000	785,40	49087,4	250

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
250	62500	15625000	15,8114	6,2996	2,39794	4,00000	785,40	49087,4	250
251	63001	15813251	15,8430	6,3080	2,39967	3,98406	788,54	49480,9	251
252	63504	16003008	15,8745	6,3164	2,40140	3,96825	791,68	49875,9	252
253	64009	16194277	15,9060	6,3247	2,40312	3,95257	794,82	50272,6	253
254	64516	16387064	15,9374	6,3330	2,40483	3,93701	797,96	50670,7	254
255	65025	16581375	15,9687	6,3413	2,40654	3,92157	801,11	51070,5	255
256	65536	16777216	16,0000	6,3496	2,40824	3,90625	804,25	51471,9	256
257	66049	16974593	16,0312	6,3579	2,40993	3,89105	807,39	51874,8	257
258	66564	17173512	16,0624	6,3661	2,41162	3,87597	810,53	52279,2	258
259	67081	17373979	16,0935	6,3743	2,41330	3,86100	813,67	52685,3	259
260	67600	17576000	16,1245	6,3825	2,41497	3,84615	816,81	53092,9	260
261	68121	17779581	16,1555	6,3907	2,41664	3,83142	819,96	53502,1	261
262	68644	17984728	16,1864	6,3988	2,41830	3,81679	823,10	53912,9	262
263	69169	18191447	16,2173	6,4070	2,41996	3,80228	826,24	54325,2	263
264	69696	18399744	16,2481	6,4151	2,42160	3,78788	829,38	54739,1	264
265	70225	18609625	16,2788	6,4232	2,42325	3,77358	832,52	55154,6	265
266	70756	18821096	16,3095	6,4312	2,42488	3,75940	835,66	55571,6	266
267	71289	19034163	16,3401	6,4393	2,42651	3,74532	838,81	55990,2	267
268	71824	19248832	16,3707	6,4473	2,42813	3,73134	841,95	56410,4	268
269	72361	19465109	16,4012	6,4553	2,42975	3,71747	845,09	56832,2	269
270	72900	19683000	16,4317	6,4633	2,43136	3,70370	848,23	57255,5	270
271	73441	19902511	16,4621	6,4713	2,43297	3,69004	851,37	57680,4	271
272	73984	20123648	16,4924	6,4792	2,43457	3,67647	854,51	58106,9	272
273	74529	20346417	16,5227	6,4872	2,43616	3,66300	857,65	58534,9	273
274	75076	20570824	16,5529	6,4951	2,43775	3,64964	860,80	58964,6	274
275	75625	20796875	16,5831	6,5030	2,43933	3,63636	863,94	59395,7	275
276	76176	21024576	16,6132	6,5108	2,44091	3,62319	867,08	59828,5	276
277	76729	21253933	16,6433	6,5187	2,44248	3,61011	870,22	60262,8	277
278	77284	21484952	16,6733	6,5265	2,44404	3,59712	873,36	60698,7	278
279	77841	21717639	16,7033	6,5343	2,44560	3,58423	876,50	61136,2	279
280	78400	21952000	16,7332	6,5421	2,44716	3,57143	879,65	61575,2	280
281	78961	22188041	16,7631	6,5499	2,44871	3,55872	882,79	62015,8	281
282	79524	22425768	16,7929	6,5577	2,45025	3,54610	885,93	62458,0	282
283	80089	22665187	16,8226	6,5654	2,45179	3,53357	889,07	62901,8	283
284	80656	22906304	16,8523	6,5731	2,45332	3,52113	892,21	63347,1	284
285	81225	23149125	16,8819	6,5808	2,45484	3,50877	895,35	63794,0	285
286	81796	23393656	16,9115	6,5885	2,45637	3,49650	898,50	64242,4	286
287	82369	23639903	16,9411	6,5962	2,45788	3,48432	901,64	64692,5	287
288	82944	23887872	16,9706	6,6039	2,45939	3,47222	904,78	65144,1	288
289	83521	24137569	17,0000	6,6115	2,46090	3,46021	907,92	65597,2	289
290	84100	24389000	17,0294	6,6191	2,46240	3,44828	911,06	66052,0	290
291	84681	24642171	17,0587	6,6267	2,46389	3,43643	914,20	66508,3	291
292	85264	24897088	17,0880	6,6343	2,46538	3,42466	917,35	66966,2	292
293	85849	25153757	17,1172	6,6419	2,46687	3,41297	920,49	67425,6	293
294	86436	25412184	17,1464	6,6494	2,46835	3,40136	923,63	67886,7	294
295	87025	25672375	17,1756	6,6569	2,46982	3,38983	926,77	68349,3	295
296	87616	25934336	17,2047	6,6644	2,47129	3,37838	929,91	68813,4	296
297	88209	26198073	17,2337	6,6719	2,47276	3,36700	933,05	69279,2	297
298	88804	26463592	17,2627	6,6794	2,47422	3,35570	936,19	69746,5	298
299	89401	26730899	17,2916	6,6869	2,47567	3,34448	939,34	70215,4	299
300	90000	27000000	17,3205	6,6943	2,47712	3,33333	942,48	70685,8	300

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
300	90000	27000000	17,3205	6,6943	2,47712	3,33333	942,48	70685,8	300
301	90601	27270901	17,3494	6,7018	2,47857	3,32226	945,62	71157,9	301
302	91204	27543608	17,3781	6,7092	2,48001	3,31126	948,76	71631,5	302
303	91809	27818127	17,4069	6,7166	2,48144	3,30033	951,90	72106,6	303
304	92416	28094464	17,4356	6,7240	2,48287	3,28947	955,04	72583,4	304
305	93025	28372625	17,4642	6,7313	2,48430	3,27869	958,19	73061,7	305
306	93636	28652616	17,4929	6,7387	2,48572	3,26797	961,33	73541,5	306
307	94249	28934443	17,5214	6,7460	2,48714	3,25733	964,47	74023,0	307
308	94864	29218112	17,5499	6,7533	2,48855	3,24675	967,61	74506,0	308
309	95481	29503629	17,5784	6,7606	2,48996	3,23625	970,75	74990,6	309
310	96100	29791000	17,6068	6,7679	2,49136	3,22581	973,89	75476,8	310
311	96721	30080231	17,6352	6,7752	2,49276	3,21543	977,04	75964,5	311
312	97344	30371328	17,6635	6,7824	2,49415	3,20513	980,18	76453,8	312
313	97969	30664297	17,6918	6,7897	2,49554	3,19489	983,32	76944,7	313
314	98596	30959144	17,7200	6,7969	2,49693	3,18471	986,46	77437,1	314
315	99225	31255875	17,7482	6,8041	2,49831	3,17460	989,60	77931,1	315
316	99856	31554496	17,7764	6,8113	2,49969	3,16456	992,74	78426,7	316
317	100489	31855013	17,8045	6,8185	2,50106	3,15457	995,88	78923,9	317
318	101124	32157432	17,8326	6,8256	2,50243	3,14465	999,03	79422,6	318
319	101761	32461759	17,8606	6,8328	2,50379	3,13480	1002,2	79922,9	319
320	102400	32768000	17,8885	6,8399	2,50515	3,12500	1005,3	80424,8	320
321	103041	33076161	17,9165	6,8470	2,50651	3,11526	1008,5	80928,2	321
322	103684	33386248	17,9444	6,8541	2,50786	3,10559	1011,6	81433,2	322
323	104329	33698267	17,9722	6,8612	2,50920	3,09598	1014,7	81939,8	323
324	104976	34012224	18,0000	6,8683	2,51055	3,08642	1017,9	82448,0	324
325	105625	34328125	18,0278	6,8753	2,51188	3,07692	1021,0	82957,7	325
326	106276	34645976	18,0555	6,8824	2,51322	3,06748	1024,2	83469,0	326
327	106929	34965783	18,0831	6,8894	2,51455	3,05810	1027,3	83981,8	327
328	107584	35287552	18,1108	6,8964	2,51587	3,04878	1030,4	84496,3	328
329	108241	35611289	18,1384	6,9034	2,51720	3,03951	1033,6	85012,3	329
330	108900	35937000	18,1659	6,9104	2,51851	3,03030	1036,7	85529,9	330
331	109561	36264691	18,1934	6,9174	2,51983	3,02115	1039,9	86049,0	331
332	110224	36594368	18,2209	6,9244	2,52114	3,01205	1043,0	86569,7	332
333	110889	36926037	18,2483	6,9313	2,52244	3,00300	1046,2	87092,0	333
334	111556	37259704	18,2757	6,9382	2,52375	2,99401	1049,3	87615,9	334
335	112225	37595375	18,3030	6,9451	2,52504	2,98507	1052,4	88141,3	335
336	112896	37933056	18,3303	6,9521	2,52634	2,97619	1055,6	88668,3	336
337	113569	38272753	18,3576	6,9589	2,52763	2,96736	1058,7	89196,9	337
338	114244	38614472	18,3848	6,9658	2,52892	2,95858	1061,9	89727,0	338
339	114921	38958219	18,4120	6,9727	2,53020	2,94985	1065,0	90258,7	339
340	115600	39304000	18,4391	6,9795	2,53148	2,94118	1068,1	90792,0	340
341	116281	39651821	18,4662	6,9864	2,53275	2,93255	1071,3	91326,9	341
342	116964	40001688	18,4932	6,9932	2,53403	2,92398	1074,4	91863,3	342
343	117649	40353607	18,5203	7,0000	2,53529	2,91545	1077,6	92401,3	343
344	118336	40707584	18,5472	7,0068	2,53656	2,90698	1080,7	92940,9	344
345	119025	41063625	18,5742	7,0136	2,53782	2,89855	1083,8	93482,0	345
346	119716	41421736	18,6011	7,0203	2,53908	2,89017	1087,0	94024,7	346
347	120409	41781923	18,6279	7,0271	2,54033	2,88184	1090,1	94569,0	347
348	121104	42144192	18,6548	7,0338	2,54158	2,87356	1093,3	95114,9	348
349	121801	42508549	18,6815	7,0406	2,54283	2,86533	1096,4	95662,3	349
350	122500	42875000	18,7083	7,0473	2,54407	2,85714	1099,6	96211,3	350

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
350	122500	42875000	18,7083	7,0473	2,54407	2,85714	1099,6	96211,3	350
351	123201	43243551	18,7350	7,0540	2,54531	2,84900	1102,7	96761,8	351
352	123904	43614208	18,7617	7,0607	2,54654	2,84091	1105,8	97314,0	352
353	124609	43986977	18,7883	7,0674	2,54777	2,83286	1109,0	97867,7	353
354	125316	44361864	18,8149	7,0740	2,54900	2,82486	1112,1	98423,0	354
355	126025	44738875	18,8414	7,0807	2,55023	2,81690	1115,3	98979,8	355
356	126736	45118016	18,8680	7,0873	2,55145	2,80899	1118,4	99538,2	356
357	127449	45499293	18,8944	7,0940	2,55267	2,80112	1121,5	100098	357
358	128164	45882712	18,9209	7,1006	2,55388	2,79330	1124,7	100660	358
359	128881	46268279	18,9473	7,1072	2,55509	2,78552	1127,8	101223	359
360	129600	46656000	18,9737	7,1138	2,55630	2,77778	1131,0	101788	360
361	130321	47045881	19,0000	7,1204	2,55751	2,77008	1134,1	102354	361
362	131044	47437928	19,0263	7,1269	2,55871	2,76243	1137,3	102922	362
363	131769	47832147	19,0526	7,1335	2,55991	2,75482	1140,4	103491	363
364	132496	48228544	19,0788	7,1400	2,56110	2,74725	1143,5	104062	364
365	133225	48627125	19,1050	7,1466	2,56229	2,73973	1146,7	104635	365
366	133956	49027896	19,1311	7,1531	2,56348	2,73224	1149,8	105209	366
367	134689	49430863	19,1572	7,1596	2,56467	2,72480	1153,0	105785	367
368	135424	49836032	19,1833	7,1661	2,56585	2,71739	1156,1	106362	368
369	136161	50243409	19,2094	7,1726	2,56703	2,71003	1159,2	106941	369
370	136900	50653000	19,2354	7,1791	2,56820	2,70270	1162,4	107521	370
371	137641	51064811	19,2614	7,1855	2,56937	2,69542	1165,5	108103	371
372	138384	51478848	19,2873	7,1920	2,57054	2,68817	1168,7	108687	372
373	139129	51895117	19,3132	7,1984	2,57171	2,68097	1171,8	109272	373
374	139876	52313624	19,3391	7,2048	2,57287	2,67380	1175,0	109858	374
375	140625	52734375	19,3649	7,2112	2,57403	2,66667	1178,1	110447	375
376	141376	53157376	19,3907	7,2177	2,57519	2,65957	1181,2	111036	376
377	142129	53582633	19,4165	7,2240	2,57634	2,65252	1184,4	111628	377
378	142884	54010152	19,4422	7,2304	2,57749	2,64550	1187,5	112218	378
379	143641	54439939	19,4679	7,2368	2,57864	2,63852	1190,7	112815	379
380	144400	54872000	19,4936	7,2432	2,57978	2,63158	1193,8	113411	380
381	145161	55306341	19,5192	7,2495	2,58092	2,62467	1196,9	114009	381
382	145924	55742968	19,5448	7,2558	2,58206	2,61780	1200,1	114608	382
383	146689	56181887	19,5704	7,2622	2,58320	2,61097	1203,2	115208	383
384	147456	56623104	19,5959	7,2685	2,58433	2,60417	1206,4	115812	384
385	148225	57066625	19,6214	7,2748	2,58546	2,59740	1209,5	116416	385
386	148996	57512456	19,6469	7,2811	2,58659	2,59067	1212,7	117021	386
387	149769	57960603	19,6723	7,2874	2,58771	2,58398	1215,8	117628	387
388	150544	58411072	19,6977	7,2936	2,58883	2,57732	1218,9	118237	388
389	151321	58863869	19,7231	7,2999	2,58995	2,57069	1222,1	118847	389
390	152100	59319000	19,7484	7,3061	2,59106	2,56410	1225,2	119459	390
391	152881	59776471	19,7737	7,3124	2,59218	2,55754	1228,4	120072	391
392	153664	60236288	19,7990	7,3186	2,59329	2,55102	1231,5	120687	392
393	154449	60698457	19,8242	7,3248	2,59439	2,54453	1234,6	121304	393
394	155236	61162984	19,8494	7,3310	2,59550	2,53807	1237,8	121922	394
395	156025	61629875	19,8746	7,3372	2,59660	2,53165	1240,9	122542	395
396	156816	62099136	19,8997	7,3434	2,59770	2,52525	1244,1	123163	396
397	157609	62570773	19,9249	7,3496	2,59879	2,51889	1247,2	123786	397
398	158404	63044792	19,9499	7,3558	2,59988	2,51256	1250,4	124410	398
399	159201	63521199	19,9750	7,3619	2,60097	2,50627	1253,5	125036	399
400	160000	64000000	20,0000	7,3681	2,60206	2,50000	1256,6	125664	400

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^3}{4}$	n
400	160000	64000000	20,0000	7,3681	2,60206	2,50000	1256,6	125664	400
401	160801	64481201	20,0250	7,3742	2,60314	2,49377	1259,8	126293	401
402	161604	64964808	20,0499	7,3803	2,60423	2,48756	1262,9	126923	402
403	162409	65450827	20,0749	7,3864	2,60531	2,48139	1266,1	127556	403
404	163216	65939264	20,0998	7,3925	2,60638	2,47525	1269,2	128190	404
405	164025	66430125	20,1246	7,3986	2,60746	2,46914	1272,3	128825	405
406	164836	66923416	20,1494	7,4047	2,60853	2,46305	1275,5	129462	406
407	165649	67419143	20,1742	7,4108	2,60959	2,45700	1278,6	130100	407
408	166464	67917312	20,1990	7,4169	2,61066	2,45098	1281,8	130741	408
409	167281	68417929	20,2237	7,4229	2,61172	2,44499	1284,9	131382	409
410	168100	68921000	20,2485	7,4290	2,61278	2,43902	1288,1	132025	410
411	168921	69426531	20,2731	7,4350	2,61384	2,43309	1291,2	132670	411
412	169744	69934528	20,2978	7,4410	2,61490	2,42718	1294,3	133317	412
413	170569	70444997	20,3224	7,4470	2,61595	2,42131	1297,5	133965	413
414	171396	70957944	20,3470	7,4530	2,61700	2,41546	1300,6	134614	414
415	172225	71473375	20,3715	7,4590	2,61805	2,40964	1303,8	135265	415
416	173056	71991296	20,3961	7,4650	2,61909	2,40385	1306,9	135918	416
417	173889	72511713	20,4206	7,4710	2,62014	2,39808	1310,0	136572	417
418	174724	73034632	20,4450	7,4770	2,62118	2,39234	1313,2	137228	418
419	175561	73560059	20,4695	7,4829	2,62221	2,38663	1316,3	137885	419
420	176400	74088000	20,4939	7,4889	2,62325	2,38095	1319,5	138544	420
421	177241	74618461	20,5183	7,4948	2,62428	2,37530	1322,6	139205	421
422	178084	75151448	20,5426	7,5007	2,62531	2,36967	1325,8	139867	422
423	178929	75686967	20,5670	7,5067	2,62634	2,36407	1328,9	140531	423
424	179776	76225024	20,5913	7,5126	2,62737	2,35849	1332,0	141196	424
425	180625	76765625	20,6155	7,5185	2,62839	2,35294	1335,2	141863	425
426	181476	77308776	20,6398	7,5244	2,62941	2,34742	1338,3	142531	426
427	182329	77854483	20,6640	7,5302	2,63043	2,34192	1341,5	143201	427
428	183184	78402732	20,6882	7,5361	2,63144	2,33645	1344,6	143872	428
429	184041	78953589	20,7123	7,5420	2,63246	2,33100	1347,7	144545	429
430	184900	79507000	20,7364	7,5478	2,63347	2,32558	1350,9	145220	430
431	185761	80062991	20,7605	7,5537	2,63448	2,32019	1354,0	145896	431
432	186624	80621568	20,7846	7,5595	2,63548	2,31481	1357,2	146574	432
433	187489	81182737	20,8087	7,5654	2,63649	2,30947	1360,3	147254	433
434	188356	81746504	20,8327	7,5712	2,63749	2,30415	1363,5	147934	434
435	189225	82312875	20,8567	7,5770	2,63849	2,29885	1366,6	148617	435
436	190096	82881856	20,8806	7,5828	2,63949	2,29358	1369,7	149301	436
437	190969	83453453	20,9045	7,5886	2,64048	2,28833	1372,9	149987	437
438	191844	84027672	20,9284	7,5944	2,64147	2,28311	1376,0	150674	438
439	192721	84604519	20,9523	7,6001	2,64246	2,27790	1379,2	151363	439
440	193600	85184000	20,9762	7,6059	2,64345	2,27273	1382,3	152053	440
441	194481	85766121	21,0000	7,6117	2,64444	2,26757	1385,4	152745	441
442	195364	86350888	21,0238	7,6174	2,64542	2,26244	1388,6	153439	442
443	196249	86938307	21,0476	7,6232	2,64640	2,25734	1391,7	154134	443
444	197136	87528384	21,0713	7,6289	2,64738	2,25225	1394,9	154830	444
445	198025	88121125	21,0950	7,6346	2,64836	2,24719	1398,0	155528	445
446	198916	88716536	21,1187	7,6403	2,64933	2,24215	1401,2	156228	446
447	199809	89314623	21,1424	7,6460	2,65031	2,23714	1404,3	156930	447
448	200704	89915392	21,1660	7,6517	2,65128	2,23214	1407,4	157633	448
449	201601	90518849	21,1896	7,6574	2,65225	2,22717	1410,6	158337	449
450	202500	91125000	21,2132	7,6631	2,65321	2,22222	1413,7	159043	450

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
450	202500	91125000	21,2132	7,6631	2,65321	2,22222	1413,7	159043	450
451	203401	91733851	21,2368	7,6688	2,65418	2,21729	1416,9	159751	451
452	204304	92345408	21,2603	7,6744	2,65514	2,21239	1420,0	160460	452
453	205209	92959677	21,2838	7,6801	2,65610	2,20751	1423,1	161171	453
454	206116	93576664	21,3073	7,6857	2,65706	2,20264	1426,3	161883	454
455	207025	94196375	21,3307	7,6914	2,65801	2,19780	1429,4	162597	455
456	207936	94818816	21,3542	7,6970	2,65896	2,19298	1432,6	163313	456
457	208849	95443993	21,3776	7,7026	2,65992	2,18818	1435,7	164030	457
458	209764	96071912	21,4009	7,7082	2,66087	2,18341	1438,8	164748	458
459	210681	96702579	21,4243	7,7138	2,66181	2,17865	1442,0	165468	459
460	211600	97336000	21,4476	7,7194	2,66276	2,17391	1445,1	166190	460
461	212521	97972181	21,4709	7,7250	2,66370	2,16920	1448,3	166914	461
462	213444	98611128	21,4942	7,7306	2,66464	2,16450	1451,4	167639	462
463	214369	99252847	21,5174	7,7362	2,66558	2,15983	1454,6	168365	463
464	215296	99897344	21,5407	7,7418	2,66652	2,15517	1457,7	169093	464
465	216225	100544625	21,5639	7,7473	2,66745	2,15054	1460,8	169823	465
466	217156	101194696	21,5870	7,7529	2,66839	2,14592	1464,0	170554	466
467	218089	101847563	21,6102	7,7584	2,66932	2,14133	1467,1	171287	467
468	219024	102503232	21,6333	7,7639	2,67025	2,13675	1470,3	172021	468
469	219961	103161709	21,6564	7,7695	2,67117	2,13220	1473,4	172757	469
470	220900	103823000	21,6795	7,7750	2,67210	2,12766	1476,5	173494	470
471	221841	104487111	21,7025	7,7805	2,67302	2,12314	1479,7	174234	471
472	222784	105154048	21,7256	7,7860	2,67394	2,11864	1482,8	174974	472
473	223729	105823817	21,7486	7,7915	2,67486	2,11416	1486,0	175716	473
474	224676	106496424	21,7715	7,7970	2,67578	2,10970	1489,1	176460	474
475	225625	107171875	21,7945	7,8025	2,67669	2,10526	1492,3	177205	475
476	226576	107850176	21,8174	7,8079	2,67761	2,10084	1495,4	177952	476
477	227529	108531333	21,8403	7,8134	2,67852	2,09644	1498,5	178701	477
478	228484	109215352	21,8632	7,8188	2,67943	2,09205	1501,7	179451	478
479	229441	109902239	21,8861	7,8243	2,68034	2,08768	1504,8	180203	479
480	230400	110592000	21,9089	7,8297	2,68124	2,08333	1508,0	180956	480
481	231361	111284641	21,9317	7,8352	2,68215	2,07900	1511,1	181711	481
482	232324	111980168	21,9545	7,8406	2,68305	2,07469	1514,2	182467	482
483	233289	112678587	21,9773	7,8460	2,68395	2,07039	1517,4	183225	483
484	234256	113379904	22,0000	7,8514	2,68485	2,06612	1520,5	183984	484
485	235225	114084125	22,0227	7,8568	2,68574	2,06186	1523,7	184745	485
486	236196	114791256	22,0454	7,8622	2,68664	2,05761	1526,8	185508	486
487	237169	115501303	22,0681	7,8676	2,68753	2,05339	1530,0	186272	487
488	238144	116214272	22,0907	7,8730	2,68842	2,04918	1533,1	187038	488
489	239121	116930169	22,1133	7,8784	2,68931	2,04499	1536,2	187805	489
490	240100	117649000	22,1359	7,8837	2,69020	2,04082	1539,4	188574	490
491	241081	118370771	22,1585	7,8891	2,69108	2,03666	1542,5	189345	491
492	242064	119095488	22,1811	7,8944	2,69197	2,03252	1545,7	190117	492
493	243049	119823157	22,2036	7,8998	2,69285	2,02840	1548,8	190890	493
494	244036	120553784	22,2261	7,9051	2,69373	2,02429	1551,9	191665	494
495	245025	121287375	22,2486	7,9105	2,69461	2,02020	1555,1	192442	495
496	246016	122023936	22,2711	7,9158	2,69548	2,01613	1558,2	193221	496
497	247009	122763473	22,2935	7,9211	2,69636	2,01207	1561,4	194000	497
498	248004	123505992	22,3159	7,9264	2,69723	2,00803	1564,5	194782	498
499	249001	124251499	22,3383	7,9317	2,69810	2,00401	1567,7	195565	499
500	250000	125000000	22,3607	7,9370	2,69897	2,00000	1570,8	196350	500

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
500	250000	125000000	22,3607	7,9370	2,69897	2,00000	1570,8	196350	500
501	251001	125751501	22,3830	7,9423	2,69984	1,99601	1573,9	197136	501
502	252004	126506008	22,4054	7,9476	2,70070	1,99203	1577,1	197923	502
503	253009	127263527	22,4277	7,9528	2,70157	1,98807	1580,2	198713	503
504	254016	128024064	22,4499	7,9581	2,70243	1,98413	1583,4	199504	504
505	255025	128787625	22,4722	7,9634	2,70329	1,98020	1586,5	200296	505
506	256036	129554216	22,4944	7,9686	2,70415	1,97628	1589,6	201090	506
507	257049	130323843	22,5167	7,9739	2,70501	1,97239	1592,8	201886	507
508	258064	131096512	22,5389	7,9791	2,70586	1,96850	1595,9	202683	508
509	259081	131872229	22,5610	7,9843	2,70672	1,96464	1599,1	203482	509
510	260100	132651000	22,5832	7,9896	2,70757	1,96078	1602,2	204282	510
511	261121	133432831	22,6053	7,9948	2,70842	1,95695	1605,4	205084	511
512	262144	134217728	22,6274	8,0000	2,70927	1,95312	1608,5	205887	512
513	263169	135005697	22,6495	8,0052	2,71012	1,94932	1611,6	206692	513
514	264196	135796744	22,6716	8,0104	2,71096	1,94553	1614,8	207499	514
515	265225	136590875	22,6936	8,0156	2,71181	1,94175	1617,9	208307	515
516	266256	137388096	22,7156	8,0208	2,71265	1,93798	1621,1	209117	516
517	267289	138188413	22,7376	8,0260	2,71349	1,93424	1624,2	209928	517
518	268324	138991832	22,7596	8,0311	2,71433	1,93050	1627,3	210741	518
519	269361	139798359	22,7816	8,0363	2,71517	1,92678	1630,5	211556	519
520	270400	140608000	22,8035	8,0415	2,71600	1,92308	1633,6	212372	520
521	271441	141420761	22,8254	8,0466	2,71684	1,91939	1636,8	213189	521
522	272484	142236648	22,8473	8,0517	2,71767	1,91571	1639,9	214008	522
523	273529	143055667	22,8692	8,0569	2,71850	1,91205	1643,1	214829	523
524	274576	143877824	22,8910	8,0620	2,71933	1,90840	1646,2	215651	524
525	275625	144703125	22,9129	8,0671	2,72016	1,90476	1649,3	216475	525
526	276676	145531576	22,9347	8,0723	2,72099	1,90114	1652,5	217301	526
527	277729	146363183	22,9565	8,0774	2,72181	1,89753	1655,6	218128	527
528	278784	147197952	22,9783	8,0825	2,72263	1,89394	1658,8	218956	528
529	279841	148035889	23,0000	8,0876	2,72346	1,89036	1661,9	219787	529
530	280900	148877000	23,0217	8,0927	2,72428	1,88679	1665,0	220618	530
531	281961	149721291	23,0434	8,0978	2,72509	1,88324	1668,2	221452	531
532	283024	150568768	23,0651	8,1028	2,72591	1,87970	1671,3	222287	532
533	284089	151419437	23,0868	8,1079	2,72673	1,87617	1674,5	223123	533
534	285156	152273304	23,1084	8,1130	2,72754	1,87266	1677,6	223961	534
535	286225	153130375	23,1301	8,1180	2,72835	1,86916	1680,8	224801	535
536	287296	153990656	23,1517	8,1231	2,72916	1,86567	1683,9	225642	536
537	288369	154854153	23,1733	8,1281	2,72997	1,86220	1687,0	226484	537
538	289444	155720872	23,1948	8,1332	2,73078	1,85874	1690,2	227329	538
539	290521	156590819	23,2164	8,1382	2,73159	1,85529	1693,3	228175	539
540	291600	157464000	23,2379	8,1433	2,73239	1,85185	1696,5	229022	540
541	292681	158340421	23,2594	8,1483	2,73320	1,84843	1699,6	229871	541
542	293764	159220088	23,2809	8,1533	2,73400	1,84502	1702,7	230722	542
543	294849	160103007	23,3024	8,1583	2,73480	1,84162	1705,9	231574	543
544	295936	160989184	23,3238	8,1633	2,73560	1,83824	1709,0	232428	544
545	297025	161878625	23,3452	8,1683	2,73640	1,83486	1712,2	233283	545
546	298116	162771336	23,3666	8,1733	2,73719	1,83150	1715,3	234140	546
547	299209	163667323	23,3880	8,1783	2,73799	1,82815	1718,5	234998	547
548	300304	164566592	23,4094	8,1833	2,73878	1,82482	1721,6	235858	548
549	301401	165469149	23,4307	8,1882	2,73957	1,82149	1724,7	236720	549
550	302500	166375000	23,4521	8,1932	2,74036	1,81818	1727,9	237583	550

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
550	302500	166375000	23,4521	8,1932	2,74036	1,81818	1727,9	237583	550
551	303601	167284151	23,4734	8,1982	2,74115	1,81488	1731,0	238448	551
552	304704	168196608	23,4947	8,2031	2,74194	1,81159	1734,2	239314	552
553	305809	169112377	23,5160	8,2081	2,74273	1,80832	1737,3	240182	553
554	306916	170031464	23,5372	8,2130	2,74351	1,80505	1740,4	241051	554
555	308025	170953875	23,5584	8,2180	2,74429	1,80180	1743,6	241922	555
556	309136	171879616	23,5797	8,2229	2,74507	1,79856	1746,7	242795	556
557	310249	172808693	23,6008	8,2278	2,74586	1,79533	1749,9	243669	557
558	311364	173741112	23,6220	8,2327	2,74663	1,79211	1753,0	244545	558
559	312481	174676879	23,6432	8,2377	2,74741	1,78891	1756,2	245422	559
560	313600	175616000	23,6643	8,2426	2,74819	1,78571	1759,3	246301	560
561	314721	176558481	23,6854	8,2475	2,74896	1,78253	1762,4	247181	561
562	315844	177504328	23,7065	8,2524	2,74974	1,77936	1765,6	248063	562
563	316969	178453547	23,7276	8,2573	2,75051	1,77620	1768,7	248947	563
564	318096	179406144	23,7487	8,2621	2,75128	1,77305	1771,9	249832	564
565	319225	180362125	23,7697	8,2670	2,75205	1,76991	1775,0	250719	565
566	320356	181321496	23,7908	8,2719	2,75282	1,76678	1778,1	251607	566
567	321489	182284263	23,8118	8,2768	2,75358	1,76367	1781,3	252497	567
568	322624	183250432	23,8328	8,2816	2,75435	1,76056	1784,4	253388	568
569	323761	184220009	23,8537	8,2865	2,75511	1,75747	1787,6	254281	569
570	324900	185193000	23,8747	8,2913	2,75587	1,75439	1790,7	255176	570
571	326041	186169411	23,8956	8,2962	2,75664	1,75131	1793,8	256072	571
572	327184	187149248	23,9165	8,3010	2,75740	1,74825	1797,0	256970	572
573	328329	188132517	23,9374	8,3059	2,75815	1,74520	1800,1	257869	573
574	329476	189119224	23,9583	8,3107	2,75891	1,74216	1803,3	258770	574
575	330625	190109375	23,9792	8,3155	2,75967	1,73913	1806,4	259672	575
576	331776	191102976	24,0000	8,3203	2,76042	1,73611	1809,6	260576	576
577	332929	192100033	24,0208	8,3251	2,76118	1,73310	1812,7	261482	577
578	334084	193100552	24,0416	8,3300	2,76193	1,73010	1815,8	262389	578
579	335241	194104539	24,0624	8,3348	2,76268	1,72712	1819,0	263298	579
580	336400	195112000	24,0832	8,3396	2,76343	1,72414	1822,1	264208	580
581	337561	196122941	24,1039	8,3443	2,76418	1,72117	1825,3	265120	581
582	338724	197137368	24,1247	8,3491	2,76492	1,71821	1828,4	266033	582
583	339889	198155287	24,1454	8,3539	2,76567	1,71527	1831,6	266948	583
584	341056	199176704	24,1661	8,3587	2,76641	1,71233	1834,7	267865	584
585	342225	200201625	24,1868	8,3634	2,76716	1,70940	1837,8	268783	585
586	343396	201230056	24,2074	8,3682	2,76790	1,70648	1841,0	269703	586
587	344569	202262003	24,2281	8,3730	2,76864	1,70358	1844,1	270624	587
588	345744	203297472	24,2487	8,3777	2,76938	1,70068	1847,3	271547	588
589	346921	204336469	24,2693	8,3825	2,77012	1,69779	1850,4	272471	589
590	348100	205379000	24,2899	8,3872	2,77085	1,69492	1853,5	273397	590
591	349281	206425071	24,3105	8,3919	2,77159	1,69205	1856,7	274325	591
592	350464	207474688	24,3311	8,3967	2,77232	1,68919	1859,8	275254	592
593	351649	208527857	24,3516	8,4014	2,77305	1,68634	1863,0	276184	593
594	352836	209584584	24,3721	8,4061	2,77379	1,68350	1866,1	277117	594
595	354025	210644875	24,3926	8,4108	2,77452	1,68067	1869,2	278051	595
596	355216	211708736	24,4131	8,4155	2,77525	1,67785	1872,4	278986	596
597	356409	212776173	24,4336	8,4202	2,77597	1,67504	1875,5	279923	597
598	357604	213847192	24,4540	8,4249	2,77670	1,67224	1878,7	280862	598
599	358801	214921799	24,4745	8,4296	2,77743	1,66945	1881,8	281802	599
600	360000	216000000	24,4949	8,4343	2,77815	1,66667	1885,0	282743	600

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
600	360000	216000000	24,4949	8,4343	2,77815	1,66667	1885,0	282743	600
601	361201	217081801	24,5153	8,4390	2,77887	1,66389	1888,1	283687	601
602	362404	218167208	24,5357	8,4437	2,77960	1,66113	1891,2	284631	602
603	363609	219256227	24,5561	8,4484	2,78032	1,65837	1894,4	285578	603
604	364816	220348864	24,5764	8,4530	2,78104	1,65563	1897,5	286526	604
605	366025	221445125	24,5967	8,4577	2,78176	1,65289	1900,7	287475	605
606	367236	222545016	24,6171	8,4623	2,78247	1,65017	1903,8	288426	606
607	368449	223648543	24,6374	8,4670	2,78319	1,64745	1906,9	289379	607
608	369664	224755712	24,6577	8,4716	2,78390	1,64474	1910,1	290333	608
609	370881	225866529	24,6779	8,4763	2,78462	1,64204	1913,2	291289	609
610	372100	226981000	24,6982	8,4809	2,78533	1,63934	1916,4	292247	610
611	373321	228099131	24,7184	8,4856	2,78604	1,63666	1919,5	293206	611
612	374544	229220928	24,7386	8,4902	2,78675	1,63399	1922,7	294166	612
613	375769	230346397	24,7588	8,4948	2,78746	1,63132	1925,8	295128	613
614	376996	231475544	24,7790	8,4994	2,78817	1,62866	1928,9	296092	614
615	378225	232608375	24,7992	8,5040	2,78888	1,62602	1932,1	297057	615
616	379456	233744896	24,8193	8,5086	2,78958	1,62338	1935,2	298024	616
617	380689	234885113	24,8395	8,5132	2,79029	1,62075	1938,4	298992	617
618	381924	236029032	24,8596	8,5178	2,79099	1,61812	1941,5	299962	618
619	383161	237176659	24,8797	8,5224	2,79169	1,61551	1944,6	300934	619
620	384400	238328000	24,8998	8,5270	2,79239	1,61290	1947,8	301907	620
621	385641	239483061	24,9199	8,5316	2,79309	1,61031	1950,9	302882	621
622	386884	240641848	24,9399	8,5362	2,79379	1,60772	1954,1	303858	622
623	388129	241804367	24,9600	8,5408	2,79449	1,60514	1957,2	304836	623
624	389376	242970624	24,9800	8,5453	2,79518	1,60256	1960,4	305815	624
625	390625	244140625	25,0000	8,5499	2,79588	1,60000	1963,5	306796	625
626	391876	245314376	25,0200	8,5544	2,79657	1,59744	1966,6	307779	626
627	393129	246491883	25,0400	8,5590	2,79727	1,59490	1969,8	308763	627
628	394384	247673152	25,0599	8,5635	2,79796	1,59236	1972,9	309748	628
629	395641	248858189	25,0799	8,5681	2,79865	1,58983	1976,1	310736	629
630	396900	250047000	25,0998	8,5726	2,79934	1,58730	1979,2	311725	630
631	398161	251239591	25,1197	8,5772	2,80003	1,58479	1982,3	312715	631
632	399424	252435968	25,1396	8,5817	2,80072	1,58228	1985,5	313707	632
633	400689	253636137	25,1595	8,5862	2,80140	1,57978	1988,6	314700	633
634	401956	254840104	25,1794	8,5907	2,80209	1,57729	1991,8	315696	634
635	403225	256047875	25,1992	8,5952	2,80277	1,57480	1994,9	316692	635
636	404496	257259456	25,2190	8,5997	2,80346	1,57233	1998,1	317690	636
637	405769	258474853	25,2389	8,6043	2,80414	1,56986	2001,2	318690	637
638	407044	259694072	25,2587	8,6088	2,80482	1,56740	2004,3	319692	638
639	408321	260917119	25,2784	8,6132	2,80550	1,56495	2007,5	320695	639
640	409600	262144000	25,2982	8,6177	2,80618	1,56250	2010,6	321699	640
641	410881	263374721	25,3180	8,6222	2,80686	1,56006	2013,8	322705	641
642	412164	264609288	25,3377	8,6267	2,80754	1,55763	2016,9	323713	642
643	413449	265847707	25,3574	8,6312	2,80821	1,55521	2020,0	324722	643
644	414736	267089984	25,3772	8,6357	2,80889	1,55280	2023,2	325733	644
645	416025	268336125	25,3969	8,6401	2,80956	1,55039	2026,3	326745	645
646	417316	269586136	25,4165	8,6446	2,81023	1,54799	2029,5	327759	646
647	418609	270840023	25,4362	8,6490	2,81090	1,54560	2032,6	328775	647
648	419904	272097792	25,4558	8,6535	2,81158	1,54321	2035,8	329792	648
649	421201	273359449	25,4755	8,6579	2,81224	1,54083	2038,9	330810	649
650	422500	274625000	25,4951	8,6624	2,81291	1,53846	2042,0	331831	650

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
650	422500	274625000	25,4951	8,6624	2,81291	1,53846	2042,0	331831	650
651	423801	275894451	25,5147	8,6668	2,81358	1,53610	2045,2	332853	651
652	425104	277167808	25,5343	8,6713	2,81425	1,53374	2048,3	333876	652
653	426409	278445077	25,5539	8,6757	2,81491	1,53139	2051,5	334901	653
654	427716	279726264	25,5734	8,6801	2,81558	1,52905	2054,6	335927	654
655	429025	281011375	25,5930	8,6845	2,81624	1,52672	2057,7	336955	655
656	430336	282300416	25,6125	8,6890	2,81690	1,52439	2060,9	337985	656
657	431649	283593393	25,6320	8,6934	2,81757	1,52207	2064,0	339016	657
658	432964	284890312	25,6515	8,6978	2,81823	1,51976	2067,2	340049	658
659	434281	286191179	25,6710	8,7022	2,81889	1,51745	2070,3	341084	659
660	435600	287496000	25,6905	8,7066	2,81954	1,51515	2073,5	342119	660
661	436921	288804781	25,7099	8,7110	2,82020	1,51286	2076,6	343157	661
662	438244	290117528	25,7294	8,7154	2,82086	1,51057	2079,7	344196	662
663	439569	291434247	25,7488	8,7198	2,82151	1,50830	2082,9	345237	663
664	440896	292754944	25,7682	8,7241	2,82217	1,50602	2086,0	346279	664
665	442225	294079625	25,7876	8,7285	2,82282	1,50376	2089,2	347323	665
666	443556	295408296	25,8070	8,7329	2,82347	1,50150	2092,3	348368	666
667	444889	296740963	25,8263	8,7373	2,82413	1,49925	2095,4	349415	667
668	446224	298077632	25,8457	8,7416	2,82478	1,49701	2098,6	350464	668
669	447561	299418309	25,8650	8,7460	2,82543	1,49477	2101,7	351514	669
670	448900	300763000	25,8844	8,7503	2,82607	1,49254	2104,9	352565	670
671	450241	302111711	25,9037	8,7547	2,82672	1,49031	2108,0	353618	671
672	451584	303464448	25,9230	8,7590	2,82737	1,48810	2111,2	354673	672
673	452929	304821217	25,9422	8,7634	2,82802	1,48588	2114,3	355730	673
674	454276	306182024	25,9615	8,7677	2,82866	1,48368	2117,4	356788	674
675	455625	307546875	25,9808	8,7721	2,82930	1,48148	2120,6	357847	675
676	456976	308915776	26,0000	8,7764	2,82995	1,47929	2123,7	358908	676
677	458329	310288733	26,0192	8,7807	2,83059	1,47710	2126,9	359971	677
678	459684	311665752	26,0384	8,7850	2,83123	1,47493	2130,0	361035	678
679	461041	313046839	26,0576	8,7893	2,83187	1,47275	2133,1	362101	679
680	462400	314432000	26,0768	8,7937	2,83251	1,47059	2136,3	363168	680
681	463761	315821241	26,0960	8,7980	2,83315	1,46843	2139,4	364237	681
682	465124	317214568	26,1151	8,8023	2,83378	1,46628	2142,6	365308	682
683	466489	318611987	26,1343	8,8066	2,83442	1,46413	2145,7	366380	683
684	467856	320013504	26,1534	8,8109	2,83506	1,46199	2148,8	367453	684
685	469225	321419125	26,1725	8,8152	2,83569	1,45985	2152,0	368528	685
686	470596	322828856	26,1916	8,8194	2,83632	1,45773	2155,1	369605	686
687	471969	324242703	26,2107	8,8237	2,83696	1,45560	2158,3	370684	687
688	473344	325660672	26,2298	8,8280	2,83759	1,45349	2161,4	371764	688
689	474721	327082769	26,2488	8,8323	2,83822	1,45138	2164,6	372845	689
690	476100	328509000	26,2679	8,8366	2,83885	1,44928	2167,7	373928	690
691	477481	329939371	26,2869	8,8408	2,83948	1,44718	2170,8	375013	691
692	478864	331373888	26,3059	8,8451	2,84011	1,44509	2174,0	376099	692
693	480249	332812557	26,3249	8,8493	2,84073	1,44300	2177,1	377187	693
694	481636	334255384	26,3439	8,8536	2,84136	1,44092	2180,3	378276	694
695	483025	335702375	26,3629	8,8578	2,84198	1,43885	2183,4	379367	695
696	484416	337153536	26,3818	8,8621	2,84261	1,43678	2186,5	380459	696
697	485809	338608873	26,4008	8,8663	2,84323	1,43472	2189,7	381553	697
698	487204	340068392	26,4197	8,8706	2,84386	1,43266	2192,8	382649	698
699	488601	341532099	26,4386	8,8748	2,84448	1,43062	2196,0	383746	699
700	490000	343000000	26,4575	8,8790	2,84510	1,42857	2199,1	384845	700

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
700	490000	343000000	26,4575	8,8790	2,84510	1,42857	2199,1	384845	700
701	491401	344472101	26,4764	8,8833	2,84572	1,42653	2202,3	385945	701
702	492804	345948408	26,4953	8,8875	2,84634	1,42450	2205,4	387047	702
703	494209	347428927	26,5141	8,8917	2,84696	1,42248	2208,5	388151	703
704	495616	348913664	26,5330	8,8959	2,84757	1,42045	2211,7	389256	704
705	497025	350402625	26,5518	8,9001	2,84819	1,41844	2214,8	390363	705
706	498436	351895816	26,5707	8,9043	2,84880	1,41643	2218,0	391471	706
707	499849	353393243	26,5895	8,9085	2,84942	1,41443	2221,1	392580	707
708	501264	354894912	26,6083	8,9127	2,85003	1,41243	2224,2	393692	708
709	502681	356400829	26,6271	8,9169	2,85065	1,41044	2227,4	394805	709
710	504100	357911000	26,6458	8,9211	2,85126	1,40845	2230,5	395919	710
711	505521	359425431	26,6646	8,9253	2,85187	1,40647	2233,7	397035	711
712	506944	360944128	26,6833	8,9295	2,85248	1,40449	2236,8	398153	712
713	508369	362467097	26,7021	8,9337	2,85309	1,40252	2240,0	399272	713
714	509796	363994344	26,7208	8,9378	2,85370	1,40056	2243,1	400393	714
715	511225	365525875	26,7395	8,9420	2,85431	1,39860	2246,2	401515	715
716	512656	367061696	26,7582	8,9462	2,85491	1,39665	2249,4	402639	716
717	514089	368601813	26,7769	8,9503	2,85552	1,39470	2252,5	403765	717
718	515524	370146232	26,7955	8,9545	2,85612	1,39276	2255,7	404892	718
719	516961	371694959	26,8142	8,9587	2,85673	1,39082	2258,8	406020	719
720	518400	373248000	26,8328	8,9628	2,85733	1,38889	2261,9	407150	720
721	519841	374805361	26,8514	8,9670	2,85794	1,38696	2265,1	408282	721
722	521284	376367048	26,8701	8,9711	2,85854	1,38504	2268,2	409415	722
723	522729	377933067	26,8887	8,9752	2,85914	1,38313	2271,4	410550	723
724	524176	379503424	26,9072	8,9794	2,85974	1,38122	2274,5	411687	724
725	525625	381078125	26,9258	8,9835	2,86034	1,37931	2277,7	412825	725
726	527076	382657176	26,9444	8,9876	2,86094	1,37741	2280,8	413965	726
727	528529	384240583	26,9629	8,9918	2,86153	1,37552	2283,9	415106	727
728	529984	385828352	26,9815	8,9959	2,86213	1,37363	2287,1	416248	728
729	531441	387420489	27,0000	9,0000	2,86273	1,37174	2290,2	417393	729
730	532900	389017000	27,0185	9,0041	2,86332	1,36986	2293,4	418539	730
731	534361	390617891	27,0370	9,0082	2,86392	1,36799	2296,5	419686	731
732	535824	392222168	27,0555	9,0123	2,86451	1,36612	2299,6	420835	732
733	537289	393832837	27,0740	9,0164	2,86510	1,36426	2302,8	421986	733
734	538756	395446904	27,0924	9,0205	2,86570	1,36240	2305,9	423138	734
735	540225	397065375	27,1109	9,0246	2,86629	1,36054	2309,1	424293	735
736	541696	398688256	27,1293	9,0287	2,86688	1,35870	2312,2	425447	736
737	543169	400315553	27,1477	9,0328	2,86747	1,35685	2315,4	426604	737
738	544644	401947272	27,1662	9,0369	2,86806	1,35501	2318,5	427762	738
739	546121	403583419	27,1846	9,0410	2,86864	1,35318	2321,6	428922	739
740	547600	405224000	27,2029	9,0450	2,86923	1,35135	2324,8	430084	740
741	549081	406869021	27,2213	9,0491	2,86982	1,34953	2327,9	431247	741
742	550564	408518488	27,2397	9,0532	2,87040	1,34771	2331,1	432412	742
743	552049	410172407	27,2580	9,0572	2,87099	1,34590	2334,2	433578	743
744	553536	411830784	27,2764	9,0613	2,87157	1,34409	2337,3	434746	744
745	555025	413493625	27,2947	9,0654	2,87216	1,34228	2340,5	435916	745
746	556516	415160936	27,3130	9,0694	2,87274	1,34048	2343,6	437087	746
747	558009	416832723	27,3313	9,0735	2,87332	1,33869	2346,8	438259	747
748	559504	418508992	27,3496	9,0775	2,87390	1,33690	2349,9	439433	748
749	561001	420189749	27,3679	9,0816	2,87448	1,33511	2353,1	440609	749
750	562500	421875000	27,3861	9,0856	2,87506	1,33333	2356,2	441786	750

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
750	562500	421875000	27,3861	9,0856	2,87506	1,33333	2356,2	441786	750
751	564001	423564751	27,4044	9,0896	2,87564	1,33156	2359,3	442965	751
752	565504	425259008	27,4226	9,0937	2,87622	1,32979	2362,5	444146	752
753	567009	426957777	27,4408	9,0977	2,87679	1,32802	2365,6	445328	753
754	568516	428661064	27,4591	9,1017	2,87737	1,32626	2368,8	446511	754
755	570025	430368875	27,4773	9,1057	2,87795	1,32450	2371,9	447697	755
756	571536	432081216	27,4955	9,1098	2,87852	1,32275	2375,0	448883	756
757	573049	433798093	27,5136	9,1138	2,87910	1,32100	2378,2	450072	757
758	574564	435519512	27,5318	9,1178	2,87967	1,31926	2381,3	451262	758
759	576081	437245479	27,5500	9,1218	2,88024	1,31752	2384,5	452453	759
760	577600	438976000	27,5681	9,1258	2,88081	1,31579	2387,6	453646	760
761	579121	440711081	27,5862	9,1298	2,88138	1,31406	2390,8	454841	761
762	580644	442450728	27,6043	9,1338	2,88195	1,31234	2393,9	456037	762
763	582169	444194947	27,6225	9,1378	2,88252	1,31062	2397,0	457234	763
764	583696	445943744	27,6405	9,1418	2,88309	1,30890	2400,2	458434	764
765	585225	447697125	27,6586	9,1458	2,88366	1,30719	2403,3	459635	765
766	586756	449455096	27,6767	9,1498	2,88423	1,30548	2406,5	460837	766
767	588289	451217663	27,6948	9,1537	2,88480	1,30378	2409,6	462041	767
768	589824	452984832	27,7128	9,1577	2,88536	1,30208	2412,7	463247	768
769	591361	454756609	27,7308	9,1617	2,88593	1,30039	2415,9	464454	769
770	592900	456533000	27,7489	9,1657	2,88649	1,29870	2419,0	465663	770
771	594441	458314011	27,7669	9,1696	2,88705	1,29702	2422,2	466873	771
772	595984	460099648	27,7849	9,1736	2,88762	1,29534	2425,3	468085	772
773	597529	461889917	27,8029	9,1775	2,88818	1,29366	2428,5	469298	773
774	599076	463684824	27,8209	9,1815	2,88874	1,29199	2431,6	470513	774
775	600625	465484375	27,8388	9,1855	2,88930	1,29032	2434,7	471730	775
776	602176	467288576	27,8568	9,1894	2,88986	1,28866	2437,9	472948	776
777	603729	469097433	27,8747	9,1933	2,89042	1,28700	2441,0	474168	777
778	605284	470910952	27,8927	9,1973	2,89098	1,28535	2444,2	475389	778
779	606841	472729139	27,9106	9,2012	2,89154	1,28370	2447,3	476612	779
780	608400	474552000	27,9285	9,2052	2,89209	1,28205	2450,4	477836	780
781	609961	476379541	27,9464	9,2091	2,89265	1,28041	2453,6	479062	781
782	611524	478211768	27,9643	9,2130	2,89321	1,27877	2456,7	480290	782
783	613089	480048687	27,9821	9,2170	2,89376	1,27714	2459,9	481519	783
784	614656	481890304	28,0000	9,2209	2,89432	1,27551	2463,0	482750	784
785	616225	483736625	28,0179	9,2248	2,89487	1,27389	2466,2	483982	785
786	617796	485587656	28,0357	9,2287	2,89542	1,27226	2469,3	485216	786
787	619369	487443403	28,0535	9,2326	2,89597	1,27065	2472,4	486451	787
788	620944	489303872	28,0713	9,2365	2,89653	1,26904	2475,6	487688	788
789	622521	491169069	28,0891	9,2404	2,89708	1,26743	2478,7	488927	789
790	624100	493039000	28,1069	9,2443	2,89763	1,26582	2481,9	490167	790
791	625681	494913671	28,1247	9,2482	2,89818	1,26422	2485,0	491409	791
792	627264	496793088	28,1425	9,2521	2,89873	1,26263	2488,1	492652	792
793	628849	498677257	28,1603	9,2560	2,89927	1,26103	2491,3	493897	793
794	630436	500566184	28,1780	9,2599	2,89982	1,25945	2494,4	495143	794
795	632025	502459875	28,1957	9,2638	2,90037	1,25786	2497,6	496391	795
796	633616	504358336	28,2135	9,2677	2,90091	1,25628	2500,7	497641	796
797	635209	506261573	28,2312	9,2716	2,90146	1,25471	2503,8	498892	797
798	636804	508169592	28,2489	9,2754	2,90200	1,25313	2507,0	500145	798
799	638401	510082399	28,2666	9,2793	2,90255	1,25156	2510,1	501399	799
800	640000	512000000	28,2843	9,2832	2,90309	1,25000	2513,3	502655	800

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
800	640000	512000000	28,2843	9,2832	2,90309	1,25000	2513,3	502655	800
801	641601	513922401	28,3019	9,2870	2,90363	1,24844	2516,4	503912	801
802	643204	515849608	28,3196	9,2909	2,90417	1,24688	2519,6	505171	802
803	644809	517781627	28,3373	9,2948	2,90472	1,24533	2522,7	506432	803
804	646416	519718464	28,3549	9,2986	2,90526	1,24378	2525,8	507694	804
805	648025	521660125	28,3725	9,3025	2,90580	1,24224	2529,0	508958	805
806	649636	523606616	28,3901	9,3063	2,90634	1,24069	2532,1	510223	806
807	651249	525557943	28,4077	9,3102	2,90687	1,23916	2535,3	511490	807
808	652864	527514112	28,4253	9,3140	2,90741	1,23762	2538,4	512758	808
809	654481	529475129	28,4429	9,3179	2,90795	1,23609	2541,5	514028	809
810	656100	531441000	28,4605	9,3217	2,90849	1,23457	2544,7	515300	810
811	657721	533411731	28,4781	9,3255	2,90902	1,23305	2547,8	516573	811
812	659344	535387328	28,4956	9,3294	2,90956	1,23153	2551,0	517848	812
813	660969	537367797	28,5132	9,3332	2,91009	1,23001	2554,1	519124	813
814	662596	539353144	28,5307	9,3370	2,91062	1,22850	2557,3	520402	814
815	664225	541343375	28,5482	9,3408	2,91116	1,22699	2560,4	521681	815
816	665856	543338496	28,5657	9,3447	2,91169	1,22549	2563,5	522962	816
817	667489	545338513	28,5832	9,3485	2,91222	1,22399	2566,7	524245	817
818	669124	547343432	28,6007	9,3523	2,91275	1,22249	2569,8	525529	818
819	670761	549353259	28,6182	9,3561	2,91328	1,22100	2573,0	526814	819
820	672400	551368000	28,6356	9,3599	2,91381	1,21951	2576,1	528102	820
821	674041	553387661	28,6531	9,3637	2,91434	1,21803	2579,2	529391	821
822	675684	555412248	28,6705	9,3675	2,91487	1,21655	2582,4	530681	822
823	677329	557441767	28,6880	9,3713	2,91540	1,21507	2585,5	531973	823
824	678976	559476224	28,7054	9,3751	2,91593	1,21359	2588,7	533267	824
825	680625	561515625	28,7228	9,3789	2,91645	1,21212	2591,8	534562	825
826	682276	563559976	28,7402	9,3827	2,91698	1,21065	2595,0	535858	826
827	683929	565609283	28,7576	9,3865	2,91751	1,20919	2598,1	537157	827
828	685584	567663552	28,7750	9,3902	2,91803	1,20773	2601,2	538456	828
829	687241	569722789	28,7924	9,3940	2,91855	1,20627	2604,4	539758	829
830	688900	571787000	28,8097	9,3978	2,91908	1,20482	2607,5	541061	830
831	690561	573856191	28,8271	9,4016	2,91960	1,20337	2610,7	542365	831
832	692224	575930368	28,8444	9,4053	2,92012	1,20192	2613,8	543671	832
833	693889	578009537	28,8617	9,4091	2,92065	1,20048	2616,9	544979	833
834	695556	580093704	28,8791	9,4129	2,92117	1,19904	2620,1	546288	834
835	697225	582182875	28,8964	9,4166	2,92169	1,19760	2623,2	547599	835
836	698896	584277056	28,9137	9,4204	2,92221	1,19617	2626,4	548912	836
837	700569	586376253	28,9310	9,4241	2,92273	1,19474	2629,5	550226	837
838	702244	588480472	28,9482	9,4279	2,92324	1,19332	2632,7	551541	838
839	703921	590589719	28,9655	9,4316	2,92376	1,19190	2635,8	552858	839
840	705600	592704000	28,9828	9,4354	2,92428	1,19048	2638,9	554177	840
841	707281	594823321	29,0000	9,4391	2,92480	1,18906	2642,1	555497	841
842	708964	596947688	29,0172	9,4429	2,92531	1,18765	2645,2	556819	842
843	710649	599077107	29,0345	9,4466	2,92583	1,18624	2648,4	558142	843
844	712336	601211584	29,0517	9,4503	2,92634	1,18483	2651,5	559467	844
845	714025	603351125	29,0689	9,4541	2,92686	1,18343	2654,6	560794	845
846	715716	605495736	29,0861	9,4578	2,92737	1,18203	2657,8	562122	846
847	717409	607645423	29,1033	9,4615	2,92788	1,18064	2660,9	563452	847
848	719104	609800192	29,1204	9,4652	2,92840	1,17925	2664,1	564783	848
849	720801	611960049	29,1376	9,4690	2,92891	1,17786	2667,2	566116	849
850	722500	614125000	29,1548	9,4727	2,92942	1,17647	2670,4	567450	850

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
850	722500	614125000	29,1548	9,4727	2,92942	1,17647	2670,4	567450	850
851	724201	616295051	29,1719	9,4764	2,92993	1,17590	2673,5	568786	851
852	725904	618470208	29,1890	9,4801	2,93044	1,17531	2676,6	570124	852
853	727609	620650477	29,2062	9,4838	2,93095	1,17473	2679,8	571463	853
854	729316	622835864	29,2233	9,4875	2,93146	1,17415	2682,9	572803	854
855	731025	625026375	29,2404	9,4912	2,93197	1,17357	2686,1	574146	855
856	732736	627222016	29,2575	9,4949	2,93247	1,17299	2689,2	575490	856
857	734449	629422793	29,2746	9,4986	2,93298	1,17241	2692,3	576835	857
858	736164	631628712	29,2916	9,5023	2,93349	1,17183	2695,5	578182	858
859	737881	633839779	29,3087	9,5060	2,93399	1,17125	2698,6	579530	859
860	739600	636056000	29,3258	9,5097	2,93450	1,17067	2701,8	580880	860
861	741321	638277381	29,3428	9,5134	2,93500	1,17009	2704,9	582232	861
862	743044	640503928	29,3598	9,5171	2,93551	1,16951	2708,1	583585	862
863	744769	642735647	29,3769	9,5207	2,93601	1,16893	2711,2	584940	863
864	746496	644972544	29,3939	9,5244	2,93651	1,16835	2714,3	586297	864
865	748225	647214625	29,4109	9,5281	2,93702	1,16777	2717,5	587655	865
866	749956	649461896	29,4279	9,5317	2,93752	1,16719	2720,6	589014	866
867	751689	651714363	29,4449	9,5354	2,93802	1,16661	2723,8	590375	867
868	753424	653972032	29,4618	9,5391	2,93852	1,16603	2726,9	591738	868
869	755161	656234909	29,4788	9,5427	2,93902	1,16545	2730,0	593102	869
870	756900	658503000	29,4958	9,5464	2,93952	1,16487	2733,2	594468	870
871	758641	660776311	29,5127	9,5501	2,94002	1,16429	2736,3	595835	871
872	760384	663054848	29,5296	9,5537	2,94052	1,16371	2739,5	597204	872
873	762129	665338617	29,5466	9,5574	2,94101	1,16313	2742,6	598575	873
874	763876	667627624	29,5635	9,5610	2,94151	1,16255	2745,8	599947	874
875	765625	669921875	29,5804	9,5647	2,94201	1,16197	2748,9	601320	875
876	767376	672221376	29,5973	9,5683	2,94250	1,16139	2752,0	602696	876
877	769129	674526133	29,6142	9,5719	2,94300	1,16081	2755,2	604073	877
878	770884	676836152	29,6311	9,5756	2,94349	1,16023	2758,3	605451	878
879	772641	679151439	29,6479	9,5792	2,94399	1,15965	2761,5	606831	879
880	774400	681472000	29,6648	9,5828	2,94448	1,15907	2764,6	608212	880
881	776161	683797841	29,6816	9,5865	2,94498	1,15849	2767,7	609595	881
882	777924	686128968	29,6985	9,5901	2,94547	1,15791	2770,9	610980	882
883	779689	688465387	29,7153	9,5937	2,94596	1,15733	2774,0	612366	883
884	781456	690807104	29,7321	9,5973	2,94645	1,15675	2777,2	613754	884
885	783225	693154125	29,7489	9,6010	2,94694	1,15617	2780,3	615143	885
886	784996	695506456	29,7658	9,6046	2,94743	1,15559	2783,5	616534	886
887	786769	697864103	29,7825	9,6082	2,94792	1,15501	2786,6	617927	887
888	788544	700227072	29,7993	9,6118	2,94841	1,15443	2789,7	619321	888
889	790321	702595369	29,8161	9,6154	2,94890	1,15385	2792,9	620717	889
890	792100	704969000	29,8329	9,6190	2,94939	1,15327	2796,0	622114	890
891	793881	707347971	29,8496	9,6226	2,94988	1,15269	2799,2	623513	891
892	795664	709732288	29,8664	9,6262	2,95036	1,15211	2802,3	624913	892
893	797449	712121957	29,8831	9,6298	2,95085	1,15153	2805,4	626315	893
894	799236	714516984	29,8998	9,6334	2,95134	1,15095	2808,6	627718	894
895	801025	716917375	29,9166	9,6370	2,95182	1,15037	2811,7	629124	895
896	802816	719323136	29,9333	9,6406	2,95231	1,14979	2814,9	630530	896
897	804609	721734273	29,9500	9,6442	2,95279	1,14921	2818,0	631938	897
898	806404	724150792	29,9666	9,6477	2,95328	1,14863	2821,2	633348	898
899	808201	726572699	29,9833	9,6513	2,95376	1,14805	2824,3	634760	899
900	810000	729000000	30,0000	9,6549	2,95424	1,14747	2827,4	636173	900

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	π
900	810000	729000000	30,0000	9,6549	2,95424	1,11111	2827,4	636173	900
901	811801	731432701	30,0167	9,6585	2,95472	1,10988	2830,6	637587	901
902	813604	733870808	30,0333	9,6620	2,95521	1,10865	2833,7	639003	902
903	815409	736314327	30,0500	9,6656	2,95569	1,10742	2836,9	640421	903
904	817216	738763264	30,0666	9,6692	2,95617	1,10619	2840,0	641840	904
905	819025	741217625	30,0832	9,6727	2,95665	1,10497	2843,1	643261	905
906	820836	743677416	30,0998	9,6763	2,95713	1,10375	2846,3	644683	906
907	822649	746142643	30,1164	9,6799	2,95761	1,10254	2849,4	646107	907
908	824464	748613312	30,1330	9,6834	2,95809	1,10132	2852,6	647533	908
909	826281	751089429	30,1496	9,6870	2,95856	1,10011	2855,7	648960	909
910	828100	753571000	30,1662	9,6905	2,95904	1,09890	2858,8	650388	910
911	829921	756058031	30,1828	9,6941	2,95952	1,09766	2862,0	651818	911
912	831744	758550528	30,1993	9,6976	2,95999	1,09649	2865,1	653250	912
913	833569	761048497	30,2159	9,7012	2,96047	1,09529	2868,3	654684	913
914	835396	763551944	30,2324	9,7047	2,96095	1,09409	2871,4	656118	914
915	837225	766060875	30,2490	9,7082	2,96142	1,09290	2874,6	657555	915
916	839056	768575296	30,2655	9,7118	2,96190	1,09170	2877,7	658993	916
917	840889	771095213	30,2820	9,7153	2,96237	1,09051	2880,8	660433	917
918	842724	773620632	30,2985	9,7188	2,96284	1,08932	2884,0	661874	918
919	844561	776151559	30,3150	9,7224	2,96332	1,08814	2887,1	663317	919
920	846400	778688000	30,3315	9,7259	2,96379	1,08696	2890,3	664761	920
921	848241	781229961	30,3480	9,7294	2,96426	1,08578	2893,4	666207	921
922	850084	783777448	30,3645	9,7329	2,96473	1,08460	2896,5	667654	922
923	851929	786330467	30,3809	9,7364	2,96520	1,08342	2899,7	669103	923
924	853776	788889024	30,3974	9,7400	2,96567	1,08225	2902,8	670554	924
925	855625	791453125	30,4138	9,7435	2,96614	1,08108	2906,0	672006	925
926	857476	794022776	30,4302	9,7470	2,96661	1,07991	2909,1	673460	926
927	859329	796597983	30,4467	9,7505	2,96708	1,07875	2912,3	674915	927
928	861184	799178752	30,4631	9,7540	2,96755	1,07759	2915,4	676372	928
929	863041	801765089	30,4795	9,7575	2,96802	1,07643	2918,5	677831	929
930	864900	804357000	30,4959	9,7610	2,96848	1,07527	2921,7	679291	930
931	866761	806954491	30,5123	9,7645	2,96895	1,07411	2924,8	680752	931
932	868624	809557568	30,5287	9,7680	2,96942	1,07296	2928,0	682216	932
933	870489	812166237	30,5450	9,7715	2,96988	1,07181	2931,1	683680	933
934	872356	814780504	30,5614	9,7750	2,97035	1,07066	2934,2	685147	934
935	874225	817400375	30,5778	9,7785	2,97081	1,06952	2937,4	686615	935
936	876096	820025856	30,5941	9,7819	2,97128	1,06838	2940,5	688084	936
937	877969	822656953	30,6105	9,7854	2,97174	1,06724	2943,7	689555	937
938	879844	825293672	30,6268	9,7889	2,97220	1,06610	2946,8	691028	938
939	881721	827936019	30,6431	9,7924	2,97267	1,06496	2950,0	692502	939
940	883600	830584000	30,6594	9,7959	2,97313	1,06383	2953,1	693978	940
941	885481	833237621	30,6757	9,7993	2,97359	1,06270	2956,2	695455	941
942	887364	835896888	30,6920	9,8028	2,97405	1,06157	2959,4	696934	942
943	889249	838561807	30,7083	9,8063	2,97451	1,06045	2962,5	698415	943
944	891136	841232384	30,7246	9,8097	2,97497	1,05932	2965,7	699897	944
945	893025	843908625	30,7409	9,8132	2,97543	1,05820	2968,8	701380	945
946	894916	846590536	30,7571	9,8167	2,97589	1,05708	2971,9	702865	946
947	896809	849278123	30,7734	9,8201	2,97635	1,05597	2975,1	704352	947
948	898704	851971392	30,7896	9,8236	2,97681	1,05485	2978,2	705840	948
949	900601	854670349	30,8058	9,8270	2,97727	1,05374	2981,4	707330	949
950	902500	857375000	30,8221	9,8305	2,97772	1,05263	2984,5	708822	950

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	$\log n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
950	902500	857375000	30,8221	9,8305	2,97772	1,05263	2984,5	708822	950
951	904401	860085351	30,8383	9,8339	2,97818	1,05152	2987,7	710315	951
952	906304	862801408	30,8545	9,8374	2,97864	1,05042	2990,8	711809	952
953	908209	865523177	30,8707	9,8408	2,97909	1,04932	2993,9	713306	953
954	910116	868250664	30,8869	9,8443	2,97955	1,04822	2997,1	714803	954
955	912025	870983875	30,9031	9,8477	2,98000	1,04712	3000,2	716303	955
956	913936	873722816	30,9192	9,8511	2,98046	1,04603	3003,4	717804	956
957	915849	876467493	30,9354	9,8546	2,98091	1,04493	3006,5	719306	957
958	917764	879217912	30,9516	9,8580	2,98137	1,04384	3009,6	720810	958
959	919681	881974079	30,9677	9,8614	2,98182	1,04275	3012,8	722316	959
960	921600	884736000	30,9839	9,8648	2,98227	1,04167	3015,9	723823	960
961	923521	887503681	31,0000	9,8683	2,98272	1,04058	3019,1	725332	961
962	925444	890277128	31,0161	9,8717	2,98318	1,03950	3022,2	726842	962
963	927369	893056347	31,0322	9,8751	2,98363	1,03842	3025,4	728354	963
964	929296	895841344	31,0483	9,8785	2,98408	1,03734	3028,5	729867	964
965	931225	898632125	31,0644	9,8819	2,98453	1,03627	3031,6	731382	965
966	933156	901428696	31,0805	9,8854	2,98498	1,03520	3034,8	732899	966
967	935089	904231063	31,0966	9,8888	2,98543	1,03413	3037,9	734417	967
968	937024	907039232	31,1127	9,8922	2,98588	1,03306	3041,1	735937	968
969	938961	909853209	31,1288	9,8956	2,98632	1,03199	3044,2	737458	969
970	940900	912673000	31,1448	9,8990	2,98677	1,03093	3047,3	738981	970
971	942841	915498611	31,1609	9,9024	2,98722	1,02987	3050,5	740506	971
972	944784	918330048	31,1769	9,9058	2,98767	1,02881	3053,6	742032	972
973	946729	921167317	31,1929	9,9092	2,98811	1,02775	3056,8	743559	973
974	948676	924010424	31,2090	9,9126	2,98856	1,02669	3059,9	745088	974
975	950625	926859375	31,2250	9,9160	2,98900	1,02564	3063,1	746619	975
976	952576	929714176	31,2410	9,9194	2,98945	1,02459	3066,2	748151	976
977	954529	932574833	31,2570	9,9227	2,98989	1,02354	3069,3	749685	977
978	956484	935441352	31,2730	9,9261	2,99034	1,02249	3072,5	751221	978
979	958441	938313739	31,2890	9,9295	2,99078	1,02145	3075,6	752758	979
980	960400	941192000	31,3050	9,9329	2,99123	1,02041	3078,8	754296	980
981	962361	944076141	31,3209	9,9363	2,99167	1,01937	3081,9	755837	981
982	964324	946966168	31,3369	9,9396	2,99211	1,01833	3085,0	757378	982
983	966289	949862087	31,3528	9,9430	2,99255	1,01729	3088,2	758922	983
984	968256	952763904	31,3688	9,9464	2,99300	1,01626	3091,3	760466	984
985	970225	955671625	31,3847	9,9497	2,99344	1,01523	3094,5	762013	985
986	972196	958585256	31,4006	9,9531	2,99388	1,01420	3097,6	763561	986
987	974169	961504803	31,4166	9,9565	2,99432	1,01317	3100,8	765111	987
988	976144	964430272	31,4325	9,9598	2,99476	1,01215	3103,9	766662	988
989	978121	967361669	31,4484	9,9632	2,99520	1,01112	3107,0	768214	989
990	980100	970299000	31,4643	9,9666	2,99564	1,01010	3110,2	769769	990
991	982081	973242271	31,4802	9,9699	2,99607	1,00908	3113,3	771325	991
992	984064	976191488	31,4960	9,9733	2,99651	1,00806	3116,5	772882	992
993	986049	979146657	31,5119	9,9766	2,99695	1,00705	3119,6	774441	993
994	988036	982107784	31,5278	9,9800	2,99739	1,00604	3122,7	776002	994
995	990025	985074875	31,5436	9,9833	2,99782	1,00503	3125,9	777564	995
996	992016	988047936	31,5595	9,9866	2,99826	1,00402	3129,0	779128	996
997	994009	991026973	31,5753	9,9900	2,99870	1,00301	3132,2	780693	997
998	996004	994011992	31,5911	9,9933	2,99913	1,00200	3135,3	782260	998
999	998001	997002999	31,6070	9,9967	2,99957	1,00100	3138,5	783828	999

n	n^2	n^3	n	n^2	n^3	n	n^2	n^3
1001	1002001	1003003001	1051	1104601	1160935651	1101	1212201	1334633301
1002	1004004	1006012008	1052	1106704	1164232608	1102	1214404	1338273208
1003	1006009	1009027027	1053	1108809	1167575877	1103	1216609	1341919727
1004	1008016	1012048064	1054	1110916	1170905464	1104	1218816	1345572864
1005	1010025	1015075125	1055	1113025	1174241375	1105	1221025	1349232625
1006	1012036	1018108216	1056	1115136	1177583616	1106	1223236	1352899016
1007	1014049	1021147343	1057	1117249	1180932193	1107	1225449	1356572043
1008	1016064	1024192512	1058	1119364	1184287112	1108	1227664	1360251712
1009	1018081	1027243729	1059	1121481	1187648379	1109	1229881	1363933809
1010	1020100	1030301000	1060	1123600	1191016000	1110	1232100	1367631000
1011	1022121	1033364331	1061	1125721	1194389981	1111	1234321	1371330631
1012	1024144	1036433728	1062	1127844	1197770328	1112	1236544	1375036928
1013	1026169	1039509197	1063	1129969	1201157047	1113	1238769	1378749897
1014	1028196	1042590744	1064	1132096	1204550144	1114	1240996	1382469544
1015	1030225	1045678375	1065	1134225	1207949625	1115	1243225	1386195875
1016	1032256	1048772096	1066	1136356	1211355496	1116	1245456	1389928896
1017	1034289	1051871913	1067	1138489	1214767763	1117	1247689	1393668613
1018	1036324	1054977832	1068	1140624	1218186432	1118	1249924	1397415032
1019	1038361	1058089859	1069	1142761	1221611509	1119	1252161	1401168159
1020	1040400	1061208000	1070	1144900	1225043000	1120	1254400	1404928000
1021	1042441	1064332261	1071	1147041	1228480911	1121	1256641	1408694561
1022	1044484	1067462648	1072	1149184	1231925248	1122	1258884	1412467848
1023	1046529	1070599167	1073	1151329	1235376017	1123	1261129	1416247867
1024	1048576	1073741824	1074	1153476	1238833224	1124	1263376	1420034624
1025	1050625	1076890625	1075	1155625	1242296875	1125	1265625	1423828125
1026	1052676	1080045576	1076	1157776	1245766976	1126	1267876	1427628376
1027	1054729	1083206683	1077	1159929	1249243533	1127	1270129	1431435383
1028	1056784	1086373952	1078	1162084	1252726552	1128	1272384	1435249152
1029	1058841	1089547389	1079	1164241	1256216039	1129	1274641	1439069689
1030	1060900	1092727000	1080	1166400	1259712000	1130	1276900	1442897000
1031	1062961	1095912791	1081	1168561	1263214441	1131	1279161	1446731091
1032	1065024	1099104768	1082	1170724	1266723368	1132	1281424	1450571968
1033	1067089	1102302937	1083	1172889	1270238787	1133	1283689	1454419637
1034	1069156	1105507304	1084	1175056	1273760704	1134	1285956	1458274104
1035	1071225	1108717875	1085	1177225	1277289125	1135	1288225	1462135375
1036	1073296	1111934656	1086	1179396	1280824056	1136	1290496	1466003456
1037	1075369	1115157653	1087	1181569	1284365503	1137	1292769	1469878353
1038	1077444	1118386872	1088	1183744	1287913472	1138	1295044	1473760072
1039	1079521	1121622319	1089	1185921	1291467969	1139	1297321	1477648619
1040	1081600	1124864000	1090	1188100	1295029000	1140	1299600	1481544000
1041	1083681	1128111921	1091	1190281	1298596571	1141	1301881	1485446221
1042	1085764	1131366088	1092	1192464	1302170688	1142	1304164	1489355288
1043	1087849	1134626507	1093	1194649	1305751357	1143	1306449	1493271207
1044	1089936	1137893184	1094	1196836	1309338584	1144	1308736	1497193984
1045	1092025	1141166125	1095	1199025	1312932375	1145	1311025	1501123625
1046	1094116	1144445336	1096	1201216	1316532736	1146	1313316	1505060136
1047	1096209	1147730823	1097	1203409	1320139673	1147	1315609	1509003523
1048	1098304	1151022592	1098	1205604	1323753192	1148	1317904	1512953792
1049	1100401	1154320649	1099	1207801	1327373299	1149	1320201	1516910949
1050	1102500	1157625000	1100	1210000	1331000000	1150	1322500	1520875000

n	n^2	n^3	n	n^2	n^3	n	n^2	n^3
1150	1322500	1520875000	1200	1440000	1728000000	1250	1562500	1953125000
1151	1324801	1524845951	1201	1442401	1732323601	1251	1565001	1957816251
1152	1327104	1528823808	1202	1444804	1736654408	1252	1567504	1962515008
1153	1329409	1532808577	1203	1447209	1740992427	1253	1570009	1967221277
1154	1331716	1536800264	1204	1449616	1745337664	1254	1572516	1971935064
1155	1334025	1540798875	1205	1452025	1749690125	1255	1575025	1976656375
1156	1336336	1544804416	1206	1454436	1754049816	1256	1577536	1981385216
1157	1338649	1548816893	1207	1456849	1758416743	1257	1580049	1986121593
1158	1340964	1552836312	1208	1459264	1762790912	1258	1582564	1990865512
1159	1343281	1556862679	1209	1461681	1767172329	1259	1585081	1995616979
1160	1345600	1560896000	1210	1464100	1771561000	1260	1587600	2000376000
1161	1347921	1564936281	1211	1466521	1775956931	1261	1590121	2005142581
1162	1350244	1568983528	1212	1468944	1780360128	1262	1592644	2009916728
1163	1352569	1573037747	1213	1471369	1784770597	1263	1595169	2014698447
1164	1354896	1577098944	1214	1473796	1789188344	1264	1597696	2019487744
1165	1357225	1581167125	1215	1476225	1793613375	1265	1600225	2024284625
1166	1359556	1585242296	1216	1478656	1798045696	1266	1602756	2029089096
1167	1361889	1589324463	1217	1481089	1802485313	1267	1605289	2033901163
1168	1364224	1593413632	1218	1483524	1806932232	1268	1607824	2038720832
1169	1366561	1597509809	1219	1485961	1811386459	1269	1610361	2043548109
1170	1368900	1601613000	1220	1488400	1815848000	1270	1612900	2048383000
1171	1371241	1605723211	1221	1490841	1820316861	1271	1615441	2053225511
1172	1373584	1609840448	1222	1493284	1824793048	1272	1617984	2058075648
1173	1375929	1613964717	1223	1495729	1829276567	1273	1620529	2062933417
1174	1378276	1618096024	1224	1498176	1833767424	1274	1623076	2067798824
1175	1380625	1622234375	1225	1500625	1838265625	1275	1625625	2072671875
1176	1382976	1626379776	1226	1503076	1842771176	1276	1628176	2077552576
1177	1385329	1630532233	1227	1505529	1847284083	1277	1630729	2082440933
1178	1387684	1634691752	1228	1507984	1851804352	1278	1633284	2087336952
1179	1390041	1638858339	1229	1510441	1856331989	1279	1635841	2092240639
1180	1392400	1643032000	1230	1512900	1860867000	1280	1638400	2097152000
1181	1394761	1647212741	1231	1515361	1865409391	1281	1640961	2102071041
1182	1397124	1651400568	1232	1517824	1869959168	1282	1643524	2106997768
1183	1399489	1655595487	1233	1520289	1874516337	1283	1646089	2111932187
1184	1401856	1659797504	1234	1522756	1879080904	1284	1648656	2116874304
1185	1404225	1664006625	1235	1525225	1883652875	1285	1651225	2121824125
1186	1406596	1668222856	1236	1527696	1888232256	1286	1653796	2126781656
1187	1408969	1672446203	1237	1530169	1892819053	1287	1656369	2131746903
1188	1411344	1676676672	1238	1532644	1897413272	1288	1658944	2136719872
1189	1413721	1680914269	1239	1535121	1902014919	1289	1661521	2141700569
1190	1416100	1685159000	1240	1537600	1906624000	1290	1664100	2146689000
1191	1418481	1689410871	1241	1540081	1911240521	1291	1666681	2151685171
1192	1420864	1693669888	1242	1542564	1915864488	1292	1669264	2156689088
1193	1423249	1697936057	1243	1545049	1920495907	1293	1671849	2161700757
1194	1425636	1702209384	1244	1547536	1925134784	1294	1674436	2166720184
1195	1428025	1706489875	1245	1550025	1929781125	1295	1677025	2171747375
1196	1430416	1710777536	1246	1552516	1934434936	1296	1679616	2176782336
1197	1432809	1715072737	1247	1555009	1939096223	1297	1682209	2181825073
1198	1435204	1719374392	1248	1557504	1943764992	1298	1684804	2186875592
1199	1437601	1723683599	1249	1560001	1948441249	1299	1687401	2191933899
1200	1440000	1728000000	1250	1562500	1953125000	1300	1690000	2197000000

n	n^2	n^3	n	n^2	n^3	n	n^2	n^3
1300	1690000	2197000000	1350	1822500	2460375000	1400	1960000	2744000000
1301	1692601	2202073901	1351	1825201	2465846551	1401	1962801	2749884201
1302	1695294	2207155608	1352	1827904	2471326208	1402	1965604	2755776808
1303	1697809	2212245127	1353	1830609	2476813977	1403	1968409	2761677827
1304	1700416	2217342464	1354	1833316	2482309864	1404	1971216	2767587264
1305	1703025	2222447625	1355	1836025	2487813875	1405	1974025	2773505125
1306	1705636	2227560616	1356	1838736	2493326016	1406	1976836	2779431416
1307	1708249	2232681443	1357	1841449	2498846293	1407	1979649	2785366143
1308	1710864	2237810112	1358	1844164	2504374712	1408	1982464	2791309312
1309	1713481	2242946629	1359	1846881	2509911279	1409	1985281	2797260929
1310	1716100	2248091000	1360	1849600	2515456000	1410	1988100	2803221000
1311	1718721	2253243231	1361	1852321	2521008881	1411	1990921	2809189531
1312	1721344	2258403328	1362	1855044	2526569928	1412	1993744	2815166528
1313	1723969	2263571297	1363	1857769	2532139147	1413	1996569	2821151997
1314	1726596	2268747144	1364	1860496	2537716544	1414	1999396	2827145944
1315	1729225	2273930875	1365	1863225	2543302125	1415	2002225	2833148375
1316	1731856	2279122496	1366	1865956	2548895896	1416	2005056	2839159296
1317	1734489	2284322013	1367	1868689	2554497863	1417	2007889	2845178713
1318	1737124	2289529432	1368	1871424	2560108032	1418	2010724	2851206632
1319	1739761	2294744759	1369	1874161	2565726409	1419	2013561	2857243059
1320	1742400	2299968000	1370	1876900	2571353000	1420	2016400	2863288000
1321	1745041	2305199161	1371	1879641	2576987811	1421	2019241	2869341461
1322	1747684	2310438248	1372	1882384	2582630848	1422	2022084	2875403448
1323	1750329	2315685267	1373	1885129	2588282117	1423	2024929	2881473967
1324	1752976	2320940224	1374	1887876	2593941624	1424	2027776	2887553024
1325	1755625	2326203125	1375	1890625	2599609375	1425	2030625	2893640625
1326	1758276	2331473976	1376	1893376	2605285376	1426	2033476	2899736776
1327	1760929	2336752783	1377	1896129	2610969633	1427	2036329	2905844483
1328	1763584	2342039552	1378	1898884	2616662129	1428	2039184	2911954752
1329	1766241	2347334289	1379	1901641	2622362937	1429	2042041	2918076589
1330	1768900	2352637000	1380	1904400	2628072000	1430	2044900	2924207000
1331	1771561	2357947691	1381	1907161	2633789341	1431	2047761	2930345991
1332	1774224	2363266368	1382	1909924	2639514968	1432	2050624	2936493568
1333	1776889	2368593037	1383	1912689	2645248887	1433	2053489	2942649737
1334	1779556	2373927704	1384	1915456	2650991104	1434	2056356	2948814504
1335	1782225	2379270375	1385	1918225	2656741625	1435	2059225	2954987875
1336	1784896	2384621056	1386	1920996	2662500456	1436	2062096	2961169856
1337	1787569	2389979753	1387	1923769	2668267603	1437	2064969	2967360153
1338	1790244	2395346472	1388	1926544	2674043072	1438	2067844	2973559672
1339	1792921	2400721219	1389	1929321	2679826869	1439	2070721	2979767519
1340	1795600	2406104000	1390	1932100	2685619000	1440	2073600	2985984000
1341	1798281	2411494821	1391	1934881	2691419471	1441	2076481	2992209121
1342	1800964	2416893688	1392	1937664	2697228288	1442	2079364	2998442888
1343	1803649	2422300607	1393	1940449	2703045457	1443	2082249	3004685307
1344	1806336	2427715584	1394	1943236	2708870984	1444	2085136	3010936384
1345	1809025	2433138625	1395	1946025	2714704875	1445	2088025	3017196125
1346	1811716	2438569736	1396	1948816	2720547136	1446	2090916	3023464536
1347	1814409	2444008923	1397	1951609	2726397773	1447	2093809	3029741623
1348	1817104	2449456192	1398	1954404	2732256792	1448	2096704	3036027392
1349	1819801	2454911549	1399	1957201	2738124199	1449	2099601	3042321849
1350	1822500	2460375000	1400	1960000	2744000000	1450	2102500	3048625000

n	n^2	n^3	n	n^2	n^3	n	n^2	n^3
1450	2102500	3048625000	1500	2250000	3375000000	1550	2402500	3723875000
1451	2105401	3054936851	1501	2253001	3381754501	1551	2405601	3731087151
1452	2108304	3061257408	1502	2256004	3388518008	1552	2408704	3738308608
1453	2111209	3067586677	1503	2259009	3395290527	1553	2411809	3745539377
1454	2114116	3073924664	1504	2262016	3402072064	1554	2414916	3752779464
1455	2117025	3080271375	1505	2265025	3408862625	1555	2418025	3760028875
1456	2119936	3086626816	1506	2268036	3415662216	1556	2421136	3767287616
1457	2122849	3092990993	1507	2271049	3422470843	1557	2424249	3774555693
1458	2125764	3099363912	1508	2274064	3429288512	1558	2427364	3781833112
1459	2128681	3105745579	1509	2277081	3436115229	1559	2430481	3789119879
1460	2131600	3112136000	1510	2280100	3442951000	1560	2433600	3796416000
1461	2134521	3118535181	1511	2283121	3449795831	1561	2436721	3803721481
1462	2137444	3124943128	1512	2286144	3456649728	1562	2439844	3811036328
1463	2140369	3131359847	1513	2289169	3463512697	1563	2442969	3818360547
1464	2143296	3137785344	1514	2292196	3470384744	1564	2446096	3825694144
1465	2146225	3144219625	1515	2295225	3477265875	1565	2449225	3833037125
1466	2149156	3150662696	1516	2298256	3484156096	1566	2452356	3840389496
1467	2152089	3157114563	1517	2301289	3491055413	1567	2455489	3847751263
1468	2155024	3163575232	1518	2304324	3497963832	1568	2458624	3855122432
1469	2157961	3170044709	1519	2307361	3504881359	1569	2461761	3862503009
1470	2160900	3176523000	1520	2310400	3511808000	1570	2464900	3869893000
1471	2163841	3183010111	1521	2313441	3518743761	1571	2468041	3877292411
1472	2166784	3189506048	1522	2316484	3525688648	1572	2471184	3884701248
1473	2169729	3196010817	1523	2319529	3532642667	1573	2474329	3892119517
1474	2172676	3202524424	1524	2322576	3539605824	1574	2477476	3899547224
1475	2175625	3209046875	1525	2325625	3546578125	1575	2480625	3906984375
1476	2178576	3215578176	1526	3228676	3553559576	1576	2483776	3914430976
1477	2181529	3222118333	1527	2331729	3560550183	1577	2486929	3921887033
1478	2184484	3228667352	1528	2334784	3567549952	1578	2490084	3829352552
1479	2187441	3235225239	1529	2337841	3574558889	1579	2493241	3936827539
1480	2190400	3241792000	1530	2340900	3581577000	1580	2496400	3944312000
1481	2193361	3248367641	1531	2343961	3588604291	1581	2499561	3951805941
1482	2196324	3254952168	1532	2347024	3595640768	1582	2502724	3959309368
1483	2199289	3261545587	1533	2350089	3602686437	1583	2505889	3966822287
1484	2202256	3268147904	1534	2353156	3609741304	1584	2509056	3974344704
1485	2205225	3274759125	1535	2356225	3616805375	1585	2512225	3981866625
1486	2208196	3281379256	1536	2359296	3623878656	1586	2515396	3989418056
1487	2211169	3288008303	1537	2362369	3630961153	1587	2518569	3996969003
1488	2214144	3294646272	1538	2365444	3638052872	1588	2521744	4004529472
1489	2217121	3301293169	1539	2368521	3645153819	1589	2524921	4012099469
1490	2220100	3307949000	1540	2371600	3652264000	1590	2528100	4019679000
1491	2223081	3314613771	1541	2374681	3659383421	1591	2531281	4027268071
1492	2226064	3321287488	1542	2377764	3666512088	1592	2534464	4034866688
1493	2229049	3327970157	1543	2380849	3673650007	1593	2537649	4042474857
1494	2232036	3334661784	1544	2383936	3680797184	1594	2540836	4050092584
1495	2235025	3341362375	1545	2387025	3687953625	1595	2544025	4057719875
1496	2238016	3348071936	1546	2390116	3695119336	1596	2547216	4065356736
1497	2241009	3354790473	1547	2393209	3702294323	1597	2550409	4073003173
1498	2244004	3361517992	1548	2396304	3709478592	1598	2553604	4080659192
1499	2247001	3368254499	1549	2399401	3716672149	1599	2556801	4088324799
1500	2250000	3375000000	1550	2402500	3723875000	1600	2560000	4096000000

n	n^2	n^3	n	n^2	n^3	n	n^2	n^3
1600	2560000	4096000000	1650	2722500	4492125000	1700	2890000	4915000000
1601	2563201	4103684801	1651	2725801	4500297451	1701	2893401	4921675101
1602	2566404	4111379208	1652	2729104	4508479808	1702	2896804	4928365408
1603	2569609	4119083227	1653	2732409	4516672077	1703	2900209	4935055927
1604	2572816	4126796864	1654	2735716	4524874264	1704	2903616	49417761664
1605	2576025	4134520125	1655	2739025	4533086375	1705	2907025	4956477625
1606	2579236	4142253016	1656	2742336	4541308416	1706	2910436	4965203816
1607	2582449	4149995543	1657	2745649	4549540393	1707	2913849	4973940243
1608	2585664	4157747712	1658	2748964	4557782312	1708	2917264	4982686912
1609	2588881	4165509529	1659	2752281	4566034179	1709	2920681	4991443829
1610	2592100	4173281000	1660	2755600	4574296000	1710	2924100	5000211000
1611	2595321	4181062131	1661	2758921	4582567781	1711	2927521	5008988431
1612	2598544	4188852928	1662	2762244	4590849528	1712	2930944	5017776128
1613	2601769	4196653397	1663	2765569	4599141247	1713	2934369	5026574097
1614	2604996	4204463544	1664	2768896	4607442944	1714	2937796	5035382344
1615	2608225	4212283375	1665	2772225	4615754625	1715	2941225	5044200875
1616	2611456	4220112896	1666	2775556	4624076296	1716	2944656	5053029696
1617	2614689	4227952113	1667	2778889	4632407963	1717	2948089	5061868813
1618	2617924	4235801032	1668	2782224	4640749632	1718	2951524	5070718232
1619	2621161	4243659659	1669	2785561	4649101309	1719	2954961	5079577959
1620	2624400	4251528000	1670	2788900	4657463000	1720	2958400	5088448000
1621	2627641	4259406061	1671	2792241	4665834711	1721	2961841	5097328361
1622	2630884	4267293848	1672	2795584	4674216448	1722	2965284	5106219048
1623	2634129	4275191367	1673	2798929	4682608217	1723	2968729	5115120067
1624	2637376	4283098624	1674	2802276	4691010024	1724	2972176	5124031424
1625	2640625	4291015625	1675	2805625	4699421785	1725	2975625	5132953125
1626	2643876	4298942376	1676	2808976	4707843776	1726	2979076	5141885176
1627	2647129	4306878883	1677	2812329	4716275733	1727	2982529	5150827583
1628	2650384	4314825152	1678	2815684	4724717752	1728	2985984	5159780352
1629	2653641	4322781189	1679	2819041	4733169839	1729	2989441	5168743489
1630	2656900	4330747000	1680	2822400	4741632000	1730	2992900	5177717000
1631	2660161	4338722591	1681	2825761	4750104241	1731	2996361	5186700891
1632	2663424	4346707968	1682	2829124	4758586568	1732	2999824	5195695168
1633	2666689	4354703137	1683	2832489	4767078987	1733	3003289	5204699837
1634	2669956	4362708104	1684	2835856	4775581504	1734	3006756	5213714904
1635	2673225	4370722875	1685	2839225	4784094125	1735	3010225	5222740375
1636	2676496	4378747456	1686	2842596	4792616856	1736	3013696	5231776256
1637	2679769	4386781853	1687	2845969	4801149703	1737	3017169	5240822553
1638	2683044	4394826072	1688	2849344	4809692672	1738	3020644	5249879272
1639	2686321	4402880119	1689	2852721	4818245769	1739	3024121	5258946419
1640	2689600	4410944000	1690	2856100	4826809000	1740	3027600	5268024000
1641	2692881	4419017721	1691	2859481	4835382371	1741	3031081	5277112021
1642	2696164	4427101288	1692	2862864	4843965888	1742	3034564	5286210488
1643	2699449	4435194707	1693	2866249	4852559557	1743	3038049	5295319407
1644	2702736	4443297984	1694	2869636	4861163384	1744	3041536	5304438784
1645	2706025	4451411125	1695	2873025	4869777375	1745	3045025	5313568625
1646	2709316	4459534136	1696	2876416	4878401536	1746	3048516	5322708936
1647	2712609	4467667023	1697	2879809	4887035873	1747	3052009	5331859723
1648	2715904	4475809792	1698	2883204	4895680392	1748	3055504	5341020992
1649	2719201	4483962449	1699	2886601	4904335099	1749	3059001	5350192749
1650	2722500	4492125000	1700	2890000	4913000000	1750	3062500	5359375000

n	n^2	n^3	n	n^2	n^3	n	n^2	n^3
1750	3062500	5359375000	1800	3240000	5832000000	1850	3422500	6331625000
1751	3066001	5368567751	1801	3243601	5841725401	1851	3426201	6341898051
1752	3069504	5377771008	1802	3247204	5851461608	1852	3429904	6352182208
1753	3073009	5386984777	1803	3250809	5861208627	1853	3433609	6362477477
1754	3076516	5396209064	1804	3254416	5870966464	1854	3437316	6372783864
1755	3080025	5405443875	1805	3258025	5880735125	1855	3441025	6383101375
1756	3083536	5414689216	1806	3261636	5890514616	1856	3444736	6393430016
1757	3087049	5423945093	1807	3265249	5900304943	1857	3448449	6403769793
1758	3090564	5433211512	1808	3268864	5910106112	1858	3452164	6414120712
1759	3094081	5442488479	1809	3272481	5919918162	1859	3455881	6424482779
1760	3097600	5451776000	1810	3276100	5929741000	1860	3459600	6434856000
1761	3101121	5461074081	1811	3279721	5939574731	1861	3463321	6445240381
1762	3104644	5470382728	1812	3283344	5949419328	1862	3467044	6455635928
1763	3108169	5479701947	1813	3286969	5959274797	1863	3470769	6466042647
1764	3111696	5489031744	1814	3290596	5969141144	1864	3474496	6476460544
1765	3115225	5498372125	1815	3294225	5979018375	1865	3478225	6486889625
1766	3118756	5507723096	1816	3297856	5988906496	1866	3481956	6497329896
1767	3122289	5517084663	1817	3301489	5998805513	1867	3485689	6507781363
1768	3125824	5526456832	1818	3305124	6008715432	1868	3489424	6518244032
1769	3129361	5535839609	1819	3308761	6018636259	1869	3493161	6528717909
1770	3132900	5545233000	1820	3312400	6028568000	1870	3496900	6539203000
1771	3136441	5554637011	1821	3316041	6038510661	1871	3500641	6549699311
1772	3139984	5564051648	1822	3319684	6048464248	1872	3504384	6560206848
1773	3143529	5573476917	1823	3323329	6058428767	1873	3508129	6570725617
1774	3147076	5582912824	1824	3326976	6068404224	1874	3511876	6581255624
1775	3150625	5592359375	1825	3330625	6078390625	1875	3515625	6591796875
1776	3154176	5601816576	1826	3334276	6088387976	1876	3519376	6602349376
1777	3157729	5611284433	1827	3337929	6098396283	1877	3523129	6612913133
1778	3161284	5620762929	1828	3341584	6108415552	1878	3526884	6623488152
1779	3164841	5630252139	1829	3345241	6118445789	1879	3530641	6634074439
1780	3168400	5639752000	1830	3348900	6128487000	1880	3534400	6644672000
1781	3171961	5649262541	1831	3352561	6138539191	1881	3538161	6655280841
1782	3175524	5658783768	1832	3356224	6148602368	1882	3541924	6665900968
1783	3179089	5668315687	1833	3359889	6158676537	1883	3545689	6676532387
1784	3182656	5677858304	1834	3363556	6168761704	1884	3549456	6687175104
1785	3186225	5687411625	1835	3367225	6178857875	1885	3553225	6697829125
1786	3189796	5696975656	1836	3370896	6188965056	1886	3556996	6708494456
1787	3193369	5706550403	1837	3374569	6199083253	1887	3560769	6619171103
1788	3196944	5716135872	1838	3378244	6209212472	1888	3564544	6629859072
1789	3200521	5725732069	1839	3381921	6219352719	1889	3568321	6640558369
1790	3204100	5735339000	1840	3385600	6229504000	1890	3572100	6751269000
1791	3207681	5744956671	1841	3389281	6239666321	1891	3575881	6772724288
1792	3211264	5754585088	1842	3392964	6249839688	1892	3579664	6772724288
1793	3214849	5764224257	1843	3396649	6260024107	1893	3583449	6783468957
1794	3218436	5773874184	1844	3400336	6270219584	1894	3587236	6794224984
1795	3222025	5783534875	1845	3404025	6280426125	1895	3591025	6804992375
1796	3225616	5793206336	1846	3407716	6290643736	1896	3594816	6815771136
1797	3229209	5802888573	1847	3411409	6300872423	1897	3598609	6826561273
1798	3232804	5812581592	1848	3415104	6311112192	1898	3602404	6837362792
1799	3226401	5822285399	1849	3418801	6321363049	1899	3606201	6848175699
1800	3240000	5832000000	1850	3422500	6331625000	1900	3610000	6859000000

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	— ∞	0,0000	0,6931	1,0986	1,3863	1,6094	1,7918	1,9459	2,0794	2,1972
10	2,3026	2,3979	2,4849	2,5649	2,6391	2,7081	2,7726	2,8332	2,8904	2,9444
20	2,9957	3,0445	3,0910	3,1355	3,1781	3,2189	3,2581	3,2958	3,3322	3,3673
30	3,4012	3,4340	3,4657	3,4965	3,5264	3,5553	3,5835	3,6109	3,6376	3,6636
40	3,6889	3,7136	3,7377	3,7612	3,7842	3,8067	3,8286	3,8501	3,8712	3,8918
50	3,9120	3,9318	3,9512	3,9703	3,9890	4,0073	4,0254	4,0431	4,0604	4,0775
60	4,0943	4,1109	4,1271	4,1431	4,1589	4,1744	4,1897	4,2047	4,2195	4,2341
70	4,2485	4,2627	4,2767	4,2905	4,3041	4,3175	4,3307	4,3438	4,3567	4,3694
80	4,3820	4,3944	4,4067	4,4188	4,4308	4,4427	4,4543	4,4659	4,4773	4,4886
90	4,4998	4,5109	4,5218	4,5326	4,5433	4,5539	4,5643	4,5747	4,5850	4,5951
100	4,6052	4,6151	4,6250	4,6347	4,6444	4,6540	4,6634	4,6728	4,6821	4,6913
110	4,7005	4,7095	4,7185	4,7274	4,7362	4,7449	4,7536	4,7622	4,7707	4,7791
120	4,7875	4,7958	4,8040	4,8122	4,8203	4,8283	4,8363	4,8442	4,8520	4,8598
130	4,8675	4,8752	4,8828	4,8903	4,8978	4,9053	4,9127	4,9200	4,9273	4,9345
140	4,9416	4,9488	4,9558	4,9628	4,9698	4,9767	4,9836	4,9904	4,9972	5,0039
150	5,0106	5,0173	5,0239	5,0304	5,0370	5,0434	5,0499	5,0562	5,0626	5,0689
160	5,0752	5,0814	5,0876	5,0938	5,0999	5,1059	5,1120	5,1180	5,1240	5,1299
170	5,1358	5,1417	5,1475	5,1533	5,1591	5,1648	5,1705	5,1761	5,1818	5,1874
180	5,1930	5,1985	5,2040	5,2095	5,2149	5,2204	5,2257	5,2311	5,2364	5,2417
190	5,2470	5,2523	5,2575	5,2627	5,2679	5,2730	5,2781	5,2832	5,2883	5,2933
200	5,2983	5,3033	5,3083	5,3132	5,3181	5,3230	5,3279	5,3327	5,3375	5,3423
210	5,3471	5,3519	5,3566	5,3613	5,3660	5,3706	5,3753	5,3799	5,3845	5,3891
220	5,3936	5,3982	5,4027	5,4072	5,4116	5,4161	5,4205	5,4250	5,4293	5,4337
230	5,4381	5,4424	5,4467	5,4510	5,4553	5,4596	5,4638	5,4681	5,4723	5,4765
240	5,4806	5,4848	5,4889	5,4931	5,4972	5,5013	5,5053	5,5094	5,5134	5,5175
250	5,5215	5,5255	5,5294	5,5334	5,5373	5,5413	5,5452	5,5491	5,5530	5,5568
260	5,5607	5,5645	5,5683	5,5722	5,5759	5,5797	5,5835	5,5872	5,5910	5,5947
270	5,5984	5,6021	5,6058	5,6095	5,6131	5,6168	5,6204	5,6240	5,6276	5,6312
280	5,6348	5,6384	5,6419	5,6454	5,6490	5,6525	5,6560	5,6595	5,6630	5,6664
290	5,6699	5,6733	5,6768	5,6802	5,6836	5,6870	5,6904	5,6937	5,6971	5,7004
300	5,7038	5,7071	5,7104	5,7137	5,7170	5,7203	5,7236	5,7268	5,7301	5,7333
310	5,7366	5,7398	5,7430	5,7462	5,7494	5,7526	5,7557	5,7589	5,7621	5,7652
320	5,7683	5,7714	5,7746	5,7777	5,7807	5,7838	5,7869	5,7900	5,7930	5,7961
330	5,7991	5,8021	5,8051	5,8081	5,8111	5,8141	5,8171	5,8201	5,8230	5,8260
340	5,8289	5,8319	5,8348	5,8377	5,8406	5,8435	5,8464	5,8493	5,8522	5,8551
350	5,8579	5,8608	5,8636	5,8665	5,8693	5,8721	5,8749	5,8777	5,8805	5,8833
360	5,8861	5,8889	5,8916	5,8944	5,8972	5,8999	5,9026	5,9054	5,9081	5,9108
370	5,9135	5,9162	5,9189	5,9216	5,9243	5,9269	5,9296	5,9322	5,9349	5,9375
380	5,9402	5,9428	5,9454	5,9480	5,9506	5,9532	5,9558	5,9584	5,9610	5,9636
390	5,9661	5,9687	5,9713	5,9738	5,9764	5,9789	5,9814	5,9839	5,9865	5,9890
400	5,9915	5,9940	5,9965	5,9989	6,0014	6,0039	6,0064	6,0088	6,0113	6,0137
410	6,0162	6,0186	6,0210	6,0234	6,0259	6,0283	6,0307	6,0331	6,0355	6,0379
420	6,0403	6,0426	6,0450	6,0474	6,0497	6,0521	6,0544	6,0568	6,0591	6,0615
430	6,0638	6,0661	6,0684	6,0707	6,0730	6,0753	6,0776	6,0799	6,0822	6,0845
440	6,0868	6,0890	6,0913	6,0936	6,0958	6,0981	6,1003	6,1026	6,1048	6,1070
450	6,1092	6,1115	6,1137	6,1159	6,1181	6,1203	6,1225	6,1247	6,1269	6,1291
460	6,1312	6,1334	6,1356	6,1377	6,1399	6,1420	6,1442	6,1463	6,1485	6,1506
470	6,1527	6,1549	6,1570	6,1591	6,1612	6,1633	6,1654	6,1675	6,1696	6,1717
480	6,1738	6,1759	6,1779	6,1800	6,1821	6,1841	6,1862	6,1883	6,1903	6,1924
490	6,1944	6,1964	6,1985	6,2005	6,2025	6,2046	6,2066	6,2086	6,2106	6,2126

$$\ln 10^{\pm 1} = \pm 2,30258509, \quad \ln 10^{\pm 2} = \pm 4,60517018, \quad \ln 10^{\pm 3} = \pm 6,90775527, \quad \ln 10^{\pm 4} = \pm 9,21034037, \quad \ln 10^{\pm 5} = \pm 11,51292546.$$

$$\ln 10^{\pm 5} = \pm 11,5129.$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
500	6,2146	6,2166	6,2186	6,2206	6,2226	6,2246	6,2265	6,2285	6,2305	6,2324
510	6,2344	6,2364	6,2383	6,2403	6,2422	6,2442	6,2461	6,2480	6,2500	6,2519
520	6,2538	6,2558	6,2577	6,2596	6,2615	6,2634	6,2653	6,2672	6,2691	6,2710
530	6,2729	6,2748	6,2767	6,2785	6,2804	6,2823	6,2841	6,2860	6,2879	6,2897
540	6,2916	6,2934	6,2953	6,2971	6,2989	6,3008	6,3026	6,3044	6,3063	6,3081
550	6,3099	6,3117	6,3135	6,3154	6,3172	6,3190	6,3208	6,3226	6,3244	6,3261
560	6,3279	6,3297	6,3315	6,3333	6,3351	6,3368	6,3386	6,3404	6,3421	6,3439
570	6,3456	6,3474	6,3491	6,3509	6,3526	6,3544	6,3561	6,3578	6,3596	6,3613
580	6,3630	6,3648	6,3665	6,3682	6,3699	6,3716	6,3733	6,3750	6,3767	6,3784
590	6,3801	6,3818	6,3835	6,3852	6,3869	6,3886	6,3902	6,3919	6,3936	6,3953
600	6,3969	6,3986	6,4003	6,4019	6,4036	6,4052	6,4069	6,4085	6,4102	6,4118
610	6,4135	6,4151	6,4167	6,4184	6,4200	6,4216	6,4232	6,4249	6,4265	6,4281
620	6,4297	6,4313	6,4329	6,4345	6,4362	6,4378	6,4394	6,4409	6,4425	6,4441
630	6,4457	6,4473	6,4489	6,4505	6,4520	6,4536	6,4552	6,4568	6,4583	6,4599
640	6,4615	6,4630	6,4646	6,4661	6,4677	6,4693	6,4708	6,4723	6,4739	6,4754
650	6,4770	6,4785	6,4800	6,4816	6,4831	6,4846	6,4862	6,4877	6,4892	6,4907
660	6,4922	6,4938	6,4953	6,4968	6,4983	6,4998	6,5013	6,5028	6,5043	6,5058
670	6,5073	6,5088	6,5103	6,5117	6,5132	6,5147	6,5162	6,5177	6,5191	6,5206
680	6,5221	6,5236	6,5250	6,5265	6,5280	6,5294	6,5309	6,5323	6,5338	6,5352
690	6,5367	6,5381	6,5396	6,5410	6,5425	6,5439	6,5453	6,5468	6,5482	6,5497
700	6,5511	6,5525	6,5539	6,5554	6,5568	6,5582	6,5596	6,5610	6,5624	6,5639
710	6,5653	6,5667	6,5681	6,5695	6,5709	6,5723	6,5737	6,5751	6,5765	6,5779
720	6,5793	6,5806	6,5820	6,5834	6,5848	6,5862	6,5876	6,5889	6,5903	6,5917
730	6,5930	6,5944	6,5958	6,5971	6,5985	6,5999	6,6012	6,6026	6,6039	6,6053
740	6,6067	6,6080	6,6093	6,6107	6,6120	6,6134	6,6147	6,6161	6,6174	6,6187
750	6,6201	6,6214	6,6227	6,6241	6,6254	6,6267	6,6280	6,6294	6,6307	6,6320
760	6,6333	6,6346	6,6359	6,6373	6,6386	6,6399	6,6412	6,6425	6,6438	6,6451
770	6,6464	6,6477	6,6490	6,6503	6,6516	6,6529	6,6542	6,6554	6,6567	6,6580
780	6,6593	6,6606	6,6619	6,6631	6,6644	6,6657	6,6670	6,6682	6,6695	6,6708
790	6,6720	6,6733	6,6746	6,6758	6,6771	6,6783	6,6796	6,6809	6,6821	6,6834
800	6,6846	6,6859	6,6871	6,6884	6,6896	6,6908	6,6921	6,6933	6,6946	6,6958
810	6,6970	6,6983	6,6995	6,7007	6,7020	6,7032	6,7044	6,7056	6,7069	6,7081
820	6,7093	6,7105	6,7117	6,7130	6,7142	6,7154	6,7166	6,7178	6,7190	6,7202
830	6,7214	6,7226	6,7238	6,7250	6,7262	6,7274	6,7286	6,7298	6,7310	6,7322
840	6,7334	6,7346	6,7358	6,7370	6,7382	6,7393	6,7405	6,7417	6,7429	6,7441
850	6,7452	6,7464	6,7476	6,7488	6,7499	6,7511	6,7523	6,7534	6,7546	6,7558
860	6,7569	6,7581	6,7593	6,7604	6,7616	6,7627	6,7639	6,7650	6,7662	6,7673
870	6,7685	6,7696	6,7708	6,7719	6,7731	6,7742	6,7754	6,7765	6,7776	6,7788
880	6,7799	6,7811	6,7822	6,7833	6,7845	6,7856	6,7867	6,7878	6,7890	6,7901
890	6,7912	6,7923	6,7935	6,7946	6,7957	6,7968	6,7979	6,7991	6,8002	6,8013
900	6,8024	6,8035	6,8046	6,8057	6,8068	6,8079	6,8090	6,8101	6,8112	6,8123
910	6,8134	6,8145	6,8156	6,8167	6,8178	6,8189	6,8200	6,8211	6,8222	6,8233
920	6,8244	6,8255	6,8265	6,8276	6,8287	6,8298	6,8309	6,8320	6,8330	6,8341
930	6,8352	6,8363	6,8373	6,8384	6,8395	6,8405	6,8416	6,8427	6,8437	6,8448
940	6,8459	6,8469	6,8480	6,8491	6,8501	6,8512	6,8522	6,8533	6,8544	6,8554
950	6,8565	6,8575	6,8586	6,8596	6,8607	6,8617	6,8628	6,8638	6,8648	6,8659
960	6,8669	6,8680	6,8690	6,8701	6,8711	6,8721	6,8732	6,8742	6,8752	6,8763
970	6,8773	6,8783	6,8794	6,8804	6,8814	6,8824	6,8835	6,8845	6,8855	6,8865
980	6,8876	6,8886	6,8896	6,8906	6,8916	6,8926	6,8937	6,8947	6,8957	6,8967
990	6,8977	6,8987	6,8997	6,9007	6,9017	6,9027	6,9037	6,9047	6,9057	6,9068

$\ln 10^{\pm 8} = \pm 18,4207$, $\ln 10^{\pm 7} = \pm 16,1181$, $\ln 10^{\pm 6} = \pm 13,8155$.

Grad	Sinus							Grad
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454	0,01745	89
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02908	0,03199	0,03490	88
2	0,03490	0,03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943	0,05234	87
3	0,05234	0,05524	0,05814	0,06105	0,06395	0,06685	0,06976	86
4	0,06976	0,07266	0,07556	0,07846	0,08136	0,08426	0,08716	85
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09585	0,09874	0,10164	0,10453	84
6	0,10453	0,10742	0,11031	0,11320	0,11609	0,11898	0,12187	83
7	0,12187	0,12476	0,12764	0,13053	0,13341	0,13629	0,13917	82
8	0,13917	0,14205	0,14493	0,14781	0,15069	0,15356	0,15643	81
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078	0,17365	80
10	0,17365	0,17651	0,17937	0,18224	0,18509	0,18795	0,19081	79
11	0,19081	0,19366	0,19652	0,19937	0,20222	0,20507	0,20791	78
12	0,20791	0,21076	0,21360	0,21644	0,21928	0,22212	0,22495	77
13	0,22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910	0,24192	76
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601	0,25882	75
15	0,25882	0,26163	0,26443	0,26724	0,27004	0,27284	0,27564	74
16	0,27564	0,27843	0,28123	0,28402	0,28680	0,28959	0,29237	73
17	0,29237	0,29515	0,29793	0,30071	0,30348	0,30625	0,30902	72
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0,32006	0,32282	0,32557	71
19	0,32557	0,32832	0,33106	0,33381	0,33655	0,33929	0,34202	70
20	0,34202	0,34475	0,34748	0,35021	0,35293	0,35565	0,35837	69
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0,37191	0,37461	68
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0,38805	0,39073	67
23	0,39073	0,39341	0,39608	0,39875	0,40141	0,40408	0,40674	66
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998	0,42262	65
25	0,42262	0,42525	0,42788	0,43051	0,43313	0,43575	0,43837	64
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45140	0,45399	63
27	0,45399	0,45658	0,45917	0,46175	0,46433	0,46690	0,46947	62
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226	0,48481	61
29	0,48481	0,48735	0,48989	0,49242	0,49495	0,49748	0,50000	60
30	0,50000	0,50252	0,50503	0,50754	0,51004	0,51254	0,51504	59
31	0,51504	0,51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745	0,52992	58
32	0,52992	0,53238	0,53484	0,53730	0,53975	0,54220	0,54464	57
33	0,54464	0,54708	0,54951	0,55194	0,55436	0,55678	0,55919	56
34	0,55919	0,56160	0,56401	0,56641	0,56880	0,57119	0,57358	55
35	0,57358	0,57596	0,57833	0,58070	0,58307	0,58543	0,58779	54
36	0,58779	0,59014	0,59248	0,59482	0,59716	0,59949	0,60182	53
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0,61337	0,61566	52
38	0,61566	0,61795	0,62024	0,62251	0,62479	0,62706	0,62932	51
39	0,62932	0,63158	0,63383	0,63608	0,63832	0,64056	0,64279	50
40	0,64279	0,64501	0,64723	0,64945	0,65166	0,65386	0,65606	49
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0,66480	0,66697	0,66913	48
42	0,66913	0,67129	0,67344	0,67559	0,67773	0,67987	0,68200	47
43	0,68200	0,68412	0,68624	0,68835	0,69046	0,69256	0,69466	46
44	0,69466	0,69675	0,69883	0,70091	0,70298	0,70505	0,70711	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	
	Cosinus							

Grad	Cosinus							Grad
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	1,00000	1,00000	0,99998	0,99996	0,99993	0,99989	0,99985	89
1	0,99985	0,99979	0,99973	0,99966	0,99958	0,99949	0,99939	88
2	0,99939	0,99929	0,99917	0,99905	0,99892	0,99878	0,99863	87
3	0,99863	0,99847	0,99831	0,99813	0,99795	0,99776	0,99756	86
4	0,99756	0,99736	0,99714	0,99692	0,99668	0,99644	0,99619	85
5	0,99619	0,99594	0,99567	0,99540	0,99511	0,99482	0,99452	84
6	0,99452	0,99421	0,99390	0,99357	0,99324	0,99290	0,99255	83
7	0,99255	0,99219	0,99182	0,99144	0,99106	0,99067	0,99027	82
8	0,99027	0,98986	0,98944	0,98902	0,98858	0,98814	0,98769	81
9	0,98769	0,98723	0,98676	0,98629	0,98580	0,98531	0,98481	80
10	0,98481	0,98430	0,98378	0,98325	0,98272	0,98218	0,98163	79
11	0,98163	0,98107	0,98050	0,97992	0,97934	0,97875	0,97815	78
12	0,97815	0,97754	0,97692	0,97630	0,97566	0,97502	0,97437	77
13	0,97437	0,97371	0,97304	0,97237	0,97169	0,97100	0,97030	76
14	0,97030	0,96959	0,96887	0,96815	0,96742	0,96667	0,96593	75
15	0,96593	0,96517	0,96440	0,96363	0,96285	0,96206	0,96126	74
16	0,96126	0,96046	0,95964	0,95882	0,95799	0,95715	0,95630	73
17	0,95630	0,95545	0,95459	0,95372	0,95284	0,95195	0,95106	72
18	0,95106	0,95015	0,94924	0,94832	0,94740	0,94646	0,94552	71
19	0,94552	0,94457	0,94361	0,94264	0,94167	0,94068	0,93969	70
20	0,93969	0,93869	0,93769	0,93667	0,93565	0,93462	0,93358	69
21	0,93358	0,93253	0,93148	0,93042	0,92935	0,92827	0,92718	68
22	0,92718	0,92609	0,92499	0,92388	0,92276	0,92164	0,92050	67
23	0,92050	0,91936	0,91822	0,91706	0,91590	0,91472	0,91355	66
24	0,91355	0,91236	0,91116	0,90996	0,90875	0,90753	0,90631	65
25	0,90631	0,90507	0,90383	0,90259	0,90133	0,90007	0,89879	64
26	0,89879	0,89757	0,89623	0,89493	0,89363	0,89232	0,89101	63
27	0,89101	0,88968	0,88835	0,88701	0,88566	0,88431	0,88295	62
28	0,88295	0,88158	0,88020	0,87882	0,87743	0,87603	0,87462	61
29	0,87462	0,87321	0,87178	0,87036	0,86892	0,86748	0,86603	60
30	0,86603	0,86457	0,86310	0,86163	0,86015	0,85866	0,85717	59
31	0,85717	0,85567	0,85416	0,85264	0,85112	0,84959	0,84805	58
32	0,84805	0,84650	0,84495	0,84339	0,84182	0,84025	0,83867	57
33	0,83867	0,83708	0,83549	0,83389	0,83228	0,83066	0,82904	56
34	0,82904	0,82741	0,82577	0,82413	0,82248	0,82082	0,81915	55
35	0,81915	0,81748	0,81580	0,81412	0,81242	0,81072	0,80902	54
36	0,80902	0,80730	0,80558	0,80386	0,80212	0,80038	0,79864	53
37	0,79864	0,79688	0,79512	0,79335	0,79158	0,78980	0,78801	52
38	0,78801	0,78622	0,78442	0,78261	0,78079	0,77897	0,77715	51
39	0,77715	0,77531	0,77347	0,77162	0,76977	0,76791	0,76604	50
40	0,76604	0,76417	0,76229	0,76041	0,75851	0,75661	0,75471	49
41	0,75471	0,75280	0,75088	0,74896	0,74703	0,74509	0,74314	48
42	0,74314	0,74120	0,73924	0,73728	0,73531	0,73333	0,73135	47
43	0,73135	0,72937	0,72737	0,72537	0,72337	0,72136	0,71934	46
44	0,71934	0,71732	0,71529	0,71325	0,71121	0,70916	0,70711	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Grad

Sinus

Grad	Tangens							
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01455	0,01746	89
1	0,01746	0,02036	0,02328	0,02619	0,02910	0,03201	0,03492	88
2	0,03492	0,03783	0,04075	0,04366	0,04658	0,04949	0,05241	87
3	0,05241	0,05533	0,05824	0,06116	0,06408	0,06700	0,06993	86
4	0,06993	0,07285	0,07578	0,07870	0,08163	0,08456	0,08749	85
5	0,08749	0,09042	0,09335	0,09629	0,09923	0,10216	0,10510	84
6	0,10510	0,10805	0,11099	0,11394	0,11688	0,11983	0,12278	83
7	0,12278	0,12574	0,12869	0,13165	0,13461	0,13758	0,14054	82
8	0,14054	0,14351	0,14648	0,14945	0,15243	0,15540	0,15838	81
9	0,15838	0,16137	0,16435	0,16734	0,17033	0,17333	0,17633	80
10	0,17633	0,17933	0,18233	0,18534	0,18835	0,19136	0,19438	79
11	0,19438	0,19740	0,20042	0,20345	0,20648	0,20952	0,21256	78
12	0,21256	0,21560	0,21864	0,22169	0,22475	0,22781	0,23087	77
13	0,23087	0,23393	0,23700	0,24008	0,24316	0,24624	0,24933	76
14	0,24933	0,25242	0,25552	0,25862	0,26172	0,26483	0,26795	75
15	0,26795	0,27107	0,27419	0,27732	0,28046	0,28360	0,28675	74
16	0,28675	0,28990	0,29305	0,29621	0,29938	0,30255	0,30573	73
17	0,30573	0,30891	0,31210	0,31530	0,31850	0,32171	0,32492	72
18	0,32492	0,32814	0,33136	0,33460	0,33783	0,34108	0,34433	71
19	0,34433	0,34758	0,35085	0,35412	0,35740	0,36068	0,36397	70
20	0,36397	0,36727	0,37057	0,37388	0,37720	0,38053	0,38386	69
21	0,38386	0,38721	0,39055	0,39391	0,39727	0,40065	0,40403	68
22	0,40403	0,40741	0,41081	0,41421	0,41763	0,42105	0,42447	67
23	0,42447	0,42791	0,43136	0,43481	0,43828	0,44175	0,44523	66
24	0,44523	0,44872	0,45222	0,45573	0,45924	0,46277	0,46631	65
25	0,46631	0,46985	0,47341	0,47698	0,48055	0,48414	0,48773	64
26	0,48773	0,49134	0,49495	0,49858	0,50222	0,50587	0,50953	63
27	0,50953	0,51319	0,51688	0,52057	0,52427	0,52798	0,53171	62
28	0,53171	0,53545	0,53920	0,54296	0,54673	0,55051	0,55431	61
29	0,55431	0,55812	0,56194	0,56577	0,56962	0,57348	0,57735	60
30	0,57735	0,58124	0,58513	0,58905	0,59297	0,59691	0,60086	59
31	0,60086	0,60483	0,60881	0,61280	0,61681	0,62083	0,62487	58
32	0,62487	0,62892	0,63299	0,63707	0,64117	0,64528	0,64941	57
33	0,64941	0,65355	0,65771	0,66189	0,66608	0,67028	0,67451	56
34	0,67451	0,67875	0,68301	0,68728	0,69157	0,69588	0,70021	55
35	0,70021	0,70455	0,70891	0,71329	0,71769	0,72211	0,72654	54
36	0,72654	0,73100	0,73547	0,73996	0,74447	0,74900	0,75355	53
37	0,75355	0,75812	0,76272	0,76733	0,77196	0,77661	0,78129	52
38	0,78129	0,78598	0,79070	0,79544	0,80020	0,80498	0,80978	51
39	0,80978	0,81461	0,81946	0,82434	0,82923	0,83415	0,83910	50
40	0,83910	0,84407	0,84906	0,85408	0,85912	0,86419	0,86929	49
41	0,86929	0,87441	0,87955	0,88473	0,88992	0,89515	0,90040	48
42	0,90040	0,90569	0,91099	0,91633	0,92170	0,92709	0,93252	47
43	0,93252	0,93797	0,94345	0,94896	0,95451	0,96008	0,96569	46
44	0,96569	0,97133	0,97700	0,98270	0,98843	0,99420	1,00000	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Grad
Cotangens								

Grad	Cotangens							Grad
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	∞	343,77371	171,88540	114,58865	85,93979	68,75009	57,28996	89
1	57,28996	49,10388	42,96408	38,18846	34,36777	31,24158	28,63625	88
2	28,63625	26,43160	24,54176	22,90377	21,47040	20,20555	19,08114	87
3	19,08114	18,07498	17,16934	16,34986	15,60478	14,92442	14,30067	86
4	14,30067	13,72674	13,19688	12,70621	12,25051	11,82617	11,43005	85
5	11,43005	11,05943	10,71191	10,38540	10,07803	9,78817	9,51436	84
6	9,51436	9,25530	9,00983	8,77689	8,55555	8,34496	8,14435	83
7	8,14435	7,95302	7,77035	7,59575	7,42871	7,26873	7,11537	82
8	7,11537	6,96823	6,82694	6,69116	6,56055	6,43484	6,31375	81
9	6,31375	6,19703	6,08444	5,97576	5,87080	5,76937	5,67128	80
10	5,67128	5,57638	5,48451	5,39552	5,30928	5,22566	5,14455	79
11	5,14455	5,06584	4,98940	4,91516	4,84300	4,77286	4,70463	78
12	4,70463	4,63825	4,57363	4,51071	4,44942	4,38966	4,33148	77
13	4,33148	4,27471	4,21933	4,16530	4,11256	4,06107	4,01078	76
14	4,01078	3,96165	3,91364	3,86671	3,82083	3,77595	3,73205	75
15	3,73205	3,68909	3,64705	3,60588	3,56557	3,52609	3,48741	74
16	3,48741	3,44951	3,41236	3,37594	3,34023	3,30521	3,27085	73
17	3,27085	3,23714	3,20406	3,17159	3,13972	3,10842	3,07768	72
18	3,07768	3,04749	3,01782	2,98869	2,96004	2,93189	2,90421	71
19	2,90421	2,87700	2,85023	2,82391	2,79802	2,77254	2,74748	70
20	2,74748	2,72281	2,69853	2,67462	2,65109	2,62791	2,60509	69
21	2,60509	2,58261	2,56046	2,53865	2,51715	2,49597	2,47509	68
22	2,47509	2,45451	2,43422	2,41421	2,39449	2,37504	2,35585	67
23	2,35585	2,33693	2,31826	2,29984	2,28167	2,26374	2,24604	66
24	2,24604	2,22857	2,21132	2,19430	2,17749	2,16090	2,14451	65
25	2,14451	2,12832	2,11233	2,09654	2,08094	2,06553	2,05030	64
26	2,05030	2,03526	2,02039	2,00569	1,99116	1,97680	1,96261	63
27	1,96261	1,94858	1,93470	1,92098	1,90741	1,89400	1,88073	62
28	1,88073	1,86760	1,85462	1,84177	1,82906	1,81649	1,80405	61
29	1,80405	1,79174	1,77955	1,76749	1,75556	1,74375	1,73205	60
30	1,73205	1,72047	1,70901	1,69766	1,68643	1,67530	1,66428	59
31	1,66428	1,65337	1,64256	1,63185	1,62125	1,61074	1,60033	58
32	1,60033	1,59002	1,57981	1,56969	1,55966	1,54972	1,53987	57
33	1,53987	1,53010	1,52043	1,51084	1,50133	1,49190	1,48256	56
34	1,48256	1,47330	1,46411	1,45501	1,44598	1,43703	1,42815	55
35	1,42815	1,41934	1,41061	1,40195	1,39336	1,38484	1,37638	54
36	1,37638	1,36800	1,35968	1,35142	1,34323	1,33511	1,32704	53
37	1,32704	1,31904	1,31110	1,30323	1,29541	1,28764	1,27994	52
38	1,27994	1,27230	1,26471	1,25717	1,24969	1,24227	1,23490	51
39	1,23490	1,22758	1,22031	1,21310	1,20593	1,19882	1,19175	50
40	1,19175	1,18474	1,17777	1,17085	1,16398	1,15715	1,15037	49
41	1,15037	1,14363	1,13694	1,13029	1,12369	1,11713	1,11061	48
42	1,11061	1,10414	1,09770	1,09131	1,08496	1,07864	1,07237	47
43	1,07237	1,06613	1,05994	1,05378	1,04766	1,04158	1,03553	46
44	1,03553	1,02952	1,02355	1,01761	1,01170	1,00583	1,00000	45
Tangens								
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	

D. Bogenlängen, Bogenhöhen, Tangenten- und Sehnenlängen für den Halbmesser 1.

α in Grad	Tang. AB $\tan \frac{\alpha}{2}$	halbe Sehne AF $\sin \frac{\alpha}{2}$	Pfeil DF $1 - \cos \frac{\alpha}{2}$	Bogen ADC $\pi \alpha : 180$	α in Grad	Tang. AB $\tan \frac{\alpha}{2}$	halbe Sehne AF $\sin \frac{\alpha}{2}$	Pfeil DF $1 - \cos \frac{\alpha}{2}$	Bogen ADC $\pi \alpha : 180$
0,5	0,00436	0,00436	0,00001	0,00873	22,0	0,19438	0,19081	0,01837	0,38397
1,0	0,00873	0,00873	0,00004	0,01745	22,5	0,19891	0,19509	0,01921	0,39270
1,5	0,01309	0,01309	0,00009	0,02618	23,0	0,20345	0,19937	0,02008	0,40143
2,0	0,01746	0,01745	0,00015	0,03491	23,5	0,20800	0,20364	0,02095	0,41015
2,5	0,02182	0,02181	0,00024	0,04363	24,0	0,21256	0,20791	0,02185	0,41888
3,0	0,02619	0,02618	0,00034	0,05236	24,5	0,21712	0,21218	0,02277	0,42761
3,5	0,03055	0,03054	0,00047	0,06109	25,0	0,22169	0,21644	0,02370	0,43633
4,0	0,03492	0,03490	0,00061	0,06981	25,5	0,22628	0,22070	0,02466	0,44506
4,5	0,03929	0,03926	0,00077	0,07854	26,0	0,23087	0,22495	0,02563	0,45379
5,0	0,04366	0,04362	0,00095	0,08727	26,5	0,23547	0,22920	0,02662	0,46251
5,5	0,04803	0,04798	0,00115	0,09599	27,0	0,24008	0,23344	0,02763	0,47124
6,0	0,05241	0,05234	0,00137	0,10472	27,5	0,24470	0,23769	0,02866	0,47997
6,5	0,05678	0,05669	0,00161	0,11345	28,0	0,24933	0,24192	0,02970	0,48869
7,0	0,06116	0,06105	0,00187	0,12217	28,5	0,25397	0,24615	0,03077	0,49742
7,5	0,06554	0,06540	0,00214	0,13090	29,0	0,25862	0,25038	0,03185	0,50615
8,0	0,06993	0,06976	0,00244	0,13963	29,5	0,26328	0,25460	0,03295	0,51487
8,5	0,07431	0,07411	0,00275	0,14835	30,0	0,26795	0,25882	0,03407	0,52360
9,0	0,07870	0,07846	0,00308	0,15708	30,5	0,27263	0,26303	0,03521	0,53233
9,5	0,08309	0,08281	0,00343	0,16581	31,0	0,27732	0,26724	0,03637	0,54105
10,0	0,08749	0,08716	0,00381	0,17453	31,5	0,28203	0,27144	0,03754	0,54978
10,5	0,09189	0,09150	0,00419	0,18326	32,0	0,28675	0,27564	0,03874	0,55851
11,0	0,09629	0,09585	0,00460	0,19199	32,5	0,29147	0,27983	0,03995	0,56723
11,5	0,10069	0,10019	0,00503	0,20071	33,0	0,29621	0,28402	0,04118	0,57596
12,0	0,10510	0,10453	0,00548	0,20944	33,5	0,30097	0,28820	0,04243	0,58469
12,5	0,10952	0,10887	0,00594	0,21817	34,0	0,30573	0,29237	0,04370	0,59341
13,0	0,11394	0,11320	0,00643	0,22689	34,5	0,31051	0,29654	0,04498	0,60214
13,5	0,11836	0,11754	0,00693	0,23562	35,0	0,31530	0,30071	0,04628	0,61087
14,0	0,12278	0,12187	0,00745	0,24435	35,5	0,32010	0,30486	0,04760	0,61959
14,5	0,12722	0,12620	0,00800	0,25307	36,0	0,32492	0,30902	0,04894	0,62832
15,0	0,13165	0,13053	0,00855	0,26180	36,5	0,32975	0,31316	0,05030	0,63705
15,5	0,13609	0,13485	0,00913	0,27053	37,0	0,33460	0,31730	0,05168	0,64577
16,0	0,14054	0,13917	0,00973	0,27925	37,5	0,33945	0,32144	0,05307	0,65450
16,5	0,14499	0,14349	0,01035	0,28798	38,0	0,34433	0,32557	0,05448	0,66323
17,0	0,14945	0,14781	0,01098	0,29671	38,5	0,34922	0,32969	0,05591	0,67195
17,5	0,15391	0,15212	0,01164	0,30543	39,0	0,35412	0,33381	0,05736	0,68068
18,0	0,15838	0,15643	0,01231	0,31416	39,5	0,35904	0,33792	0,05882	0,68941
18,5	0,16286	0,16074	0,01300	0,32289	40,0	0,36397	0,34202	0,06031	0,69813
19,0	0,16734	0,16505	0,01371	0,33161	40,5	0,36892	0,34612	0,06181	0,70686
19,5	0,17183	0,16935	0,01444	0,34034	41,0	0,37388	0,35021	0,06333	0,71558
20,0	0,17633	0,17365	0,01519	0,34907	41,5	0,37887	0,35429	0,06486	0,72431
20,5	0,18083	0,17794	0,01596	0,35779	42,0	0,38386	0,35837	0,06642	0,73304
21,0	0,18534	0,18224	0,01675	0,36652	42,5	0,38888	0,36244	0,06799	0,74176
21,5	0,18986	0,18652	0,01755	0,37525	43,0	0,39391	0,36650	0,06958	0,75049

α in Grad	Tang. AB $\tan \frac{\alpha}{2}$	halbe Sehne AF $\sin \frac{\alpha}{2}$	Pfeil DF $1 - \cos \frac{\alpha}{2}$	Bogen ADC $\pi \alpha : 180$	α in Grad	Tang. AB $\tan \frac{\alpha}{2}$	halbe Sehne AF $\sin \frac{\alpha}{2}$	Pfeil DF $1 - \cos \frac{\alpha}{2}$	Bogen ADC $\pi \alpha : 180$
43,5	0,39896	0,37056	0,07119	0,75922	66,5	0,65563	0,54829	0,16371	1,16064
44,0	0,40403	0,37461	0,07282	0,76794	67,0	0,66189	0,55194	0,16611	1,16937
44,5	0,40911	0,37865	0,07446	0,77667	67,5	0,66818	0,55557	0,16853	1,17810
45,0	0,41421	0,38268	0,07612	0,78540	68,0	0,67451	0,55919	0,17096	1,18682
45,5	0,41933	0,38671	0,07780	0,79413	68,5	0,68088	0,56281	0,17341	1,19555
46,0	0,42447	0,39073	0,07950	0,80285	69,0	0,68728	0,56641	0,17587	1,20428
46,5	0,42963	0,39474	0,08121	0,81158	69,5	0,69372	0,57000	0,17835	1,21300
47,0	0,43481	0,39875	0,08294	0,82030	70,0	0,70021	0,57358	0,18085	1,22173
47,5	0,44001	0,40275	0,08469	0,82903	70,5	0,70673	0,57715	0,18336	1,23046
48,0	0,44523	0,40674	0,08645	0,83776	71,0	0,71329	0,58070	0,18588	1,23918
48,5	0,45047	0,41072	0,08824	0,84648	71,5	0,71990	0,58425	0,18843	1,24791
49,0	0,45573	0,41469	0,09004	0,85521	72,0	0,72654	0,58779	0,19098	1,25664
49,5	0,46101	0,41866	0,09186	0,86394	72,5	0,73323	0,59131	0,19356	1,26536
50,0	0,46631	0,42262	0,09369	0,87266	73,0	0,73996	0,59482	0,19614	1,27409
50,5	0,47163	0,42657	0,09554	0,88139	73,5	0,74674	0,59832	0,19875	1,28282
51,0	0,47698	0,43051	0,09741	0,89012	74,0	0,75355	0,60182	0,20136	1,29154
51,5	0,48234	0,43445	0,09930	0,89884	74,5	0,76042	0,60529	0,20400	1,30027
52,0	0,48773	0,43837	0,10121	0,90757	75,0	0,76733	0,60876	0,20665	1,30900
52,5	0,49315	0,44229	0,10313	0,91630	75,5	0,77428	0,61222	0,20931	1,31772
53,0	0,49858	0,44620	0,10507	0,92502	76,0	0,78129	0,61566	0,21199	1,32645
53,5	0,50404	0,45010	0,10702	0,93375	76,5	0,78834	0,61909	0,21468	1,33518
54,0	0,50953	0,45399	0,10899	0,94248	77,0	0,79544	0,62251	0,21739	1,34390
54,5	0,51503	0,45787	0,11098	0,95120	77,5	0,80258	0,62592	0,22012	1,35263
55,0	0,52057	0,46175	0,11299	0,95993	78,0	0,80978	0,62932	0,22285	1,36136
55,5	0,52613	0,46561	0,11501	0,96866	78,5	0,81703	0,63271	0,22561	1,37008
56,0	0,53171	0,46947	0,11705	0,97738	79,0	0,82434	0,63608	0,22838	1,37881
56,5	0,53732	0,47332	0,11911	0,98611	79,5	0,83169	0,63944	0,23116	1,38754
57,0	0,54296	0,47716	0,12118	0,99484	80,0	0,83910	0,64279	0,23396	1,39626
57,5	0,54862	0,48099	0,12327	1,00356	80,5	0,84656	0,64612	0,23677	1,40499
58,0	0,55431	0,48481	0,12538	1,01229	81,0	0,85408	0,64945	0,23959	1,41372
58,5	0,56003	0,48862	0,12750	1,02102	81,5	0,86166	0,65276	0,24243	1,42244
59,0	0,56577	0,49242	0,12964	1,02974	82,0	0,86929	0,65606	0,24529	1,43117
59,5	0,57155	0,49622	0,13180	1,03847	82,5	0,87698	0,65935	0,24816	1,43990
60,0	0,57735	0,50000	0,13397	1,04720	83,0	0,88473	0,66262	0,25104	1,44862
60,5	0,58318	0,50377	0,13616	1,05592	83,5	0,89253	0,66588	0,25394	1,45735
61,0	0,58905	0,50754	0,13837	1,06465	84,0	0,90040	0,66913	0,25685	1,46608
61,5	0,59494	0,51129	0,14059	1,07338	84,5	0,90834	0,67237	0,25978	1,47480
62,0	0,60086	0,51504	0,14283	1,08210	85,0	0,91633	0,67559	0,26272	1,48353
62,5	0,60681	0,51877	0,14509	1,09083	85,5	0,92439	0,67880	0,26568	1,49226
63,0	0,61280	0,52250	0,14736	1,09956	86,0	0,93252	0,68200	0,26865	1,50098
63,5	0,61882	0,52621	0,14965	1,10828	86,5	0,94071	0,68518	0,27163	1,50971
64,0	0,62487	0,52992	0,15195	1,11701	87,0	0,94896	0,68835	0,27463	1,51844
64,5	0,63095	0,53361	0,15427	1,12574	87,5	0,95729	0,69151	0,27764	1,52716
65,0	0,63707	0,53730	0,15661	1,13446	88,0	0,96569	0,69466	0,28066	1,53589
65,5	0,64322	0,54097	0,15896	1,14319	88,5	0,97416	0,69779	0,28370	1,54462
66,0	0,64941	0,54464	0,16133	1,15192	89,0	0,98270	0,70091	0,28675	1,55334

α in Grad	Tang. AB $\tan \frac{\alpha}{2}$	halbe Sehne AF $\sin \frac{\alpha}{2}$	Pfeil DF $1 - \cos \frac{\alpha}{2}$	Bogen ADC $\pi \alpha : 180$	α in Grad	Tang. AB $\tan \frac{\alpha}{2}$	halbe Sehne AF $\sin \frac{\alpha}{2}$	Pfeil DF $1 - \cos \frac{\alpha}{2}$	Bogen ADC $\pi \alpha : 180$
89,5	0,99131	0,70401	0,28981	1,56207	105,0	1,30323	0,79335	0,39124	1,83260
90,0	1,00000	0,70711	0,29289	1,57080	105,5	1,31507	0,79600	0,39471	1,84132
90,5	1,00876	0,71019	0,29598	1,57952	106,0	1,32704	0,79864	0,39818	1,85005
91,0	1,01761	0,71325	0,29909	1,58825	106,5	1,33916	0,80125	0,40168	1,85878
91,5	1,02653	0,71630	0,30221	1,59698	107,0	1,35142	0,80386	0,40518	1,86750
92,0	1,03553	0,71934	0,30534	1,60570	107,5	1,36383	0,80644	0,40869	1,87623
92,5	1,04461	0,72236	0,30849	1,61443	108,0	1,37638	0,80902	0,41221	1,88496
93,0	1,05378	0,72537	0,31165	1,62316	108,5	1,38909	0,81157	0,41575	1,89368
93,5	1,06303	0,72837	0,31482	1,63188	109,0	1,40195	0,81412	0,41930	1,90241
94,0	1,07237	0,73135	0,31800	1,64061	109,5	1,41497	0,81664	0,42285	1,91114
94,5	1,08179	0,73432	0,32120	1,64934	110,0	1,42815	0,81915	0,42642	1,91986
95,0	1,09131	0,73728	0,32441	1,65806	110,5	1,44149	0,82165	0,43000	1,92859
95,5	1,10091	0,74022	0,32763	1,66679	111,0	1,45501	0,82413	0,43359	1,93732
96,0	1,11061	0,74315	0,33087	1,67552	111,5	1,46870	0,82659	0,43720	1,94604
96,5	1,12041	0,74606	0,33412	1,68424	112,0	1,48256	0,82904	0,44081	1,95477
97,0	1,13029	0,74896	0,33738	1,69297	112,5	1,49661	0,83147	0,44443	1,96350
97,5	1,14028	0,75184	0,34065	1,70170	113,0	1,51084	0,83389	0,44806	1,97222
98,0	1,15037	0,75471	0,34394	1,71042	113,5	1,52525	0,83629	0,45171	1,98095
98,5	1,16056	0,75757	0,34724	1,71915	114,0	1,53987	0,83867	0,45536	1,98968
99,0	1,17085	0,76041	0,35055	1,72788	114,5	1,55467	0,84104	0,45903	1,99840
99,5	1,18125	0,76323	0,35388	1,73660	115,0	1,56969	0,84339	0,46270	2,00713
100,0	1,19175	0,76604	0,35721	1,74533	115,5	1,58490	0,84573	0,46639	2,01586
100,5	1,20237	0,76884	0,36056	1,75406	116,0	1,60033	0,84805	0,47008	2,02458
101,0	1,21310	0,77162	0,36392	1,76278	116,5	1,61598	0,85035	0,47379	2,03331
101,5	1,22394	0,77439	0,36729	1,77151	117,0	1,63185	0,85264	0,47750	2,04204
102,0	1,23490	0,77715	0,37068	1,78024	117,5	1,64795	0,85491	0,48123	2,05076
102,5	1,24597	0,77988	0,37408	1,78896	118,0	1,66428	0,85717	0,48496	2,05949
103,0	1,25717	0,78261	0,37749	1,79769	118,5	1,68085	0,85941	0,48871	2,06822
103,5	1,26849	0,78532	0,38091	1,80642	119,0	1,69766	0,86163	0,49246	2,07694
104,0	1,27994	0,78801	0,38434	1,81514	120,0	1,73205	0,86603	0,50000	2,09440
104,5	1,29152	0,79069	0,38778	1,82387					

Formeln für die Tangenten- und Sehnenlänge, die Bogenhöhe und -länge.

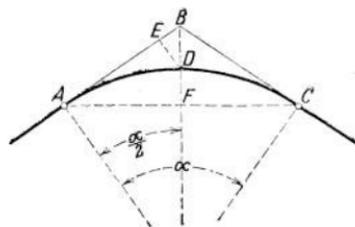


Fig. 1.

Ist r der Kreishalbmesser, α° der Zentriwinkel in Grad und α der Zentriwinkel in Bogenmaß, so beträgt (Fig. 1):

1. die Tangentenlänge AB :

$$t = r \cdot \tan \frac{\alpha}{2},$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{2. die halbe Sehnenlänge } AF \\
 \text{die Abszisse } AE \text{ der Bogenmitte}
 \end{array} \right\} \frac{s}{2} = r \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{h(2r-h)}$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{3. die Bogenhöhe } DF, \\
 \text{die Ordinate } ED \text{ der} \\
 \text{Bogenmitte}
 \end{array} \right\} \begin{aligned}
 h &= r \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right) = r - \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} \\
 &= \frac{s}{2} \cdot \tan \frac{\alpha}{4} = 2r \sin^2 \frac{\alpha}{4}
 \end{aligned} \quad r = \frac{s^2 + 4h^2}{8h}$$

$$\begin{aligned}
 \text{4. die Bogenlänge } ADC: \quad l &= r\alpha = \pi r \frac{\alpha^0}{180} = 0,0174533 \cdot r \cdot \alpha^0 \\
 &= \text{angenähert } \sqrt{s^2 + \frac{16}{3} h^2},
 \end{aligned}$$

5. der Inhalt des Kreisabschnittes $ADCF A$:

$$\frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi \alpha^0}{180} - \sin \alpha \right),$$

6. Der Inhalt des Kreisabschnittes $ADCF A$:

$$\frac{\alpha^0}{360} \pi r^2 = 0,00872665 \cdot \alpha^0 \cdot r^2 = \frac{\alpha r^2}{2}.$$

Zahlen zur Umwandlung von Bogenmaß in Gradmaß und umgekehrt.

$$\text{arc } 1^0 = 0,0174532925$$

$$\log \text{arc } 1^0 = 0,2418774 - 2$$

$$\text{arc } 1' = 0,0002908882$$

$$\log \text{arc } 1' = 0,4637261 - 4$$

$$\text{arc } 1'' = 0,0000048481$$

$$\log \text{arc } 1'' = 0,6855749 - 6$$

arc α	α			arc α	α		
	0	'	''		0	'	''
1,0	57	17	44,806	0,005	0	17	11,32
0,9	51	33	58,33	0,004	0	13	45,06
0,8	45	50	11,84	0,003	0	10	18,79
0,7	40	6	25,36	0,002	0	6	52,53
0,6	34	22	38,88	0,001	0	3	26,26
0,5	28	38	52,40	0,0009	0	3	5,64
0,4	22	55	5,92	0,0008	0	2	45,01
0,3	17	11	19,44	0,0007	0	2	24,39
0,2	11	27	32,96	0,0006	0	2	3,76
0,1	5	43	46,48	0,0005	0	1	43,13
0,09	5	9	23,83	0,0004	0	1	22,51
0,08	4	35	1,18	0,0003	0	1	1,88
0,07	4	0	38,54	0,0002	0	0	41,25
0,06	3	26	15,89	0,0001	0	0	20,63
0,05	2	51	53,24	0,00009	0	0	18,56
0,04	2	17	30,59	0,00008	0	0	16,50
0,03	1	43	7,94	0,00007	0	0	14,44
0,02	1	8	45,30	0,00006	0	0	12,38
0,01	0	34	22,65	0,00005	0	0	10,31
0,009	0	30	56,38	0,00004	0	0	8,251
0,008	0	27	30,12	0,00003	0	0	6,188
0,007	0	24	3,85	0,00002	0	0	4,135
0,006	0	20	37,59	0,00001	0	0	2,063

Ein φ für $\varphi = 0$ bis 5,99.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	0,0000	0100	0200	0300	0400	0500	0600	0701	0801	0901	101
0,1	0,1002	1102	1203	1304	1405	1506	1607	1708	1810	1911	102
0,2	0,2013	2115	2218	2320	2423	2526	2629	2733	2837	2941	104
0,3	0,3045	3150	3255	3360	3466	3572	3678	3785	3892	4000	108
0,4	0,4108	4216	4325	4434	4543	4653	4764	4875	4986	5098	113
0,5	0,5211	5324	5438	5552	5666	5782	5897	6014	6131	6248	119
0,6	0,6367	6485	6605	6725	6846	6967	7090	7213	7336	7461	125
0,7	0,7586	7712	7838	7966	8094	8223	8353	8484	8615	8748	133
0,8	0,8881	9015	9150	9286	9423	9561	9700	9840	9981	*0122	143
0,9	1,0265	0409	0554	0700	0847	0995	1144	1294	1446	1598	154
1,0	1,1752	1907	2063	2220	2379	2539	2700	2862	3025	3190	166
1,1	1,3356	3524	3693	3863	4035	4208	4382	4558	4735	4914	181
1,2	1,5095	5276	5460	5645	5831	6019	6209	6400	6593	6788	196
1,3	1,6984	7182	7381	7583	7786	7991	8198	8406	8617	*8829	214
1,4	1,9043	9259	9477	9697	9919	0143	*0369	*0597	*0827	1059	234
1,5	2,1293	1529	1768	2008	2251	2496	2743	2993	3245	3499	257
1,6	2,3756	4015	4276	4540	4806	5075	5346	5620	5896	6175	281
1,7	2,6456	6740	7027	7317	7609	*7904	8202	8503	8806	9112	310
1,8	2,9422	9734	*0049	*0367	*0689	1013	*1340	*1671	*2005	*2341	341
1,9	3,2682	3025	3372	3722	4075	4432	4792	5156	5523	5894	375
2,0	3,6269	6647	7028	7414	7803	8196	8593	8993	9398	9806	413
2,1	4,0219	0635	1056	1480	1909	2342	2779	3221	3666	4117	454
2,2	4,4571	5030	5494	5962	6434	6912	7394	7880	8372	8868	502
2,3	4,9370	9876	*0387	*0903	*1425	*1951	*2483	*3020	*3562	*4109	553
2,4	5,4662	5221	5785	6354	6929	7510	8097	8689	9288	9892	610
2,5	6,0502	1118	1741	2369	3004	3645	4293	4946	5607	6274	673
2,6	6,6947	7628	8315	9009	9709	*0417	*1132	*1854	*2583	*3319	744
2,7	7,4063	4814	5572	6338	7112	7894	8683	9480	*0285	*1098	821
2,8	8,1919	2749	3586	4432	5287	6150	7021	7902	8791	9689	907
2,9	9,0596	1512	2437	3371	4315	5268	6231	7203	8185	9177	1002
3,0	10,0179	1191	2212	3245	4287	5340	6403	7477	8562	9658	1107
3,1	11,0765	1882	3011	4151	5303	6466	7641	8827	*0026	*1236	1223
3,2	12,2459	3694	4941	6201	7473	8758	*0056	*1367	*2691	*4028	1351
3,3	13,5379	6743	8121	9513	*0919	*2338	*3772	*5221	*6684	*8161	1493
3,4	14,965	15,116	15,268	15,422	15,577	15,734	15,893	16,053	16,214	16,378	165
3,5	16,543	16,709	16,877	17,047	17,219	17,392	17,567	17,744	17,923	18,103	182
3,6	18,285	18,470	18,655	18,843	19,033	19,224	19,418	19,613	19,811	20,010	201
3,7	20,211	20,415	20,620	20,828	21,037	21,249	21,463	21,679	21,897	22,117	222
3,8	22,339	22,564	22,791	23,020	23,252	23,486	23,722	23,961	24,202	24,445	240
3,9	24,691	24,939	25,190	25,444	25,700	25,958	26,219	26,483	26,749	27,018	272
4,0	27,290	27,564	27,842	28,122	28,404	28,690	28,979	29,270	29,564	29,862	300
4,1	30,162	30,465	30,772	31,081	31,393	31,709	32,028	32,350	32,675	33,004	332
4,2	33,336	33,671	34,009	34,351	34,697	35,046	35,398	35,754	36,113	36,476	367
4,3	36,843	37,214	37,588	37,966	38,347	38,733	39,122	39,515	39,913	40,314	405
4,4	40,719	41,129	41,542	41,960	42,382	42,808	43,238	43,673	44,112	44,555	448
4,5	45,003	45,455	45,912	46,374	46,840	47,311	47,787	48,267	48,752	49,242	495
4,6	49,737	50,237	50,742	51,252	51,767	52,288	52,813	53,344	53,880	54,422	547
4,7	54,969	55,522	56,080	56,643	57,213	57,788	58,369	58,955	59,548	60,147	604
4,8	60,751	61,362	61,979	62,601	63,231	63,866	64,508	65,157	65,812	66,473	668
4,9	67,141	67,816	68,498	69,186	69,882	70,584	71,293	72,010	72,734	73,465	738
5,0	74,203	74,949	75,702	76,463	77,232	78,008	78,792	79,584	80,384	81,192	816
5,1	82,008	82,832	83,665	84,506	85,355	86,213	87,079	87,955	88,839	89,732	902
5,2	90,633	91,544	92,464	93,394	94,332	95,281	96,238	97,205	98,182	99,169	997
5,3	100,166	101,173	102,190	103,217	104,254	105,302	106,360	107,429	108,509	109,599	1102
5,4	110,701	111,814	112,938	114,072	115,219	116,377	117,547	118,728	119,921	121,127	1217
5,5	122,344	123,574	124,816	126,070	127,337	128,617	129,910	131,215	132,534	133,866	1346
5,6	135,211	136,570	137,943	139,329	140,730	142,144	143,573	145,016	146,473	147,945	1487
5,7	149,432	150,934	152,451	153,983	155,531	157,094	158,673	160,267	161,878	163,505	1643
5,8	165,148	166,808	168,485	170,178	171,888	173,616	175,361	177,123	178,903	180,701	1816
5,9	182,517	184,352	186,205	188,076	189,966	191,875	193,804	195,752	197,719	199,706	2007

$\text{Co}\varphi$ für $\varphi = 0$ bis 5,99.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	1,0000	0001	0002	0005	0008	0013	0018	0025	0032	0041	9
0,1	1,0050	0061	0072	0085	0098	0113	0128	0145	0162	0181	20
0,2	1,0201	0221	0243	0266	0289	0314	0340	0367	0395	0423	30
0,3	1,0453	0484	0516	0549	0584	0619	0655	0692	0731	0770	41
0,4	1,0811	0852	0895	0939	0984	1030	1077	1125	1174	1225	51
0,5	1,1276	1329	1383	1438	1494	1551	1609	1669	1730	1792	63
0,6	1,1855	1919	1984	2051	2119	2188	2258	2330	2402	2476	76
0,7	1,2552	2628	2706	2785	2865	2947	3030	3114	3199	3286	88
0,8	1,3374	3463	3555	3647	3740	3835	3932	4029	4128	4229	102
0,9	1,4331	4434	4539	4645	4753	4862	4973	5085	5199	5314	117
1,0	1,5431	5549	5669	5790	5913	6038	6164	6292	6421	6552	133
1,1	1,6685	6820	6956	7093	7233	7374	7517	7662	7808	7957	151
1,2	1,8107	8258	8412	8568	8725	8884	9045	9208	9373	9540	169
1,3	1,9709	9880	*0053	*0228	*0404	*0583	*0764	*0947	*1132	*1320	189
1,4	2,1509	1700	1894	2090	2288	2488	2691	2896	3103	3312	212
1,5	2,3524	3738	3955	4174	4395	4619	4845	5073	5305	5538	237
1,6	2,5775	6013	6255	6499	6746	6995	7247	7502	7760	8020	263
1,7	2,8283	8549	8818	9090	9364	9642	9922	*0206	*0492	*0782	293
1,8	3,1075	1371	1669	1972	2277	2585	2897	3212	3530	3852	325
1,9	3,4177	4506	4838	5173	5512	5855	6201	6551	6904	7261	361
2,0	3,7622	7987	8355	8727	9103	9483	9867	*0255	*0647	*1043	400
2,1	4,1443	1847	2256	2669	3086	3507	3932	4362	4797	5236	443
2,2	4,5679	6127	6580	7037	7499	7966	8437	8914	9395	9881	491
2,3	5,0372	0868	1370	1876	2388	2905	3427	3954	4487	5026	543
2,4	5,5570	6119	6674	7235	7801	8373	8951	9535	*0125	*0721	602
2,5	6,1323	1931	2545	3166	3793	4426	5066	5712	6365	7024	666
2,6	6,7690	8363	9043	9729	*0423	*1123	*1831	*2546	*3268	*3998	737
2,7	7,4735	5749	6231	6990	7758	8533	9316	0106	*0905	*1712	815
2,8	8,2527	3351	4182	5022	5871	6728	7594	8469	9352	*0244	902
2,9	9,1146	2056	2976	3905	4844	5792	6749	7716	8693	9680	998
3,0	10,0678	1683	2701	3728	4765	5814	6872	7942	9022	*0113	1102
3,1	11,1215	2328	3453	4589	5736	6895	8065	9247	*0442	*1648	1218
3,2	12,2867	4097	5340	6596	7864	9146	*0440	*1747	*3067	*4401	1347
3,3	13,5748	7108	8483	9871	*1273	*2689	*4120	*5565	*7024	*8498	1489
3,4	14,999	15,149	15,301	15,455	15,610	15,766	15,924	16,084	16,245	16,408	165
3,5	16,573	16,739	16,907	17,077	17,248	17,421	17,596	17,772	17,951	18,131	182
3,6	18,313	18,497	18,682	18,870	19,059	19,250	19,444	19,639	19,836	20,035	201
3,7	20,236	20,439	20,644	20,852	21,061	21,272	21,486	21,702	21,919	22,140	222
3,8	22,362	22,586	22,813	23,042	23,273	23,507	23,743	23,982	24,222	24,466	245
3,9	24,711	24,960	25,210	25,463	25,719	25,977	26,238	26,502	26,768	27,037	271
4,0	27,308	27,583	27,860	28,139	28,422	28,707	28,996	29,287	29,581	29,878	300
4,1	30,178	30,482	30,788	31,097	31,409	31,725	32,044	32,365	32,691	33,019	332
4,2	33,351	33,686	34,024	34,366	34,711	35,060	35,412	35,768	36,127	36,490	367
4,3	36,857	37,227	37,601	37,979	38,360	38,746	39,135	39,528	39,925	40,326	406
4,4	40,732	41,141	41,554	41,972	42,393	42,819	43,250	43,684	44,123	44,566	448
4,5	45,014	45,466	45,923	46,385	46,851	47,321	47,797	48,277	48,762	49,252	495
4,6	49,747	50,247	50,752	51,262	51,777	52,297	52,823	53,354	53,890	54,431	547
4,7	54,978	55,531	56,089	56,652	57,221	57,796	58,377	58,964	59,556	60,155	604
4,8	60,579	61,370	61,987	62,609	63,239	63,874	64,516	65,164	65,819	66,481	668
4,9	67,149	67,823	68,505	69,193	69,889	70,591	71,300	72,017	72,741	73,472	738
5,0	74,210	74,956	75,709	76,470	77,238	78,014	78,798	79,590	80,390	81,198	816
5,1	82,014	82,838	83,671	84,512	85,361	86,219	87,085	87,960	88,844	89,737	902
5,2	90,639	91,550	92,470	93,399	94,338	95,286	96,243	97,211	98,188	99,174	997
5,3	100,171	101,178	102,194	103,221	104,259	105,307	106,365	107,434	108,513	109,604	1102
5,4	110,706	111,818	112,942	114,077	115,223	116,381	117,551	118,732	119,925	121,131	1217
5,5	122,348	123,578	124,820	126,074	127,341	128,621	129,913	131,219	132,538	133,870	1345
5,6	135,215	136,574	137,947	139,333	140,733	142,148	143,576	145,019	146,476	147,949	1487
5,7	149,435	150,937	152,454	153,986	155,534	157,097	158,676	160,270	161,881	163,508	1643
5,8	165,151	166,811	168,488	170,181	171,891	173,619	175,364	177,126	178,906	180,704	1816
5,9	182,520	184,354	186,207	188,079	189,969	191,878	193,806	195,754	197,721	199,709	2007

Briggsche Logarithmen von $\sin \varphi$ für $\varphi = 0$ bis 5,99; um 10 vergrößert.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	— ∞	8,0000	3011	4772	6022	6992	7784	8455	9036	9548	459
0,1	9,0007	0423	0802	1152	1476	1777	2060	2325	2576	2814	225
0,2	9,3039	3254	3459	3656	3844	4025	4199	4366	4528	4685	151
0,3	9,4836	4983	5125	5264	5398	5529	5656	5781	5902	6020	116
0,4	9,6136	6249	6359	6468	6574	6678	6780	6880	6978	7074	95
0,5	9,7169	7263	7354	7444	7533	7620	7707	7791	7875	7958	81
0,6	9,8039	8119	8199	8277	8354	8431	8506	8581	8655	8728	72
0,7	9,8800	8872	8942	9012	9082	9150	9219	9286	9353	9419	66
0,8	9,9485	9550	9614	9678	9724	9805	9868	9920	9992	*0053	61
0,9	10,0114	0174	0234	0294	0353	0412	0470	0529	0586	0644	57
1,0	10,0701	0758	0815	0871	0927	0983	1038	1093	1148	1203	54
1,1	10,1257	1311	1365	1419	1472	1525	1578	1631	1684	1736	52
1,2	10,1788	1840	1892	1944	1995	2046	2098	2149	2199	2250	50
1,3	10,2300	2351	2401	2451	2501	2551	2600	2650	2699	2748	42
1,4	10,2797	2846	2895	2944	2993	3041	3090	3138	3186	3234	48
1,5	10,3282	3330	3378	3426	3474	3521	3569	3616	3663	3711	47
1,6	10,3758	3805	3852	3899	3946	3992	4039	4086	4132	4179	46
1,7	10,4225	4272	4318	4364	4411	4457	4503	4549	4595	4641	46
1,8	10,4687	4733	4778	4824	4870	4915	4961	5007	5052	5098	45
1,9	10,5143	5188	5234	5279	5324	5370	5415	5460	5505	5550	45
2,0	10,5595	5640	5685	5730	5775	5820	5865	5910	5955	6000	45
2,1	10,6044	6089	6134	6178	6223	6268	6312	6357	6401	6446	45
2,2	10,6491	6535	6580	6624	6668	6713	6757	6802	6846	6890	45
2,3	10,6935	6979	7023	7067	7112	7156	7200	7244	7289	7333	44
2,4	10,7377	7421	7465	7509	7553	7597	7642	7686	7730	7774	44
2,5	10,7818	7862	7906	7950	7994	8038	8082	8126	8169	8213	44
2,6	10,8257	8301	8345	8389	8433	8477	8521	8564	8608	8652	44
2,7	10,8696	8740	8784	8827	8871	8915	8959	9003	9046	9090	44
2,8	10,9134	9178	9221	9265	9309	9353	9396	9440	9484	9527	44
2,9	10,9571	9615	9658	9702	9746	9789	9833	9877	9920	9964	44
3,0	11,0008	0051	0095	0139	0182	0226	0270	0313	0357	0400	44
3,1	11,0444	0488	0531	0575	0618	0662	0706	0749	0793	0836	44
3,2	11,0880	0923	0967	1011	1054	1098	1141	1185	1228	1272	44
3,3	11,1316	1359	1403	1446	1490	1533	1577	1620	1664	1707	44
3,4	11,1751	1794	1838	1881	1925	1968	2012	2056	2099	2143	43
3,5	11,2186	2230	2273	2317	2360	2404	2447	2491	2534	2578	43
3,6	11,2621	2665	2708	2752	2795	2839	2882	2925	2969	3012	44
3,7	11,3056	3099	3143	3186	3230	3273	3317	3360	3404	3447	44
3,8	11,3491	3534	3578	3621	3665	3708	3752	3795	3838	3882	43
3,9	11,3925	3969	4012	4056	4099	4143	4186	4230	4273	4317	43
4,0	11,4360	4403	4447	4490	4534	4577	4621	4664	4708	4751	44
4,1	11,4795	4838	4881	4925	4968	5012	5055	5099	5142	5186	43
4,2	11,5229	5273	5316	5359	5403	5446	5490	5533	5577	5620	44
4,3	11,5664	5707	5750	5794	5837	5881	5924	5968	6011	6055	43
4,4	11,6098	6141	6185	6228	6272	6315	6359	6402	6446	6489	43
4,5	11,6532	6576	6619	6663	6706	6750	6793	6836	6880	6923	41
4,6	11,6967	7010	7054	7097	7141	7184	7227	7271	7314	7358	43
4,7	11,7401	7445	7488	7531	7575	7618	7662	7705	7749	7792	44
4,8	11,7836	7879	7922	7966	8009	8053	8096	8140	8183	8226	44
4,9	11,8270	8313	8357	8400	8444	8487	8530	8574	8617	8661	43
5,0	11,8704	8748	8791	8835	8878	8921	8965	9008	9052	9095	43
5,1	11,9139	9182	9225	9269	9312	9356	9399	9443	9486	9529	43
5,2	11,9573	9616	9660	9703	9747	9790	9833	9877	9920	9964	43
5,3	12,0007	0051	0094	0137	0181	0224	0268	0311	0355	0398	43
5,4	12,0442	0485	0528	0572	0615	0659	0702	0746	0789	0832	43
5,5	12,0876	0919	0963	1006	1050	1093	1136	1180	1223	1267	43
5,6	12,1310	1354	1397	1440	1484	1527	1571	1614	1658	1701	43
5,7	12,1744	1788	1831	1875	1918	1962	2005	2048	2092	2135	43
5,8	12,2179	2222	2266	2309	2352	2396	2439	2483	2526	2570	43
5,9	12,2613	2656	2700	2743	2787	2830	2874	2917	2960	3004	43

Briggsche Logarithmen von $\coth \varphi$ für $\varphi = 0$ bis 5,99.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	0,0000	0000	0001	0002	0004	0005	0008	0011	0014	0018	4
0,1	0,0022	0026	0031	0037	0042	0049	0055	0063	0070	0078	8
0,2	0,0086	0095	0104	0114	0124	0134	0145	0156	0168	0180	13
0,3	0,0193	0205	0219	0232	0246	0261	0276	0291	0306	0322	17
0,4	0,0339	0355	0372	0390	0407	0426	0444	0463	0482	0502	20
0,5	0,0522	0542	0563	0583	0605	0626	0648	0670	0693	0716	23
0,6	0,0739	0762	0786	0810	0835	0859	0884	0910	0935	0961	26
0,7	0,0987	1013	1040	1067	1094	1122	1149	1177	1206	1234	29
0,8	0,1236	1292	1321	1350	1380	1410	1440	1470	1501	1532	31
0,9	0,1563	1594	1625	1657	1689	1721	1753	1786	1818	1851	33
1,0	0,1884	1917	1950	1984	2018	2052	2086	2120	2154	2189	34
1,1	0,2223	2258	2293	2328	2364	2399	2435	2470	2506	2542	36
1,2	0,2578	2615	2651	2688	2724	2761	2798	2835	2872	2909	38
1,3	0,2947	2984	3022	3059	3097	3135	3173	3211	3250	3288	38
1,4	0,3326	3365	3403	3442	3481	3520	3559	3598	3637	3676	39
1,5	0,3715	3755	3794	3833	3873	3913	3952	3992	4032	4072	40
1,6	0,4112	4152	4192	4232	4273	4313	4353	4394	4434	4475	40
1,7	0,4515	4556	4597	4637	4678	4719	4760	4801	4842	4883	41
1,8	0,4924	4965	5006	5048	5089	5130	5172	5213	5254	5296	41
1,9	0,5337	5379	5421	5462	5504	5546	5587	5629	5671	5713	41
2,0	0,5754	5796	5838	5880	5922	5964	6006	6048	6090	6132	43
2,1	0,6175	6217	6259	6301	6343	6386	6428	6470	6512	6555	42
2,2	0,6597	6640	6682	6724	6767	6809	6852	6894	6937	6979	43
2,3	0,7022	7064	7107	7150	7192	7235	7278	7320	7363	7406	42
2,4	0,7448	7491	7534	7577	7619	7662	7705	7748	7791	7833	43
2,5	0,7876	7919	7962	8005	8048	8091	8134	8176	8219	8262	43
2,6	0,8305	8348	8391	8434	8477	8520	8563	8606	8649	8692	43
2,7	0,8735	8778	8821	8864	8907	8951	8994	9037	9080	9123	43
2,8	0,9166	9209	9252	9295	9338	9382	9425	9468	9511	9554	43
2,9	0,9597	9641	9684	9727	9770	9813	9856	9900	9943	9986	43
3,0	1,0029	0073	0116	0159	0202	0245	0289	0332	0375	0418	44
3,1	1,0462	0505	0548	0591	0635	0678	0721	0764	0808	0851	43
3,2	1,0984	0938	0981	1024	1068	1111	1154	1197	1241	1284	43
3,3	1,1327	1371	1414	1457	1501	1544	1587	1631	1674	1717	44
3,4	1,1761	1804	1847	1891	1934	1977	2021	2064	2107	2151	43
3,5	1,2194	2237	2281	2324	2367	2411	2454	2497	2541	2584	44
3,6	1,2628	2671	2714	2758	2801	2844	2888	2931	2975	3018	43
3,7	1,3061	3105	3148	3191	3235	3278	3322	3365	3408	3452	43
3,8	1,3495	3538	3582	3625	3669	3712	3755	3799	3842	3886	43
3,9	1,3929	3972	4016	4059	4103	4146	4189	4233	4276	4320	43
4,0	1,4363	4406	4450	4493	4537	4580	4623	4667	4710	4754	43
4,1	1,4797	4840	4884	4927	4971	5014	5057	5101	5144	5188	43
4,2	1,5231	5274	5318	5361	5405	5448	5492	5535	5578	5622	43
4,3	1,5665	5709	5752	5795	5839	5882	5926	5969	6012	6056	43
4,4	1,6099	6143	6186	6230	6273	6316	6360	6403	6447	6490	43
4,5	1,6533	6577	6620	6664	6707	6751	6794	6837	6881	6924	44
4,6	1,6968	7011	7055	7098	7141	7185	7228	7272	7315	7358	44
4,7	1,7402	7445	7489	7532	7576	7619	7662	7706	7749	7793	43
4,8	1,7836	7880	7923	7966	8010	8053	8097	8140	8184	8227	43
4,9	1,8270	8314	8357	8401	8444	8487	8531	8574	8618	8661	44
5,0	1,8705	8748	8791	8835	8878	8922	8965	9009	9052	9095	43
5,1	1,9139	9182	9226	9269	9313	9356	9399	9443	9486	9530	43
5,2	1,9573	9617	9660	9703	9747	9790	9834	9877	9921	9964	43
5,3	2,0007	0051	0094	0138	0181	0225	0268	0311	0355	0398	43
5,4	2,0442	0485	0529	0572	0615	0659	0702	0746	0789	0833	43
5,5	2,0876	0919	0963	1006	1050	1093	1137	1180	1223	1267	43
5,6	2,1310	1354	1397	1441	1484	1527	1571	1614	1658	1701	43
5,7	2,1745	1788	1831	1875	1918	1962	2005	2049	2092	2135	43
5,8	2,2179	2222	2266	2309	2353	2396	2439	2483	2526	2570	43
5,9	2,2613	2657	2700	2743	2787	2830	2874	2917	2961	3004	43

Tang φ für $\varphi = 0$ bis 2,89.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	0,0000	0100	0200	0300	0400	0500	0599	0699	0798	0898	99
0,1	0,0997	1096	1194	1293	1391	1489	1587	1684	1781	1878	96
0,2	0,1974	2070	2165	2260	2355	2449	2543	2636	2739	2821	92
0,3	0,2913	3004	3095	3185	3275	3364	3452	3540	3627	3714	86
0,4	0,3800	3885	3969	4053	4137	4219	4301	4382	4462	4542	79
0,5	0,4621	4700	4777	4854	4930	5005	5080	5154	5227	5299	71
0,6	0,5370	5441	5511	5581	5649	5717	5784	5850	5915	5980	64
0,7	0,6044	6107	6169	6231	6291	6352	6411	6469	6527	6584	56
0,8	0,6640	6696	6751	6805	6858	6911	6963	7014	7064	7114	49
0,9	0,7163	7211	7259	7306	7352	7398	7443	7487	7531	7574	42
1,0	0,7616	7658	7699	7739	7779	7818	7857	7895	7932	7969	36
1,1	0,8005	8041	8076	8110	8144	8178	8210	8243	8275	8306	31
1,2	0,8337	8367	8397	8426	8455	8483	8511	8538	8565	8591	26
1,3	0,8617	8643	8668	8693	8717	8741	8764	8787	8810	8831	22
1,4	0,8854	8875	8896	8917	8937	8957	8977	8996	9015	9033	19
1,5	0,9052	9069	9087	9104	9121	9138	9154	9170	9186	9202	15
1,6	0,9217	9232	9246	9261	9275	9289	9302	9316	9329	9342	12
1,7	0,9354	9367	9379	9391	9402	9414	9425	9436	9447	9458	10
1,8	0,9468	9478	9488	9498	9508	9518	9527	9536	9545	9554	8
1,9	0,9562	9571	9579	9587	9595	9603	9611	9619	9626	9633	7
2,0	0,9640	9647	9654	9661	9668	9674	9680	9687	9693	9699	6
2,1	0,9705	9710	9716	9722	9727	9732	9738	9743	9748	9753	5
2,2	0,9757	9762	9767	9771	9776	9780	9785	9789	9793	9797	4
2,3	0,9801	9805	9809	9812	9816	9820	9823	9827	9830	9834	3
2,4	0,9837	9840	9843	9846	9849	9852	9855	9858	9861	9864	2
2,5	0,9866	9869	9871	9874	9876	9879	9881	9884	9886	9888	2
2,6	0,9890	9892	9895	9897	9899	9901	9903	9905	9906	9908	2
2,7	0,9910	9912	9914	9915	9917	9919	9920	9922	9923	9925	1
2,8	0,9926	9928	9929	9931	9932	9933	9935	9936	9937	9938	2

Briggsche Logarithmen von Tang φ für $\varphi = 0$ bis 2,89; um 10 vergrößert.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	— ∞	8,0000	3010	4770	6018	6986	7776	8444	9022	9531	455
0,1	8,9986	*0397	*0771	*1115	*1433	*1729	*2004	*2263	*2506	*2736	217
0,2	9,2953	3159	3355	3542	3720	3890	4053	4210	4360	4505	139
0,3	9,4644	4778	4907	5031	5152	5268	5381	5490	5596	5698	99
0,4	9,5797	5894	5987	6078	6166	6252	6336	6417	6496	6573	75
0,5	9,6648	6721	6792	6861	6928	6994	7058	7121	7182	7242	58
0,6	9,7300	7357	7413	7467	7520	7572	7622	7671	7720	7767	46
0,7	9,7813	7858	7902	7945	7988	8029	8069	8109	8147	8185	37
0,8	9,8222	8258	8294	8328	8362	8395	8428	8460	8491	8521	30
0,9	9,8551	8580	8609	8637	8664	8691	8717	8743	8768	8793	24
1,0	9,8817	8841	8864	8887	8909	8931	8952	8973	8994	9014	20
1,1	9,9034	9053	9072	9090	9108	9126	9144	9161	9177	9194	16
1,2	9,9210	9226	9241	9256	9271	9285	9300	9314	9327	9341	13
1,3	9,9354	9367	9379	9391	9404	9415	9427	9438	9450	9460	11
1,4	9,9471	9482	9492	9502	9512	9522	9531	9540	9550	9558	9
1,5	9,9567	9576	9584	9592	9601	9608	9616	9624	9631	9639	7
1,6	9,9646	9653	9660	9666	9673	9680	9686	9692	9698	9704	6
1,7	9,9710	9716	9721	9727	9732	9738	9743	9748	9753	9758	5
1,8	9,9763	9767	9772	9776	9781	9785	9790	9794	9798	9802	4
1,9	9,9806	9810	9813	9817	9821	9824	9828	9831	9834	9838	3
2,0	9,9841	9844	9847	9850	9853	9856	9859	9862	9864	9867	3
2,1	9,9870	9872	9875	9877	9880	9882	9884	9887	9889	9891	2
2,2	9,9893	9895	9898	9900	9902	9904	9905	9907	9909	9911	2
2,3	9,9913	9914	9916	9918	9919	9921	9923	9924	9926	9927	2
2,4	9,9929	9930	9931	9933	9934	9935	9937	9938	9939	9940	1
2,5	9,9941	9943	9944	9945	9946	9947	9948	9949	9950	9951	1
2,6	9,9952	9953	9954	9955	9956	9957	9958	9958	9959	9960	1
2,7	9,9961	9962	9962	9963	9964	9965	9965	9966	9967	9967	1
2,8	9,9968	9969	9969	9970	9970	9971	9972	9972	9973	9973	1

F. Einige Zahlenwerte.

Zahl	Wert n	$\log n$	Zahl	Wert n	$\log n$	
π	3,141593	0,49715	$\sqrt{2} g$	4,429447	0,64635	
π^2	9,869604	0,99430	1	0,225763	0,35365 - 1	
$\sqrt{\pi}$	1,772454	0,24857	$\sqrt[3]{2} g$	π	1,003033	0,00132
g	9,81	0,99167	$\sqrt[4]{g}$	c	2,718282	0,43429
$\sqrt[3]{g}$	3,132092	0,49583				
1 : 2 g	0,050968	0,70830 - 2				

G. Bemerkungen zu den Tafeln A—E.

Mit Ausnahme von $\pi \cdot n$, $\frac{1000}{n}$ und den Bogenlängen ist die Änderung sämtlicher in den Tabellen angegebenen Funktionen von n bzw. α der Änderung von n bzw. α nicht proportional. Da jedoch ein kurzes Stück jeder Kurve als nahezu geradlinig betrachtet werden darf, können Zwischenwerte, sofern sie nur die nächste Ziffer betreffen, durch lineare Interpolation zwischen den benachbarten Werten bestimmt werden. Nicht zulässig ist es im allgemeinen, zwei oder mehr Ziffern zu interpolieren.

$6932^2 = ?$	
$6930^2 = 48\ 024\ 900$	48 024 900
$6940^2 = 48\ 163\ 600$	27 740
$10 - 138\ 700$	$6932^2 = 48\ 052\ 640$
$2 - 27\ 740$	genau 48 052 624

Ist keinerlei Vernachlässigung zulässig, darf also auch in kleinsten Intervalle keine Proportionalität angenommen werden, so kann man in folgender Weise rechnen:

$$6932^2 = (6930 + 2)^2 = 6930^2 + 2 \cdot 2 \cdot 6930 + 2^2 = 48\ 024\ 900 + 27\ 720 + 4 = 48\ 052\ 624.$$

Nach Möglichkeit sind vor jeder zahlenmäßigen Ausrechnung Vereinfachungen vorzunehmen, z. B. $\frac{6165^2}{75^2} = 82,2^2 = 555\ 412,248$. Während bei den Briggsschen Logarithmen der Multiplikation des Numerus mit einer Potenz von 10 ein Wachsen des Logarithmus um den Exponenten dieser Potenz entspricht, ist dies bei den natürlichen Logarithmen nicht der Fall.

$\log 437,3 = 2,64\ 078$	$\ln 437,3 = 6,0806$
$\log 437\ 300 = 5,64\ 078$	$\ln 437\ 300 = \ln 437,3 + \ln 1000$
	$= 6,0806 + 6,9078 = 12,9884$

Bei kleinen Winkeln kann (Fig. 1, Tafel D) die Strecke BD gleich der Bogenhöhe DF gesetzt werden. (Fehler bei $10^\circ \frac{1}{4} \frac{1}{10}$, bei $15^\circ \frac{1}{10} \frac{1}{10}$.) In Tafel E ist in der letzten Spalte „D“ die Differenz zwischen den Tafelwerten angegeben. Der neben $\sin 4,19 = 33,004$ stehende Wert $D = 332$ ist die Differenz zwischen $\sin 4,19$ und $\sin 4,20$. Die Differenzen für den Anfang und das Ende jeder Zeile sind somit direkt ablesbar. Für größere Werte als $\alpha = 5,99$ ist näherungsweise $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \cdot e^{-\alpha}$. Für größere Werte als $\alpha = 2,89$ nähert sich $\tan \alpha$ dem Werte 1.

II. Arithmetik.

Bearbeitet von Dr. G. Glage.

A. Die Potenz-, Wurzel- und Logarithmenrechnung.

a) Die Potenzrechnung.

- Definition: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \dots$ (n -mal); $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.
 $a^n =$ Potenz; $a =$ Basis; $n =$ Exponent.

Aus dieser Definition folgt:

- $0^n = 0$,
- $a^\infty = \begin{cases} 0 & \text{für } a < 1 \\ \infty & \text{für } a > 1 \end{cases}$; 1^∞ (siehe „unbestimmte Werte“, S. 167).

Ferner ergibt sich für gerade und ungerade Exponenten:

4. $(+a)^{2n} = +a^{2n}$; $(+2)^4 = +2^4 = +16$,
 $(-a)^{2n} = +a^{2n}$; $(-2)^4 = +2^4 = +16$.
 5. $(+a)^{2n+1} = +a^{2n+1}$; $(+2)^3 = +2^3 = +8$,
 $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$; $(-2)^3 = -2^3 = -8$.

Für das Rechnen mit Potenzen gelten folgende 5 Regeln:

6. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $4^5 \cdot 4^3 = 4^8$.
 7. $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$; $4^5 \cdot 2^5 = 8^5$.
 8. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $\frac{4^5}{4^3} = 4^2$.
 $\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}}$ ($= a^{n-m}$, s. 11); $\frac{4^5}{4^3} = \frac{1}{4^2} (= 4^{-2})$.
 9. $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$; $\frac{4^5}{2^5} = 2^5$.
 10. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$; $(4^5)^3 = 4^{15}$.

Diese 5 Regeln gelten nicht nur für ganze positive Exponenten (siehe Definition 1), sondern auch für negative und den Exponenten 0, wenn man setzt:

11. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$; $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$,
 $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{+m}$; $\left(\frac{4}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{3}{4}\right)^{+5}$.
 12. $a^0 = 1$; $4^0 = 1$.

Dieselben Regeln sind für Potenzen mit gebrochenen Exponenten anwendbar, wenn man setzt:

13. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (s. Wurzelrechnung); $a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$; $a^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{a^4} = a \cdot \sqrt[3]{a}$.

Anwendungen der Potenzformeln:

14. $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$; $35^2 - 25^2 = 60 \cdot 10 = 600$.
 15. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $28^2 = (30 - 2)^2 = 900 - 120 + 4 = 784$.
 16. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$; $19^3 = (20 - 1)^3 = 8000 - 1200 + 60 - 1 = 6859$.
 17. Binomischer Satz (siehe auch Reihen S. 89):

$$(a \pm b)^n = a^n \pm n \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 \\ \pm \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^{n-3} \cdot b^3 + \dots$$

Diese Reihe ist endlich, wenn n eine ganze positive Zahl ist, z. B.

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4.$$

Die Reihe ist unendlich, wenn n negativ oder ein Bruch ist; sie konvergiert für $a > b$ (siehe Reihen S. 86). Näheres über die Koeffizienten der einzelnen Glieder (Binomial-Koeffizienten) siehe Kombinationslehre, S. 63.

18. $\frac{a^3 \pm b^3}{a \pm b} = a^2 \mp ab + b^2$.
 19. $\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \dots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1}$,
 $\frac{a^5 - b^5}{a - b} = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$,
 $\frac{a^6 - b^6}{a - b} = a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5$.

$$20. \frac{a^{2n+1} + b^{2n+1}}{a + b} = a^{2n} - a^{2n-1} \cdot b + a^{2n-2} \cdot b^2 - + \dots + b^{2n},$$

$$\frac{a^5 + b^5}{a + b} = a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - a b^3 + b^4,$$

$$\frac{a^{2n} - b^{2n}}{a + b} = a^{2n-1} - a^{2n-2} \cdot b + a^{2n-3} \cdot b^2 - + \dots - b^{2n-1},$$

$$\frac{a^6 - b^6}{a + b} = a^5 - a^4 b + a^3 b^2 - a^2 b^3 + a b^4 - b^5.$$

21. Ist δ klein gegenüber 1, so ist näherungsweise bis auf Fehler von der Ordnung δ^2 (siehe Reihen, S. 90 u. 91)

$$(1 \pm \delta)^2 = 1 \pm 2 \delta; \quad 1,001^2 = 1,002, \text{ Fehler} = 0,000\ 001; \\ 0,998^2 = 0,996, \quad \text{,,} = 0,000\ 004;$$

$$(1 + \delta) \cdot (1 - \delta) = 1; \quad \frac{1}{1,0003} = 0,9997, \quad \text{,,} = 0,000\ 000\ 09;$$

$$\frac{1}{(1 \pm \delta)^m} = 1 \mp m \cdot \delta \quad \text{und} \quad (1 \pm \delta)^m = 1 \pm m \cdot \delta;$$

$$\frac{(1 \pm \delta_1) \cdot (1 \pm \delta_2) \cdot (1 \pm \delta_3) \dots}{(1 \pm \varepsilon_1) \cdot (1 \pm \varepsilon_2) \cdot (1 \pm \varepsilon_3) \dots} = 1 \pm \delta_1 \pm \delta_2 \pm \delta_3 \pm \dots \mp \varepsilon_1 \mp \varepsilon_2 \mp \varepsilon_3 \mp \dots$$

Ist z. B. l_t bzw. l_0 die Länge eines Stabes bei t bzw. 0°C und α der Ausdehnungskoeffizient, also $l_t = l_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t)$, so ist

$$l_{40} = l_0 \cdot (1 + 40 \alpha) = \frac{l_{20}}{1 + 20 \alpha} \cdot (1 + 40 \alpha) = l_{20} \cdot (1 + 40 \alpha - 20 \alpha);$$

also näherungsweise

$$l_{40} = l_{20} \cdot (1 + 20 \alpha).$$

22. Ausdrücke wie 0^0 , 0^∞ , ∞^0 , 1^∞ sind unbestimmt (s. S. 167). Es ist z. B.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2,718\dots \text{ (nicht etwa} = 1\text{)}.$$

Umkehrungen des Potenzierens.

Addition ($a + b = b + a = c$) und Multiplikation ($a \cdot b = b \cdot a = c$) besitzen nur je eine Umkehrung: die Subtraktion ($a = c - b$ oder $b = c - a$)

und die Division ($a = \frac{c}{b}$ oder $b = \frac{c}{a}$), weil Summe und Produkt beim Vertauschen der Summanden bzw. Faktoren unverändert bleiben. Bei einer Potenz hingegen sind Basis und Exponent nicht vertauschbar. Infolgedessen hat die Potenzrechnung 2 Umkehrungen, die Wurzel- und die Logarithmenrechnung.

Besteht zwischen 3 Zahlen a , b und c die Gleichung

23. $a^b = c$, so kann aus 2 gegebenen Zahlen die dritte berechnet werden:

24. Potenzrechnung: Gegeben a und b . Gesucht $c = a^b$.

$$a = \text{Basis}, \quad b = \text{Exponent}, \quad c = \text{Potenz}.$$

25. Wurzelrechnung: Gegeben b und c . Gesucht $a = \sqrt[b]{c}$.

$$a = \text{Wurzel}, \quad b = \text{Wurzelexponent}, \quad c = \text{Radikand}.$$

26. Logarithmenrechnung: Gegeben a und c . Gesucht $b = \log_a c$.

$$a = \text{Basis}, \quad b = \text{Logarithmus}, \quad c = \text{Numerus}.$$

b) Die Wurzelrechnung.

1. Definition: Wenn $a^b = c$, dann ist $a = \sqrt[b]{c}$ (s. 25).

Aus dieser Definition folgt:

$$2. \quad (\sqrt[b]{c})^b = a^b = c.$$

$$3. \quad \sqrt[1]{c} = c.$$

$$4. \quad \sqrt[b]{0} = 0.$$

Ferner ergibt sich für gerade und ungerade Wurzelexponenten:

$$5. \quad \sqrt[2n]{+a} = \pm a^{\frac{1}{2n}}; \quad \sqrt[4]{+81} = \pm 3;$$

$$\sqrt[2n]{-a} = \text{imaginär (siehe S. 49)}.$$

$$6. \quad \sqrt[2n+1]{+a} = +a^{\frac{1}{2n+1}}; \quad \sqrt[3]{+64} = +4;$$

$$\sqrt[2n+1]{-a} = -a^{\frac{1}{2n+1}}; \quad \sqrt[3]{-64} = -4.$$

Für das Rechnen mit Wurzeln gelten folgende 5 Regeln:

$$7. \quad \sqrt[m]{a \cdot b} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}; \quad \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{12} = \sqrt[12]{36} = \pm 6 (\sqrt[12]{1} = 1)$$

$$8. \quad \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}; \quad \frac{\sqrt[2]{28}}{\sqrt[7]{7}} = \sqrt[4]{4} = \pm 2.$$

$$9. \quad \sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n = a^{\frac{n}{m}}; \quad \sqrt[4]{16^3} = 4^3 = 64; \quad \sqrt[3]{a^3} = a$$

$$10. \quad \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m \cdot p]{a^{n \cdot p}} = \sqrt[\frac{m}{q}]{a^{\frac{n}{q}}}; \quad \sqrt[9]{8 \cdot x^6} = \sqrt[3]{2 \cdot x^2}.$$

$$11. \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}; \quad \sqrt[3]{\sqrt[4]{27}} = \sqrt[12]{27} = \sqrt[3]{3}.$$

Anwendungen der Wurzelformeln:

$$12. \quad \sqrt[-m]{a^n} = \sqrt[m]{a^{-n}}; \quad \sqrt[-3]{64} = \sqrt[3]{64 \cdot -1} = \sqrt[3]{4} = +\frac{1}{4};$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-2}} = \sqrt{\frac{a}{a-1}} = \sqrt{a^2} = \pm a.$$

$$13. \quad a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}; \quad \sqrt{x \cdot \sqrt{x}} = \sqrt{x^2 \cdot x} = \sqrt{x^3}.$$

$$14. \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b+2\sqrt{a \cdot b}}; \quad \sqrt{2} + \sqrt{18} = \sqrt{2+18+12} = \sqrt{32}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \pm \sqrt{a+b-2\sqrt{a \cdot b}}; \quad \sqrt{2} - \sqrt{18} = -\sqrt{2+18-12} = -\sqrt{8};$$

$$\sqrt{18} - \sqrt{2} = +\sqrt{2+18-12} = +\sqrt{8}.$$

15. Weitere Zahlenbeispiele:

$$6 \cdot \sqrt[3]{80} = 6 \cdot \sqrt[3]{16 \cdot 5} = 24 \cdot \sqrt[3]{5}; \quad \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3};$$

$$\sqrt[3]{-375} = \sqrt[3]{-125 \cdot 3} = -5 \cdot \sqrt[3]{3};$$

$$\sqrt{\frac{2x^3 - 12x^2 + 18x}{2y^3 - 20y^2 + 50y}} = \sqrt{\frac{2x(x^2 - 6x + 9)}{2y(y^2 - 10y + 25)}} = \frac{x-3}{y-5} \cdot \sqrt{\frac{x}{y}};$$

$$\sqrt[3]{16x} \cdot \sqrt[3]{16x^2} = \sqrt[3]{16^2 \cdot x^3} = 4x \cdot \sqrt[3]{4};$$

$$\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{288} - \sqrt{147} + \frac{1}{3} \sqrt{108} + \frac{\sqrt{96}}{\sqrt{3}} - 3 \cdot \sqrt{18} - \sqrt{2}$$

$$= 5 \cdot \sqrt{3} + 6 \cdot \sqrt{2} - 7 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{3} + 4 \cdot \sqrt{2} - 9 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} - 0;$$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{8}}{\sqrt{2} - \sqrt{8}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{8})^2}{(\sqrt{2} - \sqrt{8})(\sqrt{2} + \sqrt{8})} = \frac{2+8+2\sqrt{16}}{2-8} = 3;$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{20}}} = \sqrt[15]{x^4} = x \cdot \sqrt[3]{x}; \quad \sqrt[8]{81} = \sqrt[3]{3}; \quad \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^{-1}} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^{-1}} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}^{-1} = 1.$$

16. Ist δ klein gegenüber 1, so ist näherungsweise bis auf Fehler von der Ordnung δ^2 (s. Reihen S. 91)

$$\sqrt{1 \pm \delta} = 1 \pm \frac{\delta}{2}; \quad \sqrt{1,004} = 1,002; \quad 1,002^2 = 1,004 (\text{Fehler } 0,0004\%);$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm \delta}} = 1 \mp \frac{\delta}{2}; \quad \frac{1}{\sqrt{1,004}} = 0,998; \quad 0,998^2 = \frac{1}{1,002^2} \quad (\text{s. S. 45});$$

$$\sqrt[m]{1 \pm \delta} = 1 \pm \frac{\delta}{m}; \quad \frac{1}{\sqrt[m]{1 \pm \delta}} = 1 \mp \frac{\delta}{m};$$

$$\sqrt{a \cdot (a \pm \delta)} = a \cdot \sqrt{1 \pm \frac{\delta}{a}} = a \cdot \left(1 \pm \frac{\delta}{2a}\right) = a \pm \frac{\delta}{2}; \quad \text{d. h.}$$

geometrischer Mittelwert = arithmetischer Mittelwert

$$\sqrt{5 \cdot 5,06} = 5,03; \quad 5,03^2 = 25,30 (5 \cdot 5,06 \text{ oder } 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 0,3).$$

$$\sqrt{2,542 \cdot 2,546} = 2,544, \quad \text{genauer} = 2,544 \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{0,002}{2,544}\right)^2\right] = 2,544 \cdot [1 - 0,0000003],$$

Fehler 0,00003%;

$$\sqrt{2,50 \cdot 2,58} = 2,54, \quad \text{genauer} = 2,54 \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{0,04}{2,54}\right)^2\right] = 2,54 [1 - 0,0004],$$

Fehler 0,04%;

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 0,960 a + 0,368 b, \quad \text{für } a > b, \quad \text{Fehler kleiner als } 4\%.$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 0,939 a + 0,389 b + 0,297 c, \quad \text{für } a > b > c, \quad \text{Fehler kleiner als } 6\%.$$

c) Die Logarithmenrechnung.

1. Definition: Wenn $a^b = c$, dann ist $b = \log_a c$ (siehe 26 auf S. 45).

Die Logarithmen für die Basis $a = 10$ heißen dekadische oder *Briggssche* (*Briggs* lebte um 1600). Dieselben werden für praktische Rechnungen deshalb bevorzugt, weil bei einer Multiplikation bzw. Division des Numerus c mit 10 der Logarithmus b um 1 wächst bzw. abnimmt. Man schreibt statt $\log_{10} c$ kürzer $\log c$.

$$\begin{array}{ll} 2. \quad \log 1 = 0, & \text{da } 10^0 = 1 \\ \log 10 = 1, & \text{da } 10^1 = 10 \\ \log 100 = 2, & \text{da } 10^2 = 100 \\ \log 1000 = 3, & \text{da } 10^3 = 1000 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \log 0,1 = -1, & \text{da } 10^{-1} = 0,1 \\ \log 0,01 = -2, & \text{da } 10^{-2} = 0,01 \\ \log 0,001 = -3, & \text{da } 10^{-3} = 0,001 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 3. \quad \log 1,092 = 0,03822 & \log 0,1092 = 0,03822 - 1 \\ \log 10,92 = 1,03822 & \log 0,01092 = 0,03822 - 2 \\ \log 109,2 = 2,03822 & \log 0,001092 = 0,03822 - 3 \end{array}$$

Der von den Ziffern 1092 abhängige Bruch 0,03822 wird *Mantisse*, die von der Stellung des Kommas abhängige ganze Zahl $-0, -1, 2, \dots, -1, -2, -3, \dots$ — *Kennziffer* genannt. In den Logarithmentafeln wird nur die Mantisse angegeben, da die Kennziffer nach den Gleichungen 2 bestimmt werden kann.

In der höheren Mathematik und in theoretischen Rechnungen benutzt man Logarithmen für die Basis $e = 2,718\ 281\ 828\ 4 \dots$, die sogenannten „natürlichen Logarithmen“, mit deren Hilfe auch die *Briggsschen* Logarithmentafeln berechnet sind (siehe Reihen S. 86 und 91).

Man schreibt statt $\log_e c$ kürzer $\ln c$ (*logarithmus naturalis*). Es ist (siehe 10 auf S. 48)

$$4. \quad \ln x = 2,30 \cdot \log x \quad \text{auf } 0,1\% \text{ genau.}$$

$$\log x = \frac{1}{2,30} \ln x.$$

Man nennt $\frac{1}{2,30}$ den Modul des Briggsschen Logarithmensystems. Aus der Definition der Logarithmen folgt:

$$\begin{array}{ll} 5. & \log 1 = 0 ; \quad \ln 1 = 0 ; \\ & \log 0 = -\infty ; \quad \ln 0 = -\infty ; \\ & \log \infty = \infty ; \quad \ln \infty = \infty ; \\ & \log 10 = 1 ; \quad \ln e = 1 ; \quad e = 2,718 . \end{array}$$

Die natürlichen und Briggsschen Logarithmen negativer Zahlen sind imaginär.

Für das Rechnen mit Logarithmen gelten folgende 4 Regeln:

$$\begin{array}{l} 6. \log(a \cdot b) = \log a + \log b ; \quad \log 508,3 = 2,70612 \\ \quad \log 0,3417 = 0,53364 - 1 \\ \quad \log 0,0028 = 0,44716 - 3 \\ \quad \log(508,3 \cdot 0,3417 \cdot 0,0028) = 0,68692 - 1 \\ \quad 508,3 \cdot 0,3417 \cdot 0,0028 = 0,48632 . \\ 7. \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b ; \quad \log 2340,5 = 3,36931 \\ \quad \log 0,03684 = 0,56632 - 2 \\ \quad \log\left(\frac{2340,5}{0,03684}\right) = 4,80299 \\ \quad \frac{2340,5}{0,03684} = 63531 . \\ 8. \log(a^n) = n \cdot \log a ; \quad \log 17,326 = 1,23870 \\ \quad \log(17,326^3) = 3,71610 \\ \quad 17,326^3 = 5201,1 . \\ 9. \log\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log a ; \quad \log 0,17326 = 0,23870 - 1 \quad \text{oder} \quad 2,23870 - 3 \\ \quad \log\sqrt[3]{0,17326} = 0,07957 - \frac{1}{3} \quad \text{oder} \quad 0,74623 - 1 \\ \quad 0 = 0,66667 - \frac{2}{3} \\ \quad \log\sqrt[3]{0,17326} = 0,74624 - 1 \\ \quad \sqrt[3]{0,17326} = 0,55750 \end{array}$$

Anwendungen der Logarithmenformeln:

$$\begin{array}{l} 10. \quad a = e^{\ln a} = 10^{\log a} , \\ \log\{e^{\ln a}\} = \log\{10^{\log a}\} \quad \text{oder} \quad \ln a \cdot \log e = \log a \cdot \log 10 , \\ \quad \log a = \log e \cdot \ln a = 0,434294482 \cdot \ln a , \\ \ln\{e^{\ln a}\} = \ln\{10^{\log a}\} \quad \text{oder} \quad \ln a \cdot \ln e = \log a \cdot \ln 10 , \\ \quad \ln a = \ln 10 \cdot \log a = 2,302585093 \cdot \log a , \\ \quad \log e = \frac{1}{\ln 10} = \text{Modul} . \\ 11. \text{ Aus} \quad h \cdot \ln v + \ln p = \text{konst.} \quad \text{folgt} \quad \ln(p \cdot v^k) = \text{konst.} \\ \quad \text{oder} \quad p \cdot v^k = \text{konst. (Adiabate)} . \\ 12. \text{ Aus} \quad h = C \cdot (\ln B - \ln b) \quad \text{folgt} \quad h = C \cdot \ln \frac{B}{b} \\ \quad \text{oder} \end{array}$$

$$\frac{B}{b} = e^{\frac{h}{C}} , \quad \text{also} \quad b = B \cdot e^{-\frac{h}{C}} \quad (\text{Luftdruck } b \text{ in Höhe } h) .$$

13. Weitere Zahlenbeispiele:

$$\begin{array}{r}
 x = 1,6652^3 \cdot 3,1704 \\
 \log 1,6652 = 0,22146 \\
 \log 0,22146 = 0,34529 - 1 \\
 \log 3,1704 = 0,50112 \quad x = 5,0364 \\
 \hline
 \log(3,1704 \cdot \log 1,6652) = 0,84641 - 1 \\
 3,1704 \cdot \log 1,6652 = 0,70212 \\
 \hline
 x = \frac{46,812 \cdot \sqrt[3]{737,01} \cdot 0,92314^4}{564,98 \cdot \sqrt[3]{86,784}} \\
 \log 46,812 = 1,67036 \quad \log 564,98 = 2,75203 \\
 \frac{1}{2} \cdot \log 737,01 = 1,43374 \quad \frac{1}{3} \cdot \log 86,784 = 0,64615 \\
 \hline
 4 \cdot \log 0,92314 = 3,86108 - 4 \\
 \log(\text{Zähler}) = 2,96518 \quad \log(\text{Nenner}) = 3,39818 \\
 \hline
 \log x = 0,56700 - 1 \quad x = 0,36898
 \end{array}$$

B. Zahlensysteme.**a) Reelle Zahlen.**

Sämtliche ganzen Zahlen und Brüche bilden das System der rationalen Zahlen. Alle übrigen reellen Zahlen, deren Wert nur angenähert durch einen unendlichen, nicht periodischen Dezimalbruch ausgedrückt werden kann, nennt man irrationale Zahlen. Diejenigen irrationalen Zahlen, die durch Wurzeln dargestellt werden können, z. B. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{5}$ usw., heißen algebraische irrationale Zahlen; die übrigen, die nicht durch Wurzeln darstellbar sind, transzendente Zahlen, z. B. π , e .

b) Imaginäre und komplexe Zahlen.

Im Gegensatz zur Gesamtheit aller reellen Zahlen stehen die sogenannten imaginären Zahlen, d. h. solche, die weder durch positive noch negative reelle Zahlen dargestellt werden können, z. B. $\sqrt{-a^2}$.

Jede imaginäre Zahl ist darstellbar als das Produkt aus einer reellen Zahl und der imaginären Einheit $i = \sqrt{-1}$. Z. B. $\sqrt{-9} = \pm 3 \cdot i$.

Für das Rechnen mit imaginären Zahlen gelten folgende Beziehungen:

$$i^2 = -1 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{i} = -i,$$

$$i^3 = -i,$$

$$i^4 = 1.$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} i^{4n+m} &= i^m, \\ i^{4n+1} &= i, \end{aligned}$$

$$i^{4n+2} = -1,$$

$$i^{4n+3} = -i,$$

$$i^{4n+4} = 1.$$

Ferner ist:

$$\sqrt{-a^2} \cdot \sqrt{-b^2} = -a \cdot b \quad (\text{da } i^2 = -1)$$

$$\frac{\sqrt{-a^2}}{\sqrt{-b^2}} = \frac{a}{b}.$$

Zahlen, die aus einer reellen und imaginären Größe zusammengesetzt sind, z. B. $a + b \cdot i$, nennt man komplexe Zahlen.

Für das Rechnen mit komplexen Zahlen gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \text{Wenn } a + b \cdot i &= c + d \cdot i, & \text{dann ist } a &= c & \text{und } b &= d, \\ \text{,, } a + b \cdot i &= 0, & \text{,, } & \text{,, } a &= 0 & \text{,, } b &= 0, \\ \text{,, } (a + b \cdot i) + (c + d \cdot i) &= e + f \cdot i, & \text{,, } & \text{,, } e &= a + c & \text{,, } f &= b + d. \end{aligned}$$

Ferner ist $(a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i) = a^2 + b^2$ (reell).

Jede komplexe Zahl kann man in der Form schreiben:

$$r \cdot (\cos \varphi \pm i \cdot \sin \varphi). \quad \text{Kanonische Form (s. Fig. 2).}$$

Es ist nämlich:

$$a = r \cdot \cos \varphi \quad \text{und} \quad b = r \cdot \sin \varphi.$$

Ferner ist:

$$[r \cdot (\cos \varphi \pm i \cdot \sin \varphi)]^n = r^n \cdot [\cos(n \cdot \varphi) \pm i \cdot \sin(n \cdot \varphi)]$$

und

$$[r \cdot (\cos \varphi \pm i \cdot \sin \varphi)]^{\frac{p}{q}} = r^{\frac{p}{q}} \left[\cos \frac{p}{q} (\varphi + 2k\pi) \pm i \cdot \sin \frac{p}{q} (\varphi + 2k\pi) \right],$$

worin k alle Werte von 0 bis $q-1$ annehmen kann. Man nennt diese beiden Formeln den Moivre'schen Satz.

Die imaginären und komplexen Zahlen, deren reale Bedeutung verhältnismäßig spät erkannt ist — Gauß 1830 —, haben erst

die Entwicklung der modernen Analysis ermöglicht und sind in theoretisch-technischen Rechnungen bisweilen von größerer Wichtigkeit als die reellen Zahlen. Die elliptischen Funktionen haben ihre große Bedeutung nur dadurch erlangt, daß sie im Gegensatz zu den trigonometrischen Funktionen, die nur eine Periode haben, Funktionen mit zwei Perioden, deren Verhältnis stets eine komplexe Größe ist, erschlossen haben. Der Übergang zu den imaginären Zahlen war schließlich kein anderer als in früherer Zeit der von den Rational- zu den Irrationalzahlen oder von den ganzen Zahlen zu den Brüchen. Der Unterschied

zwischen den reellen und komplexen Zahlen besteht darin, daß die reellen Zahlen nur sämtliche Punkte einer Geraden, die komplexen hingegen sämtliche Punkte einer Ebene darstellen.

In vielen technischen Untersuchungen ist zur Berechnung bestimmter Werte die Anwendung komplexer Zahlen — symbolische Methode —

an Einfachheit anderen Methoden überlegen. Besonders dort, wo die graphische Methode, deren Vorteil in klarer Übersicht der darzustellenden Erscheinungen liegt, bei der zahlenmäßigen Berechnung mit Rücksicht auf die in Frage kommende Größenordnung versagt — z. B. geringe Phasenverschiebungen in Wechselstromkreisen —, bietet die Anwendung komplexer Zahlen erhebliche Vorteile. Bei dieser symbolischen Methode erfolgt z. B. die Addition phasenver-

schobener Sinuswellen $a_1 + b_1 \cdot i$ und $a_2 + b_2 \cdot i$ durch algebraische Addition ihrer komplexen Ausdrücke $a_1 + a_2 + i \cdot (b_1 + b_2)$, d. h. durch algebraische Addition der rechtwinkligen Komponenten ihrer Vektoren. Der Multiplikation des komplexen Ausdrucks einer Sinuswelle $a + b \cdot i$ mit i entspricht eine Phasenverschiebung (Drehung des Vektors) von $\frac{1}{2}$ Periode, der Multiplikation mit -1 eine solche von $\frac{1}{4}$ Periode usw. Die komplexe Methode vereinigt die Anschaulichkeit der graphischen Methode und die Genauigkeit der rechnerischen. Ihre Vorteile sind so groß, daß sie trotz der Verwendung zunächst ungewohnter mathematischer Operationen immer mehr Verbreitung findet.

Achse der
imaginären Zahlen

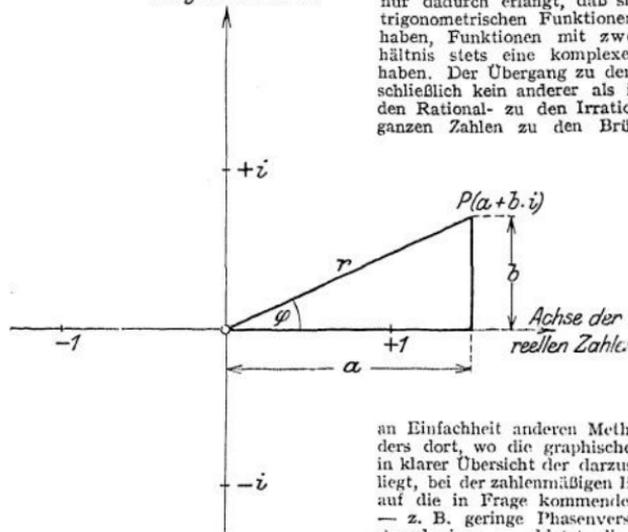


Fig. 2.

C. Gleichungen.

Eine Gleichung ist der mathematische Ausdruck dafür, daß 2 Größen, z. B. a und b , einander gleich sind. $a = b$.

Eine Gleichung, wie z. B. $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$, deren beide Seiten unabhängig davon, welche Werte die in der Gleichung vorkommenden Größen a und b erhalten, stets einander gleich bleiben, nennt man eine identische Gleichung.

Eine Gleichung, wie z. B. $8 + x = 15$, deren beide Seiten nur für einen bestimmten Wert von x einander gleich bleiben, nennt man eine Bestimmungsgleichung für x . Ist dieser Wert für x ermittelt, $x = +7$, so sagt man, die Gleichung ist nach der „Unbekannten x “ „aufgelöst“.

a) Gleichungen 1. Grades mit 1 Unbekannten.

Jede lineare Gleichung mit 1 Unbekannten kann auf die Form $a \cdot x = b$ gebracht werden. Um eine gegebene Gleichung auf diese Form zu bringen, sind Umformungen nötig. Jede Umformung, die mit der einen Seite vorgenommen wird, muß auch mit der anderen Seite erfolgen:

1. Man kann auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Größe addieren oder subtrahieren.

Ein Summand der einen Seite kann unter Umkehrung des Vorzeichens auf die andere Seite gebracht werden.

2. Man kann beide Seiten der Gleichung mit derselben Zahl multiplizieren oder dividieren.

Ein Divisor der einen Seite kann als Faktor auf die andere Seite gebracht werden und umgekehrt.

3. Man kann beide Seiten der Gleichung in die gleiche Potenz erheben oder aus beiden Seiten die gleiche Wurzel ziehen.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt[3]{x+5} = 2 & x^2 = 5 \\ (\sqrt[3]{x+5})^3 = 2^3 & \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{5} \\ x+5 = 8 & x = \sqrt[3]{5} \\ x = 3 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Ein Wurzelexponent der einen Seite kann} \\ \text{als Potenzexponent auf die andere Seite} \\ \text{gebracht werden und umgekehrt.} \end{array}$$

4. Man kann beide Seiten der Gleichung logarithmieren.

$$\begin{aligned} 2^x &= 16 \\ \log(2^x) &= \log 16 \\ x \cdot \log 2 &= \log 16, \quad x = \frac{\log 16}{\log 2} = \frac{1,2041}{0,3010} = 4. \end{aligned}$$

Regeln zur Auflösung der Gleichungen.

1. Sind in einer Gleichung mehrere Glieder mit x und mehrere Glieder ohne x enthalten, so bringt man die Glieder mit x auf die eine und die ohne x auf die andere Seite. Hierbei müssen Klammerausdrücke, die x enthalten, aufgelöst werden.

$$\begin{aligned} 4x - 3 \cdot (20 - x) &= 6x - 7 \cdot (11 - x) + 11 \\ 4x - 60 + 3x &= 6x - 77 + 7x + 11 \\ 4x + 3x - 6x - 7x &= -77 + 11 + 60 \\ -6x &= -6 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

2. Steht x im Nenner eines Bruches, so muß die Gleichung zwecks Fortschaffung dieses Nenners mit demselben multipliziert werden. Enthält die Gleichung Brüche, in deren Nenner x nicht vorkommt, so ist die Multiplikation

mit dem Generalnenner nicht notwendig. Dieselbe trägt aber häufig zur Vereinfachung der Rechnung bei:

$$\frac{5}{x+3} + \frac{3}{2(x+3)} = \frac{1}{2} - \frac{7}{2x+6} \quad \left| \text{multipliziert mit } 2 \cdot (x+3) \right.$$

$$10 + 3 = x + 3 - 7$$

$$x = 3.$$

$$\frac{2x-1}{2} + \frac{3x-2}{4} + \frac{5x-4}{8} = 1 - \frac{7x-6}{8}$$

oder durch Multiplikation mit 8:

$$\begin{array}{l} x - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} + \frac{5}{8}x - \frac{1}{2} = 1 - \frac{7}{8}x + \frac{3}{4} \\ x + \frac{3}{4}x + \frac{5}{8}x + \frac{7}{8}x = 1 + \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} \\ 3\frac{1}{4}x = 3\frac{1}{4} \\ x = 1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 8x - 4 + 6x - 4 + 5x - 4 = 8 - 7x + 6 \\ 8x + 6x + 5x + 7x = 8 + 6 + 3 \cdot 4 \\ 26x = 26 \\ x = 1. \end{array} \right.$$

3. Steht x in der Basis einer Potenz, so ist die Potenz zu isolieren und dann die Wurzel zu ziehen.

$$\frac{2}{(x-5)^2} + 3 = \frac{97}{32}$$

$$\frac{2}{(x-5)^2} = \frac{1}{32} \quad \left| \begin{array}{l} x-5 = \sqrt[3]{64} = 4 \\ (x-5)^2 = 64 \quad x = 4 + 5 = 9, \end{array} \right.$$

4. Steht x im Radikanden einer Wurzel, so ist die Wurzel zu isolieren und die Gleichung dann zu potenzieren.

$$\begin{array}{l} \sqrt{7x-5} + 6 = 10 \\ \sqrt{7x-5} = 4 \quad \left| \begin{array}{l} 7x = 21 \\ 7x-5 = 16 \quad x = 3. \end{array} \right. \end{array}$$

5. Steht x im Exponenten einer Potenz, so ist die Potenz zu isolieren und die Gleichung dann zu logarithmieren.

$$\begin{array}{l} 4 + 3x + 5 = 31 \\ 3x + 5 = 27 \\ (x+5) \cdot \log 3 = \log 27 \\ x+5 = \frac{\log 27}{\log 3} = \frac{1,4314}{0,4771} = 3 \\ x = -2. \end{array}$$

Eine Gleichung ist transzendent, wenn x außer im Exponenten einer Potenz noch an anderer Stelle vorkommt, z. B. $(3+x)^x = 20$ oder $x + 3^x = 10$ oder $4^x + 5^x = 7$ usw.

Lösung transzendenter Gleichungen siehe S. 62.

b) Gleichungen 1. Grades mit mehreren Unbekannten.

Enthält eine Gleichung mehrere Unbekannte, so hat sie unendlich viele Lösungen.

$$\begin{array}{ccccccc} 3x + 2y = 5 & x_1 = 0 & x_2 = 1 & x_3 = 2 & \dots \\ & y_1 = 2\frac{1}{2} & y_2 = 1 & y_3 = -\frac{1}{2} & \dots \end{array}$$

Enthalten n -Gleichungen n -Unbekannte, so hat jede Gleichung wohl unendlich viele Lösungen, aber es gibt nur eine Lösung, die sämtliche Gleichungen gleichzeitig erfüllt. n -Unbekannte sind durch n -Gleichungen eindeutig be-

stimmt, falls diese Gleichungen voneinander unabhängig sind, d. h. keine derselben durch bloße Umformung der übrigen aus diesen abgeleitet werden kann.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + 1\frac{1}{2}z = 14 \\ 3y + 4z = 7 + 5x \\ x + 5y + 6 = 27 - 2z. \end{array} \right| \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 4 \end{array}$$

n -Gleichungen mit n -Unbekannten werden derart aufgelöst, daß man zunächst aus ihnen durch Umformung und Kombination passender Gleichungen $n - 1$ Gleichungen mit $n - 1$ Unbekannten bildet. Durch Wiederholung dieses Verfahrens erhält man $n - 2$ Gleichungen mit $n - 2$ Unbekannten, dann $n - 3$ Gleichungen mit $n - 3$ Unbekannten usw., schließlich 1 Gleichung mit 1 Unbekannten. Nach Ausrechnung dieser Unbekannten setzt man ihren Wert in eine der zwei Gleichungen mit 2 Unbekannten ein und erhält so die zweite Unbekannte. Durch weiteres Einsetzen erhält man der Reihe nach sämtliche n -Unbekannte.

Elegantere direkte Lösungen erhält man durch Rechnen mit Determinanten.

Zur Zurückführung von n -Gleichungen mit n -Unbekannten auf $n - 1$ Gleichungen mit $n - 1$ Unbekannten sind folgende Methoden anwendbar:

1. Additionsmethode.

Die Elimination einer Unbekannten erfolgt durch Addition bzw. Subtraktion der Gleichungen nach passender Umformung derselben (gleiche Koeffizienten der zu eliminierenden Größen).

$$\text{I} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 0,7z = 21 \quad \cdot 3 \\ 3x + 0,2y - z = 24 \quad \cdot 1 \\ 0,9x + 7y - 2z = 27 \quad \cdot 1 \end{array} \right. \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} 3x + 6y - 2,1z = 63 \\ 3x + 0,2y - z = 24 \\ 5,8y - 1,1z = 39 \end{array} \right. \begin{array}{l} 0,9x + 0,06y - 0,3z = 7,2 \\ 0,9x + 7y - 2z = 27 \\ 6,94y - 1,7z = 19,8 \end{array}$$

$$\text{II} \left\{ \begin{array}{l} 5,8y - 1,1z = 39 \quad \cdot 17 \\ 6,94y - 1,7z = 19,8 \quad \cdot 11 \end{array} \right. \begin{array}{l} \cdot 17 \\ \cdot 11 \end{array} \left| \begin{array}{l} 98,6y - 1,1 \cdot 17z = 663 \\ 76,34y - 1,7 \cdot 11z = 217,8 \end{array} \right. \text{III. } \begin{array}{l} 22,26y = 445,2 \\ \underline{\underline{y = 20}} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5,8 \cdot 20 - 1,1z = 39 \\ 1,1z = 77 \\ \underline{\underline{z = 70}} \end{array} \quad \begin{array}{l} x + 2 \cdot 20 - 0,7 \cdot 70 = 21 \\ x = 30 \\ \underline{\underline{x = 30}} \end{array}$$

2. Gleichsetzungsmethode.

Die Elimination einer Unbekannten erfolgt dadurch, daß man dieselbe oder ein passendes Vielfaches von ihr in jeder Gleichung durch die anderen Unbekannten ausdrückt und die so erhaltenen Werte einander gleichsetzt.

$$\text{I} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 0,7z = 21 \quad | 7z = 10x + 20y - 210 \\ 3x + 0,2y - z = 24 \quad | 7z = 21x + 1,4y - 168 \\ 0,9x + 7y - 2z = 27 \end{array} \right. \begin{array}{l} 2x = 6x + 0,4y - 48 \\ 2x = 0,9x + 7y - 27 \end{array}$$

$$\text{II} \left\{ \begin{array}{l} 10x + 20y - 210 = 21x + 1,4y - 168 \\ 6x + 0,4y - 48 = 0,9x + 7y - 27 \end{array} \right.$$

oder

$$\text{II} \left\{ \begin{array}{l} 11x - 18,6y + 42 = 0 \\ 5,1x - 6,6y - 21 = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} y = \frac{11x + 42}{18,6} \\ y = \frac{5,1x - 21}{6,6} \end{array}$$

$$\text{III. } \frac{11x + 42}{18,6} = \frac{5,1x - 21}{6,6}$$

$$121x + 462 = 158,1x - 651$$

$$37,1x = 1113$$

$$\underline{\underline{x = 30}}$$

$$\underline{\underline{y = \frac{11 \cdot 30 + 42}{18,6} = 20}}$$

$$\underline{\underline{z = 3 \cdot 30 + 0,2 \cdot 20 - 24 = 70}}$$

3. Einsetzungsmethode.

Die Elimination einer Unbekannten erfolgt dadurch, daß man in einer Gleichung diese Unbekannte durch die anderen ausdrückt und den so erhaltenen Wert in die übrigen Gleichungen einsetzt.

$$\begin{array}{l}
 \text{I} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 0,7z = 21 \\ 3x + 0,2y - z = 24 \\ 0,9x + 7y - 2z = 27 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} x = 21 - 2y + 0,7z \\ 3 \cdot (21 - 2y + 0,7z) + 0,2y - z = 24 \\ 0,9 \cdot (21 - 2y + 0,7z) + 7y - 2z = 27 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 5,8y - 1,1z = 39 \\ 5,2y - 1,37z = 8,1 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{II} \left\{ \begin{array}{l} 5,8y - 1,1z = 39 \\ 5,2y - 1,37z = 8,1 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} z = \frac{5,8y - 39}{1,1} \\ \text{III. } 5,2y - 1,37 \cdot \frac{5,8y - 39}{1,1} = 8,1 \end{array} \right. \\
 \\
 \begin{array}{r} 5,72y - 7,946y + 53,43 = 8,91 \\ 2,226y = 44,52 \\ \underline{\underline{y = 20}} \\ z = \frac{5,8 \cdot 20 - 39}{1,1} = \frac{77}{1,1} = \underline{\underline{70}} \\ x = 21 - 2 \cdot 20 + 0,7 \cdot 70 = \underline{\underline{30}} \end{array}
 \end{array}$$

Welche Methode am einfachsten zum Ziele führt, hängt von den Zahlenwerten ab, auch wird man bei ein und derselben Aufgabe häufig teilweise die eine, teilweise die andere Methode anwenden. Besondere Umformung und Einführung von neuen Unbekannten erleichtert häufig die Rechnung.

Beispiele: (1)

$$\begin{array}{l}
 1. \frac{4}{x} - \frac{3}{y} = 1 \\
 2. \frac{2}{x} + \frac{3}{z} = 4 \\
 3. \frac{3}{y} - \frac{1}{z} = 0
 \end{array}
 \quad \text{für} \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{x} \\ v = \frac{1}{y} \\ w = \frac{1}{z} \end{array} \right.
 \quad \text{erhält man} \quad \begin{array}{l} 1. 4u - 3v = 1 \\ 2. 2u + 3w = 4 \\ 3. 3v - w = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Aus 1. u. 3.} \quad \begin{array}{l} 4u - w = 1 \\ 2. \frac{4u + 6w = 8}{7w = 7} \\ w = 1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 4u = 1 + w = 2 \\ u = \frac{1}{2} \\ x = 2 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} 3v = w = 1 \\ v = \frac{1}{3} \\ y = 3 \\ z = 1 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 (2) \quad \begin{array}{l} 1. x + y = 37 \\ 2. y + z = 22 \\ 3. z + x = 25 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x = 42 - 37 = 5 \\ x = 42 - 22 = 20 \\ y = 42 - 25 = 17 \end{array} \right. \\
 x + y + z = \frac{1}{2} \cdot (37 + 22 + 25) = 42
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 (3) \quad 1. \frac{8}{\sqrt{x-3}} - \frac{3}{\sqrt{y+3}} = 1 \\
 2. \frac{4}{\sqrt{x-3}} + \frac{9}{\sqrt{y+3}} = 4
 \end{array}
 \quad \text{für} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{x-3}} = u \\ \frac{1}{\sqrt{y+3}} = v \end{array} \right.
 \quad \text{erhält man} \quad \begin{array}{l} 8u - 3v = 1 \cdot 1 \\ 4u + 9v = 4 \cdot 2 \\ 21v = 7 \\ v = \frac{1}{3} \\ u = \frac{4 - 9 \cdot \frac{1}{3}}{4} = \frac{1}{4} \\ \sqrt{x-3} = 4 \quad \sqrt{y+3} = 3 \\ x - 3 = 16 \quad y + 3 = 9 \\ \underline{\underline{x = 19}} \quad \underline{\underline{y = 6}} \end{array}$$

Führt die Elimination von Unbekannten auf identische Gleichungen, so folgt daraus, daß die zur Elimination benutzten Gleichungen nicht voneinander unabhängig waren (siehe S. 53).

c) Gleichungen 2. Grades mit 1 Unbekannten.

Jede quadratische Gleichung mit 1 Unbekannten kann auf die Form

$$A \cdot x^2 + B \cdot x + C = 0$$

oder

$$x^2 + \frac{B}{A} \cdot x + \frac{C}{A} = 0,$$

also

$$x^2 + a \cdot x + b = 0$$

gebracht werden.

Die Lösung ergibt:

$$x^2 + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$$

$$x + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \quad \left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 = -a \text{ (negative Koeffizient von } x) \\ x_1 \cdot x_2 = b \text{ (von } x \text{ freies Glied).} \end{array} \right\}$$

$$x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

Die Gleichung hat 2 reelle Wurzeln, wenn $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b > 0$

„ „ „ 1 „ „ „ $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b = 0$

„ „ „ 2 komplexe „ „ „ $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b < 0$.

Da $x_1 \cdot x_2 = b$ ist, so haben die Wurzeln gleiches Vorzeichen, wenn b positiv, verschiedenes Vorzeichen, wenn b negativ ist.

Beispiele:

$$x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0 \quad x^2 - 10x + 25 = 0 \quad x^2 + 6x + 10 = 0$$

$$x = +\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 1} \quad x = +5 \pm \sqrt{25 - 25} \quad x = -3 \pm \sqrt{9 - 10}$$

$$x_1 = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = 2 \quad x = +5 \quad x_1 = -3 + i$$

$$x_2 = \frac{3}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{1}{2} \quad x_2 = -3 - i$$

Sind x_1 und x_2 die Wurzeln einer quadratischen Gleichung $x^2 + a \cdot x + b = 0$, so kann dieselbe auf die Form $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$ gebracht werden.

$x = x_1$ erfüllt die Gleichung, denn $(x_1 - x_1) \cdot (x_1 - x_2) = 0 \cdot (x_1 - x_2) = 0$;

$x = x_2$ „ „ „ „ „ $(x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_2) = (x_2 - x_1) \cdot 0 = 0$.

Beispiel: $x^2 - x - 20 = (x + 4) \cdot (x - 5) = 0$; $x_1 = -4$ und $x_2 = +5$.

Da $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2$, so folgt für die Wurzeln x_1 und x_2 der Gleichung $x^2 + a \cdot x + b = 0$, $x_1 + x_2 = -a$ und $x_1 \cdot x_2 = b$, was sich auch direkt durch Addition und Multiplikation der obigen Werte x_1 und x_2 ergibt.

Ist x_1 eine Wurzel der quadratischen Gleichung $x^2 + a \cdot x + b = 0$, so wird die Gleichung durch Division mit $x - x_1$ auf eine lineare zurückgeführt, deren Lösung die zweite Wurzel ergibt.

$$\begin{array}{l|l}
 x^2 + 2x - 3 = 0 & | \quad x_1 = +1 \\
 \frac{x_2^2 + 2x_2 - 3}{x_2 - 1} = x_2 + 3 = 0 & \\
 x_2 = -3 & \\
 \hline
 x + \frac{1}{x} - \left(a + \frac{1}{a}\right) = 0 & | \quad x_1 = a \\
 \frac{a \cdot x_2^2 + a - a^2 x_2 - x_2}{x_2 - a} = a \cdot x_2 - 1 = 0 & \\
 x_2 = \frac{1}{a} &
 \end{array}$$

Ist x ein Faktor der Gleichung, so ist $x_1 = 0$ eine Wurzel. Die andere Wurzel ($\neq 0$) erhält man durch Division der Gleichung mit x .

$$\begin{array}{l|l}
 x^2 - 10x = 0 & | \quad x_1 = 0 \\
 \frac{x_2^2 - 10x_2}{x_2} = x_2 - 10 = 0 & | \quad x_2 = 10.
 \end{array}$$

Um eine gegebene quadratische Gleichung auf die Normalform $x^2 + ax + b = 0$ zu bringen, kann man sehr verschiedene Wege einschlagen, für die sich bestimmte Schemata nicht angeben lassen. Es empfiehlt sich die Benutzung folgender Regeln:

1. Kommt x in einem Klammersausdrucke vor, so ist derselbe aufzulösen.

$$\begin{array}{l}
 (x-6) \cdot (x-5) + (x-7) \cdot (x-4) = 10, \\
 x^2 - 11x + 30 + x^2 - 11x + 28 = 10, \\
 x^2 - 11x + 24 = 0, \\
 x = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} - \frac{96}{4}} = \frac{11}{2} \pm \frac{5}{2}, \\
 x_1 = 8 \quad x_2 = 3.
 \end{array}$$

2. Steht x im Nenner eines Bruches, so ist derselbe durch Multiplikation der Gleichung mit diesem Nenner fortzuschaffen.

$$\begin{array}{l}
 \frac{5x-7}{9} + \frac{14}{2x-3} = x-4, \\
 10x^2 - 14x - 15x + 21 + 126 = 18x^2 - 18x - 27x + 27, \\
 8x^2 - 16x - 120 = 0, \\
 x^2 - 2x - 15 = 0, \\
 x = 1 \pm \sqrt{1+15} = 1 \pm 4, \\
 x_1 = 5 \quad x_2 = -3.
 \end{array}$$

3. Steht x in der Basis einer Potenz, so ist die Potenz auszurechnen oder eine neue Unbekannte einzuführen.

$$\begin{array}{l|l}
 (3x-5)^2 - 24x + 47 = 0 & \text{oder für} \quad 3x-5 = y \\
 9x^2 - 30x + 25 - 24x + 47 = 0 & y^2 - 8y + 7 = 0, \\
 x^2 - 6x + 8 = 0 & y = 4 \pm \sqrt{16-7} = 4 \pm 3, \\
 x = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1 & y_1 = 7 \quad y_2 = 1, \\
 x_1 = 4 \quad x_2 = 2 & x_1 = 4 \quad x_2 = 2.
 \end{array}$$

4. Steht x im Radikanden einer Wurzel, so ist die Wurzel zunächst zu isolieren und die Gleichung sodann zu quadrieren. In einer Gleichung, die mehrere Wurzeln als Summanden enthält, ist meist mehrfaches Quadrieren notwendig.

$$\begin{array}{l|l}
 x + 1 + \sqrt{x+3} = 4x & | \quad \sqrt{13+x} + | \sqrt{13-x} - 6 = 0, \\
 \sqrt{x+3} = 3x-1 & | \quad \sqrt{13+x} + | \sqrt{13-x} = 6, \\
 x+3 = 9x^2 - 6x + 1 & 13+x + 13-x + 2 \cdot | \sqrt{13^2 - x^2} = 36, \\
 9x^2 - 7x - 2 = 0 & | \quad 169 - x^2 = 5, \\
 x^2 - \frac{7}{9}x - \frac{2}{9} = 0 & 169 - x^2 = 25, \\
 & x^2 = 144, \\
 x = \frac{7}{18} \pm \sqrt{\frac{49}{18^2} + \frac{2 \cdot 36}{18 \cdot 18}} & x_1 = +12 \quad x_2 = -12, \\
 x = \frac{7}{18} \pm \frac{11}{18} & \\
 x_1 = 1 \quad x_2 = -\frac{2}{9} &
 \end{array}$$

5. Steht x im Exponenten einer Potenz, so ist die Potenz zu isolieren und dann die Gleichung zu logarithmieren. Kommen mehrere Potenzen vor, so führt entsprechende Umformung zum Ziele, falls die Gleichung nicht transzendent ist (siehe S. 52).

$6^x + x + 6^{-x} = 13$ Für $6^x = y$ wird

$$6 \cdot y + \frac{6}{y} = 13$$

$$y^2 \cdot \frac{13}{6} y + 1 = 0$$

$$y = \frac{13}{12} \pm \sqrt{\frac{169 - 144}{144}} = \frac{13}{12} \pm \frac{5}{12}$$

$$y_1 = 6^{x_1} = \frac{3}{2}$$

$$x_1 \cdot \log 6 = \log 3 - \log 2$$

$$x_1 = \frac{\log 3 - \log 2}{\log 6} = 0,2263$$

$$y_2 = 6^{x_2} = \frac{2}{3}$$

$$x_2 \cdot \log 6 = \log 2 - \log 3$$

$$x_2 = -0,2263$$

Graphische Lösung quadratischer Gleichungen mit 1 Unbekannten.

$x^2 + ax + b = 0$. Die linke Seite der Gleichung als Funktion von x graphisch dargestellt ist die Parabel $y = x^2 + ax + b$. Die Schnittpunkte derselben mit der x -Achse geben die Werte x_k für welche $y = 0$ ist, also die Wurzeln der Gleichung $x^2 + ax + b = 0$. Die Gleichung hat

2 reelle Wurzeln, wenn die Parabel die x -Achse 2 mal schneidet,

1 reelle Wurzel, wenn die Parabel die x -Achse berührt,

2 komplexe Wurzeln, wenn die Parabel die x -Achse nicht schneidet.

Beispiele: 1. $x^2 - 6x + 7 = 0$, (Fig. 3) 2. $10x^2 + 48x + 57,6 = 0$, (Fig. 4)

$$y = x^2 - 6x + 7 = (x - 3)^2 - 2.$$

$$y = x^2 + 4,8x + 5,76 = (x + 2,4)^2.$$

Für den Scheitelpunkt der Parabel (P_1) ist y ein Minimum, also $x_1 = 3$; $y_1 = -2$. Für $x_k = 3 + c$ und $x_k' = 3 - c$ erhält man denselben Wert $y_k = c^2 - 2$, d.h. die Gerade $x = 3$ ist die Achse der Parabel.

Die Schnittpunkte der Parabel mit der x -Achse haben die Abszissen 4 und 1,6. Dies sind die Wurzeln der Gleichung.

Der Scheitelpunkt P_1 liegt auf der x -Achse. Seine Abszisse ist $x_1 = -2,4$. Die Gerade $x = -2,4$ ist die Achse der Parabel.

Die Parabel berührt die x -Achse im Punkte $x_1 = -2,4$. Die Gleichung hat die eine Wurzel $-2,4$.

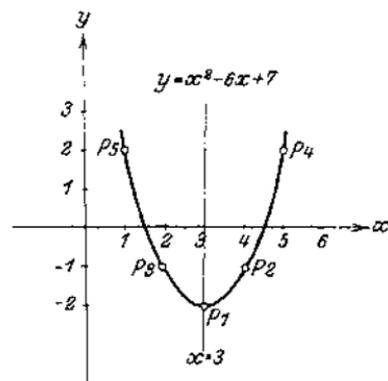


Fig. 3.

P_k	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
$x_k \dots$	3	4	2	5	1
$y_k \dots$	-2	-1	-1	2	2

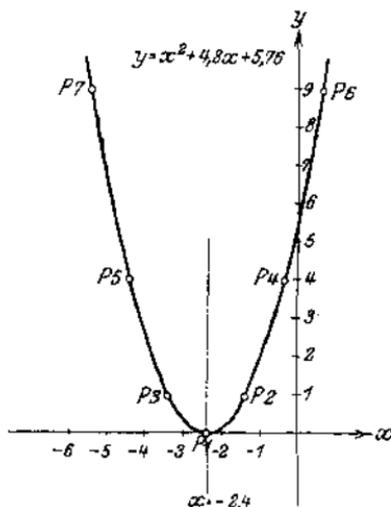


Fig. 4.

P_k	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
$x_k \dots$	-2,4	-1,4	-3,1	-0,4	-4,4	+0,6	-5,4
$y_k \dots$	0	1	1	4	4	9	9

3. $x^2 - 4x + 7 = 0$, (Fig. 5)

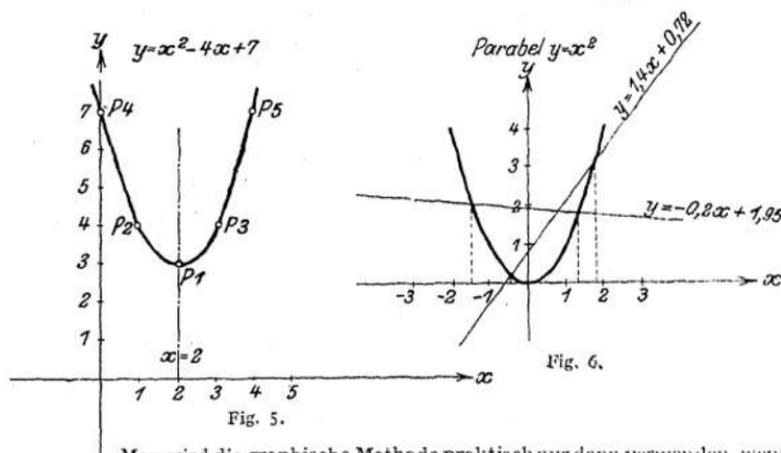
$$y = x^2 - 4x + 7 = (x - 2)^2 + 3.$$

Der Scheitelpunkt P_1 hat die Koordinaten $x_1 = 2$ und $y_1 = 3$. Die Gerade $x = 2$ ist die Achse der Parabel.

P_k	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
$x_k \dots$	2	1	3	0	4
$y_k \dots$	3	4	4	7	7

Die Parabel liegt oberhalb der x -Achse. Die Gleichung hat keine reellen Wurzeln.

Die 3 Beispiele zeigen zugleich, wie sofort Achse und Scheitel der Parabel festgestellt und somit entschieden werden kann, ob die Gleichung $x^2 + a \cdot x + b = 0$ 2 reelle, 1 reelle oder 2 komplexe Wurzeln hat. Entscheidend ist das Vorzeichen der Diskriminante $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$ (siehe S. 55).



Man wird die graphische Methode praktisch nur dann verwenden, wenn die Gleichung 2 reelle Wurzeln hat (Diskriminante positiv) und die Zahlenwerte für die direkte Berechnung der Wurzeln unbequem sind. Andererseits ist dann auch das Berechnen der einzelnen Parabelpunkte mühsam. Hat man eine größere Anzahl quadratischer Gleichungen zu lösen, so ist es einfacher, die Schnittpunkte der Geraden $y = -a \cdot x - b$ mit der Parabel $y = x^2$ zu bestimmen. Für die Koordinaten der Schnittpunkte ist $y_k = x_k^2 = -a \cdot x_k - b$. Die Abszissen x_k dieser Schnittpunkte sind also die Wurzeln der Gleichung $x^2 = -a \cdot x - b$ oder $x^2 + a \cdot x + b = 0$. Man hat dann zur Lösung sämtlicher Gleichungen nur die eine Parabel $y = x^2$ und für jede zu lösende Gleichung noch die Gerade $y = -a \cdot x - b$ zu zeichnen. Ist die Größenordnung der Wurzeln einzelner Gleichungen sehr verschieden, so müssen verschiedene Maßstäbe angewandt werden.

Beispiele (Fig. 6):

1. $x^2 - 1,4 \cdot x - 0,72 = 0$

$x_1 = -0,4$ $x_2 = +1,8$,

2. $x^2 + 0,2x - 1,95 = 0$

$x_1 = +1,3$ $x_2 = -1,5$.

d) Gleichungen 2. Grades mit mehreren Unbekannten.

Die Auflösung von n -Gleichungen mit n -Unbekannten erfolgt in der auf S. 53 für lineare Gleichungen angegebenen Weise durch allmähliche Elimination der einzelnen Unbekannten bis auf eine Gleichung mit einer Unbekannten. Im allgemeinen sind hierzu die dort angegebenen Methoden anwendbar, doch wird häufig die Einführung neuer Unbekannter und die Zerlegung in Faktoren die Rechnung wesentlich vereinfachen.

Ist z. B. $x + y$ bekannt, so wird man zunächst $x - y$ suchen und umgekehrt.

$$x = \frac{(x+y) + (x-y)}{2},$$

$$y = \frac{(x+y) - (x-y)}{2}.$$

Ist $x^2 + y^2$ bekannt, so sucht man $x \cdot y$ und umgekehrt. Man kennt damit $x + y$ und $x - y$.

$$x + y = \sqrt{x^2 + y^2 + 2 \cdot x \cdot y},$$

$$x - y = \sqrt{x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y}.$$

Aus $x + y$ und $x \cdot y$ erhält man

$$x - y = \sqrt{(x+y)^2 - 4 \cdot x \cdot y},$$

Aus $x - y$ und $x \cdot y$ erhält man

$$x + y = \sqrt{(x-y)^2 + 4 \cdot x \cdot y}.$$

Beispiele:

$$1. \quad x \cdot y = a^2 - 2a^2b^2 + b^4,$$

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{a}{b}$$

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = a^2 - b^2,$$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$x = \frac{a+b}{a-b} \cdot (a^2 - b^2) = (a+b)^2,$$

$$y = \frac{a-b}{a+b} \cdot (a^2 - b^2) = (a-b)^2.$$

$$2. \quad x^2 - x \cdot y + y^2 = 13(x-y), \\ x \cdot y = 12.$$

x und y unter gleichzeitigen Vertauschen der Vorzeichen vertauschbar.

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2 = (x-y)^2 = 13(x-y) - 12,$$

$$x - y = z,$$

$$z^2 - 13z + 12 = 0,$$

$$z = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169-48}{4}} = \frac{13}{2} \pm \frac{11}{2},$$

$$z_1 = 12, \quad z_2 = 1.$$

$$(x+y)_1 = \sqrt{12^2 + 4 \cdot 12} = \pm \sqrt{192} = \pm 13,86,$$

$$(x+y)_2 = \sqrt{1 + 4 \cdot 12} = \pm 7,$$

$$x_1 = \frac{12 \pm 13,86}{2} = +12,93 \text{ oder } -0,93,$$

$$y_1 = \frac{-12 \pm 13,86}{2} = +0,93 \text{ oder } -12,93,$$

$$x_2 = \frac{1 \pm 7}{2} = +4 \text{ oder } -3,$$

$$y_2 = \frac{-1 \pm 7}{2} = +3 \text{ oder } -4.$$

$$3. \quad x^2 - 2xy + 3y^2 = 3 \cdot (x-y) + 3, \\ 2x^2 + xy - y^2 = 9 \cdot (x-y) + 1,$$

$$3x^2 - 6xy + 9y^2 = 2x^2 + xy - y^2,$$

$$x^2 - 7xy + 10y^2 = 0,$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 7 \cdot \frac{x}{y} + 10 = 0,$$

$$\frac{x}{y} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49-40}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2},$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)_1 = 5, \quad \left(\frac{x}{y}\right)_2 = 2.$$

$x_1 = 5y_1$ in die erste Gleichung eingesetzt, ergibt:

$$25y_1^2 - 10y_1^2 + 3y_1^2 = 12y_1,$$

$$18y_1^2 = 12y_1,$$

$y_1 = 0$ und $x_1 = 0$ selbstverständlich. Lösung.

Für $y_1 \neq 0$ wird $3y_1 = 2$,

$$y_1 = \frac{2}{3}, \quad x_1 = \frac{10}{3},$$

$x_2 = 2y_2$ eingesetzt ergibt:

$$4y_2^2 - 4y_2^2 + 3y_2^2 = 3y_2.$$

Für $y_2 \neq 0$ wird $y_2 = 1$, $x_2 = 2$.

$$4. \quad (x-3) \cdot (y+5) = 0,$$

$$(x+8) \cdot (y-7) = 0.$$

$$x_1 = +3; \quad y_2 = -5,$$

$$x_2 = 8; \quad y_1 = +7.$$

Im allgemeinsten Falle führt die Elimination einer Unbekannten aus 2 quadratischen Gleichungen mit 2 Unbekannten auf eine Gleichung 4. Grades. In diesem Falle sind die Wurzeln durch Näherungsverfahren zu bestimmen, z. B. dadurch, daß man die Schnittpunkte der beiden Parabeln aufsucht.

e) Gleichungen 3. und höheren Grades.

Eine kubische Gleichung von der Form $y^3 + A \cdot y^2 + B \cdot y + C = 0$ geht durch Einsetzen von $x = y + \frac{1}{3}A$ über in die „reduzierte“ Form $x^3 + a \cdot x + b = 0$.

Ist I.
$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 < 0,$$

so sind alle 3 Wurzeln reell.

Ist II.
$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0,$$

so sind von den 3 reellen Wurzeln 2 einander gleich und halb so groß, aber von entgegengesetzten Vorzeichen wie die dritte.

Ist III.
$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 > 0,$$

so sind 2 Wurzeln komplex und eine reell.

Zur algebraischen Auflösung einer kubischen Gleichung kann man die Cardanische Formel anwenden:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

Da jede 3. Wurzel 3 Werte hat, so liefert die Cardanische Formel anscheinend 9 Werte. Dieselben reduzieren sich jedoch auf 3, weil man stets solche Werte der beiden Wurzeln zu kombinieren hat, daß ihr Produkt reell gleich $-\frac{a}{3}$ wird.

Die Cardanische Formel hat den Nachteil, daß sie im Falle I, in dem alle 3 Wurzeln reell sind, dieselben in einer imaginären Form liefert, die durch algebraische Operationen nicht in eine reelle Form übergeführt werden kann (irreduzibler Fall). In diesem Falle führt jedoch die trigonometrische Lösung zum Ziele.

Sind alle 3 Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + a \cdot x + b = 0$$

reell, ist also

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 < 0,$$

so muß $a < 0$ oder $-a > 0$ sein.

Es wird:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + i \cdot \sqrt{-\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - i \cdot \sqrt{-\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

Setzt man:

$$-\frac{b}{2} \pm i \cdot \sqrt{-\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3} = r \cdot (\cos \varphi \pm i \cdot \sin \varphi) \quad (\text{siehe S. 50}),$$

also:

$$-\frac{b}{2} = r \cdot \cos \varphi \quad \text{und} \quad \sqrt{-\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3} = r \cdot \sin \varphi,$$

so folgt:

$$r^2 = -\left(\frac{a}{3}\right)^2 \quad \text{und} \quad \cos \varphi = -\frac{b}{2 \cdot \sqrt{-\left(\frac{a}{3}\right)^2}}$$

Nach dem Moirreschen Satze (siehe Seite 50) ist

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)} + \sqrt[3]{r \cdot (\cos \varphi - i \cdot \sin \varphi)} \\ &= 2 \cdot \sqrt[3]{r} \cdot \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{3}, \quad \text{worin } k = 0, 1 \text{ u. } 2 \text{ sein kann.} \end{aligned}$$

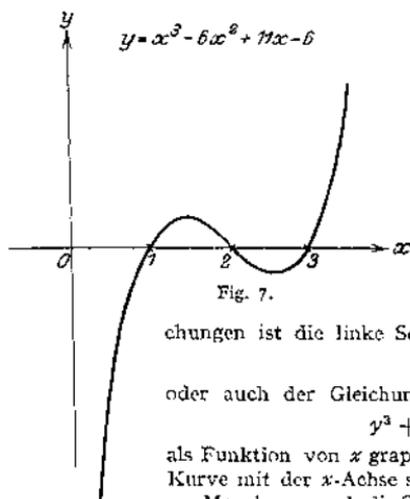


Fig. 7.

Man erhält also die 3 Lösungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{a}{3}} \cdot \cos \frac{\varphi}{3}, \\ x_2 &= 2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{a}{3}} \cdot \cos \frac{\varphi + 2\pi}{3}, \\ x_3 &= 2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{a}{3}} \cdot \cos \frac{\varphi + 4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Einfacher ist häufig die graphische Lösung. In ähnlicher Weise wie bei der graphischen Lösung quadratischer Gleichungen ist die linke Seite der reduzierten Gleichung

$$x^3 + ax + b = 0$$

oder auch der Gleichung

$$y^3 + Ay^2 + By + C = 0$$

als Funktion von x graphisch darzustellen. Die Schnittpunkte dieser Kurve mit der x -Achse sind dann die Wurzeln der Gleichung (Fig. 7).

Man kann auch die Schnittpunkte der kubischen Parabel $y = x^3$

mit der Geraden

$$y = -ax - b$$

bestimmen (Fig. 8), also ganz analog wie bei den quadratischen Gleichungen verfahren (siehe S. 58). Wie bereits bemerkt ist dieses Verfahren besonders dann von Vorteil, wenn es sich um die Lösung mehrerer Gleichungen handelt.

Sind x_1 , x_2 und x_3 die 3 Wurzeln einer kubischen Gleichung, so kann dieselbe in die Form

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) = 0$$

gebracht werden,

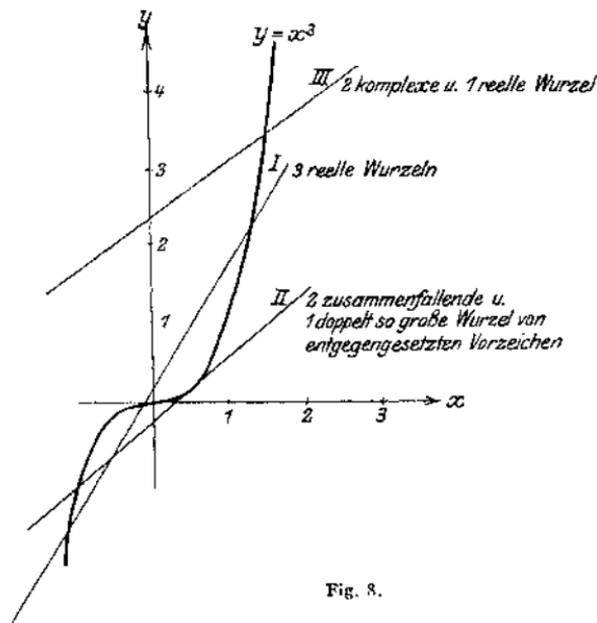


Fig. 8.

da für $x = x_1$, $x = x_2$ und $x = x_3$ diese Gleichung identisch null wird. Ist also eine Wurzel x_1 einer kubischen Gleichung bekannt, so kann dieselbe durch Division mit $x - x_1$ auf eine quadratische Gleichung reduziert werden.

$$\begin{array}{l}
 y^3 + 3y^2 - 10y - 24 = 0 \\
 x = y + 1 \\
 x^3 - 13x - 12 = 0 \quad \text{reduzierte Form.} \\
 x_1 = -1 \quad \text{direkt erkennbar.} \\
 \frac{x^3 - 13x - 12}{x + 1} = x^2 - x - 12 = 0 \quad \left| \begin{array}{l} y = x - 1 \\ y_1 = -2 \\ y_2 = +3 \\ y_3 = -4. \end{array} \right. \\
 x_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}} = 4 \\
 x_3 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}} = -3
 \end{array}$$

Bei Gleichungen höheren Grades oder transzendenten Gleichungen können die Wurzeln durch Näherungsmethoden (graphisch) bestimmt werden. Ist eine größere Genauigkeit notwendig, so können die erhaltenen Näherungswerte durch Interpolieren sukzessive korrigiert werden.

Beispiel einer transzendenten Gleichung:

$$\begin{array}{ll}
 \operatorname{tg} x = 2x & (x \text{ gemessen im Bogenmaß siehe S. 70.)} \\
 \operatorname{tg} 60^\circ = 1,73 & 2 \cdot \operatorname{arc} 60^\circ = 2,09 \\
 \operatorname{tg} 70^\circ = 2,75 & 2 \cdot \operatorname{arc} 70^\circ = 2,44 \\
 \operatorname{tg} 65^\circ = 2,14 & 2 \cdot \operatorname{arc} 65^\circ = 2,27 \\
 \operatorname{tg} 67^\circ = 2,36 & 2 \cdot \operatorname{arc} 67^\circ = 2,34 \\
 \operatorname{tg} 66^\circ 30' = 2,300 & 2 \cdot \operatorname{arc} 66^\circ 30' = 2,321 \\
 \operatorname{tg} 66^\circ 50' = 2,337 & 2 \cdot \operatorname{arc} 66^\circ 50' = 2,333 \\
 \operatorname{tg} 66^\circ 48' = 2,333 & 2 \cdot \operatorname{arc} 66^\circ 48' = 2,332.
 \end{array}$$

Die Annäherung kann bis zu jeder gewünschten Genauigkeit fortgesetzt werden.

$$x = \operatorname{arc} 66^\circ 48' = 1,166.$$

D. Die Kombinationslehre.

n -Gegenstände können auf n -Plätze, auf

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n-1) \cdot n = n! \quad (\text{sprich „n-Fakultät“})$$

verschiedene Arten verteilt werden. Man sagt, die Anzahl der möglichen „Permutationen“ von n -verschiedenen Elementen beträgt $n!$

Die Anzahl der Permutationen der 6 Elemente a, b, c, d, e, f ist $6! = 720$, die der 3 Elemente a, b, c ist $3! = 6$, nämlich 1. abc , 2. bac , 3. bca , 4. acb , 5. cab , 6. cba .

Befinden sich unter den n -Elementen p gleiche einer Art, q gleiche einer anderen Art, r gleiche einer dritten Art usw., so ist die Anzahl der möglichen Permutationen

$$\frac{n!}{p! \cdot q! \cdot r! \dots}$$

Die Anzahl der Permutationen der 10 Elemente $a, a, a, a, b, b, b, c, c, d$ ist

$$\frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = 12600.$$

die der 5 Elemente a, a, a, b, b ist

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10.$$

nämlich 1. $aaabb$, 2. $aabba$, 3. $aabab$, 4. $abaa$, 5. $ababa$, 6. $abbba$, 7. $baaab$, 8. $baaba$, 9. $babaa$, 10. $bbaaa$.

Die Anzahl der verschiedenen Arten, auf welche man unter n Gegenständen k auswählen kann, heißt die Anzahl der „Kombinationen“ der n Gegenstände zu je k . Dieselbe ist ohne Wiederholung desselben Gegenstandes in einer Gruppe

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k} \quad (\text{sprich „}n \text{ über } k\text{“ oder auch „}n \text{ tief } k\text{“}).$$

Es ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Die Anzahl der Kombinationen der 4 Gegenstände a, b, c, d zu je 2 ist ohne Wiederholung desselben Gegenstandes in einer Gruppe

$$\binom{4}{2} = \frac{4}{2! \cdot 2!} = 6,$$

nämlich 1. ab , 2. ac , 3. ad , 4. bc , 5. bd , 6. cd .

Die Anzahl der Kombinationen der n Gegenstände zu je k ist mit Wiederholung desselben Gegenstandes in einer Gruppe

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Für das vorige Beispiel ist somit die Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung

$$\binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10.$$

Zu den 6 genannten Kombinationen ohne Wiederholung kommen noch folgende 4 hinzu: 1. aa , 2. bb , 3. cc , 4. dd .

Werden in den einzelnen Gruppen der Kombinationen Permutationen vorgenommen, so erhält man die „Variationen“. Die Anzahl der Variationen von n Elementen zu je k beträgt

$$\text{„ohne Wiederholung“ } \binom{n}{k} \cdot k! \quad \text{und} \quad \text{„mit Wiederholung“ } n^k.$$

Im vorstehenden Beispiel erhält man also ohne Wiederholung

$$\binom{4}{2} \cdot 2! = 12 \text{ Variationen,}$$

nämlich 1. ab , 2. ac , 3. ad , 4. bc , 5. bd , 6. cd , 7. ba , 8. ca , 9. da , 10. cb , 11. db , 12. dc . Mit Wiederholung würde man $4^2 = 16$ erhalten, nämlich außer den genannten 12 noch folgende 4: 1. aa , 2. bb , 3. cc , 4. dd .

Die Zahlen $\binom{n}{k}$ sind die Binomialkoeffizienten, d. h. die Koeffizienten der einzelnen Glieder bei der Entwicklung der n ten Potenz eines Binoms (siehe S. 44 und 89)

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \binom{n}{3} \cdot a^{n-3} \cdot b^3 + \dots + b^n,$$

$$(a+b)^4 = a^4 + \binom{4}{1} \cdot a^3 \cdot b + \binom{4}{2} \cdot a^2 \cdot b^2 + \binom{4}{3} \cdot a \cdot b^3 + \binom{4}{4} \cdot b^4$$

$$= a^4 + 4a^3 \cdot b + 6a^2b^2 + 4a \cdot b^3 + b^4.$$

Es ist:

$$\binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{0} = 1,$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$, wenn n eine positive ganze Zahl ist. Ist n negativ oder ein Bruch, so ist $\binom{n}{k}$ für keinen Wert von $k = 0$. Die Entwicklung des Binoms ergibt eine unendliche Reihe (siehe S. 89 u. 90).

Sämtliche Binomialzahlen ergeben sich durch das Pascalsche Dreieck:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

Jede Zahl ergibt sich als Summe der beiden in der vorhergehenden Zeile rechts und links über ihr stehenden Zahlen.

$$\begin{aligned}
 (a + b)^6 = & 1 \cdot a^6 + 6 \cdot a^5 \cdot b + 15 \cdot a^4 \cdot b^2 \\
 & + 20 \cdot a^3 \cdot b^3 + 15 \cdot a^2 \cdot b^4 + 6 \cdot a \cdot b^5 + 1 \cdot b^6.
 \end{aligned}$$

III. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf die Fehler- und Ausgleichs-Rechnung.

Bearbeitet von Dr. G. Glage.

A. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Das Anwendungsgebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung erstreckt sich auf Erscheinungen, deren Eintreffen einerseits von bekannten („Ursachen“), andererseits von unbekanntem („Zufällen“) Umständen abhängt.

Das Wort „Zufall“ ist hier nicht gleichbedeutend mit dem Fehlen eines ursächlichen Zusammenhangs, sondern es soll nur andeuten, daß ein solcher nicht angegeben werden kann.

Die „einfache Wahrscheinlichkeit“ für das Eintreten eines bestimmten Ereignisses ist der Quotient $\frac{g}{m}$ aus der Anzahl g aller dem Ereignis „günstigen Fälle“ und der Anzahl m aller „möglichen Fälle“. Hierbei ist vorausgesetzt, daß alle möglichen Fälle „gleichwertig“ sind, d. h., daß kein Grund angebar ist, aus welchem das Ereignis eher auf die eine als auf die andere Art eintreten kann. Sind die einzelnen Fälle nicht gleichwertig, so findet Einteilung in Gruppen statt („partielle Wahrscheinlichkeit“).

Befinden sich z. B. in einer Urne 2 weiße und 8 schwarze Kugeln, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Herausgreifen einer weißen Kugel $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, die für das Herausgreifen einer schwarzen Kugel $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$, vorausgesetzt, daß alle 10 Kugeln „gleichwertig“, d. h. hier von gleicher Größe und gleicher Beschaffenheit sind.

Die mathematische Wahrscheinlichkeit ist stets ein echter Bruch.

Wahrscheinlichkeit 0 ist identisch mit Unmöglichkeit;

Wahrscheinlichkeit 1 ist identisch mit Gewißheit.

Ist die Anzahl der möglichen und günstigen Fälle abzählbar, so wird die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Kombinationslehre errechnet. Ist dies nicht der Fall, wie z. B. beim Versicherungswesen, so wird die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Statistik bestimmt. Gerade auf diesem Gebiete der angewandten Mathematik hat die Wahrscheinlichkeitsrechnung große Bedeutung erlangt.

Beispiel: Welcher Wurf hat beim Würfeln mit 2 Würfeln die größte Wahrscheinlichkeit?

Die Anzahl aller möglichen Fälle sind die Variationen der 6 Elemente 1, 2, 3, 4, 5 und 6 zu je 2 mit Wiederholung, also $6^2 = 36$ (siehe S. 63), nämlich:

1 + 1 = 2	2 + 1 = 3	3 + 1 = 4	4 + 1 = 5	5 + 1 = 6	6 + 1 = 7
1 + 2 = 3	2 + 2 = 4	3 + 2 = 5	4 + 2 = 6	5 + 2 = 7	6 + 2 = 8
1 + 3 = 4	2 + 3 = 5	3 + 3 = 6	4 + 3 = 7	5 + 3 = 8	6 + 3 = 9
1 + 4 = 5	2 + 4 = 6	3 + 4 = 7	4 + 4 = 8	5 + 4 = 9	6 + 4 = 10
1 + 5 = 6	2 + 5 = 7	3 + 5 = 8	4 + 5 = 9	5 + 5 = 10	6 + 5 = 11
1 + 6 = 7	2 + 6 = 8	3 + 6 = 9	4 + 6 = 10	5 + 6 = 11	6 + 6 = 12

Man erhält die Wahrscheinlichkeit	1 : 36	für den Wurf 2 und den Wurf 12
" " " "	2 : 36 = 1 : 18	" " " 3 " " " 11
" " " "	3 : 36 = 1 : 12	" " " 4 " " " 10
" " " "	4 : 36 = 1 : 9	" " " 5 " " " 9
" " " "	5 : 36	" " " 6 " " " 8
" " " "	6 : 36 = 1 : 6	" " " 7 " " " "

Der Wurf 7 hat die größte Wahrscheinlichkeit, d. h. es ist anzunehmen, daß bei einer großen Anzahl von Würfeln der Wurf 7 am häufigsten vorkommen wird.

Sind von m möglichen Fällen g_1 dem Ereignisse 1, g_2 dem Ereignisse 2 g_3 dem Ereignisse 3 günstig, ist also die „partielle“ Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse 1, 2 und 3:

$$\frac{g_1}{m}, \quad \frac{g_2}{m} \quad \text{und} \quad \frac{g_3}{m},$$

so ist die „totale“ Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines dieser 3 Ereignisse, gleichgültig welches, gleich der algebraischen Summe der partiellen Wahrscheinlichkeiten.

In dem obigen Beispiel ist die totale Wahrscheinlichkeit für den Wurf einer ungeraden Zahl, gleichgültig welcher, gleich der Summe der partiellen Wahrscheinlichkeiten für die 5 Würfe 3, 5, 7, 9 und 11; also

$$\frac{1}{18} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{2}.$$

Ebenso groß ist die Wahrscheinlichkeit für den Wurf einer geraden Zahl, trotzdem 6 gerade und nur 5 ungerade Zahlen möglich sind.

Ein aus dem gleichzeitigen Zusammentreffen verschiedener Ereignisse sich ergebendes Ereignis heißt ein „zusammengesetztes“ und seine Wahrscheinlichkeit eine „zusammengesetzte“. Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit ist gleich dem Produkte aus den Wahrscheinlichkeiten der Teilereignisse.

$$w = w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \dots$$

Ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein 30-jähriger Mann das 60. Lebensjahr erreicht, nach der Statistik $w_1 = 0,5$ und die Wahrscheinlichkeit dafür, daß seine Frau ebenfalls noch 30 Jahre lebt, $w_2 = 0,6$, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß beide noch 30 Jahre leben, nur $0,5 \cdot 0,6 = 0,3$.

B. Die experimentellen Beobachtungsfehler.

Ist eine Größe durch mehrere voneinander unabhängige Messungen bestimmt worden, so werden die beobachteten oder aus den Beobachtungen errechneten Werte infolge der „Beobachtungsfehler“ Differenzen zeigen. Sind die einzelnen Messungen unter den gleichen Bedingungen und mit der gleichen Sorgfalt ausgeführt, so ist der wahrscheinlichste Wert der gemessenen Größe der „arithmetische Mittelwert“, weil man annehmen kann, daß bei einer größeren Anzahl von Beobachtungen die „zufälligen“ — siehe Bedeutung von „Zufall“, S. 64 — Fehler ebensooft zu groß wie zu klein sein werden, ihre algebraische Summe also = 0 sein wird.

Gemessen	Scheinbarer Fehler	Absolute Werte der Fehler	
Beispiel: 1. 8,3	- 0,1	0,1	Meßresultat: 8,4 ± 0,1.
2. 8,5	+ 0,1	0,1	
3. 8,4	0,0	0,0	
4. 8,6	+ 0,2	0,2	
5. 8,3	- 0,1	0,1	
6. 8,3	- 0,1	0,1	
Mittelwert 8,4	Summe 0,0	Mittelwert 0,1	

Man bezeichnet die Abweichungen vom Mittelwerte als „scheinbare“ Fehler im Gegensatz zu den „wahren“ Fehlern, die nur bei Kenntnis des wahren Wertes der gemessenen Größe angebar sind.

Der absolute Wert der scheinbaren Fehler ist ein Maß für die Genauigkeit der Beobachtungen. Der arithmetische Mittelwert dieser Absolutwerte ist ein praktisches Maß für die Zuverlässigkeit der Messungen, das zweckmäßig mit \pm dem Resultate zugefügt wird. Dieser durchschnittliche Fehler ist nicht zu verwechseln mit dem sogenannten „mittleren“ oder dem „wahrscheinlichen“ Fehler, die beide nach der Methode der kleinsten Quadrate errechnet werden.

Jedes Resultat ist mit so viel Ziffern anzugeben, daß die letzte keinen großen Anspruch auf Genauigkeit hat, die vorletzte aber noch sicher verbürgt werden kann. Die Zuverlässigkeit der letzten Ziffer wird in der vorher angegebenen Weise mit \pm hinzugefügt.

Es ist z. B.

$$\frac{10,255 \pm 0,005}{3} = 3,418 \pm 0,002, \quad \text{nicht etwa} \quad 3,4183 \pm 0,0017.$$

Die 0 ist als technische Zahl ebenso zu behandeln wie jede andere Ziffer, also z. B. $10,200 \pm 0,005$, nicht $10,2 \pm 0,005$. Das Hinschreiben der 0 zeigt, daß diese Ziffer gemessen ist.

10,000 m	gemessen bis auf mm genau
10,00 m	„ „ „ cm „
$87 \cdot 10^3$ m	„ „ „ km „
87 000 m	„ „ „ m „

$$8,4 \cdot 5,2 \cdot 7,6 = 330 \quad (\text{oder auch } 332); \quad \text{nicht etwa } 331,968.$$

Haben die einzelnen Messungen, die zu einem Mittelwerte vereinigt werden sollen, eine verschiedene Genauigkeit, so werden dieselben vor ihrer Vereinigung mit ihrem „Gewichte“ multipliziert, d. h. mit einer Zahl, welche ein Maß für ihre Genauigkeit angibt. Auf diese Weise erhält eine mit dreifacher Genauigkeit ausgeführte Messung den dreifachen Einfluß auf das Resultat wie eine nur mit einfacher Genauigkeit durchgeführte. Sie wird bei der Ermittlung des Mittelwertes dreimal gerechnet.

Beispiel: Die Schwingungszahl einer Stimmgabel wurde mittels einer Sirene von 16 Löchern am Umfange gemessen:

n Umdrehungen in	t Sek.	Schwingungszahl = $16 \cdot \frac{n}{t}$	
1. 388	„ „ 12,2	„	= 509 11
2. 554	„ „ 17,2	„	= 515 5
3. 1266	„ „ 39,2	„	= 517 3
4. 3465	„ „ 106,0	„	= 523 3
			520 ± 4

Die Gewichte dieser 4 Messungen sind nicht einander gleich, sondern den Beobachtungszeiten proportional. Der Mittelwert ist daher

$$\frac{509 \cdot 12 + 515 \cdot 17 + 517 \cdot 39 + 523 \cdot 106}{12 + 17 + 39 + 106} = 520$$

und nicht etwa

$$\frac{509 + 515 + 517 + 523}{4} = 516.$$

Der durchschnittliche Fehler ist unter Berücksichtigung der Gewichte

$$\frac{11 \cdot 12 + 5 \cdot 17 + 3 \cdot 39 + 3 \cdot 106}{12 + 17 + 39 + 106} = 4.$$

C. Die Methode der kleinsten Quadrate.¹⁾

Die bequeme Auswertung von Beobachtungen durch Bildung des arithmetischen Mittelwertes versagt, sobald es sich nicht nur um eine einzige direkt durch Beobachtungen bestimmbare Größe handelt, sondern wenn nur Werte gemessen werden können, die eine Beziehung zwischen mehreren Unbekannten ergeben. Handelt es sich z. B. um eine Funktion von 3 Größen, so sind dieselben durch 3 Gleichungen bestimmbar. Bei genaueren Messungen wird man sich jedoch ebensowenig mit den 3 zur mathematischen Lösung notwendigen

¹⁾ Vgl. hierzu Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik. 11. Aufl. Leipzig 1910. B. G. Teubner.

Messungen begnügen, wie man in den vorigen Beispielen nicht nur eine Messung ausführt. Hat man eine größere Zahl von Messungen ausgeführt, so sind mathematisch die zu errechnenden Größen überbestimmt. Es gibt keine Werte für dieselben, die sämtliche Gleichungen gleichzeitig erfüllen; und es fragt sich, wie die Unbekannten zu berechnen sind, um sämtliche Gleichungen „möglichst genau“ zu befriedigen. Ohne irgendeine willkürliche Annahme ist natürlich eine Berechnung überhaupt nicht möglich. Es genügt jedoch die gleiche Annahme, die vorhin gemacht wurde, nämlich, daß bei einer einzigen, durch direkte Beobachtungen bestimmten Größe, der arithmetische Mittelwert der einzelnen Beobachtungsergebnisse der wahrscheinlichste Wert ist. Gauß verallgemeinerte diesen Satz und zeigte die Rechenregeln für die Auswertung von Funktionen mehrerer Unbekannter.

Für den arithmetischen Mittelwert ist im Gegensatz zu anderen Mittelwerten die Summe der Quadrate der Abweichungen der Einzelmessungen von diesem Mittelwerte, oder wie man kurz sagt, die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum.

Fehler	Fehlerquadrate	Fehler	Fehlerquadrate
8,3 1	1	8,3 0	0
8,5 1	1	8,5 2	4
8,4 0	0	8,4 1	1
8,6 2	4	8,6 3	9
8,3 1	1	8,3 0	0
8,3 1	1	8,3 0	0
8,4	Summe = 8 [Minimum]	8,3	Summe = 14 [$>$ 8]

Beispiel: Es ist bei verschiedenen Temperaturen t die Länge eines Weißmetallstabes $l_t = l_0 + l_0 \cdot \alpha \cdot t = X + Y \cdot t$ gemessen worden.

Differenzen = 25 · Y

1. $l_{25} = 200,14$ mm	0,10 mm
2. $l_{50} = 200,24$ „	0,09 „
3. $l_{75} = 200,33$ „	0,08 „
4. $l_{100} = 200,41$ „	0,11 „
5. $l_{125} = 200,52$ „	0,09 „
6. $l_{150} = 200,61$ „	0,08 „
7. $l_{175} = 200,69$ „	0,11 „
8. $l_{200} = 200,80$ „	

Mittel 0,0943

$$Y = \frac{0,0943}{25} = 0,00377.$$

Das Bilden eines solchen Mittelwertes ist hier sinnlos, weil bei dieser Mittelnahme tatsächlich nur die erste und letzte Messung berücksichtigt wird, während alle übrigen mit der gleichen Sorgfalt und Genauigkeit angestellten Messungen keinen Einfluß auf das Resultat erhalten. Es ist

$$l_{200} - l_{25} = 0,66,$$

also wird

$$Y = \frac{0,66}{175} = 0,00377.$$

Die Methode der kleinsten Quadrate zeigt, wie hier zu verfahren ist, um sämtlichen Messungen den gleichen Einfluß auf das Resultat einzuräumen.

Um kleinere Zahlen für die Rechnung zu erhalten, ist es zweckmäßig, zunächst $X = 200 + x$ und $Y = 0,004 + y$ zu setzen. Die obigen 8 Gleichungen lauten dann:

1. $x + 25y = 0,14 - 0,10 = 0,04$	5. $x + 125y = 0,52 - 0,50 = 0,02$
2. $x + 50y = 0,24 - 0,20 = 0,04$	6. $x + 150y = 0,61 - 0,60 = 0,01$
3. $x + 75y = 0,33 - 0,30 = 0,03$	7. $x + 175y = 0,69 - 0,70 = -0,01$
4. $x + 100y = 0,41 - 0,40 = 0,01$	8. $x + 200y = 0,80 - 0,80 = 0,00$

In diesen 8 Gleichungen $x + t_k \cdot y = u_k$ sind die beiden Unbekannten x und y so zu bestimmen, daß die Gleichungen „möglichst genau“ erfüllt werden, d. h. es muß die Summe der Fehlerquadrate

$$\sum_{k=1}^{k=8} [(u_k - x - t_k \cdot y)^2]$$

ein Minimum werden, es müssen also die partiellen Differentialquotienten dieser Summe nach x und nach y gleich 0 sein. Man erhält so für x und y die beiden Bestimmungsgleichungen:

$$\text{I. } \frac{\partial \sum_{k=1}^{k=8} [(u_k - x - t_k \cdot y)^2]}{\partial x} = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_{k=1}^{k=8} u_k - 8 \cdot x - y \cdot \sum_{k=1}^{k=8} t_k = 0.$$

$$\text{II. } \frac{\partial \sum_{k=1}^{k=8} [(u_k - x - t_k \cdot y)^2]}{\partial y} = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_{k=1}^{k=8} (t_k \cdot u_k) - x \cdot \sum_{k=1}^{k=8} t_k - y \cdot \sum_{k=1}^{k=8} (t_k^2) = 0.$$

Es ist:

k	u_k	t_k	$u_k \cdot t_k$	t_k^2
1.	0,04	25	1,00	625
2.	0,04	50	2,00	2 500
3.	0,03	75	2,25	5 625
4.	0,01	100	1,00	10 000
5.	0,02	125	2,50	15 625
6.	0,01	150	1,50	22 500
7.	-0,01	175	-1,75	30 625
8.	0,00	200	0,00	40 000
	Σ 0,14	Σ 900	Σ 8,50	Σ 127 500

Die beiden obigen Bestimmungsgleichungen heißen somit:

$$\text{I. } 0,14 - 8x - 900y = 0.$$

$$\text{II. } 8,50 - 900x - 127 500y = 0.$$

Hieraus folgt:

$$x = \frac{900 \cdot 8,50 - 0,14 \cdot 127 500}{810 000 - 8 \cdot 127 500} = 0,048_6,$$

$$y = \frac{900 \cdot 0,14 - 8 \cdot 8,50}{810 000 - 8 \cdot 127 500} = -0,00027_4.$$

Somit wird

$$X = 200 + x = 200,049 \text{ mm} = \text{Länge des Stabes bei } 0^\circ \text{C},$$

$$Y = 0,004 + y = 0,00372_4,$$

$$\alpha = \frac{Y}{X} = \frac{0,00372_4}{200,049} = 0,0000186 = \text{Ausdehnungskoeffizient.}$$

Falls die einzelnen Messungen nicht gleichwertig gewesen wären, hätten die „Gewichte“ in der auf S. 66 angegebenen Weise berücksichtigt werden müssen.

Handelt es sich um Funktionen mit mehr als 2 Unbekannten und um unbequeme Zahlen, so wird praktisch das Gaußsche Rechenverfahren zur Auflösung benutzt, das für eine beliebige Zahl von Unbekannten anwendbar ist.

Beispiel für 3 Unbekannte:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= \delta_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= \delta_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= \delta_3 \\ a_4 x + b_4 y + c_4 z &= \delta_4 \\ \dots & \dots \\ a_n x + b_n y + c_n z &= \delta_n. \end{aligned}$$

Man setzt symbolisch:

$$[a] = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2$$

$$[a b] = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n$$

$$[a c] = a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + \dots + a_n c_n$$

$$[a \delta] = a_1 \delta_1 + a_2 \delta_2 + a_3 \delta_3 + \dots + a_n \delta_n$$

und entsprechend

$$[b b] = b_1^2 + b_2^2 + \dots$$

$$[b c], \quad [c c]$$

$$[b \delta], \quad [c \delta].$$

Nach der Methode der kleinsten Quadrate erhält man dann die 3 Bestimmungsgleichungen:

$$[a a] \cdot x + [a b] \cdot y + [a c] \cdot z = [a \delta]$$

$$[b a] \cdot x + [b b] \cdot y + [b c] \cdot z = [b \delta]$$

$$[c a] \cdot x + [c b] \cdot y + [c c] \cdot z = [c \delta].$$

Setzt man ferner zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} [b \cdot 1] &= [b \cdot b] - \frac{[a \cdot b]}{[a \cdot a]} \cdot [a \cdot b] \\ [b \cdot c \cdot 1] &= [b \cdot c] - \frac{[a \cdot b]}{[a \cdot a]} \cdot [a \cdot c] & [c \cdot c \cdot 1] &= [c \cdot c] - \frac{[a \cdot c]}{[a \cdot a]} \cdot [a \cdot c] \\ [b \cdot \delta \cdot 1] &= [b \cdot \delta] - \frac{[a \cdot b]}{[a \cdot a]} \cdot [a \cdot \delta] & [c \cdot \delta \cdot 1] &= [c \cdot \delta] - \frac{[a \cdot c]}{[a \cdot a]} \cdot [a \cdot \delta] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} [c \cdot c \cdot 2] &= [c \cdot c \cdot 1] - \frac{[b \cdot c \cdot 1]}{[b \cdot b \cdot 1]} \cdot [b \cdot c \cdot 1] \\ [c \cdot \delta \cdot 2] &= [c \cdot \delta \cdot 1] - \frac{[b \cdot c \cdot 1]}{[b \cdot b \cdot 1]} \cdot [b \cdot \delta \cdot 1], \end{aligned}$$

so folgt:

$$z = \frac{[c \cdot \delta \cdot 2]}{[c \cdot c \cdot 2]}, \quad y = \frac{[b \cdot \delta \cdot 1]}{[b \cdot b \cdot 1]} - x \cdot \frac{[b \cdot c \cdot 1]}{[b \cdot b \cdot 1]}, \quad x = \frac{[a \cdot \delta]}{[a \cdot a]} - \frac{[a \cdot b]}{[a \cdot a]} \cdot y - \frac{[a \cdot c]}{[a \cdot a]} \cdot z$$

Für Funktionen mit 2 Unbekannten:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= \delta_1 \\ a_2 x + b_2 y &= \delta_2 \\ a_3 x + b_3 y &= \delta_3 \\ &\dots \dots \dots \\ a_n x + b_n y &= \delta_n \end{aligned}$$

würde man entsprechend erhalten:

$$y = \frac{[b \cdot \delta \cdot 1]}{[b \cdot b \cdot 1]} \quad \text{und} \quad x = \frac{[a \cdot \delta]}{[a \cdot a]} - \frac{[a \cdot b]}{[a \cdot a]} y.$$

Für das letzte zahlenmäßige Beispiel ist:

$$\begin{aligned} [a \cdot a] &= 8 \\ [a \cdot b] &= 900 & [b \cdot b] &= 127 \, 500 & [b \cdot b \cdot 1] &= 26 \, 250 \\ [a \cdot \delta] &= 0,14 & [b \cdot \delta] &= 8,50 & [c \cdot \delta \cdot 1] &= -7,25 \end{aligned}$$

Folglich wird in Übereinstimmung mit den dortigen Resultaten

$$y = -\frac{7,25}{26 \, 250} = -0,000 \, 276$$

und

$$x = -\frac{0,14}{8} + \frac{900}{8} \cdot 0,000 \, 276 = 0,0436$$

Die Methode der kleinsten Quadrate kann auch zur Aufstellung empirischer Formeln auf Grund eines bestimmten Beobachtungsmaterials benutzt werden. Geht man von verschiedenen Hypothesen aus und bestimmt für ein und dasselbe Beobachtungsmaterial zu jeder dieser Hypothesen nach der Methode der kleinsten Quadrate die empirische Formel, so hat diejenige Hypothese die größte Wahrscheinlichkeit für sich, bei der die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird.

Beispiel: Für die Eichung von Thermoelementen (Eisen-Konstantan) erhielt G l a g e ¹⁾ folgende Werte:

Temperaturdifferenz der beiden Kontaktstellen	Spannung pro 1° C in Mikrovolt	Temperaturdifferenz der beiden Kontaktstellen	Spannung pro 1° C in Mikrovolt
0° C		0° C	
192,36	55,56	86,60	53,54
184,08	55,26	77,07	53,36
175,70	55,13	69,12	53,29
167,01	55,05	63,64	53,24
158,30	54,83	56,50	52,98
149,72	54,77	49,70	52,88
141,21	54,58	43,01	52,77
133,60	54,37	35,82	52,66
126,01	54,33	29,23	52,56
119,10	54,13	21,70	52,35
111,80	54,05	15,22	52,33
104,83	54,00	8,61	52,20
98,21	53,78	3,50	52,06

¹⁾ Dissertation Königsberg 1905 und Ann. d. Phys. 1905, S. 932.

Die gewöhnliche Annahme, daß die elektromotorische Kraft des Thermoelements der Temperaturdifferenz der Kontaktstellen proportional, die elektromotorische Kraft (ϵ) pro 1°C Temperaturdifferenz also konstant sei, ist nach diesen Messungen nicht streng erfüllt. Läßt man somit die Annahme $\epsilon = \text{konst.}$ fallen und setzt $\epsilon = \epsilon_0 + C \cdot T$, worin T die Temperaturdifferenz der beiden Kontaktstellen ist, so sind die beiden Unbekannten ϵ_0 und C so zu bestimmen, daß folgende 26 Gleichungen „möglichst genau“ erfüllt werden:

1. $55,56 = \epsilon_0 + C \cdot 192,36$
2. $55,26 = \epsilon_0 + C \cdot 184,08$
3. $55,13 = \epsilon_0 + C \cdot 175,70$
-
26. $52,06 = \epsilon_0 + C \cdot 3,50$.

Setzt man hierin, um kleinere Zahlen für die Rechnung zu erhalten,

$$\epsilon_0 = 52,00 + x \quad \text{und} \quad C = 0,02 + y,$$

so gehen die 26 Gleichungen über in folgende Form:

$x + y \cdot 192,36 = -0,28_7$	$x + y \cdot 86,60 = -0,19_2$
$x + y \cdot 184,08 = -0,42_2$	$x + y \cdot 77,07 = -0,18_1$
$x + y \cdot 175,70 = -0,38_8$	$x + y \cdot 69,12 = -0,09_2$
$x + y \cdot 167,01 = -0,29_0$	$x + y \cdot 63,64 = -0,43_2$
$x + y \cdot 158,30 = -0,33_6$	$x + y \cdot 56,50 = -0,15_0$
$x + y \cdot 149,72 = -0,22_4$	$x + y \cdot 49,70 = -0,11_1$
$x + y \cdot 141,21 = -0,24_4$	$x + y \cdot 43,01 = -0,09_0$
$x + y \cdot 133,60 = -0,30_2$	$x + y \cdot 35,82 = -0,05_6$
$x + y \cdot 126,01 = -0,19_0$	$x + y \cdot 29,23 = -0,02_3$
$x + y \cdot 119,10 = -0,25_2$	$x + y \cdot 21,70 = -0,08_1$
$x + y \cdot 111,80 = -0,18_6$	$x + y \cdot 15,22 = +0,02_0$
$x + y \cdot 104,83 = -0,09_7$	$x + y \cdot 8,61 = +0,02_6$
$x + y \cdot 98,21 = -0,18_4$	$x + y \cdot 3,50 = -0,01_0$

Führt man die Rechnung in gleicher Weise wie auf S. 67 u. 68 durch, so folgt

$$\begin{aligned} x &= 0,01 \quad \text{und} \quad y = -0,00183; \\ \epsilon_0 &= 52,01, \quad C = 0,01817; \\ \epsilon &= 52,0 + 0,018 \cdot T. \end{aligned}$$

Die elektromotorische Kraft für eine Temperaturdifferenz von $T^\circ\text{Cels.}$ ist somit

$$E = 52,0 \cdot T + 0,018 \cdot T^2 \text{ Mikrovolt.}$$

Die Methode der kleinsten Quadrate bietet ohne weiteres die Möglichkeit, beliebig viele Korrektionsglieder — Abhängigkeit von den höheren Potenzen von T — zu berechnen. Diese Korrekturen dürften jedoch gegenüber anderen Meßfehlern nicht in Frage kommen, während die Vernachlässigung des berechneten ersten Korrektionsgliedes bei Präzisionsmessungen unzulässige Fehler verursachen kann.

Betr. Verwendung der Methode der kleinsten Quadrate zur Bestimmung der Koeffizienten der Fourierschen Reihen siehe S. 94.

IV. Die Kreis- und Hyperbelfunktionen.

Bearbeitet von Dr. G. Glagc.

A. Die Trigonometrie.

Winkel werden entweder im Gradmaß oder im Bogenmaß gemessen. Das Gradmaß gibt die Gradzahl an, um die ein Schenkel des Winkels gedreht werden muß, um ihn mit dem anderen Schenkel zur Deckung zu bringen, wobei eine volle Kreisrotation gleich 360° gesetzt wird.

$$1^\circ = 60', \quad 1' = 60''.$$

Das Bogenmaß gibt die Länge des Kreisbogens (arcus) an, der von den beiden

Schenkeln des Winkels auf einem um den Scheitel mit dem Radius 1 beschriebenen Kreise herausgeschnitten wird (Fig. 9).

Gradmaß φ°	360°	180°	90°	φ°	1°	57° 17' 45"
Bogenmaß $\text{arcus } \varphi$	2π	π	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{\pi}{180} \cdot \varphi$	0,0175	1

In der höheren Mathematik wird ausschließlich das Bogenmaß benutzt. Definition der trigonometrischen Funktionen (Fig. 10).

Man denkt sich die Winkel durch Drehen eines Schenkels entstanden, wobei dieselben stets von dem festliegenden Schenkel OA aus gezählt werden. Erfolgt die Drehung von der Richtung von der Richtung der positiven x -Achse aus nach der Richtung der positiven y -Achse hin, so wird der Winkel positiv, bei entgegengesetzter Drehung hin-



Fig. 9.

gegen negativ gerechnet. Das Bogenmaß für den Winkel φ ist der Bogen AP . Einer mehrfachen Umdrehung entspricht eine Bogenlänge von einem Mehrfachen von 2π . In diesem Sinne ist die Größe des Winkels unbegrenzt.

Betrachtet man OA und OB als Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so ist der

Sinus des Winkels φ gleich der Ordinate des Punktes P

$$\sin \varphi = \overline{PP_1},$$

Cosinus des Winkels φ gleich der Abszisse des Punktes P

$$\cos \varphi = \overline{OP_1},$$

Tangens des Winkels φ gleich dem Abschnitte auf der Tangente

$$\text{tg } \varphi = \overline{AP_2},$$

Cotangens des Winkels φ gleich dem Abschnitte auf der Cotangente¹⁾

$$\text{ctg } \varphi = \overline{BP_3}.$$

Es ist (Fig. 10):

- $\frac{PP_1}{OP_1} + \frac{OP_1}{OP_1} = \frac{OP_1}{OP_1}$ oder $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1.$
- $\frac{PP_1}{OP_1} = \frac{AP_2}{OA}$ oder $\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \text{tg } \varphi.$
- $\frac{OP_1}{PP_1} = \frac{BP_3}{AP_2}$ oder $\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \text{ctg } \varphi.$
- $\text{tg } \varphi \cdot \text{ctg } \varphi = 1.$

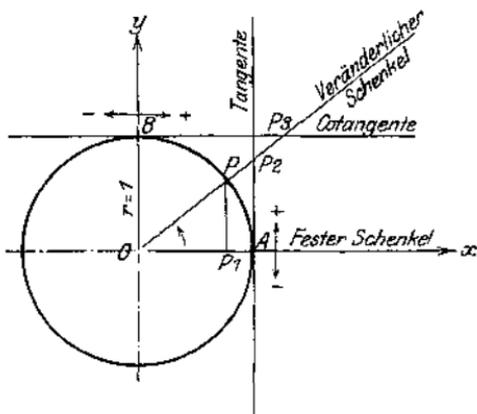


Fig. 10.

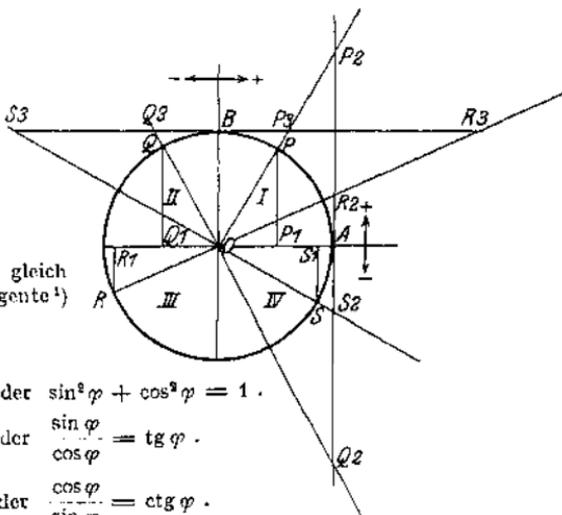


Fig. 11.

¹⁾ Cotangente = Tangente des Complementwinkels.

5. Vorzeichen der Funktionen in den 4 Quadranten (Fig. 11):

Funktion	I $0 - \frac{\pi}{2}$	II $\frac{\pi}{2} - \pi$	III $\pi - \frac{3}{2}\pi$	IV $\frac{3}{2}\pi - 2\pi$
sinus . . .	+ (PP ₁)	+ (QQ ₁)	- (RR ₁)	- (SS ₁)
cosinus . .	+ (OP ₁)	- (OQ ₁)	- (OR ₁)	+ (OS ₁)
tangens . .	+ (AP ₂)	- (AQ ₂)	+ (AR ₂)	- (AS ₂)
cotangens .	+ (BP ₃)	- (BQ ₃)	+ (BR ₃)	- (BS ₃)

Im II. Quadranten ist nur der sinus, im IV. nur der cosinus und im III. nur der tangens und cotangens positiv.

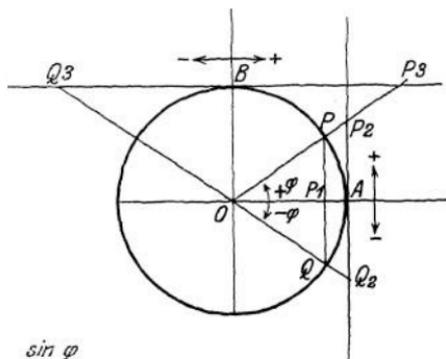


Fig. 12.

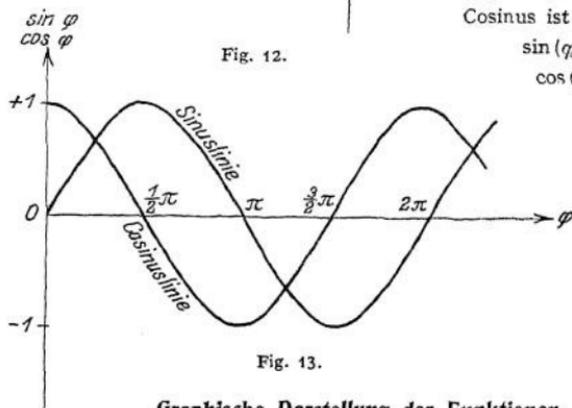


Fig. 13.

Graphische Darstellung der Funktionen. (Fig. 13 u. 14.)

Während $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ zwischen -1 und $+1$ variieren, können $\operatorname{tg} \varphi$ und $\operatorname{ctg} \varphi$ sämtliche Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen.

Die Änderung des Sinus	ist am größten in der Nähe von	$0 \pm k \cdot \pi$
„ „ „ Cosinus	„ „ „ „ „ „	$\frac{\pi}{2} \pm k \cdot \pi$
„ „ „ Tangens	„ „ „ „ „ „	$\frac{\pi}{2} \pm k \cdot \pi$
„ „ „ Cotangens	„ „ „ „ „ „	$0 \pm k \cdot \pi$

6. Beziehungen zwischen den Funktionen des Winkels $+\varphi$ und $-\varphi$ (Fig. 12).

$$\begin{aligned}\sin(-\varphi) &= -\sin(+\varphi) \\ \cos(-\varphi) &= +\cos(+\varphi) \\ \operatorname{tg}(-\varphi) &= -\operatorname{tg}(+\varphi) \\ \operatorname{ctg}(-\varphi) &= -\operatorname{ctg}(+\varphi).\end{aligned}$$

7. Sinus und Cosinus ändern sich nicht, wenn der Winkel um ein beliebiges Vielfaches von 2π geändert wird. Die Periode von Sinus und Cosinus ist 2π .

$$\begin{aligned}\sin(\varphi \pm k \cdot 2\pi) &= \sin \varphi, \\ \cos(\varphi \pm k \cdot 2\pi) &= \cos \varphi,\end{aligned}$$

worin k eine ganze Zahl ist.

8. Tangens und Cotangens ändern sich nicht, wenn der Winkel um ein beliebiges Vielfaches von π geändert wird. Die Periode von Tangens und Cotangens ist π .

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\varphi \pm k \cdot \pi) &= \operatorname{tg} \varphi, \\ \operatorname{ctg}(\varphi \pm k \cdot \pi) &= \operatorname{ctg} \varphi.\end{aligned}$$

9.

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π		30°	60°	120°	45°
sinus . . .	0	1	0	1	0	usw.	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0,866$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0,866$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0,707$
cosinus . .	1	0	-1	0	1	periodisch	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0,866$	$\frac{1}{2} = 0,5$	$-\frac{1}{2} = -0,5$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0,707$
tangens . .	0	∞	0	∞	0		$\frac{1}{3}\sqrt{3} = 0,577$	$\sqrt{3} = 1,732$	$-\sqrt{3} = -1,732$	1
cotangens .	∞	0	∞	0	∞		$\sqrt{3} = 1,732$	$\frac{1}{3}\sqrt{3} = 0,577$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3} = -0,577$	1

Für kleine Winkel ist $\sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi$ und $\cos \varphi = 1$, z. B. $\sin 5^\circ = 0,0872$,
 $\operatorname{tg} 5^\circ = 0,0875$, $\cos 5^\circ = 0,9962$.

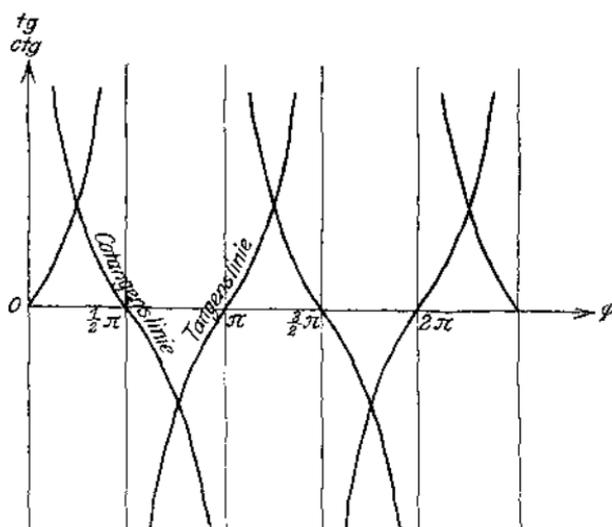


Fig. 14.

Die Cosinuskurve ist gleich der um $\frac{\pi}{2}$ verschobenen Sinuskurve.

Die Cotangenskurve ist gleich dem um $\frac{\pi}{2}$ verschobenen Spiegelbild der Tangenskurve.

10.

	$\frac{\pi}{2} - \varphi$	$\frac{\pi}{2} + \varphi$	$\pi - \varphi$	$\pi + \varphi$	$\frac{3}{2}\pi - \varphi$	$\frac{3}{2}\pi + \varphi$	$2\pi - \varphi$	$2\pi + \varphi$	
sinus . . .	$\cos \varphi$	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$	$-\sin \varphi$	$-\cos \varphi$	$-\cos \varphi$	$-\sin \varphi$	$\sin \varphi$	usw. periodisch
cosinus . . .	$\sin \varphi$	$-\sin \varphi$	$-\cos \varphi$	$-\cos \varphi$	$-\sin \varphi$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\cos \varphi$	
tangens . . .	$\operatorname{ctg} \varphi$	$-\operatorname{ctg} \varphi$	$-\operatorname{tg} \varphi$	$\operatorname{tg} \varphi$	$\operatorname{ctg} \varphi$	$-\operatorname{ctg} \varphi$	$-\operatorname{tg} \varphi$	$\operatorname{tg} \varphi$	
cotangens .	$\operatorname{tg} \varphi$	$-\operatorname{tg} \varphi$	$-\operatorname{ctg} \varphi$	$\operatorname{ctg} \varphi$	$\operatorname{tg} \varphi$	$-\operatorname{tg} \varphi$	$-\operatorname{ctg} \varphi$	$\operatorname{ctg} \varphi$	

11.

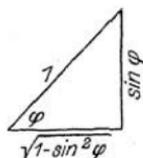


Fig. 15.

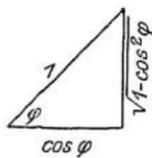


Fig. 16.

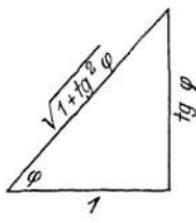


Fig. 17.

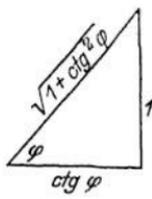


Fig. 18.

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}$$

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}{\sin \varphi}$$

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi}$$

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}$$

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$$

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi}}$$

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\operatorname{ctg} \varphi}$$

12. Funktionen von Summe und Differenz zweier Winkel.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta},$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Für $\alpha = \beta$ wird:

13. $\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

$$\operatorname{ctg}(2\alpha) = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \cdot \operatorname{ctg} \alpha},$$

$$\sin \alpha = 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2},$$

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{2 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}},$$

14. $\sin(3\alpha) = 3 \cdot \sin \alpha - 4 \cdot \sin^3 \alpha,$

$$\cos(3\alpha) = 4 \cdot \cos^3 \alpha - 3 \cdot \cos \alpha.$$

15. $1 + \cos(2\alpha) = 2 \cdot \cos^2 \alpha,$

$$1 - \cos(2\alpha) = 2 \cdot \sin^2 \alpha,$$

$$\frac{1 - \cos(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)} = \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

(Folgt aus 13 unter Berücksichtigung von $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.)

$$16. \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \left(\text{da } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right),$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

17. Für $\alpha + \beta = x$ und $\alpha - \beta = y$ folgt aus 12 durch Addition bzw. Subtraktion:

$$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}.$$

18. Für $\frac{x+y}{2} = \alpha$ und $\frac{x-y}{2} = \beta$ folgt aus 17:

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cdot \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \},$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cdot \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \},$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{1}{2} \cdot \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}.$$

$$19. \quad \operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

(aus 12 durch Division mit $\cos \alpha \cdot \cos \beta$),

$$\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}.$$

$$20. \quad \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha$$

(aus 12 durch Multiplikation),

$$\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha.$$

21. Für $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ wird:

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 4 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} + 1$$

$$\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma = 4 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma = 4 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} - 1$$

$$\sin(2\alpha) + \sin(2\beta) + \sin(2\gamma) = 4 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$$

$$\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(2\gamma) = -4 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma - 1$$

$$\sin(2\alpha) + \sin(2\beta) - \sin(2\gamma) = 4 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \gamma$$

$$\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) - \cos(2\gamma) = -4 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma + 1$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma + 2$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = -2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma + 1$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma = -2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma + 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \gamma \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

Derartige Umformungen von Summen in Produkte sind besonders bei logarithmischen Rechnungen bequem.

Berechnung rechtwinkliger Dreiecke. (Fig. 19.)

1. Gegeben: 1 Kathete und 1 Winkel.
(Z. B. a und α .)

$$\beta = 90 - \alpha, \quad c = \frac{a}{\sin \alpha}, \quad b = a \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

2. Gegeben: Hypotenuse und 1 Winkel.
(Z. B. c und α .)

$$\beta = 90 - \alpha, \quad a = c \cdot \sin \alpha, \quad b = c \cdot \cos \alpha.$$

3. Gegeben: Beide Katheten a und b .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}.$$

4. Gegeben: Hypotenuse und 1 Kathete.
(Z. B. c und a .)

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{a}{c}, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2} = c \cdot \cos \alpha = a \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

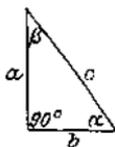


Fig. 19.

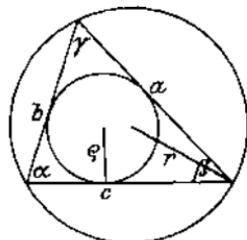
Berechnung schiefwinkliger Dreiecke. (Fig. 20.)

Fig. 20.

Die wichtigsten Formeln für das schiefwinklige Dreieck: Man erhält die einander entsprechenden Formeln stets durch „zyklische Vertauschung“ — Fig. 21 —, indem

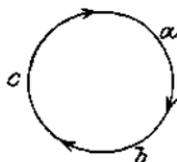


Fig. 21.

man von a nach b , von b nach c , von c nach a und „ α “ „ β “, „ β “ „ γ “, „ γ “ „ α “ weitergeht.

- $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ = \pi$; $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$.
- $\sin \alpha = \sin(\beta + \gamma)$; $\sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\beta + \gamma}{2}$;
 $\sin \beta = \sin(\gamma + \alpha)$; $\sin \frac{\beta}{2} = \cos \frac{\gamma + \alpha}{2}$;
 $\sin \gamma = \sin(\alpha + \beta)$; $\sin \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$.
- $\cos \alpha = -\cos(\beta + \gamma)$; $\cos \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\beta + \gamma}{2}$;
 $\cos \beta = -\cos(\gamma + \alpha)$; $\cos \frac{\beta}{2} = \sin \frac{\gamma + \alpha}{2}$;
 $\cos \gamma = -\cos(\alpha + \beta)$; $\cos \frac{\gamma}{2} = \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$.

4. Projektionssatz:

$$\begin{aligned} a &= b \cdot \cos \gamma + c \cdot \cos \beta, \\ b &= c \cdot \cos \alpha + a \cdot \cos \gamma, \\ c &= a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

5. Sinussatz:

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

6. Kosinussatz (allgemeiner pythagoraischer Lehrsatz):

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha = (b + c)^2 - 4 \cdot b \cdot c \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} \\ &= (b - c)^2 + 4 \cdot b \cdot c \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2 \cdot c \cdot a \cdot \cos \beta = (c + a)^2 - 4 \cdot c \cdot a \cdot \cos^2 \frac{\beta}{2} \\ &= (c - a)^2 + 4 \cdot c \cdot a \cdot \sin^2 \frac{\beta}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma = (a + b)^2 - 4 \cdot a \cdot b \cdot \cos^2 \frac{\gamma}{2} \\ &= (a - b)^2 + 4 \cdot a \cdot b \cdot \sin^2 \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

7. Tangensatz (Nepersche Gleichungen):

$$(a + b) : (a - b) = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} : \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$(b + c) : (b - c) = \operatorname{tg} \frac{\beta + \gamma}{2} : \operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2},$$

$$(c + a) : (c - a) = \operatorname{tg} \frac{\gamma + \alpha}{2} : \operatorname{tg} \frac{\gamma - \alpha}{2}.$$

8. Mollweidesche Gleichungen:

$$a \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2} = (b + c) \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = (b + c) \cdot \cos \frac{\beta + \gamma}{2},$$

$$b \cdot \cos \frac{\gamma - \alpha}{2} = (c + a) \cdot \sin \frac{\beta}{2} = (c + a) \cdot \cos \frac{\gamma + \alpha}{2},$$

$$c \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = (a + b) \cdot \sin \frac{\gamma}{2} = (a + b) \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$a \cdot \sin \frac{\beta - \gamma}{2} = (b - c) \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = (b - c) \cdot \sin \frac{\beta + \gamma}{2},$$

$$b \cdot \sin \frac{\gamma - \alpha}{2} = (c - a) \cdot \cos \frac{\beta}{2} = (c - a) \cdot \sin \frac{\gamma + \alpha}{2},$$

$$c \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = (a - b) \cdot \cos \frac{\gamma}{2} = (a - b) \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

9. Sehnenformeln:

$$a = 2 \cdot r \cdot \sin \alpha, \quad b = 2 \cdot r \cdot \sin \beta, \quad c = 2 \cdot r \cdot \sin \gamma.$$

10. Für

$$a + b + c = 2s, \quad a + b - c = 2 \cdot (s - c), \quad a - b + c = 2 \cdot (s - b)$$

$$\text{und} \quad -a + b + c = 2 \cdot (s - a)$$

wird

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s - b) \cdot (s - c)}{b \cdot c}}; \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s \cdot (s - a)}{b \cdot c}};$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s - c) \cdot (s - a)}{c \cdot a}}; \quad \cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s \cdot (s - b)}{c \cdot a}};$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s - a) \cdot (s - b)}{a \cdot b}}; \quad \cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s \cdot (s - c)}{a \cdot b}}.$$

$$11. \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b) \cdot (s-c)}{s \cdot (s-a)}} = \frac{\varrho}{s-a} \\ \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{(s-c) \cdot (s-a)}{s \cdot (s-b)}} = \frac{\varrho}{s-b}; \\ \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a) \cdot (s-b)}{s \cdot (s-c)}} = \frac{\varrho}{s-c}. \end{aligned}$$

$$12. \text{ Inhalt } J = \varrho \cdot s = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}.$$

$$13. \quad \varrho = 4 \cdot r \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}.$$

$$14. \quad s = 4 \cdot r \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Die 4 Grundaufgaben für das schiefwinklige Dreieck:

1. Gegeben: 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel.

(Z. B. a, b und γ .)

$$\begin{aligned} \frac{\alpha + \beta}{2} &= 90^\circ - \frac{\gamma}{2}, & \alpha &= \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} &= \frac{a-b}{a+b} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}, & \beta &= \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ c &= \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

oder

$$= \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma}.$$

2. Gegeben: 1 Seite und 2 Winkel.

(Z. B. a, α und β .)

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta), \quad b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}, \quad c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

3. Gegeben: Alle 3 Seiten a, b und c .

$$a + b + c = 2s.$$

$$\varrho = \frac{\sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}}{s}.$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a}, \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{s-b}, \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{s-c},$$

oder auch

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c},$$

$$\cos \beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2 \cdot c \cdot a},$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}.$$

4. Gegeben: 2 Seiten und 1 Gegenwinkel.

(Z. B. a , b und α .)

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a}, \quad \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta), \quad c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

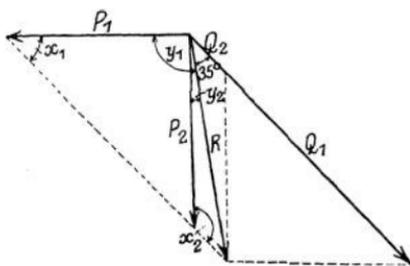


Fig. 22.

Nur möglich, wenn $b \cdot \sin \alpha \leq a$.
Ist $b \cdot \sin \alpha = a$, dann ist $\beta = 90^\circ$.
Ist $b \cdot \sin \alpha < a$ und außerdem $a < b$, dann erhält man 2 Werte für β und 2 Dreiecke ($\beta_2 = 180^\circ - \beta_1$).
Ist $b \cdot \sin \alpha < a$ und außerdem $a \geq b$, dann erhält man nur eine Lösung.

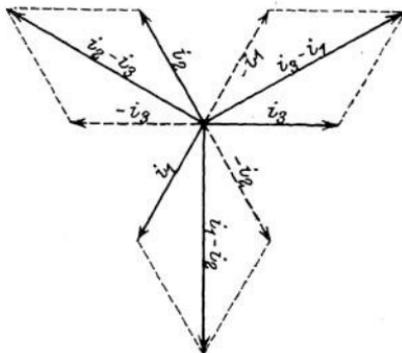


Fig. 24.

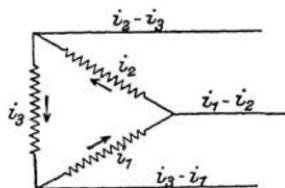


Fig. 23.

Beispiele: 1. (Zur 4. Grundaufgabe mit 2 Lösungen.) (Fig. 22.)

Die Kraft $R = 100$ kg ist derart in 2 Komponenten P und Q zu zerlegen, daß $\sphericalangle Q, R = 35^\circ$ und $P = 80$ kg wird.

$$\sin x = \frac{R \cdot \sin 35^\circ}{P} = \frac{100 \cdot \sin 35^\circ}{80},$$

$$\log 100 = 2,0000,$$

$$\log \sin 35^\circ = 0,7586 - 1,$$

$$\log 80 = 1,9031,$$

$$\log \sin x = 0,8555 - 1,$$

$$x_1 = 45,8^\circ,$$

$$x_2 = 180^\circ - x_1 = 134,2^\circ,$$

$$\gamma_1 = 99,2^\circ,$$

$$\gamma_2 = 10,8^\circ.$$

2. Die 3 Phasenströme

$$Q_1 = \frac{100 \cdot \sin y_1}{\sin x},$$

$$\log 100 = 2,0000,$$

$$\log \sin y_1 = 0,9944 - 1,$$

$$\log \sin x = 0,8555 - 1,$$

$$\log Q_1 = 2,1389,$$

$$Q_1 = 137,7 \text{ kg.}$$

$$Q_2 = \frac{100 \cdot \sin y_2}{\sin x},$$

$$\log 100 = 2,0000,$$

$$\log \sin y_2 = 0,2727 - 1,$$

$$\log \sin x = 0,8555 - 1,$$

$$\log Q_2 = 1,3172,$$

$$Q_2 = 20,8 \text{ kg.}$$

$$i_1 = i_0 \cdot \sin(\omega t),$$

$$i_2 = i_0 \cdot \sin(\omega t - 120^\circ),$$

$$i_3 = i_0 \cdot \sin(\omega t - 240^\circ)$$

sollen nach der in Fig. 23 skizzierten Schaltung verkettet werden. Welche Größe und Phase haben die verketteten Ströme?

Das Resultat ergibt sich graphisch nach Fig. 24 oder rechnerisch in folgender Weise:

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 &= i_0 \cdot [\sin(\omega t) - \sin(\omega t - 120^\circ)] = i_0 \cdot [\sin(\omega t) - \sin(\omega t) \cdot \cos 120^\circ + \cos(\omega t) \sin 120^\circ], \\ &= i_0 \cdot \sqrt{3} \cdot [\sin(\omega t) \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} + \cos(\omega t) \cdot \frac{1}{2}] = i_0 \cdot \sqrt{3} \cdot [\sin(\omega t) \cdot \cos 30^\circ + \cos(\omega t) \cdot \sin 30^\circ], \\ &= i_0 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin(\omega t + 30^\circ), \end{aligned}$$

$$i_2 - i_3 = i_0 \cdot [\sin(\omega t - 120^\circ) - \sin(\omega t - 240^\circ)] = i_0 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin(\omega t - 90^\circ),$$

$$i_3 - i_1 = i_0 \cdot [\sin(\omega t - 240^\circ) - \sin(\omega t)] = i_0 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin(\omega t + 150^\circ).$$

Die Maximalwerte der verketteten Ströme sind das $\sqrt{3}$ -fache der Maximalwerte der Phasenströme, sie sind gegen die letzteren um 30° und untereinander um je 120° phasenverschoben.

$$3. \quad \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{ctg} \varphi = 4, \quad \varphi = ?$$

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} + \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{1}{\sin \varphi \cdot \cos \varphi} = 4,$$

$$4. \quad \frac{\sin x}{\sin y} = 1,88,$$

$$\operatorname{arcus} x + \operatorname{arcus} y = 1,0472 \quad | \quad x + y = 60^\circ.$$

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{1,88 + 1}{1,88 - 1} = \frac{36}{11}.$$

$$2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{x-y}{2} = \frac{36}{11},$$

$$2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} = \frac{36 \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ}{11}.$$

$$\frac{1}{2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi} = \frac{1}{\sin(2\varphi)} = 2,$$

$$2\varphi = 30^\circ \quad \varphi = 15^\circ.$$

$$\log 36 = 1,5563,$$

$$\log \operatorname{ctg} 30^\circ = 0,2386$$

$$1,7949$$

$$\log 11 = 1,0414,$$

$$\log \operatorname{ctg} \frac{x-y}{2} = 0,7535,$$

$$\frac{x-y}{2} = 10,0^\circ,$$

$$\frac{x+y}{2} = 30,0^\circ,$$

$$\text{und} \quad \begin{aligned} x &= 40^\circ \\ y &= 20^\circ. \end{aligned}$$

5. Konstruktion von Winkeln mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen:
An \overline{Ax} ist in A ein Winkel von 23° anzutragen (Fig. 25).

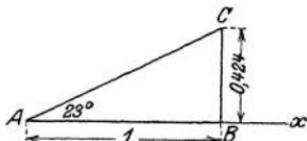


Fig. 25.

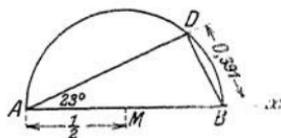


Fig. 26.

Man trägt auf \overline{Ax} von A aus die Strecke $\overline{AB} = 1$ ab, errichtet in B das Lot $\overline{BC} = \operatorname{tg} 23^\circ = 0,424$ und verbindet C mit A .

Man kann auch den Sinus benutzen (Fig. 26), indem man auf \overline{Ax} von A aus die Strecke $\overline{AM} = \frac{1}{2}$ abträgt, um M mit \overline{AM} den Halbkreis AB beschreibt und den Schnittpunkt D desselben mit dem Kreisbogen um B vom Radius $\sin 23^\circ = 0,391$ aufsucht.

Für kleine Winkel verwendet man praktisch den Tangens, für größere besser den Sinus.

B. Die Hyperbelfunktionen.

Entsprechend den trigonometrischen Reihen:

$$\sin \varphi = \frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots$$

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots$$

werden die Reihen:

$$\frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} = \frac{\varphi}{1!} + \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \frac{\varphi^7}{7!} + \dots$$

$$\frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} = 1 + \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{\varphi^6}{6!} + \dots$$

als „hyperbolischer“ Sinus ($\operatorname{Sin} \varphi$) und Cosinus ($\operatorname{Cos} \varphi$) bezeichnet. Der Quotient aus beiden $\frac{\operatorname{Sin} \varphi}{\operatorname{Cos} \varphi}$ heißt „hyperbolischer“ Tangens ($\operatorname{Tg} \varphi$) und sein reziproker Wert „hyperbolischer“ Cotangens ($\operatorname{Ctg} \varphi$).

Der Name „Hyperbelfunktionen“ rührt von der geometrischen Bedeutung derselben her. In ähnlicher Weise wie die Kreisfunktionen durch Strecken am Kreise dargestellt werden konnten (siehe S. 71, Fig. 10), sind die Hyperbelfunktionen durch Strecken an der gleichseitigen Hyperbel darstellbar.

$$\text{Aus} \quad \mathfrak{C}\text{osf} \varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}$$

$$\text{folgt} \quad 2 \cdot e^{\varphi} \cdot \mathfrak{C}\text{osf} \varphi = e^{2\varphi} + 1,$$

$$e^{\varphi} = \mathfrak{C}\text{osf} \varphi + \sqrt{\mathfrak{C}\text{osf}^2 \varphi - 1},$$

$$\varphi = \ln \left\{ \mathfrak{C}\text{osf} \varphi + \sqrt{\mathfrak{C}\text{osf}^2 \varphi - 1} \right\} = \int \frac{d(\mathfrak{C}\text{osf} \varphi)}{\sqrt{\mathfrak{C}\text{osf}^2 \varphi - 1}}$$

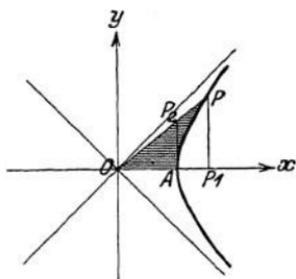


Fig. 27.

Setzt man (Fig. 27) $OA = 1$ und sind die Koordinaten des Hyperbelpunktes P

$$OP_1 = x; \quad PP_1 = y,$$

so ist der doppelte Inhalt des gestrichelten Hyperbelsektors OPA gleich

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Wird dieser doppelte Hyperbelsektor mit φ bezeichnet, so ist demnach $x = \mathfrak{C}\text{osf} \varphi$. In gleicher Weise folgt $y = \mathfrak{S}\text{in} \varphi$

$$PP_1 = \mathfrak{S}\text{in} \varphi; \quad OP_1 = \mathfrak{C}\text{osf} \varphi; \quad AP_2 = \mathfrak{I}g \varphi = \frac{1}{\mathfrak{C}t g \varphi}.$$

Entsprechend ist bei den Kreisfunktionen der zur Funktion gehörige Bogen — Winkel im Bogenmaß — zahlenmäßig gleich dem doppelten Inhalt des Kreissektors, da der Radius = 1 ist. (Siehe Fig. 10 S. 71.)

Während $\mathfrak{S}\text{in} \varphi$ jeden positiven und negativen Wert annehmen kann, ist

$$\mathfrak{C}\text{osf} \varphi \geq 1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{C}t g \varphi < -1 < \mathfrak{I}g \varphi < +1 < \mathfrak{C}t g \varphi.$$

Die Periode des hyperbolischen Sinus und Cosinus ist $2 \cdot \pi \cdot i$, die des hyperbolischen Tangens und Cotangens $\pi \cdot i$.

Analog den entsprechenden trigonometrischen Formeln erhält man:

$$\mathfrak{C}\text{osf}^2 \varphi - \mathfrak{S}\text{in}^2 \varphi = 1; \quad \mathfrak{I}g \varphi = \frac{\mathfrak{S}\text{in} \varphi}{\mathfrak{C}\text{osf} \varphi}; \quad \mathfrak{C}t g \varphi = \frac{\mathfrak{C}\text{osf} \varphi}{\mathfrak{S}\text{in} \varphi},$$

$$\mathfrak{C}\text{osf} \varphi + \mathfrak{S}\text{in} \varphi = e^{\varphi}; \quad \mathfrak{C}\text{osf} \varphi - \mathfrak{S}\text{in} \varphi = e^{-\varphi}.$$

Den Zusammenhang zwischen den Hyperbel- und Kreisfunktionen zeigen die entsprechenden Reihenentwicklungen (S. 90).

Es folgt:

$$\mathfrak{S}\text{in} \varphi = \frac{\sin(i \cdot \varphi)}{i}; \quad \sin \varphi = -i \cdot \mathfrak{S}\text{in}(i \cdot \varphi),$$

$$\mathfrak{C}\text{osf} \varphi = \cos(i \cdot \varphi); \quad \cos \varphi = \mathfrak{C}\text{osf}(i \cdot \varphi),$$

$$\mathfrak{I}g \varphi = \frac{\text{tg}(i \cdot \varphi)}{i}; \quad \text{tg} \varphi = -i \cdot \mathfrak{I}g(i \cdot \varphi),$$

$$\mathfrak{C}t g \varphi = -\frac{\text{ctg}(i \cdot \varphi)}{i}; \quad \text{ctg} \varphi = i \cdot \mathfrak{C}t g(i \cdot \varphi).$$

V. Das Rechnen mit Reihen.

Bearbeitet von Dr. G. Glage.

Eine mathematische Reihe ist jede nach einem bestimmten Gesetze gebildete Aufeinanderfolge von Zahlen.

Die Zahlenreihe $1, 2, 3, 4 \dots n$ ist unbegrenzt. Man sagt, n kann „unendlich groß“ werden, weil es größer werden kann als jede angebbare Zahl. Entsprechend kann in der Reihe:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots \frac{1}{n}$$

$\frac{1}{n}$ „unendlich klein“ werden.

Man nennt die Zahlen einer Reihe „Glieder“ derselben.

Eine Reihe ist „endlich“, wenn die Anzahl der Glieder eine begrenzte, sie ist „unendlich“, wenn die Anzahl der Glieder eine unbegrenzte ist.

Die Summe einer endlichen Zahlenreihe, deren Glieder endliche Werte haben, ist stets endlich.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 \dots + 100 = 5050.$$

Die Summe einer unendlichen Zahlenreihe, deren einzelne Glieder endliche Werte haben, kann endlich und unendlich sein, wobei unter „Summe der Reihe“ der Grenzwert zu verstehen ist, gegen den die Summe der ersten n Glieder mit wachsendem n konvergiert. Die Summe der Reihe:

$$0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \dots \quad \text{in inf.}$$

oder

$$\frac{3}{10^1} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \dots + \frac{3}{10^n}$$

konvergiert mit wachsendem n gegen den Grenzwert $\frac{3}{8}$. Die Summe ist endlich, trotzdem die Anzahl der Glieder unendlich groß ist.

Ebenso ist

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2.$$

Die Summe der Reihe:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n}$$

konvergiert mit wachsendem n gegen den Wert ∞ , diese Summe ist „unendlich groß“, trotzdem mit wachsendem n die einzelnen Glieder selbst gegen 0 konvergieren, „unendlich klein“ werden.

A. Endliche Reihen.

Die einfachsten und zugleich wichtigsten endlichen Reihen sind die arithmetischen und geometrischen Reihen:

Eine arithmetische Reihe 1. Ordnung ist eine Reihe, in der die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder einen konstanten Wert hat.

$$1, 3, 5, 7, 9, 11 \dots$$

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d \dots a + (n-1) \cdot d, a + n \cdot d, a + (n+1) \cdot d \dots$$

$$a = \text{Anfangsglied}, \quad d = \text{Differenz der Reihe.}$$

Jedes Glied der Reihe ist das arithmetische Mittel aus den beiden benachbarten Gliedern.

Das n te Glied der Reihe ist $a + (n-1) \cdot d$.

Die Summe der n ersten Glieder ist

$$s = \frac{n}{2} \cdot \{1. \text{ Glied} + n\text{te Glied}\} = \frac{n}{2} \cdot (2a + (n-1) \cdot d),$$

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} (a + k \cdot d) = s.$$

Beispiel:

$$\sum_{k=1}^{k=1000} k = 1 + 2 + 3 + \dots + 1000 = \frac{1000}{2} \cdot \{1 + 1000\} = 500 \cdot 500$$

$$\sum_{k=1}^{k=500} (2k) = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 1000 = \frac{500}{2} \cdot \{2 + 1000\} = 250 \cdot 500,$$

$$\sum_{k=1}^{k=500} (2k-1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 999 = \frac{500}{2} \cdot \{1 + 999\} = 250 \cdot 500.$$

Arithmetische Reihen höherer Ordnung:

Eine Reihe, die durch Differenzbildung je zweier aufeinander folgender Glieder einer gegebenen Reihe entsteht, heißt die Differenzenreihe der ersteren. In gleicher Weise läßt sich aus dieser Differenzenreihe eine neue Differenzenreihe, die „zweite“ Differenzenreihe der Hauptreihe, aus dieser die „dritte“ Differenzenreihe usw. bilden.

2,	3,	7,	8,	15,	52,	158,	387 ...	Hauptreihe
1,	4,	-1,	7,	37,	106,	229 ...		1. Differenzenreihe
	3,	-3,	6,	30,	69,	123 ...		2. „
		-6,	9,	24,	39,	54 ...		3. „
			15,	15,	15,	15 ...		4. „
			0,	0,	0 ...			

Ist die n te Differenzenreihe eine konstante, so heißt die Hauptreihe eine arithmetische Reihe n ter Ordnung. Die obige Hauptreihe ist eine arithmetische Reihe 4. Ordnung.

Eine Reihe n ter Ordnung ist durch das Anfangsglied A_1 und die Anfangsglieder aller Differenzenreihen a_1, b_1, c_1 usw. eindeutig bestimmt.

$$\begin{array}{cccccccccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 & A_8 & \dots \\ & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & \dots \\ & & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & \dots \\ & & & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & \dots \\ & & & & d_1 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Die Summe der n ersten Glieder ist

$$s_n = \binom{n}{1} \cdot A_1 + \binom{n}{2} \cdot a_1 + \binom{n}{3} \cdot b_1 + \binom{n}{4} \cdot c_1 + \dots$$

Im obigen Zahlenbeispiele ist also:

$$\begin{aligned} s_7 &= \binom{7}{1} \cdot 2 + \binom{7}{2} \cdot 1 + \binom{7}{3} \cdot 3 + \binom{7}{4} \cdot (-6) + \binom{7}{5} \cdot 15 \\ &= 7 \cdot 2 + 21 \cdot 1 + 35 \cdot 3 + 35 \cdot (-6) + 21 \cdot 15 \\ &= 14 + 21 + 105 - 210 + 315 = 245. \end{aligned}$$

Probe: $2 + 3 + 7 + 8 + 15 + 52 + 158 = 245$.

Wird in eine ganze rationale Funktion n ten Grades

$$f(x) = A \cdot x^n + B \cdot x^{n-1} + C \cdot x^{n-2} + \dots$$

für x der Reihe nach $0, 1, 2, 3, \dots$ gesetzt, so ergeben die Werte $f(0), f(1), f(2), f(3), \dots$ eine arithmetische Reihe n ter Ordnung.

Beispiele:

$$1. \sum_{x=1}^{x=n} x^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \\ = 1 + 4 + 9 + 16 + \dots + n^2 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad 3 \quad 5 \quad 7 \dots \\ \qquad \qquad \qquad \qquad 2 \quad 2 \dots;$$

$$\sum_{x=1}^{x=n} x^2 = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \cdot 3 + \binom{n}{3} \cdot 2 = n + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot 3 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2 \\ = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1);$$

$$2. \sum_{x=1}^{x=n} x^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (n+1)^2.$$

Geometrische Reihen.

Eine geometrische Reihe ist eine Reihe, in der der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder einen konstanten Wert hat.

$$3, 6, 12, 24 \dots$$

$$a, a \cdot q, a \cdot q^2, a \cdot q^3 \dots$$

$$a = \text{Anfangsglied}, \quad q = \text{Quotient der Reihe.}$$

Jedes Glied der Reihe ist das geometrische Mittel aus den beiden benachbarten Gliedern.

Das n te Glied ist $a \cdot q^{n-1}$.

Die Summe der n ersten Glieder ist

$$s = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

denn

$$s = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \dots + a \cdot q^{n-1}; \\ s \cdot q = a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \dots + a \cdot q^n; \\ \hline s(1 - q) = a(1 - q^n).$$

Die Maschinen einer Fabrik haben einen Neuwert von 450 000 Mark. Es werden jährlich 10% abgeschrieben. Wie groß ist der Wert nach 10 Jahren?

nach 1 Jahr:	nach 2 Jahren:	nach 10 Jahren:
$K_1 = 450\ 000 \cdot 0,9,$	$K_2 = 450\ 000 \cdot 0,9^2, \dots$	$K_{10} = 450\ 000 \cdot 0,9^{10}.$
$K_{10} = 450\ 000 \cdot 0,9^{10} = 157\ 100 \text{ Mark.}$		

Anwendungen auf Zinseszins- und Rentenrechnung.

Ein Kapital von K_0 Mark, welches zu $p\%$ auf Zinsen steht, wächst in n Jahren zu:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = K_0 \cdot q^n \text{ Mark}$$

an, wenn die Zinsen am Ende jedes Jahres zum Kapital geschlagen und in den folgenden Jahren mitverzinst werden. Findet halbjährliche Verzinsung statt, so ist statt $1 + \frac{p}{100}$ der Zinsfaktor $1 + \frac{p}{200}$ und statt n die Anzahl der Zeitabschnitte $2n$, bei vierteljährlicher Verzinsung entsprechend $1 + \frac{p}{400}$ und $4n$ usw. zu setzen.

Werden am Ende jedes Jahres nicht nur die Zinsen zum Kapital geschlagen, sondern noch S Mark hinzugezahlt bzw. fortgenommen, so wird:

$$K_n = K_0 \cdot q^n \pm S \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Werden am Anfange jedes Jahres (vom 2. Jahre ab) S Mark hinzugezahlt bzw. fortgenommen, so ist das Endkapital K_n um S Mark geringer

$$K_n = K_0 \cdot q^n \pm S \cdot \frac{q^n - q}{q - 1}.$$

Für $K_0 = S$, d. h. wenn auch im 1. Jahre S Mark eingezahlt werden, ist

$$K_n = S \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ (Sparkassenformel).}$$

Eine Rente von R Mark, die n Jahre lang zu zahlen ist, kann durch eine sofortige Zahlung von

$$S = R \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q - 1)} \text{ Mark}$$

abgelöst werden. Läuft die Rente dauernd ($n = \infty$), so ist

$$S = R \cdot \frac{1}{q - 1} \text{ Mark}$$

zu zahlen.

Ein Kapital von K Mark ist in n Jahren abgeschrieben, wenn bei einem Zinsfaktor $q = 1 + \frac{p}{100}$ die jährliche Abschreibungssumme

$$R = K \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1}$$

beträgt.

Beispiel: Wann ist ein Kapital von 20 000 Mark aufgezehrt, wenn am Ende jedes Jahres 3000 Mark fortgenommen werden? $p = 4\frac{1}{2}\%$.

$$\begin{aligned} K_n &= K_0 \cdot q^n - S \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, & 1,045^n \cdot (1 - 0,3) &= 1, \\ 0 &= 20\,000 \cdot 1,045^n - 3000 \cdot \frac{1,045^n - 1}{0,045}, & 1,045^n &= 1,43, \\ 1,045^n &= \frac{1}{0,3} \cdot (1,045^n - 1), & n &= \frac{\log 1,43}{\log 1,045} = \frac{0,1553}{0,0191} = 8,13 \text{ Jahre.} \end{aligned}$$

B. Unendliche Reihen.

Hat die „Summe einer unendlichen Reihe“ (siehe S. 82) einen endlichen Wert, so heißt die Reihe konvergent, andernfalls divergent.

I. $0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \dots = \frac{1}{3}$ konvergente Reihe.

II. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \infty$ divergente Reihe.

Beschränkt man sich in Reihe I auf die ersten 3 Glieder, so ist der Fehler $\frac{1}{3} - 0,333 = \delta < 0,0004$. Bei Berücksichtigung von 5 Gliedern ist der Fehler $\delta < 0,000004$. Die Summe einer unendlichen konvergenten Reihe kann mit jeder vorgeschriebenen Genauigkeit ausgerechnet werden.

Die Zahl e (Basis der natürlichen Logarithmen) auf 7 Ziffern zu berechnen:

$$\begin{aligned} e &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}; & \frac{1}{6!} &= 0,001\,388\,89; \\ 1 &= 1; & \frac{1}{7!} &= 0,000\,198\,41; \\ \frac{1}{1!} &= 1; & \frac{1}{8!} &= 0,000\,024\,80; \\ \frac{1}{2!} &= 0,5; & \frac{1}{9!} &= 0,000\,002\,76; \\ \frac{1}{3!} &= 0,166\,666\,67; & \frac{1}{10!} &= 0,000\,000\,28; \\ \frac{1}{4!} &= 0,041\,666\,67; & \frac{1}{11!} &= 0,000\,000\,02; \\ \frac{1}{5!} &= 0,008\,333\,33; & \frac{1}{12!} &= 0,000\,000\,00; \\ & & e &= 2,718\,281\,83. \end{aligned}$$

Will man Reihen zu Rechnungen benutzen, so ist stets zunächst festzustellen, ob dieselben konvergent sind oder nicht. Aus den Konvergenzbedingungen ergibt sich, daß z. B. die Reihen

$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \pm \dots$$

nur für $-1 \leq x \leq +1$ konvergent sind. Nur für diese Werte von x dürfen die Reihen benutzt werden. Für andere Werte von x liefern sie völlig falsche Resultate.

$$\ln(1 + 1) = \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Die einzelnen Glieder dieser Reihe nehmen sehr langsam ab. Das 100. Glied ist 0,01, das 1000. Glied 0,001 usw. Zur zahlenmäßigen Auswertung von $\ln 2$ ist diese Reihe unbrauchbar. Für das praktische Rechnen sind solche Reihen am geeignetsten, bei denen man sich auf wenige Glieder beschränken darf, ohne einen bestimmten vorgeschriebenen Fehler zu überschreiten. Man spricht in diesem Sinne von stärker und schwächer konvergenten Reihen.

Durch Subtraktion der beiden Reihen für $\ln(1+x)$ und für $\ln(1-x)$ erhält man

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \cdot \left\{ x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right\},$$

also

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \ln\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) \\ &= 2 \cdot \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} + \frac{1}{15309} + \frac{1}{177147} + \frac{1}{1948617} + \dots \right\} \\ &= 2 \cdot 0,33333 \\ &\quad 0,012346 \\ &\quad 0,000823 \\ &\quad 0,000065 \\ &\quad 0,000006 \\ &\quad 0,0000005 \\ &\quad \underline{2 \cdot 0,346573} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \ln 2 &= 0,693146, \\ \log 2 &= 0,693146 \cdot 0,434293 = 0,30103. \end{aligned}$$

Man kann bisweilen in dieser Weise durch passende Kombination schwach konvergenter Reihen stärker konvergente Reihen bilden (siehe Fouriersche Reihen S. 98).

Für beliebige Werte von x lassen sich die Logarithmen unter Benutzung derselben Reihe sukzessive berechnen, da

$$\ln(a+b) = \ln\left[a \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right)\right] = \ln a + \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

Konvergenzbedingungen.

Eine unendliche Reihe ist konvergent, wenn bei Beschränkung auf n Glieder der Rest der Reihe mit wachsendem n gegen 0 konvergiert.

Die divergente harmonische Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + u_n + u_{n+1}$$

zeigt, daß es nicht genügt, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ wird, d. h. wenn mit wachsendem n die einzelnen Glieder selbst gegen 0 konvergieren. Diese Reihe ist divergent, weil

bei Beschränkung auf n Glieder der Rest der Reihe mit wachsendem n nicht gegen 0 konvergiert. Es ist der Rest der Reihe gleich

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots &> \overbrace{\frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n}}^{n \text{ - mal}} \dots \\ &+ \overbrace{\frac{1}{2n+2n} + \frac{1}{2n+2n}}^{2n \text{ - mal}} + \dots \\ + \dots &= \frac{n}{2n} + \frac{2n}{2 \cdot 2n} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty. \end{aligned}$$

Im Gegensatz zur harmonischen Reihe ist die Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

konvergent (= $\ln 2$ siehe S. 86), trotzdem die Teilreihen

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots &= \infty, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots &= \infty \end{aligned}$$

divergent sind.

Da die Reihe der absoluten Beträge divergiert, nennt man eine solche Reihe „bedingt konvergent“ im Gegensatz zu einer „unbedingt konvergenten“ Reihe, bei der auch die Reihe der absoluten Beträge konvergiert.

Es gibt kein allgemein gültiges Kriterium, aus dem für jede beliebige Reihe ohne weiteres die Konvergenz oder Divergenz gefolgert werden kann. Die Feststellung der Konvergenz ist häufig eine recht schwierige Aufgabe.

Cauchysches Konvergenzkriterium:

Eine Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$$

ist stets „unbedingt konvergent“, wenn von irgend einem Gliede ab der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ kleiner ist als ein bestimmter echter Bruch k . Es genügt nicht, wenn der Quotient stets kleiner bleibt als 1; es muß vielmehr ein bestimmter Wert für $|k| < 1$ wirklich angebar sein.

In der divergenten harmonischen Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ ist der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder stets kleiner als 1. Es ist aber für diesen Quotienten kein Wert $k < 1$ derart angebar, daß der Quotient für beliebig wachsendes n stets kleiner bleibt als k , da er mit wachsendem n wächst und gegen 1 konvergiert.

In der Reihe

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots$$

ist von $n = x + 2$ ab der Quotient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n} < \frac{x}{x+1}.$$

Für diese Reihe ist also das Cauchysche Konvergenzkriterium erfüllt:

$$k = \frac{x}{x+1}.$$

Ist ein solcher bestimmter Wert $k < 1$ nicht angebar, so kann die Reihe konvergent $\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right)$ oder auch divergent $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right)$ sein. Die Entscheidung muß dann in anderer Weise erfolgen:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots = 1. \end{aligned}$$

Der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder wächst mit wachsendem n . Für denselben ist daher kein Wert $k < 1$ angebar.

Eine Reihe ist konvergent, wenn von einem bestimmten Gliede ab die absoluten Werte ihrer Glieder kleiner sind als die entsprechenden Glieder einer anderen konvergenten Reihe:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 10 \cdot 11} + \dots < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots,$$

also konvergent $\left(= \frac{1}{4} \cdot \ln 2 = 0,17328\right)$.

Eine Reihe mit positiven und negativen Gliedern ist nur dann unbedingt konvergent, wenn auch die Reihe der absoluten Beträge konvergiert.

Die Summe der positiven Glieder und die Summe der negativen Glieder einer bedingt konvergenten Reihe sind, jede für sich betrachtet, divergente Reihen; bei einer unbedingt konvergenten Reihe hingegen konvergente Reihen. In einer unbedingt konvergenten Reihe kann die Reihenfolge der einzelnen Glieder beliebig geändert werden, ohne damit die Summe der Reihe zu ändern.

In einer bedingt konvergenten Reihe hängt die Konvergenz und die Summe der Reihe von der Reihenfolge der einzelnen Glieder ab. Die Reihe

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

ergibt durch Umstellen der Glieder

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right) + \dots \\ & \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{n} + \dots \end{aligned}$$

Diese Reihe bleibt konvergent, denn ihre Summe ist kleiner als

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

Wenn auf p positive Glieder n negative Glieder folgen, so ist die Summe dieser Reihe nach Dirichlet¹⁾ $\sqrt{\frac{p}{n}} \cdot \ln 2$, in obigem Falle also

$$\sqrt{2} \cdot \ln 2 = 1,414 \cdot 0,693 = 0,980.$$

Entwickelbarkeit der Funktionen in Potenzreihen.

Taylor'scher Satz: Ist eine Funktion $f(x)$ in dem Intervalle von x_0 bis $x_0 + h$ nebst ihren sämtlichen Ableitungen $f'(x)$, $f''(x)$... stetig und sind sämtliche Werte der Funktion und ihrer Ableitungen endlich, so gilt für $f(x_0 + h)$

¹⁾ Berliner Abb. 1837.

folgende konvergente, nach ganzen positiven Potenzen von h fortschreitende Reihenentwicklung:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} \cdot f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots$$

Bricht man die Reihe hinter dem n ten Gliede ab, so ist der Rest

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{h^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(x_0) + \dots \\ &= \frac{h^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0 + h \cdot \bar{h}) \quad (\text{Lagrangesche Form}) \\ &= \frac{h^n}{(n-1)!} \cdot (1-h)^{n-1} \cdot f^{(n)}(x_0 + h \cdot \bar{h}) \quad (\text{Cauchysche Form}). \end{aligned}$$

Hierin bedeutet \bar{h} einen echten Bruch.

Die Taylorsche Reihenentwicklung gilt auch für $x_0 = 0$. Setzt man $x_0 = 0$ und $h = x$, so wird aus der Taylorschen Reihe die MacLaurinsche Reihe:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2!} \cdot f''(0) + \dots$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} 1. \quad \sin(x) &= \sin(0) + \frac{x}{1!} \cdot \cos(0) - \frac{x^3}{2!} \cdot \sin(0) - \frac{x^5}{3!} \cdot \cos(0) + \frac{x^7}{4!} \cdot \sin(0) + \dots \\ &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ \sin(15^\circ 25' 6'') &= 0,2691007 - \frac{0,2691007^3}{6} + \frac{0,2691007^5}{120} - \frac{0,2691007^7}{5040} + \dots \\ &= 0,2691007 - 0,0032478 + 0,0000117 - 0,0000000 \\ &= 0,2658646 \quad (3 \text{ Glieder ergeben das Resultat auf 7 Stellen genau}). \end{aligned}$$

Schreibt man für $\sin(x+h) = \sin x + h \cdot \cos x$, so ist der Fehler kleiner als $\frac{h^2}{2}$, weil $\sin(x+h \cdot \bar{h}) \leq 1$ ist.

$$\text{Für } h = 1^\circ = \frac{\pi}{180} = 0,017 \text{ wird der Fehler } < 0,00015,$$

$$\text{für } h = 1' = \frac{\pi}{60 \cdot 180} = 0,00029 \text{ wird der Fehler } < 0,000000042.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots$$

ergibt durch Differentiation

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots$$

Diese Reihe ergibt sich natürlich auch direkt aus der MacLaurinschen Reihe.

2. $f(x) = e^x$, $e^x = f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots$
 e^x und sämtliche Ableitungen haben für $x = 0$ den Wert 1. Folglich wird

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

3. $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'''(x) = +\frac{2}{x^3}$. . .

Sämtliche Ableitungen werden für $x=0$ unendlich. Die MacLaurinsche Reihe ist also nicht anwendbar. Die Taylorsche Reihe ergibt:

$$\begin{aligned} \ln(1+h) &= \ln 1 + \frac{h}{1} \cdot 1 + \frac{h^2}{2!} \cdot (-1) + \frac{h^3}{3!} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{h^4}{4!} \cdot (-1 \cdot 2 \cdot 3) + \dots \\ &= h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \dots \end{aligned}$$

4. $f(x) = (x+h)^m$. Binomischer Satz.

$$\begin{aligned} (x+h)^m &= x^m + \frac{h}{1!} \cdot m \cdot x^{m-1} + \frac{h^2}{2!} \cdot m \cdot (m-1) \cdot x^{m-2} \\ &\quad + \frac{h^3}{3!} \cdot m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot x^{m-3} + \dots \end{aligned}$$

Binomialkoeffizienten siehe S. 63 u. 64.

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= a^5 + \frac{b}{1} \cdot 5 \cdot a^4 + \frac{b^2}{1 \cdot 2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot a^3 + \frac{b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot a^2 \\ &\quad + \frac{b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a + \frac{b^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= a^5 + 5 \cdot a^4 \cdot b + 10 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a \cdot b^4 + b^5.\end{aligned}$$

Die Reihe ist endlich, wenn m eine ganze positive Zahl ist, andernfalls stets unendlich.

$$(1+h)^m = 1 + \frac{m}{1} \cdot h + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} \cdot h^2 + \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot h^3 + \dots$$

(Binomische Reihe.)

$$\begin{aligned}(1+h)^5 &= 1 + 5h + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot h^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot h^3 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot h^4 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot h^5 \\ &= 1 + 5h + 10h^2 + 10h^3 + 5h^4 + h^5.\end{aligned}$$

5. $f(x) = \sqrt[3]{68}$ auf 5 Stellen zu berechnen.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{68} &= \sqrt[3]{4^3 + 4} = 4 \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{16}} = 4 \cdot \left(1 + \frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \left(1 + \frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}} &= 1^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 3 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^3 \\ &\quad - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^4 + \dots \\ &= 1 + 0,02083_3 - 0,00043_4 + 0,00001_5 - 0,00000_1 = 1,02041_5 \\ \sqrt[3]{68} &= 4 \cdot 1,02041_5 = 4,08165.\end{aligned}$$

Zusammenstellung der wichtigsten Exponential-, logarithmischen, geometrischen und trigonometrischen Reihen.

Exponentialreihen:

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ gilt für jedes x .
2. $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$
3. $\frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \text{Cos } x$ (siehe S. 80).
4. $\frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \text{Sin } x$ (siehe S. 80).
5. $e^{ix} = 1 + \frac{i \cdot x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{i \cdot x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{i \cdot x^5}{5!} - \dots$
 $= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + i \cdot \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)$
 $= \cos x + i \cdot \sin x.$
6. $e^{-ix} = 1 - \frac{i \cdot x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{i \cdot x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$
 $= \cos x - i \cdot \sin x.$
7. $\frac{1}{2} \cdot (e^{ix} + e^{-ix}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \cos x$ (siehe S. 81).

8. $\frac{1}{2i} \cdot \{e^{ix} - e^{-ix}\} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots = \sin x$ (siehe S. 81).
9. $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$
10. $a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!} \cdot x + \frac{(\ln a)^2}{2!} \cdot x^2 + \frac{(\ln a)^3}{3!} \cdot x^3 + \dots$, gilt für jedes x .

Logarithmische Reihen:

11. $\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots$, gilt für $-1 < x < +1$.
12. $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \cdot \left\{ x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right\}$, „ „, $-1 < x < +1$.
13. $\ln x = 2 \cdot \left\{ \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^5 + \dots \right\}$ gilt für jedes positive x .
14. $\ln x = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - + \dots$ gilt für $0 < x \leq 2$.
15. $\ln(a+x) = \ln a + 2 \cdot \left\{ \frac{x}{2a+x} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x}{2a+x} \right)^3 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{x}{2a+x} \right)^5 + \dots \right\}$
gilt für $-a < x < +\infty$ ($a =$ positive Zahl).

Geometrische Reihen (Spezialfall der binomischen Reihe S. 90):

16. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ gilt für $-1 < x < +1$.
17. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$
18. $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot x^4 + \dots$
gilt für $-1 \leq x \leq 1$.
19. $\sqrt[4]{1+x} = 1 + \frac{1}{3} \cdot x - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6} \cdot x^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} \cdot x^3 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} \cdot x^4 + \dots$
gilt für $-1 \leq x \leq 1$.

Trigonometrische Reihen:

20. $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ (x gemessen im Bogenmaß s. S. 70) gilt für jedes x .
21. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ gilt für jedes x .
22. $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{315} x^9 + \dots$
gilt für $-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$.
23. $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \left\{ \frac{1}{3} x + \frac{1}{45} x^3 + \frac{2}{945} x^5 + \frac{1}{4725} x^7 + \dots \right\}$
gilt für $-\pi < x < +\pi$.
24. $\operatorname{arc} \sin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$
gilt für $-1 \leq x \leq +1$.

$$25. \quad \arctan x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad \text{gilt für } -1 \leq x \leq +1.$$

$$26. \quad \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{48} + \frac{3}{1280} + \frac{5}{14136} + \dots$$

$$27. \quad \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \dots \right\}$$

$$28. \quad \arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad \text{Leibnizsche Reihe.}$$

C. Die Fourierschen Reihen.

Auf dem Gebiete der Schwingungserscheinungen, sowohl der mechanischen wie der elektrischen Schwingungen, sind rein mathematische Untersuchungen ganz besonders fruchtbar gewesen. Nach Fourier läßt sich die komplizierteste Wellenform darstellen als Summe einfacher Sinuswellen. Während Fourier jedoch glaubte, daß jede beliebige Funktion in eine trigonometrische Reihe entwickelbar sei, hat Dirichlet¹⁾ gezeigt, daß auch bei stetigen Funktionen einige Einschränkungen nötig sind. Ein Beispiel einer nicht in eine Fouriersche Reihe entwickelbaren stetigen Funktion hat Schwarz²⁾ gegeben. Derart gekünstelte Funktionen haben jedoch nur ein rein mathematisches Interesse. Die für die Technik in Frage kommenden periodischen Funktionen sind sämtlich mit jeder gewünschten Genauigkeit (je nach der berücksichtigten Gliederzahl) in trigonometrischen Reihen entwickelbar.

Auch für Funktionen, die in verschiedenen Intervallen verschiedenen Gesetzen gehorchen, behält die Fouriersche Reihenentwicklung ihre Gültigkeit. Hierin liegt ein wesentlicher Unterschied gegenüber den Potenzreihen. Bei allen durch konvergente Potenzreihen darstellbaren Funktionen folgt aus den Eigenschaften der Funktion innerhalb eines kleinen endlichen Intervalles der gesamte weitere Verlauf der Funktion. Der Wert der Fourierschen Reihe an irgendeiner Stelle hängt nur ab von dem Verhalten der Funktion in der unmittelbaren Umgebung dieser Stelle.

Hat die Funktion Unstetigkeitsstellen, so konvergiert die Fouriersche Reihe an diesen gegen den Mittelwert aus den beiden Grenzwerten, die der Funktion bei der beiderseitigen Annäherung an den Unstetigkeitspunkt entsprechen. Jede periodische Schwingung kann in eine endliche oder unendliche Anzahl reiner Sinusschwingungen von 1-facher, 2-facher, 3-facher usw. k -facher Periodenzahl und beliebiger Phasenverschiebung q_k zerlegt werden. Man nennt die einzelnen Schwingungen „Harmonische“, die erstere auch „Grundschwingung“, die übrigen „Oberschwingungen“, ähnlich wie in der Akustik.

Es ist also die periodische Funktion:

$$(1) \quad T = f(\varphi) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} H_k \cdot \sin(k \cdot \varphi + q_k);$$

$$= \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} H_k \cdot (\sin(k \cdot \varphi) \cdot \cos q_k + \cos(k \cdot \varphi) \cdot \sin q_k).$$

¹⁾ Crelle 4. 1829.

²⁾ Sachse, Dissertation Göttingen 1879. S. 51—54.

³⁾ Siehe Gleichung 5 und 6.

Setzt man

$$(2) \quad H_k \cdot \sin \varphi_k = A_k \quad \text{und} \quad H_k \cdot \cos \varphi_k = B_k,$$

so wird

$$(3) \quad T = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \cdot \cos(k \cdot \varphi) + \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k \cdot \sin(k \cdot \varphi);$$

$$= \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cdot \cos \varphi + A_2 \cdot \cos(2 \varphi) + A_3 \cdot \cos(3 \varphi) + \dots;$$

$$+ B_1 \cdot \sin \varphi + B_2 \cdot \sin(2 \varphi) + B_3 \cdot \sin(3 \varphi) + \dots$$

In dieser Form wird die Fouriersche Reihe meistens benutzt.

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit $\cos(k \cdot \varphi) \cdot d\varphi$ und Integration zwischen den Grenzen 0 und 2π folgt

$$(4) \quad \int_0^{2\pi} T \cdot \cos(k \cdot \varphi) \cdot d\varphi = A_k \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2(k \cdot \varphi) \cdot d\varphi = A_k \cdot \pi^1)$$

oder

$$(5) \quad A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T \cdot \cos(k \cdot \varphi) \cdot d\varphi.$$

Für $k = 0$ liefert diese Gleichung den doppelten Wert des von φ „freien Gliedes“ in Gleichung (1) bzw. (3), weshalb dasselbe dort mit $\frac{1}{2} \cdot A_0$ bezeichnet wurde.

$$(6) \quad A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T \cdot d\varphi.$$

Durch Multiplikation der Gleichung (3) mit $\sin(k \cdot \varphi) \cdot d\varphi$ und Integration zwischen den Grenzen 0 und 2π folgt entsprechend

$$(7) \quad B_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} T \cdot \sin(k \cdot \varphi) \cdot d\varphi.$$

Die in Gleichung (3) auftretenden Koeffizienten sind somit durch Gleichung (5) (6) und (7) bestimmbar.

$$\frac{1}{2} A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T \cdot d\varphi$$

ergibt sich bei einer graphisch gegebenen Kurve ohne weiteres als Mittelwert des Kurvenzuges. Bei reinem Wechselstrom ist daher dieser Koeffizient stets null. Die übrigen Koeffizienten A_k und B_k können verschieden bestimmt werden, analytisch und graphisch.

¹⁾ Es ist nämlich

$$\int_0^{2\pi} \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin(m \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n; \\ \pi & \text{,, } m = n > 0; \\ 0 & \text{,, } m = n = 0; \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(n \cdot \varphi) \cdot \cos(m \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n; \\ \pi & \text{,, } m = n > 0; \\ 2\pi & \text{,, } m = n = 0; \end{cases} \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \cos(m \cdot \varphi) \cdot \sin(n \cdot \varphi) d\varphi = 0.$$

Eine Methode zur analytischen Bestimmung ist von Arnold¹⁾ angegeben:

Man teilt die Strecke 2π in $2m$ gleiche Teile und ermittelt durch Ausmessen die $2m$ zugehörigen Ordinaten T_r ($r = 0, 1, 2 \dots 2m$). Die Koeffizienten A_k und B_k werden dann nach der Methode der kleinsten Quadrate (siehe S. 66)

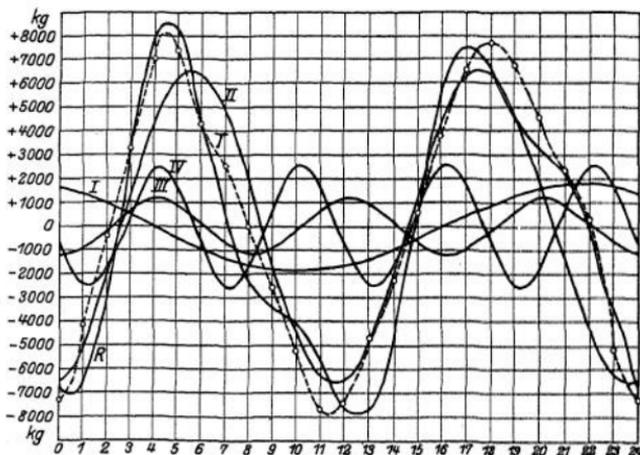


Fig. 28.

derart berechnet, daß die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird, wobei die „Fehler“ die Differenzen zwischen den mit Hilfe der Koeffizienten A_k und B_k berechneten Werten T_r und den beobachteten Werten T_r sind. Es muß also

$$(8) \quad \Sigma (T_{\text{berechnet}} - T_{\text{beobachtet}})^2 \text{ ein Minimum werden.}$$

Aus den Gleichungen

$$(9) \quad \frac{\partial \Sigma (T_{\text{berechnet}} - T_{\text{beobachtet}})^2}{\partial A_k} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Sigma (T_{\text{berechnet}} - T_{\text{beobachtet}})^2}{\partial B_k} = 0$$

folgt

$$(10) \quad A_k = \frac{1}{m} \cdot \sum_{r=1}^{r=2m} T_r \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{2 \cdot m} \right).$$

$$(11) \quad B_k = \frac{1}{m} \cdot \sum_{r=1}^{r=2m} T_r \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{2 \cdot m} \right).$$

Im folgenden ist als Beispiel²⁾ hierfür die Analyse des Tangentialdruckdiagrammes (Fig. 28) einer Dampfmaschine durchgeführt. Die Strecke 2π ist in $2m = 24$ gleiche Teile geteilt. Die zugehörigen Ordinaten T_r stehen in Spalte 1 der Tabelle. Da $\frac{2\pi}{24} = \frac{360}{24} = 15^\circ$ ist, so sind diese Werte mit $\cos(k \cdot r \cdot 15^\circ)$ bzw. $\sin(k \cdot r \cdot 15^\circ)$ zu multiplizieren. Diese Werte sind in den einzelnen Spalten daneben geschrieben. Die Addition der entsprechenden 24 Produkte ergibt nach Division durch 12 die Koeffizienten A_k und B_k .

¹⁾ Arnold, Wechselstromtechnik, Bd. I, S. 152. Berlin 1902. Julius Springer.

²⁾ Hort, Technische Schwingungslehre, S. 72. Berlin 1910. Julius Springer.

r	T_r	$\cos(k \cdot r \cdot 15^\circ)$ für				$T_r \cdot \cos(k \cdot r \cdot 15^\circ)$ für				$\sin(k \cdot r \cdot 15^\circ)$ für				$T_r \cdot \sin(k \cdot r \cdot 15^\circ)$ für			
		$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
1	-4150	+0,966	+0,866	+0,707	+0,500	-4010	-3595	-2935	-2075	+0,259	+0,500	+0,707	+0,866	-1075	-2075	-2935	-3595
2	-300	+0,866	+0,500	0	-0,500	-260	-150	0	+150	+0,500	+0,866	+1	+0,866	-150	-260	-300	-260
3	+3250	+0,707	0	-0,707	-1	+2300	0	-2300	-3250	+0,707	+1	+0,707	0	+2300	+3250	+2300	0
4	+7000	+0,500	-0,500	-1	-0,500	+3500	-3500	-7000	-3500	+0,866	+0,866	0	-0,866	+6060	+6060	0	-6060
5	+7450	+0,259	-0,866	-0,707	+0,500	+1930	-6450	-5265	+3725	+0,966	+0,500	-0,707	-0,866	+7195	+3725	-5265	-6450
6	+4300	0	-1	0	+1	0	-4300	0	+4300	+1	0	-1	0	+4300	0	-4300	0
7	+2750	-0,259	-0,866	+0,707	+0,500	-710	-2380	+1945	+1375	+0,966	-0,500	-0,707	-0,866	+2655	-1375	-1945	-2380
8	0	-0,500	-0,500	+1	-0,500	0	0	0	0	+0,866	-0,866	0	-0,866	0	0	0	0
9	-2650	-0,707	0	+0,707	-1	+1875	0	-1875	+2650	+0,707	-1	+0,707	0	-1875	+2650	-1875	0
10	-5200	-0,866	+0,500	0	-0,500	+4505	-2600	0	+2600	+0,500	-0,866	+1	+0,866	-2600	+4505	-5200	-4505
11	-7700	-0,966	+0,866	-0,707	+0,500	+7440	-6670	+5445	-3850	+0,259	-0,509	+0,707	+0,866	-1995	+3850	-5445	-6670
12	-7400	-1	+1	-1	+1	+7400	-7400	+7400	-7400	0	0	0	0	0	0	0	0
13	-4850	-0,966	+0,866	-0,707	+0,500	+4685	-4200	+3430	-2425	-0,259	+0,500	-0,707	-0,866	+1255	-2425	+3430	+4200
14	-2250	-0,866	+0,500	0	-0,500	+1950	-1125	0	+1125	-0,500	+0,866	-1	-0,866	+1125	-1950	+2250	+1950
15	+650	-0,707	0	+0,707	-1	-460	0	+460	-650	-0,707	+1	-0,707	0	-460	+650	-460	0
16	+3850	-0,500	-0,500	+1	-0,500	-1925	-1925	+3850	-1925	-0,866	+0,866	0	+0,866	-3335	+3335	0	+3335
17	+6400	-0,259	-0,866	+0,707	+0,500	-1660	-5540	+4525	+3200	-0,966	+0,500	+0,707	+0,866	-6180	+3200	+4525	+5540
18	+7600	0	-1	0	+1	0	-7600	0	+7600	-1	0	+1	0	-7600	0	+7600	0
19	+6800	+0,259	-0,866	-0,707	+0,500	+1760	-5890	-4810	+3400	-0,966	-0,500	+0,707	-0,866	-6570	-3400	+4810	-5890
20	+4500	+0,500	-0,500	-1	-0,500	+2250	-2250	-4500	-2250	-0,866	0	-0,866	0	-3900	-3900	0	-3900
21	+2300	+0,707	0	-0,707	-1	+1625	0	-1625	-2300	-0,707	-1	-0,707	0	-1625	-2300	-1625	0
22	+250	+0,866	+0,500	0	-0,500	+215	+125	0	-125	-0,500	-0,866	-1	+0,866	-125	-215	-250	+215
23	-5150	+0,966	+0,866	+0,707	+0,500	-4975	-4460	-3640	-2575	-0,259	-0,500	-0,707	+0,866	+1335	+2575	+3640	-4460
24	-7200	+1	+1	+1	+1	-7200	-7200	-7200	-7200	0	0	0	0	0	0	0	0
						+20235	-77110	-14095	-9400					-11265	+15900	-1045	-28930

$$A_1 = +\frac{20\,235}{12} = +1685; \quad A_2 = -\frac{77\,110}{12} = -6425; \quad A_3 = -\frac{14\,095}{12} = -1175;$$

$$A_4 = -\frac{9400}{12} = -783; \quad A_5 = -\frac{1955}{12} = -163; \quad A_6 = -\frac{3650}{12} = -304;$$

$$A_7 = -\frac{2815}{12} = -235.$$

$$B_1 = -\frac{11\,265}{12} = -940; \quad B_2 = +\frac{15\,900}{12} = +1325; \quad B_3 = -\frac{1045}{12} = -87;$$

$$B_4 = -\frac{28\,930}{12} = -2410; \quad B_5 = -\frac{4785}{12} = -400; \quad B_6 = +\frac{3900}{12} = +325;$$

$$B_7 = +\frac{2965}{12} = +247.$$

$$T = +1685 \cdot \sin \varphi - 6425 \cdot \sin(2\varphi) - 1175 \cdot \sin(3\varphi) - 783 \cdot \sin(4\varphi) - 163 \cdot \sin(5\varphi) \\ - 304 \cdot \sin(6\varphi) - 235 \cdot \sin(7\varphi) + \dots \\ - 940 \cdot \cos \varphi + 1325 \cdot \cos(2\varphi) - 87 \cdot \cos(3\varphi) - 2410 \cdot \cos(4\varphi) - 400 \cdot \cos(5\varphi) \\ + 325 \cdot \cos(6\varphi) + 247 \cdot \cos(7\varphi) + \dots$$

Zum Aufzeichnen der Kurve werden zweckmäßig die Sinus- und Cosinus-Glieder zusammengefaßt. Aus Gleichung (2) folgt:

$$(12) \quad H_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$$

$$(13) \quad \operatorname{tg} \varphi_k = \frac{B_k}{A_k},$$

und zwar liegt, wie Gleichung 2 zeigt, der Winkel φ_k

- im I. Quadranten, wenn A_k positiv und B_k positiv,
 „ II. „ „ A_k positiv und B_k negativ,
 „ III. „ „ A_k negativ und B_k negativ,
 „ IV. „ „ A_k negativ und B_k positiv.

In unserem Beispiele wird:

$$H_1 = 1930, \quad H_2 = 6560, \quad H_3 = 1180, \quad H_4 = 2530, \quad H_5 = 432, \quad H_6 = 445, \quad H_7 = 341, \\ \varphi_1 = 119^\circ, \quad \varphi_2 = 282^\circ, \quad \varphi_3 = 266^\circ, \quad \varphi_4 = 198^\circ, \quad \varphi_5 = 208^\circ, \quad \varphi_6 = 317^\circ, \quad \varphi_7 = 316^\circ.$$

Die Reihenentwicklung lautet somit:

$$T = 1930 \sin(\varphi + 119^\circ) + 6560 \sin(2\varphi + 282^\circ) + 1180 \sin(3\varphi + 266^\circ) + 2530 \sin(4\varphi + 198^\circ) \\ + 432 \sin(5\varphi + 208^\circ) + 445 \sin(6\varphi + 317^\circ) + 341 \sin(7\varphi + 316^\circ).$$

Die Harmonische $k=2$ hat den größten Einfluß auf die Form der zusammengesetzten Welle. Die nächst wichtigste Harmonische ist $k=4$. Die übrigen sind von geringerer Bedeutung. In der Fig. 28 sind die ersten 4 Harmonischen gezeichnet. Ihre Resultierende R

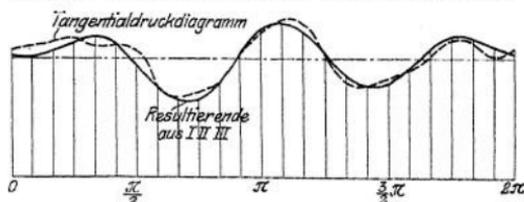


Fig. 29 a.



Fig. 29 b.

Die Koeffizientenbestimmung erfolgt nach Gleichung (5) und (7) durch Ausplanimetrieren der durch die Kurven $T \cdot \cos(k \cdot \varphi)$ bzw. $T \cdot \sin(k \cdot \varphi)$ gegebenen Flächen (Fig. 29 a, b, c, d u. e), d. h. durch mechanische Bestimmung der Integrale

$$\int_0^{2\pi} T \cdot \cos(k \cdot \varphi) d\varphi \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} T \cdot \sin(k \cdot \varphi) d\varphi.$$

¹⁾ Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1902. S. 779 u. 886.

Es sind nur die ersten 3 Kurven für $k = 1$, $k = 2$ und $k = 3$ — in der Figur mit I, II und III bezeichnet — ermittelt, weil die höheren Oberschwingungen geringere Bedeutung haben. Die Resultierende aus I, II und III gibt bereits eine ausreichende Übereinstimmung mit dem Tangentialdruckdiagramm.

Obige Kurven sind für die Umlaufzahl 83 bestimmt. Die Eigenschwingungszahl des Systems Maschine mit Welle und Propeller wird zu 257,4 berechnet, dieselbe liegt also in der Nähe der Schwingungszahl von Kurve III ($3 \cdot 83 = 249$). Da nun Kurve III die größten Amplituden und somit den größten Einfluß hat, sind erhebliche Resonanzschwingungen zu befürchten, die in einem pendelartigen Vor- und Zurückschwingen der Maschinen- und Propellermassen bestehen und somit erhebliche Verdrehungen der Wellenleitung bedingen, die zu Wellenbrüchen führen können.

Resonanz tritt ein, sobald die durch die Tourenzahl der Maschine gegebene Periodenzahl der Tangentialdruckschwankungen annähernd gleich ist der Eigenschwingungszahl des Systems Welle plus beiderseitiger Endmassen. Je nachdem, ob die Harmonische I, II, III usw. die Eigenschwingungszahl der Welle erregt, sind zu unterscheiden „kritische“ Tourenzahlen I, II, III, usw. Ordnung. Welche dieser kritischen Tourenzahlen die gefährlichste ist, hängt von der Amplitude der zugehörigen Harmonischen ab. Bei der Konstruktion von Maschinen ist darauf zu achten, daß die normalen Tourenzahlen niemals in Nähe der kritischen liegen.

Zur experimentellen Untersuchung dieser direkt nicht wahrnehmbaren Resonanzerscheinungen hat Frahm an 2 möglichst weit voneinander entfernten Stellen der Welle präparierte Zinkblätter befestigt, auf welchen in bekannten kurzen Zeiträumen durch Stromunterbrechung gleichzeitig kg/cm^2 Striche markiert werden, die eine Messung der relativen Verdrehungen der einzelnen Wellenquerschnitte gestatten.

Aus diesen Versuchen ergibt sich das in Fig. 30 dargestellte Resultat.

Während die mittlere Verdrehungsbeanspruchung 218 kg/cm^2 beträgt, ist die maximale 600 kg/cm^2 und die minimale -166 kg/cm^2 . Das negative Zeichen besagt, daß die Maschine sogar zeitweilig durch die Wucht der Propellermasse mitgeschleppt wird. Wäre die Tourenzahl

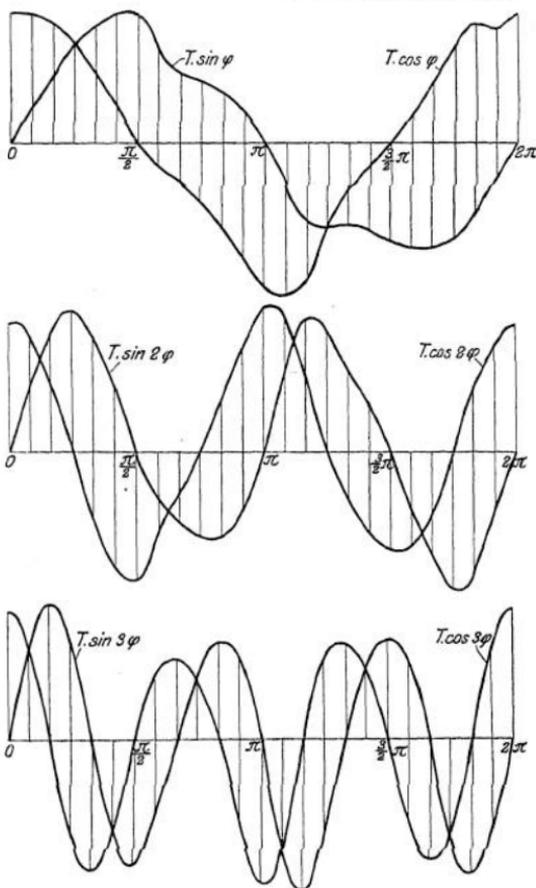


Fig. 29 c, d, e.

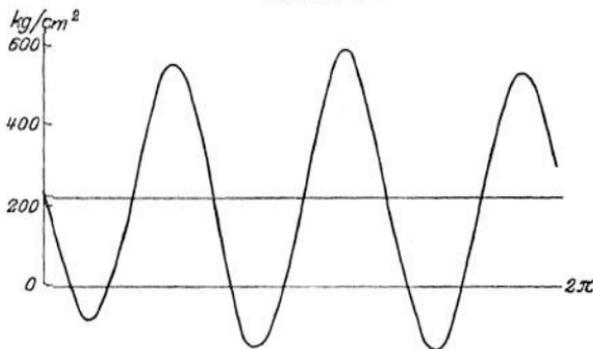


Fig. 30.

nicht 83, sondern genau gleich der kritischen $\frac{257,4}{3} = 85,8$ gewesen, so hätten sich noch höhere Verdrehungsbeanspruchungen ergeben müssen. Frahm berechnet für diese kritische Tourenzahl die maximale Verdrehungsbeanspruchung zu 810 kg/cm². Die maximalen Beanspruchungen treten, wie die Kurve zeigt, bei jeder Umdrehung dreimal ein. Da dieselben bedeutend über das zulässige Maß hinausgehen, haben sie bei verschiedenen Schiffen Wellenbrüche zur Folge gehabt, denen wirksam erst begegnet werden konnte, seitdem dieser Grund durch die harmonische Analyse der Schwingungen aufgeklärt ist.

Betreffs der weiteren Ausführungen Frahm's über die theoretische Berechnung der dynamischen Vorgänge in langen Wellenleitungen, die es ermöglicht, für jeden praktisch vorkommenden Fall die in Frage kommenden Verdrehungsbeanspruchungen im voraus zu analysieren und zu berechnen, sei auf die Veröffentlichung in der Z. Ver. deutsch. Ing. 1902, S. 880—888 verwiesen.

Die praktische Brauchbarkeit der Fourierschen Reihen hängt wesentlich von der Stärke der Konvergenz derselben ab. Wie beim Logarithmus (siehe S. 86) durch passende Kombination verschiedener schwach konvergenter Reihen eine zur zahlenmäßigen Berechnung geeignete stark konvergente Reihe gebildet wurde, kann man auch bei den Fourierschen Reihen bisweilen ähnlich verfahren.

Als charakteristisches Beispiel sei die Neumannsche Methode zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit gut leitender Körper¹⁾ angeführt. Ein Stab wird an einem Ende bis zu einer beliebigen Temperatur erwärmt. Sodann läßt man ihn erkalten — frei ausstrahlen — und bestimmt in gewissen Zeitabschnitten die Summe und Differenz der Temperaturen zweier in Nähe der Staben befindlichen Querschnitte.

Werden die einzelnen Querschnitte des Stabes als isotherme Flächen betrachtet und wird nur die lineare Wärmebewegung in Richtung der x -Achse in Rechnung gesetzt, bezeichnet ferner:

k = innere Wärmeleitfähigkeit,

\bar{k} = äußere Wärmeleitfähigkeit,

$$b = \frac{\bar{k}}{k},$$

c = spezifische Wärme,

s = Dichte,

$$a^2 = \frac{\bar{k}}{s \cdot c} = \text{Temperaturleitfähigkeit,}$$

l = Länge des Stabes in Richtung der x -Achse,

ϕ = Umfang } eines Stabquerschnittes,
 q = Inhalt }

$$f^2 = \frac{a^2 \cdot b \cdot \phi}{q},$$

$$\beta_k = a^2 \cdot \gamma_k^2 + f^2,$$

worin γ_k bestimmt ist durch die transzendente Gleichung

$$\operatorname{tg}(\gamma_k \cdot l) = \frac{2 \cdot \gamma_k \cdot b}{\gamma_k^2 - b^2},$$

in der k alle Werte von 1 bis ∞ annehmen kann und $\gamma_k \cdot l$ mit wachsendem k gegen $(k-1) \cdot \pi$ konvergiert,

so erhält man die Temperatur T an irgendeiner Stelle x des Stabes in Abhängigkeit von der Zeit t durch die Fouriersche Reihe:

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\beta_k \cdot t} \cdot \left\{ \cos(\gamma_k \cdot x) + \frac{b}{\gamma_k} \cdot \sin(\gamma_k \cdot x) \right\}.$$

Da für $x = 0$:

$$\cos(\gamma_k \cdot x) + \frac{b}{\gamma_k} \cdot \sin(\gamma_k \cdot x) = +1$$

und für $x = l$:

$$\cos(\gamma_k \cdot x) + \frac{b}{\gamma_k} \cdot \sin(\gamma_k \cdot x) = (-1)^{k+1},$$

so läßt sich für $x = 0$ und $x = l$ die Fouriersche Reihe vereinfachen zu:

$$T_{x=0} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\beta_k \cdot t}$$

und

$$T_{x=l} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot e^{-\beta_k \cdot t} \cdot (-1)^{k+1}.$$

¹⁾ Glage, Annalen der Physik. 1905, S. 904.

Aus diesen schwach konvergenten Reihen erhält man durch Addition bzw. Subtraktion die wesentlich stärker konvergierenden Reihen

$$\frac{1}{2} \cdot \{T_{z=0} + T_{z=l}\} = \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k-1} \cdot e^{-\beta_{2k-1} \cdot t}$$

und

$$\frac{1}{2} \cdot \{T_{z=0} - T_{z=l}\} = \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k} \cdot e^{-\beta_{2k} \cdot t}.$$

Man kann sich schon kurze Zeit nach Beginn der Abkühlung (kleine Werte von t) auf das erste Glied

$$A_1 \cdot e^{-\beta_1 \cdot t} \quad \text{bzw.} \quad A_2 \cdot e^{-\beta_2 \cdot t}$$

beschränken.

Beobachtet man eine Reihe von Summen und Differenzen zu verschiedenen Zeiten, so heben sich durch Division die Koeffizienten A_k heraus und man wird dadurch unabhängig von einem thermisch genau definierten Anfangszustande, der experimentell sehr schwer bestimmbar wäre. Hierin liegt der Hauptvorteil der Methode. Man erhält:

$$\beta_1 = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \{\ln(T_{z=0} + T_{z=l})_{t_1} - \ln(T_{z=0} + T_{z=l})_{t_2}\}$$

und

$$\beta_2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \{\ln(T_{z=0} - T_{z=l})_{t_1} - \ln(T_{z=0} - T_{z=l})_{t_2}\}.$$

Da $\beta_2 - \beta_1 = a^2 \cdot (\gamma_2^2 - \gamma_1^2)$, so folgt hieraus nach Bestimmung der γ das gesuchte a^2 . Dadurch, daß die Messungen in dieser Weise kombiniert werden, wird der Fehler von a^2 bedeutend kleiner als es zunächst scheinen mag. Die Beschränkung auf das erste Glied besteht keineswegs darin, daß das folgende und alle weiteren Glieder als klein gegenüber dem ersten vernachlässigt werden. Es wird vielmehr infolge der stets vorgenommenen Differenzbildung der Logarithmen nur die völlig verschwindende Änderung dieser kleinen Glieder in einem geringen Zeitintervall von Beobachtung zu Beobachtung nicht berücksichtigt. Der Fehler ist von der Form

$$\ln \frac{1 + \delta_1}{1 + \delta_2} = \delta_1 - \delta_2.$$

Dieser Fehler läßt sich durch passende Wahl der Zeitdifferenz $t_2 - t_1$ unter jede gewünschte Grenze herabdrücken. Eine zahlenmäßige Auswertung dieser Fehler ist in der erwähnten Arbeit über die Neumannsche Methode durchgeführt.

VI. Planimetrie und Stereometrie.¹⁾

A. Umfänge und Flächeninhalte ebener Figuren.

1. Dreieck.

Seiten a, b, c ; Winkel α, β, γ ; Höhen h_a, h_b, h_c ; Mittellinien m_a, m_b, m_c ; $2s = a + b + c$; $2\delta = m_a + m_b + m_c$.

$$F = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} a b \cdot \sin \gamma = \frac{a^2 \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$$

$$= 2 r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{a b c}{4 r}$$

$$= \varrho^2 \cot \alpha/2 \cdot \cot \beta/2 \cdot \cot \gamma/2$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{\delta(\delta - m_a)(\delta - m_b)(\delta - m_c)} = \varrho \cdot s$$

2. Viereck. Diagonalen D_1 und D_2 , Höhen auf D_2 : h_1 und h_2 ; Winkel zwischen den Diagonalen φ .

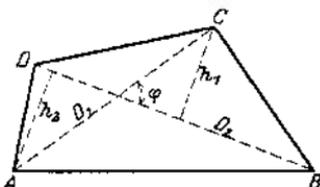


Fig. 31.

$$F = \frac{1}{2} \cdot D_2 \cdot (h_1 + h_2) = \frac{1}{2} D_1 \cdot D_2 \cdot \sin \varphi.$$

¹⁾ Aus Förster, Taschenbuch für Bauingenieure. Berlin 1911. Julius Springer.

$$\left. \begin{array}{l} \text{2a. Trapez. } a, b \text{ parallele Seiten, } h \text{ Höhe, } m \text{ Parallele} \\ \text{zu } a \text{ und } b \text{ in halber Höhe} = \frac{a+b}{2} \\ F = \frac{1}{2} h \cdot (a+b) = m \cdot h \\ \text{2b. Parallelogramm, Rechteck. } a \text{ Grundlinie, } h \text{ Höhe} \\ F = a \cdot h \end{array} \right\} \begin{array}{l} F = \\ \frac{1}{2} D_1 D_2 \sin \varphi \end{array}$$

3. Vieleck. Zerlegung in Dreiecke oder Berechnung aus den Koordinaten $x_1 y_1 \cdot x_2 y_2 \dots$ der Eckpunkte:

$$F = \frac{1}{2} \{ (x_2 y_1 - x_1 y_2) + (x_3 y_2 - x_2 y_3) + (x_4 y_3 - x_3 y_4) + \dots + (x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n) + (x_1 y_n - x_n y_1) \}.$$

3a. Regelmäßiges Vieleck (n -Eck). Seitenlänge a , Umkreis r , Inkreis ϱ , halber Zentriwinkel φ , Umfang U , Fläche F .

Der Winkel des Vielecks ist $180^\circ - 2\varphi$.

$$\varphi = \frac{180}{n}, \quad a = 2 \sqrt{r^2 - \varrho^2} = 2r \sin \varphi = 2\varrho \tan \varphi;$$

$$U = n \cdot a = 2nr \sin \varphi = 2n\varrho \tan \varphi;$$

$$F = \frac{1}{2} n a^2 \cot \varphi = \frac{1}{2} n r^2 \sin 2\varphi = n\varrho^2 \tan \varphi.$$

4. Kreis. Halbmesser r , Durchmesser d , Umfang U .

$$U = 2r\pi = \pi d;$$

$$F = r^2 \pi = \frac{1}{4} \pi d^2 = \frac{1}{4} U d = 0,78539816 d^2.$$

4a. Kreisring. R äußerer, r innerer Halbmesser, D äußerer, d innerer Durchmesser, ϱ mittlerer Halbmesser, δ Ringbreite.

$$F = \pi (R^2 - r^2) = \frac{1}{4} \pi (D^2 - d^2) = 2\pi \cdot \varrho \cdot \delta.$$

4b. Kreisabschnitt F_1 und Kreisabschnitt F_2 . Zentriwinkel: φ° in Gradmaß, φ in Bogenmaß. Fig. 32:

$$F_1 = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\varphi^\circ \cdot \pi}{180} - \sin \varphi \right) = \frac{r(l-s) + s \cdot h}{2},$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot l \cdot r = \frac{\varphi^\circ \pi \cdot r^2}{360} = 0,00873 \cdot r^2 \cdot \varphi^\circ = \frac{1}{2} \varphi \cdot r^2.$$

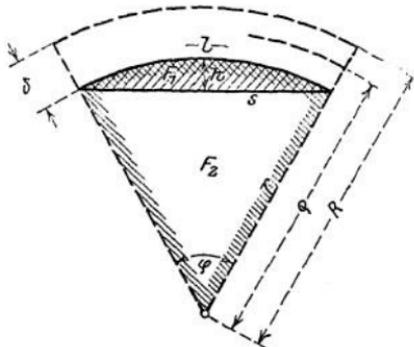


Fig. 32.

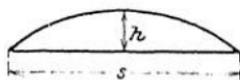


Fig. 33.

4c. Kreisringstück:

$$\begin{aligned} F &= \frac{\varphi^\circ \pi}{360} (R^2 - r^2) \\ &= \frac{\varphi^\circ \pi}{180} \cdot \varrho \delta = \varphi \cdot \varrho \cdot \delta. \end{aligned}$$

5. Parabel, Ellipse (Figur 33). (Weitere Kurven s. S. 174 ff.)

Parabel: $F = \frac{2}{3} \cdot s \cdot h$, $U = \pi s \left(1 + \frac{8}{3} \left(\frac{h}{s} \right)^2 - \frac{32}{5} \left(\frac{h}{s} \right)^4 \right)$,

wenn $\frac{h}{s}$ klein ist. Gilt auch für einen beliebigen flachen Bogen.

Ellipse: $F = a \cdot b \cdot \pi$; U s. folgende Tabelle.

$b : a$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$U : a$	4,0640	4,2020	4,3860	4,6026	4,8442	5,1054	5,3824	5,6723	5,9732

6. Beliebige Fläche. Ist die Fläche auf mehreren Seiten durch krumme Linien begrenzt, so teile man sie durch eine gerade Linie in zwei Teile und berechne deren jeden in der folgenden Weise (Fig. 34). Man teilt die Fläche

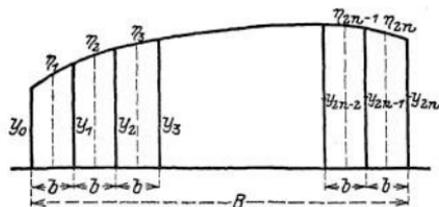


Fig. 34.

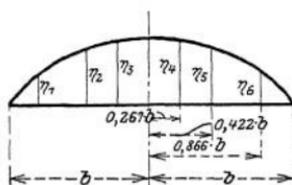


Fig. 35.

in eine gerade Anzahl gleichbreiter Streifen senkrecht zur Achse; die Breite jedes Streifens sei b , die Höhen seiner Begrenzungsgeraden y_0, y_1 usw., seine Mittelhöhe η_1, η_2, \dots . Dann ist angenähert der Inhalt des gezeichneten Flächenteils:

- $F = b \left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{2n-2} + y_{2n-1} + \frac{1}{2} y_{2n} \right)$,
- $F = b \sum \eta$,
- $F = \frac{1}{3} b (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$,
- $F = \frac{1}{8} b (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + \dots + 2y_{n-3} + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + y_n)$.

Die vorstehenden vier Formeln sind nach ihrer Genauigkeit geordnet. Formel 4 ist am genauesten; bei ihrer Anwendung muß die Anzahl der Flächenstreifen durch 3 teilbar sein. Formel 3 und 4 heißen die Simpsonschen Regeln.

Die Summen in den Formeln 1 bis 4 lassen sich in einfachster Weise mit dem Zirkel bilden. Sind die zu ermittelnden Flächen auf Millimeterpapier gezeichnet, so erübrigt sich eine besondere Einteilung der Fläche in Streifen; man benutzt dann, je nach der gewünschten Genauigkeit, die Teilung des Papiers in Zentimeter, halbe Zentimeter oder gar Millimeter. Diesen Vorteil erreicht man auch durch Überdecken der Zeichnung mit einer Millimeterteilung auf durchsichtigem Papier.

Ist die Begrenzungskurve der Fläche höchstens vom dritten Grade, so ergibt sich der Inhalt genau zu:

5. $F = \frac{1}{6} \cdot B \cdot (y_0 + 4 \cdot y_n + y_{2n})$,

ist die Kurve höchstens vom 5. Grade, so gilt genau:

6. $F = \frac{2}{15} b \{ 7(y_0 + y_4) + 32(y_1 + y_3) + 12y_2 \}$,

wenn $b = \frac{1}{5} B$ ist und y_0 bis y_4 die fünf Ordinaten in den gleichen Abständen b bezeichnen.

Regel von Tschibyscheff (Fig. 35):

7. $F = \frac{1}{3} \cdot b (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + \eta_5 + \eta_6)$.

Beispiel für die Anwendung und die Genauigkeit der vorstehenden Formeln:

Die in Fig. 34 a dargestellte Fläche soll quadriert werden. Während in der Praxis die Ordinaten meist einer Zeichnung entnommen werden müssen, sind sie hier zur Erzielung größerer Genauigkeit gerechnet (die Gleichung der Begrenzungskurve lautet: $y = \frac{1}{5 + 5x^2}$).

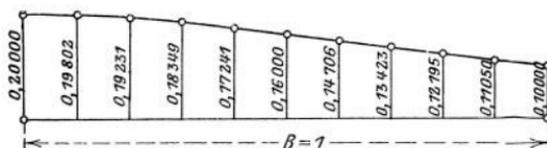


Fig. 34 a.

Die Strecke $B = 1$ wurde in 10 Teile geteilt, so daß $b = 0,1$; die Ordinaten sind in Fig. 34 a eingetragen und in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Die Anwendung der Formeln 1 bis 3 und 5 ist ohne weiteres klar; Formel 4 konnte, da die Zahl der Teile durch 3 teilbar sein muß, nur im Intervall $x = 0$ bis $x = 0,9$ benutzt werden; zur Auswertung der Fläche im Intervall $x = 0,9$ bis $x = 1,0$ diente dann nochmals die Formel 5. Der genaue Wert der Fläche ist durch Integration (S. 171) bestimmt.

		Ermittlung der Fläche in Fig. 34 a, und zwar nach					
x	$f(x)$	Formel 1	Formel 2	Formel 3	Formel 4	Formel 5	
0,0	0,20000	0,10000		1	0,20000	1	0,20000
0,1	0,19802	0,19802	0,19950	4	0,79208	3	0,59406
0,2	0,19231	0,19231	0,19560	2	0,38462	3	0,57693
0,3	0,18349	0,18349	0,18824	4	0,73396	2	0,36698
0,4	0,17241	0,17241	0,17817	2	0,34482	3	0,51723
0,5	0,16000	0,16000	0,16632	4	0,64000	3	0,48000
0,6	0,14706	0,14706	0,15355	2	0,29412	2	0,29412
0,7	0,13423	0,13423	0,14060	4	0,53692	3	0,40269
0,8	0,12195	0,12195	0,12800	2	0,24390	3	0,36585
0,9	0,11050	0,11050	0,11611	4	0,44200	1	0,11050
1,0	0,10000	0,05000	0,10512	1	0,10000	1	0,10000
	$\Sigma =$	1,56997	1,57121	4,71442	3,90836		0,63098
	$F =$	$\frac{1}{10} \cdot 1,56997$	$\frac{1}{10} \cdot 1,57121$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} \cdot 4,71442$	$\frac{1}{10} \left(\frac{3}{8} \cdot 3,90836 + \frac{1}{6} \cdot 0,63098 \right)$		
	$=$	0,156997	0,157121	0,157088	0,1570798		

Genauer Wert 0,15707963 . . .

B. Oberflächen und Rauminhalte von Körpern.

V Rauminhalt, M Mantelfläche, O Oberfläche.

I. Prisma. Grundfläche G , Höhe h .

$$V = G \cdot h, \text{ s. auch 1 d.}$$

1 a. Würfel. Kante a . $V = a^3$; $O = 6a^2$; Diag. $d = a\sqrt{3}$.

1 b. Rechtwinkliges Parallelepiped: Kanten a, b, c ; $V = a \cdot b \cdot c$;

Diagonale $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; $O = 2(ab + bc + ca)$.

1 c. Schief abgeschnittenes 3seitiges Prisma: Die 3 parallelen Kanten a, b, c ; Normalschnitt N : $V = \frac{1}{3}(a + b + c) \cdot N$; s. auch 1 d.

1 d. Schief abgeschnittenes beliebiges Prisma: Verbindungslinie der Schwerpunkte der beiden Grundflächen l , Normalschnitt N : $V = N \cdot l$.

2. Zylinder. Grundfläche G , Höhe h .

$V = G \cdot h$: Mantelfläche = Umfang des Normalschnitts \times Mantellinienlänge.

2a. Gerader Kreiszyylinder. Halbmesser der Grundfläche R , Höhe h .

$$V = R^2 \cdot \pi \cdot h, \quad M = 2 R \pi \cdot h, \quad O = 2 R \pi (R + h).$$

2b. Gerader Kreiszyylinder, schief abgeschnitten. Größte und kleinste Mantellinie a und b .

$$V = R^2 \pi \cdot \frac{a + b}{2}, \quad M = R \pi (a + b).$$

2c. Zylinderhuf. (Fig. 36.)

$$FC = a, \quad AC = BC = b,$$

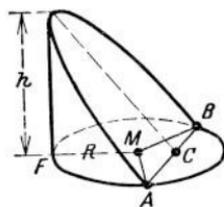
$$\angle FMB = \varphi \text{ in Bogenmaß.}$$

$$V = \frac{h}{3a} \{b(3R^2 - b^2) + 3R^2(a - R)\varphi\},$$

$$M = \frac{2hR}{a} \{(a - R)\varphi + b\}.$$

Wenn C mit M zusammenfällt ($FC = AC = BC = a = b = R$):

$$V = \frac{2}{3} R^2 \cdot h, \quad M = 2 R h.$$



$MA = MB = R$
Fig. 36.

2d. Hohlzylinder. R äußerer, r innerer, ϱ mittlerer Halbmesser; Wandstärke $\delta = R - r$, Höhe h .

$$V = \pi \cdot h (R^2 - r^2) = \pi \cdot h \cdot s (2R - s) = \pi \cdot h \cdot s (2r + s) = 2\pi \cdot \varrho \cdot h \cdot s.$$

3. Pyramide, Kegel. Grundfläche G , Höhe h . $V = \frac{1}{3} G \cdot h$.**3a. Abgestumpfte Pyramide:** Grundflächen G und g , Höhe h .

$$V = \frac{1}{3} h (G + g + \sqrt{G \cdot g}).$$

3b. Kreiskegel: Halbmesser der Grundfläche R , Höhe h .

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h.$$

Mantel des geraden Kreiskegels:

$$M = \pi R \sqrt{R^2 + h^2} = \pi R \cdot s \quad (s \text{ Mantellinie}).$$

3c. Abgestumpfter Kreiskegel: r Halbmesser der oberen, R der unteren Grundfläche, h Höhe.

$$S = R + r, \quad D = R - r, \quad s = \sqrt{h^2 + D^2},$$

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2) = \frac{1}{6} h (\pi \cdot R^2 + \pi \cdot S^2 + \pi \cdot r^2) = \frac{h}{4} \left(\pi S^2 + \frac{\pi D^2}{3} \right).$$

Mantel des geraden abgestumpften Kreiskegels: $M = S \cdot \pi \cdot s$.

4. Kugel. Halbmesser R .

$$V = \frac{4}{3} R^3 \pi = \frac{1}{3} O R = 4,18879 \cdot R^3,$$

$$O = 4 R^2 \pi = \frac{3V}{R},$$

$$R = 0,620351 \cdot \sqrt[3]{V}.$$

- 4 a. Kugelabschnitt, Kalotte. (Fig. 37.) Kugelhalbmesser R , Höhe des Abschnittes h , Halbmesser seiner Grundfläche $a = \sqrt{h(2r-h)}$.

$$V = h^2 \pi \left(R - \frac{h}{3} \right) = \frac{1}{6} \cdot \pi h (3a^2 + h^2),$$

$$\text{Kappe: } M = 2 \pi R h = \pi (a^2 + h^2).$$

- 4 b. Kugelzone, Kugelschicht. (Fig. 38.) Halbmesser der Grundkreise a und b .

$$V = \frac{\pi \cdot h}{6} (3a^2 + 3b^2 + h^2), \quad M = 2 R \pi \cdot h,$$

$$R^2 = a^2 + \left(\frac{a^2 - b^2 - h^2}{2h} \right)^2, \quad a > b.$$

$$\text{Ist } a = R, \text{ so gilt: } V = h \cdot \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{3} \right).$$

- 4 c. Kugelausschnitt. (Fig. 39.)

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 \cdot h = 2,0944 \cdot R^2 \cdot h, \quad O = \pi R (2h + a).$$

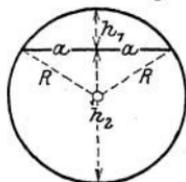


Fig. 37.

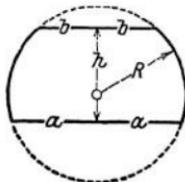


Fig. 38.

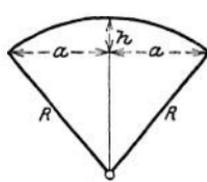


Fig. 39.

- 4 d. Kugelkeil, Kugelzweieck. φ° der Winkel zwischen den beiden größten Kreisen.

$$V = 0,0116355 \cdot \varphi^\circ \cdot R^3, \quad M = 0,034907 \cdot \varphi^\circ \cdot R^2.$$

- 4 e. Kugeldreieck. ε° sphärischer Exzeß.

$$M = \frac{\varepsilon^\circ}{180^\circ} \cdot \pi R^2.$$

5. Körper mit elliptischen und parabolischen Querschnitten.

- 5 a. Ellipsoid. Halbachsen a , b , c .

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot a \cdot b \cdot c.$$

- 5 b. Umdrehungsellipsoid.

$$2 a \text{ Drehachse: } V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot a \cdot b^2,$$

$$2 b \text{ Drehachse: } V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot a^2 \cdot b.$$

- 5 c. Umdrehungsparaboloid. Höhe h , Halbmesser der Grundfläche R .

$$V = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot R^2 h = 1,570796 R^2 \cdot h.$$

- 5 d. Abgestumpftes Umdrehungsparaboloid. Höhe h , Halbmesser der Grundflächen R und r .

$$V = \frac{1}{2} \pi \cdot (R^2 + r^2) \cdot h.$$

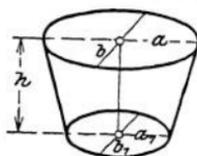


Fig. 40.

- 5 e. Kübel, Bottich. (Fig. 40.) Endflächen Ellipsen mit den Halbachsen a , b und a_1 , b_1 . Höhe h .

$$V = \frac{\pi h}{6} \{ (2a + a_1) b + (2a_1 + a) b_1 \},$$

- 5f. Faß. Bodenhalmmesser r , Mitten-, Spundhalmmesser R , Länge (Höhe) h .

Bei Annahme parabolischer Dauben ist genau:

$$V = 0,837758 \cdot h(2R^2 + Rr + 0,75r^2);$$

bei Annahme kreisförmiger Dauben ist angenähert:

$$V = 1,0471976 \cdot h(2R^2 + r^2).$$

6. Umdrehungsflächen und -körper. Sätze von Guldin.

- 6a. Die Oberfläche M einer Umdrehungsfläche ist gleich dem Produkte aus der Länge l der erzeugenden Linie und dem Wege ihres Schwerpunktes.

Hat dieser von der Drehachse den Abstand r , so ist:

$$M = 2\pi r \cdot l.$$

Besteht die erzeugende Linie l aus den n Teilen l_1, l_2, \dots mit den Schwerpunktsabständen r_1, r_2, \dots , so gilt:

$$M = 2\pi \sum_1^n (r l).$$

Die erzeugende Linie darf die Drehachse nicht schneiden.

- 6b. Der Inhalt V eines Umdrehungskörpers ist gleich dem Produkte aus dem Flächeninhalte f der erzeugenden Fläche und dem Wege ihres Schwerpunktes.

Hat dieser von der Drehachse den Abstand r , so ist:

$$V = 2\pi r \cdot f.$$

Besteht die erzeugende Fläche f aus den n Teilen f_1, f_2, \dots mit den Schwerpunktsabständen r_1, r_2, \dots , so gilt:

$$V = 2\pi \sum_1^n (f \cdot r).$$

Die erzeugende Fläche darf von der Drehachse nicht geschnitten werden.

- 6c. Ist $y = f(x)$ die Gleichung der erzeugenden (Meridian-) Kurve in bezug auf die Drehachse, so gilt allgemein:

$$M = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y ds \quad \text{und} \quad V = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx.$$

- 6d. Für eine teilweise Umdrehung ist zu beachten, daß Oberfläche und Rauminhalt den Drehwinkeln proportional sind.

- 6e. Die vorstehenden Regeln und Rechnungen sind sinngemäß auch anwendbar, wenn der Schwerpunkt keinen Kreis, sondern eine beliebige Kurve beschreibt, solange nur die Ebene der Erzeugenden zur Bewegungsrichtung immer senkrecht bleibt.

- 6f. Zylindrischer Ring.

$$V = 2\pi^2 R r^2 = 19,739 \cdot R r^2,$$

$$O = 4\pi^2 R r = 39,478 \cdot R r.$$

VII. Technische Kurvenlehre.

Kurven in der Ebene — analytische Geometrie der Ebene.

Bearbeitet von Dipl.-Ing. H. Winkel.

Die analytische Geometrie der Ebene beschäftigt sich ebenso wie die synthetische Geometrie oder Geometrie schlechthin mit den Eigenschaften ebener Gebilde; jedoch bedient sie sich im Gegensatz zu jener des Hilfsmittels der Rechnung (Algebra), um diese Eigenschaften zu entwickeln. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit, algebraische, d. h. positive und negative Größen zeichnerisch darzustellen bzw. zeichnerische Gebilde algebraisch zu deuten. Am einfachsten läßt sich diese Forderung befriedigen, wenn man die in Frage kommenden Größen als Strecken auffaßt.

A. Punkt und gerade Linie.

Als Grundlage der analytischen Geometrie dient das — im allgemeinen — rechtwinklige Achsenkreuz oder Koordinatensystem.

a) Die Lage eines Punktes P_1 ist durch die Angabe seiner Koordinaten x_1, y_1 bzw. durch seine Polarkoordinaten r_1 und φ_1 eindeutig bestimmt (Fig. 1). Die positive Richtung der Achsen ist durch einen Pfeil gekennzeichnet.

Die Länge einer Strecke $P_1 P_2$ ist durch die Koordinaten ihrer Endpunkte bestimmt zu

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

z. B. $P_1(x_1 = +7; y_1 = +4); P_2(x_2 = +2; y_2 = -8),$

$$l = \sqrt{[(+2) - (+7)]^2 + [(-8) - (+4)]^2} = 13.$$

Teilt man die Strecke $P_1 P_2$ im Verhältnis $m:n$ und sind x_0, y_0 die Koordinaten des Teilpunktes, so wird:

$$x_0 = x_1 + \frac{n}{m+n}(x_2 - x_1); \quad y_0 = y_1 + \frac{n}{m+n}(y_2 - y_1).$$

b) Gleichung einer Kurve. Die Kurve entsteht durch Bewegung eines Punktes; bei der Bewegung ändern sich die Koordinaten des erzeugenden — laufenden —

Punktes; sie werden zu veränderlichen oder variablen Größen. Geschieht die Bewegung stetig nach einem bestimmten Gesetz, so ändern sich auch die laufenden Koordinaten stetig. Ist das Bildungsgesetz der Kurve bekannt, so muß jeder Punkt der Kurve diesem Bildungsgesetz genügen; d. h. zwischen seinen

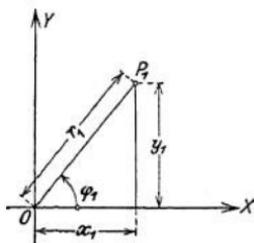


Fig. 1.

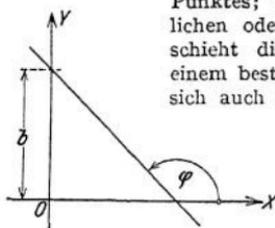


Fig. 2.

Koordinaten und bestimmten durch das Bildungsgesetz gegebenen Konstanten muß stets dieselbe Beziehung bestehen, die durch die Form einer Gleichung zwischen den variablen Koordinaten x und y — bzw. r und φ — und den Konstanten ausgedrückt wird. Diese Gleichung heißt die Gleichung der Kurve.

c) Die gerade Linie (Fig. 2). Sind x und y die Koordinaten des laufenden Punktes und ist die Richtung durch den Neigungswinkel φ der Geraden gegen

die x -Achse — $\operatorname{tg} \varphi = m$ — gegeben, so lautet die Gleichung der Geraden, die auf der y -Achse das Stück b abschneidet:

$$y = mx + b.$$

Der Neigungswinkel der Geraden gegen die x -Achse ist gleich dem Winkel, um den die positive Richtung der x -Achse nach der positiven Richtung der y -Achse hin gedreht werden muß, damit sie in die Richtung der Geraden fällt;

$m = 0$ ergibt $y = b$ als Gleichung einer Parallelen zur x -Achse,

$b = 0$ ergibt $y = mx$ als Gleichung einer Geraden durch den Koordinatenanfangspunkt,

$x = a$ ist die Gleichung einer Parallelen zur y -Achse.

Geht die Gerade durch den Punkt $P_1(x_1; y_1)$ und ist $m = \operatorname{tg} \varphi$ ihre Richtungskonstante, so heißt ihre Gleichung:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m;$$

geht die Gerade durch die Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$, so wird:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Schneidet eine Gerade auf der x -Achse die Strecke a , auf der y -Achse die Strecke b ab, so folgt:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Die allgemeine Gleichung der Geraden ist eine Gleichung ersten Grades zwischen den Variablen x und y :

$$Ax + By + C = 0,$$

wobei A, B, C irgendwie bestimmte konstante Größen sind; demnach ist:

$$a = -\frac{C}{A}; \quad b = -\frac{C}{B}; \quad m = -\frac{A}{B}.$$

Sind zwei gerade Linien durch die Gleichungen:

$$y = m_1 \cdot x + b_1; \quad y = m_2 \cdot x + b_2$$

gegeben, so sind die Geraden parallel, wenn $m_1 = m_2$; sie stehen senkrecht aufeinander, wenn $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ ist.

d) Die Koordinaten des Schnittpunktes seien x_0, y_0 und müssen, da der Punkt P_0 beiden Geraden angehört, beiden Gleichungen genügen, so daß:

$$y_0 = m_1 \cdot x_0 + b_1, \quad y_0 = m_2 \cdot x_0 + b_2$$

wird und daraus:

$$x_0 = \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2},$$

$$y_0 = \frac{m_1}{m_1 - m_2} (b_2 - b_1) + b_1$$

oder:

$$y_0 = \frac{m_2}{m_1 - m_2} (b_2 - b_1) + b_2.$$

e) Umwandlung der Koordinaten. Um die Gleichungen von Kurven zu vereinfachen, ist es häufig zweckmäßig, sie auf ein anderes Achsenkreuz zu beziehen.

1. Das zweite Achsenkreuz liege parallel zum ersten; die Koordinaten des laufenden Punktes seien x' und y' ; die Koordinaten des zweiten Anfangspunktes in Beziehung auf das erste Achsenkreuz seien a und b , dann ist:

$$x = a + x'; \quad y = b + y' \quad \text{oder} \quad x' = x - a; \quad y' = y - b.$$

2. Erscheint das zweite Achsenkreuz unter Beibehaltung des Anfangspunktes gegen das erste um den Winkel α gedreht, so ist:

$$x = x' \cdot \cos \alpha - y' \cdot \sin \alpha; \quad y = x' \sin \alpha + y' \cdot \cos \alpha.$$

3. Sollen die (Linear-)Koordinaten x und y eines Punktes P durch die Polarkoordinaten r und φ ausgedrückt werden, so ist für den Fall, daß der Pol mit dem Anfangspunkt und die Polarachse mit der positiven x -Achse zusammenfallen:

$$x = r \cdot \cos \varphi; \quad y = r \cdot \sin \varphi.$$

Beispiele: 1. Gegeben die Gerade $y = mx + b$; sie ist auf das $x' y'$ -System (Fig. 3) zu beziehen. Die Umwandlungsgleichungen lauten

$$x = x'; \quad y = b + y',$$

folglich

$$b + y' = mx' + b, \quad y' = mx'.$$

2. Gegeben die Gerade $y = 2x + 3$; es ist ihre Gleichung aufzustellen für ein $x' y'$ -System, dessen Anfangspunkt die Koordinaten $a = -3$ und $b = -5$ hat.

Die Umwandlungsgleichungen lauten

$$x = x' - 3; \quad y = y' - 5$$

und damit

$$y' - 5 = 2(x' - 3) + 3 \quad \text{bzw.} \quad y' = 2x' + 2.$$

3. Gegeben sei die Polargleichung der Konchoide (vgl. S. 144)

$$r = \frac{b}{\cos \varphi} \pm a \quad \text{oder} \quad r \cdot \cos \varphi = b \pm a \cdot \cos \varphi.$$

Mit $x = r \cdot \cos \varphi$ und $y = r \cdot \sin \varphi$ wird $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$, so daß

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

folglich

$$x = b \pm a \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (x - b)^2 = \frac{a^2 x^2}{x^2 + y^2}$$

oder

$$(x^2 + y^2)(x - b)^2 = a^2 x^2.$$

f) Maßstab der Darstellung. Ist y in irgendeiner Weise von x abhängig, so sagt man, „ y ist eine Funktion von x “, demnach heißt die allgemeinste Gleichung einer Kurve $y = f(x)$ oder wenn die Gleichung nicht nach y aufgelöst ist, $f(x, y) = 0$.

Jedes physikalische Gesetz legt die Abhängigkeit physikalischer Größen voneinander klar. Besagt z. B. das Ohmsche Gesetz: die Spannung ist direkt proportional dem Widerstande und der Stromstärke, so heißt die algebraische Form dieses Gesetzes $e = i \cdot w$; betrachtet man w als konstante, e und i als variable Größen, so läßt sich die Abhängigkeit der Spannung von der Stromstärke durch die Form wiedergeben $e = f(i)$, d. h. e ist eine Funktion von i . Die Gleichung ist vom ersten Grade, ihr graphischer Ausdruck eine gerade Linie, die — wie der Vergleich mit $y = m \cdot x$ zeigt — durch den Koordinatenanfangspunkt geht, und deren Richtungskonstante $m = w$ ist.

Wird gesagt, es ist e als abhängige und i als unabhängige Veränderliche aufzufassen, so heißt das geometrisch gedeutet: e und i sind Koordinaten eines laufenden Punktes, sie werden dargestellt durch Strecken. Dadurch wird ein Maßstab für die Darstellung notwendig; er lautet: a mm stellen auf der y -Achse e Volt dar, b mm stellen auf der x -Achse i Amp. dar.

In jeder technischen Kurve muß die gemessene Strecke mit dem jeweiligen Maßstab multipliziert werden, z. B. sei eine Ordinate y_1 mm lang, dann ist:

$$e_1 = y_1 \text{ mm} \cdot \frac{e \text{ Volt}}{a \text{ mm}} = \left(y_1 \cdot \frac{e}{a} \right) \text{ Volt};$$

eine Abszisse sei x_1 mm lang, dann ist:

$$i_1 = x_1 \text{ mm} \cdot \frac{i \text{ Amp.}}{b \text{ mm}} = \left(x_1 \cdot \frac{i}{b} \right) \text{ Amp.}$$

Mit den Maßstäben für die beiden Achsen ist gleichzeitig der Maßstab für die Richtungskonstante der Geraden — bzw. der Tangente bei Kurven — festgelegt. Aus a mm = e Volt und b mm = i Amp. ergibt sich:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \text{ mm}}{b \text{ mm}} = \frac{e \text{ Volt}}{i \text{ Amp.}} = \left(\frac{e}{i} \right) \text{ Ohm.}$$

Beispiel: Eine Speiseleitung sei 1200 m lang, der Querschnitt betrage 120 mm²; der Widerstand ist $w = 0,146 \frac{\text{Ohm}}{\text{km}} \cdot 1,2 \text{ km} = 0,175 \text{ Ohm}$. Der Spannungsabfall e als Funktion der Stromstärke i , d. h. $e = i \cdot w$, gibt eine Gerade durch den Anfangspunkt (Fig. 4). Der Maßstab der x -Achse lautet 1 mm = 10 Amp.; der Maßstab der y -Achse 1 mm = 2 Volt. Durch Division ergibt sich als Maßstab für den Neigungswinkel einer Geraden $t = \frac{2 \text{ Volt}}{10 \text{ Amp.}} = 0,2 \text{ Ohm}$. Die Richtungskonstante der gegebenen Geraden ist

$$\text{tg } \alpha = 0,175 \text{ Ohm} \cdot \frac{1}{0,2 \text{ Ohm}} = 0,875,$$

so daß
wird.

$$\alpha = \text{arctg } 0,875 = 41^\circ 11,2'$$

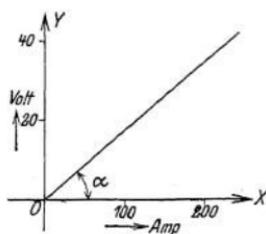


Fig. 4.

B. Krumme Linien in der Ebene.

a) Allgemeine Sätze und Erklärungen.

1. Sind x und y die laufenden Koordinaten, so lautet die Gleichung der Kurve in Parallelkoordinaten:

$$y = f(x),$$

wenn die Gleichung nach y aufgelöst ist (explizite Form),

$$F(xy) = 0,$$

wenn die Gleichung nicht aufgelöst ist (implizite Form). Mit r und φ als Koordinaten des laufenden Punktes erhält man entsprechend für Polarkoordinaten:

$$r = f(\varphi) \quad \text{bzw.} \quad F(r\varphi) = 0;$$

z. B. lautet die Scheitelgleichung des Kreises mit dem Radius a für Parallelkoordinaten (vgl. S. 111):

$$y^2 - 2ax + x^2 = 0, \quad F(xy) = 0,$$

oder:

$$\begin{aligned} y &= \pm \sqrt{2ax - x^2}, & y &= f(x), \\ r - 2a \cdot \cos \varphi &= 0, & F(r\varphi) &= 0, \\ r &= 2a \cdot \cos \varphi, & r &= f(\varphi). \end{aligned}$$

Die Parameterdarstellung von Kurven siehe S. 127.

2. Liegt ein Punkt $P_1(x_1 y_1)$ auf der Kurve, so müssen seine Koordinaten der Gleichung der Kurve genügen, d. h. die Gleichungen $F(x_1 y_1) = 0$; $y_1 = f(x_1)$; $F(r_1 \varphi_1) = 0$ und $r_1 = f(\varphi_1)$ müssen erfüllt sein. Ist z. B. P_1 ein Punkt des Kreises unter (1), so gelten für die Koordinaten $x_1 y_1$ bzw. $r_1 \varphi_1$ die Beziehungen:

$$y_1^2 - 2ax_1 + x_1^2 = 0, \quad y_1 = \pm \sqrt{2ax_1 - x_1^2}$$

bzw.

$$r_1 - 2a \cdot \cos \varphi_1 = 0, \quad r_1 = 2a \cdot \cos \varphi_1.$$

3. Eine Gerade, die die Kurve in zwei Punkten schneidet, heißt Sekante (vgl. S. 147).

4. Eine Gerade $P_1 T_2$, die die Kurve in einem Punkte P_1 (Fig. 5) berührt, heißt Tangente; im engeren Sinne versteht man darunter den Abschnitt $P_1 T_1$ zwischen der x -Achse und dem Berührungspunkt P_1 .

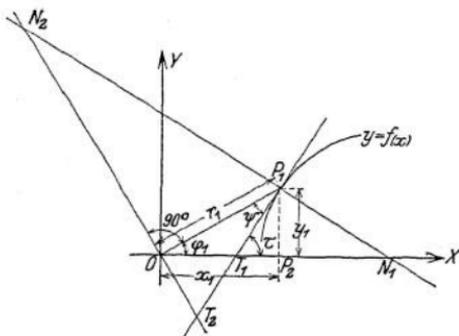


Fig. 5.

5. Unter dem Neigungswinkel τ der Tangente $P_1 T_1$ versteht man den Winkel, um den man die positive Richtung der x -Achse um den Punkt T_1 nach der positiven Richtung der y -Achse drehen muß, bis sie in die Lage der Tangente fällt.

6. Die Gleichung der Tangente siehe S. 162.

7. Die Projektion $T_1 P_2$ auf die x -Achse heißt Subtangente.

8. Errichtet man auf dem Leitstrahl r_1 im Pol O eine Senkrechte, die die Tangente in T_2 schneidet, so heißt $T_2 P_1$ Polartangente.

9. Ihre Projektion OT_2 auf die Senkrechte heißt Polarsubtangente.

10. Die Länge der Tangenten und Subtangenten siehe S. 162.

11. Die gerade Linie $P_1 N_1$, die im Berührungspunkte P_1 auf der Tangente senkrecht steht, heißt Normale; sie bildet mit der x -Achse den Winkel $(90^\circ + \tau)$. Im engeren Sinne versteht man unter Normale den Abschnitt $P_1 N_1$ der geraden Linie zwischen der x -Achse und dem Berührungspunkt P_1 .

12. Die Gleichung der Normalen siehe S. 162.

13. Die Projektion $N_1 P_2$ der Normalen auf die x -Achse heißt Subnormale.

14. Verlängert man $N_1 P_1$ bis zum Schnittpunkt N_2 mit der Senkrechten OT_2 , so ist $N_2 P_1$ die Polarnormale.

15. Ihre Projektion ON_2 auf die Senkrechte heißt Polarsubnormale.

16. Länge der Polarnormalen und Polarsubnormalen siehe S. 165.

17. Berührt eine Tangente die Kurve in einem unendlich fernen Punkt, so heißt sie Asymptote. Man sagt: eine Kurve nähert sich einer Kurve asymptotisch, wenn sich beide in der Unendlichkeit berühren.

18. Über Berührung siehe S. 164.

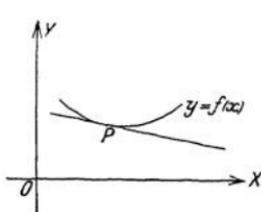


Fig. 6.

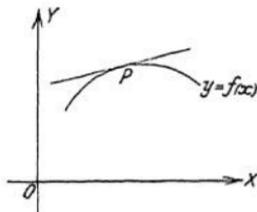


Fig. 7.

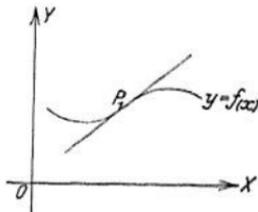


Fig. 8.

19. Eine Kurve ist in dem Punkte P (Fig. 6) nach oben konkav, wenn die dem Berührungspunkte benachbarten Punkte oberhalb der Tangente liegen (vgl. S. 161).

20. Eine Kurve ist in dem Punkte P (Fig. 7) nach oben konvex, wenn die dem Berührungspunkte benachbarten Punkte unterhalb der Tangente liegen.

21. Geht die Kurve mit wachsendem x von der Konkavität in die Konvexität über (Fig. 8) bzw. umgekehrt, so heißt der Punkt P_1 Wendepunkt; die Tangente in diesem Punkte Wendetangente, vgl. S. 163.

22. Über Doppelpunkte siehe S. 166.

23. Über Krümmungskreis und Krümmungshalbmesser siehe S. 163.
 24. Die Linie, die die Krümmungsmittelpunkte einer Kurve verbindet, heißt Krümmungsmittelpunktskurve oder Evolute.
 25. Die gegebene Kurve heißt Evolvente der Evolute; die Normalen der ursprünglichen Kurve sind Tangenten an die Krümmungsmittelpunktskurve.
 26. Über Bogenlängen siehe S. 189.
 27. Über den Inhalt einer Fläche siehe S. 174.
 28. Über einhüllende Kurven siehe S. 205.
 29. Die Kurve, die eine gegebene Kurvenschar unter einem konstanten Winkel schneidet, heißt Trajektorie; ist der Winkel ein rechter, so heißt sie orthogonale Trajektorie (vgl. S. 205).

b) Die Kegelschnitte.

Wird ein gerader Kreiskegel von einer Ebene geschnitten, so heißt die Durchdringungskurve Kegelschnitt; sie wird dargestellt durch eine Gleichung zweiten Grades zwischen den Veränderlichen x und y .

1. Der Kreis.

Die allgemeine Gleichung für Parallelkoordinaten lautet (Fig. 9):

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Liegt der Koordinatenanfangspunkt im Mittelpunkt, so ergibt sich die Mittelpunkts-gleichung, da $a = 0$ und $b = 0$ werden, zu:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Liegt der Koordinatenanfangspunkt auf der Kreislinie, so lautet die Scheitelgleichung mit der x -Achse als Durchmesser und der y -Achse als Scheiteltangente infolge $a = -r$ und $b = 0$:

$$y^2 = 2rx - x^2.$$

Löst man die Klammern der allgemeinen Gleichung auf, so erhält man:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

oder:

$$x^2 + y^2 + c_1x + c_2y + c_3 = 0,$$

wobei:

$$c_1 = -2a \quad \text{bzw.} \quad a = -\frac{1}{2}c_1,$$

$$c_2 = -2b \quad \text{bzw.} \quad b = -\frac{1}{2}c_2,$$

$$c_3 = a^2 + b^2 - r^2 \quad \text{bzw.} \quad r = \sqrt{a^2 + b^2 - c_3}.$$

Die Wurzel ist reell, solange $a^2 + b^2 > c_3$ ist.

Für die Kreisgleichung charakteristisch sind die gleichen Koeffizienten der quadratischen Glieder und das Fehlen des Produktes $x \cdot y$.

Die Polargleichung für die Achse OM als Polarachse und O als Pol lautet:

$$\rho^2 - 2\rho f \cdot \cos \varphi + f^2 = r^2,$$

wobei ρ den Leitstrahl bezeichnet.

Die Gleichung der Tangente im Punkte $P_1(x_1, y_1)$ lautet für den Fall der Mittelpunktsgleichung:

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = r^2,$$

für den Fall der allgemeinen Gleichung:

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2.$$

Umfang und Inhalt der Kreisfläche siehe S. 100.

Inhalt der Kreisausschnitte siehe S. 100.

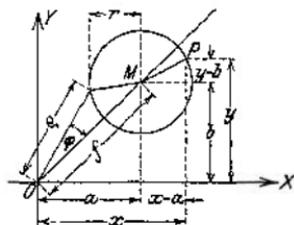


Fig. 9.

2. Die Parabel.

Bildungsgesetz: Ein Punkt P (Fig. 10) bewege sich so, daß seine Entfernungen von einem festen Punkte F — dem Brennpunkt — und einer festen Geraden L — der Leitlinie — gleich groß sind; d. h. $PF = PD$.

Scheitelgleichung: $y^2 = 2px$; $2p$ = Parameter ist die von der Kurve abgeschlossene Ordinate im Brennpunkt. Die Entfernung des Brennpunktes von der Leitlinie ist p , der Anfangspunkt O halbiert diese Entfernung.

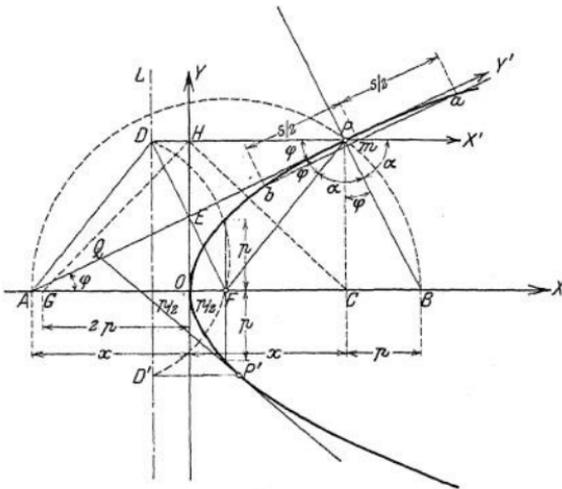


Fig. 10.

Konstruktion: Ziehe den beliebigen Strahl GH ; CH senkrecht GH , dann schneiden sich die Horizontale durch H und die Vertikale durch C im Parabelpunkte P ; die Entfernung OG ist gleich $2p$.

Eigenschaften der Parabel: Die zur X -Achse parallele Gerade PX' heißt Durchmesser der Parabel, sie halbiert alle Sehnen ab , die der Tangente AP parallel sind. Die Tangente AP halbiert im Punkte E die Strecke $OH = y$

und steht senkrecht auf FE . Die Subtangente AC ist gleich $2x$. Die Gerade BP ist Normale, die Subnormale BC ist gleich p . Der von dem Brennpunkt F und dem Durchmesser PX' gebildete Winkel wird von der Normalen PB halbiert.

Die allgemeinere Form der Parabelgleichung lautet:

$$y = a + bx + cx^2$$

sie stellt eine Parabel dar, weil das Glied y^2 fehlt. Um die Lage des Scheitels zu erhalten, bildet man die quadratische Ergänzung zu $x^2 + \frac{b}{c} \cdot x$ und erhält:

$$x^2 + \frac{b}{c} \cdot x + \left(\frac{b}{2c}\right)^2 = \frac{1}{c} \cdot y - \frac{a}{c} + \left(\frac{b}{2c}\right)^2$$

oder:

$$c \left(x + \frac{b}{2c}\right)^2 = y - a + \frac{b^2}{4c}$$

Setzt man:

$$x + \frac{b}{2c} = x' \quad \text{und} \quad y - a + \frac{b^2}{4c} = y',$$

so ergibt sich:

$$y' = cx'^2.$$

Für das neue $x'y'$ -System ist dies die Scheitelgleichung einer Parabel, die symmetrisch zur y' -Achse liegt. Der Koordinatenanfangspunkt des neuen Systems hat in Beziehung auf das alte die Koordinaten

$$x_0 = -\frac{b}{2c} \quad \text{und} \quad y_0 = a - \frac{b^2}{4c}.$$

Hat x^2 einen negativen Koeffizienten, so öffnet sich die Parabel nach unten, ihr Scheitel ist der höchste Punkt.

Sonderfälle: 1. Sind Tangente und Durchmesser Koordinatenachsen, die unter dem Winkel φ gegeneinander geneigt sind, so lautet die Gleichung der Parabel in Beziehung auf dieses $X'Y'$ -System

$$y'^2 = \frac{2p}{\sin^2 \varphi} \cdot x' = 2p' x'.$$

Der Durchmesser PX' heißt der der Richtung PY' zugeordnete Durchmesser.

2. Vertauscht man x - und y -Achse, so lautet die Gleichung der Parabel

$$2py = x^2 \quad \text{oder} \quad y = \frac{1}{2p} x^2.$$

Soll die Kurve durch den Punkt $P_1(x_1, y_1)$ gehen, so lautet ihre Gleichung

$$y = y_1 \cdot \frac{x^2}{x_1^2}.$$

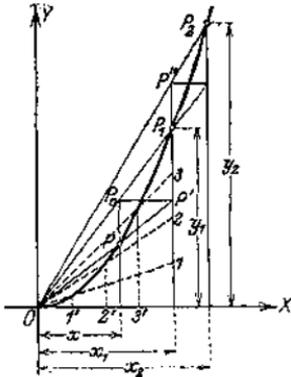


Fig. 11.

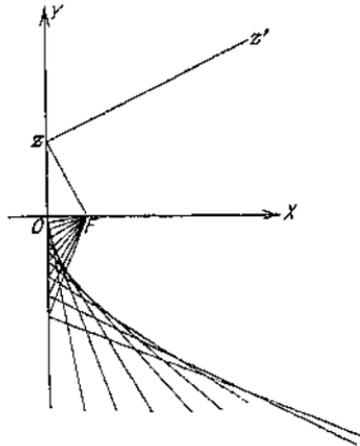


Fig. 12.

Konstruktion: projiziere den beliebigen Punkt P_0 (Fig. 11) der Geraden OP_1 , dessen Abszisse x ist, auf die gegebene Ordinate y_1 ; verbinde P' mit dem Anfangspunkt O , dann schneidet OP' die Ordinate P_0 im Parabelpunkte P . Daraus folgt die Konstruktion: teile die gegebenen Koordinaten x_1 und y_1 in eine gleiche Anzahl gleicher Teile, ziehe das Strahlenbüschel $OI, 2, 3$, dann schneiden die Ordinaten $1, 2, 3$ die entsprechenden Strahlen in Punkten der Kurve.

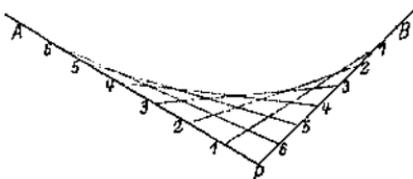


Fig. 13.

3. Gegeben der Scheitel O (Fig. 12) und der Brennpunkt F :

ziehe den beliebigen Strahl Fz und mache $zz' \perp Fz$, dann ist zz' Tangente an die Parabel. (Hüllkonstruktion.)

4. Gegeben zwei Tangenten PA und PB ; die Punkte A und B seien die Berührungspunkte. Teile beide Strecken in die gleiche Anzahl gleicher Teile (Fig. 13) und verbinde die entsprechenden Punkte, dann sind die Geraden $11; 22; 33 \dots$ Tangenten an die Parabel.

Das rechtwinklige Achsenkreuz, bei dem die y -Achse Scheiteltangente der Kurve ist, wird in folgender Weise gefunden: halbiere AB in C (Fig. 14), verbinde P mit C , dann ist PC Durchmesser der Parabel, der Halbierungspunkt D ist ein Punkt der Kurve. Die x -Achse läuft PC

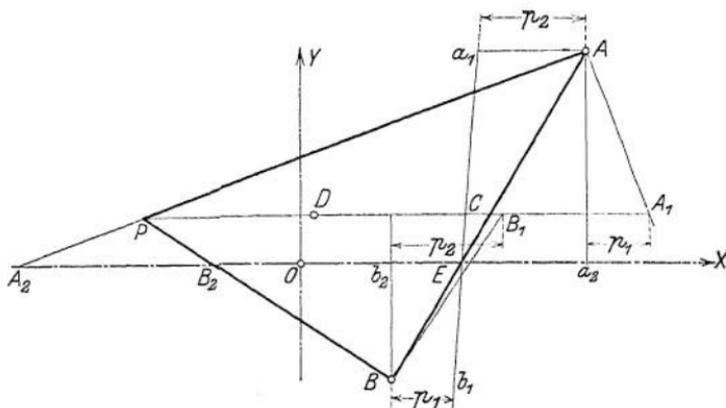


Fig. 14.

parallel, die Subnormalen — d. h. die Projektionen auf die x -Achse — müssen gleich sein. Ziehe durch A und B zu dem Durchmesser PC Parallelen, mache $A a_1 = p_2 =$ der Projektion der Normalen BB_1 auf den Durchmesser und $B b_1 = p_1 =$ der Projektion der Normalen AA_1 auf den Durchmesser, dann schneidet $a_1 b_1$ die Sehne AB im Punkte E der x -Achse, die parallel PC läuft. Der Anfangspunkt O halbiert die Subnormalen $a_2 A_2$ und $B_2 b_2$.

5. Die Kurve verlaufe nach Fig. 15, die Pfeilhöhe sei f , dann lautet die Gleichung

$$y = \frac{4f}{l^2} \cdot x(l-x) \quad \text{oder} \quad y = \frac{4f}{l} \cdot \frac{x(l-x)}{l}$$

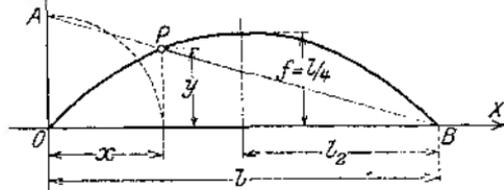


Fig. 15.

Bezeichnet man mit $\frac{4f}{l}$ den Faktor — Multiplikator — mit dem die Ordinaten der Kurve

$$y = \frac{x(l-x)}{l}$$

multipliziert werden müssen, so ergibt sich für diese eine einfache Konstruktion: schlage mit x um den Anfangspunkt O einen Kreis, so daß $OA = x$, dann schneidet die Gerade AB die Ordinate in x im Parabelpunkt P ; die Pfeilhöhe wird für diesen Fall $f = \frac{l}{4}$.

Ist x ein Bruchteil von l , d. h. $\frac{x}{l} = \frac{1}{n}$, so wird die m te Ordinate

$$y_m = \frac{4f}{n^2} \cdot m(n-m)$$

Da es bei den technischen Kurven häufig weniger auf den strengen mathematischen Verlauf als auf die Größe der Ordinaten ankommt, so empfiehlt sich eine Zerlegung der gegebenen Funktion in Einzelfunktionen.

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$$

läßt sich schreiben

$$y = 4f \cdot \frac{x}{l} - 4f \cdot \frac{x^2}{l^2} = y' - y'',$$

wobei $y' = 4f \cdot \frac{x}{l}$ eine Gerade durch den Anfangspunkt, $y'' = 4f \cdot \frac{x^2}{l^2}$ eine Parabel darstellen, die symmetrisch zur y -Achse liegt und durch den Punkt $P_0(x_0 = l; y_0 = 4f)$ geht. (Fig. 16). Die Differenz beider Ordinaten gibt die gesuchte Ordinate y . Diese Zerlegung empfiehlt sich bei Kurven höheren Grades (vgl. S. 128).

Polargleichung: Ist der Brennpunkt F Pol, die — negative — Richtung der X -Achse Polarachse, so lautet die Gleichung

$$r = \frac{p}{1 + \cos \varphi} = \frac{p}{2 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi}.$$

Gleichung der Tangente: Ist $P_1(x_1, y_1)$ ein Punkt der Parabel, so heißt die Gleichung der Tangente durch diesen Punkt an die Kurve

$$y \cdot y_1 = p(x + x_1).$$

Gleichung der Normalen:

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1).$$

Konstruktion einer Tangente an die Parabel.

1. In einem Punkte P (Fig. 10): man mache $OA = OC$, dann ist AP Tangente, oder: man halbiere OH in E , dann ist EP Tangente.

2. Von einem Punkte Q außerhalb der Parabel: man beschreibe mit QF um Q einen Kreis, der die Leitlinie in D und D' schneidet, ziehe durch D und D' Parallelen zur x -Achse, dann sind P und P' Berührungspunkte der Tangenten QP und QP' .

3. Die Ellipse.

Bildungsgesetz: ein Punkt P bewege sich so, daß die Summe $2a$ seiner Entfernungen von zwei festen Punkten — den Brennpunkten — F und F_1 konstant ist; d. h. $P_1F + P_1F_1 = 2a$.

Für die Hauptachsen als Koordinatensystem (Fig. 17) lautet die Mittelpunktsgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

wobei $OA = a$ und $OB = b$ die Halbachsen sind.

Die entwickelte Form der Gleichung heißt

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

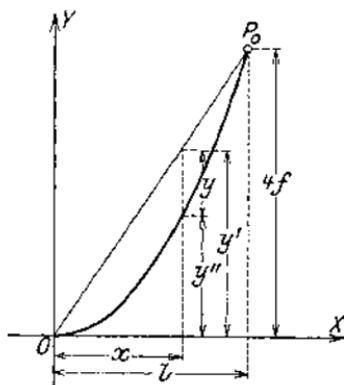


Fig. 16.

Ist die y -Achse Scheiteltangente im Punkte A_1 , so heißt die Scheitelgleichung der Ellipse

$$y^2 = 2 \frac{b^2}{a} \cdot x - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2.$$

Mit $p = \frac{b^2}{a}$ als Halbparameter — Ordinate im Brennpunkte — wird

$$y^2 = 2 p x - \frac{p \cdot x^2}{a}.$$

Eigenschaften der Ellipse:

Ist $2e$ die Entfernung der Brennpunkte, so besteht zwischen e und den Halbachsen a und b die Beziehung

$$OF = OF_1 = e = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

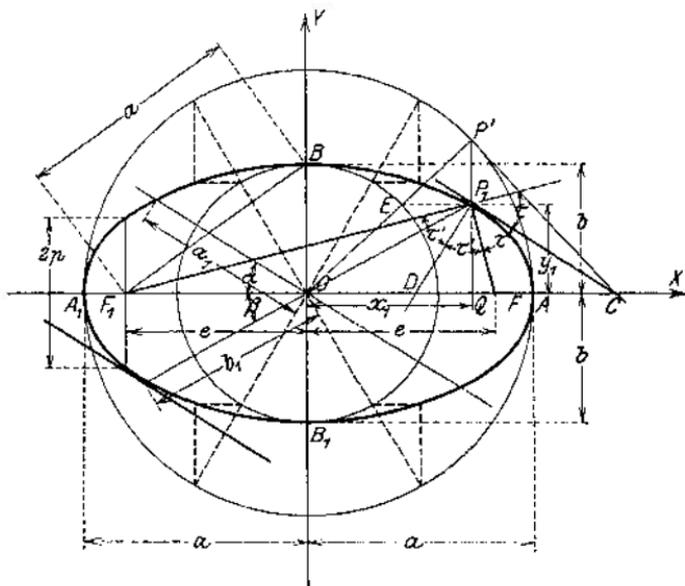


Fig. 17.

Das Verhältnis

$$\frac{OF}{OA} = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \varepsilon$$

heißt die numerische Exzentrizität.

Zieht man von einem beliebigen Punkte P_1 die Brennstrahlen P_1F und P_1F_1 , so ist

$$P_1F = a - \varepsilon x; \quad P_1F_1 = a + \varepsilon x.$$

Die Ordinate im Brennpunkte ist $p = (1 - \varepsilon^2) \cdot a = \frac{b^2}{a}$.

Die von der Kurve abgeschnittene Vertikale durch die Brennpunkte heißt Parameter und ist gleich $2p$.

Geraden durch den Mittelpunkt heißen Durchmesser; sie sind zugeordnet (konjugiert) wenn der eine alle Sehnen halbiert, die zu dem andern parallel sind. Bilden sie mit der großen Hauptachse $2a$ die Winkel α und β — in Fig. 17 sind $2a_1$ und $2b_1$ konjugierte Durchmesser — so ist, wenn beide Winkel spitz sind,

$$a^2 + b^2 = a_1^2 + b_1^2.$$

In Beziehung auf die zugeordneten Durchmesser als Koordinatenachsen lautet die Gleichung der Kurve:

$$\frac{\xi^2}{a_1^2} + \frac{\eta^2}{b_1^2} = 1.$$

Tangente und Normale halbieren die Winkel, die von den Leitstrahlen gebildet werden.

Konstruktionen der Ellipse.

1. Aus der Bedingung

$$P_1F + P_1F_1 = r + r_1 = 2a$$

ergibt sich die Fadenkonstruktion, wenn die Brennpunkte F und F_1 gegeben sind.

2. Sind die Halbachsen a und b bekannt, so schlage man mit a und b als Radien Kreise um den Mittelpunkt O ; ziehe einen beliebigen Strahl OP' , projiziere den Schnittpunkt E auf die Vertikale durch P' , dann ist P_1 ein Punkt der Ellipse.

3. Teile den Radius b des kleinen Scheitelkreises (Fig. 18) in n gleiche Teile und ebenso die halbe große Achse a der zu konstruierenden Ellipse — in der Fig. 18 ist $n = 4$ — und projiziere die Kreispunkte auf die Ordinaten über a , dann liegen die Schnittpunkte auf einer Ellipse.

4. Wanderu die Endpunkte A und B (Fig. 19) einer Strecke $a + b$ auf zwei aufeinander senkrecht stehenden Geraden, so beschreibt der Punkt P eine Ellipse (vgl. S. 126). Stangenkonstruktion — Ellipsenzirkel.

5. Wälzt sich ein Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}r$ (Fig. 20) bei Innenberührung auf einem Kreise mit dem Radius r ab, dann beschreibt ein Punkt P des Durchmessers AB eine Ellipse (Cardanische Kreise).

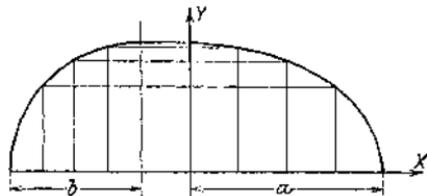


Fig. 18.

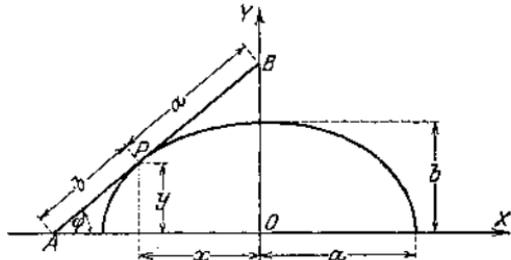


Fig. 19.

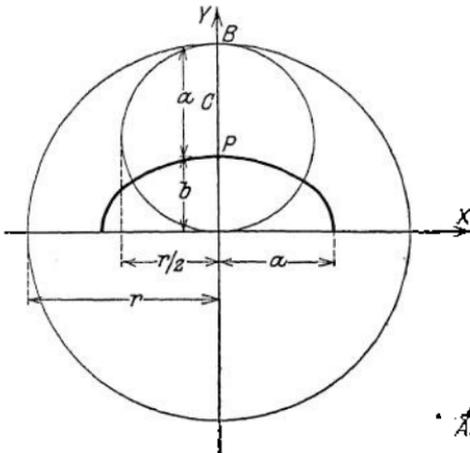


Fig. 20.

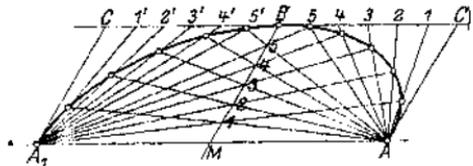


Fig. 21.

6. Sind MA und MB (Fig. 21) zwei zugeordnete Halbmesser einer Ellipse, so ziehe man die Tangenten durch die Endpunkte der Durchmesser parallel MA und MB ; teile BC und BM in die gleiche Anzahl gleicher Teile und ziehe durch die Teilpunkte aus A_1 und A Strahlen, dann liegen die Schnittpunkte entsprechender Strahlen auf einer Ellipse.

Die Polargleichung der Ellipse, bezogen auf den Brennpunkt F als Pol und FA als Polarachse, lautet

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \varphi}.$$

Die Gleichung der Tangente im Punkte $P_1(x_1, y_1)$ der Ellipse lautet:

$$\frac{x \cdot x_1}{a^2} + \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1.$$

Die Gleichung der Normalen

$$\frac{x - x_1}{b^2 x_1} - \frac{y - y_1}{a^2 y_1} = 0.$$

Konstruktion der Tangente in P_1 .

1. Halbiere den Winkel $F_1 P_1 F$ (Fig. 17) der Leitstrahlen und ziehe $CP_1 \perp DP_1$. Oder (Fig. 17) konstruiere in P' des Kreises mit der großen Halbachse die Kreistangente CP' , dann ist CP_1 Tangente an die Ellipse.

2. Von einem Punkte R außerhalb (Fig. 22). Man beschreibe um R mit RF und um F_1 mit $2a$ Kreise, verbinde ihren Schnittpunkt S mit F_1 , dann ist T der Berührungspunkt der Tangente.

Konstruktion der Hauptachsen einer Ellipse aus zwei zugeordneten Durchmessern (Fig. 23). $OD = OD' = a_1$ und $OP = OP' = b_1$; ziehe $PE \perp OD$, mache $PC = PC_1 = OD = a_1$, dann gibt die Winkelhalbierende des Winkels $C_1 OC$ die Lage der

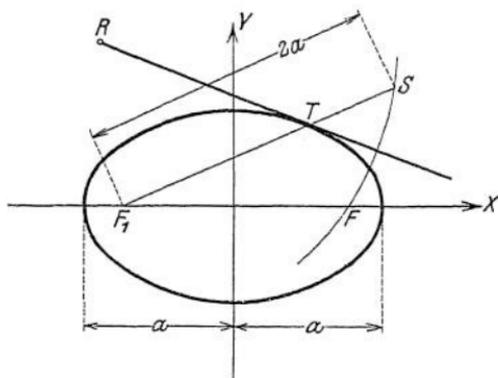


Fig. 22.

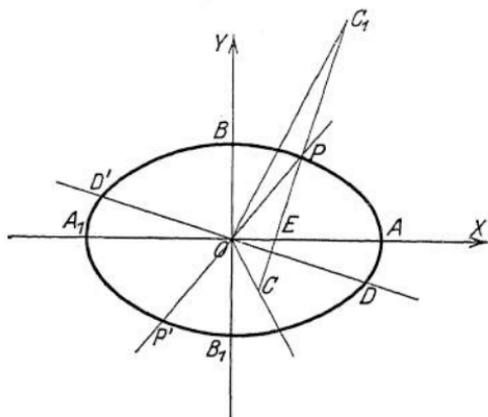


Fig. 23.

Hauptachsen, ihre Längen sind

$$2a = OC_1 + OC; \quad 2b = OC_1 - OC.$$

4. Die Hyperbel.

Bildungsgesetz: Ein Punkt P bewege sich so, daß die Differenz $2a$ seiner Entfernungen von zwei festen Punkten — den Brennpunkten — F und F_1 konstant ist; d. h. $P_1 F_1 - P_1 F = 2a$.

Für die Hauptachsen als Koordinatensystem (Fig. 24) lautet die Mittelpunktsleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

wobei a und b die Halbachsen sind.

Die entwickelte Form der Gleichung heißt

$$y = \pm \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Ist die y -Achse Scheiteltangente im Punkte A_1 , so heißt die Scheitelgleichung der Hyperbel

$$y^2 = 2 \frac{b^2}{a} \cdot x + \frac{b^2}{a^2} x^2.$$

Mit $p = \frac{b^2}{a}$ als Halbparameter — Ordinate im Brennpunkte — wird

$$y^2 = 2p x + \frac{p x^2}{a}.$$

Eigenschaften der Hyperbel:

Ist $2e$ die Entfernung der Brennpunkte, so besteht zwischen e und den Halbachsen a und b die Beziehung

$$OF = OF_1 = e = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$\varepsilon = \frac{e}{a}$ heißt die numerische Exzentrizität.

Die Länge der Brennstrahlen ist

$$P_1 F = -a + \varepsilon x; \quad P_1 F_1 = a + \varepsilon x.$$

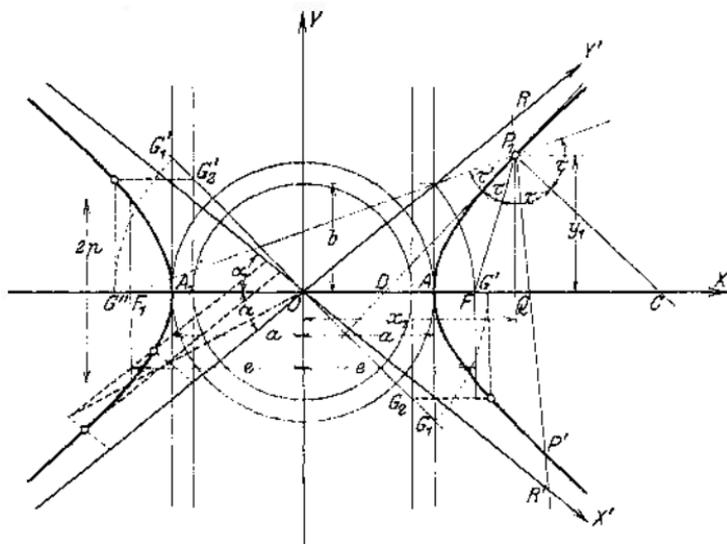


Fig. 24.

Die Erläuterungen über Durchmesser und konjugierte Durchmesser siehe unter 3. Ellipse.

Die Gleichung der Hyperbel bezogen auf die konjugierten Durchmesser als Koordinatenachsen lautet

$$\frac{\xi^2}{a_1^2} - \frac{\eta^2}{b_1^2} = 1.$$

Bilden zwei symmetrische Durchmesser der Hyperbel mit der X -Achse den Winkel α , der durch die Gleichung $\operatorname{tg} \alpha = b/a$ bestimmt ist, so nähert sich die Kurve diesen Geraden, ohne sie im Endlichen zu erreichen; diese Geraden heißen Asymptoten (Fig. 24); ihre Gleichungen lauten

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0.$$

Die Abschnitte einer Sekante zwischen Kurve und Asymptote sind gleich,

$$P_1 R = P' R'.$$

Daraus folgt eine einfache Konstruktion der Hyperbel, wenn ein Punkt und die Asymptoten gegeben sind (siehe Konstruktionen der Hyperbel Nr. 3).

Die auf die Asymptoten als Koordinatenachsen bezogene Gleichung der Hyperbel lautet

$$x' y' = \frac{1}{4} (a^2 + b^2) = \left(\frac{e}{2}\right)^2.$$

Konstruktionen der Hyperbel:

1. Aus der Bedingung $P_1 F_1 - P_1 F = r_1 - r = 2a$ ergibt sich die Konstruktion (Fig. 25), wenn die Brennpunkte gegeben sind: mache $FB = 2a$, schlage mit dem beliebigen Radius $F A_1 = r$ um F einen Kreis, der von einem Kreise mit dem Radius $B A_1 = r - 2a$ um F_1 in den Hyperbelpunkten P_1 und P'_1 geschnitten wird. Der Kreis mit $OF = OF_1 = e$ um O schneidet die Vertikale durch C ($OC = a$) in den Punkten D, D' , dann sind die Geraden durch O und D Asymptoten der Hyperbel.

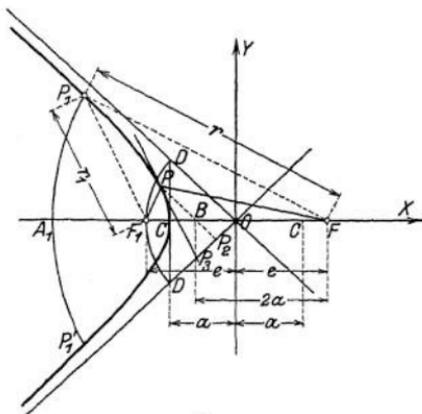


Fig. 25.

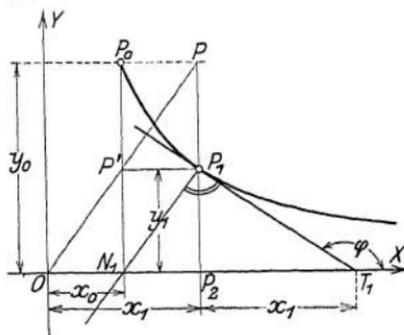


Fig. 26.

2. Sind die Halbachsen a und b gegeben, so ziehe man die vertikalen Tangenten an die Scheitelkreise (Fig. 24). Ein beliebiger Strahl aus dem Anfangspunkt schneide die beiden Geraden G_1 und G_2 (bzw. G'_1 und G'_2); schlage mit OG_1 um O einen Kreis, der die X -Achse in G' schneide, dann liefern die Horizontale durch G_2 und die Vertikale durch G' einen Hyperbelpunkt.

3. Sind die Asymptoten und ein Punkt P_1 der Hyperbel gegeben (Fig. 24), so ziehe man ein Strahlenbündel durch P_1 und mache auf dem beliebigen Strahl $P_1 R = R' P'$, dann ist P' ein Hyperbelpunkt.

4. Die Konstruktion der Hyperbel, die durch die Asymptoten und einen Punkt gegeben ist, mit Hilfe flächengleicher Parallelogramme zeigt Fig. 24 im dritten Quadranten.

Sonderfälle. Gleichseitige Hyperbel; ihre Mittelpunktsgleichung lautet, da $b = a$ wird,

$$x^2 - y^2 = a^2;$$

bezogen auf die Asymptoten als Achsen ergibt sich

$$x' y' = \frac{1}{2} a^2.$$

Die Asymptoten stehen senkrecht aufeinander, der Asymptotenwinkel ist $\alpha = 45^\circ$; die Abszissen der Brennpunkte werden $e = \pm a\sqrt{2}$; der Parameter ist $2p = 2a$.

Ist $P_0(x_0, y_0)$ ein Punkt der gleichseitigen Hyperbel mit den Asymptoten als Koordinatenachsen, so lautet die Gleichung der Kurve

$$xy = x_0 y_0.$$

Aus der Bedingung flächengleicher Rechtecke ergibt sich die Konstruktion (Fig. 26); ziehe einen beliebigen Strahl OP so, daß $P_0 P$ parallel zur X -Achse wird, der Strahl schneide die gegebene Ordinate y_0 in P' ; die Horizontale durch P' und die Vertikale durch P schneiden sich in einem Punkte P_1 der gleichseitigen Hyperbel.

$T_1 P_1$ ist Tangente an die Kurve.

Die Polargleichung der Hyperbel bezogen auf den Brennpunkt F als Pol (Fig. 24) und FA als Polarachse lautet

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi}.$$

Die Gleichung der Tangente im Punkte $P_1(x_1, y_1)$ der Hyperbel heißt

$$\frac{x \cdot x_1}{a^2} - \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1.$$

Die Gleichung der Normalen

$$\frac{x - x_1}{b^2 \cdot x_1} + \frac{y - y_1}{a^2 \cdot y_1} = 0.$$

Tangente und Normale halbieren die Winkel, die von den Brennstrahlen (Leitstrahlen) gebildet werden.

Konstruktion der Tangente in P : ziehe durch den Hyperbelpunkt P eine Parallele $P P_2$ zu der Asymptote, mache $P_2 O = P_2 P_3$, dann ist $P P_3$ Tangente an die Kurve (Fig. 25).

5. Gemeinsamer Ursprung der Kegelschnitte.

Die Parabel ist der geometrische Ort für Punkte, deren Entfernungen von einem festen Punkte und einer festen Geraden gleich groß sind. Nennt man das Verhältnis beider Strecken ε , so ist bei der Parabel $\varepsilon = 1$.

Konstruiert man bei der Ellipse (Fig. 27) zwei Parallelen zur Y -Achse, deren Entfernung vom Anfangspunkt $a^2 : \varepsilon$ ist, dann ist

$$PA_1 = \frac{a^2}{\varepsilon} + x;$$

$$PA_2 = \frac{a^2}{\varepsilon} - x.$$

Die Länge der Brennstrahlen ist

$$PF_1 = r_1 = a + \varepsilon x = \varepsilon \left(\frac{a^2}{\varepsilon} + x \right).$$

$$PF = r = a - \varepsilon x = \varepsilon \left(\frac{a^2}{\varepsilon} - x \right)$$

und daraus

$$\varepsilon = \frac{r_1}{PA_1} = \frac{r}{PA_2} < 1.$$

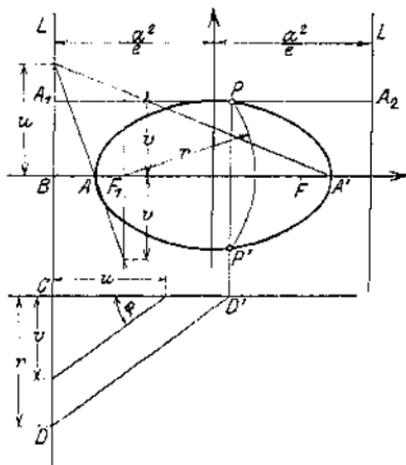


Fig. 27.

Die Parallelen zur Y -Achse in der Entfernung $a^2 : \varepsilon$ heißen Leitlinien der Ellipse, deren Brennstrahlen demnach zu den Entfernungen von den Leitlinien in einem konstanten Verhältnis stehen. Die gleichen Beziehungen gelten für die Hyperbel, doch ist hier $\varepsilon > 1$ (Fig. 28).

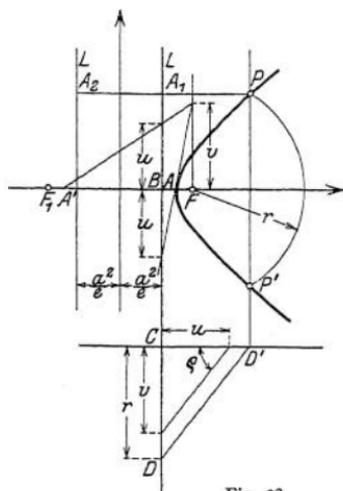


Fig. 28.

Beim Kreise ist F der Mittelpunkt, und die Leitlinie liegt im Unendlichen; d. h. $\varepsilon = 0$.

Aus den gemeinsamen analytischen Beziehungen ergeben sich Konstruktionen, die identisch sein müssen. Gegeben seien: die Leitlinie L , der Brennpunkt F , das konstante Verhältnis $\varepsilon = \text{tg } \varrho = v : u$.

Trage auf der Leitlinie L eine beliebige Strecke CD ab, ziehe unter dem Winkel ϱ , dessen Tangente gleich ε ist, die Gerade DD' (Fig. 27—29). Dann schneidet der Kreis mit $CD = r$ um F die Senkrechte in D' in zwei Kurvenpunkten P und P' .

Die Scheitel A und A' teilen FB harmonisch.

Geometrisch gedeutet stellen sich die Kegelschnitte als Durchdringungskurven von Ebene und geradem Kreiskegel dar (Fig. 30). Der Neigungswinkel der Ebene

AI gegen die Horizontale ist $\varphi_1 = 0$, die Durchdringungskurve ist ein Kreis. Ebenen, deren Neigungswinkel $\varphi_2 < \alpha$ ist, geben Ellipsen; für die

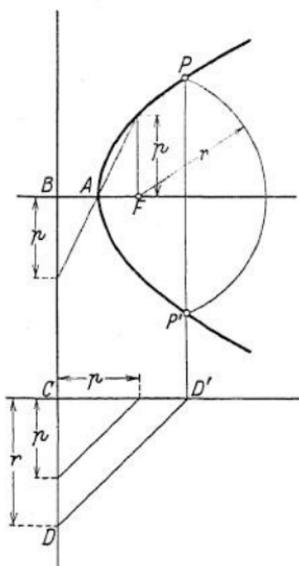


Fig. 29.

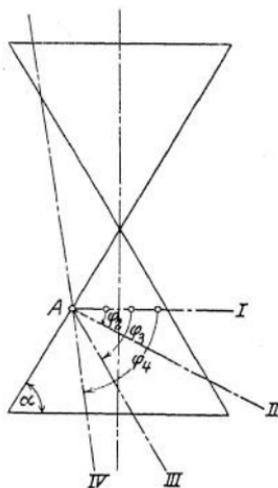


Fig. 30.

Ebene $A III$ ist $\varphi_3 = \alpha$, die Durchdringungskurve ist eine Parabel; Ebenen, deren Neigungswinkel $\varphi_4 > \alpha$ ist, geben Hyperbeln. Die numerische Exzentrizität ist

$$\varepsilon = \sin \varphi : \sin \alpha .$$

6. Beispiele.

1. Gegeben sei die Gleichung

$$y = -\frac{bx}{x+a} \quad \text{bzw.} \quad xy + ay - bx = 0.$$

Da für $x+a=0 \dots y=\infty$ und für $y-b=0 \dots x=\infty$ werden, setzt man

$$x' = x + a, \quad \text{d. h.} \quad x = x' - a,$$

$$y' = y - b, \quad \text{d. h.} \quad y = y' + b$$

und bezieht die Gleichung auf das $x'y'$ -System, dessen Anfangspunkt die Koordinaten $x_0 = -a$; $y_0 = b$ hat; es ergibt sich

$$(x' - a)(y' + b) + a(y' + b) - b(x' - a) = 0 \quad \text{oder} \quad x' \cdot y' = -ab.$$

Das ist die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, bezogen auf die Asymptoten als Achsen; die beiden Zweige liegen im zweiten bzw. vierten Quadranten, sie gehen durch die Punkte $P_0(x_0' = +a; y_0' = -b)$ bzw. $P_1(x_1' = -a; y_1' = b)$ in Beziehung auf das $x'y'$ -System (Fig. 31).

Bemerkung: Setzt man $b=1$; $x=A_N$ (Nutzarbeit), $a=B$ (Verlustarbeit), so ist $y = \eta = -\frac{A_N}{A_N + B}$ die Gleichung für den Wirkungsgrad einer Maschine.

2. Gegeben ist die Gleichung (siehe unter 1) $x'y' = -ab$, sie ist auf die rechtwinkligen Koordinatenachsen x, y so zu beziehen, daß das Produkt $x \cdot y'$ verschwindet.

Da das Produkt der beiden Variablen bei einer Drehung des Achsenkreuzes verschwindet, so setzt man

$$x' = v \cdot \cos \alpha + u \cdot \sin \alpha = (v + u) \cdot \cos \alpha,$$

$$y' = v \cdot \sin \alpha - u \cdot \cos \alpha = (v - u) \cdot \sin \alpha,$$

wobei

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{b}{a}$$

ist; d. h. das $x'y'$ -System wird um einen Winkel α nach der negativen Richtung der y' -Achse gedreht. Mit diesen Werten ergibt sich $(v^2 - u^2) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -ab$.

Die Beziehungen

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

liefern

$$-(v^2 - u^2) \frac{ab}{a^2 + b^2} = -ab \quad \text{oder} \quad v^2 - u^2 = a^2 + b^2 = c^2.$$

Das ist die Mittelpunktsgleichung einer gleichseitigen Hyperbel.

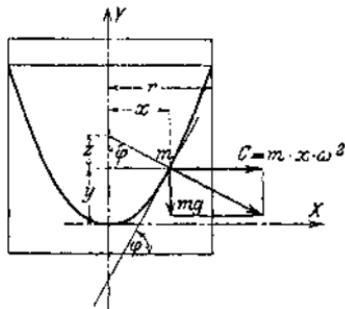


Fig. 32.

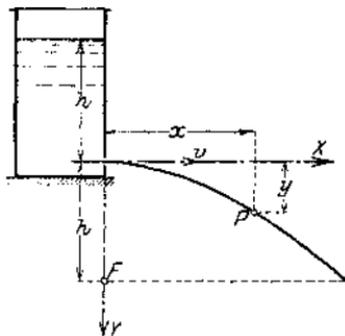


Fig. 33.

2a. Ein zylindrisches, mit Flüssigkeit gefülltes Gefäß rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die vertikale Achse. Ein Masseneteilchen m steht unter dem Einfluß der Schwerkraft mg und der Zentrifugalkraft $m x \omega^2$. Die Resultante beider Kräfte ist Normale der Kurve. Mit den Bezeichnungen der Fig. 32 wird

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m x \omega^2}{m g} = \frac{x}{z} \quad \text{oder} \quad z = \frac{g}{\omega^2} = \text{konst.}$$

Da die Subnormale einen konstanten Wert hat, ist die Kurve eine Parabel

$$y = 2zx^2 = 2 \cdot \frac{g}{\omega^2} \cdot x^2.$$

3. Es ist die Bahn eines aus einem Gefäß horizontal heraustretenden Wasserstrahles zu bestimmen unter der Voraussetzung einer konstanten Druckhöhe und reibungsfreien Austrittes, der Luftwiderstand werde vernachlässigt (Fig. 33). Die Wahl des Achsenkreuzes zeigt die Abbildung. Die Horizontalverschiebung eines Wassertropfens in der Zeit t ist $x = v \cdot t$, wenn v die konstante Austrittsgeschwindigkeit bedeutet. Die Größe der gleichzeitigen Vertikalverschiebung infolge der Schwerkraft ist

$$y = \frac{1}{2} g t^2.$$

Die Elimination von t ergibt $x^2 = 2 \cdot \frac{v^2}{g} \cdot y$.

Das ist aber die Scheitelform einer zur y -Achse symmetrischen Parabel mit dem Parameter

$$2p = 2 \cdot \frac{v^2}{g}.$$

Da die Austrittsgeschwindigkeit bei konstanter Höhe des Wasserspiegels $v = \sqrt{2gh}$ ist, $\frac{v^2}{g} = 2h$, folglich $p = 2h$, d. h. die Leitlinie fällt mit dem Wasserspiegel zusammen, der Brennpunkt liegt um die Höhe h unter der Austrittsöffnung; damit läßt sich die Kurve ohne das Hilfsmittel der Rechnung — natürlich unter Zugrundelegung eines Längenmaßstabes — entwerfen.

4. Ein Träger auf zwei Stützen sei mit gleichförmig verteilter Last $-q \text{ kg/m}$ belastet; die Momentenlinie ist zu entwerfen (Fig. 34). Ein Punkt senkrecht unter A sei Koordinatenanfangspunkt, dann ist

$$y = M_x = Ax - q \cdot x \cdot \frac{x}{2},$$

wenn man die gleichförmige Last über x im Schwerpunkte S vereinigt denkt. Mit $A = B = \frac{ql}{2}$ wird $y = \frac{q}{2} \cdot x(l-x) = \frac{ql}{2} \cdot \frac{x(l-x)}{l}$.

Diese Gleichung stellt eine Parabel dar nach (Fig. 15), ihr Multiplikator ist: $\mu = \frac{ql}{2} = A$, d. h. multipliziert man die im Längenmaß gemessenen Ordinaten y mit der Auflagerreaktion A , so erhält man das Moment im Punkte x des Trägers.

Soll der Multiplikator $\mu = \frac{ql}{2}$ vermieden werden, so läßt sich die Gleichung auch schreiben:

$$y = \frac{ql}{2} \cdot l \cdot \frac{x}{l} - \frac{ql}{2} \cdot l \cdot \frac{x^2}{l^2} = y' - y''.$$

$y' = \frac{ql}{2} \cdot l \cdot \frac{x}{l}$ ist eine Gerade durch den Anfangspunkt, deren Ordinate y' für $x=l$ — also senkrecht unter B — den Wert hat $y'_B = \frac{ql}{2} \cdot l =$ dem Moment der Auflagerreaktion A in Beziehung auf B .

$y'' = \frac{ql}{2} \cdot l \cdot \frac{x^2}{l^2}$ ist eine Parabel, deren Scheitel senkrecht unter A liegt und die symmetrisch zur Y -Achse ist; sie hat für $x=l$ denselben Wert wie y'_B . Die von beiden Kurven eingeschlossene Fläche ist die Momentenfläche; die Größe $y_B' = \frac{q}{2} \cdot l = A \cdot l$ wird im Momentenmaßstab aufgetragen (Fig. 34 c).

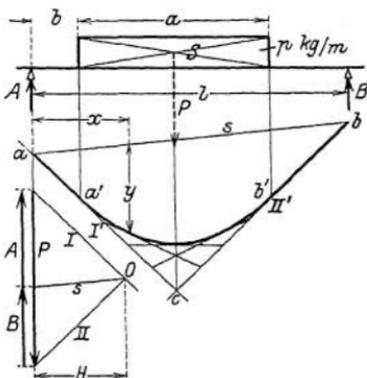


Fig. 35.

5. Es ist die Momentenlinie (Fig. 35) für einen teilweise mit gleichförmig verteilter Last belasteten Balken zu entwerfen. Ist die Gesamtlast $P = p \cdot a$, so kann diese als Einzelkraft im Schwerpunkte S angreifend gedacht werden. P zerlegt sich mit Hilfe des Seilecks in zwei Seitenkräfte A und B ; die Seilstrahlen ca und cb sind Tangenten an die Momentenlinie, die zwischen a' und b' als Parabel verläuft. Es ist $M_x = H \cdot y$, wobei H im Kräftemaßstab,

y im Längenmaßstab zu messen ist. Lautet der Kräftemaßstab $1 \text{ cm} = a \text{ kg}$, der Längenmaßstab $1 \text{ cm} = b \text{ m}$, so wird

$$M_x \text{ mkg} = (H \text{ cm} \cdot a \text{ kg/cm}) \cdot (y \text{ cm} \cdot b \text{ m/cm}) .$$

6. Es ist das Netzwerk eines Halbparabelträgers zu berechnen. Die Gleichung der Parabel für das gewählte Achsenkreuz (Fig. 36) lautet

$$y_m = \frac{4f}{n^2} \cdot m \cdot (n - m) = C \cdot m(n - m) ,$$

$$C = \frac{4f}{n^2} = \frac{4 \cdot 6}{100} = 0,24 ,$$

$$\begin{aligned} y_0 &= 5,5 \text{ m}, \\ y_1 &= 5,5 + 0,24 \cdot 1 \cdot 9 = 7,66 \text{ m}, \\ y_2 &= 5,5 + 0,24 \cdot 2 \cdot 8 = 9,34 \text{ m}, \\ y_3 &= 5,5 + 0,24 \cdot 3 \cdot 7 = 10,54 \text{ m}, \\ y_4 &= 5,5 + 0,24 \cdot 4 \cdot 6 = 11,26 \text{ m}, \\ y_5 &= 5,5 + 0,24 \cdot 5 \cdot 5 = 11,50 \text{ m} \end{aligned}$$

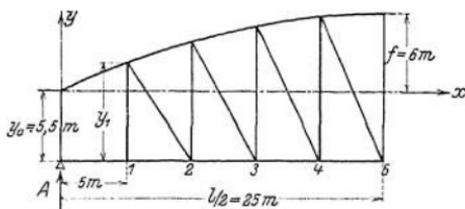


Fig. 36.

7. Ein Massenpunkt m werde unter dem Winkel α gegen die Horizontale mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 nach oben geschleudert; die Wurfbahn ist unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes zu bestimmen (Fig. 37). Die Anfangsgeschwindigkeit zerlegt man nach horizontaler und vertikaler Richtung in $v_0 \cdot \cos \alpha$ bzw. $v_0 \cdot \sin \alpha$. In horizontaler Richtung ist der nach t Sek. bei gleichförmiger Bewegung zurückgelegte Weg

$$x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t . \quad (1)$$

In vertikaler Richtung ist der bei gleichförmig verzögerter Bewegung zurückgelegte Weg

$$y = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 . \quad (2)$$

Setzt man $t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha}$ in Gleichung ein, so wird

$$y = \text{tg } \alpha \cdot x - \frac{g}{2 (v_0 \cdot \cos \alpha)^2} \cdot x^2 . \quad (3)$$

Der Vergleich mit der zu Fig. 15 gehörenden Gleichung

$$y = \frac{4f}{l} \cdot x - 4f \cdot \frac{x^2}{l^2}$$

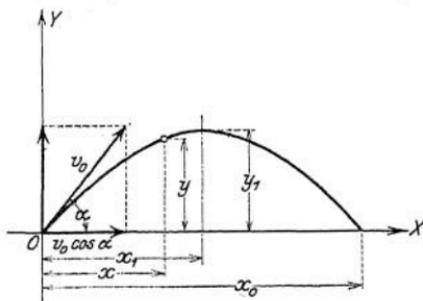


Fig. 37.

lehrt, daß die Wurfbahn eine Parabel ist; bezeichnet man mit f die Wurfhöhe, mit l die Wurfweite, so ergibt die Gleichsetzung der Koeffizienten

$$\text{tg } \alpha = \frac{4f}{l} ; \quad \frac{g}{2 v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{4f}{l^2} = \text{tg } \alpha$$

und daraus

$$l = \frac{2 v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha}{g \cdot \cos \alpha} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha = x_0 .$$

Mit $l^2 = \frac{16 f^2}{\text{tg}^2 \alpha}$ wird $\frac{g}{2 v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{4 f \cdot \sin^2 \alpha}{16 f^2 \cdot \cos^2 \alpha}$ und daraus $f = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g} = y_1$.

8. Ein gleichförmig belasteter Balken ist als Träger gleichen Widerstandes gegen Biegung auszuführen; die Breite des Balkens sei g konst. (Fig. 38). Die obere Begrenzungslinie ist zu entwerfen. Es ist

$$M_x = \frac{q l}{2} x - \frac{q}{2} x^2 .$$

Bezeichnet man die variable Höhe des rechteckigen Querschnittes mit y , dann ist $W_x = \frac{g y^2}{6}$. Die Randspannung

wird $\sigma_x = \frac{M_x}{W_x} = \text{konst.} = k_b$. Daraus ergibt sich

$$W_x \cdot k_b = \frac{q l}{2} x - \frac{q}{2} x^2 \quad \text{oder} \quad \frac{g}{6} \cdot k_b \cdot y^2 = \frac{q l}{2} x - \frac{q}{2} x^2 .$$

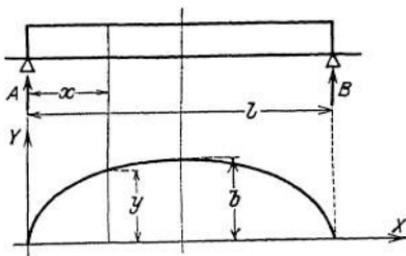


Fig. 38.

Durch Vergleich mit der Scheitelgleichung der Ellipse

$$y^2 = 2 \frac{b^2}{a} \cdot x - \frac{b^2}{a^2} x^2 = 2 p x - \frac{p}{a} \cdot x^2$$

erhält man

$$y^2 = 2 \cdot \frac{3 q l}{2 g k b} \cdot x - \frac{b^2}{a^2} x^2 \quad \text{und daraus} \quad a = \frac{l}{2};$$

$$\text{aus } p = \frac{b^2}{a} = \frac{3 q l \cdot \frac{l}{2}}{2 g k b \cdot \frac{l}{2}} \quad \text{ergibt sich } b^2 = \frac{3 q l^2}{4 g k b} \quad \text{und } b = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{3 q}{g \cdot k b}}.$$

9. Ein gerader Stab werde so geführt, daß A und B (Fig. 39) auf den Achsen wandern; es ist die Bahn des Punktes P zu bestimmen. Mit dem Winkel φ als Hilfsveränderlicher (Parameter) wird

$$x = -a \cdot \cos \varphi; \quad \cos \varphi = -\frac{x}{a}.$$

$$y = b \cdot \sin \varphi; \quad \sin \varphi = \frac{y}{b}.$$

Da $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ ist, wird $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Das ist die Mittelpunkts-gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen a und b .

Umgekehrt kann man sagen: werden A auf einer Geraden und P auf einer Ellipse geführt, dann bewegt sich B auf einer Geraden — Prinzip des Ellipsenlenkers.

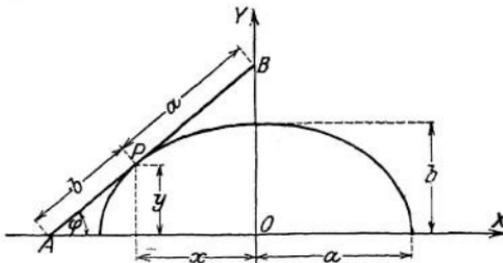


Fig. 39.

Macht man $a = b = r$, dann wandert P auf einem Kreise mit dem Radius r um O — der Stab OP ist der Gegenlenker —, alle übrigen Punkte des Hauptlenkers AB beschreiben Ellipsen, die für die Punkte A und B zu Geraden zusammenschumpfen. Bei dem Evansschen Lenker wird P auf einem Kreise mit dem Radius r geführt, so daß die Geradföhrung des Punktes B vollkommen gewährleistet ist.

Statt den Punkt P auf einer Ellipse zu föhren, genügt es in praktischen Fällen für kleine Wege, die Ellipse durch einen Kreis gleicher Krümmung zu ersetzen. In Fig. 40 sei D , der feste Punkt des Gegenlenkers, Krümmungsmittelpunkt für den Scheitel C der Ellipse. Der Krümmungsradius $CD = DP = \rho$ wird

$$\rho = \frac{b^2}{a} = p.$$

Der Krümmungsmittelpunkt D wird in folgender Weise gefunden: bilde das Rechteck $OCEF$ aus den Halbachsen a und b ; fälle von E auf CF ein Lot, das schneidet die X -Achse in D . Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CEF und DCE folgt

$$CE : EF = CD : CE$$

oder

$$b : a = CD : b.$$

Für kleine Winkel α wird B angenähert auf einer Geraden geführt (angenäherter Ellipsenlenker).

10. Setzt man ein bestimmtes Volumen v_1 eines Gases einem Druck p_1 aus, so besteht — konstante Temperatur während der Zustandsänderung vorausgesetzt — zwischen derselben Gasmenge und einem Druck p_2 die Beziehung

$$p_1 \cdot v_1 = p_2 \cdot v_2,$$

wenn v_2 das Gasvolumen bei dem Druck p_2 bedeutet. Entsprechen den Drucken $p_2, p_1 \dots$ die Volumina $v_2, v_1 \dots$ so ist

$$p_1 \cdot v_1 = p_2 \cdot v_2 = p_3 \cdot v_3 = \dots = \text{konst.}$$

(Isothermische Zustandsänderung vollkommener Gase.)

Mit p und v als Variablen lautet die Gleichung der Isotherme $p \cdot v = \text{konst.}$; das ist aber die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, bezogen auf die Asymptoten als Achsen.

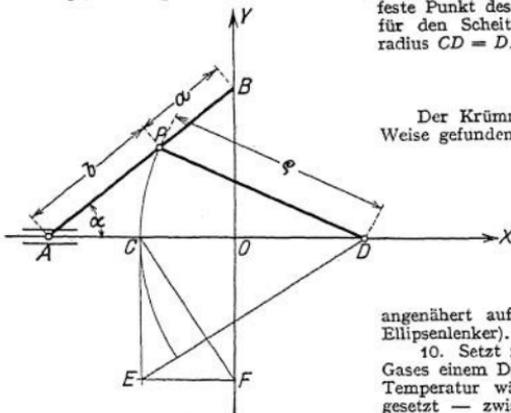


Fig. 40.

Ist der Anfangszustand eines Gases durch p_0 und v_0 bekannt, so gilt für den Punkt P_0 ($v_0 p_0$) die Beziehung $p_0 \cdot v_0 = \text{konst.}$

Die Gleichung der Kurve, die durch den Punkt P_0 geht, lautet dann $p \cdot v = p_0 \cdot v_0$ (Konstruktion siehe Fig. 26).

c) Parameter-Darstellung von Kurven.

Es ist häufig bequemer, statt der impliziten Form $f(x, y) = 0$ bzw. der expliziten Form $y = f(x)$ die Gleichung einer Kurve mit Hilfe einer dritten Variablen t , die Parameter heißt, zu entwickeln. Die Gleichung $f(x, y)$ erscheint in zwei Einzelfunktionen

$$x = f_1(t) \quad \text{und} \quad y = f_2(t)$$

aufgelöst,

wobei $f_1(t)$ und $f_2(t)$ irgendwelche Funktionen des Parameters sind.

In Fig. 39 ist der Neigungswinkel φ der Geraden AB als Hilfsveränderliche eingeführt, es wäre also

$$x = f_1(\varphi) = -a \cdot \cos \varphi;$$

$$y = f_2(\varphi) = b \cdot \sin \varphi.$$

Soll die Gleichung der Kurve in Linearkoordinaten gegeben werden, so muß der Parameter eliminiert werden.

Beispiele: 1. Es ist der Charakter der Kurve $x = \frac{a}{\cos \varphi}$; $y = b \cdot \operatorname{tg} \varphi$ zu bestimmen.

Aus $\cos \varphi = \frac{a}{x}$ und $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{b}$ erhält man mit $1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$

$$1 + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Das ist die Mittelpunktsleichung einer Hyperbel.

2. Es ist die Geschwindigkeit des freien Falles als Funktion der Fallhöhe zu entwickeln. Als Parameter führt man die Zeit t ein, dann ist die nach t sek bei gleichförmig beschleunigter Bewegung erreichte Geschwindigkeit $v = gt$; der in dieser Zeit zurückgelegte Weg ist $h = \frac{1}{2} g t^2$.

Aus $v^2 = g^2 t^2$ und $h = \frac{1}{2} g t^2$ erhält man durch Division $v^2 = 2gh$.

Das ist die Scheitelsgleichung einer Parabel, die symmetrisch zur x -Achse liegt, wenn h auf der x -Achse und v auf der y -Achse aufgetragen werden.

3. Es ist die Geschwindigkeit bei gleichförmig beschleunigter Bewegung als Funktion des Weges zu entwickeln, wenn die Anfangsgeschwindigkeit v_0 ist. Die Hilfsvariable sei t , dann ist nach t sek die Geschwindigkeit $v = v_0 + pt$.

Der nach t sek zurückgelegte Weg $s = v_0 t + \frac{1}{2} p t^2$.

Aus $t = \frac{v - v_0}{p}$ erhält man

$$s = \frac{v^2}{2p} - \frac{v_0^2}{2p} \quad \text{oder} \quad \frac{v^2}{2p} = s + \frac{v_0^2}{2p}.$$

Ist s Abszisse, v Ordinate, dann stellt die Gleichung eine Parabel dar, die symmetrisch zur x -Achse liegt; denn mit $s + \frac{v_0^2}{2p} = s'$ wird $v^2 = 2ps'$. Die analytische Einsetzung $s + \frac{v_0^2}{2p} = s'$ bedeutet graphisch eine Verschiebung der y -Achse um den Betrag $\frac{v_0^2}{2p}$ nach links (Fig. 41).

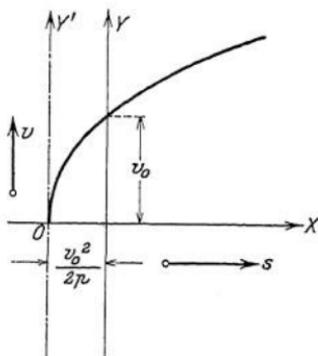


Fig. 41.

d) Kurven, deren Gleichung die Form $y = C \cdot x^n$ hat.

1. Parabolische Kurven höheren Grades.

Der Exponent n ist eine ganze Zahl und erfüllt die Bedingung $n > 0$.

α) $n = 1$. Ist $P_0(x_0, y_0)$ ein gegebener Punkt der Kurve, so ist mit

$$y = C \cdot x \quad \text{und} \quad y_0 = C \cdot x_0$$

$$y = y_0 \cdot \frac{x}{x_0}$$

Gleichung einer Geraden durch OP_0 .

β) $n = 2$; die Gleichung der Kurve durch den Punkt P_0 lautet

$$y = y_0 \cdot \frac{x^2}{x_0^2}$$

und ist die Gleichung der gemeinen oder quadratischen Parabel (Fig. 11).

γ) $n = 3$, die Gleichung der Kurve durch den Punkt P_0 heißt

$$y = y_0 \cdot \frac{x^3}{x_0^3}$$

und ist die Gleichung der kubischen Parabel. Konstruktion: errichte über der gegebenen Ordinate $AP_0 = y_0$ (Fig. 42) einen Halbkreis und schlage um A mit den Radien $A1, A2 \dots$ konzentrische Kreise, die den Halbkreis in den Punkten $I', 2' \dots$ schneiden; $I, II \dots$ sind die Horizontalprojektionen dieser Schnittpunkte auf AP_0 .

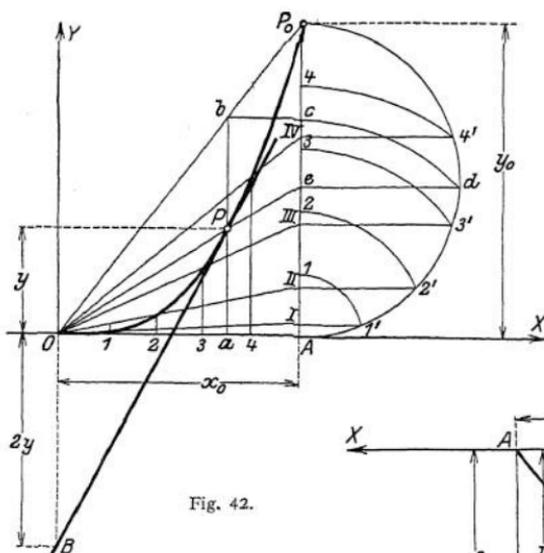


Fig. 42.

Ziehe das Strahlenbündel $OI, OII \dots$, das die Vertikalen $I, 2 \dots$ in Punkten der kubischen Parabel schneidet. Hat man die ganze Kurve zu entwerfen, so empfiehlt es sich, x_0 und y_0 und damit OP_0 in eine gleiche Anzahl gleicher Teile zu teilen. Man erhält einen beliebigen Punkt P der Kurve, dessen Abszisse Oa ist, in folgender Weise: ziehe $ab \perp OA$, bc parallel zur x -Achse, schlage den Kreisbogen cd mit AC als Radius, ziehe de parallel zur x -Achse, dann schneidet Oe die Ordinate ab im Punkte der gesuchten Kurve.

Tangente an die Kurve im Punkte P wird die Verbindungslinie BP , wenn $OB = 2y$ ist.

Ist die Gleichung in der Form $y = f\left(\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}\right)$ gegeben, so empfiehlt es sich, $x: l$ als unabhängige Veränderliche aufzufassen und die Ordinaten rechnerisch mit Hilfe folgender Tabelle zu bestimmen. Man teilt die gegebene

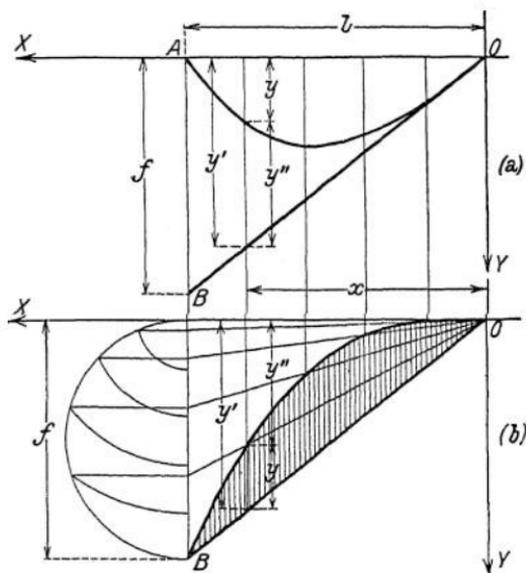


Fig. 43.

Strecke $OA = l$ in eine Anzahl gleicher Teile — am bequemsten 10 — (Fig. 43), bestimmt die Differenz der Verhältnisse aus der Tabelle und erhält 10 Punkte der Kurve. Die Gleichung läßt sich auch schreiben

$$y = f \cdot \frac{x}{l} - f \cdot \frac{x^3}{l^3} = y' - y''$$

und stellt sich dar als die Differenz zweier Funktionen;

$y' = f \cdot \frac{x}{l}$ ist eine Gerade durch den Anfangspunkt O , die für $x = l$ die Ordinate $AB = f$ hat.

$y'' = f \cdot \frac{x^3}{l^3}$ ist eine kubische Parabel, deren Scheitel in O liegt, und die durch den Punkt B geht (Fig. 43 b). Die resultierenden Ordinaten — auf die es in der Praxis ankommt — sind durch Strichelung hervorgehoben. In Fig. 43 a sind diese Ordinaten von der x -Achse aus abgetragen. Einen beliebigen Punkt der Kurve erhält man nach Fig. 42.

Die Gerade OB ist Tangente an die Kurve in O .

Tabelle.

$\frac{x}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\frac{x^2}{l^2}$	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64	0,81
$\frac{x^3}{l^3}$	0,001	0,008	0,027	0,064	0,125	0,216	0,343	0,512	0,729
$\frac{x^4}{l^4}$	0,0001	0,0016	0,0081	0,0256	0,0625	0,1296	0,2401	0,4096	0,6561
$\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}$	0,09	0,16	0,21	0,24	0,25	0,24	0,21	0,16	0,09
$\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}$	0,099	0,192	0,263	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171

Beispiel: Ein Träger sei zum Teil durch eine dreieckförmige Last belastet. Die Momentenlinie ist zu entwerfen (Fig. 44). Die Spitze des Belastungsdreiecks sei der Anfangspunkt, dann ist

$$M_x = B(q + x) - Qx \cdot \frac{x}{3}.$$

Aus der Momentengleichung für A als Drehpunkt ergibt sich $B = \frac{Qp}{3 \cdot l}$

und da $Qx = Q \cdot \frac{x^2}{p^2}$ ist, wird $M_x = \frac{Qp}{3} \cdot \frac{q+x}{l} - \frac{Qp}{3} \cdot \frac{x^2}{p^2}$.

Mit $M_x = y$ und $\frac{Qp}{3} = f$ wird $y = f \cdot \frac{q+x}{l} - f \cdot \frac{x^2}{p^2} = y' - y''$.

Das ist die Gleichung einer parabolischen Kurve dritten Grades, deren graphische Darstellung sich am besten durch Zerlegung in Einzelfunktionen ergibt. $y' = f \cdot \frac{q+x}{l}$ ist eine gerade Linie, die durch die Ordinaten $y_B = 0$ für $x = -q$ und $y_A = f$ für $x = p$ bestimmt ist. $y'' = f \cdot \frac{x^2}{p^2}$ ist eine kubische Parabel, deren Ordinaten entweder nach Fig. 44 c konstruiert oder

mit Hilfe der Tabelle berechnet werden können; die resultierenden Ordinaten sind durch Strichelung hervorgehoben. Die Gerade $y' = f(x)$ ist Tangente im Punkte B' der Kurve.

d) $n = 4$; die Gleichung der Kurve durch den Punkt P_0 lautet

$$y = y_0 \cdot \frac{x^4}{x_0^4}$$

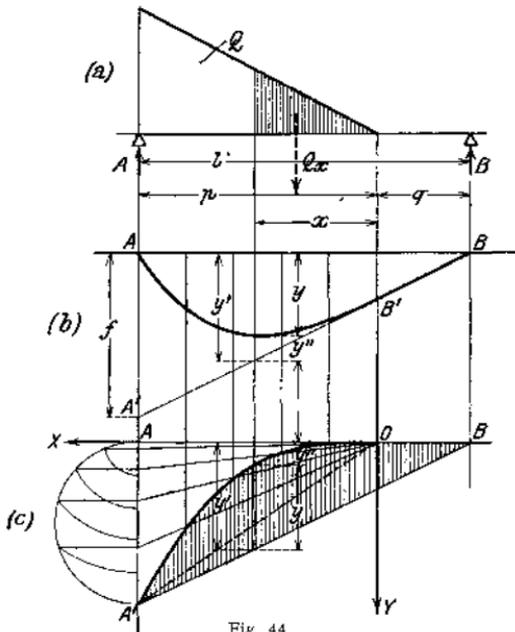


Fig. 44.

und ist die Gleichung einer parabolischen Kurve vierten Grades. Ihre Konstruktion ergibt sich aus der kubischen Parabel; ist P_3 ein Punkt dieser Kurve (Fig. 45), so verbindet man seine Projektion β auf die gegebene Ordinate y_0 mit dem Koordinatenanfangspunkt O ; die Gerade $O\beta$ schneidet die Vertikale durch P_3 in dem Punkte P_4 der parabolischen Kurve 4. Grades. Geht man auf die quadratische Parabel zurück, so verfährt man nach Fig. 46; ist 2 die Projektion des Parabelpunktes P_2 auf die gegebene Ordinate y_0 , so schlägt man mit A um A einen Kreis bis 3 und projiziert 3 auf die Vertikale durch P_2 , dann ist P_4 ein Punkt der gesuchten Kurve.

e) $n = 5$. Die Gleichung der Kurve durch den Punkt P_0 lautet

$$y = y_0 \cdot \frac{x^5}{x_0^5}$$

und ist die Gleichung einer parabolischen Kurve 5. Grades; ihre Konstruktion ergibt sich aus Fig. 46; denn die Gerade $O\beta$ schneidet die Vertikale durch P_2 im Punkte P_5 der gesuchten Kurve.

Beispiel: Die Gleichung der elastischen Linie für den gleichförmig belasteten Freitragter lautet (Fig. 47)

$$\begin{aligned} y &= \frac{P\beta}{6EJ} \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{4} \frac{x^4}{l^4} \right), \\ &= \frac{P\beta}{6EJ} \cdot \frac{x}{l} - \frac{1}{4} \cdot \frac{P\beta}{6EJ} \cdot \frac{x^4}{l^4}, \\ &= y' - y'''. \end{aligned}$$

Die Größen y'' werden mit Hilfe der Tabelle bestimmt und von der Geraden $O\beta'$ nach unten abgetragen; bzw. die Kurve $y'' = \frac{1}{4} \cdot \frac{P\beta}{6EJ} \cdot \frac{x^4}{l^4}$ nach Fig. 46 entworfen.

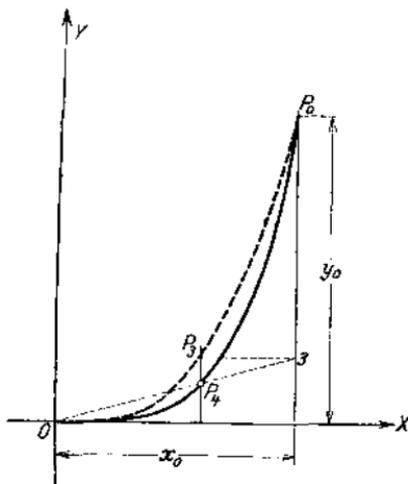


Fig. 45.

2. Hyperbolische Kurven höheren Grades.

Der Exponent n ist eine ganze Zahl und erfüllt die Bedingung $n < 0$.

$\alpha) n = -1$. Ist $P_0(x_0, y_0)$ ein gegebener Punkt der Kurve, so ist

$$y = C \cdot x^{-1} \quad \text{und} \quad y_0 = C \cdot x_0^{-1}$$

$$y = y_0 \cdot \frac{x^{-1}}{x_0^{-1}} = y_0 \cdot \frac{x_0}{x}.$$

Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel bezogen auf die Asymptoten als Achsen (Fig. 26).

$\beta) n = -2$; die Gleichung der Kurve durch P_0 lautet

$$y = y_0 \cdot \frac{x^{-2}}{x_0^{-2}} = y_0 \cdot \frac{x_0^2}{x^2}.$$

Ist P_1 ein Punkt der gleichseitigen Hyperbel (Fig. 48), so verbindet man P_1 mit O ; der Schnittpunkt mit der Ordinate y_0 sei II . Projiziert man II auf die Vertikale durch P_1 , so ist P_2 ein Punkt der gesuchten Kurve.

$\gamma) n = -3$. Die Gleichung der Kurve durch P_0 heißt

$$y = y_0 \cdot \frac{x^{-3}}{x_0^{-3}} = y_0 \cdot \frac{x_0^3}{x^3},$$

ihre Konstruktion schließt sich an die der hyperbolischen Kurve 2. Grades an; verbindet man in Fig. 48 P_2 mit O , so schneidet P_2O auf der Ordinate y_0 die

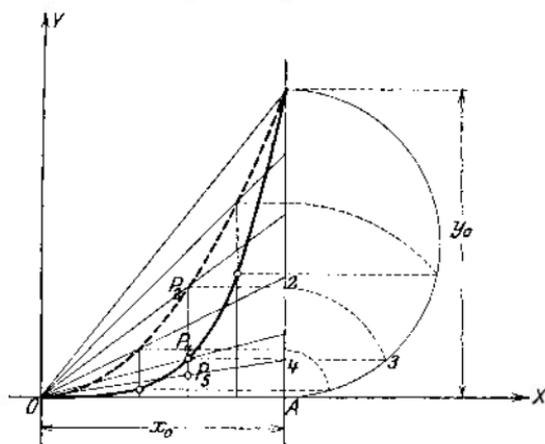


Fig. 46.

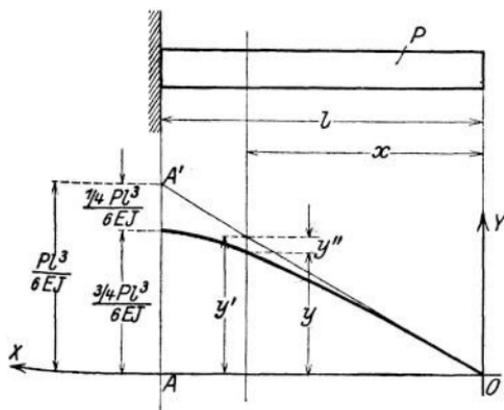


Fig. 47.

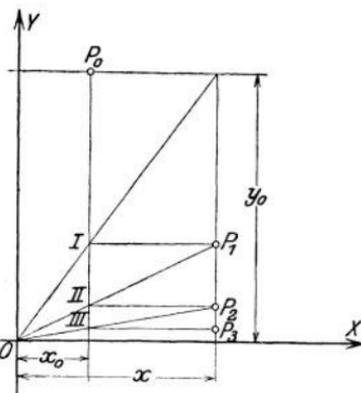


Fig. 48.

gesuchte Ordinate y ab, die auf die Vertikale durch A projiziert wird; P_3 ist der gesuchte Punkt der hyperbolischen Kurve 3. Grades.

In gleicher Weise werden die Kurven höheren Grades entworfen.

3. Polytropische Kurven.

Der Exponent ist eine gebrochene Zahl und erfüllt die Bedingung $n < 0$.

Die Gleichung der Kurve lautet $y = y_0 \cdot \frac{x^n}{x_0^n}$

oder mit $n = -m$

$$y \cdot x^m = y_0 \cdot x_0^m.$$

Gegeben sei ein Punkt $P_0(x_0, y_0)$ und der Exponent m .

Konstruktion: Wähle die Winkel α und β so, daß

$$1 + \operatorname{tg} \beta = (1 + \operatorname{tg} \alpha)^m$$

ist, ziehe von der Projektion A des Punktes P_0 auf die y -Achse eine Gerade AA' unter 45° und von der Projektion D' des Punktes P_0 auf den Schenkel des Winkels α ebenfalls eine Gerade $D'D$ unter 45° , dann schneiden sich die Horizontale durch A' und die Vertikale durch D im Punkte P der Kurve (Fig. 49). Um den Punkt P' zu bestimmen, verfährt man von P ausgehend in gleicher Weise.

Gegeben seien zwei Punkte P_1 und P_2 der Kurve: da zwischen den Koordinaten der beiden Punkte die Beziehung

$$\frac{y_1}{y_2} = \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^m \text{ besteht,}$$

so wird

$$m = \frac{\log y_1 - \log y_2}{\log x_2 - \log x_1}.$$

Um nun weitere Punkte dieser Potenzkurve zu erhalten, bestimmt man x_3, y_3 so, daß die drei Abszissen x_1, x_2, x_3 und die drei Ordinaten y_1, y_2, y_3 eine geometrische Reihe bilden, d. h. daß x_2 mittlere Proportionale zwischen x_1 und x_3 , bzw. y_2 mittlere Proportionale zwischen y_1 und y_3 sind; es werden dann

$$x_3 = \frac{x_2}{x_1} \cdot x_2; \quad y_3 = \frac{y_2}{y_1} \cdot y_2;$$

hierbei sind die Winkel α und β (Fig. 50) beliebig, δ und γ aber durch die gegebenen Punkte P_1 und P_2 bestimmt.

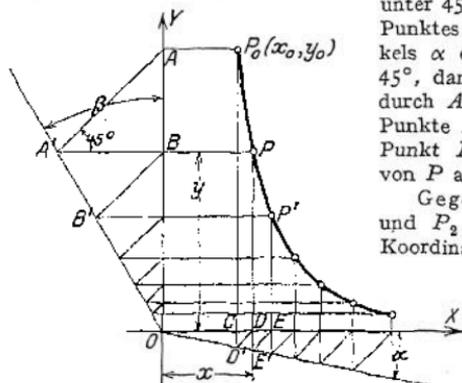


Fig. 49.

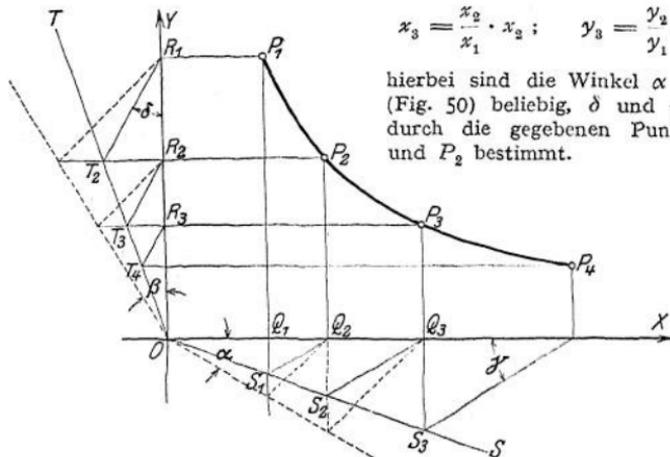


Fig. 50.

Zeichnerisch findet man δ und γ in folgender Weise: ziehe die Horizontalen P_1R_1 und P_2R_2 , von denen P_2R_2 den beliebigen Strahl OT in T_2 schneidet; durch T_2R_1 ist δ festgelegt; ziehe die Vertikalen P_1Q_1 und P_2Q_2 , von denen P_1Q_1 den beliebigen Strahl OS in S_1 schneidet, dann ist γ durch S_1Q_2 festgelegt (Fig. 50). Weitere Punkte der Kurve findet man graphisch in gleicher Weise wie vorher, wenn man statt der Neigung von 45° die Winkel δ und γ benutzt.

Bem.: Aus der Bedingung $\delta = \gamma = 45^\circ$ ergibt sich $1 + \operatorname{tg} \beta = (1 + \operatorname{tg} \alpha)^m$.

Soll untersucht werden, ob eine vorgelegte Kurve eine Potenzkurve ist, so trägt man für beliebige Kurvenpunkte die Logarithmen der Koordinaten in einem neuen Achsenkreuz auf (Fig. 51). Ergibt sich als Verbindungslinie der einzelnen Punkte eine Gerade, so ist die vorgelegte Kurve eine Potenzkurve, deren Exponent durch die Richtungskonstante der Geraden bestimmt ist. Ergibt sich keine Gerade, so zeigt die Berechnung von m für mehrere Punkte, in welchen Grenzen m veränderlich ist.

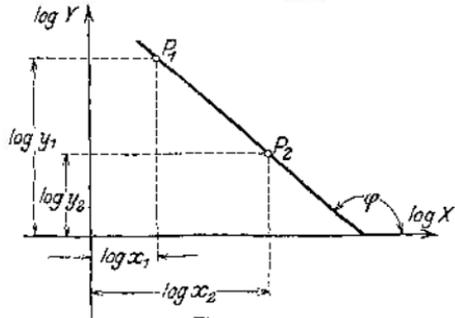


Fig. 51.

e) Die zyklischen Kurven.

1. Die gemeine Zyklode wird von einem Punkte A einer Kreislinie AB beschrieben, wenn sich diese ohne zu gleiten auf einer Geraden AC abwälzt (Fig. 52).

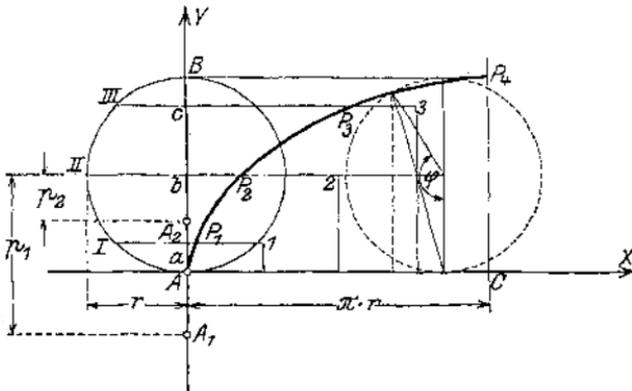


Fig. 52.

Gleichung. Ist φ der Wälzungswinkel, so lauten die Gleichungen der Zyklode

$$x = r \cdot (\varphi - \sin \varphi); \quad y = r(1 - \cos \varphi).$$

Konstruktion. Man mache $AC = \text{Bogen } AB = \pi r$, teile beides in die gleiche Anzahl gleicher Teile, konstruiere die Schnittpunkte 1, 2, 3 und mache $1P_1 = aI$; $2P_2 = bII$ und $3P_3 = cIII$, dann sind P_1, P_2 und P_3 Punkte der Zyklode.

Die Normale im Kurvenpunkt geht durch den Berührungspunkt des erzeugenden Kreises und der Grundlinie AC .

Die verlängerte Zyklode entsteht, wenn der erzeugende Punkt A_1 außerhalb, die verkürzte Zyklode, wenn der erzeugende Punkt A_2 innerhalb des rollenden Kreises liegt. Sind p_1 bzw. p_2 seine Abstände vom Mittelpunkt, so heißen die Gleichungen

$$x = r \cdot \varphi - p_1 \cdot \sin \varphi; \quad y = r - p_1 \cdot \cos \varphi;$$

$$x = r \cdot \varphi - p_2 \cdot \sin \varphi; \quad y = r - p_2 \cdot \cos \varphi.$$

2. Die Epizykloide (Fig. 53) wird von einem Punkte A eines Kreises mit dem Radius $AC = r$ beschrieben, der ohne zu gleiten auf einem Kreise mit dem Radius $AO = R$ rollt, wenn sich beide Kreise außen berühren. Der feste Kreis mit dem Radius R heißt Grundkreis, der rollende mit dem Radius r heißt erzeugender Kreis.

Gleichungen. Setzt man $R = n \cdot r$ und bezeichnet den Wälzungswinkel mit φ , so wird, wenn $m = n + 1$ ist,

$$x = r(m \cdot \cos \varphi - \cos m \varphi); \quad y = r(m \cdot \sin \varphi - \sin m \varphi).$$

Konstruktion. Man mache Bogen AE gleich dem Halbkreisbogen AB und teile beide Bögen in die gleiche Anzahl gleicher Teile. Ziehe das Strahlen-

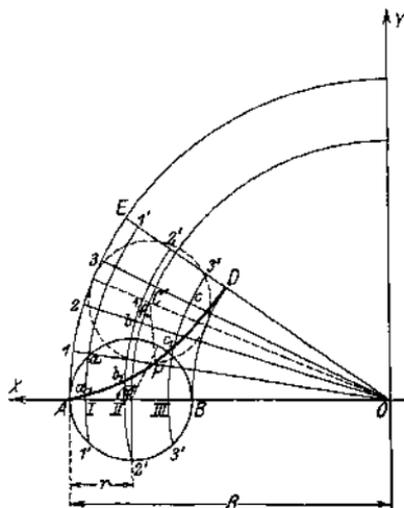


Fig. 53.

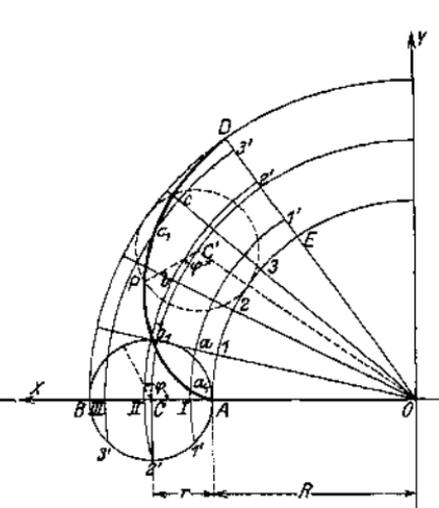


Fig. 54.

büschel $O123E$ und durch die Teilpunkte $I'2'3'$ des erzeugenden Kreises konzentrische Kreise um O , die den Durchmesser AB in den Punkten I, II, III , das Strahlenbüschel entsprechend in $a b c D$ schneiden mögen. Macht man $a_1 a = II'$; $b_1 b = III'$; $c_1 c = III'3'$, so sind $A a_1 b_1 c_1 D$ Punkte der Epizykloide (Fig. 53).

Sonderfälle: 1. Für $n = 1$, d. h. $r = R$ wird die Epizykloide zur Herzkurve oder Kardioiden (vgl. S. 144); ihre Gleichung lautet, da $m = n + 1 = 2$ wird

$$x = r(2 \cos \varphi - \cos 2\varphi); \quad y = r(2 \sin \varphi - \sin 2\varphi).$$

Ist die y -Achse Scheiteltangente in A und AO die positive Richtung der x -Achse, so heißt die Gleichung der Kardioiden

$$(y^2 + x^2 - 2R x)^2 = 4R^2(x^2 + y^2).$$

2. Für $r = \infty$ wird der rollende Kreis zur geraden Linie, die Rollkurve zur Kreisevolvente (vgl. S. 135).

Liegt der erzeugende Punkt A_1 außerhalb des rollenden Kreises, so entsteht die verlängerte Epizykloide, liegt der erzeugende Punkt A_2 innen, so entsteht die verkürzte Epizykloide.

3. Die Hypozykloide (Fig. 54) wird von einem Punkte A eines Kreises mit dem Radius $AC = r$ beschrieben, der ohne zu gleiten auf einem Kreise mit dem Radius $AO = R$ rollt, wenn sich beide Kreise innen berühren.

Gleichungen. Mit den Bezeichnungen unter 2. erhält man als Gleichungen der Hypozykloiden, wenn $n - 1 = m$ ist,

$$x = r(m \cdot \cos \varphi + \cos m \varphi); \quad y = r(m \cdot \sin \varphi + \sin m \varphi).$$

Konstruktion wie unter 2 (Fig. 54).

Sonderfälle. Die Hypozykloide wird zur Astroide, wenn $n = 4$, d. h. $r = \frac{1}{4} R$ wird; mit $m = n - 1 = 3$ erhält man

$$x = r(3 \cos \varphi + \cos 3 \varphi); \quad y = r(3 \sin \varphi + \sin 3 \varphi)$$

oder

$$x = 4r \cdot \cos^3 \varphi; \quad y = 4r \cdot \sin^3 \varphi.$$

Setzt man $n = 2$, d. h. $r = \frac{1}{2} R$, so wird $m = n - 1 = 1$, folglich

$$x = r(\cos \varphi + \cos \varphi) = 2r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r(\sin \varphi - \sin \varphi) = 0.$$

Die Hypozykloide wird zu einer Geraden, die mit der x -Achse zusammenfällt. Jeder Punkt eines Durchmessers des erzeugenden Kreises beschreibt eine Ellipse (vgl. S. 117).

Liegt der erzeugende Punkt A_1 außerhalb des rollenden Kreises, so entsteht die verlängerte Hypozykloide; liegt der erzeugende Punkt A_2 innen, so entsteht die verkürzte Hypozykloide.

Für den Fall, daß der Rollkreis den festen Kreis umschließt, entsteht die Perizykloide.

Die Normale für einen Punkt der Epi- oder Hypozykloide geht durch den Berührungspunkt des erzeugenden Kreises und des festen Kreises für die den Kurvenpunkt bestimmende Lage.

Die zyklische Kurven finden bei der Verzahnung Verwendung.

4. Die Kreisevolvente wird von jedem Punkte einer Geraden beschrieben, die sich ohne zu gleiten auf einem Kreise abwälzt.

Konstruktion: Man mache BD (Fig. 55) gleich dem Kreisbogen AB und teile beide in n gleiche Teile; bb_1 ist Tangente in b_1 von der Länge $bb_1 = B2$ $d d_1$ ist Tangente in d_1 von der Länge $d d_1 = B4$ usw. Dann sind A, a_1, b_1, c_1, D Punkte der Evolvente. Ihre Gleichung in Parameterdarstellung bezogen auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz lautet

$$x = r_0(\cos \psi + \psi \cdot \sin \psi); \quad y = r_0(\sin \psi - \psi \cdot \cos \psi)$$

wobei ψ die Hilfsvariable bedeutet.

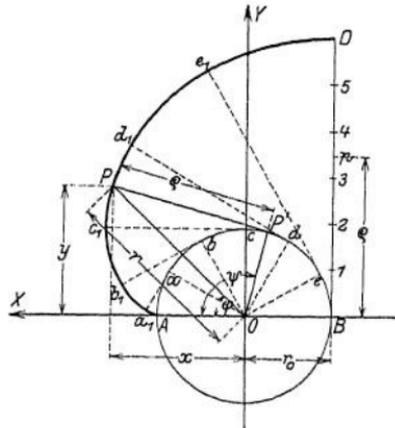


Fig. 55.

f) Die Spiralen.

1. Die Archimedische Spirale entsteht, wenn sich ein Punkt C (Fig. 56) mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einem Strahle OC bewegt, der sich seinerseits gleichförmig um einen festen Punkt, den Pol O , dreht. Hat der Leitstrahl bei einer einmaligen Umdrehung von 360° den Weg $OA = r_0$ zurückgelegt, so legt er bei einer $\frac{1}{n}$ Umdrehung den Weg $\frac{r_0}{n}$ zurück; daraus ergibt sich die

Konstruktion: teile 360° in n gleiche Teile, ebenso die Strecke $OA = r_0$; trage radial nach außen die entsprechenden Größen ab.

Die Polargleichung heißt

$$r = a \cdot \varphi = \frac{r_0}{2\pi} \cdot \varphi,$$

wobei r den Leitstrahl, φ den Polarwinkel von OA aus gerechnet bezeichnen.

2. Die hyperbolische Spirale. Trägt man von einem Durchmesser (Polarachse) OA einer Schar konzentrischer Kreise aus auf allen diesen Kreisen nach derselben Seite hin Bögen von der Länge a ab, so liegen ihre Endpunkte auf einer hyperbolischen Spirale (Fig. 57), deren Gleichung lautet $r \cdot \varphi = a$. Da für $\varphi = \infty$ $r = 0$ wird, so ist der Pol O ein asymptotischer Punkt, um den die Spirale unendlich viele Windungen beschreibt ohne ihn zu erreichen.

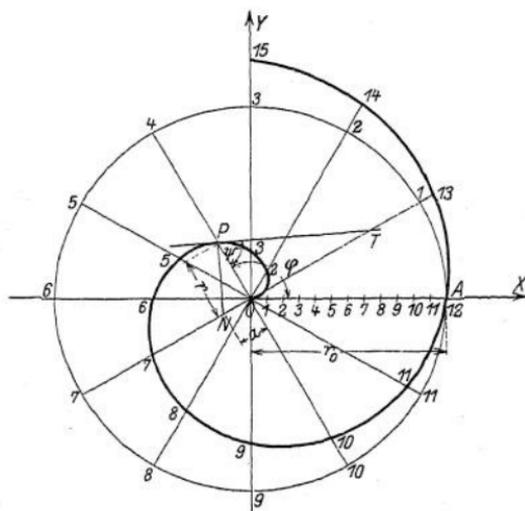


Fig. 56.

Für $\varphi = 0$ wird $r = \infty$, d. h. die zur Polarachse im Abstände a gezogene Parallele BB ist Asymptote der Spirale. Konstruktion der Tangente an die Kurve im Punkte P : ziehe OT senkrecht OP und mache $OT = a$, dann ist TP Tangente.

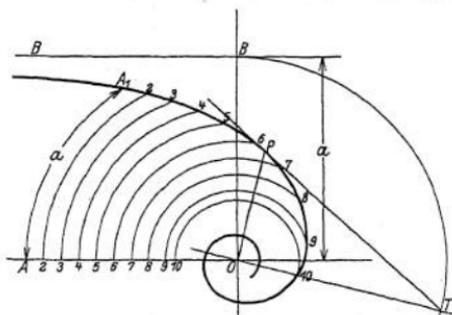


Fig. 57.

Konstruktion: Es sei z. B. $m = 0,2$; um für den Bogen von 0 bis π acht Punkte zu finden, setze man

$$\varphi = \frac{n}{8} \pi;$$

$$r = a \cdot e^{0,2 \cdot \frac{\pi}{8} \cdot n} = a \cdot 1,08^n.$$

Die Werte r dieser Gleichung lassen sich nach Fig. 71 konstruieren, wenn man

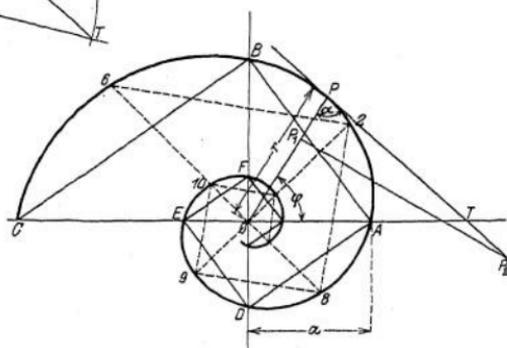


Fig. 58.

$OA = a$; $OB = 1,08 a$ macht und den Linienzug $ABCD \dots$ bis $n = 8$ zieht. Trägt man nunmehr $r_0 = a \cdot 1,08^0$; $r_1 = a \cdot 1,08^1$; $r_2 = a \cdot 1,08^2 \dots$ auf den entsprechenden Strahlen $\varphi_0 = 0$; $\varphi_1 = \frac{1}{8}\pi$; $\varphi_2 = \frac{2}{8}\pi \dots$ ab (Fig. 58), so erhält man 8 Punkte der logarithmischen Spirale für den Bogen ABC . Zieht man $DA \perp BA$; $ED \perp DA$; $FE \perp DE \dots$, so ergeben sich weitere Punkte auf den Achsen. Dazwischenliegende Punkte erhält man durch den Linienzug $6, 2, 8, 9, 10 \dots$ für $608 \perp 902$, wobei $2, 8 \perp 6, 2$; $9, 8 \perp 2, 8 \dots$

Bem.: Eine Tabelle der Werte $e^{m \cdot \varphi}$ findet sich S. 313 für verschiedene m .

Die Tangente TP in dem beliebigen Punkte P der Kurve bildet mit dem Leitstrahl OP den Winkel $\alpha = \text{constans}$; es ist

$$\text{ctg } \alpha = m = \frac{PP_1}{P_1P_2} = \frac{0,4 a}{2 \cdot a}.$$

Die logarithmische Spirale wird bei Fräsen und unrundern Scheiben verwendet.

g) Die Sinuslinien.

Unter einer Sinuslinie versteht man die graphische Darstellung der Funktion

$$y = y_0 \cdot \sin \varphi$$

wobei φ im Bogenmaß gemessen wird (Fig. 59).

1. y folge dem Sinusgesetz:

$$y = y_0 \cdot \sin \varphi.$$

MA heißt radius vector oder Fahrstrahl; der Bogen AC ist gleich der Strecke φ auf der φ -Achse; die Darstellung der unbenannten Zahl φ als Strecke bedingt einen Maßstab von der Form $1 = a \text{ cm}$.

y_0 ist der Maximalwert der Funktion; y der Momentanwert. Da φ im Bogenmaß gemessen gleich dem Weg ist, der auf dem Kreise mit dem Radius 1 zurückgelegt wird, so kann man setzen

$$\varphi = \omega \cdot t,$$

wobei ω die Winkelgeschwindigkeit bedeutet; die gegebene Funktion heißt dann

$$y = y_0 \cdot \sin \omega \cdot t$$

für $\omega = \text{konstant}$ wird also y zu einer Funktion der Zeit; man sagt: y folgt dem Sinusgesetz oder y schwingt nach dem Sinusgesetz. Die Zeit einer vollen Schwingung ist T , sie entspricht einem vollen Umlauf — 360° — des radius vector, so daß $\omega T = 2\pi$; T heißt Periode, $\frac{1}{T}$ Frequenz. Vergleiche auch Fig. 72 S. 146.

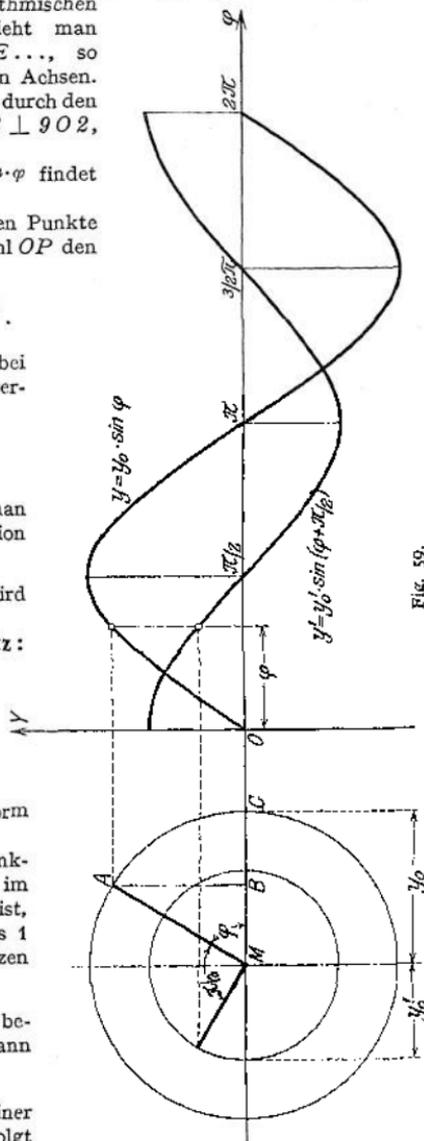


Fig. 59.

2. y folge dem Kosinusetz: $y' = y'_0 \cdot \cos \varphi$; mit $\cos \varphi = \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right)$ wird $y' = y'_0 \cdot \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right)$ d. h. die Kosinuslinie ist eine um $\frac{\pi}{2}$ verschobene Sinuslinie; da sie ihren Maximalwert früher erreicht als die Kurve $y = y_0 \sin \varphi$, so sagt man: sie eilt um $\frac{\pi}{2}$ voran (Fig. 59); es ist $\frac{\pi}{2}$ die Phasenverschiebung.

3. **Schnittpunkte beider Kurven.** Für die Schnittpunkte muß die Bedingung erfüllt sein: $y = y'$; daraus folgt:

$$y_0 \cdot \sin \varphi = y'_0 \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) = y'_0 \cdot \cos \varphi;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y'_0}{y_0}; \quad \varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y'_0}{y_0}.$$

4. Addition und Subtraktion sinusartig schwingender Größen.

α) Ohne Phasenverschiebung. Folgen zwei Größen dem Gesetz $x = x_0 \cdot \sin \varphi$, $y = y_0 \sin \varphi$, so wird $x + y = z = (x_0 + y_0) \sin \varphi$; mit $x_0 + y_0 = z_0$ erhält man $z = z_0 \cdot \sin \varphi$, d. h. die resultierende Kurve ist eine Sinuslinie mit dem radius vector $z_0 = x_0 + y_0$.

β) Mit Phasenverschiebung. Ist α die Phasenverschiebung, so lauten die Gleichungen:

$$x = x_0 \cdot \sin \varphi,$$

$$y = y_0 \cdot \sin(\varphi + \alpha)$$

$$z = x_0 \cdot \sin \varphi + y_0 \cdot \sin(\varphi + \alpha)$$

löst man die Klammer auf, so kann man schreiben

$$z = (x_0 + y_0 \cdot \cos \alpha) \cdot \left(\sin \varphi + \cos \varphi \frac{y_0 \cdot \sin \alpha}{x_0 + y_0 \cdot \cos \alpha} \right).$$

Mit $\frac{x_0 + y_0 \cdot \cos \alpha}{\cos \beta} = z_0$ und $\frac{y_0 \cdot \sin \alpha}{x_0 + y_0 \cdot \cos \alpha} = \operatorname{tg} \beta$ erhält man

$$z = z_0 \cdot \sin(\varphi + \beta).$$

d. h. die resultierende Kurve ist eine Sinuslinie mit dem radius vector z_0 ; sie eilt der Kurve $x = x_0 \cdot \sin \varphi$ um β voran (Fig. 60).

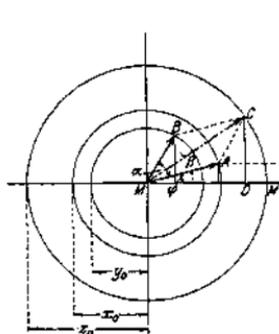


Fig. 60 a.

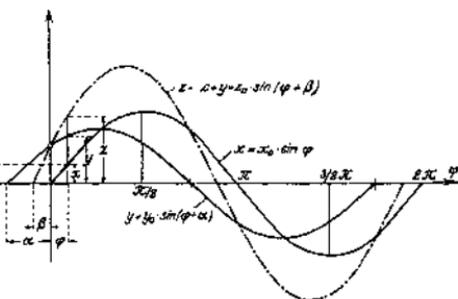


Fig. 60 b.

Aus der graphischen Darstellung ergibt sich ohne weiteres, daß CD als Projektion des radius vector $MC = z_0$ gleich ist der Summe der Projektionen von MA und MB , wenn C ein Punkt des Parallelogramms aus $MA = x_0$ und $MB = y_0$ ist; d. h. der resultierende radius vector z_0 ist Diagonale im Parallelogramm aus x_0 und y_0 ; man erhält ihn, wenn man x_0 und y_0 der Größe und Richtung nach aneinander fügt (geometrische Addition gerichteter oder Vektorgrößen).

Fig. 60a heißt das Vektorendiagramm. Im allgemeinen wird das Vektorendiagramm für $\varphi = 0$ entworfen; zur Bestimmung der Momentanwerte läßt man das Achsenkreuz im entgegengesetzten Sinne von φ rotieren, die Lote von den

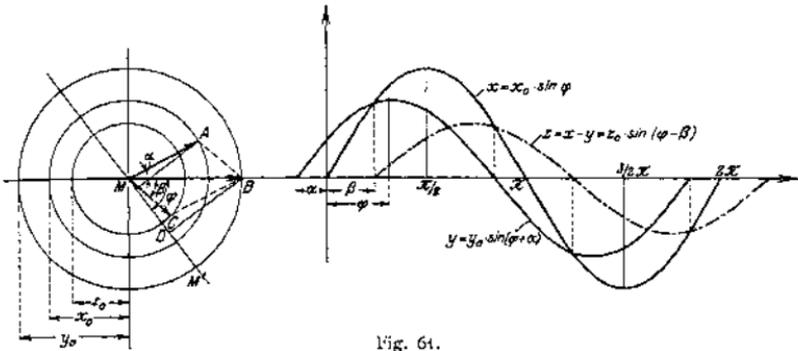


Fig. 61.

Punkten A, B, C auf die — rotierende — Achse MM' geben die Momentanwerte. Sind die Kurven x und y der Fig. 60 b gezeichnet, so ergeben sich die Ordinaten der Additionskurve durch Addition der Einzelordinaten. Soll die Differenz der gegebenen Funktionen gebildet werden, so verfährt man nach Fig. 61; die Richtung der Vektoren ist durch Pfeilspitzen hervorgehoben.

5. Multiplikation sinusartig schwingender Größen.

α) Ohne Phasenverschiebung (Fig. 62):

$$x = x_0 \cdot \sin \varphi ; \quad y = y_0 \cdot \sin \varphi ;$$

$$z = x \cdot y = x_0 \cdot y_0 \sin^2 \varphi$$

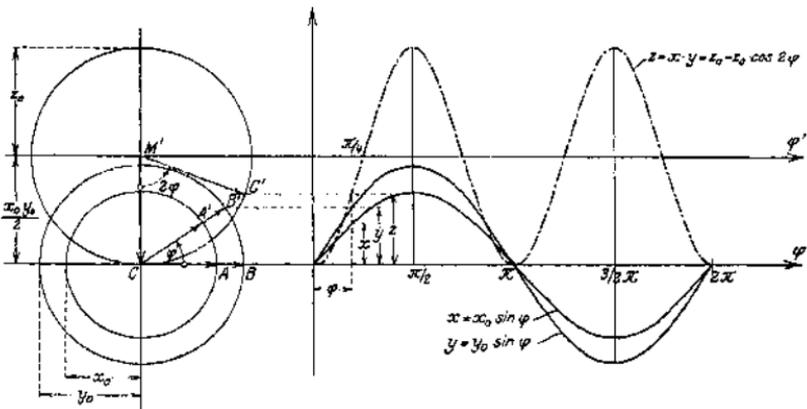


Fig. 62.

mit $\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi)$ ergibt sich

$$z = \frac{x_0 \cdot y_0}{2} - \frac{x_0 \cdot y_0}{2} \cdot \cos 2\varphi$$

setzt man $z - \frac{x_0 \cdot y_0}{2} = z'$, so wird $z' = -\frac{x_0 \cdot y_0}{2} \cdot \cos 2\varphi$ durch eine Sinuslinie dargestellt, deren radius vector $z_0 = \frac{x_0 \cdot y_0}{2}$ ist. Durch das Pro-

dukt der Maximalwerte x_0 und y_0 wird für z ein neuer Ordinatenmaßstab erforderlich; die Einsetzung $z' = z - \frac{x_0 y_0}{2}$ bedeutet graphisch eine Verschiebung der φ -Achse um $\frac{x_0 \cdot y_0}{2}$ nach der positiven Richtung der Ordinatenachse.

Aus der Bedingung $z' = 0$ ergibt sich $\varphi = \frac{\pi}{4}$; der Koordinatenanfangspunkt des Systems, für das $z' = f(\varphi)$ eine normale Sinuslinie ist, hat die Koordinaten $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{x_0 \cdot y_0}{2}$. Die Konstruktion der z -Linie ergibt sich in folgender Weise: Sind $CA = x_0$ und $CB = y_0$ die Fahrstrahlen der beiden gegebenen Funktionen $x = f(\varphi)$ und $y = F(\varphi)$, so mache man $M'C = z_0 = \frac{x_0 y_0}{2}$

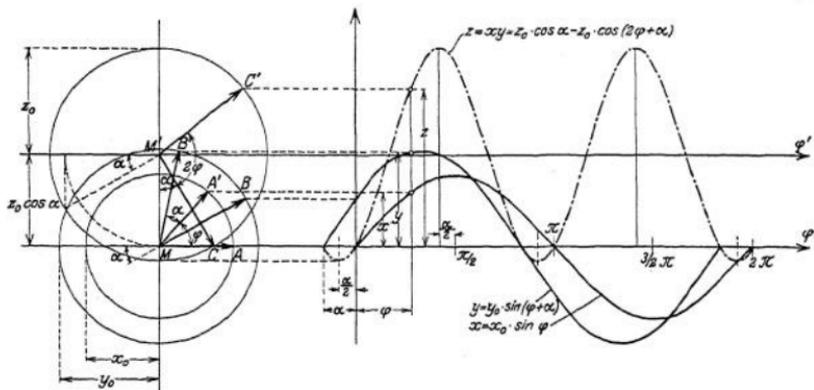


Fig. 63.

mit Hilfe eines neuen Ordinatenstabes. Läßt man nunmehr CA und CB im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers rotieren, so erhält man die Ordinate z für den beliebigen Winkel φ , wenn der Fahrstrahl $M'C$ den Bogen $CC' = 2\varphi$ beschreibt; die Entfernung des Punktes C' von der φ -Achse ist die gesuchte Ordinate z für die Abszisse φ . Für den Sonderfall $x_0 = y_0 = 1$ wird $z_0 = \frac{1}{2}$.

β) Mit Phasenverschiebung (Fig. 63). Die Gleichungen lauten:

$$x = x_0 \cdot \sin \varphi ; \quad y = y_0 \cdot \sin (\varphi + \alpha)$$

$$z = x_0 \cdot \sin \varphi \cdot y_0 \cdot \sin (\varphi + \alpha) .$$

Nach Auflösen der Klammer erhält man mit Hilfe der Beziehungen $2 \sin^2 \varphi = 1 - \cos 2\varphi$ und $2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \sin 2\varphi$

$$z = x \cdot y = \frac{x_0 \cdot y_0}{2} \cos \alpha - \frac{x_0 \cdot y_0}{2} \cdot \cos (2\varphi + \alpha)$$

und mit

$$z - \frac{x_0 \cdot y_0}{2} \cdot \cos \alpha = z'$$

$$z' = - \frac{x_0 \cdot y_0}{2} \cos (2\varphi + \alpha) = -z_0 \cdot \cos (2\varphi + \alpha) .$$

Die resultierende Linie ist eine Sinuslinie mit dem radius vector $z_0 = \frac{x_0 \cdot y_0}{2}$, deren horizontale Achse um $\frac{x_0 \cdot y_0}{2} \cdot \cos \alpha = z_0 \cdot \cos \alpha$ verschoben ist.

Die Konstruktion der z -Linie ergibt sich wie folgt: Sind $MA = x_0$ und $MB = y_0$ die um α gegeneinander verschobenen Fahrstrahlen der gegebenen Funktionen $x = x_0 \cdot \sin \varphi$ und $y = y_0 \cdot \sin (\varphi + \alpha)$, so mache man mit Hilfe eines neuen Ordinatenmaßstabes $M'M = x_0 \cdot \cos \alpha = \frac{x_0 y_0}{2} \cdot \cos \alpha$ (ist in Fig. 63 gestrichelt gezeichnet). Für $\varphi = 0$ hat der

resultierende Fahrstrahl z_0 die Lage $M'C$, wobei $MM'C = \alpha$ ist. Rotieren nunmehr die Fahrstrahlen $MA = x_0$ und $MB = y_0$ mit der konstanten Entfernung α im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers um M , so muß der resultierende Fahrstrahl $M'C = z_0$ so um M' ebenfalls im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers rotieren, daß Bogen $CC' = 2\varphi$ wird; die Entfernung des Punktes C' von der φ -Achse ist die gesuchte Ordinate z .

Beispiel: Bei einem Wechselstrom mit induktiver Belastung folge die Spannung dem Gesetz $E_t = E_0 \cdot \sin \omega t$, dann folgt die Stromstärke dem Gesetz $J_t = J_0 \cdot \sin(\omega t - \omega \tau)$, wenn $\omega \tau$ die Phasenverschiebung bedeutet. Es ist die Leistung als Funktion der Zeit darzustellen. Sie ergibt sich als Produkt der Momentanwerte zu

$$\mathfrak{W} = E_t \cdot J_t = E_0 \cdot J_0 \cdot \sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \omega \tau).$$

Unter Berücksichtigung des Verfahrens Fig. 63 erhält man

$$\mathfrak{W} = \frac{E_0 \cdot J_0}{2} \cdot \cos \omega \tau - \frac{E_0 \cdot J_0}{2} \cdot \cos(2\omega t - \omega \tau)$$

und da $\frac{E_0}{\sqrt{2}}$ bzw. $\frac{J_0}{\sqrt{2}}$ die Effektivwerte E bzw. J bedeuten, wird

$$\mathfrak{W} = E J \cdot \cos \omega \tau - E J \cos(2\omega t - \omega \tau).$$

6. Die Gleichung der Kurve laute:

$$y = y_0 \cdot \sin n \cdot x.$$

a) $n = 1$ ergibt $y = y_0 \cdot \sin x$ (Fig. 64 a) das ist die normale Sinuslinie.

b) $n = 2$ ergibt $y = y_0 \cdot \sin 2x$; die Kurve ist in Fig. 64 b dargestellt und kennzeichnet einen periodischen Vorgang mit doppelter Schwingungszahl.

c) $n = 3$ ergibt $y = y_0 \cdot \sin 3x$ (Fig. 64 c), hierbei ist die Schwingungszahl dreimal so groß wie unter (a).

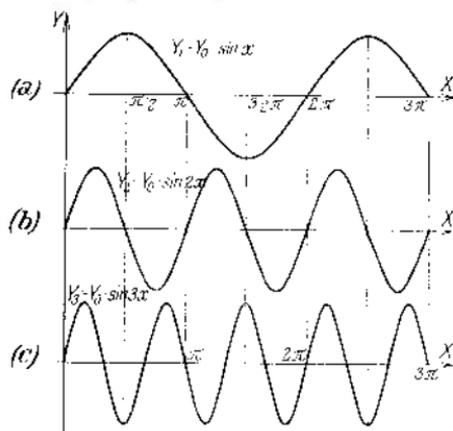


Fig. 64 a-c.

h) Die gemeine Kettenlinie

ist die Seilcurve, deren Belastung der Längeneinheit des Bogens konstant ist; ihre Gleichung lautet (Fig. 65):

$$y = \frac{h}{2} \left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}} \right).$$

Ist H die Fadenspannkraft im Scheitel S , p das Gewicht der Längeneinheit, dann ist der Parameter $h = H:p$ diejenige Länge des Seiles, deren Gewicht gleich der Spannkraft H ist. Ersetzt man $e^{\frac{x}{h}}$ durch eine Reihe (vgl. S. 90), dann wird

$$y = \frac{h}{2} \left(1 + \frac{x}{h} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{x^2}{h^2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{x^3}{h^3} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{x^4}{h^4} + \dots \right) + 1 - \frac{x}{h} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{x^2}{h^2} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{x^3}{h^3} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{x^4}{h^4} + \dots$$

$$y = h \left(1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{x^2}{h^2} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{x^4}{h^4} + \dots \right).$$

Da bei dem Sonderfall der flachen Kette $x:h$ sehr klein wird, kann man die höheren Potenzen von $x:h$ vernachlässigen; für diesen Fall geht die Gleichung der Kettenlinie über in die Gleichung der Parabel

$$x^2 = 2h(y - h).$$

Konstruktion: Ist der Parameter h bekannt, so berechnet man die Ordinaten der Kurve mit Hilfe der Hyperbelfunktionen (siehe Tafel E, S. 38).

Ist der Parameter h nicht bekannt, so verfährt man wie folgt: Es sei $2L$ die Länge einer Kette; ihre Aufhängepunkte haben eine horizontale Entfernung $2l$, ihr Höhenunterschied betrage $2b$, dann bestehen die Beziehungen

$$\frac{\sqrt{L^2 - b^2}}{l} = \frac{\text{Sin } \varphi}{\varphi}$$

und

$$h = \frac{l}{\varphi}.$$

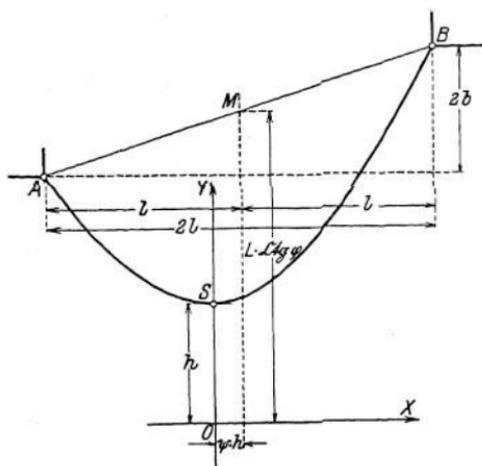


Fig. 65.

Die X-Achse liegt um den Wert $L \cdot \text{Ctg } \varphi$ senkrecht unter dem Mittelpunkt M der Verbindungslinie der Aufhängepunkte; die Y-Achse weicht um den Wert $\psi \cdot h$ nach der Seite des tiefer gelegenen Aufhängepunktes von der Vertikalen durch den Mittelpunkt M ab, wobei ψ bestimmt ist durch

$$\text{Ctg } \psi = \frac{b}{L}.$$

Für eine symmetrisch aufgehängte Kette ist $b = 0$, folglich $\frac{\text{Sin } \varphi}{\varphi} = \frac{L}{l}$; der Aufhängewinkel α ergibt sich aus

$$\cos \alpha = \frac{l \cdot \text{Ctg } \varphi}{L \cdot \varphi}.$$

Beispiel: Ein Seil von 36 m Länge sei in zwei Punkten aufgehängt, deren horizontale Entfernung 24 m und deren Höhenunterschied 8 m beträgt. Es wird

$$\frac{\text{Sin } \varphi}{\varphi} = \frac{\sqrt{L^2 - b^2}}{l} = \frac{\sqrt{18^2 - 4^2}}{12} = 1,463.$$

Aus der Tabelle findet man durch Probieren

φ	1,6	1,59	1,58	1,57
$\text{Sin } \varphi$	2,3756	2,3499	2,3245	2,2993
$\frac{\text{Sin } \varphi}{\varphi}$	1,486	1,480	1,472	1,463.

Mit dem so bestimmten Wert $\varphi = 1,463$ wird

$$h = \frac{l}{\varphi} = \frac{12}{1,57} = 7,65 \text{ m}; \quad L \cdot \text{Ctg } \varphi = \frac{L}{\text{Ctg } \varphi} = \frac{18}{0,917} = 19,65 \text{ m};$$

$$\text{Ctg } \psi = \frac{b}{L} = \frac{4}{18} = 0,2222; \quad \psi = 0,226,$$

dann beträgt die horizontale Ausweichung des Koordinatenanfangspunktes

$$\psi \cdot h = 0,226 \cdot 7,65 = 1,73 \text{ m}.$$

Damit ist die Lage des Achsenkreuzes und des tiefsten Punktes festgelegt.

j) Kurven, deren Gleichung die Form $r^m = a^m \cdot \cos(m\varphi)$ hat.

1. $m = 1$ ergibt $r = a \cdot \cos \varphi$ als Polargleichung des Kreises; aus $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ erhält man die Scheiteltgleichung für das rechtwinklige Achsenkreuz (Fig. 66)

$$x^2 + y^2 = a \cdot x.$$

2. $m = -1$. Die Gleichung der Kurve lautet:

$$r^{-1} = a^{-1} \cdot \cos \varphi,$$

$$a = r \cdot \cos \varphi.$$

Da die Projektion des Leitstrahles konstant sein soll, müssen seine Endpunkte auf einer Parallelen zur Y-Achse liegen; bezogen auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz heißt die Gleichung $x = a$.

3. $m = 2$. Die Gleichung der Kurve lautet:

$$r^2 = a^2 \cdot \cos 2\varphi$$

oder

$$r^4 = a^2(y^2 \cos^2 \varphi - r^2 \cdot \sin^2 \varphi)$$

aus $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ erhält man für rechtwinklige Koordinaten

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

als Gleichung der Lemniskate oder Schleifenkurve (Fig. 67), die sich auch aus der Definition der Kurve als geometrischer Ort aller Punkte P ergibt,

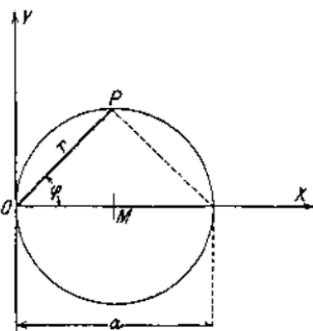


Fig. 66.

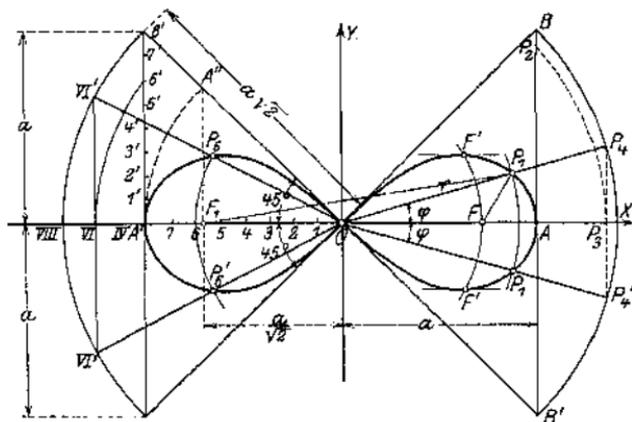


Fig. 67.

für die das Produkt ihrer Abstände PF und PF_1 von den festen Punkten F und F_1 konstant und zwar $\frac{1}{2} a^2$ ist. Da nur die Quadrate der Variablen in der Gleichung vorkommen, sind die Koordinatenachsen Symmetrieachsen. Die beiden Äste der Kurve stehen im Koordinatenanfangspunkt senkrecht aufeinander; die Halbachse der Kurve ist a .

Konstruktion: Aus der Polargleichung $r^2 = a^2 \cdot \cos 2\varphi$ ergibt sich

$$r^2 = 2 \cdot a^2 \cos^2 \varphi - a^2 = (a\sqrt{2} \cdot \cos \varphi)^2 - a^2.$$

Ist $OA = OA' = a$, so mache man $AB = AB' = a$; schlage mit dem beliebigen Fahrstrahl $OP'_1 = r$ um O einen Kreis und mache $AP_2 = r$; schlage

mit OP_2 um O einen Kreis, der die X -Achse in P_3 trifft, dann schneidet die Ordinate in P_3 den Kreis um O mit dem Radius $OB = a\sqrt{2}$ in P_4 ; verbinde P_4 mit O , dann ist der Schnittpunkt P_1 von OP_4 und dem Kreise mit dem Radius r ein Punkt der Lemniskate.

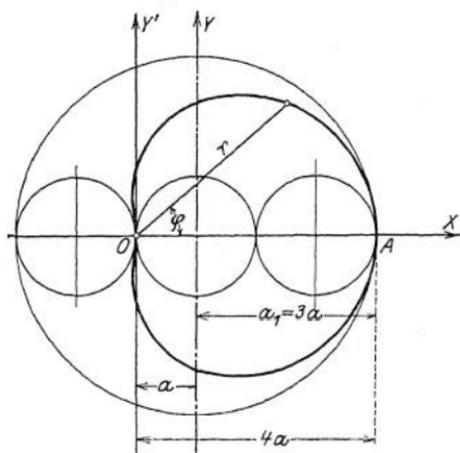


Fig. 68.

aus $2 \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2} = 1 + \cos \varphi$ folgt $2r^2 - ar \cos \varphi = ar$,

und da für rechtwinklige Koordinaten $r^2 = x^2 + y^2$ und $r \cdot \cos \varphi = x$ ist, ergibt sich

$$4(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - ax) = a^2 y^2$$

als Gleichung der Kardioide (Fig. 68) (vgl. S. 207).

k) Gleichungen einiger anderer Kurven.

1. Die Zissoide (Efeublattkurve, Fig. 69). Die Gleichung der Kurve lautet in Polarkoordinaten

$$r \cdot \cos \varphi = a \cdot \sin^2 \varphi.$$

Errichtet man über a als Durchmesser einen Kreis, so wird $AB = a \cdot \sin \varphi$ und die Projektion dieser Strecke auf die Horizontale durch B $BC = a \cdot \sin^2 \varphi$; aus der Gleichung folgt $BD = r$. Trägt man von O aus BD ab, so ist P ein Punkt der Zissoide. Mit $x = r \cdot \cos \varphi$ und $y = r \cdot \sin \varphi$ erhält man für rechtwinklige Koordinaten

$$y^2(a - x) = x^3.$$

2. Die Konchoide (Fig. 70). Zieht man von einem Pole O nach einer Geraden BAB_1 Strahlen OP_1CP und trägt von ihren Schnittpunkten C mit der Geraden BAB_1 aus die unveränderliche Länge a nach beiden Seiten ab, so liegen die Endpunkte auf einer Konchoide. Ist b die Entfernung der Geraden BB_1 vom Pol O , so lautet die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten

$$r = \frac{b}{\cos \varphi} \pm a.$$

Bezieht man diese Gleichung auf rechtwinklige Koordinaten (vgl. S. 108), so erhält man

$$(x^2 + y^2)(x - b)^2 = a^2 x^2.$$

3. Die Exponentialkurve ist die graphische Darstellung der Exponentialfunktion

$$y = a^x.$$

Eine besondere Form der Gleichung ist

$$y = e^x$$

wobei $e = 2,71828 \dots$ die Basis des natürlichen Logarithmensystems ist.

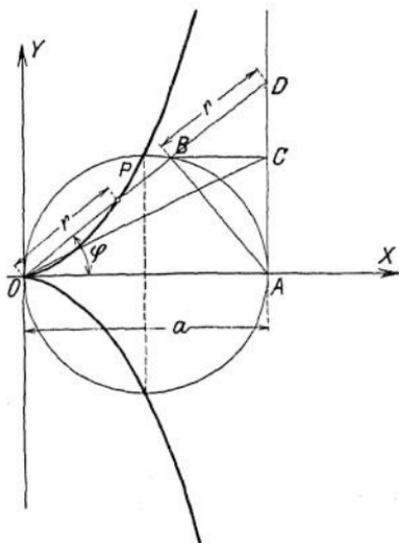


Fig. 69.

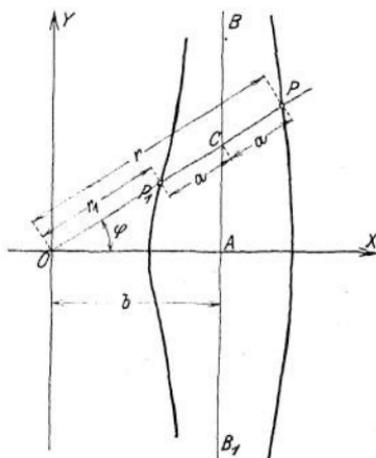


Fig. 70.

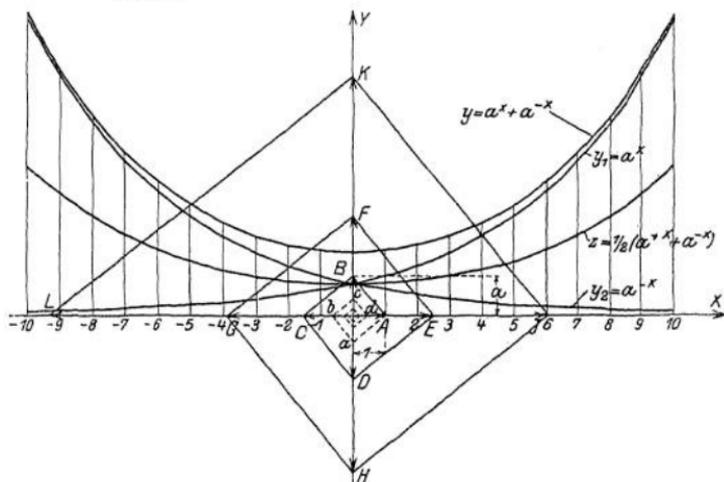


Fig. 71.

Nimmt man 1 als Strecke (Maßstab der X-Achse) und a als Strecke (Maßstab der Y-Achse) an, so ergibt sich die Konstruktion der Exponentialkurve folgendermaßen: mache $OA = 1$ (Fig. 71) und $OB = a$; zieht man $BC \perp AB$, so

wird $OC = a^2$; $CD \perp BC$ liefert $OD = a^3$; $DE \perp CD$ liefert $OE = a^4 \dots$. Zieht man $Aa \perp BA$, so wird $Oa = a^{-1}$; $ba \perp aA$ liefert $Ob = a^{-2}$, $cb \perp ba$ liefert a^{-3} ; $dc \perp bc$ liefert $a^{-4} \dots$. Trägt man die so gefundenen Werte $\dots a^{-2}, a^{-1}, a^0 = 1, a^1, a^2 \dots$ als Ordinaten zu den zugehörigen Werten $\dots x = -2; x = -1; x = 0; x = 1; x = 2 \dots$ auf, so erhält man die Exponentialkurve $y_1 = a^x$. In entsprechender Weise ergibt sich die Exponentialkurve $y_2 = a^{-x}$, die in Beziehung auf die Y -Achse symmetrisch zu $y_1 = a^x$ liegt.

Durch Addition der Einzelordinaten erhält man die Kurve

$$y = y_1 + y_2 = a^x + a^{-x}.$$

Halbiert man die Ordinaten dieser Kurve, so ergibt sich

$$z = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x}),$$

die in die Kettenlinie übergeht, wenn $a = e = 2,71828 \dots$ ist; der Parameter der Kettenlinie ist in diesem Falle $h = 1$.

4. Die logarithmische Kurve. Durch Logarithmieren erhält man aus

$$y = a^x$$

$$\log y = x \cdot \log a.$$

Nimmt man a als Basis eines Logarithmensystems an, so wird $\log a$ für die Basis a gleich 1, so daß

$$x = \log_a y;$$

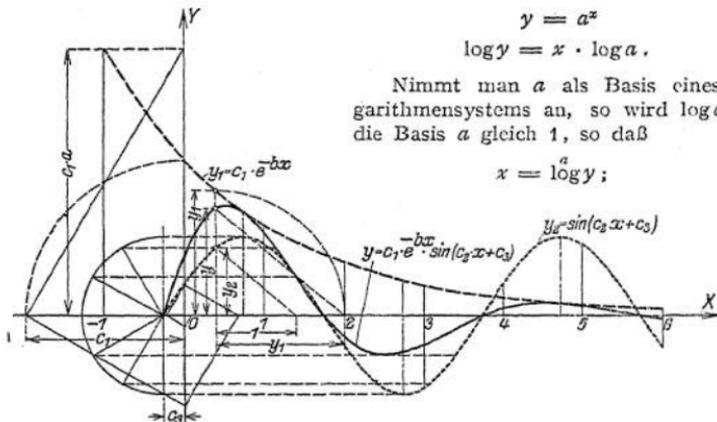


Fig. 72.

es ist dies die inverse Funktion der Exponentialfunktion; mit $x = y'$ und $y = x'$ erhält man

$$y' = \log_a x'.$$

Die graphische Darstellung ergibt die gleiche Kurve wie in Fig. 71, doch sind die Achsen miteinander vertauscht.

5. Die Kurve der gedämpften Schwingung (Fig. 72). Ihre Gleichung lautet

$$y = c_1 \cdot e^{-bx} \cdot \sin(c_2 x + c_3)$$

und ist der mathematische Ausdruck für gedämpfte pendelartige Schwingungen. Sie ergibt sich durch Multiplikation der Funktionen $y_1 = c_1 \cdot e^{-bx}$ und $y_2 = \sin(c_2 x + c_3)$; ihr Verlauf ist periodisch, doch nehmen die Höchstwerte wie die Werte der Exponentialfunktion y_1 ab; die Größe der Dämpfung hängt von b ab.

$y_2 = \sin(c_2 x + c_3)$ ist eine um c_3 nach links verschobene Sinuslinie, die nach Fig. 59 S. 137 entworfen läßt.

$y_1 = c_1 \cdot e^{-bx}$ entspricht der Kurve $y_1 = c_1 \cdot a^{-x}$ unter (3), wenn man $= a$ setzt. Trägt man unter Zugrundeliegung eines Maßstabes auf der Achse den Wert $c_1 \cdot a$, auf der x -Achse den Wert c_1 ab (Fig. 72), so erhält man durch Anwendung des Verfahrens unter (3) die zu den Abszissen

1, 2, 3... gehörenden Ordinaten y_1 . Aus $y = y_1 \cdot y_2$ folgt $y:y_1 = y_2:1$, d. h. y ist die vierte Proportionale zu y_1 , y_2 und 1. Um die beliebige Ordinate y graphisch zu finden, trägt man y_1 und 1 auf der Achse ab, verbindet die Endpunkte von y_2 und 1 und zieht zu dieser Geraden durch den Endpunkt von y_1 (auf der x -Achse) eine Parallele, die auf der Vertikalen die Ordinate y abschneidet.

VIII. Infinitesimalrechnung.

Bearbeitet von Dipl.-Ing. H. Winkel.

A. Die Differentialrechnung.

Es sei die Aufgabe gestellt, an die Kurve $y = f(x)$ im Punkte $P(x, y)$ eine Tangente zu konstruieren. Da die Tangente als gerade Linie durch Punkt und Richtung eindeutig bestimmt ist, so handelt es sich in der vorgelegten Aufgabe darum, die Richtung zu ermitteln. Man verbinde den Punkt P (Fig. 73) mit dem so nahe liegenden Punkt P_1 der Kurve $y = f(x)$, daß die Koordinaten x_1, y_1 um einen sehr kleinen, aber endlichen Betrag $\Delta x = x_1 - x$ bzw. $\Delta y = y_1 - y$ von x und y verschieden sind. Durch die Gerade P_1P ist der Neigungswinkel τ festgelegt durch die Beziehung

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}.$$

Läßt man den Punkt P_1 auf der Kurve in Richtung P wandern, so ändert sich die Richtung der Sekante P_1P . In dem Augenblicke, wo P_1 mit P zusammenfällt, wird die Sekante zur Tangente, der Neigungswinkel τ der Sekante geht über in den Neigungswinkel φ der Tangente. Betrachtet man die Änderungen, die Δx und damit Δy während der Wanderung des Punktes P_1 erfahren, so wird man sagen: die veränderliche Größe Δx nimmt immer kleinere und kleinere Werte an als jede gegebene Größe, sie wird verschwindend klein. Fällt P_1 mit P zusammen, so wird $\Delta x = 0$. Da die Gerade P_1P sofort wieder Sekante wird, wenn P_1 über P nach links weiter wandert, so faßt man die Tangente als Grenzfall der Sekante auf und sagt: die Sekante wird zur Tangente, wenn sich der sehr kleine, aber endliche Wert der veränderlichen Größe Δx der Grenze $\Delta x = 0$ nähert; es ist demnach der Neigungswinkel φ der Tangente gleich dem Grenzfall des Neigungswinkels τ der Sekante

$$\operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \tau \quad \text{lies:} \quad \operatorname{Limes} \operatorname{tg} \tau \quad \text{für} \quad \Delta x = 0,$$

(Limes = Grenze). Spricht man von „verschwindend kleinen“ oder „unendlich kleinen Größen“, so muß man sich stets vergegenwärtigen, daß es sich zunächst um sehr kleine, aber endliche Größen handelt, die sich dann der Grenze 0 nähern und im Grenzfall zu Null werden; man hat es mit einer stetigen Abnahme von Δx zu tun. An dieser Betrachtungsweise muß festgehalten werden, da mit $\Delta x = 0$ auch — eine stetige Funktion $y = f(x)$ vorausgesetzt — $\Delta y = 0$ werden würde, der Ausdruck $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \tau$ demnach den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ annehmen würde. Durch diese Betrachtungsweise erhält man für $\frac{0}{0}$, womit

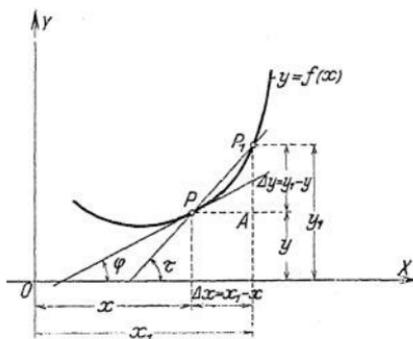


Fig. 73.

man nichts anfangen kann, einen reellen Wert: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \tau = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist die Steigung der Tangente im Punkte $P(x, y)$ der Kurve $y = f(x)$.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{\Delta x}$ heißt Differenzenquotient; für den Grenzfall schreibt man nach dem Vorschlage von Leibniz

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y_1 - y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi.$$

dx und dy sind die Differentiale; unter dx versteht man den verschwindend — unendlich — kleinen Zuwachs von x ; $\frac{dy}{dx}$ ist der Differentialquotient; wird aus der gegebenen Funktion $y = f(x)$ der Differentialquotient gebildet, so sagt man: die Funktion $y = f(x)$ ist differenziert worden. Man kann eine Funktion sofort differenzieren, wenn man in der Lage ist, die Tangente an die Kurve $y = f(x)$ zu zeichnen, und man kann eine Tangente an die Kurve $y = f(x)$ legen, wenn man den Ausdruck

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y_1 - y}{\Delta x}$$

bildet.

Beispiele: 1. Es ist die Funktion $y = ax$ zu differenzieren. Da die Kurve eine gerade Linie durch den Koordinatenanfangspunkt ist, deren Richtungskonstante $\operatorname{tg} \varphi = a$ bekannt ist, so wird

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = a \quad \text{oder} \quad \frac{d(ax)}{dx} = a \quad \text{oder} \quad d(ax) = a \cdot dx.$$

2. Es ist die Funktion $y = a$ zu differenzieren. Die Kurve $y = a$ ist eine Parallele zur Y -Achse, ihre Richtungskonstante ist

$$\operatorname{tg} \varphi = 0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d(a)}{dx} = 0 \quad \text{oder} \quad d(a) = 0,$$

in Worten: Das Differential einer Konstanten (a) ist gleich Null.

3. Es ist die Funktion $y = ax^3$ zu differenzieren. Der benachbarte Punkt P_1 hat die Koordinaten $x_1 = x + \Delta x$; $y_1 = y + \Delta y$, die der Gleichung der Kurve genügen müssen, d. h. $y_1 = a \cdot (x + \Delta x)^3$. Man bildet zunächst

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{\Delta x} = \frac{a[(x + \Delta x)^3 - x^3]}{\Delta x} = \frac{a[x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3]}{\Delta x}.$$

Die Einsetzung $\Delta x = 0$ darf erst dann geschehen, wenn Δx aus dem Nenner verschwunden ist. Ausdividiert ergibt sich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{\Delta x} = a [3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2].$$

Jetzt erst darf der Übergang zur Grenze durchgeführt werden; mit $\Delta x = 0$ wird

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = a \cdot 3x^2.$$

Der konstante Faktor a blieb bei der Entwicklung Faktor.

Mit $x^2 = \frac{y}{a \cdot x}$ wird $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x}$ gleich der Steigung der Tangente im Punkte P der Kurve $y = ax^3$ (Fig. 74); der zweite Punkt A der Tangente ist durch $P'A = 3y$ bestimmt.

Setzt man die Symbole der allgemeinen Formen ein, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi.$$

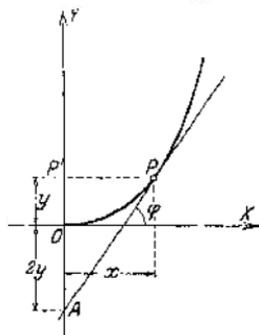


Fig. 74.

a) Allgemeine Regeln.

1. Differentiation von Summe und Differenz. Gegeben seien die Funktionen $u = F(x)$ und $v = f(x)$; ihre graphische Darstellung zeigt Fig. 75. Die gestrichelte Kurve ist $y = u + v$. Man findet den unendlich kleinen Zuwachs dy als Summe der unendlich kleinen Größen du und dv , so daß

$y = u + v$; $dy = du + dv$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx};$$

d. h. eine Summe bzw. eine Differenz wird durch Differentiation der Summanden differenziert.

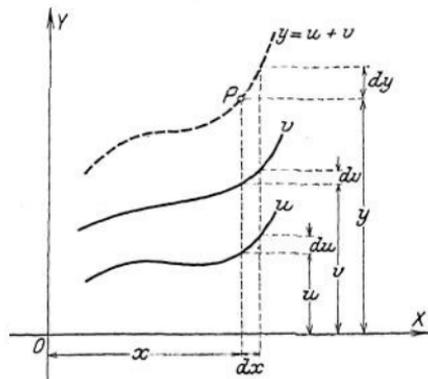


Fig. 75.

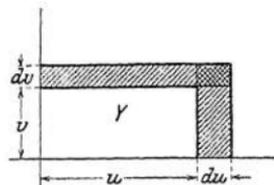


Fig. 76.

2. Differentiation von Produkt und Quotient. $y = u \cdot v$, wobei $u = F(x)$; $v = f(x)$. Werden u und v als Strecken aufgefaßt, so wird y dargestellt durch ein Rechteck (Fig. 76); wachsen u um du und v um dv , so wächst y um die gestrichelte Fläche, die sich aus drei Rechtecken ($u \cdot dv$), ($v \cdot du$) und ($du \cdot dv$) zusammensetzt. Das Produkt $du \cdot dv$ heißt unendlich kleine Größe zweiter Ordnung; sie darf gegen eine verschwindend kleine Größe erster Ordnung vernachlässigt werden, und man erhält als Resultat:

$$dy = u \cdot dv + v \cdot du; \quad \frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}.$$

Sind mehrere Faktoren vorhanden, von denen jeder einzelne eine Funktion von x ist, so ergibt sich

$$d(u \cdot v \cdot w \dots) = \left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \dots \right) u \cdot v \cdot w \dots$$

Ist $y = \frac{u}{v}$, so stellt $u = v \cdot y$ ein Rechteck dar und man erhält $du = v \cdot dy + y \cdot dv$ und daraus

$$dy = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

3. Differentiation einer Potenz. Gegeben sei $y = a \cdot x^n$, dann ist $y_1 = a \cdot x_1^n = a \cdot (x + \Delta x)^n$; der Differenzenquotient erhält die Form

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{a \cdot [(x + \Delta x)^n - x^n]}{\Delta x} \\ &= \frac{a \cdot \left[x^n + n x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \dots - x^n \right]}{\Delta x} \\ &= a \cdot \left[n \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x + \dots \right]. \end{aligned}$$

Setzt man beim Grenzübergang $\Delta x = 0$, so ergibt sich

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = a \cdot n \cdot x^{n-1}$$

oder

$$dy = a \cdot n \cdot x^{n-1} \cdot dx$$

oder

$$d(a \cdot x^n) = a \cdot n \cdot x^{n-1} \cdot dx.$$

Eine Wurzel wird als Potenz mit gebrochenem Exponenten behandelt.

4. Differentiation der trigonometrischen Funktionen. Es ist die Funktion $y = \sin x$ zu differenzieren. In Fig. 77 ist

$$AA' = \sin x = y; \quad BB' = \sin(x + dx) = y_1; \quad BC = dy = y_1 - y.$$

Ist der Bogen AB verschwindend klein, so fällt die Sehne AB mit dem Bogen und mit der Tangente zusammen, es wird $BA \perp MA$ und $\sphericalangle CBA = \sphericalangle x$. Aus dem rechtwinkligen Dreieck ABC erhält man

$$BC = BA \cdot \cos CBA,$$

$$dy = dx \cdot \cos x, \quad \text{so daß} \quad \frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$\text{oder} \quad \frac{d \sin x}{dx} = \cos x,$$

$$\text{oder} \quad d \sin x = \cos x \cdot dx.$$

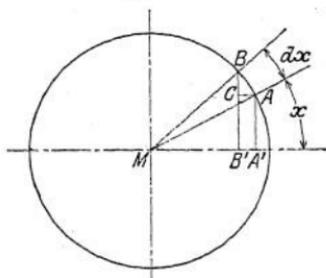


Fig. 77.

Die übrigen trigonometrischen Funktionen vgl. Tabelle S. 153.

5. Differentiation der logarithmischen Funktion. Es ist die Funktion $y = \log x$ zu differenzieren; es wird

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y_1 - y}{\Delta x} = \frac{\log(x + \Delta x) - \log x}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \cdot \log \frac{x + \Delta x}{x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \log \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right). \end{aligned}$$

Setzt man $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{n}$ und $\Delta x = \frac{x}{n}$, so erhält man

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{n}{x} \cdot \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{x} \cdot \log \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right].$$

Wird Δx unendlich klein, so wird n unendlich groß, folglich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right].$$

Mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e = 2,71828 \dots$ wird $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \log e$.

Für e als Basis des Logarithmensystems wird $\log e = 1$, so daß

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x},$$

wenn $y = \ln x$.

6. Differentiation inverser Funktionen. Löst man die Gleichung $y = f(x)$ nach x auf, so erhält man $x = F(y)$. Da diese Funktion aus $y = f(x)$ durch Umkehrung entsteht, heißt sie invers.

$$\text{Aus } 1 = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{dF(y)}{dy} \text{ erhält man}$$

$$\frac{dF(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dF(y)}{dy}},$$

d. h. die Differentialquotienten inverser Funktionen sind einander reziprok.

$$1) \quad y = f(x) = \arcsin x, \quad \text{dann ist} \quad x = F(y) = \sin y,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\arcsin x)}{dx} = \frac{1}{\frac{d(\sin y)}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$2) \quad y = a^x; \quad x = \log_a y; \quad x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln y;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{d \ln y}{dy}} = y \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a;$$

$$d(a^x) = a^x \cdot \ln a \cdot dx.$$

Für $a = e$ wird $\ln a = \ln e = 1$, so daß $d(e^x) = e^x \cdot dx$.

$y = e^x$ ist die einzige Funktion, die mit ihrer Ableitung $\frac{dy}{dx}$ übereinstimmt; man nennt e^x die „Exponentialfunktion“ (vgl. S. 145).

7. Differentiation unentwickelter Funktionen. Ist die unentwickelte Funktion $f(xy) = 0$ gegeben, so läßt sich der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ durch

direkte Differentiation finden, indem man die Glieder mit x nach x , die Glieder mit y nach y differenziert; z. B. $y^2 = 2px$; $2y dy = 2p dx$; $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$. Ist $y = f(u, v)$ eine Funktion von zwei Veränderlichen u und v ,

so wird sich y im allgemeinen schon verändern, wenn sich nur u verändert, v aber konstant bleibt, oder wenn sich nur v verändert, u aber konstant bleibt.

Ist nur u veränderlich, so läßt sich der Differentialquotient $\frac{dy}{du}$ bilden, den man aber mit $\frac{\partial y}{\partial u}$ bezeichnet und partiellen Differentialquotienten

oder die partielle Ableitung von y nach u nennt, weil man nur u als variabel ansieht und damit die Veränderlichkeit der Funktion y beschränkt.

Es sei $y = 5u^2 + 3uv + 2v^2$, dann wird

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 10u + 3v,$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = 3u + 4v.$$

Sind die beiden Veränderlichen x und y durch die Gleichung $f(xy) = 0$ verbunden, so ist auch $f(x_1 y_1) = 0$, wenn $P_1(x_1 y_1)$ ein zweiter Punkt der Kurve ist. Da die Differenz beider Funktionen gleich Null ist, so ist auch

$$\frac{f(x_1 y_1) - f(x y)}{x_1 - x} = 0.$$

Fügt man im Zähler $f(x_1 y) - f(x_1 y)$ hinzu, so erhält man

$$\frac{f(x_1 y) - f(x y)}{x_1 - x} + \frac{f(x_1 y_1) - f(x_1 y)}{x_1 - x} = 0$$

oder wenn man das zweite Glied mit $\frac{y_1 - y}{y_1 - y}$ erweitert,

$$\frac{f(x_1 y) - f(x y)}{x_1 - x} + \frac{f(x_1 y_1) - f(x_1 y)}{y_1 - y} \cdot \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = 0.$$

Betrachtet man im ersten Gliede y als Konstante und setzt $x_1 = x + \Delta x$, so kann man schreiben

$$\frac{f(y; x_1) - f(y; x)}{x_1 - x} = \frac{f(y; x + \Delta x) - f(y; x)}{\Delta x}.$$

Betrachtet man im zweiten Gliede x als Konstante und setzt $y_1 = y + \Delta y$, so kann man schreiben

$$\frac{f(x_1 y_1) - f(x_1 y)}{y_1 - y} = \frac{f(x_1; y + \Delta y) - f(x_1 y)}{\Delta y}.$$

Beim Übergang zur Grenze erhält man

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(y; x + \Delta x) - f(y; x)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x y)}{\partial x},$$

wobei $y = \text{konst.}$,

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_1; y + \Delta y) - f(x_1 y)}{\Delta y} = \frac{\partial f(x y)}{\partial y},$$

wobei $x = \text{konst.}$,

$$\lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y_1 - y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

und damit

$$\frac{\partial f(x y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f(x y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x y)}{\partial y}}.$$

Beispiel: Es ist die Richtungskonstante $m = \text{tg } \varphi$ der Tangente im Punkte $P(x y)$ der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ zu bestimmen. Man schreibt die Gleichung $x^2 b^2 + y^2 a^2 - a^2 b^2 = 0$ und bildet

$$\frac{\partial f(x y)}{\partial x} = 2 b^2 x; \quad \frac{\partial f(x y)}{\partial y} = 2 a^2 y, \quad \text{folglich} \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Die Funktion sei in Parameterdarstellung gegeben: $x = f_1(t); y = f_2(t)$. In diesem Falle differenziert man beide Gleichungen nach t und setzt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}.$$

Beispiel: Es sei die Gleichung der Ellipse

$$x = a \cdot \cos \varphi; \quad y = b \cdot \sin \varphi$$

gegeben; dann wird

$$\frac{dy}{d\varphi} = b \cdot \cos \varphi; \quad \frac{dx}{d\varphi} = -a \cdot \sin \varphi,$$

folglich

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{b \cdot \cos \varphi}{a \cdot \sin \varphi} = - \frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

b) Differentialformeln (Fundamentaldifferentiale).

1. $y = a$; $\frac{dy}{dx} = 0$.
2. $y = a + x$; $\frac{dy}{dx} = 1$.
3. $y = u + v + w + \dots$; $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} + \dots$
4. $y = u \cdot v$; $dy = u \cdot dv + v \cdot du$.
5. $y = \frac{u}{v}$; $dy = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$.
6. $y = u \cdot v \cdot w \dots$; $dy = \left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \dots \right) u \cdot v \cdot w \dots$
7. $y = a \cdot x^n$; $dy = a \cdot n \cdot x^{n-1} \cdot dx$.
8. $y = \sqrt{x}$; $dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.
9. $y = \frac{1}{x}$; $dy = -\frac{dx}{x^2}$.
10. $y = e^x$; $dy = e^x \cdot dx$.
11. $y = a^x$; $dy = a^x \cdot \ln a \cdot dx$.
12. $y = \ln x$; $dy = \frac{dx}{x}$.
13. $y = \log_a x$; $dy = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{dx}{x}$.
14. $y = \sin x$; $dy = \cos x \cdot dx$.
15. $y = \frac{1}{\sin x}$; $dy = -\frac{\cos x \cdot dx}{\sin^2 x}$.
16. $y = \cos x$; $dy = -\sin x \cdot dx$.
17. $y = \frac{1}{\cos x}$; $dy = \frac{\sin x \cdot dx}{\cos^2 x}$.
18. $y = \operatorname{tg} x$; $dy = \frac{dx}{\cos^2 x}$.
19. $y = \operatorname{ctg} x$; $dy = -\frac{dx}{\sin^2 x}$.
20. $y = \arcsin x$; $dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
21. $y = \arccos x$; $dy = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
22. $y = \operatorname{arctg} x$; $dy = \frac{dx}{1+x^2}$.
23. $y = \operatorname{arctctg} x$; $dy = -\frac{dx}{1+x^2}$.
24. $y = x^z$; $dy = x^{z-1} (x \ln x \cdot dz + z \cdot dx)$.
25. $y = f(u; v; w \dots)$; $dy = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot dv + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot dw + \dots$

c) Differentialquotienten höherer Ordnung.

Ist $y = f(x)$ die gegebene Funktion, so wird $\frac{dy}{dx}$ wieder eine Funktion von x ; sie heißt die abgeleitete Funktion und wird auch geschrieben y' . Ist der erste Differentialquotient gebildet, so ist $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ die erste Ableitung. Wie jede andere Funktion hat auch die abgeleitete Funktion als graphische Darstellung eine Kurve; diese Kurve ist die Differentiellinie der Funktion $y = f(x)$. Wiederholt man die Betrachtung S. 147, Fig. 73, so läßt sich an diese Kurve in gleicher Weise eine Tangente konstruieren, deren Steigung $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy'}{dx}$ ist. Man nennt

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{d \frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = f''(x)$$

die zweite Ableitung; ihre graphische Darstellung gibt wieder eine Kurve, deren Steigung $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy''}{dx}$ ist. Dafür schreibt man $\frac{d^3y}{dx^3} = y''' = f'''(x)$.

Bei n maliger Wiederholung ergibt sich der n te Differentialquotient oder die n te Ableitung

$$\frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)} = f^{(n)}(x).$$

Die in diesen höheren Ableitungen auftretenden Differentiale $d^2y, d^3y \dots d^ny$ bezeichnet man als Differentiale zweiter, dritter \dots n ter Ordnung. Für die Berechnung einer höheren Ableitung gelten dieselben Regeln wie bei der ersten Ableitung.

d) Anwendung der Differentialformeln.

$$1. \quad y = a + bx; \quad \frac{dy}{dx} = y' = b; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = 0.$$

$$2. \quad y = a^2 - x^2; \quad \frac{dy}{dx} = y' = -2x; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = -2.$$

$$3. \quad y = (a + bx)^2 = a^2 + 4bx + b^2x^2; \quad y' = 4b + 2b^2x; \quad y'' = 2b^2.$$

$$4. \quad y = \sqrt{x} = x^{1/2}; \quad y' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$y'' = -\frac{1}{4} \cdot x^{-3/2} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}.$$

$$5. \quad x = \frac{1}{x^3} = x^{-3}; \quad y' = -3 \cdot x^{-4} = -\frac{3}{x^4};$$

$$y'' = +12 \cdot x^{-5} = \frac{12}{x^5}.$$

$$6. \quad y = (a + bx)^6; \quad \text{setze } a + bx = z; \quad b \cdot dx = dz; \quad y = z^6$$

$$dy = 6 \cdot z^5 \cdot dz = 6(a + bx)^5 \cdot b \cdot dx; \quad y' = 6b(a + bx)^5;$$

$$y' = 6b \cdot z^5; \quad dy' = 6 \cdot 5 \cdot b \cdot z^4 \cdot dz = 30b(a + bx)^4 \cdot b \cdot dx$$

$$y'' = 30b^2(a + bx)^4.$$

$$7. \quad y = \sqrt{a^2 - x^2}; \quad \text{setze } a^2 - x^2 = z; \quad -2x \cdot dx = dz; \quad y = z^{1/2};$$

$$dy = \frac{1}{2} \cdot z^{-1/2} \cdot dz = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-1/2} \cdot (-2x) \cdot dx;$$

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$8. \quad y = \sqrt[3]{3x - 2x^2}; \quad \text{setze } 3x - 2x^2 = z; \quad (3 - 4x) \cdot dx = dz;$$

$$y = z^{1/3}; \quad dy = \frac{1}{3} \cdot z^{-2/3} \cdot dz = \frac{1}{3}(3x - 2x^2)^{-2/3}(3 - 4x) \cdot dx;$$

$$y' = \frac{1 - \frac{4}{3}x}{\sqrt[3]{(3x - 2x^2)^2}}.$$

$$9. \quad y = \sqrt{a^2 + ax + x^2} = z^{1/2}; \quad dz = (a + 2x) \cdot dx;$$

$$dy = \frac{1}{2} \cdot z^{-1/2} \cdot dz = \frac{1}{2}(a^2 + ax + x^2)^{-1/2}(a + 2x) dx;$$

$$y' = \frac{a + 2x}{2\sqrt{a^2 + ax + x^2}}.$$

10. $y = \frac{a}{\sqrt{a-x}} = a \cdot x^{-1/2}$; $dz = -dx$;
 $dy = -\frac{1}{2} \cdot a \cdot x^{-3/2} \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot a \cdot (a-x)^{-3/2} (-dx)$;
 $y' = \frac{a}{2\sqrt{(a-x)^3}}$.
11. $y = x^2 \cdot (a + bx^3)$; setze $x^2 = u$; $a + bx^3 = v$; $2x \cdot dx = du$;
 $3bx^2 \cdot dx = dv$; $dy = x^2 \cdot 3bx^2 \cdot dx + (a + bx^3) \cdot 2x \cdot dx$;
 $y' = 3bx^4 + 2x(a + bx^3)$;
 $y' = 3bx^4 + 2ax + 2bx^4 = 2ax + 5bx^4$.
12. $y = (a + bx)^3 \cdot (a - x)$; setze $(a + bx)^3 = u$; $a - x = v$;
mit Hilfe von $a + bx = z$ wird $3(a + bx)^2 \cdot b \cdot dx = du$;
 $-dx = dv$; $dy = (a + bx)^3 \cdot (-dx) + (a - x) \cdot 3b(a + bx)^2 \cdot dx$;
 $y' = (a + bx)^2 \cdot [(a + bx) + 3b(a - x)]$;
13. $y = (5 + 3x)\sqrt{6x - 5}$; setze $5 + 3x = u$; $(6x - 5)^{1/2} = v$;
 $3dx = du$; $\frac{3 \cdot dx}{\sqrt{6x - 5}} = dv$;
 $dy = (5 + 3x) \cdot \frac{3 \cdot dx}{\sqrt{6x - 5}} + 3 \cdot dx \sqrt{6x - 5}$;
 $y' = \frac{3(5 + 3x) + 3(6x - 5)}{\sqrt{6x - 5}} = \frac{27x}{\sqrt{6x - 5}}$.
14. $y = \frac{1}{x} \sqrt{a^2 - x^2}$; setze $u = \frac{1}{x}$; $v = \sqrt{a^2 - x^2}$;
 $du = -\frac{dx}{x^2}$; $dv = -\frac{x \cdot dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$;
 $dy = \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{x \cdot dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) + \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \left(-\frac{dx}{x^2}\right)$;
 $y' = -\frac{a^2}{x^2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2}}$.
15. $y = \sqrt{a+x} \cdot \sqrt{b-x^2}$; setze $\sqrt{a+x} = u$; $du = \frac{dx}{2\sqrt{a+x}}$;
 $\sqrt{b-x^2} = v$; $dv = -\frac{x \cdot dx}{\sqrt{b-x^2}}$; so daß
 $dy = -\sqrt{a+x} \cdot \frac{x \cdot dx}{\sqrt{b-x^2}} + \sqrt{b-x^2} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{a+x}}$;
 $y' = \frac{-(a+x)x + (b-x^2)}{2\sqrt{a+x} \cdot \sqrt{b-x^2}} = \frac{b - ax - 2x^2}{2\sqrt{(a+x)(b-x^2)}}$.
16. $y = \frac{ax}{b+x}$; setze $a \cdot x = u$; $du = a \cdot dx$; $b+x = v$;
 $dx = dv$; $dy = \frac{(b+x) \cdot a \cdot dx - ax \cdot dx}{(b+x)^2}$; $y' = \frac{ab}{(b+x)^2}$.

$$17. \quad y = \frac{a-x}{a+x}; \quad \text{setze } a-x = u; \quad du = -dx; \quad a+x = v;$$

$$dv = dx; \quad dy = \frac{(a+x)(-dx) - (a-x) \cdot dx}{(a+x)^2}; \quad y' = \frac{-2a}{(a+x)^2}.$$

$$18. \quad y = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}; \quad \text{setze } 1-\sqrt{x} = u; \quad du = -\frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} \cdot dx$$

$$= -\frac{dx}{2\sqrt{x}}; \quad 1+\sqrt{x} = v; \quad dv = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} \cdot dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}};$$

$$dy = \frac{(1+\sqrt{x}) \cdot \left(-\frac{dx}{2\sqrt{x}}\right) - (1-\sqrt{x}) \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2};$$

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}.$$

$$19. \quad y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}; \quad \text{setze } x = u; \quad du = dx; \quad \sqrt{a^2-x^2} = v;$$

$$dv = -\frac{x \cdot dx}{\sqrt{a^2-x^2}}; \quad \text{so da\ss } dy = \frac{\sqrt{a^2-x^2} \cdot dx + x^2 \cdot \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}}{(a^2-x^2)};$$

$$y' = \frac{a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}.$$

$$20. \quad y = \sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}; \quad \text{setze } \sqrt{a^2-x^2} = u; \quad du = -\frac{x \cdot dx}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

$$\sqrt{a^2+x^2} = v; \quad dv = \frac{x \cdot dx}{\sqrt{a^2+x^2}}, \quad \text{so da\ss}$$

$$dy = \frac{\sqrt{a^2+x^2} \cdot \left(-\frac{x \cdot dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) - \sqrt{a^2-x^2} \cdot \frac{x \cdot dx}{\sqrt{a^2+x^2}}}{(a^2+x^2)};$$

$$y' = \frac{-2a^2 \cdot x}{(a^2+x^2)\sqrt{a^4-x^4}}.$$

$$21. \quad y = \sin ax; \quad \text{setze } a \cdot x = z; \quad dz = a \cdot dx;$$

$$dy = \cos z \cdot dz = \cos ax \cdot a \cdot dx; \quad y' = a \cdot \cos ax.$$

$$22. \quad y = \sin ax + \cos bx; \quad y' = a \cdot \cos ax - b \cdot \sin bx.$$

$$23. \quad y = \sin x^n; \quad \text{setze } \sin x = z; \quad dz = \cos x \cdot dx;$$

$$dy = n \cdot z^{n-1} \cdot dz = n \cdot \sin x^{n-1} \cdot \cos x \cdot dx.$$

$$24. \quad y = \sin(2\varphi + \alpha); \quad \text{setze } 2\varphi + \alpha = z; \quad dz = 2 \cdot d\varphi;$$

$$dy = \cos z \cdot dz = 2 \cdot \cos(2\varphi + \alpha) \cdot d\varphi; \quad y' = 2 \cdot \cos(2\varphi + \alpha).$$

$$25. \quad y = \sin x \cdot \sin 2x; \quad \sin x = u; \quad du = \cos x \cdot dx;$$

$$\sin 2x = v; \quad dv = 2 \cdot \cos 2x \cdot dx;$$

$$dy = 2 \cdot \sin x \cdot \cos 2x \cdot dx + \sin 2x \cdot \cos x \cdot dx;$$

$$y' = \sin x \cdot \cos 2x + \sin 2x \cdot \cos x = \sin 3x.$$

26. $y = \frac{\sin ax}{\sin bx}$; $\sin ax = u$; $du = a \cdot \cos ax \cdot dx$;
 $\sin bx = v$; $dv = b \cdot \cos bx \cdot dx$;
 $dy = \frac{\sin bx \cdot a \cos ax \cdot dx - \sin ax \cdot b \cdot \cos bx \cdot dx}{\sin^2 bx}$;
 $y' = \frac{a \cdot \sin bx \cdot \cos ax - b \cdot \sin ax \cdot \cos bx}{\sin^2 bx}$.
27. $y = \ln(1+x^2)$; setze $1+x^2 = z$; $dz = 2x \cdot dx$;
 $dy = \frac{dz}{z} = \frac{2x \cdot dx}{1+x^2}$; $y' = \frac{2x}{1+x^2}$.
29. $y = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$;
 setze $1+x = u$; $du = dx$; $1-x = v$; $dv = -dx$;
 $dy = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v} = \frac{dx}{1+x} + \frac{dx}{1-x}$;
 $y' = \frac{(1+x) + (1-x)}{1-x^2} = \frac{2}{1-x^2}$.
30. $y = e^x \cdot x^n$; setze $e^x = u$; $du = e^x \cdot dx$; $x^n = v$;
 $dv = n \cdot x^{n-1} \cdot dx$, so daß
 $dy = e^x \cdot n \cdot x^{n-1} \cdot dx + x^n \cdot e^x \cdot dx$; $y' = e^x(n \cdot x^{n-1} + x^n)$.
31. $y = x^x$; $\ln y = x \cdot \ln x$; $d(\ln y) = d(x \cdot \ln x)$;
 $\frac{dy}{y} = x \cdot \frac{dx}{x} + \ln x \cdot dx$;
 $y' = \frac{dy}{dx} = y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x)$.
32. $y = \ln \sin x$; setze $\sin x = z$; $dz = \cos x \cdot dx$;
 $dy = \frac{dz}{z} = \frac{\cos x \cdot dx}{\sin x}$; $y' = \operatorname{ctg} x$.

e) Differentiallinien.

1. Es ist der Weg bei gleichförmig beschleunigter Bewegung

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g t^2,$$

dann wird

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 + g t \quad \text{und} \quad p = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = g.$$

$v = f(t)$ ist die Differentiallinie zu $s = f(t)$;

$p = f(t)$ ist die Differentiallinie zu $v = f(t)$, also die zweite Differentiallinie zu $s = f(t)$ (Fig. 78).

2. Es sei $y = \sin x$, dann ist

$$y' = \frac{dy}{dx} = \cos x, \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = -\sin x, \quad y''' = \frac{dy''}{dx} = -\cos x.$$

Die Differentiallinien der Funktion $y = \sin x$ sind Sinuslinien, und zwar ist y' gegen y um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschoben; y'' ist gegen y um π nach links verschoben; y''' ist gegen y um $\frac{3}{2}\pi$ nach links verschoben usw.

3. Solange der gegebenen Kurve ein mathematisches Gesetz zugrunde liegt, d. h. die Gleichung $y = f(x)$ bekannt ist, läßt sich die Differentiallinie aus $y' = f'(x)$ darstellen. In den meisten technischen Fällen ist aber die zu differenzierende Funktion nur graphisch bekannt, z. B. die Zeitweglinien oder der zeitliche Verlauf des magnetischen Flusses. Um aus diesen Linien die Differentiallinie zu finden, verfährt man wie folgt¹⁾:

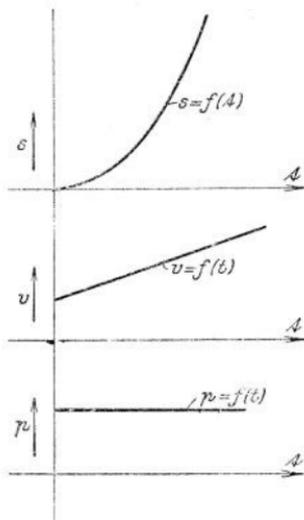


Fig. 78.

Man verschiebt die zu differenzierende Kurve um eine kleine Strecke u (Fig. 79) parallel zur X -Achse und trägt die Differenzen aus den Ordinaten der ursprünglichen und der verschobenen Kurve von der X -Achse aus in entsprechender Weise ab. Es ist $b = f(x)$ die ursprüngliche; $a = f(x + u)$ die verschobene Kurve, dann ist

$$c = a - b = f(x + u) - f(x).$$

Da $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x + u) - f(x)}{u} = f'(x)$

ist, wird die Differenzkurve zur Differentiallinie für verschwindend kleine Werte von u . Ist u ein endlicher Wert, so muß die nach obigem

Verfahren gezeichnete Differentiallinie um $\frac{u}{2}$

nach rechts verschoben werden, damit sie auch der Lage nach der ursprünglichen Kurve $b = f(x)$ entspricht. Wie wenig die Größe der Verschiebung u die Differentiallinie beeinflusst, zeigt Fig. 80, bei der die Verschiebung gleich $\frac{u}{2}$ ist. Die Dif-

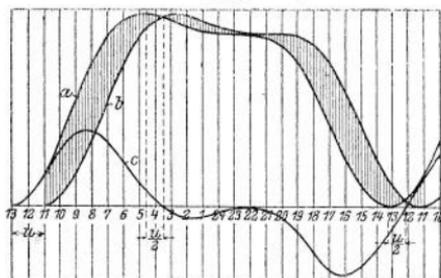


Fig. 79.

ferenzkurven sind auf die Höchstwerte der Fig. 79 umgezeichnet und entsprechend übereinandergelegt. Die beiden so erhaltenen Differenzkurven sind mit d und e bezeichnet.

Die Anwendung des Verfahrens auf die unrunde Scheibe zeigt Fig. 81. In diesem Falle hat man nur nötig, die Scheibe um einen kleinen Winkel α zu drehen.

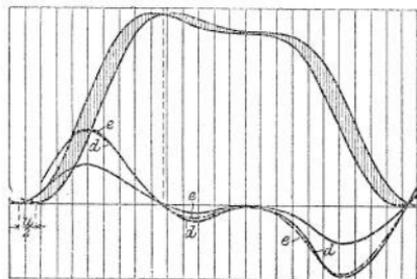


Fig. 80.

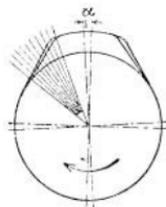


Fig. 81.

¹⁾ R. Slaby, Ein einfaches Verfahren zur Bildung von Differentialkurven. Z. Ver. deutsch. Ing. 1913, S. 821. — P. Melchior, dasselbe, ebendort 1914 S. 264.

4. Das Verfahren ist nicht anwendbar, wenn in der gegebenen Kurve oder in ihren höheren Ableitungen Unstetigkeiten vorkommen. In solchen Fällen führt die direkte Konstruktion von Tangenten zum Ziel, die natürlich, soweit es sich um die Konstruktion nach Augenmaß handelt, auch nicht einwandfrei ist. Folgendes Verfahren erleichtert das Zeichnen der Tangenten (Fig. 82): Man stelle einen Spiegel $ABCD$ vertikal so auf, daß er die zu untersuchende Kurve in E schneidet, und drehe ihn so lange, bis die wirkliche Kurve EE_2 und ihr Spiegelbild EE_1 einen stetigen Verlauf zeigen; dann reiße man die Spiegelfläche AB auf, die Normale im Punkte E der Kurve ist. $GE \perp EF$ ist Tangente.

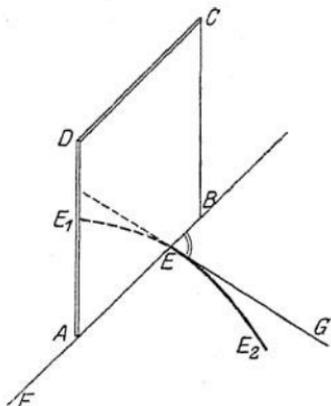


Fig. 82.

Bei flachen Kurven macht die Einstellung des Spiegels Schwierigkeiten, doch bleibt das Verfahren empfindlicher als die üblichen Näherungsmethoden, bei denen Teile der Kurve durch Kurven bekannter Krümmung ersetzt werden.

f) Höhere Differentialquotienten der unentwickelten Funktion.

Ist $y = f(x, y) = 0$ die gegebene Funktion, so war nach (7), S. 151

$$y' = \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}} = - \frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)},$$

wenn man mit $f_1(x, y)$ die partielle Ableitung der gegebenen Funktion nach ∂x und mit $f_2(x, y)$ die partielle Ableitung nach ∂y bezeichnet, bzw.

$$f_1(x, y) + f_2(x, y) \cdot y' = 0 = \frac{df(x, y)}{dx}.$$

Ersetzt man $f(x, y)$ durch $f'(x, y)$, dann wird

$$f'_1(x, y) + f'_2(x, y) \cdot y' = \frac{df'(x, y)}{dx}$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} \cdot y' = \frac{d^2 y}{dx^2} = y''.$$

In gleicher Weise wird

$$\frac{\partial y''}{\partial x} + \frac{\partial y''}{\partial y} \cdot y' = \frac{d^3 y}{dx^3} = y'''.$$

Beispiel:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = - \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} \cdot y' = - \frac{b^2}{a^2 y} + \frac{b^2 x}{a^2 y^2} \left(- \frac{b^2 x}{a^2 y} \right) = - \frac{b^4}{a^2 y^3}$$

$$y''' = \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\partial y''}{\partial x} + \frac{\partial y''}{\partial y} \cdot y' = \frac{3 b^4}{a^2 y^4} \cdot \left(- \frac{b^2 x}{a^2 y} \right) = - \frac{3 b^6 x}{a^4 y^5}.$$

g) Die ausgezeichneten Werte einer Funktion (Maxima und Minima).

Hat die Funktion $y = f(x)$ von A nach P_1 bzw. P_2 nach C eine steigende Tendenz, d. h. nimmt y mit wachsendem x zu, so ist $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$ positiv (Fig. 83),

hat dagegen die Funktion von P_1 nach B bzw. von B nach P_2 eine fallende Tendenz, d. h. nimmt y mit wachsendem x ab, so

ist $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$ negativ. In

den Punkten, wo die Steigung wechselt, erreicht die Funktion ihre ausgezeichneten Werte. Die Bedingung dafür lautet:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = 0;$$

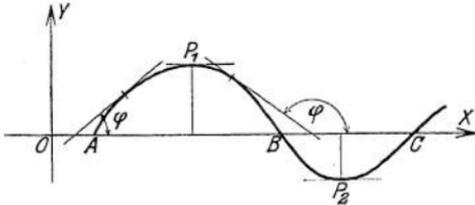


Fig. 83.

die Tangente verläuft in diesen Punkten — P_1 und P_2 — parallel zur X -Achse. Ein Höchstwert oder Maximum tritt auf, wenn die benachbarten Punkte unterhalb, ein Minimum, wenn die benachbarten Punkte oberhalb der Tangente liegen.

Hat man also $y' = \frac{dy}{dx}$ ermittelt, so

kann man die Frage, ob ein Maximum vorliegt, durch die Betrachtung der Fig. 84 entscheiden. Es sei $y = \sin x$ die gegebene Funktion, dann wird

$$y' = \frac{dy}{dx} = \cos x$$

und

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x.$$

Der Verlauf der Kurve $y' = \cos x$ zeigt, daß y' positiv ist, wenn $y = \sin x$ ansteigt, negativ, wenn $y = \sin x$ fällt. Aus der Kurve $y'' = -\sin x$ ersieht man, daß y'' negativ ist, wenn y sein Maximum (P_1), positiv dagegen, wenn y sein Minimum (P_2) erreicht. Hat man

aus der Bedingung $\frac{dy}{dx} = 0$ die Lage

eines ausgezeichneten Wertes ermittelt, so setzt man diesen Wert in $y'' = f''(x)$ ein; ergibt sich

$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ negativ, so entspricht dem

aus $y' = f'(x) = 0$ ermittelten Werte für x ein Maximum; ein Minimum liegt vor, wenn $\frac{d^2y}{dx^2}$ für den gefundenen Wert x positiv wird.

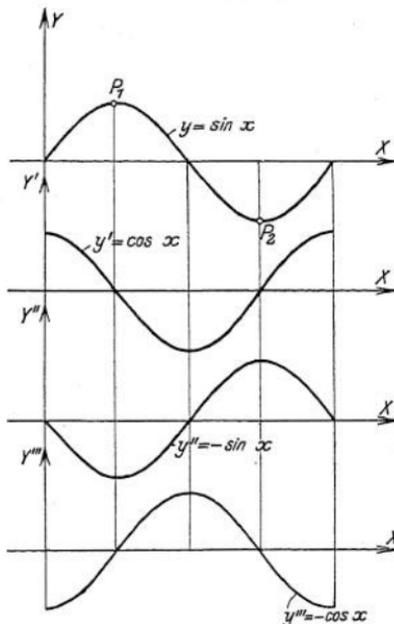


Fig. 84.

Beispiele:

1. Es ist zu untersuchen, für welche Werte von x die Funktion

$$y = x^3 - 4x^2 - 3x + 2$$

ein Maximum oder Minimum wird. Aus $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 8x - 3 = 0$

ergibt sich $x = \frac{4 \pm 5}{3}$;

also $x = 3$ und $x = -\frac{1}{3}$;

Durch Bildung des zweiten Differentialquotienten erhält man $y'' = 6x - 8$

für $x = -\frac{1}{3}$ ergibt sich $y'' = -10$ also < 0 d. h. Maximum,

für $x = +3$ ergibt sich $y'' = +10$ also > 0 d. h. Minimum.

Zeichnet man die Kurve $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ auf (Fig. 85), so sieht man, daß die „Maximalwerte“ durchaus nicht immer die größten Funktionswerte sind, und daß die Minimalwerte nicht die kleinsten Funktionswerte zu sein brauchen. Die Maximalwerte sind nur größer, die Minimalwerte nur kleiner als die benachbarten Werte der Funktion.

2. Für welchen Halbmesser b wird die aus Ellipse und Kreis gebildete Fläche zum Maximum? In Fig. 86 ist die Fläche durch Strichelung hervorgehoben.

$$F = \pi \cdot a \cdot b - \pi \cdot b^2$$

$$\frac{dF}{db} = \pi \cdot a - 2\pi \cdot b = 0 \quad \text{d. h.} \quad b = \frac{a}{2}.$$

3. Ein quadratischer Balken wird durch Brechen der — gestrichelten — Außenkanten im Querschnitt geschwächt. Es ist die Länge x zu bestimmen, durch die das Widerstandsmoment des Querschnittes zum Maximum wird. Mit den Bezeichnungen der Abb. 87 ist das Trägheitsmoment des Quadrates $J = \frac{h^4}{48}$.

In Beziehung auf die horizontale Achse ist das Trägheitsmoment des geschwächten Querschnittes

$$J_1 = J - 2J' = J - 2(J_{\text{Dreieck}} + f \cdot e^2).$$

$$\text{Mit } J_{\text{Dreieck}} = \frac{2x \cdot x^3}{36} = \frac{x^4}{18}; \quad f = x^2; \quad e = \frac{h}{2} - \frac{2}{3}x \text{ wird}$$

$$J_1 - \frac{h^4}{48} = 2 \left[\frac{x^4}{18} + x^2 \left(\frac{h}{2} - \frac{2}{3}x \right)^2 \right] = \frac{h^4}{48} - \frac{h^2 x^2}{2} + \frac{4}{3} h x^3 - x^4,$$

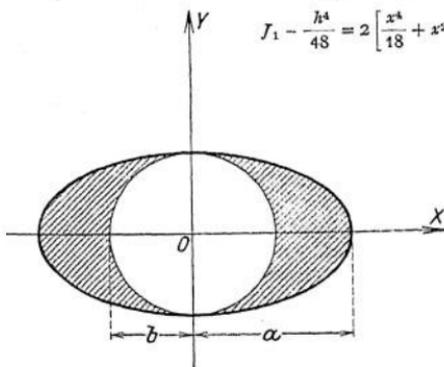


Fig. 86.

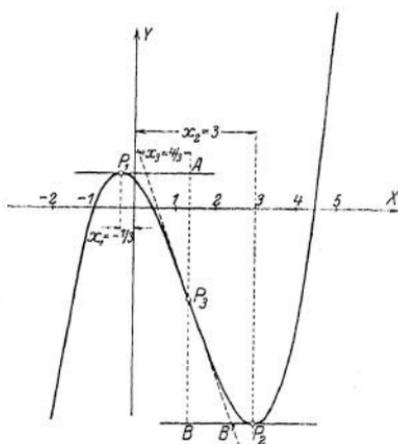


Fig. 85.

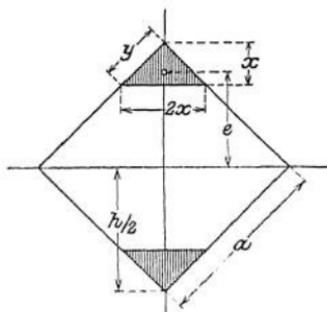


Fig. 87.

so daß
$$W_1 = \frac{J_1}{\frac{h}{2} - x} = \frac{1}{24} (h^3 + 2h^2x - 20hx^2 + 24x^3),$$

$$\frac{dW_1}{dx} = 2h^2 - 40hx + 72x^2 = 0$$

ergibt

$$x = \frac{1}{18}h; \quad y = x\sqrt{2} = \frac{1}{9}a,$$

$$\max W_1 = \frac{1}{24}(h^3 + \frac{1}{9}h^3 - \frac{5}{81}h^3 + \frac{1}{271}h^3) = \frac{h^3}{22,78} = \frac{a^3}{8,054}.$$

Das Widerstandsmoment des vollen Querschnitts ist $\frac{a^3}{8,485}$.

h) Anwendungen der Differentialrechnung auf die Kurvenlehre.

1. Tangente und Normale. Es sei $P_1(x_1, y_1)$ ein Punkt der Kurve $y = f(x)$; dann hat die Tangente in P_1 als gerade Linie die Gleichung

$$y = mx + b.$$

Die Richtungskonstante m ist aber gleich $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$.

Da die Tangente durch den Punkt P_1 gehen soll, müssen die Koordinaten x_1 und y_1 der Gleichung der Tangente genügen; d. h.

$$y_1 = mx_1 + b.$$

Daraus ergibt sich

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{oder} \quad y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1) = \frac{df(x)}{dx}(x - x_1).$$

Ist T_1 der Schnittpunkt der Tangente mit der x -Achse, so ist die Länge der Tangente

$$P_1 T_1 = \frac{y_1}{\sin \varphi}.$$

Die Länge der Subtangente wird $P_2 T_1 - y_1 \cdot \operatorname{ctg} \varphi = y_1 \cdot \frac{dx}{dy}$.

Die Normale $P_1 N_1$ bildet mit der x -Achse den Winkel $(90^\circ + \varphi)$; daraus ergibt sich die Gleichung der Normalen

$$y - y_1 = -\frac{dx}{dy}(x - x_1) = -\frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}(x - x_1).$$

Wie vorher ergeben sich die Länge der Normalen zu $P_1 N_1 = \frac{y_1}{\cos \varphi}$,

die Länge der Subnormalen zu $P_2 N_1 = y_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi = y_1 \cdot \frac{dy}{dx}$.

Beispiel: Es ist an die Kurve $x \cdot y = x_0 \cdot y_0$ eine Tangente im Punkte $P_1(x_1, y_1)$ zu konstruieren (Fig. 26). Aus

$$y = x_0 \cdot y_0 \cdot \frac{1}{x} \quad \text{erhält man} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = -x_0 \cdot y_0 \cdot \frac{1}{x^2}.$$

Da die Tangente durch $P_1(x_1, y_1)$ gehen soll, so wird $\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{x_0 y_0}{x_1^2} = -\frac{y_1}{x_1}$.

Trägt man demnach von P_2 nach rechts die Strecke $P_2 T_1 = x_1$ ab, so erhält man in T_1 den zweiten Punkt der Tangente. Ihre Gleichung lautet

$$y - y_1 = m(x - x_1) = -\frac{y_1}{x_1}(x - x_1).$$

Die Länge der Tangente wird $T_1 P_1 = \frac{y_1}{\sin \varphi_1} = \frac{y_1 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1}}{\operatorname{tg} \varphi_1} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

der Subtangente $P_2 T_1 = y_1 \cdot \operatorname{ctg} \varphi_1 = x_1$.

Die Gleichung der Normalen lautet $y - y_1 = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(x - x_1) = \frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$.

Die Länge der Normalen wird $N_1 P_1 = \frac{y_1}{\cos \varphi_1} = y_1 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1} = \frac{y_1}{x_1} \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

Die Länge der Subnormalen $P_2 N_1 = y_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{y_1^2}{x_1}$.

Aus $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = (-x_0 y_0) \cdot (-2) \cdot \frac{1}{x^3} = 2 \frac{x_0 y_0}{x^3} > 0$

läßt sich schließen, daß die Kurve nach der positiven Richtung der y -Achse konkav ist, d. h. daß die P_1 benachbarten Punkte oberhalb der Tangente liegen.

2. Wendepunkt und Wendetangente. Erklärung siehe S. 110. Die Fig. 84 zeigt, daß $y' = f(x)$ ihren Größtwert erreicht, wenn $y = f(x)$ die x -Achse schneidet. In diesen Schnittpunkten mit der x -Achse geht aber $y = f(x)$ von der Konvexität zur Konkavität über; die Schnittpunkte sind Wendepunkte. Für diese Punkte ist aber $y'' = f''(x)$ ebenfalls gleich Null, so daß man als Bedingung für den Wendepunkt $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ erhält, die allgemeine Gültigkeit hat. Die graphische Darstellung der dritten Ableitung

$$y''' = \frac{d(-\sin x)}{dx} = -\cos x$$

zeigt, daß für den Wendepunkt der Kurve $y = f(x)$ die dritte Ableitung von Null verschieden ist, so daß man als weitere Bedingung für den Wendepunkt

$$\frac{d^3 y}{dx^3} \geq 0.$$

Beispiel: Es ist der Wendepunkt der Kurve $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ (Fig. 85) zu bestimmen. Aus $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = 6x - 8$ ergibt sich die Lage des Wendepunktes für $x = \frac{4}{3}$. Die

dritte Ableitung $y''' = \frac{d^3 y}{dx^3} = 6$ zeigt, daß tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt, da nur y'' für $x = \frac{4}{3}$ zu Null wird; die Tangente hat eine Berührung gerader Ordnung mit der Kurve, schneidet sie also im Berührungspunkte.

3. Die Gleichung für den Krümmungsradius der Kurve $y = f(x)$ ist aufzustellen. In Fig. 88 seien P_1 und P_2 zwei benachbarte Punkte der Kurve; der Schnittpunkt der Normalen ist der Krümmungsmittelpunkt M .

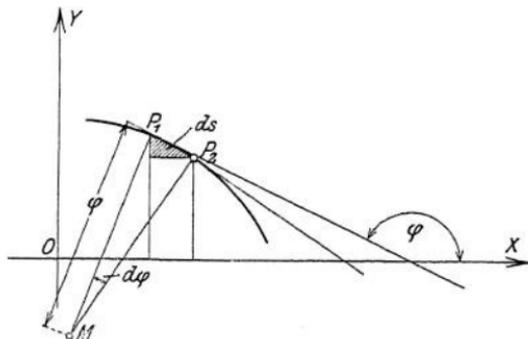


Fig. 88.

Aus $ds = \rho \cdot d\varphi$ folgt $\rho = \frac{ds}{d\varphi}$.

Nun ist $\operatorname{tg} \varphi = y' = \frac{dy}{dx}$; $\varphi = \operatorname{arctg} y'$,

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d \operatorname{arctg} y'}{dx} = \frac{d(y')}{[1 + (y')^2] \cdot dx} = \frac{y''}{1 + (y')^2},$$

so daß $d\varphi = \frac{y''}{1 + (y')^2} \cdot dx$ wird.

Aus dem durch Strichelung hervorgehobenen rechtwinkligen Dreieck folgt

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx \sqrt{1 + (y')^2}$$

und damit
$$\rho = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2} \cdot [1 + (y')^2]}{y''} = \frac{[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Für sehr flache Kurven — z. B. Biegungslinien — ist $\frac{dy}{dx}$ sehr klein, so daß $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ gegen 1 vernachlässigt werden kann; in diesem Falle ist

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

4. Berührung. Haben zwei Kurven einen Punkt gemeinsam, so bilden sie in diesem eine Berührung. Es findet eine Berührung erster Ordnung statt, wenn zwei Punkte zusammenfallen, z. B. in Fig. 73, wo im Grenzfall P_1 mit P zusammenfällt und die Sekante zur Tangente wird. Die Tangente hat im allgemeinen eine Berührung erster Ordnung, sie hat zwei unendlich nahe Punkte mit der Kurve gemein. Die Bedingung für eine Berührung erster Ordnung lautet: Die erste Ableitung $\frac{dy}{dx}$ ist für beide Kurven in dem Berührungspunkte

gleich. Fallen drei unendlich nahe Punkte beider Kurven zusammen, so findet eine Berührung zweiter Ordnung statt; in diesem Falle muß die Bedingung erfüllt sein: die zweite Ableitung $\frac{d^2y}{dx^2}$ ist für beide Kurven in dem Berührungspunkte gleich. Das trifft z. B. für die Tangente im Wendepunkt zu, da $\frac{d^2y}{dx^2}$ für beide Kurven gleich Null wird (Fig. 85). Da auch der Krümmungskreis drei unendlich nahe Punkte mit einer Kurve gemeinsam hat, bildet er im allgemeinen mit der Kurve eine Berührung zweiter Ordnung.

Fallen vier unendlich nahe Punkte zweier Kurven zusammen, so findet eine Berührung dritter Ordnung statt. So haben Kreis und Ellipse (Fig. 89) in S

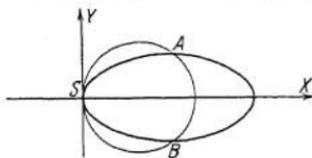


Fig. 89.

eine Berührung erster Ordnung, da $\frac{dy}{dx}$ in diesem Punkt für beide Kurven gleich ist; es fallen also zwei unendlich nahe Punkte in S zusammen. Der Kreis schneide die Ellipse in den Punkten A und B . Wird der Radius des Kreises kleiner, so rücken A und B immer näher an S und fallen mit S zusammen, wenn der

Kreis zum Krümmungskreis in S wird. Beide Kurven haben in S vier unendlich nahe Punkte gemeinsam und bilden eine Berührung dritter Ordnung; die Bedingung dafür lautet: die dritte Ableitung $\frac{d^3y}{dx^3}$ ist für beide Kurven gleich. Das trifft z. B. zu für den Krümmungskreis im Scheitel symmetrischer Kurven (Ellipse, Hyperbel, Parabel, Lemniskate). Allgemein findet eine Berührung n ter Ordnung statt, wenn die ersten n Ableitungen für beide Kurven im Berührungspunkte gleich sind.

5. Tangente und Normale für Polarkoordinaten. Die Kurven seien auf ein Polarkoordinatensystem bezogen. Auf der Kurve $F(r, \varphi) = 0$ bzw. $r = f(\varphi)$ seien P und P_1 zwei benachbarte Punkte (Fig. 90), deren Koordinaten mit $r; \varphi$ bzw. $r + dr; \varphi + d\varphi$ bezeichnet werden mögen.

Beschreibt man mit OP als Radius um O einen Kreis, der den Leitstrahl OP_1 in Q trifft, dann ist $OP_1 = r + dr$, also $OQ = r$; $QP_1 = dr$; $PQ = r \cdot d\varphi$.
Bezeichnet man das Bogenelement PP_1 mit ds , so wird

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \cdot d\varphi^2,$$

außerdem ist $\operatorname{tg} QP_1P = \frac{QP}{QP_1} = \frac{r \cdot d\varphi}{dr}$,

wobei QP_1P der Winkel ist, den die Gerade P_1P mit dem Leitstrahl bildet. Nähern sich die beiden Punkte P_1 und P einander, so wird im Grenzfall P_1P Tangente der Kurve im Punkte P bzw. P_1 . Ist ψ der Winkel, den die Tangente im Punkte P mit dem Leitstrahl OP

bildet, so wird $\operatorname{tg} \psi = \frac{r \cdot d\varphi}{dr}$.

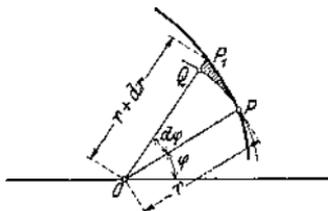


Fig. 90.

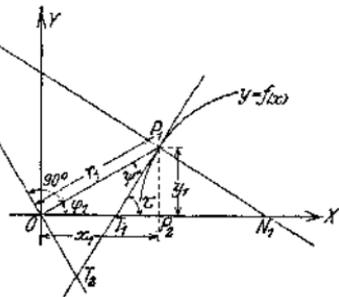


Fig. 91.

Ist τ der Neigungswinkel der Tangente, so wird nach Fig. 91

$$\tau = \varphi + \psi \quad \text{daraus} \quad \operatorname{tg} \tau = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \psi}{1 - \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi}.$$

Fig. 91 liefert $\operatorname{tg} \psi' = \frac{r_1 \cdot d\varphi}{ON_2} = \frac{r_1 \cdot d\varphi}{dr}$,

so daß die Länge der Subnormale $ON_2 = \frac{dr}{d\varphi}$ wird.

Die Länge der Subtangente wird $OT_2 = r_1 \cdot \operatorname{tg} \psi' = \frac{r_1^2 d\varphi}{dr}$.

Die Länge der Normalen wird

$$N_2P_1 = \sqrt{N_2O^2 + OP_1^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r_1^2}$$

$$N_2P_1 = \sqrt{\frac{dr^2}{d\varphi^2} + \frac{r_1^2 \cdot d\varphi^2}{d\varphi^2}} = \sqrt{\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2} = \frac{ds}{d\varphi}.$$

Die Länge der Tangente ergibt sich zu

$$P_1T_2 = N_2P_1 \cdot \operatorname{tg} \psi' = \frac{ds}{d\varphi} \cdot \frac{r_1 \cdot d\varphi}{dr} = \frac{r_1 \cdot ds}{dr}.$$

Beispiel: Es ist die Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente für die Archimedische Spirale $r = a \cdot \varphi$ zu berechnen. Aus $ON = \frac{dr}{d\varphi}$ folgt $ON = a$; d. h. die Länge der Subnormale ist in allen Punkten der Kurve konstant. Die Konstruktion von Normale und Tangente ergibt sich in einfacher Weise: ziehe den beliebigen Leitstrahl OP und NT senkrecht dazu (Fig. 56). Mache $ON = a$; verbinde N mit P , so ist NP Normale, also wenn $PT \perp NP$.

PT Tangente. Ferner ist $\operatorname{tg} \psi = \frac{r \cdot d\varphi}{dr} = \frac{r}{a} = \varphi$.

Für $\varphi = 0$ werden auch r und η gleich Null, d. h. die Kurve geht durch den Koordinatenanfangspunkt, und die Tangente in diesem Punkte fällt mit der Richtung OX zusammen. Die

Subtangente wird
$$OT = \frac{r^2 \cdot d\varphi}{dr} = \frac{r^2}{a} = a \cdot \varphi^2.$$

Aus
$$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2 = a^2 + r^2 \quad \text{folgt als}$$

Länge der Normalen
$$NP_2 = \frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{a^2 + r^2}.$$

Für die Länge der Tangente erhält man

$$PT = \frac{r \cdot ds}{dr} = \frac{r \cdot d\varphi}{dr} \cdot \frac{ds}{d\varphi} = \varphi \sqrt{a^2 + r^2} = \frac{r}{a} \sqrt{a^2 + r^2}.$$

6. Doppelpunkte. Geht eine Kurve $f(xy) = 0$ zweimal durch denselben Punkt, so heißt dieser Punkt Doppelpunkt, in ihm sind zwei Tangenten an die Kurve möglich. In diesem Falle werden

$$\frac{\partial f(xy)}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(xy)}{\partial y} = 0,$$

so daß
$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f(xy)}{\partial x}}{\frac{\partial f(xy)}{\partial y}} = 0 \quad \text{wird.}$$

Ist φ der Neigungswinkel der Tangente, dann ist

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \operatorname{tg}^2 \varphi.$$

Man findet φ durch die Auflösung der Gleichung zweiten Grades für $\operatorname{tg} \varphi$.

$$\frac{\partial^2 f(xy)}{\partial y^2} \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi + 2 \cdot \frac{\partial \left[\frac{\partial f(xy)}{\partial x} \right]}{\partial y} \cdot \operatorname{tg} \varphi + \frac{\partial^2 f(xy)}{\partial x^2} = 0$$

oder

$$A \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi + 2B \cdot \operatorname{tg} \varphi + C = 0.$$

Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung sind reell, wenn

$$B^2 - AC > 0,$$

sie sind imaginär, wenn

$$B^2 - AC < 0$$

ist. Im ersten Falle erhält man einen eigentlichen Doppelpunkt mit zwei reellen Tangenten, im zweiten Falle einen isolierten oder zugeordneten Punkt, in dem die Tangenten imaginär sind. Sind die beiden Wurzeln der Gleichung gleich, so fallen beide Tangenten zusammen; der Doppelpunkt wird zum Rückkehrpunkt (Spitze).

Beispiel: Es ist die Lemniskate (vgl. S. 143) zu untersuchen; ihre Gleichung lautet für Parallelkoordinaten

$$f(xy) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - a^2x^2 + a^2y^2 = 0.$$

Betrachtet man y als konstant, so wird

$$\frac{\partial f(xy)}{\partial x} = 4x^3 + 4xy^2 - 2a^2x; \quad \frac{\partial^2 f(xy)}{\partial x^2} = C = 12x^2 + 4y^2 - 2a^2,$$

für $x = \text{Constans}$ wird

$$\frac{\partial f(xy)}{\partial y} = 4x^2y + 4y^3 + 2a^2y; \quad \frac{\partial^2 f(xy)}{\partial y^2} = A = 4x^2 + 12y^2 + 2a^2$$

$$B = \frac{\partial \left[\frac{\partial f(xy)}{\partial x} \right]}{\partial y} = 8xy.$$

Da die drei Gleichungen $f(xy) = 0$; $\frac{\partial f(xy)}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial f(xy)}{\partial y} = 0$ für $x = 0$ und $y = 0$ befriedigt werden, ist der Koordinatenanfangspunkt ein Doppelpunkt; für $x = 0$ und $y = 0$ werden

$$A = 2a^2; \quad B = 0; \quad C = -2a^2$$

und damit

$$2a^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi - 2a^2 = 0$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm 1$$

$$\varphi_1 = 45^\circ \quad \text{und} \quad \varphi_2 = -45^\circ,$$

d. h. die Tangenten stehen senkrecht aufeinander und halbieren den Winkel der Koordinatenachsen.

j) Unbestimmte Ausdrücke.

1. $\frac{0}{0}$. Nähern sich in dem Bruche $\frac{F(x)}{f(x)}$ Zähler und Nenner der Grenze 0, wenn sich x dem Werte a nähert, so erhält dieser Bruch für $x=a$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$. In Fig. 92 sind $y = F(x)$ und $y = f(x)$ durch die Kurven $F(x)$ und $f(x)$ dargestellt, die beide durch den Punkt A auf der x -Achse hindurchgehen mögen. Für einen beliebigen Wert von x ist

$$F(x) = (x - a) \operatorname{tg} \alpha; \quad f(x) = (x - a) \operatorname{tg} \beta; \quad \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}.$$

Wird $x = a$, dann gehen die Sekanten AB und AC in Tangenten über, es wird also

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{\frac{dF(x)}{dx}}{\frac{df(x)}{dx}},$$

d. h. man findet den wahren Wert von $\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{f(x)}$, indem man Zähler und Nenner einzeln differenziert und in den Quotienten der Ableitungen $x = a$ einsetzt. Wird auch der Quotient

$$\frac{F'(x)}{f'(x)} = \frac{0}{0},$$

so ist das Verfahren zu wiederholen; es wird der wahre Wert $\frac{F''(a)}{f''(a)}$.

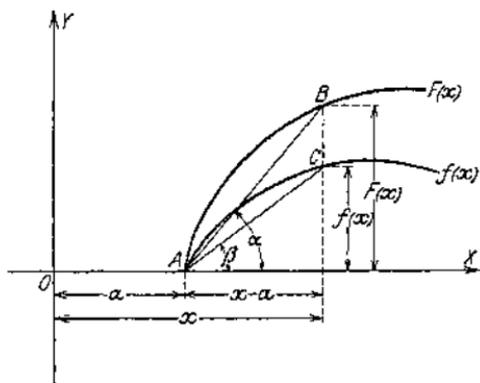


Fig. 92.

Beispiele 1).

1. $y = \frac{x - \sin x}{x^2}$ wird gleich $\frac{0}{0}$ für $x=0$; der wahre Wert ergibt sich aus

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{0}{0};$$

man wende das Verfahren noch einmal an und bilde

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{0}{0};$$

da auch der Quotient der zweiten Ableitungen den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ ergibt, wiederholt man das Verfahren noch einmal und bildet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6}.$$

Dieser Wert ergibt für $x=0$ den wahren Wert $\frac{1}{6}$.

1) Nach Kiepert-Stegemann, Differentialrechnung. Hannover 1912. Helwingsche Verlagsbuchhandlung.

2. $\frac{\infty}{\infty}$. Werden die Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ für $x = a$ beide unendlich groß, so wird

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Um den Grenzwert zu ermitteln, dem sich in diesem Falle der Quotient $\frac{F(x)}{f(x)}$ nähert, verfähre man wie unter 1., d. h.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F'(x)}{f'(x)}.$$

Beispiel: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} x}$ nimmt für $x = \frac{\pi}{2}$ den unbestimmten Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$ an. Man setze

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 5x}{\cos 5x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 5x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 5x}$$

für $x = \frac{\pi}{2}$ wird $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 5x}{\sin x} = 1$, so daß

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 5x} = \frac{0}{0}. \text{ Damit ist (1) erreicht.}$$

3. $0 \cdot \infty$. Wenn in $F(x) \cdot f(x)$ für $x = a$ $F(x) = 0$; $f(x) = \infty$ wird, so setzt man zur Ermittlung des wahren Wertes $\frac{1}{F(x)} = \varphi(x)$, d. h. das Produkt wird $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$; damit ist Fall 1 erreicht.

Beispiel: $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \operatorname{ctg} x)$ nimmt für $x = 0$ den Wert $0 \cdot \infty$ an; man setzt $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, so daß

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \operatorname{ctg} x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = \frac{0}{0} \text{ und verfährt nach (1).}$$

4. 0^0 ; 1^0 ; ∞^0 . Nimmt der Ausdruck $[F(x)]^{f(x)}$ für $x = a$ eine dieser Formen an, so setze man $[F(x)]^{f(x)} = u$; dann wird $\ln u = f(x) \cdot \ln F(x)$, also

$$u = e^{\ln u} = e^{f(x) \cdot \ln F(x)}.$$

Ist nun

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0;$$

so wird

$$\lim [F(x)]^{f(x)} = 0^0; \quad \lim f(x) \cdot \ln F(x) = 0 \cdot (-\infty).$$

Ist

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow a} F(x) = \infty;$$

so wird

$$\lim [F(x)]^{f(x)} = \infty^0, \quad \lim f(x) \cdot \ln F(x) = 0 \cdot \infty.$$

Ist

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow a} F(x) = 1;$$

so wird

$$\lim [F(x)]^{f(x)} = 1^\infty; \quad \lim f(x) \cdot \ln F(x) = \infty \cdot 0.$$

Damit sind sämtliche Fälle auf (3) zurückgeführt.

Beispiele:

1. Der Ausdruck x^x nimmt für $x = 0$ den unbestimmten Wert 0^0 an; es ist $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 0^0$.

Setzt man $x^x = u$, so wird $\ln u = x \cdot \ln x = \frac{\ln x}{x^{-1}}$, so daß $\lim_{x \rightarrow 0} \ln u = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \frac{-\infty}{\infty}$. Man bildet den Quotienten der Ableitungen: $F'(x) = \frac{1}{x}$ und $f'(x^{-1}) = -x^{-2}$; so daß

$$\frac{F'(x)}{f'(x)} = \frac{1/x}{-x^{-2}} = -\frac{x}{1};$$

folglich

$$\lim \ln u = - \lim \frac{x}{1} = 0,$$

es wird also $\lim u = \lim (x^x) = e^0 = 1$.

2. Der Ausdruck $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ nimmt für $x=0$ den Wert 1^∞ an; es ist $\lim_{x=0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty$.

Setzt man $(1+x)^{\frac{1}{x}} = u$, so wird $\ln u = \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x)$ und $\lim_{x=0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{0}{0}$. Damit ist (1) erreicht.

3. Der Ausdruck $\sqrt[x]{\frac{1}{x^2}} = x^{-\frac{2}{x}}$ nimmt für $x=\infty$ den Wert ∞^0 an; es ist $\lim_{x=\infty} \sqrt[x]{\frac{1}{x^2}} = \infty^0$.

Setzt man $x^{-\frac{2}{x}} = u$, so wird $\ln u = -\frac{2}{x} \cdot \ln x$; $\lim \ln u = - \lim \frac{2 \ln x}{x} = \frac{-\infty}{\infty}$. Damit ist (2) erreicht.

5. $\infty - \infty$. Wird $\lim_{x=a} F(x) = \infty$ und $\lim_{x=a} f(x) = \infty$, so nimmt der Ausdruck $F(x) - f(x)$ für $x=a$ die unbestimmte Form $\infty - \infty$ an. Man setze

$$\Phi(x) = \frac{1}{F(x)} \quad \text{und} \quad \varphi(x) = \frac{1}{f(x)},$$

so daß $F(x) - f(x) = \frac{1}{\Phi(x)} - \frac{1}{\varphi(x)} = \frac{\Phi(x) - \varphi(x)}{\Phi(x) \cdot \varphi(x)}$.

Das ist aber ein Bruch, der für $\lim x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt und dessen wahrer Wert nach (1) bestimmt werden kann.

Beispiel: Der Ausdruck $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ nimmt für $x=0$ den unbestimmten Wert $\infty - \infty$ an; es ist $\lim_{x=0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \infty - \infty$.

Aus $F(x) = \frac{1}{\sin x}$ folgt $\Phi(x) = \frac{1}{F(x)} = \sin x$; aus $f(x) = \frac{1}{x}$ folgt $\varphi(x) = x$, so daß

$$F(x) - f(x) = \frac{\sin x - x}{x \cdot \sin x} = \frac{0}{0} \text{ für } x=0.$$

Man bildet den Quotienten der Ableitungen und erhält

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x - x}{x \cdot \sin x} = \lim_{x=0} \frac{\cos x - 1}{x \cdot \cos x + \sin x} = \frac{0}{0} \text{ für } x=0.$$

Da der Quotient der ersten Ableitungen noch nicht zum Ziele führte, wiederholt man das Verfahren; es wird

$$\lim_{x=0} \frac{\cos x - 1}{x \cdot \cos x + \sin x} = \lim_{x=0} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \cdot \sin x} = \frac{0}{2} = 0 \text{ für } x=0.$$

B. Die Integralrechnung.

In der Differentialrechnung wird zu der gegebenen Funktion $y = f(x)$ die Ableitung $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ gesucht; in der Integralrechnung soll umgekehrt aus der Ableitung $f'(x)$ die Funktion y selbst entwickelt werden, zum Beispiel: Ein Massenpunkt habe die Geschwindigkeit v ; welchen Weg legt er in t sek zurück? Es war die Geschwindigkeit definiert als erste Ableitung des Weges nach der Zeit, d. h. $v = \frac{ds}{dt}$. Der Weg s ist so zu wählen, daß $\frac{ds}{dt} = v$ wird. Durch Probieren findet man, daß $s = v \cdot t$ die Bedingung erfüllt, denn es ist tatsächlich $\frac{ds}{dt} = v$; auch $s = v_0 + v \cdot t$ erfüllt die Bedingung, denn $\frac{ds}{dt}$ wird auch in diesem Falle gleich v . Die Wiederherstellung der Funktion aus ihrer Ableitung

heißt Integration; sie stellt sich dar als die Umkehrung der Differentiation. Für diese Rechnungsart wird nach Leibniz das Zeichen \int benutzt; man schreibt

$$ds = v \cdot dt; \quad s = \int v \cdot dt \quad \text{oder} \quad s = \int \frac{ds}{dt} \cdot dt.$$

Ersetzt man s durch y , t durch x , so wird $y = \int \frac{dy}{dx} \cdot dx = \int y' \cdot dx$.

Die rechte Seite heißt das Integral von $y' \cdot dx$. Differenzieren und Integrieren stehen in demselben Zusammenhang wie Multiplizieren und Dividieren. Prüft man die Richtigkeit der Division durch Multiplizieren, so prüft man die Richtigkeit der Integration durch Differentiation des Resultates. Es ist $\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3$, weil $d(\frac{1}{3} \cdot x^3) = 3 \cdot \frac{1}{3} x^2 dx$ ist.

Da aber auch $(\frac{1}{3} x^3 + a)$ differenziert $x^2 dx$ ergibt — das Differential einer Konstanten ist Null —, so muß diese willkürliche Konstante dem Resultat

hinzugefügt werden; sie heißt die Integrationskonstante. Vollständig geschrieben erhält man also $\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + C$.

In Fig. 93 sei y die Ordinate des Punktes P der Kurve $y = f(x)$; ist y_1 die Ordinate des Punktes P_1 , so ist der Zuwachs gleich $y - y_1$, wenn die Abszisse von x_1 auf x wächst. Diesen Zuwachs $y - y_1$ kann man auffassen als die Summe unendlich

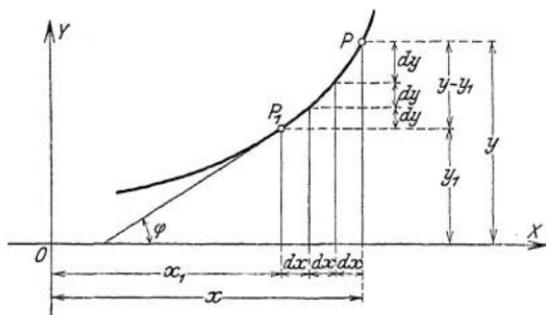


Fig. 93.

vieler und unendlich kleiner dy . Nimmt man dx als verschwindend klein an, so wird $dy = dx \cdot \operatorname{tg} \varphi$, wenn φ der Neigungswinkel der Tangente im Punkte P_1 der Kurve $y = f(x)$ bedeutet. Um anzudeuten, daß es sich bei dieser Art der Summenbildung um unendlich viele und unendlich kleine Summanden handelt, so benutzt man hierfür ein besonderes Summenzeichen \int und nennt den endlichen Wert $y - y_1$ das Integral; man schreibt

$$y - y_1 = \int \operatorname{tg} \varphi \cdot dx = \int \frac{dy}{dx} \cdot dx = \int f'(x) \cdot dx = \int y' \cdot dx$$

und daraus

$$y = \int y' \cdot dx + y_1.$$

Die Konstante y_1 ist willkürlich und hängt von der Wahl des Ausgangspunktes P_1 ab.

Wird die Integration als Umkehrung der Differentiation aufgefaßt, so erhält man aus den Fundamentaldifferentialen eine Reihe von Fundamentalintegralen. Z. B.:

$$y = a \cdot x^m + C \quad \text{ergibt} \quad dy = m \cdot a x^{m-1} \cdot dx,$$

also

$$y = \int m \cdot a \cdot x^{m-1} \cdot dx = ax^m + C.$$

Zieht man den konstanten Faktor $a \cdot m$ vor das Integral, so wird

$$a \cdot m \int x^{m-1} \cdot dx = a \cdot x^m + C$$

oder

$$\int x^{m-1} \cdot dx = \frac{1}{m} \cdot x^m + C,$$

setzt man schließlich $m - 1 = n$, also $m = n + 1$, so wird

$$\int x^n \cdot dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C.$$

Das bestimmte Integral. In Fig. 94 ist der Flächeninhalt der von der x -Achse, der Kurve $y = f(x)$ und den Ordinaten y_1 und y_2 begrenzten Fläche zu ermitteln. Man denkt sich die ganze Fläche in so schmale Streifen zerlegt, daß man diese Streifen — Flächenelemente — als Rechtecke auffassen kann. Das wird zulässig sein, wenn man die Grundlinie verschwindend klein macht, d. h. dx als Grundlinie wählt; dann ist der Inhalt eines Flächenelementes $df = y \cdot dx$. Den Inhalt der ganzen Fläche erhält man als Summe der unendlich vielen und unendlich schmalen Flächenstreifen, d. h.

$$f = \int df = \int y \cdot dx = \int f(x) \cdot dx.$$

Durch die Festlegung der Punkte P_1 und P_2 ist angegeben, wie weit sich die Integration zu erstrecken hat. Die Abszissen x_1 und x_2 sind die Grenzen des Integrals, und zwar heißt x_2 die obere, x_1 die untere Grenze. S. 170 war gesagt, daß die Integrationskonstante von der Wahl des Ausgangspunktes abhängt; liegt dieser fest, so ist die Konstante überflüssig. Das durch Angabe der Grenzen eindeutig umrissene Integral heißt bestimmtes Integral; man schreibt

$$f = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot dx.$$

Die durch Strichelung hervorgehobene Fläche stellt sich als Differenz zweier Flächen dar; sie ergibt sich, wenn man von der durch die y -Achse und die Ordinate y_2 begrenzte Fläche die von der y -Achse und der Ordinate y_1 begrenzte Fläche subtrahiert. Mit andern Worten: man integriert von $x = 0$ bis $x = x_2$ und subtrahiert das Integral, das sich von $x = 0$ bis $x = x_1$ erstreckt. Es wird

$$f = \int_0^{x_2} f(x) dx - \int_0^{x_1} f(x) \cdot dx.$$

Beispiel: Die Fläche sei begrenzt durch die Parabel $y = f(x) = x^2$, so daß

$$\begin{aligned} f &= \int_{x_1}^{x_2} x^2 \cdot dx = \int_0^{x_2} x^2 \cdot dx - \int_0^{x_1} x^2 \cdot dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{x_2} - \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{x_1} = \frac{1}{3} x_2^3 - \frac{1}{3} x_1^3. \end{aligned}$$

1. Allgemeine Regeln.

1. Integration einer Summe oder Differenz. Sind $u = F(x)$ und $v = f(x)$ durch die Kurven der Fig. 95 dargestellt, so ist

$$u \cdot dx + v \cdot dx = (u + v) dx,$$

folglich

$$\int (u + v) \cdot dx = \int u dx + \int v \cdot dx.$$

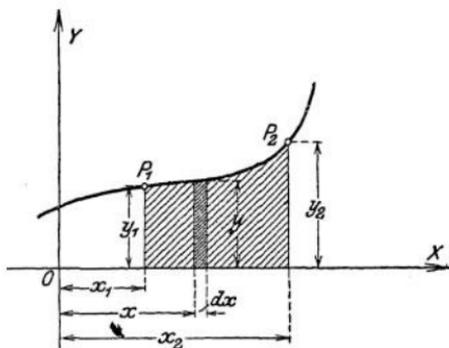


Fig. 94.

Soll eine Summe bzw. eine Differenz integriert werden, so ist jeder Summand einzeln zu integrieren (Zerlegungsverfahren).

Beispiel: Eine Fläche ist durch die Kurve $y = 4x^3 + 9x^2 - 8x - 5$ begrenzt; wie groß ist ihr Flächeninhalt zwischen der y -Achse und der Ordinate y_1 , zu der die Abszisse $x_1 = 3$ gehört? Aus

$$f = \int y \, dx$$

erhält man

$$f = \int_0^3 (4x^3 + 9x^2 - 8x - 5) \cdot dx = \int_0^3 4x^3 \, dx + \int_0^3 9x^2 \cdot dx - \int_0^3 8x \, dx - \int_0^3 5 \, dx,$$

$$f = \left[4 \cdot \frac{x^4}{4} + 9 \cdot \frac{x^3}{3} - 8 \cdot \frac{x^2}{2} - 5 \cdot x \right]_0^3, \quad = 3^4 + 3 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 = 111.$$

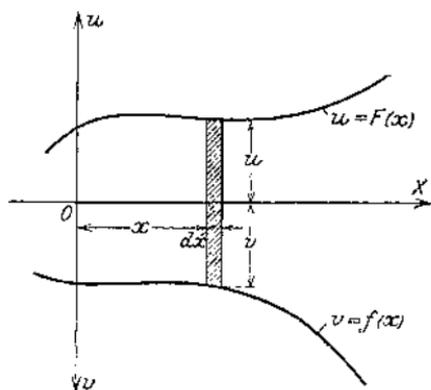


Fig. 95.

folglich

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \cdot dx &= \sin x \cdot \cos x - \int \sin x \cdot (-\sin x) \cdot dx = \sin x \cdot \cos x + \int \sin^2 x \cdot dx, \\ \int \cos^2 x \cdot dx &= \sin x \cdot \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \cdot dx = \sin x \cdot \cos x + \int dx - \int \cos^2 x \cdot dx, \\ 2 \int \cos^2 x \cdot dx &= \sin x \cdot \cos x + x, \\ \int \cos^2 x \cdot dx &= \frac{1}{2} \sin x \cdot \cos x + \frac{1}{2} x + C = \frac{1}{4} \cdot \sin 2x + \frac{1}{2} x + C. \end{aligned}$$

3. Trennung der Variablen. Es sei die Gleichung gegeben:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \text{oder} \quad y \cdot dy + x \cdot dx = 0;$$

$$\int y \cdot dy + \int x \cdot dx = C \quad \text{oder} \quad \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C;$$

oder mit $2C = a^2$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

als Gleichung des Kreises (vgl. Differentialgleichungen S. 197).

2. Integralformeln (Fundamentalintegrale).

1. $\int x^n \cdot dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$ gilt für n als beliebige ganze oder gebrochene Zahl mit Ausnahme von $n = -1$.

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C = \ln c \cdot x$. 3. $\int e^x \cdot dx = e^x + C$.

4. $\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$; 5. $\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$.

Bemerkung: Die Grenzen können erst dann angegeben werden, wenn unter dem Integral nur eine Variable vorkommt.

2. Die teilweise oder partielle Integration. Aus

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$$

erhält man durch Integration

$$\int d(u \cdot v) = u \cdot v = \int u \cdot dv + \int v \, du,$$

so daß

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du.$$

Beispiel:

$$\int \cos^2 x \cdot dx.$$

Setze

$$\cos x = u, \quad \text{so daß} \quad du = -\sin x \cdot dx,$$

$$\cos x \cdot dx = du,$$

so daß

$$v = \int \cos x \cdot dx = \sin x,$$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$; 7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x + C = -\operatorname{arc} \cos x + C$.
9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C = -\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x + C$.
10. $\int (a+bx)^n \cdot dx = \frac{1}{(n+1) \cdot b} (a+bx)^{n+1} + C$.
11. $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \cdot \ln(a+bx) + C = \frac{1}{b} \cdot \ln c \cdot (a+bx)$.
12. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$. 13. $\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)} + C$.
14. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C$. 15. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} + C$.
16. $\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} \cdot x \right) + C$
17. $\int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \cdot \ln \frac{\sqrt{ab}+bx}{\sqrt{ab}-bx} + C$ $\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} a > 0; b > 0$.
18. $\int \sqrt{a+bx} \cdot dx = \frac{2}{3b} (\sqrt{a+bx})^3 + C$.
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b} \cdot \sqrt{a+bx} + C$.
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} + C = -\operatorname{arc} \cos \frac{x}{a} + C$.
21. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln [x + \sqrt{a^2+x^2}] + C$.
22. $\int \sqrt{a^2+x^2} \cdot dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + C$.
23. $\int \sqrt{a^2-x^2} \cdot dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$.
24. $\int \sqrt{x^2-a^2} \cdot dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C$.
25. $\int a^x \cdot dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C$.
26. $\int \ln x \cdot dx = x \cdot \ln x - x + C$.
27. $\int \frac{\ln x}{x^2} \cdot dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$.
28. $\int \sin^2 x \cdot dx = -\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x + C$.
29. $\int \cos^2 x \cdot dx = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x + C$.
30. $\int \sin^n x \cdot dx = -\frac{\cos x \cdot \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \cdot dx$.
31. $\int \cos^n x \cdot dx = \frac{\sin x \cdot \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \cdot dx$.

$$32. \int \sin m x \cdot dx = -\frac{\cos m x}{m} + C. \quad 33. \int \cos m x \cdot dx = \frac{\sin m x}{m} + C.$$

$$34. \int \sin m x \cdot \cos n x \cdot dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

$$35. \int \sin m x \cdot \sin n x \cdot dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C.$$

$$36. \int \cos m x \cdot \cos n x \cdot dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C.$$

$$37. \int \operatorname{tg} x \cdot dx = -\ln \cos x + C. \quad 38. \int \operatorname{ctg} x \cdot dx = \ln \sin x + C.$$

$$39. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C. \quad 40. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) + C.$$

$$41. \int \frac{dx}{1 + \cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C. \quad 42. \int \frac{dx}{1 - \cos x} = -\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + C.$$

$$43. \int \arcsin x \cdot dx = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$44. \int \arccos x \cdot dx = x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$45. \int \operatorname{arctg} x \cdot dx = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

$$46. \int \operatorname{arccotg} x \cdot dx = x \cdot \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

3. Anwendungen der Integralrechnung.

a) Bestimmung von Flächeninhalten.

1. Es ist der Inhalt des Parabelsegmentes (Fig. 96) zu bestimmen; aus $df = y \cdot dx$ folgt

$$f = \int y \cdot dx.$$

Infolge der Beziehung $y^2 = 2px$; $b^2 = 2pa$ wird

$$y^2 = b^2 \cdot \frac{x}{a} \quad \text{oder} \quad y = b \sqrt{\frac{x}{a}},$$

so daß

$$f = \int_0^a b \cdot \sqrt{\frac{x}{a}} \cdot dx = \frac{b}{\sqrt{a}} \cdot \int_0^a x^{1/2} \cdot dx = \frac{b}{\sqrt{a}} \cdot \left| \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} \right|_0^a$$

$$f = \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{\sqrt{a}} \cdot a \sqrt{a} = \frac{2}{3} ab.$$

d. h. gleich $\frac{2}{3}$ des Inhaltes des Rechtecks aus a und b .

Aus der Gleichung der Kurve $y^2 = b^2 \frac{x}{a}$ kann man natürlich auch $x = f(y)$ entwickeln, so daß $2y \cdot yd = \frac{b^2}{a} \cdot dx$ oder $dx = 2 \frac{a}{b^2} \cdot y \cdot dy$.

Damit erhält man $f = \int 2 \cdot \frac{a}{b^2} y^2 dy$.

Da y in den Grenzen von 0 bis b variabel ist, so wird

$$f = 2 \frac{a}{b^2} \int_0^b y^2 \cdot dy = 2 \frac{a}{b^2} \frac{y^3}{3} \Big|_0^b = \frac{2}{3} ab.$$

2. Es ist die **Arbeitsleistung bei isothermischer Zustandsänderung** zu bestimmen. Ist $p_0 v_0$ (Fig. 97) der Anfangszustand eines Gases, so ist bei konstanter Temperatur

$$pv = p_0 \cdot v_0.$$

Da die Kraft variabel ist, so faßt man sie für das Wegelement ds als konstant auf, also $dA = P \cdot ds$.

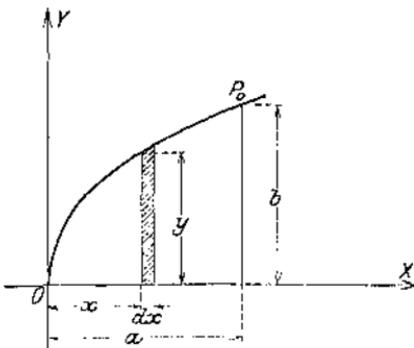


Fig. 96.

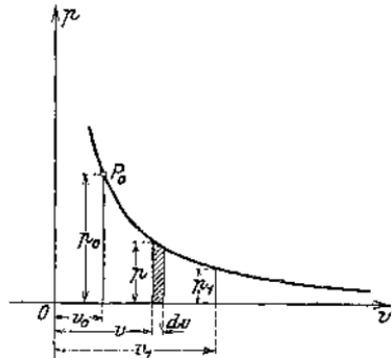


Fig. 97.

Mit $P = F \cdot p$ und $dv = F \cdot ds$ wird

$$dA = F \cdot p \cdot \frac{dv}{F} = p \cdot dv,$$

wenn F die Kolbenfläche bedeutet. Aus $dA = p \cdot dv$ ergibt sich

$$A = \int p \cdot dv.$$

Setzt man $p = \frac{p_0 \cdot v_0}{v}$ ein, so erhält man

$$A = p_0 \cdot v_0 \int \frac{dv}{v} = p_0 \cdot v_0 \cdot \ln v \Big|_{v_0}^{v_1}$$

wobei v_1 die Grenze bedeutet, bis zu der sich das Gas ausdehnt; daraus

$$A = p_0 \cdot v_0 (\ln v_1 - \ln v_0) = p_0 \cdot v_0 \cdot \ln \frac{v_1}{v_0}.$$

Für $p_0 = 8 \text{ Atm.} = 80\,000 \text{ kg/m}^2$; $v_0 = 1 \text{ cbm}$; $v_1 = 3 \text{ cbm}$ wird

$$A = 80\,000 \cdot 1 \cdot \ln 3 = 80\,000 \cdot 1,09861 = \sim 87\,900 \text{ mkg.}$$

3. Es ist die **Oberfläche der Kugel** zu bestimmen. Die Mantelfläche des Kugelsegmentes von der Höhe dy (Fig. 98) kann als Streifen von der Breite ds und der Länge $2\pi x$ aufgefaßt werden; ihr Flächeninhalt ist

$$df = 2\pi x \cdot ds;$$

also

$$f = \int 2\pi x \cdot ds.$$

Mit

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

und

$$ds = r \cdot d\varphi$$

wird

$$f = \int 2\pi \cdot r^2 \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi.$$

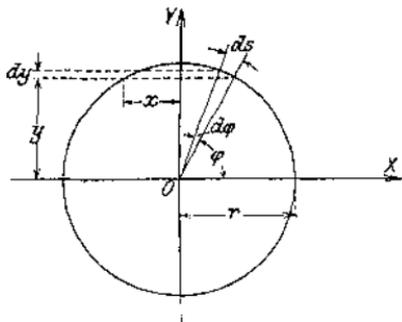


Fig. 98.

Wächst φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, so erhält man die Oberfläche der Halbkugel; für die ganze Kugel wird demnach

$$F = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2r^2 \cdot \pi \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi .$$

Das Fundamentalintegral Nr. 5 liefert $\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$, so daß

$$F = 4r^2\pi \cdot \sin \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi r^2 \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = 4r^2\pi .$$

Für die Mantelfläche eines Kugelabschnittes zwischen den Grenzen φ_1 und φ_2 wird

$$F = 2r^2\pi \cdot \sin \varphi \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = 2r^2\pi (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) .$$

Ist h die Höhe des Kugelabschnittes, so ist $r \cdot \sin \varphi_2 - r \sin \varphi_1 = h$, folglich ergibt sich für den Inhalt der Kugelzone $F = 2\pi r \cdot h$.

Für die Kugelhaube ist $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, d. h. $h = r \cdot \sin \frac{\pi}{2} - r \cdot \sin \varphi_1$,

so daß $F = 2\pi r \cdot h$ wird.

4. Es ist die **Arbeit der Längenänderung** innerhalb der Proportionalitätsgrenze zu bestimmen. Die Kraft P strecke den Stab um $d(\Delta l)$, dann ist die geleistete Arbeit bei konstantem Querschnitt

$$dA' = P \cdot d(\Delta l)$$

oder wenn P der Querschnitt, l die Länge des Stabes bedeuten,

$$\frac{dA'}{F \cdot l} = \frac{P}{F} \cdot \frac{d(\Delta l)}{l} = \frac{P}{F} \cdot d\left(\frac{\Delta l}{l}\right),$$

$$dA = \sigma \cdot d\varepsilon, \quad \text{oder} \quad A = \int \sigma \cdot d\varepsilon$$

= Inhalt der von $\sigma = f(\varepsilon)$ begrenzten Fläche. (Fig. 99.) Aus $\varepsilon = \alpha \cdot \sigma$ folgt

$$d\varepsilon = \alpha \cdot d\sigma, \quad \text{so daß} \quad A = \int \alpha \cdot \sigma \cdot d\sigma,$$

also ergibt sich als Arbeit für die Volumeneinheit des Stabes $A = \frac{1}{2} \alpha \cdot \sigma^2$,

wenn die Grenzen für die Spannung 0 und σ sind.

Die Gesamtarbeit A' bei $F \text{ cm}^2$ Querschnitt und $l \text{ cm}$ Länge ist

$$A' = F \cdot l \cdot A = F \cdot l \cdot \alpha \cdot \sigma^2 = \frac{1}{2} (F \cdot \sigma) \cdot (\alpha \cdot \sigma \cdot l) = \frac{1}{2} P \cdot \Delta l,$$

wenn Δl die Verlängerung ist, die der Stab unter dem Einfluß der Kraft P erfährt.

5. **Flächeninhalt bei Polarkoordinaten.** Das Flächenelement df kann als unendlich kleiner Kreisabschnitt aufgefaßt werden (Fig. 100), für den das Bogenelement ds geradlinig angenommen werden darf; demnach

$$df = \frac{1}{2} r^2 \cdot d\varphi \quad \text{und} \quad f = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \cdot d\varphi .$$

Beispiel: Welchen Flächeninhalt beschreibt der Leitstrahl bei einem Umgang der Archimedischen Spirale? Es ist $r = a \cdot \varphi$, $r^2 = a^2 \varphi^2$, so daß

$$f = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 \varphi^2 \cdot d\varphi = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\varphi^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3} a^2 \cdot \pi^3 .$$

6. Es ist die **Oberfläche des Rotationsparaboloids** zu berechnen. Die Gleichung der Parabel lautet:

$$y^2 = 2px,$$

$$\text{aus } 2y dy = 2p \cdot dx, \text{ folgt } y' = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}.$$

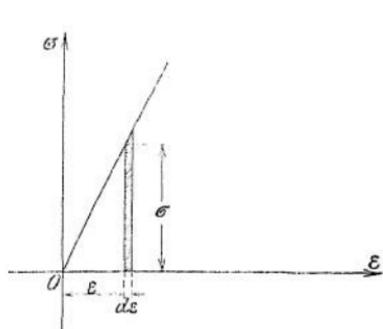


Fig. 99.

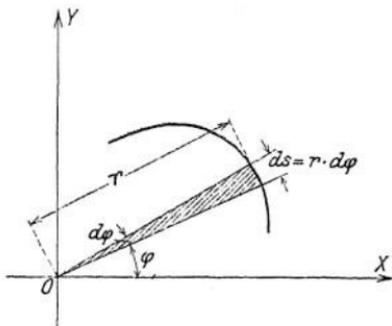


Fig. 100.

Das Flächenelement ist ein verschwindend schmaler Streifen von der Breite ds (Fig. 101.); der Radius ist y ; so daß $df = 2\pi y \cdot ds$. Aus

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + y'^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{p}{y}\right)^2}$$

folgt

$$df = 2\pi \cdot y \cdot dx \sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}} = 2\pi \cdot dx \sqrt{p^2 + 2px}.$$

Man setzt

$$p^2 + 2px = z, \quad dz = 2p dx,$$

folglich

$$\begin{aligned} f &= \int df = 2\pi \int z^{1/2} \cdot dx \\ &= 2\pi \int z^{1/2} \cdot \frac{dz}{2p} = \frac{\pi}{p} \cdot \frac{2}{3} \cdot z^{3/2}, \\ f &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{p} \sqrt{(p^2 + 2px)^3} \Big|_0^x. \end{aligned}$$

Geht die Parabel durch den Punkt

$$P_0(a, b), \text{ so wird } p = \frac{b^2}{a}$$

infolge

$$b^2 = 2pa,$$

und da außerdem $x = a$, so ergibt sich als Oberfläche des Rotationsparaboloids:

$$f = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi \cdot 2a}{b^2} \sqrt{\left(\frac{b^4}{4a^2} + b^2\right)^3} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{b}{a^2} \sqrt{(b^2 + 4a^2)^3}.$$

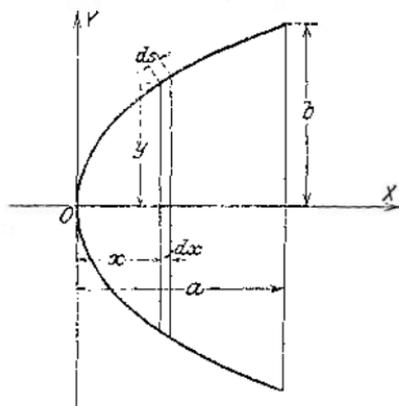


Fig. 101.

b) Bestimmung von Körperinhalten.

I. Inhalt des geraden Kreiskegels (Fig. 102). Das Körperelement dV von der Dicke dy und der Grundfläche f hat das Volumen $dV = f \cdot dy$.

Nun ist aber $f: r^2 \pi = y^2: h^2$; $f = r^2 \pi \cdot \frac{y^2}{h^2}$,
so daß

$$V = \frac{r^2}{h^2} \pi \int_0^h y^2 \cdot dy = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^h.$$

Da die untere Grenze 0 ergibt, wird $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

Soll der Inhalt des Kegelstumpfes ermittelt werden, so erstreckt sich die Integration von $y = h'$ bis $y = h$, man erhält

$$V = \frac{r^2 \pi}{h^2} \cdot \frac{1}{3} (h^3 - h'^3) = \frac{1}{3} r^2 \pi h \left(1 - \frac{h'^3}{h^3} \right) = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right).$$

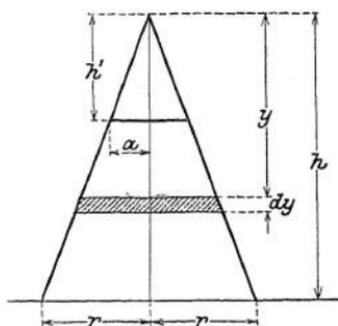


Fig. 102.

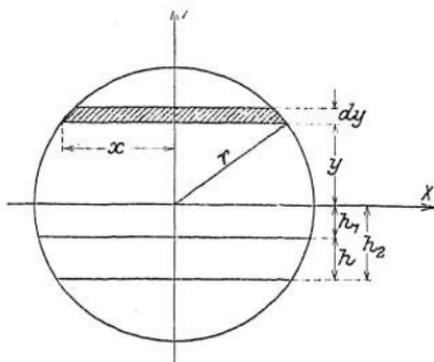


Fig. 103.

2. Inhalt der Kugel. Aus Fig. 103 ergibt sich $dV = \pi x^2 \cdot dy$, folglich, da $x^2 = r^2 - y^2$ ist,

$$dV = \pi (r^2 - y^2) \cdot dy,$$

$$V = 2 \pi \int_0^r (r^2 - y^2) \cdot dy = 2 \pi r^2 \cdot y - 2 \pi \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^r,$$

$$V = 2 \pi r^2 \cdot r - 2 \pi \cdot \frac{r^3}{3} = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3.$$

Soll der Inhalt der Kugelzone ermittelt werden, so erstreckt sich die Integration von $y = h_1$ bis $y = h_2$, so daß

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 \cdot y - \pi \frac{y^3}{3} \Big|_{h_1}^{h_2} = \pi r^2 (h_2 - h_1) - \frac{\pi}{3} (h_2^3 - h_1^3), \\ &= \pi r^2 \cdot h - \frac{\pi}{3} \cdot h (h_2^2 + h_2 h_1 h_1^2) = \frac{\pi h}{6} (6 r^2 - 2 h_2^2 - 2 h_2 h_1 - 2 h_1^2), \\ &= \frac{\pi h}{6} [3 r^2 - 3 h_2^2 + h_2^2 + 3 r^2 - 3 h_1^2 + h_1^2 - 2 h_2 h_1]. \end{aligned}$$

Mit $r^2 - h_2^2 = a^2$ und $r^2 - h_1^2 = b^2$ wird

$$V = \frac{\pi h}{6} [3 a^2 + 3 b^2 + (h_2 - h_1)^2] = \frac{\pi h}{6} (3 a^2 + 3 b^2 + h^2),$$

für die Kugelhaube wird $h_2 = r$, also $a = 0$, folglich $V = \frac{\pi h}{6} (3 b^2 + h^2)$.

3. Inhalt eines Rotationsparaboloids. Rotiert die Parabel $y^2 = 2px$ (Fig. 96) um die x -Achse, so ist $dV = f \cdot dx = \pi \cdot y^2 \cdot dx$, folglich

$$V = \pi \int y^2 \cdot dx = \pi \int_0^x 2px \cdot dx = 2p\pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^x = \frac{\pi xy^2}{2},$$

d. h. das Volumen des Rotationsparaboloids ist halb so groß wie das Volumen des Zylinders, der entsteht, wenn das Rechteck mit den Seiten x und y um die x -Achse rotiert.

4. Inhalt eines Rotationsellipsoids. Rotiert die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ um die x -Achse, so ist $dV = f \cdot dx = \pi y^2 \cdot dx$, also

$$\begin{aligned} V &= \pi \int y^2 \cdot dx = 2 \cdot \pi \int_0^a \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) \cdot dx = 2 \cdot \frac{\pi b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx \\ &= 2 \cdot \frac{\pi b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^a = 2 \cdot \frac{\pi b^2}{a^2} \left(a^3 - \frac{1}{3} a^3 \right) = \frac{4}{3} a b^2 \pi. \end{aligned}$$

c) Bestimmung von Schwerpunkten.

Denkt man sich einen Körper von der Masse M (Fig. 104) in unendlich viele und unendlich kleine Massenelemente dM zerlegt, so hat jedes Massenelement das Gewicht dMg ; diese Gewichte sind Kräfte, die nach dem Mittelpunkt der Erde gerichtet sind, folglich darf man sie als parallele Kräfte auffassen. Ihre Resultante ist gleich dem Gewicht des ganzen Körpers; der Angriffspunkt der Resultante ist der Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt des Körpers, dessen Lage im Raume durch die Angabe seiner Koordinaten x_0, y_0, z_0 bestimmt ist. Nach dem Satze: das statische Moment der Resultante ist gleich der Summe der statischen Momente der Einzelkräfte, wird man sagen: das statische Moment des Ganzen ist gleich der Summe der statischen Momente der einzelnen Teile; man bezieht die statischen Momente auf die drei durch das räumliche Achsenkreuz bestimmten Ebenen und versteht unter dem Moment das Produkt aus Kraft und Entfernung des Angriffspunktes von der Ebene. Damit erhält man für die YZ -Ebene:

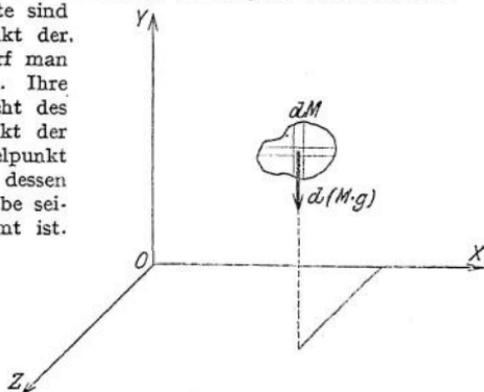


Fig. 104.

$$G \cdot x_0 = \int x \cdot dMg \quad \text{bzw.} \quad M \cdot x_0 = \int dM \cdot x; \quad x_0 = \frac{\int dM x}{M};$$

für die XZ -Ebene:

$$G \cdot y_0 = \int y \cdot dMg \quad \text{bzw.} \quad M \cdot y_0 = \int dM \cdot y; \quad y_0 = \frac{\int dM \cdot y}{M};$$

für die XY -Ebene — wenn man sich die Kräfte um 90° gedreht denkt —

$$G \cdot z_0 = \int z \cdot dMg \quad \text{bzw.} \quad M \cdot z_0 = \int dM z; \quad z_0 = \frac{\int dM z}{M}.$$

Handelt es sich um einen vollständig homogenen Körper, so kann man statt der Masse das Volumen des Körpers in die Rechnung einführen. Schrumpft die Dimension in Richtung der Z -Achse zu Null zusammen, so wird aus dem Körper eine Fläche; man spricht von dem Schwerpunkt einer Fläche und muß — um die Vorstellung der Masse aufrecht erhalten zu können — annehmen, die Fläche sei mit einer unendlich dünnen Masse belegt. Unter dieser Voraussetzung spricht man auch von dem Schwerpunkt einer Linie. Für den Körper wird M zu V , also dM zu dV , für die Fläche wird M zu F , also dM zu dF ; für die Linie wird M zu s , also dM zu ds ; damit erhält man die Koordinaten des Schwerpunktes

$$\text{von Linien: } x_0 = \frac{\int ds \cdot x}{\int ds}; \quad y_0 = \frac{\int ds \cdot y}{\int ds}; \quad z_0 = \frac{\int ds \cdot z}{\int ds};$$

$$\text{von Flächen: } x_0 = \frac{\int dF \cdot x}{\int dF}; \quad y_0 = \frac{\int dF \cdot y}{\int dF}; \quad z_0 = \frac{\int dF \cdot z}{\int dF};$$

$$\text{von Körpern: } x_0 = \frac{\int dV \cdot x}{\int dV}; \quad y_0 = \frac{\int dV \cdot y}{\int dV}; \quad z_0 = \frac{\int dV \cdot z}{\int dV}.$$

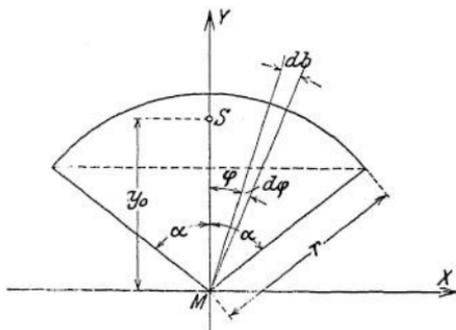


Fig. 105.

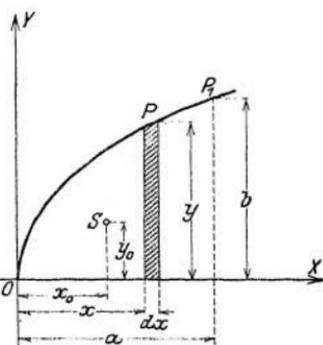


Fig. 106.

1. Schwerpunkt der Kreislinie (Fig. 105).

$$MS = y_0 = \frac{\int db \cdot y}{b};$$

$$db = r \cdot d\varphi; \quad y = r \cdot \cos \varphi;$$

$$y_0 = \frac{\int_0^\alpha r^2 \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi}{b} = \frac{2r^2}{b} \cdot \sin \varphi \Big|_0^\alpha = \frac{2r^2}{b} \cdot \sin \alpha$$

setze $2r \cdot \sin \alpha = s$, dann wird $y_0 = \frac{r \cdot s}{b}$.

2. Schwerpunkt der Parabelfläche (Fig. 106).

$$x_0 = \frac{\int dF \cdot x}{F} = \frac{\int y \cdot dx \cdot x}{F};$$

$$y^2 = 2px; \quad b^2 = 2p \cdot a.$$

Daraus $y^2 = b^2 \cdot \frac{x}{a}$; $y = b \cdot \sqrt{\frac{x}{a}}$,

so daß mit $F_a = \frac{2}{3} a b$

$$x_0 = \frac{b \int_0^a x \cdot \sqrt{\frac{x}{a}} \cdot dx}{\frac{2}{3} a b} = \frac{3 \cdot \int_0^a x^{3/2} \cdot dx}{2 \cdot a \sqrt{a}} = \frac{3 \cdot \frac{2}{5} x^{5/2} \Big|_0^a}{2 \cdot a \sqrt{a}} = \frac{3}{5} a;$$

$$y_0 = \frac{\int dF \cdot \frac{y}{2}}{F} = \frac{\int y \cdot dx \cdot \frac{y}{2}}{F} = \frac{\int_0^a b^2 \cdot \frac{x}{2 \cdot a} \cdot dx}{\frac{2}{3} a b} = \frac{\frac{3}{4} b}{a^2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^a = \frac{3}{4} b.$$

3. Schwerpunkt des Dreiecks (Fig. 107).

$$y_0 = \frac{\int dF \cdot y}{F} = \frac{\int x \cdot dy \cdot y}{\frac{1}{2} b \cdot h}$$

Aus $x : b = y : h$ folgt $x = \frac{b}{h} \cdot y$, folglich

$$y_0 = \frac{\frac{b}{h} \int_0^h y^2 \cdot dy}{\frac{1}{2} b h} = \frac{2 \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^h}{h^2} = \frac{2}{3} h;$$

$$y'_0 = h - y_0 = \frac{1}{3} h.$$

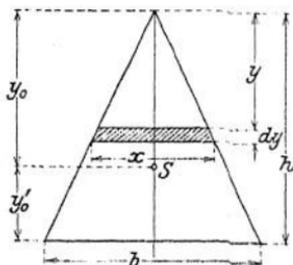


Fig. 107.

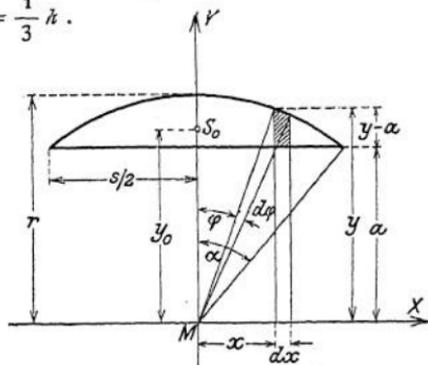


Fig. 108.

4. Schwerpunkt des Kreisabschnittes (Fig. 108).

$$MS = y_0 = \frac{\int dF \left(a + \frac{y-a}{2} \right)}{\int dF}; \quad dF = (y-a) \cdot dx;$$

$$y_0 = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int (y-a)(y+a) \cdot dx}{\int (y-a) \cdot dx} = \frac{\frac{1}{2} \int (y^2 - a^2) \cdot dx}{\int (y-a) dx}.$$

$$\begin{aligned} \text{Setze} \quad y &= r \cdot \cos \varphi; & x &= r \cdot \sin \varphi; \\ y^2 &= r^2 \cdot \cos^2 \varphi; & dx &= r \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\alpha (r^2 \cdot \cos^2 \varphi - a^2) \cdot r \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi}{2 \cdot \int_0^\alpha (r \cdot \cos \varphi - a) \cdot r \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi} \\ &= \frac{r^3 \int_0^\alpha \cos^3 \varphi \cdot d\varphi - a^2 r \int_0^\alpha \cos \varphi \cdot d\varphi}{2 r^2 \int_0^\alpha \cos^2 \varphi \cdot d\varphi - 2 a r \int_0^\alpha \cos \varphi \cdot d\varphi} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Fundamentalintegrale Nr. 31, 29, 5 ergibt sich

$$y_0 = \frac{r^3 \left[\frac{1}{3} \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi + \frac{2}{3} \sin \varphi \right] - a^2 r \cdot \sin \varphi \Big|_0^\alpha}{2 r^2 \left[\frac{1}{2} \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \frac{1}{2} \varphi \right] - 2 a r \sin \varphi \Big|_0^\alpha},$$

mit $a = r \cdot \cos \alpha$ wird

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{r^3 \left[\frac{1}{3} \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \frac{2}{3} \sin \alpha \right] - r^3 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha}{2 r^2 \left[\frac{1}{2} \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \frac{1}{2} \alpha \right] - 2 r^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = r \cdot \frac{\frac{2}{3} \sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha} \\ &= r \cdot \frac{\frac{2}{3} \sin^3 \alpha}{\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \frac{2}{3} r \cdot \frac{\sin^3 \alpha}{\pi \cdot \frac{\alpha}{180^\circ} - \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha} \end{aligned}$$

Mit $r \cdot \sin \alpha = \frac{s}{2}$ und $\sin^3 \alpha = \frac{1}{8} \cdot \frac{s^3}{r^3}$ wird

$$y_0 = \frac{1}{12} \cdot \frac{s^3}{r^2 \left(\pi \cdot \frac{\alpha}{180^\circ} - \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha \right)} = \frac{1}{12} \cdot \frac{s^3}{F}$$

Für die Halbkreisfläche wird $2\alpha = 180^\circ$; $\sin 2\alpha = 0$, so daß

$$y_0 = \frac{2}{3} r \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{4r}{3\pi} = 0,4244 \cdot r.$$

5. Schwerpunkt des Kreisabschnittes (Fig. 109).

$$MS \int dF = y_0 \int dF = \int dF \cdot y;$$

$$y = \frac{2}{3} \cdot r \cdot \cos \varphi; \quad dF = \frac{1}{2} r \cdot db;$$

$$y_0 \int \frac{1}{2} r \cdot db = \int \frac{1}{2} r \cdot db \cdot \frac{2}{3} \cdot r \cdot \cos \varphi;$$

$$db = r \cdot d\varphi;$$

$$y_0 \int \frac{1}{2} r^2 \cdot d\varphi = \int \frac{1}{3} \cdot r^3 \cos \varphi \cdot d\varphi;$$

$$y_0 = \frac{2}{3} r \cdot \frac{\int_0^\alpha \cos \varphi \cdot d\varphi}{\int_0^\alpha d\varphi} = \frac{2}{3} r \cdot \frac{\sin \varphi}{\varphi} \Big|_0^\alpha = \frac{2}{3} r \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

Für die Halbkreisfläche wird $\alpha = 90^\circ$; $\sin \alpha = 1$, so daß

$$y_0 = \frac{2}{3} r \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{180^\circ}{90^\circ} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Für die Viertelkreisfläche wird $\alpha = 45^\circ$; $\sin 45^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2}$, so daß

$$y_0 = \frac{2}{3} r \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{180^\circ}{45^\circ} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot r = 0,6 r.$$

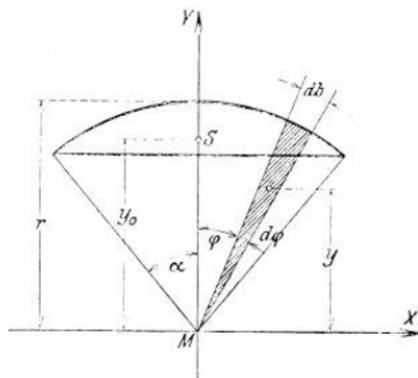


Fig. 109.

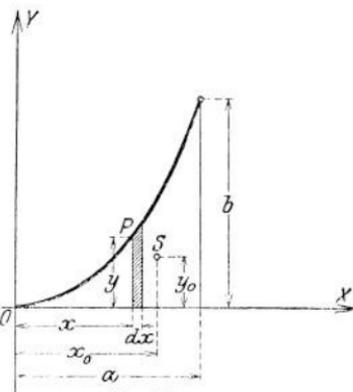


Fig. 110.

6. Schwerpunkt der Ergänzungsfigur des Parabelsegments (Fig. 110).

$$x_0 = \frac{\int dF \cdot x}{F} = \frac{\int y \cdot dx \cdot x}{F}; \quad y = \frac{x^2}{a^2} \cdot b; \quad F = \frac{1}{3} ab;$$

$$x_0 = \frac{\frac{b}{a^2} \int_0^a x^3 dx}{\frac{1}{3} ab} = \frac{\frac{b}{a^2} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^a}{\frac{1}{3} ab} = \frac{3}{4} a;$$

$$y_0 = \frac{\int dF \cdot \frac{y}{2}}{F} = \frac{\int y \cdot dx \cdot \frac{y}{2}}{F} = \frac{\frac{b^2}{2a^4} \int_0^a x^4 \cdot dx}{\frac{1}{3} ab} = \frac{b^2}{\frac{1}{3} ab} \cdot \frac{1}{5} \Big|_0^a;$$

$$y_0 = \frac{3}{10} \cdot b.$$

7. Schwerpunkt der Mantelfläche einer Kugelzone (Fig. 111).

$$y_0 \int dF = \int dF \cdot y; \quad dF = 2\pi x \cdot ds;$$

$$ds = r \cdot d\varphi; \quad y = r \cdot \cos \varphi; \quad x = r \cdot \sin \varphi;$$

$$y_0 \cdot \int 2\pi \cdot x^2 \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi = \int 2\pi r \cdot \sin \varphi \cdot r \cdot d\varphi \cdot r \cdot \cos \varphi;$$

$$y_0 2\pi r^2 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \varphi \cdot d\varphi = \pi r^3 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin 2\varphi \cdot d\varphi;$$

$$y_0 \cdot 2 \cdot \cos \varphi = \frac{1}{2} r \cos 2\varphi \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2};$$

$$y_0 = \frac{r}{4} \cdot \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi} = \frac{r}{4} \cdot \frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}.$$

$$y_0 = \frac{r}{4} \cdot \frac{[\cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_1] - [\sin^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_1]}{\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1};$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{(h_0 + h)}{r}; \quad \cos \alpha_2 = \frac{h_0}{r}; \quad \sin^2 \alpha_1 = (1 - \cos^2 \alpha_1) = 1 - \frac{(h_0 + h)^2}{r^2};$$

$$\sin^2 \alpha_2 = (1 - \cos^2 \alpha_2) = 1 - \frac{h_0^2}{r^2};$$

$$y_0 = \frac{r}{4} \cdot \frac{\frac{h_0^2}{r^2} - \left(\frac{h_0 + h}{r}\right)^2 - \left[1 - \frac{h_0^2}{r^2} - 1 + \frac{(h_0 + h)^2}{r^2}\right]}{\frac{h_0}{r} - \frac{h_0 + h}{r}}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{h_0^2 - h_0^2 - 2h_0 \cdot h - h^2 + h_0^2 - h_0^2 - 2h_0 h - h^2}{-h} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2h^2 + 4h_0 h}{-h};$$

$$y_0 = h_0 + \frac{h}{2},$$

d. h. der Schwerpunkt der Mantelfläche liegt in halber Höhe der Zone; für die Mantelfläche der Kugelhaube gilt dasselbe.

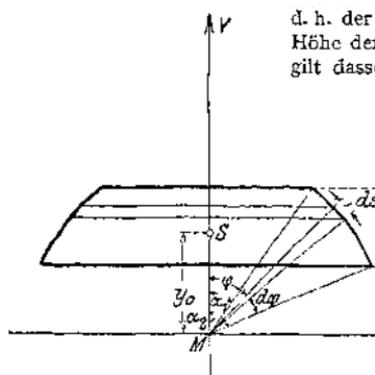


Fig. 111.

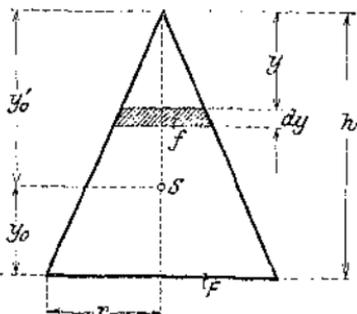


Fig. 112.

8. Schwerpunkt des geraden Kreiskegels (Fig. 112).

$$y'_0 \cdot V = \int dV \cdot y; \quad dV = f \cdot dy; \quad V = \frac{1}{3} h \cdot F; \quad y'_0 \cdot \frac{1}{3} F \cdot h = \int_0^h f \cdot y \cdot dy;$$

$$y'_0 = \frac{3 \cdot \int f \cdot y \cdot dy}{F \cdot h} = \frac{3 \cdot F}{h^3 \cdot F} \int_0^h y^3 \cdot dy = 3 \cdot \frac{y^4}{4} \Big|_0^h;$$

$$y'_0 = \frac{3}{4} h; \quad y = \frac{1}{4} h.$$

9. Schwerpunkt der Halbkugel (Fig. 113).

$$MS \cdot V = y_0 \cdot V = \int dV \cdot y;$$

$$V = \frac{2}{3} r^3 \cdot \pi; \quad dV = x^2 \cdot \pi \cdot dy; \quad x^2 = r^2 - y^2;$$

$$y_0 \cdot \frac{2}{3} r^3 \cdot \pi = \int_0^r (r^2 - y^2) \pi y \cdot dy;$$

$$y_0 \cdot \frac{2}{3} r^3 \pi = \pi \int_0^r y^2 \cdot dy - \pi \int_0^r y^3 \cdot dy = \pi r^3 \cdot \frac{y^2}{2} - \pi \frac{y^4}{4} \Big|_0^r;$$

$$y_0 \cdot \frac{2}{3} r^3 \cdot \pi = \frac{1}{4} r^4 \cdot \pi; \quad y_0 = \frac{3}{8} r.$$

10. Schwerpunkt des Rotationsparaboloids (Fig. 114).

$$y_0 = \frac{\int dV \cdot y}{\int dV};$$

$$dV = x^2 \cdot \pi \cdot dy;$$

$$y = b \cdot \frac{x^2}{a^2};$$

$$x^2 = \frac{a^2}{b} \cdot y;$$

$$y_0 = \frac{\int_0^b \pi \cdot \frac{a^2}{b} \cdot y^2 \cdot dy}{\int_0^b \pi \cdot \frac{a^2}{b} \cdot y \cdot dy}$$

$$= \frac{\frac{y^3}{3} \Big|_0^b}{\frac{y^2}{2} \Big|_0^b} = \frac{2}{3} b.$$

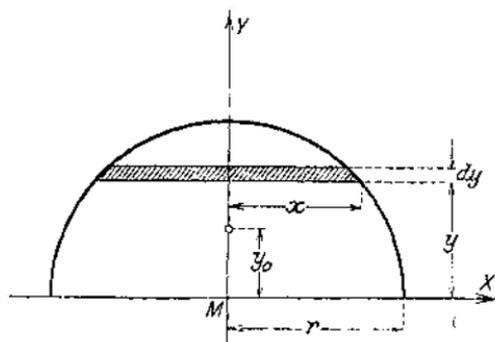


Fig. 113.

11. Guldinsche Regel für Flächen: Rotiert eine ebene Kurve um eine in der Ebene liegende Achse, so ist die von der Kurve beschriebene Fläche gleich dem Produkt aus der Länge der Kurve und dem Weg ihres Schwerpunktes (Fig. 115).

$$dF = 2\pi \cdot x \cdot ds;$$

$$F = 2\pi \int x \cdot ds.$$

$x \cdot ds$ ist das statische Moment des Kurvenelementes ds bezogen auf die y -Achse; $\int x \cdot ds$ ist die Summe der statischen Momente der Kurveteile, bezogen auf die y -Achse; da die Summe der statischen Momente der einzelnen Teile gleich dem statischen Moment des Ganzen ist, so ist

$$\int x \cdot ds = s \cdot x_0;$$

demnach

$$F = 2\pi \int x \cdot ds = 2\pi x \cdot s_0.$$

$2\pi x_0$ ist gleich dem Umfang des Kreises mit dem Schwerpunktsabstand x_0 der Kurvenlänge s als Radius.

12. Guldinsche Regel für Rotationskörper: Rotiert eine ebene Fläche um eine in seiner Ebene liegende Achse, so ist das von dem Flächenstück beschriebene

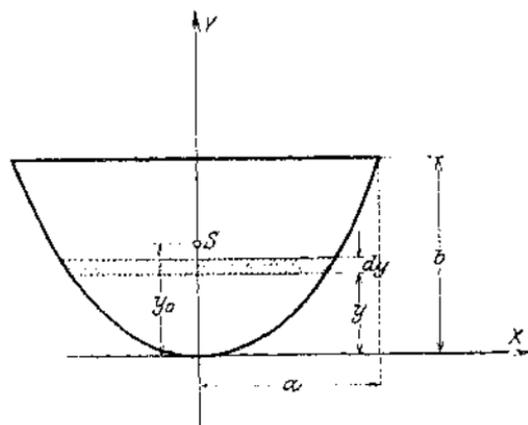


Fig. 114.

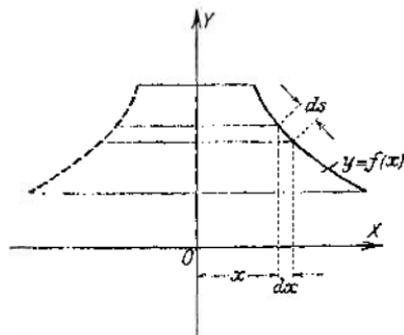


Fig. 115.

Volumen gleich dem Produkt aus dem Inhalt der Fläche und dem Weg ihres Schwerpunktes (Fig. 116).

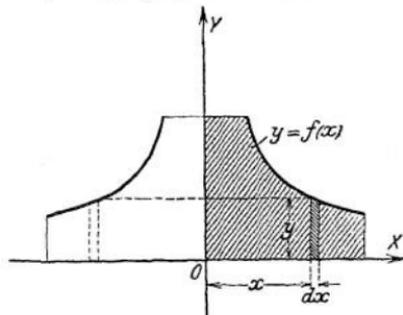


Fig. 116.

$$dV = dF \cdot x \cdot 2\pi;$$

$$dF = y \cdot dx;$$

$$dV = 2\pi \cdot x \cdot y \cdot dx;$$

$$V = 2\pi \int xy \cdot dx.$$

$x \cdot y \cdot dx$ ist das statische Moment des Flächenelements $y \cdot dx$ in Beziehung auf die y -Achse; $\int xy \cdot dx$ also die Summe der statischen Momente der Flächenteilen, bezogen auf dieselbe Achse. Da diese Summe gleich dem statischen Moment der ganzen Fläche sein muß, so wird

$$\int xy \cdot dx = F \cdot x_0; \quad \text{demnach} \quad V = 2\pi \int xy \cdot dx = 2\pi \cdot F \cdot x_0.$$

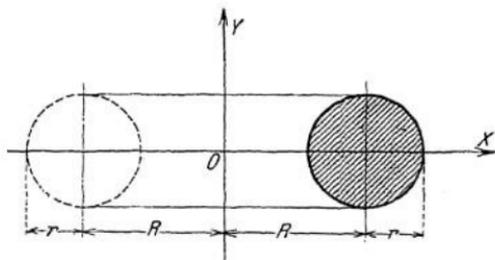


Fig. 117.

$2\pi x_0$ ist gleich dem Umfang des Kreises mit dem Schwerpunktabstand x_0 der erzeugenden Fläche F als Radius, z. B. Inhalt des zylindrischen Ringes. (Fig. 117.)

$$V = 2\pi \cdot F \cdot x_0$$

$$= 2\pi \cdot r^2 \pi \cdot R$$

$$= 2\pi^2 R \cdot r^2$$

$$O = 2\pi \cdot s \cdot x_0 = 2\pi \cdot 2\pi r \cdot R$$

$$= 4\pi^2 r R.$$

d) Bestimmung von Trägheitsmomenten.

Ist dV das Volumen eines Körperelementes, so versteht man unter dem Trägheitsmoment des ganzen Körpers den Ausdruck

$$J = \int dV \cdot v^2,$$

wobei v die Entfernung des Körperelementes von der Ebene, Achse bzw. Punkt bedeutet, auf die das Trägheitsmoment bezogen wird (vgl. Abschnitt S. 257).

Sind x, y, z die Koordinaten des Körperteilchens dV (Fig. 118), so ist

$$J_{yz} = \int dV \cdot x^2$$

das Trägheitsmoment des ganzen Körpers, bezogen auf die yz -Ebene;

$$J_{xz} = \int dV \cdot y^2$$

das Trägheitsmoment des ganzen Körpers, bezogen auf die xz -Ebene;

$$J_{xy} = \int dV \cdot z^2$$

das Trägheitsmoment des ganzen Körpers, bezogen auf die xy -Ebene.

Die auf Ebenen bezogenen Trägheitsmomente heißen Planmomente.

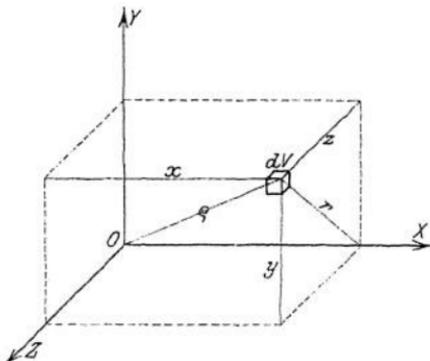


Fig. 118.

Unter dem Trägheitsmoment des Körpers, bezogen auf eine Achse, versteht man den Ausdruck

$$J_x = \int dV \cdot r^2,$$

worin r die Entfernung des Körperelementes von der x -Achse bedeutet. Da $r^2 = z^2 + y^2$ ist, so ergibt sich

$$J_x = \int dV(z^2 + y^2) = \int dV \cdot z^2 + \int dV \cdot y^2 = J_{xz} + J_{xy}.$$

In gleicher Weise erhält man

$$J_y = \int dV(z^2 + x^2) = \int dV \cdot z^2 + \int dV \cdot x^2 = J_{yz} + J_{xy}.$$

$$J_z = \int dV(x^2 + y^2) = \int dV \cdot x^2 + \int dV \cdot y^2 = J_{yz} + J_{xz}.$$

Die auf die Achsen bezogenen Momente heißen axiale Trägheitsmomente.

Unter dem Trägheitsmoment des Körpers, bezogen auf den Anfangspunkt O , versteht man den Ausdruck

$$J_p = \int dV \cdot \varrho^2,$$

worin ϱ die Entfernung des Körperelementes von dem Punkt O — dem Pol — bedeutet. Da $\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist, so wird

$$J_p = \int dV(x^2 + y^2 + z^2) = \int dV \cdot x^2 + \int dV \cdot y^2 + \int dV \cdot z^2;$$

$$J_p = J_{yz} + J_{xz} + J_{xy}.$$

Die auf einen Punkt O als Pol bezogenen Trägheitsmomente heißen polare Trägheitsmomente.

Denkt man sich die Masse M eines Körpers in einem Punkte in der Entfernung i von der Rotationsachse konzentriert, so hat die gedachte Masse M die gleiche lebendige Kraft wie die wirkliche Masse M , wenn i gleich dem Trägheitsradius ist; das Trägheitsmoment J ist

$$J = M \cdot i^2$$

oder, auf die geometrische Form des Körpers bezogen,

$$J = V \cdot i^2.$$

Geht die Ebene, auf die das Trägheitsmoment bezogen wird, durch den Schwerpunkt, so bezeichnet man das Trägheitsmoment mit J_s , so daß

$$J_s = \int dV \cdot x^2$$

ist, wenn die yz -Ebene durch den Schwerpunkt des Körpers geht. Verschiebt man die yz -Ebene um $\pm e$, so geht x über in $x \mp e$; das auf die verschobene Ebene bezogene Trägheitsmoment wird

$$\begin{aligned} J_1 &= \int dV(x \mp e)^2 = \int dV(x^2 \mp 2xe + e^2) \\ &= \int dV \cdot x^2 \mp \int dV 2ex + \int dV \cdot e^2 \end{aligned}$$

oder

$$J_1 = J_s + V e^2,$$

da

$$\int dV \cdot 2ex = 2e \int dV x$$

als statisches Moment des Körpers in Beziehung auf die Schwerebene gleich Null wird.

Für die axialen Trägheitsmomente geht r über in $r \mp e$, wenn man die x -Achse um $\pm e$ verschiebt, so daß

$$J_1 = \int dV(r \mp e)^2 = \int dV \cdot r^2 \mp \int dV \cdot 2re + \int dV \cdot e^2.$$

Da $2e \int dV \cdot r$ als statisches Moment des Körpers in Beziehung auf die Schwerebene gleich Null wird, so ergibt sich

$$J_1 = \int dV \cdot r^2 + e^2 \int dV = J_s + V \cdot e^2.$$

In gleicher Weise erhält man für das polare Trägheitsmoment

$$J_1 = J_s + V \cdot r^2 e.$$

Beispiele:

1. Es ist das axiale Trägheitsmoment der zylindrischen Scheibe zu bestimmen.

$$J_z = \int dV \rho^2; \quad dV = b \cdot 2\pi \rho \cdot d\rho;$$

$$J_z = 2\pi b \cdot \int_0^r \rho^3 \cdot d\rho = \frac{1}{2} \pi \cdot b \cdot r^4 = \frac{1}{2} \cdot V \cdot r^2 = V \cdot i^2,$$

und daraus

$$i = \frac{r}{2} \sqrt{2}.$$

2. Es ist das axiale Trägheitsmoment der Kugel zu bestimmen (Fig. 119).

$$J_z = J_{yz} + J_{zx} = \int dV \cdot x^2 + \int dV \cdot y^2.$$

Da

$$\int dV x^2 = \int dV \cdot y^2$$

ist, wird

$$J_z = 2 \int dV \cdot y^2; \quad dV = x^2 \pi \cdot dy;$$

$$J_z = 2 \cdot \int \pi \cdot x^2 y^2 \cdot dy = 2 \cdot 2 \int_0^r y^2 (r^2 - y^2) \cdot dy;$$

Fig. 119.

$$J_z = 4\pi \int_0^r r^2 y^2 dy - 4\pi \int_0^r y^4 \cdot dy = 4r^2 \pi \cdot \frac{y^3}{3} - 4\pi \cdot \frac{y^5}{5} \Big|_0^r;$$

$$J_z = \frac{8}{15} \pi \cdot r^5 = \left(\frac{4}{3} r^3 \cdot \pi\right) \cdot \left(\frac{2}{5} r^2\right) = V \cdot \frac{2}{5} r^2 = V \cdot i^2$$

und daraus

$$i = \frac{r}{5} \sqrt{10}.$$

3. Es ist das polare Trägheitsmoment der Kugel zu bestimmen.

$$J_p = J_{xy} + J_{yz} + J_{zx} = \int dV \cdot x^2 + \int dV \cdot x^2 + \int dV \cdot y^2.$$

Aus

$$\int dV z^2 = \int dV \cdot x^2 = \int dV \cdot y^2 \quad \text{folgt}$$

$$J_p = 3 \int dV \cdot y^2 = 3 \int \pi \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot dy = 6\pi \int_0^r y^2 (r^2 - y^2) \cdot dy;$$

$$J_p = \frac{4}{5} \pi \cdot r^5 = \frac{4}{3} r^3 \pi \cdot \frac{3}{5} r^2 = V \cdot \frac{3}{5} r^2 = V \cdot i^2,$$

so daß

$$i = \frac{r}{5} \sqrt{15}.$$

4. Stellt man dieselbe Betrachtung wie unter c an, so kann man auch von dem Trägheitsmoment von Flächen und Linien sprechen. In diesem Falle schrumpft die Dimension in Richtung der Z-Achse zu Null zusammen; das auf die X- bzw. Y-Achse bezogene axiale Moment wird zum äquatorialen Trägheitsmoment, das auf einen Punkt bezogene Moment heißt wie bei den Körpern das polare Trägheitsmoment. Unter diesen Voraussetzungen wird das äquatoriale Trägheitsmoment einer Fläche

$$J_x = \int dF \cdot y^2; \quad J_y = \int dF \cdot x^2.$$

Das polare

$$J_p = \int dF r^2 = \int dF (x^2 + y^2) = \int dF \cdot x^2 + \int dF \cdot y^2 = J_x + J_y.$$

Es ist das äquatoriale Trägheitsmoment des Rechtecks zu bestimmen (Fig. 120).

$$J_x = \int dF \cdot y^2; \quad dF = b \cdot dy;$$

$$J_x = \int b \cdot y^2 \cdot dy = 2b \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot dy = 2b \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^{\frac{h}{2}} = \frac{b h^3}{12};$$

$$J_y = \int dF \cdot x^2; \quad dF = h \cdot dx;$$

$$J_y = \int h \cdot x^2 \cdot dx = 2h \int_0^{\frac{b}{2}} x^2 \cdot dx = 2h \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\frac{b}{2}} = \frac{h b^3}{12};$$

$$J_p = J_x + J_y = \frac{b h^3}{12} + \frac{h b^3}{12} = \frac{b h}{12} (h^2 + b^2).$$

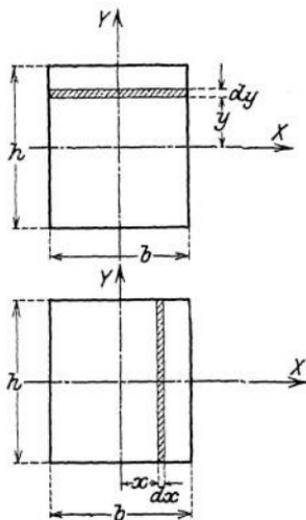


Fig. 120.

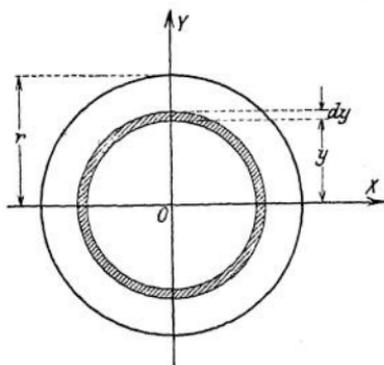


Fig. 121.

5. Es ist das polare Trägheitsmoment der Kreisfläche zu bestimmen (Fig. 121).

$$J_p = \int dF \cdot y^2;$$

$$dF = 2\pi y \cdot dy;$$

$$J_p = \int 2\pi \cdot y^3 \cdot dy = 2\pi \int_0^r y^3 \cdot dy = 2\pi \cdot \frac{y^4}{4} \Big|_0^r = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi \cdot d^4}{32}.$$

Aus $J_p = J_x + J_y = 2J_x$ folgt $J_x = J_y = \frac{1}{2} J_p = \frac{\pi d^4}{64}.$

e) Berechnung von Bogenlängen (Rektifikation ebener Kurven).

Ist $y = f(x)$ die Gleichung einer ebenen Kurve, so wird mit den Bezeichnungen der Fig. 122

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Daraus folgt durch Integration für den Bogen $P_1 P_2$

$$s = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Ist die Gleichung der Kurve in Parameterform gegeben, d. h.:

$$x = F(t); \quad y = f(t),$$

so wird

$$ds = dt \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

und daraus

$$s = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

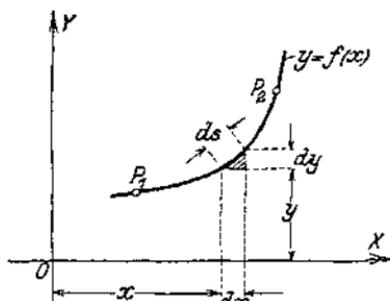


Fig. 122.

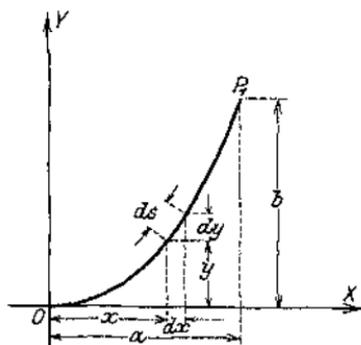


Fig. 123.

1. Es ist die **Bogenlänge der Parabel** zu bestimmen; die Gleichung der Parabel lautet (Fig. 123)

$$y = b \cdot \frac{x^2}{a^2}, \quad \frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{b}{a^2} \cdot x,$$

$$s = \int dx \sqrt{1 + \frac{4b^2 x^2}{a^4}} = \frac{1}{a^2} \int dx \sqrt{a^4 + 4b^2 x^2}.$$

Setze

$$a^4 = p^2; \quad 4b^2 x^2 = z^2; \quad 2bx = z; \quad dx = \frac{dz}{2b}.$$

Dann wird

$$s = \frac{1}{a^2} \int \frac{dz}{2b} \sqrt{p^2 + z^2}.$$

Das Fundamentalintegral Nr. 22 liefert

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2a^2 b} \left\{ \frac{z}{2} \sqrt{p^2 + z^2} + \frac{p^2}{2} \ln(z + \sqrt{p^2 + z^2}) \right\} \\ &= \frac{1}{2a^2 b} \left\{ \frac{2bx}{2} \sqrt{a^4 + (2bx)^2} + \frac{a^4}{2} \ln(2bx + \sqrt{a^4 + (2bx)^2}) \right\} \Big|_u^a. \end{aligned}$$

Die Einsetzung der Grenzen ergibt

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4b^2} + \frac{a^2}{4b} \left\{ \ln(2ba + a\sqrt{a^2 + 4b^2}) - \ln a^2 \right\} \\ s &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4b^2} + \frac{a^2}{4b} \cdot \ln \left(\frac{2b}{a} + \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + 4b^2} \right). \end{aligned}$$

2. Es ist die **Länge des Bogens der Zykloide** zu berechnen. Die Gleichung der Kurve lautet in Parameterform (Fig. 124)

$$\begin{aligned}
 x &= r(\varphi - \sin \varphi); & y &= r(1 - \cos \varphi), \\
 dx &= r(1 - \cos \varphi) d\varphi; & dy &= r \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi, \\
 s &= \int d\varphi \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} = \int d\varphi \sqrt{r^2[(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi]}, \\
 &= r \int d\varphi \sqrt{2(1 - \cos \varphi)} = 2r \int d\varphi \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}}. \\
 &= 4r \int \sin \frac{\varphi}{2} \cdot d\frac{\varphi}{2} = 4r \left[-\cos \frac{\varphi}{2}\right]_0^\varphi,
 \end{aligned}$$

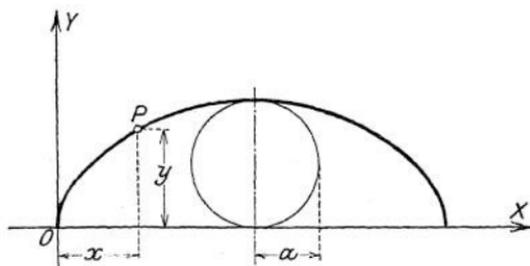


Fig. 124.

Rollt der ganze Kreis ab, d. h. wächst φ von 0 bis 2π , so wird

$$s = -4r[\cos \pi - \cos 0] = 8a.$$

f) Integralkurven.

Auf S. 153 war gezeigt, daß die erste Ableitung einer Funktion wieder eine Funktion von x ergibt — es war $y' = f'(x)$ — die graphisch dargestellt eine Kurve — die Differentialkurve — liefert. Aus

$$y = \int f'(x) dx$$

erhält man $y = f(x)$ und nennt $y = f(x)$ die Integralkurve zu $y' = f'(x)$. Ist $y' = f'(x)$ gegeben (Fig. 125), dann ist

$$df = y' \cdot dx = f'(x) \cdot dx, \quad f = \int y' \cdot dx = \int f'(x) \cdot dx = y,$$

d. h. die Ordinate y der Integrallinie ist gleich dem Inhalt der von der Kurve $y' = f'(x)$, so daß $y' = f'(x)$ die zweite Differentiallinie zu $z = F(x)$ ist. Fig. 78

auf S. 158 gab $v = f(t)$ als Differentiallinie zu $s = f(t)$; $\dot{p} = f(t)$ als zweite Differentiallinie zu $s = f(t)$. Umgekehrt kann man sagen: die Geschwindigkeitslinie ist die Integralkurve für die Beschleunigungslinie, die Zeitweglinie die Integralkurve der Geschwindigkeitslinie bzw. die zweite Integralkurve zur Beschleunigungslinie.

$$dF = y \cdot dx, \quad F = \int y \cdot dx = z,$$

d. h. $z = F(x)$ ist die Integralkurve zu $y = f(x)$, wenn man den Inhalt der von der Kurve $y = f(x)$ und der x -Achse begrenzten Fläche als Ordinate im Punkte x aufträgt; das Integral erstreckt sich von 0 bis x . Umgekehrt kann man sagen: $y = f(x)$ ist die Differentiallinie zu $z = F(x)$; $y' = f'(x)$ ist die Differentiallinie zu $y = f(x)$, so daß $y' = f'(x)$ die zweite Differentiallinie zu $z = F(x)$ ist. Fig. 78 auf S. 158 gab $v = f(t)$ als Differentiallinie zu $s = f(t)$; $\dot{p} = f(t)$ als zweite Differentiallinie zu $s = f(t)$. Umgekehrt kann man sagen: die Geschwindigkeitslinie ist die Integralkurve für die Beschleunigungslinie, die Zeitweglinie die Integralkurve der Geschwindigkeitslinie bzw. die zweite Integralkurve zur Beschleunigungslinie.

Beispiel: Es ist die Integralkurve der Kurve $y = 3b \cdot \frac{x^2}{a^2}$ zu entwerfen. Die gegebene Kurve ist eine quadratische Parabel durch den Punkt $P_0(a; 3b)$ (Fig. 126). Aus $dz = y \cdot dx$ folgt

$$z = \int y \cdot dx = \frac{b}{a^2} \cdot x^3 + C_1.$$

Die Integrationskonstante C_1 berücksichtigt man in der Weise, daß man $z - C_1 = z'$ setzt, d. h. man verschiebt die x -Achse um den Betrag C_1 und erhält als Gleichung der Integralkurve

$$z' = \frac{b}{a^2} \cdot x^2 = b \cdot \frac{x^2}{a^2} \cdot a.$$

Die Kurve stellt sich als kubische Parabel für das $x'z'$ -Achsenkreuz dar, die durch den Koordinatenanfangspunkt O' und den Punkt $P_1(a; b)$ geht, wenn man ihre Ordinaten mit a multipliziert. Der Faktor a heißt Multiplikator oder Verwandlungsziffer der Kurve und wird

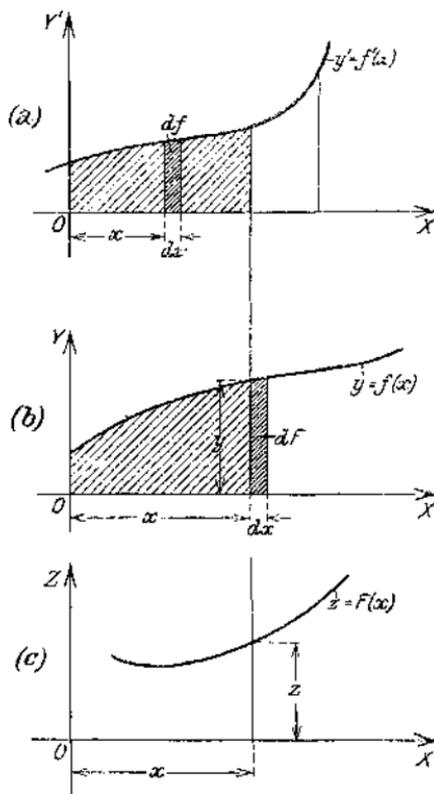


Fig. 125

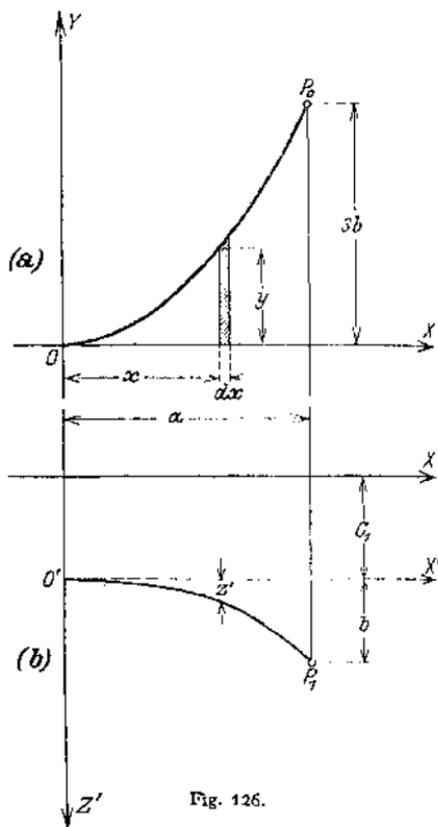


Fig. 126.

meist mit μ bezeichnet. Will man den Multiplikator a vermeiden, so muß man den Maßstab der Kurve ändern und als Ordinate des Punktes P_1 die Strecke $z'_1 = ab$ einführen. Bildet man zu $z' = \frac{ab \cdot x^2}{a^2}$ noch einmal die Integrallinie, so erhält man

$$d u = z' \cdot dx; \quad u = \int z' \cdot dx = \frac{ab}{a^2} \int x^2 \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2 b}{a^2} \cdot x^4 + C_2.$$

Mit $u - C_2 = u'$ wird

$$u' = \frac{1}{4} a^2 b \cdot \frac{x^4}{u^4}.$$

$u' = f(x)$ ist eine parabolische Kurve 4. Grades durch den Koordinatenanfangspunkt und den Punkt $P_2(a; b)$, wenn man $\mu = \frac{1}{4} a^2$ als Multiplikator einführt, bzw. eine gleiche Kurve durch den Koordinatenanfangspunkt und den Punkt $P_2(a; \frac{1}{4} a^2 b)$, wenn man einen neuen Ordinatenmaßstab einführt.

1. Anwendungen. Der Freitragler der Fig. 127 habe eine stetige Belastung q in kg/cm. Nach der Erklärung der Querkraft ist $dQ_x = q \cdot dx$, also

$$Q_x = \int q \cdot dx.$$

Die Integrationskonstante wird gleich 0, da für $x=0$ auch $Q_x=0$ wird. Die Querkraftlinie eines Trägers ist demnach die Integralkurve zur Begrenzungskurve der stetigen Belastung. Weiter ist das Biegemoment im Punkte x des Trägers gegeben durch die Beziehung

$$dM_x = Q \cdot dx, \quad \text{so daß}$$

$$M_x = \int Q \cdot dx \quad \text{wird;}$$

auch hier ist die Integrationskonstante = 0; die Momentenlinie ist Integrallinie zur Querkraftlinie.

Aus der Differentialgleichung für den Krümmungsradius der Biegelinie (S. 164)

$$E \cdot J \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = M_x = \frac{d^2\delta}{dx^2} \quad \text{wird}$$

$$d\left(\frac{d\delta}{dx}\right) = M_x \cdot dx, \quad \text{so daß}$$

$$\frac{d\delta}{dx} = \int M_x \cdot dx + C_1 = \text{tg } \varphi = \varphi.$$

In diesem Falle ist die Integrationskonstante aus den besonderen Bedingungen der Aufgabe — $\varphi=0$ für $x=l$ — zu bestimmen. Die Kurve der EJ -fachen Neigungswinkel stellt sich als Integralkurve der Momentenlinie dar. Aus $d\delta = \varphi \cdot dx$ ergibt sich

$$\delta = \int \varphi \cdot dx + C_2.$$

Auch hier muß die Integrationskonstante C_2 aus den besonderen Bedingungen der Aufgabe — $\delta=0$ für $x=l$ — bestimmt werden. Da die Integrationskonstanten lediglich eine Verschiebung des Achsenkreuzes bedingen, so wird dadurch an dem Charakter der elastischen Linie als Integrallinie zur Kurve der Neigungen bzw. als zweite Integrallinie zur Momentenlinie nichts geändert. Sagt man: die Biegelinie ist die zweite Integrallinie zur Momentenlinie, so heißt das nach (Fig. 127 a und c) nichts anderes, als „die Biegelinie eines Trägers — mit konstantem Querschnitt — ist die Momentenlinie für einen gedachten Träger, der mit der Momentenfläche des wirklichen Trägers belastet ist“. Für den Fall, daß J variabel ist, ergibt sich als Differentialgleichung der elastischen Linie

$$E \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_x}{J_x}; \quad \varphi = \frac{d\delta}{dx} = \int \frac{M_x}{J_x} \cdot dx + C_1$$

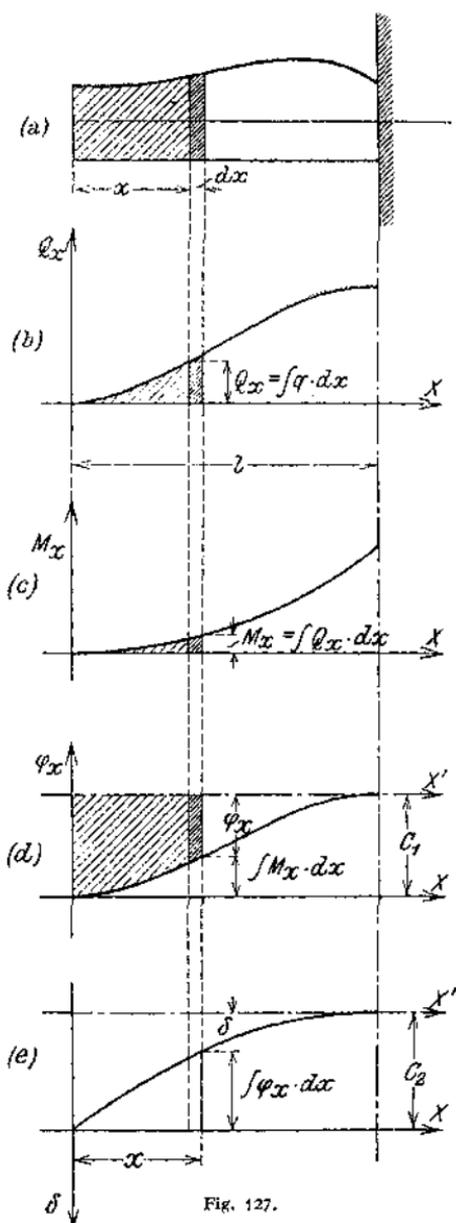


Fig. 127.

und entsprechend $\delta = \int \varphi \cdot dx + C_2$.

Die Kurve der Neigungen ist hierbei die Integralkurve zu der Momentenlinie, deren Ordinaten durch J_x dividiert sind, die elastische Linie also ihre zweite Integrallinie; oder: die elastische Linie ist Momentenlinie für einen Träger, der mit der $\frac{M_x}{J_x}$ -Fläche des wirklichen Trägers belastet ist (Mohrscher Satz).

Beispiel: Der Freitrag sei durch eine Einzelkraft P am Ende belastet (Fig. 128 a). In diesem Falle ist $Q_x = \int q \cdot dx = \text{Constans} = P$. Die Querkraftlinie ist eine Parallele zur x -Achse in der Entfernung P . $M_x = \int Q_x \cdot dx$ liefert $M_x = P \int dx = P \cdot x + C_1$; $C_1 = 0$, da M für $x = 0$ ebenfalls gleich Null wird. Die Kurve ist eine Gerade durch den Koordinatenanfangspunkt mit der Richtungskonstanten P ; aus

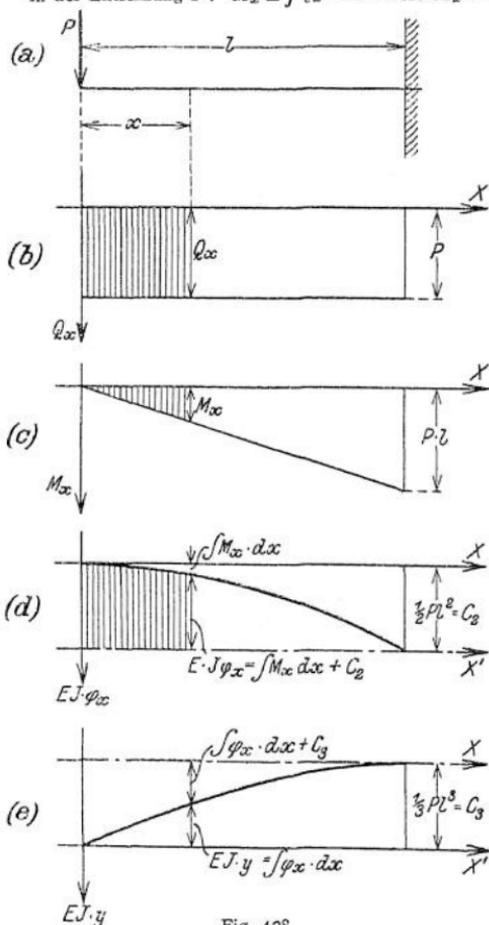


Fig. 128.

2. Beziehungen zwischen Zeitweglinien und Momentenlinien.

Es ist

$$p = \frac{dv}{dt}; \quad v = \int p \cdot dt + C_1$$

die Integrallinie zur Beschleunigungslinie;

$$s = \int v \cdot dt + C_2$$

die Integrallinie zur Geschwindigkeitslinie.

$\text{tg } \alpha = \frac{P \cdot l}{l}$ bzw. aus $M = P \cdot l$ für $x = l$ ergibt sich die Konstruktion der Geraden; der Maßstab lautet $1 \text{ cm} = a \text{ cm kg}$.

Die Kurve der Neigungen der elastischen Linie ergibt sich als Integrallinie zur Momentenlinie; für $J = \text{Constans}$ wird $EJ \cdot \varphi_x = \int M_x \cdot dx = P \int x \cdot dx = \frac{1}{2} P \cdot x^2 + C_2$.

Da die elastische Linie in der Einspannstelle horizontal verläuft, so wird $EJ \cdot \varphi_x$ für $x = l$ gleich Null, folglich $C_2 = -\frac{1}{2} P \cdot l^2$. Die Gleichung der Kurven lautet demnach

$$E \cdot J \cdot \varphi_x = \frac{1}{2} P x^2 - \frac{1}{2} P \cdot l^2,$$

ihr Verlauf ist in Fig. 128 d dargestellt; sind die EJ -fachen Werte der Neigungswinkel als Ordinaten aufgetragen, so heißt der Maßstab $1 \text{ cm} = b \text{ cm}^2/\text{kg}$. Die elastische Linie ergibt sich als Integrallinie zur φ_x -Linie aus

$$\begin{aligned} EJ \cdot y &= \int \varphi_x \cdot dx \cdot EJ \\ &= \int \left(\frac{1}{2} P x^2 - \frac{1}{2} P l^2 \right) \cdot dx \\ &= \frac{1}{2} P \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2} P l^2 x + C_3. \end{aligned}$$

Da die Durchbiegung in der Einspannstelle gleich Null ist, so wird $EJ \cdot y = 0$ für $x = l$, d. h.

$$C_3 = \frac{1}{6} P l^3,$$

folglich erhält man als Gleichung der elastischen Linie

$$EJ \cdot y = \frac{1}{6} P l^3 - \frac{1}{2} P l^2 x + \frac{1}{6} P x^3,$$

ihr Verlauf ist in Fig. 128 e dargestellt; sind die EJ fachen Werte der Durchbiegungen als Ordinaten aufgetragen, so heißt der Maßstab $1 \text{ cm} = c \text{ cm}^3/\text{kg}$.

Aus der Übereinstimmung der Gleichung der Querkraftlinie mit der Kurve

$$v = \int p \cdot dt + C_1,$$

bzw. der Gleichung der Momentenlinie mit der Kurve

$$s = \int v \cdot dt + C_2$$

läßt sich folgern:

Man konstruiert die Geschwindigkeitslinie als Querkraftlinie für einen Träger, den man sich mit einer Fläche belastet denkt, die von der Beschleunigungskurve $p = f(t)$ begrenzt ist; die Zeitweglinien erhält man dann als Momentenlinien dieses gedachten Trägers.

Beispiel: Das Auslaßventil eines Gasmotors soll so gesteuert werden, daß die Beschleunigung p den in Fig. 129 gezeichneten Verlauf hat; die Ventilhebungskurve ist zu entwerfen. Man belastet den — gedachten — Freitrag OT mit der Beschleunigungsfläche und faßt die Verzögerungen als negative Belastungen auf. Die Geschwindigkeitslinie (Fig. 129 b) ist die Querkraftlinie, sie verläuft zwischen t_0 und t_1 parabolisch, weil das Trägerstück $O t_1$ dreieckförmig belastet ist. Die Ordinate in t_1 wird

$$v_1 = \frac{1}{2} t_1 \cdot p_1.$$

Da die Parabel in t_0 ihren Scheitel hat, ist die v -Linie für $t_0 t_1$ bestimmt. Zwischen t_1 und t_2 ist der Träger gleichförmig belastet, die Querkraftlinie also eine Gerade. Mit

$$v_2 = \frac{1}{2} t_1 p_1 + p_1 (t_2 - t_1)$$

ist der zweite Punkt der Geraden festgelegt. Zwischen t_2 und t_3 hat man wieder dreieckförmige Belastung, also parabolischen Verlauf der Querkraftlinie, deren Scheitel senkrecht unter dem Nullpunkt der Belastung liegt. Mit

$$v_3 = v_{\max} = \frac{1}{2} p_1 t_1 + p_1 (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} p_1 (t_3 - t_2)$$

ist der Scheitel der v -Linie bestimmt; für die negative Belastungsfläche erhält man das Spiegelbild der Kurve.

Die Zeitweglinie entwirft man als Momentenlinie für den Träger OT . Zwischen t_0 und t_1 ist die Kurve $s = f(t)$ infolge der dreieckförmigen Belastung eine parabolische Kurve 3. Grades, deren Scheitel im Belastungsnullpunkt liegt. Durch

$$s_1 = \frac{1}{2} p_1 \cdot t_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot t_1 = \frac{1}{6} p_1 \cdot t_1^2$$

ist der Verlauf der s -Linie zwischen t_0 und t_1 gegeben. Infolge der gleichförmigen Belastung $t_1 t_2$ erhält man eine quadratische Parabel, die durch s_1 und

$$s_2 = \frac{1}{2} p_1 \cdot t_1 \left(t_2 - \frac{2}{3} t_1 \right) + p_1 \cdot \frac{(t_2 - t_1)^2}{2}$$

gehen muß. Da mit v_1 und v_2 auch die Tangenten in den Punkten s_1 und s_2 bestimmt sind, so läßt sich die s -Linie aus zwei Punkten und ihren zugehörigen Tangenten konstruieren. Zwischen t_2 und t_3 hat man wieder dreieckförmige Belastung, erhält also eine parabolische Kurve 3. Grades als Momentenlinie, die durch s_2 und

$$s_3 = s_2 + \frac{2}{3} p_1 \cdot t_1 \cdot \frac{2}{3} t_1 = s_2 + \frac{4}{9} p_1 t_1^2$$

gehen muß. Da $v = \frac{ds}{dt}$ ist, so sind durch v_2 und v_{\max} auch die Tangenten gegeben. Man verfährt in gleicher Weise von t_3 bis T und erhält die — durch Konstruktionsbedingungen — ge-

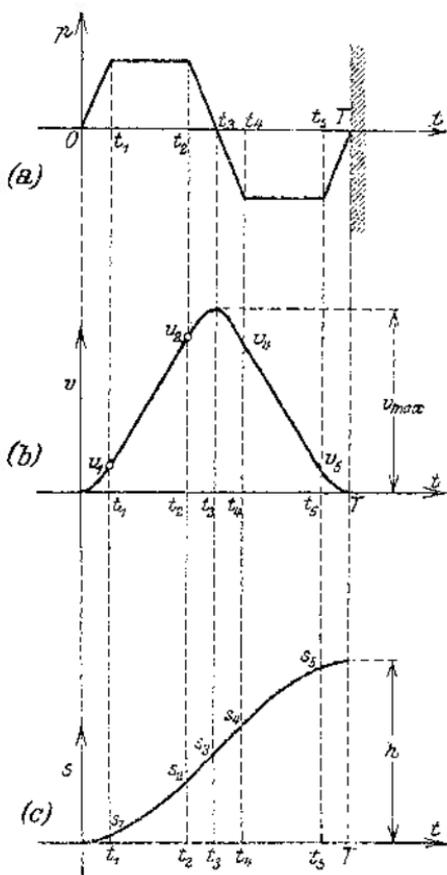


FIG. 129.

gebene Hubhöhe h als das statische Moment der ganzen Beschleunigungsfläche in Beziehung auf T ; es wird

$$h = \frac{1}{2} p_1 \cdot t_1 \left(T - \frac{2}{3} t_1 \right) + p_1 \cdot (t_2 - t_1) \left(T - t_1 - \frac{t_2 - t_1}{2} \right) + \frac{1}{2} p_1 (t_2 - t_1) \left(T - t_2 - \frac{t_2 - t_1}{3} \right) \\ + \frac{1}{2} p_1 (t_4 - t_3) \left[T - t_3 - \frac{2}{3} (t_4 - t_3) \right] + p_1 (t_5 - t_4) \left(T - t_4 - \frac{t_5 - t_4}{2} \right) \\ + \frac{1}{2} p_1 (T - t_5) \cdot \frac{2}{3} \cdot (T - t_5).$$

Da bei praktischen Beispielen die Hubzeit T in eine Anzahl gleicher Teile geteilt wird, so vereinfachen sich die Differenzen $(T - t)$; an ihre Stelle treten einfache Zahlenwerte¹⁾.

3. Integralkurven als Seillinien.

Sofern die Gleichung der Kurve bekannt ist, so der die Integralkurve entworfen werden soll, führt das rechnerische Verfahren schnell zum Ziele. Im

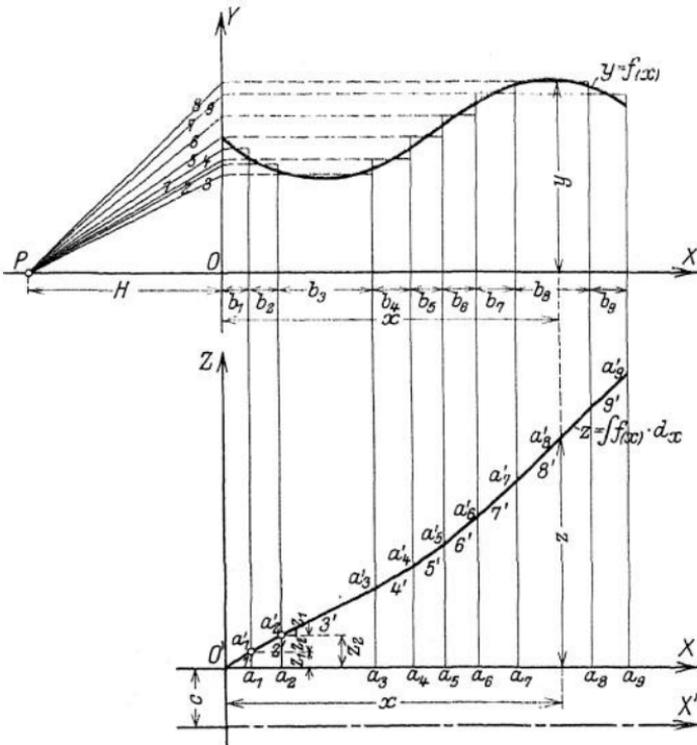


Fig. 130.

andern Falle empfiehlt sich die graphische Integration, bei der die Integralkurve als Seilkurve gezeichnet wird. In Fig. 130 sei $y = f(x)$ gegeben; zur Berechnung des Integrals $z = \int f(x) \cdot dx$ zerlege man die von $y = f(x)$ und der X -Achse begrenzte Fläche — deren Inhalt ein Maß für die Größe des Integrals ist — in schmale Streifen, die sich in flächengleiche Rechtecke mit derselben Grundlinie nach Augenmaß verwandeln lassen. Der gesamte Flächeninhalt ist dann

$$z = \int f(x) dx = b_1 \cdot h_1 + b_2 \cdot h_2 + b_3 \cdot h_3 + \dots$$

¹⁾ Vgl. Dubbel, Steuerungen der Dampfmaschine. Berlin 1913. Julius Springer.

Diese Addition der Produkte läßt sich graphisch in folgender Weise ausführen; wähle auf der X -Achse den beliebigen Punkt P als Pol, projiziere die mittleren Höhen auf die Y -Achse und ziehe das Strahlenbüschel $P 1$; $P 2$; $P 3 \dots$, dann schneidet eine Parallele zu 1 durch den neuen Koordinatenanfangspunkt O' die Ordinate $a_1 a'_1 = z_1$ ab; die Parallele zu 2 durch a'_1 schneidet die Ordinate $a_2 a'_2 = z_2$ ab. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man den Linienzug $O' I' 2' 3' \dots$, der in die Integralkurve $z = \int f(x) dx$ durch Ausrundung übergeht.

Aus der Konstruktion ergibt sich

$$\begin{aligned} h_1 : H &= z_1 : b_1 ; & H \cdot z_1 &= b_1 \cdot h_1 ; \\ h_2 : H &= (z_2 - z_1) : b_2 ; \\ H z_2 - H \cdot z_1 &= b_2 \cdot h_2 ; \\ H \cdot z_2 &= b_2 h_2 + H \cdot z_1 = b_1 h_1 + b_2 h_2 \text{ usw.} \end{aligned}$$

Die Ordinate der ausgerundeten Kurve hat an jeder Stelle den Wert

$$z = \int f(x) dx, \quad \text{sodaß} \quad \int f(x) \cdot dx = H \cdot z \quad \text{ist.}$$

Die Integrationskonstante wird durch Verschiebung der X -Achse um C berücksichtigt.

g) Differentialgleichungen.

Eine Gleichung zwischen veränderlichen Größen, die auch Differentiale oder Differentialquotienten enthält, heißt Differentialgleichung. Man unterscheidet gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen; eine gewöhnliche Differentialgleichung enthält außer abhängigen Veränderlichen nur eine unabhängige Veränderliche x und nur Differentialquotienten nach x . Treten in einer Differentialgleichung partielle Differentiale oder Differentialquotienten von mehreren unabhängigen Veränderlichen auf, so heißt sie partielle Differentialgleichung. Eingeteilt werden die Differentialgleichungen in verschiedene Ordnungen je nach der Ordnung des höchsten vorkommenden Differentialquotienten; eine Differentialgleichung ist z. B. von der 2. Ordnung, wenn $\frac{d^2 y}{dx^2}$ der höchste vorkommende Differentialquotient ist. Eine Differentialgleichung n ter Ordnung ist vom ersten Grade, wenn sie in Beziehung auf die Größen $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$ vom ersten Grade ist, und heißt lineare Differentialgleichung n ter Ordnung.

I. Differentialgleichungen erster Ordnung.

a) Die einfachste Form der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung ist

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Dann ist die Gleichung $y = f(x) + C$ so daraus zu bestimmen, daß ihre

Differentiation $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ ergibt.

$$y = \int f'(x) \cdot dx = f(x) + C$$

heißt das allgemeine Integral der Differentialgleichung, zu dem noch eine beliebige Integrationskonstante tritt, da auch $y = f(x) + C$ differenziert

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \text{ergibt.}$$

b) Ist die Differentialgleichung in der Form

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

gegeben, so löse man sie nach $\frac{dy}{dx}$ auf, bringe sie also auf die Form

$$\frac{dy}{dx} = f(xy) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

oder

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0.$$

Ist $M(x, y)$ eine Funktion X der einzigen Veränderlichen x und $N(x, y)$ eine Funktion Y der einzigen Veränderlichen y , d. h.

$$M(x, y) = X \quad \text{und} \quad N(x, y) = Y,$$

so läßt sich das allgemeine Integral

$$\int X \cdot dx + \int Y \cdot dy = C$$

sofort bilden. Die Gleichung wird durch Integration nach Trennung der Variablen gelöst.

Beispiele.

1. Es ist die Differentialgleichung

$$y dx - x \cdot dy = 0$$

zu integrieren. Durch Division mit $(-x \cdot y)$ ergibt sich $\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$;

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dx}{x} = C; \quad \ln y - \ln x = \ln C; \quad y = C \cdot x.$$

2. Es ist die Differentialgleichung

$$ax^2 + bx + c \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

zu integrieren. Aus

$$ax^2 \cdot dx + bx \cdot dx + c \cdot dy = 0$$

folgt

$$dy = -\frac{a}{c} \cdot x^2 \cdot dx - \frac{b}{c} \cdot x \cdot dx$$

$$\int dy = -\frac{a}{c} \int x^2 \cdot dx - \frac{b}{c} \int x \cdot dx + C$$

$$y = -\frac{a}{c} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{b}{c} \cdot \frac{x^2}{2} + C.$$

3. Es ist die Gleichung der Adiabate zu entwickeln. Die Zustandsgleichung lautet

$$p \cdot v = R \cdot T,$$

der I. Hauptsatz

$$dQ = c_v \cdot dT + A \cdot p \cdot dv.$$

Da die adiabatische Zustandsänderung weder Zuführung noch Entziehung von Wärme erfordert, so ist $dQ = 0$; folglich

$$0 = c_v \cdot dT + A \cdot p \cdot dv.$$

Aus

$$R \cdot dT = p \cdot dv + v \cdot dp \quad \text{folgt}$$

$$dT = \frac{p \cdot dv + v \cdot dp}{R},$$

so daß

$$0 = c_v \cdot \frac{p \cdot dv + v \cdot dp}{R} + A \cdot p \cdot dv = c_v \cdot p \cdot dv + c_v \cdot v \cdot dp + A \cdot R \cdot p \cdot dv$$

$$0 = c_v \cdot p \cdot dv + c_v v \cdot dp + (c_p - c_v) \cdot p \cdot dv = c_v \cdot v \cdot dp + c_p \cdot p \cdot dv = v \cdot dp + \frac{c_p}{c_v} \cdot p \cdot dv.$$

$$\text{Setze } \frac{c_p}{c_v} = k$$

$$0 = v \cdot dp + k \cdot p \cdot dv.$$

Die Trennung der Veränderlichen ergibt

$$-\frac{dp}{p} = k \cdot \frac{dv}{v}.$$

Durch Integration erhält man

$$-\int_{p_1}^{p_2} \frac{d p}{p} = k \int_{v_1}^{v_2} \frac{d v}{v},$$

wenn der Anfangszustand des Gases durch $p_1 v_1$, der Endzustand durch $p_2 v_2$ bestimmt ist.

$$-(\ln p_2 - \ln p_1) = k(\ln v_2 - \ln v_1), \quad \ln \frac{p_1}{p_2} = k \cdot \ln \frac{v_2}{v_1}; \quad \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^k;$$

$$p_1 \cdot v_1^k = p_2 \cdot v_2^k.$$

4. Ein Behälter fasse $V m^3$; die Heizschlange habe $F m^2$ Oberfläche; die Anfangstemperatur der Flüssigkeit sei $t_0^\circ C$, die Endtemperatur $t_1^\circ C$, das spezifische Gewicht sei γ , die spezifische Wärme sei c , die Wärmeübergangszahl k . Gesucht ist das Wachsen der Temperatur t als Funktion der Zeit z bei ideal isoliertem Gefäß.

Die Wärmemenge, die in der Zeit dz durch die Fläche F hindurchgeht, bestimmt sich zu $dQ = F \cdot (t_1 - t) \cdot k \cdot dz$.

Der Zuwachs an Wärmehalt ist $dQ = V \cdot c \cdot \gamma \cdot dt$ und daraus

$$F \cdot (t_1 - t) \cdot k \cdot dz = V \cdot c \cdot \gamma \cdot dt; \quad dz = \frac{V \cdot c \cdot \gamma}{F \cdot k} \cdot \frac{dt}{t_1 - t}.$$

Setze $\frac{V \cdot c \cdot \gamma}{F \cdot k} = A$; $t_1 - t = y$; $dt = -dy$; $dz = -A \cdot \frac{dy}{y}$;

$$z = -A \cdot \ln y = -A \ln (t_1 - t) \Big|_{t_0}^t = A \cdot \ln \frac{t_1 - t_0}{t_1 - t};$$

$$e^{\frac{z}{A}} = \frac{t_1 - t_0}{t_1 - t};$$

$$t = t_1 - \frac{t_1 - t_0}{e^{\frac{z}{A}}} = t_1 - (t_1 - t_0) \cdot e^{-\frac{z}{A}}.$$

5. Ein Behälter mit einem Wasserinhalt von $10 m^3$ einschließlich des Wasserwertes des Gefäßes soll durch Dampf von $100^\circ C$ von $10^\circ C$ auf $80^\circ C$ erwärmt werden. Das Kondensat fließt mit $100^\circ C$ ab. Die Heizfläche beträgt $5 m^2$, der Wärmeübergang $2000 WE$ pro m^2 , $^\circ C$ und Stunde. In welcher Zeit wird das Wasser die verlangte Temperatur erreicht haben? Mit den Bezeichnungen unter (4) wird

$$10\,000 dt = 5(100 - t) \cdot 2000 \cdot dz = 10\,000 \cdot (100 - t) dz;$$

$$dt = 5(100 - t) \cdot dz; \quad dz = \frac{dt}{100 - t};$$

$$-z = \ln(100 - t) \Big|_{10}^{80} = \ln(100 - 80) - \ln(100 - 10) = \ln 20 - \ln 90;$$

$$z = \ln 90 - \ln 20 = \approx 4,5 - 3,0 = 1,5 \text{ Stunden.}$$

c) Ist die Trennung der Veränderlichen durch einfache Multiplikation oder Division nicht zu erreichen, so läßt sich bei manchen Differentialgleichungen diese Trennung durch passende Substitution durchführen.

Gegeben sei die Gleichung in der Form

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Setzt man $\frac{y}{x} = z$; $y = x \cdot z$, so wird

$$dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

und $\frac{dy}{dx} = z + \frac{x \cdot dz}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) = f(z)$

und daraus $\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dz}{x}$,

womit die Trennung der Veränderlichen durchgeführt ist,

Beispiel: Es ist die Differentialgleichung $(x + y) \cdot dx + x \cdot dy = 0$ zu integrieren.

$$y = x \cdot z;$$

$$(x + x \cdot z) \cdot dx + x \cdot (z \cdot dx + x \cdot dz) = 0.$$

Durch x dividiert ergibt

$$(1 + 2z) \cdot dx + x \cdot dz = 0; \\ \frac{dx}{x} + \frac{dz}{1 + 2z} = 0$$

und durch Integration

$$\ln x + \frac{1}{2} \cdot \ln(1 + 2z) = \ln C; \quad 2 \ln x + \ln(1 + 2z) = \ln C; \quad \ln [x^2 \cdot (1 + 2z)] = \ln C \\ x^2 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{y}{x}\right) = C; \quad x(x + 2y) = C.$$

2. Die Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

a) Die einfachste Form der Differentialgleichung zweiter Ordnung ist

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \text{Constans.}$$

Aus $\frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} = C$ folgt $d \frac{dy}{dx} = C \cdot dx$

und durch Integration

$$\frac{dy}{dx} = C \cdot x + C_1.$$

Die Trennung der Veränderlichen ergibt $dy = C \cdot x \cdot dx + C_1 \cdot dx$,

durch nochmaliges Integrieren erhält man $y = C \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2$,

wobei C_1 und C_2 die Integrationskonstanten bedeuten.

Beispiel: Nach der Erklärung ist die Beschleunigung der zweite Differentialquotient des Weges nach der Zeit und konstant bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung, d. h.

$$\dot{p} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \text{Constans.}$$

Die Integration ergibt

$$v = \frac{ds}{dt} = \int p \cdot dt + v_0 = v_0 + p \cdot t,$$

in diesem Falle ist die Integrationskonstante gleich der Anfangsgeschwindigkeit v_0 ; durch nochmalige Integration erhält man

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} p t^2 + s_0,$$

wobei s_0 die Integrationskonstante bedeutet.

b) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x).$$

Aus

$$\frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} = f(x) \quad \text{oder} \quad d \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot dx$$

ergibt sich durch Integration

$$\frac{dy}{dx} = \int f(x) \cdot dx + C_1 = f_1(x) + C_1.$$

Die Trennung der Veränderlichen liefert

$$dy = f_1(x) dx + C_1 \cdot dx,$$

also

$$y = \int f_1(x) \cdot dx + C_1 x + C_2.$$

Beispiele: 1. Die Differentialgleichung der elastischen Linie (vgl. Festigkeitslehre, S. 427) lautet für den Fall flacher Bögen

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{EJ} \cdot M_x,$$

wobei $J = \text{Constans}$ das Trägheitsmoment des Querschnittes bedeutet. Für einen am Ende mit P belasteten Freitragger ist

$$M_x = P \cdot x,$$

wenn x die Entfernung vom freien Ende bedeutet; folglich

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{EJ} \cdot P \cdot x,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EJ} \int P \cdot x dx + C_1 = \frac{1}{EJ} \cdot P \cdot \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Die Größe der Integrationskonstanten C_1 ergibt sich aus den Bedingungen des technischen Problems; so verläuft für den horizontal eingespannten Freitragger die Tangente an die elastische Linie in der Einspannstelle horizontal, d. h. für $x = l$ wird $\text{tg } \varphi = \frac{dy}{dx} = 0$.

Setzt man diese Werte in die Gleichung $\frac{dy}{dx} = f(x)$ ein, so ergibt sich

$$0 = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{P \cdot l^2}{2} + C_1 \quad \text{und daraus} \quad C_1 = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{P \cdot l^2}{2}$$

so daß

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2EJ} \cdot P \cdot x^2 - \frac{1}{2EJ} \cdot P \cdot l^2$$

wird. Die nochmalige Integration liefert

$$y = \frac{P}{2EJ} \int x^2 \cdot dx - \frac{P \cdot l^2}{2EJ} \int dx + C_2 = \frac{P}{2EJ} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{P \cdot l^2}{2EJ} \cdot x + C_2.$$

Für die Bestimmung der Integrationskonstanten C_2 liefert die Bedingung Durchbiegung in der Einspannstelle gleich 0, d. h. $y = 0$ für $x = l$

$$0 = \frac{P l^3}{6EJ} - \frac{P l^3}{2EJ} + C_2, \quad C_2 = \frac{P l^3}{3EJ}.$$

Mit diesem Wert lautet die Gleichung der elastischen Linie

$$y = \frac{P x^3}{6EJ} - \frac{P l^2 x}{2EJ} + \frac{P l^3}{3EJ}.$$

c) Es ist die Gleichung einer Kette zu entwickeln, die an zwei Punkten aufgehängt ist und deren Gewicht direkt proportional ihrer Länge ist. Das Bogenelement ds (Fig. 131) hat das Gewicht $p \cdot ds$, wenn p das Gewicht der Längeneinheit ist. Denkt man ds herausgeschnitten und die Spannkraften als äußere Kräfte t und $(t + dt)$ in tangentialer Richtung angebracht, so muß das Bogenelement im Gleichgewicht sein. Die erste Gleichgewichtsbedingung $\sum H = 0$ ergibt

$$-t \cdot \cos \varphi + (t + dt) \cdot \cos(\varphi + d\varphi) = 0,$$

d. h. der Zuwachs der Horizontal-komponente von P bis P' ist gleich Null, also

$$d(t \cdot \cos \varphi) = 0, \quad \text{folglich} \quad t \cdot \cos \varphi = \text{konst.} = H = p \cdot h.$$

Die zweite Gleichgewichtsbedingung $\sum V = 0$ ergibt

$$-t \cdot \sin \varphi + (t + dt) \cdot \sin(\varphi + d\varphi) - p \cdot ds = 0.$$

Der Zuwachs der Vertikalkomponente von P bis P' beträgt also

$$d(t \cdot \sin \varphi) = p \cdot ds,$$

aus $t \cdot \cos \varphi = p h$ folgt $t = \frac{p \cdot h}{\cos \varphi}$, so daß $d\left(\frac{p \cdot h}{\cos \varphi} \cdot \sin \varphi\right) = p \cdot ds$

oder

$$h \cdot dtg \varphi = ds.$$

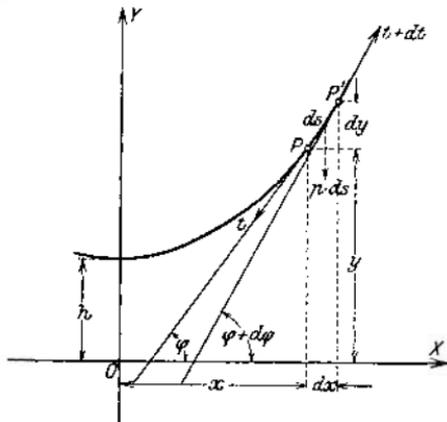


Fig. 131.

Durch Integration erhält man $h \cdot \operatorname{tg} \varphi = s + C_1$.

Da für den Scheitel der Kurve, d. h. für $\varphi = 0$ auch $s = 0$ wird, so folgt $C_1 = 0$, so daß

$$s = h \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Mit $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$ und $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ wird

$$h \cdot d\left(\frac{dy}{dx}\right) = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Setze $\frac{dy}{dx} = z$; $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = dz$, dann wird

$$h \cdot dz = dx \sqrt{1 + z^2}, \quad \frac{dx}{h} = \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}}$$

und durch Integration

$$\frac{x}{h} = \ln(z + \sqrt{1 + z^2}) + C_2.$$

Für den Scheitel ist $x = 0$; $\varphi = 0$, also auch

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = z = 0, \quad \text{d. h.} \quad C_2 = 0,$$

folglich

$$\frac{x}{h} = \ln(z + \sqrt{1 + z^2}), \quad e^{\frac{x}{h}} = z + \sqrt{1 + z^2}$$

oder quadriert $e^{\frac{2x}{h}} - 2z \cdot e^{\frac{x}{h}} + z^2 = 1 + z^2$ und daraus

$$z = \frac{e^{\frac{2x}{h}} - 1}{2 \cdot e^{\frac{x}{h}}} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}} \right) = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Aus $dy = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}} \right) \cdot dx$ folgt durch Integration

$$y = \frac{1}{2} \int \left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}} \right) \cdot dx + C = \frac{1}{2} \int \left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}} \right) \cdot \frac{d^x}{\frac{1}{h}} + C$$

$$y = \frac{h}{2} \left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}} \right).$$

C wird gleich Null, da y für $x = 0$ gleich h wird.

c. Die gegebene Differentialgleichung habe die Form

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Setze $\frac{dy}{dx} = z$; also $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$, damit ergibt sich

$$\frac{dz}{dx} = f(z) \quad \text{oder} \quad dx = \frac{dz}{f(z)},$$

folglich ist

$$x = \int \frac{dz}{f(z)} + C_1.$$

Aus
$$dy = z \cdot dx = \frac{z \cdot dz}{f(z)} \quad \text{folgt}$$

$$y = \int \frac{z \cdot dz}{f(z)} + C_2.$$

Durch Elimination von z ergibt sich $y = f(x)$.

Beispiel: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a + \frac{dy}{dx}.$$

Setze $\frac{dy}{dx} = z$; $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$, folglich $\frac{dz}{dx} = a + z$, $dx = \frac{dz}{a+z}$,

$$x = \int \frac{dz}{a+z} = \ln(a+z) + x_0 \quad \text{oder} \quad x - x_0 = \ln(a+z); \quad e^{x-x_0} = a+z;$$

$$dy = z \cdot dx = \frac{z \cdot dz}{a+z}, \quad y = \int \frac{z \cdot dz}{a+z} = (a+z) - a \cdot \ln(a+z) + y_0 = e^{x-x_0} - a \cdot (x - x_0) + y_0.$$

d) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{y}{a^2}.$$

Setze $\frac{dy}{dx} = z$; $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$; dann wird $dz = -\frac{y \cdot dx}{a^2}$

und mit $dx = \frac{dy}{z}$ wird $dz = -\frac{y \cdot dy}{z \cdot a^2}$; $2a^2 \cdot z \cdot dz = -2y \cdot dy$;
 $a^2 z^2 = -y^2 + C_1.$

Damit sich für z reelle Werte ergeben, darf C_1 nur positiv sein; setzt man $C_1 = c^2$, so wird

$$a^2 z^2 = c^2 - y^2; \quad a \cdot z = \pm \sqrt{c^2 - y^2}; \quad a \cdot \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{c^2 - y^2}$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{a} \sqrt{c^2 - y^2}.$$

Die Trennung der Variablen liefert

$$\frac{dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = \pm \frac{dx}{a}.$$

Durch Integration erhält man nach Fundamentalintegral Nr. 8

$$\arcsin \frac{y}{c} = \pm \frac{x}{a} + C_2; \quad \frac{y}{c} = \sin \left(C_2 \pm \frac{x}{a} \right);$$

$$y = c \cdot \sin \left(C_2 \pm \frac{x}{a} \right) = c \cdot \sin C_2 \cdot \cos \frac{x}{a} \pm c \cdot \cos C_2 \cdot \sin \frac{x}{a}.$$

Mit $\pm c \cdot \sin C_2 = A$ und $c \cdot \cos C_2 = B$ erhält man als allgemeines Integral der gegebenen Differentialgleichung

$$y = A \cdot \sin \frac{x}{a} + B \cdot \cos \frac{x}{a}.$$

Beispiel: Die Differentialgleichung der elastischen Linie des Stabes (Fig. 132) hat die Form

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{EJ} M_x = \frac{P}{EJ} (f - y).$$

Setze

$$\frac{P}{EJ} = \frac{1}{a^2}; \quad \frac{1}{a} = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$$

Dann wird mit

$$(f - y) = -z, \quad y = f + z \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx^2}, \quad \frac{d^3z}{dx^3} = -\frac{z}{a^2}.$$

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung ist

$$z = A \cdot \sin \frac{x}{a} + B \cdot \cos \frac{x}{a} = y - f,$$

für $x = 0$ werden $y = 0$ und $\frac{dy}{dx} = 0$.

Aus

$$\frac{dy}{dx} = A \cdot \frac{1}{a} \cdot \cos \frac{x}{a} - B \cdot \frac{1}{a} \cdot \sin \frac{x}{a}$$

ergibt sich mit $x = 0$

$$A = 0$$

und aus

$$y - f = A \cdot \sin \frac{x}{a} + B \cdot \cos \frac{x}{a} = 0 \quad \text{für } x = 0,$$

$$B = -f,$$

so daß

$$y - f = -f \cdot \cos \frac{x}{a}, \quad y = f - f \cdot \cos \frac{x}{a} = f \cdot \left(1 - \cos \frac{x}{a}\right).$$

Macht man die Voraussetzung, daß die Kraft P um den Betrag e exzentrisch angreife, und ist die größte Ausweichung δ , so wird $f = \delta + e$ und damit $y = (\delta + e) \left(1 - \cos \frac{x}{a}\right)$, für $x = l$ geht y in δ über; es wird

$$\delta = (\delta + e) \left(1 - \cos \frac{l}{a}\right) = e \cdot \frac{1 - \cos \frac{l}{a}}{\cos \frac{l}{a}} = e \cdot \left(\frac{1}{\cos \frac{l}{a}} - 1\right).$$

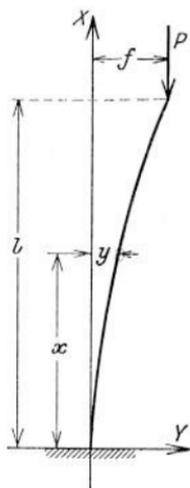


Fig. 132.

δ wird theoretisch gleich ∞ , wenn $\cos \frac{l}{a} = 0$ wird, und zwar trifft dies schon bei einem verschwindend kleinen e ein. Praktisch bedeutet das Resultat, daß die Tragfähigkeit des Stabes aufhört, wenn $\cos \frac{l}{a} = 0$ wird; d. h. $\frac{l}{a} = \frac{\pi}{2}$, $l \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{\pi}{2}$ oder $P = P_k = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E \cdot J}{l^2}$. Man bezeichnet diesen Grenzwert der Belastung mit Knicklast.

e) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a \cdot \frac{dy}{dx} + b \cdot y = 0.$$

Setze $y = A \cdot e^{c \cdot x}$; $\frac{dy}{dx} = c \cdot y$; $\frac{d^2y}{dx^2} = c^2 \cdot y$, dann geht die gegebene Gleichung über in

$$c^2 y + a \cdot c \cdot y + b \cdot y = 0 \quad \text{oder} \quad c^2 + a \cdot c + b = 0.$$

Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung sind

$$c_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \quad \text{und} \quad c_2 = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

$y_1 = A \cdot e^{c_1 \cdot x}$ und $y_2 = A \cdot e^{c_2 \cdot x}$ sind zwei partikuläre Lösungen der gegebenen Differentialgleichung. Sind c_1 und c_2 reell, so müssen sie negativ sein, also aperiodische Schwingung; sind c_1 und c_2 komplex, also

$$c_1 = -\frac{a}{2} + i \cdot \delta; \quad c_2 = -\frac{a}{2} - i \cdot \delta, \quad \text{worin} \quad \delta = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}},$$

so wird

$$y_1 = A \cdot e^{-\frac{a}{2} \cdot x} \cdot e^{i \cdot \delta \cdot x} = A \cdot e^{-\frac{a}{2} \cdot x} \cdot [\cos(\delta x) + i \cdot \sin(\delta x)],$$

$$y_2 = A \cdot e^{-\frac{a}{2} \cdot x} \cdot e^{-i \cdot \delta \cdot x} = A \cdot e^{-\frac{a}{2} \cdot x} \cdot [\cos(\delta x) - i \cdot \sin(\delta x)].$$

Weitere partikuläre Lösungen sind dann

$$y = \text{Constans} \cdot y_1 + \text{Constans} \cdot y_2 = \frac{1}{2} \cdot (y_1 + y_2) = A \cdot l^{-\frac{\alpha}{2} \cdot x} \cdot \cos \delta x$$

$$\text{oder} \quad y = \frac{1}{2i} (y_1 - y_2) = A \cdot e^{-\frac{\alpha}{2} \cdot x} \cdot \sin \delta x.$$

Mit $A = c_1$; $\frac{\alpha}{2} = b$; $\delta = c_2$ erhält man die Gleichung (vgl. S. 146) der Kurve der gedämpften Schwingung.

Beispiel: Sind in einem Stromkreise von der Intensität J der Widerstand R , die Kapazität C , der Selbstinduktionskoeffizient L , so ist

$$\frac{d^2 J}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dJ}{dt} + \frac{J}{L \cdot C} = 0,$$

wenn t die Zeit bedeutet. Die Lösung der Gleichung gibt

$$J = A \cdot e^{-\frac{R}{2L} \cdot t} \cdot \sin \delta t.$$

Die Kurve $J = f(t)$ entspricht der Fig. 72, sofern $c_2 = 0$ gesetzt wird, und zwar wird $J = 0$ für

$$\delta \cdot t_1 = 0 \quad \text{d. h. } t_1 = 0,$$

$$\delta t_2 = \delta \cdot t_1 + \pi \quad \text{d. h. } t_2 = t_1 + \frac{\pi}{\delta},$$

$$\delta \cdot t_3 = \delta \cdot t_1 + 2\pi \quad \text{d. h. } t_3 = t_1 + 2 \cdot \frac{\pi}{\delta} \dots$$

Die Periodendauer ist $T = \frac{\pi}{\delta}$.

Maxima und Minima von J ergeben sich aus $\frac{dJ}{dt} = 0$;

$$\delta \cdot \cos \delta t - \frac{R}{2L} \cdot \sin \delta t = 0; \quad \delta t = \text{arctg} \frac{\delta \cdot 2L}{R}; \quad t_1 = \frac{1}{\delta} \cdot \text{arctg} \frac{\delta \cdot 2L}{R};$$

$$\delta t_2 = \delta \cdot t_1 + \pi; \quad t_2 = t_1 + \frac{\pi}{\delta}; \quad \delta \cdot t_3 = \delta \cdot t_1 + 2\pi; \quad t_3 = t_1 + 2 \cdot \frac{\pi}{\delta} \dots$$

Der Quotient zweier aufeinander folgenden Höchstwerte ist

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{A \cdot l^{-\frac{R}{2L} \cdot t_1}}{A \cdot l^{-\frac{R}{2L} (t_1 - T)}} \cdot \frac{\sin \delta t}{\sin (\delta t + \pi)} = -e^{-\frac{R}{2L} \cdot T}.$$

$\frac{R}{2L} \cdot T$ heißt logarithmisches Dekrement.

Ist die Dämpfung gering, d. h. R klein gegen $2L$, so folgt

$$T = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{R^2}{4L^2}}} = \pi \sqrt{L \cdot C}.$$

Schwingungsformel für drahtlose Telegraphie — Resonanzbedingung.

h) Kurvenscharen; einhüllende Kurven.

1. Ändert man in der Gleichung einer Kurve eine Konstante, so erhält man eine Schar von Kurven des gleichen Charakters. Z. B. lautet die Gleichung einer Geraden durch den Koordinatenanfangspunkt

$$y = m \cdot x.$$

Durch Variation von m erhält man eine unbegrenzte Anzahl von Kurven, deren Gleichungen heißen

$$y = m_1 \cdot x; \quad y = m_2 \cdot x; \quad y = m_3 \cdot x \dots;$$

sie stellen ein Strahlenbündel dar, dessen Spitze im Koordinatenanfangspunkt liegt.

Variiert man den Parameter $2p$ einer Parabel $y^2 = 2px$, so erhält man eine Schar Parabeln für denselben Scheitelpunkt, deren Gleichungen lauten

$$y^2 = 2p_1 \cdot x; \quad y^2 = 2p_2 \cdot x; \quad y^2 = 2p_3 \cdot x \dots$$

Enthält eine Gleichung drei Variablen, so erhält man eine graphische Darstellung in der Ebene, wenn man die eine Variable als konstant ansieht und sie variiert. Ist z. B.

$$p \cdot v = R \cdot T$$

die Zustandsgleichung vollkommener Gase, so ist für $T = \text{konst.}$, $p \cdot v = \text{konst.}$ eine gleichseitige Hyperbel, bezogen auf die Asymptoten als rechtwinkliges Achsenkreuz. Variiert man die Konstante T , so erhält man eine Schar von Hyperbeln (Fig. 133).

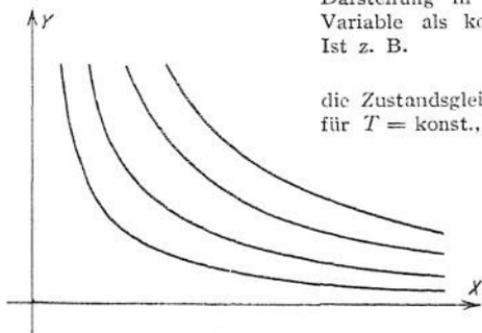


Fig. 133.

Variiert man den Radius r eines Kreises, so erhält man eine Schar von konzentrischen Kreisen.

Die zu variierende Größe heißt der variable Parameter. Nennt man diese Größe p , so ist die Kurvenschar dargestellt durch die Gleichung $f(xyp) = 0$; sie wird im allgemeinen von einer Kurve umhüllt, die die einhüllende Kurve — Umhüllungskurve — der Kurvenschar heißt. Ihre Gleichung ergibt sich durch Elimination aus den Gleichungen

$$f(xyp) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(xyp)}{\partial p} = 0.$$

Beispiel¹⁾: Es ist durch die Gleichung

$$(I) \quad f(xyp) = x \cdot \cos 3p + y \cdot \sin 3p - a_1 \cdot \cos p = 0$$

eine Schar von geraden Linien gegeben; es wird

$$(II) \quad \frac{\partial f(xyp)}{\partial p} = -3x \cdot \sin 3p + 3y \cdot \cos 3p + a_1 \cdot \sin p = 0.$$

Aus (I) und (II) erhält man durch Elimination

$$3x = a_1(3 \cos p \cdot \cos 3p + \sin p \cdot \sin 3p), \quad 3y = a_1(3 \cos p \cdot \sin 3p - \sin p \cdot \cos 3p).$$

Mit

$$\cos p \cdot \cos 3p + \sin p \cdot \sin 3p = \cos 2p, \quad 2 \cdot \cos p \cdot \cos 3p = \cos 4p + \cos 2p$$

und

$$\cos p \cdot \sin 3p - \sin p \cdot \cos 3p = \sin 2p, \quad 2 \cdot \cos p \cdot \sin 3p = \sin 4p + \sin 2p$$

ergibt sich

$$3x = a_1(\cos 4p + 2 \cos 2p), \quad 3y = a_1(\sin 4p + 2 \sin 2p).$$

Setzt man $a_1 = 3a$ und $2p = t + \pi$, so wird

$$\cos 2p = -\cos t; \quad \sin 2p = -\sin t, \quad \cos 4p = +\cos 2t; \quad \sin 4p = +\sin 2t,$$

und man erhält

$$x = -a(2 \cos t - \cos 2t); \quad y = -a(2 \sin t - \sin 2t).$$

Aus

$$\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1 \quad \text{und} \quad \sin 2t = 2 \sin t \cdot \cos t$$

ergibt sich

$$x = -a(2 \cos t - 2 \cos^2 t + 1) \text{ bzw. } x' = a + x = -2a \cos t(1 - \cos t), \quad y = -2a \cdot \sin t(1 - \cos t)$$

Setzt man $x' = r \cdot \cos t$ und $y' = y + r \cdot \sin t$, so erhält man mit Hilfe der Beziehung $\varphi = \pi - t$

$$r = 4a \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Das ist aber die Polargleichung der Kardioide, bei der a durch $4a$ ersetzt ist (Fig. 68).

Nun stellt die Gleichung (I) eine Gerade dar, die durch die beiden Punkte

$$P_1(x_1 = a_1 \cdot \cos 2p; \quad y_1 = a_1 \cdot \sin 2p) \quad \text{und} \quad P_2(x_2 = a_1 \cdot \cos 4p; \quad y_2 = a_1 \cdot \sin 4p)$$

¹⁾ Kiepert-Stegemann, Differentialrechnung. Hannover 1912. Helwingsche Verlagsbuchhandlung.

hindurchgeht (Fig. 134), da dieses Wertepaar die Gleichung (I) befriedigt. Aus $x_1^2 + y_1^2 = a_1^2$ und $x_2^2 + y_2^2 = a_1^2$ folgt, daß die beiden Punkte auf einem Kreise mit dem Halbmesser a_1 liegen.

Dabei sind die Winkel, die die Halbmesser OP_1 und OP_2 mit der X-Achse bilden, $\sphericalangle XOP_1 = 2\rho$; $\sphericalangle XOP_2 = 4\rho = 2 \sphericalangle XOP_1$. Wird also der Parameter ρ variiert, so bewegen sich die Punkte P_1 und P_2 beide auf diesem Kreise, der Punkt P_2 aber doppelt so schnell wie der Punkt P_1 .

Die allgemeine Form der Gleichung der Umhüllungskurve lautet in Parameterdarstellung:

$$x = a(m \cos t - \cos mt);$$

$$y = a(m \cdot \sin t - \sin m \cdot t).$$

Das sind die Gleichungen der Epizykloiden; für den Sonderfall der Kardioiden ist $m = 2$. Setzt man $m = n + 1$, so ist $n \cdot a$ gleich dem Halbmesser des festen Kreises, auf dem der Kreis mit Halbmesser a rollt, ohne zu gleiten. Jeder Punkt auf dem Umfange des rollenden Kreises beschreibt eine Epizykloide bei Berührung von außen, eine Hypozykloide bei Berührung von innen (vgl. S. 134).

Die Konstruktion dieser Kurven als Umhüllungskurven ihrer Tangenten ergibt sich aus dem Vorstehenden wie folgt: Teile den Umfang eines Kreises in eine Anzahl gleicher Teile — in Fig. 135 z. B. 48 — wobei der Punkt 48 mit 0 zusammenfällt; verbinde die Punkte k und $m \cdot k$

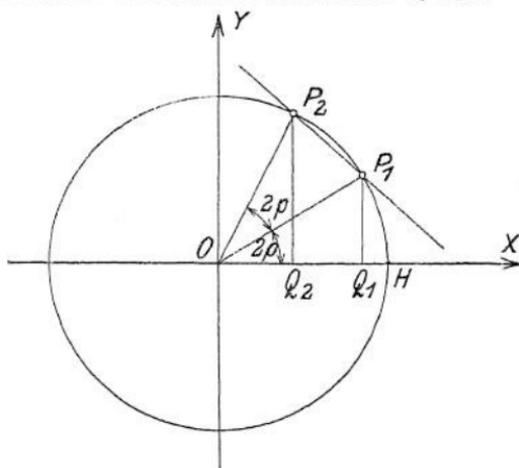


Fig. 134.

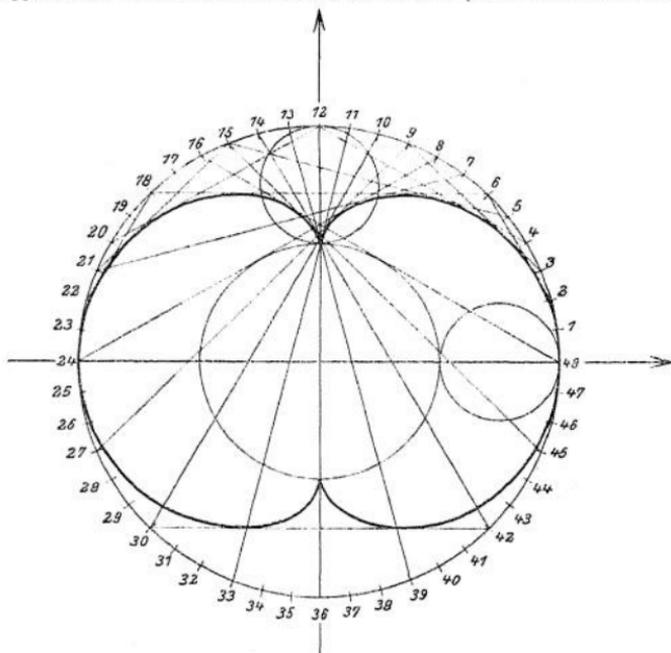


Fig. 135.

durch gerade Linien, so erhält man eine Epizykloide, die der Zahl m entspricht; in der Fig. 135 ist $m = 3$, man verbindet also die Punkte 1 und 3·1; 2 und 3·2; 3 und 3·3. Ist a der Halbmesser des rollenden Kreises, so ist in diesem Falle $n = m - 1 = 2$, d. h. der Halbmesser des festen Kreises ist $2a$.

2. Die Kurve, die eine Kurvenschar

$$f(x y p) = 0,$$

deren veränderlicher Parameter p ist, rechtwinklig durchschneidet, heißt die rechtwinklige Trajektorie der Kurvenschar. Die Differentialgleichung der Trajektorie, deren Koordinaten $x y$ seien, ergibt sich, indem man aus den Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f(x y p)}{\partial y}}{\frac{\partial f(x y p)}{\partial x}} \quad \text{und} \quad f(x y p) = 0$$

den variablen Parameter eliminiert. Die Integration dieser Gleichung liefert eine Schar von Trajektorien.

Beispiel: Das Strahlenbüschel $y = mx$ sei gegeben; $f(x y m) = y - mx = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -m; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{m};$$

aus $y - mx = 0$ ergibt sich $-\frac{1}{m} = -\frac{x}{y}$.

Die Gleichsetzung beider Werte $\left(-\frac{1}{m}\right)$ liefert $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ oder $y \cdot dy = -x \cdot dx$ als Differentialgleichung der Trajektorie. Durch Integration erhält man

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \quad \text{oder} \quad y^2 + x^2 = C,$$

d. h. die Trajektorie ist ein Kreis bzw. eine Schar konzentrischer Kreise.

IX. Analytische Geometrie des Raumes.

Bearbeitet von Dipl.-Ing. H. Winkel.

A. Punkte, gerade Linien und Ebenen im Raume.¹⁾

Die Lage eines Punktes im Raume ist eindeutig bestimmt, wenn seine Entfernung von der Ebene des Achsenkreuzes xy (Fig. 136) angegeben wird; diese Entfernung ist das Lot $PP_3 = z$ auf die xy -Ebene. Zu den beiden Achsen x und y tritt eine dritte, die z -Achse, die auf der xy -Ebene im

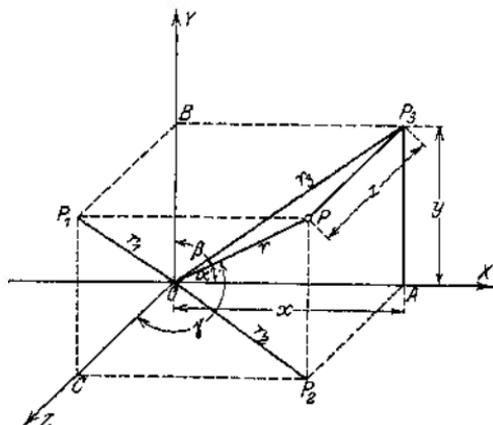


Fig. 136.

Koordinatenursprung senkrecht steht. Die drei Achsen bilden das räumliche rechtwinklige Koordinatensystem. Die Lage des Punktes P ist durch seine räumlichen Koordinaten bestimmt:

$$\begin{aligned} OA &= x; \\ AP_2 &= OB = y; \\ PP_3 &= OC = z. \end{aligned}$$

Fällt man von P auf die drei Ebenen Lote, so darf man sich durch diese Lote

$$PP_1 = OA = x; \quad PP_2 = AP_2 = y; \quad PP_3 = z$$

die Lage des Punktes P bestimmen denken.

¹⁾ Nach Dr. Hans Lorenz, Einführung in die Elemente der höheren Mathematik und Mechanik. München 1910. R. Oldenbourg.

Ist $OP = r$ die Diagonale des Parallelepipeds, so sind

$$OP_1 = r_1; \quad OP_2 = r_2; \quad OP_3 = r_3$$

die Projektionen von r auf die drei Koordinatenebenen; die Koordinaten xyz selbst sind die Projektionen von r auf die Koordinatenachsen. Es ist (vgl. S. 186, Fig. 118)

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Sind α, β, γ die Winkel, die $OP = r$ mit den Achsen bildet, so werden nach Fig. 136

$$x = r \cdot \cos \alpha; \quad y = r \cdot \cos \beta; \quad z = r \cdot \cos \gamma$$

und damit

$$1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma.$$

Durch diese Beziehung ist ein Winkel durch die beiden andern bestimmt; es genügt also zur Festlegung eines Punktes im Raume die Angabe der Entfernung $OP = r$ und zweier Achsenwinkel.

Sind $x_1 y_1 z_1$ die Koordinaten eines Punktes P_1 ; $x_2 y_2 z_2$ die eines Punktes P_2 , so ist die Länge der Strecke $P_1 P_2$ gegeben durch

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Ist $P(x y z)$ ein beliebiger Punkt einer Geraden durch den Punkt $P_1(x_1 y_1 z_1)$ mit den Neigungswinkeln α, β, γ , so lautet die Gleichung der Geraden

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\cos \beta}; \quad \frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma}.$$

Mit

$$\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = m_1 \quad \text{und} \quad \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha} = m_2, \quad x_1 \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = b_1 \quad \text{und} \quad x_1 \cdot \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha} = b_2$$

lauten die Gleichungen

$$y = m_1 \cdot x + b_1, \quad z = m_2 \cdot x + b_2,$$

wobei

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + m_1^2 + m_2^2}, \quad \cos^2 \beta = \frac{m_1^2}{1 + m_1^2 + m_2^2}, \quad \cos^2 \gamma = \frac{m_2^2}{1 + m_1^2 + m_2^2}.$$

Sind $P_1(x_1 y_1 z_1)$ und $P_2(x_2 y_2 z_2)$ zwei Punkte der Geraden, so lauten ihre Gleichungen

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1};$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Es sei $OP_0 = l$ das Lot vom Koordinatenanfangspunkt auf eine Ebene, α, β, γ die Neigungswinkel des Lotes, dann lautet die Gleichung der Ebene (Normalgleichung)

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma = 0.$$

Sind $OA = a, OB = b, OC = c$ die Abschnitte der Ebene auf den Achsen (Fig. 137), dann lautet die Gleichung der Ebene

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Beide Formen der Gleichungen zusammengefaßt ergeben die allgemeine Gleichung der Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

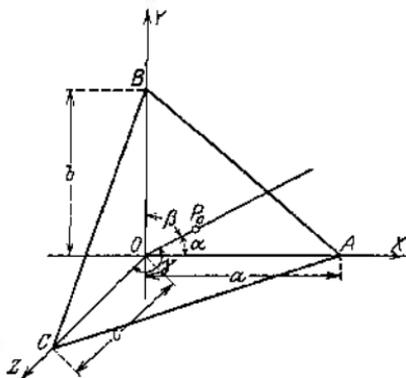


Fig. 137.

es ist

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad l = \frac{-D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

wobei das Vorzeichen der Wurzel so zu wählen ist, daß l positiv wird.

Sonderfälle:

$$\begin{aligned} By + Cz + D = 0 & \text{ Gleichung einer Ebene parallel zur } x\text{-Achse,} \\ Ax + Cz + D = 0 & \text{ „ „ „ „ „ } y\text{-Achse,} \\ Ax + By + D = 0 & \text{ „ „ „ „ „ } z\text{-Achse,} \\ Ax + By + Cz = 0 & \text{ „ „ „ „ durch den Koordinaten-} \\ & \text{anfängspunkt.} \\ x = a & \text{ Gleichung einer Ebene parallel zur } yx\text{-Ebene,} \\ y = b & \text{ „ „ „ „ „ } xz\text{-Ebene,} \\ z = c & \text{ „ „ „ „ „ } xy\text{-Ebene.} \end{aligned}$$

B. Flächen und Raumkurven.

Faßt man bei einer Gleichung zwischen den drei Veränderlichen xyz das Wertepaar xy als die unabhängigen Veränderlichen auf, so werden jedem Wertepaar xy ein bzw. mehrere Werte von z entsprechen; es wird also

$$z = F(xy).$$

Durch die unabhängigen Veränderlichen xy ist im räumlichen Achsenkreuz ein Punkt der xy -Ebene festgelegt, dem durch verschiedene Werte z ebenso

viele Punkte im Raume entsprechen. Durch stetige Änderung von x und y erhält man als geometrischen Ort der Endpunkte der zugehörigen z eine Fläche, deren Gleichung durch $z = F(xy)$ gegeben ist.

Genügen die drei Koordinaten xyz gleichzeitig zwei Flächengleichungen

$z = F_1(xy)$ und $z = F_2(xy)$, so gehören sie der Schnittkurve beider Flächen an. Eliminiert man aus beiden Gleichungen je eine der Veränderlichen z bzw. y , so erhält man zwei neue Gleichungen

$$y = f_1(x) \quad \text{und} \quad z = f_2(x),$$

die die Projektionen der Schnittkurve auf die xy - bzw. die xz -Ebene

darstellen. Legt man durch drei Punkte $P_1 P_2 P_3$ dieser Kurve (Fig. 138) eine Ebene, so werden die übrigen Punkte dieser Kurve im allgemeinen aus der Ebene heraustreten; die Kurve fällt nicht in die Ebene hinein; sie heißt Raumkurve und ist analytisch durch die Gleichungen zweier Oberflächen bestimmt.

Projiziert man sämtliche Punkte der Kurve auf die Koordinatenebenen xz und xy , so bilden die Lote Flächen, die als Zylinder bezeichnet werden; ihre Gleichungen lauten

$$y = f_1(x) \quad \text{und} \quad z = f_2(x),$$

wie für die Projektionen der Raumkurve, die als Schnittkurve der zugehörigen Zylinder parallel zur y - und z -Achse aufgefaßt wird.

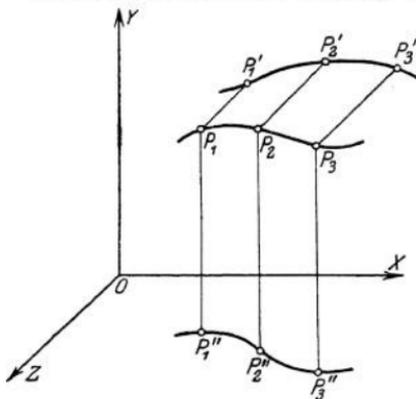


Fig. 138.

Schneidet man eine Fläche durch eine Ebene, so ist die Schnittkurve eine ebene Kurve.

Da sämtliche Punkte der Kugeloberfläche gleichen Abstand vom Mittelpunkt haben, so lautet die Mittelpunktsgleichung der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2;$$

hat der Mittelpunkt die Koordinaten x_0, y_0, z_0 , so heißt die Gleichung $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$.

Sind über den Abschnitten

$$OA = a; \quad OB = b; \quad OC = c$$

(Fig. 139) auf den Achsen drei Ellipsen errichtet, so schneidet eine Ebene parallel zur yz -Ebene die Strecken $A'B'$ und $A'C'$ ab, über denen sich wieder Ellipsen konstruieren lassen. Die so entstandene Fläche heißt Ellipsoid mit den Halbachsen a, b, c . Ihre Gleichung lautet

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

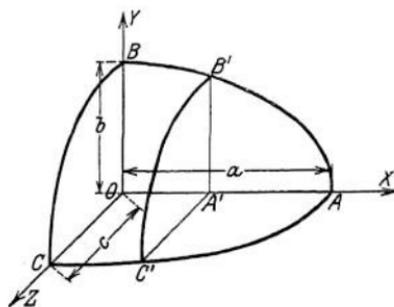


Fig. 139.

Werden zwei dieser Halbachsen gleich, z. B. $b = a$, so erhält man das Rotationsellipsoid mit der z -Achse als Umdrehungsachse, seine Gleichung ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Rotiert die Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(Fig. 24) um die y -Achse, so entsteht ein einschaliges Rotationshyperboloid mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Rotiert dieselbe Hyperbel um die x -Achse, so entsteht ein zweischaliges Rotationshyperboloid mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Rotiert die Parabel $y^2 = 2px$ (Fig. 10) um die x -Achse, so entsteht ein Rotationsparaboloid mit der Gleichung

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p} = 2x.$$

Die Schraubenfläche entsteht durch eine gleichzeitige Drehung einer Geraden AB (Fig. 140) um eine zu ihr senkrechte Achse OZ und eine der Drehung φ proportionale Parallelverschiebung z längs dieser Achse. Aus Abb. 140 folgt

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

und daraus als Gleichung der Schraubenfläche

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{a} \quad \text{bzw.} \quad \frac{z}{a} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Schneidet man diese Fläche mit einem Zylinder vom Radius r , so entsteht eine Schraubenlinie, deren Gleichungen

$$x = r \cdot \cos \varphi = r \cdot \cos \frac{z}{a}, \quad y = r \cdot \sin \varphi = r \cdot \sin \frac{z}{a}$$

lauten; sie zeigen, daß die Projektionen der Schraubenlinie auf die xz - und yz -Ebene Sinuslinien sind.

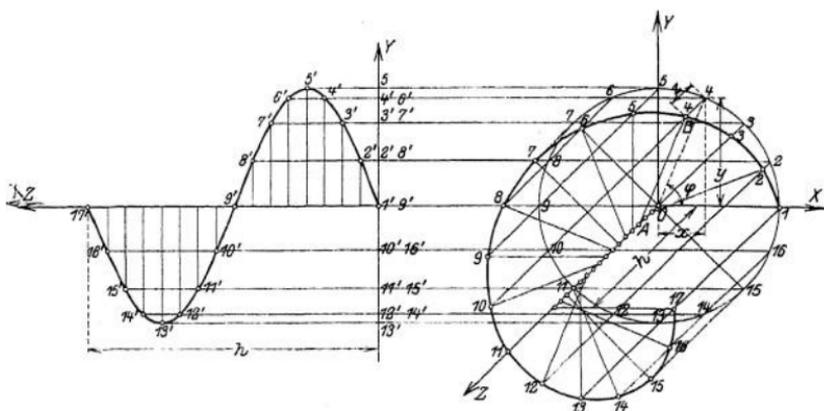


Fig. 140.

Bezeichnet man die Verschiebung der Erzeugungsgeraden für eine ganze Umdrehung $\varphi = 2\pi$ mit h (Ganghöhe der Schraube), so ist

$$h = 2\pi a,$$

und die Gleichungen der Schraubenlinie lauten

$$x = r \cdot \cos 2\pi \frac{z}{h}, \quad y = r \cdot \sin 2\pi \frac{z}{h}.$$

Die Kurve ist eine Raumkurve, die sich durch Aufwickeln eines Dreiecks auf einen Kreiszyylinder konstruieren läßt.

Konstruktion der Projektion der Schraubenlinie auf die yz -Ebene (Fig. 140). Man teile die Ganghöhe h und den Umfang des Kreises in der xy -Ebene in die gleiche Anzahl gleicher Teile. Zieht man durch die entsprechenden Punkte horizontale und vertikale Geraden, so sind die Schnittpunkte Punkte der Kurve.

Mechanik.

I. Dynamik.

Bearbeitet von Dipl.-Ing. M. Krause.

A. Bewegungslehre.

Man unterscheidet absolute und relative Bewegung. Eine Bewegung ist absolut, wenn die Umgebung als ruhend betrachtet wird, sie ist relativ, wenn die Umgebung sich selbst in Bewegung befindet. Im Maschinenbau wird die Erde meist als ruhend betrachtet, also die Bewegungen in bezug auf die Erde als absolut. Z. B. die Bewegung des Dampfmaschinenexpansionsschiebers zum Fundament wird als seine absolute Bewegung, seine Verschiebung gegen den Grundschieber als relativ bezeichnet. (Beim Kreiselkompaß kann man die Erde nicht als ruhend betrachten, da ihre Rotation die Bewegung der Kreiselachse beeinflußt.) In letzter Linie muß jede Bewegung als relativ aufgefaßt werden.

1. Bewegung eines Punktes.

a) Geradlinige Bewegung.

Eine Bewegung ist gleichförmig, wenn der bewegte Punkt in gleichen Zeiten gleiche Wege zurücklegt. Seine Geschwindigkeit ist der in der Zeiteinheit zurückgelegte Weg, also während der ganzen Bewegung konstant.

$$\text{Geschwindigkeit } v = \frac{s}{t} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} ; \quad \text{Dimension: } \frac{\text{m}}{\text{sek}}$$

$$\text{Weg } s = v \cdot t .$$

Trägt man die Zeiten t als Abszissen, die Wege als Ordinaten auf, so erhält man als Wegkurve eine Gerade von der Gleichung $s = v t$

(Fig. 1). Die Geschwindigkeit ist durch die Neigung der Geraden bestimmt: $v = \text{tg } \varphi$.

Trägt man die Zeiten als Abszissen, die Geschwindigkeiten als Ordinaten auf, so erhält man als Geschwindigkeitslinie eine zur Zeitachse parallele Gerade von der Gleichung $v = \text{konst.}$ (Fig. 2).

Der bis zur Zeit t_1 zurückgelegte Weg stellt sich als Inhalt des Rechteckes aus t_1 und v dar, als die in Fig. 2 schraffierte Fläche.

Die Bewegung ist ungleichförmig, wenn sich die Geschwindigkeit eines Punktes mit der Zeit ändert, beschleunigt, wenn die Geschwindigkeit wächst, umgekehrt: verzögert.

Bei konstanter Beschleunigung oder Verzögerung wird die Bewegung als gleichförmig beschleunigte oder verzögerte bezeichnet. Für diese gilt:

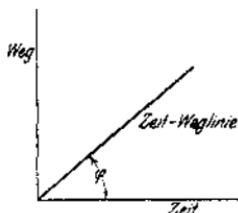


Fig. 1.

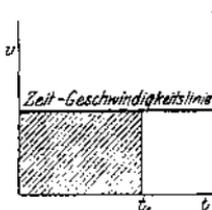


Fig. 2.

$$\text{Beschleunigung } p = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\text{Geschwindigkeitszunahme}}{\text{Zeitzunahme}}.$$

$$\text{Dimension: } \frac{\text{m}}{\text{sek}^2}.$$

Bei verzögerter Bewegung ist der Wert von p negativ.

Ist v_0 die Anfangsgeschwindigkeit, dann ist $v = v_0 + pt$

$$\text{und der Weg } s = s_0 + v_0 t + \frac{p t^2}{2},$$

wenn s_0 die ursprüngliche Entfernung des Punktes von dem Meßpunkt ist.

Die Geschwindigkeitskurve ist hier eine Gerade (Fig. 3). Die Beschleunigung ist $\text{tg } \varphi$. Für verzögerte Bewegung gilt Fig. 4. Auch hier ist, abgesehen

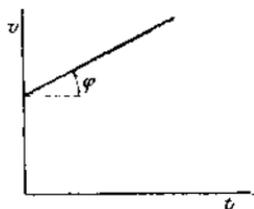


Fig. 3.

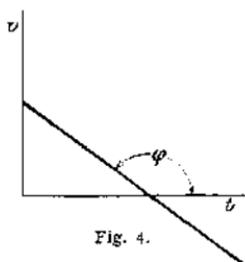


Fig. 4.

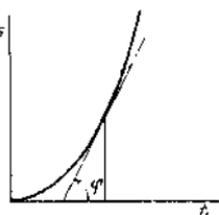


Fig. 5.

von der Konstanten s_0 , der Inhalt der unter der Geschwindigkeitslinie liegenden Fläche gleich dem Wege. Die Wegkurve ist eine Parabel, Fig. 5. Die Richtungskonstante der Tangente an einen Punkt der Parabel gibt die augenblickliche Geschwindigkeit an.

Die mittlere Geschwindigkeit ist diejenige gleichförmige Geschwindigkeit, die der Punkt haben müßte, um in derselben Zeit den zurückgelegten Weg zu durchlaufen.

$$v_m t = v_0 t + \frac{p t^2}{2}, \quad v_m = \frac{v_0 + v}{2},$$

d. h. das algebraische Mittel zwischen Anfangs- und Endgeschwindigkeit.

Ist die Beschleunigung mit der Zeit veränderlich, so wird die Bewegung ungleichförmig beschleunigte genannt. Es ist

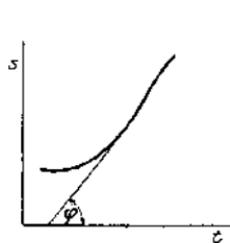


Fig. 6.

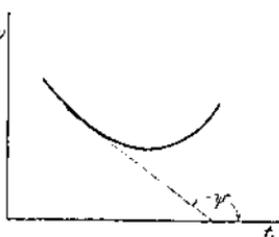


Fig. 7.

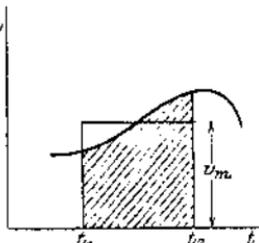


Fig. 8.

$$\text{Geschwindigkeit } v = \int p dt, \quad \text{Weg } s = \int v dt.$$

$$\text{Andererseits ist } v = \frac{ds}{dt}, \quad p = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

$v = \text{tg } \varphi$, gleich der Richtungskonstanten der Tangenten an die Weglinie (Fig. 6); p ist gleich der Richtungskonstanten ($\text{tg } \psi$) der Tangente an die Geschwindigkeitskurve. (Fig. 7.)

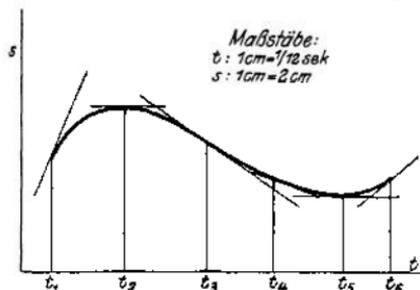


Fig. 9.

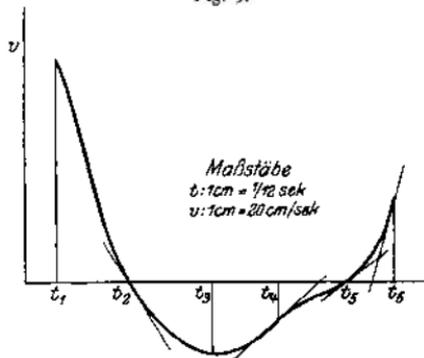


Fig. 11.

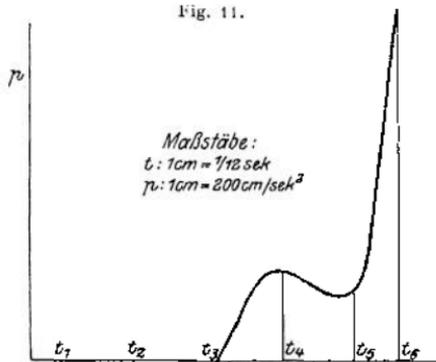


Fig. 13.

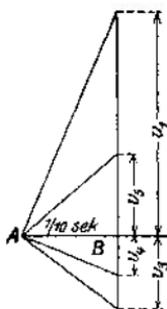


Fig. 10.

Die mittlere Geschwindigkeit zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 berechnet sich zu

$$v_m = \frac{\int_{t_1}^{t_2} v dt}{t_2 - t_1}$$

und wird in Fig. 8 dargestellt als Höhe des Rechteckes über der Strecke $t_1 t_2$, das den gleichen Inhalt wie die schraffierte Fläche hat.

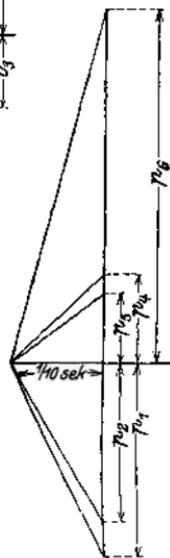


Fig. 12.

Beispiel: 1. $s = a \sin \omega t$; dann ist

$$v = \frac{ds}{dt} = a \omega \cos \omega t$$

und

$$p = \frac{dv}{dt} = -a \omega^2 \sin \omega t.$$

2. $p = a \sqrt{t}$,

$$v = \int a \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} a t^{3/2} + v_0$$

$$s = \int (\frac{2}{3} a t^{3/2} + v_0) dt = \frac{4}{15} a t^{5/2} + v_0 t + s_0.$$

3. Gegeben ist die Zeit-Weg-Linie eines Punktes (Fig. 9), es soll die Geschwindigkeitskurve gezeichnet werden. Man wähle eine Polweite $AB = 1\text{ sec}$, errichte in B das Lot und ziehe durch A Parallele zu den Tangenten an die Wegkurve in den Punkten über t_1, t_2, t_3 usw. Diese schneiden von dem Lot in B Stücke ab, die gleich $t_1 \eta = v$ zu der betreffenden Zeit sind. Trägt man die so erhaltenen Werte v_1, v_2 usw. über t_1, t_2, t_3 usw. als Ordinaten auf, so erhält man die Geschwindigkeitskurve¹⁾. In Fig. 10 ist die Polweite AB nicht gleich 1 sec, sondern nur $1/10\text{ sek}$ gesetzt worden. Dementsprechend sind die Maßstäbe für die Geschwindigkeits- und die Beschleunigungslinie (Figuren 11 bis 13) zu bestimmen.

¹⁾ Vgl. Abschnitt Mathematik, Differentiellinien, S. 157.

Freier Fall. Die Beschleunigung des freien Falles im luftleeren Raum ist für Deutschland im Mittel $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{sek}^{-2}$. Sie ist abhängig von der geographischen Breite. Die genaue Formel lautet $g = 9,80606 - 0,025 \cos 2\varphi$, wenn φ die geographische Breite bedeutet.

Mit Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ ist Höhe

$$h = \frac{g t^2}{2} = \frac{v^2}{2g}; \quad v = g t = \sqrt{2gh};$$

$$t = \frac{v}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Senkrechter Wurf. Die Bewegung ist gleichförmig verzögert: $v = v_0 - g t$.

$$\text{Steigzeit } T = \frac{v_0}{g}, \quad \text{Steighöhe } H = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Harmonische Schwingung. Dreht sich eine Kurbel (Fig. 14) mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit ω , so ist die Auslenkung des Punktes P aus seiner Mittellage $x = r \sin \varphi = r \sin \omega t$. Die größte Auslenkung r heißt Amplitude; T , die Dauer einer vollen Schwingung, d. h. die Zeit, die P braucht, um aus einer äußersten Lage wieder in dieselbe äußerste Lage zu kommen, ist $\frac{2\pi}{\omega}$.

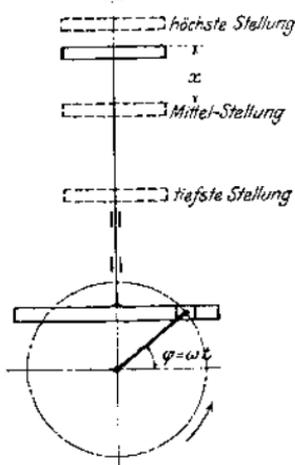


Fig. 14.

$$\omega = \frac{2\pi}{T};$$

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \text{Frequenz} = \text{Schwingungszahl in der Zeiteinheit};$$

$$v = \frac{dx}{dt} = r\omega \cos \omega t; \quad p = \frac{dv}{dt} = -r\omega^2 \sin \omega t.$$

b) Krummlinige Bewegung.

Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$. Die Richtung der Geschwindigkeit ist diejenige der Tangente an die Bahn.

Der Begriff der mittleren Geschwindigkeit ist der gleiche wie bei der gerad-

linigen Bewegung $v_m = \frac{\int_{t_1}^{t_2} v dt}{t_2 - t_1}$. Durchläuft ein Punkt eine Bahn von der Länge s n mal in der Minute, so ist seine mittlere Geschwindigkeit

$$v_m = \frac{ns}{60}.$$

Die Beschleunigung ist nach Größe und Richtung die Geschwindigkeitsänderung im Zeitdifferential (Fig. 15 u. 16). Sie ergibt sich als geometrische Differenz zweier aufeinander folgender Geschwindigkeiten und fällt im allgemeinen nicht in die Richtung der Geschwindigkeit.

p kann zerlegt werden in eine Komponente in Richtung der Geschwindigkeit: Tangentialbeschleunigung $p_t = \frac{dv}{dt}$, und eine solche senkrecht zur Bahnkurve: Normalbeschleunigung $p_n = \frac{v^2}{\rho}$, wobei ρ der Krümmungsradius der Bahn ist (Fig. 17).

Zeichnet man die Bewegung in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein (Fig. 18), so sind s_x bzw. s_y die Projektionen einer Verschiebung s , v_x bzw. v_y die

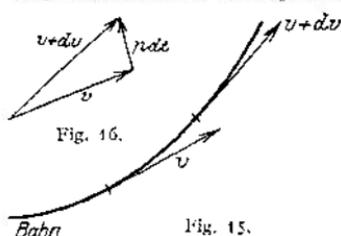


Fig. 16.

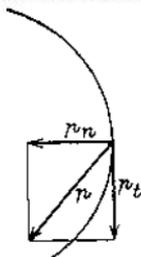


Fig. 17.

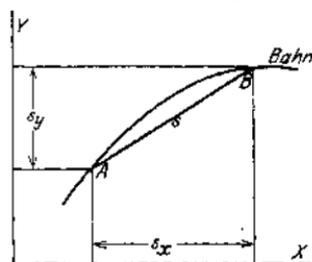


Fig. 18.

Projektionen von v , p_x bzw. p_y diejenigen von p auf die Achsen. Es ist dann

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{s_y}{s_x}; \quad s_x = s \cos \alpha; \quad s_y = s \sin \alpha;$$

s bedeutet bei einer endlichen Verschiebung die Sehne AB (Fig. 18 a); bei unendlich kleiner Verschiebung fällt die Sehne mit der Bahn zusammen;

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{v_y}{v_x}; \quad v_x = v \cos \beta; \quad v_y = v \sin \beta;$$

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}; \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{p_y}{p_x}; \quad p_x = p \cos \beta; \quad p_y = p \sin \beta;$$

$$v_x = \frac{ds_x}{dt}; \quad v_y = \frac{ds_y}{dt};$$

$$p_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 s_x}{dt^2}; \quad p_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 s_y}{dt^2}.$$

Ist die Bewegung gleichförmig, so sind auch die Projektionen der Bewegung (Seitenbewegungen) gleichförmig, ist jene ungleichförmig, so ist mindestens eine der Seitenbewegungen ungleichförmig.

Sind die Seitenbewegungen bekannt, so ist die Bedingung, daß die wirkliche (resultierende) Bewegung eine geradlinige sei:

$$\frac{s_{1y}}{s_{1x}} = \frac{s_{2y}}{s_{2x}} = \frac{s_{3y}}{s_{3x}} = \operatorname{tg} \varphi,$$

wobei die Indizes den Zeiten t_1, t_2, t_3 entsprechen. Dann ist auch

$$\frac{v_{1y}}{v_{1x}} = \frac{v_{2y}}{v_{2x}} = \frac{v_{3y}}{v_{3x}} = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{und} \quad \frac{p_{1y}}{p_{1x}} = \frac{p_{2y}}{p_{2x}} = \frac{p_{3y}}{p_{3x}} = \operatorname{tg} \varphi,$$

da bei geradliniger Bewegung Bahn, Geschwindigkeit und Beschleunigung gleiche und gleichbleibende Richtung haben.

Beispiel: Es sei bekannt $s_y = a + bt + ct^2$, $s_x = a \cdot m + bmt + cm^2 t^2$. Dann ist für jeden Wert von t

$$\frac{s_y}{s_x} = \frac{a + bt + ct^2}{m(a + bt + ct^2)} = \frac{1}{m} = \operatorname{tg} \varphi; \quad v_y = \frac{ds_y}{dt} = b + 2ct;$$

$$v_x = \frac{ds_x}{dt} = mb + 2mct; \quad \frac{v_y}{v_x} = \frac{b + 2ct}{m(b + 2ct)} = \frac{1}{m} = \operatorname{tg} \varphi;$$

$$p_y = \frac{dv_y}{dt} = 2c; \quad p_x = \frac{dv_x}{dt} = 2mc; \quad \frac{p_y}{p_x} = \frac{2c}{2mc} = \frac{1}{m} = \operatorname{tg} \varphi.$$

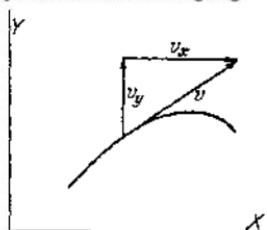


Fig. 18 a.

Die Beziehung zwischen den resultierenden Größen und ihren Projektionen kann auch, da alle Größen Vektoren sind, dargestellt werden durch die Gleichung

$$s_x + \mathbf{y} s_y = s,$$

$$v_x + \mathbf{y} v_y = v.$$

$$p_x + \mathbf{y} p_y = p,$$

d. h. die Resultierende ist gleich der geometrischen Summe aus den Komponenten.

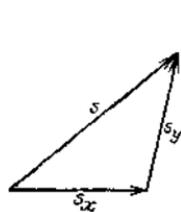


Fig. 19.

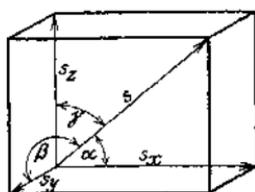


Fig. 20.

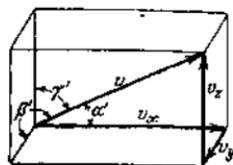


Fig. 20 a.

Dies gilt auch für den Fall, daß die Komponenten nicht senkrecht aufeinander stehen. (Fig. 19). Die Bahn ist eine Gerade, wenn die resultierende Verschiebung oder auch Geschwindigkeit in jedem Zeitpunkt dieselbe Richtung hat.

Liegt die Bahn, in der sich der Punkt bewegt, nicht in der XY -Ebene, so kann man eine dritte, auf der XY -Ebene senkrecht stehende Z -Achse annehmen (Fig. 20). Die Projektionen von s , v , p auf die drei Ebenen sind dann

$$s_x, s_y, s_z \quad \text{bzw.} \quad v_x, v_y, v_z \quad \text{bzw.} \quad p_x, p_y, p_z,$$

und es ist (Fig. 20 a).

$$s_x = s \cdot \cos \alpha; \quad v_x = v \cos \alpha'; \quad p_x = p \cos \alpha'';$$

$$s_y = s \cdot \cos \beta; \quad v_y = v \cos \beta'; \quad p_y = p \cos \beta'';$$

$$s_z = s \cdot \cos \gamma; \quad v_z = v \cos \gamma'; \quad p_z = p \cos \gamma''.$$

Ferner ist

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2};$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2};$$

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2};$$

$$v_x = \frac{ds_x}{dt}, \quad v_y = \frac{ds_y}{dt}, \quad v_z = \frac{ds_z}{dt},$$

$$p_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 s_x}{dt^2}, \quad p_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 s_y}{dt^2}, \quad p_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 s_z}{dt^2};$$

Bedingung für geradlinige Bahn:

$$\frac{s_{1x}}{s_{2x}} = \frac{s_{1y}}{s_{2y}} = \frac{s_{1z}}{s_{2z}};$$

dann bleiben α , β und γ während der ganzen Bewegung konstant und

$$\alpha = \alpha' = \alpha'',$$

$$\beta = \beta' = \beta'',$$

$$\gamma = \gamma' = \gamma''.$$

Sind die Seitenbewegungen bekannt, so ist

$$s = s_x + s_y + s_z,$$

$$v = v_x + v_y + v_z,$$

$$p = p_x + p_y + p_z,$$

auch dann, wenn die Koordinatenachsen nicht aufeinander senkrecht stehen (Fig. 21).

Zentralbewegung. Bewegt sich ein Punkt auf einem Kreise mit dem Radius r , so ist die Drehung des Fahrstrahles aus einer Anfangslage ein Maß für die Verschiebung des Punktes. Der durchlaufene Bogen ist $b = r\gamma$, wenn γ im Bogenmaß gemessen wird.

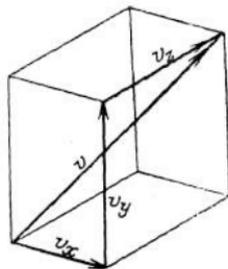


Fig. 21.

Die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{d\gamma}{dt}$ ist die Geschwindigkeit des Fahrstrahlpunktes, der den Abstand l vom Mittelpunkt hat. Dimension ω : sek⁻¹. Geschwindigkeit von P im Abstand r von der Drehachse:

$$v = r\omega = \frac{db}{dt}, \quad \omega = \frac{v}{r}.$$

Bei ungleichförmiger Winkelgeschwindigkeit ist

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\gamma}{dt^2}$$

die Winkelbeschleunigung. Dimension von ε : sek⁻².

Der Punkt P erfährt eine (radiale, zentripetale) Normalbeschleunigung

$$p_n = r\omega^2 = \frac{v^2}{r} = v \cdot \omega$$

und eine Tangentialbeschleunigung

$$p_t = r\varepsilon = r \frac{d\omega}{dt} = r \frac{d^2\gamma}{dt^2} = \frac{d^2b}{dt^2}.$$

Gesamtbeschleunigung: $p = \sqrt{p_n^2 + p_t^2}$.

Bei gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit und n Umdrehungen pro Minute ist

$$\text{Winkelgeschwindigkeit } \omega = \frac{2\pi n}{60} = 0,1047 n \text{ sek}^{-1},$$

$$\text{Umlaufszahl } n = \frac{30\omega}{\pi} = 9,549 \cdot \omega \text{ min}^{-1},$$

$$\text{Umfangsgeschwindigkeit } v = r \cdot \omega \text{ m/sek},$$

$$\text{Umlaufszeit } T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ sek}.$$

Weiterhin:

$$\gamma = \gamma_0 + \int_{t=0}^{t=t} \omega dt;$$

bei konstanter Winkelgeschwindigkeit ist

$$\gamma = \gamma_0 + \omega t. \quad \omega = \omega_0 + \int_{t=0}^{t=t} \varepsilon dt;$$

bei konstanter Winkelbeschleunigung ist $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$.

Für periodisch veränderliche Winkelgeschwindigkeit derart, daß die Zeit einer vollen Umdrehung zwar unveränderlich ist, aber die Winkelgeschwindigkeit sich innerhalb einer Umdrehung ändert, ist

$$\text{die mittlere Winkelgeschwindigkeit } \omega_{\text{mittel}} = \frac{2\pi n}{60},$$

$$\text{der Ungleichförmigkeitsgrad } \delta = \frac{\omega_{\text{max}} - \omega_{\text{min}}}{\omega_{\text{mittel}}}.$$

Ist die Bahn des Punktes kein Kreis, sondern eine Kurve mit veränderlichem Krümmungsradius, so wird

$$\rho_n = \frac{v^2}{\rho},$$

wobei ρ der Krümmungsradius der Kurve an dem augenblicklichen Standort des Punktes und v seine Geschwindigkeit ist.

Bewegt sich ein Punkt P um einen Zentralpunkt M , so daß der Fahrstrahl eine konstante Winkelgeschwindigkeit, aber veränderliche Länge hat, so ist seine wahre Verschiebung $s = s_t + s_r$, gleich der geometrischen Summe aus der Verschiebung in tangentialer und in radialer Richtung. Ist die Verschiebung sehr klein, dann ist (Fig. 22)

$$ds = r d\varphi + dr = \sqrt{(r d\varphi)^2 + dr^2}.$$

$$\text{Geschwindigkeit } v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds_t}{dt} + \frac{ds_r}{dt} = \frac{r d\varphi}{dt} + \frac{dr}{dt}$$

$$= r\omega + \frac{dr}{dt} = \sqrt{r^2\omega^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2}.$$

Die Beschleunigung von P ist nicht $\frac{dv_t}{dt} + \frac{dv_r}{dt}$. Zunächst tritt, auch wenn $v_r = 0$ ist, wenn also der Punkt einen Kreisbogen beschreibt, eine zentripetale Beschleunigung $\frac{v^2}{r}$ auf. Ist außerdem v_r veränderlich, dann wird:

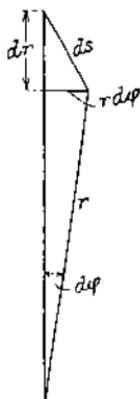


Fig. 22.

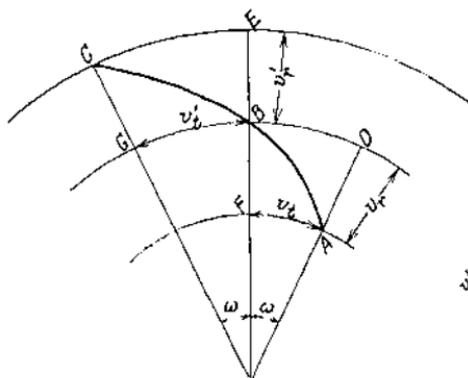


Fig. 23.

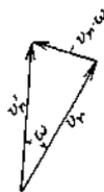


Fig. 24.

$$p_r = \frac{v_t^2}{r} + \frac{dv_r}{dt}.$$

Bei $v_r \neq 0$ tritt auch eine tangentiale Beschleunigung auf, selbst wenn die Winkelgeschwindigkeit des Fahrstrahles konstant ist.

Punkt P (Fig. 23) befinde sich in A , nach Verlauf einer sehr kleinen Zeiteinheit in B , nach Verlauf einer weiteren in C ; es sei $\sphericalangle AMB = \sphericalangle BMC = \omega$,

d. h. die Winkelgeschwindigkeit des Fahrstrahles sei konstant. Dann sind die radialen Geschwindigkeiten $v_r = AD$, wenn sich der Punkt in A , $v_r' = BE$, wenn sich der Punkt in B befindet.

Die tangentielle Geschwindigkeit ist $v_t = AF$, wenn sich der Punkt in A , $v_t' = BG$, wenn er sich in B befindet.

Selbst wenn sich v_r und v_r' nicht durch ihre Größe unterscheiden, so haben sie doch verschiedene Richtung, und zwar sind sie um den Winkel ω gegeneinander geneigt. Die Geschwindigkeit v_r muß also einen Zuwachs $v_r \omega$ erhalten, damit sie zu v_r' werde (Fig. 24).

Die tangentialen Geschwindigkeiten sind ebenfalls nicht gleich, weder nach Größe noch nach Richtung. Die Änderung der Richtung wird hervorgerufen durch die bekannte Zentripetalbeschleunigung $\frac{v_t^2}{r}$. Der Zuwachs an Größe ist

$$AF - BC = BD - BC = \omega(DM - AM) = \omega \cdot AD = \omega \cdot v_r.$$

Der Punkt P erfährt also auch bei konstantem ω eine tangentielle Zusatzbeschleunigung von $2\omega \cdot v_r$. Allgemein ist

$$\dot{p}_r = \frac{dv_r}{dt} + \frac{v_t^2}{r}, \quad \dot{p}_t = 2\omega \cdot v_r.$$

Die wahre Beschleunigung ist $\dot{p} = \dot{p}_r + \dot{p}_t = \sqrt{\dot{p}_r^2 + \dot{p}_t^2}$.

Ist außerdem ω veränderlich, so ist

$$\dot{p}_r = \frac{dv_r}{dt} + \frac{v_t^2}{r}, \quad \dot{p}_t = r\epsilon + 2\omega v_r.$$

Die Fläche, welche von dem Fahrstrahl in der Zeiteinheit überstrichen wird, heißt Sektorengeschwindigkeit oder Flächengeschwindigkeit (Fig. 24a).

Ihre Dimension ist $\frac{\text{m}^2}{\text{sek}}$. Es ist

$$\text{Sektorengeschwindigkeit} = v_f = \frac{v \cdot r}{2},$$

wobei r das Lot vom Zentralpunkt auf die Geschwindigkeit ist. Sie ist gleich dem halben Moment der Geschwindigkeit in bezug auf den Zentralpunkt. Wirkt auf den Punkt eine Beschleunigung ein, so wird sich im allgemeinen die Sektorengeschwindigkeit ändern. Unter Sektorenbeschleunigung versteht man die Zunahme der Sektorengeschwindigkeit pro Zeiteinheit; Dimension der Sektorenbeschleunigung:

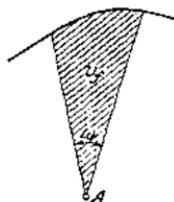


Fig. 24 a.

$$\frac{\text{m}^2}{\text{sek}^2}$$

$$\dot{p}_f = \frac{dv_f}{dt} = \frac{d(rv)}{2dt} = \frac{r'v}{2},$$

wobei r' das Lot vom Zentralpunkt auf die Beschleunigung ist.

Zerlegt man die Beschleunigung des Punktes in eine radiale und eine tangentielle, so erkennt man, daß die radiale Beschleunigung einen Einfluß auf die Sektorengeschwindigkeit nicht besitzt, da ihr Moment gleich Null ist. Die Sektorenbeschleunigung ist also $\dot{p}_f = r \cdot \dot{p}_t$, wobei \dot{p}_t die Tangentialbeschleunigung ist. Ist überhaupt nur eine radiale Beschleunigung vorhanden, so ist die Sektorengeschwindigkeit konstant (Planetenbewegung). Auf die Größe der radialen Beschleunigung kommt es dabei nicht an.

c) Zusammensetzung von Bewegungen.

Führt ein Punkt P eine Bewegung auf einer Bahn A aus, die sich ihrerseits selbst bewegt, so ist die wahre Bewegung des Punktes die Resultierende aus der Bewegung des Punktes auf der Bahn und der Bewegung der Bahn selbst.

Erfährt der Punkt P eine Verschiebung auf A (Fig. 25), nämlich s_A^P (sprich s zu A), während A in derselben Richtung die Verschiebung s_A erfährt, dann ist die resultierende Verschiebung PP' :

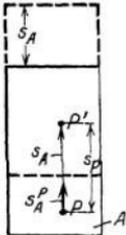


Fig. 25.

$$s_P = s_A + s_A^P.$$

Findet die Verschiebung s_A^P in einer zu s_A entgegengesetzten Richtung statt, so ist der Wert von s_A^P mit einem negativen Vorzeichen zu versehen.

Die gleichen Beziehungen bestehen zwischen den Geschwindigkeiten und den Beschleunigungen. Also ist

$$v_P = v_A + v_A^P,$$

$$p_P = p_A + p_A^P.$$

Beispiele: Von dem letzten Wagen eines mit einer Geschwindigkeit von 20 m/sek dahinfahrenden Zuges schießt jemand entgegengesetzt der Fahrtrichtung eine Pistole ab, deren Kugel den Lauf mit einer Geschwindigkeit von 50 m/sek verläßt. Es ist die wahre Geschwindigkeit der Kugel zu ermitteln.

$$v = v_{\text{Bahn}} + v_{\text{Kugel}} = 20 + (-50) = -30 \text{ m/sek.}$$

Die Kugel besitzt eine wahre Geschwindigkeit von 30 m/sek, die derjenigen des Zuges entgegengesetzt gerichtet ist.

Erfolgt die Verschiebung der Bahn nicht in derselben Richtung wie diejenige des Massenpunktes, doch so, daß die Bahn sich selbst stets parallel bleibt,

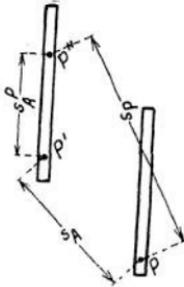


Fig. 26.

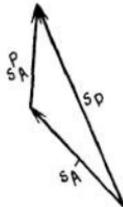


Fig. 27.

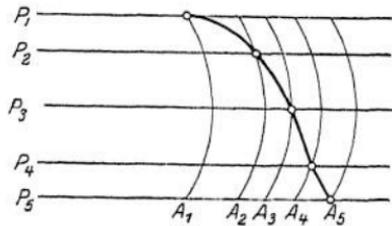


Fig. 28.

so sind die Formeln die gleichen wie oben, nur ist an Stelle der algebraischen Addition die geometrische zu setzen (Fig. 26 und 27). Also ist

$$s_P = s_A + \curvearrowright s_A^P,$$

$$v_P = v_A + \curvearrowright v_A^P,$$

$$p_P = p_A + \curvearrowright p_A^P,$$

d. h. die wahre Bewegung des Punktes ist gleich der Resultierenden aus den Einzelbewegungen.

Die Konstruktion der Bahn ergibt sich aus Fig. 28, in der A_1, A_2, A_3, A_4 und A_5 die Stellung der Bahn und P_1, P_2, P_3, P_4 und P_5 die Stellung des Punktes P auf der Bahn in den Zeitpunkten 1, 2, 3, 4 und 5 kennzeichnen.

Bei Drehung der Führungslinie A um einen Punkt wird die wahre Verschiebung

$$s_P = s_A + \curvearrowright s_A^P,$$

wobei s_A die Verschiebung des Bahnpunktes, auf dem sich P befand, und s_A^P die Verschiebung von P auf der Führung bedeutet.

In Fig. 29 geben A_1 und A_2 die Anfangs- und die Endlage der Bahn, P_1 die Anfangs-, P_2 die Endlage des bewegten Punktes an.

Wahre Geschwindigkeit:

$$v_P = v_A + v_A^P = r\omega + v_A^P,$$

wobei ω die Winkelgeschwindigkeit des nach dem Standort von P gezogenen Radius Vektor und r dessen Länge ist.

Hingegen ist die wahre Beschleunigung

$$p_P = p_A + p_A^P + Z.$$

Hierbei ist z die Zusatzbeschleunigung $= 2v_A^P \cdot \cos\alpha \cdot \omega$, wobei α der Neigungswinkel der Bahn gegen den Radiusvektor, $v_A^P \cos\alpha$ also die radiale Geschwindigkeit von P auf A bedeutet, und ω die Winkelgeschwindigkeit des Radiusvektors darstellt.

Die Richtung von z ist senkrecht zum Radiusvektor, und zwar im Sinne von ω , wenn die Projektion von v_A^P auf den Radius vom Mittelpunkt M weg, im entgegengesetzten, wenn die Projektion nach dem Mittelpunkt hin gerichtet ist (Fig. 30 und 31). Da

$$p_A = r\varepsilon + r\omega^2,$$

ist

$$p_P = r\varepsilon + p_A^P + r\omega^2 + 2v_A^P \cos\alpha \cdot \omega.$$

Erfährt die Bahn gleichzeitig eine Schiebung und eine Drehung, so werden Schiebung und Drehung gesondert behandelt, und es lagern sich die Einzelbewegungen übereinander, ohne sich zu stören.

d) Relativbewegung.

Die Bewegung eines Punktes zu einer bewegten Führungslinie heißt relativ, zur ruhenden Umgebung, also zur Erde, absolut. v_A^P ist die relative Geschwindigkeit von P zum Körper A .

Die relative Bewegung zweier Punkte ändert sich nicht, wenn beide die gleiche Zusatzbewegung erhalten. Z. B. ändert sich die relative Bewegung des Ventiles eines Motors zu seinem Sitz nicht, wenn das Ganze bewegt wird.

Die Gleichungen für die relative Bewegung ergeben sich aus dem Vorhergehenden (S. 222), wobei die absoluten Bewegungen als bekannt angesehen werden. Es ist (Fig. 32)

$$s_A^P = s_P \rightarrow s_A,$$

$$v_A^P = v_P \rightarrow v_A,$$

$$p_A^P = p_P \rightarrow p_A \rightarrow 2v_A^P \omega \cos\alpha.$$

Das Zeichen \rightarrow bedeutet, daß der Pfeil des geometrisch zu subtrahierenden Vektors umgekehrt werden soll und daß der so erhaltene neue Vektor geometrisch zu addieren ist. Die Größe $-2v_A^P \omega \cos\alpha$ heißt Zusatzbeschleunigung des Coriolis.

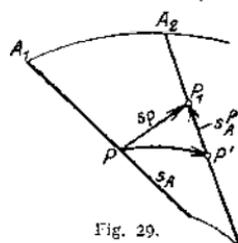


Fig. 29.

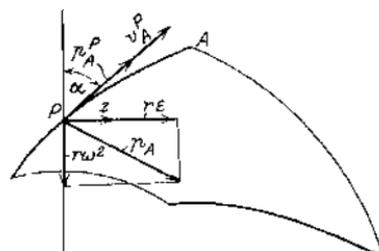


Fig. 30.

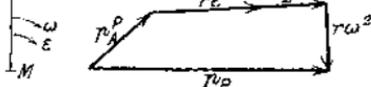


Fig. 31.

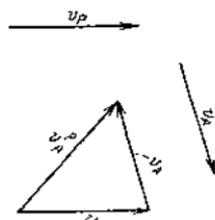


Fig. 32.

Erfährt die Führung nur eine Parallelverschiebung und keine Drehung, so wird

$$-2v_A^P \omega \cos \alpha = 0.$$

Wird nicht die Relativbewegung des Punktes P zur Führung A , sondern diejenige der Führung A (d. h. des Punktes von A , der augenblicklich mit P zusammenfällt) zu P gesucht, so ist zu beachten, daß

$$\begin{aligned} s_P^A &= -s_A^P, \\ v_P^A &= -v_A^P, \\ \dot{p}_P^A &= -\dot{p}_A^P \end{aligned}$$

ist.

Beispiele: 1. Zwei Körper A und B besitzen die Geschwindigkeiten v_A und v_B . Welches sind ihre relativen Geschwindigkeiten? (Fig. 33.)

$$\begin{aligned} v_A^B &= v_B \rightarrow v_A, \\ v_B^A &= v_A \rightarrow v_B = -v_A^B. \end{aligned}$$

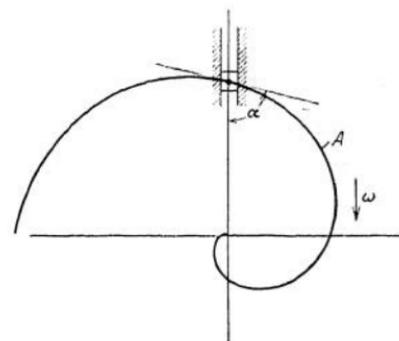


Fig. 34.

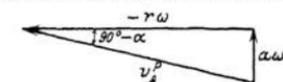


Fig. 35.

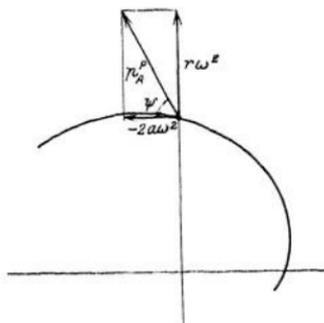


Fig. 36.

2. Ein Körper A erfahre eine Parallelverschiebung nach dem Gesetz $s_A = a \sin(\omega t)$, ein Körper B eine gleichgerichtete nach dem Gesetz $s_B = b \sin(\omega t + \varphi)$. Welches ist die relative Bewegung von B gegen A ?

$$s_A^B = s_B - s_A = a \sin(\omega t) - b \sin(\omega t + \varphi) = c \sin(\omega t - \psi).$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi}, \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{b \sin \varphi}{a - b \cos \varphi}. \end{aligned}$$

3. In einer Führung A von der Form einer Archimedischen Spirale nach der Gleichung $r = a \varphi$ befindet sich ein Stein P , der durch eine zweite in Ruhe befindliche Führung B radial geführt wird. Wie groß ist v_P , v_A^P , \dot{p}_A^P , wenn A sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht?

(Fig. 34 bis 36.)

$$v_P = \frac{dr}{dt} = \frac{a d\varphi}{dt} = a\omega.$$

$$v_A^P = v_P \rightarrow v_A = a\omega \rightarrow r\omega = a(\omega \rightarrow \varphi\omega) = a\omega(1 \rightarrow \varphi)$$

$$\dot{p}_A^P = \dot{p}_P \rightarrow \dot{p}_A \rightarrow 2v_A^P \omega \cos \alpha$$

$$\dot{p}_P = 0$$

$$\dot{p}_A = r\omega^2 \text{ (radial nach innen gerichtet)} = a\varphi\omega^2.$$

$v_A^P \cos \alpha$ ist die radiale Relativgeschwindigkeit. Sie ist gleich $v_P = a\omega$.

Daher ist

$$2v_A^P \cos \alpha \omega = 2a\omega^2;$$

da $v_A^P \cos \alpha$ vom Rotationsmittelpunkt abgewandt ist, ist die Richtung der Zusatzbeschleunigung \perp zum Radius und im Sinne von ω , also nach rechts gerichtet.

Demnach ist

$$\phi_A^P = \rightarrow a \varphi \omega^2 + \rightarrow (-2 a \omega^2).$$

Die Neigung von ϕ_A^P gegen die Horizontale ist gegeben durch $\operatorname{tg} \psi = \frac{a \varphi \omega^2}{2 a \omega^2} = \frac{\varphi}{2 \omega}$.

4. Ein Wasserstrahl soll so in ein um eine horizontale Achse rotierendes Schaufelrad geleitet werden, daß er ohne Stoß in das Rad eintritt. Welche Richtung muß der Strahl haben und welches ist nach Richtung und Größe die Austrittsgeschwindigkeit?

v_P ist die absolute Geschwindigkeit vor dem Eintritt, v_A die Umfangsgeschwindigkeit des Rades. Bei stoßlosem Eintritt muß die relative Geschwindigkeit tangential zur Schaufel gerichtet sein. Es ist

$$v_P = v_A^P + \rightarrow v_A.$$

Da v_P nach Größe, v_A nach Größe und Richtung, v_A^P nach Richtung bekannt ist, läßt sich das Geschwindigkeitsdreieck (Fig. 37 oben) zeichnen. Die relative Austrittsgeschwindigkeit v_A^P ergibt sich ihrer Größe nach aus den konstruktiven Eigentümlichkeiten der Schaufelform. Ihre Richtung ist die der Tangente an die Schaufel in der Austrittskante. Die absolute Austrittsgeschwindigkeit ergibt sich nach Richtung und Größe als (Fig. 37 unten)

$$v_P = v_A^P + \rightarrow v_A.$$

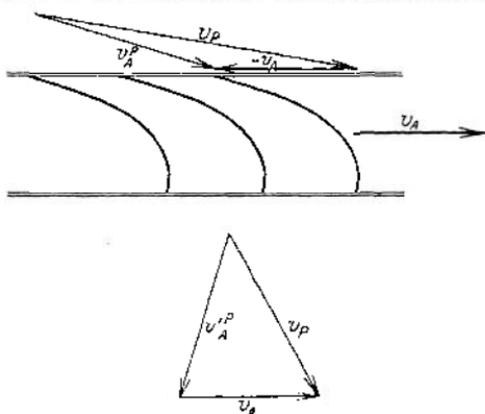


Fig. 37.

2. Bewegung starrer Körper

a) Elementarbewegungen.

Wird ein Körper so bewegt, daß seine Punkte Kreise beschreiben, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, die senkrecht zu den Kreisebenen steht (Fig. 38), so erfährt er eine Drehung. Ist der Drehwinkel unendlich klein, so wird die Drehung als Elementardrehung bezeichnet. Ist $d\gamma$ die Zunahme des Drehwinkels in der Zeit dt , so ist die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{d\gamma}{dt}$.

Die Geschwindigkeit eines Punktes im Abstände r von der Drehachse ist

$$v = r \omega = r \frac{d\gamma}{dt}.$$

Die Elementardrehung kann dargestellt werden durch einen Vektor, der in der Drehachse liegt und dessen Länge gleich ω ist. Der Pfeil ist so anzubringen, daß er nach der Seite zeigt, von der aus gesehen die Drehung im Sinne des Uhrzeigers erfolgt. Der Drehvektor kann in der Drehachse verschoben werden, verhält sich also in dieser Beziehung wie ein Kraftvektor.

Wird ein Körper so bewegt, daß die Bahnen aller seiner Punkte parallel und kongruent sind, so daß also alle Flächen des Körpers stets sich selbst parallel bleiben, so erfährt er eine Verschiebung. Ist die Verschiebung unendlich klein, so heißt sie Elementarverschiebung. Ist ds die Verschiebung in der Zeit dt , so ist die Schiebungsgeschwindigkeit $v_s = \frac{ds}{dt}$.

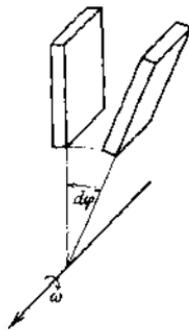


Fig. 38.

Die Schiebungsgeschwindigkeit kann durch einen Vektor von der Größe, der Richtung und dem Pfeilsinne der Geschwindigkeit dargestellt werden. Die Lage des Vektors ist beliebig, er kann also in beliebiger Weise parallel zu sich selbst verschoben werden. Dieser Vektor verhält sich also wie der Vektor eines Kräftepaars.

Die Elementarverschiebung kann auch betrachtet werden als eine Drehung um eine unendlich ferne Achse mit unendlich kleiner Winkelgeschwindigkeit.

b) Zusammensetzung von Elementarbewegungen.

Die Verschiebung des Stabes AB in Fig. 39 nach A_1B_1 kann aber auch als in folgender Weise bewirkt gedacht sein: Der Stab wird um M_1 um den Winkel φ im Sinne des Uhrzeigers gedreht, bis er die Lage $A'B'$ einnimmt. Der Radius M_1B_1 ist a_1 . Dann wird er um M_2 ebenfalls um den Winkel φ , aber entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers in die Lage A_1B_1 gedreht, so daß nun $A_1B_1 \neq AB$ ist.

Die Lage von M_1 und M_2 ist gleichgültig, solange M_1 , B' und M_2 auf einer Geraden liegen. Bei sehr kleinem φ , also einer Elementarschiebung, ist $M_1M_2 \perp BB_1$. Ferner ist, wenn die Elementarschiebung in der sehr kleinen Zeiteinheit dt vor sich geht,

$$BB_1 = a_1 \frac{d\varphi}{dt} + a_2 \frac{d\varphi}{dt} = a \frac{d\varphi}{dt} = a \omega = v_s.$$

Die Elementarschiebung mit der Geschwindigkeit v_s kann also aufgefaßt werden als gleichzeitige, aber entgegengesetzt gerichtete Drehungen mit der Winkelgeschwindigkeit ω um 2 Pole, deren Verbindungslinie auf der Schiebungsrichtung senkrecht steht und deren Abstand a voneinander durch die Gleichung

$$a \omega = v_s$$

bestimmt ist. Die Schiebungsgeschwindigkeit v_s kann demnach dargestellt werden durch zwei entgegengesetzt gerichtete, parallele und gleiche Drehvektoren von der Größe ω , die den Abstand a voneinander haben. Das Vektorenpaar kann beliebig verschoben werden, wenn nur die Ebene der Vektoren zu sich selbst parallel bleibt. (Die beiden Vektoren verhalten sich also wie die Kräfte eines Kräftepaars.)

Erfährt ein Körper gleichzeitig Elementarverschiebungen und Elementardrehungen, so sind die Drehungsvektoren und die Vektorpaare wie Kräfte zusammenzusetzen. Der resultierende Vektor bzw. das resultierende Vektorpaar kennzeichnen den resultierenden Bewegungszustand.

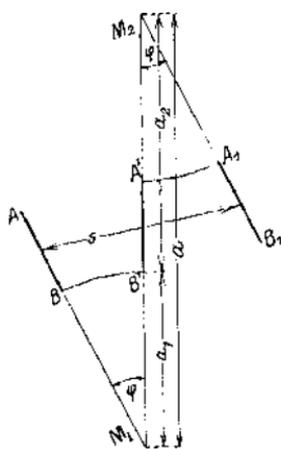


Fig. 39.

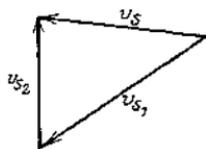


Fig. 40.

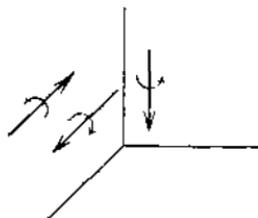


Fig. 41.

Das Resultat der Zusammensetzung ist allgemein ein Vektorpaar (Schiebung) und ein zur Ebene senkrechter Einzelvektor (Drehung), also eine Schraubung. Spezialfälle sind folgende:

Zwei Schiebungen v_{s1} und v_{s2} ergeben eine Schiebung $v_s = v_{s1} + v_{s2}$. Die Schiebungsvektoren sind geometrisch zu addieren. (Fig. 40.)

Drehung + Schiebung. a) Die Schiebung erfolge parallel zur Drehachse. Das Resultat ist eine Schraubung. (Fig. 41.)

Beispiel: Bewegung einer Schiffsschraube. Es ist nicht möglich, diese Bewegung auf eine einfachere zurückzuführen.

b) Die Schiebung erfolge senkrecht zur Drehachse. Die Schiebung werde dargestellt durch das Drehvektorenpaar $\pm \omega_1$ mit dem Abstand a , die Drehung durch den Vektor ω_2 .

Die drei Vektoren werden wie Kräfte zusammengesetzt. Die Größe der resultierenden Drehung ist $\omega_r = \omega_2$; die Lage der Achse ergibt sich graphisch aus Fig. 42 und 43. Analytisch ergibt sich die Entfernung vom Vektor ω_2 aus der Bedingung, daß die Summen der Momente der Vektoren bezogen auf den resultierenden Vektor gleich Null sein müssen. Ist die Entfernung zwischen ω_2 und $+\omega_1$ gleich b , so ist

$$-\omega_1(a + b - x) + \omega_1(b - x) + \omega_2 \cdot x = 0,$$

$$x = \frac{a \cdot \omega_1}{\omega_2} = \frac{v_s}{\omega_2}$$

Beispiel: In Fig. 44 werde eine Schubstange mit der Geschwindigkeit v_s durch die feststehenden Lager nach rechts verschoben, während eine Schubstange um die Achse A mit der Winkelgeschwindigkeit ω_2 links herum gedreht wird. Es ist die Achse der resultierenden Drehung zu finden.

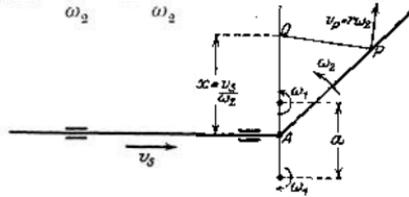


Fig. 44.

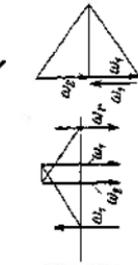


Fig. 45.

v_s kann ersetzt werden durch ein Drehungspaar ω_1 mit dem Abstand a , und die Achsen können so gelegt werden, daß sie zur Achse A parallel sind und mit ihr in einer Ebene liegen. Dann liegt die resultierende Achse O ebenfalls in dieser Ebene und ihre Lage ergibt sich zeichnerisch nach Fig. 45. Analytisch findet man den Abstand x der resultierenden Achse O von A zu $x = \frac{v_s}{\omega_2}$.

c) Die Schiebung sei schräg gegen die Drehachse gerichtet. Dann kann man die Drehung in eine zur Schiebung senkrechte und eine dazu parallele Komponente zerlegen. Die erste Komponente ergibt nach b) eine Verlegung der Drehachse, die zweite nach a) eine Schraubung. Das Resultat ist also eine Schraubung um die neue Drehachse.

Zwei Drehungen. In jedem Falle ist das Moment der resultierenden Drehung in bezug auf irgendeinen Punkt gleich der Summe der Momente der einzelnen Drehungen.

a) Die Achsen A_1 und A_2 der Drehungen ω_1 und ω_2 seien parallel und gleichgerichtet, Fig. 46 und 47. Der Abstand der Achsen sei a . Die resultierende Drehung hat die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \omega_1 + \omega_2$, ihre Achse liegt zwischen A_1 und A_2 , und zwar ist

$$a_1 = a \frac{\omega_2}{\omega} \text{ und } a_2 = a \frac{\omega_1}{\omega}.$$

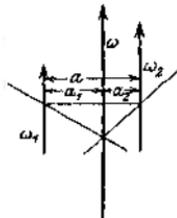


Fig. 46.

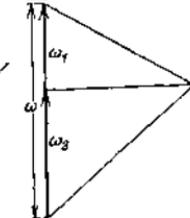


Fig. 47.

In Fig. 48 rotiere BC um B mit ω_2 , $AB = a$ um A mit ω_1 im selben Drehsinne. Die resultierende Bewegung ist eine Drehung um eine Achse auf AB , und zwar zwischen A und B im Abstände $a_1 = a \frac{\omega}{\omega_1 + \omega_2}$ von A .

b) Wenn die Drehvektoren parallel, aber entgegengesetzt gerichtet sind (Fig. 49), dann ist

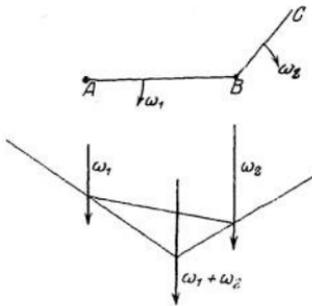


Fig. 48.

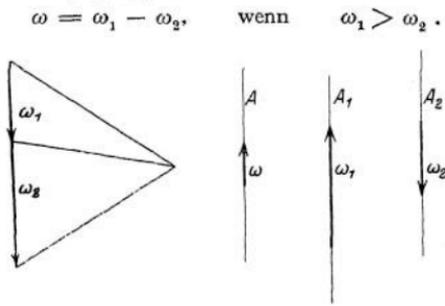


Fig. 49.

Die Achse A der resultierenden Drehung liegt außerhalb der beiden Achsen A_1 und A_2 , und zwar auf der Seite der größeren.

Es ist wiederum

$$a_1 = a \frac{\omega_2}{\omega}; \quad a_2 = a \frac{\omega_1}{\omega}.$$

Wenn $\omega_1 = \omega_2$ ist, so ergibt sich ein Drehungspaar, also eine Schiebung senkrecht zur Ebene des Vektorpaares.

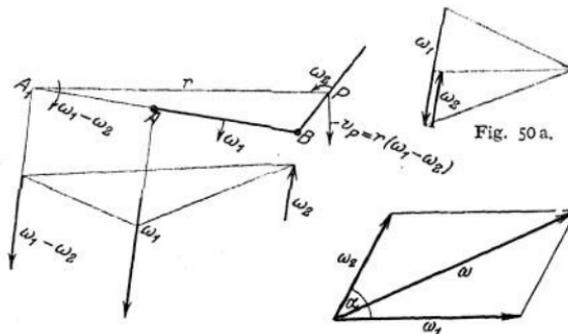


Fig. 50.

Fig. 50 a.

Fig. 50 b.

$a_1 = a \frac{\omega_2}{\omega}$. Sind die Winkelgeschwindigkeiten gleich, so erfolgt eine Parallelverschiebung von BP .

c) Wenn sich die Drehachsen schneiden (Fig. 50 b), so ist der resultierende Drehvektor die geometrische Summe der Einzelvektoren und geht durch deren Schnittpunkt.

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2\cos\alpha}.$$

Beispiel (Fig. 51 a bis 51 d): Drei gleiche Kegelräder a , b und c mit dem mittleren Radius r sitzen auf den Wellen I , II und III . Die Welle III kann sich um die Achse $I - II$, das Rad c also sowohl um die Achse III als auch um die Achse I drehen. a habe die Winkelgeschwindigkeit ω_a , b entsprechend ω_b . Die Winkelgeschwindigkeit ω_c ist zu finden und anzugeben, mit welcher Winkelgeschwindigkeit c um die Achse III und mit welcher es um die Achse I rotiert.

Die Umfangsgeschwindigkeit von b , welche nach Richtung und Größe auf c übertragen wird, ist $v_b = r\omega_b$ und steht senkrecht zur Ebene des Papiers mit der Pfeilspitze nach oben. Da der Radumfang von M die Entfernung $r\sqrt{2}$ hat, so ist die Winkelgeschwindigkeit des Radumfanges $\frac{v_b}{r\sqrt{2}} = \frac{\omega_b}{\sqrt{2}}$ und der diese Winkelgeschwindigkeit darstellende Vektor zeigt nach rechts oben, wenn ω_b nach oben zeigt wie in Fig. 51 a. Andererseits erfährt c auch einen Antrieb von a , und zwar wird ihm eine Winkelgeschwindigkeit um M von der Größe $\frac{\omega_a}{\sqrt{2}}$ erteilt, deren

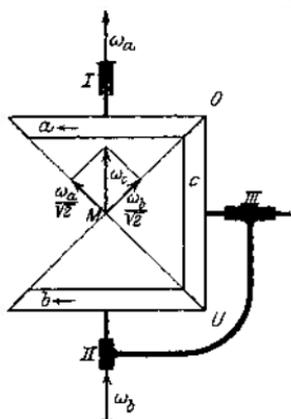


Fig. 51 a.

Vektor nach links oben zeigt, wenn ω_a nach oben gerichtet ist. Die geometrische Summe der auf c einwirkenden Winkelgeschwindigkeiten ergibt sich als ω_c , die nach Fig. 51 a in der Richtung der Achse I fällt und gleich $\omega_c = \omega_b$ ist. Sind also die Umdrehungszahlen und der Drehsinn von a und b gleich, so rotiert c mit gleicher Tourenzahl um die gemeinsame Achse I . Das Ganze verhält sich wie ein starrer Körper.

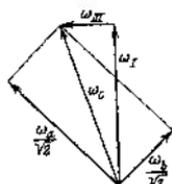


Fig. 51 b.

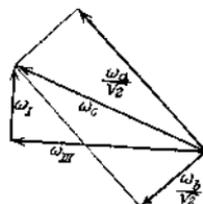


Fig. 51 c.

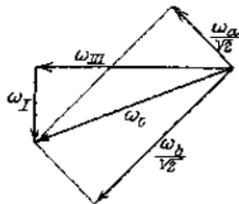


Fig. 51 d.

Ist dagegen $\omega_a > \omega_b$, so ergibt die Zusammensetzung ein ω_c , das wie in Fig. 51 b nach links oben gerichtet ist. Die vertikale Komponente von ω_c , also ω_I , gibt die Winkelgeschwindigkeit an, mit der sich c samt Welle III um die Achse I dreht, während ω_{III} die Drehung von c um die Achse III angibt. c dreht sich um III von M aus und um I von a aus gesehen im Sinne des Uhrzeigers. Ist ω_b entgegengesetzt gerichtet wie ω_a und dabei kleiner, so erfolgt die Zusammensetzung nach Fig. 51 c. c dreht sich rasch um III und langsam um I , im gleichen Sinne wie vorher. Ist aber $\omega_b > \omega_a$ und entgegengesetzt, so ergibt sich nach Fig. 51 d ω_{III} wie vorher, aber ω_I ist entgegengesetzt, also rotiert c , von oben (a) gesehen, entgegen dem Uhrzeigersinn. Man sieht leicht ein, daß, wenn $\omega_a = \omega_b$ und entgegengesetzt ist, ω_I zu Null, während $\omega_{III} = \omega_a = \omega_b$ wird, so daß also die Achse III festliegt und c nur um diese rotiert.

d) Wenn sich die Drehachsen kreuzen, so kann man eine Drehachse so parallel mit sich selbst verschieben, daß sie die andere schneidet; doch ist dann ein Vektorpaar (also eine Verschiebung) von der Größe $\omega \cdot a$ hinzuzufügen, wenn a die Verschiebung des Vektors ω senkrecht zu seiner Richtung gemessen, bedeutet.

In Fig. 52 sind ω_1 und windschief dazu ω_2 gegeben. Durch den Punkt A von ω_1 zieht man den Vektor ω'_2 gleich und parallel ω_2 und in entgegengesetzter Richtung den Vektor $-\omega'_1$. Der Zustand ist dann zurückgeführt auf die sich schneidenden Drehvektoren ω_1 und ω'_2 und das Vektorpaar $\omega_2 \cdot a$ (Schiebung). ω_1 und ω'_2 setzen sich zu ω , zusammen. Damit ist der Zustand völlig bestimmt.

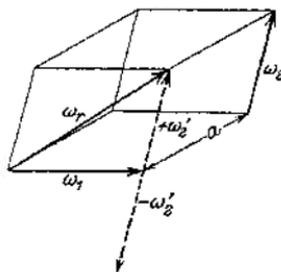


Fig. 52.

c) Kinematische Geometrie.

1. Bewegung eines Stabes.

Um den Stab AB (Fig. 53) in die Lage $A'B'$ zu bringen, kann man ihn zunächst parallel zu sich selbst nach $A''B'$ verschieben und dann um B' um α in

die Lage $A'B'$ drehen. Sind a und b die Verschiebungen von A und B , so ist a die geometrische Summe von b und der Sehne über dem Bogen $A''A'$.

Die Verschiebung des Punktes C (Fig. 54) auf der Geraden AB nach C' kann man finden, indem man AB' zieht und ferner $CD \neq BB$ und $DC' \neq AA'$.

Besitzt der Punkt A die Geschwindigkeit v_a , Punkt B die Geschwindigkeit v_b , so kann man sich v_a entstanden denken als geometrische Summe von v_b und einer senkrecht zu AB stehenden Drehgeschwindigkeit $v_n = l \cdot \omega$ (Fig. 55). Punkt A erfährt also die gleiche Verschiebungsgeschwindigkeit wie B und außerdem noch eine Winkelgeschwindigkeit um B . Ist v_a um $\angle \alpha$, v_b um $\angle \beta$ gegen AB geneigt, so ist, da eine Längenänderung von AB nicht eintreten darf,

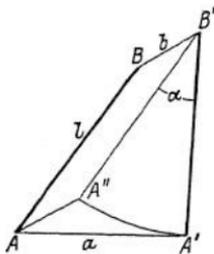


Fig. 53.

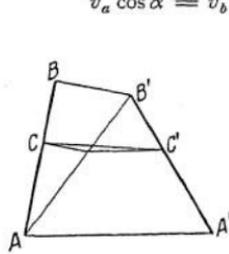


Fig. 54.

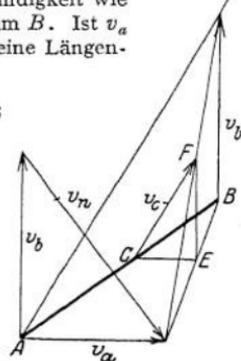


Fig. 55.

Ist v_b und die Richtung von v_a bekannt, so läßt sich die Größe v_a bestimmen und umgekehrt.

Um die Geschwindigkeit von C zu finden, verbindet man die Pfeilspitzen von v_a und v_b miteinander, zieht $CE \neq v_a$ und $EF \neq v_b$, dann ist $CF = v_c$.

Dreht sich der Stab AB (Fig. 56 u. 56 a) um den ruhenden oder gleichförmig bewegten Punkt B mit $v_n = l\omega$, so erfährt Punkt A die Beschleunigung $p_n = l\omega^2$. Ist die Drehbewegung nicht gleichförmig, sondern erfolgt mit einer Winkelbeschleunigung E , so kommt eine Beschleunigung $p_t = lE$ hinzu. Erfährt außerdem der Punkt B eine Beschleunigung p_B , so ist die gesamte Beschleunigung des Punktes $A = p_A = p_n + p_t + p_B$. Die Beschleunigung des auf der Geraden AB liegenden Punktes C findet man nach Fig. 57.

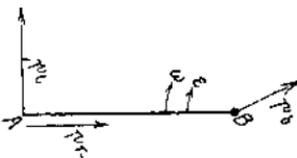


Fig. 56.

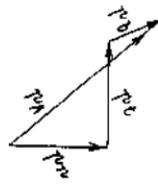


Fig. 56 a.

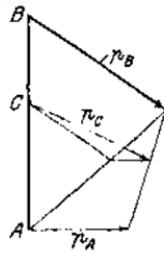


Fig. 57.

2. Bewegung einer Ebene.

Bewegt sich eine Ebene E (Fig. 58) so gegen eine ruhende Ebene E_r , daß die Punkte A und B die Geschwindigkeiten v_a und v_b haben, so kann man den augenblicklichen Bewegungszustand als eine Drehung um einen Pol P auffassen, der als Schnittpunkt der in A und B auf v_a und v_b errichteten Lote bestimmt ist. Die

Winkelgeschwindigkeit berechnet sich zu $\omega = \frac{v_a}{r_a} = \frac{v_b}{r_b} = \text{tg } \varphi$. Die Geschwindigkeit jedes anderen Punktes C der Ebene ist der Größe nach $v_c = r_c \omega$ und ist senkrecht zu dem Strahl PC gerichtet.

Verändert die Ebene E ihre Lage, so wird auch im allgemeinen der augenblickliche Drehpunkt ein anderer werden. Markiert man nun in jedem Augenblick die Stellung der Punkte A, B usw. auf der ruhenden Ebene E_r , so erhält man eine entsprechende Anzahl von Punktbahnen. So in Fig. 59 die Punktbahnen α und β der Punkte A und B ; etwa in E enthaltene Kurven beschreiben Hüllbahnen. Markiert man die augenblicklichen Drehpunkte auf beiden Ebenen, so erhält man auf der bewegten Ebene die Polkurve (Gangpolbahn) (p_g in Fig. 59) und auf der ruhenden die Polbahn (Rastpolbahn [p_r in Fig. 59] Leitkurve). Letztere ist die Hüllkurve der ersteren.

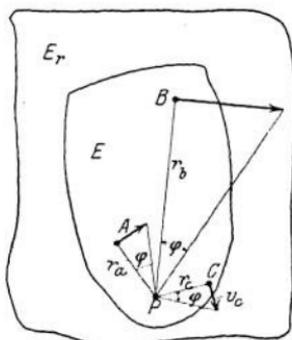


Fig. 58.

Bei der Bewegung rollt die Polkurve auf der Polbahn ohne zu gleiten. Es fallen also in Fig. 59 nacheinander p_{g1} und p_{r1} , p_{g2} und p_{r2} usw. aufeinander. Sind die aufeinanderfolgenden Lagen der Geraden AB bekannt, so erhält man die p_r -Punkte durch Errichten von Loten auf der Punktbahn, die p_g -Punkte durch Rückübertragung der Dreiecke auf die Anfangslage von AB . Also z. B. ist $\triangle AB p_{g4} \cong \triangle A_4 B_4 p_{r4}$.

Häufig ist es zweckmäßig, den die Geschwindigkeit darstellenden Vektor nicht in Richtung, sondern um 90° im Sinne des Uhrzeigers gedreht aufzutragen. Man nennt diesen Vektor senkrechte Geschwindigkeit. In Fig. 60 stellten AV_A und BV_B die

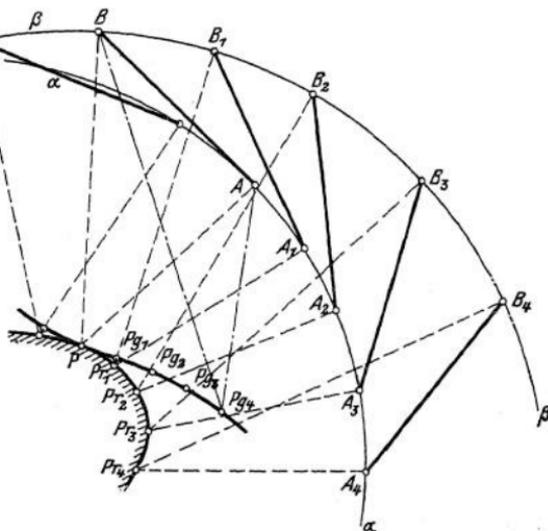


Fig. 59.1)

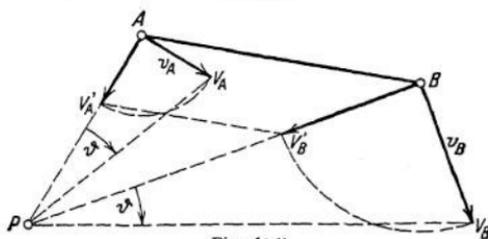


Fig. 60.1)

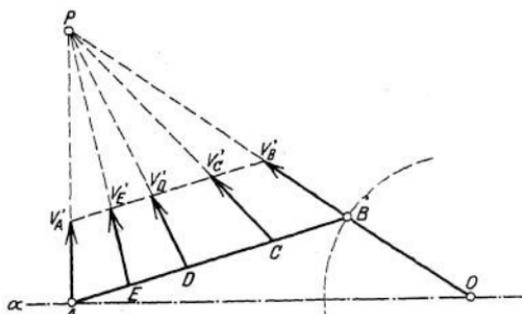


Fig. 61.1)

1) Aus Christmann-Baer, Grundzüge der Kinematik. Berlin 1910, Julius Springer.

wahren Geschwindigkeiten von A und B dar, AV'_A und BV'_B die senkrechten. $\dot{\theta}$ ist die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich die AB enthaltende Ebene um P dreht. Die Endpunkte der senkrechten Geschwindigkeiten einer Geraden liegen auf einer zu ihr parallelen Geraden.

Beispiel. In Fig. 61 bewege sich Punkt A in Richtung AO , B rotiere mit der bekannten Geschwindigkeit V_B um O . Es sind die Geschwindigkeiten der Punkte A , E , D und C zu bestimmen. Da $V_B \perp BO$, liegt der momentane Drehpol in der Verlängerung von OB , ferner liegt P auf der Senkrechten in A auf AO . Trägt man auf PB die Strecke V'_B (die senkrechte Geschwindigkeit von B) auf, so schneidet sie durch den Endpunkt von V_B zu AB gezogene Parallele auf den Strahlen PC , PD , PE und PA die zugehörigen senkrechten Geschwindigkeiten ab. Die wahre Geschwindigkeit z. B. von Punkt E findet man durch Drehen der Strecke V'_E entgegen dem Sinne des Uhrzeigers.

3. Bewegung zweier Ebenen.

Dreht sich die Ebene E_2 (Fig. 62) gegen die ruhende Ebene E_1 mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{21} um den Pol P_{12} und die Ebene E_3 gegen E_2 mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{32} um den Pol P_{23} , so ist die wahre Bewegung der Ebene E_3 eine Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_{31} = \omega_{21} + \omega_{32}$ um einen Pol P_{13} . Dieser Pol P_{13} liegt auf der Geraden $\overline{P_{12}P_{23}}$ und teilt diese Strecke so, daß

$$\overline{P_{13}P_{12}} : \overline{P_{13}P_{23}} = \omega_{32} : \omega_{21}$$

und zwar liegt der resultierende Pol innerhalb der Strecke $\overline{P_{12}P_{23}}$, wenn ω_{12} und ω_{23} gleichgerichtet, außerhalb, wenn sie entgegengesetzt gerichtet sind. In jedem Fall liegt der resultierende Pol näher an dem Pol, zu welchem die größere Winkelgeschwindigkeit gehört. (Siehe auch S. 227.)

4. Kinematische Kette.

Unter einer kinematischen Kette versteht man die Verbindung mehrerer Körper zu einem Getriebe, z. B. Kurbeltrieb, Riementrieb, Steuerungen usw. Das am häufigsten vorkommende kinematische Getriebe ist die Vierzylinderkette. Sie besteht aus mehreren Stäben, die durch 4 Gelenke von prismatischer Form miteinander verbunden sind. Steht die Achse des Gelenkes senkrecht zur Ebene des Getriebes, so ist es ein Drehgelenk, liegt sie in der Ebene, so ist es eine Geradföhrung.

Um den Bewegungszustand einer solchen Kette festzustellen, kann man die Beziehungen benutzen, die unter c) auseinandergesetzt worden.

Beispiel. Die Vierzylinderkette, Fig. 66, besteht aus 4 Stäben S_0 , S_1 , S_2 und S_3 , die miteinander durch Gelenke verbunden sind. S_0 sei in Ruhe. Die relativen Pole P_{10} , P_{21} , P_{32} , P_{30} liegen in den Gelenken, da ja die Drehungen nur um diese stattfinden können. Der Pol P_{13} muß nach dem vorstehenden Satze einerseits auf der Geraden $\overline{P_{10}P_{30}}$ bzw. auf der Verlängerung liegen, andererseits auf der Verlängerung von $\overline{P_{21}P_{32}}$, also auf dem Schnittpunkt der beiden Geraden. Die relative Bewegung des Stabes S_1 gegen S_3 kann aufgefaßt werden als eine momentane Drehung um den Pol P_{13} , der mit dem Stab S_3 fest verbunden zu denken ist. Ebenso findet man P_{20} als den momentanen Drehpol der Stäbe S_2 und S_0 .

Ist, wie in Fig. 67, ein Drehgelenk durch eine Geradföhrung ersetzt, so liegt der Pol P_{30} auf dem Lot auf S_0 und zwar in unendlicher Entfernung. Den Pol P_{31} findet man als Schnittpunkt der Verlängerung von $\overline{P_{32}P_{21}}$ mit der Parallelen durch P_{10} zu dem vorgenannten Lot. Daran wird auch nichts geändert, wenn die Länge von S_3 zu Null wird.

Man kann aber auch mit Vorteil die unter a) angegebenen Beziehungen benutzen, insbesondere dann, wenn es sich um Beschleunigungen handelt.

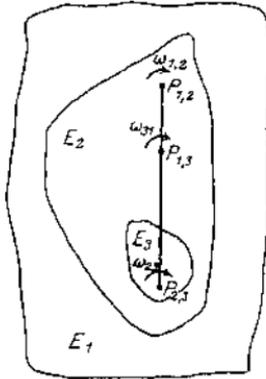


Fig. 62.

Beispiel (Fig. 63): Die Geschwindigkeit v_c des Punktes ist bekannt, gesucht wird v_D . Die Richtung von v_D kann nur senkrecht zu AD sein. Man zeichnet

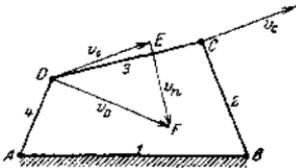


Fig. 63.

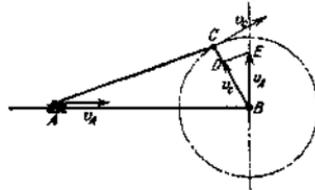


Fig. 64.

DE gleich und parallel v_c und fällt von E das Lot auf DC , das die Strecke $DF = v_D$ abschneidet. $EF = v_n$ ist die relative Drehgeschwindigkeit von D gegen C . Beim normalen Kurbeltrieb (Fig. 64) wird das Gelenk A zu einer Geradföhrung und die Länge des Stabes zu Null. Dann hat v_A stets die Richtung AB . Man kann hier die Konstruktion nach Maßgabe der Fig. 64 etwas vereinfachen. Man zeichnet $BD = v_c$, zieht $DE \parallel AC$, dann ist $BC = v_A$.

Beispiel: Der Geschwindigkeitszustand der Vierzylinderkette (Fig. 65) ist gegeben; also v_c und v_D sind bekannt, ferner auch die Beschleunigung b_c des Punktes C . Gesucht ist die Beschleunigung b_D des Punktes D .

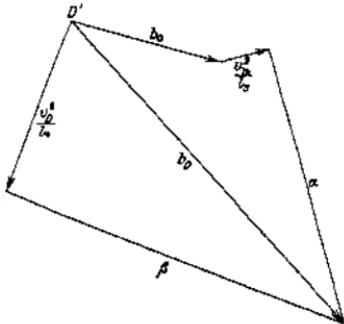
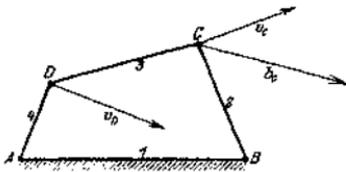


Fig. 65.

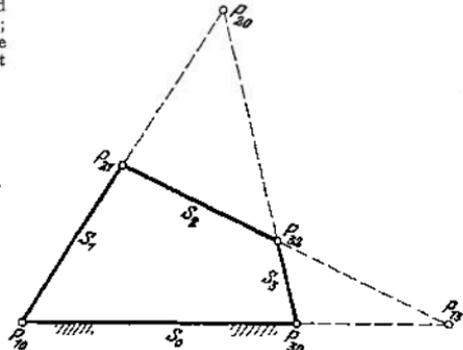


Fig. 66.

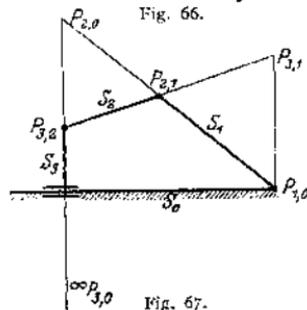


Fig. 67.

Punkt D gehört zum Stabe DC . Demnach setzt sich seine Beschleunigung zusammen aus b_c , einer radialen nach C gerichteten Komponente $\frac{v_n^2}{l_2}$, wobei v_n die Drehgeschwindigkeit von D relativ zu C und l_2 die Länge CD darstellt, und einer senkrecht zu CD gerichteten Komponente. Letztere ist ihrer Größe nach unbekannt. Fügt man also in Fig. 65 unten b_c und $\frac{v_n^2}{l_2}$ nach Richtung und Größe aneinander und errichtet im Endpunkt von $\frac{v_n^2}{l_2}$ das Lot α , so ist dieses ein geometrischer Ort für den Endpunkt des Vektors b_D , der Beschleunigung von D . — Andererseits ist D ein Punkt der Geraden AD . Als solcher besitzt er eine radiale, nach A hin gerichtete

Beschleunigung $\frac{v_D^2}{l_4}$, wegen der Drehgeschwindigkeit v_D gegen A , sowie eine senkrecht zu AD gerichtete Komponente, da die Drehung des Stabes eine beschleunigte ist. Legt man also an D' in Fig. 65 $\frac{v_D^2}{l_4}$ und errichtet im Endpunkte das Lot β , so ist auch dieses ein Ort für den Endpunkt von b_D ; demnach ist b_D die Verbindungslinie von D' mit dem Schnittpunkte von α und β .

Beim normalen Kurbeltrieb werden die Verhältnisse insofern einfacher, als die Richtung von b_D von vornherein fest liegt, da sie nur die Richtung der Geradföhrung haben kann. Die beiden Geraden $\frac{v_D^2}{l_4}$ und β kommen in Fortfall.

Bezüglich der auftretenden Kräfte siehe S. 262.

B. Physikalische Mechanik.

I. Allgemeine Gesetze.

Dynamisches Grundgesetz (Newton):

Kraft = Masse \times Beschleunigung

$$P = m \phi = m \frac{dv}{dt}.$$

Wirkt auf einen Körper eine Kraft P ein, und kann der Körper seinen Bewegungszustand ändern, so erfährt er eine gleichförmige Beschleunigung, welche die Richtung der Kraft hat und ihr proportional ist. Befindet sich ein Körper in beschleunigter Bewegung, so steht er unter dem Einfluß einer Kraft.

Ist $P = 0$, so erfährt der Körper auch keine Beschleunigung, er verharrt in dem Bewegungszustand, in dem er sich befindet, d. h. er bleibt in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung. (Trägheitsgesetz des Galilei.) Wirken auf einen Körper mehrere Kräfte ein, so lassen sie sich in ihrer beschleunigenden Wirkung durch eine resultierende Kraft ersetzen.

Befindet sich ein Körper in gleichförmiger Bewegung (die Ruhe ist nur ein Sonderfall mit $v = 0$), so wirkt auf ihn keine Kraft ein oder aber mehrere Kräfte, deren beschleunigende Gesamtwirkung gleich Null ist; der Körper befindet sich im Gleichgewicht. Befestigt man einen Körper, auf welchen eine Kraft (Actio) einwirkt, derart, daß er seinen Bewegungszustand nicht ändern kann, also im Gleichgewicht bleibt, so übt die Befestigung auf den Körper eine Kraft (Reactio) aus, welche die Wirkung der ersten Kraft (Actio) aufhebt. Eine Kraft aber, welche die Wirkung einer andern aufhebt, ist dieser gleich und entgegengesetzt gerichtet.

Actio = Reactio (Newton).

Die Reaktion einer Kraft wird dazu benutzt, die Kraft auszuwägen, ihre Größe zu bestimmen. Wirken auf einen Körper eine oder mehrere Kräfte ein, so erfährt er im allgemeinen eine Formänderung, es werden in ihm Spannungen hervorgerufen.

Zwei Kräfte, die nicht an demselben Punkt angreifen, lassen sich bezüglich der von ihnen hervorgerufenen Spannungen und Formänderungen nicht durch eine resultierende Kraft ersetzen.

Eine Kraft ist bestimmt, wenn ihre Größe, Richtung, Wirkungslinie und Angriffspunkt bekannt sind. Kann der Körper als starr betrachtet werden, d. h. kommt es für die in Frage kommende Aufgabe auf die Formänderung nicht an, so ist die Angabe des Angriffspunktes nicht erforderlich.

Ist die Kraft, die auf einen Körper ausgeübt wird, bekannt, ebenso die Beschleunigung, die er unter dem Einfluß dieser Kraft erfährt, so bestimmt sich seine Masse nach der Gleichung

$$m = \frac{P}{\phi}.$$

Erfahren zwei Körper unter dem Einfluß gleicher Kräfte gleiche Beschleunigungen, so sind ihre Massen gleich.

Bekannt ist die Kraft, mit welcher die Erde einen Körper auf ihrer Oberfläche anzieht, sie ist das Gewicht G des Körpers. Es wird gemessen durch den Druck des Körpers auf seine Unterlage oder die Spannkraft des Fadens, an dem er aufgehängt wird, und zwar im luftleeren Raum. Bekannt ist ferner die Beschleunigung, die der Körper unter dem Einfluß der Schwerkraft beim freien Fall erfährt. Die Beschleunigung des freien Falles ist im mittleren Deutschland

$$\underline{g = 9,81 \text{ m/sek}^2}.$$

Die Masse eines Körpers ist demnach

$$m = \frac{G}{g}.$$

Die Masse eines Körpers ist unveränderlich, welchen physikalischen Veränderungen er auch ausgesetzt werden mag.

An verschiedenen Stellen der Erde ist das Gewicht desselben Körpers verschieden (nur durch Federwage festzustellen), in demselben Maße ändert sich auch die Erdbeschleunigung, so daß der Quotient aus Gewicht und Beschleunigung konstant bleibt.

Die Erdbeschleunigung ist

$$\begin{aligned} \text{am Äquator } g_a &= 9,781 \text{ m/sek}^2, \\ \text{am Pol } g_p &= 9,831 \text{ m/sek}^2. \end{aligned}$$

Die Erdbeschleunigung und damit das Gewicht ändern sich auch mit der Entfernung von der Oberfläche. Beide werden mit größerer Höhe oder größerer Tiefe kleiner.

Wirkt eine Kraft P auf einen Körper ein, der in einer Bahn geführt wird, die um den Winkel α gegen die Kraft geneigt ist (Fig. 68), so läßt sich P zerlegen in $P_1 = P \cos \alpha$ und $P_2 = P \sin \alpha$, von denen P_1 in die Richtung der Bahn fällt und P_2 senkrecht zu ihr steht. P_2 wird durch die Reaktion der Bahn aufgenommen, P_1 ruft die Beschleunigung p hervor. Demnach ist

$$\begin{aligned} P \cos \alpha &= m p, \\ p &= \frac{P \cos \alpha}{m}. \end{aligned}$$

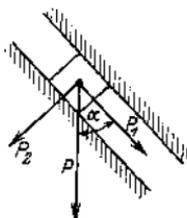


Fig. 68.

Die Einheit der Kraft ist im technischen Maßsystem das kg (Gewicht).

Die Einheit der Masse wird dargestellt durch einen Körper, dessen Gewicht in kg gleich der Erdbeschleunigung in m/sek² ist, sie ist also die Masse eines Körpers von 9,81 kg Gewicht.

$$\text{Die Dimension der Masse ist } \frac{\text{Kraft}}{\text{Beschleunigung}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{sek}^2}{\text{m}}.$$

Im physikalischen Maßsystem wird die Masse als Grundlage angenommen. Die Masseneinheit ist die Masse eines Körpers vom Gewicht eines Grammes, das Massengramm g . Die Einheit der Kraft ist die Dyne, diejenige Kraft, welche der Masse 1 g die Beschleunigung 1 cm/sek² erteilt. Die Dimension der Kraft ist $\frac{g \cdot \text{cm}}{\text{sek}^2}$.

Da 1 Kraftgramm der Masse 1 g die Beschleunigung 981 cm/sek² erteilt, so ist

$$\begin{aligned} 1 \text{ Kraftgramm (g)} &= 981 \text{ Dynen,} \\ 1 \text{ kg} &= 981 \text{ 000 Dynen,} \\ 1 \text{ Dyne} &= 0,00102 \text{ g.} \end{aligned}$$

Wirken auf einen Körper mehrere Kräfte P_1, P_2, P_3 usw. ein, so ist

$$P_1 + P_2 + P_3 + \dots = m p.$$

Besonders häufig liegen die Kräfte in einer Wirkungslinie, dann wird

$$P_1 + P_2 + P_3 + \dots = m p.$$

Sind nicht alle parallelen Kräfte gleichgerichtet, so kann man die mit positivem und die mit negativem Vorzeichen zusammenfassen, so daß man erhält:

$$P - W = m \dot{p} .$$

Die mit dem negativen Vorzeichen behaftete Kraft W ist vorzugsweise der Reibungswiderstand. Man kann die letzte Gleichung auch schreiben

$$P = W + m \dot{p} ,$$

d. h. die positiv gerichtete Kraft setzt sich aus 2 Teilen zusammen, von denen der eine zur Überwindung der entgegenstehenden Kräfte (Widerstände), der andere zur Beschleunigung der Massen dient.

Da sich die Größe $m \cdot \dot{p}$ wie ein Widerstand verhält, bezeichnet man sie auch als Trägheitswiderstand. Gibt man dieser Trägheitskraft die Bezeichnung T , so ist allgemein

$$P_1 + \rightarrow P_2 + \rightarrow P_3 + \rightarrow \dots = T$$

oder

$$P_1 + \rightarrow P_2 + \rightarrow P_3 + \rightarrow \dots \rightarrow T = 0 .$$

D. h. die geometrische Summe der äußeren Kräfte und der Trägheitskraft ist gleich Null. Das Vorzeichen bzw. der Pfeilsinn der Trägheitskraft ist demjenigen der erfolgenden Beschleunigung entgegengesetzt gerichtet.

Man unterscheidet: Massenkraft, die auf jeden Massenpunkt eines Körpers einwirken (Schwerkraft, Magnetismus), und Oberflächenkräfte, die auf die Oberfläche eines Körpers einwirken, z. B. Dampfspannungen, Reibung, Druck einer Feder.

a) Arbeit.

Die Arbeit, welche die veränderliche Kraft leistet, ist

$$A = \int P ds \cos \alpha ,$$

wenn α der Neigungswinkel des Weges zur Kraftrichtung ist.

Ist P konstant, dann ist die Arbeit gleich Kraft mal Projektion des Weges auf die Kraft. In Fig. 69 ist die von P auf dem Wege s geleistete Arbeit gleich $P \int ds \cdot \cos \alpha$. Dabei kommt es auf die Form der Bahn s nicht an, sondern nur auf die Länge der Projektion. Die Einheit der Arbeit ist das mkg im technischen Maßsystem, im C. G. S.-System das Erg. = 1 Dyne \times 1 cm.

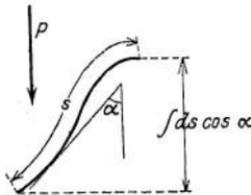


Fig. 69.

Haben Kraft und Projektion des Weges dieselbe Richtung, so ist die Arbeit positiv, sind sie entgegengesetzt, so ist sie negativ. Arbeit ist eine skalare Größe.

Wirken auf einen Körper mehrere Kräfte ein, so ist die Gesamtarbeit gleich der Summe der Arbeiten der Einzelkräfte.

Wirken auf einen Körper zwei gegeneinander geneigte Kräfte P_x und P_y ein und ist die Projektion des Weges in Richtung von P_x gleich x und in Richtung von P_y gleich y , so ist die Arbeit

$$A = P_x \cdot x + P_y \cdot y ,$$

bzw. wenn die Kräfte veränderlich sind

$$dA = P_x dx + P_y dy .$$

Zu beachten, namentlich bei gekrümmten Bahnen, ist, daß die Reibung stets dieselbe Richtung wie die Geschwindigkeit hat, ihr aber entgegengesetzt ist.

Beispiel: 1. Ein Körper von 100 kg Gewicht gleitet eine 100 m lange, glatte schiefe Ebene herab und nähert sich dabei um 4 m dem Erdboden. Welche Arbeit wird geleistet?

Auf den Körper wirkt sein Gewicht mit 100 kg vertikal und die Reaktion der schiefen Ebene, welche senkrecht zu ihr steht. Die Reaktion leistet keine Arbeit, da die Projektion des Weges auf sie gleich Null ist. Die Projektion des Weges auf das Gewicht ist 4 m. Also ist die Arbeit der Schwerkraft $A_g = 100 \cdot 4 = 400$ mkg.

2. Die Bedingungen der Aufgabe seien die gleichen, doch werde die Last durch einen zur Ebene parallelen Faden mit gleichförmiger Geschwindigkeit nach oben gezogen. Auf den Körper wirken ein: die nach oben gerichtete Spannkraft des Fadens S , das Gewicht 100 kg und der Reaktionsdruck der Ebene.

$$S = 100 \sin \alpha = 100 \cdot \frac{4}{100} = 4 \text{ kg.}$$

Die Arbeit der Spannkraft im Faden, die nach oben gerichtet ist, ist

$$A_f = S/\text{kg} \cdot 100 \text{ m} = +4 \cdot 100 \text{ mkg.}$$

Die Arbeit der Schwerkraft ist, da die Bewegung ihr entgegengesetzt gerichtet ist,

$$A_g = -100 \text{ kg} \cdot 4 \text{ m} = -400 \text{ mkg.}$$

Die Arbeit des Reaktionsdruckes ist gleich 0. Da der Körper sich im Gleichgewicht befindet, ist die Resultierende aller Kräfte gleich Null, also auch ihre Arbeit gleich Null. Es ist

$$A_f + A_g = 0 = +400 - 400.$$

3. Auf einen Körper wirke eine Kraft $P = P_0 \sin \alpha$. Welche Arbeit leistet die Kraft, wenn der Körper in ihrer Richtung um den Betrag x verschoben wird?

$$dA = P dx = P_0 \sin \alpha dx$$

$$A = P_0 \int_0^x \sin \alpha dx = P_0 (-\cos \alpha) \Big|_0^x = x$$

$$= P_0 (-\cos \alpha + 1) = P_0 (1 - \cos \alpha).$$

Soll die Arbeit innerhalb einer bestimmten Zeit festgestellt werden, so muß der in dieser Zeit zurückgelegte Weg bzw. seine Geschwindigkeit gegeben sein. Ist sowohl v als auch P von der Zeit t abhängig, dann ist

$$A = \int_0^t P \cdot v \cdot \cos \alpha \cdot dt,$$

wenn α der Winkel zwischen den Richtungen der Kraft und der Geschwindigkeit ist.

Beispiel: Ein Körper durchlaufe eine horizontale Bahn mit der Geschwindigkeit v . Sein Gewicht sei Q , der Reibungskoeffizient μ . Welche Arbeit ist innerhalb t Sekunden aufzuwenden? Weder die Schwerkraft noch die Reaktion der Bahn leisten Arbeit, da die Projektion des Weges auf sie gleich Null ist. Die Größe der Reibung ist $R = Q \cdot \mu$.

Die von der Reibung geleistete Arbeit ist

$$A = -Q\mu \cdot \int_0^t v dt = -Q\mu \cdot s.$$

Sind die Beziehungen zwischen P und s derartig, daß sie sich nur schwer analytisch ausdrücken lassen, so kann man das Integral $\int P ds$ graphisch auswerten. Man trägt die Wege als Abszisse und die Kräfte als Ordinate auf; dann ist die Fläche zwischen der Kurve und der Abszissenachse die geleistete Arbeit. In Fig. 70 ist die vertikal schraffierte Fläche die während des Hinganges des Kolbens einer Dampfmaschine geleistete, die schräg schraffierte Fläche die während des Rückganges verbrauchte Arbeit. Die Differenz, also der Inhalt der geschlossenen Kurve ist die von der Maschine während eines Kolbenhubes geleistete Arbeit des Dampfes (indizierte Arbeit).

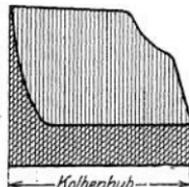


Fig. 70.

Derartige graphische Darstellungen sind auch oft dann zweckmäßig, wenn die analytischen Beziehungen einfach, aber die Bewegungsvorgänge kompliziert sind, weil die Figur ein übersichtliches Bild der Bewegung gibt.

Beispiel. Ein Laufkran vom Gewicht G soll innerhalb der Zeit t_1 aus der Ruhe auf die Geschwindigkeit v gebracht werden, diese Geschwindigkeit während der Zeit t_2 beibehalten und innerhalb t_3 Sekunden zum Stillstand gebracht werden. Der Reibungskoeffizient sei μ . Wie groß ist die aufzuwendende Arbeit?

Man trage über der Zeit als Abszissenachse die Geschwindigkeiten als Ordinaten auf. Meist genügt es, wenn die Geschwindigkeiten während der Anlaufs- bzw. der Bremsperiode als gleichförmig beschleunigt bzw. verzögert angesehen werden. In Fig. 71 ist die Beschleunigung als ungleichförmig, die Verzögerung als gleichförmig angenommen worden. In Fig. 71a sind über

der Zeitachse die Beschleunigungen $p = \frac{dv}{dt}$ aufgetragen, und zwar sind die Beschleunigungen, welche die Richtung der Bewegung haben, nach oben, die entgegengesetzten nach unten aufgetragen worden.

In Fig. 71b sind über der Zeitachse die Kräfte als Ordinaten aufgetragen, und zwar in demselben Sinne wie die Beschleunigungen. Als Kräfte wirken

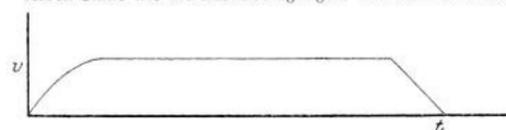


Fig. 71.

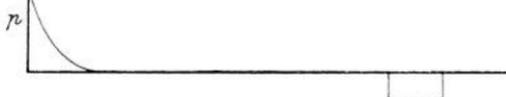


Fig. 71 a.



Fig. 71 b.

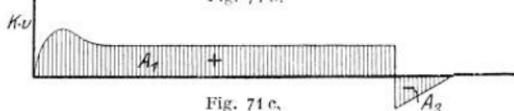


Fig. 71 c.

1. die Reibung, die konstant $G \cdot \mu$ und der Bewegung entgegengesetzt ist, 2. die Massenkräfte $P_0 = m \cdot p$, die die Richtung der Beschleunigungen haben. Da die äußeren Kräfte K sowohl die Beschleunigungen erzwingen, als auch die Reibung zu überwinden haben, müssen sie gleich Beschleunigungskraft + Reibung sein, wenn die Beschleunigung die Richtung der Geschwindigkeit hat, also beim Anfahren. Beim Bremsen unterstützt die Reibung die Verzögerung, infolgedessen ist die äußere Kraft gleich Beschleunigungskraft - Reibung.

In Fig. 71c sind über der Zeitachse die Produkte $K \cdot v$ aufgetragen, und zwar nach oben, wenn K und v gleiche, nach unten, wenn sie entgegengesetzte Richtung haben. Der Inhalt der von der Abszissenachse und der $K \cdot v$ -Kurve begrenzten Figur ist $\int K \cdot v dt$, also die für die Bewegung des Kranes aufzuwendende Arbeit. Der Inhalt setzt sich aus einem positiven (linken) Teil A_1 und einem negativen A_2 zusammen. A_2 bedeutet eine Arbeit, die nicht aufgewendet werden muß, sondern die der Kran leistet und die durch geeignete Mittel

(Rücklieferung von elektrischem Strom in das Netz, Spannen einer Feder) aufgenommen und nutzbar gemacht werden könnte. Dann wäre $A = A_1 - A_2$. Gewöhnlich aber wird A_2 abgebremst und vernichtet (in Wärme verwandelt). Dann ist die aufzuwendende Arbeit $A = A_1$.

Beschreibt der Angriffspunkt der Kraft einen Kreisbogen mit dem Radius r und der Länge $r \cdot \varphi$, so ist $A = P \cdot r \cdot \varphi$.

Da $P \cdot r$ das Moment (M) der Kraft P in bezug auf die Drehachse ist, so ist auch

$$A = M \varphi.$$

Ist P veränderlich, so ist

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M d\varphi.$$

Und da φ gleich ωdt , wenn ω die Winkelgeschwindigkeit bedeutet, so ist auch

$$A = \int_{t_0}^t M \omega dt.$$

Beispiel: Die an einer Kurbel vom Radius r angreifende Tangentialkraft sei $T = P_0 + P_1 \sin 2\alpha$, wenn α die Neigung der Kurbel gegen die Totlage ist. Welche Arbeit leistet die Maschine in 1 Sekunde, wenn sie minutlich n Umdrehungen macht?

$$A = \int_{t=0}^{t=1} T \cdot r \cdot \omega dt = \int_{\alpha=0}^{\alpha=0} T r d\alpha, \quad \alpha = \omega t,$$

$$A = \int_0^1 (P_0 r + P_1 r \sin 2\omega t) \omega dt = \left[P_0 r \omega t - \frac{P_1 r}{2} \cos 2\omega t \right]_{t=0}^{t=1} \\ = P_0 r \varphi - \frac{P_1 r}{2} \cos 2\omega + \frac{P_1 r}{2}.$$

Ist die Beziehung zwischen T und t analytisch nicht in einfacher Weise auszudrücken, so kann die Integration graphisch erfolgen. Man trägt $r \cdot \alpha$ als

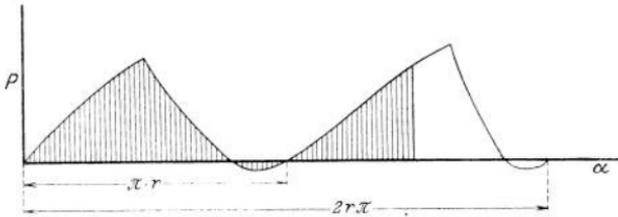


Fig. 72.

Abszisse und die zugehörigen Tangentialkräfte als Ordinaten auf. Die Fläche zwischen der Kurve und der Abszissenachse ist ein Maß für die geleistete Arbeit. In Fig. 72 stellt die schraffierte Fläche die von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \alpha$ geleistete Arbeit dar.

b) Wirkungsgrad.

Unter dem Wirkungsgrad einer Maschine oder eines Vorganges versteht man das Verhältnis der von der Maschine oder während des Prozesses geleisteten Nutzarbeit zu der der Maschine oder während des Prozesses zugeführten Arbeit. Bezeichnet man die Nutzarbeit mit N_u und die zugeführte Arbeit mit N_z , so ist der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{N_u}{N_z}.$$

N_z ist stets größer als N_u ; η ist stets kleiner als 1; $N_z - N_u$ ist die Verlustarbeit, d. h. die Arbeitsmenge, die für den technischen Zweck verloren ist, sich in Wärme oder andere Energieformen verwandelt hat.

Beispiel: Ist die einer Dampfmaschine im Zylinder zugeführte (indizierte) Arbeit N_i mkg, die gleichzeitig geleistete Nutzarbeit N_e mkg, so ist

$$\eta = \frac{N_e}{N_i}; \quad N_e = N_i \eta.$$

Ist die einem Kompressor an der Kurbelwelle zugeführte Arbeit N_e mkg, die gleichzeitig im Zylinder durch Indikator festgestellte (indizierte) Nutzarbeit N_i mkg, so ist

$$\eta = \frac{N_e}{N_i}; \quad N_e = \frac{N_i}{\eta}$$

Treibt eine Maschine I mit dem Wirkungsgrad η_1 eine Maschine II mit dem Wirkungsgrad η_2 , diese eine Maschine III usw. an, so ist der Gesamtwirkungsgrad, d. h. das Verhältnis der von der letzten Maschine geleisteten Nutzarbeit zu der der ersten zugeführten Arbeit

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \dots$$

Beispiele: 1. Ein Elektromotor mit einem Wirkungsgrad η_m treibt mittels Vorgelege, dessen Wirkungsgrad η_v , auf eine Riemenscheibe, von der ein Riemen (Wirkungsgrad η_r) eine Pumpe (η_p) antreibt. Das Verhältnis der von der Pumpe geleisteten Nutzarbeit zu der dem Motor zugeführten Arbeit ist

$$\eta = \eta_m \cdot \eta_v \cdot \eta_r \cdot \eta_p.$$

2. Ein Aufzug besitzt einen Förderkorb vom Gewicht Q kg. Seine Tragfähigkeit ist G kg. Der Wirkungsgrad des Antriebsmechanismus sei η_v . Welches ist der Gesamtwirkungsgrad?

Der Förderkorb ist als tote Last zu betrachten, die zum Heben desselben aufgewandte Arbeit ist Verlustarbeit. Wäre der Antriebsmechanismus verlustfrei, so würde der Wirkungsgrad sein, wenn s irgendein Hubweg ist,

$$\eta_a = \frac{G \cdot s}{(G + Q) s} = \frac{G}{G + Q}.$$

Der Gesamtwirkungsgrad ist dann

$$\eta = \eta_v \cdot \eta_a = \frac{G}{G+Q} \cdot \eta_v.$$

Der Wirkungsgrad ist in einem solchen Fall abhängig von der Belastung.

c) Energie der Bewegung (kinetische Energie).

Wirkt auf eine Masse m eine Kraft P ein, während der Weg s zurückgelegt wird, so ist die geleistete Arbeit

$$\begin{aligned} A &= \int_{s=0}^{s=s} P ds \cos \alpha = m \int_{s=0}^{s=s} p ds \\ &= m \int_{v=v_0}^{v=v} \frac{dv}{dt} \cdot v dt = m \int_{v=v_0}^{v=v} v dv = m \left(\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} \right), \end{aligned}$$

wenn zu $s = 0$ die Geschwindigkeit v_0 und zu $s = s$ die Geschwindigkeit v gehört.

$\frac{m v^2}{2}$ ist die kinetische Energie des Körpers.

Demnach ist: der Zuwachs an kinetischer Energie eines Massenpunktes innerhalb einer gewissen Zeit gleich der Arbeitsleistung der Gesamtheit der an dem Punkt angreifenden Kräfte.

Die kinetische Energie ist ein Arbeitsbetrug und hat die Dimension mkg ; sie ist eine skalare Größe.

Beispiel: Ein Geschoß von 40 g Gewicht und einer Geschwindigkeit von $v = 600$ m/sek durchschlägt einen Baum und fliegt mit $v_1 = 200$ m/sek weiter. Die Durchschlagsarbeit ist dann

$$A = \frac{0,040}{2 \cdot 9,81} (600^2 - 200^2) = 62,7 \text{ mkg}.$$

Beispiel: Eine oben befestigte Schraubenfeder werde durch das Gewicht Q belastet. Welche maximale Längung erfährt die Feder, wenn die Belastung plötzlich erfolgt?

Wenn die Feder durch die langsame Belastung mit 1 kg um K cm gelängt wird, so wird sie bei langsamer Belastung mit Q kg um $K \cdot Q$ cm gelängt. Diese Verlängerung stellt sich ein, nachdem etwaige Schwingungen verklungen sind. Der Körper ist dann an der Feder im Gleichgewicht.

Wird aber der Körper Q plötzlich losgelassen, so ist er nicht im Gleichgewicht, da die Spannkraft der ungedehnten Feder gleich Null ist. Der Körper wird also mit beschleunigter Bewegung herabfallen. Dabei wird die Feder gelängt, es treten zunehmende, nach oben gerichtete Kräfte auf, die die Bewegung wieder verzögern, bis bei der größten Längung die Geschwindigkeit Null wird.

Ist die Feder bereits um den Betrag x gelängt, dann hat das Gewicht die Arbeit $Q \cdot x$ geleistet, die kinetische Energie des Körpers ist $\frac{Q}{g} \frac{v^2}{2}$ und die zum Spannen der Feder aufgewandte

Arbeit ist

$$\int_0^x Kx dx = \frac{Kx^2}{2}.$$

Demnach ist

$$Qx = \frac{Q}{g} \frac{v^2}{2} + \frac{Kx^2}{2};$$

da im Moment der größten Längung $v = 0$ wird

$$Qx_{\max} = \frac{Kx_{\max}^2}{2},$$

$$x_{\max} = 2QK,$$

d. h. die maximale Längung ist doppelt so groß wie die bei langsamer Belastung erfolgende.

d) Leistung.

Unter Leistung oder Effekt versteht man die in der Zeiteinheit geleistete Arbeit. Demnach ist

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{P d(s \cdot \cos \alpha)}{dt} = P v \cos \alpha.$$

Die Leistung hat die Dimension $\frac{\text{mkg}}{\text{sek}}$ und ist eine skalare Größe.

Die Einheit der Leistung im technischen Maßsystem ist die Pferdestärke: $\text{PS} = 75 \frac{\text{mkg}}{\text{sek}}$. Die in der Elektrotechnik übliche Leistungseinheit ist das Kilowatt $= 10^7 \frac{\text{Erg}}{\text{sek}}$; $1 \text{ PS} = 0,736 \text{ Kilowatt} = 736 \text{ Watt}$. $1 \text{ KW} = 1,36 \text{ PS}$. Die in der Zeit t_0 bis t_1 geleistete Arbeit berechnet sich zu

$$A = \int_{t=t_0}^{t=t_1} N dt.$$

Beispiel: Eine Pumpe soll stündlich Q cbm Flüssigkeit vom spezifischen Gewicht s auf eine Höhe von p m fördern. Welche Leistung muß die Antriebsmaschine haben, wenn der Wirkungsgrad der Pumpe η ist?

$$N = \frac{1000 Q \cdot s \cdot p}{3600 \cdot 75 \cdot \eta} \text{ PS.}$$

Oft ist es zweckmäßig, die zeitliche Änderung der Leistung einer Maschine, die ungleichmäßig beansprucht wird, graphisch darzustellen.

Beispiel: Im Beispiel S. 238 stellt im Diagramm 71c jede Ordinate die momentane Leistung der Maschine dar. Aus dem Diagramm ist die maximale Leistung zu entnehmen, die die Maschine aufzubringen hat. Ist die Maschine nicht überlastbar, so muß ihre Leistung nach diesem maximalen Wert gewählt werden. Sie wird dann während des größten Teiles des Weges nicht gut ausgenützt. Ist die Maschine überlastbar, so kann man ihre Normleistung als die mittlere Leistung wählen. Die mittlere Leistung bestimmt sich als Höhe eines Rechteckes, dessen Inhalt gleich der von der $K \cdot v$ Kurve in Fig. 71c umschriebenen Fläche ist. Diese Fläche kann gleich $A_1 - A_2$ gesetzt werden, wenn die von der Maschine abgegebene Arbeit irgendwie, z. B. durch ein Schwungrad, aufgenommen werden kann; sie ist gleich A_1 zu setzen, wenn dies nicht der Fall ist und die der Fläche A_2 entsprechende Arbeit abgebrannt wird.

Ist die Arbeitsleistung A mkg einer Maschine während einer Umdrehung bekannt, und macht die Maschine n Umdrehungen pro Minute, so ist ihre Leistung

$$N = \frac{A \cdot n}{60 \cdot 75} \text{ PS.}$$

e) Bewegungsgröße, Antrieb.

Wirkt auf einen Massenpunkt, der die Geschwindigkeit v hat, eine Kraft P ein, so ist

$$P \cdot dt = m p dt = m dv,$$

$$\int_{t=0}^{t=t} P dt = \int_{v=v_0}^{v=v} m dv = m(v - v_0).$$

$\int P dt$ heißt Antrieb, mv heißt Bewegungsgröße.

Die Zunahme der Bewegungsgröße ist gleich dem Antrieb der Kraft.

Die Dimension von Antrieb und Bewegungsgröße ist kg sek.

Antrieb und Bewegungsgröße sind vektorielle Größen; ersterer hat die Richtung der Kraft, letztere der Geschwindigkeit.

Der Satz gilt auch für ein System von Massenpunkten, wenn P äußere Kräfte sind, also nicht solche, die zwischen den Punkten (Anziehungs- oder Abstoßungskräfte) bestehen. Wirken äußere Kräfte gar nicht, sondern nur innere, so ist $\int P dt = 0$ und die Bewegungsgröße konstant (Stoß).

f) Moment der Bewegungsgröße.

Wird die Bewegung einer unter dem Einfluß einer Kraft stehenden Masse auf einen Punkt bezogen, dessen Abstand von der Wirkungslinie der Kraft r ist, so ist, da

$$P dt = m dv$$

auch

$$P r dt = m r dv$$

und

$$\int P r dt = m v r - m v_0 r = \int M dt,$$

wobei

$$M = P r.$$

$\int M dt$ ist das Moment des Antriebes. Ist M konstant, so ist

$$\int M dt = M t - M t_0 = M (t - t_0),$$

wobei $t - t_0$ die Dauer der Einwirkung ist.

$m \cdot v \cdot r$ (Fig. 73) heißt das Moment der Bewegungsgröße. Sie ist vektorieller Natur und kann nach Analogie des Kraftmomentes durch einen Vektor dargestellt werden.

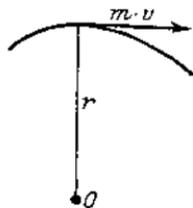


Fig. 73.

Das Moment des Antriebes ist gleich der Zunahme des Momentes der Bewegungsgröße. Das Moment der Bewegungsgröße ist gleich der Sektorengeschwindigkeit multipliziert mit $2m$

$$m \cdot v \cdot r = 2m \cdot v r.$$

Demnach ist auch das Moment des Antriebes gleich $2m \times$ Sektorenbeschleunigung

$$\int P r dt = 2m (v r - v_0 r).$$

Das Moment der Bewegungsgröße bleibt konstant, wenn die Sektorengeschwindigkeit konstant bleibt, wenn also 1. die Kraft P stets nach dem Zentralpunkt gerichtet ist. In diesem Fall ist das Moment des Antriebes gleich Null, da das Lot auf P gleich Null ist. 2. die Kraft P gleich Null wird.

2. Bewegung eines Massenpunktes unter dem Einfluß von Kräften.

a) Freie Bewegung des Massenpunktes.

Die Beschleunigung wird nach der Gleichung bestimmt

$$\dot{p} = \frac{P}{m}.$$

Wirkt die Kraft P in Richtung der Geschwindigkeit, die der Punkt besitzt, so ist die Bewegung eine geradlinige, andernfalls ist sie krummlinig. Wirken auf den Punkt mehrere Kräfte gleichzeitig ein, so addieren sich ihre Wirkungen, ohne sich zu stören. Die tatsächlich erfolgende Beschleunigung entspricht der Resultierenden aller Kräfte. Man kann aber auch die wirkende Kraft zerlegen, z. B. auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem projizieren und erhält dann durch jede Komponente die Beschleunigungen in Richtung der Koordinatenachsen.

Beispiel: Ein Körper vom Gewicht G werde unter einem Winkel α schräg nach oben geworfen, seine Anfangsgeschwindigkeit sei v_0 . Der Körper besitzt in Richtung der X -Achse die gleichförmige Geschwindigkeit $v_0 \cos \alpha$, in Richtung der Y -Achse die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \sin \alpha$ und die Verzögerung g . Demnach sind die Koordinaten der Bahn

$$x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t,$$

$$y = v_0 \sin \alpha t - g t^2.$$

$$\text{Die Gleichung der Bahn ist } y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2 v_0^2} \frac{x^2}{\cos^2 \alpha}.$$

$$\text{Wurfzeit (für } y = 0) \quad t = \frac{2 v_0}{g} \sin \alpha.$$

$$\text{Wurfweite} \quad w = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha.$$

Die größte Wurfweite ergibt sich für $\alpha = 45^\circ$.

Zerlegt man die Kraft in Richtung der Bahntangente und der Bahnnormalen, so ist $P_{\text{normal}} = m \frac{v^2}{\varrho}$, wobei ϱ der Krümmungsradius ist (Zentripetalkraft), $P_t = m \frac{dv}{dt}$.

Verbindet man den Massenpunkt mit einem festen Punkt durch einen Fahrstrahl, so kann man die auf den Massenpunkt einwirkende Kraft zerlegen in Richtung des Fahrstrahles und senkrecht dazu. Besonders wichtig ist der Fall, daß die senkrechte Komponente gleich Null ist, die Kraft also stets nach dem Zentralpunkt gerichtet ist (Zentralbewegung). In diesem Fall ist die Sektorengeschwindigkeit konstant.

Ist die Länge des Fahrstrahles konstant, so führt der Massenpunkt eine Rotation um den Zentralpunkt aus. Ist die Länge des Fahrstrahles r , die Winkelgeschwindigkeit ω , die Umdrehungszahl pro Minute n , die Geschwindigkeit v , die Beschleunigung p , ihre tangentielle Komponente p_t , die dazu senkrechte p_n , die auf den Punkt einwirkende Kraft P , deren tangentielle Komponente P_t , die dazu senkrechte P_n , dann ist:

$$v = r \omega, \quad p_t = r \frac{d\omega}{dt} = r \varepsilon,$$

$$p_n = \frac{v^2}{r} = r \omega^2 = v \omega, \quad p = r \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

$$P_t = m r \varepsilon, \quad P_n = m r \omega^2 = \frac{m v^2}{r}, \quad P = m r \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

P_n ist nach dem Zentralpunkt gerichtet (Zentripetalkraft).

Das Moment von P in bezug auf den Zentralpunkt ist

$$M = P_t \cdot r = m r^2 \varepsilon.$$

Die Arbeit der Kraft ist

$$dA = P_t \cdot r \cdot dq = M \cdot dq = M \omega dt.$$

Die Leistung ist

$$L = \frac{dA}{dt} = P_t \cdot r \cdot \omega = P_t \cdot v = M \omega.$$

Die kinetische Energie des Massenpunktes ist

$$E = \frac{m v^2}{2} = \frac{m r \omega^2}{2}.$$

b) Unfreie Bewegung des Massenpunktes.

Die unfreie Bewegung kann auf die freie dadurch zurückgeführt werden, daß man die Führung durch die von ihr ausgeübten Kräfte (Reaktionen) ersetzt. Dabei ist zu beachten, daß ein Faden nur eine Zugkraft ausüben kann, deren Richtungslinie mit dem Faden zusammenfällt, und daß die Reaktion einer glatten Fläche stets senkrecht zur Tangentialebene steht. Ist Reibung vorhanden, so liegt sie in der Tangentialebene und ist stets der Geschwindigkeit entgegengesetzt gerichtet. Die Reaktionen eines Fadens und auch einer glatten Fläche leisten keine Arbeit, da sie senkrecht zur Geschwindigkeit stehen.

1. Führung ist glatt.

Beispiele: Schiefe Ebene. Auf den Massenpunkt wirken ein: sein Gewicht G und die Reaktion N der Ebene, und zwar steht N senkrecht zur Ebene. Die Resultierende P von G und N muß, da der Punkt die Ebene nicht verlassen kann, parallel zur Ebene sein. Daraus ergibt sich gemäß Fig. 74

$$N = G \cos \alpha, \\ P = G \sin \alpha.$$

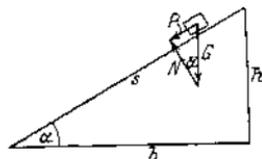


Fig. 74.

Da die zu beschleunigende Masse $\frac{G}{g}$ ist, so gilt

$$G \sin \alpha = \frac{G}{g} \cdot p,$$

$$p = g \sin \alpha.$$

Mathematisches Pendel (Fig. 75). An einem Faden von der Länge l hängt ein Massenpunkt vom Gewicht G . Der Faden sei um den Winkel φ aus der vertikalen Lage ausgelenkt. Auf den Massenpunkt wirken ein; sein Gewicht G und die Spannkraft S des Fadens. Die Resultierende P von S und G muß senkrecht zum Faden stehen, da sich der Punkt nur auf der Peripherie bewegen kann. Daraus ergibt sich $S = G \cos \varphi$ und $P = G \sin \varphi$. Die momentane Beschleunigung ergibt sich aus

$$m p = m l \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - m g \sin \varphi$$

$$\text{zu } p = - g \sin \varphi.$$

Das negative Vorzeichen ist notwendig, weil die Geschwindigkeit nach rechts als positiv angesehen, der Winkel von der Vertikalen aus gemessen wird, also bei positiver Geschwindigkeit wächst.

Die Geschwindigkeit an jeder Stelle ergibt sich aus dem Satz von der lebendigen Kraft. Ist die Höhe h durchfallen, so ist

$$\frac{m v^2}{2} = G h,$$

$$v = \sqrt{2 g h}.$$

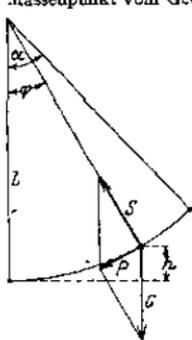


Fig. 75.

Die maximale Geschwindigkeit besitzt der Punkt in der tiefsten Lage, wo die Beschleunigung gleich Null ist.

Wenn die größte Auslenkung aus der Mittellage nicht mehr als 8° beträgt, ist die Zeit einer vollen Schwingung, während also der Punkt aus einer äußersten Lage in dieselbe äußerste Lage zurückkehrt,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Sie ist unabhängig von der Schwingungsweite.

Führt ein Massenpunkt P eine Bewegung mit der Beschleunigung p_A^P gegen eine Führung A aus, die ihrerseits um einen Zentralpunkt rotiert und eine Beschleunigung p_A erfährt, so ist gemäß S. 223

$$p_P = p_P^A + p_A + 2v_r \omega,$$

wobei v_r die wahre radiale Geschwindigkeit von P und ω die Winkelgeschwindigkeit des vom Zentralpunkt nach P gezogenen Fahrstrahles ist.

Ist $m \cdot p_P = K$ die Gesamtkraft,

$m \cdot p_A^P = J$ die Kraft, die nötig ist, um den Körper auf der ruhenden Bahn zu beschleunigen,

$m \cdot p_A = F$ die Kraft, die dem Körper die Beschleunigung erteilen würde, die der von ihm bedeckte Punkt der Führung besitzt,

$m \cdot 2v_r \omega = Z$ die Zusatzkraft,

so ist

$$K = J + F + Z.$$

Ist J gesucht, K , F und Z bekannt, so ist

$$J = K - F - Z = K - F + C.$$

$C = -F$ heißt Zusatzkraft der Relativbewegung, Corioliskraft.

c) Die Führung ist rauh.

Alle Beziehungen bleiben die gleichen, nur die Reibungskraft kommt hinzu. Bedeutet: N der Normaldruck auf die Fläche in kg, R die Reibung in kg, μ den Reibungskoeffizienten, so ist

$$R = \mu N.$$

Die Richtung von R ist stets entgegengesetzt der relativen Geschwindigkeit des Körpers gegen die Führung.

Besitzt ein Körper die Geschwindigkeit v_0 und wirkt eine Kraft P auf ihn ein, während er den Weg s zurücklegt, so daß die Arbeit

$$A = \int_{s_0}^s P ds$$

auf ihn übertragen wird, so ist, wenn andere Kräfte außer der Reibung nicht einwirken;

$$A = \int_{s_0}^s P ds = \frac{m}{2} (v^2 - v_0^2) + \int_{s_0}^s \mu \cdot N \cdot ds .$$

Die von der äußeren Kraft geleistete Arbeit ist also gleich dem Zuwachs an kinetischer Energie vermehrt um die Reibungsarbeit.

Beispiel: Ein Körper gleitet eine rauhe, schiefe Ebene herab. Mit welcher Geschwindigkeit kommt er unten an?

Auf den Körper wirken ein: sein Gewicht G , die Reaktion der Ebene $N = G \sin \alpha$, die Reibung $R = G \cos \alpha \cdot \mu$.

Fällt der Körper um die Höhe h , so ist die Arbeit des Eigengewichtes $G \cdot h$.

Die Arbeit der Reibung $\mu \cdot G \cdot \cos \alpha \cdot \frac{h}{\sin \alpha}$.

Mithin ist

$$G h = \frac{G}{g} \frac{v^2}{2} + \mu G h \cotg \alpha ,$$

$$v = \sqrt{2 g h (1 - \mu \cotg \alpha)} .$$

3. Schwingungen elastischer Körper. Schwanke Wellen.

Bei Formänderungen elastischer Körper sind die Kräfte, welche eine Deformation hervorrufen, der Deformation selbst proportional. Umgekehrt sind auch die von einem deformierten elastischen Körper ausgeübten Kräfte der Formänderung proportional.

Ändert sich eine auf einen Massenpunkt einwirkende Kraft derartig, daß sie stets der Auslenkung des Massenpunktes aus seiner Mittelstellung proportional und nach dieser Mittelstellung gerichtet ist (Fig. 76), so vollführt der Punkt eine harmonische Schwingung. Es ist

$$P = -x \cdot k = m \frac{d^2 x}{dt^2} .$$

Hieraus folgt: die Auslenkung x zur Zeit t ist

$$x = r \sin \left(t \sqrt{\frac{k}{m}} \right) = r \sin \omega t .$$

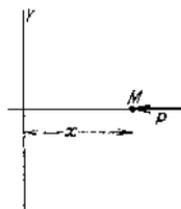


Fig. 76.

Es ist: r die Amplitude, die größte Auslenkung, k die Kraft, welche auf den Punkt bei der Auslenkung im Abstände 1 ausgeübt wird. $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ist die gleichförmige Winkelgeschwindigkeit eines Radius, der während einer vollen Schwingung des Massenpunktes einen vollen Kreis beschreibt, die Kreisfrequenz.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} .$$

ist die Dauer einer vollen Schwingung, nach welcher der Punkt in seine anfängliche Lage und seinen anfänglichen Bewegungszustand zurückkehrt.

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \text{Frequenz} = \text{Schwingungszahl in der Sekunde.}$$

Die Bedingungen der harmonischen Schwingung sind gegeben: bei den Federn von vollkommener Elastizität, einem Pendel bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes.

Beispiel: Eine Spiralfeder, die als gewichtslos zu betrachten ist, wird bei ruhender Belastung durch eine Belastung von 20 kg um 5 cm verlängert. Welches ist die Frequenz der Feder?

$$n = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$m = \frac{20}{981} = 0,024 \frac{\text{kg} \cdot \text{sek}^2}{\text{cm}}, \quad k = \frac{20}{5} = 4 \frac{\text{kg}}{\text{cm}},$$

$$n = 2\pi \sqrt{\frac{0,024}{4}} = 0,485 \text{ sek}^{-1} \text{ oder } 29,1 \text{ Schwingungen pro Minute.}$$

Wirkt außer der Kraft P noch ein Widerstand, der der Geschwindigkeit proportional ist, so ist die Bewegung eine gedämpfte freie Schwingung. Die Differentialgleichung lautet

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k x - c \frac{dx}{dt},$$

wobei c der Dämpfungsfaktor ist.

Die Integralgleichung ist:

$$x = A e^{\alpha t} + B e^{\beta t},$$

wobei

$$\alpha = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}},$$

$$\beta = -\frac{c}{2m} - \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}.$$

Es sind 2 Fälle zu unterscheiden:

$$1. \quad \frac{c^2}{4m^2} < \frac{k}{m};$$

$$c^2 < 4km.$$

Für den Fall, daß zur Zeit Null auch die Auslenkung Null ist, geht die Gleichung über in

$$x = \frac{2m v_0}{\sqrt{4km - c^2}} \cdot e^{-\frac{c}{2m}t} \cdot \sin \frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m} t.$$

Man erhält eine Schwingung, deren Amplitude mit der Zeit immer kleiner wird und sich asymptotisch der Null nähert. (Fig. 72, S. 146.)

Die Schwingungsdauer ist auch hier von der Amplitude und der Zeit unabhängig. Es ist

$$T = \frac{4\pi m}{\sqrt{4km - c^2}}.$$

Bildet man das Verhältnis zweier aufeinanderfolgenden Amplituden, so ist

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = \lambda = \frac{cT}{4m} = \text{konst.}, \text{ das logarithmische Dekrement.}$$

$$2. \quad \frac{c^2}{4m^2} > \frac{k}{m}.$$

Die Bewegung wird aperiodisch.

Wirkt außer der elastischen Kraft und der Dämpfung noch eine erregende äußere Kraft P , die nach dem Gesetz $P = P_0 \sin \omega t$ veränderlich ist, so lautet die Bewegungsgleichung

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = P_0 \sin \omega t,$$

Die tatsächlich erfolgenden Schwingungen lassen sich trennen in Eigenschwingungen, die aber infolge der Dämpfung im allgemeinen bald verschwinden, und in erzwungene Schwingungen, welche sich über die ersteren lagern. Die erzwungene Schwingung hat dieselbe Frequenz wie die erregende Kraft, aber ihr gegenüber eine Phasenverschiebung φ , und zwar ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{c \omega}{k - m \omega^2}.$$

Die Ausschläge der erzwungenen Schwingungen sind, wenn ω_p der erregenden Kraft erheblich unter ω_e der Eigenschwingung liegt, relativ klein. Wächst ω_p , so werden die Ausschläge größer und bei

$$\omega_p = \omega_e = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ werden sie}$$

außerordentlich — bei $c = 0$

unendlich — groß. Wird $\omega_p > \omega_e$, so nehmen die Amplituden rasch ab, und bei sehr großem ω_p werden sie sogar kleiner als bei $\omega_p = 0$. In Fig. 77 zeigt die obere Kurve die Veränderung des Ausschlages mit wachsendem ω_p bei dämpfungsfreier, die untere Kurve bei gedämpfter Schwingung an.

Bei technischen Konstruktionen ist also die Resonanzbedingung $\omega_p = \sqrt{\frac{k}{m}}$ zu vermeiden.

Bei Bestimmung der Eigenschwingungszahl elastischer Körper, die selbst gewichtslos mit dem Gewicht G belastet sind, kann man $k = \frac{G}{f}$ setzen, wenn f die Durchbiegung unter der Last G ist. Demnach wird $n_e = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{f}}$ Schwingungen pro Sekunde.

Beispiel: Ein an beiden Enden frei aufliegender 4 m langer I-Träger NP 20 wird in der Mitte mit 500 kg belastet. Es ist die Zahl der Eigenschwingungen zu bestimmen. Die Durchbiegung ist $f = \frac{G l^3}{E J \cdot 48}$. Da die Beziehungen nur für gewichtslose Federn gelten, muß man das Eigengewicht des Trägers in 3 Teile zerlegen, von denen der mittlere zu dem Gewicht G zugeschlagen wird, die beiden äußeren aber in den Auflagerstellen angreifend gedacht werden, also zur Durchbiegung nichts beitragen. Von den 105 kg, die der Träger wiegt, werden 60 kg zur Belastung zugeschlagen, so daß nunmehr mit 560 kg zu rechnen ist. Die Durchbiegung unter der Last ist $f = \frac{560 \cdot 64 \cdot 000 \cdot 000}{2150 \cdot 000 \cdot 2142 \cdot 48} = 0,16$ cm. Demnach $n_e = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{981}{0,16}} = 12,5$ Schwingungen pro Sekunde oder 750 pro Minute. Rührt die Belastung von einem Motor her, so wird man ihn nicht mit 750 Umdrehungen pro Minute laufen lassen, um Resonanzerscheinungen zu vermeiden. Kann die Umlaufzahl nicht verändert werden, so wird man den Motor näher an die Auflager bringen, da alsdann die Durchbiegung unter der Last kleiner und damit die Eigenschwingungszahl größer wird.

Befindet sich auf einer biegsamen Welle an irgendeiner Stelle ein Rad vom Gewicht G , dessen Schwerpunkt nicht genau mit der Wellenachse zusammenfällt (Fig. 78), so wird bei einer Drehung der Welle die Zentrifugalkraft die Durchbiegung zu vergrößern suchen. Es ist

$$\text{die Zentrifugalkraft } C = \frac{G}{g} \omega^2 (\varepsilon + y).$$

Ist die Kraft k erforderlich, um die Welle an der Befestigungsstelle des Rades um 1 cm durchzubiegen, so ist zur Durchbiegung um y cm die Kraft $k \cdot y$ erforderlich. Also ist

$$C = \frac{G}{g} \omega^2 (\varepsilon + y) = k y.$$

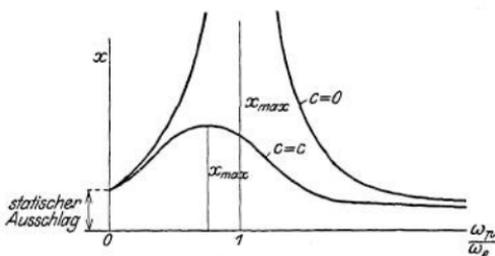


Fig. 77.

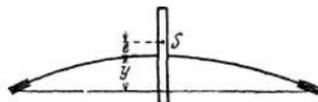


Fig. 78.

Mithin

$$y = \frac{G \omega^2 \varepsilon}{g k - G \omega^2}.$$

Wird

$$\omega = \sqrt{\frac{g k}{G}} = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

so werden die Ausschläge unendlich groß. Da $\sqrt{\frac{k}{m}}$ gleich der Kreisfrequenz der ungedämpften Eigenschwingung der elastischen Welle ist, besteht Resonanz zwischen der Eigenschwingung und der erzwungenen Schwingung.

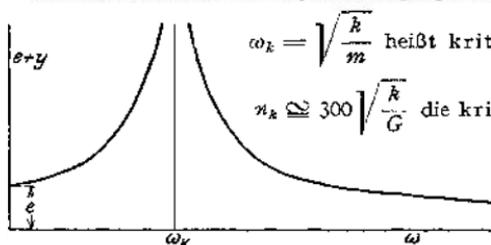


Fig. 79.

$\omega_k = \sqrt{\frac{k}{m}}$ heißt kritische Winkelgeschwindigkeit

$n_k \cong 300 \sqrt{\frac{k}{G}}$ die kritische Tourenzahl.

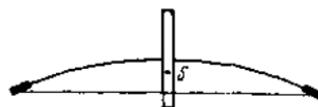


Fig. 80.

Da die Durchbiegung unter der Last G im Ruhezustande $f = \frac{G}{k}$ cm, kann man auch schreiben

$$w_k = \sqrt{\frac{g}{f}}; \quad n_k = 300 \sqrt{\frac{1}{f}};$$

Die Abhängigkeit der Größe $y + \varepsilon$ von der Winkelgeschwindigkeit wird durch Fig. 79 dargestellt. Nach Überschreiten der kritischen Tourenzahl läuft die Welle ruhiger als vorher, $y + \varepsilon$ wird kleiner als selbst im Ruhezustande. Die Scheibe stellt sich nach Fig. 80 ein.

Die kritische Tourenzahl einer glatten unbelasteten Welle aus Flußeisen mit einem spezifischen Gewicht 7,8 und Elastizitätsmodul $E = 2\,150\,000$ ist

a) wenn sie beiderseitig frei aufliegt

$$n_k = \frac{10^7 \cdot r}{0,408 l^2},$$

wobei l ihre Länge in cm zwischen den Lagern bedeutet. Außerdem gibt es kritische Geschwindigkeiten höherer Ordnung, deren Werte sind

$$4 n_k, 9 n_k, 16 n_k \text{ usw.}$$

b) wenn sie beiderseitig horizontal eingespannt ist

$$n_k = \frac{10^7 r}{0,181 l^2}$$

und die kritischen Umdrehungszahlen höherer Ordnung

$$2,8 n_k, 5,4 n_k \text{ usw.}$$

c) wenn sie einseitig überhängt: $n_k = \frac{10^7 r}{1,147 l^2}$.

Für Wellen, die mit mehreren Scheiben belastet sind, berechnet sich die kritische Tourenzahl nach Dunkerley aus der Gleichung

$$\frac{1}{\omega_k^2} = \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_3^2} + \dots$$

wobei

- ω die kritische Winkelgeschwindigkeit der Welle allein,
- ω_1 diejenige der masselos gedachten Welle nur mit der Scheibe 1 belastet,
- ω_2 diejenige der masselosen Welle nur mit der Scheibe 2 belastet darstellen, u. s. f.

Häufig verteilt man das Gewicht der Welle auf die Scheiben, so daß $\frac{1}{\omega} = 0$ wird.

Da für vollkommen ausbalancierte Scheiben $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{f_1}}$ ist, wobei f_1 die Durchbiegung der nur durch Scheibe 1 belasteten Welle unter dem Schwerpunkt der Welle darstellt, so wird (mit $\frac{1}{\omega^2} = 0$):

$$\frac{1}{\omega_k^2} = \frac{g}{f_1} + \frac{g}{f_2} + \frac{g}{f_3} + \dots$$

oder

$$\omega_k^2 = \frac{f_1 + f_2 + f_3 + \dots}{g} \quad \text{und} \quad \omega_k = \sqrt{\frac{\sum f}{g}}$$

Die Werte von f_1, f_2 usw. können nach S. 431 berechnet werden. (Die Formel von Dunkerley ergibt bei auf 2 Stützen frei gelagerten Wellen um etwa 4,5% zu niedrige Werte).

Beispiel: Die kritische Tourenzahl der Welle nach Fig. 81 ist zu berechnen. Die

Kräfte G_0, G_1, G_2 usw. stellen die Gewichte der Scheiben dar, einschließlich der Gewichte der zugehörigen Wellenstücke. Es sind

$$\begin{array}{ll} G_0 = 18,8 \text{ kg} & G_3 = 195 \text{ kg} \\ G_1 = 175 \text{ „} & G_4 = 641 \text{ „} \\ G_2 = 175 \text{ „} & G_5 = 226,4 \text{ „} \\ & G_6 = 23,5 \text{ kg.} \end{array}$$

Nach S. 431 berechnen sich die Durchbiegungen wie folgt

$$\begin{array}{l} f_0 = 0,000 \text{ cm} \\ f_1 = 0,009 \text{ „} \\ f_2 = 0,017 \text{ „} \\ f_3 = 0,018 \text{ „} \\ f_4 = 0,046 \text{ „} \\ f_5 = 0,008 \text{ „} \\ f_6 = 0,000 \text{ „} \\ \hline \sum f = 0,098 \text{ cm.} \end{array}$$

Demnach wird $\omega_k = \sqrt{\frac{981}{0,098}} = 100$.

Die kritische Tourenzahl ist $n_k = \frac{30 \cdot 100}{\pi} = 960$ pro Minute bzw. 1000, wenn man um 4,5% erhöht.

Unter der bei sehr sorgfältig ausgewuchteten Wellen zutreffenden Voraussetzung, daß die Entfernung des Schwerpunktes der Scheiben von der Wellenachse als sehr klein betrachtet und gleich Null gesetzt werden kann, ist auch ein graphisches Verfahren (nach Stodola) zur Bestimmung der kritischen Tourenzahl unter Verwendung des Mohrschen Satzes möglich. In diesem Fall ist der Wert der Ausbiegung

$$y = \frac{G \omega^2 e}{g k - G \omega}$$



Fig. 81.

für jeden Wert von ω gleich Null, da $\varepsilon = 0$. Nur wenn $\omega = \omega_k = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ist, wird $y = \frac{0}{0}$, also unbestimmt.

Nimmt man eine beliebige Durchbiegung y an, so ist bei der kritischen Tourenzahl mit $\varepsilon = 0$

$$C = \frac{G}{g} \omega_k^2 \cdot y = k \cdot y.$$

Diese Gleichung wird durch jeden beliebigen Wert von y erfüllt, d. h. die Welle befindet sich bei jeder beliebigen Ausbiegung im (indifferenten) Gleichgewicht. Ist eine Ausbiegungsgeschwindigkeit vorhanden, so werden die Ausbiegungen immer größer, bis die Proportionalitätsgrenze des Materials überschritten wird und der Bruch erfolgt. Die Fig. 79 schrumpft also zu einem Kreuz zusammen (Fig. 82).

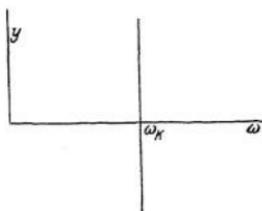


Fig. 82.

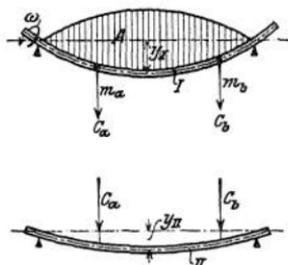


Fig. 83 u. 84.

Man denke sich zwei der gegebenen Wellen I und II (Fig. 83 und 84) vollständig gleich, von denen nur I rotiert. Diese Welle I legt sich an einen Führungskörper A , der zwischen die Lager gelegt ist und die Form eines Rotationskörpers hat, dessen Erzeugende irgendeine als möglich angesehene elastische Linie der Welle I ist. Durch A wird auf die ursprünglich gerade Welle I ein Druck ausgeübt, der sie zwingt, in der ausgebogenen Lage (Fig. 83) zu verharren. Mit wachsendem ω nimmt der von A ausgeübte Druck ab und wird zu Null bei der kritischen Umlaufzahl, da sich dann die Welle im indifferenten Gleichgewicht befindet. Für irgendeinen angenommenen Wert von ω kann man die von den auf der Welle befindlichen Massen ausgeübten Zentrifugalkräfte bestimmen, da ja die Abstände der Schwerpunkte von der Rotationsachse durch die Form des Führungskörpers gegeben sind. Die einzelnen Zentrifugalkräfte sind dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit ω proportional. Bei Belastung der Welle II mit diesen Zentrifugalkräften wird man eine z. B. in der Mitte gemessene Durchbiegung y_{II} erhalten, die der Belastung, also auch ω^2 proportional ist.

$$\text{Also} \quad y_{II} = C \cdot \omega^2.$$

Die Durchbiegung y_I in der Mitte der Welle I wird nur dann mit y_{II} übereinstimmen, wenn $\omega = \omega_k$ geworden ist, da dann beide Wellen in gleicher Weise belastet sind und sich die Belastungskräfte mit den elastischen Kräften das Gleichgewicht halten. Dann ist also, weil sich nur die Winkelgeschwindigkeit geändert hat,

$$y_I = C \omega_k^2$$

$$\text{oder} \quad \frac{y_{II}}{y_I} = \frac{\omega^2}{\omega_k^2} \quad \text{und} \quad \omega_k = \omega \sqrt{\frac{y_I}{y_{II}}}.$$

Natürlich müssen die durch A erzwungene elastische Linie I und die sich aus den Belastungen ergebende Linie II gleichartig sein, d. h. Linie II muß sich bei entsprechender Veränderung des Maßstabes vollständig mit Linie I decken. Ist das nicht der Fall, so muß der Körper A so geändert werden, daß die Deckung eintritt und Linie II muß von neuem bestimmt werden.

Beispiel (nach Stodola, Die Dampfturbinen, 4. Aufl. Berlin 1910. Julius Springer): Die in Fig. 85 A dargestellte Welle ist identisch mit derjenigen der Fig. 81. Die elastische Linie (die Linie I, die durch den gedachten Führungskörper erzwungen wird) sei gemäß B angenommen.

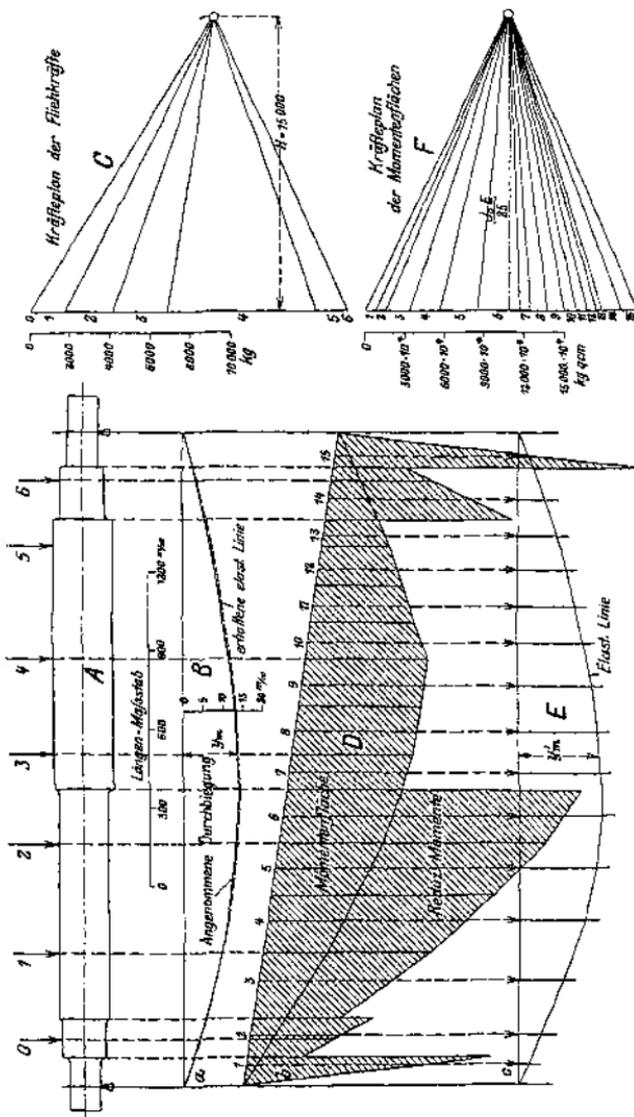


Fig. 85.

In den Belastungen in den einzelnen Punkten — siehe unten — sind nicht nur die Gewichte der aufgeketteten Massen, sondern auch die Gewichte der zugehörigen Wellenstücke enthalten. Für eine Winkelgeschwindigkeit $\omega = 100$ ergeben sich folgende Fliehkräfte:

Angriffspunkt	0	1	2	3	4	5	6
Angenommene Durchbiegungen	0,39	0,89	1,31	1,37	1,14	0,65	0,31
Einzelgewicht kg	18,8	174,6	174,6	195	641	226,4	23,5
Masse $m = \frac{G \text{ kg}}{g \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}}$	0,0192	0,178	0,178	0,199	0,636	0,230	0,024
Fliehkraft kg	74,9	1741	2335	2720	7450	1498	74,5

Um die elastische Linie zu finden, konstruiert man nun nach Mohr (S. 428) mit dem Polabstand $H = 15\,000$ kg das Kräftepolygon C und die zugehörige Momentenfläche D . Man vergrößert die Ordinaten der Momentenfläche im Maßstab J_0/J , wobei J_0 das maximale Trägheitsmoment und J dasjenige des jeweiligen Schnittes durch die Welle bedeutet.

Zeichnet man unter Berücksichtigung der Maßstäbe die Seillinie mit den reduzierten Momenten als Belastung, so erhält man nach Mohr die elastische Linie E der Welle, also die Linie II . Die Ordinate in der Mitte von B ist $y_m = y_I = 13,5$ mm, diejenige von E unter Berücksichtigung der Maßstäbe $y_m = y_{II} = 12,3$ mm.

Verkleinert man die Ordinaten der E -Kurve so, daß $x_m^I = y_m$ wird und trägt die so erhaltene Kurve in die Figur B als gestrichelte Linie ein, so sieht man, daß die Abweichungen sehr gering sind, eine Korrektur also überflüssig ist. Die kritische Geschwindigkeit ist

$$\omega_k = \omega \sqrt{\frac{y_I}{y_{II}}} = 100 \sqrt{\frac{13,5}{12,3}} = 104,8$$

also $n_k = \infty 1000$ Umläufe pro Minute.

4. Bewegung eines Punkthaufens unter dem Einfluß von Kräften.

Das System bestehe aus einer Anzahl von Massenpunkten, deren gegenseitige Lage veränderlich oder unveränderlich (starrer Körper) sein kann, und welche aufeinander Kräfte (innere Kräfte des Systems) ausüben können oder auch nicht. Wirkt zwischen zwei Punkten A und B eine innere Kraft, so ist, da Wirkung = Gegenwirkung, die Einwirkung auf A gleich groß und entgegengesetzt gerichtet wie die auf B . Daraus ergeben sich einige

a) Allgemeine Sätze.

1. d'Alembertsches Prinzip. Wirken auf einen Punkthaufen Kräfte ein, so wird eine beschleunigte Bewegung der Punkte entstehen. Die Gleichgewichtsbedingungen können nicht angewendet werden, da kein Gleichgewicht besteht.

Ist die auf einen Punkt x einwirkende Kraft P_x , so wird diese dem Punkt eine Beschleunigung erteilen. Diese ist gleich $\frac{P_x}{m_x}$, wenn innere Kräfte von den benachbarten Punkten des Haufens her nicht auf x einwirken. Ist das aber der Fall, sind z. B. Nachbarpunkte durch Federn mit x verbunden, so würden außer x auch noch die andern Punkte beschleunigt werden. Die Größe der verschiedenen Beschleunigungen wird von der Art der inneren Kräfte und der Konfiguration des Systems abhängen. Jedenfalls aber wird sein:

$$P = m_1 p_1 + m_2 p_2 + m_3 p_3 + \dots = \sum m p.$$

wobei m die Masse der einzelnen Massenpunkte und p ihre Beschleunigung bedeutet. Man kann auch schreiben:

$$P - m_1 p_1 - m_2 p_2 + \dots = 0.$$

Bringt man nun an jedem Massenpunkt willkürlich Ergänzungskräfte an derart, daß

$$H_1 = -m_1 \dot{p}_1, \quad H_2 = -m_2 \dot{p}_2, \quad H_3 = -m_3 \dot{p}_3 \text{ usw.}$$

ist, dann ist auch

$$P + H_1 + H_2 + H_3 = 0.$$

das heißt, der Einfluß der äußeren Kraft wird durch die Ergänzungskräfte aufgehoben. Ist der Einfluß von P der einzige, der das Gleichgewicht des Punkthaufens stört, so wird dieses durch Anfügen der Ergänzungskräfte wieder hergestellt. Die dynamische Aufgabe ist auf eine statische reduziert.

Demnach gilt: Befindet sich ein System unter der Einwirkung äußerer Kräfte in beschleunigter Bewegung, so kann es wie ein im Gleichgewicht befindliches behandelt werden, wenn man an jedem Punkt eine Kraft hinzufügt, die gleich dem Produkt aus der Masse und der Beschleunigung des Punktes, aber der Beschleunigung entgegengesetzt gerichtet ist.

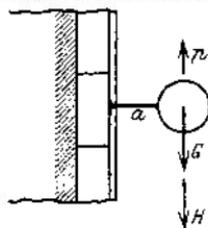


Fig. 86.

Ist beabsichtigt, die Größe einer inneren Kraft festzustellen, so muß man den Punkthaufen so zerteilen, daß die gesuchte Kraft in bezug auf den Punkthaufenrest als äußere zu betrachten ist.

Beispiele: 1. Ein Förderkorb vom Gewicht G soll mit einer Beschleunigung p angehoben werden. Wie groß muß die Spannkraft S im Seil sein?

Auf den Korb wirken ein: das Gewicht G , nach unten gerichtet, die Spannkraft S , nach oben gerichtet; da der Korb eine Beschleunigung p nach oben erfährt, muß man die nach unten gerichtete Ergänzungs-kraft $H = \frac{G}{g} p$ anbringen. Dann kann man die Gleichgewichtsbedingungen ansetzen, und es ist

$$G + \frac{G}{g} p - S = 0; \quad \text{also} \quad S = G + \frac{G}{g} p.$$

2. (Fig. 86.) Ein Stein, der in vertikaler Nut geführt wird, trage an dem gewichtslosen, horizontalen Arm a die Masse m . Die Geschwindigkeit des Steines ist $v = v_0 \sin \omega t$. Wie groß ist das maximale Biegemoment des Armes a ?

Die Beschleunigung von m ist $\dot{p} = v_0 \omega \cos \omega t$, die maximale Beschleunigung nach oben wie nach unten ist $\dot{p}_{\max} = v_0 \omega$. Ist \dot{p}_{\max} nach oben gerichtet (in der tiefsten Stellung des Steines), so ist die Ergänzungs-kraft $H = m \cdot v_0 \omega$ nach unten anzubringen.

Auf den Arm wirken also im Schwerpunkt der Masse ein $m g + m v_0 \omega$. Das Biegemoment im gefährlichen Querschnitt ist also

$$\mathfrak{M} = (m g + m v_0 \omega) a.$$

Das Gleichgewicht muß aufrecht erhalten werden durch die Reaktionen der Führung auf den Stein.

3. (Fig. 87.) Die Massen m_1, m_2 und m_3 sind miteinander durch Fäden verbunden. Auf m_1 wirkt die Kraft P . Welches ist die Spannkraft in den Fäden zwischen m_2 und m_1 und zwischen m_3 und m_2 ?

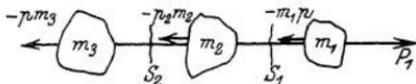


Fig. 87.

Die allen Massen gemeinsame Beschleunigung ist $\dot{p} = \frac{P}{m_1 + m_2 + m_3}$; die Ergänzungs-kräfte, die P entgegengesetzt anzubringen sind, sind

$$m_1 \cdot \frac{P}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad m_2 \cdot \frac{P}{m_1 + m_2 + m_3} \quad \text{und} \quad m_3 \cdot \frac{P}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Die Fadenspannkraft S_1 ist eine innere Kraft des Systems. Zerschneidet man aber den Faden und ersetzt ihn durch seine Spannkraft, so ist diese in bezug auf m_1 eine äußere Kraft. Für m_1 sind die Gleichgewichtsbedingungen anzusetzen:

$$\begin{aligned} P - m_1 \cdot \frac{P}{m_1 + m_2 + m_3} + S_1 &= 0, \\ -S_1 &= \frac{m_1 P + m_2 P + m_3 P - m_1 P}{m_2 + m_3}, \\ -S_1 &= (m_2 + m_3) \frac{P}{m_1 + m_2 + m_3}. \end{aligned}$$

Ebenso ergibt sich

$$-S_2 = m_3 \frac{P}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

4. (Fig. 88.) Ein Kranträger von der Länge l und dem Eigengewicht G trägt in seiner Mitte eine Katze vom Gewicht K , an der eine Last Q hängt. Welche horizontalen Kräfte muß der Träger aufnehmen, wenn ihm die Beschleunigung p erteilt wird?

Auf den Träger wirken am rechten und am linken Ende je die Kräfte

$$\frac{P}{2} = \frac{G + K + Q}{2g} \cdot p$$

ein, welche die Beschleunigung hervorrufen.

Als Ergänzungskräfte sind (entgegen der Richtung von p) anzubringen: die gleichmäßig verteilte Last $\frac{G}{g} \cdot p$, zwei $\frac{K}{2g} p$, die an den beiden Radachsen der Katze angreifen, und die zwei Kräfte $\frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{g} p$, die ebenfalls durch die Laufräder der Katze übertragen werden.

Die maximale Biegungsbeanspruchung des Trägers und die Durchbiegung in horizontaler Richtung können nun in bekannter Weise berechnet werden.

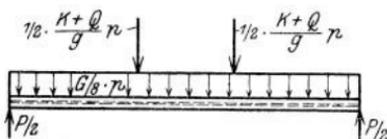


Fig. 88.

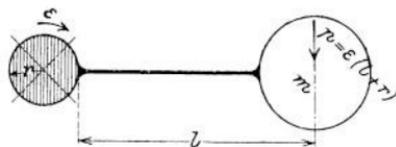


Fig. 89.

5. (Fig. 89.) Eine Nabe vom Radius r trägt einen gewichtslosen Arm von der Länge l , an dessen Ende sich die Masse m befindet. Wie groß ist das Biegemoment des Armes an der Nabe, wenn diese eine Winkelbeschleunigung ϵ um eine vertikale Achse erfährt?

Die Beschleunigung des Massenmittelpunktes ist $p = \epsilon(r + l)$. Das Drehmoment, das auf die Nabe wirkt, ist $\mathfrak{M} = m \cdot \epsilon(r + l)$. Die Ergänzungskraft $H = m \cdot \epsilon(r + l)$ und ist ϵ entgegen anzubringen. Der Arm verhält sich wie ein eingespannter Freitträger, an dessen Ende die Einzelkraft H wirkt. (Fig. 90.) Das maximale Biegemoment ist $M_{\max} = H \cdot l = m \cdot \epsilon(r + l) \cdot l$.

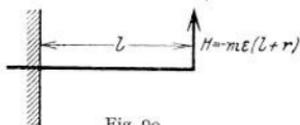


Fig. 90.

2. Satz von der Bewegungsgröße. Besitzen die einzelnen Massenpunkte m_1, m_2, m_3 usw. die Geschwindigkeiten v_1, v_2, v_3 usw., so ist die Bewegungsgröße des Systems:

$$\mathfrak{B} = m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 + \dots$$

Wirkt eine äußere Kraft P während der Zeit t auf das System ein, so ist der Zuwachs an Bewegungsgröße:

$$\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_0 = P t$$

Dabei ist es gleichgültig ob P auf alle oder nur einzelne Massenpunkte einwirkt.

Innere Kräfte z. B. Reibung haben keinen Einfluß auf die Bewegungsgröße, da der Antrieb der Aktio gleich und entgegengesetzt dem Antrieb der Reaktio ist. Sind äußere Kräfte nicht vorhanden, so ist die Bewegungsgröße konstant. Wirkt auf ein Punktsystem ein Körper außerhalb des Systems ein, so kann man ihn als mit zum System gehörig betrachten, und dann wird die äußere Kraft zu einer innern. Verändert ein Teil eines Punkthaufens seine Bewegungsgröße, ohne daß äußere Kräfte einwirken, so muß der Rest seine Bewegungsgröße auch ändern, und zwar derart, daß die Summe beider Änderungen gleich Null ist.

Beispiel: Die hin und her gehenden Massen einer Dampfmaschine seien m_1 , die mit dem Fundament verbundenen m_2 . Der Dampfdruck ist eine innere Kraft und hat auf die Bewegungsgröße des Systems Maschine + Fundament keinen Einfluß. Bei stillstehender Maschine

ist die gesamte Bewegungsgröße gleich Null; also ist sie es auch bei laufender Maschine, wenn von der Reibung des Fundamentes gegen die Unterlage abgesehen wird. Ist v_1 die Geschwindigkeit von m_1 , so ist

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0,$$

$$v_2 = -v_1 \frac{m_1}{m_2};$$

um v_2 recht klein zu halten, muß man das Fundament recht schwer machen.

Wenn es aber gelingt, die Bewegungsgröße der hin und her gehenden Massen selbst gleich Null zu machen, so ist auch die Bewegungsgröße des Fundamentes gleich Null und es kann sehr leicht gehalten werden, z. B. Anordnung nach Fig. 91.

Es ist bei derartigen Anordnungen zu beachten, daß die Bewegungsgröße der nach rechts gehenden Massen in jedem Augenblick gleich derjenigen der nach links gehenden sein muß. Es ist also die Endlichkeit der Pleuelstange zu berücksichtigen. Des weiteren sind die unter §. entwickelten Gesichtspunkte bezüglich des Entstehens von Drehmomenten zu beachten.

3. Satz vom Drall. Unter Drall oder dem Moment der Bewegungsgröße eines Punkthaufens versteht man die geometrische Summe der Momente der Bewegungsgrößen der einzelnen Massenpunkte in Bezug auf einen Zentralpunkt. Der Zuwachs des Dralles ist gleich dem Moment des Antriebes:

$$\sum m v_2 r_2 - \sum m v_1 r_1 = \sum P \cdot r \cdot t.$$

Der Zuwachs wird gleich Null, wenn

1. $P = 0$, d. h. wenn keine äußere Kraft vorhanden ist oder
2. $r = 0$, d. h. wenn die Kraft stets durch den Zentralpunkt geht.

Beispiel: Wird ein Motor, etwa ein Elektromotor, so angeordnet, daß sowohl der Anker als auch die Feldmagnete rotieren können, so werden beim Anlassen beide rotieren. Der Rotations-sinn von Anker und von Feld werden entgegengesetzt sein und die Drehgeschwindigkeiten so, daß das Moment der Bewegungsgröße des Ankers gleich demjenigen der Magnete ist. Die Summe der Momente ist wegen des entgegengesetzten Vorzeichens gleich Null. Die Anziehungskräfte zwischen Feld und Anker sind als innere zu bezeichnen.

Besitzt eine Maschine die Anordnung nach Fig. 92, so ist zwar die Bewegungsgröße der hin und her gehenden Massen stets gleich Null, nicht aber das Moment der Bewegungsgröße. Vielmehr ist, wenn m die Masse pro Zylinder, v ihre Geschwindigkeit und a der Abstand der Zylinderachsen voneinander ist, ein Drall $\mathcal{D} = m \cdot v \cdot a$ vorhanden, der linksdrehend ist, wenn die Kolben sich der Welle nähern, rechtsdrehend bei umgekehrter Bewegung. Da in dem System Maschine + Fundament äußere Kräfte nicht wirken, muß im ganzen der Drall der gleiche wie in der Ruhe, also gleich Null sein. Demnach muß das Fundament die entgegengesetzte Drehbewegung ausführen wie die Maschine, es treten im Fundament Schwüngen um eine vertikale Achse auf.

Die Bedingungen für einen vollkommenen Massenausgleich in der Maschine, d. h. derart, daß Bewegungen des Fundamentes überhaupt nicht auftreten, sind demnach: 1. die Bewegungsgröße in Richtung der 3 Koordinatenachsen ist gleich Null, 2. das Moment der Bewegungsgröße in den 3 Koordinatenebenen ist gleich Null.

4. Satz vom Schwerpunkt. Wirken auf einen beliebigen — starren oder instarren — Punkthaufen äußere Kräfte ein, so bewegt sich sein Schwerpunkt

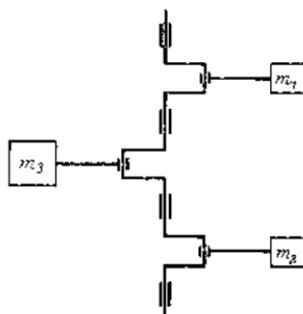


Fig. 91.

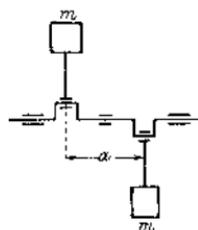


Fig. 92.

so, als ob die Masse des Haufens in ihm vereinigt wäre und alle Kräfte parallel zu ihrer wirklichen Richtung in ihm angriffen. Die Bewegungsgröße des Punkthaufens ist also gleich Gesamtmasse \times Schwerpunktschwindigkeit.

Z. B. beschreibt eine abgeschossene Granate unter dem Einfluß der Schwerkraft und der Anfangsgeschwindigkeit eine Parabel. Platzt die Granate in der Luft, so wird die Bewegung des Schwerpunktes der Granatenstücke dadurch nicht beeinflußt (das gilt jedoch nur für den luftleeren Raum).

5. Bewegt sich ein Punkthaufen unter dem Einfluß von Kräften, so müssen folgende Fälle unterschieden werden:

a) Es bestehen keine inneren Kräfte; dann ist die Arbeit der äußeren Kräfte gleich dem Zuwachs an kinetischer Energie. Dabei ist zu beachten, daß die Arbeit positiv ist, wenn die Bewegung in Richtung der Kraft erfolgt, negativ, wenn sie ihr entgegengesetzt ist, und daß kinetische Energie eine skalare, stets positive Größe ist.

b) Der Punkthaufen ist starr. Es bestehen dann wohl innere Kräfte, die aber keine Arbeit leisten können, da keine relative Bewegung in Richtung der Spannkraft erfolgen kann. Die Arbeit der äußeren Kräfte ist gleich dem Zuwachs an kinetischer Energie.

c) Der Punkthaufen ist nicht starr, aber es wirken innere Kräfte, dann ist die Arbeit der äußeren Kräfte gleich der Summe der Arbeit der inneren Kräfte und dem Zuwachs an kinetischer Energie.

b) Das Verhalten des starren Körpers unter dem Einfluß von Kräften.

1. Die Bewegung des Körpers infolge einer äußeren Kraft kann in eine Schiebung und eine Drehung um den Schwerpunkt zerlegt werden. Man kann die äußere Kraft P , deren Abstand vom Schwerpunkt a sei, ersetzen durch eine Kraft P' , die parallel und gleich P ist, und ein Kräftepaar vom Moment $P \cdot a$. Erstere erteilt der Masse, die man sich im Schwerpunkt vereinigt denken kann, eine Beschleunigung, die unabhängig von der Existenz des Kräftepaares ist, letztere eine Winkelbeschleunigung um den Schwerpunkt, die unabhängig von der Bewegung des Schwerpunktes ist.

2. Wirkt auf einen Körper, der sich nur um eine feste Achse drehen kann, eine Kraft ein, so ist

$$\text{Antriebsmoment } M = \int r^2 dm = J \cdot \varepsilon,$$

wobei M das Moment der Kraft, bezogen auf die Drehachse, J das Trägheitsmoment, bezogen auf die Drehachse, dm ein Differential der Masse, r sein Abstand von der Achse und ε die Winkelbeschleunigung bedeutet.

Unter dem Trägheitsmoment eines Körpers in bezug auf eine Achse versteht man $\int dm \cdot r^2$, d. h. die Summe aller Produkte aus den Massenteilchen multipliziert mit dem Quadrat ihres Abstandes von der Achse.

Dieser Ausdruck hat für jede Achse im allgemeinen einen andern Wert. Die kleinsten Werte ergeben sich für Achsen, die durch den Schwerpunkt des Körpers gehen. Ist J_s das Trägheitsmoment in bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende Achse s , J_a dasjenige in bezug auf die zur Achse s parallele Achse a (Fig. 93.), so ist $J_a = J_s + m e^2$, wenn e der Abstand der beiden Achsen voneinander ist.

Besteht ein Körper aus 2 Teilen I und II und sind die Trägheitsmomente in bezug auf eine Achse J_I bzw. J_{II} , so ist das Trägheitsmoment des ganzen Körpers in bezug auf diese Achse $J = J_I + J_{II}$.

Im folgenden sind die Trägheitsmomente einiger Körper angegeben, und zwar bedeutet J_s das Trägheitsmoment bezogen auf eine vertikale, J_x auf eine horizontale Schwerpunktsachse.

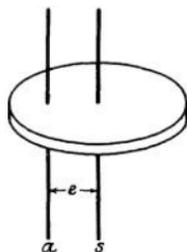


Fig. 93.

Zylinder vom Radius r , Höhe h , spezifisches Gewicht γ (Fig. 94):

$$J_z = \frac{m r^2}{2} = \frac{V \cdot \gamma}{g} \cdot \frac{r^2}{2} = \frac{\pi r^4 h \gamma}{2 g},$$

$$J_x = \frac{1}{4} m \left(\frac{1}{3} h^2 + r^2 \right) = \frac{1}{4} \pi r^2 h \left(\frac{1}{3} h^2 + r^2 \right) \frac{\gamma}{g}.$$

Zylindermantel von der Dicke δ , die sehr klein im Verhältnis zum Radius ist:

$$J_z = m r^2 = 2 \pi r^3 h \delta \frac{\gamma}{g},$$

$$J_x = \frac{m}{2} (r^2 + \frac{1}{3} h^2) = \pi r h \delta (r^2 + \frac{1}{3} h^2) \frac{\gamma}{g}.$$

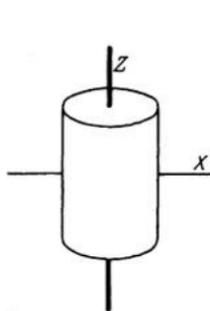


Fig. 94.

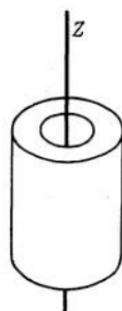


Fig. 95.

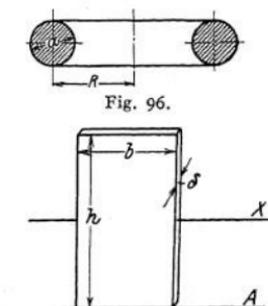


Fig. 96.

Fig. 97.

Hohlzylinder (äußerer Radius R , innerer r) (Fig. 95):

$$J_z = \frac{1}{2} m (R^2 + r^2) = \frac{\pi}{2} h (R^4 - r^4) \frac{\gamma}{g},$$

$$J_x = \frac{1}{4} m (R^2 + r^2 + \frac{1}{3} h^2).$$

Kugel vom Radius r :

$$J_z = J_x = \frac{2}{5} m r^2 = \frac{8}{15} \pi r^5 \frac{\gamma}{g}.$$

Kugelschale mit sehr geringer Dicke δ :

$$J_z = J_x = \frac{2}{3} m r^2 = \frac{8}{3} \pi r^4 \cdot \delta \frac{\gamma}{g}.$$

Ring (Fig. 96):

$$J_z = m (R^2 + \frac{1}{4} a^2).$$

Platte von geringer Dicke δ (Fig. 97):

$$J_x = \frac{1}{12} m h^2 = \frac{1}{12} b h^3 \delta \cdot \frac{\gamma}{g},$$

$$J_A = \frac{1}{3} m h^2 = \frac{1}{3} b h^3 \delta \frac{\gamma}{g}.$$

Schräge Platte (Fig. 98):

$$J = \frac{m h^2}{12} + m \left(a + \frac{h}{2} \right)^2 = \frac{m h^2}{3} + m a (a + h).$$

NB. Beim Auswerten der Formeln ist darauf zu achten, daß die Einheiten gleichmäßig eingesetzt werden, also entweder alles in Metern oder alles (auch die Erdbeschleunigung) in Zentimetern.

Die Arbeit der Kraft ist, wenn M das Moment bezogen auf die Drehachse ist,

$$A = \int M \cdot d\varphi = \left(\frac{\omega^2}{2} - \frac{\omega_0^2}{2} \right) \int r^2 dm = J \left(\frac{\omega^2}{2} - \frac{\omega_0^2}{2} \right).$$

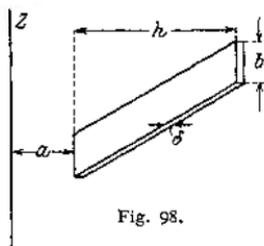


Fig. 98.

Das Moment der Bewegungsgröße oder der Drall eines rotierenden Körpers ist

$$\mathfrak{D} = \int dm \cdot v \cdot r = \int dm r^2 \omega = J \omega.$$

In Beispiel S. 255 wird also

$$J \omega_{(\text{Anker})} = J \omega_{(\text{Feld})}.$$

Die kinetische Energie des um eine feste Achse rotierenden Körpers ist:

$$L = J \frac{\omega^2}{2}.$$

Die kinetische Energie eines Getriebes z. B. eines Zahnradvorgeleges ist gleich der Summe der kinetischen Energien der Teile, also

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \dots$$

Ein rotierender Körper kann also, obgleich sein Schwerpunkt ruht, sehr viel kinetische Energie besitzen (Schwungrad).

Versteht man unter k die Länge des Dreharmes, in dessen Endpunkt die Masse eines Körpers vom Gewicht G konzentriert werden muß, um das gleiche J zu geben, das der Körper besitzt, und setzt man $D = 2k$, so ist:

$$J = \frac{G}{g} k^2 = \frac{G D^2}{4}.$$

$G D^2 = 4 g J$ heißt Schwungmoment, seine Dimension ist kg/m^2 .

Beispiel: Wie groß muß das Schwungmoment eines Schwungrades sein, das A m/kg abgeben soll, während sich seine Tourenzahl von n_1 auf n_2 pro Minute ermäßigt?

Es ist $\omega = \frac{\pi n}{30}$, demnach

$$\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30}, \quad \omega_2 = \frac{\pi n_2}{30}.$$

Der Energieinhalt des Rades zu Anfang war

$$L_1 = \frac{J \omega_1^2}{2} = \frac{J \pi^2 n_1^2}{2 \cdot 900};$$

nach Abgabe der Arbeit ist er

$$L_2 = J \frac{\pi^2 n_2^2}{1800}.$$

Demnach ist

$$A = L_1 - L_2 = J \frac{\pi^2}{1800} (n_1^2 - n_2^2) = \frac{G D^2}{4 g} \frac{\pi^2}{1800} (n_1^2 - n_2^2) \quad \text{und}$$

$$G D^2 = \frac{A \cdot 4 g \cdot 1800}{\pi^2 (n_1^2 - n_2^2)} \approx \frac{A \cdot 7200}{n_1^2 - n_2^2}.$$

Bei Berechnung von Vorgelegen usw. vereinfacht es oft die Rechnung, wenn man sich alle Massen auf eine Welle reduziert denkt. Hat ein Körper ein Träg-

heitsmoment J und eine Winkelgeschwindigkeit ω , so kann man angeben, welche Masse m_i in einem Punkt am Ende eines Radius l mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 konzentriert werden muß, damit ihr Energieinhalt der gleiche wie der des Körpers sei. Es ist:

$$(m_i l^2) \cdot \frac{\omega_0^2}{2} = J \frac{\omega^2}{2},$$

$$m_i = \frac{J}{l^2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{J}{l^2} \cdot \frac{n^2}{n_0^2};$$

m_i heißt reduzierte Masse. Hierbei sind l und n_0 willkürlich.

3. Rotiert ein Körper um eine festgelagerte Achse, die nicht durch seinen Schwerpunkt geht, so übt die Masse auf die Achse eine Zentrifugalkraft $C = m \cdot r \omega^2$ aus, wobei r der Abstand des Schwerpunktes von der Achse ist. Die Wirkungslinie der Zentrifugalkraft geht durch den Schwerpunkt und die Drehachse. Die Zentrifugalkraft wird in den Lagern Reaktionen hervorrufen, die stets die entgegengesetzte Richtung von C haben und sich gemäß Fig. 99 für A zu

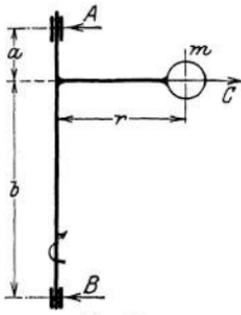


Fig. 99.

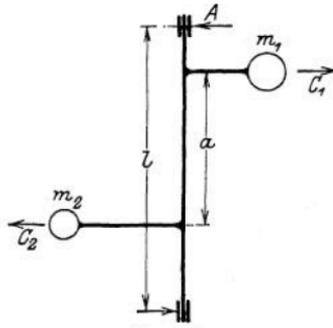


Fig. 100.

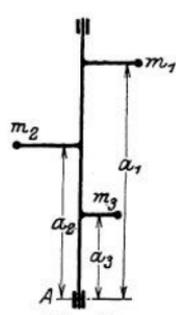


Fig. 101.

$C \cdot \frac{b}{a+b}$ und für B zu $C \cdot \frac{a}{a+b}$ berechnen. Die Reaktionen in A und B ändern ständig ihre Richtung, führen also zu einer sehr schädlichen Beanspruchung der Lager. Ordnet man gemäß Fig. 100 die Massen so an, daß sie in einer Ebene liegen und $m_1 r_1 = m_2 r_2$ ist, so geht zwar die Achse durch den Schwerpunkt des Massensystems, trotzdem aber treten in den Lagern Reaktionen auf. Es ist zwar $C_1 = m_1 r_1 \omega^2 = m_2 r_2 \omega^2 = C_2$, aber C_1 und C_2 bilden ein Kräftepaar von dem Moment $C \cdot a$. Demgemäß sind die Reaktionen in den Lagern

$$A = B = \frac{C \cdot a}{l}.$$

Erst die Anordnung nach Fig. 101, wo $m_1 r_1 a_1 + m_3 r_3 a_3 = m_2 r_2 a_2$, und alle Massen in einer Ebene liegen, ergibt keine Reaktionen in den Lagern.

Dynamisches Gleichgewicht tritt auf, wenn:

$$1. \sum m \cdot r \cos \alpha = 0,$$

wobei $r \cos \alpha$ die Projektion des Schwerpunktsabstandes auf eine beliebige Ebene ϵ (Fig. 102) ist.

$$2. \sum m \cdot r \cdot a = 0.$$

wobei a den Abstand der Wirkungslinie der Zentrifugalkraft von irgendeinem Punkte angibt.

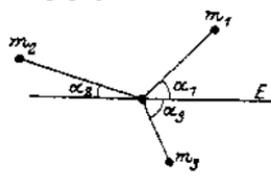


Fig. 102.

Eine Achse, die diesen Bedingungen genügt z. B. Fig. 101, heißt eine freie Achse; bei ihr treten Lagerreaktionen wegen der Zentrifugalkräfte nicht auf.

4. Ein Körper, der unter dem Einfluß der Schwerkraft um eine durch ihn, aber nicht durch seinen Schwerpunkt gehende Achse schwingen kann, heißt ein physisches Pendel. In Fig. 103 bedeutet O den Aufhängepunkt, S den Schwerpunkt des Körpers und e den Abstand des Schwerpunktes vom Aufhängepunkt. Der Körper wird um O schwingen, und zwar ist die Dauer einer vollen Schwingung



Fig. 103.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{G \cdot e}},$$

die Dauer einer einfachen Schwingung

$$t = \pi \sqrt{\frac{J}{G e}},$$

wobei J das Trägheitsmoment in bezug auf O bedeutet. Vergleicht man das physische Pendel mit einem mathematischen von derselben Schwingungsdauer, so ist dessen Länge (die reduzierte Pendellänge)

$$l = \frac{J}{m e}.$$

Trägt man l auf OS von O aus bis A ab, so ist A der Schwingungsmittelpunkt des Pendels. Vertauscht man Schwingungsmittelpunkt und den Aufhängepunkt, so ändert sich die Schwingungszeit nicht.

Man kann die Schwingungen eines physischen Pendels zur Bestimmung des Trägheitsmomentes des schwingenden Körpers benutzen.

Es ist:

$$t = \pi \sqrt{\frac{J}{G \cdot e}},$$

also:

$$J = \frac{A^2 G e}{\pi^2} = 364,76 \frac{G e}{n^2},$$

wobei n die Zahl der einfachen Schwingungen in der Sekunde ist. G ist in kg , e in cm zu messen. Das Trägheitsmoment in bezug auf eine zur Schwingungsachse parallele, durch den Schwerpunkt gehende Achse ist:

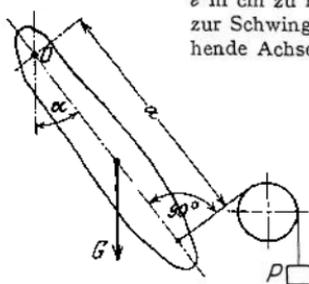


Fig. 104.

$$J_s = 364,76 \frac{G e}{n^2} - \frac{G}{g} e^2,$$

wobei $g = 981 \text{ cm/sek}^2$ zu setzen ist.

Die Lage des Schwerpunktes größerer unregelmäßiger Körper findet man durch Versuch nach Anordnung der Fig. 104.

Es ist:

$$G \cdot e \sin \alpha = P \cdot a, \text{ mithin } e = \frac{P a}{G \sin \alpha}.$$

5. Bewegt sich ein fester Körper derart, daß er sich um seinen Schwerpunkt dreht, und dieser selbst eine Bewegung ausführt, so setzt sich seine kinetische Energie aus 2 Teilen zusammen, und zwar ist:

$$E = \frac{m v^2}{2} + \frac{J \omega^2}{2},$$

wobei v die Geschwindigkeit des Schwerpunktes und ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um den als ruhend gedachten Schwerpunkt bedeutet.

Der Satz der Arbeit (Anfangsenergie = Endenergie + abgegebene Arbeit) lautet jetzt in allgemeinerer Form:

$$\frac{m v_1^2}{2} + \frac{J \omega_1^2}{2} = \frac{m v_2^2}{2} + \frac{J \omega_2^2}{2} + A$$

oder:

$$A = m \left(\frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} \right) + J \left(\frac{\omega_1^2}{2} - \frac{\omega_2^2}{2} \right)$$

oder, wenn sich der Körper in einem wirbelfreien Kraftfeld bewegt und π seine potentielle Energie bedeutet:

$$\frac{m v^2}{2} + \frac{J \omega^2}{2} + \pi = \text{konst.}$$

Zu beachten ist, daß v und ω gewöhnlich zueinander in Beziehung stehen.

Beispiel (Fig. 105): Ein voller Kreiszyylinder von der Masse m und dem Radius r rollt ohne zu gleiten eine schiefe Ebene von der Höhe h herab. Mit welcher Geschwindigkeit kommt er unten an, wenn die rollende Reibung vernachlässigt werden kann?

$$\text{Es ist } J = \frac{m r^2}{2}, \quad v = r \omega; \quad \omega = \frac{v}{r}.$$

Die von der Schwerkraft geleistete Arbeit sei A .

$$A = m \cdot g \cdot h = \frac{m v^2}{2} + \frac{J \omega^2}{2} = \frac{m v^2}{2} + \frac{m r^2 v^2}{2 \cdot 2 r^2} = \frac{m v^2}{2} + \frac{m v^2}{4};$$

$$g h = \frac{3}{4} v^2,$$

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} g h},$$

d. h. der Schwerpunkt hat also eine geringere Geschwindigkeit als diejenige, die er haben würde, wenn er, ohne zu rotieren, die Ebene herabgleiten würde.

Damit sich aber der Vorgang in der angenommenen Weise abspielen kann, ist es notwendig, daß die Ebene dem Gleiten einen Widerstand entgegensetzt. Denn wenn sie absolut glatt wäre, würde ein Gleiten ohne Rollen stattfinden. Die Tatsache, daß der Körper rollt, zeigt, daß auf ihn eine nicht durch den Schwerpunkt gehende äußere Kraft einwirkt. Das kann nur die gleitende Reibung sein. Wie groß muß diese sein, damit ein Gleiten ganz ausgeschlossen ist?

Auf den Körper wirken in Richtung der Ebene ein 1. die Komponente des Gewichtes $G \sin \alpha$ nach links unten, 2. die Reibung R nach rechts oben. Für die Beschleunigung p des Schwerpunktes gilt demnach

$$m g \sin \alpha - R = m p.$$

Bezogen auf den Schwerpunkt, wirkt auf den Körper das Moment $R r$, das die Winkelbeschleunigung ϵ bewirkt. Es ist

$$R r = J \cdot \epsilon.$$

Ferner ist $p = r \epsilon$.

Demnach ist

$$m g \sin \alpha - R = m r \epsilon,$$

$$\epsilon = \frac{R \cdot r}{J}, \quad \text{also}$$

$$m g \sin \alpha - R = \frac{m R r^2}{J},$$

$$R = \frac{m g \sin \alpha}{1 + \frac{J}{m r^2}};$$

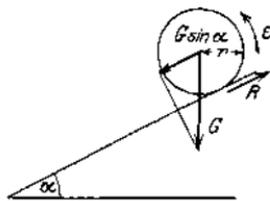


Fig. 105.

da im vorliegenden Falle $J = \frac{m r^2}{2}$ ist, so muß $R = \frac{m g \sin \alpha}{1 + 2} = \frac{m g \sin \alpha}{3}$ sein, wenn Gleiten ausgeschlossen sein soll. Da ferner $R = \mu G \cos \alpha$ ist, so ist

$$\mu G \cos \alpha = \frac{m g \sin \alpha}{3} = \frac{G \sin \alpha}{3}, \quad \mu = \frac{\text{tg } \alpha}{3},$$

wobei μ der Koeffizient der gleitenden Reibung ist.

Soll der Widerstand der rollenden Reibung ($R_r = \mu_r \cdot G \cos \alpha$) berücksichtigt werden, so ist die Arbeitsgleichung wie folgt zu schreiben:

$$mgh = \frac{m v^2}{2} + \frac{J \omega^2}{2} + \mu_r \cdot G \cos \alpha \cdot \frac{h}{\sin \alpha},$$

woraus für vorliegendes Beispiel folgt:

$$v = \sqrt{\frac{2}{3} g h (1 - \mu_r \cotg \alpha)}.$$

c) Bewegungen von Stabverbindungen unter dem Einfluß von Kräften.

Dreht sich ein Stab AB um Punkt A , der seinerseits nicht beschleunigt wird, so erfährt Punkt B eine Beschleunigung b_B , die sich aus einer nach A gerichteten und einer auf AB senkrecht stehenden Komponente zusammensetzt (siehe S. 219).

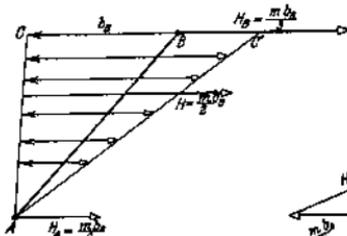


Fig. 106.

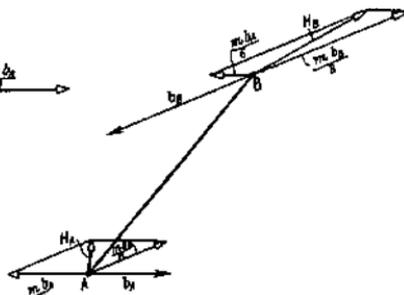


Fig. 107.

Zur Bestimmung der Kraft, die den Stab in diesen Zustand versetzen kann, denke man sich die d'Alembertschen Ergänzungskräfte angebracht, denen die äußere Kraft das Gleichgewicht zu halten hat. Die Beschleunigungen der einzelnen Massenteilchen werden direkt proportional der Annäherung an Punkt A kleiner, sie bilden (s. Fig. 106) das Dreieck ABC . Wird jedes Massenteilchen mit der zugehörigen Beschleunigung multipliziert und trägt man die so erhaltenen Größen entgegengesetzt den Beschleunigungen an, so erhält man das Dreieck der Ergänzungskräfte ABC' , vorausgesetzt, daß die Masse m der Stange gleichmäßig über die ganze Länge verteilt, der Stab also von prismatischer Form ist.

Die Resultierende der Ergänzungskräfte ist gleich $\frac{m \cdot b_B}{2}$, da die mittlere Beschleunigung gleich $\frac{b_B}{2}$ ist, und sie geht durch den Schwerpunkt des Dreiecks ABC' , teilt also die Gerade AB im Verhältnis 1 : 2. Man kann sich nun, wenn die Formänderungen des Stabes AB außer Betracht bleiben können, H in zwei parallele, in A und B angreifende Kräfte zerlegt denken. Dann ist $H_A = \frac{m}{3} \cdot b_B$ und $H_B = \frac{m}{6} \cdot b_B$. Die äußeren Kräfte, welche die Beschleunigung hervorrufen, die Gelenkdrücke, sind gleich H_A bzw. H_B , aber entgegengesetzt gerichtet. Erfährt Punkt A des Stabes AB die Beschleunigung b_A und Punkt B die Beschleunigung b_B , so lassen sich die Gelenkdrücke nach Fig. 107 ermitteln. Man hat in A anzubringen:

1. die Kraft $\frac{m}{3} b_A$ entgegengesetzt zu b_A ,
2. die Kraft $\frac{m}{6} b_B$ entgegengesetzt und parallel zu b_B .

In B :

1. die Kraft $\frac{m}{6} \cdot b_A$ entgegengesetzt und parallel zu b_A ,
2. die Kraft $\frac{m}{3} b_B$ entgegengesetzt zu b_B .

Die Resultierenden ergeben die Kräfte H_A und H_B ; die von außen auf den Stab einwirkenden Kräfte, welche also den Beschleunigungszustand hervorgerufen, halten diesen d'Alembertschen Kräften das Gleichgewicht.

Es sei die Vierzylinderkette $ABCD$ (Fig. 108) gegeben, deren Stab BC über B hinaus verlängert sei. Ferner seien der Geschwindigkeits- und der Beschleunigungszustand bekannt (vgl. S. 233). Es ist die Größe der in gegebener Richtung wirkenden, bei E angreifenden Kraft P zu bestimmen, welche diesen Beschleunigungszustand hervorzurufen vermag (Berücksichtigung des Massendruckes des Steuerungsgestänges bei Bestimmung der Spannung der Ventilsfeder von Dampfmaschinen).

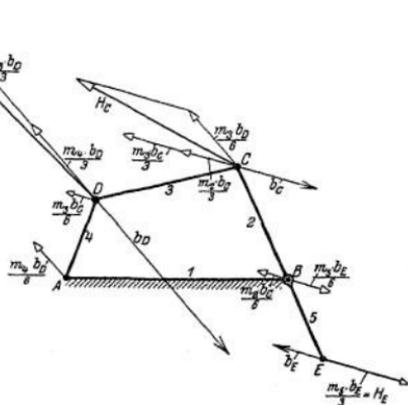


Fig. 108.

Zur Lösung der Aufgabe ist es erforderlich, zunächst an den Gelenken die sich ergebenden d'Alembertschen Kräfte anzubringen. Das sind

$$\text{Punkt A: } \frac{m_1}{6} b_D;$$

$$\text{Punkt B: } \frac{m_2}{6} b_E, \quad \frac{m_2}{6} b_C;$$

$$\text{Punkt C: } \frac{m_3}{6} b_D, \quad \frac{m_3}{3} b_C, \quad \frac{m_3}{3} \cdot b_C;$$

$$\text{Punkt D: } \frac{m_4}{3} b_D, \quad \frac{m_3}{3} b_D, \quad \frac{m_3}{6} b_C;$$

$$\text{Punkt E: } \frac{m_5}{3} b_E.$$

Setzt man die in den einzelnen Punkten wirkenden Kräfte zusammen, so erhält man die Resultierenden H_D , H_C und H_E .

Die Drücke in A und B sind für die vorliegende Aufgabe ohne Belang, da sie durch das Gestell AB aufgenommen werden. In Fig. 109 ist die Kette mit den Kräften H_D , H_C und H_E noch einmal herausgezeichnet. Um die Kraft P zu bestimmen, welche diesen drei Kräften das Gleichgewicht hält, muß man zunächst H_E in Richtung von P und EB zerlegen. Die Komponente EN wirkt P entgegen, die andere verursacht nur innere Spannungen. Die Kraft H_D ist in Richtung der Stäbe 3 und 4 zu zerlegen. Die Komponente in Richtung des

Stab 4 wird in A vom Gestell aufgenommen, die andere wirkt auf das Gelenk C ein. Verlegt man diese Komponente nach C , die Strecke CK , und addiert den Vektor H_C hinzu, so gelangt man zum Punkt L . Die resultierende Kraft CL , die in Fig. 109 nicht eingezeichnet ist, zerlegt man wiederum in Richtung der Kraft P und in diejenige von Stab 2. Die Komponente CM kann man bezüglich

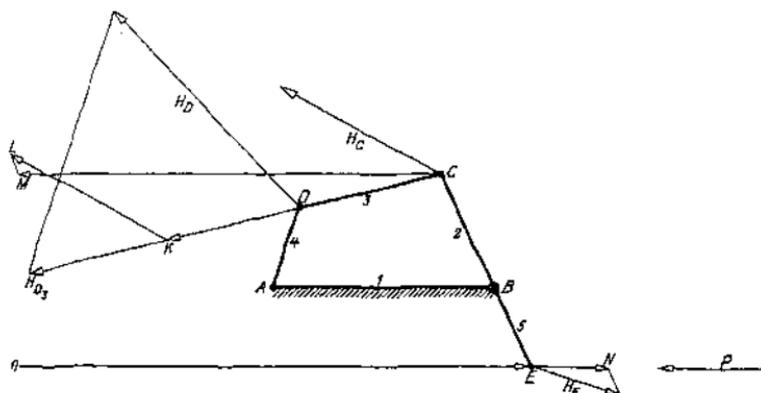


Fig. 109.

ihrer Drehwirkung auf den Stab 2 ersetzen durch die Kraft OE , wenn $OE = MC \cdot \frac{CB}{BE}$. Die Kraft P ist dann gleich $OE + EN$ und diesen beiden Kräften entgegengesetzt gerichtet.

1. Der Stoß.

Treffen zwei Massen mit ungleicher Geschwindigkeit aufeinander, so erfahren sie einen Stoß. Jede der Massen hat nach dem Stoß eine andere Geschwindigkeit als vorher. Die Geschwindigkeitsänderung ist die Folge der im Berührungspunkt auftretenden Stoßkraft, die nur eine äußerst — nahezu unendlich — kurze Zeit wirkt. Die Wirkungslinie steht senkrecht auf der Tangentialebene im Berührungspunkt der beiden Massen. Geht die Wirkungslinie durch die Schwerpunkte beider Massen, so ist der Stoß zentrisch, andernfalls exzentrisch. Liegen beide Geschwindigkeiten in der Stoßlinie, so ist der Stoß gerade, andernfalls schief.

a) Gerader zentrischer Stoß.

Die Massen m_1 und m_2 haben vor dem Stoß die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 .



Fig. 110.

Da die Stoßkraft als eine innere Kraft des Systems zu betrachten ist, erfährt die Bewegungsgröße durch den Stoß keine Veränderung. (Fig. 110).

Der Stoß läßt sich in 2 Perioden teilen.

Die 1. Periode rechnet von der ersten Berührung bis zu dem Augenblick, in dem der Abstand der Schwerpunkte ein Minimum wird, die 2. Periode von hier bis zur Trennung der beiden Körper voneinander. Die 1. Periode tritt bei jedem Stoß auf, ob die Körper elastisch oder unelastisch sind, die zweite fehlt bei vollkommen unelastischen Körpern.

1. Periode. Die am Ende der 1. Periode beiden Körpern gemeinsame Geschwindigkeit ergibt sich, da die Bewegungsgröße des Systems konstant bleiben muß, zu

$$c = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Die verschwundene kinetische Energie

$$E = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2$$

hat sich bei vollkommen unelastischen Körpern in Wärme, bei vollkommen elastischen in potentielle Energie (Federungsarbeit), bei unvollkommen elastischen teils in Wärme, teils in potentielle Energie umgesetzt.

2. Periode. Sie tritt nur bei vollkommen oder unvollkommen elastischen Körpern, nicht bei vollkommen unelastischen auf. Die Geschwindigkeiten nach dem Stoß sind für vollkommen elastische Körper:

$$c_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2},$$

$$c_2 = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Besondere Fälle:

$$m_1 = m_2; \quad \text{es wird} \quad c_1 = v_2, \quad c_2 = v_1.$$

Ist m_1 eine feste Wand, also $v_1 = 0$, $m_1 = \infty$, so ist $c_2 = -v_2$.

Ein Verlust an kinetischer Energie findet bei vollkommen elastischem Stoß nicht statt.

Sind die Körper — wie alle wirklichen — unvollkommen elastisch, so sind die Geschwindigkeiten nach dem Stoß:

$$c_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_2 (v_1 - v_2) K}{m_1 + m_2}.$$

$$c_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_1 (v_1 - v_2) K}{m_1 + m_2}.$$

Dabei ist die Stoßziffer K ein Maß für die Unvollkommenheit des elastischen Verhaltens der Körper.

Ist $m_1 = \infty$, $v_1 = 0$, so wird

$$c_2 = v_2 K; \quad \text{also} \quad \frac{c_2^2}{2g} = \frac{v_2^2 K^2}{2g},$$

$$K^2 = \frac{\frac{c_2^2}{2g}}{\frac{v_2^2}{2g}} = \frac{h}{H}.$$

K^2 wird demnach bestimmt als das Verhältnis der Fallhöhe zur Höhe des Rückpralles einer Kugel, die auf eine feste Platte aus gleichem Material herabfällt. K ist stark abhängig von der Geschwindigkeit der stoßenden Körper. Für Elfenbein ist $K = 8/9$, Stahl $K = 5/9$, Holz $K = 1/2$.

Der Energieverlust beim unvollkommen elastischen Stoß ist:

$$E = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1^2 - v_2^2) (1 - K^2).$$

b) Gerader exzentrischer Stoß.

Zwei Körper, die mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 um parallele Achsen A_1 und A_2 rotieren, stoßen in einem Punkte zusammen, der die Entfernungen a_1 und a_2 von den Achsen hat.

Setzt man $m_1 = \frac{J_1}{a_1^2}$ und $m_2 = \frac{J_2}{a_2^2}$, wobei J die Trägheitsmomente, bezogen auf die jeweilige Drehachse, sind, ferner $v_1 = a_1 \omega_1$ und $v_2 = a_2 \omega_2$, so gelten die oben angegebenen Formeln. Die Achse z. B. A_2 erfährt nur dann durch den Stoß keine Beanspruchung (Prellung), wenn der Stoßpunkt der Schwingungsmittelpunkt des Körpers A ist, wenn dieser als physisches Pendel um A_2 pendelnd gedacht wird. Es muß dann also sein $a_2 = \frac{J_2}{m_2 e_2}$, wobei e_2 der Abstand des Schwerpunktes von A_2 ist.

2. Das Kraftfeld.

Steht ein Raum derart unter dem Einfluß eines Körpers A , daß auf einen zweiten in den Raum eingeführten Körper B eine Kraft ausgeübt wird, die je nach der Stellung von B im Raume veränderlich ist, so heißt der Raum das Kraftfeld von A . Z. B.: elektrische Anziehung, Gravitation, elastische Rückwirkung einer zusammengedrückten Feder usw., aber nicht Reibung.

Die Größe der Kraft, welche auf eine Masse m ausgeübt wird, ist ein Maß für die Feldstärke an der Stelle, an der sich die Masse befindet. Es ist die

$$\text{Feldstärke } i = \frac{P}{m};$$

$$P = m i.$$

Die Feldstärke ist eine gerichtete Größe. Ihre Richtung stimmt mit derjenigen der Kraft überein. Die Dimension der Feldstärke ist im technischen Maßsystem $\frac{\text{m}}{\text{sek}^2}$, im absoluten $\frac{\text{cm}}{\text{sek}^2}$, also gleich der einer Beschleunigung.

Zieht man in einem Kraftfelde eine Linie derart, daß ihre Tangente stets die Richtung der im Berührungspunkte herrschenden Kraft hat, so ist sie eine Kraftlinie. (Die Kraftlinien eines magnetischen Feldes lassen sich durch Eisenfeilspäne sichtbar machen.)

Eine Fläche, die stets senkrecht zu den sie schneidenden Kraftlinien steht, heißt Niveaufläche.

Spezielle Kraftfelder sind:

Das homogene Kraftfeld. Die Kraftlinien sind geradlinig und parallel. Die Niveauflächen sind Ebenen. Beispiel: das Schwerfeld in der Nähe der Erdoberfläche, solange man die Krümmung der Erde vernachlässigen kann.

Das Zentralkraftfeld. Die Kraftlinien sind geradlinig und schneiden sich alle in einem Zentralpunkt, die Niveauflächen sind konzentrische Kugeln. Beispiel: Das Schwerfeld, wenn die Krümmung der Erde bzw. der gravitierenden Massen berücksichtigt werden muß, das Feld einer punktförmigen, elektrischen Masse.

Wird eine Masse im Kraftfelde verschoben, so wird im allgemeinen Arbeit geleistet oder verbraucht. Nur wenn die Bewegung auf einer Niveaufläche erfolgt, ist die Arbeit gleich Null. Sie ist ein Maximum, wenn die Bewegung in Richtung der Kraftlinien erfolgt.

Die Arbeit V , die geleistet werden muß, um die Masse m entgegen der Einwirkung des Feldes aus dem Unendlichen an seine Stelle zu bringen, ist das Potential der Masse im Felde.

$$V = \int_{z, y, z}^{\infty} P \, ds \cos \alpha,$$

wenn $x y z$ die Koordinaten des Punktes sind und α die Neigung der Verschiebung gegen die Kraft.

Das Potential hat als Arbeitsgröße die Dimension mkg und ist skalarer Natur.

Wird eine Masseneinheit aus einer Stelle mit dem Potential V_a nach einer solchen mit dem Potential V_b bewegt, so ist die geleistete Arbeit:

$$A = V_a - V_b .$$

ist also nur von der Potentialdifferenz und nicht vom Wege abhängig. Wird der Punkt auf irgendeinem Wege wieder von A nach B gebracht (Fig. 111), so ist:

$$A' = V_b - V_a ,$$

also:

$$A' + A = 0 .$$



Fig. 111.

In diesem Kreisprozeß ist Arbeit weder gewonnen, noch aufgewendet worden.

Ist ein Massenpunkt von der Masse m frei beweglich, so wird bei einer Verschiebung im Felde die aufgenommene Arbeit in kinetische Energie umgewandelt. Dann ist also:

$$A = m \cdot V_a - m \cdot V_b = \frac{m v_b^2}{2} - \frac{m v_a^2}{2} .$$

Mithin ist:

$$m \cdot V_a + \frac{m v_a^2}{2} = m \cdot V_b + \frac{m v_b^2}{2} .$$

Bezeichnet man noch $m \cdot V_a$ mit Π_a als potentielle Energie der Masse an der Stelle A , so ist:

$$\Pi_a + \frac{m v_a^2}{2} = \Pi_b + \frac{m v_b^2}{2} ,$$

d. h. bei einer Bewegung eines Massenpunktes unter dem Einfluß eines Potentials ist die Summe der kinetischen und potentiellen Energie konstant.

Erfolgt die Verschiebung in Richtung der Kraftlinie, so ist:

$$V = \int P ds , \quad \text{also} \quad P = \frac{dV}{ds} .$$

Die Kraft des Feldes ist also die Ableitung des Potentials nach Richtung der Kraft.

Erfolgt die Verschiebung in anderer als der Richtung der Kraft, so ist, wenn α der Winkel zwischen P und ds ist:

$$V = \int P \cos \alpha \frac{ds}{\cos \alpha} ; \quad P' = \frac{\partial V}{\partial s} ,$$

d. h. die Kraftkomponente nach irgendeiner Richtung ist die partielle Ableitung des Potentials nach dieser Richtung.

Der Ausdruck $\frac{\partial V}{\partial s}$ heißt auch Potentialgefälle. Da der Wert $dV = P ds$, die Arbeitsleistung bei Verschiebung in Richtung der Kraft, größer ist als bei Verschiebung nach jeder andern Richtung um den gleichen Betrag, so hat das Potentialgefälle in Richtung der Kraftlinie seinen größten Wert. In Richtung der Niveaufläche ist das Potentialgefälle gleich Null.

Ist die Größe des Potentials für jeden Punkt des Raumes, der durch die Koordinaten x, y, z gekennzeichnet sei, durch eine Funktion $U = f(x, y, z)$,

die Potentialfunktion, gegeben, so sind die Komponenten in Richtung der X - bzw. Y - bzw. Z -Achse.

$$P_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad P_y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad P_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Wirken auf einen Punkt mehrere Potentialfelder ein, so ist:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 \dots$$

Sind die Kräfte in einem Raum durch eine Potentialfunktion gegeben, so heißt er wirbelfrei, ist das nicht der Fall, so ist er nicht wirbelfrei. In einem nicht wirbelfreien Feld (z. B. bei Vorhandensein von Reibung und bei Energieabfuhr in anderer als mechanischer Form, wie bei einem Dynamoanker) ist die Arbeit eines Massenpunktes, der einen geschlossenen Weg durchläuft, nach Rückkehr in seine Anfangslage nicht gleich Null. Die aufgewandte Arbeit ist vom Wege abhängig.

Beispiel: 1. Ziehen sich die Massen m_1 und m_2 an, so ist

$$P = K \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \text{ (Newtons Gravitationsgesetz),}$$

$$V = - \int_{\infty}^r P \cdot d\tau = -K \cdot \frac{m_1 m_2}{r}.$$

(Das $-$ Zeichen ist notwendig, da bei einer Annäherung Krafterichtung und Verschiebungsrichtung entgegengesetzt sind.)

Ist der eine Körper ausgedehnt, so ist

$$V = -K m_1 \int \frac{dm_2}{r}.$$

2. In einer mit M_1 Masseneinheiten pro qcm belegten Hohlkugel (Fig. 112) befinde sich ein Massenpunkt P mit der Masse M_2 . Welche Kraft wird auf ihn ausgeübt?

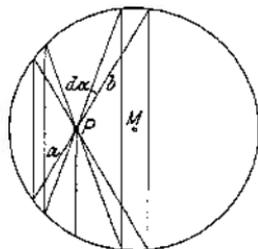


Fig. 112.

P teile die Sehnen in die Teile a und b .

Man denke sich zwei Doppelkegel in die Hohlkugel gelegt, deren gemeinsame Spitze in P liegt und deren gemeinsame Achse PM ist. Die Winkel an der Spitze seien um $d\alpha$ verschieden. Durch die Kegel werden links und rechts Kugelzonen R_l und R_r herausgeschnitten, deren Inhalte und darum auch deren Massen sich verhalten

$$\frac{dm_l}{dm_r} = \frac{R_l}{R_r} = \frac{a^3}{b^3}.$$

Die von den Kugelzonen auf P ausgeübte Kraft ist

$$dK = K \cdot \frac{m_2}{0} \left(\frac{dm_l}{a^2} - \frac{dm_r}{b^2} \right).$$

Da der Klammerausdruck gleich Null wird, ist $dK = 0$, und da das gleiche für alle Kugelzonen gilt, so wird $K = 0$. Die Ebene durch P senkrecht zu PM teilt die Hohlkugel in zwei Teile, deren Einwirkungen auf P sich gegenseitig aufheben. Das gilt für jede Lage des Punktes.

Da $K = 0$ ist, ist $V = \int K ds = C$, d. h. das Potential ist in dem ganzen inneren Raum der Hohlkugel konstant. (NB. Es ist im vorliegenden Fall unzulässig, sich die Masse der Hohlkugel in ihrem Schwerpunkt vereinigt zu denken.)

II. Statik starrer Körper.

Bearbeitet von Dipl.-Ing. H. Winkel.

Die Statik untersucht die Bedingungen, unter denen sich die auf einen Körper wirkenden Kräfte im Gleichgewicht befinden.

Mehrere Kräfte sind an einem Körper im **Gleichgewicht**, wenn der Körper unter dem Einfluß der Kräfte seine Lage nicht verändert, d. h. wenn er in Ruhe bleibt.

Man faßt die Kraft auf als Druck, den die Masse auf eine Unterlage ausübt, und setzt als **Einheit der Kraft** den Druck fest, den die Masse von 1 cdm Wasser bei 4° C im luftleeren Raume in Paris ausübt, und bezeichnet sie als kg; es ist also 1 kg die Kraft, mit der die Masse von 1 cdm Wasser bei 4° C im luftleeren Raume in Paris von der Erde angezogen wird (statischer Kraftbegriff).

Man sagt: die Kraft wirkt in einer Richtung und versteht unter der **Richtung der Kraft** die Richtung, nach der sich der angegriffene Körper bewegen würde, wenn er frei beweglich wäre. Die Kraft ist demnach durch die Angabe von Größe und Richtung bestimmt, sie ist eine **gerichtete** oder **Vektorgröße**. Zur eindeutigen Bestimmung einer Kraft bedarf es noch der Angabe des **Angriffspunktes**.

Wie jede Vektorgröße wird auch die Kraft dargestellt durch eine gepfeilte Strecke, deren Länge ein Maß für die Größe der Kraft ist; der Pfeil bestimmt die Richtung der Kraft. Die Angabe des **Maßstabes** ermöglicht die Messung von Kräften; er hat die Form: $1 \text{ cm} = a \text{ kg}$; z. B. wird durch eine Strecke von $b \text{ cm}$ Länge eine Kraft von $P = b \text{ cm} \cdot a \text{ kg/cm} = (a \cdot b) \text{ kg}$ dargestellt.

Die graphische Darstellung der an einem Körper angreifenden Kräfte heißt **Kräfteplan**; soll er eine Berechnung ermöglichen, so darf die Angabe des Kräftemaßstabes nicht fehlen.

Greifen mehrere Kräfte in der Weise an einem Körper an, daß ihre Wirkung gleich Null ist, so sagt man: der Körper ist unter dem Einfluß der Kräfte im **Gleichgewicht**; die Lage des Körpers heißt die **Gleichgewichtslage**.

Das Gleichgewicht heißt **stabil**, wenn der Körper, ein wenig aus der Gleichgewichtslage gebracht, von den Kräften in die Gleichgewichtslage zurückgeführt wird, **labil**, wenn er noch mehr aus ihr entfernt, **indifferent**, wenn jede neue Lage wieder eine Gleichgewichtslage ist.

Die Gerade, in der eine Kraft wirkt, heißt **Wirkungslinie**; auf ihr darf der Angriffspunkt einer Kraft beliebig verschoben werden.

Man spricht von **starr**en Körpern und nimmt dabei an, daß die gegenseitige Lage der einzelnen Teile des Körpers durch den Angriff von Kräften nicht beeinflußt wird. Da es vollkommen starre Körper nicht gibt, so lassen sich die Sätze der Statik nur dann anwenden, wenn der Körper unter dem Einfluß von Kräften **geringe Formänderungen** erleidet.

A. Kräfte in der Ebene.

1. Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften mit demselben Angriffspunkt.

Da Kräfte Vektoren sind, so erhält man als **Mittelkraft** zweier in A (Fig. 1) angreifenden Kräfte die geometrische Summe von P_1 und P_2 , d. h. man fügt P_1 und P_2 der Größe und Richtung nach aneinander, dann gibt die Verbindungslinie des Anfangspunktes a mit dem Endpunkt c des Kräftezuges ein Maß für die Größe der Resultante; ihr Angriffspunkt ist A (Parallelogramm der Kräfte). Ist die Resultante R in zwei **Seitenkräfte** P_1 und P_2 zu zerlegen, deren Richtungen

gegeben sind, so bildet man das Kräfte-dreieck abc bzw. adc in der Weise, daß man zu den gegebenen Richtungen P_1 und P_2 durch die Endpunkte a und c der

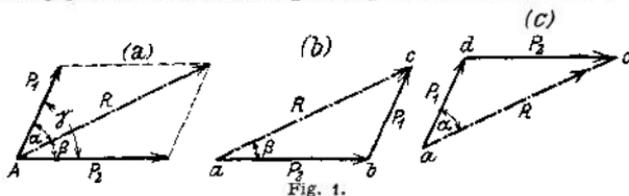


Fig. 1.

Resultante Parallelen zieht, die sich in b bzw. d schneiden; die Strecken ab und bc bzw. ad und dc sind ein Maß für die Größe der Seitenkräfte; ihre Richtungen werden festgelegt, indem man von a aus dem Kräftezug folgend nach c gelangt.

Zwei Kräfte sind an einem Punkte A im Gleichgewicht, wenn sie gleiche Größe, aber entgegengesetzte Richtung haben (Fig. 2).

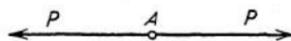


Fig. 2.

Zwei Kräfte dieser Art darf man stets bei einem starren Körper hinzufügen, ohne daß in der Wirkung der Kräfte auf den Körper eine Änderung eintritt.

Drei Kräfte P_1, P_2, P_3 sind an einem Punkte A im Gleichgewicht, wenn ihre Resultante Null ist, d. h. Anfangs- und Endpunkt des Kräftezuges müssen zusammenfallen; man sagt: der Kräftezug ist geschlossen (Fig. 3), und das Kräfteck besitzt einen stetigen Umfassungssinn. Kehrt man in einem geschlossenen Kräfteck mit stetigem Umfassungssinn die Richtung einer Kraft um, so wird sie zur Mittelkraft der beiden andern.

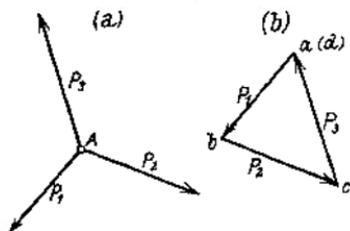


Fig. 3.

1. der Kräftezug ein geschlossenes Dreieck ergibt,
2. alle Pfeile denselben Umfassungssinn haben.

Soll eine Kraft R nach zwei gegebenen Richtungen P_1, P_2 so zerlegt werden, daß die drei Kräfte an dem Punkte A im Gleichgewicht sind, so zieht man durch die Endpunkte a und c der gegebenen Kraft R zu den gegebenen Richtungen Parallelen (Fig. 4), die sich in dem Punkte b schneiden, dann sind die Strecken cb und ba ein Maß für die Größe der Seitenkräfte; die Richtungen ergeben sich aus der Forderung, daß der Kräftezug bei stetigem Umfassungssinn geschlossen sein muß, wenn Gleichgewicht herrschen soll. Die so bestimmten Seitenkräfte greifen in A an.

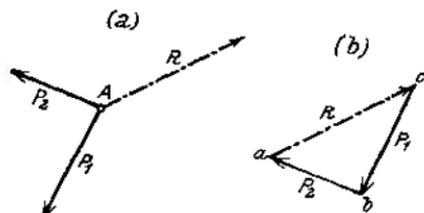


Fig. 4.

Rechnerisch findet man die Mittelkraft zweier Kräfte P_1 und P_2 mit den Bezeichnungen der Fig. 1 zu

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 P_2 \cdot \cos \gamma};$$

für $\gamma = \alpha + \beta = 90^\circ$ wird $R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$. Die Seitenkräfte werden

$$P_1 = R \cdot \cos \alpha; \quad P_2 = R \cdot \cos \beta = R \cdot \sin \alpha.$$

Die Resultante beliebig vieler Kräfte an einem Punkt ergibt sich als geometrische Summe der Einzelkräfte; sie ist der Größe und Richtung nach durch die Schlußlinie af des Kräftezuges $P_1, P_2, P_3 \dots P_n$ dargestellt, ihr Angriffspunkt ist A (Fig. 5).

Ist die Resultante gleich 0, so sind die Kräfte P an dem Punkte A im Gleichgewicht; der Kräftezug ist geschlossen, da Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen (Fig. 5). Zerlegt man sämtliche Kräfte nach horizontaler und vertikaler Richtung, indem man die Kräfte auf die Horizontale und Vertikale projiziert, so zeigt sich: Kräfte sind an einem Punkte im Gleichgewicht, wenn 1. die algebraische Summe sämtlicher Horizontalkomponenten, 2. die algebraische Summe sämtlicher Vertikalkomponenten gleich Null ist; die entgegengesetzte Richtung wird durch verschiedenes Vorzeichen gekennzeichnet (Gleichgewichtsbedingungen).

$$(I) \quad \Sigma H = 0; \quad (II) \quad \Sigma V = 0.$$

Die Kräfte haben verschiedene Angriffspunkte. Die Resultante zweier Kräfte P_1 und P_2 (Fig. 6) mit den Angriffspunkten A_1 und A_2 ergibt sich als geometrische Summe der Einzelkräfte, ihre Wirkungslinie geht durch den Schnittpunkt A der Wirkungslinien von P_1 und P_2 . Die eingeklammerten Werte (P_1) und (P_2) deuten an, daß die Angriffspunkte auf den Wirkungslinien verschoben sind.

Gegeben seien beliebig viele Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten; die Resultante ist nach Größe, Richtung und Angriffspunkt zu bestimmen. Man fügt in dem beliebigen Punkte 1 (Fig. 7) auf der Wirkungslinie P_1 die Kräfte I' und II' so zu P_1 , daß die drei Kräfte I', P_1, II' im Gleichgewicht sind, dann muß ihr Kräftezug I, P_1, II im Kräfteck geschlossen sein. In Punkt 2 fügt man ebenfalls zwei Kräfte II', III' hinzu, von denen II' von gleicher Größe der in 1 zugefügten Kraft II' ist, ihre Richtungen sind jedoch entgegengesetzt; der Punkt 2 ist unter dem Einfluß der Kräfte II', P_2, III' im Gleichgewicht, da der Kräftezug II, P_2, III im Kräfteck geschlossen ist. In gleicher Weise verfährt man in 3 und 4, so daß man in jedem der Punkte 1, 2, 3, 4 drei im Gleichgewicht befindliche Kräfte hat. Fügt man nunmehr im Schnittpunkt 5 der Wirkungslinie I' und V'

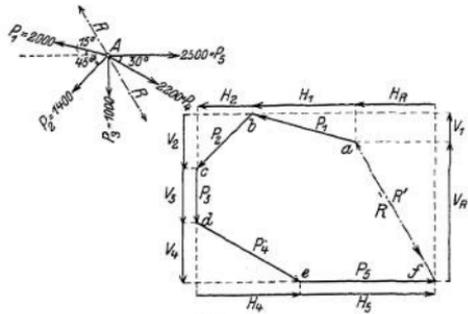


Fig. 5.

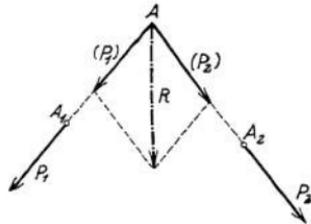


Fig. 6.

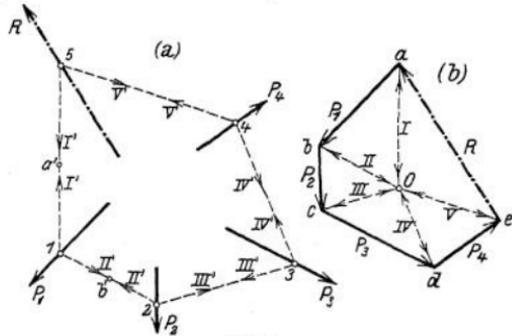


Fig. 7.

zwei gleich große, aber entgegengesetzte Kräfte I' und V' hinzu, so hält man das ganze System im Gleichgewicht, wenn man den Punkt 5 ins Gleichgewicht bringt. Das erreicht man durch eine Kraft R , die in 5 angreift und deren Größe und Richtung sich aus dem geschlossenen Kräftezuge I, V, R bestimmen läßt. Durch das Hinzufügen von R in 5 ist das System ins Gleichgewicht gebracht; ersetzt man R in 5 durch eine Kraft R' von gleicher Größe, aber entgegengesetzter Richtung, so ist R' die Resultante der vier Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 .

Die Kräfte I', II', III', IV', V' , die sich paarweise aufheben, kann man als **Spannkräfte** auffassen. Befestigt man nämlich in a' und b' ein Seil und läßt im Punkte I die Kraft P_1 angreifen, so stellen sich die Seilenden $a'I$ und $b'I$ auf die gezeichnete Lage ein; die in den Seilen auftretenden Spannkräfte sind gleich I und II , ihre Größe entnimmt man dem Kräfteck abO , das wegen der Forderung des Gleichgewichts geschlossen sein muß. Hat man ein Seil $1, 2, 3, 4, 5, 1$ und in den Punkten $1, 2, 3, 4, 5$ die Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4, R , so würde das Seil unter dem Einfluß der fünf Kräfte die gezeichnete Lage annehmen; die in den einzelnen Teilen des Seiles auftretenden Spannkräfte sind der Größe und Richtung nach durch das Kräfteck bestimmt.

Der Linienzug $1, 2, 3, 4, 5$ heißt **Seileck** oder **Seilpolygon**; der Angriffspunkt 5 der Resultante R' ist der **Schnittpunkt der äußersten Seilstrahlen I' und V'** . Der beliebig gewählte Punkt O heißt **Pol**; die Geraden Oa, Ob, Oc, Od, Oe heißen **Polstrahlen**.

Da die Kraft R , die das System der Fig 7 ins Gleichgewicht bringt, im Schnittpunkt 5 der äußersten Seilstrahlen I' und V' angreift, wird sich für Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten die Gleichgewichtsbedingung in der Form aufstellen lassen: mehrere in der Ebene wirkende Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn der Kräftezug bei stetigem Umfassungssinn und der Seilzug geschlossen sind.

Darstellung innerer Kräfte (Spannkräfte). Das Stabsystem ABC der Fig. 8 a bestehe aus drei durch reibungslose Gelenke A, B, C verbundenen Stäben;

im Punkte C greife die äußere Kraft P an. Unter dem Einfluß dieser Kraft P erfahren die Stäbe eine Beanspruchung, die den Stäben von außen — solange wenigstens die Formänderungen verschwindend klein sind — nicht anzusehen. Um ein Urteil über die Größe der Kräfte zu gewinnen, denen das Material widerstehen soll, denkt man sich die Stäbe durchgeschnitten und bringt in den Quer-

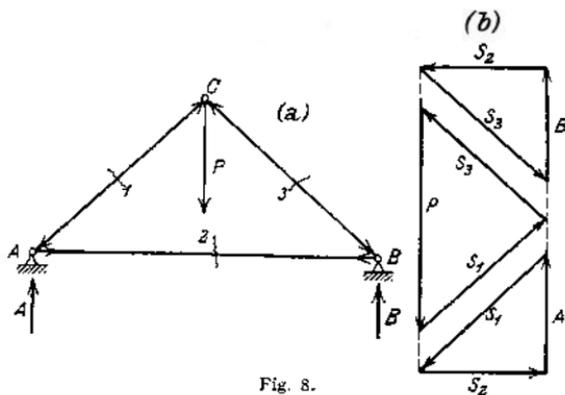


Fig. 8.

schnitten Kräfte in Richtung der Stabachsen an, die das durch die Schnitt gestörte Gleichgewicht wieder herstellen. Da diese zusätzlichen Kräfte dieselbe Wirkung haben wie das unversehrte Material, so geben sie ein Maß für die Größe der Beanspruchung, die die Stäbe erleiden. Diese Kräfte heißen **Spannkräfte** und sind im Gegensatz zu den sichtbaren angreifenden Kräften P **innere Kräfte**. Um das Gleichgewicht trotz des Schnittes zu erzielen, sind in jedem Stab zwei gleich große entgegengesetzt gerichtete Kräfte erforderlich. Betrachtet man nunmehr jeden Knotenpunkt für sich, so müssen sämtliche an ihm angreifenden Kräfte im Gleichgewicht sein; d. h. der Kräftezug muß bei stetigem Um-

fahrungssinn geschlossen sein. Zerlegt man also die in C angreifende Kraft P nach den Richtungen 1 und 3, indem man durch die Endpunkte von P zu 1 und 3 Parallelen zieht, so ergeben sich die Richtungen von S_1 und S_3 aus dem geschlossenen Kräftezuge. In Beziehung auf den Punkt A ist die Kraft S_1 entgegengesetzt gerichtet; da die Richtungen 1 und 2 bekannt sind, erhält man die Kräfte A und S_2 durch Zerlegung von S_1 nach diesen beiden Richtungen. In gleicher Weise verfährt man in B . Aus der nach dem Schnitt zu erwartenden Bewegung der Endpunkte eines Stabes schließt man auf die Art der Beanspruchung. Da sich A und B infolge des Schnittes 2 voneinander entfernen würden, so sieht man, daß der Stab gezogen wird; die Stäbe 1 und 3 werden gedrückt. Die Art der Darstellung ist in Fig. 8 b gegeben. Für die rechnerische Behandlung legt man fest: Die Spannkraft ist positiv (+), wenn der Stab gezogen, negativ (-), wenn der Stab gedrückt wird. Fig. 9.

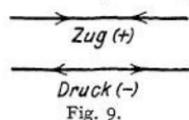


Fig. 9.

Stützkkräfte fester Stützpunkte. Wird ein unterstützter Körper mit der Kraft P gegen die Unterstützungsfläche gedrückt, so bleibt er im Gleichgewicht; das setzt voraus, daß die Unterstützungsfläche einen gleich großen, aber entgegengesetzten Druck gegen den Körper ausübt. Diese von der Unterstützungsfläche ausgeübte Kraft heißt Reaktion; es ist also die Aktion gleich der Reaktion. Ohne das Gleichgewicht zu stören, kann man jede Unterstützungsfläche durch ihre Reaktion ersetzen; die Reaktion steht stets senkrecht zur Berührungsfläche.

In den Punkten A und B muß man das Stabdreieck der Fig. 8 unterstützen, damit das ganze System unter dem Einfluß von P keine Bewegung erleidet; diese Punkte heißen Stützpunkte oder Auflager; die Kräfte A und B , die die Auflager ersetzen, heißen Stützdruöcke oder Auflagerreaktionen, sie werden als äußere Kräfte behandelt; durch sie wird das äußere Gleichgewicht des Systems hergestellt. Die Einführung dieser meist unbekanntenen Reaktionen heißt: den Körper frei machen.

Genügen die Gleichgewichtsbedingungen zur Ermittlung der Stützkkräfte, so heißt das Kräftesystem **statisch bestimmt**; im andern Falle heißt es **statisch unbestimmt**. Sind mehr als drei Stützkkräfte vorhanden, so lassen sich die überzähligen Reaktionen nur mit Hilfe von Bedingungen berechnen, die sich aus der elastischen Formänderung des Körpers ergeben (vgl. Festigkeitslehre).

Nach der Art der Lagerung unterscheidet man feste und bewegliche Stützpunkte. Für den festen Stützpunkt ist die Bedingung für das Gleichgewicht erfüllt, wenn die Mittelkraft der äußeren Kräfte durch den Stützpunkt geht. Denkt man sich die beliebig gerichtete Stützreaktion (Fig. 10 a) nach horizontaler und vertikaler Richtung zerlegt, so ist ein fester Stützpunkt durch die Horizontalkomponente H und die Vertikalkomponente V ersetzt.

Ein beweglicher Stützpunkt (Fig. 10 b) erfordert lediglich die Bestimmung der Vertikalkomponente; eine Horizontalkraft kann nicht aufgenommen werden, da der Punkt in horizontaler Richtung beweglich ist.

Ist demnach ein Träger in dem einen Punkte fest, im andern beweglich gelagert (Fig. 11), so erhält man beim

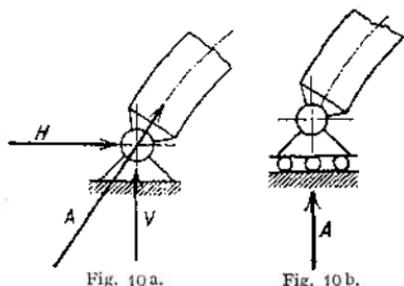


Fig. 10 a.

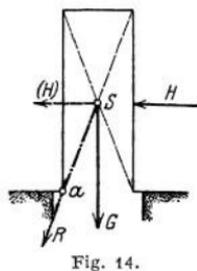
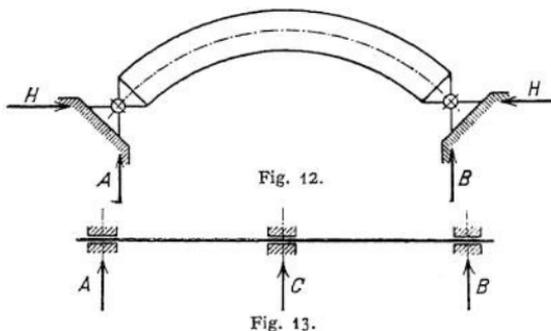
Fig. 10 b.



Fig. 11.

Freimachen des Trägers drei unbekannte Auflagerkräfte. Diese Art der Lagerung ist typisch für den Träger auf zwei Stützen und wird — wenn nichts besonderes bemerkt ist — bei jedem Beispiel dieser Art vorausgesetzt.

Ist ein Körper in zwei Punkten fest gelagert, so erhält man beim Freimachen des Körpers vier unbekannte Auflagerreaktionen (Fig. 12). Da nur drei mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen bestimmbar sind, ist der Körper einfach statisch unbestimmt (Zweigelenkbogen). Eine Welle (Paßlager) die in einem Lager (Paßlager) fest gelagert, in den übrigen dagegen in horizontaler Richtung beweglich ist, wird zu einem einfach statisch unbestimmten Träger, wenn drei Lager vorhanden sind; sie ist $(n - 2)$ fach statisch unbestimmt, wenn n -Lager vorgesehen werden. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Welle nicht durch elastische Kupplungen unterbrochen ist.



Die **Standfestigkeit** (Stabilität) eines Körpers ist gesichert, wenn die Mittelkraft sämtlicher äußeren Kräfte die stützende Ebene innerhalb der Stützfläche trifft. In Fig 14 muß also die Mittelkraft R aus H und G durch die Kippkante a hindurchgehen. Ist G die einzige äußere Kraft, so muß das Lot durch den Schwerpunkt S des Körpers die Stützfläche treffen.

Hat die Wirkungslinie der Mittelkraft R die Entfernung r von der Kippkante, so ist $R \cdot r$ das **Stabilitätsmoment**. Die Größe dieses Momentes ist ein Maß für die Standfestigkeit.

Verläuft die Resultante R sämtlicher Kräfte innerhalb der Berührungsfläche, so tritt ein **Gleiten** des Körpers ein, wenn die horizontale Seitenkraft der Resultante die Reibungswiderstände in der Berührungsfläche überwindet.

Zerlegung einer Kraft nach drei gegebenen Richtungen, die sich nicht in einem Punkte schneiden (Culmannsches Verfahren). Man bringt je zwei Richtungen

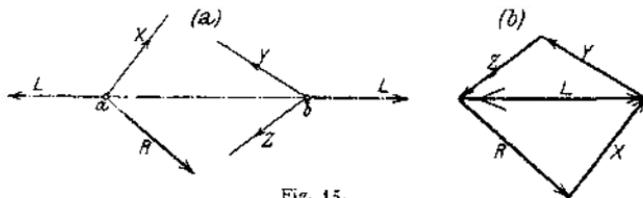


Fig. 15.

zum Schnitt, die Schnittpunkte seien a und b (Fig. 15), und fügt in Richtung $a b$ zwei zunächst unbekannte gleich große entgegengesetzt gerichtete Kräfte L hinzu; dann greifen in a die drei Kräfte R , L und X an, von denen R der Größe und Richtung nach, L und X nur der Richtung nach bekannt sind. Zerlegt man R nach L und X , so muß der Kräftezug R , X , L geschlossen sein, wenn in a Gleichgewicht herrschen soll. Man erhält die Seitenkräfte L und X , indem man zu den

Richtungen L und X durch die Endpunkte von R Parallelen zieht. In Beziehung auf den Punkt b hat die zusätzliche Kraft L entgegengesetzte Richtung; sie ist der Größe und Richtung nach bekannt, von den Seitenkräften Y und Z sind die Richtungen gegeben. Zerlegt man noch L nach Y und Z , so muß auch der Kräftezug LYZ geschlossen sein, wenn in b Gleichgewicht herrschen soll. Man erhält die Seitenkräfte Y und Z , indem man zu den Richtungen Y und Z durch die Endpunkte von L Parallelen zieht. Die beiden zusätzlichen Kräfte L heben sich auf; es bleibt der geschlossene Kräftezug R, X, Y, Z mit stetigem Umfassungssinn; die Kräfte R, X, Y, Z sind im Gleichgewicht. Sollen X, Y, Z Seitenkräfte von R sein, so ist ihre Richtung umzukehren.

Kräftepaare — statische Momente. Sind zwei gleich große entgegengesetzt gerichtete Kräfte P mit verschiedenen Angriffspunkten (Fig 16) gegeben, so läßt

sich eine Resultante nicht angeben; sie wird gleich Null, ihr Angriffspunkt rückt als Schnittpunkt der äußersten Seilstrahlen I' und III' ins Unendliche, da I' und III' parallel sind. Die Größe O der Resultante kann man auf folgende Weise entstanden denken: ist die eine der beiden Kräfte um ein Geringes größer als die andere, so ist die Differenz beider gleich der Größe der Resultante; die Polstrahlen

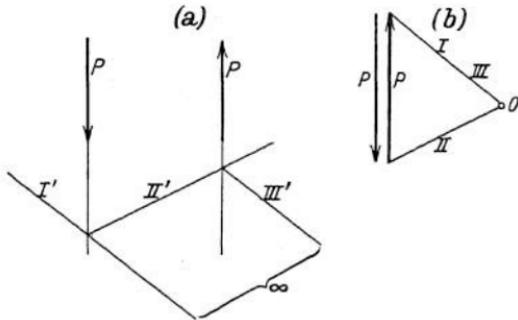


Fig. 16.

I und III bilden einen sehr kleinen Winkel miteinander. Je mehr sich beide Kräfte der gleichen Größe nähern, desto kleiner wird ihre Resultante, desto kleiner der Winkel der Polstrahlen I und III . In dem Augenblick, wo beide Kräfte P gleich groß werden, wird ihre Differenz — und damit die Resultante — gleich Null. Die Polstrahlen I und III fallen zusammen, die Seilstrahlen I' und III' werden parallel. Bei dieser Betrachtung nähert sich die Größe der Resultante unbegrenzt dem Werte Null, sie wird zur unendlich kleinen Größe. Die beiden Kräfte P hätten demnach eine unendlich kleine und unendlich ferne Kraft als Resultante.

Um die Wirkung zweier solcher Kräfte zu untersuchen, denkt man sie an einem Stabe angreifen (Fig 17). Es ist einleuchtend, daß beide Kräfte P eine Drehung des Stabes hervorrufen würden.

Zwei parallele gleich große entgegengesetzt gerichtete Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten heißen ein **Kräftepaar**; ihre Wirkung wird durch ihre Größe und die Entfernung ihrer Wirkungslinien voneinander beeinflusst, (z. B. Gewindeschneiden mit Hilfe einer Kluppe). Da Größe und Entfernung maßgebend sind, so mißt man die Wirkung eines Kräftepaares durch das Produkt beider Größen und nennt dieses Produkt das **statische Moment**; es wird $M = P \cdot p$, gemessen in cmkg.

In Fig. 18 ist eine vertikale Spindel schematisch dargestellt; an dem Handrade a wirke das Kräftepaar P , dessen Moment $M = P \cdot d$ ist. Da sich die

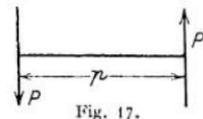


Fig. 17.

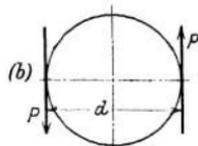
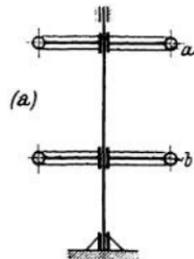


Fig. 18.

gleiche Wirkung einstellen würde, wenn das Handrad b durch die Kräfte P angegriffen wird, so ergibt sich der Satz:

Die Wirkung eines Kräftepaars wird nicht geändert, wenn man die Ebene des Kräftepaars beliebig verschiebt. Sie wird auch dann nicht geändert, wenn man die Achse des Paares parallel zu sich nach einem beliebigen Körperpunkte verlegt bzw. wenn man das Kräftepaar in seiner Ebene willkürlich verschiebt.

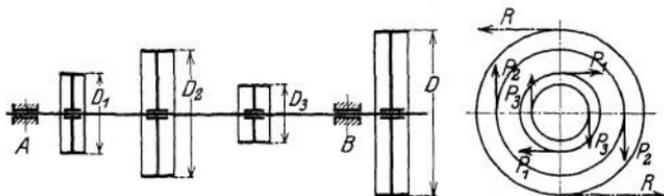


Fig. 19.

Wirken an einem Körper verschiedene Kräftepaare in verschiedenen aber parallelen Ebenen — in Fig. 19 ist eine Welle mit mehreren Riemenscheiben dargestellt —, so läßt sich die drehende Wirkung der drei Kräftepaare P_1 , P_2 , P_3 durch die Wirkung eines Kräftepaars R aufheben. Das System ist in Ruhe, wenn die algebraische Summe der statischen Momente der Kräftepaare gleich Null ist. Die Bedingung für das Gleichgewicht lautet also

$$P_1 \cdot D_1 + P_2 \cdot D_2 + P_3 \cdot D_3 - R \cdot D = 0.$$

Die entgegengesetzte Drehrichtung ist durch entgegengesetztes Vorzeichen unterschieden.

Es lassen sich demnach Kräftepaare in parallelen Ebenen durch ein resultierendes Kräftepaar ersetzen, dessen Moment gleich der algebraischen Summe der Momente der einzelnen Paare ist, und dessen Ebene den Ebenen der ursprünglichen Kräftepaare parallel ist.

Darstellung von Kräftepaaren. Da das Kräftepaar durch Angabe der Größe und Richtung bestimmt ist, so ist es ein Vektor; es wird durch eine Strecke A dargestellt, die auf der Ebene des Kräftepaars senkrecht steht und deren Länge ein Maß für die Größe des Produktes $M = P \cdot p$ ist (Fig. 20). Diese Strecke heißt **Achse des Kräftepaars** und wird nach der Seite der Ebene hin aufgetragen, von der aus gesehen das Kräftepaar im Sinne des Uhrzeigers dreht; das Moment des Kräftepaars ist dann positiv. Negativ ist das Moment eines Kräftepaars, wenn das Kräftepaar im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers dreht.

Kräftepaare in beliebigen Ebenen lassen sich vereinigen, wenn man die geometrische Summe der Achsen bildet. Die resultierende Achse ist gleich der Schlußseite des aus den einzelnen Achsen gebildeten Vektorenzuges — Achsenplan oder Achsenzug —.

Der Achsenplan der Fig. 19 ist in Fig. 21 dargestellt; es ist

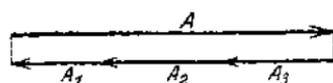


Fig. 21.

$$A = A_1 + A_2 + A_3,$$

$$R \cdot D = P_1 \cdot D_1 + P_2 \cdot D_2 + P_3 \cdot D_3.$$

Der Maßstab der Darstellung lautet 1 cm = a cm kg.

Die rechnerische Bestimmung des resultierenden Kräftepaars geschieht auf gleichem Wege wie die Ermittlung der Resultante von Kräften (vgl. S. 271).

Verlegung einer Kraft. Soll die Wirkung einer Kraft P auf einen Punkt H (Fig. 22) außerhalb der Wirkungslinie von P untersucht werden, so erhält man einen Überblick über die Wirkung der Kraft P auf den Punkt H , wenn man in H zwei gleich große entgegengesetzt gerichtete Kräfte P hinzufügt. Man erhält dann eine Einzelkraft P' in H , die von gleicher Größe und gleicher Richtung wie die gegebene Kraft P ist, und außerdem ein Kräftepaar $P P''$, dessen Moment $M = P \cdot p$ ist.

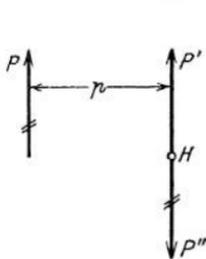


Fig. 22.

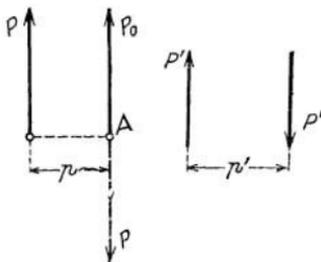


Fig. 23.

Umgekehrt ergeben eine Kraft P und ein Kräftepaar, die in derselben Ebene liegen, durch Verlegung des Paares eine Einzelkraft. Ist in Fig. 23 P_0 die gegebene Einzelkraft, $P' P''$ das Kräftepaar, dessen Moment $M' = P' \cdot p'$ ist, so ersetzt man das Kräftepaar M' durch ein zweites, dessen Moment ist

$$M = M'; \quad P \cdot p = P' \cdot p'.$$

Wird $P = P_0$ gemacht, so ersetzt die in der Entfernung p von A angreifende Kraft $P = P_0$ die Wirkung der Einzelkraft P_0 und des Kräftepaars $P' P''$.

Ein Kräftepaar und eine zu seiner Ebene senkrechte Kraft lassen sich nicht zusammensetzen.

Das statische Moment einer Kraft. Der Begriff des statischen Momentes war das Hilfsmittel, mit dem die Wirkung von Kräftepaaren gemessen wurde.

Losgelöst von der Vorstellung des Kräftepaars versteht man unter dem statischen Moment einer Kraft P in Beziehung auf einen beliebigen Punkt O (Fig. 24) das Produkt aus der Kraft P und der Entfernung des Punktes O von der Wirkungslinie der Kraft P ; es ist $M = P \cdot p$. Der Abstand p heißt Hebelarm. Die Momente sind positiv oder negativ, je nachdem die Kräfte, von derselben Seite der Ebene gesehen, den Hebelarm im gleichen oder entgegengesetzten Sinne zu drehen versuchen.

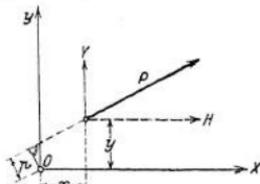


Fig. 24.

Es ist dabei gleichgültig, ob ein rechts- oder linksdrehendes Moment das positive Vorzeichen erhält; hat man sich jedoch entschlossen, eine Drehrichtung — z. B. Rechtsdrehung — als positiv zu bezeichnen, so muß die entgegengesetzte Drehrichtung — hier also Linksdrehung — das negative Vorzeichen erhalten.

Sind H und V die Seitenkräfte von P (Fig. 24), x und y die Koordinaten des Angriffspunktes von P , so ist das Moment in Beziehung auf den Punkt O

$$M = P \cdot p = H \cdot y - V \cdot x.$$

Es gilt allgemein der Satz: Das statische Moment der Resultante ist gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der Seitenkräfte, bezogen auf einen beliebigen Punkt als Drehpunkt, wenn die entgegengesetzte Drehrichtung durch entgegengesetztes Vorzeichen unterschieden wird.

Darstellung der statischen Momente. Soll das statische Moment der Resultante R (Fig. 25) in Beziehung auf den Punkt A bestimmt werden, dessen Entfernung von R gleich h ist, so zieht man durch A zur Wirkungslinie von R eine Parallele, auf der durch die äußersten Seilstrahlen I' und V' die Strecke b abgeschnitten wird. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $b I' V'$ und $R I V$ folgt

$$b : R = h : H; \quad \text{so daß} \quad R \cdot h = H \cdot b \quad \text{wird.}$$

$R \cdot h$ ist das statische Moment der Kraft R in Beziehung auf den Punkt A ; es wird dargestellt durch das Produkt $H \cdot b$ aus der Polweite H und der Strecke b , die auf einer Parallelen zu R durch A von den äußersten Seilstrahlen abgeschnitten wird. $H \cdot b$ ist als statisches Moment der Resultante gleich der Summe der statischen Momente der Einzelkräfte.

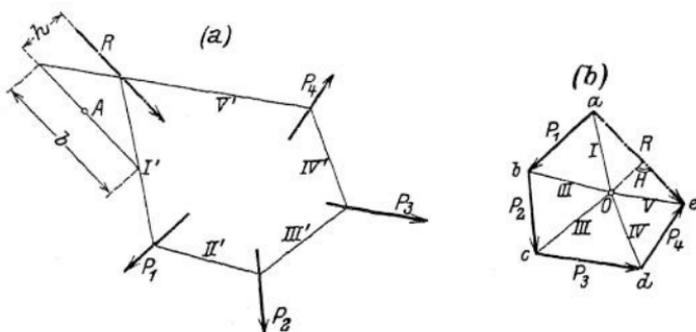


Fig. 25.

Das statische Moment paralleler Kräfte. Die Resultante paralleler Kräfte ist gleich der algebraischen Summe der Einzelkräfte; ihren Angriffspunkt erhält

man als Schnittpunkt der äußersten Seilstrahlen I' und V' . Das Seileck ist in folgender Weise zu konstruieren: Wähle den beliebigen Punkt O als Pol und ziehe die Polstrahlen I, II, III, IV und V (Fig. 26); ziehe durch den beliebigen Punkt I auf der Wirkungslinie von P_1 die Gerade I' parallel zu I ; und die Gerade II' parallel zu II bis 2; durch 2 die Gerade III' parallel zu III bis 3; durch 3 die Gerade IV' parallel zu IV bis 4; durch 4 die Gerade V' parallel zu V . Das

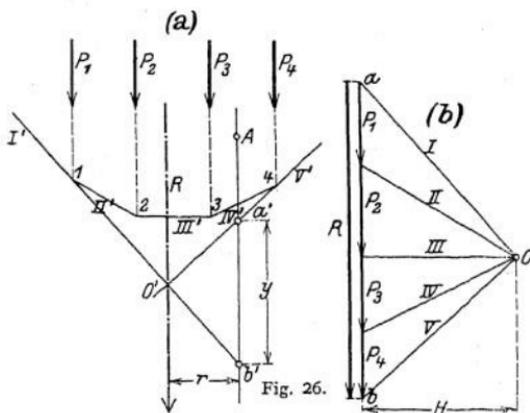


Fig. 26.

statische Moment der Kraft R in Beziehung auf den Punkt A ist dargestellt durch die Strecke $a'b' = y$, die durch die äußersten Seilstrahlen I' und V' auf einer Parallelen zu R durch A abgeschnitten wird. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke Oab und $O'a'b'$ ergibt sich

$$y : r = R : H, \quad \text{so daß} \quad R \cdot r = H \cdot y \quad \text{wird.}$$

S. 271 waren die Polstrahlen als Kräfte definiert; es wird demnach H die Horizontalkomponente der Kräfte I bzw. V . Man mißt H im Kräftemaßstab; y im Längenmaßstab.

Gleichgewicht der Kräfte. Ein Körper befindet sich unter dem Einfluß beliebig vieler Kräfte P_1, P_2, P_3, \dots im Gleichgewicht, wenn weder eine Mittelkraft noch ein resultierendes Kräftepaar vorhanden ist. Für Kräfte in der Ebene ergeben sich die drei Gleichgewichtsbedingungen: Gleichgewicht herrscht, wenn

- I. die algebraische Summe sämtlicher Horizontalkomponenten gleich Null ist, d. h. $\sum H = 0$;
- II. die algebraische Summe sämtlicher Vertikalkomponenten gleich Null ist, d. h. $\sum V = 0$;
- III. die algebraische Summe sämtlicher Momente bezogen auf einen beliebigen Punkt als Drehpunkt gleich Null ist, d. h. $\sum M = 0$.

Für die zeichnerische Darstellung sind die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt, wenn der Kräftezug bei stetigem Umfassungssinn und der Seilzug geschlossen sind.

Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten. Ein System von Massenpunkten befindet sich im Gleichgewicht, wenn jeder einzelne Massenpunkt im Gleichgewicht ist; die Resultante sämtlicher auf den Massenpunkt wirkenden Kräfte ist dann gleich Null. Denkt man sich jetzt das System in einem Bewegungszustande begriffen, so muß die mechanische Arbeit der Resultante sämtlicher auf den einzelnen Massenpunkt wirkenden Kräfte gleich Null sein. Da die mechanische Arbeit der Mittelkraft gleich der Summe der mechanischen Arbeiten der Seitenkräfte ist, so muß auch die Summe der von sämtlichen Kräften geleisteten Arbeit gleich Null sein für jeden Massenpunkt, d. h. für das ganze System. Die dem angenommenen Bewegungszustande entsprechenden Geschwindigkeiten sind nicht als wirkliche sondern nur als gedachte, d. h. virtuelle Geschwindigkeiten, die Verschiebung als unendlich kleine Verschiebung aufzufassen.

Zerlegt man sämtliche Kräfte, die auf die einzelnen Massenpunkte wirken, in zwei Gruppen, so läßt sich das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten durch die Gleichung

$$A_1 + A_2 = 0$$

ausdrücken. Für den Fall, daß $A_2 = 0$ ist, wird auch $A_1 = 0$. Es wird aber A_2 stets gleich Null, wenn man die Verschiebungen der Massenpunkte so wählt, daß die für ihre Koordinaten vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen erfüllt bleiben. Die Grundgleichung lautet dann

$$A_1 = 0$$

und besagt: Ist ein System von Massenpunkten, für deren Koordinaten gewisse Bedingungsgleichungen vorgeschrieben sind, im Gleichgewicht, so wird die von sämtlichen Kräften geleistete Arbeit bei einer gedachten möglichen Verschiebung des Systems gleich Null; die Bewegung ist möglich, wenn sie sich mit den Bedingungsgleichungen für die Koordinaten der einzelnen Massenpunkte vereinbaren läßt.

Beispiele: 1. Bei der in Fig. 27 dargestellten Stabverbindung (Barclayscher Kran) soll der Punkt E bestimmt werden, an dem die Last Q angreifen müßte,

wenn das Stabsystem im Gleichgewicht bleiben soll. E liegt auf der Vertikalen durch O , den Schnittpunkt der Stabachsen AC und BD ; bei einer gedachten möglichen Verschiebung bewegt sich E horizontal, es ist also

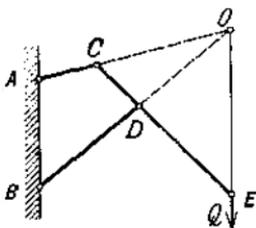


Fig. 27.

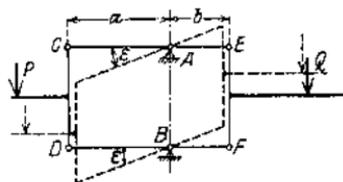


Fig. 28.

die von Q geleistete Arbeit gleich Null. Die übrigen Kräfte — Auflagerreaktionen und Spannkkräfte — brauchen nicht berücksichtigt zu werden, weil die Verschiebung eine mögliche war, d. h. die einzelnen Massenpunkte ihre gegenseitige Lage unverändert beibehielten.

2. Denkt man sich in Fig. 28 die horizontalen Wagebalken der Robervalschen Wage um den unendlich kleinen Winkel ε gedreht, so leisten nur P und Q Arbeit. Es wird

$$A = P \cdot a \cdot \varepsilon - Q \cdot b \cdot \varepsilon = 0 \text{ d. h. } P \cdot a = Q \cdot b.$$

2. Anwendungen der Gleichgewichtsbedingungen.

1. Es ist die Kraft P der Größe und Richtung nach zu bestimmen, die der Kraft Q (Fig. 29) das Gleichgewicht hält, die Reibung soll vernachlässigt werden. Man ersetzt die schiefe Ebene durch ihre Reaktion N , die sich als Kraft senkrecht zur schiefen Ebene darstellt. In A greifen nunmehr die drei Kräfte P , Q und N an, von denen Q der Größe und Richtung nach bekannt ist. Man zerlegt Q nach den gegebenen Richtungen P und N , indem man durch die Endpunkte von Q zu P und N Parallelen zieht. Der geschlossene Kräftezug gibt die geforderte Kraft P der Größe und Richtung nach. Für die analytische Ermittlung von P zerlegt man sämtliche Kräfte nach horizontaler und vertikaler Richtung. Nach der 2. Gleichgewichtsbedingung wird:

$$Q - P \cdot \sin(\alpha + \beta) - N \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$N \cdot \sin \alpha - P \cdot \cos(\alpha + \beta) = 0$$

$$\text{und daraus } P = Q \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}.$$

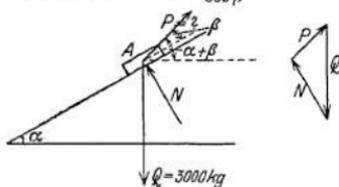


Fig. 29.

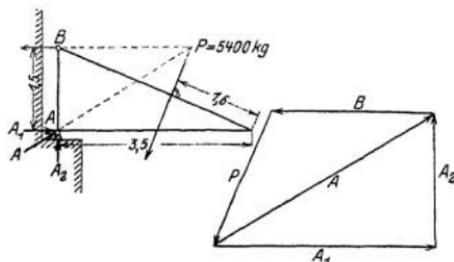


Fig. 30.

2. Das Gleichgewicht der äußeren Kräfte an dem Träger der Fig. 30 soll hergestellt werden. Da der Träger in B durch eine Zugstange befestigt ist, liegt die Richtung der Reaktion B fest.

Da sich die Wirkungslinien der drei Kräfte P , A , B in einem Punkte schneiden müssen, wenn Gleichgewicht sein soll, so muß die Wirkungslinie von A durch A und den Schnittpunkt der Wirkungslinien P und B gehen. Die Zerlegung der Kraft P nach den Richtungen A und B ergibt die Reaktionen A und B der Größe und Richtung nach, da der Kräftezug geschlossen sein muß. A ist außerdem noch nach horizontaler und vertikaler Richtung zerlegt; ihre Seitenkräfte sind A_1 und A_2 .

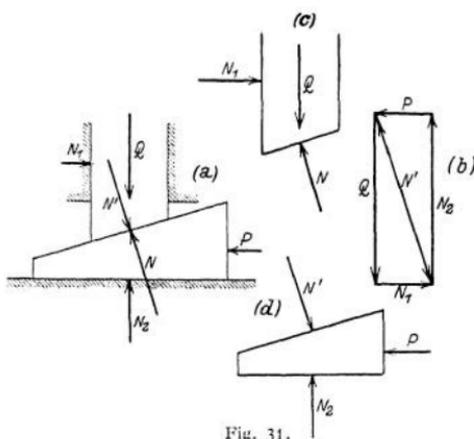


Fig. 31.

3. Es ist das Gleichgewicht der äußeren Kräfte bei der reibungslosen Keilkette der Fig. 31 herzustellen. Man ersetzt die schiefe Ebene des Keils durch ihre Reaktion N , die Führung des oberen Keils durch ihre Reaktion N_1 . Unter dem Einfluß der drei Kräfte Q , N_1 , N muß der obere Keil (c) im Gleichgewicht sein. Da Q der Größe und Richtung nach bekannt ist, zerlegt man Q nach N und N_1 , deren Richtung und Größe der geschlossene Kräftezug ergibt.

In Beziehung auf den unteren Keil ersetzt man die schiefe Ebene durch ihre Reaktion $N' = N$; es wirken also die drei Kräfte N' , P und N_2 an dem unteren Keil (d), von denen N' der Größe und Richtung nach bekannt ist. Die Zerlegung von N' nach N_2 und P ergibt die Kraft P der Größe und Richtung nach; der Kräftezug Q , N_1 , N_2 , P ist geschlossen.

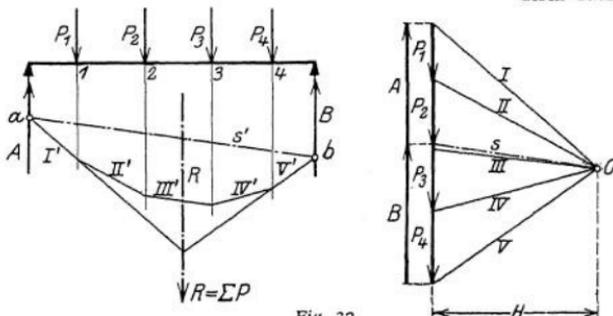


Fig. 32.

4. Es sind die Auflagerreaktionen A und B des nebenstehenden Trägers zu ermitteln (Fig. 32). Man zeichnet mit Hilfe eines Kräftemaßstabes den Kräftezug $P_1 \dots P_4$ und zieht aus dem beliebigen Pol O die Polstrahlen $I \dots V$. Der Seilzug $I' \dots V'$ ergibt sich nach S. 278; der Schnittpunkt der äußersten Seilstrahlen I' und V' gibt den Angriffspunkt der Resultante $R = \Sigma P$. Es ist nunmehr R nach den parallelen Richtungen A und B so zu zerlegen, daß Gleichgewicht herrscht. Verbindet man die Schnittpunkte a und b der Wirkungslinien A und B durch die Gerade s' und zieht zu s' durch den Pol O eine Parallele s , so schneidet diese Parallele auf dem Kräftezug $P_1 \dots P_4$ die Auflagerreaktionen A und B ab. Gleichgewicht herrscht, da sowohl der Kräftezug P_1, P_2, P_3, P_4, B, A als auch der Seilzug $s, I', II', III', IV', V', s'$ geschlossen sind. Die Gerade s heißt Schlußlinie des Seilzuges.

Die Ordinaten der von der Schlußlinie und dem Seilzuge begrenzten Fläche sind ein Maß für die Größe der statischen Momente und zwar ist $M_1 = H \cdot y_1$; $M_2 = H \cdot y_2$; $M_3 = H \cdot y_3$; $M_4 = H \cdot y_4$; wenn y_1, y_2, y_3, y_4 die von der Schlußlinie gemessenen Ordinaten des Seilecks bedeuten. Die Momente in A und B sind Null. Diese Fläche heißt Momentenfläche des Trägers. Lautet der Kräftemaßstab $1 \text{ cm} = p \text{ kg}$; der Längenmaßstab $1 \text{ cm} = q \text{ cm}$, so wird z. B.:

$$M_1 = (H \text{ cm} \times p \text{ kg/cm}) \cdot (y_1 \text{ cm} \times q \text{ cm/cm}) = (H \cdot p) (y_1 \cdot q) \text{ cmkg.}$$

Die analytische Bestimmung der Auflagerreaktionen ergibt sich mit Hilfe der 3. Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M = 0$. Wählt man A als Drehpunkt, so lautet die Momentengleichung, wenn p_1 die Entfernung von P_1 , p_2 die Entfernung von $P_2 \dots$ bedeuten:

$$(A) \quad P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2 + P_3 \cdot p_3 + P_4 \cdot p_4 - B \cdot l = 0.$$

Daraus:
$$B = \frac{1}{l} \cdot \Sigma P \cdot p.$$

Für B als Drehpunkt wird mit den Entfernungen $p_1', p_2' \dots$

$$(B) \quad P_4 \cdot p_4' + P_3 \cdot p_3' + P_2 \cdot p_2' + P_1 \cdot p_1' - A \cdot l = 0.$$

Daraus:
$$A = \frac{1}{l} \cdot \Sigma P \cdot p'.$$

Zur Kontrolle empfiehlt es sich, die Richtigkeit der Resultate mit Hilfe der 2. Gleichgewichtsbedingung zu prüfen; da $\Sigma V = 0$ sein soll, so muß sein $A - \Sigma P + B = 0$; $A + B = \Sigma P$.

5. Für ein gegebenes Kräftesystem P_1, P_2, P_3 (Fig. 33) ist ein Seilzug so zu entwerfen, daß die Schlußlinie durch zwei Punkte A und B_2 horizontal verläuft. Bilde den Kräftezug und ziehe durch den beliebigen Pol O_1 die Polstrahlen und A den Seilzug $A, 1, 2, 3$. Die Parallele durch 3 zum letzten Polstrahl schneide die Vertikale durch B_2 im Punkte B_1 . Ziehe durch O_1 zur Schlußlinie AB_1 eine Parallele, die den Kräftezug in a schneidet. Da die Schlußlinie des zweiten Seilecks horizontal verlaufen soll, muß der zweite Pol O_2 auf einer Horizontalen durch a und außerdem auf einer Vertikalen durch O , liegen. Das Seileck $A, 1', 2', 3', B_2$ aus dem Pol O_2 erfüllt die verlangte Bedingung.

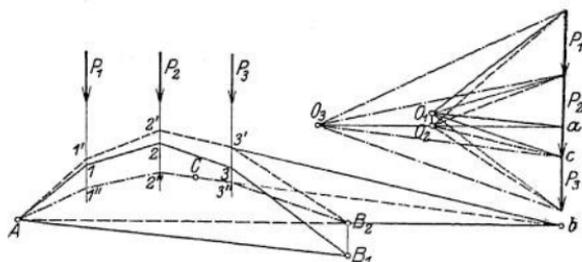


Fig. 33.

7. Wird noch die Forderung gestellt, das Seileck verlaufe durch die drei Punkte A, B_2, C (Fig. 33) so bringe man die Schlußlinie AB_2 mit dem zu C gehörenden Seilstrahl $2', 3'$ zum Schnitt; verbinde den Schnittpunkt b mit C , dann ist $2' 3'$ ein Strahl des verlangten Seilecks. Der dritte Pol O_3 ist der Schnittpunkt der Horizontalen aO_2 und einer Parallelen zu bC durch den Punkt c zwischen den Kräften P_2 und P_3 , zwischen denen der gegebene Punkt C liegt. Der Seileck aus dem Pol O_3 geht durch die drei Punkte ACB_2 .

8. Untersuchung der Dezimalwage. Der Schnitt $I-I$ (Fig. 34) zerlegt das System in zwei Teile, von denen der obere Wägebalken AB unter dem Einfluß der Kräfte x, y und P im Gleichgewicht sein muß. Die dritte Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M = 0$ liefert für den Punkt C als Drehpunkt:

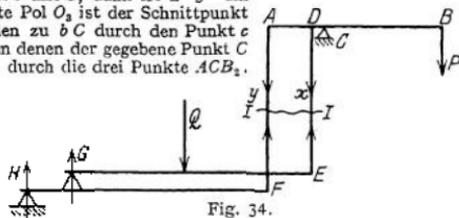


Fig. 34.

$$(I) \quad P \cdot \overline{CB} = x \cdot \overline{CD} + y \cdot \overline{CA}.$$

Für den unteren Teil der Wage liefert die dritte Gleichgewichtsbedingung für die Drehpunkte:

$$G \cdot Q \cdot \overline{QG} = x \cdot \overline{EG} \dots (II),$$

$$H \cdot G \cdot \overline{GH} = y \cdot \overline{FH} \dots (III).$$

Aus $\Sigma P = 0$ folgt: (IV) $Q = G + x$, so daß

$$y = G \cdot \frac{\overline{GH}}{\overline{HF}} = (Q - x) \frac{\overline{GH}}{\overline{HF}},$$

x und y in Gleichung (I) eingesetzt ergibt:

$$P \cdot \overline{CB} = x \cdot \overline{CD} + (Q - x) \frac{\overline{GH}}{\overline{FH}} \cdot \overline{CA} = x \cdot \left(\overline{CD} - \frac{\overline{GH}}{\overline{FH}} \cdot \overline{CA} \right) + Q \cdot \frac{\overline{GH}}{\overline{FH}} \cdot \overline{CA}.$$

x ist abhängig von der Lage der Last Q ; soll die Wage brauchbar sein, so muß das Übersetzungsverhältnis von dieser Lage der Last Q unabhängig sein, d. h.: das Glied mit x muß aus der Gleichung verschwinden. Das ist der Fall, wenn

$$\overline{CD} : \overline{CA} = \overline{GH} : \overline{FH}$$

gemacht wird; es ergibt sich dann:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\overline{GH}}{\overline{FH}} \cdot \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}},$$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{CB}} = \frac{1}{10} \text{ Dezimalwage; } \quad \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}} = \frac{1}{100} \text{ Zentesimalwage.}$$

3. Mittelpunkt paralleler Kräfte, Schwerpunkt.

Dreht man parallele Kräfte unter Beibehaltung ihrer Größe und Angriffspunkte so, daß sie bei der Drehung parallel bleiben, so geht auch die Mittelkraft stets durch denselben Punkt, den **Mittelpunkt der parallelen Kräfte**.

Einen Körper kann man als aus sehr vielen Körperteilchen bestehend auffassen, jedes dieser Massenteilchen hat ein Gewicht; sämtliche Gewichte der Massenteilchen bilden ein System von parallelen Kräften, folglich haben sie einen Mittelpunkt, den man Massenmittelpunkt nennt. Da durch ihn die Resultante sämtlicher Einzelgewichte, d. h. das Gesamtgewicht, hindurchgeht, darf man den Massenmittelpunkt als den Punkt betrachten, in dem das Gewicht eines Körpers angreift. Der Punkt heißt **Schwerpunkt des Körpers**.

Hat man den Schwerpunkt als Angriffspunkt einer Kraft erklärt, so lassen sich die Sätze über Kräfte zur Bestimmung seiner Lage anwenden. Obwohl der Begriff des Schwerpunktes mit dem Begriff der Masse verknüpft ist, spricht man doch von dem Schwerpunkt von Flächen und Linien, die man sich zur Aufrechterhaltung der Vorstellung mit unendlich feiner Masse belegt denkt.

Da die Schwere nur die Größe des Gewichtes, nicht aber die Lage der Angriffspunkte beeinflußt, so ist die Lage des Schwerpunktes nur von der Form der Körper, Flächen oder Linien abhängig; vorausgesetzt sind lediglich **homogene Körper**, für die das Gewicht der Raumeinheit konstant ist. Bestehen die einzelnen Teile eines Körpers aus Stoffen verschiedenen spezifischen Gewichtes, so ist bei der Berechnung der Schwerpunktlage das wirkliche Gewicht der einzelnen Teile einzuführen.

Für die Bestimmung der Lage von Schwerpunkten gelten folgende Sätze:

Das statische **Moment einer Kraft in Beziehung auf eine Ebene** ist gleich dem Produkt aus der Kraft und dem Abstände ihres Angriffspunktes von der Ebene.

Für **parallele Kräfte** ist das statische Moment der Mittelkraft in Beziehung auf eine beliebige Ebene gleich der Summe der statischen Momente der Kräfte, bezogen auf dieselbe Ebene.

Liegen die **parallelen Kräfte in einer Ebene**, so wählt man eine zur Ebene der Kräfte senkrecht stehende Ebene als Momentenebene. Die Abstände der Angriffspunkte der Kräfte von der Ebene sind dann durch ihre Abstände von der Schnittachse der beiden Ebenen gegeben; es ist also das **statische Moment einer Kraft in Beziehung auf eine Achse** gleich dem Produkt aus der Kraft und dem Abstände ihres Angriffspunktes von der Achse.

Eine durch den Schwerpunkt gelegte Ebene heißt **Schwerebene**; da der Angriffspunkt der Mittelkraft in diese Ebene fällt, ist ihr statisches Moment gleich

Null, also auch die Summe der statischen Momente der Gewichte der Massenteilchen. Umgekehrt: Ist die Summe der statischen Momente in Beziehung auf eine Ebene gleich Null, so liegt der Schwerpunkt in dieser Ebene.

Eine durch den Schwerpunkt gelegte Achse heißt **Schwerachse**; bezogen auf diese Achse ist das statische Moment der Mittelkraft gleich Null, also auch die Summe der statischen Momente der Gewichte der Massenteilchen. Umgekehrt: Ist die Summe der statischen Momente in Beziehung auf eine Achse gleich Null, so liegt der Schwerpunkt auf dieser Achse.

Eine Symmetrieebene ist Schwerebene; eine Symmetrieachse ist Schwerachse; ein Mittelpunkt ist Schwerpunkt.

Über die analytische Bestimmung von Schwerpunkten vgl. den Abschnitt Mathematik, S. 179.

4. Schwerpunktlagen.

In den nachfolgenden Abbildungen ist der Schwerpunkt mit S bezeichnet.

a) Schwerpunkte homogener Linien.

1. **Gerade Linie.** S liegt in der Mitte der Strecke.

2. **Dreiecksumfang** (Fig. 35): S liegt im Mittelpunkt des dem Dreieck ABC einbeschriebenen Kreises; A, B, C sind die Mittelpunkte der Seiten a, b, c . Aus $\Sigma M = 0$ in Beziehung auf die Seite a folgt

$$x_a = \frac{1}{2} h_a \frac{b+c}{a+b+c}.$$

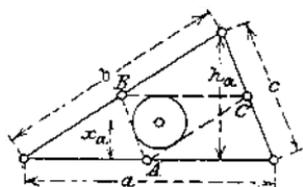


Fig. 35.

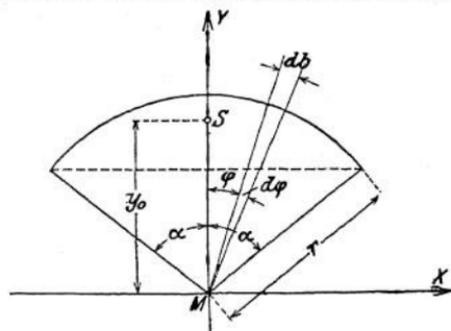


Fig. 36.

3. **Umfang des Parallelogramms.** S liegt im Schnittpunkt der Diagonalen.

4. **Kreisbogen** (Fig. 36):

$$y_0 = MS = \frac{r \cdot s}{b} = \frac{r \cdot \sin \alpha}{\alpha^\circ} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}.$$

Halbkreisbogen:

$$MS = \frac{2r}{\pi} = 0,63662 r.$$

Viertelkreisbogen:

$$MS = 2r \frac{\sqrt{2}}{\pi} = 0,90032 r.$$

Sechstelkreisbogen:

$$MS = \frac{3r}{\pi} = 0,95493 r.$$

Für flache Bögen ist angenähert

$$OS = \frac{1}{3} h.$$

b) Schwerpunkte homogener Flächen.

1. **Dreieck.** S liegt im Schnittpunkt der Mittellinien, die Entfernung von der Grundlinie beträgt $\frac{1}{3} h$.

2. Viereck. Beliebiges Viereck (Fig. 37). Man zerlege das Viereck durch Diagonalen in vier Dreiecke, deren Schwerpunkte S_1, S_2, S_3, S_4 nach (1) bestimmt werden. Der Schnittpunkt S der Geraden $S_1 S_3$ und $S_2 S_4$ ist der Schwerpunkt. Da $S_1 S_3 \parallel AC$ und $S_2 S_4 \parallel BD$, so genügt auch die Ermittlung von S_1 und S_2 . S liegt auf der Verbindungslinie der Mitte M von AD mit E , wenn $BE \parallel AC$ und $CE \parallel DB$.

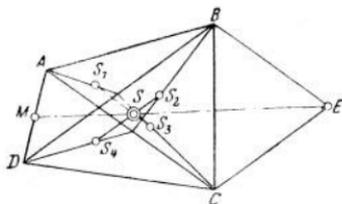


Fig. 37.

Parallelogramm. S liegt im Schnittpunkt der Diagonalen.

Trapez. S wird durch Zerlegung des Trapezes in Dreiecke gefunden, oder

S liegt auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte der parallelen Seiten; seine Abstände von diesen Seiten sind

$$x_a = \frac{h}{3} \frac{a+2b}{a+b}, \quad x_b = \frac{h}{3} \frac{2a+b}{a+b}.$$

Daraus ergibt sich die Konstruktion: Trage auf den Verlängerungen der parallelen Seiten die Strecken a bzw. b ab. Die Verbindungslinien der entsprechenden Endpunkte (Fig. 38) schneiden sich in S . Die Entfernung des Schwerpunktes von den nicht parallelen Seiten ist bestimmt durch

$$x = \frac{1}{3} \frac{a^2 + ab + b^2}{a+b}.$$

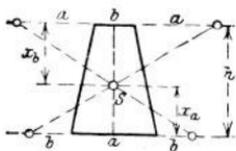


Fig. 38.

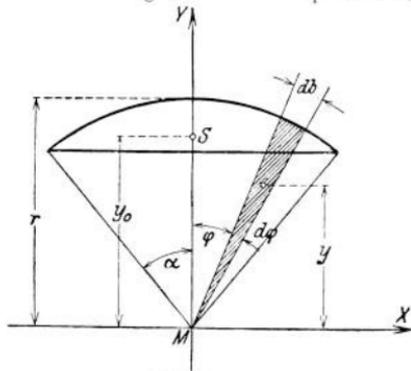


Fig. 39.

3. Kreisteile. Kreisausschnitt (Fig. 39):

$$y_0 = \frac{2}{3} r \cdot \frac{s}{b} = \frac{2}{3} r \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Halbkreisfläche:

$$y_0 = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi} = 0,4244 r.$$

Viertelkreisfläche:

$$y_0 = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot r = 0,6002 \cdot r.$$

Sechstelkreisfläche:

$$y_0 = \frac{2}{\pi} \cdot r = 0,6366 \cdot r.$$

Kreisringstück (Fig. 40)

$$MS = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

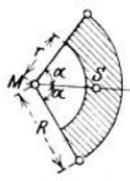


Fig. 40.

4. Ellipsenabschnitt (Fig. 41). Den Schwerpunkt des Ellipsenabschnittes findet man als Schwerpunkt desjenigen Kreisabschnittes, der in ein- oder umbeschriebenen Kreise von derselben Sehne abgetrennt wird. Der Kreis ist einbeschrieben, wenn die Sehne senkrecht zur kleinen Achse, umbeschrieben, wenn die Sehne senkrecht zur großen Achse gerichtet ist.

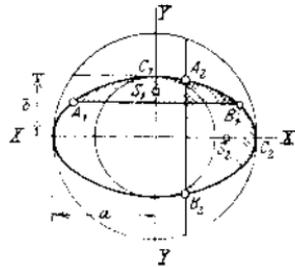


Fig. 41.

5. Parabelfläche

Fig. 42: $x_0 = \frac{3}{5} a$, $y_0 = \frac{3}{8} b$.

Fig. 43: $x_0 = \frac{3}{4} a$, $y_0 = \frac{3}{10} b$.

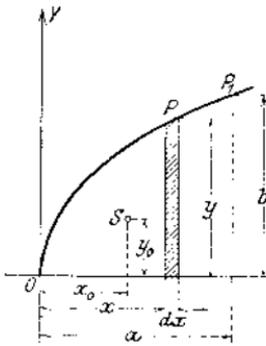


Fig. 42.

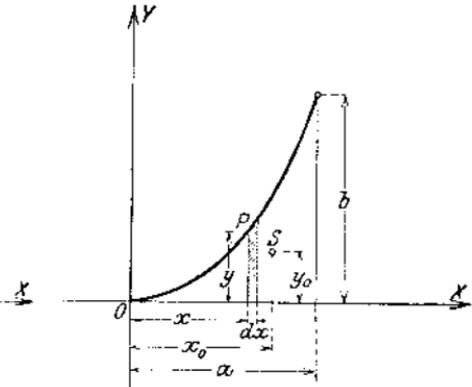


Fig. 43.

6. Kugelzone und Kugelhaube. S liegt in der Mitte der Höhe.

7. Mantel der Pyramide und des Kegels. Verbindet man die Spitze mit dem Schwerpunkt der Grundfläche, so liegt der Schwerpunkt auf dieser Geraden in $\frac{1}{4} h$ von der Grundfläche entfernt.

8. Mantel des abgestumpften Kreiskegels. Ist h die Höhe des Kegelstumpfes, r der Radius der oberen, R der Radius der unteren Begrenzungsfläche, so hat der Schwerpunkt die Entfernung

$$x = \frac{h}{3} \frac{R^2 + 2r^2}{R^2 + r^2}$$

von der Grundfläche.

7. Beliebige Fläche (Fig. 44). Zerlege die Fläche in eine gerade Anzahl n von Streifen gleicher Breite b und berechne den Abstand x des Schwerpunktes von der Geraden 1-1 mit Hilfe der Simpsonschen Regel (S. 101) zu

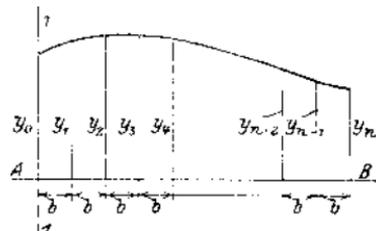


Fig. 44.

$$x = \frac{b}{2} \frac{0 \cdot y_0 + 1 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 3 \cdot y_3 + 4 \cdot y_4 + \dots + (n-2) \cdot y_{n-2} + (n-1) \cdot y_{n-1} + n \cdot y_n}{y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n}$$

Der Abstand von AB wird

$$y = \frac{1}{2} \frac{y_0^2 + y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2 + 2y_4^2 + \dots + 2y_{n-2}^2 + 4y_{n-1}^2 + y_n^2}{y_0 + 4y_1 - 2y_2 + 4y_3 - 2y_4 + \dots - 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n}$$

c) Schwerpunkte homogener Körper.

1. **Gerades Prisma, gerader Zylinder.** S liegt in der Mitte der Schwerachse, d. h. der Verbindungslinie der Schwerpunkte der Endflächen.

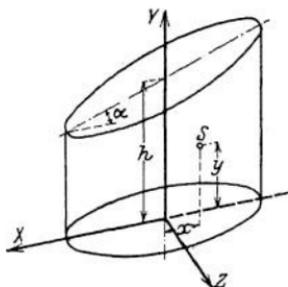


Fig. 45.

2. **Schief abgeschnittener gerader Kreiszyylinder.** Es sei die xy -Ebene (Fig. 45) Symmetrieebene, h die Länge der Achse, r der Radius des Grundkreises, α der Neigungswinkel der schiefen Begrenzungsfläche gegen die Grundfläche, dann ist

$$x = \frac{1}{4} \cdot \frac{r^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{h}$$

$$y = \frac{h}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{r^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}{h}$$

3. **Pyramide, Kegel.** S liegt auf der Schwerachse (vgl. 1.), um ein Viertel der Höhe von der Grundfläche entfernt.

4. **Pyramidenstumpf.** Ist h die Höhe des Pyramidenstumpfes, F die Grundfläche, f die Endfläche, so ist der Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche

$$y_0 = \frac{h}{4} \cdot \frac{F + 2\sqrt{F \cdot f} + 3 \cdot f}{F + \sqrt{F \cdot f} + f}$$

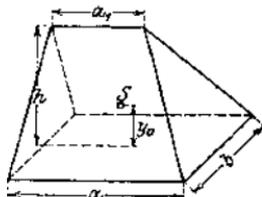


Fig. 46.

5. **Abgestumpfter Kreiskegel.** Ist h die Höhe des Kegelstumpfes, R der Radius der Grundfläche, r der Radius der Endfläche, so ist der Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche

$$y_0 = \frac{h}{4} \cdot \frac{R^2 + 2R \cdot r + 3r^2}{R^2 + R \cdot r + r^2}$$

6. **Keil.** Sind a und b die Seiten der Grundfläche, a_1 die Länge der Keilkante (Fig. 46), h die Höhe des Keiles, so ist der Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche

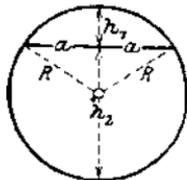


Fig. 47.

$$y_0 = \frac{h}{2} \cdot \frac{a + a_1}{2a + a_1}$$

7. **Kugelabschnitt.** Mit den Bezeichnungen der Fig. 47 wird

$$y_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2R - h_1)^2}{3R - h_1}$$

Den gleichen Abstand hat auch der Schwerpunkt des Abschnittes eines Umdrehungselipsoids, dessen Umdrehungsachse gleich dem Durchmesser der Kugel ist.

Halbkugel:
$$y_0 = \frac{3}{8} R$$

Halbe Hohlkugel: Ist R der Radius der äußeren, r der Radius der inneren Kugel, so ist der Abstand des Schwerpunktes von der Äquatorebene

$$y_0 = \frac{3}{8} \cdot \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}$$

8. **Kugelausschnitt.** Ist h die Höhe des Kugelausschnittes, so wird mit den Bezeichnungen der Fig. 39, S. 284,

$$y_0 = \frac{3}{8} r(1 + \cos \alpha) = \frac{3}{8} (2r - h)$$

9. Umdrehungsparaboloid.

Mit den Bezeichnungen der Fig. 48 wird der Abstand des Schwerpunktes von der Endfläche

$$y_0 = \frac{2}{3} b.$$

10. Dreiachsiges Ellipsoid.

Sind a, b, c die Halbachsen, so hat der Schwerpunkt eines Achtels des Körpers die Koordinaten

$$x_0 = \frac{3}{8} a; \quad y_0 = \frac{3}{8} b; \quad z_0 = \frac{3}{8} c.$$

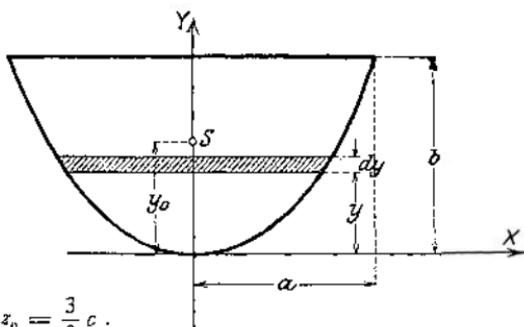


Fig. 48.

d) Schwerpunktermittlung durch Zeichnung.

Zur Bestimmung des Schwerpunktes eines **Linienzuges** (Fig. 49) faßt man die Längen der einzelnen Strecken als Kräfte auf, die in den Mittelpunkten $S_1, S_2 \dots$ angreifen; mit Hilfe des Kraft- und Seilecks $I, II, III \dots$ ermittelt man die Wirkungslinie der Resultante $R = \Sigma l$, die Schwerachse ist. Dreht man nunmehr die parallelen Kräfte unter Beibehaltung ihrer Größe und der parallelen Richtung um die Angriffspunkte $S_1, S_2 \dots$ und verfährt wie vorher, so ergibt der Schnittpunkt der äußersten Seilstrahlen I' und V' die Wirkungslinie der Resultante $R' = R$ der gedrehten Kräfte, die ebenfalls Schwerachse ist. Der Schnittpunkt beider Schwerachsen ist der Schwerpunkt S des Linienzuges.

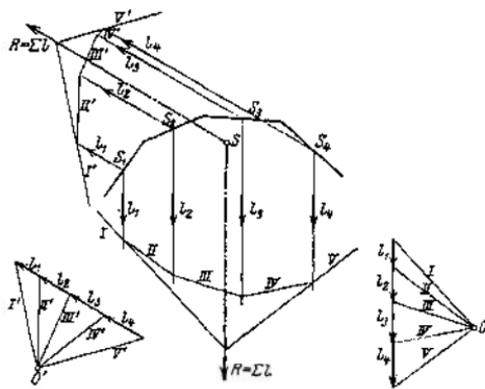


Fig. 49.

Zur Bestimmung des Schwerpunktes einer **beliebigen Fläche** zerlegt man die Fläche in Teile, deren Schwerpunktlagen bekannt sind, und faßt den Flächeninhalt der einzelnen Teile als Kraft auf, die im Schwerpunkt des Flächenteilchens angreift. Mittels des Kräfte- und Seilplanes sucht man die Mittelkräfte dieser Einzelkräfte für zwei beliebig gewählte Richtungen. In Fig. 50 ist der Schwerpunkt eines Winkelisenquerschnittes zeichnerisch ermittelt, der durch zwei Nietlöcher geschwächt ist. Zur Kontrolle empfiehlt es sich, das Verfahren noch für eine dritte Richtung durchzuführen.

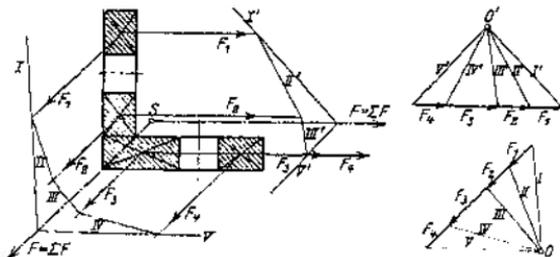


Fig. 50.

Zur Kontrolle empfiehlt es sich, das Verfahren noch für eine dritte Richtung durchzuführen.

Der Schwerpunkt eines Schienenprofils ist in Fig. 51 ermittelt. Man zerlegt den — symmetrischen — Querschnitt so in parallele Streifen senkrecht zur Symmetrieachse, daß die einzelnen Streifen als Rechtecke aufgefaßt werden dürfen. Führt man den Inhalt der Streifen als Kräfte ein und bestimmt mittels des Kraft- und Seilecks die Wirkungslinie der Resultante, so ist der Schnittpunkt der Symmetrieachse mit der Wirkungslinie der Schwerpunkt des Profils.

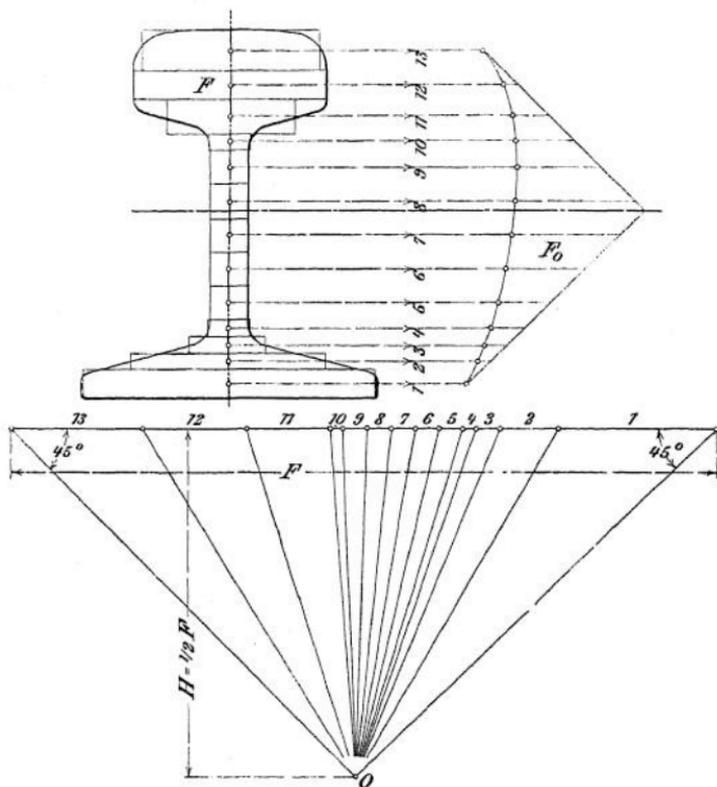


Fig. 51.

Körper zerlegt man in Teilkörper, deren Schwerpunkte bekannt sind, und setzt die Gewichte als Parallelkräfte zusammen, indem man sie auf die Grundriß- und Aufrißebene projiziert. Die Wirkungslinie der Resultante im Aufriß liegt in einer Schwereebene, sie ergibt den vertikalen Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche. In der Grundrißebene ermittelt man den Mittelpunkt der parallelen Kräfte mittels des Kraft- und Seilecks für zwei beliebig gewählte Richtungen und erhält damit die Lage des Schwerpunktes im Grundriß (Fig. 52).

Bestimmung der Verschiebung des Schwerpunktes infolge Querschnittsverminderung. Ist die Lage des Schwerpunktes für den ungeschwächten Querschnitt bekannt, so empfiehlt es sich, die Verschiebung zu bestimmen, die der Schwerpunkt infolge einer Schwächung des Querschnitts erfährt. In Fig. 53 ist die Verschiebung des Schwerpunktes eines I-Eisens zu ermitteln, dessen unterer Flansch durch zwei Nietlöcher geschwächt ist. Der Gesamtquerschnitt habe F cm²; die Schwächung durch die Nietlöcher sei

$$f = 2 \cdot h \cdot d,$$

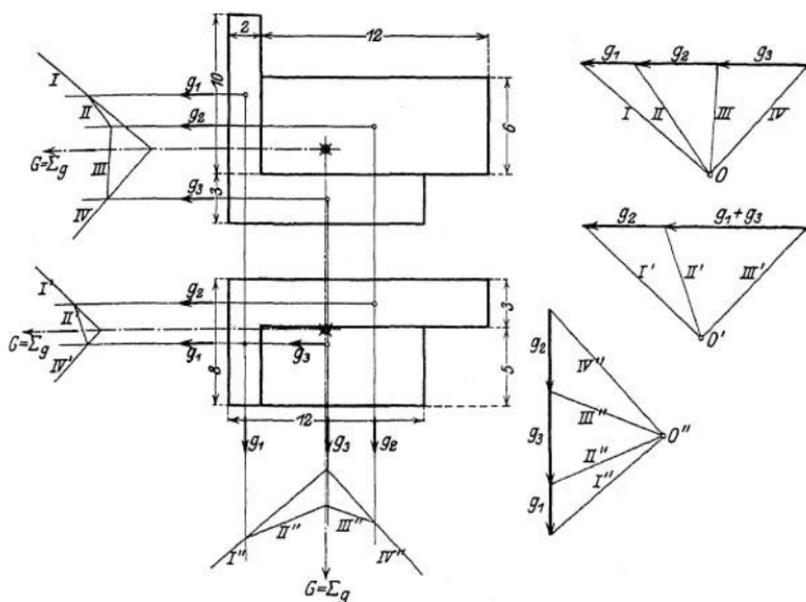


Fig. 52.

wobei h als mittlere Flanschstärke den Tabellen über Profileisen (vgl. S. 537) zu entnehmen ist. Faßt man die Flächen als Kräfte auf, so wirkt eine Querschnittsverminderung entlastend. In Beziehung auf die x -Achse muß Gleichgewicht herrschen, da sie Schwerachse ist; folglich ergibt sich aus der 3. Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M = 0$ für S als Drehpunkt

$$(F - f) \delta - f \cdot \left(\frac{1}{2} H - \frac{h}{2} \right) = 0.$$

so daß

$$\delta = \frac{f \cdot (H - h)}{2(F - f)}$$

wird. Sind sämtliche Größen in cm gemessen, so ergibt sich auch die Verschiebung δ des Schwerpunktes in cm. Allgemein verschiebt sich der Schwerpunkt S einer Fläche F_1 durch Hinzutreten einer Fläche F_2 , deren Schwerpunktsentfernung von S mit e bezeichnet wird, um

$$\delta = \frac{F_2 \cdot e}{F_1 + F_2}.$$

Im vorstehenden Beispiel ist $F_2 = -f$, die Verschiebung erfolgt nach entgegengesetzter Richtung.



Fig. 53.

B. Reibungswiderstände.

Führt man eine Schnur über eine Rolle und belastet die freien Enden durch Gewichte, so lehrt die Erfahrung, daß Gleichgewicht herrschen kann, auch wenn die beiden Gewichte nicht gleich groß sind. Steigert man das eine Gewicht so lange, bis es das andere Gewicht zu heben anfängt, so gibt die Differenz beider Gewichte die **Reibung** der Rolle. Vergrößert man beide Gewichte, so findet man

angenähert: die **Reibung ist proportional der Last**. Die Reibung stellt sich dar als **Widerstand**, der bei Berührung zweier Oberflächen auftritt. Da dieser Widerstand durch eine Kraft überwunden wird, so definiert man auch die Reibung als eine Kraft. Die Erfahrung lehrt weiter, daß die Reibung stets der Bewegung entgegengesetzt wirkt; ihre Wirkungslinie fällt in die Berührungsebene; über die Lage des Angriffspunktes sind genauere Angaben nicht möglich.

Der Versuch an der Rolle zeigt, daß die auf der Kraftseite durchgeführte Belastungssteigerung zwar eine Aufwärtsbewegung der Last einleitet, daß aber diese Bewegung eine gleichförmig beschleunigte ist. Die aufzuwendende Kraft ist geringer, wenn sie die Last mit gleichbleibender Geschwindigkeit heben soll. Man entnimmt daraus, daß der Kraftaufwand größer ist, wenn ein Körper aus dem Zustand der Ruhe in den der Bewegung übergeführt wird, und spricht von der **Reibung der Ruhe**. Ist der Beharrungszustand erreicht, so spricht man von der **Reibung der Bewegung**. Die Bewegung kann eine rein gleitende sein, dann heißt der Widerstand **gleitende Reibung**; ist die Bewegung eine rollende oder wälzende, so heißt der Widerstand **rollende Reibung**.

1. Der Reibungskoeffizient der gleitenden Reibung.

Aus dem obigen Grundgesetz der Reibung leitet man die Beziehung zwischen den drei Größen ab und schreibt

$$R = \mu \cdot N,$$

wobei N den Normaldruck bedeutet, mit dem zwei sich berührende Flächen gegeneinander gepreßt werden; μ gibt den Bruchteil der Last an, der zur Überwindung der Reibung aufgewendet werden muß, und heißt **Reibungskoeffizient** oder **Reibungszahl** der gleitenden Reibung; mit μ_0 bezeichnet man den Reibungskoeffizienten der Ruhe, der im allgemeinen größer ist als der der Bewegung.

Über die Größe des Reibungskoeffizienten gibt lediglich der Versuch Auskunft, doch darf man die Versuchsergebnisse nicht ohne weiteres verallgemeinern, da eine Reihe von Nebenumständen für die Messung von Bedeutung ist. Legt man zum Beispiel zwei geschabte Flächen aufeinander, so wird nur eine sehr geringe Reibung auftreten, da zwischen beiden Flächen eine Luftschicht bleiben wird. Belastet man die obere Platte, so entsteht ein wenn auch unvollkommenes Vakuum, die Adhäsion vergrößert den Widerstand gegen eine Bewegung. Gleiten beide Flächen aufeinander, so zeigt sich, daß der Widerstand unverhältnismäßig kleiner ist, was sich vielleicht dadurch erklären läßt, daß bei der Bewegung Luft zwischen die Berührungsflächen gesaugt wird. Je schneller beide Flächen aufeinander gleiten, desto geringer ist der Widerstand. So tritt z. B. eine erhebliche Verringerung des Reibungskoeffizienten zwischen den gußeisernen Bremsen der Eisenbahnwagen und den Radreifen auf (vgl. Tabelle S. 294).

Bei gleicher Belastung zweier Flächen ist die Größe der Berührungsfläche von Einfluß; der Reibungskoeffizient wächst mit dem Flächen-
druck (vgl. S. 293).

Schließlich beeinflußt wie bei allen physikalischen Versuchen auch hier die Temperatur das Resultat der Messung.

Einen zweiten Weg, die Gesetze der Reibung zu studieren, erhält man durch folgende Beobachtung: legt man einen Körper auf eine Platte, so bleibt der Körper auch dann liegen, wenn die Platte gegen die Horizontale geneigt

wird. Eine Steigerung der Neigung der Platte wird schließlich das Gleiten des Körpers verursachen. Der Winkel, bei dem das Gleiten eintritt, heißt der **Reibungswinkel**, seine trigonometrische Tangente ist gleich dem Reibungskoeffizienten. In Fig. 54 zerlegt man die Kraft Q in Richtung der schiefen

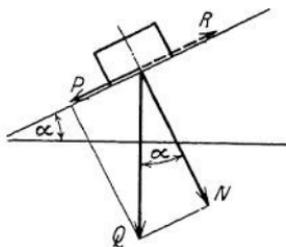


Fig. 54.

Ebene und senkrecht dazu. Die Komponente, die den Körper abwärts zu bewegen sucht, ist $P = Q \sin \alpha$; die Reibung, die der Bewegung entgegengesetzt wirkt, ist

$$R = \mu \cdot N.$$

Der Körper wird sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit abwärts bewegen, wenn

$$P = R, \quad \text{d. h.} \quad Q \cdot \sin \alpha = \mu \cdot N$$

ist; mit $N = Q \cdot \cos \alpha$ wird

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu.$$

Der Winkel α , um den man die schiefe Ebene aus der Horizontalen neigen muß, um eine gleichbleibende Bewegung zu erhalten, wird mit ϱ bezeichnet; es ist

$$\mu = \operatorname{tg} \varrho.$$

Mit ϱ_0 bezeichnet man den Winkel, bei dem der Körper aus dem Zustand der Ruhe in den der Bewegung übergeht, das ist

$$\mu_0 = \operatorname{tg} \varrho_0.$$

Da man die Platte nach allen Richtungen neigen kann, so beschreibt der eine Schenkel des Winkels ϱ um die Wirkungslinie des Normaldruckes einen Kegel, den **Reibungskegel**.

Verläuft die Resultante sämtlicher an dem Körper angreifenden Kräfte innerhalb des Reibungskegels, so bleibt der Körper in dem Zustand der Ruhe, es herrscht Gleichgewicht.

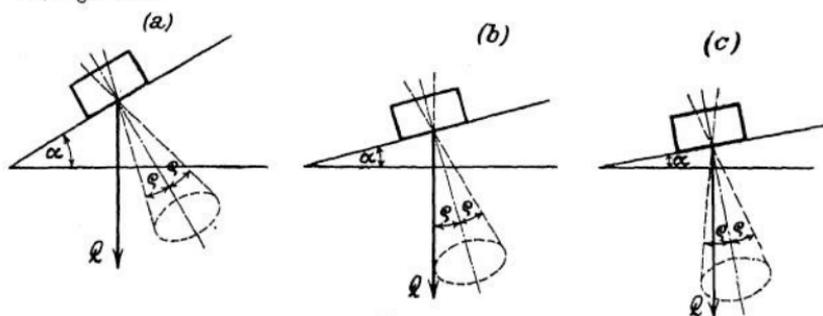


Fig. 55.

In Fig. 55a fällt Q als einzige wirkende Kraft aus dem Reibungskegel heraus, es tritt Bewegung ein; in Fig. 55b fällt Q in die Mantelfläche des Kegels, eine geringe zusätzliche Kraft in Richtung der schiefen Ebene würde eine Bewegung hervorrufen; in Fig. 55c fällt Q ganz in den Reibungskegel, es muß eine erhebliche Kraft zur Erzielung der Bewegung aufgewendet werden. Bei Untersuchungen über Kräftesysteme mit Berücksichtigung der Reibung wird man im allgemeinen den Grenzfall (b) der Rechnung zugrunde legen.

2) Der Reibungskoeffizient der rollenden Reibung.

Rollt ein Zylinder ohne zu gleiten auf einer ebenen Unterlage, so tritt der Widerstand in der Berührungslinie auf, während die zur Überwindung des Widerstandes erforderliche Kraft nach Fig. 56 oder 57 angreift. Die Drehung wird durch ein Kräftepaar $P \cdot r$ bzw. $P \cdot d$ hervorgerufen; es ist deshalb üblich, auch den Widerstand in dieser Form zu bezeichnen. Ist Q der Normaldruck, so ist das zu überwindende Kräftepaar $M = Q \cdot f$, worin f (Fig. 58) die Entfernung in cm bedeutet, die zwei gleich große entgegengesetzt gerichtete Kräfte Q haben müssen, wenn Gleichgewicht zwischen dem angreifenden und widerstehenden

Kräftepaar herrschen soll. Die Größe f heißt Hebelarm oder Koeffizient der rollenden Reibung.

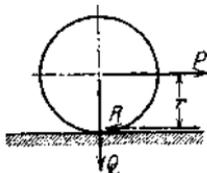


Fig. 56.

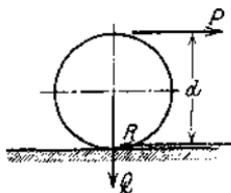


Fig. 57.

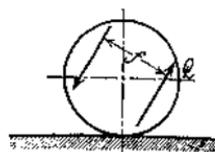


Fig. 58.

Reibungszahlen der gleitenden Reibung.¹⁾

= bedeutet: die Fasern liegen parallel, + „ : die Fasern liegen gekreuzt, 1. „ : das Holz liegt als Hirnholz auf.	Reibungszahl					
	der Ruhe			der Bewegung		
	trocken	mit Wasser	geschmiert	trocken	mit Wasser	geschmiert
Eichenholz auf Eiche = . . .	0,62	—	0,11	0,48	—	0,075
„ „ „ + . . .	0,54	0,71	—	0,34	0,25	—
„ „ „ 1. . .	0,43	—	—	0,19	—	—
„ „ Esche, Buche	—	—	—	—	—	—
„ „ Tanne = . . .	0,53	—	—	0,38	—	0,15—0,10
„ „ Muschelkalk !	0,63	—	—	0,38	—	—
„ „ Stein und Kies	0,60—0,46	—	—	—	—	—
Holz auf Metall	0,60	0,65	0,11	0,40	0,24	0,10
Hartholz auf poliertem Metall oder Granit	—	0,5	—	0,30	0,10	0,06
Stahl auf Stahl (*hoher Druck, bis etwa 1000 kg/qcm)	0,15	—	0,12—0,11	0,09 bei $v = 3$ m/sek 0,03 bei $v = 27$ m/sek	—	—
Stahl auf Phosphor-Bronze ²⁾ ebene Flächen . . .	0,11	—	0,098	0,105	—	0,092
„ „ zylindrische Flächen . . .	0,169	—	0,10—0,13	0,162	—	0,15—0,12
Stahl auf grobem Sandstein	—	—	—	0,29	—	—
„ „ Eis	0,027	—	—	0,014	—	—
Schmiedeeisen auf Eiche =	—	0,65	0,11	0,5—0,4	0,26	0,08
„ „ Weichholz	—	—	—	0,65—0,50	—	—
„ „ Stahl . . .	—	—	—	0,21 bei $v = 4,5$ m/sek 0,11 bei $v = 22$ m/sek	—	—
„ „ Schmiedeeisen . . .	0,13	—	0,11	—	—	0,10—0,08
„ „ Gußeisen . . .	—	—	—	—	—	—
„ „ oder Bronze	0,19	—	—	0,18—0,17	—	0,08—0,07
„ „ Sandstein	—	—	—	0,46—0,41	—	—
„ „ Muschelkalk	0,49—0,42	—	—	0,29—0,24	—	—
„ „ Stein u. Kies	0,49—0,42	—	—	—	—	—
Gußeisen auf Eiche = . . .	—	0,65	—	0,5—0,3	0,22	0,19
„ „ Weichholz . . .	—	—	—	0,3—0,4	—	—
„ „ Stahl . . .	0,33	—	—	0,27 bei $v = 2,2$ m/sek 0,13 bei $v = 20$ m/sek	—	—
„ „ Gußeisen . . .	—	—	0,16	0,13 bei $v = 20$ m/sek	—	—
„ „ Bronze . . .	—	—	—	0,10—0,08	—	—
„ „ grobem Sandstein	—	—	—	0,20—0,15	—	0,08—0,07
„ „ grobem Sandstein	—	—	—	0,24—0,21	—	—
Bronze auf Eiche = . . .	0,62	—	—	0,30	—	—
„ „ Bronze . . .	—	—	0,11	0,20	0,10	0,06
Ziegelstein auf Muschelkalk	0,67	—	—	0,65—0,60	—	—
Rauher Kalkstein auf desgl., oder mit frischem Mörtel	0,75	—	—	0,67	—	—
Muschelkalk auf Muschelkalk	0,70	—	—	0,38	—	—
Mauerwerk auf Beton . . .	0,76	—	—	—	—	—
„ „ gewachsenem Boden, trocken	0,65	0,30	—	—	—	—
Rindsleder auf Eichenholz	0,6—0,5	—	—	0,5—0,3	—	—
„ „ Gußeisen . . .	0,3—0,3	0,6—0,4	0,12	0,56	0,36	0,15
Hautseil auf rauhem Holz	0,8—0,5	—	—	0,5	—	—
„ „ glattem Holz . . .	0,33	—	—	—	—	—

¹⁾ Aus Förster, Taschenbuch für Bauingenieure. Berlin 1911, Julius Springer.

²⁾ Hoher Druck bis 600 kg/qcm.

Wie μ und μ_0 der gleitenden Reibung kann auch f nur durch Versuche ermittelt werden. Legt man einen Zylinder mit dem Halbmesser r auf eine schiefe Ebene (Fig. 59), so ist das treibende Kräftepaar $Q \cdot r \sin \alpha$, das widerstehende

$$N \cdot f = Q \cdot \cos \alpha \cdot f,$$

aus der Bedingung $\Sigma M = 0$ folgt

$$Q \cdot r \cdot \sin \alpha = Q \cdot f \cdot \cos \alpha,$$

so daß

$$f = r \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

ist.

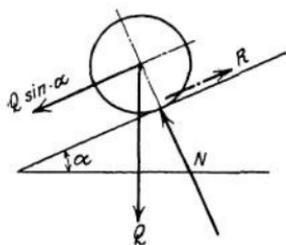


Fig. 59.

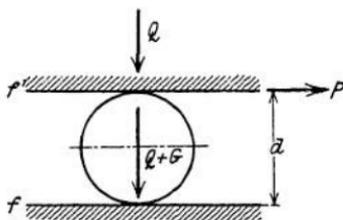


Fig. 60.

Die Größe f wird beeinflusst durch die Geschwindigkeit des Rollens; bei sehr großen Geschwindigkeiten — z. B. bei den Treibrädern der Lokomotiven — treten Nebenwirkungen auf, die als abwechselndes Zusammendrücken und Ausdehnen wellenförmig über dem Radkranz und der Schiene verlaufen.

Wird eine Last Q auf einer Walze fortgeschoben (Fig. 60) und bedeutet f den Koeffizienten der rollenden Reibung für Walze und Unterlage, f' den Koeffizienten der rollenden Reibung für Walze und Last, G das Eigengewicht der Walze, so ist

$$P \cdot d = M = Q \cdot f' + (Q + G) \cdot f.$$

Reibungszahlen der gleitenden Bewegung nach Rennie in Abhängigkeit vom Flächendruck; die Oberflächen waren nur wenig eingefettet:

Flächendruck in kg/cm ²	Schweißeisen auf Schweißeisen	Gußeisen auf Schweißeisen	Stahl auf Gußeisen	Messing auf Gußeisen
	$\mu =$			
8,79	0,140	0,174	0,166	0,157
13,08	0,250	0,275	0,300	0,225
15,75	0,271	0,292	0,333	0,219
18,28	0,285	0,321	0,340	0,214
20,95	0,297	0,329	0,344	0,211
23,62	0,312	0,333	0,347	0,215
26,22	0,350	0,351	0,351	0,206
27,42	0,376	0,363	0,353	0,205
31,50	0,395	0,365	0,354	0,208
34,10	0,403	0,366	0,356	0,221
36,77	0,409	0,366	0,357	0,223
39,37	Flächen an- gegriffen	0,367	0,358	0,233
42,18		0,367	0,359	0,234
44,58		0,367	0,367	0,235
47,25		0,376	0,403	0,233
49,92		0,434	Flächen	0,234
55,12		Flächen an-	gegriffen	0,232
57,65			gegriffen	0,273

Reibungskoeffizienten für besondere Fälle.

1. Eiserne Radreifen auf trockenen eisernen Schienen nach Poirée für Eisenbahnwagen von 3400 bis 8400 kg Gewicht; μ in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit V in km/Std.:

V	16,56	26,28	31,68	51,48	72,00	79,20
μ	0,209	0,206	0,171	0,145	0,136	0,112

2. Stählerne Radreifen auf Stahlschienen nach Galton; μ in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit V in km/Std.:

V	Beginn	10,93	21,8	43,9	65,8	87,6	96,48
μ	0,242	0,088	0,072	0,07	0,057	0,038	0,027

3. Gußeiserne Bremsklötze an stählernen Radreifen nach Galton; μ in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit V in km/Std.:

V	Beginn	8,05	16,09	40,03	72,36	96,48
μ	0,330	0,273	0,242	0,166	0,127	0,074

Nach Versuchen von Wichert¹⁾ hat sich für die gleitende Reibung zwischen Bremsklötzen aus Stahlguß und stählernen Radreifen ergeben

$$\mu = \beta \frac{1 + 0,0112 \cdot V}{1 + 0,06 V}$$

wobei V die Geschwindigkeit in km/Std. bedeutet, und $\beta = 0,45$ für trockene, $\beta = 0,25$ für nasse Reibungsflächen ist. Ist V die Geschwindigkeit bei Beginn des Bremsens, so kann man für die Bremszeit bis zum Stillstande mit einem mittleren Reibungskoeffizienten μ' rechnen, der in nachstehender Tabelle für ungünstige Verhältnisse gilt:

V in km/Std.	μ Reibungsflächen für trockene für nasse		μ' mittlerer Wert
	0	0,450	
10	0,313	0,174	0,201
20	0,250	0,139	0,164
30	0,215	0,119	0,142
40	0,192	0,107	0,128
50	0,176	0,098	0,117
60	0,164	0,091	0,109
70	0,154	0,086	0,103
80	0,147	0,082	0,098
90	0,141	0,078	0,093

4. Bremsen nach L. Klein²⁾. Bei Geschwindigkeiten von 1 bis 20 m/sek und Flächenpressungen von 0,5 bis 10 kg/cm² ist μ annähernd unveränderlich und zwar ist μ bei sauber bearbeiteten Bremskränzen und Holz in Längsfasern für:

	Buche	Eiche	Pappel	Ulme	Weide
Gußeisen . . .	0,29 ÷ 0,37	0,30 ÷ 0,34	0,35 ÷ 0,40	0,36 ÷ 0,37	0,46 ÷ 0,47
Schmiedeeisen .	0,54	0,51 ÷ 0,40	0,65 ÷ 0,60	0,60 ÷ 0,49	0,63 ÷ 0,60

Bei Gußeisen gelten die niedrigeren Werte, wenn die Scheibe sauber abgewischt ist, bei Schmiedeeisen die höheren. Sind die Bremscheiben mit Benzin gereinigt, so gelten für Gußeisen die höheren, für Schmiedeeisen die niedrigeren Werte.

¹⁾ Vgl. Zentralblatt der Bauverwaltung 1894 S. 73.

²⁾ Mitteilungen über Forschungsarbeiten Heft 10.

5. Druckwasser-Hebezeuge nach H. Lang.

a) Bronze- oder Pockholzschieber auf Bronze; μ ist bei langsamer wechselnder Bewegung und Flächenpressungen von 2 bis 100 kg/cm² unveränderlich:

Schieber dauernd gefettet	$\mu = 0,06$
Schieber mittels Nuten vom Wasser benetzt	$\mu = 0,10$
Schieber trocken	μ bis 0,30

b) Stopfbuchsen mit Hanf, Baumwolle oder Leder abgedichtet, haben μ unveränderlich bei Wasserpressungen zwischen 1 und 50 kg/cm².

Baumwolle oder Hanf bei elastischer Packung	$\mu = 0,06 \div 0,11$
Lederstulp, weiches Leder, gute Ausführung	$\mu = 0,03 \div 0,07$
„ hartes, stark lohbares Leder	$\mu = 0,10 \div 0,13$
„ ungünstige Anlage	μ bis 0,20.

6. Schleifsteine.

	grobkörniger	feinkörniger Sandstein	
Gußeisen	$\mu = 0,21 \div 0,24$	$\mu = 0,72$	} Mittelwerte zwischen dem nassen Stein und Metall.
Stahl	0,29	0,94	
Schmiedeeisen	$\mu = 0,41 \div 0,46$	1,0	

7. Gesamtreibung für Straßenfahrwerke. Der Widerstand, den ein Straßenfahrzeug seiner Bewegung entgegengesetzt, wird in der Hauptsache hervorgerufen durch die Zapfenreibung in den Naben und die rollende Reibung am Umfang des Rades. Ist G das zu befördernde Gewicht, μ die Gesamtreibungszahl, so ist für eine horizontale Bahn die Summe aller Widerstände $W = \mu \cdot G$.

Mittlere Werte der Reibungszahl μ .

Erdbahnen:

Schlechter Erdweg, loser Sand	$\frac{1}{7} = 0,150$,
Gewöhnliche Erdbahn	$\frac{1}{10} = 0,100$,
Trockene, feste Erdbahn	$\frac{1}{20} = 0,050$.

Schotterbahnen:

Frisch aufgebrachte, nicht gewalzte Schotterbahn	$\frac{1}{8} = 0,125$,
Schotterbahn bei Regenwetter	$\frac{1}{20} = 0,050$.
Trockene gute Schotterbahn	$\frac{1}{35} = 0,030$,
Sehr gute Schotterstraße, Pechmakadam	$\frac{1}{50} = 0,020$.

Pflasterbahnen:

Schlechtes Steinpflaster, Kopfsteinpflaster	$\frac{1}{25} = 0,040$,
Kleinpflaster, $\frac{1}{40} \div \frac{1}{60}$, im Mittel	$\frac{1}{50} = 0,020$,
Gutes Steinpflaster, $\frac{1}{50} \div \frac{1}{60}$, im Mittel	$\frac{1}{55} = 0,018$,
Gutes, sehr ebenes Stein- (Klinker-) Pflaster	$\frac{1}{75} = 0,013$,
Holzpfaster aus Weichholz, $\frac{1}{30} \div \frac{1}{60}$, im Mittel	$\frac{1}{55} = 0,018$,
„ „ Hartholz	$\frac{1}{75} = 0,013$,
Asphaltbahnen	$\frac{1}{100} = 0,010$,
Eiserne Gleise in Straßen, $\frac{1}{100} \div \frac{1}{300}$, im Mittel	$\frac{1}{200} = 0,005$,
Eisenbahngleise bei geringer Geschwindigkeit	$\frac{1}{400} = 0,0025$.

Auf steigender Bahn vom Steigungsverhältnis $s^0/100$ gilt $W = G(\mu + s)$.

Koeffizienten der rollenden Reibung.

Reibende Körper	Reibungszahl in cm
Pockholz auf Pockholz	0,047
Ulmenholz auf Pockholz	0,081
Eisen auf Eisen	0,005
Stahl auf Stahl	0,005
Gehärtete Stahlrollen und Kugeln auf Stahlrollen und Lagern	0,001

Anwendungen. 1. Es ist die horizontale Kraft P zu bestimmen, die eine Last Q die schiefe Ebene hinaufzieht; der Reibungskoeffizient sei $\mu = \operatorname{tg} \varrho$ (Fig. 61). Gleichgewicht ist vorhanden, solange die Resultante der Kräfte P und Q in den Reibungskegel fällt. Eine Bewegung nach aufwärts tritt ein, wenn R in die Mantellinie a fällt, dann ist

$$P \geq Q \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varrho_0)$$

($\varrho_0 =$ Reibungswinkel der ruhenden Reibung). Die Bewegung wird aufrecht erhalten, wenn

$$P = Q \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varrho)$$

ist. Q als einzige angreifende Kraft bewirkt eine Bewegung nach abwärts, da es aus dem Reibungskegel herausfällt. Die Last Q bleibt in Ruhe, wenn die Wirkungslinie der Kraft Q in die Mantellinie b des Reibungskegels fällt; für diesen Fall ist

$$\alpha = \varrho_0;$$

man sagt: es ist **Selbsthemmung** vorhanden und nennt $\alpha = \varrho_0$ die Bedingung für die Selbsthemmung des Getriebes.

Legt man die in Fig. 61 dargestellte schiefe Ebene um einen Zylinder, so erhält man eine **Schraube**¹⁾. Ist h die Ganghöhe oder Steigung der Schraube, r der Halbmesser der mittleren Schraubenlinie, α der Neigungswinkel der mittleren Schraubenlinie, so herrscht **Gleichgewicht**, solange

$$Q \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \varrho_0) < P < Q \operatorname{tg}(\alpha + \varrho_0) = Q \frac{h + 2\pi r \cdot \mu_0}{2\pi r - \mu_0 h},$$

wobei die Kraft P tangential angreifend gedacht ist; ihr Hebelarm ist r . Die Größe der am Schraubenschlüssel bzw. Handrad angreifenden Kraft K ergibt sich aus

$$P \cdot r = K \cdot R,$$

wenn R den Hebelarm der Kraft K bedeutet.

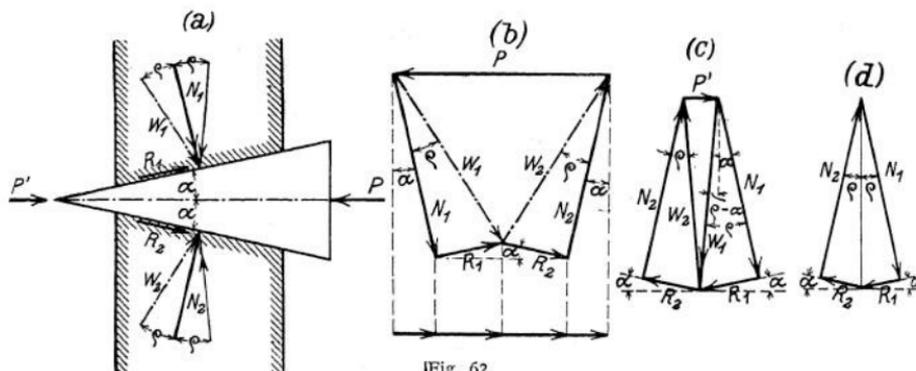


Fig. 62.

Für die Bewegung der Schraube ist

$$P = Q \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varrho) = Q \cdot \frac{h + 2\pi r \mu}{2\pi r - \mu h},$$

wenn die Last Q gehoben,

$$P = Q \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \varrho) = Q \cdot \frac{h - 2\pi r \mu}{2\pi r + \mu h},$$

wenn die Last Q gesenkt wird.

2. Es ist der **Keil** (Fig. 62) zu untersuchen.

¹⁾ Wirkungsgrad vgl. S. 298.

Man konstruiert die Reibungskegel, deren Achsen in die Wirkungslinien von N_1 und N_2 fallen, so daß die Resultante W_1 aus N_1 und R_1 bzw. W_2 aus N_2 und R_2 in die Mantellinie fällt; es neigen sich N_1 und N_2 gewissermaßen um den Winkel ϱ gegen die Bewegungsrichtung. Bildet man jetzt den Kräftezug W_1W_2 , so ist die Schlußseite ein Maß für die Größe der zum Hineintreiben erforderlichen Kraft P , da der Kräftezug wegen der Forderung des Gleichgewichts geschlossen sein muß. Statt der Resultanten W_1 und W_2 geben auch die Komponenten N_1, R_1, R_2, N_2 den zur Bestimmung von P erforderlichen Kräftezug. Rechnerisch ergibt sich P nach der 1. Gleichgewichtsbedingung $\Sigma H = 0$ aus

$$P = N_1 \cdot \sin \alpha + R_1 \cdot \cos \alpha + R_2 \cdot \cos \alpha + N_2 \cdot \sin \alpha.$$

Mit $N_1 = N_2 = N; \quad R_1 = R_2 = R = N \cdot \operatorname{tg} \varrho$

wird
$$P = 2N \cdot \sin \alpha + 2N \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \varrho = 2N \frac{\sin(\alpha + \varrho)}{\cos \varrho}.$$

Die Größe der zum Lösen des Keiles erforderlichen Kraft P' ergibt sich aus Fig. 62. In diesem Falle ist die Richtung der Reibungswiderstände umzukehren; der Kräftezug W_1, W_2 bzw. der Kräftezug N_1, R_1, R_2, N_2 bestimmen Größe und Richtung von P' . Die Bedingung $\Sigma H = 0$ ergibt

$$P' = N_1 \cdot \sin \alpha - R_1 \cdot \cos \alpha - R_2 \cdot \cos \alpha + N_2 \cdot \sin \alpha.$$

Mit $N_1 = N_2 = N$ und $R_1 = R_2 = R = N \cdot \operatorname{tg} \varrho$

wird
$$P' = 2 \cdot N \cdot \sin \alpha - 2N \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \varrho = 2N \frac{\sin(\alpha - \varrho)}{\cos \varrho}.$$

P' wird gleich Null, wenn W_1 und W_2 zusammenfallen (Fig. 62), d. h. der Kräftezug N_1, R_1, R_2, N_2 ist geschlossen; es ist die Grenze der Selbsthemmung erreicht. Die analytische Form der Bedingung für Selbsthemmung folgt aus $\sin(\alpha - \varrho) = 0$, es wird $\alpha = \varrho$, d. h. der Winkel an der Spitze des Keiles muß kleiner sein als der doppelte Reibungswinkel; doch empfiehlt es sich, weit unter diesem Werte zu bleiben, da die in den Tabellen gegebenen Werte nur annähernde Sicherheit bieten.

3. Es ist die **Keilkette** (Fig. 63) zu untersuchen.

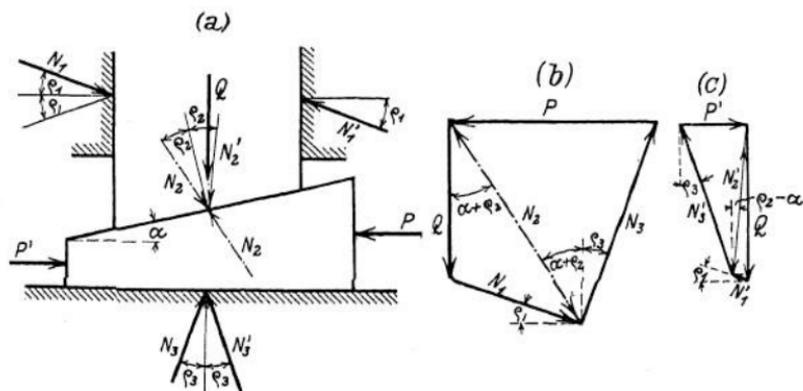


Fig. 63.

Man neigt die Reaktionen N der Berührungsflächen um den Reibungswinkel ϱ so, daß sie die Bewegung des Keiles hindern und beachtet, daß der obere Keil unter dem Einfluß der Kräfte Q, N_1, N_2 im Gleichgewicht sein muß (vgl. S. 280), von denen Q die Größe und Richtung nach N_1 und N_2 nur der Richtung nach bekannt sind. Es ist also Q nach N_1 und N_2 so zu zerlegen, daß Gleichgewicht

herrscht, d. h. der Kräftezug muß geschlossen sein. In Beziehung auf den unteren Keil ist N_2 der Größe und Richtung nach gegeben, von N_3 und P sind die Richtungen bekannt. Die Zerlegung von N_2 nach den Richtungen N_3 und P ergibt P der Größe und Richtung nach.

Analytisch erhält man P aus den beiden ersten Gleichgewichtsbedingungen; $\Sigma H = 0$ liefert

$$N_1 \cdot \cos \varrho_1 + N_3 \cdot \sin \varrho_3 - P = 0.$$

$\Sigma V = 0$ liefert

$$Q + N_1 \cdot \sin \varrho_1 - N_3 \cos \varrho_3 = 0;$$

außerdem ist

$$Q : N_1 = \sin[90^\circ - (\alpha + \varrho_1 + \varrho_2)] : \sin(\alpha + \varrho_2)$$

und hieraus

$$P = Q \cdot \frac{\sin(\alpha + \varrho_2 + \varrho_3) \cdot \cos \varrho_1}{\cos(\alpha + \varrho_1 + \varrho_2) \cdot \cos \varrho_3}.$$

Sind sämtliche Reibungswinkel gleich groß, so wird

$$P = Q \cdot \operatorname{tg}(\alpha + 2\varrho).$$

Die zum Lösen des Keiles aufzuwendende Kraft P' bewirkt ein Anliegen des oberen Keiles gegen die rechte Seite der Führung; er ist unter dem Einfluß der Kräfte Q , N'_1 , N'_2 im Gleichgewicht (Fig. 63 c). Der untere Keil ist unter dem Einfluß der Kräfte P' , N'_3 , N'_2 im Gleichgewicht, von denen N'_2 der Größe und Richtung nach bekannt ist.

Zur analytischen Ermittlung von P' liefern die beiden ersten Gleichgewichtsbedingungen:

$$N'_1 \cdot \cos \varrho_1 + N'_3 \cdot \sin \varrho_3 + P' = 0,$$

$$Q - N'_1 \cdot \sin \varrho_1 - N'_3 \cdot \cos \varrho_3 = 0;$$

außerdem ist

$$Q : N'_1 = \sin[180^\circ - (\varrho_2 - \alpha) - (90^\circ - \varrho_1)] : \sin(\varrho_2 - \alpha)$$

und hieraus

$$P' = Q \cdot \frac{\sin(\varrho_2 + \varrho_3 - \alpha) \cdot \cos \varrho_1}{\cos(\varrho_1 + \varrho_2 - \alpha) \cdot \cos \varrho_3}.$$

Für gleiche Reibungswinkel wird

$$P' = Q \cdot \operatorname{tg}(2\varrho - \alpha).$$

Selbsthemmung ist vorhanden, solange $\alpha < 2\varrho$ bzw. $< \varrho_2 + \varrho_3$ ist.

4. Zur Einleitung des Walzprozesses (Fig. 64) muß sein:

$$d - e \geq 2R(1 - \cos \varrho)$$

für glühendes Eisen zwischen gußeisernen Walzen mit $\mu = \operatorname{tg} \varrho = 0,1$ muß z. B. sein

$$d - e \geq 0,01 \cdot R.$$

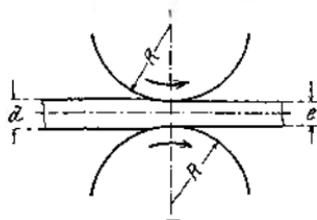


Fig. 64.

3. Reibungsarbeit und Wirkungsgrad.

Veranlaßt das Gewicht A durch sein Herabfallen ein Steigen des Gewichtes B an einer einfachen Rolle, so ist die von A geleistete Arbeit um einen Betrag größer als die Arbeit von B , den man den **Arbeitsverlust durch Reibung** nennt. Ist die Reibungskraft bekannt, und ist die Entfernung gegeben, die diese Kraft durchläuft, so ist das Produkt aus Kraft und Weg die zur Überwindung der Reibung aufgewendete Arbeit. Diese Energie wird in Wärme umgesetzt und stellt sich als Verlustarbeit dar; die Nutzarbeit ist gleich der Differenz aus der gesamten aufgewendeten Arbeit und der Reibungsarbeit. Das Verhältnis von Nutzarbeit zur gesamten aufgewendeten Arbeit heißt **Wirkungsgrad** und wird mit η bezeichnet.

Bezeichnet Q den Nutzwiderstand eines Getriebes in kg,
 P die wirkliche Betriebskraft in kg,
 q den Weg, auf dem Q wirkt in m,
 p den gleichzeitigen Weg von P in m,

so ist

$$\eta = \frac{Q \cdot q}{P \cdot p} = \frac{\text{Nutzarbeit}}{\text{gesamte aufgewendete Arbeit}}$$

Die Reibungsarbeit ist $A_r = P \cdot p - Q \cdot q$.

Das Verhältnis der Reibungsarbeit A_r zur Nutzarbeit A_n heißt **verhältnismäßiger Arbeitsverlust** und wird mit \mathfrak{B} bezeichnet. Es ist

$$\mathfrak{B} = \frac{A_r}{A_n} = \frac{P \cdot p - Q \cdot q}{Q \cdot q} = \frac{P \cdot p}{Q \cdot q} - 1 \quad \text{und} \quad \eta = \frac{1}{1 + \mathfrak{B}}$$

vgl. Abschnitt Mathematik S. 123.

Besteht ein Getriebe aus mehreren Teilgetrieben mit den Wirkungsgraden $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$ so ist der **Gesamtwirkungsgrad**

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \dots$$

Beispiele: 1. Wirkungsgrad für das Getriebe der Fig. 61. Wird die Last Q um die Strecke h gehoben, so ist $A_n = Q \cdot h$; während der Hubzeit legt die Kraft P den Weg $s = h \cdot \text{ctg } \alpha$ zurück, so daß

$$\eta = \frac{A_n}{A} = \frac{Q \cdot h}{Q \cdot \text{tg}(\alpha + \varrho) \cdot h \cdot \text{ctg } \alpha} = \frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg}(\alpha + \varrho)}$$

ist; für die Abwärtsbewegung wird $\eta = \frac{\text{tg}(\alpha - \varrho)}{\text{tg } \alpha}$; η wird am größten für $\alpha = 45^\circ - \frac{1}{2}\varrho$;

z. B. ist bei $\mu = 0,1$ $\eta_{\max} = 0,81$ für $\alpha = 42^\circ$. Da η nur für α bis rund 20° stark zunimmt, so geht man bei Schrauben meist nur bis $\alpha = 20^\circ$; hierfür wird $\eta = 0,74$. Bei Pressen, bei denen es auf große Kraftübersetzung ankommt, wählt man α bis 3° herab; für diesen Wert wird $\eta = 0,27$.

2. Für die Keilkette der Fig. 63 wird bei gleichen Reibungswinkeln

$$\eta = \frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg}(\alpha + 2\varrho)}$$

Da die Kraft P den Weg $h \cdot \text{ctg } \alpha$ zurücklegt, wenn die Last Q um die Strecke h gehoben wird.

4. Die Zapfenreibung.

Der wesentliche Unterschied gegen die Reibung ebener Flächen besteht darin, daß die Pressung in kg/cm^2 am Umfang des Zapfens variabel ist. Kennt man das Gesetz über die Verteilung der Pressung, so läßt sich die Frage der Zapfenreibung theoretisch behandeln. Da jedoch unsere Kenntnis über die Verteilung insofern mangelhaft ist, als erst eine verhältnismäßig geringe Zahl von Versuchen vorliegen, so lassen sich Rechnungen nur auf Grund von Annahmen durchführen, die einen, wenn auch nicht zuverlässigen Einblick gestatten. Ausschlaggebend für die Ermittlung des Arbeitsverlustes bleibt der Versuch. Die vorliegenden Versuche haben das Resultat ergeben, daß der Energieverlust durch Reibung für eine gegebene Bewegung der durch die Welle übertragenen Arbeit direkt proportional ist. Die Kraft der Reibung ist an und für sich von der Größe des Lagers unabhängig, aber der Weg, den die Kraft bei einer Umdrehung zurücklegt, ist bei einem großen Zapfendurchmesser größer als bei kleinen.

Fig. 65 stellt einen Tragzapfen dar, der durch die senkrechte Kraft P belastet ist, die Länge des Zapfens sei l cm; p in kg/cm^2 ist der Flächendruck senkrecht zur Oberfläche des Zapfens. Für das Flächenelement $dF = r \cdot l \cdot d\varphi$ ist der Normaldruck

$$dN = p \cdot dF = r \cdot l \cdot p \cdot d\varphi.$$

Die Reibung ist mit μ als Koeffizienten der gleitenden Reibung

$$dR = \mu \cdot dN = \mu \cdot p \cdot dF.$$

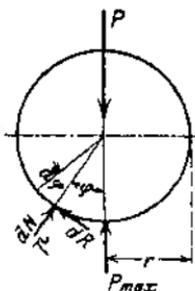


Fig. 65.

Das **Moment der Zapfenreibung** wird dann

$$M = \mu \int \dot{p} \cdot dF \cdot y,$$

wenn y die Entfernung des Flächenelementes von der Drehachse bedeutet. Die zweite Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$ ergibt

$$P = \int \dot{p} \cdot dF \cdot \cos \varphi = r \cdot l \int \dot{p} \cos \varphi \cdot d\varphi.$$

Setzt man $\dot{p} = \dot{p}_m = \text{konst.}$ gleich dem mittleren senkrechten Druck, so erhält man

$$P = r \cdot l \cdot \dot{p}_m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \cdot d\varphi = 2 r \cdot l \cdot \dot{p}_m$$

und daraus

$$\dot{p}_m = \frac{P}{2 r \cdot l} = \frac{P}{d \cdot l}.$$

Für den neuen Tragzapfen ist $y = r = \text{konst.}$; ebenso ist der Flächendruck $\dot{p} = P : F = \text{konst.}$, also unabhängig von φ ; in diesem Falle wird

$$\begin{aligned} M &= \mu \cdot r \cdot \dot{p} \cdot \int dF = \mu \cdot r \cdot \dot{p} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} r \cdot l \cdot d\varphi \\ &= \mu \cdot r \cdot \dot{p} \cdot \pi \cdot r \cdot l = \mu \cdot r \cdot \frac{P}{2 r \cdot l} \cdot r \cdot l \cdot \pi : \\ M &= \mu \cdot \frac{\pi}{2} \cdot P \cdot r . \end{aligned}$$

Setzt man $\mu \cdot \frac{\pi}{2} = \mu_1$, so wird $M = \mu_1 \cdot P \cdot r$.

μ_1 heißt **Koeffizient der Zapfenreibung** und wird durch Versuche unmittelbar bestimmt, da die Annahmen $\dot{p} = \text{konst.}$; $y = \text{konst.}$ in praktischen Fällen wertlos sind. Bei eingelaufenem Zapfen z. B. sind weder \dot{p} noch y konstant.

Der Zapfenreibungskoeffizient μ_1 ist abhängig von der Art des Schmiermittels. Bei guter Schmierung mit Rüböl, Mineralfett, Mineralöl oder deren Mischungen mit Petroleum ist für gut eingeschliffene Stahlzapfen in Bronzelagern $\mu_1 = 0,003$ bis $0,03$. Bei schlechter Schmierung und im Freien (Seiltriebe, Drehscheiben, Schiebebühnen usw.) ist $\mu_1 = 0,08$ bis $0,4$.

Ein Zapfen ist um so vorteilhafter, je kleiner sein Reibungsmoment und je geringer seine Abnutzung ist.

a) Tragzapfen-Reibungskoeffizienten μ_1 .

Neuere Versuche haben gezeigt, daß der Reibungskoeffizient außerordentlich beeinflußt wird von der Pressung, der Geschwindigkeit und der Temperatur.

Da bei aufeinander gleitenden Maschinenteilen Schmiermittel zwischen die gleitenden Flächen gebracht werden, so wird die Reibung fester Körper mehr oder weniger vollständig auf die geringere innere Reibung flüssiger Körper zurückgeführt; doch geben die Ergebnisse mathematischer Untersuchungen dem Konstrukteur nicht genügende Unterlagen, so daß er auf die empirische Erforschung der Reibungsverhältnisse der Maschinenlager angewiesen ist.

Thurston fand 1873, daß der Reibungskoeffizient bei sonst gleichbleibenden Verhältnissen mit zunehmendem Druck abnimmt.

Tower bestätigte 1883 dieses Ergebnis und stellte weiter fest, daß der Reibungskoeffizient mit zunehmender Geschwindigkeit in geringem Maße wächst.

In Beziehung auf den Einfluß der Temperatur weichen die Ergebnisse beider Forscher voneinander ab. Thurstons Beobachtung, daß der Reibungskoeffizient bei Pressungen unter $p = 7 \text{ kg/cm}^2$ und veränderlicher Temperatur fast konstant bleibt, bei $p > 7 \text{ kg/cm}^2$ und wachsender Temperatur dagegen stark ansteigt, wurde von Stribeck für geringe Geschwindigkeiten — $v \leq 0,5 \text{ m/sek}$ — bestätigt.

Bedeutend erweitert sind die Erfahrungen auf diesem Gebiete durch die Arbeiten von Stribeck¹⁾, Lasche²⁾ und Heimann³⁾.

Die Stribeckschen Versuche erstrecken sich im wesentlichen auf das Anfahren und Einlaufen, die Versuche von Lasche auf den Dauerbetrieb von Maschinen.

Versuche von Stribeck. Versuchsgegenstand: Sellerslager mit Ringöler, 70 mm Durchmesser, 230 mm Länge, Schmierung durch Gasmotorenöl der Gasmotorenfabrik Deutz.

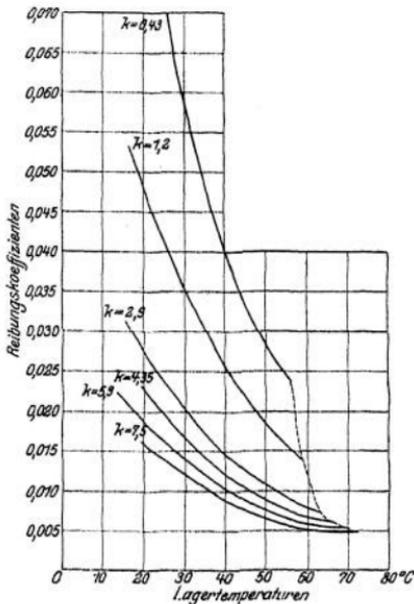


Fig. 66.

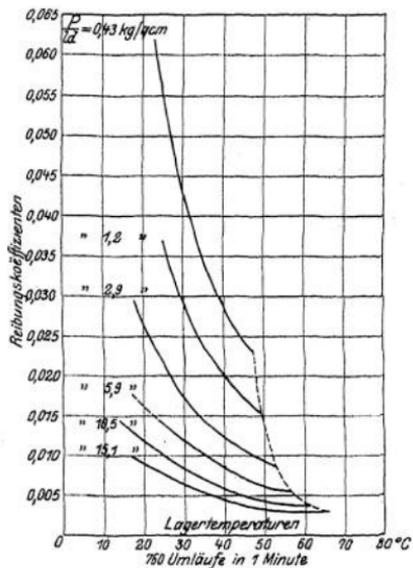


Fig. 67.

In Fig. 66, 67 ist der Reibungskoeffizient für 1100 und 760 Uml./min in seiner Abhängigkeit von der Lagertemperatur dargestellt; jede Kurve gilt für die daneben vermerkte Pressung. Die volligen Kurven der Fig. 66, 67 sind durch eine gestrichelte Kurve begrenzt; die Treppunkte entsprechen dem Beharrungszustand bei 20°C Außentemperatur.

Fig. 68 gibt Aufschluß über die Änderung der Temperatur und des Reibungskoeffizienten während der Anwärperiode, sowie über deren Dauer für die Fälle $n = 760$; $p = 2,9 \text{ kg/cm}^2$ und $10,5 \text{ kg/cm}^2$. Es vergehen rund drei Stunden bis zum Eintritt des Beharrungszustandes. Daraus geht hervor, daß bei Maschinen,

¹⁾ Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 7.

²⁾ Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 9.

³⁾ Z. Ver. deutsch. Ing. 1905, S. 1161 ff.

die mit Unterbrechung arbeiten, der Beharrungszustand überhaupt nicht erreicht wird, und daß die Reibungsarbeit unterschätzt wird, wenn man sie mit dem Koeffizienten des Beharrungszustandes berechnet.

Fig. 69 stellt den Reibungskoeffizienten bei 25° C Lagertemperatur in Abhängigkeit von der Pressung dar. Mit wachsender Pressung nimmt bei kleinen und mittleren Geschwindigkeiten der Reibungskoeffizient zunächst ab und weiterhin wieder zu. Je größer die Geschwindigkeit ist, desto größer ist auch die Pressung, bei der der kleinste Reibungskoeffizient auftritt.

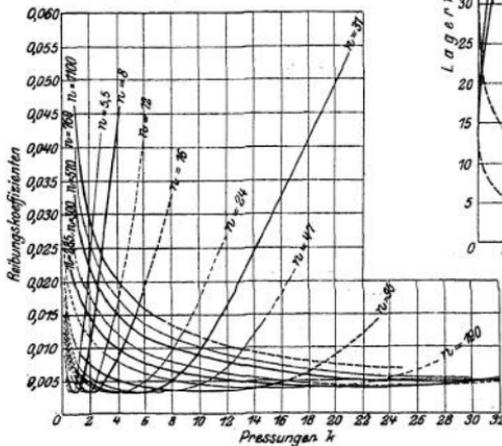


Fig. 69.

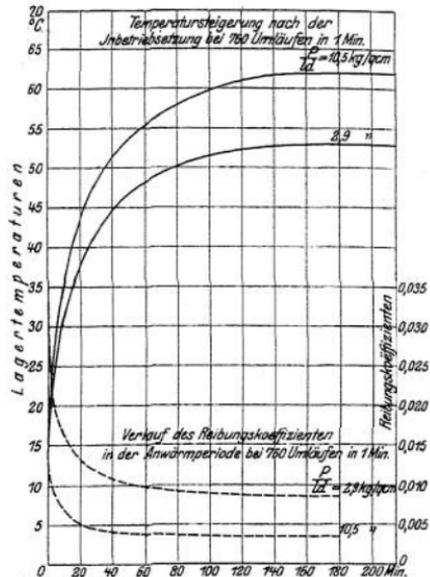


Fig. 68.

Fig. 70 und 71 stellen den Reibungskoeffizienten in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit bei 25° C Lagertemperatur dar. Bei allen Pressungen nimmt der Reibungskoeffizient mit wachsender Geschwindigkeit

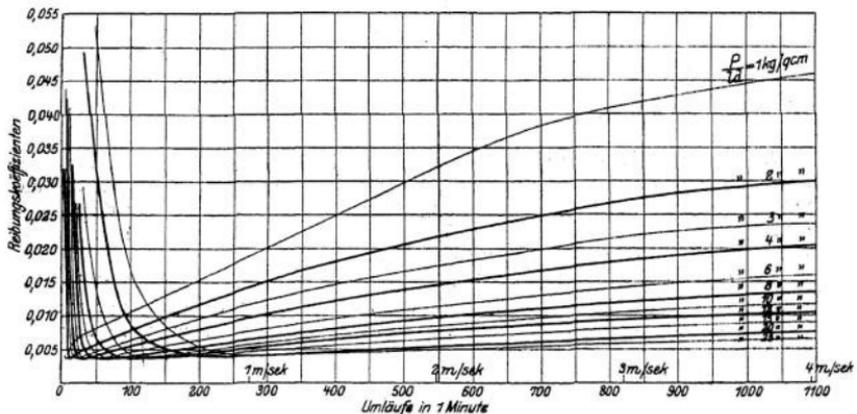


Fig. 70.

keit zunächst ab, und es bedarf einer um so größeren Geschwindigkeit, um den kleinsten Reibungskoeffizienten zu erhalten, je größer die Pressung ist. Fig. 71 liefert ein weiteres Ergebnis: Alle Kurven gehen von demselben Punkte der Ordinatenachse aus, d. h. der Reibungskoeffizient der Ruhe ist unabhängig von der Pressung und auch fast unabhängig von der Temperatur des Lagers; er beträgt 0,14 und stimmt nahezu mit dem Reibungskoeffizienten der Ruhe überein, den Morin für kleine Pressungen und wenig fette Flächen ermittelt hat.

Die Versuche von Lasche. Fig. 72 zeigt die Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten μ von der Pressung p und der Temperatur t bei unveränderlicher Umfangsgeschwindigkeit $v = 10$ m/sek. Zapfen: Nickelstahl; Schalen: Weißmetall; Durchmesser 260 mm, Länge 110 mm; Spülschmierung mit Imperial 0; 0,8 l/min.

Fig. 73 zeigt μ in Abhängigkeit von der Umfangsgeschwindigkeit v und der Temperatur t bei unveränderlicher Pressung $p = 6,5$ kg/cm².

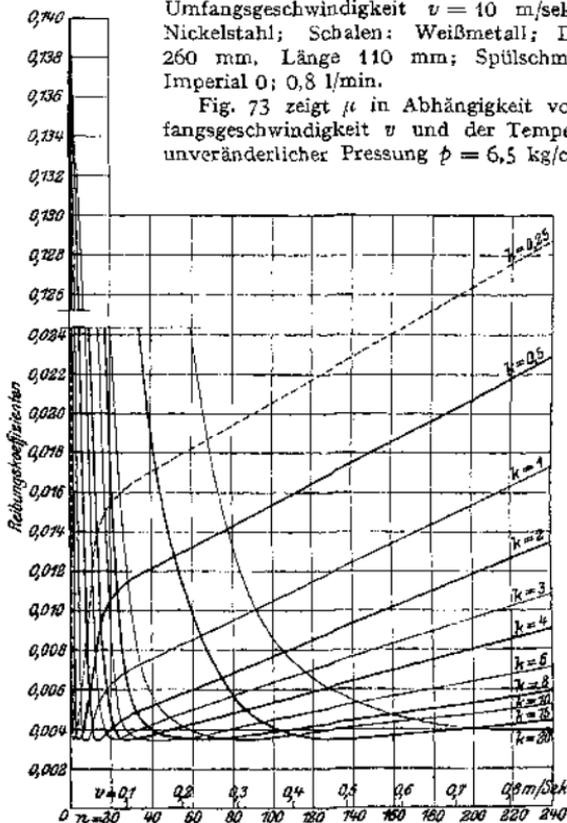


Fig. 71.

Fig. 74 zeigt μ abhängig von der Pressung p und der Umfangsgeschwindigkeit v bei unveränderlicher Lagertemperatur von $t = 50^\circ$ C.

Den Einfluß des Zapfenmaterials auf die Größe des Reibungskoeffizienten zeigt Fig. 75 bei einer gleichbleibenden Umfangsgeschwindigkeit $v = 10$ m/sek und einer gleichbleibenden Lagertemperatur von $t = 50^\circ$ C. Die Kurven zeigen nur geringe Abweichungen voneinander.

Den Einfluß des Schalenmaterials auf die Größe des Reibungskoeffizienten zeigt Fig. 76 bei der gleichen unveränderlichen Geschwindigkeit $v = 10$ m/sek und $t = 50^\circ$ C. Der Reibungskoeffizient für Bronze bleibt durchweg kleiner als bei den beiden anderen Schalenarten.

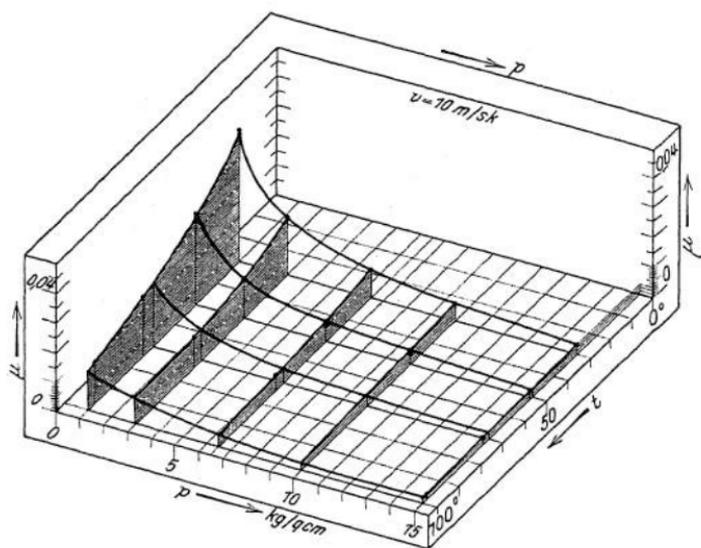


Fig. 72.

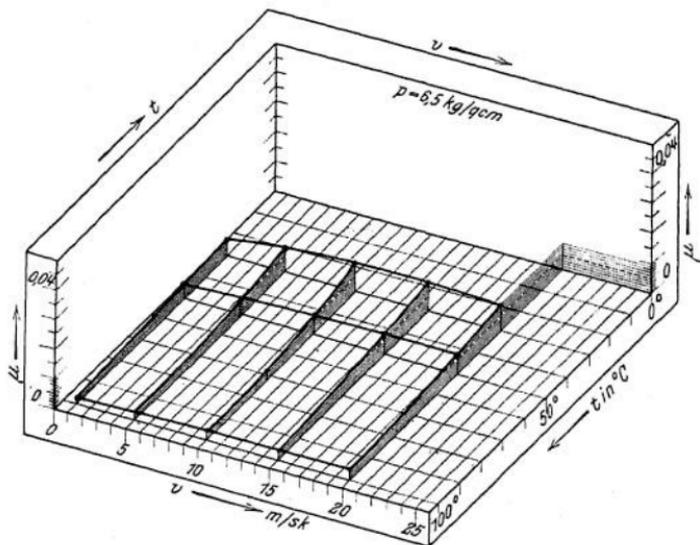


Fig. 73.

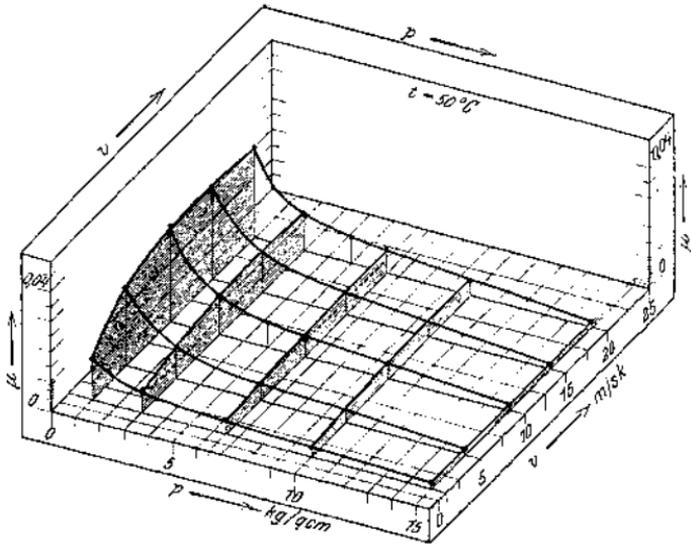


Fig. 74.

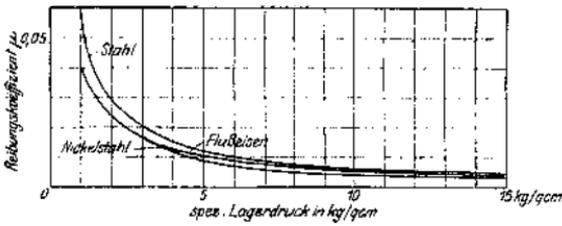


Fig. 75.

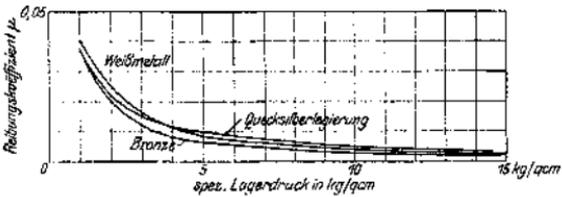


Fig. 76.

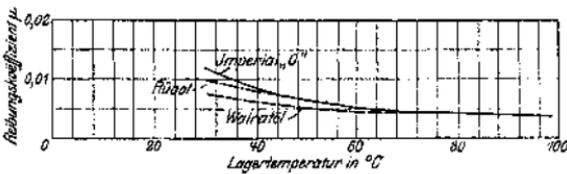
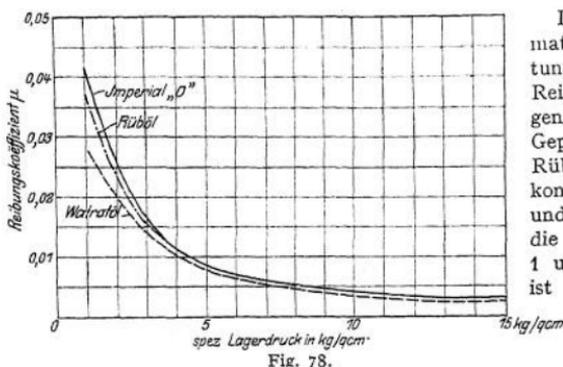


Fig. 77.



Den Einfluß des Schmiermaterials und seiner Zuleitungen auf die Größe des Reibungskoeffizienten zeigen die Fig. 77 und 78. Geprüft wurden Imperialöl, Rüböl und Walratöl bei konstantem $v = 10$ m/sek und $t = 50^\circ$ C, während die Pressung p zwischen 1 und 15 kg/cm² variabel ist (Fig. 78).

Die Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten μ bei konstanter Umfangs-

geschwindigkeit $v = 10$ m/sek und konstanter Pressung 6,5 kg/cm² von der Temperatur t zeigt Fig. 77.

b) Spurzapfenreibungskoeffizienten.

Den Einfluß der Pressung und Temperatur auf die Größe des Reibungskoeffizienten nach Versuchen von Woodbury¹⁾ zeigt nachstehende Tabelle:

Versuchsgegenstand: Ringzapfen aus Stahl, 57,8 mm äußerer und 36,3 mm innerer Durchmesser; Geschwindigkeit 300 Umdrehungen/Minute, Schmiermittel Paraffinöl:

Temperatur:

p in kg/cm ²	15,5° C	21° C	26,5° C	32° C	37,5° C
0,07	0,34	0,268	0,212	0,17	0,138
0,35	0,09	0,074	0,0620	0,0520	0,0436
0,70	0,0554	0,0468	0,0402	0,0348	0,0302
1,05	0,0435	0,0375	0,0325	0,0280	0,0257
1,40	0,0375	0,0327	0,0289	0,0257	0,0227
1,76	0,0336	0,0296	0,0265	0,0236	0,0210
2,10	0,0307	0,0273	0,0245	0,0222	0,0199
2,46	0,0286	0,0256	0,0231	0,0210	0,0190
2,8	0,0221	0,0243	0,0221	0,0201	0,0181

c) Kugellager.²⁾

Ist S die Belastung einer Kugel, f der Koeffizient der rollenden Reibung, D_0 der Durchmesser des Kreises, auf dem sich der Mittelpunkt der Kugel bewegt, d der Durchmesser der Kugel, ω die Winkelgeschwindigkeit, so ist die Reibungsarbeit

$$A_r = S \cdot f \cdot \frac{D_0}{d} \cdot \omega,$$

d. h. mit wachsendem Verhältnis $D_0 : d$ nimmt sie zu. Um A_r klein zu halten müßte man möglichst große Kugeln auf möglichst kleinem Kreise rollen lassen. Sind z Kugeln in der Rinne vorhanden und ist $\pi D_0 = \infty z \cdot d$, so wird

$$A_r = S \cdot f \cdot \frac{z}{\pi} \cdot \omega;$$

die Reibungsarbeit ist also um so kleiner, je geringer die Anzahl der Kugeln ist. Die Gesamtreibung erhält man als Summe der Reibungsarbeiten für eine Kugel; hierbei geht S in die Summe der Belastungen sämtlicher Kugeln über; f ist dann als Koeffizient der rollenden Reibung des Lagers und nicht der einzelnen Kugel aufzufassen,

¹⁾ Siehe Z. Ver. deutsch. Ing. 1885, S. 450 ff.

²⁾ Stribeck, Z. Ver. deutsch. Ing. 1901, S. 121 ff.

Ist P der Teil des Lagerdruckes, der auf einen Kugelring entfällt, so ergibt sich für den Fall Fig. 79

$$P = P_0 + 2 P_1 \cdot \cos \gamma + 2 P_2 \cdot \cos 2 \gamma + \dots + 2 \cdot P_n \cdot \cos n \gamma$$

wobei

$$n \cdot \gamma < 90^\circ; \quad \gamma = \frac{360^\circ}{z}; \quad n \leq \frac{z}{4} \text{ ist.}$$

Mit $P_1 = P_0 \cdot \cos^{3/2} \gamma$; $P_2 = P_0 \cdot \cos^{5/2} 2 \gamma \dots$ erhält man

$$\frac{P}{P_0} = 1 + 2 \cdot \cos^{3/2} \gamma + 2 \cdot \cos^{5/2} 2 \gamma + \dots + 2 \cos^{5/2} n \gamma.$$

Für $z = 10$ bis $z = 20$ ist die Summe der Einzelbelastungen nahezu unveränderlich; die Werte $P : P_0$ sind fast genau gleich $z : 4,37$; die größte Belastung einer Kugel wird

$$P_0 = \frac{4,37}{z} \cdot P.$$

Denkt man sich das Reibungsmoment als Produkt aus einer ideellen Reibung $\mu_t \cdot P$ und deren Abstand r von der Wellenachse, so ist $M = \mu_t \cdot P \cdot r$. An Reibungswerten μ_t fand Stribeck für Lager (Fig. 80) mit 70 mm Wellendurchmesser; $D_0 = 102 \text{ mm}$ — und Kugeln $\frac{7}{8}''$ engl.:

Belastung P in kg	Umdrehungen in der Minute		
	65	385	780
380	0,0033	0,0035	0,0037
850	0,0020	0,0021	0,0022
1100	0,0017	0,0018	0,0019
1580	0,0016	0,0016	0,0017
2050	0,0015	0,0015	0,0015
3000	0,0015	0,0013	0,0013
4900	—	—	0,0011

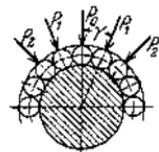


Fig. 79.

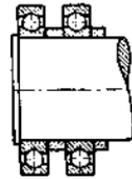


Fig. 80.

Der Koeffizient der rollenden Reibung bestimmt sich aus

$$\mu_t \cdot P \cdot r = S \cdot f \cdot \frac{D_0}{d} \quad \text{mit} \quad S = 1,2 P$$

als Summe aller Einzelbelastungen zu

$$f = \frac{r \cdot \mu_t}{1,2 \frac{D_0}{d}}$$

mit $r = 3,5 \text{ cm}$ und $D_0 : d = 4,4$ wird $f = \frac{2}{3} \mu_t$; für $\mu_t = 0,0013 \div 0,0017$ wird $f = 0,0009 \div 0,0011$.

5. Rollen und Rollenzüge.

1. Die feste Rolle (Leitrolle). Ohne Rücksicht auf Reibung ist Gleichgewicht vorhanden, wenn $P_0 = Q$ ist (Fig. 81, 82).

Im Aufhängepunkt der Rolle wirken die Einzelkraft B als Horizontalkomponente der Resultante R aus Q und P und die Vertikalkomponente A . Ist H die Hubhöhe der Last, s der Weg der Kraft, dann ist $s = H$.

Ist v die Geschwindigkeit, mit der die Last gehoben wird (Hubgeschwindigkeit), c die Geschwindigkeit der Kraft, so ist $c = v$.

Infolge der Widerstände ist zum Heben der Last Q eine tatsächliche Zugkraft $P > Q$ erforderlich.

Diese Widerstände setzen sich aus der Zapfenreibung und dem Seilwiderstand (Seilsteifigkeit) zusammen. Mit μ_1 als Zapfenreibungskoeffizient wird das Moment der Zapfenreibung $M = \mu_1 \cdot Z \cdot r$ in cmkg, wobei

$$Z = R = \infty \sqrt{P_0^2 + Q^2} - 2 P_0 \cdot Q \cdot \cos \alpha = \infty 2 Q \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

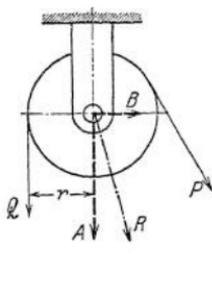


Fig. 81.

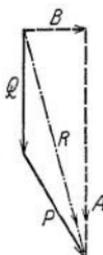


Fig. 82.

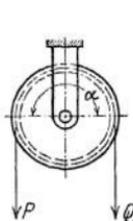
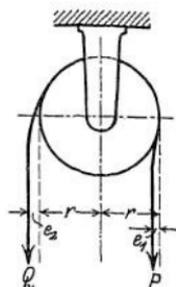


Fig. 83.



Wird ein Seil aus seiner geraden Richtung abgelenkt, so setzt es dieser Ablenkung einen Widerstand entgegen, der Seilsteifigkeit genannt wird und von der inneren Reibungssteifigkeit des Zugmittels herrührt. Infolgedessen erfährt der Hebelarm r beim Ablauf eine Verkürzung e_1 (Fig. 83) und beim Anlauf eine Verlängerung e_2 , so daß die 3. Gleichgewichtsbedingung für den Mittelpunkt der Rolle als Drehpunkt lautet

$$P(r - e_1) = Q(r + e_2).$$

Angenähert ist

$$e_1 = e_2 = e,$$

so daß sich mit hinreichender Genauigkeit ergibt

$$P = Q \left(1 + \frac{2e}{r} \right).$$

Das Verhältnis $\frac{P}{Q}$ heißt Verlustfaktor; es ist

$$\varepsilon = \frac{1}{\eta} = \frac{P}{Q}$$

und kann für Ketten und Drahtseilrollen gesetzt werden

$$\varepsilon = 1,05 \div 1,04; \quad \eta = 0,95 \div 0,96.$$

Genauere Untersuchungen über den Einfluß der Seilsteifigkeit liegen z. Z. nicht vor.

2. Die lose Rolle.

a) Lastrolle (Fig. 84). Ohne Berücksichtigung der Reibung gilt

$$P_0 = S = \frac{Q}{2}, \quad s = 2H; \quad c = 2v.$$

Mit Berücksichtigung der Reibung gilt

$$P = \varepsilon \cdot P_0 = \varepsilon \cdot S = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{Q}{2}.$$

Als Wirkungsgrade können die bei der festen Rolle angegebenen Werte in Rechnung gesetzt werden.

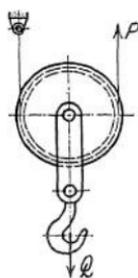


Fig. 84.

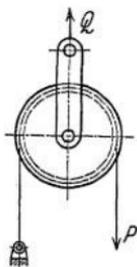


Fig. 85.

b) Kraftrolle (umgekehrte lose Rolle). Mit den Bezeichnungen der Fig. 85 ist

$$P_0 = 2Q; \quad H = 2s; \quad v = 2c,$$

$$P = \frac{1}{\eta} \cdot 2Q = Q + S = Q(1 + \varepsilon).$$

Die Wirkungsgrade sind praktisch dieselben wie bei der losen Lastrolle.

Der einfache Rollenzug

setzt sich zusammen aus einer festen und einer losen Rolle und ist ein besonderer Fall des Faktorenflaschenzuges. Fig. 86 zeigt einen einfachen Rollenzug (Lastrollenzug), wie er bei Flaschenzügen, Drehkränen usw. verwendet wird. Die Last verteilt sich auf zwei Seilstränge; das ideale Übersetzungsverhältnis ist 1:2. Die Antriebskraft an der Trommel bzw. Kettenuß ist

$$S = \infty \frac{Q}{2}.$$

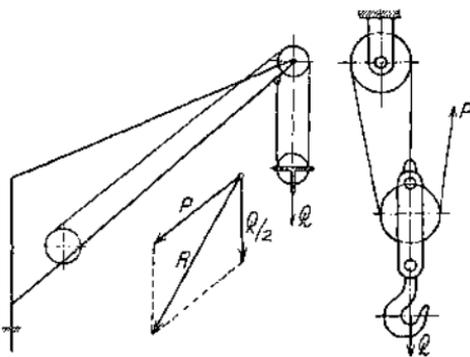


Fig. 86.

Fig. 87.

Die Seilgeschwindigkeit an der Trommel ist gleich der doppelten Hubgeschwindigkeit; die Belastung des Rollenbolzens am Ausleger ergibt sich als Resultante aus den beiden Komponenten $\frac{Q}{2}$ und P .

Fig. 87 stellt einen einfachen Rollenzug dar, bei dem sich die Last auf drei Seilstränge verteilt; das ideale Übersetzungsverhältnis ist 1:3.

3. Der Faktorenrollenzug entsteht, wenn man mehrere feste und mehrere lose Rollen je in einem gemeinsamen Gehäuse bzw. auf einer gemeinsamen Achse unterbringt. Hierbei umschlingt ein gemeinsames Seil, das entweder an dem festen oder an dem losen Rollensystem befestigt ist, sämtliche Rollen. Die Anzahl der Rollen sei n .

a) Lastrollenzug.

α) Das Seil läuft von der festen Rolle ab (Fig. 88). Dann ist

$$P_0 = \frac{1}{n} \cdot Q; \quad P = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{Q}{n}; \quad s = nH.$$

Mit $\varepsilon = \frac{P}{Q}$ der einfachen Rolle wird

$$Q = \frac{P}{\varepsilon} + \frac{P}{\varepsilon^2} + \frac{P}{\varepsilon^3} + \dots + \frac{P}{\varepsilon^n},$$

$$= \frac{P}{\varepsilon^n} (1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{n-1});$$

$$Q = \frac{P}{\varepsilon^n} \cdot \frac{\varepsilon^n - 1}{\varepsilon - 1};$$

$$\eta = \frac{1}{n \cdot \varepsilon^n} \cdot \frac{\varepsilon^n - 1}{\varepsilon - 1}.$$

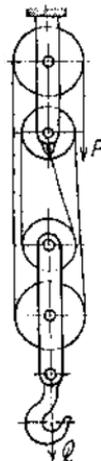


Fig. 88.

β) Das Seil läuft von der losen Rolle ab (Fig. 89). Dann ist

$$P_0 = \frac{Q}{n+1}; \quad P = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{Q}{n+1}; \quad s = (n+1) \cdot H;$$

$$Q = \frac{P}{\varepsilon} + \frac{P}{\varepsilon^2} + \frac{P}{\varepsilon^3} + \dots + \frac{P}{\varepsilon^{n+1}} = \frac{P}{\varepsilon^n} \cdot (1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^n);$$

$$Q = \frac{P}{\varepsilon^n} \cdot \frac{\varepsilon^{n+1} - 1}{\varepsilon - 1};$$

$$\eta = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{Q}{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\varepsilon^{n+1} - 1}{\varepsilon - 1}.$$

Der Lastrollenzug findet als selbständiges Hebezeug sowie als Kraftübersetzungsmittel bei Winden Anwendung. (Rollenzüge bei elektrisch betriebenen Winden siehe Abschnitt Hebezeuge.)

b) Treibrollenzug (umgekehrter Faktorenrollenzug). Läßt man die Kraft P am losen Rollensystem angreifen und hängt die Last Q an das freie Seilende, dann entsteht der Treibrollenzug.

α) Das Seil läuft von einer festen Rolle ab (Fig. 88). Hierbei ist

$$P_0 = Q \cdot n; \quad P = \frac{1}{\eta} \cdot Q \cdot n; \quad s = \frac{1}{n} \cdot H;$$

$$\eta = \frac{n(\varepsilon - 1)}{\varepsilon(\varepsilon^n - 1)}.$$

Die größte Spannkraft im festen Seilende ist

$$S_1 = Q \cdot \varepsilon^n.$$

β) Das Seil läuft von einer losen Rolle ab (Fig. 89). Hierbei ist

$$P_0 = Q(n+1); \quad P = \frac{1}{\eta} \cdot Q(n+1); \quad s = \frac{1}{n+1} \cdot H,$$

$$\eta = \frac{(n+1) \cdot (\varepsilon - 1)}{\varepsilon^{n+1} - 1}.$$

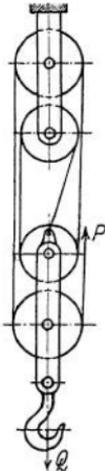


Fig. 89.

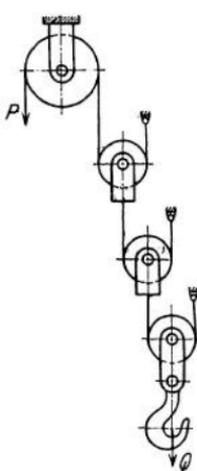


Fig. 90.

Der Treibrollenzug wird bei hydraulischen Hebezeugen als Hubübersetzungsmittel angewendet (siehe Abschnitt Hebezeuge).

4. Der Potenzrollenzug (Fig. 90). Im Gegensatz zum Faktorenrollenzug sind hierbei sämtliche losen Rollen getrennt aufgehängt. Ohne Rücksicht auf Reibung wird die Spannkraft im Seil der untersten Rolle

$$S_1 = \frac{1}{2} Q,$$

in dem Seil der zweiten losen Rolle

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot S_1 = \frac{1}{2^2} \cdot Q$$

und im Seil der n ten losen Rolle

$$S_n = \frac{1}{2^n} \cdot Q = P_0.$$

Die wirklich aufzuwendende Kraft wird

$$P = \frac{1}{\eta} \cdot P_0 = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{Q}{2^n}.$$

Der Weg, den die Kraft P zurücklegt, ist

$$s = 2^n \cdot H.$$

Unter Berücksichtigung der Reibungswiderstände wird

$$P = \varepsilon \cdot S_n$$

für die feste Rolle; die Belastung der n ten losen Rolle ist

$$S_{n-1} = S_n + \frac{1}{\varepsilon} \cdot S_n = S_n \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

die der folgenden

$$S_{n-2} = S_{n-1} + \frac{1}{\varepsilon} \cdot S_{n-1} = S_n \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^2$$

usw., die der untersten losen Rolle wird

$$Q = S_n \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^n = \frac{P}{\varepsilon} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^n,$$

also

$$P = \frac{Q}{\frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^n}.$$

Damit ergibt sich als Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{Q}{P \cdot 2^n} = \frac{\frac{Q}{2^n}}{\frac{Q}{\frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^n}} = \frac{\frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^n}{2^n}.$$

Sind $\eta_1; \eta_2; \eta_3 \dots \eta_{n+1}$ die Wirkungsgrade der einzelnen Rollen, so ist

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \dots \eta_{n+1}.$$

Der Potenzrollenzug findet mitunter bei hydraulischen Hebezeugen Anwendung.

5. Der Differentialflasenzug (Fig. 91) besteht im wesentlichen aus zwei Rollen verschiedenen Durchmessers, die auf derselben Achse sitzen, und einer losen Rolle, deren Durchmesser gleich dem arithmetischen Mittel aus den beiden andern ist. Um alle drei Rollen schlingt sich ein gemeinsames Seil.

Ist S_1 die Spannkraft in dem linken Seil der unteren losen Rolle, dann wirkt im rechten Seil $S_2 = \varepsilon \cdot S_1$, so daß

$$Q = S_1 + \varepsilon \cdot S_1 = S_1 (1 + \varepsilon).$$

Bezieht man die 3. Gleichgewichtsbedingung auf den Mittelpunkt der Doppelrolle, so ergibt sich

$$\begin{aligned} P \cdot R + S_1 \cdot r &= \varepsilon \cdot S_2 \cdot R, \\ P \cdot R + \frac{Q}{1 + \varepsilon} \cdot r &= \frac{\varepsilon^2 \cdot Q}{1 + \varepsilon} \cdot R, \\ P &= \frac{\varepsilon^2 - \frac{r}{R}}{1 + \varepsilon} \cdot Q. \end{aligned}$$

Bei Vernachlässigung aller Widerstände ergibt sich wegen $\varepsilon = 1$

$$P = \frac{Q}{2} \left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

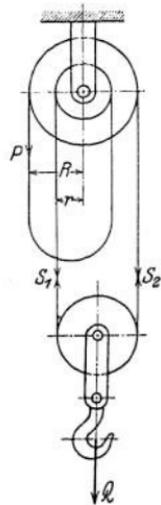


Fig. 91.

Beim Senken der Last Q erhält man den Wert P' der Kraft P , bei dem gerade noch Gleichgewicht ist, wenn man an Stelle von ε den reziproken Wert $\frac{1}{\varepsilon}$ setzt; es wird also

$$P' = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{r}{R} \right) \cdot Q.$$

Die Bedingung der Selbsthemmung erfordert $P' = 0$ und ist erfüllt, wenn

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

ist.

6. Die Seilreibung.

Um einen festgehaltenen Kreiszyylinder (Fig. 92) sei ein vollkommen biegsames Seil geschlungen. S_1 sei die Spannkraft am ziehenden Ende, S_2 die Spannkraft am gezogenen Ende. Solange $S_2 = S_1$ ist, bleibt das System in Ruhe, es können auch keine Reibungswiderstände längs des aufliegenden Bogens in Betracht kommen. Vergrößert man S_1 , so wird das System so lange im Gleichgewicht sein, bis S_1 einen Grenzwert überschreitet. Denkt man sich ein Seilelement AB herausgeschnitten, so wirken an den Schnittflächen die Kräfte S und $S + dS$; der Normaldruck sei dN . Zerlegt man sämtliche Kräfte in die Richtung dN und senkrecht dazu, so liefern die beiden ersten Gleichgewichtsbedingungen

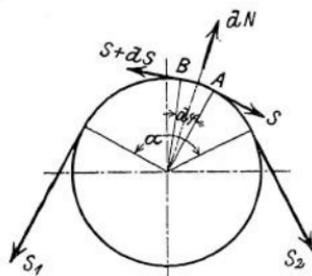


Fig. 92.

$$(S + dS) \cdot \cos \frac{d\varphi}{2} = S \cdot \cos \frac{d\varphi}{2} + \mu \cdot dN$$

oder

$$dS \cdot \cos \frac{d\varphi}{2} = \mu \cdot dN$$

und

$$(S + dS) \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} + S \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} = dN = (2S + dS) \cdot \sin \frac{d\varphi}{2}.$$

Die Verbindung beider Gleichungen ergibt

$$\mu(2S + dS) \cdot \operatorname{tg} \frac{d\varphi}{2} = dS.$$

Unter Vernachlässigung der unendlich kleinen Größen zweiter Ordnung wird

$$\mu \cdot 2S \cdot \operatorname{tg} \frac{d\varphi}{2} = dS$$

und mit

$$\operatorname{tg} \frac{d\varphi}{2} = \frac{1}{2} \cdot d\varphi,$$

$$\mu \cdot S \cdot d\varphi = dS, \quad \mu \cdot d\varphi = \frac{dS}{S},$$

$$\int_{S_2}^{S_1} \frac{dS}{S} = \int_0^{\alpha} \mu \cdot d\varphi,$$

$$\ln S \Big|_{S_2}^{S_1} = \mu \cdot \varphi \Big|_0^{\alpha}, \quad \ln S_1 - \ln S_2 = \mu \cdot \alpha, \quad \ln \frac{S_1}{S_2} = \mu \cdot \alpha,$$

$$\frac{S_1}{S_2} = e^{\mu \alpha}, \quad S_1 = S_2 \cdot e^{\mu \alpha},$$

wobei $e = 2,718 \dots$ die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems ist und

$$\alpha = 2\pi \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$$

den Umschlingungswinkel im Bogenmaß bedeutet. Die durch die Reibung übertragbare Umfangskraft P ist gleich dem Reibungswiderstand W und wird

$$P = W = S_1 - S_2,$$

so daß

$$P = S_1 - \frac{S_1}{e^{\mu\alpha}} = S_1 \left(1 - \frac{1}{e^{\mu\alpha}}\right).$$

$$P = \frac{e^{\mu\alpha} - 1}{e^{\mu\alpha}} \cdot S_1$$

oder

$$P = S_2 \cdot e^{\mu\alpha} - S_2 = S_2(e^{\mu\alpha} - 1).$$

Für μ ist der Reibungskoeffizient der Bewegung einzusetzen, wenn das Seil auf dem Zylinder gleitet; findet kein Gleiten statt, so ist der Reibungskoeffizient μ_0 der Ruhe einzusetzen.

Werte von $e^{\mu\alpha}$.

Verhältnis des umspannten Bogens zum Umfang $\frac{\alpha}{2\pi} = n$	Lederriemen auf Scheiben aus				Hanfseile			
	Holz		Gußeisen		auf Eisen-trommeln	auf Holz-trommeln	auf rauhem Holz	auf poliertem Holz
	Zustand des Riemens							
	etwas gefettet	sehr gefettet	etwas gefettet	feucht	$\mu = 0,25$	$\mu = 0,4$	$\mu = 0,5$	$\mu = 0,33$
$\mu =$								
	0,47	0,12	0,28	0,38				
0,1	1,34	1,01	1,19	1,27	1,17	1,29	1,37	1,23
0,2	1,81	1,16	1,42	1,61	1,37	1,65	1,87	1,51
0,3	2,43	1,25	1,69	2,05	1,60	2,13	2,57	1,86
0,4	3,26	1,35	2,02	2,60	1,87	2,73	3,51	2,29
0,425	3,51	1,38	2,11	2,76	1,95	2,91	3,80	2,41
0,45	3,78	1,40	2,21	2,93	2,03	3,10	4,11	2,54
0,475	4,07	1,43	2,31	3,11	2,11	3,30	4,45	2,68
0,5	4,38	1,46	2,41	3,30	2,19	3,51	4,81	2,82
0,525	4,71	1,49	2,52	3,50	2,28	3,74	5,20	2,97
0,55	5,03	1,51	2,63	3,72	2,37	3,98	5,63	3,13
0,6	5,38	1,57	2,81	4,19	2,57	4,52	6,59	3,47
0,7	7,90	1,66	3,43	5,32	3,00	5,81	9,00	4,27
0,8	10,6	1,83	4,09	6,75	3,51	7,47	12,34	5,25
0,9	14,3	1,97	4,87	8,57	4,11	9,60	16,90	6,46
1,0	19,2	2,12	5,81	10,9	4,81	12,35	23,14	7,95
1,5					10,55	43,38	111,16	22,42
2,0					23,14	152,4	535,47	63,23
2,5					50,75	535,5	2576,0	178,5
3,0					111,3	1881,0	12392,0	502,9
3,5					244,2	6611,0	59610,0	1418,0

Beispiele: 1. Es ist die Last Q zu bestimmen, die mit Hilfe eines um einen Holzzylinder geschlungenen Hanfseiles durch die Kraft P gehalten wird; das Seil sei einmal um den Zylinder geschlungen. Mit $\alpha = 2\pi$ und $\mu = 0,33$ wird

$$Q = \infty 8 P$$

oder bei n -maligem Umschlingen

$$Q = \infty 8n \cdot P.$$

2. Die Last, die mit 1 kg durch ein viermal um einen horizontalen Zylinder geschlungenes Seil gehalten werden kann, bestimmt sich mit $\alpha = 8\pi$ und $\mu = 0,33$ zu

$$Q = \infty 1 \cdot 4350 = \infty 4350 \text{ kg.}$$

3. Es ist die Bremskraft bei der einfachen Bandbremse (Fig. 93) zu bestimmen. Wird der Bremshebel niedergedrückt, so tritt die größere Spannkraft S_1 im festen Bandende auf; die Umfangskraft wird

$$P = S_1 - S_2 = S_2 (e^{\mu\alpha} - 1)$$

und das Reibmoment

$$P \cdot R = S_2 \cdot R \cdot (e^{\mu\alpha} - 1) = M$$

gleich dem abzubremsenden Moment. Die dritte Gleichgewichtsbedingung erfordert für den Bremshebel

$$S_2 \cdot b = K \cdot a$$

und daraus

$$K = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{M}{e^{\mu\alpha} - 1}.$$

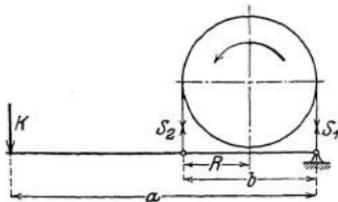


Fig. 93.

C. Das ebene Fachwerk.

Unter einem ebenen Fachwerk versteht man ein Gebilde aus Stäben, die in ihren Endpunkten durch reibungslose Gelenke verbunden sind und deren Mittellinien in einer Ebene liegen. Bei der Untersuchung derartiger Fachwerke macht man folgende Annahme: Die Formänderungen, die das Fachwerk infolge der angreifenden Kräfte erleidet, sind verschwindend klein; infolgedessen betrachtet man das Stabsystem als starr

und stellt die Gleichgewichtsbedingungen ohne Rücksicht auf die Formänderung auf. Voraussetzung sei: sämtliche äußeren Kräfte greifen in den Knotenpunkten an, d. h. in Punkten, wo sich Gelenke befinden.

Die Nebenspannungen, die infolge der Vernichtung der Knotenpunkte auftreten, werden durch die Wahl der zulässigen Beanspruchung berücksichtigt (vgl. Festigkeitslehre S. 409).

Zerlegt man das Fachwerk durch einen Schnitt $t-t$ (Abb. 94) in zwei Teile, so müssen an den Schnittstellen Kräfte O , D , U angebracht werden, die den abgetrennten Trägerteil im Gleichgewicht halten (vgl. Mechanik S. 272).

Diese Kräfte — Spannkräfte — fallen in die Mittellinien der Stäbe, weil sie andernfalls die Stäbe um die an ihren Enden angebrachten Gelenke drehen würden. Hieraus folgt: **sämtliche Stäbe werden nur durch Längskräfte beansprucht.**

Der einfachste Fall eines starr gedachten Fachwerkes ist das Dreiecksnetz (Fig. 94); es entsteht, wenn jeder neue Knotenpunkt durch zwei Stäbe an einen vorhergehenden Stab angeschlossen wird. **Gurtungen** heißen die Stabreihen, die das in einer senkrechten Ebene gedachte Dreiecksnetz nach oben und unten begrenzen; ihre Spannkräfte sollen mit O (obere Gurtung) und U (untere Gurtung) bezeichnet werden. Die Stäbe, die die Gurtungen miteinander verbinden, heißen **Füllungsstäbe**, **Gitterstäbe** oder **Wandglieder**, auch **Vertikalen** oder **Diagonalen**, je nachdem sie senkrecht oder schräg stehen; ihre Spannkräfte sollen mit V und D bezeichnet werden.

1. Das Verfahren von Culmann.

Es sind die Spannkkräfte O , D , U des Trägers der Fig. 95 zu ermitteln. Durch den Schnitt $t-t$ zerlegt man das Bauwerk in zwei Teile, von denen jeder nach

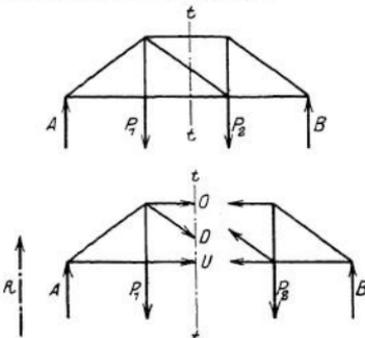


Fig. 94.

Anbringung der Spannkkräfte als äußere Kräfte für sich im Gleichgewicht sein muß. Am linken Trägerteil greifen die Kräfte A und P_1 an, ihre Resultante Q ergibt sich der Größe und Richtung nach aus dem Kräfteck, ihr Angriffspunkt liegt im Schnittpunkt der äußersten Seilstrahlen s' und II' . Soll Gleichgewicht herrschen, so muß Q nach den drei gegebenen Richtungen O , D , U so zerlegt werden, daß der Kräftezug Q , O , D , U bei stetigem Umlaufungssinn geschlossen ist. Nach Culmann (vgl. S. 274) bringt man je zwei Richtungen zum Schnitt und zwar $Q-U$ bzw. $O-D$ und erhält die Culmannsche Gerade L . Zunächst zerlegt man Q nach L und U , indem man durch die Endpunkte von Q zu L und U Parallelen zieht; der geschlossene Kräftezug gibt die Richtungen der Kräfte L und U . Nunmehr zerlegt man die gleichgroße entgegengesetzt gerichtete Kraft L , die in b angreift, nach den Richtungen O und D , indem man durch die Endpunkte von L zu O und D Parallelen zieht; auch hier gibt der geschlossene Kräftezug die Richtungen der Kräfte O und D . Die aus dem Kräfteck sich ergebenden Richtungen der Spannkkräfte sind an den Stabenden des Trägerteiles einzuzuzeichnen, für den die Resultante sämtlicher Kräfte bestimmt wird, in Fig. 95 also am linken. Bildet man die Resultante sämtlicher Kräfte rechts vom Schnitt $t-t$, so erhält man mit Hilfe des Kräftezuges P_2, P_3, B eine Kraft Q' , die von gleicher Größe aber entgegengesetzter Richtung ist wie Q ; ihr Angriffspunkt fällt als Schnittpunkt der äußersten Seilstrahlen s' und II' mit dem Angriffspunkt von Q zusammen. Da die Richtung von Q' der von Q entgegengesetzt ist, so ergibt die Zerlegung mit Hilfe der Culmannschen Geraden L entgegengesetzte Richtung der Spannkkräfte O, D, U ; in diesem Falle sind die Pfeile am rechten Trägerteil anzubringen. Für jede Stabspannkraft erhält man demnach

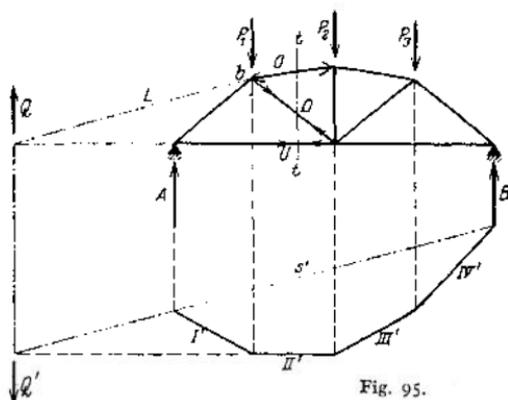
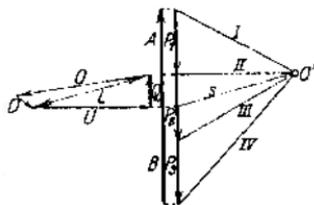


Fig. 95.

zwei entgegengesetzt gerichtete Pfeile. Nach S. 273 wird O gedrückt, U und D werden gezogen. Ein Kräftemaßstab ermöglicht die Messung der Spannkkräfte; er lautet $1 \text{ cm} = \alpha \text{ kg}$.



Das Culmannsche Verfahren eignet sich besonders dann, wenn die Spannkkräfte eines beliebiges Feldes zu ermitteln sind, und gestattet eine schnelle Kontrolle — für Stichproben —, wenn die Spannkkräfte mit Hilfe anderer Verfahren bestimmt sind.

Der Schnitt $t-t$ ist so zu legen, daß höchstens drei Stäbe getroffen werden, deren Spannkkräfte unbekannt sind.

2. Das Verfahren von Cremona.

Cremona löst die Aufgabe auf Grund folgender Überlegung: Schneidet man einen Knotenpunkt eines Fachwerkes heraus und bringt in den Schnittstellen die zusätzlichen Kräfte an, so muß der Punkt unter dem Einfluß sämtlicher an ihm angreifenden Kräfte im Gleichgewicht sein. Durch jeden Schnitt dürfen nicht mehr als zwei neue unbekannte Spannkkräfte auftreten.

a) In Fig. 96 ist ein **Parallelträger** dargestellt, der in den Knotenpunkten der oberen Gurtung die Lasten P trägt. Mit Hilfe von Kräfteck und Seileck sind die Auflagerreaktionen A und B ermittelt. Schneidet man jetzt den Knotenpunkt A , 1 , 2 heraus, so erhält man die Teilaufgabe: Die nach Größe und Richtung bekannte Kraft A nach den Richtungen 1 , 2 so zu zerlegen, daß Gleichgewicht herrscht. Da die Wirkungslinien von A und 1 zusammenfallen, wird $1 = A$, $2 = 0$, der Kräftezug $A-1$ muß geschlossen sein. Der Pfeil von 1 wird in das Netzwerk so eingetragen, wie er sich aus dem Kräftezuge ergibt; im gezeichneten

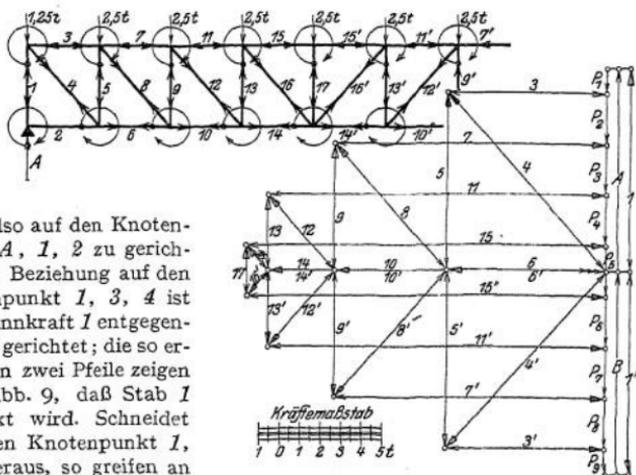


Fig. 96.

Falle also auf den Knotenpunkt A , 1 , 2 zu gerichtet. In Beziehung auf den Knotenpunkt 1 , 3 , 4 ist die Spannkraft 1 entgegengesetzt gerichtet; die so erhaltenen zwei Pfeile zeigen nach Abb. 9, daß Stab 1 gedrückt wird. Schneidet man den Knotenpunkt 1 , 3 , 4 heraus, so greifen an ihm die der Größe und Richtung nach bekannten

Kräfte 1 und P_1 an, ihre Resultante ist nach den Richtungen 3 und 4 so zu zerlegen, daß Gleichgewicht herrscht. Die entgegengesetzte Richtung der Spannkraft 1 sei durch \triangleright gekennzeichnet. Durch die Endpunkte des Kräftezuges $1 \triangleright$, P_1 zieht man zu den Richtungen 3 und 4 Parallelen, dann gibt der geschlossene Kräftezug $1 \triangleright$, P_1 , 3 , 4 die gesuchten Spannkräfte 3 und 4 der Größe und Richtung nach. Die sich ergebenden Pfeile trägt man in das Stabnetz ein; es ist 3 auf den Knotenpunkt zu, 4 von dem Knotenpunkt weg gerichtet. Nach Eintragung der entgegengesetzten Pfeile an den anderen Enden der Stäbe erkennt man auf Grund der Darstellung Fig. 9, daß Stab 3 gedrückt, Stab 4 gezogen wird. Man geht über zu dem Knotenpunkt 2 , 4 , 5 , 6 , da dort nur zwei neue unbekannte Kräfte -5 und 6 auftreten. Es empfiehlt sich, den einmal gewählten Umfahrungssinn beim Herausschneiden eines Knotenpunktes für die ganze Untersuchung beizubehalten; im gezeichneten Falle im Sinne des Uhrzeigers. Da $2 = 0$ ist, bleibt die durch \triangleright gekennzeichnete Spannkraft 4 nach den Richtungen 5 und 6 zu zerlegen. Die Parallelen durch die Endpunkte von $4 \triangleright$ ergeben die Größe, der geschlossene Kräftezug $4 \triangleright$, 5 , 6 die Richtung von 5 und 6 . Der Pfeil von 5 ist auf den Knotenpunkt zu, der von 6 von ihm weg gerichtet. Nach Eintragung der entgegengesetzten Pfeile in das Stabnetz erkennt man, daß Stab 5 gedrückt, Stab 6 gezogen wird. Gleichzeitig sieht man, daß die Stabkräfte 3 und 6 von gleicher Größe aber entgegengesetzter Richtung sind. Schneidet man den Knotenpunkt 5 , 3 , 7 , 8 heraus, so greifen an ihm die drei der Größe und Richtung nach bekannten Kräfte $5 \triangleright$, $3 \triangleright$, P_2 an, ihre Resultante ist nach 7 und 8 zu zerlegen. Die Parallelen durch den Anfangs- und Endpunkt des Kräftezuges $5 \triangleright$, $3 \triangleright$, P_2 ergeben die Größe, der geschlossene Kräftezug $5 \triangleright$, $3 \triangleright$, P_2 , 7 , 8 die Richtung von 7 und 8 . Es zeigt sich, daß 7 auf den Knotenpunkt zu, 8 von ihm weg gerichtet ist; die Eintragung der zweiten

Pfeile läßt erkennen, daß 7 gedrückt, 8 gezogen wird. Dieses Verfahren wird für jeden Knotenpunkt durchgeführt und ergibt den sogenannten **Cremonaschen Kräfteplan**. Da sich der gesamte Kräfteplan schließen muß, so liegt darin eine Kontrolle für die Richtigkeit der Zeichnung.

b) Die Kräfte greifen am Untergurt an (Fig. 97). In diesem Falle empfiehlt es sich, im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers um die Knotenpunkte herumzuschneiden, um ein Parallelverschieben der Knotenpunktslasten zu vermeiden. Zu demselben Resultat gelangt man, wenn man den Kräftezug P_5, P_4, P_3, P_2, P_1 bildet und im Sinne des Uhrzeigers um den Knotenpunkt herumgeht. Die Spannkraft im Stabe 17 wird gleich Null, da die Kraft 15 senkrecht zu ihrer Wirkungslinie keine Komponente haben kann.

c) Die Kräfte greifen an beiden Gurtungen an (Fig. 98). In diesem Falle empfiehlt es sich, *A* und *B* mit Hilfe eines besonderen Kraft- und Seilecks zu ermitteln und für den Cremonaschen Kräfteplan zu beachten, daß beim Umfahren eines Knotenpunktes im Sinne des Uhrzeigers die

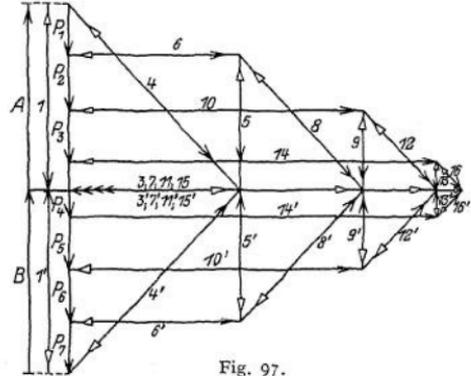
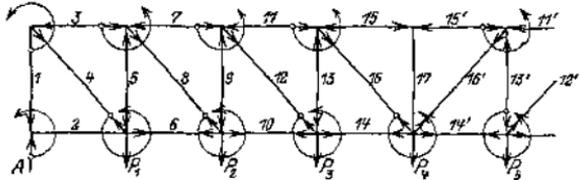


Fig. 97.

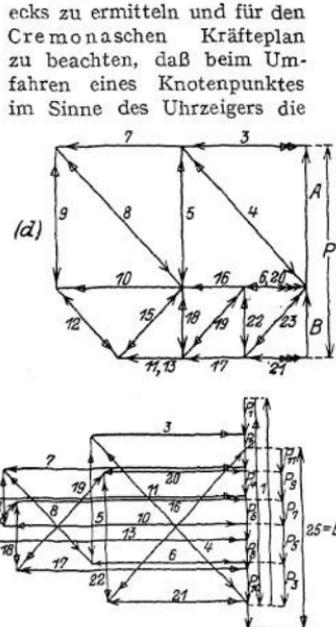
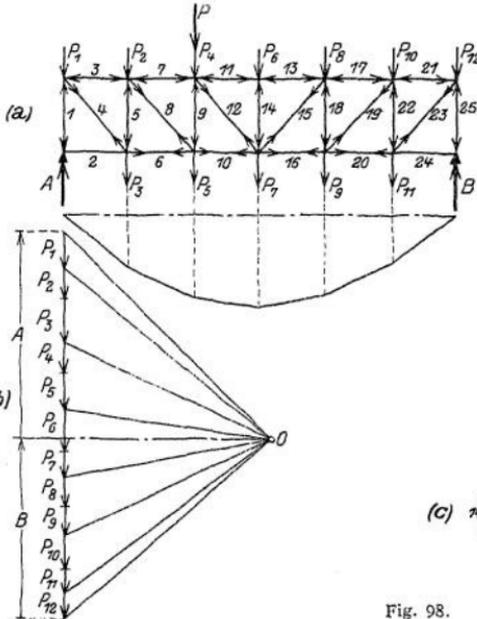


Fig. 98.

am Untergurt angreifenden Kräfte den bereits ermittelten Spannkraften voranzusetzen sind. Man vermeidet dann das Parallelverschieben der Kräfte P . Die Kontrolle liegt in der Forderung, daß der gesamte Kräfteplan geschlossen sein muß; d. h. $25' = B$. Für Stichproben ist das Culmannsche Verfahren zweckmäßig.

4. Es greife eine Einzelkraft in einem beliebigen Knotenpunkte an (Fig. 98).

5. Der drehbare Wandkran trage am Flansch seines Untergurtes (Fig. 99) einen beweglichen Flaschenzug; das Fachwerk ist in Beziehung auf die größten auftretenden Spannkraften zu untersuchen.

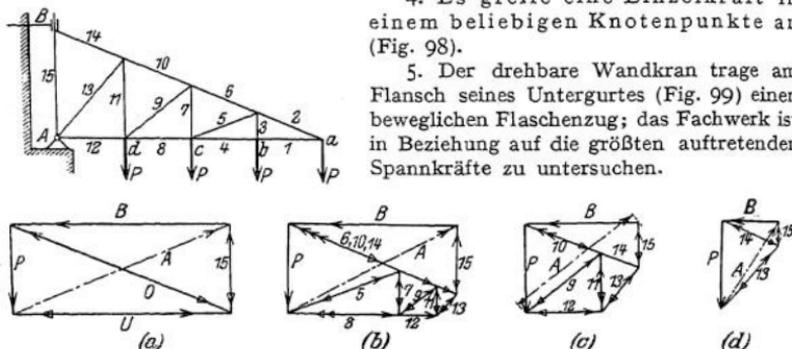


Fig. 99.

Da nur Knotenpunkte für die verschiedenen Laststellungen in Frage kommen, ist das Entwerfen von 4 Kräfteplänen der Untersuchung mittels Einflußlinien vorzuziehen.

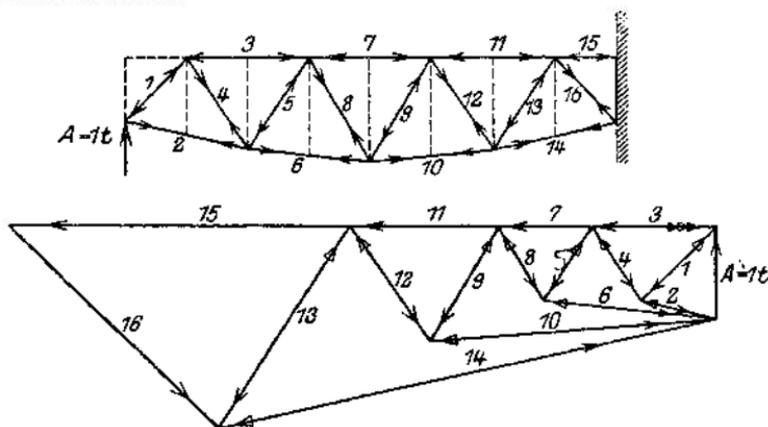


Fig. 100.

6. Für den Träger der Fig. 100 ist der Kräfteplan für $A = 17$ zu entwerfen.

3. Analytisches Verfahren nach Ritter.

Man legt einen Schnitt so durch das Fachwerk, daß drei Stäbe geschnitten werden. Da für jede Spannkraft Größe und Richtung unbekannt sind, so würden sich sechs Unbekannte ergeben, denen drei Gleichgewichtsbedingungen gegenüberstehen. Man scheidet durch **Annahme** der Richtung drei Unbekannte aus und setzt fest: sämtliche Spannkraften seien **Zugkräfte** und kennzeichnet sie durch das positive Vorzeichen. Ergibt die Rechnung für irgendeine Spannkraft das entgegengesetzte Vorzeichen, so war die Annahme nicht zutreffend, die betreffende Spannkraft demnach keine Zug-, sondern eine Druckkraft; d. h.

die Spannkraft mußte als Druckkraft eingeführt werden, wenn die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein sollten. Von den noch bleibenden drei Unbekannten (Größe der Kräfte) fallen zwei heraus, wenn man den Schnittpunkt ihrer Wirkungslinien als Drehpunkt wählt und für diesen Schnittpunkt die **dritte Gleichgewichtsbedingung** aufstellt, denn in diesem Falle werden die Momente der durch den Drehpunkt gehenden Kräfte gleich Null.

Bestimmung von O Fig. 101: Ist a der Schnittpunkt von D und U , M_a das Moment der äußeren Kräfte im Punkte a des Trägers, so ergibt die dritte Gleichgewichtsbedingung $\sum M = 0$.

$$(a) \quad M_a + O \cdot s_0 = 0 \quad \text{und daraus} \quad O = -\frac{M_a}{s_0}.$$

Da die Rechnung das negative Vorzeichen für O ergibt, so ist O Druckkraft. Das Vorzeichen der Momente ist der Momentenfläche zu entnehmen (vgl. Festigkeitslehre S. 420). Fällt der Momentendrehpunkt aus der Spannweite AB heraus, so gibt die Resultante sämtlicher Kräfte links vom Schnitt das Vorzeichen für M an, wenn der linke Trägerteil der Berechnung zugrunde gelegt wird. Wird die Spannkraft aus dem rechten Trägerteil ermittelt, so ist die Resultante sämtlicher Kräfte rechts vom Schnitt maßgebend.

Im gezeichneten Falle ist $Q = \sum P$ links vom Schnitt (Fig. 101), ihr Angriffspunkt ist der Schnittpunkt der äußersten Seilstrahlen s und II' . In Beziehung auf den Punkt a als Drehpunkt dreht Q rechts herum; der am linken Trägerteil gezeichnete Pfeil der — positiv angenommenen — Spannkraft O zeigt gleiche Drehrichtung, es ergibt sich also Gleichung (a). Führt man die Betrachtung für den rechten Trägerteil durch, so wird $Q' = -Q$ linksdrehend, der am rechten Trägerteil gezeichnete Pfeil der — positiv angenommenen — Spannkraft O zeigt gleiche Drehrichtung; d. h. die Gleichung (a) bleibt auch in diesem Falle bestehen.

Der Hebelarm s_0 ist das Lot vom Drehpunkt a auf die Wirkungslinie von O ; seine Länge darf der Zeichnung entnommen werden, wenn das Trägernetz genau gezeichnet ist. Aus einer Maßskizze ist die Länge des Lotes zu berechnen. So ist z. B., wenn λ die Feldweite bedeutet

$$s_0 = h_2 \cdot \cos \alpha \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{h_2 - h_1}{\lambda}; \quad \text{mit} \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

$$s_0 = h_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(h_2 - h_1)^2}{\lambda^2}}} = h_2 \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + (h_2 - h_1)^2}}.$$

Bestimmung von U : Ist b der Schnittpunkt von O und D , M_b das Moment der äußeren Kräfte im Punkte b des Trägers, so ergibt die dritte Gleichgewichtsbedingung $\sum M = 0$:

$$(b) \quad M_b - U \cdot h_1 = 0 \quad \text{und daraus} \quad U = +\frac{M_b}{h_1}.$$

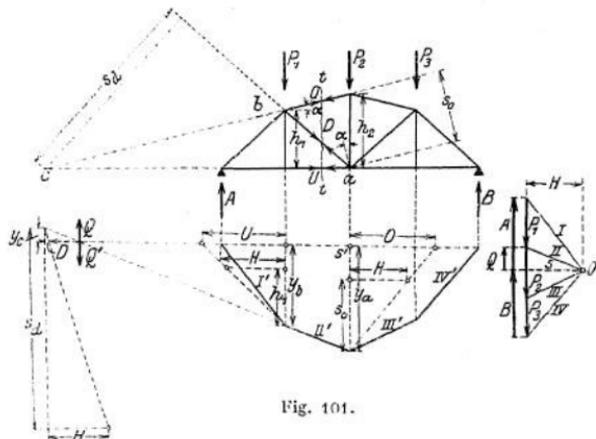


Fig. 101.

Das positive Vorzeichen von M_b zeigt die M -Fläche; andererseits haben Q und U in Beziehung auf b entgegengesetzte Drehrichtung. Da die Rechnung die angenehme Richtung von U bestätigt, so bleibt U Zugkraft; der Stab U wird gezogen.

Bestimmung von D : Der Schnittpunkt c der Wirkungslinien O und U liegt außerhalb der Spannweite; ist M_c das Moment der äußeren Kräfte, so ergibt die dritte Gleichgewichtsbedingung $\sum M = 0$ in Beziehung auf c als Drehpunkt.

$$(c) \quad M_c + D \cdot s_d = 0 \quad \text{und daraus} \quad D = -\frac{M_c}{s_d}.$$

M_c ist aber negativ, da Q in Beziehung auf c linksdrehend ist; außerdem haben Q und D in Beziehung auf c entgegengesetzte Drehrichtung; die Spannkraft in D ist also positiv; der Stab D wird gezogen.

Bemerkung: Fiele der Schnittpunkt c der Wirkungslinien zwischen Q und A , so hätten Q und D gleiche Drehrichtung; M_c wäre positiv; der Stab D würde gedrückt.

Graphische Deutung der Gleichungen. Auf S. 278 war nachgewiesen, daß die Ordinaten des Seilecks ein Maß für die Größe der Momente in einem Punkte eines Trägers sind und zwar ist $M_a = H \cdot y_a$; $M_b = H \cdot y_b$;

$M_c = H \cdot y_c$. Sind M_a und M_b positiv, so muß M_c negativ sein, da die Ordinate y_c oberhalb der Schlußlinie des Seilecks liegt. Ersetzt man die Momente durch die Seileckordinaten, so wird

$$O = -\frac{H \cdot y_a}{s_0}.$$

d. h. O ist vierte Proportionale aus H ; y_a und s_0 . Trägt man s_0 auf y_a ab, zieht durch den Endpunkt von s_0 zur Schlußlinie s eine Parallele und trägt

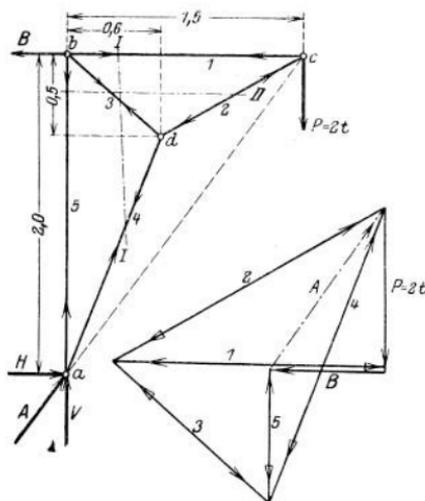


Fig. 102.

folglich

$$V = H \cdot \frac{2,0}{1,5} = 2,0 \text{ t,}$$

zum gleichen Resultat führt die zweite Gleichgewichtsbedingung $\sum V = 0$. Für a als Drehpunkt wird:

$$(a) \quad P \cdot 1,5 - B \cdot 2,0 = 0$$

folglich

$$B = P \cdot \frac{1,5}{2,0} = 1,5 \text{ t.}$$

zum gleichen Resultat führt die erste Gleichgewichtsbedingung $\sum H = 0$.

auf dieser Parallelen H ab, so schneidet die Verbindungslinie der Endpunkte von s_0 (y_a) und H auf der Schlußlinie s die Größe O im Kräftemaßstabe der Zeichnung ab. In gleicher Weise ergeben sich U und D (Fig. 101).

Beispiele: 1. Man macht den Träger (Fig. 102) frei, indem man die Auflager durch ihre Reaktionen ersetzt, und nimmt an, B sei horizontal gerichtet. Statt der Reaktion A führt man ihre Horizontal- und Vertikalkomponente ein. Wählt man den Schnittpunkt b der Wirkungslinien B und V als Drehpunkt, so muß nach der dritten Gleichgewichtsbedingung die Summe der Momente sämtlicher äußeren Kräfte in Beziehung auf b als Drehpunkt gleich Null sein; d. h.:

$$(b) \quad P \cdot 1,5 - H \cdot 2,0 = 0$$

und daraus

$$H = P \cdot \frac{1,5}{2,0} = 1,5 \text{ t.}$$

Für c als Drehpunkt wird

$$(c) \quad H \cdot 2,0 - V \cdot 1,5 = 0$$

Zur Ermittlung der Spannkraften zerlegt man den Träger durch den Schnitt $I-I$ in zwei Teile und bringt sämtliche Spannkraften als Zugkräfte an. An dem rechten Teil wirken dann P, S_1, S_2, S_3 . Wählt man den Schnittpunkt d von 3 und 4 zum Drehpunkt, so erhält man:

$$(d) S_1 \cdot 0,5 - P \cdot 0,9 = 0,$$

folglich

$$S_1 = P \cdot \frac{0,9}{0,5} = 3,6 \text{ t.}$$

Der Stab 1 wird gezogen.

Zur Bestimmung von S_2 legt man den Schnitt $II-II$ und bringt die Spannkraften als äußere (Zug-)Kräfte an. Dann wirken an dem oberen Trägerteil P, S_2, S_3, S_6, B . Wählt man b als Schnittpunkt von S_2, S_3 und B zum Drehpunkt, so erhält man

$$(b) P \cdot 1,5 + S_2 \cdot 0,73 = 0,$$

folglich

$$S_2 = -P \cdot \frac{1,5}{0,73} = -4,1 \text{ t.}$$

Der Stab wird gedrückt.

Betrachtet man den durch Schnitt $I-I$ abgetrennten linken Trägerteil, so sieht man ihn angegriffen durch B, S_1, S_2, S_3, H, V . Man wählt a als Schnittpunkt von S_1, H, V zum Drehpunkt und erhält:

$$(a) B \cdot 2,0 - S_1 \cdot 2,0 - S_2 \cdot 1,54 = 0,$$

$$S_3 = (B - S_1) \cdot \frac{2,0}{1,54} = -2,7 \text{ t.}$$

Der Stab 3 wird gedrückt.

An dem durch denselben Schnitt $I-I$ abgetrennten rechten Trägerteil wirken S_1, P, S_4, S_5 . Mit c als Schnittpunkt von S_4 und P erhält man:

$$(c) S_4 \cdot 0,96 - S_1 \cdot 0,64 = 0.$$

$$S_4 = S_1 \cdot \frac{0,96}{0,64} = -(S_1 - B) \cdot \frac{2,0}{1,54} \cdot \frac{0,96}{0,64} = -4,1 \text{ t.}$$

Der Stab 4 wird gedrückt.

An dem durch Schnitt $II-II$ abgetrennten oberen Trägerteil wirken S_2, S_3, S_2, P ; mit e als Schnittpunkt von S_1 und P erhält man:

$$(e) S_3 \cdot 1,5 + S_2 \cdot 0,96 = 0,$$

$$S_2 = -S_3 \cdot \frac{0,96}{1,5} = +(S_1 - B) \cdot \frac{2,0}{1,54} \cdot \frac{0,96}{1,5} = +1,74 \text{ t.}$$

Der Stab 5 wird gezogen.

2. Tritt der Sonderfall paralleler Stäbe ein, so rückt ihr Schnittpunkt ins Unendliche, und die Momentengleichung kann nicht aufgestellt werden. In diesem Falle führt die Anwendung der beiden ersten Gleichgewichtsbedingungen $\sum H = 0$ und $\sum V = 0$ zum Ziel, wenn man sämtliche am abgetrennten Trägerteil wirkenden Kräfte nach horizontaler und vertikaler Richtung zerlegt. Der Fall tritt immer ein bei den Wandgliedern eines Parallelträgers. In Fig. 103 ist der Hauptträger eines Laufkranes dargestellt, der in dem dritten Knotenpunkt eine Einzellast von 12 t trägt: Die Auflagerreaktionen werden:

$$A = 8 \text{ t}; \quad B = 4 \text{ t.}$$

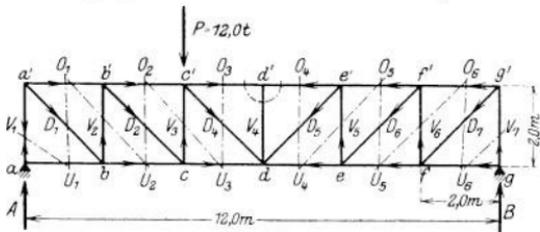


Fig. 103.

Schneidet man durch das erste Feld, so wirken am abgetrennten linken Teil die Kräfte A, U_1, D_1, O_1 . Mit b als Drehpunkt erhält man:

$$(b) A \cdot 2,0 + O_1 \cdot 2,0 = 0,$$

$$O_1 = -A = -8 \text{ t.}$$

Der Stab wird gedrückt.

Die Momentengleichung für a' als Drehpunkt liefert $U_1 = 0$. Die zweite Gleichgewichtsbedingung $\sum V = 0$ ergibt:

$$D_1 \cdot \sin \varphi - A = 0,$$

$$D_1 = \frac{A}{\sin \varphi} = \frac{8}{\frac{1}{2} \sqrt{2}} = 11,3 \text{ t.}$$

Der Stab wird gezogen.

Die erste Gleichgewichtsbedingung $\sum H = 0$ bestätigt

$$D_1 \cdot \cos \varphi + O_1 = 0,$$

$$O_1 = -D_1 \cdot \cos \varphi = A \cdot \operatorname{ctg} \varphi = A = 8,0 \text{ t.}$$

Für den Schnitt $V_1 U_1$ liefert $\Sigma V = 0$

$$V_1 + A = 0, \quad V_1 = -A = -8,0 \text{ t.}$$

Der Stab wird gedrückt.

Schneidet man durch O_1, V_2, U_2 , so wirken am abgetrennten linken Teil die Kräfte A, O_1, V_2, U_2 . Mit b' als Drehpunkt wird:

$$(b') \quad A \cdot 2,0 - U_2 \cdot 2,0 = 0, \\ U_2 = +A = +8,0 \text{ t.}$$

Der Stab wird gezogen; seine Spannkraft ist gleich der von O_1 mit entgegengesetzten Vorzeichen. Die zweite Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$ liefert:

$$A + V_2 = 0; \quad V_2 = -A = -8,0 \text{ t.}$$

Der Stab wird gedrückt.

Schneidet man durch O_2, D_2, U_2 , so wirken am abgetrennten linken Trägerteil die Kräfte A, O_2, D_2, U_2 . Mit c als Drehpunkt wird

$$(c) \quad A \cdot 4,0 + O_2 \cdot 2,0 = 0, \\ O_2 = -A \cdot \frac{4,0}{2,0} = -16,0 \text{ t.}$$

Der Stab wird gedrückt.

$\Sigma V = 0$ liefert:

$$A - D_2 \cdot \sin \varphi = 0, \\ D_2 = \frac{A}{\sin \varphi} = 11,3 \text{ t.}$$

Der Stab wird gezogen.

Schneidet man durch O_3, V_3, U_3 , so wirken am abgetrennten linken Teil die Kräfte A, O_3, V_3, U_3 ; mit c' als Drehpunkt wird:

$$(d') \quad A \cdot 4,0 - U_3 \cdot 2,0 = 0, \\ U_3 = +A \cdot \frac{4,0}{2,0} = +16 \text{ t.}$$

Der Stab wird gezogen; seine Spannkraft ist gleich der von O_3 mit entgegengesetzten Vorzeichen. Aus $\Sigma V = 0$ folgt:

$$A + V_3 = 0; \quad V_3 = -A = -8,0 \text{ t.}$$

Der Stab wird gedrückt.

Schneidet man durch O_4, D_3, U_3 , so wirken am abgetrennten linken Trägerteil die Kräfte A, P, O_4, D_3, U_3 ; mit d als Drehpunkt wird:

$$(d) \quad A \cdot 6,0 - P \cdot 2,0 + O_4 \cdot 2,0 = 0, \\ O_4 = -\frac{1}{2,0} \cdot (A \cdot 6,0 - P \cdot 2,0) = -12,0 \text{ t.}$$

Der Stab wird gedrückt.

$\Sigma V = 0$ ergibt:

$$A - D_3 \cdot \sin \varphi - P = 0, \\ D_3 = -\frac{P - A}{\sin \varphi} = -\frac{4,0}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}} = -5,7 \text{ t.}$$

Der Stab wird gedrückt.

Die rechte Hälfte des Trägers wird zweckmäßig von B aus berechnet. Man schneidet durch U_4, V_4 , dann folgt aus $\Sigma V = 0$

$$V_4 + B = 0; \quad V_4 = -B = -4,0 \text{ t.}$$

Der Stab wird gedrückt.

Aus $\Sigma H = 0$ folgt $U_4 = 0$.

Man schneidet durch O_5, D_4, U_4 , dann wirken am rechten abgetrennten Trägerteil die Kräfte B, O_5, D_4, U_4 ; mit f als Drehpunkt erhält man:

$$(f) \quad B \cdot 2,0 + O_5 \cdot 2,0 = 0, \\ O_5 = -B = -4,0 \text{ t.}$$

Der Stab wird gedrückt.

Die zweite Gleichgewichtsbedingung liefert:

$$B - D_4 \cdot \sin \varphi = 0, \\ D_4 = \frac{B}{\sin \varphi} = \frac{4,0}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}} = +5,7 \text{ t.}$$

Der Stab wird gezogen.

Man schneidet durch O_6, V_5, U_5 , dann wirken am abgetrennten rechten Trägerteil die Kräfte B, O_6, V_5, U_5 ; mit f' als Drehpunkt wird:

$$(f') \quad B \cdot 2,0 - U_5 \cdot 2,0 = 0, \\ U_5 = +B = +4,0 \text{ t.}$$

Der Stab wird gezogen, seine Spannkraft ist gleich der von O_5 mit entgegengesetztem Vorzeichen.
 $\Sigma V = 0$ ergibt $V_6 = -B = -4,0$ t.

Der Stab wird gedrückt.

Man schneidet durch O_5, D_5, U_5 , dann wirken am rechten abgetrennten Trägerteil die Kräfte B, O_5, D_5, U_5 ; mit e als Drehpunkt erhält man:

$$(e) B \cdot 4,0 + O_5 \cdot 2,0 = 0,$$

$$O_5 = -B \cdot \frac{4,0}{2,0} = -8,0 \text{ t.}$$

Der Stab wird gedrückt.

$$\Sigma P = 0 \text{ liefert } B - D_5 \cdot \sin \varphi = 0,$$

$$D_5 = \frac{B}{\sin \varphi} = \frac{4,0}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = +5,7 \text{ t.}$$

Der Stab wird gezogen.

Man schneidet durch O_5, V_5, U_4 , dann wirken am abgetrennten rechten Trägerteil die Kräfte B, O_5, V_5, U_4 ; mit e' als Drehpunkt wird:

$$(e') B \cdot 4,0 - U_4 \cdot 2,0 = 0,$$

$$U_4 = +B \cdot \frac{4,0}{2,0} = +8,0 \text{ t.}$$

Der Stab wird gezogen, seine Spannkraft ist gleich der von O_5 mit entgegengesetztem Vorzeichen.

$$\Sigma P = 0 \text{ liefert } B + V_5 = 0; \quad V_5 = -B = -4,0 \text{ t.}$$

Der Stab wird gedrückt.

Man schneidet durch O_4, D_4, U_4 , dann wirken am abgetrennten rechten Trägerteil die Kräfte B, O_4, D_4, U_4 ; mit d als Drehpunkt erhält man:

$$(d) B \cdot 6,0 + O_4 \cdot 2,0 = 0,$$

$$O_4 = -B \cdot \frac{6,0}{2,0} = -12,0 \text{ t.}$$

Der Stab wird gedrückt.

$$\Sigma V = 0 \text{ ergibt } B - D_4 \cdot \sin \varphi = 0,$$

$$D_4 = \frac{B}{\sin \varphi} = \frac{4,0}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = +5,7 \text{ t.}$$

Der Stab wird gezogen.

Schneidet man O_3, V_4, O_4 , so wirken an dem abgetrennten Knotenpunkte die beiden gleich großen entgegengesetzt gerichteten Kräfte O_3 und O_4 . Die zweite Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$ ergibt $V_4 = 0$.

Damit sind sämtliche Spannkraften ermittelt; auf die Übereinstimmung mit dem Cremonaschen Kräfteplan (Fig. 98) sei hingewiesen.

3. Liegt der zu untersuchende Stab so in dem Fachwerkträger, daß ein Schnitt, der nur drei Stäbe trifft, nicht zu führen ist, so läßt sich das Rittersche Verfahren in seiner bisherigen einfachen Form nicht anwenden. Da bei einem solchen Schnitt stets mehr als drei Stäbe geschnitten werden, so erhält man auch mehr als drei unbekannte Spannkraften. Es wird zu versuchen sein, den fraglichen Stab durch mehrere Schnitte zu treffen; ist das möglich, so lassen sich auch mehrere Gleichungen aufstellen, die die Ermittlung der gesuchten Spannkraft ermöglichen. Natürlich muß das Bestreben dahin gerichtet sein, mit möglichst wenig Schnitten zum Ziele zu gelangen. In Fig. 104 ist die Spannkraft S zu ermitteln. Durch den Schnitt $I-I$ werden die vier Stäbe Q_2, S, D_1, U_1 getroffen; an dem linken abgetrennten Trägerteil wirken die Kräfte $A = 6$ t (wegen der Symmetrie des Trägers) O_2, S, D_1, U_1 . Mit a als Drehpunkt lautet die Momentengleichung:

$$(a) A \cdot 2,0 + O_2 \cdot 1,34 + S \cdot 1,0 = 0.$$

Da diese Gleichung zwei Unbekannte O_2 und S enthält, bedarf es einer zweiten Gleichung. Der zweite Schnitt muß so gelegt werden, daß die Berechnung von O_2 möglich ist. Man schneidet also O_2, S, D_2, O_4 und wählt b als Drehpunkt.

$$(b) P \cdot 1,0 + O_2 \cdot 0,89 = 0,$$

$$O_2 = -P \cdot \frac{1,0}{0,89} = -12,0 \cdot \frac{1,0}{0,89} = -13,5 \text{ t.}$$

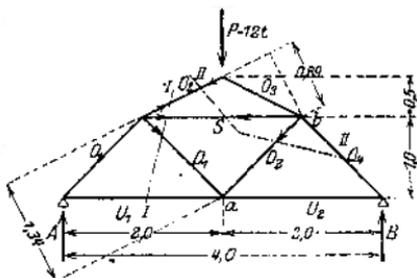


Fig. 104.

Der Stab wird gedrückt. Setzt man O_2 in die Gleichung (a) ein, so ergibt sich:

$$6,0 \cdot 2,0 - 13,5 \cdot 1,34 + S \cdot 1,0 = 0, \\ S = 13,5 \cdot 1,34 - 6,0 \cdot 2,0 = +6,1 \text{ t.}$$

Der Stab S wird gezogen.

4. Es sei der Träger der Fig. 105 durch eine gleichförmig verteilte Last Q belastet, die in den Knotenpunkten angreifend gedacht wird. Ist q die Belastung der Längeneinheit, so ist das Moment an beliebiger Stelle des Trägers:

$$M_x = A \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

(vgl. Festigkeitslehre S. 422), mit $A = \frac{Q}{2}$ und $q = \frac{Q}{l}$ wird:

$$M_x = \frac{Q}{2} \cdot x - \frac{Q}{l} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{Q}{2l} \cdot x(l - x).$$

Bezeichnet man mit n die Felderzahl, λ die Feldweite, m die Ordnungszahl der Knotenpunkte, dann ist:

$$l = n \cdot \lambda, \quad x = m \cdot \lambda,$$

so daß

$$M_x = \frac{Q}{2l} \cdot m \cdot \lambda \cdot (n \cdot \lambda - m \cdot \lambda) \\ = \frac{Q \cdot \lambda^2}{2 \cdot n \cdot \lambda} \cdot m(n - m) \\ = \frac{Q \cdot \lambda}{2 \cdot n} \cdot m(n - m) = C \cdot m \cdot (n - m),$$

wobei die Konstante $C = \frac{Q \cdot \lambda}{2 \cdot n}$ einmal auf dem Rechenschieber einzustellen ist.

Man erhält die Knotenpunktmomente:

$$M_0 = 0, \\ M_1 = C \cdot 1 \cdot (n - 1), \\ M_2 = C \cdot 2 \cdot (n - 2), \\ M_3 = C \cdot 3 \cdot (n - 3), \\ M_4 = C \cdot 4 \cdot (n - 4), \\ M_5 = C \cdot 5 \cdot (n - 5).$$

Die Spannkkräfte im Obergurt ergeben sich aus $\Sigma M = 0$ für die Knotenpunkte der unteren Gurtung als Drehpunkte.

$$(1) \quad O_1 \cdot h + M_1 = 0; \quad O_1 = -\frac{M_1}{h}, \\ (2) \quad O_2 \cdot h + M_2 = 0; \quad O_2 = -\frac{M_2}{h}, \\ (3) \quad O_3 \cdot h + M_3 = 0; \quad O_3 = -\frac{M_3}{h}, \\ (4) \quad O_4 \cdot h + M_4 = 0; \quad O_4 = -\frac{M_4}{h}, \\ (5) \quad O_5 \cdot h + M_5 = 0; \quad O_5 = -\frac{M_5}{h}.$$

Die Spannkkräfte im Untergurt ergeben sich aus $\Sigma M = 0$ für die Knotenpunkte der oberen Gurtung als Drehpunkte.

$$(0) \quad U_1 \cdot h - M_0 = 0; \quad U_1 = 0, \\ (1') \quad U_2 \cdot h - M_1 = 0; \quad U_2 = \frac{M_1}{h}, \\ (2') \quad U_3 \cdot h - M_2 = 0; \quad U_3 = \frac{M_2}{h}, \\ (3') \quad U_4 \cdot h - M_3 = 0; \quad U_4 = \frac{M_3}{h}, \\ (4') \quad U_5 \cdot h - M_4 = 0; \quad U_5 = \frac{M_4}{h}.$$

Die Spannkkräfte in den Vertikalen ergeben sich aus $\Sigma V = 0$; die Schnitte werden parallel zu den Diagonalen geführt und treffen O_m ; V_m ; U_{m+1} . Da die Spannkkräfte O_m und U_{m+1} infolge ihrer horizontalen Richtung keine Komponenten in vertikaler Richtung haben, so ist V_m stets gleich der algebraischen Summe sämtlicher links vom Schnitt angreifenden äußeren

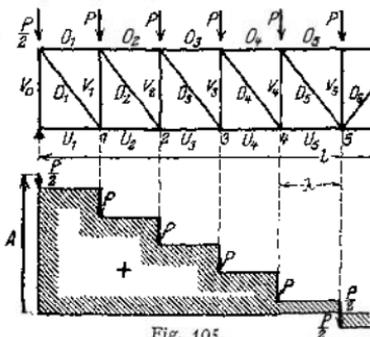


Fig. 105.

Kräfte, d. h. gleich der Querkraft (vgl. Festigkeitslehre S. 419). Die zweite Gleichgewichtsbedingung verlangt, daß die Richtung von V_m der von Q entgegengesetzt ist. Man erhält:

$$V_m = -Q_m.$$

Obwohl die Querkraft gerade in den Knotenpunkten ihre Größe ändert, ist doch kein Irrtum möglich, da ein Schnitt O_m , V_m , U_{m+1} stets die in den Knotenpunkten der oberen Gurting angreifenden Kräfte P unberücksichtigt läßt (Fig. 105).

Der Schnitt V_0 , U_1 zeigt, daß $V_0 = -A$ ist.

Man erhält demnach:

$$\begin{aligned} V_0 &= -A, \\ V_1 &= -Q_1 = -(A - P_1), \\ V_2 &= -Q_2 = -(A - P_1 - P_2), \\ V_3 &= -Q_3 = -(A - P_1 - P_2 - P_3), \\ V_4 &= -Q_4 = -(A - P_1 - P_2 - P_3 - P_4). \end{aligned}$$

Da die Querkraft im Punkte 5 ihr Vorzeichen wechselt, so ermittelt man V_5 zweckmäßig durch einen Schnitt O_5 , V_5 , O'_5 . Die Spannkkräfte O_5 und O'_5 haben keine Vertikalkomponenten, deshalb wird $V_5 = -P_6$.

Die Spannkkräfte in den Diagonalen ergeben sich aus $\Sigma V = 0$; die Vertikalkomponente der Spannkraft D_m ist $D_m \cdot \sin \varphi$. Da bei den vertikalen Schnitten weiter keine senkrechten Seitenkräfte der Spannkkräfte vorkommen, so wird:

$$D_m \cdot \sin \varphi - Q_m = 0,$$

also:

$$D_m = \frac{Q_m}{\sin \varphi}.$$

Man erhält:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{Q_1}{\sin \varphi} = \frac{1}{\sin \varphi} (A - P_1), \\ D_2 &= \frac{Q_2}{\sin \varphi} = \frac{1}{\sin \varphi} (A - P_1 - P_2), \\ D_3 &= \frac{Q_3}{\sin \varphi} = \frac{1}{\sin \varphi} (A - P_1 - P_2 - P_3), \\ D_4 &= \frac{Q_4}{\sin \varphi} = \frac{1}{\sin \varphi} (A - P_1 - P_2 - P_3 - P_4), \\ D_5 &= \frac{Q_5}{\sin \varphi} = \frac{1}{\sin \varphi} (A - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - P_5). \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie des Trägers sind die Spannkkräfte in den Stäben der rechten Hälfte gleich denen der linken Hälfte.

4. Bewegliche Lasten — Einflußlinien.

In den vorangegangenen Untersuchungen war stets die Annahme gemacht, die Last möge dauernd in einem Punkte eines Trägers angreifen. Daß dieser Fall in der Praxis nicht allein vorkommt, zeigt der Laufkran, bei dem die Laufkatze zwischen den Auflagern wandert. Die Raddrucke der Katze sind **bewegliche parallele Einzelkräfte**, die im allgemeinen senkrecht nach unten gerichtet sind. Soviel leuchtet ohne weiteres ein, daß die Spannkkräfte in Fachwerken und die Spannungen bei vollwandigen Trägern je nach der Stellung der Katze verschieden sein werden. Das Bauwerk selbst ist aber so zu dimensionieren, daß die **größten auftretenden Spannungen unter der zulässigen Beanspruchung bleiben**. Es ist demnach die Aufgabe zu lösen, die Laststellungen aufzusuchen, bei der irgendeine Unbekannte Z ihren Größtwert annimmt. Diese Unbekannte Z kann sein eine Auflagerreaktion, eine Querkraft, ein Biegemoment oder eine Stabspannkraft. Vorausgesetzt sei:

1. Die Unbekannte Z ist eine Funktion der Belastung P , es ist $Z = P \cdot \gamma$, worin γ einen von P unabhängigen Faktor bedeutet.

2. Man denkt die Lasten P nacheinander auf den Träger gebracht und addiert die Einzelwirkungen (Prinzip von der Summierung der Wirkungen). Sind P_1 , P_2 , $P_3 \dots$ die einzelnen Kräfte, γ_1 , γ_2 , $\gamma_3 \dots$ die zugehörigen Faktoren, so wird

$$Z = P_1 \cdot \gamma_1 + P_2 \cdot \gamma_2 + P_3 \cdot \gamma_3 + \dots$$

Auf Grund beider Voraussetzungen genügt es, wenn man den Einfluß einer Last $P = 1 \text{ t}$ auf die Größe Z untersucht. Kennzeichnet man die jeweilige

Stellung der Last $P = 1 \text{ t}$ durch ihre Entfernung x von einem Auflager, so wird $y = f(x)$, wenn man den Faktor y als Ordinate zur Abszisse x auffaßt, d. h. die Größe y senkrecht unter der Laststellung aufträgt. Die graphische Darstellung der Funktion $y = f(x)$ heißt **Einflußlinie**; sie gestattet, die Größe Z direkt unter dem Angriffspunkt der Last zu messen, wenn die Last $P = 1 \text{ t}$ beträgt. Die von der Einflußlinie und der x -Achse begrenzte Fläche heißt **Einflußfläche**.

Man betrachtet stets den Einfluß der Last $P = 1 \text{ t}$ links und rechts vom Schnitt und wird demnach zwei Zweige der Einflußlinien erhalten. Da die Größen Z positiv und negativ sein können, so werden die Einflußlinien positive und negative Beitragstrecken haben. Der Schnittpunkt der Einflußlinie mit der x -Achse heißt Nullpunkt oder Belastungsscheide. Daraus wird entnommen, daß alle Lasten, die sich auf der positiven Beitragstrecke befinden, die Größe Z im positiven Sinne beeinflussen. Sind gleichzeitig Lasten auf der negativen Beitragstrecke, so werden diese Lasten die Größe Z verringern. Soll demnach der größte positive bzw. negative Einfluß ermittelt werden, so dürfen sich die Lasten nur auf der einen oder der anderen Beitragstrecke befinden. Die Einflußlinie zeigt also, welche Teile des Trägers belastet werden müssen, damit die Größe Z ihren größten Wert annimmt — ungünstigste Laststellung.

Die Einflußflächen unterscheiden sich grundlegend von den Querkraft- und Momentenflächen, da sie keinen wirklich bestehenden Belastungszustand darstellen, sondern nur angeben, wie eine wandernde Last $P = 1 \text{ t}$ auf ihrem Wege eine Größe Z beeinflusst. So gehört z. B. zu jedem Stabe eines Fachwerkes eine Einflußlinie; das Moment in einem beliebigen Punkte eines Trägers erfordert eine Einflußlinie.

Bei jedem Träger muß untersucht werden, an welcher Stelle die Last angreifen kann. Ist beispielsweise der Obergurt eines Trägers als Fahrbahn ausgebildet — wie es bei den Kranträgern der Fall ist — so kann die Last P an jeder beliebigen Stelle einen Einfluß auf die Größe Z ausüben — unmittelbare Belastung. Wird dagegen die Last durch Zwischenkonstruktionen — Querträger — auf einzelne Punkte (Knotenpunkte) des Trägers übertragen, so ist nur eine Anzahl von Punkten vorhanden, an denen die Last $P = 1 \text{ t}$ angreifen kann — mittelbare Belastung, wie sie im allgemeinen bei Brücken vorkommt.

a) Einflußlinien des einfachen Balkens.

1. Einflußlinie für die Auflagerreaktion A — **A-Linie** (Fig. 106). Für eine beliebige Stellung der Last $P = 1 \text{ t}$ wird

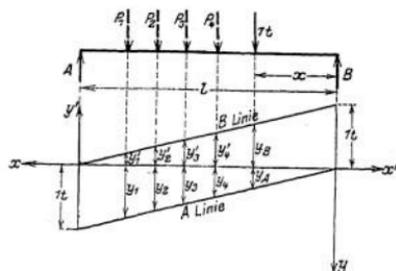


Fig. 106.

$$A = \frac{1}{l} \cdot x = y_A.$$

Das ist die Gleichung einer Geraden durch den Koordinatenanfangspunkt mit der Richtungskonstanten $\frac{1}{l}$. Trägt man senkrecht unter A die Größe 1 t unter Zugrundelegung eines Kräftemaßstabes ab, so ist die Verbindungslinie des Endpunktes mit dem Koordinatenanfangspunkt die Einflußlinie für die Auflagerreaktion A . Die Linie zeigt, daß die Vollbelastung die größte Reaktion A hervor-

bringt, da nur eine positive Beitragstrecke vorhanden ist. Befinden sich die Lasten P in der gezeichneten Stellung auf dem Balken, dann ist

$$A = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + P_3 \cdot y_3 + P_4 \cdot y_4.$$

2. In gleicher Weise erhält man als Gleichung der Einflußlinie für die Auflagerreaktion B — d. h. der **B-Linie** —

$$B = y_B = \frac{1}{l} \cdot x',$$

in diesem Falle ist A der Koordinatenanfangspunkt und x' zählt nach rechts. Derselbe Lastenzug ruft die Reaktion B hervor und zwar ist

$$B = P_1 \cdot y'_1 + P_2 \cdot y'_2 + P_3 \cdot y'_3 + P_4 \cdot y'_4.$$

Der Träger sei mit der Streckenlast p kg/m belastet (Fig. 107). Dann darf man die Belastung des Streckenelementes dx als Einzellast auffassen; es wird

$$dA = p \cdot dx \cdot y,$$

$$A = p \int_{x_1}^{x_2} y \cdot dx.$$

$\int_{x_1}^{x_2} y \cdot dx$ ist aber gleich dem Inhalt der Einflußfläche zwischen x_1 und x_2 , bezeichnet man ihn mit F , so wird

$$A = p \cdot F.$$

Man ist demnach imstande, auch den Einfluß gleichförmiger Lastverteilung mit Hilfe von Einflußlinien zu untersuchen.

3. Das **A-Polygon**. Wandert ein Lastenzug über einen Träger, so ist es häufig von Vorteil, senkrecht unter der ersten Last die Größe Z zu messen, die infolge der gesamten Belastung auftritt. In Fig. 108 sei der Lastenzug eine Laufkatze mit den Raddrücken P und P' . Mit Hilfe der A -Linien (Fig. 108 b) ermittelt man

$$A = P \cdot y + P' \cdot y',$$

$$A = P \cdot \frac{1}{l} \cdot x + P' \cdot \frac{1}{l} \cdot x'.$$

A stellt sich dar als Summe zweier Funktionen, von denen das erste Glied eine gerade Linie durch den Koordinatenanfangspunkt darstellt, deren Richtungskonstante $\frac{P}{l}$ ist. Das zweite Glied ist ebenfalls eine Gerade durch den Koordinatenanfangspunkt, wenn man ihn um a nach links verschoben annimmt; ihre Richtungskonstante ist $\frac{P'}{l}$ (Figur 108 c). Die Addition beider ergibt

den gebrochenen Linienzug der Figur 108 d, der die Eigenschaft hat, daß man senkrecht unter der ersten Last die von dem gesamten Lastenzug her-

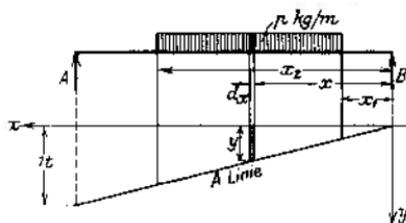


Fig. 107.

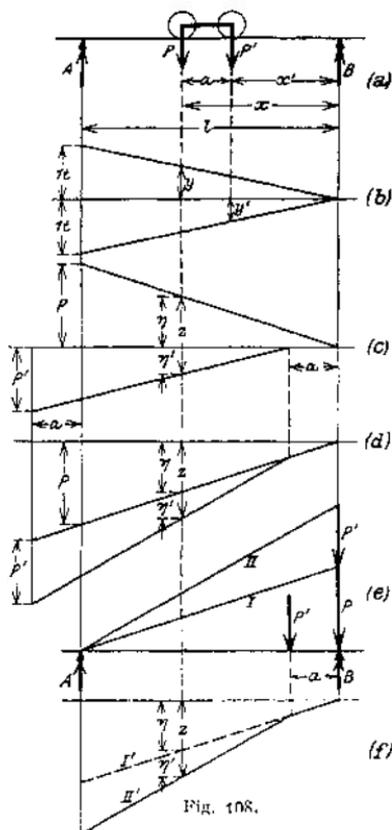


FIG. 108.

vorgeschlagene Auflagerreaktion A messen kann; nennt man diese Ordinate z , so ist $A = z$ für die gezeichnete Lage der Katze.

Den gebrochenen Linienzug der Fig. 108 d kann man auch in folgender Weise entstanden denken: Man fährt den Lastenzug in umgekehrter Richtung von A bis B vor (Fig. 108 e), so daß P in B steht, und zeichnet senkrecht über B den Kräftezug. Zieht man jetzt aus A als Pol die Polstrahlen I, II und entwirft dazu das Seileck I', II' , so ist das Seileck die Einflußlinie, da nach der Konstruktion

$$z = \eta + \eta' = \frac{P}{l} \cdot x + \frac{P'}{l} \cdot (x - a)$$

ist. Dieses Verfahren bleibt auch dann richtig, wenn mehr als zwei Kräfte über den Träger wandern; die Seillinie heißt nach Winkler **A-Polygon**. In Fig. 109 ist das A-Polygon für einen beliebigen Lastenzug P gezeichnet. Die Seileckordinate unter der ersten Last gibt die Größe der Auflagerreaktion A , wenn der Lastenzug bis in die gezeichnete Lage vorgefahren ist.

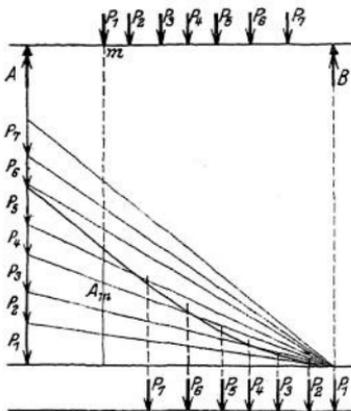


Fig. 109.

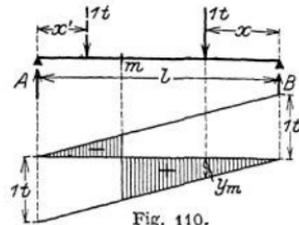


Fig. 110.

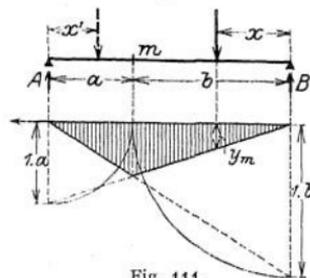


Fig. 111.

4. Die Einflußlinie für die Querkraft in einem Punkte m eines Trägers — **Q-Linie** (Fig. 110). Man denkt sich den Träger in m durchgeschnitten und betrachtet den Einfluß der Lasten rechts vom Schnitt auf die Querkraft Q_m . Solange $P = 1 t$ rechts von m angreift, ist die Querkraft als Summe sämtlicher Kräfte links vom Schnitt gleich A , da A die einzige links von m angreifende Kraft ist. Die Einflußlinie für Q wird demnach mit der A -Linie zusammenfallen, jedoch nur zwischen m und B ; tritt die Last $P = 1 t$ nach links über m hinaus, so hat die Gleichung $Q = A$ keine Gültigkeit mehr. In diesem Falle ist es zweckmäßig, die Querkraft von der rechten Trägerseite zu berechnen; es wird $Q = -B$, da nunmehr B die Resultante sämtlicher Kräfte rechts vom Schnitt ist. Die Einflußlinie für Q fällt demnach mit der B -Linie zusammen, jedoch nur zwischen A und m . Die Summe der Ordinaten der Q -Linie ist in Fig. 110 durch Strichlegung hervorgehobene Fläche, sie hat eine positive und eine negative Beitragstrecke; die Lastscheide liegt senkrecht unter m . Soll Q_{\max} für den Querschnitt m bestimmt werden, so darf nur die positive Beitragstrecke belastet werden, jede gleichzeitige Belastung der negativen Beitragstrecke vermindert die Größe von Q . Die Einflußfläche läßt deutlich erkennen, daß die teilweise Belastung des Trägers die ungünstigere ist.

5. Die Einflußlinie für das Moment in einem Punkte m des Trägers — **M-Linie** (Fig. 111). Man denkt sich wieder den Träger in m durchgeschnitten

und betrachtet zunächst den Einfluß der Lasten rechts vom Schnitt auf das Moment M_m . Es ist

$$M_m = y_m = A \cdot a = \frac{1}{l} \cdot x \cdot a = 1 \cdot a \cdot \frac{x}{l}.$$

$y_m = 1 \cdot a \cdot \frac{x}{l}$ ist eine gerade Linie durch den Koordinatenanfangspunkt, deren Richtungskonstante $\frac{1 \cdot a}{l}$ ist. Trägt man senkrecht unter A die Größe $1 \cdot a$ auf, so ist die Verbindungslinie ihres Endpunktes mit dem Anfangspunkt die Einflußlinie für M_m . Gültig ist sie zwischen m und B , da das Gesetz $y_m = 1 \cdot a \cdot \frac{x}{l}$ nur gilt, solange sich die Last auf dem rechten Trägerteil befindet. Tritt sie über m hinaus, so wird

$$M_m = B \cdot b = 1 \cdot b \cdot \frac{x'}{l} = y'_m.$$

Für $x' = 0$ (von A aus gerechnet) wird $y'_m = 0$; für $x' = l$ wird $y'_m = 1 \cdot b$. Trägt man demnach $1 \cdot b$ senkrecht unter B auf und verbindet den Endpunkt mit A , so erhält man den zweiten Zweig der M -Linie, der für Lasten zwischen A und m gültig ist, da nur für diese Belastung die Gleichung

$$y'_m = 1 \cdot b \cdot \frac{x'}{l}$$

besteht. Beide Zweige der Einflußlinie schneiden sich senkrecht unter m , da für $x = b$, $y_m = \frac{ab}{l}$ und für $x' = a$, $y'_m = \frac{ab}{l}$ werden.

Die durch Strichelung hervorgehobene Einflußfläche zeigt, daß die Vollbelastung des Trägers die ungünstigste ist.

b) Die Einflußlinien des Freitragers oder Kragträgers.

A ist gleich $P = 1 \text{ t} = \text{konst.}$; desgleichen Q_A ; beide Linien sind Parallelen zur x -Achse in der Entfernung 1 t (Fig. 112). Für das Spannungsmoment M_A wird

$$M_A = y_a = 1 \cdot x.$$

Das ist eine gerade Linie durch den Anfangspunkt mit der Richtungskonstanten 1, d. h. sie hat eine Neigung von 45° .

Für einen beliebigen Punkt m des Freitragers (Fig. 113) wird unter Zugrundelegung des gezeichneten Achsenkreuzes

$$Q_m = P = 1 = \text{konst.}$$

durch eine Parallele zur x -Achse in der Entfernung 1 t dargestellt; diese Q -Linie gilt für Lasten rechts vom Schnitt. Steht die Last links von m , so ist $Q_m = 0$. Das Moment in m infolge $P = 1 \text{ t}$ wird

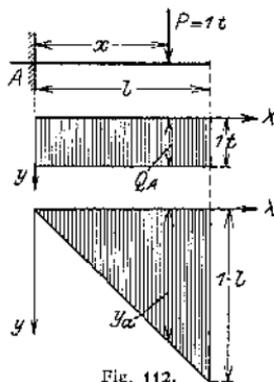


Fig. 112.

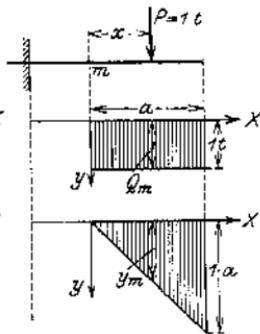


Fig. 113.

$$M_m = 1 \cdot x = y_m.$$

Die graphische Darstellung von $y_m = f(x)$ gibt eine unter 45° geneigte Gerade durch den Anfangspunkt. Für Lasten links von m wird $M_m = 0$.

c) Die Einflußlinien für den überhängenden Träger.

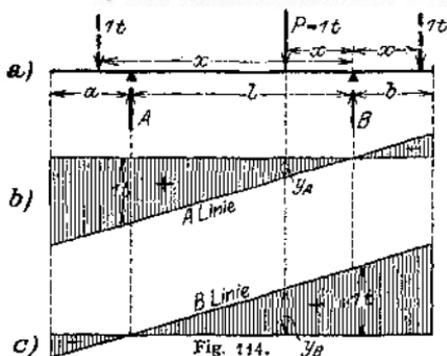


Fig. 114.

Innerhalb der Spannweite entsprechen die *A*- und *B*-Linie der Fig. 106. Wandert die Last $P = 1 t$ nach links über *A* hinaus, so wird

$$A = \frac{1}{l} \cdot x,$$

d. h. die *A*-Linie gilt auch über *A* hinaus. Wandert die Last $P = 1 t$ nach rechts über *B* hinaus, so wird

$$A = -\frac{1}{l} \cdot x,$$

d. h. die *A*-Linie gilt auch über *B* hinaus, doch werden die Ordinaten rechts von *B* negativ. Soll $\max A$ bestimmt werden, so darf der Träger nur bis *B* belastet werden. In gleicher Weise erhält man die *B*-Linie (Fig. 114). Die Einflußlinie für die Querkraft in einem Punkte *m* innerhalb der Spannweite *AB* ergibt sich wie in Fig. 110 aus beiden Linien (Fig. 115). Liegt der Punkt *m* auf überhängenden Teilen, so ist

$$Q_m = 1 t = \text{konst.}$$

für alle Lasten links von *m*; dagegen ist $Q_m = 0$ für alle Lasten rechts von *m* (Fig. 115). Das gleiche gilt für den rechten Kragarm.

Die Einflußfläche der Fig. 115 zeigt, welche Teile des Trägers belastet werden müssen, damit die größte Querkraft im Punkte *m* auftritt.

Die Einflußlinie für das Moment in einem beliebigen Punkte *m* innerhalb der Spannweite *AB* zeigt Fig. 116. Solange die Last innerhalb *AB* wandert, liegt der Fall der Fig. 111 vor. Tritt die Last über *A* nach links hinaus, so wird

$$\begin{aligned} M_m &= -1(a+x') + A \cdot a, \\ &= -1 \cdot (a+x') + \frac{1}{l}(l+x') \cdot a, \\ &= -\frac{x'}{l}(l-a) = -\frac{1 \cdot b \cdot x'}{l}, \end{aligned}$$

d. h. der linke Zweig der *M*-Linie gilt auch über *A* hinaus, die Ordinaten werden negativ. Das gleiche gilt für den rechten Zweig der *M*-Linie.

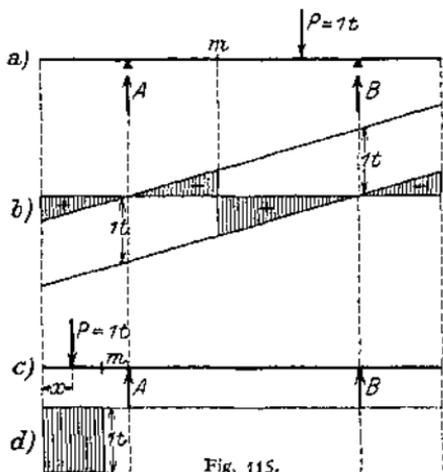


Fig. 115.

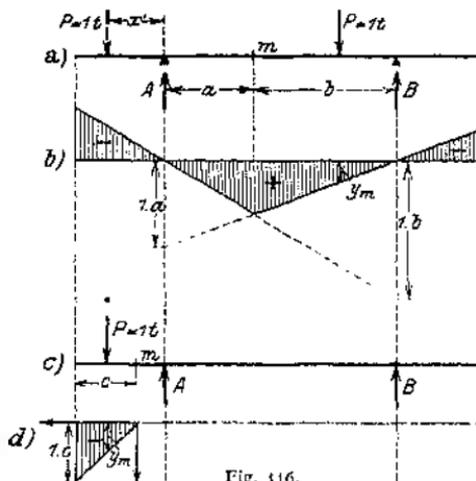


Fig. 116.

Für einen Punkt m der Kragarme (Fig. 116) ist Fig. 113 sinngemäß anzuwenden. Die M -Linie ist in Fig. 116 dargestellt.

d) Einflußlinien der Fachwerk-Stabkräfte.

I. Mit Hilfe des Culmannschen Kräfteplanes. Nach den Verfahren von Culmann und Ritter (S. 314) wurde der Träger durch einen Schnitt in zwei Teile zerlegt, und zwar wurde der Schnitt so geführt, daß nur drei Stäbe getroffen wurden. An den Schnittstellen wurden in Richtung der Stabachse die Spannkraften als äußere Kräfte angebracht und ihre Größe und Richtung aus der Bedingung bestimmt, daß der abgetrennte Trägerteil unter dem Einfluß sämtlicher an ihm angreifenden Kräfte im Gleichgewicht sein soll. In Fig. 117 ist der Schnitt durch das dritte Feld des Trägers gelegt; man betrachtet zunächst den Einfluß von Lasten rechts vom Schnitt. Für diesen Fall ist A die einzige äußere Kraft, die am linken abgetrennten Teil wirkt; man zerlegt sie nach dem Culmannschen Verfahren in die Seitenkräfte O_r , D_r , U_r und zeichnet diesen Kräfteplan für $A = 1 t$. Dann ruft eine Auflagerreaktion $A = \frac{1}{l} \cdot x$ Spannkraften hervor, die $\frac{x}{l}$ mal so groß sind.

Ist O_r die Spannkraft in dem Obergurtstabe O infolge $A = 1 t$, dann wird O für $A = \frac{x}{l}$

$$O = O_r \cdot \frac{x}{l} = y_r.$$

$A = \frac{x}{l}$ ist aber Ordinate der Einflußlinie für A . Multipliziert man demnach diese Ordinaten mit O_r , so erhält man die O -Linie. Graphisch erhält man die O -Linie, wenn man O_r senkrecht unter A aufträgt und den Endpunkt mit dem Koordinatenanfangspunkt verbindet. Die Linie ist brauchbar, solange A die einzige rechts vom Schnitt wirkende Kraft ist; d. h. die Last $P = 1 t$ darf bis zum Knotenpunkt $(m + 1)$ vorrücken.

Graphisch erhält man die O -Linie, wenn man O_r senkrecht unter A aufträgt und den Endpunkt mit dem Koordinatenanfangspunkt verbindet. Die Linie ist brauchbar, solange A die einzige rechts vom Schnitt wirkende Kraft ist; d. h. die Last $P = 1 t$ darf bis zum Knotenpunkt $(m + 1)$ vorrücken.

Beindet sich die Last links vom durchschnittenen Felde, so ist B die einzige am rechten abgetrennten Teil wirkende Kraft; man zerlegt sie ebenfalls

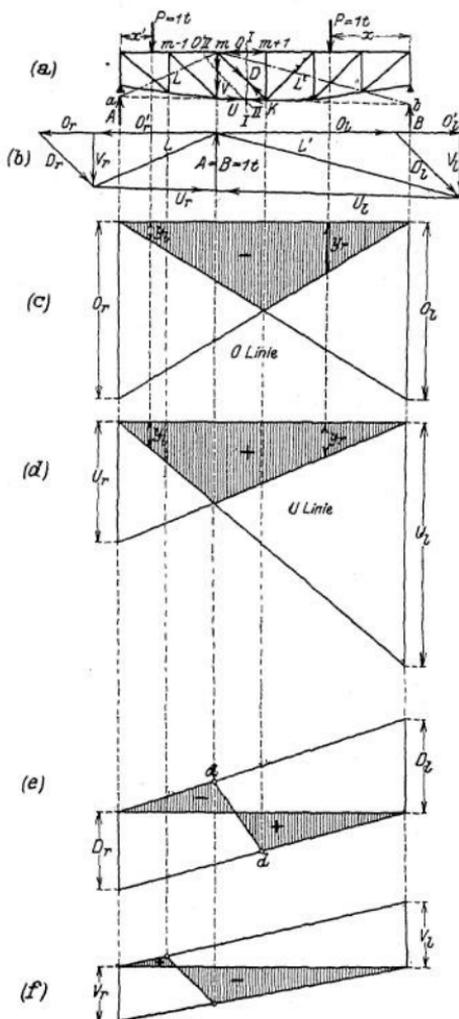


Fig. 117.

nach dem Culmannschen Verfahren und erhält für $B = 1 \text{ t}$ die Spannkkräfte O_i, D_i, U_i der Größe und Richtung nach. Da die Last $P = 1 \text{ t}$ eine Auflagerreaktion $B = \frac{x'}{l}$ hervorruft, so sind die Spannkkräfte infolge $P = 1 \text{ t}$ $\frac{x'}{l}$ mal so groß; es wird also

$$O = O_i \cdot \frac{x'}{l} = y_i.$$

$B = \frac{x'}{l}$ ist Ordinate der B -Linie, aus der sich die Ordinaten der O -Linie durch Multiplikation mit O_i ergeben (Fig. 117). Graphisch dargestellt ist $y_i = O_i \cdot \frac{x'}{l}$ eine Gerade durch den Anfangspunkt A mit der Richtungskonstanten $\frac{O_i}{l}$; man erhält sie, wenn man senkrecht unter B die Größe O_i aus dem Culmannschen Kräfteplan aufträgt und den Endpunkt mit A verbindet. Die O -Linie ist brauchbar für die Belastungsstrecke $A(m+1)$. Die beiden Zweige der O -Linie $y_r = f(x)$ und $y_l = f(x')$ schneiden sich senkrecht unter $(m+1)$. Aus dem Culmannschen Kräfteplan ersieht man auch, daß der Stab O für sämtliche Laststellungen Druckspannungen erfährt; es empfiehlt sich, in die Einflußfläche das Minuszeichen einzutragen. Die Einflußfläche zeigt, daß die Vollbelastung für den Stab O am ungünstigsten ist.

Die Einflußlinie für die Stabspannkraft U erhält man in gleicher Weise; für Lasten rechts vom Schnitt sind die Ordinaten der U -Linie gleich den mit U_r multiplizierten Ordinaten der A -Linie, wobei man mit U_r die Spannkraft U infolge $A = 1 \text{ t}$ bezeichnet. Für Lasten links vom Schnitt sind die Ordinaten der U -Linie gleich den mit U_l multiplizierten Ordinaten der B -Linie, wobei man U_l dem Culmannschen Kräfteplan entnimmt. Trägt man demnach senkrecht unter A die Größe U_r und senkrecht unter B die Größe U_l auf, so geben die Verbindungslinien der Endpunkte mit den Punkten B bzw. A die beiden Zweige der U -Linie, die sich senkrecht unter m schneiden. Der Kräfteplan zeigt, daß der Stab U für sämtliche Laststellungen gezogen wird; die Einflußfläche (Fig. 117) erhält das Vorzeichen $+$.

Bei dem Entwerfen der Einflußlinie für die Stabspannkraft D geht man in gleicher Weise vor; doch ist zu beachten, daß D für Lasten links vom Schnitt gedrückt, für Lasten rechts vom Schnitt gezogen wird, wie sich aus dem Culmannschen Kräfteplan ergibt. Man benutzt für Lasten links vom Schnitt die mit D_l multiplizierte B -Linie und trägt D_l senkrecht unter B nach oben ab; die Verbindungslinie des Endpunktes mit A gibt die D -Linie, sie ist brauchbar für Lasten zwischen A und m . Wandert die Last $P = 1 \text{ t}$ von B bis $(m+1)$, so ist die D -Linie gleich der mit D_r multiplizierten A -Linie; man zeichnet sie, indem man senkrecht unter A die Größe D_r abträgt und ihren Endpunkt mit B verbindet. Da D_r für $A = 1 \text{ t}$ positiv wird, so trägt man D_r senkrecht nach unten ab, der Stab D wird gezogen. Die D -Linie ist brauchbar für Lasten zwischen B und $(m+1)$. Innerhalb des Feldes muß die D -Linie geradlinig verlaufen, da D nur in der ersten Potenz von x abhängig sein kann. Verbindet man demnach die beiden Punkte d und d' geradlinig, so erhält man die Einflußfläche für D ; sie hat positive und negative Beitragstrecken und zeigt, daß die teilweise Belastung des Trägers die ungünstigste ist.

Zur Ermittlung der Einflußlinie für die Stabspannkraft V legt man den Schnitt O', V, U durch den Träger. Solange sich die Last $P = 1 \text{ t}$ rechts vom Schnitt befindet, ist A die einzige am linken abgetrennten Trägerteil wirkende äußere Kraft; man zerlegt sie mit Hilfe der Culmannschen Geraden L nach O', V, U und zeichnet den Kräfteplan für $A = 1 \text{ t}$ (Fig. 117). Ist V_r die diesem Kräfteplan entnommene Spannkraft infolge $A = 1 \text{ t}$, so wird

$$V = V_r \cdot \frac{x}{l} = y_r,$$

für eine Auflagerreaktion $A = \frac{x}{l}$. Die V -Linie ist gleich der mit V_r multiplizierten A -Linie und zwar wird der Stab V gedrückt für $A = 1t$, also für sämtliche Lasten rechts vom Schnitt. Brauchbar ist die V -Linie, solange A die einzige links vom Schnitt angreifende äußere Kraft ist, d. h. zwischen B und m .

Für Lasten links vom Schnitt ist B die einzige am rechten Trägerende angreifende äußere Kraft; man zeichnet also mit Hilfe der Culmannschen Geraden L' den Kräftezug B , Q'_1 , V_1 , U_1 und erhält V positiv, der Stab wird gezogen. Für

$$B = \frac{x'}{l} \text{ wird}$$

$$V = V_1 \cdot \frac{x'}{l} = y_1,$$

also eine mit V_1 multiplizierte B -Linie, die zwischen A und $(m-1)$ brauchbar ist. Da auch V eine lineare Funktion von x ist, verläuft die V -Linie zwischen m und $(m-1)$ geradlinig. Die Einflußfläche ist in Fig. 117 dargestellt und hat positive und negative Beitragstrecken; es ist demnach eine Teilbelastung des Trägers am ungünstigsten.

Die Ordinaten einflußlinien werden im Kräftemaßstab gemessen. Die Entscheidung, ob Zug- oder Druckkräfte auftreten, ergibt sich aus dem Culmannschen Kräfteplan.

Da bei einer Untersuchung eines Fachwerkträgers jeder Stab eine Einflußlinie verlangt, so empfiehlt es sich, zwei Cremonasche Kräftepläne für $A = 1t$ bzw. $B = 1t$ zu entwerfen; aus den so erhaltenen Werten lassen sich die Einflußlinien für die Stabspannkraft nach Fig. 117 in einfacher Weise zeichnen.

2. mit Hilfe des Ritterschen Verfahrens. Nach dem Ritterschen Verfahren (S. 318) stellt man für den Schnittpunkt zweier Stabachslinien die dritte Gleichgewichtsbedingung auf und erhält im allgemeinen eine Gleichung, in der die Spannkraft des dritten geschnittenen Stabes als Unbekannte vorkommt.

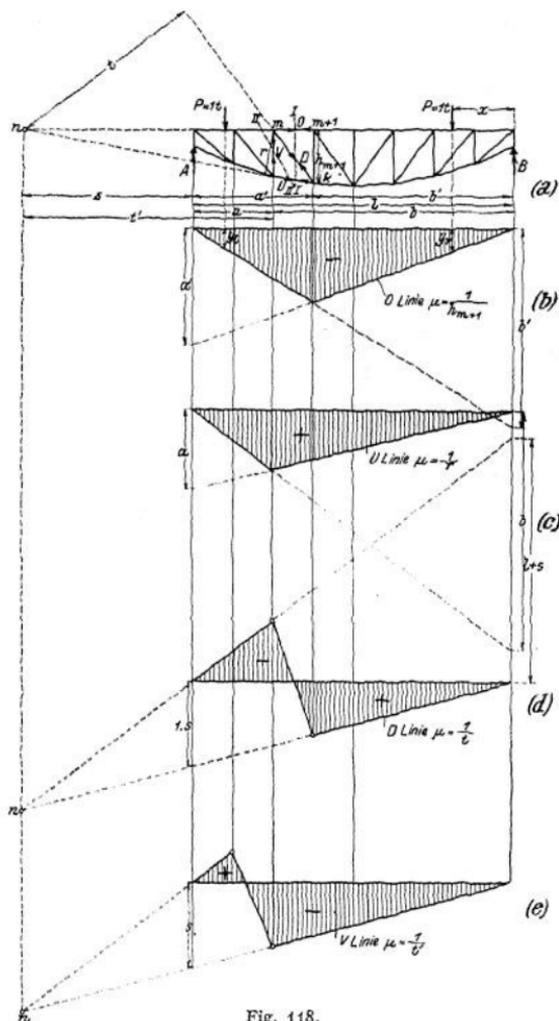


Fig. 118.

So wird für den Schnitt $I-I$ (Fig. 118) mit k als Drehpunkt

$$(k) \quad M_k + O \cdot h_{m+1} = 0,$$

$$O = -\frac{M_k}{h_{m+1}} = -\frac{1}{h_{m+1}} (M_k).$$

Die Ordinaten der **O-Linie** sind gleich den mit $\frac{1}{h_{m+1}}$ multiplizierten Ordinaten der M_k -Linie (vgl. S. 331), wobei zu beachten ist, daß O negativ ist. Der Faktor $\frac{1}{h_{m+1}}$ heißt Multiplikator oder Verwandlungsziffer; es ist üblich, ihn in der Form $\mu = \frac{1}{h_{m+1}}$ an die Einflußlinie zu schreiben. Die M -Linie entwirft man nach der Fig. 111, S. 328.

Für m als Drehpunkt wird

$$(m) \quad M_m - U \cdot r = 0,$$

$$U = \frac{M_m}{r} = \frac{1}{r} \cdot (M_m).$$

Die Ordinaten der **U-Linie** sind gleich den mit $\frac{1}{r}$ multiplizierten Ordinaten der M_m -Linie, die entsprechend der Fig. 111 entworfen wird. Die Verwandlungsziffer ist $\mu = \frac{1}{r}$; das Vorzeichen positiv (Fig. 118).

Zur Berechnung der Spannkraft D wählt man den Schnittpunkt n der Gurtstäbe als Drehpunkt und erhält

$$(n) \quad M_n + D \cdot t = 0,$$

$$D = -\frac{M_n}{t} = \frac{1}{t} (-M_n).$$

Da links vom Schnitt nur A angreift, wenn der rechte Trägerteil belastet ist, so wird

$$M_n = -A \cdot s,$$

folglich

$$D = \frac{s}{t} \cdot (A \cdot s).$$

Trägt man demnach senkrecht unter A die Größe $1 \cdot s$ auf, so gibt die Verbindungslinie ihres Endpunktes mit B den Zweig der **D-Linie**, wenn man $\frac{1}{t}$ als Verwandlungsziffer einführt. Sie ist brauchbar, solange A die einzige am linken abgetrennten Trägerteil wirkende Kraft ist, d. h. bei Belastungen zwischen B und $(m+1)$. Befinden sich Lasten links vom Schnitt, so ist B die einzige rechts von $I-I$ angreifende äußere Kraft. Mit n als Drehpunkt wird

$$(n) \quad B \cdot (l + s) + D \cdot t = 0,$$

$$D = -B \cdot \frac{l + s}{t} = -\frac{1}{t} \cdot B(l + s).$$

Multipliziert man die Ordinaten der B -Linie mit $(l + s)$, trägt man also senkrecht unter B die Größe $1 \cdot (l + s)$ nach oben ab, so erhält man in der Verbindungslinie ihres Endpunktes mit A den linken Zweig der D -Linie, wenn man $\mu = \frac{1}{t}$ als Verwandlungsziffer einführt. Die Linie ist brauchbar, solange B die einzige am rechten Trägerteil wirkende Kraft ist, d. h. bei Belastungen zwischen A und m . Innerhalb des geschnittenen Feldes verläuft die Einflußlinie für D geradlinig (Fig. 118).

Zur Ermittlung der Spannkraft V schneidet man durch O' , V , U und wählt den Schnittpunkt n der Gurtstäbe als Drehpunkt. Für Lasten rechts vom Schnitt greift allein A als äußere Kraft am linken Trägereil an, so daß

$$(n) A \cdot s + V \cdot t' = 0.$$

$$V = -\frac{1}{t'} \cdot A \cdot s.$$

Die V -Linie stellt sich demnach als eine mit s multiplizierte A -Linie dar, wenn man $\frac{1}{t'}$ als Verwandlungsziffer einführt. Man trägt s senkrecht unter A ab, dann ist die Verbindungslinie des Endpunktes mit B die D -Linie mit $\mu = \frac{1}{t'}$, die Ordinaten sind negativ; sie ist brauchbar, solange A die einzige links angreifende äußere Kraft ist, d. h. zwischen B und m .

Für Lasten links von $II-II$ berechnet man V vom rechten Trägereil aus mit B als äußerer Kraft. Wählt man wieder n als Drehpunkt, so wird

$$(n) B \cdot (l + s) - V \cdot t' = 0;$$

$$V = B \cdot \frac{l + s}{t'} = \frac{1}{t'} \cdot B \cdot (l + s).$$

Der linke Zweig der V -Linie ist demnach eine mit $(l + s)$ multiplizierte B -Linie, wenn man $\frac{1}{t'}$ als Verwandlungsziffer einführt. Die Ordinaten sind positiv.

Trägt man senkrecht unter B die Größe $1 \cdot (l + s)$ ab und verbindet den Endpunkt mit A , so erhält man die V -Linie mit $\mu = \frac{1}{t'}$; sie ist brauchbar, solange

die Gleichung (n) besteht, also für Lasten zwischen A und $(m - 1)$. Da die V -Linie innerhalb des Feldes geradlinig verlaufen muß, so ergibt sich die Einflußfläche für die Spannkraft V aus Fig. 118.

3. Sonderfälle.

1. Bei dem Parallelträger schneiden sich die Gurtstäbe nicht, die Momentengleichung zur Ermittlung von D und V ist nicht möglich; es empfiehlt sich deshalb die Anwendung des Culmannschen Kräfteplanes (Fig. 119). Die Zeichnung vereinfacht sich in diesem Falle insofern, als die Culmannschen Geraden L und L' durch A bzw. B hindurchgehen. Wählt man den Kräftemaßstab $h \text{ cm} = 1 \text{ t}$, so läßt sich die Zerlegung schnell ausführen, da die Maße dem Trägernetz entnommen werden können. Die einzelnen Einflußlinien werden in gleicher Weise entwickelt wie in Fig. 117. Für die Ermittlung der Spannkraften auf rechnerischem Wege sei daran erinnert, daß $V = -Q$ und

$$D = \frac{1}{\sin \varphi} \cdot Q \text{ ist.}$$

Die V -Linie ist also gleich der negativen Q -Linie, die D -Linie gleich der Q -Linie mit der Verwandlungsziffer

$$\mu = \frac{1}{\sin \varphi}.$$

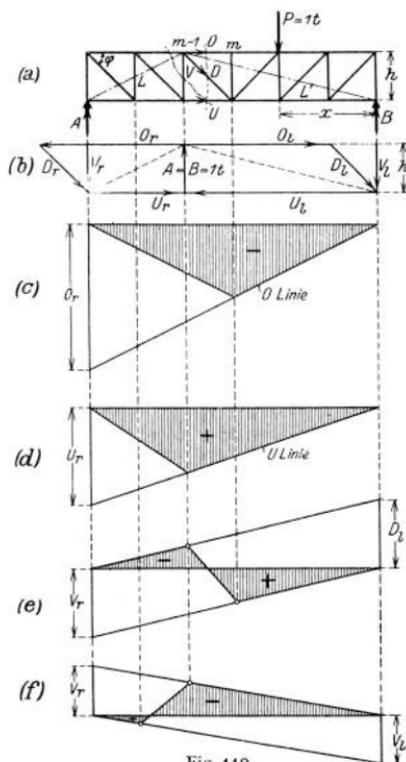


Fig. 119.

2. Liegt der Fall vor, daß sich ein Schnitt, der drei Stäbe trifft, nicht führen läßt (Fig. 120), so schneidet man den fraglichen Knotenpunkt heraus und bestimmt V_m graphisch nach Cremona oder rechnerisch aus $\Sigma V = 0$. Dann wird:

$$\begin{aligned} V_m &= -U_m \cdot \sin \varphi_m + U_{m+1} \cdot \sin \varphi_{m+1} \\ &= -\frac{M_m}{r_m} \cdot \sin \varphi_m + \frac{M_m}{r_{m+1}} \cdot \sin \varphi_{m+1}, \end{aligned}$$

wenn man mit r_m die Entfernung des Punktes m' von U_m und mit r_{m+1} die Entfernung des Punktes m' von U_{m+1} bezeichnet. Aus Fig. 120 entnimmt man:

$$r_m = h_m \cdot \cos \varphi_m; \quad r_{m+1} = h_m \cdot \cos \varphi_{m+1},$$

so daß:

$$V_m = -\frac{M_m \sin \varphi_m}{h_m \cdot \cos \varphi_m} + \frac{M_m \cdot \sin \varphi_{m+1}}{h_m \cdot \cos \varphi_{m+1}}; \quad V = -M_m \frac{\operatorname{tg} \varphi_m - \operatorname{tg} \varphi_{m+1}}{h_m};$$

es ist also die V -Linie eine negative M -Linie, deren Verwandlungsziffer

$$\mu = \frac{\operatorname{tg} \varphi_m - \operatorname{tg} \varphi_{m+1}}{h_m}$$

ist. Man entwirft die M -Linie in bekannter Weise, indem man senkrecht unter A die Größe $1 \cdot a$ aufträgt und den Endpunkt mit B verbindet. Bei dem Aufzeichnen des linken Zweiges der Einflußlinie beachtet man, daß sich beide Zweige senkrecht unter m schneiden müssen. Die Einflußfläche ist negativ.

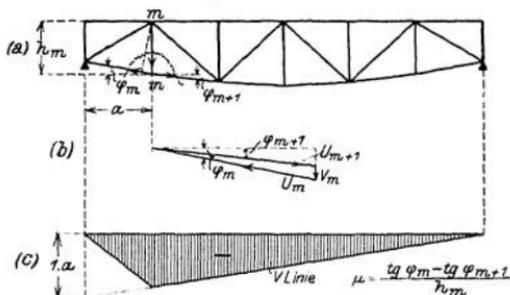


Fig. 120.

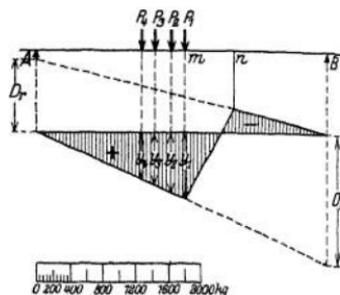


Fig. 121.

Maßstab und praktische Verwertung¹⁾.

Eine Einflußlinie kann nur dann verwertet werden, wenn der Maßstab ihrer Auftragung bekannt und nach abzulesen ist. Für die praktische Verwertung empfiehlt es sich, die einzelnen Ordinaten unter der Laststellung unmittelbar in mm abzulesen und neben jede Einflußlinie, bzw. neben jede Gruppe von Einflußlinien deutlich sichtbar als Maßstab zu schreiben:

$$1 \text{ mm} = a = b \text{ kg/cm usw.}$$

Für die richtige Wahl des Maßstabes ist ausschlaggebend:

1. Das Größenverhältnis der Bauwerksabmessung in Zeichnung und Wirklichkeit (Längenmaßstab der Darstellung).

2. Die Einheit, in der die Lasten auf dem Bauwerk erscheinen. Diese Einheit wird zweckmäßig dem Maßstab der Zeichnung der Einflußlinien zugrunde gelegt. Wandert z. B. eine Last von P t über einen Kranträger, so wählt man 1 t als wandern die Einzellast.

Handelt es sich beispielsweise um die Auftragung einer M -Linie, so ist, wie in Fig. 111, S. 328 angegeben wurde, der Abstand a senkrecht unter A von der x -Achse aus abzutragen. Dieses Maß braucht nicht einfach aus der Zeichnung abgegriffen zu werden, sondern es kann selbstverständlich ein beliebiger Teil dieser Strecke an ihrer Stelle aufgetragen werden. Der Maßstab folgt aus der Überlegung, daß die Anzahl der von der x -Achse aus abgetragenen mm den tatsächlichen Abstand des Punktes m vom Auflager in der wirklichen Bauwerksabmessung darstellt. Beträgt dieser Abstand z. B. 4 m, und werden in der Darstellung von der x -Achse aus 4 cm abgetragen, so stellt jedes mm = 0,1 m dar, und wenn die Einheit der Lasten außerdem in t gegeben ist, so würde das durch die aufgetragene Strecke dargestellte Moment $1 \text{ t} \cdot 0,1 \text{ m} = 0,1 \text{ m t}$ bedeuten. Es müßte also daneben stehen: 1 mm = 0,1 m t. Diese Maßstabsüberlegungen sollten von vornherein mit möglichster Schärfe festgelegt und deutlich gemacht werden, denn ein nachträgliches Wiederherstellen des Maßstabes, nachdem alle Einflußlinien gezeichnet sind, ist sehr lästig.

Häufig wird eine Verwandlungsziffer an die Einflußlinie geschrieben mit der Absicht, den Schlußwert nachher mit ihr zu multiplizieren.

Handelt es sich z. B. um die Einflußlinie einer Spannkraft (Fig. 121) etwa $D = \frac{1}{l} \cdot A \cdot s$, so ist der Maßstab der $M_m = A \cdot s$ -Linie in mt gegeben. Durch die Verwandlungsziffer $\mu = \frac{1}{l}$ in m^{-1} ergibt sich die Spannkraft in t.

¹⁾ Nach Otzen, Praktische Winke zum Studium der Statik. Wiesbaden 1911, C. W. Kreidels Verlag.

Die Längen aller Ordinaten sind in mm anzugeben, und zwar genügen bei einigermaßen großer Darstellung ganze Zahlen von mm. In Fig. 121 ist dargestellt, wie die größte Zugspannkraft in D zu ermitteln ist, wenn sich auf einem Laufkranträger zwei Laufkatzen befinden. Die positive Beitragstrecke ist in ungünstiger Weise belastet.

$$\max D = (P_1 \cdot 8,5 + P_2 \cdot 7,5 + P_3 \cdot 6,7 + P_4 \cdot 6,0) \cdot 100 \text{ kg/mm.}$$

Diese Art der Verwendung der Einflußlinien hat sich am besten bewährt. Sie erleichtert die Prüfung außerordentlich, da es nicht nötig ist, die beliebigen Annahmen des Entwerfenden erst aufzusehen.

Die Einflußlinien können verwertet werden als Stichproben für die Ermittlung von Spannkraften aus Kräfteplänen oder aus rechnerischen Untersuchungen; andererseits wird es praktisch sein, bei der Untersuchung der Spannkraft durch Einflußlinien Stichproben vorzunehmen auf Grund reiner Rechnung oder auf Grund einer Kräftezerlegung bei irgendeiner gegebenen Belastung.

5. Die ungünstigste Laststellung bei beweglicher Last.

Die Dimensionierung eines Trägers setzt die Kenntnis der Lage und Größe des **Maximalmomentes** voraus, das durch ein System beweglicher Einzellasten hervorgerufen wird. Das gilt nicht nur für vollwandige, sondern auch für Fachwerkträger, deren Gurtungen ohne Rücksicht auf eine mögliche Gewichtsersparnis mit gleichbleibendem Querschnitt durchgeführt werden. Die Untersuchung der Füllungsstäbe — Vertikalen und Diagonalen — erfolgt zweckmäßig mit Hilfe von Einflußlinien, da für diese Stäbe die Teilbelastung des Trägers ausschlaggebend ist.

1. Liegt ein gegebener Lastenzug vor, beispielsweise die maximalen Raddrücke zweier Laufkatzen eines Kranes, so ist es zweckmäßig, den Träger unter dem Lastenzug zu verschieben und durch Probieren die ungünstigste Trägerstellung zu ermitteln.

In Fig. 122 seien P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 die bekannten Kräfte. Man bestimmt zunächst mit Hilfe von Kraft- und Seileck die Lage der Resultante. Lotet man die Endpunkte A, B des beliebig liegenden Trägers herunter, so geben die Schnittpunkte A', B' mit den äußersten Seilstrahlen die Schlußlinie des Seilecks; die von der Schlußlinie und dem Seilzuge eingeschlossene Fläche ist die Momentenfläche des Trägers (Fig. 122). Die erste Lage des Trägers sei so gewählt, daß die Wirkungslinie der Auflagerreaktion B in die der Resultante fällt, dann ist die Projektion des ersten Seilstrahles $A'B'$ gleich der Länge des Trägers. Verschiebt man nunmehr den Träger parallel mit sich selbst, so daß A auf der beliebigen geeigneten Geraden Ax wandert, dann wandert A' auf dem Seilstrahl $A'B'$, B auf einer zu Ax parallelen Geraden, B' auf dem Seilstrahl $B'B''$. Da die Horizontalprojektionen der Wege von A und B gleich sind, so sind auch die in gleichen Zeiten auf den Seilstrahlen von A' bzw. B' zurückgelegten Wege gleich. Gelangt A nach a — das auf der Wirkungslinie der Resultante liegt — so kommt B nach b ; A' gelangt nach B' ; B' nach B'' . Teilt man Aa und Bb in die gleiche Anzahl gleicher Teile, so werden auch $A'B'$ und $B'B''$ in die gleiche Anzahl gleicher Teile geteilt. Die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte $1, 1-2, 2-3, 3-4, 4$ usw. sind die Schlußlinien für die

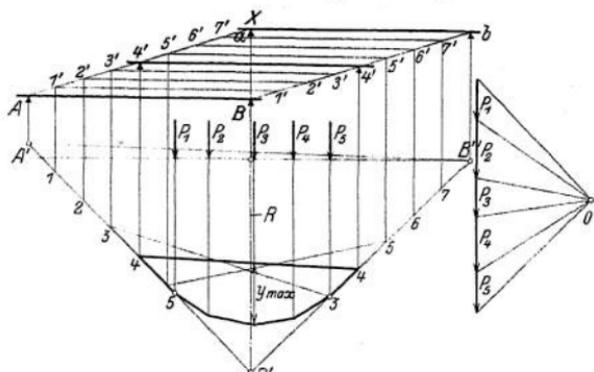


Fig. 122.

Träger $1', 1' - 2', 2' - 3', 3' - 4', 4'$ usw., sie umhüllen nach Mathematik, S. 113, eine Parabel, die um so genauer herauskommt, je kleiner man die einzelnen Teile macht. Da das Maximalmoment nur unter dem Angriffspunkt einer Last liegen kann, so findet man die größte Ordinate leicht durch Probieren. Die Schlußlinie, die $\max y$ abschneidet, bestimmt die ungünstigste Lage des Trägers für den gegebenen Lastenzug.

2. Besteht das Kräftesystem aus zwei Einzellasten P_1 und P_2 (Fig. 123), deren Entfernung a ist, so verfolgt man zunächst die Größe des Momentes infolge P_1 , wenn P_1 von B aus über den Träger wandert. Ist x die Entfernung von B , so wird

$$M_1 = y_1 = P_1 \cdot \frac{x(l-x)}{l}.$$

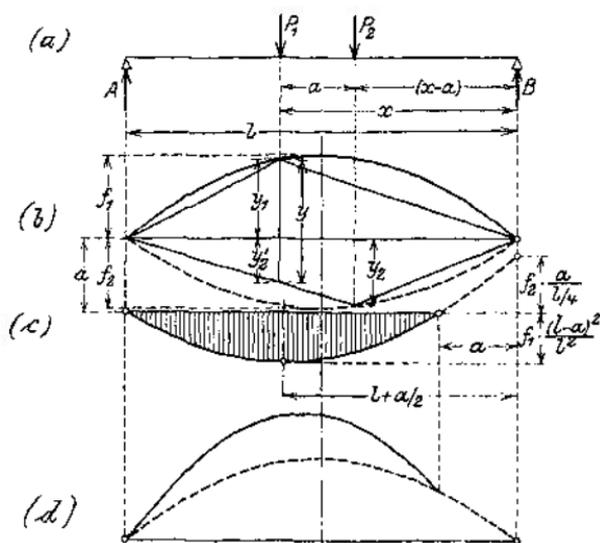


Fig. 123.

Das ist die Gleichung einer Parabel (vgl. S. 113), d. h. der geometrische Ort für die Spitzen der Momentendreiecke ist eine Parabel, deren Pfeilhöhe für $x = \frac{l}{2}$

$$f_1 = P_1 \cdot \frac{l}{4}$$

ist (Fig. 123 b).

In gleicher Weise erhält man als geometrischen Ort für die Spitzen der Momentendreiecke infolge P_2 eine Parabel, deren Pfeilhöhe

$$f_2 = P_2 \cdot \frac{l}{4}$$

ist. Wird das Kräftesystem P_1, P_2 bis x

vorgeschoben, so ist das im Angriffspunkt von P_1 auftretende Moment

$$y = y_1 + y_2'$$

oder

$$y = P_1 \cdot \frac{x(l-x)}{l} + P_2 \cdot \frac{(x-a)(l-x)}{l}.$$

y stellt sich dar als Summe zweier Funktionen, deren erste die Parabel mit der Pfeilhöhe f_1 ist. Die Gleichung

$$y_2' = P_2 \cdot \frac{(x-a)(l-x)}{l}$$

stellt ebenfalls eine Parabel dar, deren x -Achse um $(-a)$ verschoben ist; sie schneidet die x -Achse in den Punkten $x = +a$ und $x = +l$, da für diese Werte $y_2' = 0$ wird, und liegt symmetrisch zu einer Vertikalen in der Entfernung $l + a/2$ von B (Fig. 123 c). Die positiven — durch Strichelung hervorgehobenen — Ordinaten sind zu den Ordinaten y_1 zu addieren; die Kurve $y = y_1 + y_2'$ ist in Fig. 123 d gezeichnet. Ihre Ordinaten — unter dem Angriffspunkt von P_1 gemessen — geben das Moment an, das durch beide Kräfte P_1 und P_2 in diesem

Punkte hervorgerufen wird. Den GrößtWert entnimmt man der Zeichnung, er wird durch die horizontale Tangente an die Kurve bestimmt.

Für die analytische Ermittlung der Lage des Maximalmomentes setzt man den ersten Differentialquotienten der Funktion

$$y = P_1 \cdot \frac{x(l-x)}{l} + P_2 \frac{(x-a)(l-x)}{l}$$

gleich Null (vgl. Mathematik, S. 160). Dann wird

$$\frac{dy}{dx} = P_1 \cdot l - 2x \cdot P_1 + P_2 \cdot l - 2P_2 x + P_2 \cdot a = 0$$

und daraus

$$x = \frac{(P_1 + P_2) \cdot l + P_2 \cdot a}{2(P_1 + P_2)} = \frac{l}{2} + \frac{P_2 \cdot a}{2(P_1 + P_2)}.$$

Für den Sonderfall gleichgroßer Kräfte P ergibt sich

$$x = \frac{2P \cdot l + P \cdot a}{2 \cdot 2P} = \frac{l}{2} + \frac{a}{4}.$$

3. Es mögen sich n Lasten auf dem Träger befinden (Fig. 124), dann ist das Moment unter der m ten Last

$$M_m = A \cdot x_m - \sum_1^m P \cdot b.$$

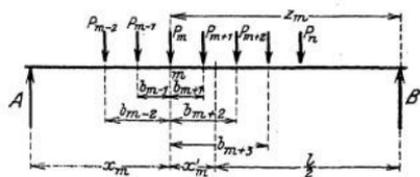


Fig. 124.

Bezeichnet man die Entfernungen der Lasten P von B mit z , so wird

$$A = \frac{1}{l} \sum_1^n P \cdot z,$$

folglich

$$M_m = \frac{x_m}{l} \sum_1^n P \cdot z - \sum_1^m P \cdot b.$$

M_m wird zum Maximum, wenn der erste Differentialquotient gleich Null wird, also

$$\frac{dM_m}{dx_m} = \frac{d\left(x_m \sum_1^n P \cdot z\right)}{dx_m} = 0.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \Sigma P \cdot z &= P_m(l-x_m) + P_{m-1} \cdot (l-x_m + b_{m-1}) + P_{m-2}(l-x_m + b_{m-2}) + \dots \\ &\quad + P_{m+1}(l-x_m - b_{m+1}) + P_{m+2}(l-x_m - b_{m+2}) + \dots; \\ \Sigma P \cdot z &= l \cdot \sum_1^n P - x_m \cdot \sum_1^n P + \sum_1^m P \cdot b - \sum_m^n P \cdot b. \end{aligned}$$

In dieser Gleichung bedeutet $\sum_1^m P \cdot b$ das statische Moment sämtlicher Kräfte P links von m in Beziehung auf m , $\sum_m^n P \cdot b$ das statische Moment sämtlicher Kräfte P rechts von m in Beziehung auf m ; die algebraische Summe beider Ausdrücke ist demnach gleich dem statischen Moment aller Kräfte bezogen auf m . Bezeichnet man diesen Wert mit \mathcal{S}_m , so wird

$$\Sigma P \cdot z = l \cdot \sum_1^n P - x_m \cdot \sum_1^n P + \mathcal{S}_m,$$

also

$$x_m \cdot \Sigma P \cdot z = x_m \cdot l \cdot \sum_1^n P - x_m^2 \sum_1^n P + x_m \cdot \mathcal{E}_m,$$

folglich

$$\frac{d(x_m \Sigma P \cdot z)}{dx_m} = l \sum_1^n P - 2 x_m \cdot \sum_1^n P + \mathcal{E}_m.$$

Aus

$$\frac{dM_m}{dx_m} = 0 \quad \text{ergibt sich}$$

$$x_m = \frac{\mathcal{E}_m}{2 \cdot \sum_1^n P} + \frac{l}{2};$$

$$-\left(\frac{l}{2} - x_m\right) = \frac{\mathcal{E}_m}{2 \cdot \sum_1^n P} = \frac{\mathcal{E}_m}{2R},$$

wenn man die Resultante $\sum_1^n P$ sämtlicher Kräfte mit R bezeichnet. Mit $-\left(\frac{l}{2} - x_m\right) = x'_m$ wird

$$x'_m = \frac{\mathcal{E}_m}{2 \cdot R}$$

die Entfernung, um die die m te Last aus der Mitte nach links geschoben werden muß, damit M_m zum Maximum wird. Daraus ergibt sich eine einfache zeichnerische Ermittlung der Strecke x'_m . Es bestehe der Lastenzug aus den 6 Kräften P der Fig. 125. Man wähle als Polweite $H = 2R$ und ziehe den Seilzug $I, II, III, IV, V, VI, VII$, dann sind die von den äußersten Seilstrahlen I und VII auf den Wirkungslinien abgeschnittenen Strecken x_1, x_2, x_3, \dots ein Maß für die Größe der statischen Momente sämtlicher Kräfte, bezogen auf die Punkte $1, 2, 3, \dots$. Es ist $\mathcal{E}_m = H \cdot x'_m = 2R \cdot x'_m$, so daß

$$x'_m = x'_m \cdot \frac{2R}{2R} = x'_m$$

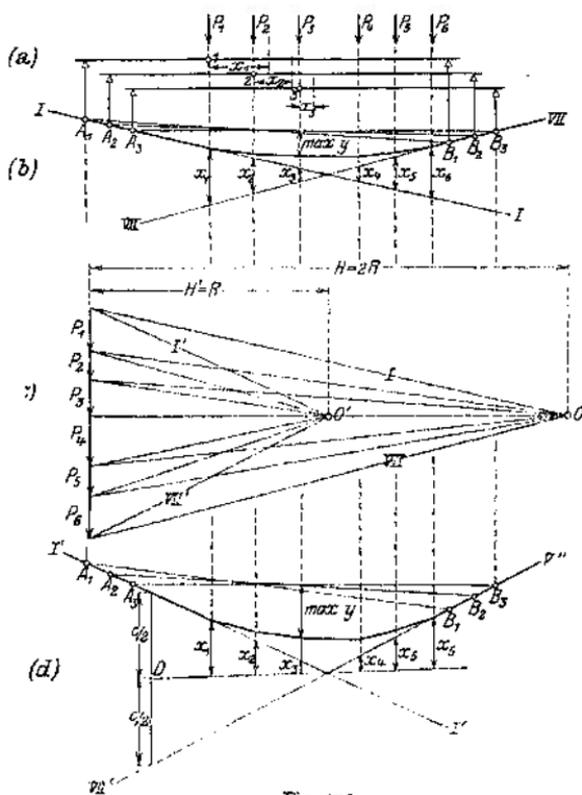


Fig. 125.

wird. Man erhält demnach $M_{1\max}$, wenn man die Last P_1 um x_1 aus der Mitte nach links verschiebt; $M_{2\max}$, wenn man die Last P_2 um x_2 aus der Mitte nach links verschiebt usw. $M_{6\max}$ ergibt sich, wenn man die Last P_6 um x_6 aus der Mitte nach rechts verschiebt; $M_{5\max}$ ergibt sich, wenn man die Last P_5 um x_5 aus der Mitte nach rechts verschiebt usw. Um das größte aller Maximalmomente zu bestimmen, empfiehlt es sich, $\max M_m$ für eine mittlere Last P_m zu berechnen und nachzuprüfen, ob $\max M_{m-1}$ bzw. $\max M_{m+1}$ größer als $\max M_m$ werden.

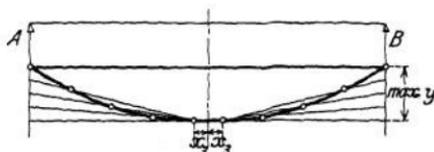


Fig. 126.

Für Träger mit veränderlichem Querschnitt ist die Maximalmomentenfläche durch Parabeln begrenzt, deren Scheitel geradlinig verbunden sind, und deren Pfeilhöhe gleich dem größten Maximalmoment ist (Fig. 126).

4. Das Verfahren unter 3 hat den Nachteil, daß es die Momente infolge Eigengewicht unberücksichtigt läßt. W. Vogt schlägt in seinem Aufsatz „Zur Theorie des Balkens unter Verkehrslast“¹⁾ folgenden Weg vor:

Die Maximalmomentenfläche eines zweifach gestützten Balkens für einen über ihn wandernden Lastenzug $k_1, k_2, k_3 \dots k_n$ ($k_1 + k_2 + k_3 + \dots k_n = k$) mit den Achsenabständen $a_1, a_2, a_3 \dots a_{n-1}$ stimmt mit der Momentenfläche für eine gewisse ruhende Belastung unter Benutzung desselben Polabstandes überein; diese ideale Belastung besteht erstens aus einer über den Balken verteilten gleichmäßigen kontinuierlichen Last von der Größe $i = 2k$, zweitens aus nach oben gerichteten Einzelkräften von den Größen

$$i_1 = \frac{a_1}{l} \cdot k_1; \quad i_2 = \frac{a_2}{l} \cdot k \dots; \quad i_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{l} \cdot k,$$

deren Angriffspunkte $Q_1, Q_2 \dots Q_{n-1}$ die Balkenlänge im Verhältnis der Lasten des Lastenzuges teilen:

$$A Q_1 : Q_1 Q_2 : Q_2 Q_3 \dots Q_{n-1} B = k_1 : k_2 : k_3 \dots k_n.$$

An einem Querschnitt zwischen Q_{i-1}, Q_i tritt das größte Moment ein, wenn die i te Last k_i in ihm liegt.

Dieser Satz gestattet die gleichzeitige Behandlung von ruhenden und beweglichen Lasten; eine ruhende kontinuierliche Last wird zu der ideellen kontinuierlichen Belastung addiert, und ruhende Einzelkräfte werden unter die ideellen nach dem Ort ihres Angriffspunktes eingereiht. Man wird am besten die Einzelkräfte zuerst durch ein Seilpolygon verbinden und dann die eine Seilparabel für die gesamte kontinuierliche Belastung über dessen Schlußlinie spannen.

Zur Verdeutlichung ist in Fig. 127 ein Beispiel durchgeführt. Der Balken AB von der Länge l steht unter der gleichmäßigen kontinuierlichen Belastung von der Größe c und unter der ruhenden Einzellast h im Querschnitt Q . Über den Balken wandert der Lastenzug k_1, k_2, k_3 mit den Achsabständen a_1, a_2 . Um zunächst die Angriffspunkte der ideellen Einzellasten zu finden, sind die Kräfte $K_0 K_1 = k_1, K_1 K_2 = k_2, K_2 K_3 = k_3$ auf der Senkrechten durch A von A aus aufgetragen und die Parallelen durch K_1 und K_2 zu BK_3 gezogen. Es ist dann

$$A Q_1 : Q_1 Q_2 : Q_2 B = k_1 : k_2 : k_3.$$

Die ideellen Einzelkräfte selbst wurden gefunden, indem der Lastenzug in seiner Anfangslage (k_1 über A) gezeichnet wurde und durch die Angriffspunkte

¹⁾ Z. Ver. deutsch. Ing. Nr. 16 vom 19. April 1913, S. 620 und Dinglers polytechn. Journal 1906, Heft 38.

der Lasten k_2 und k_3 in dieser Lage die Parallelen zu BK_3 gezogen wurden; so ergab sich

$$i_1 = \frac{a_1}{l} \cdot k; \quad i_2 = \frac{a_2}{l} \cdot k.$$

Nunmehr wurde für die Einzelkräfte

$$L_0 L_1 = i_1 = \frac{a_1}{l} \cdot k, \quad L_1 L_2 = h, \quad L_2 L_3 = i_2 = \frac{a_2}{l} \cdot k,$$

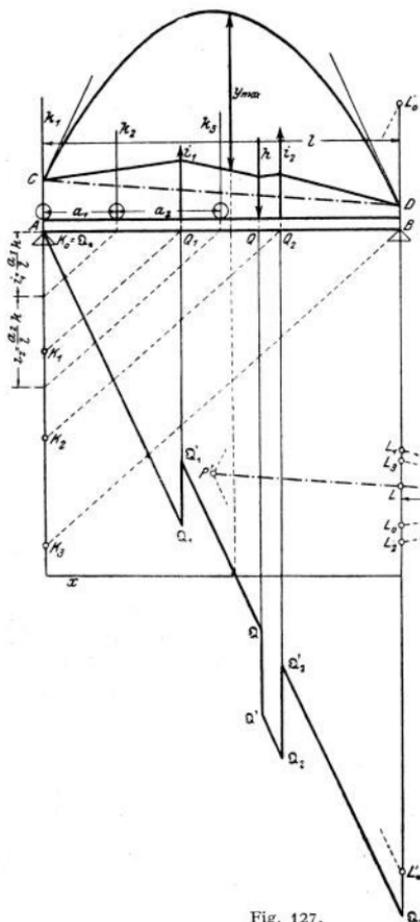


Fig. 127.

Schnittpunkt mit der x -Achse, die um die Auflagerreaktion A unter A liegt, geht der gefährliche Querschnitt. Er liegt in der Balkenstrecke $Q_1 Q_2$; die ungünstigste Stellung des Lastenzuges tritt also ein, wenn die zweite Kraft k_2 in ihn zu liegen kommt, und das größte Biegemoment ist gleich der innerhalb der Momentenfläche liegenden senkrechten Strecke dieses Querschnittes y mal Polabstand d .

die in den Senkrechten durch Q_1, Q, Q_2 wirken — die beiden ideellen Kräfte sind nach oben gerichtet — ein Seilpolygon CD gezeichnet und durch den zur Schlußlinie CD parallelen Polstrahl die Auflagerkräfte $L_0 L_1$ in A und $L_3 L_4$ in B ermittelt. Um dann für die gesamte kontinuierliche Belastung $2k + c$ eine Seilparabel über der Schlußlinie CD so zu spannen, daß die beiden Momentenflächen sich mit Berücksichtigung des Vorzeichens addieren, hat

man den Mittelpunkt der ganzen kontinuierlichen Last $L'_0 L'_\infty$ nach L zu legen und den neuen Pol

P' auf der Verlängerung des Polstrahles PL anzunehmen, so daß $P'L = LP$ ist. Die Parallelen zu den Polstrahlen $P'L'_0$ und $P'L'_\infty$ durch C und D bestimmen dann als Tangenten in C und D die Parabel eindeutig (vgl. Mathematik, S. 113).

Zur Ermittlung des größten auftretenden Momentes ist schließlich die Querkraftlinie für die Gesamtlast gezeichnet: $Q_0, Q_1, Q'_1, Q, Q', Q_2, Q'_2, Q_3$. Durch ihren

III. Dynamik flüssiger Körper.

Bearbeitet von Dipl.-Ing. M. Krause.

Die Gleichungen, welche die Beziehungen bei tropfbar flüssigen Körpern darstellen, gelten mit ausreichender Genauigkeit auch für Gase, solange die Druckunterschiede so gering sind, daß die aus ihnen folgenden Volumenveränderungen außer acht bleiben können.

A. Ausfluß aus offenen Gefäßen.

In einem Gefäß vom Querschnitt F , Fig. 1, befinde sich eine Flüssigkeit, welche durch ein am Boden befindliches Loch vom Flächeninhalt f ausfließt. Die Höhe des Flüssigkeitsspiegels über dem Boden sei unveränderlich, F gegenüber f so groß, daß die Geschwindigkeit des Wassers im Innern des Gefäßes vernachlässigt werden kann. Dann ist die Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \varphi \sqrt{2gh}.$$

Der Koeffizient φ ist abhängig von der Zähigkeit der Flüssigkeit und der Form der Ausflußöffnung. Bei dünner Gefäßwand oder zugeschärften Ausflußkanten ist für Wasser $\varphi \approx 0,97$, bei ganz kurzer, gut abgerundeter und geglätteter Düse $\varphi \approx 0,99$. Bei anderen Formen der Ausflußöffnung, namentlich bei längeren, wird φ kleiner.

Die Ausflußmenge in der Zwischenzeit ist

$$Q = \alpha \varphi \sqrt{2gh} \cdot f = \mu \cdot \sqrt{2gh} \cdot f.$$

Der Kontraktionskoeffizient α , der die Einschnürung mißt, welche der Wasserstrahl nach Verlassen der Mündung erfährt, erreicht den Höchstwert 1 bei gut ausgerundeten sehr kurzen Düsen. Bei zugeschärften Düsenrändern wird α sehr klein.

$\mu = \alpha \cdot \varphi$ heißt Ausflußkoeffizient.

Die angegebenen Gleichungen gelten auch für den Fall, daß die Öffnung sich an der Seite des Behälters befindet. h ist dann die Entfernung des Schwerpunktes der Ausflußöffnung vom Wasserspiegel.

Der Ausflußkoeffizient ist vom Durchmesser der kreisrunden Öffnung und von h abhängig und ist für Öffnungen nach Fig. 2 (Ponceltmündungen) nach Weißbach für

Durchmesser der Öffnung	1	2	3	4 cm
0,25 cm Wassertiefe	$\mu = 0,64$	0,63	0,62	0,614
0,60 m Wassertiefe	$\mu = 0,63$	0,62	0,61	0,607

Nach Grashof ist

$$\mu = 0,6 + \frac{0,06}{0,5 + \sqrt{h}} - 0,7d.$$

Letztere Formel gibt etwas größere Werte.

Die Ausflußöffnung muß mindestens $3d$ von der benachbarten Wand entfernt sein. Der Wasserspiegel muß so hoch über Ausflußöffnung sein, daß Trichter und Wirbel-

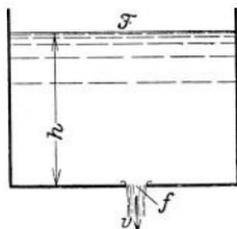


Fig. 1.



Fig. 2.

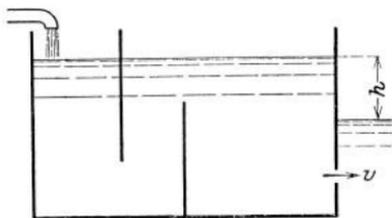


Fig. 3.

bildung nicht auftreten. Ferner dürfen Störungen durch das eintretende Wasser nicht bis zur Mündung gelangen; die Oberfläche muß schaumfrei sein, damit eine genaue Bestimmung des Wertes h ermöglicht wird. Man baut daher senkrechte Zwischenwände ein (Fig. 3).

Die Gleichungen gelten auch für den Fall, daß der Ausfluß nach Fig. 3 unter Wasser erfolgt. h ist dann der Höhenunterschied beider Wasserspiegel. Bei Ausfluß nach Fig. 4 ist

$$Q = \frac{2}{3} b \cdot h \cdot \sqrt{2gh}.$$

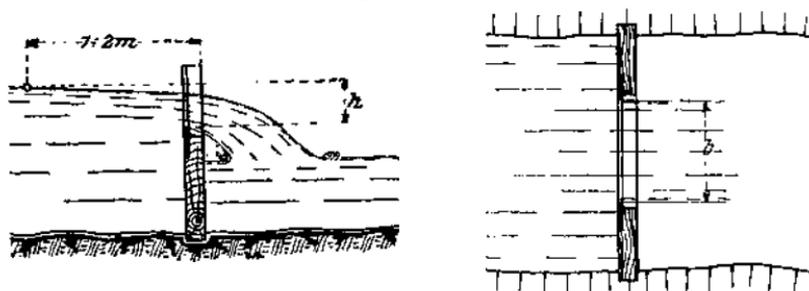


Fig. 4. (Nach Quantz, Wasserkraftmaschinen.)

Gefäße mit Ponceletmündungen, Fig. 3 oder Stauwehre nach Fig. 4 werden vielfach zur Messung von Wassermengen benutzt.

Beispiel: Ein Gefäß hat eine Ponceletmündung von 5 cm Durchmesser, der Wasserspiegel befindet sich während der Versuchszeit dauernd 1,2 m über der Mündung. Wieviel Flüssigkeit fließt in der Stunde durch das Gefäß, wenn der Ausflußkoeffizient durch Eichung zu 0,62 festgestellt worden ist?

$$Q = \frac{0,05^2 \pi}{4} \cdot 0,62 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1,2} \cdot 3600 = 2,12 \text{ m}^3/\text{st.}$$

Ist das spez. Gewicht der Flüssigkeit 0,9, so ist das Gewicht der durchgeflossenen Menge $G = 2,12 \cdot 0,9 = 1,908 \text{ t} = 1908 \text{ kg}$.

B. Ausfluß aus geschlossenen Gefäßen.

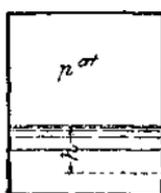


Fig. 5.

Befindet sich in einem geschlossenen Gefäß eine Flüssigkeit unter einem Druck von p Atm., der im allgemeinen durch ein Gas erzeugt wird (Windkessel) und ist der Abstand des Flüssigkeitsspiegels von der Ausflußöffnung h , so muß für die Bestimmung der Flüssigkeitsmenge der Druck p als Druck einer entsprechenden Flüssigkeitssäule angenommen werden. Ist das spez. Gewicht der Flüssigkeit γ in Kilogramm pro Liter, so ist die gedachte Flüssig-

keitssäule in Metern $h' = \frac{10 p}{\gamma}$. Die totale Flüssigkeits-

höhe, die für die Ausflußmenge maßgebend ist, ist also $H = h + h'$.

Demnach ist:

$$v = \eta \sqrt{2g \left(h + \frac{10 p}{\gamma} \right)}$$

und

$$Q = \eta f \sqrt{2g \left(h + \frac{10 p}{\gamma} \right)}.$$

Häufig wird h sehr klein gegen $\frac{10 p}{\gamma}$, so daß

$$Q = \eta f \sqrt{\frac{20 g p}{\gamma}} \quad \text{wird.}$$

Fließen unter gleichen Bedingungen zwei Flüssigkeiten mit den spez. Gewichten γ_1 und γ_2 aus, so verhalten sich die Zeiten, in denen die gleichen Volumina ausfließen, umgekehrt wie die Ausflußgeschwindigkeiten. Also

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{20 g \cdot \rho}{\gamma_2}} = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}};$$

mithin ist

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{t_2^2}{t_1^2}.$$

Beispiele: 1. In einem Windkessel herrscht ein Überdruck von 10 Atm. Der Wasserspiegel steht in 1 m Höhe über der Ausflußöffnung. Wie groß ist die Ausflußgeschwindigkeit, wenn die Rohrleitungswiderstände 15 m Wassersäule betragen?

$$v = \eta \sqrt{2 g (1 + 10 \cdot 10 - 15)} \text{ m/sek.}$$

2. Aus einem Raum, in welchem ein Ventilator einen Überdruck von 10 mm Wassersäule erzeugt, strömt durch eine Öffnung Luft ins Freie. Wie groß ist die Luftgeschwindigkeit?

Als Höhe ist hier einzusetzen: $h = \frac{10 \rho}{\gamma}$, wobei $\rho = \frac{1}{1000}$ Atm. und $\gamma = \frac{1,29}{1000}$ kg pro Liter ist. Also $h = \frac{10 \cdot 10^{-1}}{1000 \cdot 2} = 7,75$ m, und die Geschwindigkeit wird mit $\eta = 1$ zu

$$v = \sqrt{2 g \cdot 7,75} = 12,3 \text{ m/sek.}$$

C. Strömung der Flüssigkeiten in Rohrleitungen.

1. Ohne Berücksichtigung der Reibung.

Strömt aus einem bis zur Höhe h mm über der Ausflußöffnung gefüllten Gefäß Flüssigkeit durch ein horizontales Rohr aus, so ist für ideale Flüssigkeiten $v = \sqrt{2 g h}$. Ist das Rohr zylindrisch, so herrscht an allen Stellen des Rohres die gleiche Geschwindigkeit. $\frac{v^2}{2 g} = h$ heißt Geschwindigkeitshöhe oder hydrodynamischer Druck.

Die potentielle Energie ist vollständig in kinetische umgewandelt; der statische Flüssigkeitsdruck gegen die Rohrwände ist überall gleich dem atmosphärischen Druck.

Bei ungleichen Querschnitten ist die Geschwindigkeit in den engeren Durchtrittsflächen naturgemäß größer als in den weiten. Es gilt die

$$\text{Kontinuitätsgleichung } F_1 \cdot v_1 = F_2 \cdot v_2 = F_3 \cdot v_3.$$

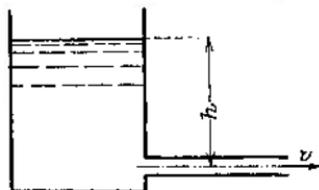


Fig. 6.

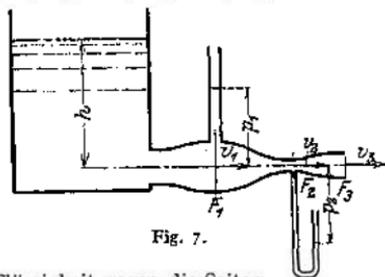


Fig. 7.

Der statische Überdruck p der Flüssigkeit gegen die Seitenwand, der durch eine Flüssigkeitssäule oder ein Manometer gemessen wird, ist an den verschiedenen Stellen verschieden, und zwar besteht die Gleichung $h = \frac{v^2}{2 g} + p$, d. h. an jeder Stelle ist die Summe von statischem Druck und Geschwindigkeitshöhe konstant. (Fig. 7.)

Herrscht über dem Wasserspiegel des Gefäßes ein Druck p' , so ist dieser in Flüssigkeitssäule umzurechnen, also $1 \text{ Atm.} = \frac{10 p'}{\gamma} \text{ m}$, und es ist

$$H = h + \frac{10 p'}{\gamma} = \frac{v^2}{2g} + p.$$

Ist an der Ausflußstelle ein Überdruck p'' vorhanden, so gilt

$$H = \frac{v^2}{2g} + p + p'',$$

wobei $p + p''$ den Überdruck gegen die Atmosphäre an der betreffenden Meßstelle angibt.

Ist an einer Stelle $v > v_3$, also $F < F_3$, so wird bei Ausfluß ohne Gegendruck $\frac{v^2}{2g} > H$ und p muß einen negativen Wert annehmen. Also tritt ein Unterdruck auf. Befindet sich an einer solchen Stelle eine Anschlußleitung, so wird durch diese Flüssigkeit bzw. Luft aus der Atmosphäre angesaugt. Naturgemäß kann der Unterdruck 1 Atm. nicht überschreiten. Ist F so klein, daß sich rechnermäßig ein Unterdruck von mehr als 1 Atm. ergibt, so zerreißt der Flüssigkeitsfaden, die Rohrleitung ist nicht mehr gefüllt.

Soll eine Flüssigkeit von einer Pumpe durch eine Rohrleitung gefördert werden, so ergibt sich nach vorstehendem der zu erzeugende Gesamtdruck H als Summe des statischen Druckes am Druckstutzen der Pumpe und der Geschwindigkeitshöhe an derselben Stelle.

Beispiele: 1. Ein Ventilator soll minutlich 1500 cbm Luft gegen einen Druck von 20 mm Wassersäule fördern. Wie groß ist der Arbeitsverbrauch des Ventilators, wenn die Luft eine Geschwindigkeit von 15 m/sek haben soll und der Wirkungsgrad des Ventilators 0,3 ist?

$$\text{Die Geschwindigkeitshöhe ist } \frac{v^2}{2g} = \frac{15^2}{2 \cdot 9,81} = 6,4 \text{ m.}$$

Diese Luftsäule von 6,4 m entspricht einer Wassersäule von $6400 \cdot 0,00129 = 8,25$ mm Höhe. Die gesamte zu erzeugende Druckhöhe ist mithin

$$H = 8,25 + 20 = 28,25 \text{ mm Wassersäule}$$

und der Energieverbrauch demnach

$$N = \frac{1500 \cdot 28,25}{60 \cdot 75 \cdot 0,3} = 71,4 \text{ PS.}$$

2. Durch ein horizontales, ins Freie mündendes Rohr von 100 mm lichter Weite fließen 54 m³ Wasser pro Stunde. Welchen Querschnitt muß ein Rohrstück haben, damit in ihm ein Unterdruck von 5 m Wassersäule herrscht? (Von Reibung wird abgesehen.)

Der statische Druck an der Mündung ist Null.

$$\text{Die Geschwindigkeit ist } v = \frac{54}{3600 \cdot 0,00785} = 1,92 \text{ m/sek.}$$

Die Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g} = \frac{1,92^2}{2 \cdot 9,81} = 0,187$ m, ist zugleich die gesamte Druckhöhe.

In der Rohrverengung soll ein Druck von $p = -5$ m Wassersäule herrschen. Demnach ist

$$0,187 = -5 + \frac{v_1^2}{2g}; \text{ demnach } \frac{v_1^2}{2g} = 5,185 \text{ und } v_1 = 9,53 \text{ m/sek.}$$

Der Rohrdurchmesser an dieser Stelle ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{d^2 \pi}{4} \cdot v_1 = \frac{54}{3600} \text{ zu } d = 60,8 \text{ mm.}$$

2. Mit Berücksichtigung der Reibung.

Für ein gerades Rohr von kreisförmigem Querschnitt und Durchmesser d ist die Reibungshöhe

$$w = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \text{ m, wobei nach Weißbach } \lambda = 0,0144 + \frac{0,0095'}{\sqrt{v}}, \text{ nach Darcy}$$

$$\lambda = 0,0199 + \frac{0,0005}{d},$$

Unter l ist dabei die Rohrstrecke von der betrachteten Stelle bis zum Ende des Rohres zu verstehen. Die Reibungshöhe nimmt also nach dem Ende des Rohres zu ab.

Außer der Reibung im geraden Rohr treten noch Einzelwiderstände auf, wenn durch Ablenkung der Stromfäden, plötzliche Querschnittsänderungen usw. Wirbel entstehen.

Die gesamte Reibungshöhe ist

$$W = w + \frac{v^2}{2g} \Sigma \zeta, \quad \text{wobei } \frac{v^2}{2g} \Sigma \zeta$$

die Summe aller Einzelwiderstände ist, während w den Widerstand des geraden Rohrstranges darstellt. Der Wert von ζ ist für jedes einzelne Formstück experimentell zu bestimmen. Die wichtigsten sind im Kapitel Rohrleitungen, angegeben. (Siehe dort auch Beispiel).

Die gesamte Druckhöhe, die zur Förderung einer Flüssigkeit durch eine Rohrleitung erforderlich ist, ist:

$$H = p + \frac{v^2}{2g} + W,$$

wobei p die statische Druckhöhe (Förderhöhe),

$\frac{v^2}{2g}$ die dynamische Druckhöhe,

W die Reibungshöhe bedeutet.

D. Rückdruck gegen das Ausflußgefäß.

Strömt eine Flüssigkeit durch eine Öffnung aus einem Gefäß, so erfährt dieses einen Rückstoß (Reaktion) von der Größe

$$R = 2 \cdot \mu \cdot \varphi \cdot f \cdot h \cdot \gamma.$$

Dieser Rückstoß ist also $2 \cdot \mu \cdot \varphi$ mal so groß als der statische Druck auf die Ausflußöffnung. Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Gefäß vernachlässigt werden kann. Die Wirkungslinie des Rückstoßes geht durch den Schwerpunkt der Austrittsöffnung und hat die Richtung der Geschwindigkeit der Flüssigkeit, ist ihr aber entgegengesetzt. (Vgl. Kapitel Wasserturbinen.)

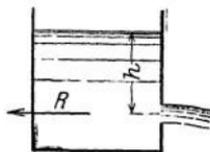


Fig. 8.

E. Stoß gegen eine Wand.

Trifft ein Flüssigkeitsstrahl vom Querschnitt f eine zu seiner Richtung senkrecht stehende Platte mit der relativen Geschwindigkeit c , so ist der Druck auf die Scheibe

$$P = \frac{c^2}{g} \cdot f \cdot \gamma.$$

Ist die Platte halbkugelförmig ausgehöhlt, so daß der Strahl um 180° abgelenkt wird, so ist

$$P = \frac{2c^2}{g} f \gamma.$$

F. Vorrichtungen zum Messen von Flüssigkeitsmengen und Geschwindigkeiten.

Man unterscheidet: a) Volumemesser, b) Geschwindigkeitsmesser. Wenn die Durchflußquerschnitte bekannt sind, kann man mit ersteren die mittleren Geschwindigkeiten, mit letzteren die in bestimmter Zeit durchgeflossenen Mengen feststellen.

a) Volumenmesser.

Eckhardt's Kipp-Wassermesser (Fig. 9) besteht aus zwei nebeneinander befindlichen, um eine Achse drehbaren, dreieckigen Behältern. Der Messer wird so eingestellt, daß bei dem geringsten Übertreten von Wasser in die seitlich befindliche Rinne infolge der Schwerpunktsverlegung ein plötzliches Kippen stattfindet und der leere Behälter nach oben geht, während sich der andere entleert.

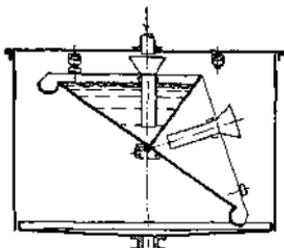


Fig. 9.

Kolbenwassermesser. Jede Kolbenpumpe kann gleichzeitig als Wassermesser benutzt werden, wenn man ihre Umdrehungen zählt, da sie pro Hub stets das gleiche Wasserquantum fördert. Dieses Quantum ist durch Versuch zu bestimmen.

Man unterscheidet Wassermesser mit hin und her gehendem und mit rotierendem oder oszillierendem Kolben. Erstere bestehen aus einem zylindrischen Gehäuse mit doppelwirkendem Kolben.

Das Wasser tritt unter dem Kolben ein und hebt ihn bis in die höchste Lage. In dieser steuert die Kolbenstange plötzlich das Zuflußventil um, so daß das Wasser nunmehr über dem Kolben eintritt, während das unter dem Kolben befindliche abfließt. In der tiefsten Kolbenstellung wird wiederum umgesteuert und so fort. Die Bewegung der Kolbenstange wird auf ein Zählwerk übertragen.

Die Wassermesser mit rotierendem Kolben entsprechen der Konstruktion der Kapselpumpen. Gesteuerte Ventile sind nicht vorhanden.

Scheibenwassermesser.

Bauart Siemens, siehe Fig. 10. Eine auf einem Kugelgelenk ruhende hohle Metallscheibe *b* wird von einem Gehäuse umschlossen, dessen Form durch die Bewegung der Scheibe gegeben ist. Die Scheibe wälzt sich auf der Kegeloberfläche, ihre Achse beschreibt einen Kegelmantel. An der Drehung wird die Scheibe durch eine von dem Umfang nach der Mitte gehende vertikale Wand verhindert, die gleichzeitig das Strömen des Wassers nach dieser Seite unmöglich macht und es so zwingt, an der anderen Seite heranzufließen und dabei die Scheibe in oszillierende Bewegung zu versetzen. Die Achse der Scheibe betätigt das Zählwerk.

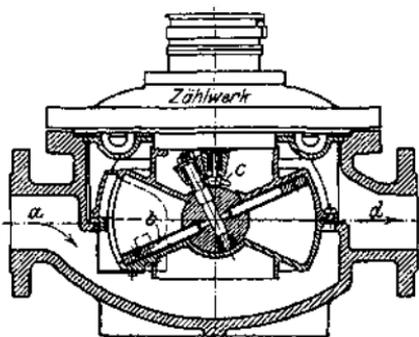


Fig. 10.

Im übrigen ist jede Kapselpumpe geeignet, als Wassermesser zu dienen.

b) Geschwindigkeitsmesser.

Der **Woltmannflügel** (Fig. 11) besteht aus einem Schraubenpropeller, der durch das strömende Wasser bewegt wird. Da der Flügel nicht den ganzen Rohrquerschnitt ausfüllt, auch die Zwischenräume zwischen den Flügeln ziemlich groß sind, ist das Instrument auch für etwas verunreinigtes Wasser geeignet, dagegen nicht für sehr geringe Geschwindigkeiten.

Der **Flügelradwassermesser** (Fig. 12, Siemens & Halske) ist die Umkehrung der Zentrifugalpumpe. Das Sieb *a* hält grobe Unreinigkeiten zurück. Das Wasser strömt durch die schräg gerichteten Löcher *b* gegen das Flügelrad *d*, das in eine der Wassergeschwindigkeit entsprechende Rotation versetzt wird. Über dem Schaufelrad befindet sich die einstellbare Stauvorrichtung *e*, die zur

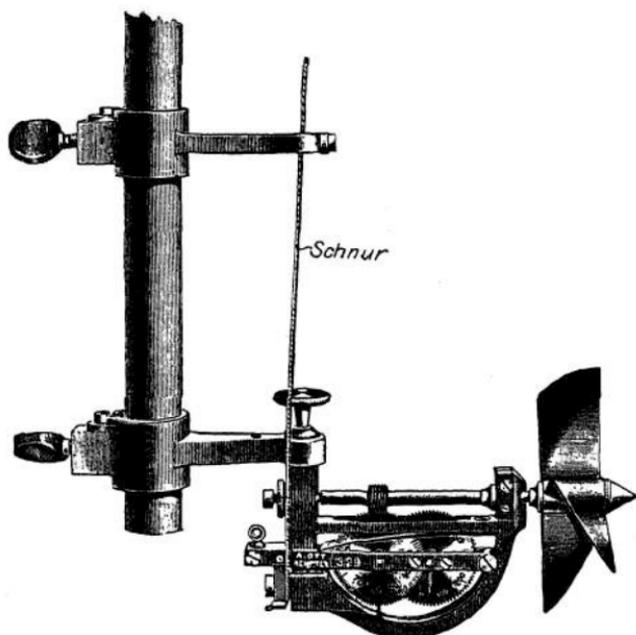


Fig. 11.

Regulierung dient. Auch hier hört die Meßgenauigkeit unterhalb einer gewissen Durchflußmenge auf.

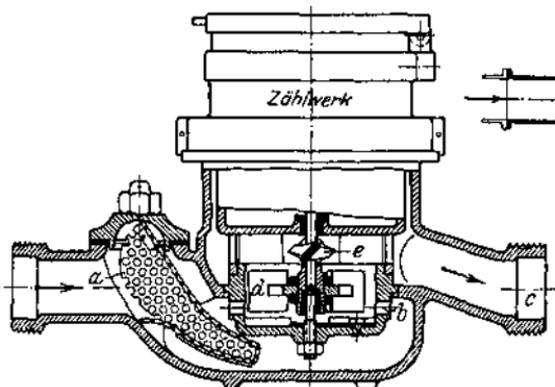


Fig. 12.

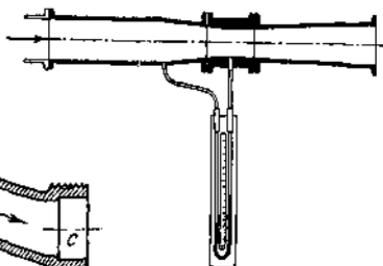


Fig. 13.

Venturiwassermesser. Wird in eine Rohrleitung ein Stück von kleinerem Querschnitt eingeschaltet, so ist der statische Druck in diesem geringer als in dem benachbarten größeren Querschnitt, in welchem die Wassergeschwindigkeit geringer ist. Die Druckdifferenz ist

$$h = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}$$

Da ferner $\frac{v_1}{v_2} = \frac{F_2}{F_1}$ wobei F_1 und F_2 die bezüglichen Querschnitte sind, ist

$$h = \frac{v_1^2 \left[\left(\frac{F_1}{F_2} \right)^2 - 1 \right]}{2g},$$

also ein Maß für die Geschwindigkeit des Wassers im Querschnitt F_1 .

Schaltet man zwischen F_1 und F_2 ein Rohr, so wird Wasser durch dieses Rohr strömen, und zwar ist die Geschwindigkeit in diesem Rohr

$$w = \sqrt{2gh} = v_1 \sqrt{\frac{F_1^2}{F_2^2} - 1}$$

also direkt proportional v_1 . Legt man einen kleinen Wassermesser in das Abzweigrohr, so kann man mit diesem die erheblich größeren Mengen messen, die durch das Hauptrohr strömen.

Das Staudoppelrohr (Pitot-Rohr, Fig. 14). Das Rohr wird so in den Flüssigkeitsstrom gehalten, daß die Flüssigkeit parallel zu dem Stück E gegen die Spitze d fließt. In dem Innern des Rohres B entsteht ein Druck, welcher gleich

der Summe aus statischem und dynamischem Druck ist, also $h' = p + \frac{v^2}{2g}$.

In dem äußeren Rohr E , das durch die Öffnungen s mit der Flüssigkeit verbunden ist, herrscht nur der statische Druck p . Verbindet man die beiden Enden eines mit Quecksilber gefüllten U-Rohres mit dem Ende G des Rohres, so gibt das Manometer die Druckdifferenz

$$h = h' - p = \frac{v^2}{2g}$$

an.

Bei der Umrechnung ist jedoch zu beachten, daß h als Quecksilbersäule gemessen und in Wassersäule umgerechnet werden muß. Beträgt der gemessene Wert H mm Quecksilbersäule, so ist

$v = \sqrt{2gH} \cdot 12,596$ m/sek. (Der Faktor ist 12,596, nicht etwa 13,596, da der Quecksilbersäule eine Wassersäule gegenübersteht.)

Die Geschwindigkeitsmesser, sowie die Kobenwassermesser sind bei entsprechender konstruktiver Gestaltung zur Messung von Luftgeschwindigkeiten geeignet.

Beim Doppelstaurohr wird als Manometerflüssigkeit Wasser verwandt. Beträgt die gemessene Höhendifferenz h mm Wassersäule, so ist

$$v = \sqrt{\frac{2g \cdot h}{\gamma}} \text{ m/sek.}$$

γ ist das spez. Gewicht der Luft in Kilogramm pro Kubikmeter. Zur Messung von h verwendet man meist Mikromanometer, bei denen das Meßrohr b stark geneigt ist, während der andere Schenkel a als weites Gefäß ausgebildet ist. Die Neigung des Schenkels b in Fig. 15 ist veränderlich.

Die Neigung des Schenkels b in Fig. 15 ist veränderlich.

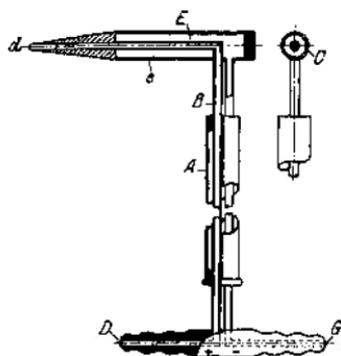


Fig. 14.

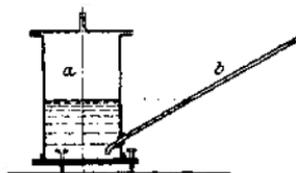


Fig. 15.

IV. Statik flüssiger Körper (Hydrostatik).

Bearbeitet von Dipl.-Ing. H. Winkel.

Infolge der leichten Verschiebbarkeit der kleinsten Teile ist eine selbständige Gestalt tropfbar flüssiger Körper nicht möglich; die Kohäsion ist sehr gering, doch nicht gleich Null, da eine Spur von selbständiger Gestalt in der Tropfenbildung vorhanden ist (Quecksilber bildet z. B. nahezu kugelförmige Tropfen). Die Oberfläche oder Flüssigkeitsspiegel bildet sich lediglich unter dem Einfluß der Schwere und des auf die Flüssigkeit wirkenden Druckes (vgl. Abschnitt Mathematik S. 123, Beispiel 2a). Befinden sich in einem Gefäß Flüssigkeiten verschiedenen spezifischen Gewichtes, so bilden die Teilchen von gleichem spezifischen Gewicht Schichten parallel zur Oberfläche. Unter dem Einfluß von Adhäsion und Kohäsion krümmt sich die Oberfläche einer Flüssigkeit in der Nähe der Gefäßwandung und zwar steigt die Flüssigkeit an der Wand empor, wenn die Adhäsion überwiegt (z. B. Wasser in engen Röhren); überwiegt dagegen die Kohäsion, so ist der Flüssigkeitsspiegel nach oben gewölbt (Quecksilber in Röhren). Taucht man zwei Platten, deren Zwischenraum sehr gering ist, in eine Flüssigkeit, so steigt diese zwischen den Platten höher als der Flüssigkeitsspiegel (Kapillarwirkung); das gleiche Verhalten zeigt sich bei engen Röhren. Tropfbar flüssige Körper sind nahezu unelastisch; so beträgt z. B. die Volumenverminderung für je 1 kg/cm² Druck bei Wasser 0,000044; bei Quecksilber 0,000003. Infolge dieser außerordentlich geringen Zusammendrückbarkeit werden Stöße in unverminderter Stärke übertragen (Wasserschläge in Rohrleitungen).

Pascalsches Gesetz: Wird auf ein Teilchen einer im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit ein Druck ausgeübt, so pflanzt sich dieser Druck auf alle Teile nach allen Richtungen gleichmäßig fort.

Der Druck einer ruhenden Flüssigkeit (hydrostatischer Druck) wächst direkt proportional zur Flüssigkeitstiefe; er wird gemessen in kg/cm², m bzw. mm Wassersäule oder mm Quecksilbersäule.

1 kg/cm² = 10 m Wassersäule = 735 mm Quecksilbersäule. Der Flüssigkeitsdruck auf eine horizontale Fläche (Bodendruck) ist

$$P = F \cdot h \cdot \gamma$$

in t , wenn F in m², h in m, γ in t/m³ gemessen werden; er ist unabhängig von der Form des Gefäßes. Seitendruck. Der auf das Flächenelement von der Breite dy (Fig. 1) ausgeübte Druck ist

$$dP = y \cdot dF \cdot \gamma; \quad \text{so daß} \quad P = \int y \cdot dF \cdot \gamma = S \cdot \gamma,$$

wobei S das statische Moment der gedrückten Fläche bezogen auf den Flüssigkeitsspiegel bedeutet. Ist y_0 der Schwerpunktsabstand der gedrückten Fläche vom Flüssigkeitsspiegel, so wird

$$S = \int y \cdot dF = F \cdot y_0 = F \cdot \gamma_0 \cdot \gamma.$$

Das Schaubild der Druckverteilung ist eine unter 45° geneigte Gerade.

Der Angriffspunkt der Resultante P (Druckmittelpunkt) bestimmt sich nach der 3. Gleichgewichtsbedingung $\sum M = 0$ bezogen auf den Flüssigkeitsspiegel zu

$$\eta = \frac{\int y \cdot dF \cdot y}{\int y \cdot dF} = \frac{J}{S}.$$

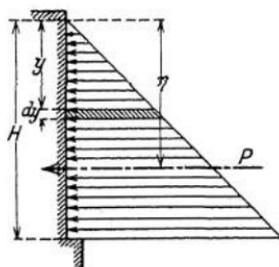


Fig. 1.

wobei J das Trägheitsmoment der gedrückten Fläche bezogen auf den Flüssigkeitsspiegel bedeutet.

Beispiel: Es ist der Druck auf eine rechteckige vertikale Fläche von der Breite b und der Höhe h zu bestimmen (Fig. 2).

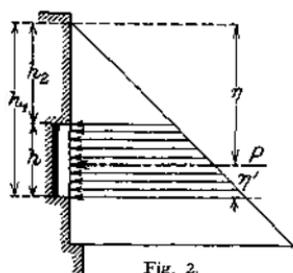


Fig. 2.

$$P = S \cdot \gamma = \gamma \int y \cdot dF = \gamma \int_{h_2}^{h_1} y \cdot b \cdot dy = \gamma \cdot b \int_{h_2}^{h_1} y \cdot dy$$

$$= \gamma \cdot \frac{b}{2} (h_1^2 - h_2^2)$$

$$\eta = \frac{J}{S} = \frac{\int y^2 \cdot dF}{\int y \cdot dF} = \frac{\int_{h_2}^{h_1} b \cdot y^2 \cdot dy}{b \int_{h_2}^{h_1} y \cdot dy} = \frac{2}{3} \cdot \frac{h_1^3 - h_2^3}{h_1^2 - h_2^2}$$

Ist die ebene Fläche F gegen die Horizontale um den Winkel α geneigt, so ist der Normaldruck

$$P = F \cdot \gamma_0 \cdot \gamma,$$

wobei γ_0 den vertikalen Abstand des Schwerpunktes der gedrückten Fläche vom Flüssigkeitsspiegel bedeutet; der Druckmittelpunkt hat die Koordinaten

$$\eta = \frac{J \cdot \sin \alpha}{S} = \frac{J \cdot \sin \alpha}{F \cdot \gamma_0}$$

$$\xi = \frac{J_{xy} \cdot \sin \alpha}{S} = \frac{J_{xy} \cdot \sin \alpha}{F \cdot \gamma_0},$$

wobei die X -Achse die Schnittgerade von F und der Flüssigkeitsoberfläche ist; J_{xy} bedeutet das Zentrifugalmoment von F bezogen auf die X - und Y -Achse.

Bei gekrümmten Flächen ermittelt man

1. den Horizontaldruck $H = F_v \cdot \gamma_0 \cdot \gamma$ = der Vertikalprojektion der gedrückten Fläche multipliziert mit dem Schwerpunktsabstand der gedrückten Fläche vom Flüssigkeitsspiegel und dem spezifischen Gewicht der Flüssigkeit;
2. den Vertikaldruck gleich dem Gewicht der von der krummen Fläche eingeschlossenen Flüssigkeit.

Auftrieb, Schwimmen, Stabilität. Ein in eine Flüssigkeit getauchter Körper vom Gewicht G (Fig. 3) erfährt einen Gewichtsverlust oder Auftrieb A , der

gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeitsmenge ist (**Displacement**). Der Angriffspunkt von G ist der Schwerpunkt S des eingetauchten Körpers, der Angriffspunkt von A der Schwerpunkt S' der verdrängten Flüssigkeitsmenge. Der Körper schwimmt frei, wenn $G = A$ ist und die Wirkungslinien beider Kräfte zusammenfallen. Wird der eingetauchte Körper aus seiner Gleichgewichtslage gebracht, d. h. wird die Schwimmachse um den Winkel α gedreht, so bilden G und A ein Kräftepaar, ihr

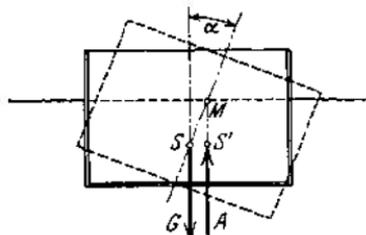


Fig. 3.

Hebelarm sei α , dessen Moment den eingetauchten Körper in seine ursprüngliche Lage zurückzuführen bestrebt ist. Der Schnittpunkt M der Wirkungslinie von A mit der Schwimmachse heißt **Metazentrum**. Das Drehmoment $A \cdot a$ heißt **Stabilitätsmoment**.

V. Wärmelehre.

Bearbeitet von Dipl.-Ing. M. Krause.

A. Allgemeine Eigenschaften.

Die Messung der Temperatur erfolgt mittels Thermometer. Die Hauptpunkte sind: 1. Eispunkt = Temperatur des schmelzenden Eises unter dem Druck von 1 Atm. absolut = $0^{\circ}\text{C} = 0^{\circ}\text{R} = +32^{\circ}\text{F}$; 2. Siedepunkt des chemisch reinen Wassers unter einem Druck von 760 mm Quecksilbersäule = $100^{\circ}\text{C} = 80^{\circ}\text{R} = 212^{\circ}\text{F}$.

Außer den gewöhnlichen Quecksilberthermometern gibt es elektrische Thermometer, die entweder auf der Veränderung des Leitungswiderstandes eines Drahtes mit der Temperatur beruhen oder aus einem Thermoelement bestehen.

Die Temperatur glühender Körper kann auch aus deren Farbe bestimmt werden.

Glühfarben des Eisens:

Schweißhitze . . .	1400—1500° C	Hellkirschrot	1000° C
Weißglühen	1300—1350° „	Kirschrot	900° „
Hellorange	1200° „	Dunkelkirschrot	800° „
Dunkelorange . . .	1100° „	Dunkelrot	700° „

Für keramische Zwecke (Herstellung feuerfester Ziegel) werden Segerkegel (Silikatgemische) als Temperaturanzeiger benutzt.

Schmelztemperaturen der Segerkegel.

Kegel Nr.	° C	Kegel Nr.	° C	Kegel Nr.	° C
7	1230	17	1480	33	1730
8	1250	18	1500	34	1750
9	1280	19	1520	35	1770
10	1300	20	1530	36	1790
11	1320	26	1580	37	1825
12	1350	27	1610	38	1850
13	1380	28	1630	39	1880
14	1410	29	1650	40	1920
15	1435	30	1670	41	1960
16	1460	31	1690	42	2000
		32	1710		

Die absolute Temperaturskala hat ihren Nullpunkt bei -273°C . Es ist $T^{\circ}\text{Kelvin} = 273 + t^{\circ}\text{C}$.

Im allgemeinen dehnen sich Körper bei Erwärmung aus. Der lineare Ausdehnungskoeffizient ist die Verlängerung eines Stabes von der Längeneinheit bei Erwärmung um 1°C ,

$$\alpha = \frac{1}{l} \frac{dl}{dt}.$$

Der kubische Ausdehnungskoeffizient ist die Vergrößerung des Volumens pro Volumeneinheit bei Erwärmung um 1°C ,

$$\beta = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt}.$$

Bei homogenen Körpern ist

$$\beta = 3\alpha,$$

$$l_t = l_0(1 + \alpha t),$$

$$V_t = V_0(1 + \beta t).$$

Für feste und flüssige Körper kann man ohne erhebliche Fehler setzen

$$\Delta l = l_1 - l_2 = l_1 \alpha (t_1 - t_2),$$

$$\Delta V = V_1 - V_2 = V_1 \beta (t_1 - t_2).$$

Lineare Ausdehnungskoeffizienten (bei mittleren Temperaturen):

Aluminium	0,000 024	Kupfer	0,000 017
Bronze	0,000 018	Glas (mittel)	0,000 007
Eisen und Stahl	0,000 011	Porzellan	0,000 003

Kubische Ausdehnungskoeffizienten von Flüssigkeiten:

Wasser	0,000 18	Äther	0,001 60
Quecksilber	0,000 181	Alkohol	0,001 10

Der kubische Ausdehnungskoeffizient ist bei allen Gasen gleich, und zwar ist $\beta = \frac{1}{273}$, bezogen auf das Volumen von 0° C. Demnach ist

$$V_t = V_0 \left(1 + \frac{t}{273} \right),$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{273 + t_1}{273 + t_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

T_1 und T_2 sind absolute Temperaturen.

Unter der Wärmeeinheit versteht man die Wärmemenge, die einem Kilogramm Wasser zugeführt werden muß, um es um 1° C zu erwärmen (1 WE = 1 Kilogrammkalorie = 1 Cal). 1 Grammkalorie = 1 cal = $\frac{1}{1000}$ WE.

Unter der spezifischen Wärme eines Stoffes versteht man diejenige Anzahl von Wärmeeinheiten, die einem Kilogramm zugeführt werden müssen, um es um 1° C zu erwärmen.

Bei Erwärmung eines Körpers von G kg Gewicht von t_1 auf t_2 ° C ist die zuzuführende Wärmemenge, wenn c die spezifische Wärme bedeutet,

$$Q = G c (t_2 - t_1),$$

c ist im allgemeinen von der Temperatur abhängig und zwar steigt sie bei festen und flüssigen Körpern mit der Temperatur.

$$c_m = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} c dt$$

heißt die mittlere spezifische Wärme in dem Temperaturbereich t_0 bis t_1 .

Spezifische Wärme einiger fester und flüssiger Körper:

Aluminium	0,21	Zink	0,094	Steinkohle	0,31
Blei	0,031	Zinn	0,056	Ziegelsteine	0,22
Gold	0,031	Asche	0,20	Äther	0,54
Konstantan	0,098	Beton	0,27	Alkohol	0,58
Kupfer	0,094	Eis	0,50	Ammoniak	1,00
Magnesium	0,25	Glas	0,20	Glycerin	0,58
Messing	0,092	Graphit	0,20	Maschinenöl	0,40
Nickel	0,11	Holz (Eiche)	0,57	Petroleum	0,50
Platin	0,032	Holz (Fichte)	0,65	Schwefelsäure	0,33
Quecksilber	0,033	Holzkohle	0,20	Schweflige Säure	0,32
Eisen u. Stahl	0,115	Koks	0,20		
Silber	0,056	Sandstein	0,22		

Unter dem Wasserwert eines Körpers versteht man das Produkt aus Gewicht und spezifischer Wärme. Bei größeren Gefäßen wird der Wasserwert berechnet, bei kleineren gewöhnlich durch Versuch bestimmt. Im letzteren Fall sind die Verluste durch Strahlung usw. mit im Wasserwert enthalten.

Werden Substanzen verschiedener Temperatur gemischt, so gilt stets die Gleichung: **aufgenommene Wärme = abgegebene Wärme.**

Beispiel: In einem Kalorimeter vom Wasserwerte G_w befinden sich G_1 g Flüssigkeit mit der spezifischen Wärme c_1 von der Temperatur t_1 , in welche ein fester Körper vom Gewichte G_2 mit der spezifischen Wärme c_2 und der Temperatur t_2 (t_2 sei höher als t_1) getaucht wird. Die Mischtemperatur sei t_3 . Dann ist:

$$G_1 c_1 (t_3 - t_1) + G_w (t_3 - t_1) = G_2 c_2 (t_2 - t_3).$$

Wird eine Flüssigkeit unter eine für jede Substanz charakteristische Temperatur (Gefrierpunkt) abgekühlt, so erstarrt sie. Beim Erwärmen über diese Temperatur schmilzt der erstarrte Körper wieder.

Unter der **Erstarrungswärme** einer Flüssigkeit versteht man die Wärmemenge, die einem Kilogramm der bereits auf die Erstarrungstemperatur abgekühlten Flüssigkeit entzogen werden muß, um sie in den festen Zustand überzuführen. Bei Erwärmen des festen Körpers ist zum Schmelzen der gleiche Wärmebetrag zuzuführen (Schmelzwärme).

Beispiel: In 100 kg Wasser von 50°C werden 30 kg Eis von 0°C geworfen. Die Mischtemperatur berechnet sich nach der Gleichung:

$$\underbrace{30 \cdot 80 + 30(t - 0) \cdot 1}_{\text{aufgenommene Wärme}} = \underbrace{100(50 - t) \cdot 1}_{\text{abgegebene Wärme}}.$$

Schmelz- und Gefrierpunkte einiger Körper bei 760 mm Q.-S. (Landolt-Börnstein¹⁾).

Alkohol, absolut	-100°C .	Stahl	$1300-1400^\circ\text{C}$.	Platin	1760°C .
Aluminium	625°C .	Gußeisen	$1130-1200^\circ\text{C}$.	Porzellan	1550°C .
Ammoniak	-78°C .	Glyzerin	-20°C .	Quecksilber	-39°C .
Äther	-118°C .	Iridium	2400°C .	Schwefel	115°C .
Blei	327°C .	Kupfer	1084°C .	Wasser	0°C .
Chlorkalziumlösung, gesättigt	-40°C .	Leinöl	-20°C .	Wachs	64°C .
Deltametall	950°C .	Meerwasser	$-2,5^\circ\text{C}$.	Wolfram	3000°C .
Eisen, rein	1500°C .	Messing	900°C .	Zink	419°C .
Flußeisen	$1350-1450^\circ\text{C}$.	Naphthalin	80°C .	Zinn	232°C .

Schmelzwärme verschiedener Körper.

Aluminium	77 WE/kg	Paraffin	35 WE/kg
Chlorkalzium	40,7 „	Quecksilber	2,8 „
Eis	80,0 „	Zink	28 „
Palmin	29 „		

Wird eine Flüssigkeit über eine für jede Substanz charakteristische Temperatur, den Siedepunkt, erhitzt, so verwandelt sie sich in Dampf. Die Höhe des Siedepunktes ist vom Druck abhängig, unter dem die Flüssigkeit steht.

Unter **Verdampfungswärme** versteht man die Anzahl Wärmeinheiten, die 1 kg einer Flüssigkeit von der Siedetemperatur zugeführt werden müssen, um sie in Dampf von der gleichen Temperatur zu verwandeln. Die Verdampfungswärme ist vom Druck abhängig und nimmt mit steigendem Druck ab. Bei der Kondensation von Dampf wird die gleiche Wärmemenge frei.

Beispiele: 1. 5000 kg Wasser von 20°C sollen durch Mischen mit Dampf von atmosphärischer Spannung auf 70°C erwärmt werden. Wieviel kg Dampf sind nötig? Die Verdampfungswärme des Wassers beträgt bei 1 Atm. abs. 539,7 WE.

$$5000(70 - 20) = x(539,7 + (100 - 70)),$$

$$x = \frac{5000 \cdot 50}{589,7} \approx 425 \text{ kg.}$$

2. Es sollen 5000 kg Wasser von 20°C auf 70°C durch Dampf von 1 Atm. abs. im Gegenstrom erwärmt werden, so daß das Kondensat mit einer Temperatur von 30°C den Apparat verläßt. Welche Dampfmenge ist nötig?

$$5000(70 - 20) = x(539,7 + (100 - 30)), \quad x = \frac{5000 \cdot 50}{609,7} \approx 410 \text{ kg.}$$

¹⁾ Landolt-Börnstein, Physikalisch-chemische Tabellen. 4. Aufl. Berlin 1912. Julius Springer.

Siedepunkte einiger Körper bei 760 mm Q.-S. (nach Landolt-Börnstein).

Anilin 184° C.	Kohlensäure — 78° C.	Stickstoff — 196° C.
Alkohol absolut 78,5° C.	Kohlenoxyd — 190° C.	Stickoxydul (N ₂ O)
Äther 35° C.	Leinöl 316° C.	— 87,2° C.
Benzol 80° C.	Paraffin 300° C.	Stickoxyd (NO)
Chlor — 33,6° C.	Quecksilber 357° C.	— 147° C.
Helium — 268° C.	Schwefel 446° C.	Wasser 100° C.
Gesättigte Kochsalzlösung	Sauerstoff — 183° C.	Wasserstoff — 253° C.
108° C.	Schwefelkohlenstoff 46° C.	

Verdampfungswärme bei 760 mm Q.-S.

Ammoniak . . . 327 Cal/kg	Chlormethyl . . . 97 Cal/kg	Stickstoff . . . 48 Cal/kg
Äther 90 „	Quecksilber . . . 68 „	Wasser 539 „
Alkohol 210 „	Sauerstoff . . . 51 „	Wasserstoff . . . 123 „
Chlor 70 „	Schwefl. Säure 92,3 „	

B. Wärmeübergang durch Berührung und Leitung.

Die Grundeinheiten, mit denen in der Wärmelehre im allgemeinen gerechnet wird, sind: Stunde, kg, m, ° C, Cal. Werden andere Einheiten gewählt, so ist das besonders hervorzuheben.

Trennt eine Wand von der Dicke δ m und der Oberfläche F qm zwei Flüssigkeiten von der Temperatur t_1 und t_2 , so ist die stündlich von der einen Flüssigkeit zur anderen übergehende Wärmemenge

$$Q = k \cdot F(t_1 - t_2), \quad \text{Wahl } \lambda$$

k ist die Wärmedurchgangszahl. Es ist

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{\lambda}}$$

α_1 und α_2 sind die Wärmeübergangszahlen der Wand an die eine bzw. die andere Flüssigkeit. Sie sind abhängig vor allem von der Art der Flüssigkeit, sowie von deren Bewegungszustand, nicht aber vom Material der Wand.

Mittelwerte für α sind:

1. für siedendes Wasser $\alpha = 4000$ bis 6000 , je nach der Umlaufgeschwindigkeit;

2. für kondensierenden Dampf $\alpha = 10\,000$ und mehr, je nach der Geschwindigkeit, mit der das Kondensat abgeführt wird;

3. für nicht siedendes Wasser $\alpha = 300 + 1800\sqrt{v}$, wobei v die Wassergeschwindigkeit in Metern pro Sekunde ist. Bei sehr dünnen Röhren, bis ca. 7 mm Durchmesser, ist α im Innern bis doppelt so groß;

4. für Luft ist $\alpha = 2 + 10\sqrt{v}$.

λ ist die Wärmeleitzahl des Materials der Rohrwand, das ist die stündlich durch eine Platte von 1 qm Querschnitt und 1 m Dicke überströmende Wärmemenge bei 1° C Temperaturdifferenz.

Werte für λ :

Eisen	40 bis 50	Asbest	} 0,13 bei 0° C 0,29 bei 400° C
Kupfer	330	Messing	
Porzellan	0,9	Kieselgur	
Silber	360	Seidenzopf	0,04
Platin	60	Korkstein, asphaltiert	0,06
Ziegelmauerwerk	0,35	Blätterholzkohle	0,06
Ruhende Luft ¹⁾	0,02	Wasser ruhend	0,5
		Eis	2

¹⁾ Luft in vertikalen Schichten darf nie als ruhend betrachtet werden.

Für dünne Metallwände kann $\frac{\delta}{\lambda} = 0$ gesetzt werden.

Ist die Temperatur auf beiden Seiten veränderlich (Fig. 1), so ist die stündlich übertragene Wärmemenge

$$Q = k F \cdot \frac{(t_1' - t_2') - (t_1'' - t_2'')}{\ln \frac{t_1' - t_2''}{t_1'' - t_2'}}$$



Fig. 1.

Ist jedoch

$$\frac{t_1' - t_2'}{t_1'' - t_2''} \geq 0,5 \quad \text{oder} \quad \leq 5,$$

so kann man auch setzen

$$Q = k F \cdot \left(\frac{t_1' + t_1''}{2} - \frac{t_2' + t_2''}{2} \right).$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß auf keiner Seite der Wand Änderungen des Aggregatzustandes auftreten. Ist das der Fall, wie z. B. bei Dampfkondensatoren, so müssen die Teile, in denen die Kondensation des Dampfes und die Unterkühlung des Kondensates stattfinden, getrennt berechnet werden.

Beispiele: 1. Durch einen Abdampfwasservorwärmer sollen stündlich 2 cbm Wasser von 20° C auf 60° durch Auspuffdampf erwärmt werden. Welche Heizfläche ist erforderlich, wenn die Geschwindigkeit des Wassers in den Röhren 0,8 m beträgt? Die Wandstärke der Messingrohre betrage 1 mm.

Es ist auf der Wasserseite $\alpha_1 = 300 + 1800 \sqrt{0,8} = 1910$, auf der Dampfseite $\alpha_2 = 10000$

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{0,001}{100}.$$

Mithin:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{1910} + \frac{1}{10000} + \frac{0,001}{100}} = \infty 1600.$$

Wasserseite 20° C 60° C,
Dampfseite 100° C 100° C.

$$t_1' - t_2' = 80,$$

$$t_1'' - t_2'' = 40.$$

$$\frac{t_1' - t_2'}{t_1'' - t_2''} = 5.$$

$$Q = 2000 \cdot 40 = F \cdot 1600 \cdot 40,$$

$$F = \frac{2000}{1600} = \infty 1,9 \text{ qm.}$$

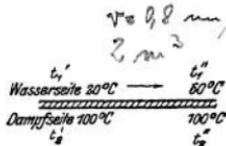


Fig. 2.

2. Stündlich 2 cbm Wasser von 10° C sollen durch stündlich 4 cbm Wasser von 60° C im Gegenstrom auf 58° C erwärmt werden. Wie groß muß die Kühlfläche sein, wenn die Wassergeschwindigkeit in den Röhren 1,6, die um die Rohre 0,25 m beträgt? Die Rohre bestehen aus Eisen von 2 mm Wandstärke. Die Endtemperatur des warmen Wassers berechnet sich nach der Gleichung:

$$4000(60 - x) = 2000(58 - 10),$$

$$x = 36^\circ \text{ C.}$$

$$\alpha_1 = 300 + 1800 \sqrt{1,6} = 2570,$$

$$\alpha_2 = 300 + 1800 \sqrt{0,25} = 1200,$$

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{0,002}{50} = 0,00004,$$

$$k = \frac{1}{\frac{1}{2570} + \frac{1}{1200} + 0,00004} = 790.$$

$$\begin{array}{ccc} t_1' & \rightarrow & t_1'' \\ 10^\circ \text{ C} & & 58^\circ \text{ C} \\ 36^\circ \text{ C} & \leftarrow & 60^\circ \text{ C} \\ t_2' & & t_2'' \end{array}$$

$$\frac{t_2' - t_1'}{t_2'' - t_1''} = \frac{26}{2} = 13 > 5.$$

Demnach ist:

$$2000 \cdot 48 = F \cdot 790 \cdot \frac{26 - 2}{\ln \frac{26}{2}} = F \cdot 790 \cdot \frac{24}{2,56};$$

$$F = \infty 13 \text{ qm.}$$

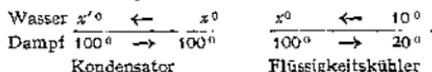
[Bei Berechnung mit der ungenaueren Formel hätte man erhalten:

$$2000 \cdot 4,8 = F \cdot 790 \cdot (48 - 34);$$

$$F = \infty 8,7 \text{ qm, also eine zu kleine Fläche.}]$$

3. Es sollen stündlich 150 kg Dampf von 100°C durch 3 cbm Wasser von 10°C kondensiert und auf $+20^{\circ}\text{C}$ unterkühlt werden. Welche Fläche ist erforderlich?

Dampf und Wasser durchströmen den Kondensator im Gegenstrom. Für die Berechnung muß man in Kondensator und Flüssigkeitskühler teilen.



Es berechnet sich die Temperatur des Kühlwassers nach dem Ausströmen aus dem Flüssigkeitskühler nach der Gleichung:

$$3000(x - 10) = 150(100 - 20) \quad \text{zu}$$

$$x = 14^{\circ}\text{C}$$

und die Temperatur des Kühlwassers beim Austritt aus dem Kondensator nach der Gleichung:

$$3000(x' - 14) = 150 \cdot 539,7 \quad \text{zu}$$

$$x' = \infty 41^{\circ}\text{C.}$$

Die Berechnung der Flächen der einzelnen Teile erfolgt wie in den vorhergehenden Beispielen.

C. Thermodynamik.

Erster Hauptsatz:

Wärme und Arbeit sind gleichwertig (äquivalent).

Überall, wo durch Wärme Arbeit geleistet wird, verschwindet Wärme, und zwar ist das Verhältnis der verschwundenen Wärmemenge zur geleisteten Arbeit konstant, wie auch die Arbeitsleistung zustande gekommen sein mag. Umgekehrt tritt an Stelle verschwundener mechanischer Energie stets eine proportionale Wärmemenge auf, wenn andere Energieformen ausgeschlossen sind. Wenn Q die Wärmemenge, L die Arbeit in mkg ist, so wird

$$Q = AL.$$

Der Proportionalitätsfaktor A heißt das mechanische Wärmeäquivalent und ist gleich $\frac{1}{427}$.

Die Dimension von A ist $\frac{\text{WE}}{\text{mkg}}$.

Man kann also einen Energiebetrag sowohl in mkg als auch in WE messen.

Z. B.: $50 \text{ WE} = 21350 \text{ mkg.}$

Wird einem Körper Wärme zugeführt, so wird diese im allgemeinen dazu verwendet:

1. seinen Wärmehalt, die innere Energie, die zu vergrößern;
 2. das Volumen unter Überwindung des äußeren Druckes zu vergrößern, also mechanische Arbeit zu leisten;
 3. die kinetische Energie des arbeitenden Körpers zu vergrößern.
- Dieser letztere Betrag kann bei Kolbenmaschinen im allgemeinen vernachlässigt werden, was auch im folgenden geschehen soll.

Die innere Energie U ist bei Gasen deren absoluter Temperatur proportional. Die kinetische Energie der Moleküle wird erhöht. Bei Dämpfen treten noch Energiebeträge hinzu, die der Arbeit zur Überwindung der Anziehung der Moleküle unter-

einander, also einer Vermehrung der potentiellen Energie der Moleküle, entsprechen. Es ist

$$dQ = dU + A p dV,$$

wobei $p dV$ die mechanische äußere Arbeit in mkg, $A p dV$ dieselbe Arbeit in WE bedeutet.

a) Die Mechanik der Gase.

Bei vollkommenen Gasen sind bei der Ausdehnung innere Kräfte nicht zu überwinden. Der Zuwachs an innerer Energie ist proportional dem Temperaturzuwachs, der kinetischen Energie der Moleküle.

1. Spezifische Wärme.

Erwärmt man ein Gas bei gleichbleibendem Volumen — ohne daß äußere Arbeit geleistet wird, wobei also die Wärme ganz zur Erhöhung der inneren Energie verwandt wird —, so ist die spezifische Wärme c_v .

Wird die Erwärmung bei konstantem Druck ausgeführt, also bei veränderlichem Volumen, so ist außer der Erhöhung der inneren Energie noch äußere Arbeit zu leisten. Die spezifische Wärme ist dann c_p , wobei $c_p > c_v$. c_v und c_p sind für mittlere Temperaturen als konstant anzusehen. Das Verhältnis

$$\frac{c_p}{c_v} = \kappa$$

ist für einatomige Gase 1,66, für zweiatomige 1,41.

Ferner ist $c_p - c_v = A \cdot R$, wobei R die Gaskonstante (siehe unten) ist.

Mit Einführung der spezifischen Wärme nimmt der erste Hauptsatz die Form an

$$dQ = c_v dT + A p dV,$$

oder für 1 kg Gas

$$dQ = c_v dT + A p dv.$$

2. Zustandsänderungen.

Bezeichnet

p den Druck in kg/qcm²,

v das spezifische Volumen, d. h. das Volumen von 1 kg Gas in m³/kg,

G das Gewicht der Gasmenge in kg,

$V = v \cdot G$ das Volumen einer bestimmten Gasmenge,

v_0 das spezifische Volumen bei 0° C,

t die Temperatur in ° C,

T die absolute Temperatur (° K), wobei $T = 273 + t$,

so ist

$$p \cdot v = p_0 v_0 (1 + \alpha t).$$

Der Ausdehnungskoeffizient α ist für alle Gase konstant $\frac{1}{273}$.

Demnach ist

$$p \cdot v = \frac{p_0 v_0}{273} (273 + t) = \frac{p_0 v_0}{273} T.$$

Setzt man

$$\frac{p_0 v_0}{273} = R,$$

so ist

$$p \cdot v = RT \text{ (Allgemeine Zustandsgleichung).}$$

R heißt die Gaskonstante und hat für jedes Gas einen andern Wert. Die Dimension von R ist $\frac{\text{m}}{\text{°K}}$.

Aus dieser allgemeinen Zustandsgleichung lassen sich in Verbindung mit dem ersten Hauptsatz spezielle Zustandsgleichungen ableiten.

3. Isothermische Zustandsänderung.

Setzt man $T = \text{konst.}$, so wird

$$p \cdot v = \text{konst.}$$

oder

$$p_1 v_1 = p_2 v_2 ; \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

(Mariottesches Gesetz).

Die Größe der Konstanten RT ist von der Temperatur abhängig. Im $p \div v$ -Diagramm (Fig. 3) stellt die Gleichung

$$p \cdot v = RT_1 = \text{konst.}$$

eine gleichseitige Hyperbel dar.

(Die Konstruktion der Hyperbel siehe S. 132.)

Da die Temperatur sich nicht ändert, bleibt die innere Energie konstant.

Dehnt sich das Gas von v_0 auf v aus, so wird dabei pro kg Gas eine Arbeit geleistet, die durch die in Fig. 3 schraffierte Fläche gemessen wird. Diese Fläche ist nach S. 175:

$$L = p v \ln \frac{v_2}{v_1} \text{ mkg.}$$

Wegen $p v = RT_1$ kann man auch schreiben

$$L = RT_1 \ln \frac{v_2}{v_1} = RT_1 \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Der erste Hauptsatz lautet für die isothermische Zustandsänderung:

$$dQ = A p dv$$

$$Q = AL = ART_1 \ln \frac{v_2}{v_1}.$$

Die Wärmemenge Q ist dem Gase bei isothermischer Expansion zuzuführen, bei isothermischer Kompression abzuführen. Sie wird vollständig in Arbeit umgesetzt.

4. Zustandsänderung bei konstantem Druck.

(Gesetz von Gay Lussac.)

Es wird

$$v = \frac{v_0 p_0}{p_0} (1 + \alpha t) = v_0 (1 + \alpha t),$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Die äußere Arbeit ist

$$L = (v_2 - v_1) p_0.$$

Der erste Hauptsatz für diese Zustandsänderung lautet:

$$\begin{aligned} Q &= c_v(T_2 - T_1) + A p (v_1 - v_2), \\ &= c_v(T_2 - T_1) + AR(T_2 - T_1) = (T_2 - T_1)(c_v + AR). \end{aligned}$$

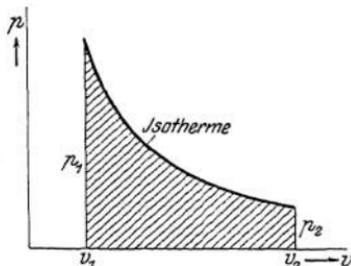


Fig. 3.

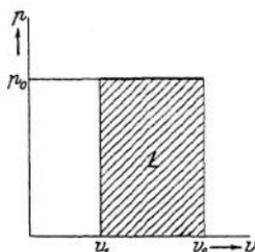


Fig. 4.

Da aber nach der Definition von c_p auch gilt

$$Q = c_p(T_2 - T_1),$$

so ist

$$c_p = c_v + AR$$

oder

$$c_p - c_v = AR.$$

5. Zustandsänderung bei konstantem Volumen.

Es ist

$$p = \frac{RT}{v_0} = p_0(1 + \alpha t),$$

wobei p_0 der Druck bei 0°C bedeutet.

Ferner ist

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Da bei dieser Zustandsänderung äußere Arbeit nicht geleistet wird, ist:

$$dQ = c_v dT,$$

also die zugeführte Wärme

$$Q = c_v(T_2 - T_1).$$

Sie wird ganz zur Erhöhung der inneren Energie verwandt.

6. Die adiabatische Zustandsänderung

(ohne Zufuhr oder Abfuhr von Wärme).

Der erste Hauptsatz für diese Zustandsänderung lautet:

$$0 = c_v dT + A p dv,$$

d. h. die Leistung der äußeren Arbeit erfolgt bei einer Expansion gänzlich auf Kosten der inneren Energie, ist also mit einer Absenkung der Temperatur verbunden, während bei einer Kompression die gesamte aufgewandte Arbeit zur Erhöhung der inneren Energie, also der Temperatur verwandt wird.

Die Zustandsgleichung lautet:

$$p v^k = \text{konst.},$$

wobei

$$k = \frac{c_p}{c_v},$$

oder

$$\frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Die geleistete Arbeit ist

$$\int A p dv = AL = c_v(T_2 - T_1), \text{ in Wärmeeinheiten gemessen}$$

oder auch

$$L = \frac{pv}{k-1} \left[1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^{k-1} \right] = \frac{pv}{k-1} \left[1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{k-1}{k}} \right] \text{ in mkg.}$$

Die Konstruktion der Kurve $p v^k = \text{konst.}$ s. S. 132.

7. Die polytropische Zustandsänderung.

Wird einem Gase während einer Zustandsänderung Wärme zu- oder abgeführt und zwar derart, daß die Temperatursteigerung der zugeführten Wärmemenge proportional ist, so erfolgt die Zustandsänderung polytropisch.

Ist c die Wärmemenge, die 1 kg Gas zugeführt werden muß, um neben der Arbeitsleistung eine Erwärmung um 1°C zu erzielen, und setzt man

$$\frac{c - c_p}{c - c_v} = m,$$

so ist die Gleichung der Polytrope

$$p \cdot v^m = \text{konst.}$$

Der erste Hauptsatz nimmt hier die Form an

$$dQ = c dT = c_v dT + A p dv.$$

also

$$(c - c_v) dT = A p dv.$$

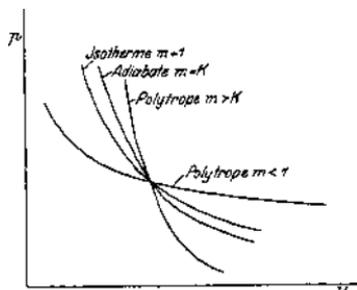


Fig. 5.

Die Zustandsgleichung ist mit derjenigen der Adiabate identisch bis auf den Exponenten. Demnach gelten hier alle Formeln der Adiabate, wenn man für k den Wert m einsetzt.

Adiabate und Isotherme sind als Polytropen aufzufassen, für welche $m = k$ bzw. $m = 1$ geworden ist.

Expansionskurven, deren Exponent $m > k$, sind mit Wärmeabfuhr solche, bei denen $m < k$, sind mit Wärmezufuhr verbunden.

Die Lage der verschiedenen polytropischen Kurven ist aus Fig. 5 ersichtlich.

Die Konstruktion der Polytrope ist derjenigen der Adiabate entsprechend (S. 132).

Die folgende Zahlentafel gibt für häufige Werte des Exponenten m den Winkel β , wenn $\alpha = 30^\circ$ gewählt ist

m	β	m	β
1,00	30°	1,26	$37^\circ 50'$
1,05	$31^\circ 30'$	1,28	$38^\circ 25'$
1,10	33°	1,30	$39^\circ 00'$
1,15	$34^\circ 30'$	1,33	$39^\circ 50'$
1,20	36°	1,35	$40^\circ 20'$
1,22	$36^\circ 40'$	1,38	$41^\circ 20'$
1,24	$37^\circ 10'$	1,41	42°

Die Arbeit, die während einer Expansion geleistet wird, bzw. die bei der Kompression aufzuwenden ist, ist durch die Fläche unter der Kurve dargestellt.

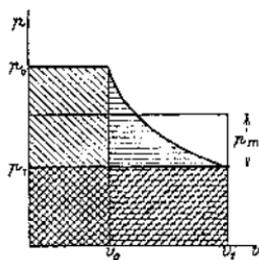


Fig. 6.

Von dieser Arbeit ist die Arbeit des Kompressors zu unterscheiden, der auch noch das Ausschleiben der komprimierten Gasmenge sowie das Ansaugen des neuen Gases zu besorgen hat. In Fig. 6 wird die Kompressionsarbeit durch die $///$ schraffierte, die Ausschubarbeit durch die $|||$ schraffierte Fläche dargestellt. Von der Summe dieser beiden Flächen ist die $|||$ schraffierte abzuziehen, welche die von dem Gas, das in den Kompressor nachströmt, geleistete Arbeit darstellt.

Verwandelt man diese Differenzfläche in ein Rechteck von der Länge v_1 und der Höhe p_m , Fig. 6, so läßt sich der Wert von p_m der folgenden

Tabelle entnehmen, in welche außerdem noch das Verhältnis der Temperaturen vor und nach der Zustandsänderung eingetragen ist.

$m =$	1,0		1,1		1,2		1,3		1,41	
	$\frac{p_0}{p_1}$	$\frac{p_m}{p_1}$	$\frac{T_0}{T_1}$	$\frac{p_m}{p_1}$	$\frac{T_0}{T_1}$	$\frac{p_m}{p_1}$	$\frac{T_0}{T_1}$	$\frac{p_m}{p_1}$	$\frac{T_0}{T_1}$	$\frac{p_m}{p_1}$
1,1	0,095	1,009	0,096	1,016	0,096	1,022	0,096	1,028	0,097	
1,2	0,182	1,017	0,184	1,031	0,185	1,043	0,186	1,054	0,187	
1,3	0,262	1,024	0,266	1,045	0,268	1,063	0,271	1,080	0,272	
1,4	0,336	1,031	0,342	1,058	0,346	1,081	0,350	1,103	0,354	
1,5	0,405	1,038	0,413	1,070	0,419	1,098	0,425	1,125	0,430	
1,6	0,470	1,044	0,480	1,081	0,489	1,115	0,487	1,146	0,504	
1,7	0,531	1,049	0,544	1,092	0,553	1,130	0,565	1,167	0,574	
1,8	0,588	1,055	0,606	1,103	0,617	1,145	0,630	1,186	0,641	
1,9	0,642	1,060	0,660	1,113	0,678	1,160	0,692	1,205	0,706	
2,0	0,693	1,066	0,716	1,122	0,735	1,173	0,752	1,224	0,771	
2,2	0,788	1,074	0,817	1,140	0,843	1,200	0,865	1,258	0,886	
2,4	0,875	1,083	0,911	1,157	0,943	1,224	0,970	1,290	0,997	
2,6	0,956	1,091	0,998	1,173	1,036	1,247	1,070	1,320	1,101	
2,8	1,030	1,098	1,079	1,187	1,123	1,268	1,163	1,349	1,200	
3,0	1,099	1,105	1,157	1,201	1,206	1,288	1,249	1,387	1,295	
3,2	1,163	1,111	1,227	1,214	1,284	1,308	1,344	1,402	1,384	
3,4	1,224	1,118	1,296	1,226	1,358	1,327	1,414	1,427	1,470	
3,6	1,281	1,124	1,359	1,238	1,427	1,344	1,491	1,451	1,553	
3,8	1,335	1,129	1,419	1,246	1,495	1,361	1,564	1,474	1,631	
4,0	1,386	1,134	1,479	1,261	1,563	1,389	1,684	1,497	1,708	
4,2	1,435	1,139	1,533	1,270	1,621	1,395	1,711	1,518	1,781	
4,4	1,482	1,144	1,586	1,280	1,681	1,408	1,767	1,538	1,852	
4,6	1,526	1,149	1,637	1,290	1,738	1,423	1,830	1,558	1,921	
4,8	1,569	1,153	1,686	1,299	1,792	1,437	1,891	1,578	1,986	
5,0	1,609	1,158	1,779	1,308	1,846	1,450	1,947	1,597	2,053	
5,5	1,740	1,168	1,844	1,328	1,971	1,482	2,089	1,641	2,206	
6,0	1,792	1,177	1,948	1,348	2,088	1,512	2,216	1,681	2,344	
6,5	1,872	1,185	2,040	1,367	2,196	1,541	2,341	1,723	2,492	
7,0	1,496	1,194	2,131	1,383	2,299	1,567	2,454	1,758	2,608	
7,5	2,015	1,201	2,216	1,399	2,394	1,592	2,566	1,796	2,739	
8,0	2,079	1,208	2,291	1,414	2,485	1,616	2,666	1,828	2,847	
8,5	2,140	1,215	2,362	1,429	2,571	1,639	2,768	1,863	2,968	
9,0	2,197	1,221	2,435	1,442	2,653	1,660	2,858	1,891	3,066	
9,5	2,251	1,227	2,498	1,455	2,732	1,680	2,945	1,924	3,190	
10,0	2,303	1,233	2,561	1,468	2,807	1,701	3,036	1,951	3,271	
11,0	2,398	1,243	2,676	1,491	2,948	1,741	3,209	2,005	3,455	
12,0	2,485	1,253	2,788	1,513	3,079	1,774	3,352	2,056	3,632	
13,0	2,565	1,263	2,889	1,533	3,201	1,808	3,500	2,108	3,811	
14,0	2,639	1,271	2,982	1,552	3,315	1,839	3,635	2,154	3,969	
15,0	2,708	1,279	3,109	1,570	3,423	1,869	3,763	2,197	4,119	
16,0	2,773	1,287	3,153	1,587	3,524	1,897	3,884	2,240	4,265	

Beispiel: Es sollen stündlich 1000 cbm Luft von 10° C und 2 Atm. abs. auf 10 Atm. abs. komprimiert werden, und zwar beträgt der Exponent der Polytrope 1,3. Welche Arbeitsleistung ist aufzuwenden und wie hoch ist die Temperatur am Ende der Kompression.

Nach der Tabelle ist für

$$\frac{p_0}{p_1} = 5 \text{ der Wert } \frac{p_m}{p_1} = 1,947;$$

dennach ist $p_m = 2 \cdot 10\,000 \cdot 1,947 = 38\,940$ kg/qm. Der stündliche Arbeitsaufwand ist daher $A = 38\,940 \cdot 1000$ m/kg und die Leistung $= \frac{38\,940 \cdot 1000}{3\,600 \cdot 75} = \approx 177$ PSI.

im Kompressorzylinder gemessen. Die Größe des schädlichen Raumes hat auf die Rechnung keinen Einfluß, wenn man nur mit dem tatsächlich geförderten Luftvolumen und nicht mit dem Hubvolumen des Kompressors rechnet.

Die Endtemperatur ergibt sich, da $\frac{T_0}{T_1} = 1,450$ zu $T_0 = 1,450 \cdot 283 = 410^\circ \text{K} = 137^\circ \text{C}$.

Den geringsten Kraftbedarf erhält man bei isothermischer Kompression, die jedoch praktisch selbst bei starker Kühlung nicht zu verwirklichen ist. Man kann sich ihr nur durch mehrstufige Kompression und Zwischenkühlung nähern.

8. Kreisprozesse.

Die Arbeit, die 1 kg Gas während eines Kreisprozesses leistet, ist abhängig von den Zwischenzuständen, die es einnimmt. Im $p-v$ -Diagramm stellt der Inhalt des Diagrammes (Fig. 7) die per Hub geleistete Arbeit dar. Während eines jeden Kreisprozesses muß Wärme sowohl zu- als auch abgeführt werden. Die Differenz zwischen der zugeführten und der abgeführten Wärmemenge ist die Arbeitsleistung im Wärme- η -maß gemessen. Kreisprozesse, bei denen Wärme nur zugeführt, nicht aber auch abgeführt wird, bei denen also die zugeführte Wärme vollständig in Arbeit umgewandelt wird, sind unmöglich. Ist Q_1 die gesamte zugeführte, Q_2 die gesamte abgeführte Wärmemenge, so ist der thermische Wirkungsgrad

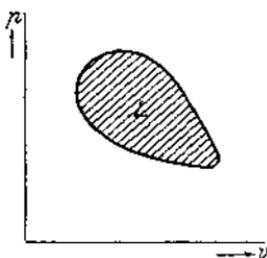


Fig. 7.

$$\eta = \frac{AL}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

Unter allen möglichen Kreisprozessen bei bestimmten Arbeitsbedingungen haben diejenigen den günstigsten Wirkungsgrad, bei denen alle vorkommenden Zustandsänderungen umkehrbar, reversibel sind. Ein Vorgang ist umkehrbar, wenn er auch in umgekehrter Richtung verlaufen kann, so daß sich am Schluß der umgekehrten Zustandsänderung alle beteiligten Körper in gleichen Zustände wie am Anfang befinden.

Umkehrbare Zustandsänderungen sind: Adiabatische Expansion bzw. Kompression, Wärmeübergang zwischen zwei Körpern von gleicher Temperatur, Verdampfen und Kondensieren unter der Voraussetzung, daß der Heiz- bzw. der Kühlkörper die Temperatur des Siedepunktes hat, isothermische oder auch polytropische Expansion und Kompression, unter der Voraussetzung, daß der Heiz- bzw. der Kühlkörper jeweils die Temperatur des arbeitenden Mediums besitzt. Ferner sind umkehrbar: Absorption von Gasen in Flüssigkeiten bzw. das Austreiben des Gases aus der Flüssigkeit, wenn stets der Gasdruck über der Flüssigkeit herrscht, welche der Lösungskonzentration entspricht.

Nicht umkehrbar sind: Reibung in jeder Form, also Drosselung in Rohrleitungen, Reibung fester Körper, unvollkommene Elastizität, ferner Wärmeübergang zwischen Körpern, deren Temperaturen verschieden sind, Absorption oder Austreibung von Gasen, wenn der Gasdruck nicht der Lösungskonzentration entspricht, sowie Wärmeerzeugung infolge des Ohmschen Widerstandes.

Vollkommen reversible Prozesse sind in Wirklichkeit ausgeschlossen, da Reibung stets vorhanden ist, alle Körper nur unvollkommen elastisch sind, und man stets mit Temperaturdifferenzen von endlicher Größe arbeiten muß, um mit endlichen Wärmeübertragungsflächen bzw. endlichen Zeiten auszukommen, auch den Einfluß der Zylinderwandungen bei Dampfmaschinen und Kompressoren nicht ausschalten kann. Man wird aber stets versuchen, die Drosselung auf ein Mindestmaß zu beschränken, Reibung zu verringern, die Wärme austauschenden

Körper im Gegenstrom aneinander vorbeizuführen, wobei es möglich ist, mit kleinsten Temperaturdifferenzen auszukommen, die Menge der an die Zylinder- und Rohrwandungen übergehende Wärme, so klein wie möglich zu halten (durch Isolierung der Leitung, Überhitzung des Dampfes usw.). Liegen die Bedingungen eines Kreisprozesses fest, sollen z. B. 1000 kg Luft von 1500° C Wärme entzogen und soll bei möglichst großer Arbeitsleistung die Abführung der Abwärme durch 100 kg Wasser von ursprünglich 10° C erfolgen, so ist der Wirkungsgrad, also die Größe der geleisteten mechanischen Arbeit, zwar im allgemeinen von den Zwischenzuständen des arbeitenden Mediums (z. B. Wasserdampf, Leuchtgas) abhängig; sind aber alle Zustandsänderungen umkehrbar, so wird der Wirkungsgrad ein Maximum, und zugleich wird die Größe der Arbeitsleistung unabhängig von der Substanz des Mediums und dessen Zwischenzuständen, wird also bei allen umkehrbaren Kreisprozessen gleich groß. Die nur mit umkehrbaren Vorgängen arbeitende Maschine ist eine ideale. Zur Bestimmung des Wirkungsgrades der idealen Maschine ist die Kenntnis der Temperaturänderungen im Heiz- und im Kühlkörper während des Kreisprozesses erforderlich.

Besonders einfach gestaltet sich die Rechnung im

Carnotschen Kreisprozeß.

Bei diesem ist vorausgesetzt, daß sowohl der Heiz- als auch der Kühlkörper von unendlich großer spezifischer Wärme sind, derart also, daß beliebige Wärmemengen zu- oder abgeführt werden können, ohne daß eine Erhöhung oder Absenkung der Temperatur der Körper erfolgt, sowie daß die Zylinderwandungen wärmedicht sind, also keine Aufnahme von Wärme durch die Zylinderwand erfolgt. Er setzt sich aus folgenden vier umkehrbaren Prozessen zusammen: I. Expansion bei der Temperatur des Heizkörpers T_1 , II. adiabatische Expansion bis zur Absenkung der Temperatur auf die des Kühlkörpers T_2 , III. isothermische Kompression bei der Temperatur T_2 , IV. adiabatische Kompression bis zum Erreichen des Anfangszustandes. Während des Prozesses I wird die Wärmemenge Q_1 zu-, während des Prozesses III die Wärmemenge Q_2 abgeführt (Fig. 8).

$$\text{Es ist} \quad Q_1 = RT_1 \ln \frac{v_2}{v_1}, \quad \text{und} \quad Q_2 = RT_2 \ln \frac{v_3}{v_4},$$

$$\text{also} \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \frac{\ln \frac{v_2}{v_1}}{\ln \frac{v_3}{v_4}};$$

$$\text{da ferner} \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{v_3}{v_2}\right)^{k-1} = \left(\frac{v_4}{v_1}\right)^{k-1},$$

$$\text{also} \quad \frac{v_3}{v_4} = \frac{v_2}{v_1},$$

$$\text{ist} \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{und} \quad \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}.$$

$$\text{Mithin wird} \quad \eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1};$$

die geleistete Arbeit ist also

$$AL = Q_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Der erste Hauptsatz für den Carnotprozeß lautet $Q_1 = Q_2 + Q_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1}$.

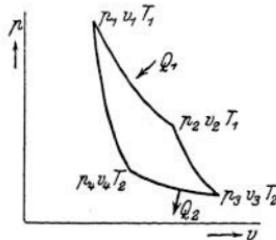


Fig. 8.

Zweiter Hauptsatz:

Die für den Carnotschen Kreisprozeß abgeleiteten Beziehungen gelten für alle umkehrbaren Prozesse, welche den Voraussetzungen des Carnotschen entsprechen, gleichgültig, ob das arbeitende Medium ein Gas oder ein Dampf ist.

Sind Heiz- und Kühlkörper nicht von unendlicher, sondern von endlicher Wärmekapazität, so läßt sich die isothermische Zustandsänderung nur während des Überströmens der unendlich kleinen Wärmemenge dQ umkehrbar durchführen. Man kann jeden beliebigen umkehrbaren Prozeß in unendlich viele Elementarprozesse unterteilen, für deren jeden die Beziehung

$$\frac{dQ_1}{T_1} = \frac{dQ_2}{T_2} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{dQ_1 - dQ_2}{dQ_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

also auch

$$dQ_1 = dQ_2 + \frac{T_1 - T_2}{T_1} dQ_1 \quad \text{gilt.}$$

Wegen ihrer allgemeinen Bedeutung wird die Gleichung $\frac{dQ_1}{T_1} = \frac{dQ_2}{T_2}$ als zweiter Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie bezeichnet.

Sind die Voraussetzungen des Carnotschen Prozesses nicht erfüllt, so ist es natürlich nicht möglich, mit einem Carnotprozeß den günstigsten Wirkungsgrad zu erzielen. Lorenz hat insbesondere darauf aufmerksam gemacht, daß, wenn Heiz- und Kühlkörper von endlicher Kapazität sind, eine umkehrbare isothermische Expansion und Kompression unmöglich ist. Der Heizkörper wird, da er während der Expansion Wärme abgeben muß, kälter werden und demgemäß wird auch die Temperatur des arbeitenden Mediums, da sie ja stets gleich der des Heizkörpers sein soll, niedriger werden. Der Kreisprozeß nach Lorenz setzt sich demgemäß aus zwei Polytropen und zwei Adiabaten zusammen.

Der polytropische Kreisprozeß kommt überall da zur Anwendung, wo die Wärme-Zu- und -Abführung nicht bei einer bestimmten Temperatur, einem Temperaturpunkte, sondern einem mehr oder weniger ausgedehnten Temperaturbereich erfolgt.

Da T_2 niemals gleich 0, d. h. -273°C werden kann, so muß der Ausdruck $T_1 - T_2$ stets kleiner als 1 sein, solange $T_1 > T_2$, demnach wird dQ_2 stets positiv sein müssen.

Es folgt daraus:

Die in einem Kreisprozeß zugeführte Wärmemenge kann niemals vollständig in Arbeit umgewandelt werden, ein Teil ist stets wieder als Wärme, und zwar bei tieferer Temperatur abzuführen.

Ist $T_2 > T_1$, wird also die Wärme, wie bei einer Kältemaschine, bei tiefer Temperatur zu- und bei hoher abgeführt, so wird

$$dAL = \frac{T_1 - T_2}{T_1} dQ_1$$

negativ, d. h. der Arbeitsbetrag $\frac{T_2 - T_1}{T} dQ_1$ muß der Maschine zugeführt, die Maschine muß angetrieben werden.

Es ist dann

$$dQ_1 = dQ_2 - \frac{T_2 - T_1}{T_1} dQ_1;$$

dQ_2 wird größer als dQ_1 . Da $\frac{T_2 - T_1}{T_1}$ stets positiv, wenn $T_2 > T_1$, so kann man den zweiten Hauptsatz auch so formulieren:

Wärme kann niemals (durch einen Kreisprozeß) ohne Arbeitsaufwand von einem kälteren auf einen wärmeren Körper übertragen werden.

In jedem Elementarprozeß ist

$$\frac{dQ_1}{T_1} = \frac{dQ_2}{T_2}.$$

Faßt man die Größen auf beiden Seiten der Gleichung als Differentiale einer dritten Größe, der Entropie, auf, so kann man sagen, daß die Zunahme an Entropie $\frac{dQ_1}{T_1}$ gleich der Abnahme der Entropie $\frac{dQ_2}{T_2}$ ist. Bei diesem Differentialprozeß ist also die Änderung der Entropie $dS = 0$.

Da jeder umkehrbare Prozeß aus derartigen elementaren Carnotprozessen zusammengesetzt gedacht werden kann, so gilt auch

$$\int dS = \int \frac{dQ}{T} = \text{Konst.}$$

d. h. bei jedem vollständig umkehrbaren Prozeß bleibt der Wert der Entropie konstant.

Da $dS = \frac{dQ}{T}$, kann man den ersten Hauptsatz auch schreiben

$$T \cdot dS = dU + A p dV. \quad (\text{Siehe auch S. 379 ff.})$$

b) Die Mechanik der Dämpfe.

1. Allgemeines.

Wird einer Flüssigkeit, die unter dem Druck p_1 steht, Wärme zugeführt, so steigt ihre Temperatur bis zu einer bestimmten Höhe, bei der sie stehen bleibt, während die Flüssigkeit sich allmählich in Dampf verwandelt. Diese Temperatur heißt *Verdampfungstemperatur* und ist vom Druck abhängig. Fährt man mit der Wärmezuführung fort, so steigt die Temperatur, nachdem die Flüssigkeit vollständig verdampft ist.

Solange noch Flüssigkeit vorhanden ist, heißt der Dampf *naß*. Ist Flüssigkeit nicht mehr vorhanden, aber die Verdampfungstemperatur, die zu dem vorhandenen Druck gehört, noch nicht überschritten, so ist der Dampf *trocken gesättigt*, ist sie überschritten, so ist der Dampf *überhitzt*.

Steht die Flüssigkeit unter dem Druck einer Atmosphäre, so heißt die Verdampfungstemperatur *Siedepunkt*.

Erhöht man den Druck, so steigt auch die Verdampfungstemperatur.

Wird ein überhitzter Dampf bei gleichbleibender Temperatur komprimiert — also unter gleichzeitiger Abfuhr von Wärme —, so wird er, wenn der Druck so groß geworden ist, daß die vorhandene Temperatur gleich der zugehörigen Verdampfungstemperatur geworden ist, trocken gesättigt. Wird das Volumen bei Aufrechterhaltung der Temperatur weiter verringert, so beginnt eine Kondensation, der Dampf wird naß, ohne daß es möglich wäre, den Druck zu steigern. Eine weitere Druckerhöhung ist erst möglich, wenn der Dampf vollständig verflüssigt ist.

	Siedepunkt bei 760 mm Hg °C	Kritische Temperatur °C	Kritischer Druck Atm.
Wasser	100	+ 374	225
Schweflige Säure	— 10	+ 156	81
Chlor	— 33	+ 143	92
Ammoniak	— 33	+ 130	115
Kohlensäure	— 79	+ 31,35	75
Stickoxydul (N ₂ O)	— 92	+ 36	80
Sauerstoff	— 183	— 118	60
Stickstoff	— 196	— 149	29
Wasserstoff	— 253	— 241	20

Die Verflüssigung eines überhitzten Dampfes ist aber nur dann möglich, wenn eine bestimmte, die kritische, Temperatur t_k nicht überschritten wird. Der zugehörige Druck ist der kritische p_k und das entsprechende Volumen 1 kg trocken gesättigten Dampfes ist das kritische v_k .

2. Nasser Dampf.

a) Die Hauptgleichungen.

Die Gesamtwärme λ , die 1 kg Flüssigkeit von 0°C zugeführt werden muß, um es in Dampf von $t^\circ\text{C}$ zu verwandeln, setzt sich zusammen aus

q der Flüssigkeitswärme, die zur Erwärmung der Flüssigkeit auf die Verdampfungstemperatur dient, und

r der (latenten) Verdampfungswärme, also $\lambda = q + r$.

r setzt sich zusammen aus ϱ , der inneren Verdampfungswärme, die zur Überwindung der inneren molekularen Anziehungskräfte dient, und der äußeren Verdampfungswärme $A p u$, dem Wärmewert der bei der Volumenänderung geleisteten Arbeit. Dabei ist p der Druck, unter dem die Flüssigkeit steht, $u = s - \sigma$ ist die Differenz zwischen dem spezifischen Volumen des Dampfes s und dem der Flüssigkeit σ . Die innere Energie des Dampfes ist $U = q + \varrho$.

$$\frac{\lambda}{U} = \frac{q + \varrho + A p u}{r}$$

Für Wasserdampf gilt nach Regnault

$$\lambda = 606,5 + 0,305 t,$$

$$q = t + 0,00011 t^2,$$

$$\varrho = 575,4 - 0,791 t,$$

$$A p u = 31,1 + 1,096 t - q.$$

Das spezifische Gewicht ist $\gamma = 0,5877 \cdot p^{0,699}$ wenn p in kg/qcm angegeben ist. Das spezifische Volumen $s = \frac{1}{\gamma}$.

Ein Dampf heißt n aß, wenn er mit Flüssigkeit gemischt ist. Sind in 1 kg Gemisch x kg Dampf enthalten, so ist das spezifische Volumen des nassen Dampfes

$$v = x s + (1 - x) \sigma = u x + \sigma.$$

x heißt „spezifischer Dampfgehalt“.

Die Gesamtwärme nassen Dampfes ist

$$\lambda_x = q + x r.$$

Der Wärmehalt trocken gesättigten Dampfes ist $i = q + \varrho + A p v$, derjenige nassen Dampfes $i = q + x r + A p \sigma$.

Teilt man im $p v$ -Diagramm die geraden Strecken der Isothermen in gleiche Teile, z. B. in 10, so gibt die Ziffer jedes Teilpunktes den spezifischen Dampfgehalt des nassen Dampfes an, z. B. gibt Punkt 6 das spezifische Volumen von Dampf mit 60% Dampfgehalt an. Verbindet man die Punkte mit gleichen Ziffern miteinander, so erhält man Kurven gleichen Dampfgehaltes. Die Kurve, die alle Punkte mit $x = 1$ verbindet, heißt obere Grenzkurve, diejenige, welche die Punkte mit $x = 0$ miteinander verbindet, heißt untere Grenzkurve. Die beiden Kurven gehen im kritischen Punkt ineinander über.

Die Beziehungen zwischen der Volumenvergrößerung bei konstantem Druck und der Verdampfungswärme werden durch die Clapeyronsche Gleichung dargestellt.

Dampftabellen nach W. Schüle¹⁾.

Gesättigter Wasserdampf von 0,02 bis 25 kg/qcm abs.

Druck p kg/qcm abs.	Temperatur t °C	Spezi- fisches Volumen der Flüssig- keit 1000 σ l/kg	Spezi- fisches Volumen des Dampfes v_s cbm/kg	Spezi- fisches Gewicht des Dampfes γ_s kg/cbm	Flüssig- keits- wärme q Cal/kg	Ver- damp- fungswärme r Cal/kg	Gesamt- wärme $q+r=\lambda$ Cal/kg	Äußere Ver- damp- fungswärme $A \cdot \rho$ ($v_s - \sigma$) Cal/kg	Innere Ver- damp- fungswärme e Cal/kg
0,02	17,2	1,0013	68,28	0,01465	17,2	586,0	603,2	32,0	554,0
0,04	28,6	1,0040	35,47	0,02819	28,6	580,0	608,6	33,2	546,8
0,06	35,8	1,0063	24,19	0,04134	35,7	576,2	611,9	34,0	542,2
0,08	41,1 _s	1,0083	18,45	0,05420	41,1	573,4	614,5	34,7	538,7
0,10	45,4	1,0100	15,08	0,06631	45,3	571,4	616,7	35,3	536,1
0,15	53,6	1,0131	10,22	0,09785	53,5	566,6	620,1	36,1	530,5
0,20	59,7	1,0165	7,80	0,12822	59,6	563,1	622,7	36,6	526,5
0,25	64,6	1,0195	6,33	0,1580	64,5	560,1	624,6	37,0	523,1
0,30	68,7	1,0219	5,33	0,1876	68,6	557,9	626,5	37,5	520,4
0,35	72,3	1,0241	4,620	0,2164	72,2	555,7	627,9	37,8	517,9
0,40	75,4	1,0260	4,062	0,2462	75,3	553,9	629,2	38,1	515,8
0,45	78,2	1,0278	3,630	0,2755	78,1	552,2	630,3	38,3	513,9
0,50	80,9	1,0296	3,290	0,3039	80,8	550,4	631,2	38,5	511,9
0,60	85,4 _s	1,0327	2,775	0,3603	85,4	547,2	632,6	39,0	508,2
0,70	89,4	1,0355	2,400	0,4167	89,4	544,6	634,0	39,3	505,3
0,80	93,0	1,0381	2,115	0,4728	93,0	542,5	635,4	39,6	502,9
0,90	96,2	1,0405	1,900	0,5263	96,2	540,6	636,8	40,0	500,6
1,00	99,1	1,0426	1,721	0,5811	99,1	539,1	638,2	40,3	499,0
1,20	104,2 _s	1,0467	1,451	0,6892	104,3	536,5	640,8	40,7	495,8
1,40	108,7	1,0503	1,258	0,7949	108,8	533,8	642,6	41,2	492,6
1,60	112,7	1,0535	1,108	0,9025	112,8	531,0	643,9	41,6	489,4
1,80	116,3	1,0563	0,993	1,007	116,5	528,3	644,8	41,9	486,4
2,00	119,6	1,0589	0,902	1,109	119,9	525,7	645,6	42,2	483,5
2,50	126,8	1,0650	0,735	1,361	127,2	520,3	647,5	42,9	477,4
3,00	132,9	1,0705	0,619	1,615	133,4	516,1	649,5	43,4	472,7
3,50	138,2	1,0755	0,5335	1,874	138,7	512,3	651,0	43,7	468,6
4,00	142,9	1,0803	0,4710	2,123	143,8	508,7	652,5	44,1	464,6
4,50	147,2	1,0848	0,4220	2,370	148,1	505,8	653,9	44,4	461,6
5,00	151,1	1,0890	0,3823	2,616	152,0	503,2	655,2	44,7	458,5
5,50	154,7	1,0933	0,3494	2,862	155,7	500,6	656,3	44,9	455,7
6,00	158,1	1,0973	0,3218	3,107	159,3	498,0	657,3	45,1	452,9
6,50	161,2	1,1011	0,2983	3,352	162,4	495,9	658,3	45,3	450,6
7,00	164,2	1,1049	0,2778	3,600	165,5	493,8	659,3	45,5	448,3
7,50	167,0	1,1085	0,2608	3,834	168,5	491,6	660,1	45,7	445,9
8,00	169,6	1,1119	0,2450	4,082	171,2	489,7	660,9	45,8	443,9
8,50	172,2	1,1153	0,2318	4,314	173,9	487,8	661,7	45,9	441,9
9,00	174,6	1,1186	0,2194	4,557	176,4	486,1	662,5	46,0	440,1
9,50	176,9	1,1208	0,2080	4,808	178,6	484,5	663,2	46,1	438,4
10,00	179,1	1,1246	0,1980	5,050	181,2	482,6	663,8	46,2	436,4
10,50	181,2	1,1278	0,1896	5,274	183,3	481,2	664,5	46,4	434,8
11,00	183,2	1,1308	0,1815	5,510	185,4	479,8	665,2	46,5	433,3
11,50	185,2	1,1337	0,1740	5,747	187,5	478,3	665,8	46,6	431,7
12,00	187,1	1,1364	0,1668	5,995	189,5	476,9	666,4	46,6	430,3
12,50	189,0	1,1382	0,1607	6,223	191,6	475,5	667,1	46,7	428,8
13,00	190,8	1,1419	0,1544	6,477	193,4	474,1	667,5	46,8	427,3
13,50	192,5	1,1447	0,1492	6,702	195,2	472,8	668,0	46,9	425,9
14,00	194,2	1,1474	0,1442	6,935	197,0	471,4	668,4	47,0	424,4
14,50	195,8	1,1500	0,1395	7,169	198,7	470,1	668,8	47,1	423,0
15	197,4	1,1525	0,1350	7,407	200,4	468,9	669,3	47,2	421,7
16	200,5	1,156	0,1272	7,862	203,7	466,6	670,3	47,3	419,3
17	203,4	1,163	0,1203	8,312	206,8	464,1	670,9	47,5	416,6
18	206,2	1,167	0,1140	8,772	209,8	461,8	671,6	47,6	414,2
19	208,9	1,171	0,1086	9,208	212,7	459,5	672,2	47,8	411,7
20	211,4	1,176	0,1035	9,662	215,4	457,4	672,8	47,8	409,6
21	213,9	1,180	0,0985	10,15	218,0	455,3	673,3	47,8	407,5
22	216,3	1,184	0,0942	10,62	220,6	453,3	673,9	47,9	405,4
23	218,6	1,189	0,0901	11,10	223,1	451,4	674,5	47,9	403,5
24	220,8	1,193	0,0864	11,57	225,5	449,5	675,0	47,9	401,6
25	223,0	1,197	0,0829	12,06	227,9	447,7	675,6	47,9	399,8

¹⁾ Nach Z. Ver. deutsch. Ing. 1911, S. 1506: W. Schüle, Die Eigenschaften des Wasserdampfes nach den neuesten Versuchen.

Gesättigter Wasserdampf von 0° bis 220°¹⁾.

Temperatur <i>t</i>	Druck <i>p</i>	Spez. Vol. des Dampfes <i>v_g</i>	Spez. Gew. des Dampfes <i>γ_g</i>	Flüssig- keits- wärme <i>q</i>	Ver- damp- fung- wärme <i>r</i>	Gesamt- wärme <i>v + r = λ</i>	Äußere Verd.- Wärme <i>A p</i> (<i>v_g - σ</i>)	Innere Verd.- Wärme <i>q</i>	Entropie der Flüssigkeit <i>s'</i>	<i>s'' - s'</i> <i>= r/T</i>
°C	kg/qcm abs.	cbm/kg	kg/cbm	Cal/kg	Cal/kg	Cal/kg	Cal/kg	Cal/kg		
0	0,00622	206,5	0,004843	0,00	594,8	594,8	30,4	564,4	0,0000	2,1783
5	0,00889	147,1	0,006798	5,03	592,2	597,2	30,6	561,6	0,0182	2,1297
10	0,01252	106,4	0,009398	10,05	589,5	599,5	31,3	558,2	0,0360	2,0828
15	0,0174	77,95	0,01283	15,05	586,9	601,9	31,8	555,1	0,0535	2,0374
20	0,0238	57,81	0,01730	20,05	584,3	604,3	32,3	552,0	0,0707	1,9936
25	0,0323	43,38	0,02305	25,04	581,7	606,7	23,8	548,9	0,0877	1,9512
30	0,0433	32,93	0,03037	30,03	579,2	609,2	33,4	545,8	0,1044	1,9102
35	0,0573	25,24	0,03962	35,0	576,6	611,6	33,9	542,7	0,1208	1,8704
40	0,0752	19,54	0,05118	39,9	574,0	613,9	34,4	539,6	0,1369	1,8319
45	0,0977	15,28	0,06545	44,9	571,3	616,2	34,9	536,4	0,1528	1,7946
50	0,1258	12,02	0,08320	49,9	568,5	618,4	35,4	533,1	0,1685	1,7583
55	0,1602	9,581	0,10437	54,9	565,7	620,6	36,0	529,7	0,1839	1,7231
60	0,2028	7,677	0,13026	59,9	562,9	622,8	36,5	526,4	0,1991	1,6889
65	0,2547	6,200	0,16129	64,9	560,0	624,9	37,0	523,0	0,2141	1,6556
70	0,3175	5,046	0,1982	69,9	557,1	627,0	37,5	519,6	0,2289	1,6233
75	0,3929	4,123	0,2425	74,9	554,1	629,0	38,1	516,0	0,2435	1,5917
80	0,4827	3,406	0,2936	79,9	551,1	631,0	38,6	512,5	0,2579	1,5610
85	0,5893	2,835	0,3527	84,9	548,0	632,9	39,1	508,9	0,2721	1,5310
90	0,7148	2,370	0,4219	89,9	545,0	634,9	39,6	505,4	0,2861	1,5018
95	0,8619	1,988	0,5030	95,0	541,9	636,9	40,2	501,7	0,2999	1,4732
100	1,0333	1,674	0,5974	100,0	538,7	638,7	40,7	498,0	0,3136	1,4453
105	1,2319	1,420	0,7042	105,0	535,4	640,4	41,1	494,3	0,3271	1,4181
110	1,4608	1,210	0,8264	110,1	532,1	642,2	41,5	490,6	0,3404	1,3915
115	1,7237	1,030	0,9709	115,2	528,7	643,9	44,8	486,9	0,3536	1,3654
120	2,0242	0,891	1,122	120,2	525,3	645,5	42,2	483,1	0,3666	1,3398
125	2,3662	0,771	1,297	125,3	521,7	647,0	42,6	479,1	0,3795	1,3148
130	2,7538	0,668	1,497	130,5	518,2	648,7	43,0	475,2	0,3922	1,2902
135	3,1914	0,581	1,721	135,6	514,6	650,2	43,3	471,3	0,4048	1,2662
140	3,6835	0,508	1,968	140,7	510,9	651,6	43,7	467,2	0,4173	1,2426
145	4,2352	0,446	2,242	145,8	507,4	653,2	44,1	463,3	0,4296	1,2194
150	4,8517	0,3926	2,547	150,9	503,8	654,7	44,5	459,3	0,4418	1,1966
155	5,5373	0,3470	2,882	156,1	500,2	656,3	44,8	455,4	0,4538	1,1742
160	6,2986	0,3074	3,253	161,2	496,6	657,8	45,1	451,5	0,4658	1,1523
165	7,1414	0,2725	3,670	166,4	493,0	659,4	45,4	447,6	0,4776	1,1306
170	8,0714	0,2431	4,114	171,6	489,4	661,0	45,7	443,7	0,4893	1,1093
175	9,0937	0,2170	4,608	176,8	485,8	662,6	46,0	439,8	0,5009	1,0884
180	10,215	0,1945	5,141	182,0	482,2	664,2	46,2	436,0	0,5124	1,0678
185	11,443	0,1743	5,737	187,3	478,5	665,8	46,5	432,0	0,5238	1,0475
190	12,785	0,1574	6,353	192,6	474,7	667,3	46,8	427,9	0,5351	1,0275
195	14,246	0,1417	7,057	197,8	470,8	668,6	47,0	423,8	0,5463	1,0078
200	15,834	0,1287	7,770	203,1	467,0	670,1	47,3	419,7	0,5574	0,9884

1 kg Flüssigkeit von der Verdampfungstemperatur T und dem Volumen σ befinde sich unter dem Druck p . Ihm wird die Verdampfungswärme r bei gleichbleibendem Druck zugeführt, so daß es vollständig verdampft und das Volumen s einnimmt.

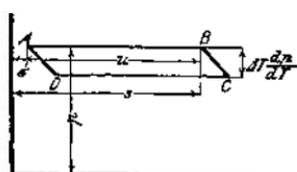


Fig. 9.

Nun expandiere der Dampf adiabatisch um den Betrag $d\sigma$, wobei sich die Temperatur um dT senkt. Darauf wird der Dampf isothermisch komprimiert, d. h. kondensiert und zwar so weit, daß eine anschließende adiabatische Kompression den ursprünglichen Zustand wieder herstellt, also diesen Carnotschen Kreisprozeß schließt. Die geleistete Arbeit ergibt sich aus dem Diagramm

¹⁾ Die Entropiewerte s' und $\frac{r}{T}$ sind aus Mollier, Neue Tabellen und Diagramme für Wasserdampf (Berlin 1906, Julius Springer), entnommen.

Gesättigter Wasserdampf von $+10^{\circ}$ bis $+50^{\circ}$.

Temperatur °C	Druck		Spezifisches Volumen v_g	Spezifisches Gewicht 1000 γ_g	Verdamp- fungswärme r	Gesamt- Wärme λ
	mm Hg	kg/qcm	cbm/kg	g/cbm	Cal/kg	Cal/kg
10	9,21	0,0125	106,4	9,40	589,5	599,5
11	9,84	0,0134	99,7	10,03	589,0	600,0
12	10,52	0,0143	93,7	10,67	588,5	600,5
13	11,23	0,0153	87,9	11,38	588,0	601,0
14	11,99	0,0163	83,0	12,05	587,5	601,5
15	12,79	0,0174	77,9 _s	12,83	586,9	601,9
16	13,64	0,0186	73,2	13,66	586,4	602,4
17	14,5	0,0197	69,0	14,49	585,9	602,9
18	15,5	0,0211	65,1	15,36	585,4	603,4
19	16,5	0,0224	61,4	16,29	584,9	603,9
20	17,5	0,0238	57,8	17,3	584,3	604,3
21	18,6 _s	0,0254	54,5	18,3	583,8	604,8
22	19,8	0,0270	51,4	19,4	583,3	605,3
23	21,1	0,0287	48,6	20,6	582,8	605,8
24	22,4	0,0305	45,9	21,8	582,3	606,3
25	23,8	0,0324	43,4	23,0	581,7	606,7
26	25,2	0,0343	41,0	24,4	581,2	607,2
27	26,7	0,0363	38,8	25,8	580,7	607,7
28	28,3 _s	0,0386	36,8	27,2	580,2	608,2
29	30,0 _s	0,0408	34,8	28,7	579,7	608,7
30	31,8	0,0432	32,9	30,4	579,2	609,2
31	33,7	0,0458	31,2	32,0	578,7	609,7
32	35,7	0,0486	29,6	33,8	578,2	610,2
33	37,7	0,0513	28,0	35,7	577,7	610,7
34	39,9	0,0543	26,6	37,6	577,2	611,2
35	42,2	0,0573	25,2	39,6	576,6	611,6
36	44,6	0,0606	23,9	41,8	576,1	612,1
37	47,1	0,0641	22,7	44,0	575,6	612,6
38	49,7	0,0676	21,6	46,3	575,1	613,1
39	52,5	0,0715	20,5	48,8	574,6	613,6
40	55,3	0,0752	19,5	51,2	574,0	614,0
41	58,4	0,0795	18,6	53,8	573,5	614,5
42	61,5	0,0836	17,7	56,5	572,9	614,8
43	64,8	0,0882	16,8	59,5	572,4	615,3
44	68,3	0,0930	16,0	62,5	571,8	615,7
45	71,9	0,0978	15,3	65,5	571,3	616,6
46	75,7	0,103	14,6	68,5	570,7	616,2
47	79,6	0,108	13,9	71,9	570,2	617,1
48	83,7	0,114	13,2	75,8	569,6	617,5
49	88,0 _s	0,120	12,6	79,4	569,1	618,0
50	92,5	0,126	12,0	83,2	568,5	618,4

zu $(s - \sigma) dp = u dp$ mkg oder $Au dp$ Wärmeeinheiten. Nach dem zweiten Hauptsatz ist der Wirkungsgrad des Prozesses

$$\eta = \frac{T - (T - dT)}{T} = \frac{dT}{T}.$$

Die geleistete Arbeit ist demnach auch $r \cdot \eta = \frac{r dT}{T}$.
Folglich ist

$$Au dp = \frac{r}{T} dT$$

oder

$$A u \frac{dp}{dT} = \frac{r}{T} \quad (\text{Clapeyronsche Gleichung}).$$

Dabei ist zu beachten, daß $\frac{dp}{dT}$ die Richtungskonstante der Tangente an die Dampfspannungskurve $p = f(T)$ darstellt, also bekannt ist.

Führt man 1 kg Gemisch mit dem spezifischen Dampfgehalt x die Wärmemenge dQ zu, so wird

$$dQ = (1 - x)c \, dt + r \, dx + h \, x;$$

hierbei ist c die spezifische Wärme der Flüssigkeit,

$$h = c + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{T}$$

ist die spezifische Wärme des trocken gesättigten Dampfes, d. h. also die Wärmemenge, die 1 kg trockengesättigtem Dampf zugeführt werden muß, um seine Temperatur bei Kompression längs der Grenzkurve um 1°C zu erhöhen. Bei Wasserdampf ist diese spezifische Wärme negativ, d. h. bei Kompression längs der Grenzkurve ist Wärme abzuführen, wenn keine Überhitzung eintreten soll.

b) Zustandsänderungen des nassen Dampfes.

1. Die Isotherme.

Die Zustandsänderung wird im p/v -Diagramm durch eine zur v -Achse parallele Gerade dargestellt, da der Druck konstant bleibt. Bei der Ausdehnung des Volumens von v_1 auf v ändert sich der Dampfgehalt von x_1 auf x und es ist

$$v - v_1 = u(x_1 - x)$$

und die geleistete äußere Arbeit pro kg Dampf

$$L = p(v - v_1) = p u(x - x_1).$$

Die zuzuführende Wärmemenge ist

$$Q = A p u(x - x_1) + q(x - x_1) = r(x - x_1).$$

2. Die Adiabate.

Die Zustandsgleichung lautet nach Rankine

$$p \cdot v^m = p_1 \cdot v_1^{1,35 + 0,1x} = \text{konst.}$$

und gilt in den Grenzen $0,7 < x < 1$. Bei der Expansion aus dem Zustand p_1, v_1 in den Zustand p, v ist die geleistete Arbeit pro kg

$$L = \frac{p_1 v_1}{m-1} \left[1 - \left(\frac{v_1}{v} \right)^{m-1} \right]$$

Die geleistete Arbeit ist pro kg in WE

$$AL = q_1 - q + x_1 q_1 - x q.$$

3. Kurve konstanter Dampfmenge (x unveränderlich).

Für $x \cong 0,5$ lautet die Zustandsgleichung

$$p^{1,6} \cdot v = 1,7235 x.$$

Für $x = 1$ ergibt sich die Gleichung der oberen Grenzkurve zu

$$p^{1,6} \cdot v = 1,7235.$$

Die Konstruktion der Kurven erfolgt nach Fig. 49, S. 132.

Die bei der Expansion nach der Grenzkurve zuzuführende Wärmemenge ist pro kg

$$Q = q - q_1 + q - q_1 + AL.$$

Da die Grenzkurve flacher verläuft als die sie schneidenden Adiabaten, wird trocken gesättigter Dampf bei der Expansion naß, bei der Kompression überhitzt.

3. Überhitzter Dampf.

a) Allgemeine Gleichungen.

Wird trocken gesättigtem Dampf Wärme zugefügt, so vergrößert sich bei konstantem Druck sein Volumen und die Temperatur steigt: der Dampf ist überhitzt. In diesem Zustande nähert sich sein Verhalten dem der Gase, doch bestehen erhebliche Abweichungen, die mit wachsender Überhitzung kleiner werden.

Die Gesamtwärme λ_1 , die zur Erzeugung überhitzten Dampfes von t_1° C dient, ist pro kg

$$\lambda_1 = \lambda + c_p(t_1 - \vartheta),$$

wenn λ die Gesamtwärme 1 kg Dampfes von gleicher Spannung und der Sättigungstemperatur ϑ ist. Die innere Energie des überhitzten Dampfes ist

$$U = q + \varrho + c_v(t_1 - \vartheta).$$

c_p ist nicht konstant, sondern es ist nach Lorenz

$$c_p = 0,43 + 3600000 \frac{p}{T^3},$$

wobei p der absolute Druck in kg/qcm und T die absolute Temperatur ist.

Nach Versuchen von Knoblauch und Jakob, München, ist c_p durch Fig. 10 bestimmt.

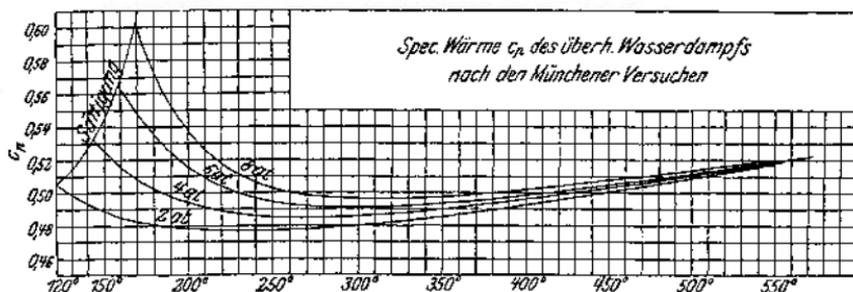


Fig. 10.

Mittlere spezifische Wärme c_{pm} . (Nach Schüle.)

$p = \text{Atm. abs.}$	2	4	6	8	10	12	14
$t_s = \text{Sätt.-Temp.}$	120	143	158	169	179	187	194
$t = 150^\circ$	0,496	0,528	—	—	—	—	—
200°	0,488	0,509	0,537	0,565	0,590	0,606	0,618
250°	0,484	0,499	0,519	0,535	0,548	0,555	0,561
300°	0,482	0,495	0,510	0,521	0,530	0,535	0,539
350°	0,483	0,494	0,505	0,514	0,519	0,522	0,525
400°	0,484	0,493	0,503	0,511	0,517	0,522	0,525
450°	0,486	0,494	0,503	0,510	0,518	0,522	0,525
500°	0,489	0,496	0,504	0,510	0,518	0,522	0,525
550°	0,492	0,499	0,505	0,511	0,518	0,522	0,525

Beispiel: Die Gesamtwärme 1 kg Dampfes von 6 Atm. und 500° C ist:

$$\lambda_1 = \lambda + 342 \cdot 0,504 = 657,3 + 172,4 = 828,6 \text{ WE/kg.}$$

Die allgemeine Zustandsgleichung des überhitzten Wasserdampfes ist nach R. Linde

$$p \cdot v = 47,1 T - 0,016 p,$$

wobei p in kg/qm einzusetzen ist.

b) Zustandsänderungen des überhitzten Dampfes.

Alle folgenden Gleichungen gelten nur, solange der Dampf überhitzt bleibt.

1. Isotherme.

$$p \cdot v = p_1 v_1 - 0,016(p - p_1).$$

Die Isotherme verläuft flacher als eine gleichseitige Hyperbel.

2. Adiabate.

Nach Zeuner gilt hier

$$p \cdot v^{1,33} = \text{konst.}$$

Die während der Expansion von v_1 auf v geleistete Arbeit ist

$$L = \frac{p \cdot v}{0,33} \left[1 - \left(\frac{v_1}{v} \right)^{0,33} \right].$$

Die Adiabate fällt steiler ab als die Grenzkurve und auch steiler als die Adiabate des Sattdampfes. Mit sinkendem Druck nimmt also die Überhitzungstemperatur ab, die Überhitzung kann völlig verloren gehen und der Dampf feucht werden. Dehnt sich überhitzter Dampf vom Volumen v_1 und dem Druck p_1 auf das Volumen v_2 aus, so ist die Arbeitsleistung geringer als bei Sattdampf unter gleichen Verhältnissen, da bei letzterem der Enddruck höher ist als bei ersterem.

c) Ausfluß von Dämpfen.

Nach S. 347 ist der hydrodynamische Druck in Leitungen veränderlichen Querschnittes verschieden. Abnehmendem Querschnitt entspricht Geschwindigkeitszunahme, die vom statischen Druck aufgebracht werden muß.

Ist $f p$ der Druck auf die Rückseite eines von zwei unendlich benachbarten Querschnitten begrenzten Massenelementes m , $f(p + dp)$ der gegen die Strömungsrichtung auf die Vorderseite wirkende Druck, so verursacht der resultierende Druck $-f \cdot dp$ die Beschleunigung $\frac{dc}{dt}$, wenn $dc =$ Geschwindigkeitszunahme zwischen den beiden Querschnitten. Es folgt: $-f \cdot dp = m \cdot \frac{dc}{dt}$.

Mit $m = \frac{f \cdot \gamma}{g} \cdot ds$ wird $dp = -\frac{\gamma}{g} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot dc = -\frac{\gamma}{g} c \cdot dc$, da $\frac{ds}{dt} = c$.

Mit $c \cdot dc = d \frac{c^2}{2g}$ und $\gamma = \frac{1}{v}$ folgt:

$$(1) \quad -v \cdot dp = d \left(\frac{c^2}{2g} \right);$$

die Zunahme $d \left(\frac{c^2}{2g} \right)$ der lebendigen Kraft $\frac{c^2}{2g}$ (auf 1 kg bezogen) ist gleich der Nutzarbeit $-v \cdot dp$, abgegeben bei der Entlastung um dp .

Herrscht im Ausflußgefäß der Druck p_1 , in der Vorlage p_2 , so ist bei adiabatischer Zustandsänderung während der Strömung:

$$(2) \quad p_1 v_1^k = p_2 v_2^k.$$

Hierin ist für gesättigten Dampf: $k = 1,035 + 0,1 \cdot x_1$, für überhitzten Dampf: $k = 1,333$. Aus (2) folgt ohne weiteres:

$$(3) \quad \frac{p_2 v_2}{p_1 v_1} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{k-1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

und aus (3) durch Differentiation:

$$(4) \quad k p dv + v dp = 0 \quad \text{oder}$$

$$(5) \quad (k-1) v \cdot dp = k d(pv).$$

Durch Einsetzung des sich hieraus ergebenden Wertes für $v \cdot dp$ in Gleichung (1) ergibt sich:

$$(6) \quad d \left(\frac{c^2}{2g} \right) = -\frac{k}{k-1} \cdot d(pv)$$

und hieraus folgt durch Integration, da im Ausflußgefäß die Geschwindigkeit $c_1 = 0$ ist:

$$(7) \quad \frac{c^2}{2g} = \frac{k}{k-1} \cdot (p_1 v_1 - p_2 v_2).$$

Mit Benutzung der Gleichung (3) findet sich für die Geschwindigkeit c im Querschnitt f :

$$(8) \quad c = \sqrt{2g \cdot \frac{k}{k-1} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}.$$

Der Ausdruck $\frac{k}{k-1} \cdot p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]$ stellt das „Arbeitsgefälle“ L bei der adiabatischen Expansion von p_1 auf p_2 dar, so daß Gl. (8) auch geschrieben werden kann: $c = \sqrt{2g L}$, wobei L dem Gefälle h (das übrigens auch keine Länge, sondern die von 1 kg auf k m geleistete Arbeit darstellt) in der Hydraulik entspricht. Es ist weiterhin: $c = \sqrt{2g \cdot \frac{i_1 - i_2}{A}} = 91,5 \cdot \sqrt{i_1 - i_2}$. Die Größe $i_1 - i_2$ kann dem J - S -Diagramm, S. 388, als Strecke entnommen werden.

Ist G das pro Sek. das Rohr durchfließende Dampfgewicht, so ist nach der Kontinuitätsgleichung $G v = f \cdot c$. Hieraus und aus Gleichung (2) folgt:

$$G = \frac{f_m}{v_1} \cdot \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{k}} \cdot c.$$

Mit Benutzung von Gleichung (8) wird:

$$(9) \quad G = f \sqrt{2g \cdot \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{v_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}.$$

Dasjenige Druckverhältnis $\frac{p_2}{p_1}$, für das G den Höchstwert annimmt, wird als „kritisches Druckverhältnis“ (= 0,5774 für Satttdampf, = 0,546 für Heißdampf) bezeichnet. Dieser kritische Wert kann aus dem Höchstwert des unter der Wurzel der Gl. (9) stehenden Klammersausdruckes berechnet werden, der nach $\frac{p_2}{p_1}$ differenziert und gleich Null gesetzt wird:

$$\frac{2}{k} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{k}-1} - \frac{k+1}{k} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{k}} = 0; \quad \text{hieraus:} \quad \left(\frac{p_2}{p_1} \right)_{\text{krit}} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Pro Sekunde durch den kleinsten Querschnitt f_m strömendes Dampfgewicht:

$$G = f_m \cdot \sqrt{2g \cdot \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_1}{v_1} \cdot \frac{(k-1)}{(k+1)} \cdot \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{2}{k-1}}}.$$

Aus Gl. (8) folgt Durchflußgeschwindigkeit:

$$c_m = \sqrt{2g \cdot \frac{k}{k+1} \cdot p_1 v_1} \quad (\text{Schallgeschwindigkeit}).$$

Es wird für Satttdampf mit $x_1 = 1$, also $k = 1,135$:

$$p_m = 0,5744 p_1; \quad \frac{G}{f_m} = 199 \sqrt{\frac{p_1}{v_1}}; \quad c_m = 332 \sqrt{p_1 v_1}. \quad \text{Für Heißdampf}$$

$$p_m = 0,546 p_1; \quad \frac{G}{f_m} = 211 \sqrt{\frac{p_1}{v_1}}; \quad c_m = 333 \sqrt{p_1 v_1} \quad (p \text{ in kg/qcm}).$$

Es ist: für Satttdampf $v = x \cdot u$; für Heißdampf $v_1 = \frac{47,1 (273 + t_1)}{10000 \cdot p_1} - 0,016$.

Die Berechnung der Geschwindigkeit im engsten Querschnitt ergibt nahezu die konstanten Größen $c_m = 450$ m/sek für Sattedampf, $= 560$ m/sek. für Heißdampf. Bei Durchströmung parallelwandiger Leitvorrichtungen werden diese Werte bei noch so weitgehender Druckerniedrigung in der Vorlage nicht überschritten, da auch dann der Mündungsdruck nicht unter p_m sinkt. (Vgl. jedoch die Versuche von Christlein im Kapitel Dampfturbinen.)

Wird an den engsten Querschnitt f_m eine konisch erweiterte Düse angeschlossen, so läßt sich bei entsprechender Erweiterung eine Expansion des Dampfes bis auf jeden Druck in der Vorlage erzielen. Die der Ausflußmündung der (Laval-) Düse entströmende Dampfmenge erlangt bei heute üblichen Dampfeigenschaften eine Geschwindigkeit von 1100 bis 1200 m/sek., die aus Gl. (8) (unter Einsetzung des wirklich erreichten Vorlagedruckes p_2) bestimmt werden kann. Kegelwinkel α der Düse etwa 10° . Bei Düsen mit kleinerem Winkel wird die Dampfreibung zu groß, bei Düsen mit größerem Winkel liegt die Gefahr vor, daß sich der Strahl von der Wandung löst.

Die Ausflußmündung wird aus der Gleichung $f = \frac{Gv}{c}$ berechnet. Aus f_m , f und α folgt die Düsenlänge.

Entspricht der Druck in der Vorlage nicht dem der Düsenbemessung zugrunde gelegten Druck, so ergeben sich Verluste durch Verdichtungsstöße, Schlierenbildung, Schallschwingungen und Strahlablenkung. (Hierüber siehe Stodola, Dampfturbinen. 4. Auflage. Berlin 1910. Julius Springer.)

d) Gasmischungen.

Befinden sich in einem Raum mehrere Gasarten, welche keine chemische Einwirkung aufeinander ausüben, so gelten nach Dalton folgende Gesetze:

1. Jedes Gas verhält sich so, als ob die anderen Gase nicht vorhanden wären; der Druck, den es ausübt, ist so zu berechnen, als ob das Gas den ganzen Raum erfüllte.

Der Gesamtdruck der Gasmischung ist gleich der Summe der Partialdrücke der einzelnen Gase.

Beispiel: In einem Behälter von 1 cbm Inhalt befinden sich 0,5 kg Sauerstoff, 0,1 kg Wasserstoff und 0,3 kg Stickstoff. Welches ist der Gesamtdruck der Mischung, wenn ihre Temperatur 50° C ist? Es sind zunächst die Teildrücke der einzelnen Gase zu bestimmen. Da 1,312 kg Sauerstoff bei 15° C und einem Volumen von 1 cbm den Druck von 1 Atm. ausübt, so ist der Druck des Sauerstoffes im anliegenden Fall

$$p_O = \frac{0,5 \cdot (273 + 50)}{1,312(273 + 15)} = 0,428 \text{ Atm.}$$

derjenige des Wasserstoffes ist:

$$p_H = \frac{0,1 \cdot 323}{0,083 \cdot 288} = 1,351 \text{ Atm.}$$

derjenige des Stickstoffes ist

$$p_N = \frac{0,3 \cdot 323}{1,151 \cdot 288} = 0,298 \text{ Atm.}$$

$$\text{Der Gesamtdruck } p = p_O + p_H + p_N = 2,077 \text{ Atm.}$$

2. Die Gaskonstante bestimmt sich nach der Gleichung

$$R = \frac{G_1 R_1 + G_2 R_2 + G_3 R_3 + \dots}{G_1 + G_2 + G_3 + \dots}$$

Im vorigen Beispiel ist also

$$R = \frac{0,5 \cdot 26,5 + 0,1 \cdot 420 + 0,3 \cdot 30,2}{0,5 + 0,1 + 0,3} \\ R = 71,4.$$

3. Die spezifische Wärme des Gemisches ist

$$c_v = \frac{G_1 c_{v1} + G_2 c_{v2} + G_3 c_{v3} + \dots}{G_1 + G_2 + G_3 + \dots}$$

Im vorigen Beispiel ist also

$$c_v = \frac{0,5 \cdot 0,155 + 0,1 \cdot 2,42 + 0,3 \cdot 0,176}{0,5 + 0,1 + 0,3} = 0,411.$$

I. Mischung von Luft und Wasserdampf.

Befindet sich eine Flüssigkeit in einem mit einem Gase erfüllten Raume, so verhält sich der Dampf der Flüssigkeit so, als ob das Gas nicht da wäre, vorausgesetzt, daß chemische Einwirkungen nicht auftreten. Der einzige Unterschied gegen das Verhalten im luftleeren Raum ist, daß die Verdampfung langsamer vor sich geht.

Der Gesamtdruck der feuchten Luft ist gleich dem Partialdruck des Wasserdampfes + demjenigen der Luft. Der Partialdruck des Wasserdampfes kann bei einer bestimmten Temperatur nicht größer sein als derjenige des gesättigten Dampfes bei dieser Temperatur, der aus Tabelle S. 371 zu entnehmen ist. Luft, welche mit Wasserdampf von dieser Maximalspannung gemischt ist, heißt gesättigt. Ist die Spannung des Wasserdampfes geringer als die Maximalspannung, enthält also die Luft pro cbm weniger g Wasserdampf als sie äußersten Falles, also bei maximaler Dampfspannung, aufnehmen könnte, so heißt sie ungesättigt. Ungesättigte Luft kann also noch Feuchtigkeit aufnehmen (der Wasserdampf befindet sich in dem Zustande der Überhitzung).

Die Gewichtsmenge Wasserdampf in g, welche 1 cbm Luft tatsächlich enthält, heißt deren absoluter Feuchtigkeitsgehalt.

Die Gewichtsmenge Wasserdampf in g, die 1 cbm Luft bei der maximalen Dampfspannung aufnehmen könnte, heißt maximaler Feuchtigkeitsgehalt.

Das Verhältnis des absoluten zum maximalen Feuchtigkeitsgehalt heißt relative Feuchtigkeit. Die relative Feuchtigkeit wird auch definiert als das Verhältnis der vorhandenen Dampfspannung zu der maximalen. Ist also der absolute Feuchtigkeitsgehalt γ und die wirkliche Teilspannung p_D , während γ' und p' die maximalen Werte darstellt, so ist die relative Feuchtigkeit $\varphi = \frac{p_D}{p'} = \frac{\gamma}{\gamma'}$. Sie wird gewöhnlich in Prozenten ausgedrückt.

Entzieht man durch irgendwelche Mittel, ohne die Temperatur und den Gesamtdruck p zu verändern, der Luft die Feuchtigkeit, so reduziert sich das Volumen von 1 cbm auf $v_L = \frac{p - \varphi p'}{p}$ cbm. Der Rest, der also durch die Feuchtigkeit eingenommen wurde, beträgt $v_D = \frac{\varphi p'}{p}$.

Die Temperatur, auf welche die Luft abgekühlt werden muß, damit der absolute Feuchtigkeitsgehalt zum maximalen werde, heißt Taupunkt. Bei Unterschreitung des Taupunktes beginnt der Dampf an der kältesten Stelle zu kondensieren.

Die Gaskonstante feuchter Luft ist

$$R = \frac{29,28}{1 - 0,377 \varphi \frac{p'}{p}}.$$

2. Bestimmung der Luftfeuchtigkeit.

1. Daniellsches Hygrometer. Von zwei miteinander durch eine Glasröhre verbundenen Glaskugeln, die luftleer, aber mit Äther gefüllt sind, enthält die linke ein Thermometer, über die rechte ist ein Bausch von Mull gebunden. Wird die innere Flüssigkeit nach der linken Kugel gebracht und die rechte von außen mit Äther beträufelt, so destilliert die innere Flüssigkeit von der linken Kugel nach der rechten über, während ihre Temperatur sinkt. In dem Augenblick, in dem die linke Kugel von außen leicht beschlägt, zeigt das innere Thermometer den Taupunkt an.

Beispiel: Bei einer Lufttemperatur von 30° C ist der Taupunkt zu 17° C festgestellt worden. Welches ist die relative Feuchtigkeit der Luft? 1 cbm Luft von 17° C und 100% Feuchtigkeit enthält 14,49 g Wasser, Da die Luft aber 30° warm ist, sind die 14,49 g nicht in 1 cbm

Luft, sondern in $1 \cdot \frac{273 + 30}{273 + 17}$ cbm enthalten. Diese können maximal $30,4 \cdot \frac{273 + 30}{273 + 17}$ aufnehmen, so daß die relative Feuchtigkeit

$$\varphi = \frac{14,49}{30,4} \cdot \frac{273 + 17}{173 + 30} = 0,438 = 43,8\% \quad \text{beträgt.}$$

2. Psychrometer nach August. Von zwei gleichen Thermometern ist das eine mit einem feuchten Lämpchen umwickelt, das andere trocken. Letzteres zeigt die Lufttemperatur t , ersteres die Temperatur t_f an. $t - t_f$ heißt die psychrometrische Temperaturdifferenz. Sind p' und p'_f die zu den Temperaturen t und t_f gehörigen maximalen Dampfspannungen in mm Quecksilbersäule, so ist die wirkliche Teilspannung des Wasserdampfes in der Luft

$$p_D = p'_f - 0,6(t - t_f),$$

$$\varphi = \frac{p_D}{p'}.$$

Beispiel: Das trockene Thermometer zeige 30°C , das feuchte 20°C an. Dann ist der wirkliche Partialdruck des Dampfes:

$$p = 17,3 - 0,6 \cdot 10 = 11,3 \text{ mm Hg,}$$

$$\varphi = \frac{11,3}{30,4} = 0,372 = 37,2\%.$$

3. Haarhygrometer zeigen die relative Feuchtigkeit an, sind aber nicht sehr zuverlässig und müssen öfter geeicht werden.

3. Abkühlung und Erwärmung feuchter Luft.

Beim Abkühlen feuchter Luft ist zu beachten, daß bei Unterschreitung des Taupunktes Feuchtigkeit ausfällt und die Kondensationswärme abzuführen ist. Beim Erwärmen wird es darauf ankommen, ob die Wärmequelle Feuchtigkeit abgibt, wie dies beim Trocknen von Substanzen der Fall ist, oder ob die Flächen trocken sind, wie bei Heizung durch Radiatoren. (Bei diesen Rechnungen arbeitet man im allgemeinen nicht mit sehr großer Genauigkeit, weil man doch noch sehr große Sicherheitszuschläge machen muß.)

Beispiel: 1. 100 cbm Luft von 30°C und 75% Feuchtigkeit sollen auf 0°C gekühlt werden, welche Wärmemenge ist abzuführen?

Die absolute Feuchtigkeit ist $0,75 \cdot 30,4 = 22,8 \text{ g/cbm}$. Bei 0°C beträgt der maximale Feuchtigkeitsgehalt 4,7 g. Es fallen demnach $22,8 - 4,7 = 18,1 \text{ g/cbm}$ aus. Die Kondensationswärme ist mit 0,6 WE/g einzusetzen. Die spez. Wärme für Luft bei 15°C und 760 mm Druck beträgt rund 0,3 WE pro cbm. Demnach sind aufzuwenden:

a) für Kühlung allein $100(30 - 0) \cdot 0,3 = 900 \text{ WE,}$

b) für Trocknung $100 \cdot 18,1 \cdot 0,6 = 1086 \text{ „}$

Summe: 1986 WE.

Hierbei ist nicht berücksichtigt, daß das Volumen der Luft a) wegen der Entfeuchtung, b) wegen der Abkühlung geringer geworden ist. Im nachstehenden sollen diese Einflüsse bestimmt werden.

Zu Anfang waren in 1 cbm Gemisch

$$v_L = \frac{760 - 0,75 \cdot 30,8}{760} = 0,97 \text{ cbm Luft}$$

und

$$v_D = 0,03 \text{ cbm Wasserdampf}$$

enthalten.

Im ganzen waren also 97 cbm Luft und 3 cbm Wasserdampf vorhanden.

Die Luft verringerte sich auf $97 \cdot \frac{273}{303} = 95 \text{ cbm}$. Nach der Abkühlung sind in 1 cbm Gemisch $v_L = \frac{760 - 4,6}{760} = 0,993 \text{ cbm}$ Luft enthalten.

Es sind demnach $\frac{95}{0,993} = 95,4 \text{ cbm}$ Gemisch vorhanden, welche nur $95,4 \cdot 4,7 = 448 \text{ g}$ Wasser enthalten. Es sind also tatsächlich $2280 - 448 = 1832 \text{ g}$ Wasser ausgefallen, wofür $1832 \cdot 0,6 = 1099,2 \text{ WE}$ zu rechnen sind. Der Fehler beträgt also 13,2 WE und kann normalerweise vernachlässigt werden.

2. Welche Wärmemenge muß man 100 cbm Luft von 0° und 100% zuführen, um sie auf 30°C zu erwärmen?

Erfolgt die Erwärmung durch trockene Flächen, so sind $100 \cdot 0,3 \cdot 30 = 900$ WE nötig. Da der absolute Feuchtigkeitsgehalt $4,7$ g/cbm beträgt, hat die Luft nach dem Erwärmen eine relative Feuchtigkeit von $\varphi = 0,15 = 15\%$. Hat indessen die Erwärmung durch feuchte Körper stattgefunden, so daß die Luft mit Feuchtigkeit angereichert ist, so muß noch ein entsprechender Wärmebetrag für die Verdampfung der aufgenommenen Feuchtigkeit aufgewandt werden.

D. Die Entropie und die Wärmediagramme.

Der Wirkungsgrad eines Carnotschen Kreisprozesses zwischen den Temperaturen T_1 und T_2 ist

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

und hieraus folgt

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$$

Für einen elementaren Kreisprozeß, bei dem also die Wärmemengen dQ_1 und dQ_2 zu- bzw. abgeführt werden, ist

$$\frac{dQ_1}{T_1} = \frac{dQ_2}{T_2}$$

Das Verhältnis zwischen der Wärmemenge zu der Temperatur, bei der sie zu- oder abgeführt wird, ist also konstant. Diese beiden Ausdrücke kann man als Differentiale einer Größe betrachten, die bei der Wärmezuführung um den Betrag $\frac{dQ_1}{T_1}$ vergrößert, bei der Wärmeabführung um den Betrag $\frac{dQ_1}{T_1}$ verkleinert

werden im ganzen also konstant geblieben ist. Diese Größe $\int \frac{dQ}{T}$ heißt Entropie. Da jeder umkehrbare Kreisprozeß zwischen denselben höchsten und tiefsten Temperaturen denselben Wirkungsgrad hat, so gilt für jeden umkehrbaren Elementarkreisprozeß, daß die Entropie des arbeitenden Körpers nach Vollendung des Prozesses die gleiche ist wie vorher. Da man sich nun jeden umkehrbaren endlichen Kreisprozeß aus unendlich vielen Elementarprozessen zusammengesetzt denken kann, so gilt auch für einen solchen

$$\int \frac{dQ}{T} = 0,$$

d. h. bei allen umkehrbaren Kreisprozessen ist die Entropie konstant.

Diese Tatsache gilt für alle Körper und alle Zustandsänderungen, sofern sie umkehrbar sind.

Ist ein geschlossenes, also von außen nicht beeinflussbares System von Körpern vorhanden, und erfolgen an den Körpern des Systems umkehrbare Zustandsänderungen, so wird die Entropie des ganzen Systems dadurch nicht beeinflusst, sie bleibt konstant. Treten hingegen nicht umkehrbare Vorgänge (Reibung, Drosselung, Wärmeübergang bei endlicher Temperaturdifferenz) auf, so wächst die Entropie. Die Entropie eines geschlossenen Systems kann nur konstant bleiben oder wachsen, niemals abnehmen.

Die Entropie ist als eine Zustandsfunktion zu betrachten, genau wie Temperatur, Druck und Volumen. Es wird immer nur die Veränderung der Entropie bestimmt, niemals ihr absoluter Betrag. Man setzt gewöhnlich die Entropie einer Flüssigkeit bei 0° C gleich 0. Es gilt für Flüssigkeiten:

$$dS = \frac{dQ}{T} = c \frac{dT}{T} = c d(\ln T).$$

Die Entropiezunahme bei Temperaturerhöhung von T_0 auf T ist

$$S - S_0 = c(\ln T - \ln T_0) = c \ln \frac{T}{T_0}.$$

Für vollkommene Gase gilt, da

$$dQ = c_v dT + A p dv,$$

$$dS = \frac{dQ}{T} = c_v \frac{dT}{T} + A \frac{p dv}{T};$$

wegen

$$RT = p v \quad \text{und} \quad AR = c_p - c_v$$

wird

$$dS = c_v \frac{dT}{T} + (c_p - c_v) \frac{dv}{v}$$

und

$$S - S_0 = c_v \ln \frac{p}{p_0} + c_p \ln \frac{v}{v_0}$$

oder

$$S_2 - S_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + AR \ln \frac{v_2}{v_1}.$$

(Für in kann man auch $2,303 \cdot \log$ setzen.)

Bei Dämpfen gilt folgendes: Die Entropie von 1 kg nassen Dampfes vom Dampfgehalt x ist um den Betrag $\frac{r \cdot x}{T}$ größer als die Entropie der gleichen Flüssigkeitsmenge von derselben Temperatur. Die Verdampfungswärme r nimmt mit steigender Temperatur ab und ist bei der kritischen Temperatur gleich 0.

1 kg trocken gesättigter Dampf, bei dem also $x = 1$ ist, hat die Entropie

$$S = S_r + \frac{r}{T},$$

wobei S_r die Entropie der Flüssigkeit bei gleicher Temperatur ist. Wird der Dampf bei konstantem Druck auf T_1 überhitzt, so wächst die Entropie weiter um den Betrag

$$\int_T^{T_1} c_p \frac{dT}{T},$$

so daß er also wird

$$S = S_r + \frac{r}{T} + \int_T^{T_1} c_p \frac{dT}{T},$$

wobei aber zu beachten ist, daß c_p keineswegs konstant ist (vgl. Fig. 10, S. 373).

Entropie-Temperatur-(S, T)-Diagramm.

Man kann die Entropie eines Körpers darstellen in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur und gelangt so zum Entropie-Temperatur-Diagramm. In diesem Diagramm lassen sich nun alle Zustandsänderungen genau so gut darstellen wie im p/v -Diagramm.

Erfährt z. B. ein Körper eine Zustandsänderung nach der Kurve AB in Fig 11, so ist T_A die Anfangstemperatur, S_A die Anfangsentropie, T_B die Endtemperatur, S_B die Entropie an Ende der Zustandsänderung. Die Strecke $\overline{S_A S_B}$ stellt also die Entropieänderung während des Vorganges dar. Zeichnet man zwei nur um dS voneinander abstehende Ordinaten ein, so ist der zwischen ihnen

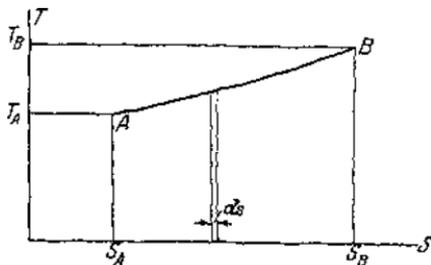


Fig. 11.

liegende Flächenstreifen $dF = T \cdot dS$ und da $dS = \frac{dQ}{T}$, so ist $dF = dQ$.

Die unter der Kurve liegende Fläche stellt also die dem Körper zugeführte Wärmemenge dar, wenn die Zustandsänderung in der Richtung AB , die abgeführte Wärmemenge, wenn sie in der Richtung BA durchlaufen wird.

a) Gase.

1. Isothermische Zustandsänderung.

Da die Temperatur konstant bleibt, wird diese Zustandsänderung durch eine zur Entropieachse parallele Gerade dargestellt. Die unter der Geraden $A'B'$ liegende schraffierte Fläche ist die zugeführte bzw. abgeführte Arbeit (Fig 12).

2. Adiabatische Zustandsänderung.

Da bei einer solchen die zugeführte Wärme gleich Null ist, also $dQ = 0$, ist auch

$$dS = \frac{dQ}{T} = 0 \quad \text{oder} \quad S = \text{konst.},$$

d. h. die Entropie bleibt konstant (diese Zustandsänderung wird daher auch isentropisch genannt). Sie wird dargestellt durch eine zur Temperaturachse parallele Gerade.

Die Darstellung dieser beiden Zustandsänderungen ist völlig unabhängig von der Natur des arbeitenden Stoffes, gilt also für Dämpfe ebenso wie für Gase.

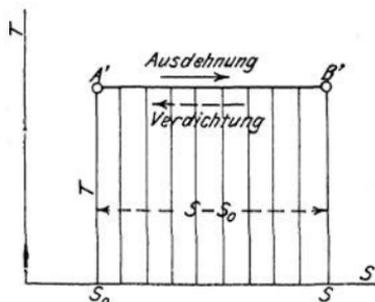


Fig. 12.

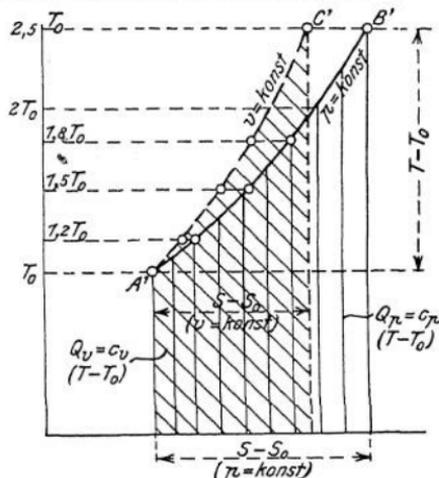


Fig. 13.

3. Zustandsänderung bei konstantem Druck.

Da $p_0 = p$, wird $\ln \frac{p_0}{p} = 0$, also

$$S - S_0 = c_p \ln \frac{v}{v_0} = 2,303 c_p \log \frac{v}{v_0} = 2,303 c_p \log \frac{T}{T_0}.$$

Diese Zustandsänderung wird also durch eine logarithmische Linie dargestellt (Fig. 13).

4. Zustandsänderung bei konstantem Volumen.

Da $v_0 = v$, wird $\ln \frac{v}{v_0} = 0$, also

$$S - S_0 = 2,303 \cdot c_v \log \frac{p}{p_0} = 2,303 c_v \log \frac{T}{T_0}.$$

Auch diese Zustandsänderung wird durch eine logarithmische Kurve dargestellt, die jedoch flacher verläuft, als diejenige, welche die Zustandsänderung bei konstantem Volumen darstellt (Fig. 13).

5. Polytropische Zustandsänderung.

Für die Zustandsänderung $p v^m = \text{konst.}$ wird

$$S - S_0 = 2.303 c_v \frac{m - k}{m - 1} \log \frac{T}{T_0}.$$

6. Kreisprozesse.

Reihen sich nun mehrere Zustandsänderungen so aneinander, daß der arbeitende Körper schließlich wieder in seinen Anfangszustand zurückkehrt, führt er also einen Kreisprozeß aus, so erhält man auch im Entropiediagramm einen geschlossenen Linienzug. Da nun die unter der oberen Kurve liegende Fläche die gesamte zugeführte Wärme Q_1 , die unter der unteren Kurve liegende Fläche die gesamte abgeführte Wärme Q_2 darstellt, so mißt die von der Kurve eingeschlossene Fläche (Fig. 14) den

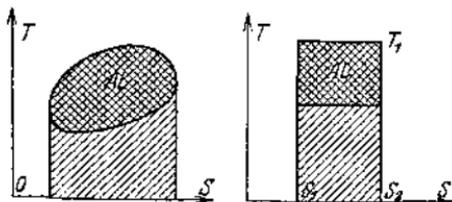


Fig. 14.

Fig. 15.

Betrag $Q_1 - Q_2 = AL$, also die geleistete Arbeit (Wärmediagramm). Das Verhältnis der eingeschlossenen Fläche ($Q_1 - Q_2$) zu der unter der oberen Kurve liegenden Fläche (Q_1) ergibt den thermischen Wirkungsgrad.

Beispiel: Der Carnotsche Kreisprozeß setzt sich aus 2 Isothermen und 2 Adiabaten, also zwei horizontalen und zwei vertikalen Linien im Entropiediagramm zusammen, wird also durch ein Rechteck nach Fig. 15 dargestellt.

Besonders vorteilhaft ist die Benutzung von Entropietafeln z. B. für Luft, in welche die Werte der Entropie bei Zustandsänderungen bei konstantem Volumen und konstantem Druck eingetragen sind. Eine solche Tafel¹⁾, bei der auch die Veränderlichkeit der spezifischen Wärme mit der Temperatur berücksichtigt ist, befindet sich auf S. 383.

Beispiel: Luft von 100° wird auf den 15,73. Teil ihres Raumes adiabatisch verdichtet. Wie hoch steigen Druck und Temperatur?

Um die Endtemperatur zu finden, muß man von dem Schnittpunkt der Kurve v_0 mit der Temperaturlinie 100° ausgehen. Das ist der Punkt a . Von diesem geht man senkrecht in die Höhe, bis man die Kurve $\frac{v_0}{15,73}$ trifft. Diese ist zwar nicht eingezeichnet, sondern nur die Kurve $\frac{v_0}{15}$; man sieht sofort, daß die gesuchte Kurve ein klein wenig links von $\frac{v_0}{15}$ liegt und kann ein Stückchen davon einzeichnen. Die Kurve $\frac{v_0}{15,73}$ schneidet sich mit der Vertikalen durch a im Punkte s in der Höhe der Temperatur 780° . Dies also ist die Endtemperatur.

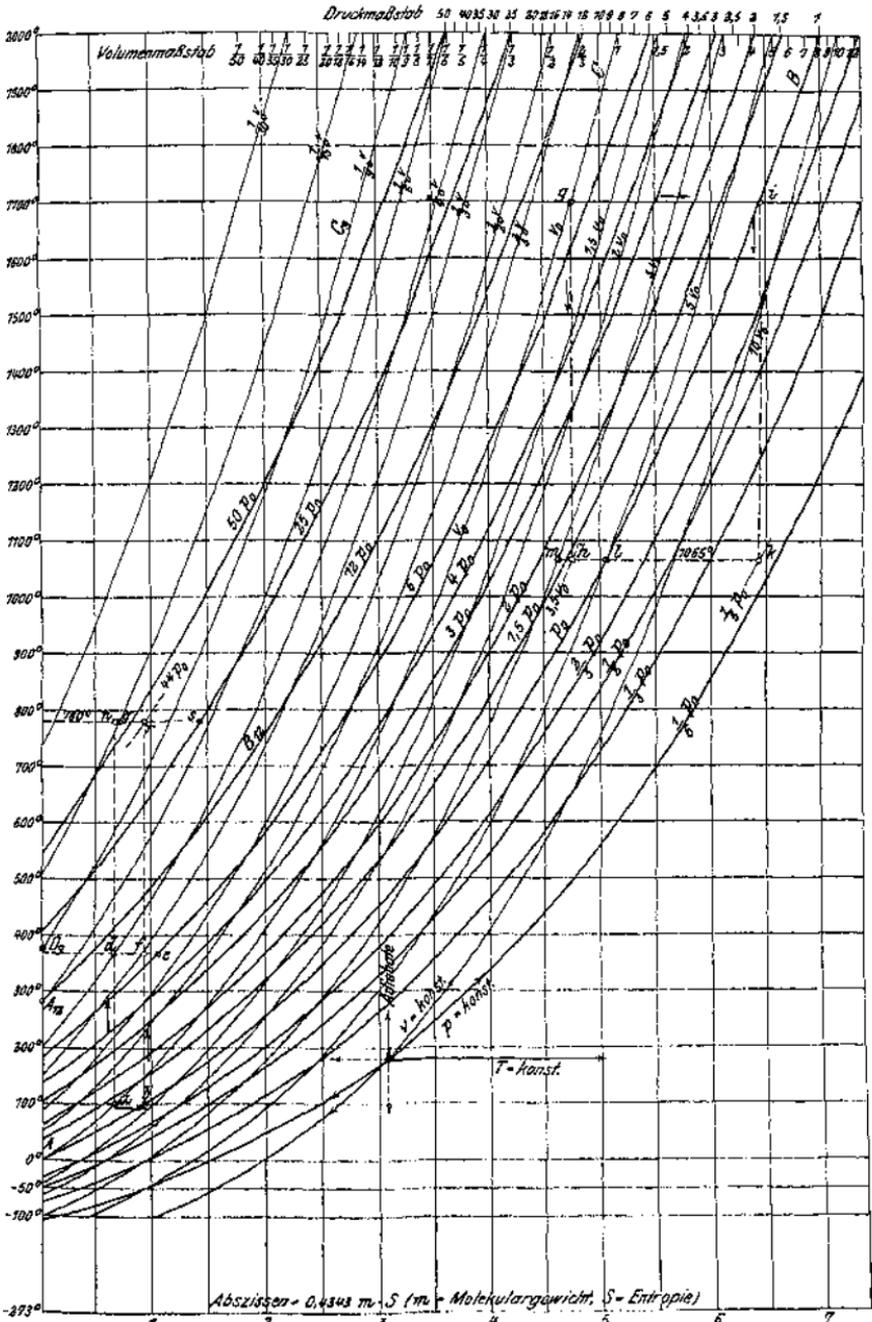
Um den Enddruck zu bestimmen, muß man sich zunächst nach dem Schnittpunkt der Horizontalen durch den Temperaturpunkt 100° mit der Kurve p_0 , also nach b begeben; durch b zieht man eine Vertikale, welche die Horizontale durch s im Punkte r schneidet. Dieser Punkt liegt zwischen den Kurven $50 p_0$ und $25 p_0$. Um die genaue Lage zu finden, verlängert man die Strecke rs bis zum Schnitt mit der Kurve $25 p_0$, also bis s . Dann trägt man die Strecke rs vom Teilpunkt 25 der oberen Druckskala nach links ab und kommt nach 44. Der Enddruck ist also $44 p_0$.

Beispiel: Gase von 1700° C dehnen sich auf das 3,5fache Volumen aus. Wie tief sinken Temperatur und Druck?

Man geht von dem Schnittpunkt der Kurve v_0 mit der Horizontalen durch 1700° , also g , aus und zieht die Vertikale nach unten bis zur Kurve $3,5 v_0$. Da diese aber nicht eingezeichnet ist, muß man auf der unteren Volumenskala die Strecke 3 bis 3,5 abgreifen, in der Höhe der Temperatur 1100 von der $3 v_0$ -Kurve nach rechts abtragen und durch den Endpunkt ein Stückchen der Kurve $3,5 v_0$ einzeichnen (parallel zur benachbarten Kurve $3 v_0$). Der Schnittpunkt h zeigt an, daß die Temperatur auf 1065° zurückgegangen ist. Um den Enddruck zu finden, geht man von dem Schnittpunkt der Kurve p_0 mit der Temperaturlinie 1700° senkrecht herunter bis zur Hori-

¹⁾ Entnommen aus: Schüle, Technische Thermodynamik, Bd. I. Berlin 1912, Julius Springer.

Tafel I.



(Aus: Schüle, Techn. Thermodynamik, Bd. I. Berlin 1912, Julius Springer.)

zontalen durch k , welche das Lot in k schneidet. k liegt zwischen den Kurven $\frac{p_0}{3}$ und $\frac{p_0}{6}$. Man kann nun entweder den Abstand der beiden Kurven $\frac{p_0}{3}$ und $\frac{p_0}{6}$ weiter unterteilen und findet, daß k auf $\frac{p_0}{5}$ liegt. Oder man trägt die Strecke lk vom Punkt 1 des Druckmaßstabes nach links ab und gelangt zum Punkte 5. Das besagt, daß der Enddruck $\frac{1}{5}$ des Anfangsdruckes ist.

b) Dämpfe.

Die Isotherme und die Adiabate werden auch hier im Entropie-Temperaturdiagramm als horizontale bzw. vertikale Gerade dargestellt. Bei Satttdampf ist die Kurve gleichen Druckes gleichzeitig eine Isotherme, wird also durch eine horizontale Gerade dargestellt, bei überhitztem Dampf dagegen ist es eine logarithmische Kurve.

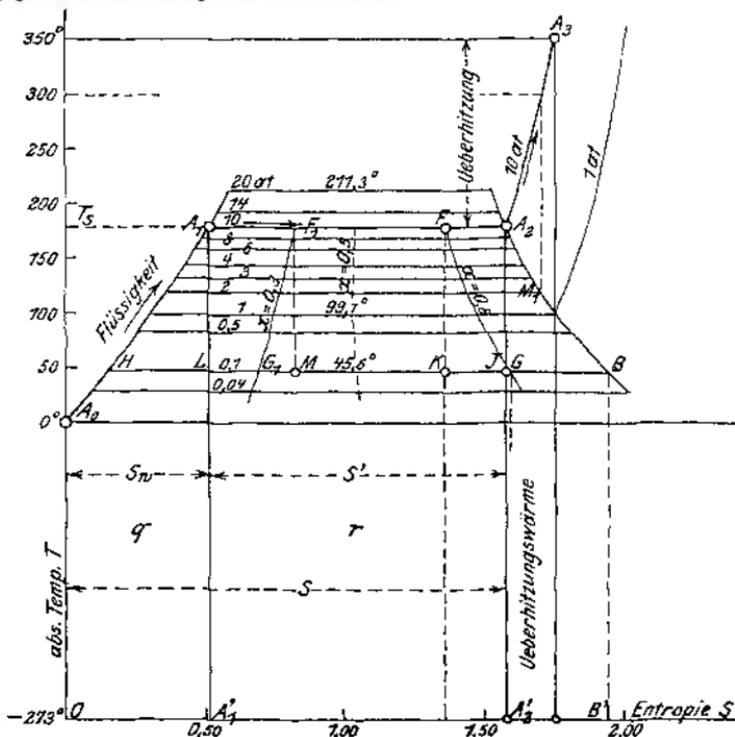


Fig. 16.

Fig. 16 zeigt das Entropie-Temperaturdiagramm für Wasserdampf. Man kann an ihm die Veränderung der Entropie mit der Veränderung des Zustandes erkennen. Bei A_0 ist Wasser von 0° vorhanden, die Entropie ist gleich Null. Mit wachsender Temperatur wächst die Entropie nach einer logarithmischen Kurve bis z. B. A_1 , die Temperatur 179°C und der Druck von 10 Atm. erreicht ist. Dann soll die Verdampfung, d. h. eine isothermische Expansion, beginnen. Mit steigendem Dampfgehalt wächst die Entropie, z. B. ist man bei 30% Dampfgehalt nach F_1 und bei 80% Dampfgehalt bis F gelangt. Bei 100% gelangt man nach A_2 . Die Entropie des trocken gesättigten Dampfes OA'_2 setzt sich also zusammen aus S_w der Entropie der Flüssigkeit und $S' = \frac{r}{T}$.

Führt man dem trockengesättigten Dampf bei konstantem Druck weitere Wärme zu, so steigt die Temperatur rasch, die Entropie langsam nach einer logarithmischen Kurve. Bei Erreichen der Temperatur 350° gelangt man zum Punkt A_3 . Die Fläche unter A_0A_1 stellt die Flüssigkeitswärme q , die unter A_1A_2 die Verdampfungswärme r , die unter A_2A_3 die Überhitzungswärme dar. Für andere Drücke als 10 Atm. findet man andre Werte der Entropie, die auf der Kurve A_2B liegen. Die Kurve A_0A_1 heißt untere Grenzkurve, A_2B obere Grenzkurve. Die beiden Kurven gehen bei der kritischen Temperatur (374°C) ineinander über, da sich die untere Grenzkurve nach rechts, die obere nach links umbiegt. Man kann noch die Punkte miteinander verbinden, die zu gleichem Dampfgehalt gehören, z. B. die Kurve F_1G_1 mit $x = 0,3$ und FG mit $x = 0,8$. Man erkennt sofort, daß bei adiabatischer Expansion sehr nassen Dampfes der Dampfgehalt größer wird. Expandiert Dampf von 10 Atm. und $x = 0,3$ adiabatisch auf 0,1 Atm., so wird dieser Vorgang durch die Senkrechte F_1M dargestellt. M liegt aber rechts von G_1 , d. h. der Dampf ist trockener geworden, der Dampfgehalt ist gestiegen. Läßt man dagegen Dampf von 80% Dampfgehalt (Punkt F) adiabatisch auf 0,1 Atm. expandieren, so liegt der Fußpunkt des Lotes K links von G , der Dampf ist also nasser geworden. Umgekehrt erkennt man, daß bei der adiabatischen Kompression sehr nasser Dampf noch nasser, ziemlich trockener Dampf noch trockener wird. Die Scheidung liegt etwa bei $x = 0,5$. Wird Dampf von 10 Atm. bei konstantem Druck überhitzt, so wächst S nach der Kurve A_2A_3 (Fig. 16). Läßt man überhitzten Dampf z. B. von 10 Atm. und 350°C adiabatisch expandieren, so schneidet das Lot durch A_3 zunächst die obere Grenzkurve bei $99,1^\circ \text{C}$, d. h. er hat seine Überhitzung verloren und ist trocken gesättigt. Im weiteren Verlauf der Expansion kommt das Lot in das Gebiet zwischen den Grenzkurven, d. h. der Dampf wird naß. Komprimiert man trocken gesättigten Dampf von 2 Atm. adiabatisch bis zu 10 Atm., so wird dieser Vorgang durch die Vertikale in M_1 bis zu deren Schnittpunkt mit der Kurve A_2A_3 dargestellt. Dieser Schnittpunkt liegt in der Höhe von 300°C , man erhält also hochüberhitzten Dampf.

Das Arbeitsdiagramm einer idealen Dampfmaschine ohne schädlichen Raum und ohne Kompression, die mit Satttdampf von 10 Atm. arbeitet, ist durch den Linienzug HA_1A_2JH gegeben; dabei bedeutet: HA_1 die Erwärmung des Speisewassers von $45,6^\circ$ auf 179°C , A_1A_2 die Verdampfung (Einströmung), A_2J Expansion, JH Kondensation bei $45,6^\circ \text{C}$. Die geleistete Arbeit wird durch die Fläche dargestellt, die der Linienzug umschreibt.

In Fig. 17 ist die obere Grenzkurve in größerem Maßstabe dargestellt. Im Gebiet der nassen Dämpfe sind die Kurven gleicher Feuchtigkeit eingetragen. Es ist natürlich auch möglich, andere Kurven, z. B. diejenigen gleichen Volumens oder gleichen Wärmeinhaltes i einzuzichnen. Insbesondere sei auf

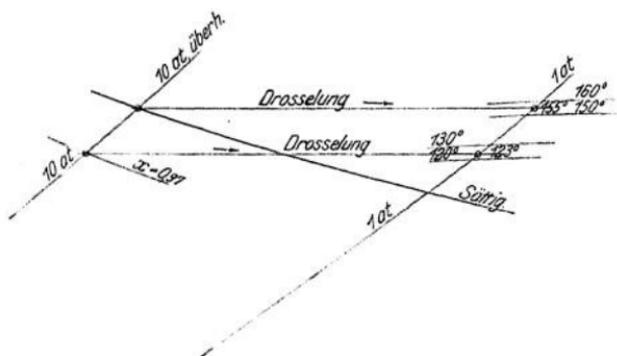
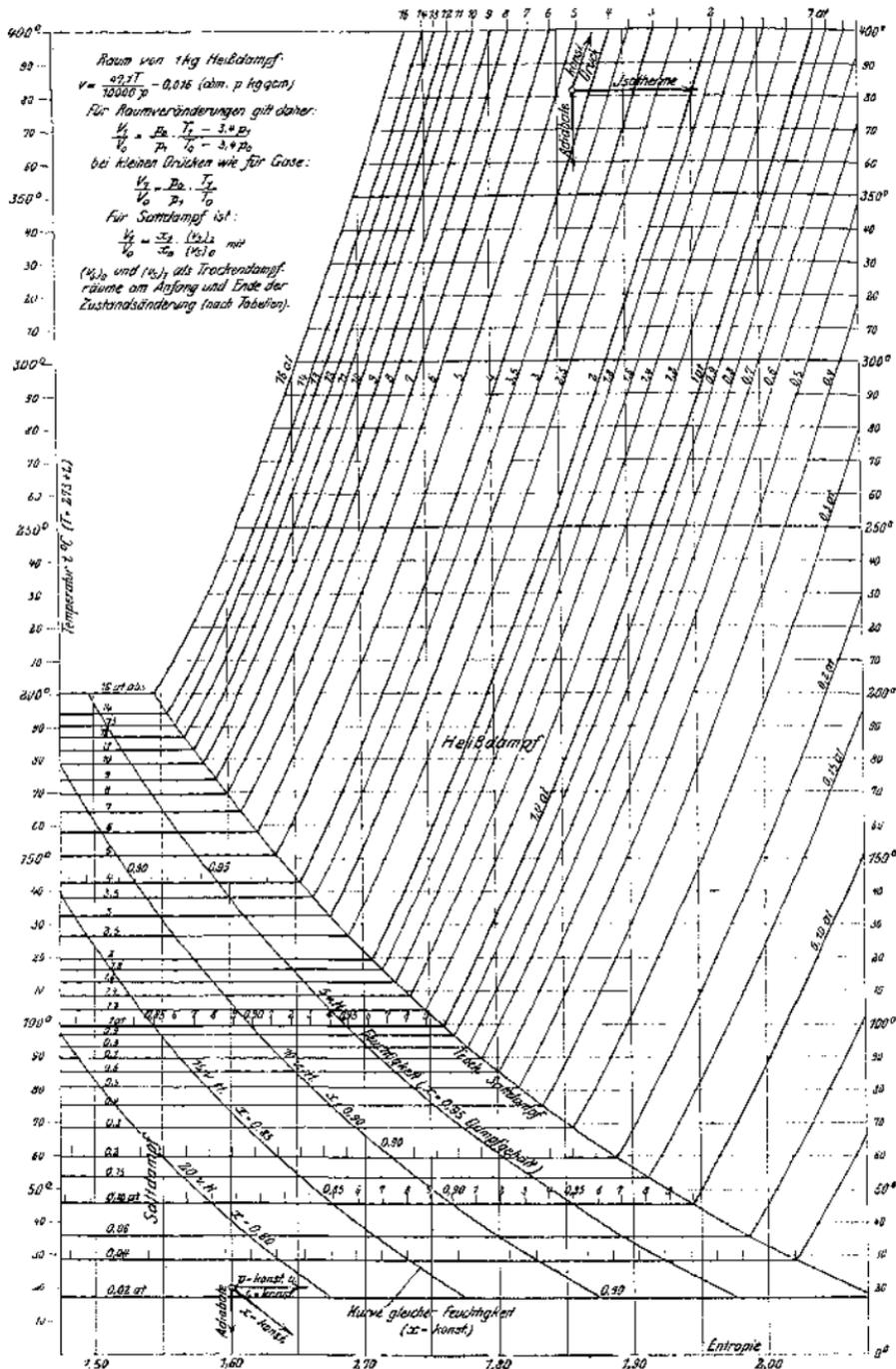


Fig. 17 1).

letztere hingewiesen. Wichtig ist, daß sich bei Drosselungen i nicht ändert.

1) Die Fig. 10, 12, 13, 16 und 17 sind: Schüle, Techn. Thermodynamik Bd. I. Berlin 1912. Julius Springer, entnommen.



(Aus: Schüle, Techn. Thermodynamik, Bd. I, Berlin 1912, Julius Springer.)

In Fig. 17 ist ein Stück des T - S -Diagrammes mit zwei Drosselkurven ($J = \text{konst.}$) gezeichnet. Man sieht, daß trocken gesättigter Dampf von 10 Atm. auf 1 Atm. gedrosselt eine Temperatur von 155°C annimmt, Dampf von 10 Atm. und 97% Dampfgehalt 123°C . In jedem Falle erhält man also überhitzten Dampf. Ist der Dampf noch nasser, so kommt keine Überhitzung, sondern nur eine Erhöhung des Dampfgehaltes zustande.

S - J -Diagramm.

Man kann auch an Stelle der Temperatur den Wärmehalt i als Ordinate wählen, wie dies in Tafel III) geschehen ist. Das S - J -Diagramm hat den Vorteil, daß sich die Wärmemengen nicht aus der Planimetrierung von Flächen ergeben, sondern als Strecken abgegriffen werden können.

In diesem Diagramm stellen sich dar:

Adiabatische Zustandsänderungen als Parallele zur J -Achse, und zwar ist die Änderung von i gleich der geleisteten Arbeit in Calorien gemessen.

Drosselungen stellen sich als Parallele zur Entropieachse dar, da i konstant bleibt. Bei Zustandsänderungen unter konstantem Druck ist die Veränderung von i das Maß für die aufgewandte bzw. gewonnene Arbeit.

In Tafel III sind $A_1 B_1$ die untere, AB die obere Grenzkurve. Weiter sind eingetragen: die Kurven gleichen Druckes, die im Sättigungsgebiet zugleich Kurven gleicher Temperatur sind, ferner die Kurven gleicher Temperatur und die Kurven gleichen Feuchtigkeitsgehaltes.

Beispiele: 1. 1 kg Dampf von 8 Atm. und 350° expandiert adiabatisch auf 0,1 Atm. Welche Arbeit wird geleistet?

Die Zustandsänderung wird durch die Linie $a' b'$ dargestellt. Die entsprechenden Werte von i sind 758 und 563 WE. Mithin ist:

$$\begin{aligned} A.L. &= 758 - 563 = 195 \text{ WE,} \\ L &= 195 \cdot 427 = 83\,265 \text{ m/kg.} \end{aligned}$$

2. 1 kg Satteldampf von 8 Atm. wird auf 6 Atm. gedrosselt und expandiert dann adiabatisch auf 0,1 Atm. Wieviel Prozent der Leistung gehen durch die Drosselung verloren?

Bei Expansion von 8 Atm. ab wäre die Leistung durch die Strecke $a b$ dargestellt worden. Die Drosselung auf 6 Atm. stellt sich als Horizontale $a d$ dar, die Expansion als $d e = 148 \text{ Cal}$, die Projektion von $b e$ auf die J -Achse 9,2; der Verlust beträgt mithin

$$\frac{9,2}{158} \cdot 100 = 5,8\%.$$

p - J -Diagramm.

Für manche Zwecke ist es vorteilhaft, den Druck als Ordinaten und den Wärmehalt als Abszissen zu wählen. Fig. 18 stellt ein solches Diagramm für Kohlensäure dar.

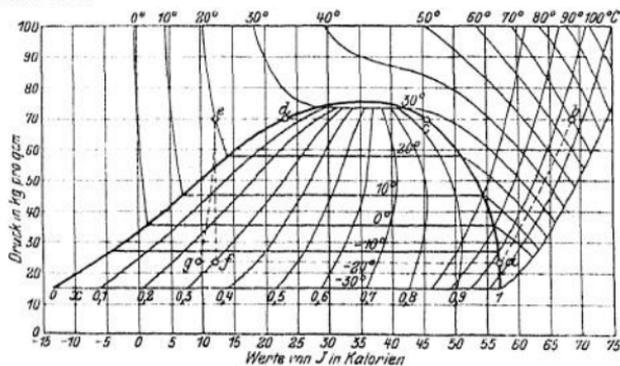
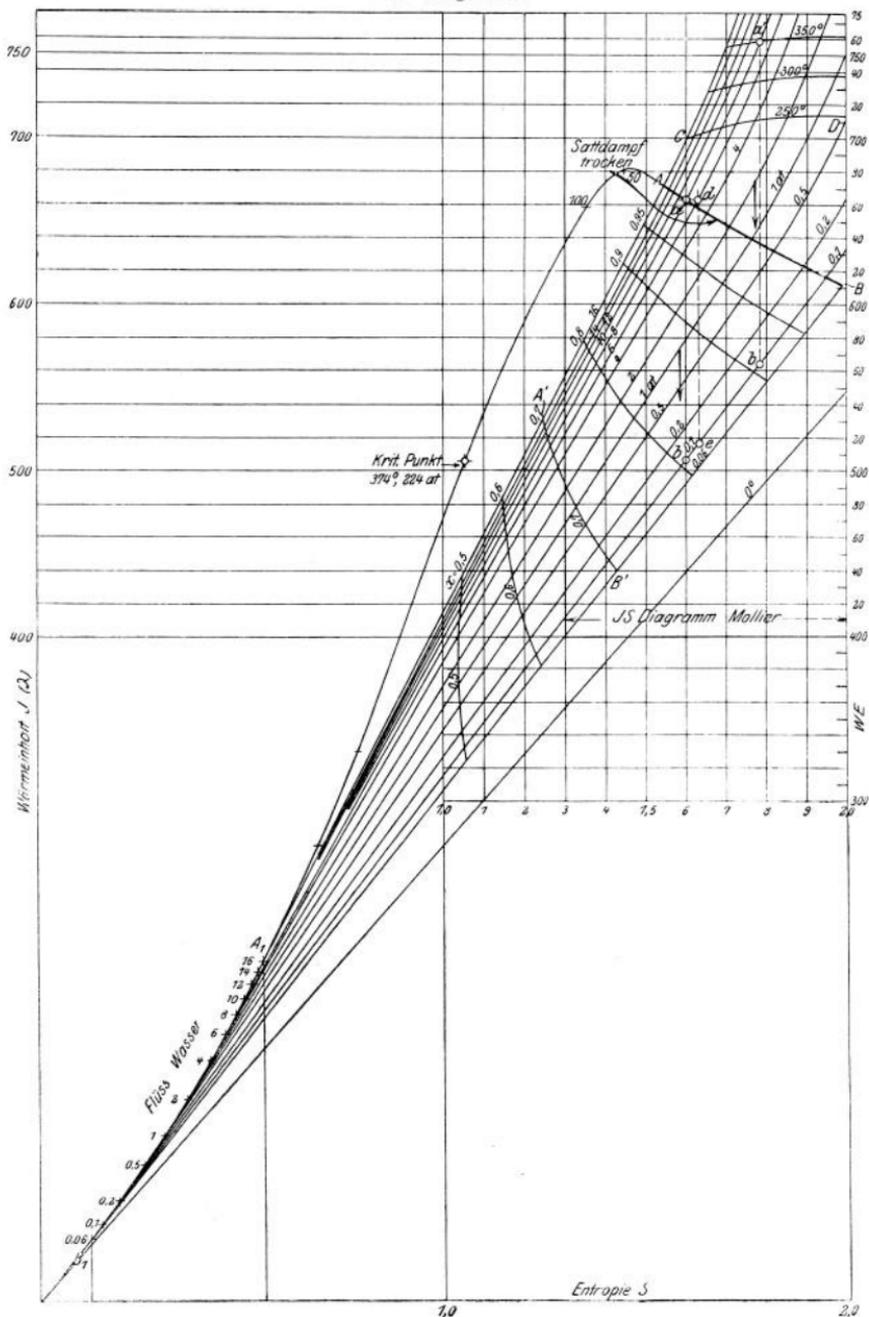


Fig. 18.

Eingezeichnet sind die Grenzkurve, Isotherme, die Kurven gleicher Feuchtigkeit und rechts einige Adiabaten.

JS Diagramm.

Tafel III.



(Aus: Schüle, Techn. Thermodynamik, Bd. I. Berlin 1912. Julius Springer.)

Die Kurve ab stellt die adiabatische Kompression eines trocken gesättigten Dampfes von 23 Atm. auf 70 Atm. dar. Die Kompressionsarbeit pro kg ist die Projektion auf die J -Achse, also $AL = 11,5$ Cal und $L = 427 \cdot 11,5 = 492$ m/kg. Die Horizontale $bcfd$ stellt einen Abkühlungsvorgang bei konstantem Druck dar, und zwar ist bc die Überhitzungswärme, cd die Verdampfungswärme und de die Unterkühlungswärme des Kondensats. Die Kurve ef stellt einen Drosselvorgang dar, aus dem ein Dampf von -20° C und 30% Dampfgehalt resultiert. Hätte die Expansion adiabatisch nach der Kurve eg stattgefunden, so hätte der Dampf nur 26% Feuchtigkeitsgehalt gehabt, und man hätte den Betrag gf , in Einheiten des J -Maßstabes gemessen, als Arbeit gewonnen.

VI. Festigkeitslehre.

Bearbeitet von Dipl.-Ing. H. Winkel.

I. Allgemeines.

A. Erklärungen und Versuchswerte.

Die Festigkeitslehre untersucht das Verhalten der Baustoffe unter dem Einfluß äußerer Kräfte und gibt dadurch die Grundlage für die Querschnittsbestimmung der durch äußere Kräfte angegriffenen Körper.

Infolge des Kraftangriffs erfahren die Körper Spannungen und Formänderungen.

Der Querschnitt eines durch äußere Kräfte beanspruchten Körpers ist so zu wählen, daß entweder

die rechnerisch ermittelte Spannung oder

die rechnerisch ermittelte Formänderung unter einer zulässigen Grenze bleibt.

Die (elastische) Formänderung, die ein Körperteilchen unter der Einwirkung äußerer Kräfte erfährt, besteht im allgemeinen aus Längenänderungen und aus Winkeländerungen; erstere werden hervorgerufen durch Normalspannungen σ , letztere durch Schubspannungen τ in den Flächen des Körperteilchens.

a) Arten der Festigkeit.

1. Zugfestigkeit. Der Stab (Fig. 1) freigemacht ergibt zwei Kräfte P , die in Richtung der Stabachse — d. h. normal zum Querschnitt — wirken; der Stab wird gezogen, er erfährt eine Verlängerung.

2. Druckfestigkeit. Der Stab (Fig. 2) wird ebenfalls durch zwei Kräfte P beansprucht, die in Richtung der Stabachse wirken; er wird gedrückt und erfährt eine Verkürzung.

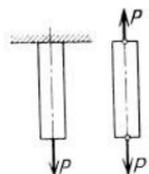


Fig. 1.

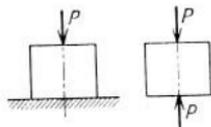


Fig. 2.



Fig. 3.

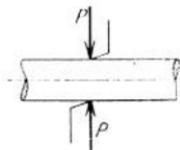


Fig. 4.

3. Knickfestigkeit. Ist der gedrückte Stab im Verhältnis zu seinem Querschnitt sehr lang (Fig. 3), so wird er unter dem Einfluß der beiden Kräfte P ausknicken. Bei jedem gedrückten Stabe ist die Sicherheit gegen Ausknicken nachzurechnen.

4. Scher- (Schub-)festigkeit. Auf den Stab wirken zwei gleichgroße entgegengesetzt gerichtete Kräfte P senkrecht zur Stabachse (Fig. 4); der Stab wird abgeschert.

5. Biegungsfestigkeit. Auf den Stab wirkt ein Kräftepaar, dessen Ebene durch die Stabachse geht (Fig. 5); er wird gebogen.

6. Drehungs- oder Torsionsfestigkeit. Auf den Stab wirkt ein Kräftepaar,

dessen Ebene senkrecht zur Stabachse steht (Fig. 6); die einzelnen Querschnitte des Stabes werden gegeneinander verdreht.

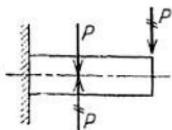


Fig. 5.

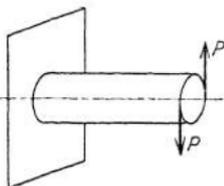


Fig. 6.

Bemerkung: Fall 5 und 6 erfordern streng genommen zwei gleichgroße entgegengesetzt drehende Kräftepaare, damit das Gleichgewicht der äußeren Kräfte vorhanden ist (vgl. Biegungsfestigkeit S. 419 und Drehungsfestigkeit S. 449).

7. Treten Einzelkräfte und Kräftepaare gleichzeitig auf, so erfährt der Körper eine zusammengesetzte Beanspruchung; er ist auf **zusammengesetzte Festigkeit** zu berechnen.

In den Fällen der einfachen Festigkeit treten Spannungen in nur einer Richtung, in den Fällen der zusammengesetzten Festigkeit im allgemeinen in zwei — meist aufeinander senkrecht stehenden — Richtungen auf. Der allgemeinste Fall der Beanspruchung eines Körpers ist vorhanden, wenn Spannungen nach den drei Koordinatenachsen gleichzeitig auftreten, z. B. die Festigkeit von Gefäßen unter innerem Überdruck (vgl. S. 479).

b) Längenänderungen und Normalspannungen.

Die Kenntnis vom Verhalten der Materialien unter dem Einfluß von Kräften beruht auf dem Versuch. Dieser zeigt, daß der zylindrische Stab der Fig. 7 unter dem Einfluß der beiden Kräfte P eine Verlängerung Δl und gleichzeitig eine Verminderung des Durchmessers erfährt.

Die Verlängerung der Längeneinheit heißt Dehnung:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_1 - l}{l}.$$

Das Verhältnis

$$\varepsilon_q = \frac{d - d_1}{d}$$

heißt Quersammenziehung.

Es finden also gleichzeitig zwei Formänderungen statt: eine Ausdehnung in Richtung der Stabachse und eine Zusammenziehung (Kontraktion) senkrecht zur Stabachse.

Der Wert $m = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_q}$, d. h. das Verhältnis von Dehnung zur Quersammenziehung ist vom Stoff des Stabes abhängig und liegt für isotrope (gleichartige) Körper zwischen 3 und 4; für Metalle setzt C. v. Bach $m = \frac{10}{3}$.

Eine Umkehrung der Kraftrichtung bewirkt eine Umkehrung der Formänderung: beim gedrückten Stabe findet eine Verkürzung in Richtung der Stabachse und eine Ausdehnung senkrecht zur Stabachse statt.

Bei einem durchgeschnittenen Stab (Fig. 7) müssen zur Erzielung des Gleichgewichts die strichpunktierten Kräfte P hinzugefügt werden, die ein Maß für die Beanspruchung des gesamten Querschnittes geben. Besteht der Körper aus durchaus gleichartigem Material, so wird man annehmen dürfen, daß jedes Flächenteilchen des Querschnitts gleichmäßig an der Kraftübertragung teilnimmt.

Setzt man fest, daß jedes cm^2 des Querschnittes σ kg tragen soll, so trägt ein Querschnitt von $F \text{ cm}^2$ ($F \cdot \sigma$) kg. Da Gleichgewicht zwischen den äußeren und inneren Kräften P herrschen muß — der Stab bleibt ungeschnitten in Ruhe — so wird

$$P = F \cdot \sigma \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{P}{F}.$$

Der auf die Flächeneinheit entfallende Anteil der Stabspannkraft heißt Spannung; sie wird gemessen in kg/cm^2 und stets auf den ursprünglichen — nicht deformierten — Querschnitt bezogen.

Die Spannung ist eine Vektorgröße, da sie nach Größe und Richtung unterschieden werden muß; für das Zusammensetzen verschiedener Spannungen gelten die Gesetze der Vektorenrechnung (vgl. Statik, S. 269).

Stehen die Spannungen senkrecht zum Querschnitt — fallen sie also mit der Stabachse zusammen — so heißen sie **Normalspannungen** (Zug, Druck).

Die Beziehung zwischen Dehnung und Spannung wird durch das Gesetz

$$\varepsilon = \alpha \cdot \sigma$$

ausgedrückt. α heißt die Dehnungszahl, gemessen in cm^2/kg , der umgekehrte Wert

$$E = \frac{1}{\alpha}$$

heißt Elastizitätsmaß, gemessen in kg/cm^2 .

Ist α konstant, so besteht direkte Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen (Hookesches Gesetz). Das trifft innerhalb gewisser Grenzen für manche Stoffe (Schweißeisen, Flußeisen, Stahl, Kupfer, Aluminium, Holz) zu; die Spannung σ_p , bis zu der direkte Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen herrscht, heißt Proportionalitätsgrenze.

Die meisten Baustoffe haben keine Proportionalitätsgrenze. Für sie gilt — mit Ausnahme von Marmor und Gummi — bis zur Streckgrenze σ_f mit hinreichender Genauigkeit nach C. v. Bach und W. Schüle das allgemeine Gesetz der elastischen Dehnungen

$$\varepsilon = \alpha_0 \cdot \sigma^n \quad (\text{Potenzgesetz}).$$

Hierin sind α_0 und n für jeden Stoff unveränderlich; für Gußeisen, Zinkguß, Sandstein, Beton ist $n > 1$, d. h. die Dehnungen wachsen rascher als die Spannungen; für Leder und Hanfseile ist $n < 1$.

Innerhalb der Gültigkeitsgrenze des Hookeschen Gesetzes ist

$$\Delta l = \alpha \cdot \sigma \cdot l,$$

wobei Δl und l in mm bzw. cm gemessen werden. Die Vereinigung der Gleichungen für Dehnung und Spannung ergibt

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \alpha \cdot \sigma, \\ \frac{\Delta l}{l} &= \alpha \cdot \frac{P}{F} \end{aligned}$$

und daraus

$$\alpha = \frac{\Delta l \cdot F}{l \cdot P};$$

es wird demnach α zu einer Verlängerung Δl , wenn $F = 1 \text{ cm}^2$; $l = 1 \text{ cm}$; $P = 1 \text{ kg}$ bzw. wenn $l = 1 \text{ cm}$ und $\sigma = 1 \text{ kg}/\text{cm}^2$ werden. Daraus folgt die Definition der Dehnungszahl α : sie ist die Verlängerung Δl in cm eines Stabes von 1 cm Länge und 1 cm^2 Querschnitt bei der Belastung von 1 kg bzw. ist sie die Zunahme der Einheit der Länge bei der Einheit der Spannung. Die Dehnungszahl α läßt sich demnach mit der Wärmeausdehnungszahl α_w (S. 353) vergleichen, die die

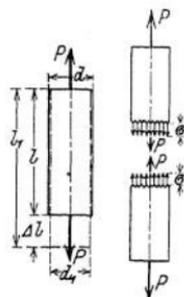


Fig. 7.

Zunahme der Einheit der Länge eines Stabes bei der Einheit der Temperatur (1°C) bedeutet.

Ist ein Stab fest eingespannt, so daß die Ausdehnung infolge von Wärmeschwankungen verhindert ist, so wäre die Verlängerung infolge der Wärme: $\alpha_w \cdot l \cdot t$; die gleiche Verlängerung kann man durch eine Spannung σ hervorgerufen denken, so daß

$$\alpha_w \cdot l \cdot t = \frac{1}{E} \cdot \sigma \cdot l,$$

wenn statt der Dehnungszahl α ihr reziproker Wert $\frac{1}{E}$ eingeführt wird.

$$\sigma = \alpha_w \cdot E \cdot t.$$

für Flußeisen wird $\sigma = \infty 25 \text{ t}^\circ$ in kg/cm^2 .

Unterwirft man einen Stab einer stetig wachsenden Belastung und bestimmt zu jeder Spannung σ die zugehörige Dehnung ϵ , so läßt sich mit Hilfe der so

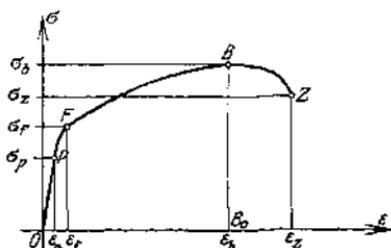


Fig. 8.

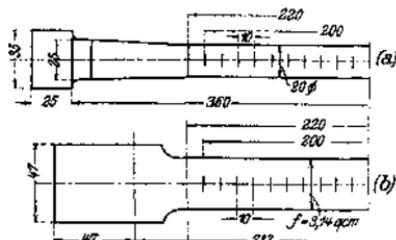


Fig. 9.

erhaltenen Werte $\sigma = f(\epsilon)$ graphisch darstellen (Fig. 8). Es werde zunächst das Verhalten eines Flußeisenstabes unter der Zerreißmaschine verfolgt und als Probestab gewählt der Normalstab der Fig. 9a für Rundstabe bzw. der Stab der Fig. 9b für Flachstabe. Die Wahl eines einheitlichen Maßes für die Probestäbe erwies sich als notwendig, da die Form der Stäbe die Festigkeitsverhältnisse um ein geringes beeinflusst (vgl. Martens, Materialprüfungswesen).

Die Länge von 200 mm heißt Meßlänge; auf sie wird die (mittlere) Dehnung ϵ bezogen. Die Kurve $\sigma = f(\epsilon)$ zeigt ein anfänglich langsames Zunehmen der Dehnungen bei stetig wachsender Belastung; sie verläuft steil und geradlinig bis zum Punkte P , so daß innerhalb dieser Belastungsgrenzen direkte Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen angenommen werden darf. σ_p in kg/cm^2 heißt Proportionalitätsgrenze; die größte rechnerisch ermittelte Spannung σ muß stets unter diesem Werte bleiben, wenn der Berechnung das Hookesche Gesetz zugrunde gelegt ist (vgl. die zulässigen Beanspruchungen S. 395). Wird die Belastung über σ_p hinaus gesteigert, so wachsen die Dehnungen rascher; die Kurve geht in leichter Krümmung bis F . Von da ab tritt eine bedeutende Verlängerung des Stabes ein bei einem geringen Wachsen der Belastung; der Stab streckt sich oder er beginnt zu fließen. Die Spannung σ_f , bei der das Strecken oder Fließen des Materials beginnt, heißt Streck- oder Fließgrenze. Während der Streck- oder Fließperiode bilden sich auf der Oberfläche des Stabes moirähnliche Muster, die man mit Fließfiguren bezeichnet. Von den Dehnungen ist anzunehmen, daß sie

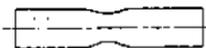


Fig. 10.

sich bis zum Punkte B_0 gleichmäßig über die Stabachse verteilen. Nachdem die Verlängerung OB_0 eingetreten ist, beginnt der Stab sich an einer Stelle einzuschneiden; der Querschnitt wird erheblich kleiner (Fig. 10), die Belastung, die zur Erzielung einer weiteren Verlängerung notwendig ist, nimmt ab; die Kurve fällt von B nach Z . Schließlich tritt die Trennung ein; der Stab reißt.

Die Spannung $\max \sigma$ heißt Zugfestigkeit; sie wird im allgemeinen mit K_z bezeichnet und auf den ursprünglichen Querschnitt bezogen. Die Bruchspannung σ_z ist die auf den ursprünglichen Querschnitt bezogene Spannung, bei der der Bruch erfolgt. Zwischen B und Z verteilen sich die Dehnungen infolge der Einschnürung nicht mehr gleichmäßig über die Stabachse; sie sind an der Einschnürungsstelle größer.

Wird der Querschnitt des Stabes an der Bruchstelle mit F_1 bezeichnet, so ist

$$\eta = 100 \frac{F - F_1}{F}$$

die Querschnittsverminderung in Hundertteilen des ursprünglichen Querschnitts; sie heißt Bruchzusammenziehung oder Kontraktion.

Ist l_1 die Länge, die der Stab nach dem Zerreißen besitzt, so wird

$$\varphi = 100 \frac{l_1 - l}{l}$$

die Dehnung des zerrissenen Stabes, in Hundertteilen der ursprünglichen Länge, wenn der Bruch in der Mitte des Stabes eintritt; φ heißt Bruchdehnung oder kurz Dehnung.

Wird der um Δl verlängerte Stab wieder entlastet, so verliert er die erlittene Formänderung nicht wieder vollständig; es bleibt ein Dehnungsrest, der bleibende Dehnung heißt. So ist z. B. die Bruchdehnung eine bleibende Dehnung. Die wieder verschwindende Längenänderung heißt elastische oder federnde Dehnung. Für kleine Spannungen ist sie praktisch gleich Null. Das Königliche Materialprüfungsamt zu Groß-Lichterfelde setzt als Elastizitätsgrenze σ_e diejenige Spannung fest, bei der die bleibende Dehnung 0,02 v. H. der Meßlänge des Probstabes erreicht.

Ein Körper heißt vollkommen elastisch, wenn bei der Entlastung die Rückkehr in die ursprüngliche Form eine vollständige ist. Er ist um so elastischer, je größer die federnde Längenänderung im Vergleich zur gesamten Längenänderung ist. Die meisten Stoffe sind elastisch. Die Formänderungen und ebenso die Festigkeit sind abhängig von der Zeit, in der die Belastungssteigerung vor sich geht. Bei einer rasch gesteigerten Belastung kann sich die Formänderung nicht mit gleicher Schnelligkeit ausbilden; der Stab wird reißen, ohne die seinem Material zukommende Dehnung erreicht zu haben.

Formänderungen und Festigkeit sind in hohem Grade von der Temperatur abhängig.

Für Druck gelten sinngemäß die gleichen Erklärungen; die Druckspannung σ bewirkt eine Verkürzung des Stabes und damit eine Vergrößerung des Durchmessers. Den Vorgang erklärt Fr. Riedel¹⁾ in folgender Weise: Beim Zusammendrücken eines Zylinders bilden sich im Innern Rutschkegel (Fig. 11), die selbst keine Formänderung erleiden, weil sie von den Preßflächen und dem sie umgebenden Stoff der Ringe eingeschlossen sind, dafür aber die be-

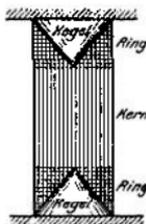


Fig. 11.

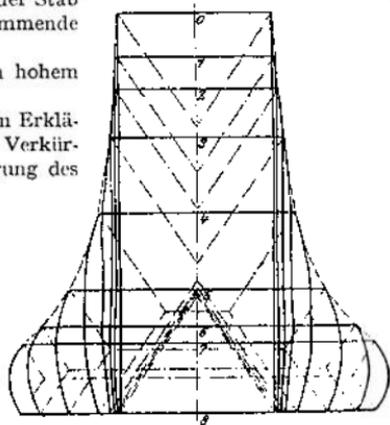


Fig. 12.

nachbarten Stoffteilchen nach außen drängen und so Ausbauchungen in der Nähe der Endflächen und weiterhin die Tonnenform herbeiführen (Fig. 12).

¹⁾ Z. Ver. deutsch. Ing. 1913, Nr. 22, S. 845.

Die Preßkraft P (Fig. 13) kann mit Rücksicht auf die Rutschkegel in die Kräfte Q und diese wieder in die wagerechten und senkrechten Teilkräfte S und D zerlegt werden; dann weiten die Kräfte S die Ringe auf und bringen schließlich den Körper zum Bruch.

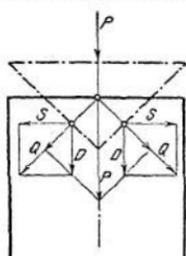


Fig. 13.

Die Druckfestigkeit K ist die Spannung in kg/cm^2 , bezogen auf den ursprünglichen Querschnitt, bei der der Körper zerstört wird. An die Stelle der Fließgrenze σ_f tritt die Quetschgrenze, bei der der Stoff nach der Seite abfließt, ohne daß eine Zerstörung erfolgt.

Arbeit der Längenänderung vgl. Abschnitt Mathematik S. 176.

$$A = \frac{\text{Gesamtarbeit}}{F \cdot l} = \frac{\mathfrak{A}}{V}$$

ist die Arbeit für die Volumeneinheit und heißt Arbeitsvermögen des Stoffes; sie wird als $\int \sigma \cdot d\varepsilon$ dargestellt durch den Inhalt der Fläche, die durch die Kurve $\sigma = f(\varepsilon)$ (Fig. 8) begrenzt wird und hat die Benennung cmkg/cm^3 . Bildet man aus σ_0 und ε_2 das Rechteck, so ist

$$A = \xi \cdot \sigma_0 \cdot \varepsilon_2,$$

wobei $\xi < 1$ den Völligkeitsgrad bedeutet.

Innerhalb der Proportionalitätsgrenze ist die Kurve $\sigma = f(\varepsilon)$ bei stetig wachsender Belastung P_1 eine Gerade; in diesem Falle ergibt die Integration

$$A = \frac{1}{2} P \cdot \Delta l.$$

c) Winkeländerungen und Schubspannungen.

Ein Würfel (Fig. 14) werde in der unteren Ebene festgehalten und durch eine in der oberen Fläche liegende Kraft P angegriffen. Es werde angenommen, daß die Kraft P über die obere Fläche gleichmäßig verteilt sei, so wird sich die Begrenzungsfläche $CDEF$ nach $C'D'E'F'$ verschieben; der rechte Winkel CAB geht in den spitzen Winkel $C'AB$ über; es wird

$$\text{tg } \gamma = \frac{CC'}{AC} = \gamma$$

(im Bogenmaß gemessen), sofern der Winkel sehr klein ist. Infolge

$$\gamma = \frac{CC'}{AC} = \frac{C_1 C_2}{1}$$

ist die Änderung γ des ursprünglich rechten Winkels gleich der Strecke, um die sich zwei um 1 voneinander entfernte parallele Flächenteilechen gegeneinander verschieben. γ heißt die Schiebung oder Gleitung. Ist F der Flächeninhalt der oberen Begrenzungsfläche in cm^2 , P die angreifende Kraft in kg , so wird

$$\tau = \frac{P}{F} \text{ in } \text{kg/cm}^2$$

die Schubspannung. Die Größe der Schiebung für die Einheit der Schubspannung ist $\beta = \frac{\gamma}{\tau}$ und heißt Schubzahl; ihr reziproker Wert $\frac{1}{\beta} = G$ heißt Gleitmaß (in kg/cm^2). Die Schubzahl β ist die Änderung des rechten Winkels pro kg Schubspannung bzw. diejenige Strecke, um die sich zwei um 1 voneinander entfernte parallele Flächenteilechen unter der Einwirkung von 1 kg/cm^2 Schubspannung gegeneinander verschieben.

Entsprechend $\varepsilon = \alpha \cdot \sigma$ wird hier $\gamma = \beta \cdot \tau$, wobei β innerhalb eines gewissen Spannungsbereiches als konstant angenommen werden darf.

Die in Fig. 14 vorausgesetzte Art des Kraftangriffs ruft nur dann eine strichpunktierte Deformation hervor, wenn der Würfel sehr klein ist; im allgemeinen bewirkt das Kräftepaar P (das durch Freimachen des Würfels entsteht) eine

Biegung (Fig. 15). Soll lediglich eine Verschiebung der Flächen gegeneinander auftreten, so müssen die Längenänderungen der vertikalen Fasern gehindert werden: AC' muß verkürzt, BD' verlängert werden; das ist nur möglich, wenn man ein zweites Kräftepaar Q in den vertikalen Begrenzungsflächen des Würfels voraussetzt, so daß die Kräfte P und Q aufeinander senkrecht stehen. Fällt die einschränkende Bedingung der Würfelform und wird ein Parallelepiped (Fig. 16) mit den Seiten r und q angenommen, so muß, da Gleichgewicht herrschen soll, die Beziehung bestehen

$$P \cdot r = Q \cdot q,$$

wenn von der geringen Verschiebung Δ abgesehen wird. Wird weiter angenommen, daß

$$\tau_1 = \frac{P}{F_1} \quad \text{und} \quad \tau_2 = \frac{Q}{F_2}$$

gleichmäßig über die Grenzflächen F_1 und F_2 verteilt sind, so wird

$$\tau_1 \cdot F_1 \cdot r = \tau_2 \cdot F_2 \cdot q.$$

Aus $F_1 \cdot r = V = F_2 \cdot q$ folgt $\tau_1 = \tau_2$,

d. h. die beiden senkrecht zur Kante A stehenden Schubspannungen τ_1 und τ_2 sind einander gleich; sie müssen paarweise auftreten, wenn die vorausgesetzte Formänderung wirklich eintreten soll. Es entspricht dieses Resultat der Natur der Schiebung, die eine Änderung eines Winkels bedeutet; die auf die Flächeneinheit der beiden Winkelebenen wirkenden Kräfte, die diese Änderungen herbeiführen, müssen in der Richtung des einen Schenkels so groß sein wie in der des andern (vgl. Bach, *Elastizität und Festigkeit* S. 291).

Zwischen der Dehnungszahl α und der Schubzahl β besteht die Beziehung

$$\beta = 2 \cdot \frac{m+1}{m} \alpha, \quad \text{so daß} \quad G = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot E.$$

für $m = 3$ bis 4 wird $\beta = 2,5 \alpha$ bis $2,67 \alpha$

oder $\alpha = 0,375 \beta$ bis $0,4 \beta$,

für $m = \frac{10}{3}$ wird $\beta = 2,6 \alpha$ und $G = 0,385 E$.

Die Schubfestigkeit K_s in kg/cm^2 ist die Schubspannung, bei der sich zwei gegeneinander verschobene Querschnittebenen eines Stabes trennen. Für die zulässige Schubspannung gilt nach C. v. Bach

$$k_s < \frac{m}{m+1} \cdot k_z; \quad K_s < \mu_1 \cdot K_z,$$

mit $m = 3$ bis 4 wird $k_s = 0,75 k_z$ bis $0,8 k_z$.

d) Die zulässige Spannung und Sicherheit gegen Bruch.

Die zulässige Spannung ist die Spannung, bis zu der ein Körper durch äußere Kräfte auf eine der verschiedenen Arten der Festigkeit beansprucht werden darf; sie bleibt im allgemeinen unterhalb der Proportionalitätsgrenze und der Elastizitätsgrenze. Die auf Grund des Hooke'schen Proportionalitätsgesetzes ermittelten Spannungen müssen stets unterhalb der Proportionalitätsgrenze liegen. Für die Wahl der zulässigen Beanspruchung gilt: solange die theoretischen Unterlagen der Festigkeitsrechnung fest liegen, dürfen die höheren Werte der Tabellen¹⁾ genommen werden; wird die Rechnung auf Grund von Annahmen durchgeführt, über deren Richtigkeit kein sicheres Urteil besteht, so ist die zulässige Beanspruchung niedrig zu wählen.

¹⁾ Vgl. S. 403–407.

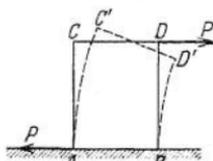


Fig. 15.

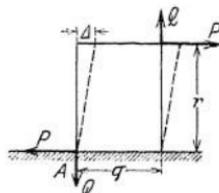


Fig. 16.

Die Sicherheit \mathcal{S} gegen Bruch ist das Verhältnis der Festigkeit zur zulässigen Beanspruchung; z. B. für Zugbeanspruchung $\mathcal{S} = \frac{K_z}{k_z}$.

Liegen keine besonderen Vorschriften (vgl. S. 405) über die Wahl der zulässigen Beanspruchung vor, so ist die Sicherheit \mathcal{S} gegen Bruch maßgebend. Wird z. B. eine achtfache Sicherheit für ausreichend erachtet, so wäre k_z für Chrom-Nickelstahl der Friedrich Krupp-A.-G., Essen (vgl. S. 397) wegen $K_z = 7500 \text{ kg/cm}^2$

$$k_z = \frac{1}{\mathcal{S}} \cdot K_z = \frac{1}{8} \cdot 7500 = 940 \text{ kg/cm}^2.$$

Im wesentlichen richtet sich die Größe der zulässigen Spannung darnach, ob die Belastung eine ruhende oder wechselnde ist (vgl. S. 402). Außerdem ist der Einfluß von Stößen zu berücksichtigen (vgl. S. 410); hinzu kommt die Gefahr der Anbohrung. In seinem Werk „Die Dampfturbinen 1)“ sagt Stodola: Wenn wir eine Reihe von wohleingebürgerten Maschinenelementen genauer untersuchen, so finden wir, daß an vielen Stellen Überbeanspruchungen zugelassen werden, sofern nur die Gewähr vorhanden ist, daß nach Eintritt des Fließens an der betroffenen Stelle ein Ausgleich der Spannungen möglich ist. Vor allem die scharfen, aber auch die ungenügend abgerundeten Ecken sind Stellen dieser Art. Die Überbeanspruchung in einer Bohrung besitzt nun die Eigenschaft, die Spannung durch bleibendes Strecken der inneren Fasern auf die weiter außen gelegenen so zu verteilen, daß die größte Beanspruchung sinkt. Bei der Beurteilung, was zulässig ist, muß aber ein weiteres wichtiges Kriterium hinzutreten: die Ausdehnung der von der Überbeanspruchung betroffenen Stelle.

B. Elastizitäts- und Festigkeitszahlen.

a) Eisen und Stahl.

Eisensorte	$E = \frac{1}{\alpha}$ kg/cm ²	$G = \frac{1}{\beta}$ kg/cm ²	σ_p kg/cm ²	σ_f kg/cm ²	K_z kg/cm ²	K kg/cm ²
Schweißeisen zur Sehnen- richtung	2 000 000	770 000	1300 bis 1700	2200 bis 2800	3300 bis 4000 ²⁾	σ_f maßgebend
Flußeisen	2 150 000	830 000	2000 bis 2400	2500 bis 3000	3400 bis 4400	σ_f maßgebend
Flußstahl	2 200 000	850 000	2500 bis 5000 ¹⁾	2800 und mehr, härteres Material ohne Streckgrenze	4500 bis 10 000 ²⁾	wenn weich, so ist σ_f maßge- bend; wenn hart, so $K \geq K_z$
Federstahl, ungehärtet	2 200 000	850 000	4000 und mehr		7500 bis 9000	
Federstahl, gehärtet	2 200 000	850 000	7500 und mehr		8000 u. mehr	
Stahlguß	2 150 000	830 000	2000 und mehr	wie bei Fluß- stahl	3500 bis 7000 ²⁾	wie bei Fluß- stahl
Gußeisen	750 000 bis 1 050 000	290 000 bis 400 000	σ_p u. σ_f nicht vorhanden für Zug $\epsilon = \frac{1}{1\ 250\ 000} \sigma^{1,1}$ für Druck $\epsilon = \frac{1}{1\ 180\ 000} \sigma^{1,05}$		1200 bis 1800	7000 bis 8000

1) Vierte Aufl. Berlin 1910. Julius Springer.

2) Für Schweißeisen \perp zur Sehnenrichtung ist $K_z = 2800$ bis 3500 kg/cm^2 .

3) Geglühter Stahlguß von Friedr. Krupp als Martinstahlguß $K_z = 4000$ — 4800 kg/cm^2 ; als Tiegelstahlguß $K_z = 4500$ — 7000 kg/cm^2 .

I. Konstruktionsstahl von Fr. Krupp. A.-G., Essen.

Verwendungszweck	Art	Streckgrenze kg p. qmm	Zugfestigkeit kg p. qmm.	Dehnung, für die Meßlänge von		Kerb- zähigkeit mkg p. qcm
				10 × Durchm. %	5 × Durchm. %	
Martinstahl						
Martinstahl und Spezialmartinstahl finden für jede Art von Schmiedestücken Verwendung; ersterer, wenn die Beanspruchung eine mäßige ist, letzterer, wenn mit größeren Beanspruchungen oder höheren Sicherheitsgraden zu rechnen ist.	weich	20	40	22	26	10
	mittelhart	25	50	20	24	6
	hart	30	60	18	21	4
Spezialmartinstahl						
desgl.	weich	25	45	22	26	14
	mittelhart	30	55	20	24	10
	hart	35	65	18	21	6
Tiegelstahl						
Tiegelstahl tritt an Stelle der Martinstahl, wenn besonderer Wert auf Reinheit und Zuverlässigkeit des Materials gelegt wird. Naturharter Tiegelstahl findet Verwendung für Teile, die starkem Verschleiß unterworfen sind, sich aber nicht zur Ausführung in gehärtetem Stahl eignen.	weich	25	45	22	26	16
	mittelhart	30	55	20	24	12
	hart	35	65	18	21	8
	sehr hart	40	75	14	16	4
	naturhart	50	90	8	10	—
Elektrostahl						
Ähnliche Eigenschaften wie Tiegelstahl.	weich	25	45	22	26	16
	mittelhart	30	55	20	24	12
	hart	35	65	18	21	8
	sehr hart	40	75	14	16	4
Spezialstahl						
C. 24. O. ist besonders für Wagenachsen u. dergl. geeignet. C. 46. O., F. 48. O. für stark beanspruchte Konstruktionsteile von mäßigen Abmessungen. F. 86. O. wird für Teile verwendet, die starkem Verschleiß unterworfen sind, und für solche Teile, die bei hoher Temperatur noch große Festigkeit besitzen müssen, z. B. Metallpressenzylinder.	C. 24. O.	30	50	20	25	16
	C. 46. O.	50	70	14	17	14
	F. 48. O.	60	80	12	15	14
	F. 86. O.	75	100	8	10	—
Nickelstahl						
Diese Nickelstahl, besonders die mittelhart, finden Verwendung für schwere Schiffs- und Maschinenwellen, Lokomotivkurbelachsen usw. Die weichen Marken E. 112. O. und E. 120. O. eignen sich auch für Einsatzhärtung.	weich { E. 112. O.	30	45	22	26	30 über 40
	E. 120. O.	35	50	20	24	
	mittel- { E. 312. O.	38	55	18	22	20
	E. 220. O.	42	55	18	22	28
	hart { E. 320. O.	45	60	18	22	24
Chromnickelstahl						
Die Marken E. F. 28. O., E. F. 31. O. und E. F. 36. O. werden für Schmiedestücke von geringeren Abmessungen verwendet: E. F. 28. O. bis etwa 100 mm Dicke, E. F. 31. O. bis etwa 80 mm Dicke und E. F. 36. O. bis etwa 150 mm Dicke. Für die größeren Abmessungen eignen sich die Marken E. F. 40. O. (für Lokomotivachsen u. dgl.), E. F. 50. O., E. F. 55. O. und E. F. 60. O.	E. F. 28. O.	45	60	18	22	24
	E. F. 31. O.	55	70	15	18	20
	E. F. 36. O.	50	65	16	20	24
	E. F. 40. O.	45	55	18	22	26
	E. F. 50. O.	50	70	15	18	20
	E. F. 55. O.	60	75	14	16	18
	E. F. 60. O.	65	75	15	18	24

Allgemeine Bemerkungen der Firma Fr. Krupp A.-G.

Die Kohlenstoffstähle werden nach dem Herstellungsverfahren als Martinstahl, Spezial-Martinstahl, Tiegelstahl und Elektrostahl unterschieden, die sogenannten legierten Stähle als Spezialstahl, Nickelstahl, Chromnickelstahl. Innerhalb der einzelnen Gruppen sind die Stähle nach Härte und Zähigkeit, den beiden für den Konstrukteur wichtigsten Eigenschaften, abgestuft.

Große Härte ist beim Stahl im allgemeinen gleichbedeutend mit großer Festigkeit. Bei den Kohlenstoffstählen verringert sich mit zunehmender Härte die Zähigkeit; die Forderung großer Härte bedeutet also Verzicht auf große Zähigkeit. Im Interesse einer möglichst hohen Zähigkeit empfiehlt es sich daher, die Härte nicht höher zu bemessen als mit Rücksicht auf den Verwendungszweck notwendig ist. Dieser Gesichtspunkt kann besonders dann zur Geltung gebracht werden, wenn man in den Abmessungen und in den Gewichten nicht beschränkt ist. Auch der Form und der Größe der Stücke ist ein Einfluß einzuräumen; für Stücke, die schwierig herzustellen oder die sehr groß sind, sind tunlichst weiche Stahlsorten zu verwenden, bei einfachen Formen und kleinen Abmessungen kann die Härte leicht größer gewählt werden.

Die Zähigkeit wird zumeist nach der Bruchdehnung von Zerreißproben beurteilt. Dieser Maßstab ist in vielen Fällen berechtigt, insbesondere bei einfach beanspruchten Maschinenteilen von stetig verlaufender Form. In anderen Fällen dagegen hat man die Erfahrung gemacht, daß Konstruktionsteile, selbst aus Stahl von großer Bruchdehnung, unvernünftig und ohne vorhergegangene Formänderung durchgebrochen sind. Die Brüche traten z. B. bei geraden Achsen vorzugsweise an scharf abgesetzten Stellen, bei Kurbelwellen am Übergang von Kurbelzapfen und Blatt, überhaupt da auf, wo die Form schroffe Übergänge oder scharfe Krümmungen aufwies.

Weiter wurde die Erfahrung gemacht, daß derartige Brüche bei Kohlenstoffstählen leichter als bei legierten Stählen, insbesondere den Nickel- und Chromnickelstählen, auftraten. Zu den oben erwähnten Konstruktionsteilen ist ein Stahl von höherer Kerbzähigkeit zu verwenden. Zum Nachweis dieser Art von Zähigkeit dient die Kerbschlagprobe. Die Tabellen zeigen nun, daß bei den Kohlenstoffstählen die Kerbzähigkeit mit steigender Festigkeit abnimmt, und zwar verhältnismäßig weit mehr als die Bruchdehnung. Besonders wichtig aber ist die Erkenntnis, daß die Überlegenheit der Spezialstähle und ganz besonders der Nickelstähle und der Chromnickelstähle ihren Ausdruck in der höheren Kerbzähigkeit findet. So hat z. B. der mittelharte Martinstahl bei 50 kg pro qmm Zugfestigkeit und 20% Bruchdehnung eine Kerbzähigkeit von nur 6 mkg pro qcm, der Nickelstahl E. 120. O. bei derselben Zugfestigkeit von 50 kg pro qmm und der gleichen Bruchdehnung von 20% die sehr hohe Kerbzähigkeit von über 40 mkg pro qcm.

Ein weiterer wichtiger Unterschied zugunsten der legierten Stähle zeigt sich beim Vergleich der Werte für die Streckgrenze. Bei gleicher Zugfestigkeit ist die Streckgrenze der legierten Stähle im allgemeinen höher als die der Kohlenstoffstähle. Streckgrenze und Kerbzähigkeit sind aber wesentlich die Größen, welche die Festsetzung der zulässigen Beanspruchung bestimmen. Hohe Streckgrenze und gleichzeitig große Kerbzähigkeit ermöglichen die größten Beanspruchungen und gewähren zugleich die größte Sicherheit gegen Bruch beim Auftreten von Stößen, die sich der rechnerischen Berücksichtigung entziehen. Die Bedeutung der Nickelstähle und der Chromnickelstähle für den Konstrukteur liegt also darin, daß sie höher beansprucht werden dürfen und eine größere Bruchsicherheit, insbesondere gegenüber stoßweiser Belastung gewähren, als die Kohlenstoffstähle.

Die vorstehende Zusammenstellung von Stahlsorten enthält nicht alle unsere Marken, sie ist aber reichhaltig genug, um dem Konstrukteur in den meisten Fällen eine zweckmäßige Auswahl zu ermöglichen; die unter den einzelnen Stahlsorten angegebenen hauptsächlichsten Verwendungsarten sollen dabei eine Hilfe bieten.

Zerreißproben: Die angegebenen Zerreißzahlen sind Mindestwerte, die gewährleistet werden können, sofern die Schmiedestücke nicht ungewöhnliche Abmessungen und Formen haben. Nach den Normen des Deutschen Verbandes für die Materialprüfungen der Technik gelten als Normal-Zerreißstäbe sowohl solche mit einer Meßlänge gleich dem 10fachen Durchmesser, als auch Stäbe, deren Meßlänge gleich dem 5fachen Durchmesser ist. Häufig ist es nicht möglich, den Schmiedestücken Probestäbe in der für eine Meßlänge von 200 mm bei 20 mm Durchmesser erforderlichen Länge zu entnehmen, und wenn für die Zerreißproben besondere Zugaben am Schmiedestück erforderlich sind, so bedeutet es Materialersparnis und Verringerung der Kosten, wenn man sich mit einer geringeren Meßlänge begnügt. Für die Materialprüfung der Praxis empfiehlt es sich daher in den meisten Fällen, die Meßlänge gleich dem 5fachen Durchmesser zu nehmen. Aus vorstehenden Erwägungen geben wir in den Verzeichnissen die Dehnungen für beide Normal-Meßlängen an.

Kerbschlagproben: Die angegebenen Zahlen sind Mittelwerte, die einem Vergleich der einzelnen Stahlsorten nach ihrer Zähigkeit dienen sollen. Eine Gewähr dafür, daß diese Werte in jedem Fall erreicht werden, wird nicht übernommen.

Die Angaben in der vorliegenden Zusammenstellung von Stahlsorten beziehen sich im allgemeinen auf Schmiedestücke von beliebig großen Abmessungen. Für kleine Schmiedestücke werden besondere Spezialstähle für den Kraftwagen- und Motorenbau geliefert. — Die verschiedenen Stahlsorten können auf Wunsch und um besonderen Vorschriften zu genügen, auch mit Mindest-Festigkeiten geliefert werden, die zwischen den in dem Verzeichnis aufgeführten liegen. — Die wirklichen Bruchfestigkeiten der mit einer bestimmten Mindestfestigkeit bestellten Schmiedestücke sind im allgemeinen bis zu 12% höher.

2. Konstruktionsstahl der Bismarckhütte, Oberschlesien, für Automobilbau, Luftschiffbau u. dgl.

Verwendungszweck	Marke	Art	Behandlung	Zustand	Festigkeit	Streckgrenze	Dehnung	Kontraktion
Für durch starken Reibungsdruck od. starke Stöße beanspruchte Teile, wie Zahnräder, Nocken, Rollen usw. Ferner zu höchstbeanspruchten Wellen, Spindeln usw., die im Einsatz gehärtet werden	NC 4	Nickelchromstahl	für Einsatzhärtung	ungehärtet	kg/mm ² 75—100	kg/mm ² 55—70	% 18—10	% 40—50
				gehärtet	150—200	120—175	10—5	40—30
desgl.	NC 2	desgl.	desgl.	ungehärtet	65—80	50—55	20—12	50—60
				gehärtet	130—160	100—135	10—5	35—25
desgl.	NC 1	desgl.	desgl.	ungehärtet	60—70	ca. 50	25—20	60—65
				gehärtet	110—130	ca. 90	12—8	40—30
desgl.	NWW	Nickelstahl	desgl.	ungehärtet	50—60	ca. 40	24—18	60—50
				gehärtet	100—120	70—80	15—8	55—50
desgl.	NSV a	desgl.	desgl.	ungehärtet	50—55	ca. 40	24—20	ca. 60
				gehärtet	90—110	ca. 70	15—10	55—50
Für hoch beanspruchte Kurbelwellen, Wellen, Spindeln, Zapfen usw.	NKH v	Nickelchromstahl	ungehärtet zu verwenden (Nur in Weißmetallagern, nicht in Bronze lagern lassen)	vergütet	80—100	70—80	15—10	45—35
desgl.	KNC v	desgl.		desgl.	desgl.	80—95	60—75	15—10
desgl.	ME 2 Wv	Speziallegierung	ungehärtet zu verwenden	desgl.	80—95	55—70	14—10	40—30
desgl.	TG 3 v	unlegiert	desgl.	desgl.	80—90	50—60	ca. 10	ca. 25
desgl.	TG 5 v	desgl.	desgl.	desgl.	70—80	40—50	15—12	45—35
Für auf Druck höchst beanspruchte Teile	NC 6	Nickelchromstahl	ungehärtet zu verwenden	ungehärtet	90—120	—	10—6	ca. 30
Für Hebel, Zapfen usw., bei welchen in erster Linie größte Zähigkeit des Materials verlangt wird	NSV a	Nickelstahl	ungehärtet oder im Einsatz gehärtet, je nach Beanspruchung, zu verwenden	ungehärtet	50—55	ca. 40	24—20	ca. 60
				gehärtet	90—110	ca. 70	15—10	55—50
desgl.	NS	desgl.	desgl.	ungehärtet	40—50	25—35	26—20	ca. 60
				gehärtet	70—85	50—55	14—10	55—50
desgl.	MEF o	unlegiert	desgl.	ungehärtet	35—40	—	35—30	—
				gehärtet	35—40	—	35—30	—
desgl.	MEF oo	desgl.	desgl.	ungehärtet	30—35	—	40—35	—
				gehärtet	30—35	—	40—35	—
Für in hoher Temperatur und in Wasser oder Dampf arbeitende Teile (der Stahl ist rosticher). Ferner zu Teilen, welche antimagnetisch sein müssen	N 25 W	25 proz. Nickelstahl	ungehärtet zu verwenden	ungehärtet	ca. 60	ca. 35	ca. 30	ca. 60
Für höchst beanspruchte Federn	ECS	Chromsiliziumstahl	in Öl zu härten und anzulassen	ungehärtet	85—95	55—60	13—10	ca. 25
				gehärtet	140—160	115—140	8—6	ca. 30
desgl.	MMF	Speziallegierung	desgl.	ungehärtet	75—90	40—50	12—10	ca. 20
				gehärtet	125—135	85—95	ca. 6	ca. 20
Für Kugellager	BK	Chromstahl	in Öl zu härten	—	—	—	—	—

Scherfestigkeit $K_s = \mu_1 \cdot K_z$.

Eisensorte	μ_1		
	von	bis	im Mittel
Guß Eisen	1,02	1,17	1,10
Schweiß Eisen in Stäben \perp zur Faserrichtung	0,78	0,82	0,80
Schweiß Eisen in Blechen	0,84 quer	0,87 längs	—
Fluß Eisen in Stäben \perp zur Faserrichtung	0,84	0,87	—

Schweiß Eisen.

Einfluß der Temperatur¹⁾.

Temperatur $t^{\circ}C$	100	200	300	400	500	600	700	800
Zugfestigkeit in v. H. der Zugfestigkeit K_z bei $t = 20^{\circ}C$	104	112	116	96	76	42	25	15

Fluß Eisen (nach Martens und Rauh), wobei im angelieferten Zustande $K_z = 4100$; $\varphi' = 26,9$ v. H.; $\varphi'' = 48,3$ v. H. geglüht $K_z = 3850$; $\varphi' = 30,4$ v. H.; $\varphi'' = 58,6$ v. H.

Temperatur $t^{\circ}C$	-20	+20	100	200	300	400	500	600
Zugfestigkeit K_z	4100	3850	3950	5100	4750	3300	1900	1070
Plastizitätsmaß in t/cm^2	2070	2070	2010	1950	1880	1790	1510	1340
Dehnung φ'	37	37	22	19	23	45	66	99
Einschnürung φ''	57	58	51	41	23	56	78	90,5

Bemerkung: min. $K_z = 3800$ für $t = 50^{\circ}C$; max. $K_z = 5150$ für $t = 240^{\circ}C$ $\varphi'_{min.} = 19$ v. H. für $t = 160^{\circ}C$; $\varphi'_{min.} = 23$ v. H. für $t = 300^{\circ}C$ (Blaubruch).

Guß Eisen (nach C. v. Bach) mit $K_z = 2350$

Temperatur $t^{\circ}C$	300	400	500	570
Zugfestigkeit in v. H. der Zugfestigkeit K_z bei $t = 20^{\circ}$	99	92	76	52

Stahlguß (nach C. v. Bach) bei einem v.-H.-Gehalt von 0,18 C; 0,36 Mn; 0,28 Si; zusammen 0,29 an S, P, As, Cu und bei ∞ 40 Minuten Belastungsdauer.

Temperatur $t^{\circ}C$	+20	100	200	300	400	500
Zugfestigkeit K_z	4165	4567	5253	5052	4043	2365
Streckgrenze σ_f	2375	2156	2186	1911	1386	—
Dehnung φ'	28	16	18	25	36	64
Einschnürung φ''	57	46	41	48	63	81

b) Kupfer und Kupferlegierungen¹⁾.

Metallsorte	$E = \frac{1}{\alpha}$	σ_f	K_z	Dehnung φ' in v. H.	Einschnürung φ'' in v. H.
	kg/cm ²				
Kupferblech, gewalzt	1 150 000	—	2000 — 2300	35 — 38	45 — 50
Feuerbüchsen-Hartkupfer (gegüht)	1 150 000	—	∇ 2300	∇ 38	∇ 45
Sonderstehbolzenkupfer (gegüht)	—	—	∇ 2700	∇ 35	∇ 60
Desgleichen „extra gehärtet“	—	—	∇ 4000	4	∇ 60
Messing gegossen	800 000	650	1300	13	17,5
Rotguß	900 000	900	2000	6 — 20	10,5
Geschützbronze	1 100 000	300	3000	—	—
desgl. verdichtet	1 100 000	900	3200	—	—
Phosphorbronze	—	—	4000	—	—
Manganbronze (4 v. H.) gewalzt	1 200 000	260	2900	44	68
Manganbronze (15 v. H.) gegossen	940 000	770	3570	34	44
Oertliker Bronze Nr. A, überschmiedet	—	2800	4400 — 5600	—	—
Deltametall	1 040 000 bis 1 080 000	—	—	15—25	—
Legierung I: Rohguß	—	—	5200 — 6100	6 — 13	11 — 15
gewalzt	—	—	6800 — 7000	19 — 23	22 — 29
Legierung II: Rohguß	—	—	4300 — 4800	16 — 23	48 — 54
gepreßt	—	—	5500 — 6600	15 — 21	42 — 48
Legierung III: Rohguß	—	—	3600 — 4000	23 — 43	32 — 37
geschmiedet	—	—	4300 — 4700	31 — 40	32 — 33

¹⁾ Entnommen aus Hütte, Bd. I. 21. Aufl. Berlin 1911. W. Ernst & Sohn.

Einfluß der Temperatur.

Kupferblech $K_z = \mu_1 \cdot K_z$ bei rund 10°

$t^{\circ}\text{C}$	50	100	150	200	250	285	367	451	556
μ_1	0,98	0,95	0,91	0,85	0,79	0,75	0,66	0,51	0,33

Bronze (91,4 Cu; 2,8 Zn; 5,5 Sn) mit $K_z = 2400$, $\varphi = 36$, $\psi = 52$ hat nach C. v. Bach

bei $t^{\circ}\text{C}$	100	200	300	400	500
Zugfestigkeit K_z	101	94	57	26	18 v. H.
Dehnung φ	98	96	32	0	0 v. H.
Einschnürung ψ	91	93	31	0	0 v. H.

Der Zugfestigkeit K_z , Dehnung φ und Einschnürung ψ bei $t = 20^{\circ}\text{C}$. Die Bronze darf für Temperaturen über 200°C nicht verwendet werden.

Durana-Gußmetall (58,7 Cu; 39,6 Zn; 1,0 Sn; 0,4 Pb; 0,34 Fe) der Dürener Metallwerke A.-G. Nach Stribeck ergab sich für langdauernde Belastung

Temperatur $t^{\circ}\text{C}$	24	95	148	170	214	320	420	542
Zugfestigkeit K_z	4080	3450	3140	2800	1800	650	200	50
Streckgrenze σ_f	1800	1720	1700	1640	1250	450	160	
Dehnung φ	32	27	44	50	62	61	39	30
Einschnürung ψ	36	33	50	51	52	53	40	42

kurze Versuchsdauer:

Temperatur $t^{\circ}\text{C}$	22	93	174	207	259	311	363	414	470
Zugfestigkeit K_z	4080	3720	3300	3120	2820	1850	1220	750	284
Dehnung φ	32	29	38	41	47	54	55	57	53
Einschnürung ψ	36	33	46	48	50	50	57	52	50

c) Andere Metalle und Stoffe.

Baustoff	$E = \frac{1}{\alpha}$ kg/cm ²	σ_p kg/cm ²	σ_f kg/cm ²	K_z kg/cm ²	Bemerkungen
Aluminium, rein (98,5 ÷ 99 v. H. Al), gewalzt oder geschmiedet, 0,7 cm stark; längs	675 000	—	—	1000	$\varphi = 8 \div 13$ $\psi = 5$ $\psi = 6$
quer	726 000	480	—	1500	
Aluminiumbronze mit 10% Al; gegossen	690 000	440	—	1400	
gewalzt	1 200 000	—	—	6200	$\varphi = 0,5$ $\psi = 0,4$
mit 5% Al; gewalzt, 1,2 bis 1,6 cm dick	—	—	—	5100	
Zink, gewalzt	1 200 000	—	—	4300	$\varphi = 50$ $\psi = 12 \div 38$ $\psi = 23$
Blei, weich	960 000	—	—	2350	
hart	50 000	—	50 ÷ 150	125	—
Zinn	—	—	300	300	—
Weißmetall ¹⁾	400 000	—	—	350	—
90 Pb; 10 Sb; Zug	267 000	—	153	500	$\varphi = 0,8$; $\psi = 1,5$ $K_b = 840$; $K_s = 360$
Druck	273 000	—	218	1190	
85 Pb; 15 Sb; Zug	270 000	—	145	450	
Druck	286 000	—	168	1180	$K_b = 730$; $K_s = 340$
80 Pb; 15 Sb; 5 Sn; Zug	275 000	—	128	400	
Druck	297 000	—	160	1100	$\varphi = 0,5$ $K_b = 760$; $K_s = 300$
Glas	700 000	—	—	250	—

¹⁾ Nach Goodmann, Dinglers polyt. Journal 1906, S. 718.

d) Hölzer.¹⁾

Holzart	Festigkeit					Dehnungsmaß t/cm ²	Proportionalitätsgrenze t/cm ²	Bemerkungen
	Zug	Druck	Biegung	Schub				
	parallel zur Faser t/cm ²	t/cm ²		parallel t/cm ²	senkrecht zur Faser t/cm ²			
1. Eiche	0,96	0,35	0,60	0,075	0,030	100 bis etwa 108	0,15 bis etwa 0,50	Die Zahlen gelten für einen Feuchtigkeitsgrad der Hölzer von durchschnittlich etwa 20 Hundertstel. Mit wachsender Feuchtigkeit nimmt die Festigkeit wesentlich ab. Proportionalitätsgrenze unsicher.
2. Buche	1,34	0,32	0,67	0,085	—	128 bis etwa 180	0,10 bis etwa 0,60	
3. Kiefer	0,80	0,28	0,47	0,045	0,026	90 bis etwa 108	0,15 bis etwa 0,20	
4. Fichte	0,75	0,24	0,42	0,040	—	92 bis etwa 111	0,15 bis etwa 0,23	

e) Steine und Mörtel.¹⁾

Natürliche*) Steine und Ziegel	Druckfestigkeit in Atm.	Zement- und Kalkmörtel verschiedener Mischung	Druckfestigkeit in Atm.
1. Basalt	1000 bis 3200	8. Reiner Zementmörtel (ohne Sandzusatz)	250 bis 270
2. Porphy	1000 bis 2600	9. Portlandzementmörtel**) .	
3. Granit, Diorit und Syenit	800 bis 2000	1 Raumteil mit 1 Teil Sand	200
4. Kalkstein	400 bis 2000	1 „ „ 2 Teilen „	180
5. Kohlen- und Keupersandstein	600 bis 1800	1 „ „ 3 „ „	160
6. Klinker	300 bis 900	10. Guter Kalkmörtel	40
7. Ziegel			
Mittelbrand	200 bis 300		
Schwachbrand	150 bis 200		

*) Das Dehnungsmaß der Steine und Mörtel ändert sich sehr mit der Spannung, die diese Stoffe aufzunehmen haben.

**) Nach 28 Tagen erhärtet, davon 27 Tage unter Wasser.

C. Zulässige Spannungen.

a) Für den Maschinenbau.

Man versteht unter der zulässigen Spannung eines Körpers (k_z für Zug, k für Druck, k_b für Biegung, k_s für Schub, k_d für Drehung) diejenige Spannung in kg/qcm, bis zu welcher er mit Sicherheit durch äußere Kräfte auf eine der verschiedenen Arten der Festigkeit beansprucht werden darf.

In der nachstehenden Tabelle gelten die zulässigen Spannungen unter I, wenn die Belastung eine ruhende ist.

¹⁾ Entnommen aus: Förster, Taschenbuch für Bauingenieure. Berlin 1911, Julius Springer.

f) Dehnungsmaße für Zug und Druck in Beton.¹⁾

Nr.	Spannung in Atm.	Mischung 1 Zement, 3 Kiessand			Mischung 1 Zement, 4 Kiessand	
		Wasserzusatz			Wasserzusatz	
		8 Hundertstel	14 Hundertstel	14 Hundertstel	8 Hundertstel	14 Hundertstel
		$E_{\delta d}$ nach 3 Monaten in t/cm ²		nach 2 Jahren in t/cm ²	$E_{\delta d}$ nach 3 Monaten in t/cm ²	
1	3,0	300	272	—	273	250
2	6,1	290	265	305	265	226
3	9,2	287	260	—	257	219
4	12,2	284	254	290	250	215
5	15,3	278	246	—	247	210
6	18,3	273	241	286	241	203
7	24,5	266	235	283	235	198
8	30,6	261	227	280	230	191
9	36,8	257	222	278	225	185
10	49,0	247	216	272	218	177
11	61,3	240	209	268	211	170
12	73,7	—	—	263	—	—
13	86,0	—	—	257	—	—
$E_{\delta z}$ unter gleichen Verhältnissen wie oben						
14	1,6	267	230	390	266	250
15	3,1	238	207	316	240	226
16	4,6	230	200	311	224	200
17	6,2	221	194	310	200	194
18	7,7	203	175	308	190	—
19	9,2	196	—	303	Zug-	Zug-
20	10,8	Zug-	Zug-	303	festigkeit	festigkeit
21	12,3	festigkeit	festigkeit	301	9,2 Atm.	8,8 Atm.
22	13,8	12,6 Atm.	10,5 Atm.	298		
				Zug-		
				festigkeit		
				15,8 Atm.		

Anm.: $E_{\delta d}$ ist Dehnungsmaß für Druck. $E_{\delta z}$ ist Dehnungsmaß für Zug.

Die zulässigen Spannungen unter II gelten, wenn die Belastung beliebig oft wechselt, derart, daß die durch sie hervorgerufenen Spannungen abwechselnd von Null bis zu einem größten Werte stetig wachsen und dann wieder auf Null zurücksinken.

Die zulässigen Spannungen unter III gelten, wenn die Belastung beliebig oft wechselt, derart, daß die durch sie hervorgerufenen Spannungen abwechselnd von einem größten negativen Werte stetig wachsen bis zu einem größten positiven, gleich großen Werte und dann wieder abnehmen.

Für die zwischenliegenden Arten der Belastung können dazwischenliegende, den Spannungsgrenzen entsprechende Werte genommen werden.

¹⁾ Entnommen aus: Förster, Taschenbuch für Bauingenieure. Berlin 1911, Julius Springer.

Für Federstahl ist im Falle II für den ungehärteten Zustand $k_b = 3600$, für den gehärteten Zustand $k_b = 4300$ kg/qcm zu setzen.

Zulässige Spannungen in kg/qcm, nach C. v. Bach:

Art der Festigkeit und Belastung		Schweiß-eisen ¹⁾	Flußeisen ²⁾		Flußstahl ²⁾		Stahlguß		Gußeisen	Kupferblech gewalzt
			von	bis	von	bis	von	bis		
Zug. k_z	I.	900	900	1200	1200	1500	600	900	300	600 ³⁾
	II.	600	600	800	800	1000	400	600	200	300
	III.	300	300	400	400	500	200	300	100	.
Druck. k	I.	900	900	1200	1200	1500	900	1200	900	.
	II.	600	600	800	800	1000	600	900	600	.
Biegung. k_b	I.	900	900	1200	1200	1500	750	1050	.	.
	II.	600	600	800	800	1000	500	700	. ³⁾	.
	III.	300	300	400	400	500	250	350	.	.
Schub. k_s	I.	720	720	960	960	1200	480	840	300	.
	II.	480	480	640	640	800	320	560	200	.
	III.	240	240	320	320	400	160	280	100	.
Drehung. k_d	I.	360	600	840	900	1200	480	840	.	.
	II.	240	400	560	600	800	320	560	. ⁴⁾	.
	III.	120	200	280	300	400	160	280	.	.

1) Für vorzügliches Schweißisen können die angegebenen zulässigen Spannungen um Beträge bis zu einem Drittel höher genommen werden, sofern die hierdurch zugelassenen größeren Formänderungen in ihrer Gesamtheit mit dem Zwecke des Bauteiles vereinbar sind. Wo zu befürchten steht, daß die Gesamtformänderung die mit Rücksicht auf den Zweck des Bauteiles als zulässig erachtete Grenze überschreitet, ist von dieser auszugehen.

2) Die höheren Werte sind nur bei durchaus zuverlässigem, nicht zu weichem Stoff anzuwenden (bei dem also $K_z = 3400$ bis 4400 bzw. $= 4500$ bis $10\,000$ kg/qcm). Für Draht gelten, entsprechend der größeren Zugfestigkeit, größere Werte für k_z u. zw. $k_z = \frac{1}{2} K_z$ bis $\frac{1}{3} K_z$.

3) Für bearbeitetes Gußeisen setze man die zulässige Biegungsspannung

$$k_b = \mu k_z \sqrt{\frac{e}{x_0}}, \text{ worin}$$

$\mu = 1,20$ bis $1,33$ und für den Balkenquerschnitt:

e den Abstand der am stärksten gespannten Faser von der Nullachse,

x_0 den Abstand des Schwerpunktes der auf der einen Seite der Nullachse gelegenen Durchschnittsfläche von der Nullachse bezeichnet.

Versuche ergaben für den rechteckigen Querschnitt: $k_b = 1,7 k_z$, für den kreisförmigen Querschnitt: $k_b = 2,05 k_z$, für den I-förmigen Querschnitt: $k_b = 1,45 k_z$.

Für vorzügliches Gußeisen in Formen, die Gewähr für geringe Gußspannungen und vollkommene Dichtigkeit bieten, können die für k gegebenen Werte um Beträge bis zu einem Viertel höher genommen werden.

Für Rohguß ergab sich $k_b = 1,4 k_z$ bzw. $k_b = 1,7 k_z$ und $k_b = 1,2 k_z$ bei den vorstehend bezeichneten Querschnitten.

4) Die zulässige Drehungsspannung k_d des bearbeiteten Gußeisens setze man:

für den kreisförmigen Querschnitt $k_d = (\text{reichlich}) k_z$,

„ „ kreisförmigen und hochelliptischen Querschnitt . . . $k_d = 0,8 k_z$ bis k_z ,

„ „ elliptischen Querschnitt $k_d = k_z$ bis $1,25 k_z$,

„ „ quadratischen Querschnitt $k_d = 1,4 k_z$,

„ „ rechteckigen Querschnitt $k_d = 1,4 k_z$ bis $1,6 k_z$,

„ „ hohlrechteckigen Querschnitt $k_d = k_z$ bis $1,25 k_z$,

„ „ I-, C-, +- , L-förmigen Querschnitt $k_d = 1,4 k_z$ bis $1,6 k_z$.

Der Einfluß der Gußhaut ist hier geringer als bei der Biegungsspannung.

5) Bei Windkesseln großer Feuerspritzen sei $k_z \geq 800$, bei Zentrifugen $k_z = 500$ kg/qcm.

b) Für den Hochbau.

1. Metalle.

Preußische Bestimmungen über die bei Hochbauten anzunehmende Beanspruchung der Baustoffe vom 31. Januar 1910.

Metall	Zug	Druck	Biegung	Schub	Lochleibungsdruck
	k_z	k	k_b	k_s	
Flußeisen in Trägern zur Unterstützung von Decken und Treppen	1200	1200	1200	1000 ¹⁾	2000 ¹⁾
Als Stützlänge ist die Entfernung zwischen den Auflagermitten anzunehmen.					
Flußeisen in Stützen	1200	1200	1200	1000	2000
Flußeisen in Stützen bei genauer Berechnung der unter den ungünstigsten Umständen auftretenden Kantenpressung .	1400	1400	1400	1000	2000
Berechnung auf Knicken mit 5facher Sicherheit (Formel $J_{\min} = 2,33 P l^2$; s. S. 412).					
Als Knicklänge gilt die ganze Systemlänge, bei übereinanderstehenden, allseitig durch Deckenträger ausgesteiften Stützen die Geschoßhöhe.					
Flußeisen in Dächern, Fachwerkwänden, Trägern zur Unterstützung von Wänden, Kranbahnträgern, wenn die Querschnittgröße durch Eigenlast, Nutzlast und Schneedruck allein bedingt ist	1200	1200	1200	1000	2000
Flußeisen in denselben Bauteilen, wenn die größte Spannung bei gleichzeitiger ungünstiger Wirkung von Eigenlast, Nutzlast, Schneedruck und Winddruck von 150 kg/qm eintritt	1400	1400	1400	1000	2000
Ausnahmsweise darf bei Dächern, wenn für eine den strengsten Anforderungen genügende Durchbildung, Berechnung und Ausführung volle Sicherheit gegeben ist, für den vorstehenden Fall die Spannung betragen bis	1600	1600	1600		
Für Träger zur Unterstützung von Wänden gilt die Entfernung der Auflagermitten als Stützweite.					
Druckglieder sind auf Knicken mit 4-facher Sicherheit (Formel $J_{\min} = 1,82 P l^2$; s. S. 412) zu berechnen; als Knicklänge gilt die Systemlänge.					
Flußeisen in Ankern	800
Flußeisenstäbe in Bauteilen aus Eisenbeton, insbesondere bei Beanspruchung der Bauteile auf Biegung ²⁾	1000	1000	.	.	.
Für Schweißeisen sind die für Flußeisen angegebenen Werte um 10 v. H. zu ermäßigen. Noch weiter herabzusetzen ist die Beanspruchung von altem, wieder zur Verwendung gelangendem Eisen je nach seiner Beschaffenheit.					

¹⁾ Für Niete und gedrehte Schraubenbolzen. Bei gewöhnlichen Schraubenbolzen $k_s = 750$, Lochleibungsdruck $k = 1500$.

²⁾ Preußischer Ministerial-Erlass (Eisenbetonbestimmungen) vom 24. Mai 1907.

Metall	Zug	Druck	Bie-	Schub	Loch-
	k_z	k	gung	k_s	
			k_b		ungs-
					druck
Gußeisen in Auflagern	1000	.	.	.
Gußeisen in Säulen	500	250	200	.
Berechnung der gußeisernen Säulen auf Knicken mit 6- bis 8facher Sicherheit nach der Formel $J_{\min} = 6$ bis $8 P l^2$ (s. S. 412).					
Stahlformguß	1200	.	.
Schmiedestahl	1400	1400	1400	.	.
Zinkblech	200	200	150	.	.

2. Hölzer.

Die fett gedruckten Zahlen sind vom preußischen Ministerium d. öffentl. Arb. vorgeschrieben (Erl. v. 31. Januar 1910).

Die oberen Grenzwerte dürfen keinesfalls überschritten werden.

Holzart	Zug k_z	Druck k	Biegung k_b	Schub k_s	
				zur Faser	⊥ zur Faser
Eichenholz ¹⁾	100—120	80—100	100—120	15—20	80—90
Kiefernholz	100—120	60—80	100—120	10—15	60—70
(astfrei)					
Tannenholz	60	50	.	.	.
Eschenholz	100—120	66	.	.	.
Hartholz (Tallowwood)	200	160	200	.	30

Bei Bauten für vorübergehende Zwecke (Ausstellungshallen u. dgl.) dürfen die Zahlen um 50 v. H. erhöht werden. Stützen sind auf Knicken mit 6- bis 10facher Sicherheit ($J_{\min} = 60 P l^2$ bis $100 P l^2$) zu berechnen. Die untere Grenze von J gilt nur für vorübergehende Bauten.

3. Steine, Mauerwerk und andere Baustoffe.

I. Vorschrift des preuß. Ministeriums d. öffentl. Arb. vom 31. Januar 1910.

Natürliche Bausteine	Auflagersteine	Pfeiler und Gewölbe	Sehr schlanke Pfeiler und Säulen
	$\ominus = 10—15$	$\ominus = 15—20$	$\ominus = 25—30$
Granit $k =$	60—90	45—60	25—30
Sandstein $k =$	30—50	25—30	15—20
Kalkstein und Marmor } $k =$	30—40	20—30	12—15

Die Sicherheitsmaße \ominus sind vorgeschrieben, die fett gedruckten Druckspannungen k ebenfalls, sofern besondere Festigkeitsnachweise nicht erbracht sind. Sind solche erbracht, so werden gegebenenfalls höhere Werte von k bis zu den angegebenen Grenzen empfohlen.

Mauerwerk	Druck k kg/qcm	Mauerwerk	Druck k kg/qcm
Ziegelmauerwerk in Kalkmörtel 1:3	bis 7	Mauerwerk aus Kalksandsteinen in Kalkmörtel 1:3	„ 7
Mauerwerk in Hartbrandsteinen in Kalkzementmörtel 1 Z.:2 K.:6—8 S.	12—15	Desgl. in Kalkzementmörtel 1 Z.:2 K.:6—8 S.	12—15
Klinkermauerwerk im Zementmörtel 1:3	20—30	Bruchsteinmauerwerk in Kalkmörtel	bis 5
Mauerwerk aus porigen Ziegeln	3—6	Fundamentmauerwerk aus Schüttbeton	6—8
Mauerwerk aus Schwemmsteinen von $k > 20$ kg/qcm	bis 3	Stampfbeton	10—15

¹⁾ Auch für Buchenholz anwendbar.

Guter Baugrund $k = 3$ bis 4 kg/qcm. Höhere Beanspruchung ist besonders zu begründen.

Im besonderen werden (nicht amtlich) folgende Druckbeanspruchungen für den Baugrund empfohlen:

Feiner Sand, nicht fest gelagert	$k = 1,5$ bis $2,5$ kg/qcm
Sehr fester, dichter Sand	6,5 " 7,5 "
Trockener, festgelagerter, kiesiger Baugrund ohne Ton	2,5 " 5,0 "
Lehmiger Boden mit 30 bis 40 v. H. Sand	0,8 " 1,6 "
Fester Ton, mit feinem Sand gemengt	4,0 " 5,0 "
Harter Mergel	5,4 " 8,7 "
Fester, schiefriger und feiner Schotter	6,5 " 8,7 "
Sandstein, der in der Hand zerbröckelt	1,6 " 1,9 "
Fester Fels	9 " 20 "

II. Schaper¹⁾ macht für Brücken die Druckspannung der Lagersteine abhängig von der Spannweite l und empfiehlt für die Zwischenlage aus Mörtelguß, zwischen Eisenlager und Stein, unabhängig von dem Baustoffe des Lagersteins bei $l = 10$ m $k = 20$, bei $l = 100$ m $k = 50$ kg/qcm mit geradliniger Zwischenschaltung, gleichmäßige Druckverteilung vorausgesetzt (Kantenpressungen 20 v. H. höher); für die Untermuerung des Auflagersteines, Beton (1 Z., 0,7 Traß, 3 S., 7 K.) mit $K = 150$ nach 28, $K = 210$ nach 100 Tagen bei $l = 10$ m $k = 10$, bei $l = 100$ m $k = 40$ kg/qcm. (Kantenpressungen 20 v. H. höher.)

III. Beton für Verbundbauten, nach der preuß. Ministerialbestimmung vom 24. Mai 1907: bei Beanspruchung auf Biegung $k = \frac{1}{2} K$, $k_z = \frac{1}{2} K_z$, wenn K_z versuchsmäßig nachgewiesen ist, oder $k_z \geq 0,1 K$ bei fehlendem Nachweise von K_z ; bei Beanspruchung auf axialen Druck $k = 0,1 K$. Ferner die zulässige Schub- und Haftspannung $\tau = 4,5$ kg/qcm bei fehlendem Nachweise der Schubfestigkeit K_s , oder $= 0,2 K_s$ bei nachgewiesener Schubfestigkeit K_s .

II. Festigkeit von Stäben mit gerader Achse.

A. Zug- und Druckfestigkeit.

Wird ein prismatischer Stab durch zwei gleichgroße entgegengesetzt gerichtete Kräfte P in Richtung seiner Achse angegriffen, so wird bei gleichförmiger Verteilung der Spannungen in einem beliebigen Querschnitt die Spannung

$$\sigma \text{ kg/cm}^2 = \frac{P \text{ kg}}{F \text{ cm}^2}$$

hervorgehoben. Hat der Stab veränderlichen Querschnitt, so ist der kleinste Querschnitt maßgebend. Mit k_z als zulässiger Zugbeanspruchung wird die Tragkraft des gezogenen Stabes

$$P = F \cdot k_z.$$

Bei der Ermittlung der größten Beanspruchung ist gegebenenfalls das Eigengewicht als äußere Kraft zu berücksichtigen.

Bei gedrückten Stäben, deren Länge im Verhältnis zu den Abmessungen des Querschnittes bedeutend ist, ist eine ausreichende Knicksicherheit nachzuweisen.

Die Formänderung, die ein Stab unter dem Einfluß der Kräfte P erfährt, ist

$$\Delta l = \alpha \cdot \sigma \cdot l$$

in cm, wenn l in cm gemessen wird.

Wird die Forderung gestellt, daß die Spannung mit Berücksichtigung des Eigengewichtes in allen Querschnitten dieselbe ist, so erhält man den Körper gleicher Festigkeit gegen Zug bzw. Druck; er ist nach einer logarithmischen Linie geformt und verjüngt sich (bei Zug) gegen das belastete Ende. Einen Stab von angenähert gleichem Widerstande gegen Zug erhält man durch Absetzen (verjüngte Drahtseile bei Schachtförderungen).

Unter der Reißlänge versteht man den Quotienten $R = \frac{P}{g}$, wenn P die Bruchbelastung in kg und g das Gewicht der Längeneinheit in kg/m bedeuten. R gibt also die Länge in m an, die ein Stab haben müßte, um bei Freiaufhängung infolge seines Eigengewichtes zu reißen. R anzugeben ist bei Stoffen üblich,

¹⁾ Z. d. B. 1909 S. 663.

deren Verhältnis des Raumgewichtes zum spezifischen Gewicht kleiner als 1 ist z. B. bei Hanfseilen, Drahtseilen, Lederriemen, Papier.

Beispiel: Eine Zugstange von 8 m Länge ist mit $P = 17\,000$ kg belastet; der erforderliche Querschnitt wird bei $k_z = 900$ kg/cm² (Flußseilen mit $K_z = 4500$ kg/cm² und 5facher Sicherheit)

$$F = \frac{17\,000}{900} = 18,9 \text{ cm}^2$$

gewählt $\varnothing = 50$ mm mit $F = 19,64$ cm², so daß

$$\max \sigma = \frac{17000 + 8 \cdot 15,4}{19,64} = \infty 875 \text{ kg/cm}^2,$$

da das Eigengewicht 15,4 kg/m beträgt; die Verlängerung der Zugstange wird

$$\Delta l = \alpha \cdot \sigma \cdot l = \frac{1}{2\,150\,000} \cdot \frac{17\,000}{16,64} \cdot 8\,000 = \infty 3,7 \text{ mm.}$$

Gleichzeitiger Zug nach drei aufeinander senkrecht stehenden Richtungen¹⁾.

In Fig. 17 werde ein Würfel durch sechs paarweise gleichgroße, entgegengesetzte Kräfte angegriffen, deren Wirkungslinien mit den drei Achsen des Würfels zusammenfallen; der Würfel bestehe aus durchaus gleichartigem Material, er sei isotrop.

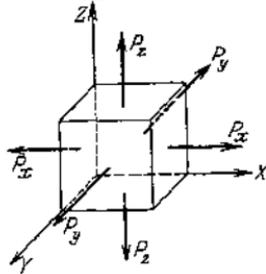


Fig. 17.

Infolge der — allein wirkenden — Kräfte P_x erfährt der Stab eine Spannung in Richtung der x -Achse

$$\sigma_x = \frac{\varepsilon_x}{\alpha},$$

wenn ε_x die Dehnung in Richtung der x -Achse bedeutet. Gleichzeitig erfährt er eine verhältnismäßige Zusammenziehung $\sigma_x : m$ in Richtung der y -Achse und ebenso in Richtung der z -Achse; die Spannungen in diesen Richtungen sind gleich Null.

Wirken allein die Kräfte P_y , so ergeben sich in gleicher Weise

$$\sigma_y = \frac{\varepsilon_y}{\alpha}$$

als Spannung; $\sigma_y : m$ als verhältnismäßige Zusammenziehungen in Richtung der z - und y -Achse.

Wirken allein die Kräfte P_z , so ergeben sich

$$\sigma_z = \frac{\varepsilon_z}{\alpha}$$

als Spannung; $\sigma_z : m$ als verhältnismäßige Zusammenziehungen in Richtung der x - und y -Achse.

Wirken alle sechs Kräfte gleichzeitig, so ist die resultierende Dehnung

$$\text{in Richtung der } x\text{-Achse} \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_x - \frac{\varepsilon_y + \varepsilon_z}{m};$$

$$\text{in Richtung der } y\text{-Achse} \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_y - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_z}{m};$$

$$\text{in Richtung der } z\text{-Achse} \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_z - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{m}.$$

Aus $\varepsilon_x = \alpha \cdot \sigma_x; \quad \varepsilon_y = \alpha \cdot \sigma_y; \quad \varepsilon_z = \alpha \cdot \sigma_z$

folgt
$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \alpha \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \right) \\ \varepsilon_2 &= \alpha \left(\sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m} \right) \\ \varepsilon_3 &= \alpha \left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

¹⁾ Nach C. v. Bach, Elastizität und Festigkeit. 6. Aufl. Berlin 1911. Julius Springer.

Wird mit

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon_1}{\alpha}; \quad \sigma_2 = \frac{\varepsilon_2}{\alpha}; \quad \sigma_3 = \frac{\varepsilon_3}{\alpha}$$

die — gedachte — Anstrengung des Materials bezeichnet, so folgt:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \\ \sigma_2 &= \sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m} \\ \sigma_3 &= \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Die S. 391 vorausgesetzte Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen besteht nicht mehr, sobald auch Kräfte senkrecht zur Stabachse angreifen.

Spannungen treten bei einem durch P_x beanspruchten Stabe in Richtung der y - und z -Achse auch dann auf, wenn die Ausbildung der Querspannung durch Eindrehungen und Bohrungen gehindert ist. Die resultierende Dehnung wird durch Zugkräfte P_y und P_z vermindert, durch Druckkräfte vergrößert.

Bemerkung: Die Summe der Dehnungen ergibt

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \alpha \left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 2 \cdot \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{m} \right);$$

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{\alpha}$$

Aus

$$\frac{\varepsilon_1}{\alpha} = \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m}$$

folgt

$$m \cdot \sigma_x - \sigma_y - \sigma_z = m \cdot \frac{\varepsilon_1}{\alpha}$$

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{\alpha}$$

Addiert ergibt

$$\sigma_x(m+1) = \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{\alpha} + m \frac{\varepsilon_1}{\alpha};$$

folglich

$$\sigma_x = \frac{m}{m+1} \cdot \frac{1}{\alpha} \left(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{m-2} \right)$$

analog

$$\sigma_y = \frac{m}{m+1} \cdot \frac{1}{\alpha} \left(\varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{m-2} \right)$$

$$\sigma_z = \frac{m}{m+1} \cdot \frac{1}{\alpha} \left(\varepsilon_3 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{m-2} \right)$$

..... (3)

Zulässige Zug- und Druckspannungen für Bauwerke, die außer durch Eigengewicht durch wandernde Einzellasten beansprucht werden, z. B. Krane und eiserne Brücken. Neben diesen Lasten treten noch Windkräfte, Bremskräfte und dynamische Wirkungen der Verkehrslast auf. Da die dynamischen Wirkungen — Stöße — noch nicht genügend genau bestimmt werden können, so kommen sie in erster Linie bei der Wahl des Sicherheitsgrades in Betracht; in gleicher Weise berücksichtigt man den Einfluß der Nebenspannungen, wie sie z. B. durch die Vernietung der Knotenpunkte auftreten.

Die Erfahrung zeigt, daß die Stöße wandernder Lasten um so ungünstiger wirken, je kleiner die Masse des Bauwerkes ist, daraus ergibt sich: mit wachsender Stützweite darf die zulässige Beanspruchung zunehmen.

Gerber (1859) empfiehlt für Schweißseisen als erforderlichen Querschnitt

$$F = \frac{S_0 + 3S}{1600}; \quad \sigma = 1600 \frac{S_0 + S}{S_0 + 3S} \text{ in kg/cm}^2,$$

wobei S_0 die durch Eigengewicht, S die durch wandernde Lasten hervorgerufenen Spannkraften bedeuten.

Bezeichnet man mit S_1 die Spannkraft, die durch die ungünstigste Stellung der Verkehrslast hervorgerufen wird, und die dasselbe Vorzeichen wie S_0 hat, mit S_2 die Spannkraft, die das entgegengesetzte Vorzeichen von S_0 hat, so empfiehlt

Landsberg (1888)

1. für nur gezogene oder nur gedrückte Stäbe

$$\text{Schweißeisen } F = \frac{S_0}{1050} + \frac{S_1}{700},$$

$$\text{Flußeisen } F = \frac{S_0}{1350} + \frac{S_1}{900};$$

2. für gezogene und gedrückte Stäbe, sofern

$$S_2 > \frac{2}{3} S_0 \quad \text{und} \quad S_2 - S_1 < \frac{4}{3} S_0 \quad \text{ist,}$$

$$\text{Schweißeisen } F = \frac{S_0}{1575} + \frac{S_1}{700} + \frac{S_2}{2100},$$

$$\text{Flußeisen } F = \frac{S_0}{2000} + \frac{S_1}{900} + \frac{S_2}{2700};$$

sofern $S_2 > \frac{2}{3} S_0$ und $S_2 - S_1 > \frac{4}{3} S_0$ ist.

$$\text{Schweißeisen } F = -\frac{S_0}{1575} + \frac{S_1}{2100} + \frac{S_2}{700},$$

$$\text{Flußeisen } F = -\frac{S_0}{2000} + \frac{S_1}{2700} + \frac{S_2}{900}.$$

Häseler setzt allgemein

$$F = \frac{S_0 + S_1}{k},$$

wobei

$$k = \frac{\sigma_e}{\mu} \cdot \frac{S_0 + S_1}{S_0 + \zeta \cdot S_1}$$

st, wenn der Stab nur auf Zug oder nur auf Druck beansprucht wird; bei wechselnder Belastung empfiehlt sich

$$k = \frac{\sigma_e}{\mu} \cdot \frac{S_0 + S_1}{S_0 + \zeta \cdot S_1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{S_{\min}}{S_{\max}}\right).$$

Müller-Breslau setzt

$$k = \frac{\sigma_e}{\mu} \cdot \frac{S_0 + S_1}{S_0 + \zeta \cdot S_1} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{S_{\min}}{S_{\max}}\right).$$

Hierin bedeuten

σ_e die Elastizitätsgrenze in kg/cm^2 ,

ζ die Stoßzahl (nach Gerber $\zeta = 1,5$),

$\mu = 1,6$ bei Blechträgern,

$\mu = 1,9$ bei Fachwerkträgern mit starren Knotenpunkten berücksichtigt die Nebenspannungen,

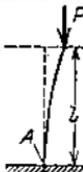
S_{\min} und S_{\max} in kg die kleinste bzw. die größte Spannkraft infolge Eigengewicht und der mit der Stoßzahl multiplizierten Verkehrslast.

Bemerkung: Bei Blechträgern sind die Spannkraften S durch die Biegemomente, der Querschnitt F durch das Widerstandsmoment zu ersetzen.

B. Knickfestigkeit.

Die Ableitung der Eulerschen Knickgleichung siehe Abschnitt Mathematik S. 203.

Tabelle.

	Grundfall Freie in der Achse geführte Stabenden	Ein Stabende ein- gespannt, das an- dere frei beweglich	Eingespannte, in der Achse geführte Stabenden	Ein Stabende ein- gespannt, das an- dere frei in der Achse geführt
Dar- stellung des Be- lastungs- falles	 Fig. 18.	 Fig. 19.	 Fig. 20.	 Fig. 21.
Knicklast $P_k =$	$\frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{l^2}$	$\frac{\pi^2 \cdot EJ}{4 \cdot l^2}$	$\frac{4 \pi^2 \cdot EJ}{l^2}$	$\frac{2 \pi^2 \cdot EJ}{l^2}$

Hierin bedeuten

l die Länge des Stabes in cm,

J das kleinste äquatoriale Trägheitsmoment des Querschnittes in cm^4
(vgl. S. 412),

E das Elastizitätsmaß des Stoffes in kg/cm^2 .

Die zulässige Belastung eines auf Knicken beanspruchten Stabes beträgt in kg

$$P = P_k : \text{C},$$

wobei C den Sicherheitsgrad gegen Knicken bedeutet. Wird der Querschnitt auf Grund der Eulerschen Gleichungen bestimmt, so ist die auftretende Druckspannung nachzurechnen.

Die Grenzlänge l_0 in cm ist die Stablänge, bei der die Tragfähigkeit für Druck und Knicken die gleiche ist. Mit i in cm als Trägheitshalbmesser, der sich aus der Beziehung $J = F \cdot i^2$ ergibt, wird die verhältnismäßige Grenzlänge

$$\alpha_0 = \frac{l_0}{i} = \pi \sqrt{\frac{E}{\text{C} \cdot k}}$$

und bei gleicher Sicherheit gegen Druck und Knicken

$$\alpha_0 = \frac{l_0}{i} \pi \sqrt{\frac{E}{K}},$$

wenn K die Druckfestigkeit bedeutet.

Wird $\frac{l}{i} = \alpha$ gesetzt, so ist die Gültigkeitsgrenze der Eulerschen Knickformeln:

Nr.	Baustoff	Untere Proportionalitätsgrenze in kg/cm^2 σ_p	Dehnungsmaß in kg/cm^2 E	Gültigkeitsgrenze $\alpha \geq \frac{l}{i}$
1	Holz	150	100 000	80
2	Graues Gußeisen	~ 2000	1 000 000	70
3	Schweißeisen	1500	2 000 000	115
4	Flußeisen	2000	2 150 000	102
5	Flußstahl	2400	2 200 000	95
6	Beton bei höchstens 50 kg/cm^2 Spannung	~ 100	200 000	140

Für den Belastungsfall 1, Fig. 18 — der wohl im allgemeinen zugrunde zu legen ist — sind in nachstehender Tabelle die üblichen Sicherheitsgrade \mathcal{S} , das kleinste erforderliche äquatoriale Trägheitsmoment J_{\min} und die verhältnismäßige Stablänge x_0 angegeben, und zwar bezeichnen

- P die zulässige Belastung in kg,
 P_1 die zulässige Belastung in t,
 l die Stablänge in m,
 b die kleinere Seite des rechteckigen Querschnittes in m,
 d den Durchmesser bei kreisförmigem Querschnitt in m,
 \mathcal{S} den Sicherheitsgrad gegen Knicken.

Tabelle.

Bezeichnungen	Gußeisen	Schweiß- eisen	Flußeisen	Flußstahl	Holz
Druckfestigkeit K in kg/cm ²	7500	3750	4400	6250	280
Zulässige Druckspannung in kg/cm ²	500	1080	1200	1400	60
Elastizitätsmaß E in kg/cm ²	1 000 000	2 000 000	2 150 000	2 200 000	100 000
Sicherheitsgrad \mathcal{S}	8 ¹⁾	5	5 ²⁾	5	10
J_{\min}	$\frac{P l^3}{125}$ $8 \cdot P_1 \cdot l^3$	$\frac{P l^3}{400}$ $2,5 \cdot P_1 \cdot l^3$	$\frac{P l^3}{430}$ $2,33 P_1 l^3$	$\frac{P l^3}{445}$ $2,24 P_1 l^3$	$\frac{P l^3}{10}$ $100 P_1 l^3$
$x_0 = \frac{l_0}{i} =$	50	60,6	59,4	55,6	40,5
Rechteck $i = b \sqrt{\frac{1}{12}}$					
$x_0 = \frac{l_0}{b}$	14,4	17,5	17,2	16,0	11,7
Kreis $i = \frac{1}{4} \frac{d}{\sqrt{3}}$					
$x_0 = \frac{l_0}{d}$	12,5	15,2	14,9	13,9	10,1

Der Belastungsfall 1 setzt Spitzenlagerung voraus; die in der Praxis vorkommende Befestigung bewirkt aber meist eine erhebliche Einspannung, die in der Weise berücksichtigt wird, daß die Knicklänge l als Bruchteil der Gesamtlänge L in die Rechnung eingeführt wird; und zwar setzt man nach v. Tetmajer und v. Emperger³⁾

wobei zu wählen ist:

$$l = \alpha \cdot L,$$

- $\alpha = 0,95$ bei mäßiger Einspannung des einen und freier Führung des andern Endes;
 $\alpha = 0,9$ bei mäßiger Einspannung beider Enden;
 $\alpha = 0,85$ bei guter Einspannung des einen und mäßiger Einspannung des andern Endes;
 $\alpha = 0,8$ bei guter Einspannung beider Enden;
 $\alpha = 0,7$ bei gedrückten Fachwerkstäben, die durch Niete angeschlossen sind.

Beispiel: Eine Pleuelstange hat $P = 8500$ kg zu übertragen, ihre Länge ist 1,35 m; der Querschnitt ist zu ermitteln. Material: Flußstahl.

Die zulässige Druckbeanspruchung lt. Tabelle S. 404 $k = 500$ kg/cm², die Sicherheit gegen Knicken lt. Tabelle S. 412 $\mathcal{S} = 5$ (vgl. auch Abschnitt Maschinenteile.)

Der erforderliche Querschnitt ist

$$F_e = \frac{8500}{500} = 17 \text{ cm}^2.$$

Gewählt $d = 50$ mm mit $F = 19,6$ cm² und $J = 30,7$ cm⁴.

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{30,7}{19,6}} = 1,25 \text{ cm.}$$

Die Knicklänge l ist gleich der Gesamtlänge $L = 135$ cm. Als Längenverhältnis ergibt sich

$$x = \frac{l}{i} = \frac{135}{1,25} = 108.$$

¹⁾ Bei zentraler Belastung.

²⁾ Druckglieder für Fachwerkstäbe erfordern lt. Ministerialerlaß vom 31. Januar 1910 $\mathcal{S} = 4$.

³⁾ Thierfelder, Berechnung von Stützen nach L. v. Tetmajer. Dresden 1913. Verlag C. Heinrich.

Die Eulerschen Gleichungen genügen zur Bestimmung der Knicksicherheit, da lt. Tabelle S. 411 die Gültigkeitsgrenze für Flußstahl bei $x \geq 95$ liegt.

Nach Belastungsfall 1, Tabelle S. 411 wird

$$\sigma = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{P \cdot l^2} = \frac{9,87 \cdot 2\,200\,000 \cdot 30,7}{8500 \cdot 135 \cdot 135} = \infty 4,32.$$

Der Querschnitt genügt nicht.

Ausgeführt: $d = 55$ mm mit $F = 23,8$ cm² und $J = 44,9$ cm⁴.

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{44,9}{23,8}} = 1,37 \text{ cm};$$

$$x = \frac{l}{i} = \frac{135}{1,37} = 98,5;$$

$$\sigma = \frac{9,87 \cdot 2\,200\,000 \cdot 44,9}{8500 \cdot 135 \cdot 135} = 6,2;$$

$$\sigma = \frac{8500}{23,8} = \infty 360 \text{ kg/cm}^2.$$

Bemerkung: Da die Materialausnutzung gering ist, empfiehlt sich die Verwendung von Flußeisen mit $k = 400$ kg/cm²; die Sicherheit gegen Knicken wird

$$\sigma = \frac{9,87 \cdot 2\,150\,000 \cdot 44,9}{8500 \cdot 135 \cdot 135} = 6,05.$$

Tetmajersche Versuche. Bezeichnet man die Knickspannung beim Bruch mit

$$\sigma_k = \frac{P_k}{F},$$

so wird bei $x = \frac{l}{i} <$ als das des Grenzfalles nach Euler (Tabelle S. 411) für

Flußeisen	$\sigma_k = 3100 - 11,4 x,$
Schweißeisen	$\sigma_k = 3030 - 12,9 x,$
Gußeisen	$\sigma_k = 7760 - 120 x + 0,53 x^2,$
Flußstahl	$\sigma_k = 3350 - 6,2 x,$
Holz	$\sigma_k = 293 - 1,94 x.$

Bei $x = \frac{l}{i} >$ als das des Grenzfalles nach Euler für

$$\text{Flußeisen} \quad \sigma_k = 21219640 \cdot \left(\frac{i}{l}\right)^2,$$

$$\text{Schweißeisen} \quad \sigma_k = 19739200 \cdot \left(\frac{i}{l}\right)^2,$$

$$\text{Gußeisen} \quad \sigma_k = 9869600 \cdot \left(\frac{i}{l}\right)^2,$$

$$\text{Holz} \quad \sigma_k = 986960 \cdot \left(\frac{i}{l}\right)^2,$$

σ_k gemessen in kg/cm².

Die Tetmajerschen Formeln eignen sich zur Nachprüfung der Knicksicherheit eines gedrückten Stabes, dessen Abmessungen bekannt sind; eine direkte Ermittlung des erforderlichen Querschnittes ermöglichen sie nicht. Der Sicherheitsgrad gegen Knicken ist:

$$\sigma = \frac{\sigma_k}{\sigma} = \frac{\sigma_k \cdot F}{P},$$

wenn $\sigma = \frac{P}{F}$ die Druckspannung ist.

Beispiel: Eine Säule von 4,0 m Gesamtlänge ist durch eine zentrisch angreifende Kraft $P = 30\,000$ kg belastet. Sie soll aus zwei \square -Eisen hergestellt werden, die außer den Kopf- und Fußverbindungen noch drei Querverbindungen erhalten. Gefordert wird eine 4 fache Sicherheit gegen Ausknicken.

Um einen ungefähren Anhalt zu haben, ermittelt man den erforderlichen Querschnitt aus der zulässigen Druckspannung $k = 900$ kg/cm² und erhält

$$F_e = \frac{30\,000}{900} = 33,3 \text{ cm}^2.$$

Gewählt \square -Eisen NP 14 mit $F = 2 \cdot 20,4 = 40,8 \text{ cm}^2$. Die \square -Eisen werden so angeordnet, daß $J_y = J_x$ wird; der lichte Abstand beträgt lt. Tabelle S. 541 68,1 mm.
Es wird

$$J = 2 \cdot J_x = 2 \cdot 605 = 1210 \text{ cm}^4,$$

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{1210}{40,8}} = 5,44 \text{ cm.}$$

Die Knicklänge ist zu $l = 0,9 \cdot L = 360 \text{ cm}$ gewählt (vgl. Tabelle für α S. 412)

$$x = \frac{l}{i} = \frac{360}{5,44} = 66,2.$$

Die Gültigkeitsgrenze für die Eulerschen Gleichungen liegt bei $x \geq 102$ (vgl. Tabelle S. 411). Nach der Tetmajerschen Formel S. 413 wird die Knickspannung beim Bruch für Flußeisen

$$\sigma_k = 3100 - 11,4 \cdot x = 3100 - 11,4 \cdot 66,2 = \infty 2345 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma = \frac{\sigma_k}{\sigma} = \frac{\sigma_k \cdot F}{P} = \frac{2345 \cdot 40,8}{30000} = 3,2.$$

Da der Querschnitt die geforderte Knicksicherheit nicht hat, werden gewählt \square -Eisen NP 18 mit $F = 2 \cdot 28,0 = 56,0 \text{ cm}^2$; $J = 2 J_x = 2 \cdot 1354 = 2708 \text{ cm}^4$ bei einem lichten Abstand der beiden \square -Eisen von 94,7 mm.

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{2708}{56}} = 6,97 \text{ cm,}$$

$$x = \frac{l}{i} = \frac{360}{6,97} = \infty 52,$$

$$\sigma_k = 3100 - 11,4 \cdot 52 = 2508 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma = \frac{2508 \cdot 56}{30000} = 4,68.$$

Die Knicksicherheit nach Euler Belastungsfall 1 wäre

$$\sigma = \frac{\pi^2 \cdot E J}{P \cdot l^2} = \frac{9,87 \cdot 2150000 \cdot 2708}{30000 \cdot 360 \cdot 360} = 14,8!$$

Damit ist die Brauchbarkeit des gewählten Querschnittes erwiesen; es muß noch nachgeprüft werden, ob jedes einzelne \square -Eisen für seine freie Länge zwischen den Querverbindungen ausreichende Knicksicherheit besitzt.

Der Anteil jedes \square -Eisens beträgt $P = \frac{1}{2} 30000 = 15000 \text{ kg}$. Die Knicklänge ist bei drei Querverbindungen

$$l = \frac{1}{4} \cdot 400 = 100 \text{ cm.}$$

Für den gewählten Querschnitt ist

$$F = 28 \text{ cm}^2; \quad J_{\min} = 114 \text{ cm}^4$$

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{114}{28}} = 2,02,$$

$$x = \frac{l}{i} = \frac{100}{2,02} = 49,5,$$

$$\sigma_k = 3100 - 11,4 \cdot 49,5 = \infty 2536 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma = \frac{2536 \cdot 28}{15000} = 4,74.$$

Nach Euler würde sich ergeben

$$\sigma = \frac{9,87 \cdot 2150000 \cdot 114}{15000 \cdot 100 \cdot 100} = \infty 16!$$

Ostenfeld setzt für schmiedbares Eisen als zulässige Knickspannung

$$\sigma_k = \sigma \left(1 - \frac{x^2}{30000} \right),$$

wobei $x = \frac{l}{i}$; σ die zulässige Druckspannung in kg/cm^2 und $\frac{1}{30000}$ eine Konstante bedeuten, die sich aus den Versuchen Tetmajers ergibt. Setzt man σ im Augenblick des elastischen Gleichgewichtes gleich der Quetschgrenze, so wird bei vierfacher Sicherheit

$$\sigma_k = 750 \left(1 - \frac{x^2}{30000} \right).$$

Soll der Querschnitt des Stabes ermittelt werden, so empfiehlt sich die Form

$$F = F_0 + \frac{\beta \cdot l^2}{30\,000},$$

wenn $F = \frac{P}{k}$ gleich dem erforderlichen Querschnitt infolge der Druckbelastung ist und $\beta = \frac{F}{J_{\min}}$ einen Wert bedeutet, der nur von der Form des Querschnittes abhängig ist; die Formel gilt für $F < 2 F_0$; für $F > 2 F_0$ ist die Eulersche Formel zu benutzen.

Zur vorläufigen Bestimmung des Querschnittes dient nachstehende Tabelle für die Größe β ; sind F und J_{\min} gefunden, so ist die Rechnung mit dem genauen Wert β zu wiederholen.

Tabelle für die Werte β .

Nr.	Volle Querschnitte			Nr.	Zusammengesetzte Querschnitte	
	Form	Größe von β			Form	Größe von β
1	Ein Quadrat 	12,0				
2	„ Rechteck $h > b$	$12 \frac{h}{b}$		12	 4 Winkel mit etwa 1 cm Zwischenraum	4,0
3	„ Kreis 	4π				
4		$\delta = 0,20 \varrho$	2,50	13	 2 U-Eisen mit etwa 1 cm Zwischenraum	6,0
5	„ Kreisring ϱ 	$\delta = 0,15 \varrho$	1,87			
6		$\delta = 0,10 \varrho$	1,25	14	 $J_x = J_y$	1,2
7		$\delta = 0,05 \varrho$	0,63			
8	„  -Eisen	7,0		15	 4 Z-Eisen mit einem Flacheisen	2,2
9	„  -Eisen	10,0				
	$b : h$	1 : 1	2 : 3	2 : 4		
10	Ein  -Eisen	6,0	7,0	11,0		1,8
11	„  -Eisen	5,0	—	7,5		

Schwarz-Rankine (Navier) setzen als zulässige Knickspannung

$$\sigma_k = \frac{\sigma}{1 + \gamma \cdot x^2}.$$

Dabei ist die zulässige Druckspannung σ höchstens bis zur Quetschgrenze zu rechnen; γ ist als Versuchswert nachstehender Tabelle zu entnehmen.

Tabelle für die Werte γ .

Baustoff	Holz	Gußeisen	Schmiedbares Eisen		
			Schweißeisen	Flußeisen	Baueisen im Mittel
$x = \frac{l}{k}$	20 ÷ 200	20 ÷ 150	20 ÷ 250	20 ÷ 250	20 ÷ 250
$\gamma =$	0,00023	0,00040	0,00016	0,00014	0,00015

Bemerkung: Scharowsky setzt für Gußeisen $\gamma = 0,0002$,
Schweißeisen $\gamma = 0,0001$;
Krohn setzt für Gußeisen $\gamma = 0,00011$,
Flußeisen $\gamma = 0,00007$.

C. Schubfestigkeit.

Wirken auf einen Stab zwei Kräfte nach Fig. 4, so wird der Querschnitt auf **Schub** beansprucht; der eine Stabteil wird abgeschert. Strenggenommen tritt Schubbeanspruchung niemals allein auf, vielmehr ist die Schubkraft Q stets von einem Biegemoment begleitet. Haben sich z. B. die Scherblätter in Fig. 22 einander genähert, so zeigt sich deutlich eine Verschiebung der Wirkungslinien: die Einzelkräfte werden zum Kräftepaar. Solange die beiden Kräfte Q dieselbe Wirkungslinie haben, darf eine gleichförmige Verteilung und parallele

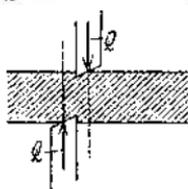


Fig. 22.

Richtung der Schubspannungen über den ganzen Querschnitt angenommen werden; in diesem Sonderfall ist dann

$$\tau = \frac{Q}{F} \text{ in kg/cm}^2.$$

Der erforderliche Querschnitt bestimmt sich aus

$$F = \frac{Q}{k_s},$$

worin k_s die zulässige Schubbeanspruchung bedeutet.

Im allgemeinen werden die Schubspannungen von Flächenelement zu Flächenelement veränderlich sein; über ihre Größe und Richtung ist zunächst nur bekannt, daß die Summe der Produkte aus Flächenelement und zugehöriger Schubspannung eine Resultante ergeben muß, die gleich der angreifenden Schubkraft Q , aber von entgegengesetzter Richtung sein muß.

Beachtet man, daß die Wirkung der Querkraft Q eine schiebende ist, so folgt: ein Umfangspunkt wird auf dem Umfange verschoben; oder: die Schubspannung kann nur tangential zum Umfange gerichtet sein in allen Punkten, die den Querschnitt begrenzen. Setzt man einen beliebig geformten Querschnitt voraus mit der Einschränkung, daß die Wirkungslinie der Schubkraft Q Symmetrieachse des Querschnitts sein möge (Fig. 23), dann erfahren die Punkte A und A' der Faserschicht AA' in der Entfernung y von der Schwerachse xx Schubspannungen, die sich in einem Punkte C auf der Wirkungslinie von Q schneiden. Ist τ die tangential gerichtete Randschubspannung, so sind ihre Seitenkräfte

$$\tau_x = \tau \cdot \sin \varphi; \quad \tau_y = \tau \cdot \cos \varphi$$

und

$$\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}.$$

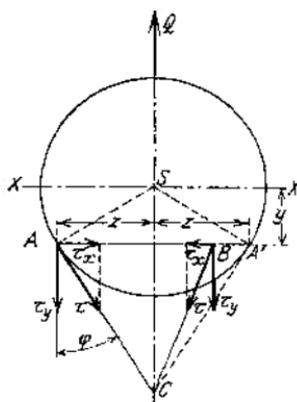


Fig. 23.

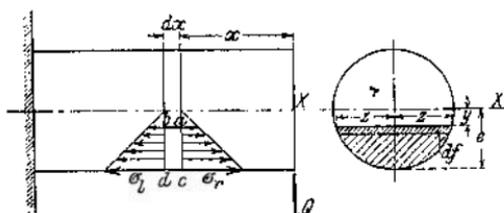


Fig. 24.

Ein beliebiger Punkt B der Faserschicht AA' erfährt eine Schubspannung τ , die ebenfalls nach C gerichtet ist. Wird diese in die Komponenten τ_x und τ_y zerlegt, dann sind die vertikalen Komponenten τ_y für die ganze Faserschicht AA' sämtlich gleich groß. Zur Ermittlung der Verteilung der Schubspannungen τ_y über den ganzen Querschnitt ist zu beachten, daß sie paarweise auftreten müssen, in Richtung der Stabachse und senkrecht dazu (vgl. S. 395). Betrachtet man die gleichgroßen Schubspannungen in Richtung der Stabachse, so läßt sich die gestellte Aufgabe auf eine Aufgabe der Biegefestigkeit zurückführen. Würde

der Stab der Fig. 24 oberhalb der Faserschicht ab festgehalten, so würden die infolge des Momentes $Q \cdot x$ auftretenden Spannungen in Richtung der Stabachse den unteren Stabteil gegen den oberen zu verschieben suchen. Auf der rechten Seite ac des unendlich schmalen Stabelementes $abcd$ wirken die Spannungen σ_r , auf der linken Seite bd die Spannungen σ_l ; diese Spannungen haben in Beziehung auf die Flächen ac bzw. bd Resultanten von der Größe:

$$N_r = \int \sigma_r \cdot df; \quad N_l = \int \sigma_l \cdot df,$$

wobei σ die Normalspannung in der Entfernung y von der Schwerachse bedeutet. Nach S. 426 ist:

$$\sigma_r = \frac{M_x}{J} \cdot y; \quad \sigma_l = \frac{M'_x}{J} \cdot y,$$

wobei M_x das Biegemoment in der Entfernung x ; M'_x das Biegemoment in der Entfernung $(x + dx)$ ist. Die Differenz der beiden Normalkräfte N ist aber die Kraft, die die Faserschicht ab gegen den festgehaltenen gedachten oberen Stabteil zu verschieben sucht; es wird:

$$N = N_l - N_r = \int_y^e \frac{M'_x}{J} \cdot y \cdot df - \int_y^e \frac{M_x}{J} \cdot y \cdot df.$$

Nun ist aber $\int_y^e df \cdot y$ gleich dem statischen Moment des gestrichelten Querschnittsteiles bezogen auf die Schwerachse xx ; bezeichnet man diesen Wert mit S , so wird:

$$N = \frac{S}{J} (M'_x - M_x),$$

aus der sich mit $M'_x - M_x = Q \cdot dx$

$$N = \frac{Q \cdot dx \cdot S}{J} \quad \text{ergibt.}$$

Die Schubspannung τ_y , die über die Faserschicht ab als gleichförmig verteilt aufgefaßt werden darf, wird dann

$$\tau_y = \frac{N}{2z \cdot dx} = \frac{Q \cdot S}{J \cdot 2z}.$$

Aus $\tau_y = \tau \cdot \cos \varphi$ folgt für die Randschubspannung

$$\tau = \frac{Q \cdot S}{J \cdot 2z \cdot \cos \varphi}.$$

Hierin ist J das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes bezogen auf die senkrecht zu Q stehende Schwerachse xx ; S das statische Moment des gestrichelten Querschnittsteiles, bezogen auf dieselbe Achse xx .

Wird in dieser Gleichung $y = e$, so wird $\int_y^e y \cdot df = 0$; d. h. die Schubspannung in den äußersten Fasern — von der Achse xx gerechnet — ist gleich Null. Für den rechteckigen Querschnitt der Fig. 25 ist:

$$J = \frac{b h^3}{12}$$

$$S = \int_y^{\frac{h}{2}} df \cdot y = \int_y^{\frac{h}{2}} b \cdot dy \cdot y = b \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_y^{\frac{h}{2}};$$

$$S = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{b}{2} \cdot \frac{h^2}{4} \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right];$$

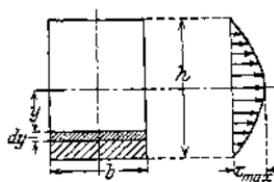


Fig. 25.

so daß

$$\tau_y = \frac{Q \cdot S}{J \cdot b} = \frac{Q \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{h^2}{4} \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right]}{\frac{b h^3}{12} \cdot b}$$

$$\tau_y = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b h} \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right].$$

Bei dem rechteckigen Querschnitt sind τ_y und τ identisch; die Gleichung $\tau = f(y)$ ist eine Parabel von der Pfeilhöhe

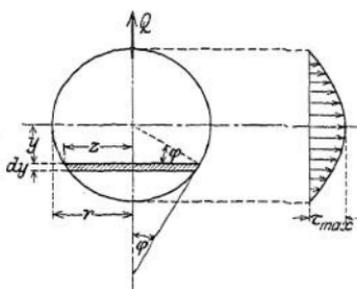


Fig. 26.

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F},$$

da τ_y für $y = 0$ zum Maximum wird. Die größte Schubspannung ist demnach 50% größer als bei gleichförmiger Verteilung über den ganzen Querschnitt.

Für einen Kreisquerschnitt (Fig. 26) ist:

$$S = \int 2z \cdot y \cdot d y;$$

Mit

$$z = r \cdot \cos \varphi; \quad y = r \cdot \sin \varphi$$

wird

$$S = 2 r^3 \int \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi \cdot d \varphi = \frac{2}{3} r^3 \cos^3 \varphi,$$

so daß sich mit $J = \frac{\pi}{4} r^4$ ergibt

$$\tau = \frac{Q \cdot \frac{2}{3} r^3 \cdot \cos^3 \varphi}{\frac{\pi}{4} r^4 \cdot 2z \cdot \cos \varphi} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi r^2} \cdot \cos \varphi$$

$$\tau = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi r^2} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r} \right)^2}.$$

für $y = 0$ bzw. $\varphi = 0^0$ wird

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{F}.$$

Das Schaubild der Spannungsverteilung zeigt sinusförmigen Verlauf. Für den Kreisring ist bei verhältnismäßig geringer Wandstärke

$$\tau_{\max} = 2 \cdot \frac{Q}{F}.$$

Sämtliche Gleichungen gelten unter der Voraussetzung, daß die Schubzahl unveränderlich ist, und daß der Querschnitt keine plötzlichen Übergänge hat. So lieferten die Gleichungen z. B. zutreffende Werte für den Steg eines I-Eisens, sie dürfen aber nicht auf die Flanschen angewendet werden, da die Forderung tangentialer Schubspannungen am Umfange für die Innenseite der Flanschen τ_y gleich Null ergeben würde.



Fig. 27.

Auf S. 395 war $k_s = 0,75 k_z$ bis $0,8 k_z$ gesetzt.

Die nach Fig. 27 von C. v. Bach¹⁾ ausgeführten Versuche zur Ermittlung der Scherfestigkeit haben ergeben, daß die Scherfestigkeit wesentlich höher liegt.

Die Festigkeitsbedingung für sämtliche Querschnitte lautet:

$$\tau_{\max} \leq k_s.$$

¹⁾ C. v. Bach, Elastizität und Festigkeit, S. 361 ff. 6. Aufl. Berlin 1911. Julius Springer.

Da nach dem Verfahren Fig. 27 weniger die Widerstandsfähigkeit gegen Schub bestimmt wird als die Kraft, die zum Zerschneiden des Stabes aufgewendet werden muß, so erscheint es nicht angebracht, aus der so ermittelten Scherfestigkeit auf die zulässige Schubfestigkeit zu schließen. Hinzu kommt, daß in Fig. 27 das biegende Moment keinesfalls zu vernachlässigen ist; es zeigten sich stets Durchbiegungen, bevor der Stab abgeschert wurde. Daraus folgt, daß in Fällen, bei denen die Ausführung der Fig. 27 entspricht — Gelenkbolzen, Keile — die Berechnung auf Biegung in der Regel maßgebend sein soll.

Beispiele: 1. Mit einer Winkelschere sollen Profile bis $120 \times 120 \times 15$ geschnitten werden; es ist der Stempeldruck zu bestimmen.

$$P = f \cdot K_s$$

mit $K_s = 4500 \text{ kg/cm}^2$ wird $P = \infty 153 \text{ t}$.

2. In Flußeisenblech sollen zylindrische Löcher von 20 mm \varnothing gestanzt werden; es ist die Stärke für das Blech zu berechnen, wenn die Bruchfestigkeit des Stahlstempels $K = 12000 \text{ kg/cm}^2$, die des Bleches $K_s = 4000 \text{ kg/cm}^2$ beträgt.

$$\text{Es ist } P = \pi \cdot d \cdot s \cdot K_s \quad \text{und} \quad P = \frac{\pi d^2}{4} \cdot K,$$

$$\text{also} \quad s = \frac{K \cdot d}{4 K_s} = \frac{12000 \cdot 2}{4 \cdot 4000} = 15 \text{ mm.}$$

3. Welchen Durchmesser erhält ein zylindrischer Bolzen (Fig. 28) aus Flußstahl mit $k_2 = 1200 \text{ kg/cm}^2$ für eine Schubkraft von $P = 12000 \text{ kg}$?

Der erforderliche Querschnitt des Bolzens wird, da der Bolzen zweischnittig ist,

$$F = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{P}{2 k_2},$$

mit $k_2 = 0,8 k_2 = 960 \text{ kg/cm}^2$ ergibt sich

$$F = 6,25 \text{ cm}^2; \quad d = \infty 30 \text{ mm.}$$

Das Biegemoment für den Bolzen wird zu groß, wenn der Bolzen als zweifach gelagerter gerader Stab aufgefäßt wird, der in der Mitte durch eine Einzelkraft $P = 12000 \text{ kg}$ belastet ist; man rechnet aber zu günstig, wenn gleichförmig verteilte Last angenommen wird.

Legt man den mittleren Wert $\frac{P \cdot l}{6}$ der Berechnung zugrunde, so wird die Biegebeanspruchung (vgl. S. 425)

$$\sigma = \frac{P \cdot \frac{l}{6}}{\frac{\pi d^3}{32}} = \frac{12000 \cdot 7,5}{6 \cdot 2,651} = \infty 5660 \text{ kg/cm}^2,$$

also eine Beanspruchung, die die zulässige bei weitem übersteigt; der Bolzen müßte ein Widerstandsmoment von

$$W = \frac{P \cdot \frac{l}{6}}{1200} = \frac{12000 \cdot 7,5}{6 \cdot 1200} = 12,5 \text{ cm}^3$$

erhalten, das einem Durchmesser von $\infty 51 \text{ mm}$ entspricht (vgl. Tabelle S. 435). Der auf Abscheren berechnete Bolzen würde zu schwach sein.

4. Der Stoß eines vollwandigen Kranträgers (Fig. 29) hat eine Querkraft von $Q = 15000 \text{ kg}$ aufzunehmen; r_{\max} ist zu bestimmen.

$$r_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F} = \frac{3}{2} \cdot \frac{15000}{2 \cdot 1,3 \cdot 24} = \infty 362 \text{ kg/cm}^2.$$

D. Biegungsfestigkeit.

Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äußeren Kräfte liegen in einer Ebene, die durch die Stabachse geht (Fig. 5); es ist die Wirkung der Kräfte auf einen beliebigen Querschnitt des Trägers zu untersuchen. Mit Hilfe von Kraft- und Seileck (Fig. 30) ergibt sich die Resultante sämtlicher Kräfte links bzw. rechts vom betrachteten Querschnitt; man erhält:

$$Q_l = A - \sum_A^x P$$

$$Q_r = B - \sum_B^x P.$$

Der Angriffspunkt ist der Schnittpunkt der äußersten Seilstrahlen s und III (vgl. S. 271). Statt der Kräfte P , A und B kann man nunmehr den Träger angegriffen denken von zwei gleich großen

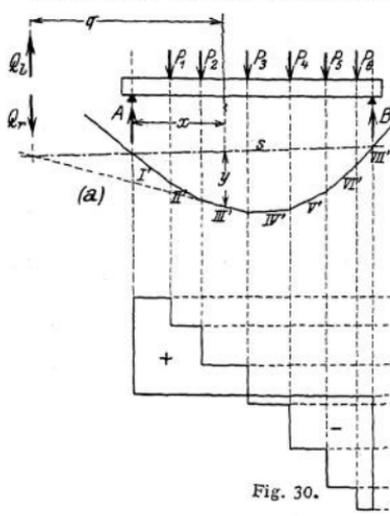


Fig. 30.

Kräften Q , die dieselbe Wirkungslinie, aber entgegengesetzte Richtung haben. Unter dem Einfluß dieser beiden Kräfte Q wird der Träger gebogen; zwei gleich große entgegengesetzt drehende Momente von der Größe $M = Q \cdot q$ treten auf. Der Einfachheit halber denkt man sich den rechten Trägerteil festgehalten und untersucht die Wirkung der Kraft Q_1 auf den Querschnitt; das Moment $Q_1 \cdot q$ wird durch eine gedachte Einspannung ersetzt, so daß der Träger durch die Kraft Q_1 in der Entfernung q angegriffen wird. Da die Wirkung des Momentes eine biegende ist, heißt

$$M = Q_1 \cdot q$$

Biegemoment, seine Größe im Punkte x des Trägers ist gleich dem statischen Moment sämtlicher Kräfte links, bzw. rechts vom betrachteten Punkt, da sich die Betrachtung auch für den links festgehalten gedachten Träger durchführen läßt. Nach dem Satz über das statische Moment der Resultante (S. 278) erhält man als Biegemoment in einem beliebigen Punkte eines Trägers die algebraische Summe der statischen Momente sämtlicher Kräfte links bzw. rechts vom betrachteten Punkt. Das Biegemoment ist positiv, wenn sich der Träger infolge des Momentes nach unten, negativ, wenn er sich nach oben durchbiegt (Fig. 31).

Nach S. 278 ist die von dem Seileck begrenzte Fläche die graphische Darstellung der Biegemomente; diese Fläche heißt Momentenfläche des Trägers AB ; ihre Ordinaten sind ein Maß für die Größe der Biegemomente in einem beliebigen Punkte und zwar ist:

$$M_x = H \cdot y,$$

wobei die Polweite H im Kräftemaßstab, die Ordinate y im Längenmaßstab der Darstellung gemessen werden. Lautet der Kräftemaßstab $1 \text{ cm} = a \text{ kg}$, der Längenmaßstab $1 \text{ cm} = b \text{ cm}$, so ist

$$M_x = \left(H \text{ cm} \cdot a \frac{\text{kg}}{\text{cm}} \right) \left(y \text{ cm} \cdot b \frac{\text{cm}}{\text{cm}} \right) \text{ in cmkg.}$$

Der Querschnitt eines Trägers wird nach dem absolut größten Moment bemessen.

Zweiter Weg zur Ermittlung der Momentenfläche: Man bestimmt die Biegemomente analytisch als Summe der statischen Momente für beliebige Punkte des Trägers und trägt die so gefundenen Werte als Ordinaten von einer horizontalen Geraden aus ab; der Maßstab dieser Darstellung lautet $1 \text{ cm} = c \text{ cmkg}$. Dann ist, wenn z eine Ordinate bedeutet,

$$M_x = z \text{ cm} \cdot c \frac{\text{cmkg}}{\text{cm}} \text{ in cmkg.}$$

Werden im Querschnitt x (Fig. 32a) zwei gleich große entgegengesetzt gerichtete Kräfte Q_i angebracht, so lassen sich die im Querschnitt nach unten gerichtete Kraft Q_i und die im Schnittpunkt der äußersten Seilstrahlen s und III (Fig. 30) angreifende Kraft Q_r zu einem Kräftepaar vereinigen, dessen Moment

$$M_x = Q_i \cdot q$$

ist. Neben dem Kräftepaar bleibt eine Einzelkraft Q_i im betrachteten Punkt x , die für die linke Trägerseite nach oben gerichtet ist. In gleicher Weise erhält man für die rechte Trägerseite ein Kräftepaar mit dem — entgegengesetzt drehenden — Moment $M_x = Q_r \cdot q$ und eine Einzelkraft Q_r senkrecht nach unten

(Fig. 32b). Die im Querschnitt wirkenden Einzelkräfte Q versuchen beide Querschnittsflächen gegeneinander zu verschieben (Fig. 32c), sie heißen Querkräfte und beanspruchen den Querschnitt auf Schub. Ihre Größe ergibt sich als Summe sämtlicher Kräfte links, bzw. rechts vom betrachteten Punkt des Trägers; ihre Richtung wird als positiv bezeichnet, wenn die Querkräfte für den linken Trägerteil nach oben gerichtet sind. Biegemoment und Querkräfte treten stets gleichzeitig auf. Werden die an jeder Stelle des Trägers aus einem bestimmten Belastungszustand sich ergebenden Querkräfte als Ordinaten von einer horizontalen Geraden aus abgetragen, so entsteht die Querkraftlinie (Fig. 30), die die Querkraftfläche begrenzt; der Maßstab der Darstellung lautet $1 \text{ cm} = a \text{ kg}$.

Bemerkung. Bei Belastung durch Einzelkräfte bleibt die Querkraft zwischen zwei Kräften konstant, die Begrenzungslinie der Querkraftfläche ist also eine Parallele zu der horizontalen Grundlinie.

a) Konstruktion der Querkraft- und Momentenfläche.

1. Der Träger ist durch Einzelkräfte belastet (Fig. 33):

$$A = \frac{1}{l} (P_1 \cdot l_1' + P_2 \cdot l_2' + P_3 \cdot l_3' + P_4 \cdot l_4')$$

$$B = \frac{1}{l} (P_1 \cdot l_1 + P_2 \cdot l_2 + P_3 \cdot l_3 + P_4 \cdot l_4)$$

$$Q_A = A$$

$$Q_1 = A - P_1$$

$$Q_2 = A - (P_1 + P_2)$$

$$Q_3 = A - (P_1 + P_2 + P_3)$$

$$Q_4 = A - (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) = -B$$

$$M_A = 0$$

$$M_1 = A \cdot l_1$$

$$M_2 = A \cdot l_2 - P_1 \cdot a_1$$

$$M_3 = A \cdot l_3 - P_1 (a_1 + a_2) - P_2 \cdot a_3$$

$$M_4 = A \cdot l_4 - P_1 (a_1 + a_2 + a_3) - P_2 (a_3 + a_4) - P_3 a_4$$

$$M_B = 0$$

oder vom rechten Auflager berechnet

$$M_3 = B \cdot l_3' - P_4 \cdot a_4$$

$$M_4 = B \cdot a_4$$

$$\max M = M_3,$$

da für $x = l_3$ die Querkraft Q das Vorzeichen wechselt.

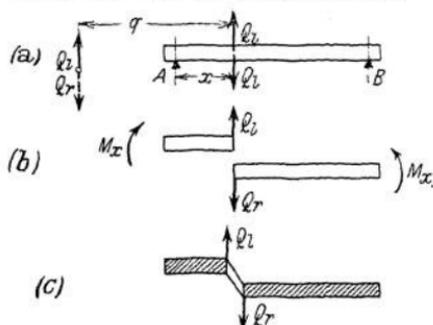


Fig. 32.

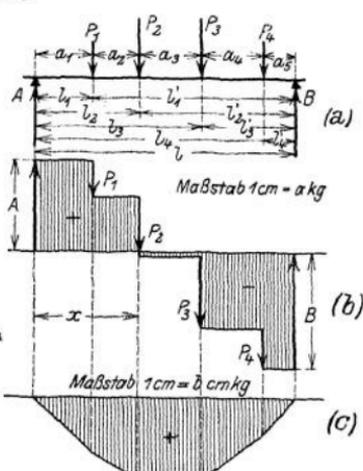


Fig. 33.

2. Der Träger ist durch gleichförmig verteilte Last belastet (vgl. Abschnitt Mathematik, S. 124). Die Querkraft im Punkte x des Trägers ist

$$Q_x = A - g \cdot x = \frac{gl}{2} - g \cdot x = \frac{P}{2} - \frac{P}{l} \cdot x.$$

Die Querkraftlinie Fig. 34 ist eine Gerade, die auf der y -Achse (senkrecht unter A) die Strecke $\frac{P}{2}$ abschneidet, und deren Richtungskonstante $m = \operatorname{tg} \varphi = -\frac{P}{l}$ ist, wenn P die Gesamtbelastung des Trägers bedeutet. Die Momentenlinie ist eine Parabel mit der Pfeilhöhe $\frac{gl^2}{8}$.

3. Der Träger ist durch Streckenlast belastet (Fig. 35), vgl. Abschnitt Mathematik, S. 124. $Q_A = A$; die Querkraftlinie für den unbelasteten Träger $A 1$ ist horizontal; zwischen 1 und 2 ist sie eine geneigte Gerade, deren Richtungskonstante $m = \operatorname{tg} \varphi = -\frac{P}{b}$ ist; zwischen 2

und B verläuft sie horizontal, die Ordinate in B ist $Q_B = -B$. Die Momentenlinie ist bestimmt durch $M = P \cdot \frac{l_0 \cdot l_0'}{l}$ und verläuft zwischen $1'$ und $2'$ parabolisch. $\max M$ liegt bei $x = x_0$, da dort die Querkraft das Vorzeichen wechselt.

Analytisch findet man die Lage des Maximalmomentes aus

$$A - p \cdot (x_0 - a) = 0.$$

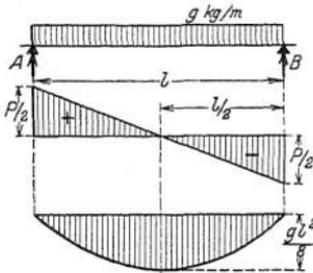


Fig. 34.

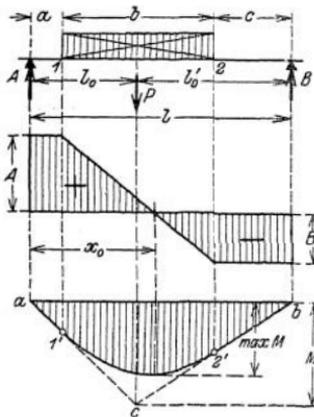


Fig. 35.

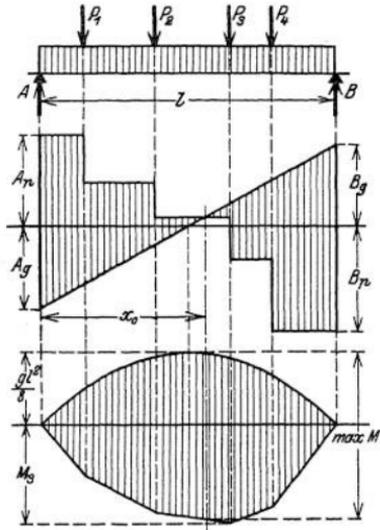


Fig. 36.

4. Der Träger ist durch Einzelkräfte und gleichförmig verteilte Last belastet (Fig. 36). Die resultierende Querkraftfläche durch Addition der Einzelordinaten; man erhält sie zeichnerisch am besten, wenn man die Ordinaten infolge der gleichförmig verteilten Last in entgegengesetzter Richtung aufrägt. In gleicher Weise verfährt man bei der Konstruktion der Momentenlinie. Das Maximalmoment liegt bei x_0 , da dort die Querkraft das Vorzeichen wechselt.

5. Der überhängende Balken mit Einzellasten und gleichförmig verteilter Last (Fig. 37).

Man bringt zunächst die Einzelkräfte P auf den Träger und entwirft mit Hilfe des Kräftecks den Seilzug $I' \dots V'$ (Fig. 37b), dann schneiden die äußersten Seilstrahlen I' und V' die Auflagereckrechten in den Punkten der Schlußlinie s' ; eine Parallele s zu s' durch den Pol O ergibt die Auflagerreaktionen A und B infolge der Kräfte P . In Fig. 37b sind die Schnittpunkte der Seilstrahlen I' und II bzw. IV' und V' auf die Schlußlinie s projiziert; die Momentenfläche ist durch Strichelung hervorgehoben und hat positive und negative Teilflächen, je nachdem sie unter- oder oberhalb der Schlußlinie liegen. Die zu den Kräften P gehörige Querkraftfläche zeigt Fig. 37c; sie ergibt drei Punkte, in denen die Querkraft das Vorzeichen wechselt; diesen Nullpunkten der Querkraftfläche entsprechen

die beiden negativen Stützmomente und das positive Maximalmoment im Angriffspunkt der Kraft P_2 .

Die gleichförmig verteilte Last $G = g \cdot L$, wobei L die Gesamtlänge des Trägers bedeutet, denkt man sich im Schwerpunkt der Last d. h. in $\frac{1}{2} L$ von den Enden des Trägers entfernt angreifen. Das Kräfteck mit dem Pol O_1 liefert die Seilstrahlen I' und II'

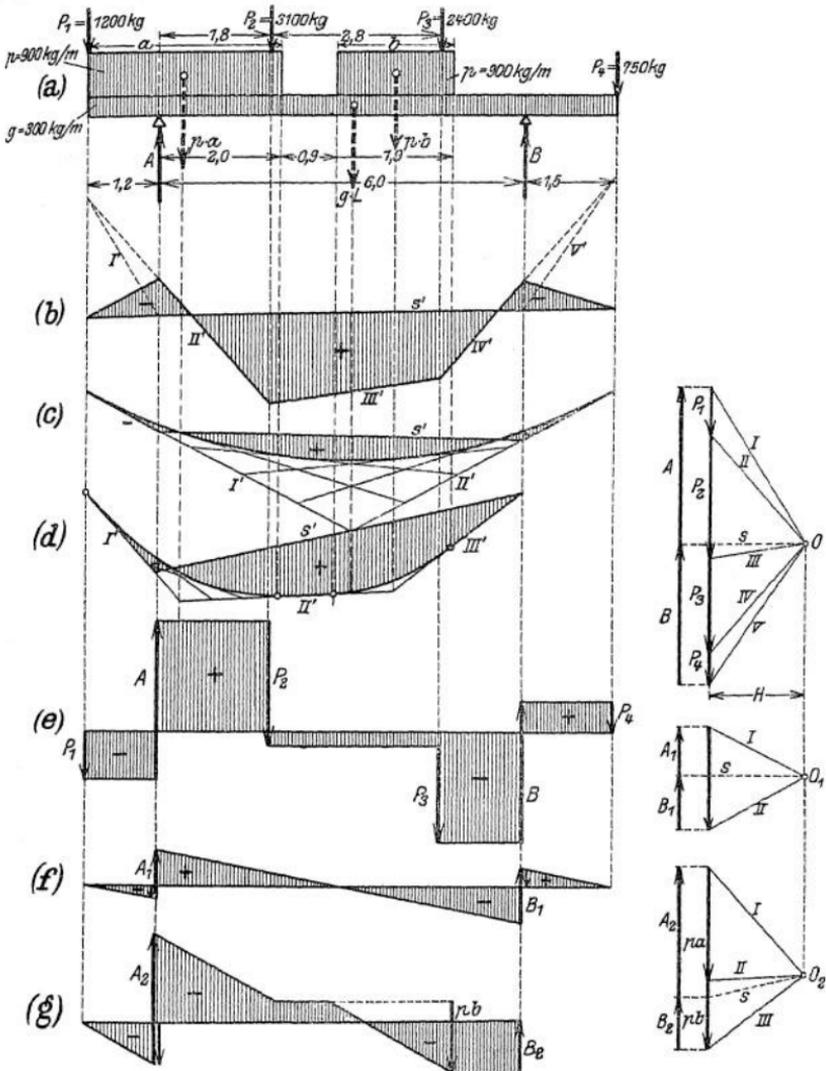


Fig. 37.

(Fig. 37 c), deren Schnittpunkte mit den Auflagersenkrechten die Schlußlinie bestimmen, und die Tangenten an die parabolische Momentenlinie in den Endpunkten des Trägers sind. (Konstruktion der Parabel siehe Abschnitt Mathematik S. 113.) Die Querkraftfläche infolge g ist in Fig. 37 f dargestellt; die Neigung der Querkraftlinie ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{gL}{L} = g,$$

ihre Konstruktion geht aus der Figur hervor,

Die beiden Streckenlasten $p \cdot a$ und $p \cdot b$ denkt man sich ebenfalls in ihren Schwerpunkten vereinigt und entwirft mit Hilfe des Kräftecks (Pol O_2) den Seilzug I' , II' , III' ; die Schnittpunkte der äußersten Seilstrahlen I' und III' mit den Auflagersenkrechten (Fig. 37d) bestimmen die Schlußlinie s' . Innerhalb der Strecken a und b ist die Momentenlinie eine Parabel, deren Tangenten die Seilstrahlen I' und II' für die Last $p \cdot a$ bzw. II' und III' für die Last $p \cdot b$ sind. Die Querkraftfläche infolge beider Streckenlasten zeigt Fig. 37g; beim Zeichnen dieser Linie ist darauf zu achten, daß sie für unbelastete Teile des Trägers horizontal verläuft.

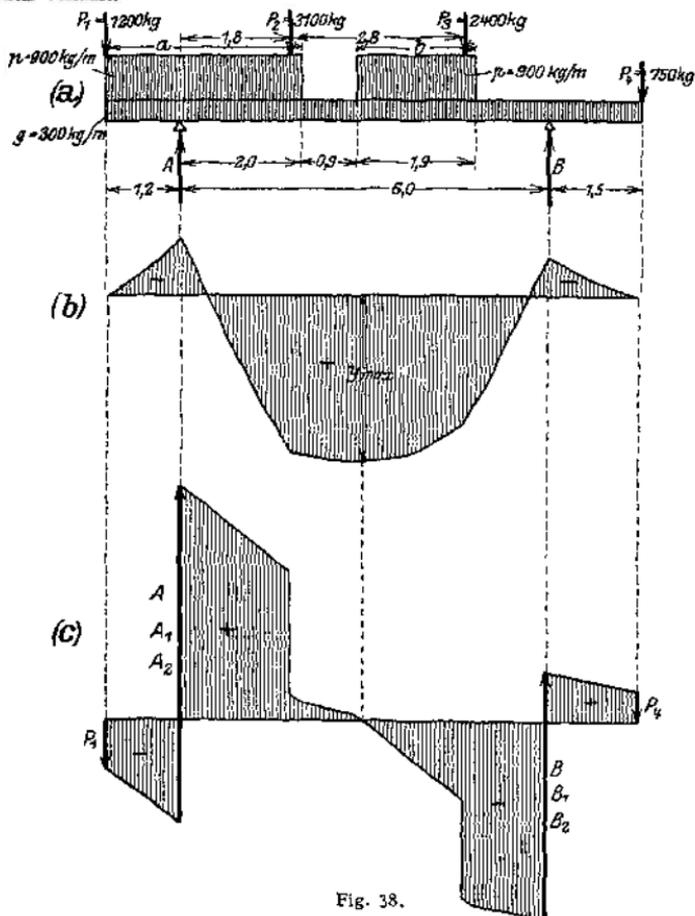


Fig. 38.

Da alle drei Lastgruppen gleichzeitig auf den Träger wirken, sind die Einzelflächen zu addieren. Fig. 38c gibt die resultierende Querkraftfläche, deren Nullpunkt die Lage des Maximalmomentes bestimmt. In Fig. 38b ist die resultierende Momentenfläche dargestellt, deren Maximalordinate senkrecht über dem Querkraft-Nullpunkt liegt. Lautet der Kräftemaßstab $1 \text{ cm} = a \text{ kg}$; der Längenmaßstab $1 \text{ cm} = b \text{ cm}$, so wird

$$\max M = \left(H \text{ cm} \times a \frac{\text{kg}}{\text{cm}} \right) \cdot \left(y_{\max} \text{ cm} \times b \frac{\text{cm}}{\text{cm}} \right),$$

$$= (1,2 \text{ cm} \cdot 2000 \text{ kg/cm}) \cdot (2,08 \text{ cm} \cdot 133 \text{ cm/cm}) = 667\,000 \text{ cmkg}.$$

Analytisch ermittelt man das Maximalmoment wie folgt:

$$A = \frac{1}{6} (1200 \cdot 7,2 + 900 \cdot 3,2 \cdot 5,6 + 3100 \cdot 4,2 + 300 \cdot 8,7 \cdot 2,85 + 900 \cdot 1,9 \cdot 2,15 + 2400 \cdot 1,4 - 750 \cdot 1,5) = 8523 \text{ kg}.$$

$$B = \frac{1}{6} (750 \cdot 7,5 + 2400 \cdot 4,6 + 900 \cdot 3,2 \cdot 3,85 + 300 \cdot 8,7 \cdot 3,15 + 3100 \cdot 1,8 + 900 \cdot 1,9 \cdot 0,4 - 1200 \cdot 1,2) = 6127 \text{ kg}.$$

Die Querkraft im Angriffspunkt der Kraft P_3 ist von B aus gerechnet

$$Q_3 = -6127 + 750 + 2,7 \cdot 300 + 0,2 \cdot 1200 = -1927 \text{ kg.}$$

Bezeichnet man mit x' die Entfernung des Querkraft-Nullpunktes von P_1 , so folgt aus

$$-1917 + 1200 \cdot x' = 0, \quad x' = 1,61 \text{ m}$$

und damit als Entfernung von B : $x_0 = 1,61 + 1,4 = 3,01 \text{ m}$.

Das Maximalmoment berechnet sich von B aus zu

$$\begin{aligned} \text{max } M &= 6127 \cdot 3,01 - 750 \cdot 4,51 - 2400 \cdot 1,61 - 1,81 \cdot 900 \cdot \frac{1}{2} \cdot 181 \\ &\quad - 4,51 \cdot 300 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4,51 = 6670 \text{ mkg.} \end{aligned}$$

6. Der Balken mit beliebig gerichteten Einzellasten senkrecht zur Achse. Man zerlege jede Kraft nach horizontaler und vertikaler Richtung und entwerfe für beide Lastgruppen getrennt Querkraft- und Momentenlinie. Die geometrische Addition der Einzelwerte ergibt die wirklichen Querkräfte und Momente.

b) Biegungsspannungen und Formänderungen.

Der Freitrag (Fig. 39) sei durch die Kraft P belastet; infolge dieser Belastung wird die vordem gerade Achse gekrümmt. Die gekrümmte Achse heißt Biegungslinie oder elastische Linie. Die Erfahrung zeigt, daß die obere Faserschicht eine Verlängerung, die untere Faserschicht dagegen eine Verkürzung erfährt. Zwischen beiden Schichten muß sich eine mittlere Faserschicht befinden, die ihre ursprüngliche Länge beibehält; sie heißt neutrale Faserschicht und schneidet jeden Querschnitt in einer Geraden, die neutrale Achse des Querschnittes oder Nullachse genannt wird.

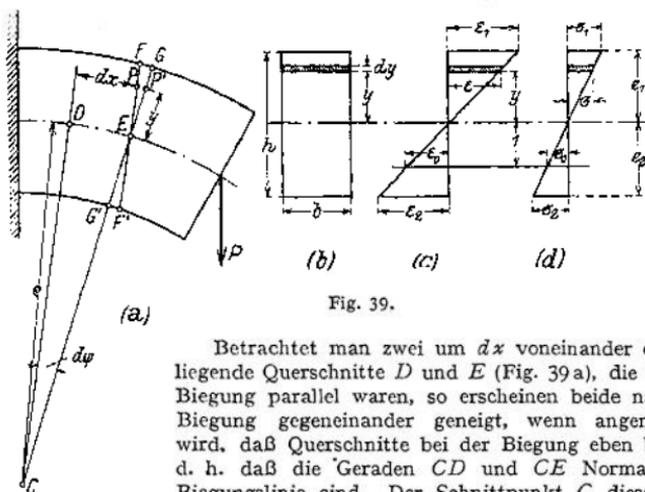


Fig. 39.

Betrachtet man zwei um dx voneinander entfernt liegende Querschnitte D und E (Fig. 39a), die vor der Biegung parallel waren, so erscheinen beide nach der Biegung gegeneinander geneigt, wenn angenommen wird, daß Querschnitte bei der Biegung eben bleiben; d. h. daß die Geraden CD und CE Normalen der Biegungslinie sind. Der Schnittpunkt C dieser Normalen ist Krümmungsmittelpunkt, $CD = \rho$ der Krümmungsradius. Wird EF parallel CD gezogen, so ist:

$$PP' = y \cdot d\varphi.$$

Unter der Voraussetzung, daß die Dehnungen direkt proportional den Entfernungen von der Nullachse sind, (Fig. 39c) ist

$$\frac{PP'}{dx} = \varepsilon = y \cdot \frac{d\varphi}{dx},$$

wobei dx die ursprüngliche Länge der Faserschicht in der Entfernung y von der Nullachse ist. Mit $\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dx}$ wird

$$\varepsilon = y \cdot \frac{1}{\rho}.$$

Innerhalb der Proportionalitätsgrenze ist $\varepsilon = \alpha \cdot \sigma$, d. h. auch die Spannungen wachsen direkt proportional der Entfernung von der Nullachse (Fig. 39 d).

Ist σ_0 die Spannung in der Entfernung 1, dann ist $\sigma = \sigma_0 \cdot y$ die Spannung in der Entfernung y .

Die infolge der Spannung σ in dem Flächenstreifen df auftretende Kraft ist $\sigma \cdot df$, dabei ist vorausgesetzt, daß für die unendlich geringe Breite des Flächenelementes df die Spannung als gleichförmig verteilt angesehen werden darf. Die im Innern des Stabes durch das Biegemoment M_x wachgerufenen Kräfte müssen den angreifenden äußeren Kräften das Gleichgewicht halten. Nach der ersten Gleichgewichtsbedingung $\sum H = 0$ wird

$$\int \sigma \cdot df = 0 ;$$

$$\int \sigma_0 \cdot y \cdot df = 0 ;$$

$$\sigma_0 \cdot \int df \cdot y = 0 ;$$

$df \cdot y$ ist das statische Moment des Flächenelementes df bezogen auf die Nullachse; $\int df \cdot y$ ist die Summe der statischen Momente sämtlicher Flächenteilchen bezogen auf dieselbe Achse; die Bedingung $\int df \cdot y = 0$ erfordert, daß die Nullachse durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht, also Schwerachse ist.

Nach der dritten Gleichgewichtsbedingung $\sum M = 0$ wird

$$\int \sigma \cdot df \cdot y - M_x = 0 ,$$

$$\sigma_0 \int df \cdot y^2 = M_x .$$

$\int df \cdot y^2 = J_x$ ist das Trägheitsmoment des Querschnittes bezogen auf die Null-(d. h. Schwer-)achse.

Die Randspannung σ_1 ergibt sich mit e_1 als Entfernung der äußersten Faser von der Nullachse zu

$$\sigma_1 = \sigma_0 \cdot e_1 ,$$

folglich wird

$$\sigma_1 = \frac{M_x}{J_x} \cdot e_1$$

und entsprechend

$$\sigma_2 = \frac{M_x}{J_x} \cdot e_2 ,$$

wobei M_x das Biegemoment im Querschnitt x , gemessen in cmkg, J_x das Trägheitsmoment des Querschnittes x gemessen in cm^4 bedeuten. Setzt man:

$$\frac{J_x}{e_1} = W_1 ; \quad \frac{J_x}{e_2} = W_2 ,$$

so werden die Randspannungen

$$\sigma_1 = \frac{M_x}{W_1} ; \quad \sigma_2 = \frac{M_x}{W_2} .$$

W_1 und W_2 heißen Widerstandsmomente des Querschnittes und werden in cm^3 gemessen.

Ist k_b die zulässige Spannung für einen auf Biegung beanspruchten Stab, so muß sein:

$$k_b \leq \frac{M_x}{W_1} \quad \text{bzw.} \quad k_b \leq \frac{M_x}{W_2} .$$

Für die Bemessung des Querschnittes ergibt sich die Bedingung:

$$W_{\text{erforderlich}} = \frac{M_x}{k_b} .$$

Beispiel: Der Träger der Fig. 33 habe ein Maximalmoment

$$\max M = 95\,000 \text{ cmkg.}$$

Die zulässige Biegungsspannung $k_b = 900 \text{ kg/cm}^2$ erfordert

$$W_e = \frac{95\,000}{900} = \approx 106 \text{ cm}^3.$$

Ausführungen: 1. I - Eisen NP 16 mit $W_x = 117 \text{ cm}^3$ und $g = 17,9 \text{ kg/m}$

$$\max \sigma_b = \frac{95\,000}{117} = \approx 810 \text{ kg/cm}^2.$$

2. C - Eisen NP 16 mit $W_x = 116 \text{ cm}^3$ und $g = 18,84 \text{ kg/m}$

$$\max \sigma_b = \frac{95\,000}{116} = \approx 820 \text{ kg/cm}^2.$$

3. L - Eisen 160/160/17 mit $W_1 = \frac{1226}{16,0 - 4,6} = \approx 108 \text{ cm}^3$; $W_2 = \frac{1226}{4,6} = 266 \text{ cm}^3$; $g = 40,7 \text{ kg/m}$

$$\max \sigma_b = \sigma_1 = \frac{95\,000}{108} = 880 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_2 = \frac{95\,000}{266} = 357 \text{ kg/cm}^2.$$

4. L - Eisen 100/200/14 mit $W_1 = \frac{1653}{20,0 - 7,12} = 128 \text{ cm}^3$; $W_2 = \frac{1653}{7,12} = 232 \text{ cm}^3$ und $g = 31,64 \text{ kg/m}$

$$\max \sigma_b = \sigma_1 = \frac{95\,000}{128} = 745 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_2 = \frac{95\,000}{232} = 410 \text{ kg/cm}^2.$$

5. Kreisquerschnitt mit $d = 103 \text{ mm}$ mit $W = 107,3 \text{ cm}^3$ (Tabelle S. 435) und $g = 64,3 \text{ kg/m}$.

$$\max \sigma_b = \frac{95\,000}{107,3} = 885 \text{ kg/cm}^2.$$

Ist $\varepsilon = y \cdot \frac{1}{\varrho}$ die Dehnung in der Entfernung y von der Nullachse, so ist $\varepsilon_0 = \frac{1}{\varrho}$ die Dehnung in der Entfernung $y = 1$. Mit $\varepsilon_0 = \alpha \cdot \sigma_0 = \frac{1}{\varrho}$ geht die Gleichung über in

$$\sigma_0 \cdot M_x = J_x$$

$$\frac{1}{\varrho \cdot \alpha} = J_x = M_x \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\varrho} = \alpha \cdot \frac{M_x}{J_x} = \frac{1}{E} \cdot \frac{M_x}{J_x}.$$

Die Differentialgleichung für den Krümmungshalbmesser (vgl. Abschnitt Mathematik S. 163) lautet:

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Für den Fall, daß $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi$ sehr klein ist, darf man $\left(\frac{dy}{dx} \right)^2$ gegen 1 vernachlässigen, so daß

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

wird und damit für flache Bögen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha \cdot \frac{M_x}{J_x} = \frac{1}{E} \cdot \frac{M_x}{J_x}.$$

Diese Gleichung ist die Differentialgleichung der elastischen Linie eines Trägers mit gerader Achse und gilt nur für Durchbiegungen, die im Verhältnis zur Trägerlänge gering sind.

c) Beziehungen zwischen der elastischen Linie und der Seilkurve lotrechter Kräfte.¹⁾

Differentialgleichung der Seilkurve.

Zu der stetigen Last k in kg/m ist in Fig. 40 die Seilkurve in folgender Weise gezeichnet; die Belastungsfläche wird in schmale Streifen von der Breite Δx pa-

¹⁾ Vgl. Mohr, Technische Mechanik. Berlin 1906. Mittler & Sohn.

rallel zur Richtung der Kräfte zerlegt, dann bestimmt das Flächenelement $k \cdot dx$ die Belastung der kleinen Strecke dx , die als Einzelkraft im Schwerpunkte des Flächenteilchens aufgefaßt werden kann. Zu diesen Einzelkräften zieht man mit Hilfe des Kräftecks (Fig. 40) ein Seileck, das in die Seilkurve übergeht, wenn dx verschwindend klein wird. In diesem Falle wird $k \cdot dx$ die Belastung der unendlich kleinen Strecke dx , die sich als Horizontalprojektion des zugehörigen Kurvenelementes darstellt. Für die in B angreifende Kraft $k \cdot dx$ sind $BA \parallel S_a$ und $BC \parallel S_c$ Seileckseiten, die in Fig. 41 stark vergrößert aufgetragen sind. Aus der Ähnlichkeit der gestrichelten Dreiecke ergibt sich:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{k \cdot dx}{H}.$$

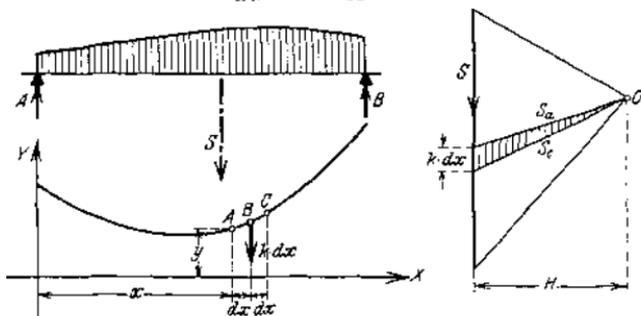


Fig. 40.

wobei H die Polweite und d^2y den Zuwachs von dy bedeuten. Daraus folgt die Differentialgleichung der Seilkurve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{k}{H}.$$

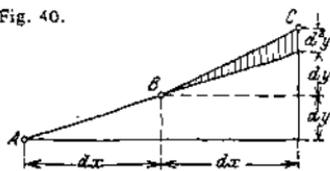


Fig. 41.

k heißt Belastungshöhe und ist veränderlich. Für den Sonderfall $k = \text{konst.}$ erhält man die Gleichung der Seilkurve durch Integration; es wird:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{dy}{dx}\right) &= \frac{k}{H} \cdot dx, & \frac{dy}{dx} &= \int \frac{k}{H} \cdot dx = \frac{k}{H} \cdot x + C_1, \\ dy &= \frac{k}{H} \cdot x \cdot dx + C_1 \cdot dx, & y &= \frac{k}{H} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2; \end{aligned}$$

wobei C_1 und C_2 die Integrationskonstanten sind, die sich aus den besonderen Bedingungen der jeweiligen Aufgabe ergeben. Die Gleichung $y = f(x)$ zeigt, daß die Seilkurve für $k = \text{konst.}$ eine Parabel ist, die symmetrisch zu einer der y -Achse parallelen Geraden liegt.

Aus der Übereinstimmung der beiden Differentialgleichungen geht hervor, daß die elastische Linie als eine Seilkurve angesehen werden kann, wenn man $k = \frac{M_x}{J_z}$ und $H = E$ setzt (Mohrscher Satz). Die Belastungsfläche, deren Ordinaten $k = \frac{M_x}{J_z}$ sind, heißt $\frac{M}{J}$ -Fläche; der Maßstab der Darstellung lautet $1 \text{ cm} = a \text{ cmkg/cm}^4 = a \text{ kgcm}^{-3}$.

In Fig. 42 sei der Träger AB mit einer $\frac{M}{J}$ -Fläche belastet; die infolge der Belastungsfläche, deren Gesamthalt $\int \frac{M_x}{J_z} \cdot dx$ ist, auftretenden Stützdrucke

seien A und B , dann ist das in der Entfernung x auftretende Biegemoment des Trägers AB

$$m = H \cdot y,$$

wenn man zu der Belastung $\int \frac{M_x}{J_x} \cdot dx$ die Seilkurve mit der Polweite H entwirft. Mit $H = E$ wird

$$m = E \cdot y \quad \text{oder} \quad y = \frac{m}{E} = \alpha \cdot m.$$

Demnach ist die Ordinate y der Seilkurve gleich dem mit α multiplizierten Biegemoment im Punkte x eines Trägers, der mit der $\frac{M}{J}$ -Fläche belastet ist. Die Seilkurve der Lasten $\frac{M_x}{J_x} \cdot dx$ ist aber die elastische Linie des Trägers, zu dem die Belastungsfläche AB als Momentenfläche gehört, wenn die Ordinaten der Momentenfläche durch die zugehörigen Trägheitsmomente dividiert werden. Man bezeichnet deshalb auch die elastische Linie als zweite Momentenlinie.

Wird so die elastische Linie auf eine Momentenlinie zurückgeführt, so läßt sich auch die Gleichung der Biegelinie in einfacher Weise aufstellen; für den Träger der Fig. 42 ist

$$m = A \cdot x - F_x \cdot x',$$

wobei F_x der Inhalt der links vom betrachteten Punkt liegenden Belastungsfläche, x' die Entfernung ihres Schwerpunktes bedeuten. Die mit α multiplizierten Werte m ergeben die Ordinaten der Biegelinie.

Da das maximale Moment da auftritt, wo die Querkraft gleich Null wird, so folgt die Lage der maximalen Durchbiegung aus der Bedingung:

$$Q_x = A - \int \frac{M_x}{J_x} \cdot dx = 0.$$

Hat der Träger konstanten Querschnitt, so nimmt man die Momentenfläche direkt als Belastungsfläche und zeichnet zu dieser Belastungsfläche die Seilkurve, deren Ordinaten dann gleich den $E \cdot J$ fachen Ordinaten der Biegelinie sind.

Aus der Gleichung $m = E \cdot y = A \cdot x - F_x \cdot x'$ erhält man durch Differentiation die E fache Neigung der elastischen Linie zu:

$$E \cdot \frac{dy}{dx} = A - \frac{d(F_x \cdot x')}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = \varphi,$$

was zulässig ist, solange es sich um kleine Durchbiegungen handelt. Das Glied $\frac{d(F_x \cdot x')}{dx}$ wird die Abszisse x stets enthalten, da sowohl die Fläche F_x als auch die Lage des Schwerpunktes von x abhängig sind; demnach erhält man als Neigung im Auflager für $x = 0$

$$E \cdot \varphi = A.$$

Es stellt sich also die E fache Neigung eines Trägers im Auflager dar als Auflagerreaktion eines — gedachten — Trägers, den man mit der $\frac{M}{J}$ -Fläche des — wirklichen — Trägers belastet.

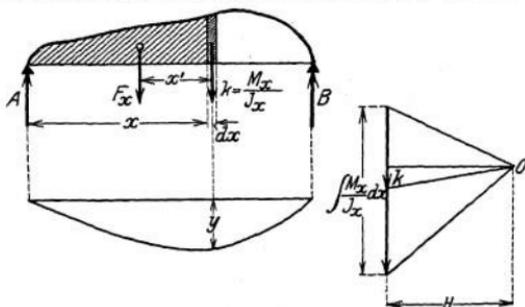


Fig. 42.

Beispiel 1: Ein Balken mit konstantem Querschnitt sei durch eine Kraft in der Mitte belastet (Fig. 43 a).

Die Auflagerreaktionen sind

$$A = B = \frac{P}{2}.$$

Die Momentenfläche ist ein Dreieck mit der Höhe

$$M = \frac{P \cdot l}{4}.$$

Die $E \cdot J$ -fache Durchbiegung ist das statische Moment für einen — gedachten — Träger $A'B'$, der mit der — wirklichen — Momentenfläche belastet ist (Fig. 43 b). Es wird

$$EJ \cdot y = m_x = A' \cdot x - F_x \cdot \frac{x}{3}.$$

Wegen der Symmetrie der Belastungsfläche ist

$$A' = B' = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{Pl}{4} = \frac{Pl^2}{16},$$

$$F_x = \frac{Pl^2}{16} \cdot \frac{x^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2},$$

$$EJ \cdot y = \frac{Pl^2}{16} \left(x - \frac{x^3}{12} \right),$$

$$= \frac{Pl^2}{16} \left(\frac{x}{l} - \frac{4}{3} \frac{x^3}{l^3} \right),$$

$$y = \frac{Pl^2}{16EJ} \left(x - \frac{4}{3} \frac{x^3}{l^3} \right),$$

die Gleichung der elastischen Linie; für

$$x = \frac{l}{2} \text{ wird } \max y = f = \frac{Pl^3}{48EJ} \text{ (Fig. 43 c).}$$

Zur graphischen Ermittlung der Biegelinie wird die Belastungsfläche des Trägers $A'B'$ in Teile zerlegt, deren Schwerpunktslinien bekannt sind (in Fig. 43 d in zwei Dreiecke), und die Flächeninhalte $F_1 = F_2 = \frac{Pl^2}{16}$ werden als

Kräfte aufgefaßt, die in den Schwerpunkten der Einzelflächen angreifen. Der Längensmaßstab sei $1 \text{ cm} = a \text{ cm}$; der Kräftemaßstab

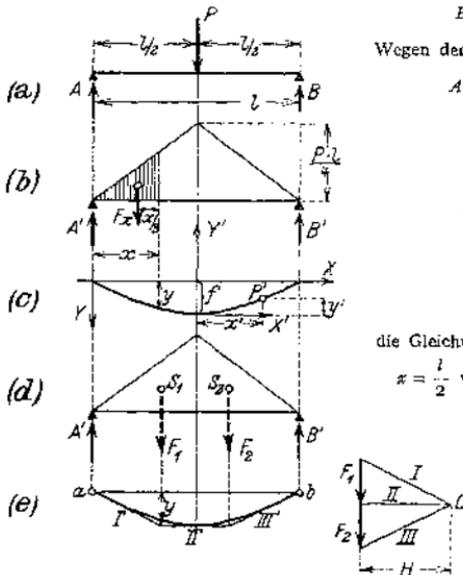


Fig. 43.

$1 \text{ cm} = b \text{ cm}^2 \text{ kg}$, da F die Benennung $\text{cm}^2 \text{ kg}$ hat. Zu dem Kräftezuge F_1, F_2 zieht man aus dem beliebigen gewählten Pol O die Polstrahlen I, II, III , und durch die Wirkungslinien von F_1 und F_2 die Seilstrahlen I', II', III' , die Tangenten an die elastische Linie sind; senkrecht unter A' und B' liegen die Punkte a und b der Schlußlinie. Da, wo die Teilflächen F_1 und F_2 zusammenstoßen, ergibt sich ein gemeinsamer Seilstrahl, der für die Kurvenäste gemeinsame Tangente ist; von der Biegelinie sind demnach die Punkte a und b , sowie der Schnittpunkt des Seilstrahles II' mit der Wirkungslinie von P und die drei durch diese Punkte gelegten Tangenten bekannt. In den meisten Fällen genügen diese Feststellungen, um die Kurve selbst freihändig einzutragen. Im vorliegenden Falle sind die beiden Zweige der Biegelinie wegen der dreieckförmigen Belastungsfläche kubische Parabeln (vgl. Abschnitt Mathematik, S. 129). Die Durchbiegung δ im Punkte x ist

$$\delta = \frac{1}{EJ} \cdot H \cdot y,$$

$$\delta \text{ cm} = \frac{1}{EJ} \left(H \text{ cm} \cdot b \frac{\text{cm}^2 \text{ kg}}{\text{cm}} \right) \left(y \text{ cm} \cdot a \frac{\text{cm}}{\text{cm}} \right).$$

Zur Entwicklung der Gleichung der elastischen Linie aus ihrer Differentialgleichung sei $x' y'$ als Achsenkreuz gewählt, dann ist

$$EJ \cdot \frac{d^2 y'}{dx'^2} = M_x = B \left(\frac{l}{2} - x' \right),$$

$$EJ \cdot d \left(\frac{dy'}{dx'} \right) = \left(B \cdot \frac{l}{2} - B \cdot x' \right) \cdot dx' = \left(P \cdot \frac{l}{4} - \frac{P}{2} \cdot x' \right) \cdot dx'.$$

oder durch Integration

$$EJ \cdot \frac{dy'}{dx'} = \int \left(P \cdot \frac{l}{4} - \frac{P}{2} \cdot x' \right) \cdot dx' = P \cdot \frac{l}{4} \cdot x' - \frac{P}{2} \cdot \frac{x'^2}{2} + C_1,$$

Die Bestimmung der Integrationskonstanten C_1 ergibt sich aus der Bedingung, daß die Neigung $\frac{dy'}{dx'}$ für $x' = 0$ ebenfalls gleich Null wird, d. h. $C_1 = 0$,

$$EJ \cdot dy' = \left(P \cdot \frac{l}{4} \cdot x' - \frac{P}{4} \cdot x'^2 \right) \cdot dx'$$

oder durch nochmalige Integration

$$EJ \cdot y' = P \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{x'^2}{2} - \frac{P x'^3}{12} + C_2.$$

C_2 wird für $x' = 0$ ebenfalls gleich 0, da der Träger in der Mitte festgehalten gedacht wird; demnach lautet die Gleichung der elastischen Linie für das Achsenkreuz $x' y'$

$$EJ \cdot y' = \frac{Pl}{8} \cdot x'^2 - \frac{P}{12} \cdot x'^3.$$

Die Verschiebung des Punktes B ergibt sich für $x' = \frac{l}{2}$

$$\max y' = \frac{1}{EJ} \left(\frac{Pl}{8} \cdot \frac{l^2}{4} - \frac{P}{12} \cdot \frac{l^3}{8} \right) = \frac{Pl^3}{48EJ}.$$

Wird diese Gleichung auf das Achsenkreuz xy bezogen, so folgt

$$y = \frac{Pl^3}{16EJ} \cdot \left(\frac{x}{l} - \frac{4}{3} \frac{x^3}{l^3} \right).$$

Die Neigung des Trägers in den Auflagerpunkten bestimmt sich zu

$$E \cdot \varphi = A' = \frac{Pl^2}{16EJ}.$$

Zu demselben Resultat gelangt man aus der Differentialgleichung der elastischen Linie, die nach der ersten Integration lautet

$$E \cdot J \cdot \frac{dy'}{dx'} = \frac{Pl}{4} \cdot x' - \frac{P}{4} \cdot x'^2;$$

für $x' = \frac{l}{2}$ wird

$$\frac{dy'}{dx'} = \varphi = \frac{Pl^2}{16EJ}.$$

Beispiel 2. Die Welle der Fig. 44 trägt in der Entfernung 0,5 m vom Lager A ein Schwungrad vom Gewicht $P = 5000$ kg; die maximale Durchbiegung infolge dieser Last ist zu bestimmen. Das maximale Biegemoment ist

$$\max M = \frac{5000 \cdot 70 \cdot 50}{120} = \infty 146\,000 \text{ cmkg.}$$

Die Momentenfläche ist ein Dreieck mit der Höhe $\max M$; die Tragfähigkeit der einzelnen Querschnitte ist mit einer zulässigen Biegebeanspruchung von $k_b = 400$ kg/cm²

$$\begin{aligned} M_{100} &= W \cdot k_b = 98,17 \cdot 400 = 39\,200 \text{ cmkg} \\ M_{120} &= W \cdot k_b = 169,6 \cdot 400 = 67\,800 \text{ „} \\ M_{140} &= W \cdot k_b = 269,4 \cdot 400 = 107\,600 \text{ „} \\ M_{160} &= W \cdot k_b = 402,1 \cdot 400 = 160\,000 \text{ „} \end{aligned}$$

Fig. 44 b gibt das Schaubild der Tragfähigkeit; die Momentenlinie muß innerhalb des gebrochenen Linienzuges verlaufen.

Die $M : J$ -Fläche des wirklichen ist Belastungsfläche des gedachten Trägers $A'B'$; ihre Ordinaten im Angriffspunkt der Last P sind

$$\begin{aligned} J_{100} &= 491 \text{ cm}^4; & M : J_1 &= 146\,000 : 491 = 298 \text{ kgcm}^{-3} \\ J_{120} &= 1018 \text{ „} & M : J_2 &= 146\,000 : 1018 = 143 \text{ „} \\ J_{140} &= 1886 \text{ „} & M : J_3 &= 146\,000 : 1886 = 77,5 \text{ „} \\ J_{160} &= 3217 \text{ „} & M : J_4 &= 146\,000 : 3217 = 46 \text{ „} \end{aligned}$$

Fig. 44 c zeigt die $M : J$ -Fläche des Trägers AB , die in Einzelflächen zerlegt wird, deren Schwerpunkte bekannt sind.

Die erste Teilfläche ist ein Dreieck mit der Grundlinie 10 cm und der Höhe $\frac{1}{5} \cdot 298 \text{ kgcm}^{-3}$; ihr Flächeninhalt ist

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{1}{5} \cdot 298 = 298 \text{ kgcm}^{-2},$$

in gleicher Weise ergeben sich:

$$F_1 = 875 \text{ kgcm}^{-2}; F_2 = 585 \text{ kgcm}^{-2}; F_3 = 780 \text{ kgcm}^{-2}; \\ F_4 = 870 \text{ kgcm}^{-2}; F_5 = 820 \text{ kgcm}^{-2}; F_6 = 210 \text{ kgcm}^{-2}.$$

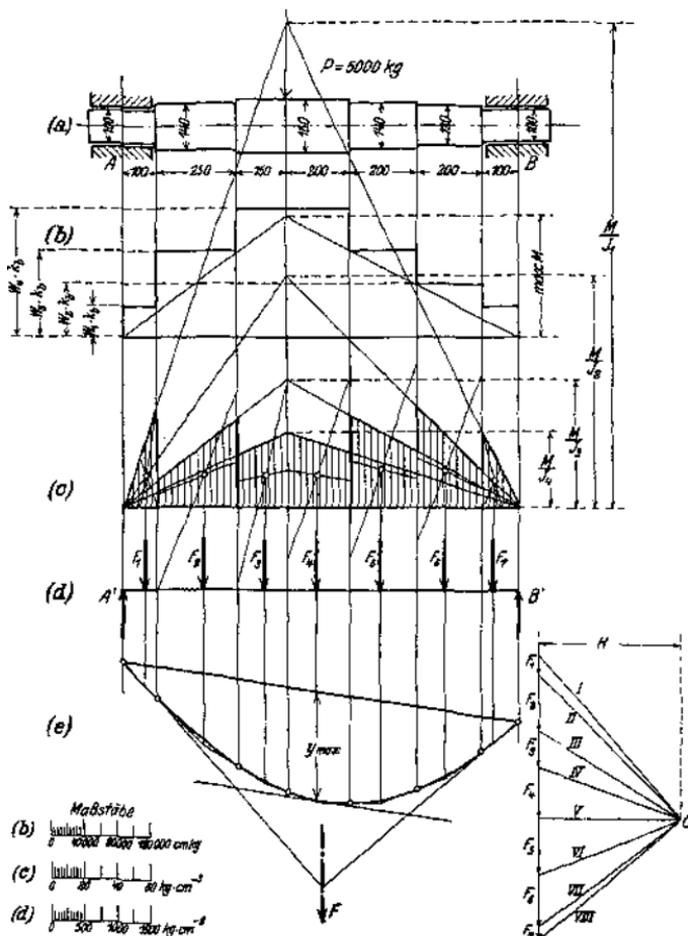


Fig. 44.

Die Schwerpunkte dieser Teilflächen sind in Fig. 44c zeichnerisch bestimmt. $F_1 \dots F_7$ werden als Kräfte aufgefaßt, die den gedachten Träger $A'B'$ (Fig. 44d) angreifen; die zugehörige Seillinie ist in Fig. 44e entworfen. Die Seilstrahlen schneiden die Vertikalen durch die Punkte der Querschnittsänderungen in Punkten der Biegungslinie; die zur Schlußlinie parallele Tangente bestimmt y_{\max} . Die äußersten Seilstrahlen schneiden sich in einem Punkte, der senkrecht unter dem Schwerpunkt der $M:J$ -Fläche liegt. Die größte Durchbiegung ist

$$f_{\max} = \frac{1}{E} \cdot H \cdot y_{\max} = \frac{1}{2200000} \left(4,4 \text{ cm} \cdot 500 \frac{\text{kgcm}^{-2}}{\text{cm}} \right) \left(3,4 \text{ cm} \cdot 10 \frac{\text{cm}}{\text{cm}} \right) \\ = \frac{2200 \text{ kgcm}^{-2} \cdot 3,4 \text{ cm}}{2200000 \text{ kgcm}^{-2}} = 0,034 \text{ cm},$$

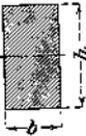
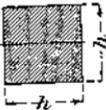
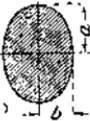
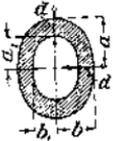
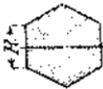
wobei 1 cm = 500 kgcm^{-2} der Kräftemaßstab und 1 cm = 10 cm der Längenmaßstab sind.

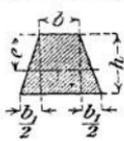
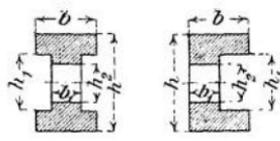
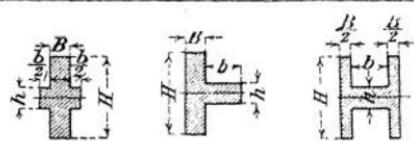
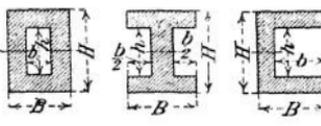
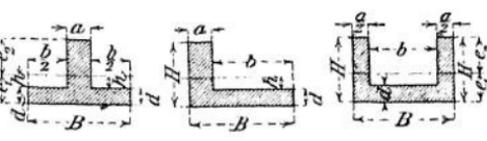
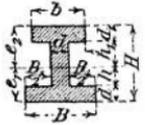
Bemerkung: In Fig. 44 sind die Maßstäbe der Verkleinerung wegen direkt eingetragen.

d) Trägheits- und Widerstandsmomente.

Trägheits- und Widerstandsmomente der deutschen Normalprofile für Walzeisen, siehe Abschnitt Stoffkunde Seite 537.

Tabelle.

Nr.	Querschnitt	Trägheitsmoment	Widerstandsmoment
1.		$J = \frac{b h^3}{12}$	$W = \frac{b h^2}{6}$
2.		$J = \frac{h^4}{12}$	$W = \frac{h^3}{6}$
3.		$J = \frac{\pi a^3 b}{4}$	$W = \frac{\pi a^2 b}{4}$
4.		$J = \frac{\pi}{4} (a^3 b - a_1^3 b_1)$ $\approx \frac{\pi}{4} a^2 (a + 3b) d$	$W \approx \frac{\pi}{4} a (a + 3b) d$
5.		$J = \frac{b h^3}{36}$	$W = \frac{b h^2}{24}$, für $e = \frac{2}{3} h$
6.		$J = \frac{5\sqrt{3}}{16} R^4$ $= 0,5413 R^4$	$W = \frac{5}{8} R^3$
7.			$W = 0,5413 R^3$
8.		$J = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{6} R^4$ $= 0,6381 R^4$	$W = 0,6906 R^3$

Nr.	Querschnitt	Trägheitsmoment	Widerstandsmoment
9.		$J = \frac{6b^2 + 6bb_1 + b_1^2}{36(2b + b_1)} h^3.$	$W = \frac{6b^2 + 6bb_1 + b_1^2}{12(3b + 2b_1)} h^3,$ für $e = \frac{1}{3} \frac{3b + 2b_1}{2b + b_1} h.$
10.		$J = \frac{b(h^3 - h_1^3) + b_1(h_1^3 - h_2^3)}{12}$	$W = \frac{b(h^3 - h_1^3) - b_1(h_1^3 - h_2^3)}{6h}$
11.			$J = \frac{BH^3 + bh^3}{12}$ $W = \frac{BH^3 + bh^3}{6H}$
12.		$J = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$	$W = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$
13.			$J = \frac{1}{3} B e_1^3 - b h^3 + a e_2^3$ $e_1 = \frac{1}{2} \frac{a H^2 + b d^2}{a H + b d};$ $e_2 = H - e_1.$
14.		$J = \frac{1}{3} (B e_1^3 - B_1 h^3 + b e_2^3 - b_1 h_1^3).$ $e_1 = \frac{1}{2} \frac{a H^2 + B_1 d^2 + b_1 d_1 (2H - d_1)}{a H + B_1 d + b_1 d_1}.$	
15.		$J = \frac{\pi d^4}{64}.$	$W = \frac{\pi d^3}{32} = \infty 0,1 d^3.$
16.		$J = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4).$	$W = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}.$

Kreisförmiger Querschnitt.

 $J =$ äquatoriales Trägheitsmoment; $W =$ Widerstandsmoment.

d	$J = \frac{\pi d^4}{64}$	$W = \frac{\pi d^3}{32}$	d	$J = \frac{\pi d^4}{64}$	$W = \frac{\pi d^3}{32}$	d	$J = \frac{\pi d^4}{64}$	$W = \frac{\pi d^3}{32}$
1	0,0491	0,0982	51	332086	13023	101	5108055	101450
2	0,7854	0,7854	52	358908	13804	102	5313378	104184
3	3,976	2,651	53	387323	14616	103	5524830	107278
4	12,57	6,283	54	417393	15459	104	5742532	110433
5	30,68	12,27	55	449180	16334	105	5966604	113650
6	63,62	21,21	56	482750	17241	106	6197171	116928
7	117,9	33,67	57	518166	18181	107	6434357	120268
8	201,1	50,27	58	555497	19155	108	6678287	123672
9	322,1	71,57	59	594810	20163	109	6929087	127139
10	490,9	98,17	60	636172	21206	110	7186886	130671
11	718,7	130,7	61	679651	22284	111	7451813	134267
12	1018	169,6	62	725332	23398	112	7723997	137929
13	1402	215,7	63	773272	24548	113	8003571	141656
14	1886	269,4	64	823550	25736	114	8290666	145450
15	2485	331,3	65	876240	26961	115	8585417	149312
16	3217	402,1	66	931420	28225	116	8887958	153241
17	4100	482,3	67	989166	29527	117	9198425	157238
18	5153	572,6	68	1049556	30869	118	9516956	161304
19	6397	673,4	69	1112660	32251	119	9843689	165440
20	7854	785,4	70	1178588	33674	120	10178763	169646
21	9547	909,2	71	1247393	35138	121	10522320	173923
22	11499	1045	72	1319167	36644	122	10874501	178271
23	13737	1194	73	1393995	38192	123	11235450	182690
24	16286	1357	74	1471963	39783	124	11605311	187182
25	19175	1534	75	1553156	41417	125	11984229	191748
26	22432	1726	76	1637662	43096	126	12372350	196387
27	26087	1932	77	1725571	44820	127	12769824	201100
28	30172	2155	78	1816972	46589	128	13176799	205887
29	34719	2394	79	1911967	48404	129	13593424	210751
30	39761	2651	80	2010619	50265	130	14019852	215690
31	45333	2925	81	2113051	52174	131	14456235	220706
32	51472	3217	82	2219347	54130	132	14902727	225799
33	58244	3528	83	2329605	56135	133	15359483	230970
34	65597	3859	84	2443920	58189	134	15826658	236219
35	73662	4209	85	2562392	60292	135	16204411	241547
36	82448	4580	86	2685120	62445	136	16792899	246954
37	91998	4973	87	2812205	64648	137	17292282	252442
38	102354	5387	88	2943748	66903	138	17802721	258010
39	113561	5824	89	3079853	69210	139	18324378	263660
40	125664	6283	90	3220623	71569	140	18857416	269392
41	138709	6766	91	3366165	73982	141	19401999	275206
42	152745	7274	92	3516586	76448	142	19958204	281103
43	167820	7806	93	3671992	78968	143	20526466	287083
44	183984	8363	94	3832492	81542	144	21106684	293148
45	201289	8946	95	3998198	84173	145	21699116	299298
46	219787	9556	96	4169220	86859	146	22303933	305533
47	239531	10193	97	4345671	89601	147	22921307	311855
48	260576	10857	98	4527664	92401	148	23551409	318262
49	282979	11550	99	4715315	95259	149	24194414	324757
50	306796	12272	100	4908738	98175	150	24850496	331340

e) Tabelle für Träger mit

In nachstehender Zusammenstellung bedeuten:

l die freie Länge in cm.

f die Durchbiegung in cm im Angriffspunkte der Last P .

P die äußeren Kräfte in kg. h die Trägerhöhe in cm.

Nr.	Belastungsfall	Auflagerdrücke A, B Biegemoment M	Tragkraft P Erforderl. Widerstands- moment M
1.		$B = P.$ $M = Px.$ $M_{\max} = Pl.$	$P = \frac{k_b W}{l}.$ $W = \frac{Pl}{k_b}.$
2.		$A = B = \frac{P}{2}.$ $M = \frac{Px}{2}.$ $M_{\max} = \frac{Pl}{4}.$	$P = \frac{k_b W}{l}.$ $W = \frac{Pl}{4 k_b}.$
3.		$A = \frac{P c_1}{l}; B = \frac{P c}{l}.$ Für AC: $M = \frac{P c_1 x}{l};$ für BC: $M = \frac{P c x_1}{l}.$ $M_{\max} = \frac{P c c_1}{l}.$	$P = k_b W \frac{l}{c c_1}.$ $W = \frac{P c c_1}{l k_b}.$
4.		$A = \frac{5}{16} P; B = \frac{11}{16} P.$ Für AC: $M = \frac{5}{16} Px;$ für C: $M = \frac{5}{32} Pl;$ für BC: $M = Pl \left(\frac{5}{32} - \frac{11 x_1}{16 l} \right).$ $M_{\max} = \frac{3Pl}{16}.$	$P = \frac{16 k_b W}{3 l}.$ $W = \frac{3 Pl}{16 k_b}.$
5.		$A = B = \frac{P}{2}.$ Für AC: $M = \frac{Pl}{2} \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{4} \right);$ für CB: $M = \frac{Pl}{2} \left(\frac{x}{l} - \frac{3}{4} \right).$ $M_{\max} = \frac{Pl}{8}.$	$P = 8 \frac{k_b W}{l}.$ $W = \frac{Pl}{8 k_b}.$

¹⁾ Mit f ist die Durchbiegung im Angriffspunkte der Einzellast P , mit f_{\max} (oder f_m) durch k_b ausgedrückten Werte von f gelten nur für homogene Balkenquerschnitte mit wagen-Für schwierigere Belastungsfälle empfiehlt sich „Das analytisch-graphische Verfahren Berlin 1902. A. Seydel.

gleichbleibendem Querschnitt

k_b die zulässige Biegungsspannung in kg/cm².

J das Trägheitsmoment des Querschnittes in cm⁴.

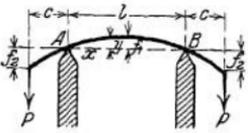
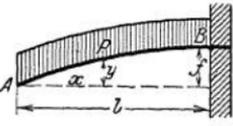
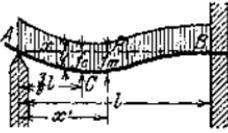
W das Widerstandsmoment des Querschnittes in cm³.

x und y die Koordinaten eines Punktes der Biegelinie.

Gleichung der elastischen Linie	Durchbiegung f ¹⁾	Bemerkungen
$y = \frac{P l^3}{2 E J} \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{l^3} \right).$ $\operatorname{tg} \beta = \frac{dy}{dx} = \frac{P l^3}{2 E J} \left(\frac{1}{l} - \frac{x^2}{l^3} \right).$ $\operatorname{tg} \beta (x=0) = \frac{P l^3}{2 E J} = \frac{3f}{2l}.$	$f = \frac{P l^3}{E J} \frac{1}{3}.$ $= \frac{2}{3} \frac{k_b l^2}{E h}.$	Freitträger. Gefährlicher Querschnitt bei B.
$y = \frac{P l^3}{16 E J} \left(\frac{x}{l} - \frac{4}{3} \frac{x^3}{l^3} \right).$	$f = \frac{P l^3}{E J} \frac{1}{48}$ $= \frac{1}{6} \frac{k_b l^2}{E h}.$	Frei aufliegender Träger. Gefährlicher Querschnitt in der Mitte.
$y = \frac{P}{E J} \frac{c^2 c_1^2}{6 l} \left(2 \frac{x}{c} + \frac{x}{c_1} - \frac{x^3}{c^2 c_1} \right),$ $y_1 = \frac{P}{E J} \frac{c_1^2 c^2}{6 l} \left(2 \frac{x_1}{c_1} + \frac{x_1}{c} - \frac{x_1^3}{c_1^2 c} \right).$	$f = \frac{P l^3 c^2 c_1^2}{E J 3 l^2 l^2};$ $f_{\max} \text{ für}$ $x = c \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2c_1}{3c}},$ <p>wenn $c > c_1$;</p> $x_1 = c_1 \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2c}{3c_1}},$ <p>wenn $c < c_1$.</p>	Frei aufliegender Träger. Gefährlicher Querschnitt bei C.
$y = \frac{P l^3}{E J} \frac{1}{32} \left(\frac{x}{l} - \frac{5}{3} \frac{x^3}{l^3} \right),$ $y_1 = \frac{P l^3}{E J} \frac{1}{32} \left(\frac{1}{4} \frac{x_1}{l} + \frac{5}{2} \frac{x_1^2}{l^2} - \frac{11}{3} \frac{x_1^3}{l^3} \right).$	$f = \frac{P l^3}{E J} \frac{7}{768};$ <p>für $x = l \sqrt{\frac{1}{6}}$ ist</p> $f_{\max} = \sqrt{\frac{1}{6}} \frac{P l^3}{48 E J}.$	Halb eingespannter Träger. Gefährlicher Querschnitt bei B. Wendepunkt bei $x_1 = \frac{5}{22} l$.
$y = \frac{P l^3}{E J} \frac{1}{16} \left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{4}{3} \frac{x^3}{l^3} \right).$	$f = \frac{P l^3}{E J} \frac{1}{192}$ $= \frac{1}{12} \frac{k_b l^2}{E h}.$	Eingespannter Träger. Gefährliche Querschnitte bei A, B und C. Wendepunkte bei $x = \frac{1}{4} l$ und $x = \frac{3}{4} l$.

die größte Durchbiegung bezeichnet worden, falls f nicht damit übereinstimmt. — Die rechter Symmetrieachse.

zur Bestimmung der Durchbiegung zwei- und dreifach gestützter Träger“ von M. Kloß.

Nr.	Belastungsfall	Auflagerdrücke A, B Biegemoment M	Tragkraft P Erforderl. Widerstandsmoment W
6.	 <p>Dieselben Formeln gelten, wenn A, B die Lastpunkte und die Enden des Trägers gestützt sind.</p>	$A = B = P.$ Für A, B : $M = Pc = \text{konst.}$	$P = \frac{k_b W}{c}.$ $W = \frac{Pc}{k_b}.$
7.		$B = P.$ $M = \frac{Px^2}{2l}.$ $M_{\max} = \frac{Pl}{2}.$	$P = 2 \frac{k_b W}{l}.$ $W = \frac{Pl}{2k_b}.$
8.		$A = B = \frac{P}{2}.$ $M = \frac{Px}{2} \left(1 - \frac{x}{l}\right).$ $M_{\max} = \frac{Pl}{8}.$	$P = 8 \frac{k_b W}{l}.$ $W = \frac{Pl}{8k_b}.$
9.		$A = \frac{3}{8}P; \quad B = \frac{5}{8}P.$ $M = \frac{Px}{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{l}\right).$ $M_{\max} = \frac{Pl}{8}$ (absolutes Maximum). $M_C = \frac{9}{128}Pl$ (relatives Maximum). bei $x = \frac{3}{8}l.$	$P = 8 \frac{k_b W}{l}.$ (Tragkraft nicht größer als im Falle 8.) $W = \frac{Pl}{8k_b}.$

1) Fehlt das Kragstück bei A , so findet sich f_{\max} im Abstände $0,578 l$ von A , u. zw.

f) Anwendung des Mohrschen Satzes auf die Berechnung mehrfach gelagerter Wellen.

1. Die Welle sei dreifach gelagert. Sie ist einfach statisch unbestimmt. Nach Entfernen der Mittelstütze C wird der statisch bestimmte Träger $A_1 B_1$ erhalten, der statisch bestimmtes Hauptsystem heißt. Für diesen Träger wird mit Hilfe des Mohrschen Satzes die Senkung δ_P des Punktes C infolge der Belastung P ermittelt, indem man die $\frac{M}{J}$ -Fläche des Trägers $A_1 B_1$ als Belastungsfläche annimmt (Fig. 45c) und für diese Belastung die Biegelinie entwirft (Fig. 45d).

Sodann wird auf den statisch bestimmten Träger $A_2 B_2$ die — noch unbekannte — Kraft C gebracht und in gleicher Weise die Senkung δ_C des Punktes C infolge der Last C ermittelt (Fig. 45e—f). Soll der Träger auf starren Stützen gelagert

Gleichung der elastischen Linie	Durchbiegung f	Bemerkungen
$y = f_1 - \left[\varrho - \sqrt{\varrho^2 - \left(\frac{1}{3}l - x\right)^2} \right],$ worin $\varrho = \frac{EJ}{Pc} = \text{unveränderlich.}$ Die elastische Linie zwischen A und B ist ein Kreisbogen mit dem Halbmesser ϱ .	$f_1 \text{ in der Mitte der Stützweite:}$ $f_1 = \frac{P l^3 c}{EJ 8 l}$ $= \frac{1}{4} \frac{h_b l^2}{E h} = \frac{l^2}{8 \varrho}$ $f_2 = \frac{P c^2}{EJ 3} \left(c + \frac{3l}{2} \right)$	Frei aufliegender ¹⁾ Träger mit Kragstücken. Gefährlicher Querschnitt an einer beliebigen Stelle zwischen A und B .
$y = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{6} \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{4} \frac{x^4}{l^4} \right)$	$f = \frac{P l^3}{EJ 8}$ $= \frac{1}{2} \frac{h_b l^2}{E h}$	Freitragler. Gefährlicher Querschnitt bei B .
$y = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{24} \left(\frac{x}{l} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right);$ $\text{tg } \tau_{(x=0)} = \frac{P l^2}{EJ 24} = 3,2 \frac{f}{l}$	$f = \frac{P}{EJ} \frac{5 l^3}{384}$ $= \frac{5}{24} \frac{h_b l^2}{E h}$	Frei aufliegender Träger. Gefährlicher Querschnitt in der Mitte.
$y = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{48} \left(\frac{x}{l} - 3 \frac{x^3}{l^3} + 2 \frac{x^4}{l^4} \right)$	$f_{\max} = \frac{P l^3}{EJ 185}$ worin $\frac{1}{185} = \frac{78 + 110\sqrt{33}}{2 \cdot 16^4}$ $f_C = \frac{175}{8^3} \frac{P}{EJ} l^3$ $= \frac{P l^3}{EJ 187}$	Halb eingespannter Träger. Gefährlicher Querschnitt bei B . Durchbiegung f_{\max} bei $x' = \frac{1}{8} l (1 + \sqrt{33}) = 0,4215 l$. Wendepunkt bei $x = \frac{3}{4} l$. M_C bei $x = \frac{3}{8} l$.

ist $f_{\max} = 0,064 \frac{P}{EJ} l^2 c$, die Durchbiegung im Lastpunkte $f_2 = \frac{P c^2}{EJ 3} (c + l)$.

sein, so muß die resultierende Senkung des Punktes C gleich Null sein; daraus ergibt sich die Elastizitätsgleichung

$$\delta_P - \delta_C = 0.$$

Solange es sich um Träger mit gleichbleibendem Querschnitt handelt, empfiehlt sich die analytische Ermittlung der Formänderungen. Mit den Bezeichnungen der Fig. 45a wird nach Fall 3, S. 436

$$\delta_C = \frac{C}{3 \cdot EJ} \cdot \frac{l_1^2 \cdot l_2^2}{l}$$

Zur Bestimmung von δ_P benutzt man das Prinzip von der Summierung der Wirkungen und bringt die Kräfte P_1 und P_2 nacheinander auf den Träger, so daß nach Fig. 46

$$\delta_P = \delta_1 + \delta_2$$

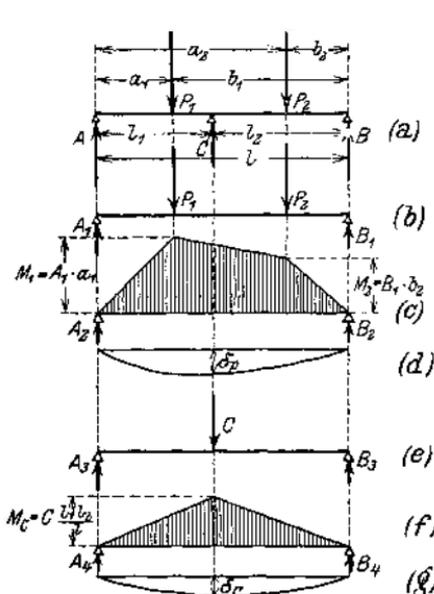


Fig. 45.

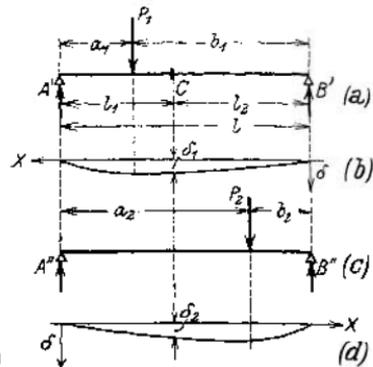


Fig. 46.

wird, wobei δ_1 und δ_2 Ordinaten der Biegungslinie für die Träger $A'B'$ bzw. $A''B''$ sind. Die Gleichung der elastischen Linie für Fig. 46a lautet nach Fall 3, S. 436

$$\delta = \frac{P_1}{EJ} \cdot \frac{a_1^2 b_1^3}{6l} \left(2 \frac{x}{b_1} + \frac{x}{a_1} - \frac{x^3}{b_1^3 a_1} \right)$$

für das in Fig. 46b gezeichnete Achsenkreuz; für $x = l_2$ wird

$$\delta_1 = \frac{P_1}{EJ} \cdot \frac{a_1^2 b_1^3}{6 \cdot l} \left(2 \cdot \frac{l_2}{b_1} + \frac{l_2}{a_1} - \frac{l_2^3}{a_1 \cdot b_1^3} \right).$$

Entsprechend ergibt sich für das Achsenkreuz der Fig. 46d

$$\delta_2 = \frac{P_2}{EJ} \cdot \frac{a_2^2 b_2^3}{6l} \left(2 \frac{l_1}{a_2} + \frac{l_1}{b_2} - \frac{l_1^3}{a_2^2 b_2} \right).$$

dann liefert $\delta_C = \delta_P$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} C \cdot \frac{l_1^2 \cdot l_2^2}{l} &= \frac{1}{6} P_1 \cdot \frac{a_1^2 b_1^3}{l} \left(2 \cdot \frac{l_2}{b_1} + \frac{l_2}{a_1} - \frac{l_2^3}{a_1 b_1^3} \right) \\ &+ \frac{1}{6} P_2 \cdot \frac{a_2^2 b_2^3}{l} \left(2 \frac{l_1}{a_2} + \frac{l_1}{b_2} - \frac{l_1^3}{a_2^2 b_2} \right) \end{aligned}$$

und daraus

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2} \cdot \left[P_1 \cdot \frac{a_1^2 b_1^3}{l_1^2 l_2^2} \left(2 \frac{l_2}{b_1} + \frac{l_2}{a_1} - \frac{l_2^3}{a_1 b_1^3} \right) \right. \\ &\left. + P_2 \cdot \frac{a_2^2 b_2^3}{l_1^2 l_2^2} \left(2 \frac{l_1}{a_2} + \frac{l_1}{b_2} - \frac{l_1^3}{a_2^2 b_2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Da die Ausdrücke in den runden Klammern unbenannte Zahlen sind, sollen sie gleich α_1 bzw. α_2 gesetzt werden, so daß

$$C = \frac{1}{2} \left(\alpha_1 \cdot P_1 \cdot \frac{a_1^2 b_1^3}{l_1^2 l_2^2} + \alpha_2 \cdot P_2 \cdot \frac{a_2^2 b_2^3}{l_1^2 l_2^2} \right).$$

Für den Sonderfall symmetrischer Belastung, d. h. $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$; $a_1 = b_1 = \frac{l}{4}$ und $P_1 = P_2 = P$ wird

$$\alpha_1 = 2 \cdot \frac{\frac{l}{2}}{\frac{3}{4}l} + \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l}{4}} - \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{\frac{l}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}l\right)^2} = \frac{22}{9} = \alpha_2,$$

so daß sich

$$C = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{22}{9} \cdot P \cdot \frac{\left(\frac{l}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}l\right)^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{11}{9} P$$

ergibt.

2. Handelt es sich um eine Welle mit veränderlichem Querschnitt, so empfiehlt sich folgende Behandlung der Aufgabe. Wie vorher wird das statisch bestimmte Hauptsystem $A_1 B_1$ (Fig. 47 a) mit den Kräften P_1 und P_2 belastet und die Biegelinie nach Beispiel 2, S. 431 mit Hilfe des Mohrschen Satzes (Fig. 44) konstruiert. Dann bringt man $C = 1 t$ auf den Träger (Fig. 47 d) und entwirft für diesen Belastungszustand ebenfalls die Biegelinie in gleicher Weise. Da eine Kraft von $C t$ eine C mal so große Durchbiegung hervorruft wie eine Kraft von $1 t$, so lautet die Elastizitätsgleichung

$$\delta_P - C \cdot \delta_C (C=1) = 0,$$

so daß

$$C = \frac{\delta_P}{\delta_C (C=1)}.$$

Da es sich hierbei um das Verhältnis zweier Durchbiegungen handelt, ist die Wahl der Polweite bei der graphischen Darstellung beliebig, nur muß sie für beide Biegelinien gleich groß sein.

Mit der Bestimmung der Größe C ist der Träger statisch bestimmt geworden, die weitere Berechnung folgt aus S. 421.

3. Die Welle sei n -fach gelagert und habe gleichbleibenden Querschnitt¹⁾. Da sie $(n-2)$ fach statisch unbestimmt ist, müssen neben den drei Gleichgewichtsbedingungen $(n-2)$ Elastizitätsgleichungen aufgestellt werden.

In Fig. 48 seien zwei aufeinanderfolgende Öffnungen eines durchlaufenden Trägers dargestellt. Die durch Strichelung hervorgehobene Summe zweier Flächen, sie besteht aus den positiven Momentenflächen $ADEBA$ und $BFGCB$, die die Kräfte P hervorrufen würden, wenn AB und BC Träger auf zwei Stützen wären, und den negativen Flächen $AA'B'BA$ und $BB'C'CB$, die man erhält, wenn die Endpunkte der Stützmomente $M_a = AA'$, $M_b = BB'$ und $M_c = CC'$ durch Geraden verbunden werden.

Die elastische Linie (Fig. 48 b) hat in B eine Wendetangente, so daß

$$\varphi_1 = -\varphi_2$$

ist. Zur Bestimmung von φ_1 denkt man sich den Teil AB des durchlaufenden Trägers als Träger auf zwei Stützen und belastet ihn mit der gestrichelten Fläche, d. h. der Momentenfläche des wirklichen Trägers; dann ergibt sich φ_1 als Auflagerreaktion B_1 aus der Momentengleichung für A als Drehpunkt. Ist x_1 die Entfernung des Schwerpunktes S_1 der positiven Momentenfläche F_1 , so wird

$$B_1 \cdot l_1 = \frac{1}{2} l_1 \cdot M_a \cdot \frac{1}{3} l_1 + \frac{1}{2} l_1 \cdot M_b \cdot \frac{2}{3} l_1 + F_1 \cdot x_1 = \varphi_1 \cdot l_1,$$

$$6 \varphi_1 = M_a \cdot l_1 + 2 M_b \cdot l_1 + 6 \cdot \frac{F_1 x_1}{l_1}.$$

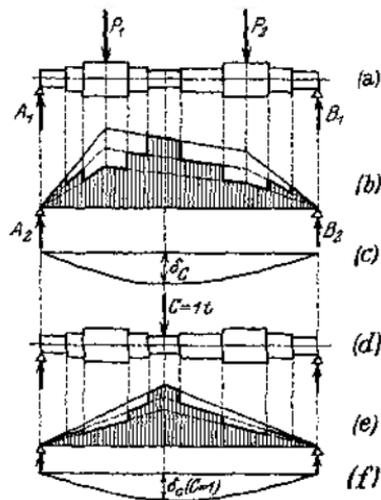


Fig. 47.

Öffnungen eines durchlaufenden Trägers dargestellt. Die durch Strichelung hervorgehobene Summe zweier Flächen, sie besteht aus den positiven Momentenflächen $ADEBA$ und $BFGCB$, die die Kräfte P hervorrufen würden, wenn AB und BC Träger auf zwei Stützen wären, und den negativen Flächen $AA'B'BA$ und $BB'C'CB$, die man erhält, wenn die Endpunkte der Stützmomente $M_a = AA'$, $M_b = BB'$ und $M_c = CC'$ durch Geraden verbunden werden.

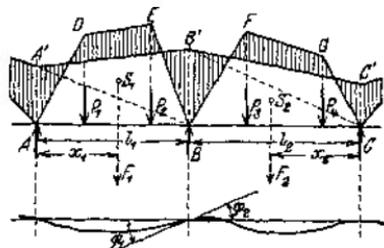


Fig. 48.

¹⁾ Vgl. Winkel, Dinglers polyt. Jour. 4913, Nr. 23.

In derselben Weise ergibt sich für C als Drehpunkt

$$B_2 \cdot l_2 = \frac{1}{2} l_2 \cdot M_b \cdot \frac{2}{3} l_2 + \frac{1}{2} l_2 \cdot M_c \cdot \frac{1}{3} l_2 + F_2 \cdot x_2 = \varphi_2 \cdot l_2,$$

$$6 \varphi_2 = 2 M_b \cdot l_2 + M_c \cdot l_2 + 6 \frac{F_2 \cdot x_2}{l_2}.$$

Aus folgt

$$\varphi_1 = -\varphi_2$$

$$M_a \cdot l_1 + 2 M_b \cdot l_1 + 6 \frac{F_1 \cdot x_1}{l_1} = -2 M_b \cdot l_2 - M_c \cdot l_2 - 6 \frac{F_2 \cdot x_2}{l_2},$$

$$M_a \cdot l_1 + 2 M_b (l_1 + l_2) + M_c \cdot l_2 = -6 \left(\frac{F_1 \cdot x_1}{l_1} + \frac{F_2 \cdot x_2}{l_2} \right).$$

In dieser Gleichung bedeuten:

$F_1 \cdot x_1$ das statische Moment der einfachen Momentenfläche — der sog. M_0 -Momentenfläche — für die Öffnung AB in Beziehung auf die linke Stützensenkrechte A und

$F_2 \cdot x_2$ das statische Moment der einfachen Momentenfläche für die anschließende Öffnung BC in Beziehung auf die rechte Stützensenkrechte C .

Bezeichnet man diese Werte mit \mathfrak{R} bzw. \mathfrak{R}' , und sind $(r-1)$, r , $(r+1)$ die drei aufeinanderfolgenden Stützen statt A , B , C und l_r bzw. l_{r+1} die Lagerentfernungen, so geht die letzte Gleichung über in

$$M_{r-1} \cdot l_r + 2 M_r (l_r + l_{r+1}) + M_{r+1} \cdot l_{r+1} = -6 \left(\frac{\mathfrak{R}_r}{l_r} + \frac{\mathfrak{R}'_{r+1}}{l_{r+1}} \right).$$

Diese Gleichung trägt den Namen „Mohrsche Gleichung (früher Clapeyronsche Gleichung genannt)“; die rechte Seite heißt „das Belastungsglied“, im allgemeinen mit N_r bezeichnet. Ist nur eine Öffnung eines durchlaufenden Trägers belastet und sind die durch diese Belastung hervorgerufenen Momente über den benachbarten Stützen bekannt, so ist der Verlauf der Stützmomentenlinie für den ganzen Träger gegeben; sie besteht aus Geraden, die durch feste Punkte gehen. Da die Momente in den Endauflagern gleich Null sind, so fallen die äußersten Festpunkte mit den Endauflagern zusammen.

Graphisch bestimmt man die Lage der Festpunkte zweckmäßig nach Müller-Breslau, Graphische Statik, Bd. II¹⁾, wie folgt: Teile die Stützweiten in drei gleiche Teile und ziehe die Drittelsenkrechten d und d' (Fig. 49) sowie die verschränkte Stützensenkrechte v , so daß

$$ce = \frac{1}{3} l_r$$

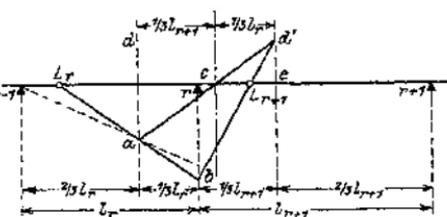


Fig. 49.

wird. Ein beliebiger Strahl aus dem bekannten Festpunkt L_r der vorhergehenden Öffnung schneide die Drittelsenkrechte d in a , die Stützensenkrechte in b ; ziehe $ac d'$ bis zur ersten Drittelsenkrechten der nächsten Öffnung, dann schneidet die Verbindungslinie $d' b$ die Stabachse in dem Festpunkt L_{r+1} . Von L_{r+1} aus erhält man in derselben Weise die folgenden Festpunkte L . Da das linke Außenlager ein Festpunkt ist, so beginnt man dort die Konstruktion. Die Festpunkte R findet man von rechts nach links auf dem gleichen Wege, indem man vom rechten Außenlager ausgeht.

Mit N_r = Belastungsglied läßt sich die Mohrsche Gleichung auch schreiben

$$\frac{1}{3} M_{r-1} \cdot l_r + \frac{2}{3} \cdot M_r (l_r + l_{r+1}) + \frac{1}{3} M_{r+1} \cdot l_{r+1} = \frac{1}{3} N_r,$$

$$l_r \left(\frac{1}{3} M_{r-1} + \frac{2}{3} M_r \right) + l_{r+1} \left(\frac{2}{3} M_r + \frac{1}{3} M_{r+1} \right) = \frac{1}{3} N_r.$$

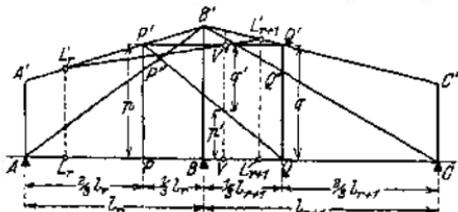


Fig. 50.

In Fig. 50 ist

$$P' P'' = \frac{1}{3} M_{r-1}, \quad P'' P = \frac{2}{3} M_r,$$

also

$$P' P = \frac{1}{3} M_{r-1} + \frac{2}{3} M_r = p;$$

entsprechend ist

$$Q' Q = \frac{1}{3} M_{r+1} + \frac{2}{3} M_r = q,$$

¹⁾ Müller-Breslau, Graphische Statik der Baukonstruktionen, Bd. I u. II. Stuttgart, Alfred Kröner.

folglich

$$l_r \cdot p + l_{r+1} \cdot q = \frac{1}{3} N_r,$$

$$p \cdot \frac{l_r}{l_r + l_{r+1}} + q \cdot \frac{l_{r+1}}{l_r + l_{r+1}} = \frac{N_r}{3(l_r + l_{r+1})}.$$

Verbindet man $P'Q'$ durch eine Gerade, so schneidet diese auf der verschränkten Stützsenkrechten die Größe $VV' = T_r$ ab, die durch die Verbindungslinie $P'Q$ in zwei Teile p' und q' so zerlegt wird, daß sich verhält:

$$p' : p = \frac{1}{3} l_r : \left(\frac{1}{3} l_r + \frac{1}{3} l_{r+1} \right)$$

und

$$q' : q = \frac{1}{3} l_{r+1} : \left(\frac{1}{3} l_r + \frac{1}{3} l_{r+1} \right)$$

und daraus

$$p' = p \cdot \frac{l_r}{l_r + l_{r+1}}, \quad q' = q \cdot \frac{l_{r+1}}{l_r + l_{r+1}},$$

$$p' + q' = \frac{N_r}{3(l_r + l_{r+1})} = T_r.$$

Angenommen, L_r' sei ein bekannter Punkt der Stützmomentenlinie AB' der r -ten Öffnung, so wäre die Aufgabe zu lösen, einen Punkt L_{r+1}' der Stützmomentenlinie $B'C'$ der $(r+1)$ -ten Öffnung zu suchen. Müller-Breslau löst diese Aufgabe in seiner Graphischen Statik, Bd. II, auf folgende Weise: Verbinde L_r' mit dem Endpunkt V' der Größe T_r , dann erhält man senkrecht über dem Festpunkt L_{r+1} der folgenden Öffnung auf dieser Geraden $L_r'V'$ den gesuchten Punkt L_{r+1}' der Geraden $B'C'$. Sind demnach die Festpunkte und die Momente T bekannt, so ist damit der Verlauf der Stützmomentenlinie über den ganzen Träger wie folgt bestimmt:

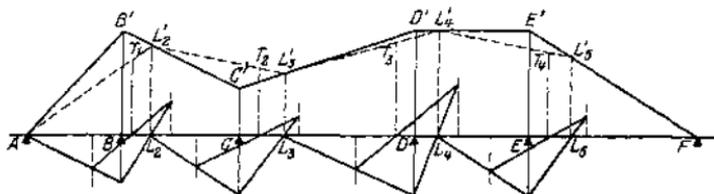


Fig. 51.

Trage auf den verschränkten Stützsenkrechten die Momente T ab (Fig. 51), dann schneidet die Verbindungslinie $A T_1$ die Senkrechte durch den Festpunkt L_3 in L_2' . Verbinde L_2' mit T_2 , dann schneidet $L_2' T_2$ die Senkrechte durch L_4 in L_3' , ziehe also den Linienzug $A T_1 L_2' T_2 L_3' T_3 L_4' T_4 L_5' F$. Ist L_3' ein Punkt der Stützmomentenlinie im rechten Außenfelde, dann ist $F L_5' E'$ die Stützmomentenlinie für dieses Feld, da F ein zweiter Punkt dieser Linie ist. Jetzt sind E' und L_4' zwei Punkte in der vorletzten Öffnung, so daß $E' L_4' D'$ die Stützmomentenlinie dieser Öffnung ergibt. . . ziehe also den Linienzug $F L_5' E' L_4' D' L_3' C' L_2' B' A$. Zur Kontrolle empfiehlt sich dieses Verfahren mit Hilfe der Festpunkte R vom rechten Auflager aus. Die Momente T lassen sich aus der Gleichung

$$T_r = \frac{N_r}{3(l_r + l_{r+1})} = \frac{6 \left(\frac{Q_r}{l_r} + \frac{R_{r+1}}{l_{r+1}} \right)}{3(l_r + l_{r+1})}.$$

in folgender Weise ermitteln: Es seien die r -te und $(r+1)$ -te Öffnung (Fig. 52) eines durchlaufenden Trägers mit je zwei Einzelkräften belastet. Die Kraft P_1 ergibt als einfache Momentenfläche ein Dreieck mit der Höhe

$$h_1 = P_1 \cdot \frac{a_1 \cdot b_1}{l_r},$$

entsprechend werden

$$h_2 = Q_1 \cdot \frac{a_2 b_2}{l_{r+1}}; \quad h_1' = P_2 \cdot \frac{a_1' b_1'}{l_r}; \quad h_2' = Q_2 \cdot \frac{a_2' b_2'}{l_{r+1}}.$$

Sind x_1 und y_1 die Schwerpunktsabstände der beiden Momentendreiecke der r -ten Öffnung von der linken Stütze $(r-1)$ und x_2' und y_2' die entsprechenden Abstände der beiden Momentendreiecke der $(r+1)$ -ten Öffnung von der rechten Stütze $(r+1)$, dann wird

$$-T_r = 2 \cdot \frac{Q_r}{l_r(l_r + l_{r+1})} + 2 \cdot \frac{R_{r+1}}{l_{r+1}(l_r + l_{r+1})}$$

und mit

$$\mathfrak{L}_r = \frac{1}{2} \cdot l_r \cdot h_1 \cdot x_1 + \frac{1}{2} l_r \cdot h_1' \cdot y_1,$$

$$\mathfrak{R}_{r+1} = \frac{1}{2} l_{r+1} \cdot h_2 \cdot x_2' + \frac{1}{2} \cdot l_{r+1} \cdot h_2' \cdot y_2',$$

$$-T_r = \left\{ \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot l_r \cdot h_1 \cdot x_1}{l_r \cdot (l_r + l_{r+1})} + \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot l_r \cdot h_1' \cdot y_1}{l_r \cdot (l_r + l_{r+1})} \right\} + \left\{ \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot l_{r+1} \cdot h_2 \cdot x_2'}{l_{r+1} \cdot (l_r + l_{r+1})} + \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot l_{r+1} \cdot h_2' \cdot y_2'}{l_{r+1} \cdot (l_r + l_{r+1})} \right\},$$

$$= \underbrace{\left\{ \frac{h_1 \cdot x_1}{l_r + l_{r+1}} + \frac{h_1' \cdot y_1}{l_r + l_{r+1}} \right\}}_{p_r} + \underbrace{\left\{ \frac{h_2 \cdot x_2'}{l_r + l_{r+1}} + \frac{h_2' \cdot y_2'}{l_r + l_{r+1}} \right\}}_{q_r}$$

$$-T_r = p_r + q_r$$

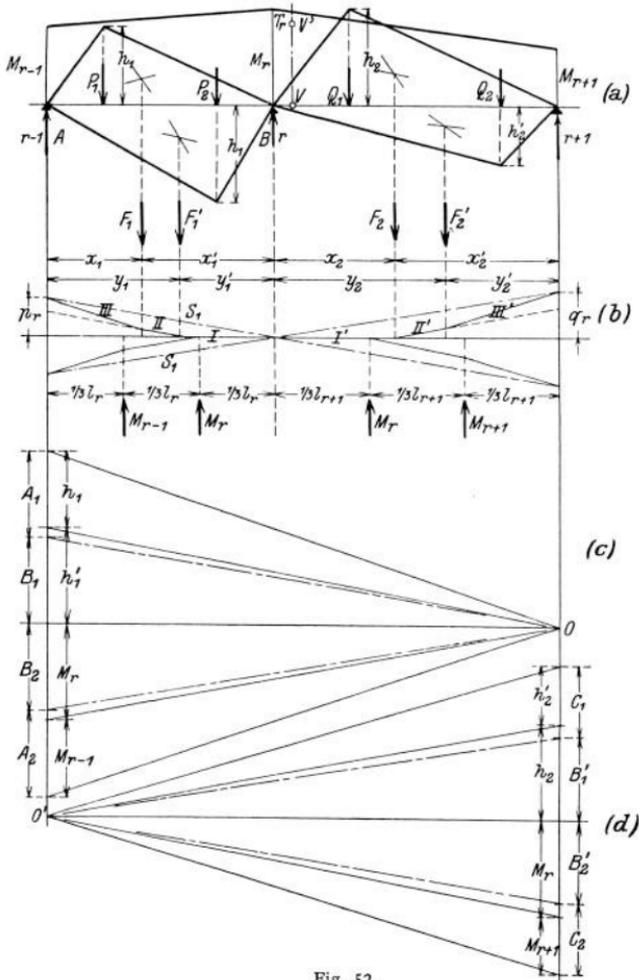


Fig. 52.

Die Größen p_r und q_r lassen sich als Seileckordinaten darstellen, wenn man die Höhen h der einfachen Momentendreiecke als Kräfte auffaßt, die in den Schwerpunkten der Einzeldreiecke angreifen, und als Polweite $(l_r + l_{r+1})$ wählt.

Ist O der Pol für den Kräftezug h_1, h_1' , so schneidet der Seilzug I, II, III senkrecht unter der Stütze $(r+1)$ die Größe ab:

$$p_r = \frac{h_1' \cdot y_1}{l_r + l_{r+1}} + \frac{h_1 \cdot x_1}{l_r + l_{r+1}}$$

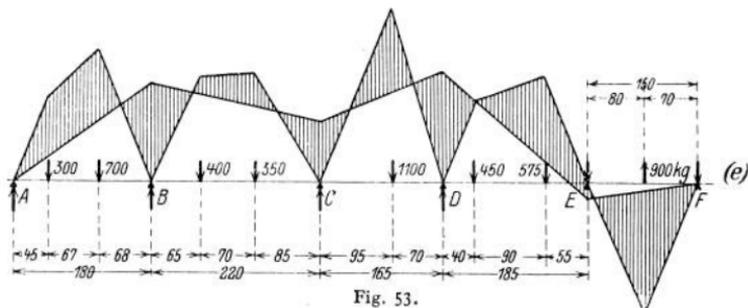
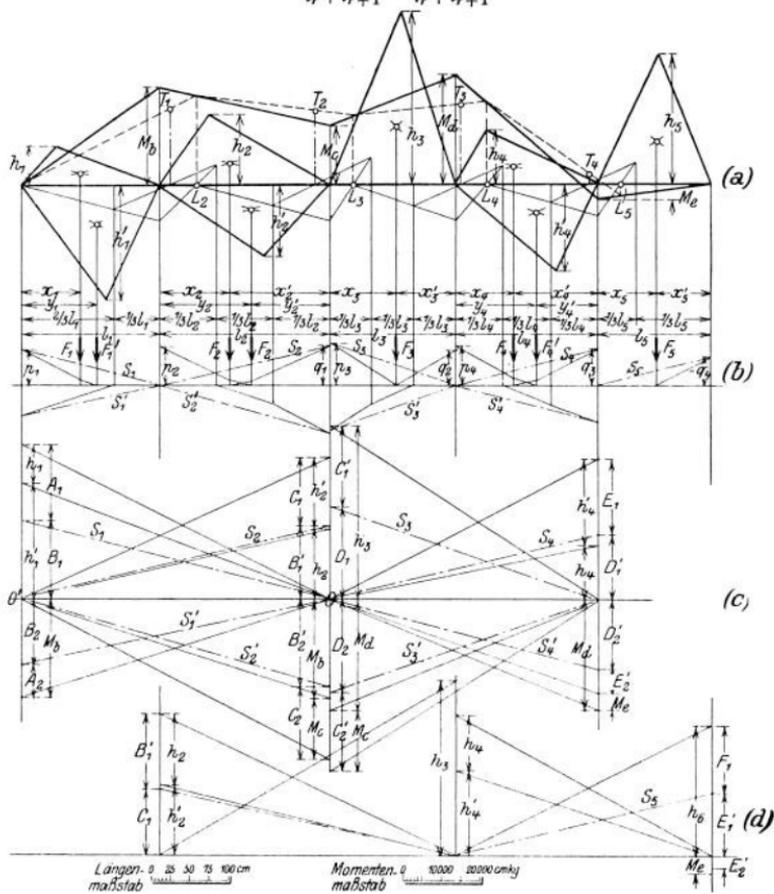


Fig. 53.

Mit O' als Pol und h_2, h_2' als Kräftezug erhält man senkrecht unter der Stütze $(r+1)$ durch den Seilzug I', II', III' die Größe

$$q_r = \frac{h_2 \cdot x_2'}{l_r + l_{r+1}} + \frac{h_2' \cdot y_2'}{l_r + l_{r+1}}$$

Beide Strecken zusammen ergeben das Moment T_r in dem Maßstabe der einfachen Momentenfläche. Man trägt demnach auf der verschränkten Stützenkrechten T_r ab, so daß

$$VV' = T_r = p_r + q_r$$

wird.

Zahlenbeispiel: Gegeben sei der Träger (Fig. 53); es ergeben sich die M_0 -Flächen

- | | |
|------------|---|
| 1. Öffnung | $M_1 = 300 \cdot \frac{45 \cdot 135}{180} = 10\,125 \text{ cmkg} = h_1,$ |
| | $M_2 = 700 \cdot \frac{68 \cdot 112}{180} = 29\,600 \text{ cmkg} = h_1';$ |
| 2. Öffnung | $M_3 = 400 \cdot \frac{65 \cdot 155}{220} = 18\,300 \text{ cmkg} = h_2,$ |
| | $M_4 = 350 \cdot \frac{85 \cdot 135}{220} = 18\,250 \text{ cmkg} = h_2';$ |
| 3. Öffnung | $M_5 = 1100 \cdot \frac{95 \cdot 70}{165} = 44\,400 \text{ cmkg} = h_3,$ |
| 4. Öffnung | $M_6 = 450 \cdot \frac{40 \cdot 145}{185} = 14\,100 \text{ cmkg} = h_4,$ |
| | $M_7 = 575 \cdot \frac{55 \cdot 130}{185} = 22\,200 \text{ cmkg} = h_4';$ |
| 5. Öffnung | $M_8 = -900 \cdot \frac{70 \cdot 80}{150} = -33\,600 \text{ cmkg} = h_5.$ |

Die Ermittlung der Festpunkte geschieht graphisch; man erhält die Stützmente

$$M_a = 0; \quad M_b = -25\,250 \text{ cmkg}; \quad M_c = -15\,750 \text{ cmkg}; \quad M_d = -28\,500 \text{ cmkg};$$

$$M_e = +4000 \text{ cmkg}; \quad M_f = 0.$$

Das größte auftretende Moment ist

$$\max M = 31\,500 \text{ cmkg}.$$

g) Träger von gleichem Widerstande gegen Biegung.

Ein Träger, in dem die Biegungsspannung in jedem Querschnitte gleich groß ist, wird als Träger von gleichem Widerstande gegen Biegung bezeichnet.

In Fig. 54 soll der am Ende durch die Kraft P belastete Freitragser mit rechteckigem Querschnitt als Träger gleicher Biegungsfestigkeit ausgebildet werden. Es ist

$$M_x = P \cdot x = W_x \cdot k_b,$$

$$W_x = \frac{b y^2}{6}.$$

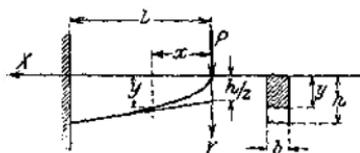


Fig. 54.

Als Gleichung der Begrenzungslinie folgt aus der Bedingung

$$\sigma_x = \text{konst.} \leq k_b$$

$$\frac{M_x}{W_x} = \sigma_x = k_b,$$

$$y^2 = \frac{6P}{b \cdot k_b} \cdot x,$$

d. h. die Begrenzungslinie ist eine Parabel, deren Scheitel in dem Endpunkte des Freitragers liegt. Die Höhe h des Querschnittes an der Einspannung ergibt sich als y für $x = l$ zu

$$h = \sqrt{\frac{6Pl}{b \cdot k_b}}.$$

Die parabolische Form des Freitragers findet sich bei Konsolen. Als angenäherte Form wählt man häufig die Tangente an die theoretisch gefundene Kurve zur Begrenzungslinie; sie ist in Fig. 54 gestrichelt gezeichnet.

Die Durchbiegung des Endpunktes ergibt sich nach dem Mohrschen Satz als statisches Moment der $\frac{M}{J}$ -Fläche, bezogen auf den Punkt, dessen Verschiebung bestimmt werden soll; sie wird

$$f = \frac{1}{E} \int_0^l \frac{M_x}{J_x} \cdot x \cdot dx.$$

Mit $M_x = P \cdot x$ und $J_x = \frac{b y^3}{12}$ geht die Gleichung über in

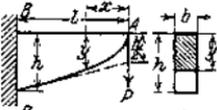
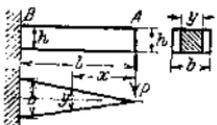
$$f = \frac{1}{E} \int_0^l \frac{P \cdot x \cdot 12}{b \cdot y^3} \cdot x \cdot dx;$$

infolge der parabolischen Begrenzung ist $y^2 : h^2 = x : l$, so daß

$$y = h \sqrt{\frac{x}{l}},$$

mithin

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{E} \int_0^l \frac{P \cdot x \cdot 12 \sqrt{l^3}}{b \cdot h^3 \sqrt{x^3}} \cdot x \cdot dx = \frac{1}{E} \cdot \frac{P \cdot 12 \sqrt{l^3}}{b h^3} \int_0^l x^{\frac{1}{2}} \cdot dx \\ &= \frac{1}{E} \cdot \frac{12 P \cdot \sqrt{l^3}}{b h^3} \cdot \frac{2}{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^l, \\ f &= \frac{1}{E} \cdot \frac{12 P \cdot \sqrt{l^3}}{b h^3} \cdot \frac{2}{3} \cdot l \sqrt{l} = \frac{8 P}{E \cdot b} \cdot \frac{l^2}{h^3}. \end{aligned}$$

Nr.	Längs- und Querschnitt des Trägers	Querschnitte	Begrenzung des Längs-schnittes	Formeln zur Berechnung der Querschnitt-Abmessungen
Die Last P greift am Ende des Trägers an.				
1 a.		Rechtecke von gleicher Breite b und veränderlicher Höhe y .	1 a. Obere Begrenzung: Gerade; untere Begrenzung: Gemeine Parabel.	$y^2 = \frac{6 P}{b h_b} x$. $h = \sqrt{\frac{6 P l}{b h_b}}$.
1 b.			1 b. Gemeine Parabel.	Durchbiegung in A: $f = \frac{8 P}{b E} \left(\frac{l}{h}\right)^2$.
2.		Rechtecke von gleicher Höhe h und veränderlicher Breite y .	Gerade Linie.	$y = \frac{6 P}{h^2 h_b} x$. $b = \frac{6 P l}{h^2 h_b}$. Durchbiegung in A: $f = \frac{6 P}{b E} \left(\frac{l}{h}\right)^3$.
3.		Kreise vom Durchmesser y .	Kubische Parabel.	$y^3 = \frac{32 P}{\pi h_b} x$. $d = \sqrt[3]{\frac{32 P l}{\pi h_b}}$.

Nr.	Längs- und Querschnitt des Trägers	Querschnitte	Begrenzung des Längs-schnittes	Formeln zur Berechnung der Querschnitt-Abmessungen
-----	------------------------------------	--------------	--------------------------------	--

Last Q gleichmäßig über den Träger verteilt.

4.		Rechtecke von gleicher Breite b und veränderlicher Höhe y .	Gerade Linie.	$y = x \sqrt{\frac{3Q}{blk_b}}$ $h = \sqrt{\frac{3Ql}{bk_b}}$
5.	<p>(Elastische Linie ein Kreisbogen.)</p>	Rechtecke von gleicher Höhe h und veränderlicher Breite y .	Gemeine Parabel.	$y = \frac{3Q}{lk_b} \frac{x^2}{h^2}$ $b = \frac{3Ql}{k_b h^2}$ <p>Durchbiegung in A:</p> $f = \frac{3P}{bE} \left(\frac{l}{h}\right)^3$

Die Last P wirkt in C.

6.		Rechtecke von gleicher Breite b und veränderlicher Höhe y .	Obere Begrenzung: Zwei gemeine Parabeln.	$y^2 = \frac{6P(l-p)}{blk_b} x$ $y_1^2 = \frac{6Pp}{blk_b} x_1$ $h = \sqrt{\frac{6P(l-p)p}{blk_b}}$
----	--	---	--	---

Last Q gleichmäßig über den Träger verteilt.

7.		Rechtecke von gleicher Breite b und veränderlicher Höhe y .	Obere Begrenzung: Ellipse.	$\frac{x^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{3Ql}{4bk_b}} = 1$ $h = \sqrt{\frac{3Ql}{4bk_b}}$ <p>Durchbiegung in Q:</p> $f = \frac{1}{64} \frac{Ql^3}{EJ}$ $= \frac{3}{16} \frac{Q}{bE} \left(\frac{l}{h}\right)^3$
----	--	---	----------------------------	---

¹⁾ Bei ausgeführten Blechträgern von nahezu gleichem Widerstande gegen Biegung ist nach R. Land

$$f = \frac{1}{70} \frac{Ql^3}{EJ} = \frac{6}{35} \frac{Q}{bE} \left(\frac{l}{h}\right)^3$$

E. Drehungsfestigkeit.

Ein gerader Stab von kreisförmigem Querschnitt (Fig. 55) werde von einem Kräftepaar angegriffen, dessen Ebene senkrecht zur Stabachse liegt. Die Schubspannungen, die in dem Querschnitt auftreten, mögen im Abstände vom Mittelpunkt nach außen zu wachsen. Diese Annahme trifft mit großer Annäherung für Schmiedeeisen und Stahl innerhalb der Proportionalitätsgrenze zu. Wird mit τ_0 die Schubspannung in der Entfernung r vom Mittelpunkt bezeichnet, so ist

$$\tau = \varrho \cdot \tau_0.$$

Die von dem durch Strichelung hervorgehobenen Flächenteilchen $d f$ aufzunehmende Kraft ist $\tau d f$, ihr Moment in Beziehung auf den Mittelpunkt $\tau \cdot d f \cdot \varrho$. Soll Gleichgewicht herrschen, so muß die dritte Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M = 0$ erfüllt sein, mithin

$$P \cdot d = M_d = \int d f \cdot \tau \cdot \varrho = \tau_0 \int d f \cdot \varrho^2.$$

$\int d f \cdot \varrho^2$ ist das polare Trägheitsmoment J_p des Querschnittes in cm^4 . Es wird:

$$M_d = \tau_0 \cdot J_p = \tau_1 \cdot \frac{J_p}{r},$$

$\frac{J_p}{r} = W_p$ ist das polare Widerstandsmoment, gemessen in cm^3 , folglich

$$M_d = \tau_1 \cdot W_p.$$

Die Festigkeitsbedingung erfordert $\tau_1 \leq k_d = \frac{M_d}{W_p}$.

Ersetzt man das polare Trägheitsmoment durch das äquatoriale, so wird wegen

$$\varrho^2 = x^2 + y^2$$

$$\int d f \cdot \varrho^2 = \int d f \cdot x^2 + \int d f \cdot y^2 = J_x + J_y,$$

mithin

$$M_d = \tau_1 \frac{J_x + J_y}{r}.$$

Für den vollen Kreisquerschnitt ist

$$J_x = J_y = \frac{\pi}{64} \cdot d^4 = \frac{\pi}{4} \cdot r^4,$$

so daß

$$M_d = \tau_1 \cdot \frac{\pi}{16} \cdot d^3 = \tau_1 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot r^3,$$

$$M_d \leq \frac{\pi}{16} d^3 \cdot k_d,$$

wenn k_d die zulässige Drehungsbeanspruchung bedeutet. Die entwickelten Gleichungen gelten nur für den Kreisquerschnitt; für andere Querschnittsformen siehe Tabelle S. 451.

Nach der Erklärung der Schiebung war γ die Strecke, um die sich zwei Querschnitte in der Entfernung l verschieben (Fig. 14), zwei l cm voneinander entfernte Querschnitte verschieben sich um

$$\lambda = l \cdot \gamma;$$

mit $\gamma = \beta \cdot \tau$ wird

$$\lambda = l \cdot \beta \cdot \tau.$$

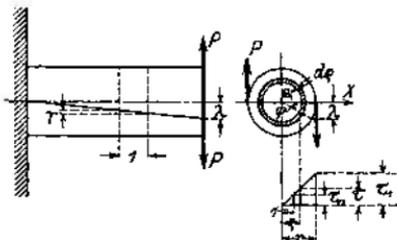


Fig. 55.

Ist $\varphi =$ Verdrehungswinkel, so ist andererseits $\lambda = r \cdot \varphi$, so daß

$$\varphi = \frac{l}{r} \cdot \beta \cdot \tau.$$

Mit $\tau = \frac{M_d}{J_p} \cdot r$ wird

$$\varphi = \frac{M_d \cdot l \cdot \beta}{J_p},$$

im Bogenmaß gemessen,

$$\varphi = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{M_d \cdot l \cdot \beta}{J_p},$$

im Gradmaß gemessen.

Für den Kreisquerschnitt wird

$$\varphi^\circ = \frac{180^\circ \cdot 32 \cdot M_d \cdot l \cdot \beta}{\pi^2 \cdot d^4}.$$

Lautet z. B. die Bedingung: Es soll der Verdrehungswinkel für Triebwerkwellen $\frac{1}{4}^\circ$ pro fdm nicht überschreiten, so muß sein

$$\frac{1}{4} = \frac{180 \cdot 32 \cdot 100 \cdot M_d \cdot \beta}{\pi^2 \cdot d^4}$$

und daraus

$$d = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 180 \cdot 32 \cdot 100 \cdot \beta}{\pi^2}} \cdot M_d.$$

Mit $\beta = \infty \frac{1}{800\,000}$ für Flußeisen ergibt sich

$$d \text{ cm} = 0,734 \sqrt[4]{M_d}$$

wobei M_d in cmkg gemessen wird.

Ersetzt man M_d durch $71\,620 \frac{N}{n}$, wobei N in PS gemessen wird, so erhält man den erforderlichen Durchmesser einer Triebwerkswelle zu

$$d \text{ cm} = \infty 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}.$$

Diese nur nach dem Gesichtspunkte der Formänderung aufgestellte Gleichung liefert für große Drehmomente zu geringe Wellenstärke, daher muß untersucht werden, ob die größte Schubbeanspruchung unter der zulässigen Drehungsbeanspruchung k_d bleibt. Ist andererseits die Wellenstärke in Rücksicht auf die Festigkeit ermittelt, so wäre zu untersuchen, ob die Größe des Verdrehungswinkels den zulässigen Wert nicht überschreitet.

Z. B. ist für normale Triebwerkwellen aus gewöhnlichem Walzeisen $k_d = 120 \text{ kg/cm}^2$ (k_d ist verhältnismäßig gering gewählt, weil eventuell auftretende Biegungsbeanspruchungen mit berücksichtigt werden sollen). Mit diesem Wert für k_d erfordert die Rücksicht auf Festigkeit

$$d = \infty 14,5 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}$$

und für die Entfernung der Lager

$$l \text{ cm} \leq 110 \sqrt[3]{d \text{ cm}}.$$

Bedeutet

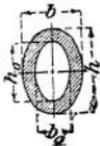
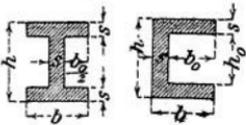
M_d das Moment des drehenden Kräftepaares in cm/kg,

$G = \frac{1}{\beta} = \frac{5}{13} E = 0,385 E$ den Gleitmodul in kg/qcm (s. S. 395),

k_d die zulässige Drehungsspannung des Stabmaterials in kg/qcm,

ϑ den verhältnismäßigen Verdrehungswinkel zweier um 1 cm voneinander abstehenden Stabquerschnitte unter der Einwirkung von M_d , gemessen in cm als Bogen vom Halbmesser 1 cm,

dann gelten für M_d und ϑ die in der nachstehenden Tabelle für die wichtigsten Querschnitte angegebenen Werte.

Nr.	Querschnitt	Zulässiges Drehmoment	Verdrehungswinkel
1.		$M_d = \frac{\pi}{16} d^3 k_d \approx 0,2 d^3 k_d.$	$\vartheta = \frac{32}{\pi d^4} \frac{M_d}{G}.$
2.		$M_d = \frac{\pi}{16} \frac{D^4 - d^4}{D} k_d.$	$\vartheta = \frac{32}{\pi (D^4 - d^4)} \frac{M_d}{G}.$
3.		$M_d = \frac{\pi}{16} b^3 h k_d.$ ($h > b$).	$\vartheta = \frac{16}{\pi} \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{M_d}{G}.$
4.		$M_d = \frac{\pi}{16} \frac{b^3 h - b_0^3 h_0}{b} k_d.$ ($h_0 : h = b_0 : b; \quad h > b$).	
5.		$M_d = \frac{2}{9} b^2 h k_d.$ ($h > b$).	$\vartheta = 3,6 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{M_d}{G}.$
6.		$M_d = \frac{2}{9} h^3 k_d.$	$\vartheta = 7,2 \frac{1}{h^4} \frac{M_d}{G}.$
7.		$M_d = \frac{2}{9} s^2 (h + 2 b_0) k_d.$	

F. Formänderungsarbeit.¹⁾

Arbeit ist das Produkt aus der Kraft und dem in Richtung der Kraft zurückgelegten Wege (vgl. S. 236). Die Arbeit ist positiv oder negativ, je nachdem Kraft und Weg gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben. Treten elastische Formänderungen ein, so müssen die äußeren und inneren Kräfte ihre Lage ändern, also einen Weg zurücklegen oder Arbeit leisten.

¹⁾ Nach Robert Otzen, Praktische Winke zum Studium der Statik. Wiesbaden 1911. C. W. Kreidels Verlag.

Ruft die arbeitleistende Kraft gleichzeitig eine Formänderung hervor, so heißt die von ihr geleistete Arbeit Formänderungsarbeit (vgl. Abschnitt Mathematik, S. 176). Wirkt z. B. die Kraft P_m im Punkte m des Trägers AB (Fig. 56), so senkt sich m und δ_m , die von P_m geleistete Formänderungsarbeit, ist

$$A = \frac{1}{2} P_m \cdot \delta_m.$$

Tritt nach erfolgter Deformation eine zweite Kraft P_n hinzu, die an dem Träger im Punkte n angreifen möge, so muß die erste Kraft P_m einen der neuen Formänderung entsprechenden Weg δ'_m in voller Größe zurücklegen, obwohl sie selber nicht die Ursache des von ihr zurückgelegten Weges ist. Die unter diesen Umständen geleistete Arbeit heißt Verschiebungsarbeit; ihre Größe ist

$$A_v = P_m \cdot \delta'_m.$$

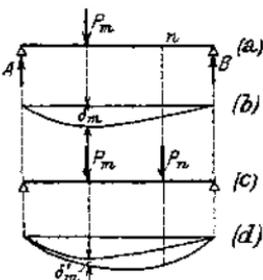


Fig. 56.

Auch jede innere Kraft kann Formänderungs- und Verschiebungsarbeit leisten. Diese inneren Kräfte können sein: Längskräfte (Spannkräfte), Querkkräfte, Biegemomente.

Grundgesetz der Arbeit. 1. Längenänderung. Durch irgendeine wirkliche Belastung verschiebe sich der Punkt m des Freitragers (Fig. 57) in Richtung der Längsachse um $d(\Delta s)$, dann erleidet der Angriffspunkt i einer gedachten Kraft Q' in Richtung Q' eine Verschiebung

$$d(\delta_1) = d(\Delta s) \cdot \sin \alpha.$$

Demnach leistet Q' die Verschiebungsarbeit

$$Q' d(\delta_1) = Q' \cdot \sin \alpha \cdot d(\Delta s) = N' d(\Delta s),$$

wenn die Komponente von Q' mit N' bezeichnet wird.

2. Querverschiebung. Die in dem Punkte m des Trägers durch die wirkliche Belastung hervorgerufene Querkraft verschiebe m um $d(\Delta v)$; (Fig. 57 c) dann verschiebt sich i in Richtung von Q' um

$$d(\delta_2) = d(\Delta v) \cdot \cos \alpha;$$

bei dieser Verschiebung, die nicht durch Q' hervorgerufen wird, leistet Q' die Verschiebungsarbeit

$$Q' d(\delta_2) = Q' \cdot \cos \alpha \cdot d(\Delta v) = V' \cdot d(\Delta v).$$

3. Drehung. Das im Punkte m des Trägers durch die wirkliche Belastung hervorgerufene Biegemoment bewirkt eine Drehung des Querschnittes m um den Winkel $d(\Delta \varphi)$; die daraus folgende Verschiebung des Punktes i in Richtung von Q' ist

$$d(\delta_3) = r \cdot d(\Delta \varphi) \cdot \cos \alpha = r' \cdot d(\Delta \varphi).$$

Die von Q' bei dieser durch die wirkliche Belastung hervorgerufenen Drehung geleistete Verschiebungsarbeit ist

$$Q' \cdot d(\delta_3) = Q' r' d(\Delta \varphi) = M' \cdot d(\Delta \varphi).$$

Wird demnach durch die wirkliche Belastung des Trägers eine Formänderung des Querschnittes m in der Weise hervorgerufen, daß sich m in Richtung der Stabachse um $d(\Delta s)$, in Richtung senkrecht zur Stabachse um $d(\Delta v)$ verschiebt

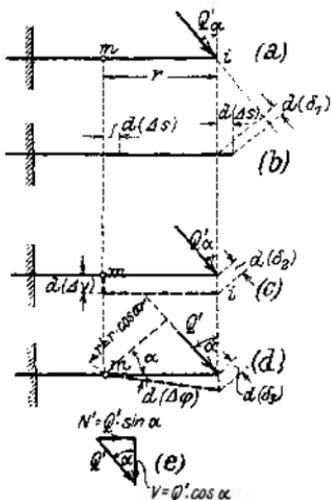


Fig. 57.

und der Querschnitt m eine Drehung um $d(\Delta\varphi)$ erfährt, so leistet die gedachte Kraft Q' bei dieser Formänderung eine gesamte Verschiebungsarbeit von

$$Q' \cdot d(\delta) = N' \cdot d(\Delta s) + V' \cdot d(\Delta v) + M' \cdot d(\Delta\varphi),$$

oder wenn mehrere Lasten Q' gedacht werden und mehrere Querschnitte m beliebige Formänderungen erfahren sollen

$$\Sigma Q' \cdot \delta = \int N' d(\Delta s) + \int V' \cdot d(\Delta v) + \int M' \cdot d(\Delta\varphi).$$

Die sog. allgemeine Arbeitsgleichung lautet in Worten: Die Verschiebungsarbeit der äußeren Kräfte ist gleich der Verschiebungsarbeit der inneren Kräfte.

Ist N die wirklich auftretende Längskraft, dann ist

$$d(\Delta s) = \frac{\sigma}{E} \cdot ds = \frac{N}{EF} \cdot ds$$

für den Fall, daß das Hookesche Gesetz Gültigkeit hat, mithin der von den Längskräften abhängige Teil der Verschiebungsarbeit

$$\int N' d(\Delta s) = \int \frac{N'N}{EF} \cdot ds.$$

Die wirklich auftretende Querkraft V liefert

$$d(\Delta v) = \frac{1}{k} \cdot \frac{V}{G \cdot F} \cdot ds,$$

wobei k die Ungleichmäßigkeit der Verteilung der Schubspannungen τ über den Querschnitt zum Ausdruck bringt; demnach ist der von den Querkräften abhängige Teil der Verschiebungsarbeit

$$\int V' d(\Delta v) = \int \frac{V' \cdot V}{G \cdot k F} \cdot ds.$$

Wegen

$$d(\Delta\varphi) = \frac{M ds}{EJ}$$

ist der von den Biegemomenten abhängige Teil der Verschiebungsarbeit

$$\int M' d(\Delta\varphi) = \int \frac{M'M}{EJ} \cdot ds.$$

Mithin nimmt die allgemeine Arbeitsgleichung die Form an:

$$\Sigma Q' \cdot \delta = \int \frac{N'N}{EF} \cdot ds + \int \frac{V'V}{G \cdot k F} \cdot ds + \int \frac{M'M}{EJ} \cdot ds.$$

Für den Sonderfall, daß die arbeitsleistende Kraftgruppe Q' die gleiche ist wie die die Formänderung bewirkende wirkliche Belastung, wird

$$Q' = P; \quad N' = N; \quad V' = V; \quad M' = M,$$

so daß die allgemeine Arbeitsgleichung übergeht in

$$\Sigma P \cdot \delta = \int \frac{N^2}{EF} \cdot ds + \int \frac{V^2}{G \cdot k F} \cdot ds + \int \frac{M^2}{EJ} \cdot ds.$$

Da die Formänderungsarbeit $\left(A = \frac{P \cdot \delta}{2}\right)$ gleich der Hälfte der ihr entsprechenden Verschiebungsarbeit ($A_v = P \cdot \delta$) ist, so folgt

$$A = \int \frac{N^2}{2EF} \cdot ds + \int \frac{V^2}{2G \cdot k F} \cdot ds + \int \frac{M^2}{2EJ} \cdot ds.$$

Das Grundgesetz der Arbeit läßt sich für die Ermittlung der Formänderung in folgender Weise verwenden.

Wählt man als Kraftgruppe Q' die Kraft 1 am Orte n der gesuchten Formänderung δ , so wird

$$\Sigma Q' \cdot \delta = 1 \cdot \delta_n.$$

Die Kraft 1 rufe die Längskraft $N' = N_1$; die Querkraft $V' = V_1$ und das Moment $M' = M_1$ hervor, dann wird

$$1 \cdot \delta_n = \int \frac{N_1 \cdot N}{EF} \cdot ds + \int \frac{V_1 \cdot V}{G \cdot k \cdot F} \cdot ds + \int \frac{M_1 \cdot M}{EJ} \cdot ds.$$

Es möge unter den beliebig vielen wirklichen Kräften P_1, P_2, P_3, \dots die Kraft P_n im Punkte n der gesuchten Formänderung angreifen, dann ist die gesamte Längskraft

$$N = N_{\text{infolge } P_1, P_2, \dots} + P_n \cdot N_1,$$

wobei N_1 die durch eine Kraft 1 im Punkte n hervorgerufene Längskraft bedeutet; differenziert man diese Gleichung nach der Teilkraft P_n , so wird

$$\frac{\partial N}{\partial P_n} = \frac{\partial (P_n \cdot N_1)}{\partial P_n} = N_1,$$

da $N_{\text{infolge } P_1, P_2, \dots}$ ein konstanter Wert ist. In gleicher Weise ergibt sich

$$\frac{\partial V}{\partial P_n} = \frac{\partial (P_n \cdot V_1)}{\partial P_n} = V_1,$$

$$\frac{\partial M}{\partial P_n} = \frac{\partial (P_n \cdot M_1)}{\partial P_n} = M_1.$$

Mit diesen Werten geht die Arbeitsgleichung über in

$$1 \cdot \delta_n = \int \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial P_n} \cdot ds + \int \frac{V}{G \cdot k \cdot F} \cdot \frac{\partial V}{\partial P_n} \cdot ds + \int \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial P_n} \cdot ds.$$

Diese Gleichung gestattet die Ermittlung der Formänderung δ_n des Punktes n eines Trägers infolge der durch die wirkliche Belastung hervorgerufenen Längskräfte N , der Querkräfte V und der Biegemomente M , wenn am Orte der gesuchten Formänderung eine Kraft P_n wirkt.

Die Größe der Formänderungsarbeit war

$$A = \int \frac{N^2}{2EF} \cdot ds + \int \frac{V^2}{G \cdot k \cdot F} \cdot ds + \int \frac{M^2}{EJ} \cdot ds.$$

Differenziert man diese Gleichung partiell nach der Kraft P_n , die am Orte der gesuchten Formänderung wirkt, so wird

$$\frac{\partial N^2}{\partial P_n} = \frac{2N \cdot \partial N}{\partial P_n}; \quad \frac{\partial V^2}{\partial P_n} = \frac{2V \cdot \partial V}{\partial P_n}; \quad \frac{\partial M^2}{\partial P_n} = \frac{2M \cdot \partial M}{\partial P_n},$$

so daß

$$\frac{\partial A}{\partial P_n} = \int \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial P_n} \cdot ds + \int \frac{V}{G \cdot k \cdot F} \cdot \frac{\partial V}{\partial P_n} \cdot ds + \int \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial P_n} \cdot ds.$$

Aus beiden Gleichungen ergibt sich

$$1 \cdot \delta_n = \frac{\partial A}{\partial P_n}.$$

Da es sich bei der Berechnung der statisch unbestimmten Träger stets um die Ermittlung von Verschiebungen des Angriffspunktes der statisch nicht bestimmbar Größe X handelt, so läßt sich obige Gleichung sofort verwenden, wenn statt der Kraft P_n die Größe X gewählt wird.

Ist der Angriffspunkt von X starr, X also eine äußere Lagerkraft (im Beispiel Fig. 46 ist $X = C$), so wird

$$\delta_1 = \frac{\partial A}{\partial C} = 0;$$

in Worten: die statisch nicht bestimmbar Größen machen die Formänderungsarbeit zu einem Minimum.

Ist der Angriffspunkt von X nicht starr, X aber eine äußere Lagerkraft, so wird

$$\delta_c = \frac{\partial A}{\partial X} = \frac{\partial A}{\partial C};$$

wenn Δc eine von C unabhängige Verschiebung bedeutet; z. B. eine beobachtete Senkung des mittleren Lagers einer Welle.

Anwendungen des Arbeitsgesetzes.

I. Die abgesetzte Welle.

Die Integration darf sich bei Anwendung des Arbeitsgesetzes nur so weit erstrecken, als Stetigkeit des Querschnittes vorliegt. In Fig. 58 sei die zweifach gelagerte Welle im Punkte B festgehalten gedacht, am freien Ende wirke allein die Auflagerreaktion P . Man zerlege den Träger in vier Teile; dann ergibt sich unter Vernachlässigung der Querkkräfte:

I Teil:

$$M_I = P \cdot x; \quad \frac{\partial M_I}{\partial P} = x,$$

$$\delta_I = \int_0^{l_1} \frac{M_I}{E J_1} \cdot x \cdot dx = \frac{1}{E J_1} \int_0^{l_1} P x^2 \cdot dx = \frac{1}{3 E J_1} \cdot P \cdot l_1^3;$$

Teil II:

$$M_{II} = P \cdot x; \quad \frac{\partial M_{II}}{\partial P} = x,$$

$$\begin{aligned} \delta_{II} &= \int_{l_1}^{l_2} \frac{M_{II}}{E J_2} \cdot x \cdot dx = \frac{1}{E J_2} \int_{l_1}^{l_2} P x^2 \cdot dx \\ &= \frac{1}{3 E J_2} \cdot P (l_2^3 - l_1^3); \end{aligned}$$

Teil III:

$$M_{III} = P \cdot x; \quad \frac{\partial M_{III}}{\partial P} = x,$$

$$\delta_{III} = \int_{l_2}^{l_3} \frac{M_{III}}{E J_3} \cdot x \cdot dx = \frac{1}{E J_3} \int_{l_2}^{l_3} P x^2 \cdot dx = \frac{1}{3 \cdot E J_3} P (l_3^3 - l_2^3);$$

Teil IV:

$$M_{IV} = P \cdot x; \quad \frac{\partial M_{IV}}{\partial P} = x,$$

$$\delta_{IV} = \int_{l_3}^{l_4} \frac{M_{IV}}{E J_4} \cdot x \cdot dx = \frac{1}{E J_4} \int_{l_3}^{l_4} P x^2 \cdot dx = \frac{1}{3 \cdot E J_4} P (l_4^3 - l_3^3).$$

Die gesamte Vertikalverschiebung des Punktes P wird

$$\delta = \sum \delta_i, \quad \delta = \frac{P}{3 E} \left(\frac{l_1^3}{J_1} + \frac{l_2^3 - l_1^3}{J_2} + \frac{l_3^3 - l_2^3}{J_3} + \frac{l_4^3 - l_3^3}{J_4} \right)$$

oder, wenn man das größte Trägheitsmoment J_4 und die Gesamtlänge l_4 vor die Klammer bringt,

$$\delta = \frac{P l_4^3}{3 E J_4} \left(\frac{J_4}{J_1} \cdot \frac{l_1^3}{l_4^3} + \frac{J_4}{J_2} \cdot \frac{l_2^3 - l_1^3}{l_4^3} + \frac{J_4}{J_3} \cdot \frac{l_3^3 - l_2^3}{l_4^3} + \frac{l_4^3 - l_3^3}{l_4^3} \right).$$

Da die Ausdrücke in der Klammer unbenannte Zahlen sind, für deren Berechnung der Rechenschieber genügt, so führt die Gleichung schneller zum Ziel als das graphische Verfahren nach Mohr (S. 432), zumal die dritten Potenzen den Tabellen S. 4 entnommen werden können.

Allgemein lautet die Gleichung für die vertikale Verschiebung des Punktes P

$$\delta = \int_0^{l_1} \frac{M_I}{E J_1} \cdot x \cdot dx + \int_{l_1}^{l_2} \frac{M_{II}}{E J_2} \cdot x \cdot dx + \int_{l_2}^{l_3} \frac{M_{III}}{E J_3} \cdot x \cdot dx + \dots$$

2. Die gekrümmte Welle.

Gegeben sei die zweifach gelagerte, mit einer Krüpfung versehene Welle nach Fig. 59. Die Trägheitsmomente seien J_1, J_2, J_3 . Die Kurbelkraft wirke in der Ebene der Krüpfung; der Stab sei in der Mitte des Kurbelzapfens eingespannt gedacht. Da die Stetigkeit in den

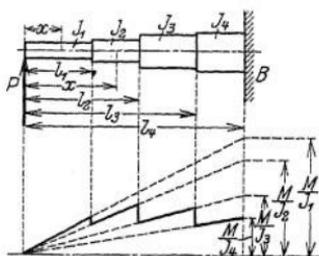


Fig. 58.

steifen Ecken aufgehoben ist, zerlegt man die linke Seite der Welle in drei Teile; es wird die Gesamtverschiebung des Punktes A

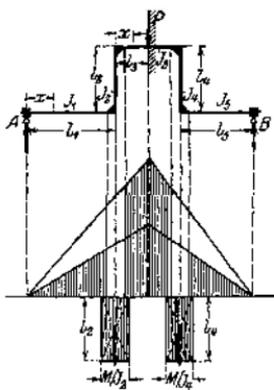


Fig. 59.

$$\delta = \delta_I + \delta_{II} + \delta_{III}.$$

Teil I:

$$\delta_I = \int \frac{M_I}{EJ_1} \cdot \frac{\partial M_I}{\partial A} \cdot dx,$$

$$M_I = A \cdot x; \quad \frac{\partial M_I}{\partial A} = x,$$

$$\delta_I = \frac{1}{EJ_1} \int_0^{l_1} A x^2 \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{A \cdot l_1^3}{EJ_1};$$

Teil II:

$$\delta_{II} = \int \frac{M_{II}}{EJ_2} \cdot \frac{\partial M_{II}}{\partial A} \cdot dx,$$

$$M_{II} = A \cdot l_1; \quad \frac{\partial M_{II}}{\partial A} = l_1,$$

$$\delta_{II} = \frac{1}{EJ_2} \int_0^{l_2} A \cdot l_1^2 \cdot dx = \frac{A \cdot l_1^2 \cdot l_2}{EJ_2};$$

Teil III:

$$\delta_{III} = \int \frac{M_{III}}{EJ_3} \cdot \frac{\partial M_{III}}{\partial A} \cdot dx,$$

$$M_{III} = A(l_1 + x); \quad \frac{\partial M_{III}}{\partial A} = l_1 + x,$$

$$\delta_{III} = \frac{1}{EJ_3} \int_0^{l_3} A(l_1 + x)^2 \cdot dx = \frac{A \cdot l_1^2 \cdot l_3}{EJ_3} + \frac{A \cdot l_1 \cdot l_3^2}{EJ_3} + \frac{A \cdot l_3^3}{3EJ_3}.$$

Demnach

$$\delta = \frac{A \cdot l_1^3}{3EJ_1} + \frac{A \cdot l_1^2 \cdot l_2}{EJ_2} + \frac{A \cdot l_1^2 \cdot l_3}{EJ_3} + \frac{A \cdot l_1 \cdot l_3^2}{EJ_3} + \frac{A \cdot l_3^3}{3EJ_3}.$$

Schreibt man die Gleichung an, ohne die Integrale aufzulösen, so ergibt sich die Vertikalverschiebung des Punktes A

$$\delta = \int_0^{l_1} \frac{M_I}{EJ_1} \cdot x \cdot dx + \int_0^{l_2} \frac{M_{II}}{EJ_2} \cdot l_1 \cdot dx + \int_0^{l_3} \frac{M_{III}}{EJ_3} (l_1 + x) \cdot dx.$$

In dieser Gleichung bedeutet die Summe des ersten und letzten Integrals die Durchbiegung einer geraden Welle in Übereinstimmung mit dem Mohrschen Verfahren; das zweite Glied gibt den Einfluß des Kurbelarmes wieder. Man kann

$$\int_0^{l_2} \frac{M_{II} \cdot dx}{EJ_2} \cdot l_1$$

als das $\frac{1}{E}$ -fache statische Moment eines Rechtecks auffassen, dessen Grundlinie

$$\int_0^{l_2} dx = l_2$$

„ dem Kurbelarm und dessen Höhe $\frac{M_{II}}{J_2}$ ist; der Schwerpunkt des Rechtecks hat die Entfernung l_1 von A, fällt also in die Achse des Kurbelarmes. In Anlehnung an das Mohrsche Verfahren ergibt sich: Die Belastungsfläche des — gedachten — Trägers wird um diesen Betrag vergrößert, der als Einzelkraft bei der Bildung des Kräftezuges aufgefaßt werden kann (Fig. 59).

Das erste Glied der Gleichung ist die Vertikalverschiebung des Punktes A infolge der Kraft A, wenn der Träger im Kurbelarm eingespannt gedacht ist. Man berechnet sie nach Beispiel 1, wenn der Querschnitt veränderlich ist.

Die Steifigkeit der Ecken wird in der Weise berücksichtigt, daß man das Trägheitsmoment des Querschnittes für den steifen Teil des Trägers unendlich groß annimmt; der Quotient $\frac{M}{J}$ wird dann gleich Null. Die $\frac{M}{J}$ -Fläche verringert sich bei Anwendung des graphischen

Verfahrens um diesen Betrag, so daß nur die gestrichelte Fläche (Fig. 59) in Frage kommt. Bei der rechnerischen Behandlung zeigt sich der Einfluß der Ecksteifigkeit in folgender Weise: Denkt man sich den Kurbelzapfen der Fig. 60 in P eingespannt, dann ist

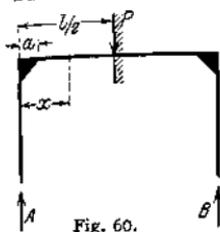


Fig. 60.

$$\delta_A = \int_a^{l/2} \frac{1}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial A} \cdot dx,$$

$$A = \frac{P}{2} \quad M = A \cdot x = \frac{P}{2} \cdot x, \quad \frac{\partial M}{\partial A} = x,$$

$$\delta = \int_a^{l/2} \frac{1}{EJ} \cdot \frac{P}{2} \cdot x^2 \cdot dx,$$

$$\delta = \frac{P}{6EJ} \left[\left(\frac{l}{2}\right)^3 - a^3 \right] = \frac{P}{48EJ} (l^3 - 8a^3) = \frac{Pl^3}{48EJ} - \frac{P(2a)^3}{48EJ}.$$

Für die Bemessung der Größe a am Zapfen gibt Eußlin¹⁾ die halbe Armbreite für Welle an, auf dem Kurbelarm $a' = \frac{3}{4}$ des Wellenhalbmessers r . E. Meyer²⁾ hat a und a' durch Versuche bestimmt und gefunden, daß mit $a = \frac{b}{3}$ und $a' = \frac{r}{4}$ sich befriedigende Übereinstimmung zwischen Versuch und Messung ergibt ($b =$ Armbreite) (Fig. 61).

3. Wirkt in dem Punkte, dessen Verschiebung bestimmt werden soll, keine Einzelkraft, so ist sie zunächst dort als gedachte Kraft einzuführen und nach erfolgter Differentiation wieder zum Verschwinden zu bringen. In Fig. 62 ist

$$M = Px + \frac{p}{2} \cdot x^2,$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = x,$$

nunmehr gesetzt; $P = 0$, folglich

$$\delta_n = \frac{1}{EJ} \int_0^l \frac{p}{2} \cdot x^2 \cdot x \cdot dx = \frac{1}{EJ} \int_0^l M \cdot x \cdot dx = \frac{pl^3}{8EJ}.$$

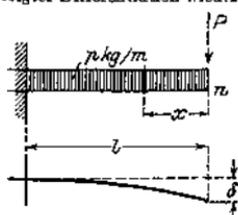


Fig. 62.

3. Der steife Rahmen (Portalträger) mit zwei Gelenken.

Der Träger ist einfach statisch unbestimmt; die statisch nicht bestimmbare Größe sei der Horizontalschub H ; man erhält als statisch bestimmtes Hauptsystem den einfachen Balken (Fig. 63b). Es sei R die Resultante sämtlicher auf AB wirkenden Kräfte, dann werden

$$A' = R \cdot \frac{b}{l}; \quad B' = R \cdot \frac{a}{l}.$$

Elastizitätsbedingung: Die Horizontalverschiebung des Punktes C muß gleich Null sein. Die allgemeine Arbeitsgleichung liefert

$$\delta_n = \int \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial H} \cdot ds + \int G \cdot kF \cdot \frac{\partial V}{\partial H} \cdot ds + \int \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial H} \cdot ds.$$

Unter Vernachlässigung der Querkraft V erhält man für Teil I des Trägers, wenn J_1 und F_1 Trägheitsmoment und Inhalt des Querschnitts bedeuten:

$$M_I = H \cdot y; \quad \frac{\partial M_I}{\partial H} = y; \quad N_I = A' = R \cdot \frac{b}{l},$$

$$\frac{\partial N}{\partial H} = 0; \quad ds = dy,$$

$$\delta_I = \int \frac{M_I}{EJ_1} \cdot \frac{\partial M_I}{\partial H} \cdot ds = \int_0^h \frac{H \cdot y}{EJ_1} \cdot y \cdot dy = \frac{H \cdot h^3}{3EJ_1}.$$

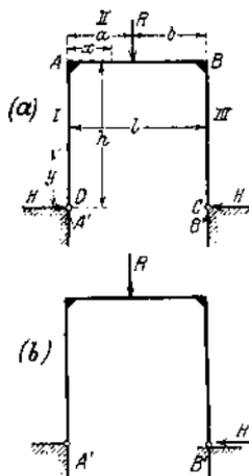


Fig. 63.

¹⁾ Eußlin, Mehrmals gelagerte Kurbelwellen, A. Kröner, Stuttgart 1902.

²⁾ E. Meyer, Z. Ver. deutsch. Ing. 1909, S. 295.

Für Teil II des Stabes ist

$$M_{II} = M_0 - H \cdot h; \quad ds = dx,$$

wenn man unter M_0 das Moment für den einfachen Balken AB versteht.

$$\frac{\partial M_{II}}{\partial H} = -h; \quad N_{II} = H; \quad \frac{\partial N_{II}}{\partial H} = 1,$$

so daß

$$\begin{aligned} \delta_{II} &= \int \frac{N_{II}}{EF_2} \cdot \frac{\partial N}{\partial H} \cdot ds + \int \frac{M_{II}}{EJ_2} \cdot \frac{\partial M_{II}}{\partial H} \cdot ds \\ &= \int_0^l \frac{H}{EF_2} \cdot 1 \cdot dx + \int_0^l \frac{M_0 - H \cdot h}{EJ_2} \cdot (-h) \cdot dx \\ &= \frac{H \cdot l}{EF_2} + \frac{H \cdot h^2 \cdot l}{EJ_2} - \frac{h}{EJ_2} \int_0^l M_0 \cdot dx. \end{aligned}$$

Setzt man bei Stabteil III die gleichen Abmessungen voraus wie bei Teil I, so wird $\delta_{III} = \delta_I$. Insgesamt ergibt sich die Horizontalverschiebung δ_h als Summe der Einzelverschiebungen zu

$$\delta_h = 2 \cdot \delta_I + \delta_{II},$$

$$\delta_h = 2 \cdot \frac{H \cdot h^3}{3EJ_1} + \frac{H \cdot l}{EF_2} + \frac{H \cdot h^2 \cdot l}{EJ_2} - \frac{h}{EJ_2} \int_0^l M_0 \cdot dx.$$

Die Elastizitätsbedingung $\delta_h = 0$ liefert

$$H = \frac{\int_0^l M_0 \cdot dx}{h \cdot l \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l} + \frac{J_2}{F \cdot h^2} \right)}.$$

Hierin bedeutet $\int_0^l M_0 \cdot dx$ den Inhalt der dem einfachen Balken AB entsprechenden Momentenfläche.

Wirkt z. B. nur die Kraft R auf den Balken AB , so ist die M_0 -Momentenfläche ein Dreieck mit der Höhe $\frac{R \cdot ab}{l}$ und dem Flächeninhalte

$$\int_0^l M_0 \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{R \cdot ab}{l} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot ab.$$

Eine gleichmäßige Belastung von $g \text{ kg/m}$ erzeugt eine M_0 -Fläche, die durch eine Parabel mit der Pfeilhöhe $\frac{g l^2}{8}$ begrenzt wird; ihr Inhalt wird

$$\int_0^l M_0 \cdot dx = \frac{2}{3} \cdot l \cdot \frac{g l^2}{8} = \frac{g l^3}{12}.$$

Treten Einzelkräfte P und eine gleichmäßig verteilte Last $g \text{ kg/m}$ auf, so wird

$$\int_0^l M_0 \cdot dx = \frac{1}{2} \Sigma P \cdot ab + \frac{g l^3}{12},$$

so daß

$$H = \frac{g l^3 + 6 \Sigma P \cdot ab}{12 h l \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l} + \frac{J_2}{F \cdot h^2} \right)}.$$

Ist die statisch nicht bestimmbare Größe H ermittelt, so ergibt sich die resultierende Momentenfläche durch Addition der M_0 -Fläche des einfachen Balkens AB und der durch den Horizontalschub H hervorgerufenen Momentenfläche.

Mit Hilfe der Momentenfläche lassen sich die auftretenden Spannungen leicht berechnen (vgl. S. 425).

Tritt zu der gegebenen Vertikalbelastung eine seitliche Belastung durch Wind, so empfiehlt sich für diesen Fall eine gesonderte Untersuchung. Aus $\sum H = 0$ folgt (Fig. 64)

$$H + H' = w \cdot h,$$

wenn w in kg/m die stetige Belastung des Stabes AD bedeutet; demnach

$$H' = w \cdot h - H.$$

Teil I:

$$ds = dy$$

$$M_I = H' \cdot y - \frac{1}{2} w \cdot y^2 = w \cdot h \cdot y - H \cdot y - \frac{1}{2} w y^2,$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial H} = -y,$$

$$N_I = A'' = \frac{w h^2}{2l}; \quad \frac{\partial N_I}{\partial H} = 0,$$

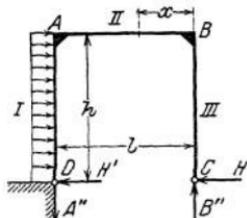


Fig. 64.

$$\begin{aligned} \delta_I &= \int \frac{M_I}{E J_1} \cdot \frac{\partial M_I}{\partial H} \cdot ds = \int_0^h \frac{w h \cdot y - H \cdot y - \frac{1}{2} w y^2}{E J_1} \cdot (-y) \cdot dy \\ &= \frac{1}{E J_1} \left[-w h \cdot \frac{y^3}{3} + H \cdot \frac{y^3}{3} + \frac{1}{8} w \cdot y^4 \right]_0^h = \frac{1}{E J_1} \left[\frac{H \cdot h^3}{3} - \frac{5}{24} \cdot w h^4 \right]; \end{aligned}$$

Teil II:

$$M_{II} = B'' \cdot x - H \cdot h; \quad \frac{\partial M_{II}}{\partial H} = -h; \quad ds = dx,$$

$$N_{II} = H; \quad \frac{\partial N_{II}}{\partial H} = 1,$$

$$\begin{aligned} \delta_{II} &= \frac{1}{E J_2} \int_0^l (B'' x - H \cdot h) (-h) \cdot dx + \frac{1}{E F_2} \int_0^l (-H) (-1) \cdot dx \\ &= \frac{1}{E J_2} \left[-\frac{w h^3}{2l} \cdot \frac{x^2}{2} + H \cdot h^2 \cdot x \right] + \frac{1}{E F_2} \cdot H \cdot x \Big|_0^l \\ &= \frac{1}{E J_2} \left[-\frac{w h^3 \cdot l}{4} + H \cdot h^2 \cdot l \right] + \frac{1}{E F_2} \cdot H \cdot l; \end{aligned}$$

Teil III:

$$M_{III} = -H \cdot y; \quad \frac{\partial M_{III}}{\partial H} = -y; \quad ds = dy,$$

$$N_{III} = -B'' = -\frac{w h^2}{2l}; \quad \frac{\partial N_{III}}{\partial H} = 0,$$

$$\delta_{III} = \frac{1}{E J_1} \int_0^h (-H \cdot y) (-y) \cdot dy = \frac{1}{E J_1} \cdot \frac{H \cdot h^3}{3}.$$

Aus $\delta = \delta_I + \delta_{II} + \delta_{III} = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{E J_1} \left(\frac{H \cdot h^3}{3} - \frac{5}{24} \cdot w h^4 \right) + \frac{1}{E J_2} \left(H h^2 l - \frac{w h^3 l}{4} \right) + \frac{1}{E J_1} \cdot \frac{H h^3}{3} + \frac{1}{E F_2} \cdot H \cdot l = 0, \\ \frac{H}{E J_1} \left(\frac{h^3}{3} + \frac{h^3}{3} \right) + \frac{H}{E J_2} \cdot h^2 l + \frac{1}{E F_2} \cdot H \cdot l = \frac{1}{E J_2} \cdot \frac{w h^3 l}{4} + \frac{1}{E J_1} \cdot \frac{5}{24} \cdot w h^4; \end{aligned}$$

unter Vernachlässigung der Längskraft wird

$$H \cdot h^3 \cdot l \left[1 + \frac{J_2}{J_1} \left(\frac{h}{l} + \frac{l^2}{h^2} \right) \right] = \frac{w h^3 l}{4} \left(1 + \frac{5}{6} \cdot \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l} \right),$$

so daß

$$H = \frac{w h}{4} \cdot \frac{1 + \frac{5}{6} \cdot \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}}{1 + \frac{J_2}{J_1} \left(\frac{h}{l} + \frac{l^2}{h^2} \right)}$$

4. Einige statisch unbestimmte Aufgaben¹⁾.

Im Maschinenbau müssen häufig Kräfte durch mehrere Konstruktionsteile gemeinsam übertragen werden, die im Angriffspunkt der Kraft zusammentreffen und je einzeln gleiche Richtung der Formänderung aufweisen. Aufgaben dieser Art lassen sich auf folgende Belastungsfälle zurückführen.

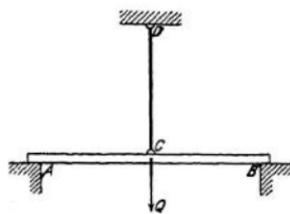


Fig. 65.

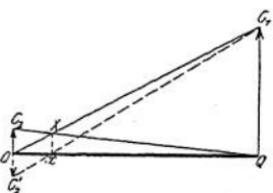


Fig. 66.

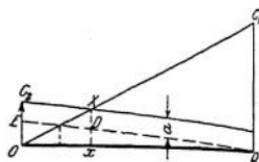


Fig. 67.

a) An dem Balken AB (Fig. 65) greife in der Mitte C die Last Q an. In C sei der Balken an der Zugstange CD aufgehängt; die Verteilung der Last auf Zugstange und Balken ist zu ermitteln. Würde die Last allein vom Balken getragen, so würde dieser eine Durchbiegung $y_1 = Q C_1$ (Fig. 66) erfahren; hinge die Last Q an der Zugstange, so würde diese einschließlich der Befestigungsstelle eine Senkung $y_2 = O C_2$ aufweisen. Die Last Q verteilt sich so auf Zugstange und Balken, daß die Senkung im Punkte C für beide gleich groß sein muß. Ist in Fig. 66 die Strecke $OQ = Q$, so bestimmt der Schnittpunkt x der Geraden OC_1 und OQ die Teile von Q , die auf die tragenden Stäbe entfallen, und zwar trägt die Zugstange Qx , der Balken Ox .

Besteht zwischen der Zugstange und der Befestigungsstelle der Spielraum a , so ist im senkrechten Abstand a die Parallele zu $C_2 Q$ (Fig. 67) zu ziehen, im übrigen in gleicher Weise zu verfahren. Fig. 67 zeigt den Einfluß eines solchen Spielraumes auf die Kraftverteilung sehr anschaulich und läßt seine Bedeutung um so mehr erkennen, als bei Zugstangen die Strecke OC_2 im allgemeinen klein zu sein pflegt.

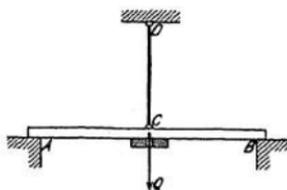


Fig. 68.

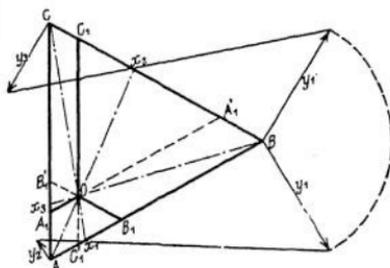


Fig. 69.

b) Außer der Zugstange sei noch ein Unterzug vorhanden (Fig. 68), durch den die Aufgabe zweifach statisch unbestimmt wird. Trägt der Unterzug die Last Q allein, so erfahre er im Punkte C die Senkung y_3 ; die Durchbiegung des Balkens AB infolge Q sei y_1 , die Verlängerung der Zugstange infolge Q sei y_2 . In Fig. 69 sei ABC ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge Q . Man teile $AB = Q$ im Verhältnis $y_1 : y_2$ und $BC = Q$ im Verhältnis $y_1 : y_3$, die Teilpunkte seien x_1 und x_2 ; die Verbindungslinien Ax_2 und Cx_1 schneiden sich in O . Durch diesen Punkt geht auch die Gerade Bx_3 , die man für die Seite CA finden würde. Zieht man durch O Parallelen zu den Dreieckseiten, so bestimmen OA_1 ; OB_1 und OC_1 die Teillasten, und zwar gehört OA_1 zu y_1 usw. Zur Ermittlung der Formänderungen dienen die Verfahren S. 430.

¹⁾ R. Baumann, Z. Ver. deutsch. Ing. 1913, S. 1911.

c) Die Last Q hänge an drei Stangen (Fig. 70), die symmetrisch angeordnet sein mögen. Wird zunächst die mittlere Zugstange weggelassen, so senkt sich der Angriffspunkt der Last um δ ; die mittlere Zugstange erfahre infolge der Belastung Q eine Verlängerung δ' ; dann verteilt sich die Last Q nach Fig. 66 und 67. Die Senkung δ bestimmt sich wie folgt: nach dem Satze von der Formänderungsarbeit wird

$$\delta Q = \sum S \cdot \Delta l$$

oder

$$\delta = \sum \frac{S}{Q} \cdot \Delta l = \sum \mathcal{E} \cdot \Delta l,$$

wobei S die Stabkräfte, \mathcal{E} die Stabkräfte für die Last $Q = 1$, Δl die Verlängerungen der einzelnen Stäbe durch die Last Q bedeuten.

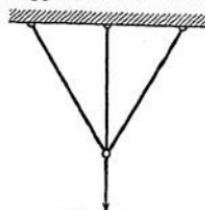


Fig. 70.

G. Zusammengesetzte Festigkeit.

a) Beanspruchung durch Normalspannungen.

1. Die Kraft wirkt ziehend. An einem Stabe (Fig. 71), der an dem einen Ende fest eingespannt ist, wirke die Kraft P exzentrisch in der Entfernung ϕ von der Stabachse. Werden in A zwei gleichgroße entgegengesetzt gerichtete Kräfte P angebracht, so ergibt sich eine Einzelkraft P in Richtung der Stabachse und ein Kräftepaar mit dem Moment $M = P \cdot \phi$, dessen Ebene in die Stabachse fällt. Die Einzelkraft P ruft eine Normalspannung σ_z hervor, die als gleichmäßig über den Querschnitt verteilt angenommen wird, so daß (Fig. 65b)

$$\sigma_z = \frac{P}{F}.$$

Das Kräftepaar beansprucht den Stab auf Biegung. Ist e die Entfernung der stärkst gespannten Faser von der Achse, so wird

$$\sigma_b = \frac{M}{J} \cdot e = \frac{P \cdot \phi}{J} \cdot e,$$

wobei das Trägheitsmoment auf die zu CS senkrecht stehende Achse yy zu beziehen ist. CS ist die Verbindungslinie des Angriffspunktes C der Kraft P mit dem Schwerpunkt S des Querschnittes und heißt Kraftlinie; die Achse yy ist Nulllinie für den nur auf Biegung beanspruchten Querschnitt.

Die Addition der Einzelspannungen ergibt die Gesamtspannung, und zwar wird

$$\max \sigma = \frac{P}{F} + \frac{P \cdot \phi}{J} \cdot e.$$

$$\min \sigma = \frac{P}{F} - \frac{P \cdot \phi}{J} \cdot e.$$

Dadurch verschiebt sich die Nulllinie des Querschnittes nach links (Fig. 65 d).

Für den Fall, daß $\frac{P}{F} > \frac{P \cdot \phi}{J} \cdot e$ ist, treten in dem Querschnitt nur Zugspannungen auf. Der Querschnitt muß so bemessen sein, daß die Bedingung

$$\frac{P}{F} + \frac{P \cdot \phi}{J} \cdot e < k_b$$

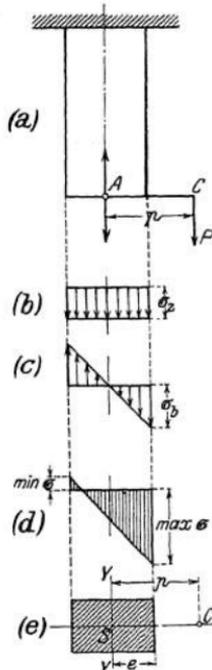


Fig. 71.

erfüllt ist. Doch gilt die Gleichung nur dann, wenn die Dehnungszahl als unveränderlich angenommen werden darf. Unterscheidet sich die zulässige Spannung für Biegung erheblich von der für Zug, wie es z. B. bei Gußeisen der Fall ist, so ergeben sich mit

$$k_b = \beta_0 \cdot k_z$$

die Beziehungen

$$\beta_0 \cdot \frac{P}{F} + \frac{P \cdot \rho}{J} \cdot e < k_b \quad \text{oder} \quad \frac{P}{F} + \frac{1}{\beta_0} \cdot \frac{P \cdot \rho}{J} \cdot e < k_z,$$

wobei

$$\beta_0 = \frac{k_b}{k_z} = \frac{\text{zulässige Biegungsspannung}}{\text{zulässige Zugspannung}}.$$

2. Die Kraft P wirkt drückend (Fig. 72). Zur vorläufigen Bestimmung der Abmessungen des erforderlichen Querschnittes führt man wieder die exzentrisch angreifende Kraft P auf eine Einzelkraft P in Richtung der Stabachse und ein Kräftepaar mit dem Moment $M = P \cdot \rho$ zurück. Entsprechend unter (a) erhält man aus der Bedingung: die größte auftretende Druckspannung darf einen zulässigen Wert nicht überschreiten

$$k > \frac{P}{F} + \frac{P \cdot \rho}{J} \cdot e.$$

Hierbei ist jedoch zu beachten, daß bei Stäben, deren Länge im Verhältnis zu den Querschnittsabmessungen groß ist, für ausreichende Knicksicherheit gesorgt werden muß. Infolge der exzentrisch angreifenden Kraft P wird sich der Stab durchbiegen; dadurch wird das Moment $M = P \cdot \rho$ um den Betrag f der Durchbiegung des freien Endes vergrößert. Aus der Differentialgleichung der elastischen Linie des Stabes

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot P(a + f - y)$$

folgt:

$$f = \rho \left[\frac{1}{\cos \left(l \sqrt{\frac{P}{EJ}} \right)} - 1 \right]$$

und damit

$$\max M = P(\rho + f) = \frac{P \cdot \rho}{\cos \left(l \sqrt{\frac{P}{EJ}} \right)}$$

so daß

$$\max \sigma = \frac{P \cdot \rho}{\cos \left(l \sqrt{\frac{P}{EJ}} \right)} \cdot \frac{e}{J} + \frac{P}{F} < k.$$

Auch hier ist J das Trägheitsmoment, bezogen auf die zur Kraftlinie senkrecht stehende Achse des Querschnitts. Ist P_0 diejenige Belastung, die ein Ausknicken des Stabes bei $\rho > 0$ herbeiführen wird, so muß außerdem die Bedingung

$$P \leq \frac{P_0}{\text{Ⓞ}}$$

erfüllt sein.

Ist der Hebelarm der exzentrisch angreifenden Kraft P im Vergleich zu den Abmessungen des Querschnittes sehr klein, so tritt die Formänderung und damit die Vergrößerung des Hebelarmes zurück. Das ergibt den einfachen Fall der

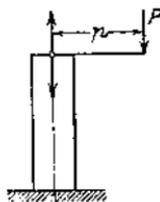


Fig. 72.

Beanspruchung durch eine Einzelkraft P auf Druck und ein Kräftepaar mit dem Moment $M = P \cdot p$ auf Biegung, so daß

$$\max \sigma = \frac{P}{F} + \frac{P \cdot p}{J} e < k.$$

In Fig. 73 b ist das Schaubild der Spannungen σ infolge der Einzelkraft P dargestellt; Fig. 73 c zeigt das Schaubild der Biegungsspannungen; Fig. 73 d das der resultierenden Spannungen.

Je weiter sich der Angriffspunkt von P von der Stabachse entfernt, desto geringer werden die Randspannungen σ an der von P am weitesten entfernt liegenden Kante, bis sie schließlich gleich Null werden für den Fall, daß die Biegungsspannungen gleich den Druckspannungen werden (Fig. 73 e, f). Wird die Forderung erhoben, daß nur Spannungen gleichen Vorzeichens in einem exzentrisch belasteten Querschnitt auftreten dürfen, so muß die Bedingung

$$\frac{P}{F} = \frac{P \cdot p}{J} \cdot e$$

erfüllt sein; daraus ergibt sich

$$p \leq \frac{J}{F \cdot e},$$

wobei e die Entfernung der Faserschicht bedeutet, deren Spannung Null werden soll.

Setzt man voraus, daß der Angriffspunkt von A auf der Hauptachse $x x$ des — rechteckigen — Querschnittes wandert (Fig. 73 g), so ist

$$J = J_v = \frac{b h^3}{12}; \quad e = \frac{h}{2}; \quad F = b h,$$

so daß

$$p = \frac{\frac{b h^3}{12}}{b \cdot h \cdot \frac{h}{2}} = \frac{h}{6}.$$

Wandert A auf der Hauptachse $y y$, so erhält man entsprechend

$$p = \frac{b}{6}.$$

Verbindet man die so erhaltenen vier Punkte des Querschnittes geradlinig, so erhält man die durch Strichelung hervorgehobene Fläche, die der Kern des Querschnittes heißt. Greift P innerhalb dieser Fläche an, so entstehen nur Spannungen gleichen Vorzeichens. Wandert der Angriffspunkt von P auf der Begrenzungslinie des Kernes, der sog. Kerngrenze, so ergeben sich Randspannungen bis zum Werte Null, ohne daß sie das Vorzeichen wechseln. Der Abstand r (in cm) jedes Kernpunktes vom Schwerpunkt S heißt die Kernweite oder Widerstandshalbmesser. In Figur 74 seien SI und SII die Hauptachsen des Querschnitts; J_I und J_{II} die Hauptträgheitsmomente. Wandert der Angriffspunkt der Kraft P auf der Kraftlinie SK , die unter dem Winkel α gegen die Hauptachse SI geneigt sein möge, dann ist die Richtung der Nulllinie durch die Beziehung

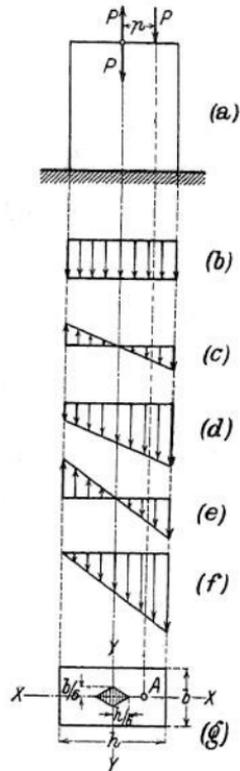


Fig. 73.

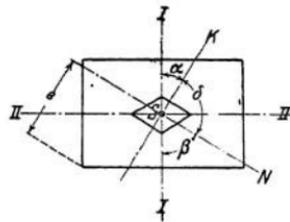


Fig. 74.

$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = J_I : J_{II}$ bestimmt. Mit $\delta = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ wird dann die Kernweite

$$r = \frac{J}{e \cdot F \cdot \sin \delta} = \frac{J'}{e \cdot F} = \frac{W'}{F},$$

wobei J das Trägheitsmoment bezogen auf die Nulllinie SN ist; und zwar ist $J = J_I \cdot \cos^2 \beta + J_{II} \cdot \sin^2 \beta$ und e die Entfernung der äußersten (gezogenen) Faser von der Nulllinie.

3. Kern und geringste Kernweite r_{\min} einiger Querschnitte.

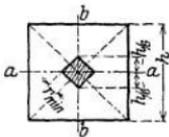


Fig. 75.

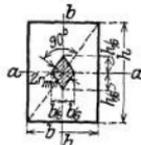


Fig. 76.

Quadrat (Fig. 75).

$$r_{\min} = \frac{h}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,1179 \cdot h,$$

$$r_a = r_b = \frac{h}{6},$$

Rechteck (Fig. 76).

$$r_{\min} = \frac{bh}{6\sqrt{b^2 + h^2}},$$

$$r_a = \frac{b}{6},$$

$$r_b = \frac{h}{6}.$$

Kreis (Fig. 77).

$$r_{\min} = \frac{1}{8} d = \text{konst.}$$

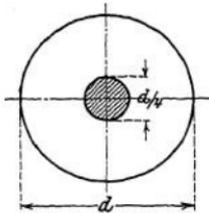


Fig. 77.



Fig. 78.

Kreisring (Fig. 78).

$$r_{\min} = \frac{D}{8} \cdot \left[1 + \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right] = \text{konst.}$$

4. Bestimmung der Randspannungen mit Hilfe des Kernes.

In Fig. 79 ist m der Angriffspunkt der Kraft P , v seine Entfernung von der x -Achse, die der Kraftlinie KK zugeordnet und der Nulllinie parallel ist. Sind y_a und y_i die Ordinaten der Randpunkte, so wird

$$\sigma_a = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{v \cdot y_a}{r_a^2} \right),$$

$$\sigma_i = \frac{P}{F} \left(1 - \frac{v \cdot y_i}{r_i^2} \right).$$

Aus $r_x^2 = \frac{J_x}{F} = -y_a \cdot k_a$ bzw. $-y_i \cdot k_i$ folgt mit p als Abstand des Angriffspunktes m vom Schwerpunkt O — auf der Kraftlinie KK gemessen — und r_a und r_i als zugehörigen Kernweiten

$$\sigma_a = \frac{P}{F} \cdot \frac{k_a - v}{k_a} = \frac{P(p - r_a)}{F \cdot r_a},$$

$$\sigma_i = \frac{P}{F} \cdot \frac{k_i + v}{k_i} = \frac{P(p + r_i)}{F \cdot r_i}.$$

Die Zähler der Gleichungen sind die Kernmomente.

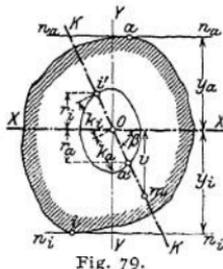


Fig. 79.

b) Beanspruchung durch Schubspannungen.

1. **Schub und Drehung.** Ein gerader Stab (Fig. 80) werde durch eine an seinem Umfange angreifende Kraft P beansprucht. Durch Hinzufügen zweier gleichgroßen entgegengesetzt gerichteten Kräfte P erhält man eine Einzelkraft P im Querschnitt wirkend und ein Kräftepaar, dessen Drehmoment $M_d = P \cdot r$ ist. Die Einzelkraft ruft die Schubspannung τ_s , das Kräftepaar die Schubspannung τ_d hervor. Die Resultante aus τ_s und τ_d liefert die Beanspruchung τ eines Querschnittselementes, die gleichzeitig senkrecht zum Querschnitt auftritt.

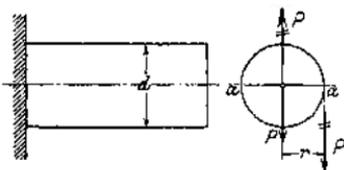


Fig. 80.

Für den Kreisquerschnitt ist die Schubspannung τ_s am größten für einen Durchmesser, der zur Wirkungslinie von P senkrecht steht (vgl. S. 418), und zwar ist

$$\tau_s = \frac{4}{3} \cdot \frac{P}{F} = \frac{16 \cdot P}{3 \cdot \pi \cdot d^2}.$$

Die durch das Kräftepaar mit dem Moment M_d hervorgerufene Randspannung ist nach S. 449

$$\tau_d = \frac{16 \cdot M_d}{\pi \cdot d^3}.$$

Die größte Beanspruchung tritt in den Punkten a des Querschnittes auf und ist

$$\tau = \tau_s + \tau_d = \frac{16 P}{3 \pi \cdot d^2} + \frac{16 M_d}{\pi \cdot d^3} = \frac{16}{\pi d^2} \left(\frac{P}{3} + \frac{M_d}{d} \right).$$

c) Beanspruchungen durch Normal- und Schubspannungen.¹⁾

Treten beide Arten von Spannungen gleichzeitig auf, so ergeben sich für den betreffenden Punkt des angegriffenen Körpers eine größte Spannung und eine größte Dehnung; beide stehen jedoch nicht in dem einfachen Verhältnis wie Normalspannung und Dehnung nach dem Hookeschen Gesetz $\varepsilon = \alpha \cdot \sigma$. Die Bedingung, „die größte auftretende Spannung soll unter einer für zulässig erachteten Grenze bleiben“, deckt sich in diesem Falle nicht mit der Bedingung „die größte auftretende Dehnung darf einen für zulässig zu erachtenden Wert nicht überschreiten“.

C. v. Bach schlägt vor, mit der letzteren Bedingung zu rechnen und sagt: „Da sich jedoch der Begriff der zulässigen Anstrengung als einer auf die Flächeneinheit bezogenen Kraft eingebürgert hat, es auch keine Schwierigkeiten bietet, zu jeder zulässigen Spannung eine entsprechende Dehnung zu bestimmen, so erscheint die Beibehaltung der auf die Flächeneinheit bezogenen Kraft als Maß der zulässigen Anstrengung ausführbar und berechtigt. Nur ist hierbei festzuhalten, daß dann in den Fällen gleichzeitigen Vorhandenseins von senkrecht zueinander stehenden Normalspannungen oder von Normal- und Schubspannungen an die Stelle der höchstens zulässigen Dehnung keine wirkliche, sondern nur eine gedachte Spannung tritt, nämlich der Quotient: zulässige Dehnung dividiert durch den Dehnungskoeffizienten.“

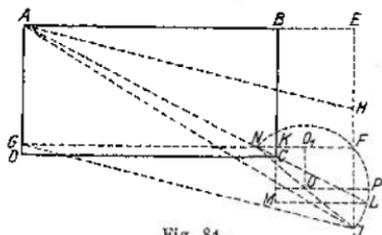


Fig. 81.

In Fig. 81 sei $ABCD$ ein Körperelement, dessen Faser AB in Richtung AB gedehnt und dessen Faser BC in Richtung BC verschoben wird. Infolge des gleichzeitigen Auftretens der Normalspannung σ und der Schubspannung τ geht die ursprüngliche Strecke AC in die Strecke AJ über.

¹⁾ Nach C. v. Bach, Elastizität und Festigkeit. 6. Aufl. Berlin 1911. Julius Springer.

Es ist

$$BE = \varepsilon AB$$

die Verlängerung von AB infolge σ ; die gleichzeitig auftretende Verkürzung infolge der Kontraktion ist

$$CK = \varepsilon_q \cdot BC.$$

Bedeutet γ die Schiebung, so ist

$$EH = FJ = \gamma \cdot AB.$$

Unter der Voraussetzung sehr kleiner Formänderungen ist die Verlängerung, die AC erfährt, gleich CL , so daß die verhältnismäßige Dehnung der Strecke AC

$$\varepsilon_1 = \frac{CL}{AC}$$

wird. Die Ähnlichkeit der Dreiecke $CM L$ und CBA liefert

$$CL : AC = LM : AB,$$

folglich

$$\varepsilon_1 = \frac{LM}{AB}.$$

Da AB konstant ist, wird ε_1 seinen Größtwert erreichen, wenn LM ihn erreicht. Mit den Bezeichnungen der Fig. 81 wird

$$\begin{aligned} FN &= FK + KN, \\ &= \varepsilon \cdot AB + CK \cdot \frac{AB}{BC}, \\ &= \varepsilon \cdot AB + \varepsilon_q \cdot AB, \\ FN &= (\varepsilon + \varepsilon_q) \cdot AB. \end{aligned}$$

Der Halbkreis NFJ ist über der Hypotenuse NJ des rechtwinkligen Dreiecks NFJ errichtet, sein Mittelpunkt ist O .

ML wird am größten, wenn L auf dem Kreise am weitesten nach rechts liegt; das tritt ein, wenn ML mit dem Durchmesser durch O zusammenfällt; d. h.

$$\max LM = KO_1 + \text{Radius} = KO_1 + \frac{1}{2} NJ.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} KO_1 &= NO_1 - NK = \frac{1}{2} NF - NK, \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon + \varepsilon_q) \cdot AB - CK \cdot \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2} (\varepsilon + \varepsilon_q) \cdot AB - \varepsilon_q \cdot AB, \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon_q) \cdot AB. \end{aligned}$$

Aus $\overline{NJ}^2 = \overline{NF}^2 + \overline{FJ}^2$ folgt

$$NJ = \sqrt{(\varepsilon + \varepsilon_q)^2 \cdot AB^2 + \gamma^2 \cdot AB^2} = AB \sqrt{(\varepsilon + \varepsilon_q)^2 + \gamma^2},$$

so daß sich ergibt

$$\max LM = \frac{1}{2} AB (\varepsilon - \varepsilon_q) + \frac{1}{2} AB \sqrt{(\varepsilon + \varepsilon_q)^2 + \gamma^2},$$

folglich

$$\max \left(\frac{LM}{AB} \right) = \max \varepsilon_1 = \frac{1}{2} [\varepsilon - \varepsilon_q + \sqrt{(\varepsilon + \varepsilon_q)^2 + \gamma^2}].$$

Mit $\varepsilon_q = \frac{\tau}{m}$ wird

$$\begin{aligned} \max \varepsilon_1 &= \frac{\varepsilon - \frac{\tau}{m}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\varepsilon + \frac{\tau}{m}\right)^2 + \gamma^2}, \\ \max \varepsilon_1 &= \frac{m-1}{2m} \cdot \varepsilon + \frac{m+1}{2m} \sqrt{\varepsilon^2 + \left(\frac{m}{m+1}\right)^2 \cdot \gamma^2}. \end{aligned}$$

Solange Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen besteht ist

$$\varepsilon \approx \alpha \cdot \sigma; \quad \gamma = \beta \cdot \tau = 2\alpha \cdot \frac{m+1}{m} \cdot \tau;$$

mit diesen Werten ergibt sich

$$\max \varepsilon_1 = \alpha \left(\frac{m-1}{2m} \cdot \sigma + \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right)$$

und als größte Anstrengung

$$\max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = \frac{m-1}{2m} \cdot \sigma + \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Die Richtung der größten Anstrengung fällt in die Richtung von NP ; ist

$$\sphericalangle PNV = \sphericalangle PNJ = \varphi,$$

so wird

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{FJ}{NF} = \frac{\gamma \cdot A \cdot B}{(\varepsilon + \varepsilon_\gamma) \cdot A \cdot B}$$

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{\gamma}{\varepsilon + \varepsilon_\gamma} = \frac{m}{m+1} \cdot \frac{\gamma}{\varepsilon} = 2 \cdot \frac{\tau}{\sigma}$$

Ist das Material nicht in allen Teilen gleich beschaffen, so muß die Beziehung

$$\gamma = 2 \alpha \frac{m+1}{m} \cdot \tau$$

einen Koeffizienten α_0 erhalten, der andeuten soll, daß die zulässige Schubspannung zur zulässigen Normalspannung für die zwischen 4 und 3 liegende Größe m nicht immer in dem Verhältnis

$$m : (m+1) = 4 : 5 \text{ bis } 3 : 4 = 1 : 1,25 \text{ bis } 1 : 1,03$$

steht.

Mit $\gamma = 2 \alpha \cdot \frac{m+1}{m} \cdot \alpha_0 \tau$ erhält man

$$\max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = \frac{m-1}{2m} \cdot \sigma + \frac{m+1}{2m} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \cdot \tau)^2}$$

wobei

$$\alpha_0 = \frac{\text{zulässige Anstrengung bei Normalspannung}}{\frac{m+1}{m} \cdot \text{zulässige Anstrengung bei Schubspannung}}$$

ist und Anstrengungsverhältnis heißt.

Mit $m = \frac{10}{3}$ wird

$$\max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = 0,35 \cdot \sigma + 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \cdot \tau)^2}$$

$$\alpha_0 = \frac{\text{zulässige Anstrengung bei Normalspannung}}{1,3 \cdot \text{zulässige Anstrengung bei Schubspannung}}$$

Erfährt der Stab eine Zusammentrückung, so wird

$$\max \left(-\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = \frac{m-1}{2m} \cdot \sigma - \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \cdot \tau)^2}$$

$$= 0,35 \sigma - 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \cdot \tau)^2}$$

$$\max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) \quad \text{und} \quad \max \left(-\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right)$$

heißen ideale Hauptspannungen und lassen sich durch Zeichnung finden, wenn die Spannungen als Strecken aufgefaßt werden; so sind die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks ABC (Fig. 82) gleich σ , bzw. $2\alpha_0 \cdot \tau$, dann ist die Hypotenuse

$$AC = \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \cdot \tau)^2}$$

Ohne große Abweichungen ergeben sich angenähert die idealen Hauptspannungen zu

$$\max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = \frac{1}{3} \cdot \sigma + \frac{2}{3} \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \cdot \tau)^2}$$

$$\max \left(-\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = \frac{1}{3} \sigma - \frac{2}{3} \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \cdot \tau)^2}$$

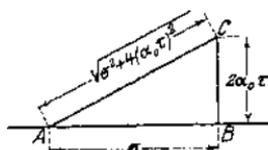


Fig. 82.

1. Zug (Druck) und Schub. Die äußeren Kräfte greifen in Richtung der Stabachse und senkrecht dazu an; die Normalkraft P ruft eine Normalspannung

$$\sigma = \frac{P}{F}$$

die Schubkraft Q eine Schubspannung (siehe S. 417)

$$\tau = \frac{Q \cdot S}{J \cdot 2z \cdot \cos \varphi}$$

hervor; die größte ideale Hauptspannung wird

$$\max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = \frac{1}{3} \sigma + \frac{2}{3} \sqrt{\sigma^2 + 4 \alpha_0^2 \cdot \tau_{\max}^2}$$

und darf den zulässigen Wert k_z bzw. k nicht überschreiten; d. h.

$$\max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) < k_z; \quad \text{wobei} \quad \alpha_0 = k_z : 1,3 k_z.$$

Wirkt P drückend, so muß

$$\max \left(- \frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = \frac{1}{3} \sigma + \frac{2}{3} \sqrt{\sigma^2 + 4 \alpha_0^2 \tau_{\max}^2} < k$$

sein, wobei $\alpha_0 = k : 1,3 k_z$ ist.

2. Biegung und Schub. Die angreifenden Kräfte ergeben ein Kräftepaar M_b , dessen Ebene in die Stabachse fällt, und eine Querkraft $Q = P$ senkrecht zur Stabachse (Fig. 83).

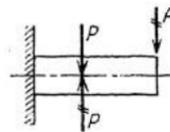


Fig. 83.

Die Normalspannung σ wird

$$\sigma = \frac{M_b}{W} = \frac{P \cdot x}{W}.$$

Die Schubspannung

$$\tau = \frac{Q \cdot S}{J \cdot 2z \cdot \cos \varphi}.$$

Die maximale Biegungsspannung tritt am Rande auf, wo die Schubspannung gleich Null ist.

Für den Kreisquerschnitt (vgl. S. 418) ist

$$\tau_y = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi \cdot r^2} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r} \right)^2},$$

wobei y die Entfernung von der Nulllinie bedeutet; in derselben Entfernung wird

$$\sigma_y = \frac{M_b}{J} \cdot y,$$

wobei $J = \frac{\pi}{4} r^4$ das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes bezogen auf die Nulllinie bedeutet. Das Schaubild der Beanspruchungen zeigt Fig. 84, und zwar ist

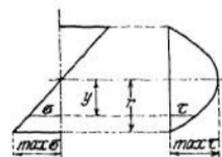


Fig. 84.

$$\max \sigma = \frac{M_b \cdot r}{J} = \frac{4 M_b}{\pi \cdot r^3},$$

$$\max \tau = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{F}.$$

Die ideale Hauptspannung wird in der Entfernung y

$$\max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{M_b}{J} \cdot y + \frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{M_b}{J} y \right)^2 + 4 \alpha_0^2 \cdot \tau^2},$$

$$\max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = \frac{1}{3} \frac{M_b}{J} \cdot y + \frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{M_b}{J} \cdot y \right)^2 + 4 \alpha_0^2 \cdot \frac{16}{9} \cdot \frac{Q^2}{\pi^2 \cdot r^4} \left[1 - \left(\frac{y}{r} \right)^2 \right]},$$

Mit $M_b = P \cdot x$ und $Q = P$ wird

$$\max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{P}{r^4} \cdot x y + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{16 P^3}{\pi^2 r^8} \cdot (x y)^2 + \alpha_0^2 \cdot \frac{64}{9 \cdot \pi^2} \cdot \frac{P^2}{r^4} \left[1 - \left(\frac{y}{r} \right)^2 \right]},$$

$$\max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{P}{r^4} \left\{ x \cdot y + 2 \sqrt{(x y)^2 + \frac{4}{9} r^4 \alpha_0^2 \left(1 + \frac{y^2}{r^2} \right)} \right\}.$$

Es ist der Querschnitt zu wählen, für den die rechte Seite der Gleichung zum Maximum wird.

Nach C. v. Bach genügt es, den Stab auf Biegung allein zu berechnen, solange $x > 0,25 d$, auf Schub allein, wenn $l < 0,25 d$ ist. Für den rechteckigen Querschnitt genügt die Berechnung auf Biegung allein, wenn $x > 0,325 h$, auf Schub allein, wenn $x < 0,325 h$ ist.

3. Zug (Druck) und Drehung. Die angreifenden Kräfte ergeben eine in die Richtung der Stabachse fallende Einzelkraft P und ein Kräftepaar senkrecht zur Stabachse mit dem Moment M_d . Die axiale Kraft P erzeugt eine Normalspannung

$$\sigma = \frac{P}{F},$$

das Moment M_d eine Schubspannung τ , deren Größe nach Abschnitt E, Drehfestigkeit, S. 449, zu ermitteln ist. Für den Fall, daß σ als gleichförmig verteilt angesehen werden darf, tritt die größte Anstrengung bei max τ auf. In der Gleichung

$$k_z \geq 0,35 \sigma + 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \cdot \tau)^2}$$

ist

$$\alpha_0 = \frac{k_z}{1,3 k_d},$$

für Druck wird

$$\alpha_0 = \frac{k}{1,3 k_d}.$$

Der Stab muß gegen Knicken gesichert sein (vgl. S. 410).

4. Biegung und Drehung. Die angreifenden Kräfte bilden ein Kräftepaar, dessen Ebene durch die Stabachse geht mit dem Moment M_b , und ein Kräftepaar, dessen Ebene senkrecht zur Stabachse ist, mit dem Moment M_d .

M_b ruft eine Normalspannung

$$\sigma = \frac{M_b}{W}.$$

M_d eine Schubspannung

$$\tau = \frac{M_d}{W_p}$$

hervor, die nach der Hauptgleichung zu einer resultierenden Spannung zusammengesetzt werden, wobei zu beachten ist, daß σ und τ diejenigen zugehörigen Werte sind, für die die resultierende Anstrengung am größten wird. Beim Kreisquerschnitt fallen die Punkte der größten Normalspannung und der größten Schubspannung in die Oberfläche des Stabes, d. h. an den Rand des Querschnittes.

Mit $W = \frac{\pi d^3}{32}$ und $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$ wird

$$k_b \geq 0,35 \frac{M_b}{W} + 0,65 \sqrt{\left(\frac{M_b}{W}\right)^2 + 4\left(\alpha_0 \cdot \frac{M_d}{W_p}\right)^2},$$

$$W_p^2 = 4W^2,$$

$$W \cdot k_b \geq 0,35 M_b + 0,65 \sqrt{M_b^2 + (\alpha_0 \cdot M_d)^2} = M_i.$$

Setzt man $M_i = M_b \left[0,35 + 0,65 \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha_0 M_d}{M_b}\right)^2} \right] = \xi \cdot M_b$, so ist

$$\xi = 0,35 + 0,65 \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha_0 M_d}{M_b}\right)^2}$$

als Funktion von $\frac{\alpha_0 M_d}{M_b}$ eine gleichseitige Hyperbel, die sich nach der y-Achse. öffnet und deren Abszissenachse um 0,35 nach unten verschoben ist (Fig. 85).

Beispiel: Es sei $M_b = 24\,000$ cmkg, $M_d = 18\,000$ cmkg, $\alpha_0 = 1$, dann ist

$$\frac{\alpha_0 \cdot M_d}{M_b} = \frac{18\,000}{24\,000} = 0,75.$$

Aus der Kurve ergibt sich $\xi = 1,16$, so daß

$$M_t = \xi \cdot M_b = 1,16 \cdot 24\,000 = \sim 27\,800 \text{ cmkg.}$$

Auch für den Kreisringquerschnitt fallen die Punkte der größten Spannungen in den Rand des Querschnittes; hierbei ist

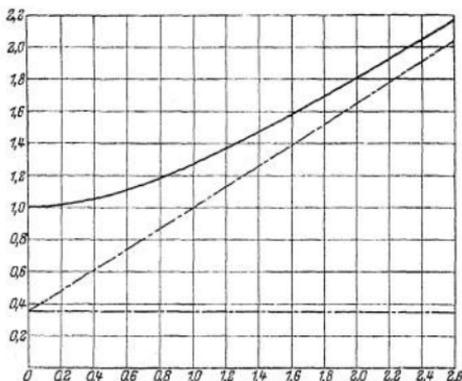


Fig. 85.

$$W = \frac{\pi D^3}{32} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right]$$

$$\alpha_0 = \frac{k_b}{1,3 k_d}.$$

Rechteckiger Querschnitt. Die Ebene des biegenden Kräftepaars läuft parallel zur langen Seite des Rechtecks (Fig. 86). Dann fallen die größten Normalspannungen in die kurzen Seiten (2), die größten Schubspannungen in die neutrale Achse 1—1. Es ist

$$\max \sigma = \frac{6 M_b}{b h^2},$$

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{9 M_d}{2 b^2 h}.$$

Die Verteilung der Schubspannungen über den rechteckigen Querschnitt infolge des Drehmomentes M_d siehe Abschnitt Drehfestigkeit, S. 449.

Die resultierende Spannung σ_r in der Entfernung y von der Achse 1—1 ist

$$\sigma_r = 0,35 \cdot \sigma + 0,65 \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}.$$

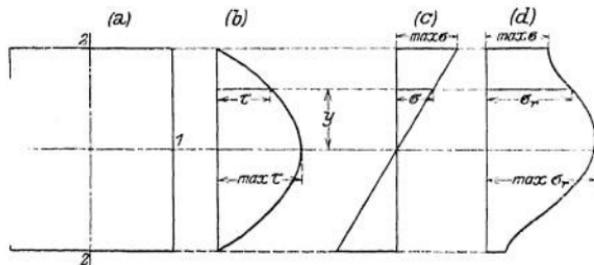


Fig. 86.

Berechnet man diese Werte für eine Reihe von Punkten und trägt die Ordinaten von einer Vertikalen aus ab, so erhält man die Kurve der resultierenden Spannungen, aus der man mit genügender Genauigkeit die größte Anstrengung entnehmen kann.

Liegt die Ebene des biegenden Kräftepaars beliebig, so zerlegt man M_b in M_1 mit der Achse 1—1 und M_2 mit der Achse 2—2, dann lautet die Festigkeitsbedingung

$$\frac{1}{6} b h^2 \cdot k_b \geq 0,35 M_1 + 0,65 \sqrt{M_1^2 + \left(\frac{3}{2} \alpha_0 \cdot M_d \right)^2},$$

$$\frac{1}{6} b^2 h \cdot k_b \geq 0,35 M_2 + 0,65 \sqrt{M_2^2 + \left(\frac{3}{2} \alpha_0 \cdot M_d \right)^2}$$

wobei noch nachzuprüfen ist, ob

$$\frac{M_1}{\frac{1}{6} b h^2} + \frac{M_2}{\frac{1}{6} b^2 h} \leq k_b.$$

Für $M_1 = 0$ — d. h. die Ebene des biegenden Momentes läuft parallel zur kurzen Seite des Rechtecks — tritt die größte Anstrengung in den Punkten 22 auf; dann heißt die Festigkeitsbedingung

$$\frac{1}{6} b^2 h \cdot k_b \geq 0,35 M_b + 0,65 \sqrt{M_b^2 + (\alpha_0 M_d)^2}.$$

III. Festigkeit von Stäben mit gekrümmter Achse.

Auf das Balkenstückchen AA_1B_1B (Fig. 87) wirke die Normalkraft N und das Biegemoment M , unter deren Einfluß es die Gestalt $A'A_1B_1B'$ annimmt. Die Momente werden positiv gerechnet, wenn die Krümmung stärker wird.

In dem ursprünglichen Zustande schneiden sich die Endquerschnitte AB und A_1B_1 in der Krümmungsachse O . Die deformierte Gestalt des Trägerstückchens kann man entstanden denken durch eine Drehung des Querschnittes A_1B_1 um die Krümmungsachse O um den Winkel φ_1 und darauf um die Schwerachse S um den Winkel φ_2 ; dann ist die gesamte Winkeländerung $\varphi_1 + \varphi_2$ ¹⁾. Diese Annahme ist zulässig, solange die Querschnitte bei der Deformation eben bleiben. Die Drehung um φ_1 setzt eine im Schwerpunkt S angreifende Normalkraft P_0 , die Drehung um φ_2 eine exzentrisch angreifende Normalkraft P' voraus.

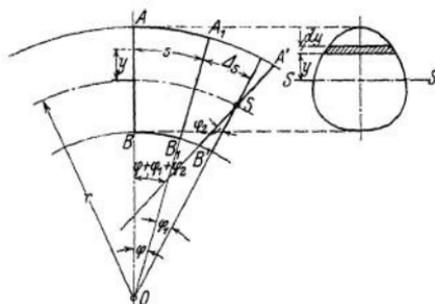


Fig. 87.

Die ursprüngliche Länge der — unendlich kleinen — Faser s ist

$$s = (r + y) \varphi,$$

die Verlängerung ist

$$\Delta s = (r + y) \varphi_1.$$

Demnach ist die Dehnung

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta s}{s} = \frac{(r + y) \cdot \varphi_1}{(r + y) \cdot \varphi} = \frac{\varphi_1}{\varphi}.$$

Da ε konstant ist, so muß auch die Spannung gleichmäßig über den Querschnitt verteilt angenommen werden; das trifft nach S. 391 nur bei einer im Schwerpunkt angreifenden Kraft P_0 zu, die eine Spannung liefert

$$\sigma_0 = \frac{P_0}{F}.$$

Bei der Drehung des Querschnittes um die Schwerachse SS erfährt die Faser $s = (r + y) \varphi$ eine Verlängerung $y \cdot \varphi_2$, mithin ist die Dehnung

$$\varepsilon_2 = \frac{y \cdot \varphi_2}{(r + y) \cdot \varphi} = \frac{\varphi_2}{\varphi} \cdot \frac{y}{r + y}$$

und die Spannung

$$\sigma' = E \cdot \varepsilon_2 = \frac{\varphi_2}{\varphi} \cdot E \cdot \frac{y}{r + y}.$$

¹⁾ Nach M. Tolle, Die Regeln der Kraftmaschinen. 2. Aufl. Berlin 1909. Julius Springer.

Die Kurve der Spannungsverteilung ist nach Abschnitt Mathematik, S. 123, Beispiel 1 eine gleichseitige Hyperbel, die durch den Schwerpunkt S verläuft.

Für das Flächenelement dF von der Höhe dy ist die Spannung σ' als konstant anzusehen; die innere Kraft, mit der das Flächenelement dF an der Kraftübertragung teilnimmt, ist

$$dP' = \sigma' \cdot dF.$$

Die Resultante sämtlicher inneren Kräfte ist dann

$$P' = \int dP' = \int \sigma' \cdot dF = \int \frac{\varrho_2}{\varphi} \cdot E \cdot \frac{y}{r+y} \cdot dF.$$

Setzt man

$$\int \frac{y \cdot dF}{r+y} = F',$$

so wird

$$P' = \frac{\varrho_2}{\varphi} \cdot E \cdot F'.$$

Ist x die Entfernung der Resultante P' von der Krümmungssache durch O , dann ist ihr statisches Moment $P' \cdot x$ gleich der Summe der statischen Momente, bezogen auf dieselbe Achse; d. h.

$$P' \cdot x = \int \sigma' \cdot dF \cdot (r+y) = \int \frac{\varrho_2}{\varphi} \cdot E \cdot \frac{y \cdot dF}{r+y} \cdot (r+y) = \frac{\varrho_2}{\varphi} \cdot E \cdot \int y \cdot dF.$$

Als Summe der statischen Momente der Flächenteilchen bezogen auf die Schwerachse ist $\int y \cdot dF = 0$, also auch $x = 0$: d. h. die Kraft P' geht durch die Krümmungssache.

Aus

$$\sigma' = \frac{\varrho_2}{\varphi} \cdot E \cdot \frac{y}{r+y}$$

folgt mit

$$P' = \frac{\varrho_2}{\varphi} \cdot E \cdot I'$$

$$\sigma' = \frac{P'}{I'} \cdot \frac{y}{r+y}.$$

Ermittlung der Hilfsfläche $F' = \int \frac{y \cdot dF}{r+y}$. Da y zu beiden Seiten der Schwerachse SS verschiedenes Vorzeichen hat, läßt sich F' in zwei Einzelflächen F_1 und F_2 zerlegen, von denen F_1 den Werten $y > r$ und F_2 den Werten $y < r$ entspricht. Die Begrenzungslinien der Flächen F_1 und F_2 findet man durch Reduktion der Ordinaten der Fläche F mit dem Faktor

$$\frac{y}{r+y}$$

zeichnerisch wie folgt:
Ziehe (Fig. 88) den Strahl OA und dazu durch den Schwerpunkt S eine Parallele, die auf der Horizontalen durch A den gesuchten Punkt B abschneidet; derselbe Strahl OA liefert gleichzeitig den Punkt B_1 der Fläche F_2 . Die Differenz der Flächen F_1 und F_2 ergibt die Fläche F' , da $F_2 - F_1 = F'$ ist.

Liegt der Punkt O von der Schwerachse ziemlich weit entfernt, so wird F' sehr klein. Setzt man

$$\int \frac{y \cdot dF}{r+y} = F' = \kappa \cdot F$$

und

$$r^2 \int \frac{y \cdot dF}{r+y} = \kappa \cdot F \cdot r^2 = J_0,$$

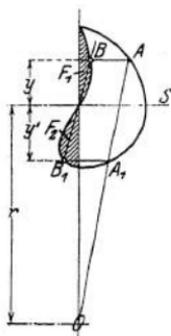


Fig. 88.

so wird für r sehr viel größer als y

$$J_0 = J,$$

gleich dem äquatorialen Trägheitsmoment des Querschnitts, bezogen auf die Schwerachse SS .

Mit $F' = \alpha \cdot F$ geht die Gleichung für die Spannung σ über in

$$\sigma' = \frac{P'}{\alpha \cdot F} \cdot \frac{y}{r + y}.$$

Verlegt man die in O angreifende Kraft P' (Fig. 89) nach dem Schwerpunkt S des Querschnitts (vgl. Mechanik, S. 270), so erhält man eine Einzelkraft P' und ein Kräftepaar, dessen Moment

$$P' \cdot r = M$$

ist. Da außerdem noch eine Normalkraft N im Schwerpunkt angreifen soll, so muß

$$P_0 = P' + N = \frac{M}{r} + N$$

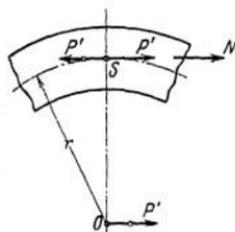


Fig. 89.

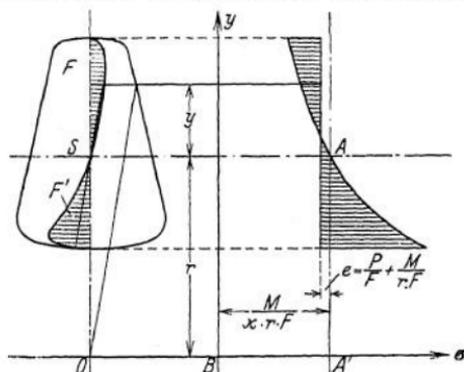


Fig. 90.

sein. Die resultierende Spannung im Querschnitt wird demnach

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma',$$

und es ergibt sich die Bachsche Formel¹⁾

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{r \cdot F} + \frac{M}{\alpha \cdot r \cdot F} \cdot \frac{y}{r + y}.$$

Die Spannungskurve ist infolge der beiden ersten konstanten Glieder eine gleichseitige Hyperbel, die nicht durch den Schwerpunkt S geht (Fig. 90). Ihre Konstruktion ergibt sich nach Fig. 31 Abschnitt Mathematik, S. 123: Durch Vergleich des letzten Gliedes

$$\sigma' = \frac{P'}{\alpha \cdot F} \cdot \frac{y}{r + y} = \frac{M}{\alpha \cdot r \cdot F} \cdot \frac{y}{r + y}$$

mit der Gleichung

$$y = \frac{bx}{a + x}$$

der gleichseitigen Hyperbel ergeben sich die Koordinaten des Anfangspunktes und damit die Lage der Asymptoten zu

$$a = r \quad \text{und} \quad b = \frac{P'}{\alpha \cdot F} = \frac{P'}{F'} = \frac{M}{\alpha \cdot r \cdot F}.$$

¹⁾ C. v. Bach, Elastizität und Festigkeit. S. 461. Berlin 1911. Julius Springer.

Man nehme einen beliebigen Punkt A auf der Schwerachse an, ziehe in der Entfernung r eine zur Schwerachse parallele Gerade $B\sigma$ (Fig. 90), mache $A'B = \frac{P'}{z \cdot F} = \frac{P'}{F'} = \frac{M}{z \cdot r \cdot F}$, ziehe $B\gamma \perp B\sigma$ und konstruiere nach Fig. 26, S. 120 die gleichseitige Hyperbel. Die beiden ersten Glieder der Gleichung

$$\sigma_0 = \frac{P_0}{F} = \frac{P}{F} + \frac{M}{r \cdot F}$$

stellen eine Parallele zur y -Achse dar, die den Abstand

$$e = \frac{P_0}{F} = \frac{P}{F} + \frac{M}{r \cdot F}$$

von der Geraden AA' hat. Der Schnittpunkt der Geraden mit der Hyperbel ergibt die Lage der Nulllinie des Querschnittes und damit das Schaubild der Spannungsverteilung, das in Fig. 90 durch Strichelung hervorgehoben ist.

Anwendung der Tolleschen Gleichung auf die

Festigkeitsberechnung eines Schwungrades.

1. Berechnung der Spannungen im Kranz. Sind die Arme gleichmäßig auf den Umfang verteilt, so genügt die Berechnung eines Kranzstückes zwischen zwei Armen. Es seien

2α der Zentriwinkel für das Kranzstück im Bogenmaß,

φ der Zentriwinkel für einen beliebigen Kranzquerschnitt,

C die Fliehkraft des Kranzstückes in kg,

Z der ganze von jedem Arm auf den Kranz radial nach innen ausgeübte Zug in kg,

E das Elastizitätsmaß für den Baustoff des Kranzes in kg/cm^2 ,

E_1 das Elastizitätsmaß für den Baustoff der Arme in kg/cm^2 ,

F die Querschnittsfläche des Kranzes in cm^2 ,

F' die Hilfsfläche (vgl. S. 472) in cm^2 ,

r der Nabenhalbmesser in cm,

$\omega = \frac{\pi n}{30}$ die Winkelgeschwindigkeit des Rades,

γ_1 das Gewicht der Volumeneinheit des Armes in kg/cm^3 ,

$g = 981 \text{ cm/sek}^2$ die Erdbeschleunigung,

f_a, f_m, f_i der äußere, mittlere und innere Armquerschnitt in cm^2 ,

f der konstante Armquerschnitt bei prismatischen Armen in cm^2 ,

l die Länge des Armes in cm,

Al die Verlängerung des Armes in cm durch die eigene Fliehkraft,

T in kg die Resultante aus den Kräften, die von den benachbarten Querschnitten auf das abgetrennte Kranzstück tangential ausgeübt werden,

T_0 die tangentiale Spannkraft in kg, die bei freischwebend gedachtem Kranzring auftreten würde,

Q in kg das Gewicht der Stoßkonstruktion,

C_q die durch Q erzeugte Fliehkraft in kg,

$$A = \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \cos \alpha,$$

$$B = \frac{1}{4} \left(\text{ctg} \alpha + \alpha - \frac{1}{\alpha} \right),$$

$$C = \frac{\cos \alpha}{\alpha} + \sin \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{2}{\alpha}$$

Konstanten, die von der Armzahl abhängig sind und folgender Tabelle entnommen werden können:

Tabelle.

Armzahl =	4	6	8	10
$\alpha =$	$\frac{\pi}{4} = 0,7854$	$\frac{\pi}{6} = 0,5236$	$\frac{\pi}{8} = 0,3927$	$\frac{\pi}{10} = 0,3142$
$\sin \alpha =$	0,70711	0,5	0,38268	0,30902
$\cos \alpha =$	0,70711	0,86603	0,92388	0,95106
$\text{ctg} \alpha =$	1	1,73205	2,41421	3,07768
$A =$	0,19367	0,08938	0,05110	0,03308
$B =$	0,12788	0,08621	0,06478	0,05153
$C =$	0,12659	0,08157	0,06345	0,05373

Zwischen P_0 , Z und T bestehen die Beziehungen

$$P_0 \left(1 + \frac{F'}{F} \right) \alpha + \frac{Z}{2} = T_0 \cdot \alpha + \frac{C_q}{2};$$

$$T = T_0 - \frac{Z}{2} \text{ctg} \alpha + \frac{C_q}{2 \sin \alpha};$$

$$P_0 \left(A - \frac{F'}{F} \right) + Z \left(\frac{E}{E_1} \cdot \frac{F'}{f_m} \cdot \frac{l}{R} + B \right) = - \frac{E \cdot F' \cdot \Delta l}{R} + T_0 \cdot A + C_q \cdot C.$$

Für die Kranzquerschnitte ergeben sich dann:

1. für sämtliche Querschnitte eine gleichgroße, gleichmäßig verteilte Zugspannung

$$\sigma_0 = \frac{P_0}{F}.$$

2. Biegungsspannungen σ' , die von P' herrühren

$$\sigma' = \frac{P'}{F'} \cdot \frac{y}{r + y},$$

wobei

$$P' = T_0 - P_0 + (T - T_0) \cos \varphi - \frac{Z}{2} \cdot \sin \varphi.$$

Sofern R sehr groß gegen die Abmessungen des Querschnittes ist, siehe S. 472.

Die größte Biegungsanstrengung des Kranzes findet man für $\varphi = 0$, d. h. für die Querschnitte neben dem Arm. Dort ist

$$\begin{aligned} \max P' &= T_0 - P_0 + T - T_0 = T - P_0 \\ &= T_0 - P_0 + \frac{C_q}{2 \sin \alpha} - \frac{Z}{2} \text{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

In der Mitte zwischen zwei Armen wird mit $\varphi = \alpha$

$$\begin{aligned} P'_\alpha &= T_0 - P_0 + (T - T_0) \cos \alpha - \frac{Z}{2} \cdot \sin \alpha \\ &= T_0 - P_0 + \left(\frac{C_q}{2 \sin \alpha} - \frac{Z}{2} \text{ctg} \alpha \right) \cos \alpha - \frac{Z}{2} \cdot \sin \alpha \\ P'_\alpha &= T_0 - P_0 + \frac{C_q}{2} \cdot \text{ctg} \alpha - \frac{Z}{2 \sin \alpha}. \end{aligned}$$

2. Berechnung der Spannungen in den Armen infolge der Fliehkräfte; es ist bei konstantem Querschnitt

$$\Delta l = \frac{\omega^2 \gamma_1}{g \cdot E_1} \cdot l^3 \left(\frac{r}{2} + \frac{l}{3} \right),$$

$$Z = 2\alpha \left[T_0 - P_0 \left(1 + \frac{F'}{F} \right) \right] + C_q.$$

Ein Querschnitt im Abstand x vom äußeren Ende des Armes erfährt eine Zugspannung

$$\sigma_x = \frac{\omega^2 \gamma_1}{g} \cdot x \left(r + l - \frac{x}{2} \right).$$

Infolge der Spannkraft Z tritt noch eine Zugspannung $\sigma_z = \frac{Z}{f}$ hinzu, so daß der äußere Armquerschnitt die Zugspannung $\sigma_a = \sigma_z = \frac{Z}{f}$, der innere Armquerschnitt eine Zugspannung $\sigma_i = \frac{Z}{f} + \frac{\omega^2 \gamma_1}{g} \cdot l \left(r + \frac{l}{2} \right)$ auszuhalten hat.

Nimmt der Querschnitt nach außen hin ab, so wird, wenn die Armquerschnitte eine Funktion 2. Grades des Abstandes x vom Armende sind, die gesamte Fliehkraft

$$C = \frac{\omega^2 \cdot \gamma \cdot l}{6g} \left[f_i r + 4 f_m \left(r + \frac{l}{2} \right) + f_a (r + l) \right],$$

$$\max \sigma_{ic} = \frac{\omega^2 \cdot \gamma \cdot l}{6g} \left[r + 4 \cdot \frac{f_m}{f_i} \left(r + \frac{l}{2} \right) + \frac{f_a}{f_i} (r + l) \right].$$

(Die Annahme trifft bei geradliniger Begrenzung in der Längsrichtung zu.)

Verjüngt sich der Arm nur nach einer Richtung, so haben die Querschnitte eine Abhängigkeit 1. Grades von x , dann ist

$$C = \frac{\omega^2 \gamma \cdot l}{6g} [f_i(3r + l) + f_a(3r + 2l)],$$

$$\sigma_{ic} = \frac{\omega^2 \gamma \cdot l}{6g} \left[3r + l + \frac{f_a}{f_i} (3r + 2l) \right].$$

Mit hinreichender Genauigkeit¹⁾ bestimmt sich die Verlängerung des Armes infolge der Eigenfliehkraft zu

$$\Delta l = 0,6 \frac{\sigma_{ic}}{E_1} \cdot l \quad \text{bis} \quad 0,7 \frac{\sigma_{ic}}{E_1} \cdot l.$$

Bei der Schätzung der Zahl $0,6 \div 0,7$ ist zu beachten, daß die Biegungsspannung im Arm um so größer ist, je kleiner die Verlängerung des Armes ist.

IV. Festigkeit der Federn.

Es bedeuten:

P die zulässige Belastung (Tragfähigkeit) der Feder in kg,

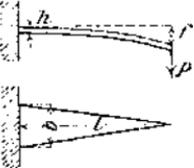
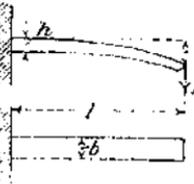
f die Durchbiegung in cm, entsprechend der Belastung P oder der zulässigen Biegungs- oder Drehungsspannung k_b bzw. k_d ,

l die Länge der Feder in cm.

¹⁾ Ein genaues zeichnerisches Verfahren zur Bestimmung von Δl siehe Tollo, Regelung der Kraftmaschinen. 2. Aufl. Berlin 1909. Julius Springer.

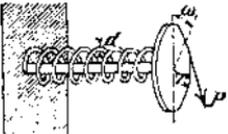
a) Biegungsfedern.

1. Gerade Biegungsfedern.

Nr.	Benennung	Tragfähigkeit	Durchbiegung
1.	Rechteckfeder. 	$P = \frac{b h^2}{6} \frac{k_b}{l}$	$f = \frac{P l^3}{E J} = 4 \frac{l^3}{b h^3} \frac{P}{E}$ $= \frac{2 l^2 k_b}{3 h E}$
2.	Dreieckfeder. 	$P = \frac{b h^2}{6} \frac{k_b}{l}$	$f = \frac{P l^3}{E J} = 6 \frac{l^3}{b h^3} \frac{P}{E}$ $= \frac{l^2 k_b}{h E}$
3.	Rechteckfeder nach der kubischen Parabel zugeschräuft. 	$P = \frac{b h^2}{6} \frac{k_b}{l}$	$f = \frac{P l^3}{E J} = 6 \frac{l^3}{b h^3} \frac{P}{E}$ $= \frac{l^2 k_b}{h E}$

2. Gewundene Biegungsfedern.

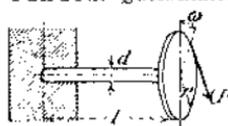
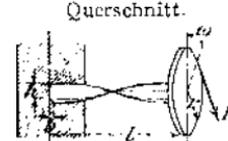
l ist die Länge der gestreckt gedachten Feder.

Nr.	Benennung	Tragfähigkeit	Durchbiegung
1.	Gewundene Feder mit rechteckigem Querschnitt. 	$P = \frac{b h^2}{6} \frac{k_b}{r}$	$f = r \omega = \frac{P}{E J} l r^2$ $= 12 \frac{P l r^2}{E b h^3} = 2 \frac{r l k_b}{h E}$
2.	Gewundene Feder mit rundem Querschnitt. 	$P = \frac{\pi d^3}{32} \frac{k_b}{r}$	$f = r \omega = \frac{P}{E J} l r^2$ $= \frac{64 P l r^2}{\pi E d^4} = 2 \frac{r l k_b}{d E}$

Nr.	Benennung	Tragfähigkeit	Durchbiegung
3.	Spiralfeder mit rechteckigem Querschnitt. 	$P = \frac{b h^2}{6} \frac{k_b}{r}$	$f = \nu \omega = \frac{P}{E J} l r^2$ $= 12 \frac{P l r^2}{E b h^3} = 2 \frac{\nu l}{h} \frac{k_b}{E}$

b) Drehungsfedern.

1. Gerade Drehungsfedern.

Nr.	Benennung	Tragfähigkeit	Durchbiegung
1.	Einfache Drehungsfeder mit rundem Querschnitt. 	$P = \frac{\pi}{16} \frac{d^3}{r} k_d$	$f = \nu \omega = \frac{32 \nu^2 l}{\pi d^4} \frac{P}{G}$ $= 2 \frac{\nu l}{d} \frac{k_d}{G}$
2.	Einfache Drehungsfeder mit rechteckigem Querschnitt. 	$P = \frac{2}{9} \frac{b^2 h}{r} k_d$	$f = \nu \omega = 3,6 \nu^2 l \frac{b^2 + h^2}{b h^3} \frac{P}{G}$ $= 0,8 \nu l \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{k_d}{G}$

2. Gewundene Drehungsfedern.

n bedeutet die Anzahl der Drehungen, r den mittleren Halbmesser der Feder.

Nr.	Benennung	Tragfähigkeit	Durchbiegung
1.	Zylindrische Schraubensfeder mit rundem Querschnitt. 	$P = \frac{\pi}{16} \frac{d^3}{r} k_d$	$f = \frac{64 n \nu^2 l}{d^4} \frac{P}{G} = \frac{4 n \nu r^2 k_d}{d} \frac{P}{G}$
2.	Zylindrische Schraubensfeder mit rechteckigem Querschnitt. 	$P = \frac{2}{9} \frac{b^2 h}{r} k_d$	$f = 7,2 \pi n \nu^2 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{P}{G}$ $= 1,6 \pi n \nu^2 \frac{b^2 + h^2}{b h^3} \frac{k_d}{G}$

Nr.	Benennung	Tragfähigkeit	Durchbiegung
3.	 <p>Kegelfeder mit rundem Querschnitt.</p>	$P = \frac{\pi}{16} \frac{d^3}{r} k_d.$	$f = \frac{16 r^2 l}{\pi d^4} \frac{P}{G} = \frac{r l}{d} \frac{k_d}{G}$ $= 16 n \frac{r^3}{d^4} \frac{P}{G} = \pi n \frac{r^2 k_d}{d G}.$
4.	 <p>Kegelfeder mit recht- eckigem Querschnitt.</p>	$P = \frac{2}{9} \frac{b^2 h}{r} k_d.$	$f = 1,8 r^2 l \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{P}{G}$ $= 0,4 r l \frac{b^2 + h^2}{b h^2} \frac{k_d}{G}$ $= 1,8 \pi n r^3 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \frac{P}{G}$ $= 0,4 \pi n r^2 \frac{b^2 + h^2}{b h^2} \frac{k_d}{G}.$

V. Festigkeit von Gefäßen, umlaufenden Scheiben, Platten.¹⁾

In Fig. 91 ist ein Hohlzylinder dargestellt, dessen Böden keinen Einfluß auf die Formänderung der Wandung ausüben mögen.

Es entstehen die Spannungen

σ_x in Richtung der x -Achse — axial,
 σ_y „ „ „ y -Achse — tangential,
 σ_z „ „ „ z -Achse — radial.

Auf das Körperelement (Fig. 91 c) wirken die Kräfte

$\sigma_z \cdot 2z \cdot d\varphi \cdot dx$ radial nach innen,
 $(\sigma_z + d\sigma_z) \cdot 2(z + dz) d\varphi \cdot dx$ radial nach außen,
 $\sigma_y \cdot dz \cdot dx$ senkrecht zu den Flächen $dz \cdot dx$ — tangential.

Da Gleichgewicht herrschen soll, muß die Summe der radialen Komponenten gleich Null sein, folglich

$$\sigma_z \cdot 2z \cdot d\varphi \cdot dx - (\sigma_z + d\sigma_z) 2(z + dz) \cdot d\varphi \cdot dx + 2\sigma_y \cdot dz \cdot dx \cdot \sin(d\varphi) = 0.$$

Ausmultipliziert und durch $d\varphi \cdot dx \cdot dz$ dividiert ergibt sich mit $\sin(d\varphi) = \infty d\varphi$

$$z \cdot \frac{d\sigma_z}{dz} + dz \cdot \frac{d\sigma_z}{dz} = \sigma_y - \sigma_z$$

und wenn man $dz \cdot \frac{d\sigma_z}{dz}$ gegen die endlichen Größen vernachlässigt,

$$\frac{d\sigma_z}{dz} = \frac{1}{z} (\sigma_y - \sigma_z) \quad (1)$$

¹⁾ Nach C. v. Bach, Elastizität und Festigkeit. 6. Aufl. Berlin 1911. Julius Springer.

Ist ε_2 die tangentielle Dehnung, so wird, wenn sich z um $d\zeta$ ändert

$$\varepsilon_2 = \frac{\zeta}{z}.$$

Die radiale Strecke dz erfährt die Änderung $d\zeta$, so daß

$$\varepsilon_3 = \frac{d\zeta}{dz}$$

wird. Für die Spannungen ergeben sich mit Hilfe der Gleichungen (3) auf S. 409

$$\sigma_x = \frac{m}{m+1} \cdot \frac{1}{\alpha} \left(\varepsilon_1 + \frac{\zeta}{z} + \frac{d\zeta}{dz} \right),$$

$$\sigma_y = \frac{m}{m+1} \cdot \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\zeta}{z} + \frac{\varepsilon_1 + \frac{\zeta}{z} + \frac{d\zeta}{dz}}{m-2} \right),$$

$$\sigma_z = \frac{m}{m+1} \cdot \frac{1}{\alpha} \left(\frac{d\zeta}{dz} + \frac{\varepsilon_1 + \frac{\zeta}{z} + \frac{d\zeta}{dz}}{m-2} \right).$$

Errechnet man aus der Gleichung für σ_x den Wert ε_1 , so werden

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= \frac{m}{m^2-1} \cdot \frac{1}{\alpha} \left(m \frac{\zeta}{z} + \frac{d\zeta}{dz} \right) + \frac{\sigma_x}{m+1} \\ \sigma_z &= \frac{m}{m^2-1} \cdot \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\zeta}{z} + m \frac{d\zeta}{dz} \right) + \frac{\sigma_x}{m-1} \end{aligned} \right\} (2)$$

Die Einführung der Werte σ_y und σ_z der Gleichungen (2) in die Gleichung (1) ergibt

$$\frac{d^2 \zeta}{dz^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{d\zeta}{dz} - \frac{\zeta}{z^2} = 0, \quad (3)$$

oder mit

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\zeta}{z}\right) &= \frac{z \cdot d\zeta - \zeta \cdot dz}{z^2}, \\ \frac{d^2 \zeta}{dz^2} + \frac{d\left(\frac{\zeta}{z}\right)}{dz} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Gefäße unter innerem und äußerem Druck.

a) Hohlzylinder unter innerem Druck.

Ist p_i der innere Überdruck und nimmt man gleichmäßige Verteilung der axialen Spannungen σ_x über den Zylinderquerschnitt an, so wird mit r_i als innerem und r_a als äußerem Radius

$$\sigma_x = p_i \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}.$$

Durch Integration der Gleichung (4) erhält man

$$\frac{d\zeta}{dz} + \frac{\zeta}{z} = c_1. \quad (a)$$

Im Anschluß an das Verfahren Abschnitt Mathematik S. 199 setze man

$$\frac{\zeta}{z} = u, \quad \text{also} \quad \zeta = z \cdot u \quad \text{und} \quad d\zeta = u \cdot dz + z \cdot du$$

folglich

$$\frac{d\zeta}{du} = u + \frac{z \cdot du}{dz}$$

eingesetzt in (a) ergibt

$$\frac{z \cdot du}{dz} = c_1 - u$$

oder

$$z \cdot du = -2 dz \left(u - \frac{c_1}{2} \right).$$

Mit $u - \frac{c_1}{2} = v$ und $du = dv$ wird $\frac{dv}{v} = -2 \cdot \frac{dz}{z}$.

Durch Integration erhält man

$$\ln v = -2 \ln z + \ln c_2 \quad \text{bzw.} \quad \ln v + 2 \ln z = \ln c_2$$

d. h. $v \cdot z^2 = c_2$ oder $v = \frac{c_2}{z^2}$

und daraus durch Einsetzen von v und u

$$\frac{\zeta}{z} = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{z^2},$$

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{z^3}.$$

Setzt man die gefundenen Werte $\frac{\zeta}{z}$ und $\frac{d\zeta}{dz}$ in die Gleichungen (2) ein, so ergibt sich

$$\sigma_y = \frac{1}{m^2 - 1} \cdot \frac{1}{\alpha} \left[m \left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{z^2} \right) + \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{z^2} \right] + \frac{\sigma_x}{m - 1},$$

$$\sigma_z = \frac{1}{m^2 - 1} \cdot \frac{1}{\alpha} \left[\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{z^2} + m \left(\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{z^2} \right) \right] + \frac{\sigma_x}{m - 1}.$$

Die beiden Integrationskonstanten c_1 und c_2 bestimmen sich aus den Randbedingungen:

$$\text{für } z = r_i \text{ wird } \sigma_z = -p_i,$$

$$\text{für } z = r_a \text{ wird } \sigma_z = 0$$

zu

$$c_1 = 2 \cdot \frac{m - 1}{m} \cdot \alpha \left(\frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot p_i - \frac{\sigma_x}{m - 1} \right),$$

$$c_2 = \frac{m}{m + 1} \cdot \alpha \cdot \frac{r_a^2 \cdot r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot p_i.$$

Mit

$$\alpha_x = \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot p_i$$

gehen die Gleichungen (2) über in

$$\sigma_y = \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot p_i + \frac{r_a^2 \cdot r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \frac{1}{z^2} \cdot p_i,$$

$$\sigma_z = \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot p_i - \frac{r_a^2 \cdot r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \frac{1}{z^2} \cdot p_i.$$

und daraus unter Berücksichtigung der Gleichungen (2) S. 409 die Anstrengungen des Materials

$$\text{axial} \quad \sigma_1 = \frac{m-2}{m} \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot p_i,$$

$$\text{tangential} \quad \sigma_2 = \frac{m-2}{m} \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot p_i + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{r_a^2 \cdot r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \frac{1}{z^2} \cdot p_i,$$

$$\text{radial} \quad \sigma_3 = \frac{m-2}{m} \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot p_i - \frac{m+1}{m} \cdot \frac{r_a^2 \cdot r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \frac{1}{z^2} \cdot p_i.$$

Die größte Inanspruchnahme des Materials tritt in tangentialer Richtung auf, und zwar wird σ_2 zu $\max \sigma_2$ für $z = r_i$, d. h. an der Innenfläche des Zylinders

$$\max \sigma_2 = \frac{p_i}{r_a^2 - r_i^2} \left(\frac{m-2}{m} \cdot r_i^2 + \frac{m+1}{m} \cdot r_a^2 \right).$$

Aus der Festigkeitsbedingung $\max \sigma_2 \leq k_z$ und $m = \frac{10}{3}$ ergibt sich die Bachsche Formel

$$r_a \geq r_i \left| \frac{k_z + 0,4 p_i}{k_z - 1,3 \cdot p_i} \right|.$$

Bemerkung: Für $1,3 p_i = k_z$ wird $r_a = \infty$; daraus folgt die Bedingung

$$p_i < \frac{k_z}{1,3}.$$

Setzt man

$$\sigma_z = \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot p_i = \frac{F_i \cdot p_i}{F} = \frac{P}{F} = \sigma_0,$$

wobei F_i den lichten Querschnitt des Zylinders in cm^2 ,

F den Querschnitt des Zylinders in cm^2 ,

P die in axialer Richtung des Zylinders wirkende Kraft in kg bedeuten, so wird

$$\sigma_1 = \frac{m-2}{m} \cdot \sigma_0 = 0,4 \sigma_0,$$

$$\sigma_2 = \frac{m-2}{m} \cdot \sigma_0 + \frac{m+1}{m} \cdot \sigma_0 \cdot \frac{r_a^2}{z^2} = 0,4 \sigma_0 + 1,3 \sigma_0 \cdot \frac{r_a^2}{z^2},$$

$$\sigma_3 = \frac{m-2}{m} \cdot \sigma_0 - \frac{m+1}{m} \cdot \sigma_0 \cdot \frac{r_a^2}{z^2} = 0,4 \sigma_0 - 1,3 \sigma_0 \cdot \frac{r_a^2}{z^2}.$$

Da in diesen Gleichungen σ_0 ein konstanter Wert ist, so sind ihre graphischen Darstellungen

$\sigma_1 = f(z)$ eine Parallele zur z -Achse,

$\sigma_2 = f(z)$ eine hyperbolische Kurve zweiten Grades,

$\sigma_3 = f(z)$ ebenfalls eine hyperbolische Kurve zweiten Grades.

Ihre Konstruktionen ergeben sich nach Abschnitt Mathematik S. 131 wie folgt: Ziehe in dem Abstände $0,4 \sigma_0$ (Fig. 92) eine zur z -Achse

parallele Achse z' , dann lauten die Gleichungen der Kurven bezogen auf das (z') Achsenkreuz

$$\text{(Zug)} \quad \sigma_2 - 0,4 \sigma_0 = \sigma'_2 = 1,3 \sigma_0 \cdot \frac{r_a^2}{z^2},$$

$$\text{(Druck)} \quad -(\sigma_3 + 0,4 \sigma_0) = -\sigma'_3 = -1,3 \sigma_0 \cdot \frac{r_a^2}{z^2}.$$

Für $z = r_a$ werden $\sigma'_2 = 1,3 \sigma_0$ bzw. $-\sigma'_3 = -1,3 \sigma_0$; das ergibt die Punkte P_2 bzw. P_3 der Kurven. Konstruiere durch P_2 und P_3 die gleichseitigen Hyperbeln (in Fig. 92 gestrichelt gezeichnet), ziehe aus den Polen O' durch die — konstruierten — Hyperbelpunkte 1, 2, 3... ein Strahlenbüschel, das die Ordinaten durch P_2 bzw. P_3 in den Punkten $1', 2', 3' \dots$ schneidet; dann schneiden sich die Horizontalen durch $1', 2', 3' \dots$ und die Vertikalen durch 1, 2, 3... in Punkten der gesuchten Spannungskurven, deren Ordinaten von den — ausgezogenen — z -Achsen gemessen werden. Sie zeigen deutlich das Ansteigen der Spannung an der inneren Wandung mit wachsender Wandstärke. Gleichzeitig ergibt sich, daß die Spannung zwischen P_2 und 1 wenig von einer Geraden abweicht; d. h. für eine im Verhältnis zum Radius geringe Wandstärke darf angenähert eine gleichmäßige Verteilung der Spannung über den Querschnitt angenommen werden.

In diesem Falle wird hinreichend genau

$$s = r_i \cdot \frac{p_i}{k_z}.$$

Bringt man die Bachsche Formel

$$r_a \geq r_i \sqrt{\frac{k_z + 0,4 p_i}{k_z - 1,3 p_i}}$$

auf die Form¹⁾

$$r_a = r_i \sqrt{\frac{1 + 0,4 \frac{p_i}{k_z}}{1 - 1,3 \frac{p_i}{k_z}}} = \varphi \cdot r_i,$$

so bedeutet φ eine Konstante, die lediglich von dem Verhältnis $p_i : k_z$ abhängig ist; in der nachstehenden Tabelle ist φ für $\frac{p_i}{k_z} = 0,01 \div 0,76$ angegeben, für

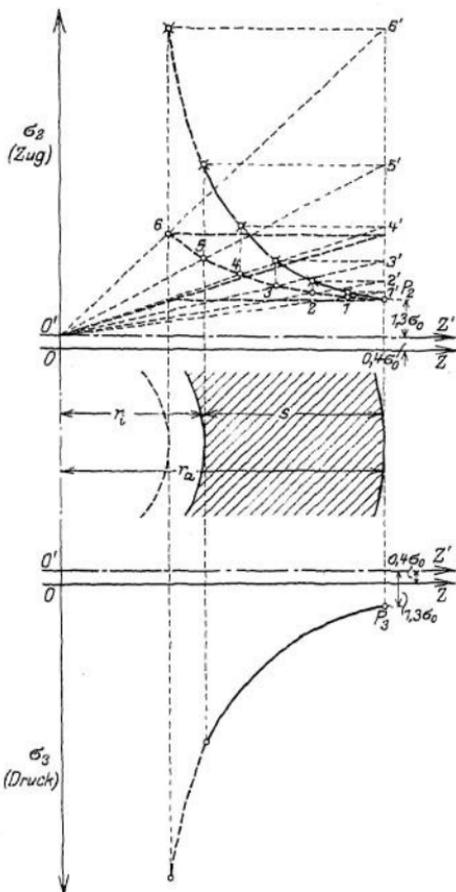


Fig. 92.

¹⁾ Winkel, Dinglers polyt. Journal 1914, S. 167.

dazwischenliegende Werte von $p_i : k_z$ ist geradlinig zu interpolieren. Wird der Querschnitt ausgeführt, wie ihn die Bachesche Formel ergibt, so ist

$$\max \sigma_z = k_z.$$

Für die Ausnutzung des Materials ist das Verhältnis der Spannung $\min \sigma_z$ am äußeren Rande zu $\max \sigma_z$ am inneren Rande maßgebend und zwar wird, wenn man dieses Verhältnis mit η bezeichnet, für $z = r_a$ bzw. r_i

$$\eta = \frac{\min \sigma_z}{\max \sigma_z} = \frac{0,4 \sigma_0 + 1,3 \sigma_0}{0,4 \sigma_0 + 1,3 \sigma_0 \cdot \frac{r_a^2}{r_i^2}}$$

oder mit dem obigen Wert $r_a = \varphi \cdot r_i$

$$\eta = \frac{0,4 + 1,3}{0,4 + 1,3 \cdot \varphi^2} \cdot 100 \text{ in } \%$$

Die ganz erhebliche Abnahme dieses Wertes mit wachsendem $p_i : k_z$ geht aus der Tabelle hervor.

Handelt es sich um die Prüfung ausgeführter Konstruktionen, so bestimmt sich die Spannung in irgendeinem Punkte des Querschnittes zu

$$\sigma_z = 0,4 \sigma_0 + 1,3 \sigma_0 \cdot \frac{r_a^2}{z^2} = \sigma_0 \left[0,4 + 1,3 \left(\frac{r_a}{z} \right)^2 \right] = \mu_3 \cdot \sigma_0,$$

$$\sigma_3 = -0,4 \sigma_0 + 1,3 \cdot \sigma_0 \cdot \frac{r_a^2}{z^2} = \sigma_0 \left[-0,4 + 1,3 \left(\frac{r_a}{z} \right)^2 \right] = \mu_3 \cdot \sigma_0,$$

μ_2 und μ_3 sind in Tabelle 2 für $r_a : z = 1,01 \div 2,60$ angegeben.

Beispiel 1. Eine hydraulische Presse soll bei 360 mm Stempeldurchmesser und 400 mm Zylinderweite eine Kraft von 250 t erzeugen; wie stark ist die Wandung des Zylinders bei $k_z = 750 \text{ kg/cm}^2$?

$$p_i = \frac{250\,000}{\pi \cdot 36^2} = \frac{250\,000}{4018} = 246 \text{ kg/cm}^2; \quad \frac{p_i}{k_z} = \frac{246}{750} = 0,328.$$

Tabelle 1 liefert $\varphi = 1,390 + 0,018 \cdot 0,8 = 1,404$; $r_a = 281 \text{ mm}$; $s = 81 \text{ mm}$.

Beispiel 2. Ein Hohlzylinder aus Gußstahl habe die Durchmesser $2 r_i = 80 \text{ mm}$; $2 r_a = 200 \text{ mm}$; die Wandstärke ist $r_a - r_i = 60 \text{ mm}$. Die Spannungsverteilung über den Querschnitt ist zu ermitteln bei $p_i = 1200 \text{ kg/cm}^2$.

Tabelle 2 liefert für $\frac{r_a}{z} = \frac{r_a}{r_i} = \frac{100}{40} = 2,5$ die Werte $\mu_1 = 8,525$; $\mu_2 = 7,725$; $F_a = 314,2 \text{ cm}^2$; $F_i = 50,3 \text{ cm}^2$; $F = 263,9 \text{ cm}^2$.

$$\max \sigma_3 = 8,525 \cdot \frac{F_i \cdot p_i}{F} = 8,525 \cdot \frac{50,3 \cdot 1200}{263,9} = 1950 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Zug);}$$

$$\max \sigma_2 = 7,725 \cdot \frac{F_i \cdot p_i}{F} = 7,725 \cdot \frac{50,3 \cdot 1200}{263,9} = 1760 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Druck).}$$

In der Mitte ist infolge $z = 70 \text{ mm}$; $\frac{r_a}{z} = \frac{100}{70} = 1,43$ lt. Tabelle 2: $\mu_2 = 3,058$; $\mu_3 = 2,258$.

$$\sigma_2 = 3,058 \cdot \frac{50,3 \cdot 1200}{263,9} = \infty 700 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_3 = 2,258 \cdot \frac{50,3 \cdot 1200}{263,9} = \infty 516 \text{ kg/cm}^2.$$

An der Außenfläche ist infolge $z = r_a$; $\frac{r_a}{z} = 1$ lt. Tabelle 2: $\mu_2 = 1,7$; $\mu_3 = 0,9$.

$$\sigma_2 = 1,7 \cdot \frac{50,3 \cdot 1200}{263,9} = \infty 390 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_3 = 0,9 \cdot \frac{50,3 \cdot 1200}{263,9} = \infty 206 \text{ kg/cm}^2.$$

Tabelle 1 liefert für p_i : $\max \sigma_2 = 1200 : 1950 = 0,615$ den Ausnutzungsfaktor des Materials $\eta = 20,7 - 1,3 \cdot 0,5 = \infty 20\%$.

Tabellen zur Berechnung der Wandstärke von Rohren mit innerem Überdruck.

Tabelle 1.

$\frac{p_1}{k_z}$	φ	η in %	$\frac{p_1}{k_z}$	φ	η in %	$\frac{p_1}{k_z}$	φ	η in %
0,01	1,009	98,7	0,26	1,291	66,2	0,51	1,890	33,7
0,02	1,017	97,4	0,27	1,307	64,9	0,52	1,931	32,4
0,03	1,026	96,1	0,28	1,322	63,6	0,53	1,974	31,1
0,04	1,035	94,8	0,29	1,338	62,3	0,54	2,020	29,8
0,05	1,044	93,5	0,30	1,355	61,0	0,55	2,069	28,5
0,06	1,054	92,2	0,31	1,372	59,7	0,56	2,121	27,2
0,07	1,063	90,9	0,32	1,390	58,4	0,57	2,177	25,9
0,08	1,074	89,6	0,33	1,408	57,1	0,58	2,238	24,6
0,09	1,083	88,3	0,34	1,427	55,8	0,59	2,303	23,3
0,10	1,093	87,0	0,35	1,446	54,5	0,60	2,374	22,0
0,11	1,104	85,7	0,36	1,466	53,2	0,61	2,451	20,7
0,12	1,114	84,4	0,37	1,487	51,9	0,62	2,536	19,4
0,13	1,125	83,1	0,38	1,509	50,6	0,63	2,630	18,1
0,14	1,136	81,8	0,39	1,531	49,3	0,64	2,734	16,8
0,15	1,148	80,5	0,40	1,555	48,0	0,65	2,851	15,5
0,16	1,159	79,2	0,41	1,579	46,7	0,66	2,984	14,2
0,17	1,171	77,9	0,42	1,604	45,4	0,67	3,135	12,9
0,18	1,183	76,6	0,43	1,630	44,1	0,68	3,311	11,6
0,19	1,195	75,3	0,44	1,658	42,8	0,69	3,520	10,3
0,20	1,208	74,0	0,45	1,686	41,5	0,70	3,771	9,0
0,21	1,221	72,7	0,46	1,716	40,2	0,71	4,083	7,7
0,22	1,234	71,4	0,47	1,748	38,9	0,72	4,486	6,4
0,23	1,248	70,1	0,48	1,781	37,6	0,73	5,033	5,1
0,24	1,262	68,8	0,49	1,815	36,3	0,74	5,840	3,8
0,25	1,277	67,5	0,50	1,852	35,0	0,75	7,211	2,5
						0,76	10,43	1,2

Tabelle 2.

$\frac{r_a}{z}$	μ_2	μ_3	$\frac{r_a}{z}$	μ_2	μ_3	$\frac{r_a}{z}$	μ_2	μ_3
1,01	1,726	0,925	1,16	2,149	1,349	1,31	2,631	1,831
1,02	1,753	0,953	1,17	2,180	1,380	1,32	2,656	1,865
1,03	1,779	0,979	1,18	2,210	1,410	1,33	2,700	1,900
1,04	1,806	1,006	1,19	2,240	1,440	1,34	2,734	1,934
1,05	1,833	1,033	1,20	2,272	1,472	1,35	2,769	1,969
1,06	1,861	1,061	1,21	2,303	1,503	1,36	2,804	2,004
1,07	1,888	1,088	1,22	2,335	1,535	1,37	2,840	2,040
1,08	1,916	1,116	1,23	2,367	1,567	1,38	2,876	2,076
1,09	1,945	1,145	1,24	2,399	1,599	1,39	2,912	2,112
1,10	1,973	1,173	1,25	2,431	1,631	1,40	2,948	2,148
1,11	2,002	1,202	1,26	2,464	1,664	1,41	2,985	2,185
1,12	2,031	1,231	1,27	2,497	1,697	1,42	3,021	2,221
1,13	2,060	1,260	1,28	2,530	1,730	1,43	3,058	2,258
1,14	2,089	1,289	1,29	2,563	1,763	1,44	3,096	2,296
1,15	2,119	1,319	1,30	2,597	1,797	1,45	3,133	2,333

$\frac{r_a}{z}$	μ_2	μ_3	$\frac{r_a}{z}$	μ_2	μ_3	$\frac{r_a}{z}$	μ_2	μ_3
1,46	3,171	2,371	1,86	4,897	4,097	2,24	6,923	6,123
1,47	3,209	2,409	1,87	4,946	4,146	2,25	6,981	6,181
1,48	3,248	2,448	1,88	4,995	4,195			
1,49	3,286	2,486	1,89	5,044	4,244	2,26	7,040	6,240
1,50	3,325	2,525	1,90	5,093	4,293	2,27	7,099	6,299
						2,28	7,158	6,358
1,51	3,364	2,564	1,91	5,143	4,343	2,29	7,217	6,417
1,52	3,404	2,604	1,92	5,192	4,392	2,30	7,277	6,477
1,53	3,443	2,643	1,93	5,242	4,442			
1,54	3,483	2,683	1,94	5,293	4,493	2,31	7,337	6,537
1,55	3,523	2,723	1,95	5,343	4,543	2,32	7,397	6,597
						2,33	7,458	6,658
1,56	3,564	2,764	1,96	5,394	4,594	2,34	7,518	6,718
1,57	3,604	2,804	1,97	5,445	4,645	2,35	7,579	6,779
1,58	3,645	2,845	1,98	5,497	4,697			
1,59	3,687	2,887	1,99	5,548	4,748	2,36	7,690	6,840
1,60	3,728	2,928	2,00	5,600	4,800	2,37	7,702	6,902
						2,38	7,764	6,964
1,61	3,770	2,970	2,01	5,652	4,852	2,39	7,826	7,026
1,62	3,812	3,012	2,02	5,705	4,905	2,40	7,888	7,088
1,63	3,854	3,054	2,03	5,757	4,957			
1,64	3,896	3,096	2,04	5,810	5,010	2,41	7,951	7,151
1,65	3,939	3,139	2,05	5,863	5,063	2,42	8,013	7,213
						2,42	8,076	7,276
1,66	3,982	3,182	2,06	5,917	5,117	2,44	8,140	7,340
1,67	4,026	3,226	2,07	5,970	5,170	2,45	8,203	7,403
1,68	4,069	3,269	2,08	6,024	5,224			
1,69	4,113	3,313	2,09	6,079	5,279	2,46	8,267	7,467
1,70	4,157	3,357	2,10	6,133	5,333	2,47	8,331	7,531
						2,48	8,396	7,596
1,71	4,201	3,401	2,11	6,188	5,388	2,49	8,460	7,660
1,72	4,246	3,446	2,12	6,243	5,443	2,50	8,525	7,725
1,73	4,291	3,491	2,13	6,298	5,498			
1,74	4,336	3,536	2,14	6,353	5,553	2,51	8,590	7,790
1,75	4,381	3,581	2,15	6,409	5,609	2,52	8,656	7,856
						2,53	8,721	7,921
1,76	4,427	3,627	2,16	6,465	5,665	2,54	8,787	7,987
1,77	4,473	3,673	2,17	6,522	5,722	2,55	8,853	8,053
1,78	4,519	3,719	2,18	6,578	5,778			
1,79	4,565	3,765	2,19	6,635	5,835	2,56	8,930	8,120
1,80	4,612	3,812	2,20	6,692	5,892	2,57	8,986	8,186
						2,58	9,053	8,253
1,81	4,659	3,859	2,21	6,749	5,949	2,59	9,121	8,321
1,82	4,706	3,906	2,22	6,807	6,007	2,60	9,188	8,388
1,83	4,754	3,954	2,23	6,865	6,065			
1,84	4,801	4,001						
1,85	4,849	4,049						

b) Hohlzylinder unter äußerem Druck.

Mit den Bezeichnungen unter (a) und p_a als äußerem Überdruck ergeben sich sinngemäß als Anstrengungen des Materials:

$$\begin{aligned} \text{axial } \sigma_1 &= -\frac{m-2}{m} \cdot \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot p_a, \\ \text{tangential } \sigma_2 &= -\frac{m-2}{m} \cdot \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot p_a - \frac{m+1}{m} \cdot \frac{r_a^2 \cdot r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \frac{1}{z^2} \cdot p_a, \\ \text{radial } \sigma_3 &= -\frac{m-2}{m} \cdot \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot p_a + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{r_a^2 \cdot r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \frac{1}{z^2} \cdot p_a. \end{aligned}$$

Die größte Inanspruchnahme des Materials tritt für $x = r_1$ auf und wird tangential

$$\begin{aligned} \max \sigma_3 &= -\frac{m-2}{m} \cdot \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot p_a - \frac{m-1}{m} \cdot \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot p_a = \frac{2m-1}{m} \cdot \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot p_a \\ &= 1,7 \cdot \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot p_a; \end{aligned}$$

$$\text{radial max } \sigma_3 = \frac{3}{m} \cdot \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot p_a = 0,9 \cdot \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot p_a.$$

Daraus ergeben sich als Festigkeitsbedingungen die Bachschen Formeln:

$$\begin{aligned} k &\geq 1,7 \cdot \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot p_a \quad \text{oder} \quad r_a = \frac{r_i}{\sqrt{1 - 1,7 \frac{p_a}{k}}} \\ k_z &\geq 0,9 \cdot \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot p_a \quad \text{oder} \quad r_a = \frac{r_i}{\sqrt{1 - 0,9 \frac{p_a}{k_z}}} \end{aligned}$$

Bemerkung: Möglich sind nur Verhältnisse, bei denen

$$p_a < \frac{k}{1,7} \quad \text{bzw.} \quad p_a < \frac{k_z}{0,9};$$

für geringe Wandstärken ist

$$k \geq p_a \cdot \frac{r_a}{s} \quad \text{oder} \quad s \geq r_a \cdot \frac{p_a}{k}.$$

c) Hohlkugeln unter innerem Druck.

Ist r_i der innere Radius der Kugel,

r_a der äußere Radius der Kugel,

k_z die zulässige Beanspruchung für Zug,

k die zulässige Beanspruchung für Druck,

so ist die größte Inanspruchnahme an der Innenfläche der Hohlkugel tangential

$$k_z \geq \frac{\frac{m+1}{2m} \cdot r_a^3 + \frac{m-2}{m} \cdot r_i^3}{r_a^3 - r_i^3} \cdot p_i = \frac{0,65 r_a^3 - 0,4 r_i^3}{r_a^3 - r_i^3} \cdot p_i,$$

radial

$$k \geq \frac{\frac{m+1}{m} \cdot r_a^3 - \frac{m-2}{m} \cdot r_i^3}{r_a^3 - r_i^3} \cdot p_i = \frac{1,3 r_a^3 - 0,4 r_i^3}{r_a^3 - r_i^3} \cdot p_i.$$

Für geringe Wandstärken ist genügend genau

$$k_z \geq \frac{1}{2} p_i \cdot \frac{r_i}{s} \quad \text{bzw.} \quad s = \frac{1}{2} r_i \cdot \frac{p_i}{k_z}.$$

d) Hohlkugeln unter äußerem Druck.

Ist ein Einknicken der Wandung nicht zu befürchten, so ist die größte Inanspruchnahme an der Innenfläche der Kugel tangential

$$k_z \geq \frac{3(m-1)}{2m} \cdot \frac{r_a^3}{r_a^3 - r_i^3} \cdot p_a = 1,05 \cdot \frac{r_a^3}{r_a^3 - r_i^3} \cdot p_a,$$

radial

$$k \geq \frac{3}{m} \cdot \frac{r_a^3}{r_a^3 - r_i^3} \cdot p_a = 0,9 \cdot \frac{r_a^3}{r_a^3 - r_i^3} \cdot p_a.$$

Für geringe Wandstärken ist genügend genau

$$k \geq \frac{1}{2} p_a \cdot \frac{r_a}{s} \quad \text{bzw.} \quad s = \frac{1}{2} r_a \cdot \frac{p_a}{k}.$$

Die Berechnung umlaufender Scheiben.

a) Die Scheibe gleicher Dicke (Fig. 93).

Betrachtet man die Scheibe als Hohlzylinder, so geht Gleichung (1) über in

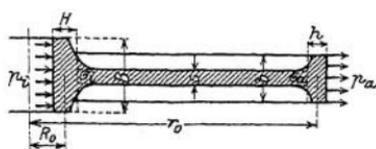


Fig. 93.

$$\frac{d\sigma_z}{dz} = \frac{1}{z}(\sigma_y - \sigma_z) - \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 z,$$

wobei γ da spez. Gewicht des Baustoffes in kg/cm^3 ,

g die Beschleunigung durch die Schwere = 981 cm/sek^2 ,

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \text{ die Winkelgeschwindigkeit}$$

bedeuten; das letzte Glied der Gleichung stellt den Einfluß der Fliehkraft dar. Beachtet man, daß $\sigma_z = 0$ ist, so nimmt die Differentialgleichung (3) die Form an

$$\frac{d^2 \zeta}{dz^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{d\zeta}{dz} - \frac{\zeta}{z^2} = -\frac{m^2 - 1}{m^2} \cdot \alpha \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot z$$

und Gleichung (4) geht über in

$$\frac{d^2 \zeta}{dz^2} + \frac{d\left(\frac{\zeta}{z}\right)}{dz} = \frac{1 - m^2}{m^2} \cdot \alpha \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot z.$$

Die Integration ergibt

$$\sigma_y = \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{c_1}{2} \cdot \frac{m}{m-1} + \frac{c_2}{z^2} \cdot \frac{m}{m+1} \right) - \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot z^2 \cdot \frac{m+3}{8m},$$

$$\sigma_z = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{c_1}{2} \cdot \frac{m}{m-1} - \frac{c_2}{z^2} \cdot \frac{m}{m+1} \right) - \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot z^2 \cdot \frac{3m+1}{8m},$$

$$\sigma_x = -\frac{\gamma}{g} \omega^2 z^2 \cdot \frac{3m+1}{m}.$$

Die Integrationskonstanten bestimmen sich aus den Grenzbedingungen

$$\sigma_z = 0 \text{ für } z = r_i \text{ und } \sigma_z = 0 \text{ für } z = r_a$$

zu

$$c_1 = \frac{(m-1)(m+3)}{4m^2} \cdot \alpha \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 (r_a^2 - r_i^2),$$

$$c_2 = \frac{(m+1)(m+3)}{8m^2} \cdot \alpha \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r_a^2 \cdot r_i^2.$$

Mit diesen Werten ergeben sich als Spannungen

$$\sigma_y = 0,413 \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \left(r_a^2 + r_i^2 + \frac{r_a^2 \cdot r_i^2}{z^2} - 0,572 z^2 \right),$$

$$\sigma_z = 0,413 \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \left(r_a^2 + r_i^2 - \frac{r_a^2 \cdot r_i^2}{z^2} - z^2 \right)$$

und daraus die Anstrengungen des Materials zu

$$\sigma_1 = -0,25 \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 (r_a^2 + r_i^2 - 0,8 z^2),$$

$$\sigma_2 = 0,289 \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \left(r_a^2 + r_i^2 + 1,86 \frac{r_a^2 \cdot r_i^2}{z^2} - 0,394 z^2 \right),$$

$$\sigma_3 = 0,289 \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \left(r_a^2 + r_i^2 - 1,86 \frac{r_a^2 \cdot r_i^2}{z^2} - 1,18 z^2 \right).$$

Die maßgebenden Anstrengungen am inneren Rand der Scheibe werden infolge $z = r_i$

$$\sigma_1 = -0,25 \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 (r_a^2 - 0,2 r_i^2),$$

$$\sigma_2 = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 (0,826 r_a^2 + 0,175 r_i^2),$$

$$\sigma_3 = -\frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 (0,249 r_a^2 + 0,052 r_i^2).$$

Sonderfälle: Ist überhaupt keine Bohrung in der Scheibe (Scheibe der Lavalturbine), so ergeben sich die Bedingungen

$$\sigma_y = \sigma_z \text{ für } z = 0 \text{ und } \zeta = 0 \text{ für } z = 0.$$

Infolge $\sigma_y = \sigma_z$ für $z = 0$ muß das Glied $\frac{r_a^2 \cdot r_i^2}{z^2}$ verschwinden; infolge $\zeta = 0$ für $z = 0$ wird die Integrationskonstante $c_2 = 0$.

Mit diesen Bedingungen gehen die Gleichungen für die Anstrengung des Materials über in

$$\sigma_y = 0,413 \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 (r_a^2 - 0,572 z^2) \quad \text{und} \quad \sigma_z = 0,413 \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 (r_a^2 - z^2).$$

In der Scheibenmitte wird mit $z = 0$

$$\sigma_2 = 0,289 \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r_a^2;$$

am äußeren Rande mit $z = r_a$

$$\sigma_2 = 0,289 \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 (r_a^2 - 0,394 r_a^2) = 0,175 \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r_a^2.$$

Ist r_i sehr klein, wird am Lochrande

$$\sigma_2 = \infty 0,826 \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r_a^2,$$

am äußeren Rande mit $z = r_a$

$$\sigma_2 = \infty 0,175 \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r_a^2.$$

Das Fehlen der Bohrung vermindert also die Anstrengung des Materials in Scheibenmitte auf weniger als die Hälfte.

Wirken am Rande der Scheibe Kräfte, so wird infolge

1. einer äußeren Zugspannung p_a (Fliehkraft von Schaufeln)

$$\sigma_2 = \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot p_a \left(0,7 + 1,3 \frac{r_i^2}{z^2} \right);$$

$$\sigma_3 = \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot p_a \left(0,7 - 1,3 \frac{r_i^2}{z^2} \right);$$

$z = r_i$ am inneren Rand ergibt

$$\sigma_2 = 2 \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot p_a; \quad \sigma_3 = -0,6 \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot p_a.$$

2. einer Pressung p_i in der Nabe (Montagespannung)

$$\sigma_2 = \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot p_i \left(0,7 + 1,3 \frac{r_a^2}{z^2} \right);$$

$$\sigma_3 = \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot p_i \left(0,7 - 1,3 \frac{r_a^2}{z^2} \right).$$

Die durch diese zusätzlichen Kräfte entstehenden Spannungen sind zu den infolge der Fliehkraft auftretenden Spannungen zu addieren.

Einfluß des Kranzes und der Nabe. Mit den Bezeichnungen der Fig. 93 erfährt der Kranz die Beanspruchung

$$k_k = \frac{p_a \cdot r_0}{h} + \frac{\gamma \cdot v^2}{g} - \frac{\sigma_a \cdot s \cdot r_0}{b \cdot h},$$

wenn p_a in kg/cm^2 die am Umfang des Kranzes wirkende Spannung bedeutet.

Für die Nabe wird entsprechend mit p_i in kg/cm^2

$$k_n = \frac{p_i \cdot R_0}{H} + \frac{\gamma \cdot \omega^2 \cdot R_0^3}{g} - \frac{\sigma_i \cdot s \cdot R_0}{B \cdot H}.$$

Für den inneren Radius $z = R_0$ wird die Anstrangung

$$k_z = \sigma_z = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 (0,826 r_0^2 + 0,175 R_0^2) + \frac{2 r_0^2}{r_0^2 - R_0^2} \sigma_a + \frac{1,3 r_0^2 + 0,7 R_0^2}{r_0^2 - R_0^2} \cdot \sigma_i.$$

Zur Ermittlung der Unbekannten b , h , B , H , σ_a und σ_i dient noch die Beziehung

$$\begin{aligned} & \frac{p_a \cdot r_0}{h} + \frac{\gamma \cdot v^2}{g} - \frac{\sigma_a \cdot s \cdot r_0}{b \cdot h} \\ &= \frac{\gamma}{g} \omega^2 (0,826 R_0^2 + 0,175 r_0^2) + \frac{0,7 r_0^2 + 1,3 R_0^2}{r_0^2 - R_0^2} \sigma_a + \frac{2 R_0^2}{r_0^2 - R_0^2} \cdot \sigma_i; \end{aligned}$$

zwei Unbekannte können angenommen werden.

b) Die Scheibe gleicher Festigkeit

soll ohne Bohrung so geformt werden, daß die infolge der Fliehkraft auftretenden Spannungen in allen Punkten der Scheibe gleich groß sind. Fig. 94 zeigt die Gestalt der Scheibe, aus der das Körperelement Fig. 95 herausgeschnitten ist.

Radial nach innen wirkt an dem Flächenelement $2x \cdot z \cdot 2d\varphi$ in der Entfernung z die Kraft $\sigma \cdot 2x \cdot z \cdot 2d\varphi$; radial nach außen wirkt in der Entfernung $z + dz$ die Kraft $\sigma(2x + d\sigma)(z + dz) \cdot 2d\varphi$; die radiale Seitenkraft der tangential wirkenden Kräfte ist

$$2\sigma \left(2x + \frac{2dx}{2} \right) dz \cdot \sin d\varphi;$$

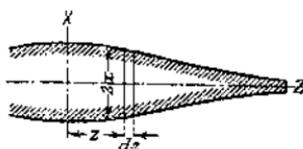


Fig. 94.

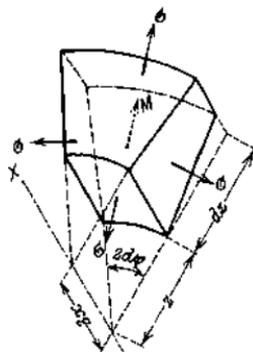


Fig. 95.

die Fliehkraft ist $2 \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot 2x \cdot z^2 \cdot d\varphi \cdot dz$. Aus $\sum H = 0$ folgt

$$\frac{d2x}{2x} = -\frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{\sigma} \cdot z \cdot dz$$

und durch Integration

$$\ln \frac{2x}{c} = -\frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{\sigma} \cdot \frac{z^2}{2} \quad \text{oder} \quad 2x = c \cdot e^{-\frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{\sigma} \cdot \frac{z^2}{2}}.$$

Ist s die Dicke der Scheibe am äußeren Rande, so ergibt sich als Integrationskonstante

$$s = c \cdot e^{-\frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{\sigma} \cdot \frac{r_a^2}{2}} \quad \text{und damit} \quad 2x = s \cdot e^{\frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{2\sigma} \cdot (r_a^2 - z^2)}.$$

Mit $z = 0$ wird die Dicke der Scheibe in der Mitte

$$s_m = s \cdot \epsilon \cdot g \cdot \frac{\gamma}{2\sigma} \cdot \omega^2 \cdot r_a^2 = s \cdot \epsilon \cdot g \cdot \frac{\gamma}{2\sigma} \cdot v^2.$$

Bemerkung: Die Beziehung $2x = f(z)$ gilt nur für Scheiben, deren Meridianlinien nicht zu stark gegen die z -Achse geneigt sind und keine zu starke Krümmung aufweisen.

Am Rande der Scheibe muß eine Spannung σ angreifen, die am Umfang des Kreises $2\pi r_0$ (Fig. 96) wirken soll. Ist p_a in kg/cm^2 eine gleichförmig über den Umfang verteilte Spannung (z. B. infolge der Fliehkraft der Schaufeln), so ergibt sich als Beanspruchung im Kranz

$$h_z = \frac{p_a \cdot r_0}{h} + \frac{\gamma \cdot v^2}{g} - \frac{\sigma \cdot s \cdot r_0}{b \cdot h}.$$

Die Dicke h des Kranzes bestimmt sich aus

$$h = r_0 \cdot \frac{\frac{\sigma s}{b} - p_a}{\frac{\gamma \cdot v^2}{g} - h_z},$$

wenn b als gegeben angenommen wird. Vorausgesetzt ist, daß der Kranz nicht viel breiter ist als die Scheibe am äußeren Rand, und daß die Scheibe am Ansatz des Kranzes gut ausgerundet ist. Aus der Gleichung für h folgt als Bedingung

$$\frac{\gamma \cdot v^2}{g} > h_z \quad \text{und} \quad \frac{\sigma s}{b} > p_a.$$

Die Scheibe gleicher Festigkeit mit Bohrung. Mit den Bezeichnungen der Fig. 97 wird die Breite der Nabe, wenn p_i in kg/cm^2 die Nabendruckung bedeutet

$$B = \frac{s \cdot \sigma}{r_i^2 - R_i^2} (1,3 R_i^2 + 0,7 r_i^2) \cdot \frac{R_i^2}{h_z - \frac{\gamma}{g} \omega^2 (0,826 R_i^2 + 0,175 r_i^2) - 2 \frac{R_i^2}{r_i^2 - R_i^2} \cdot p_i}.$$

Die maßgebende Anstrengung des Materials tritt am Innenrand der Nabe auf und ist für $z = R_i$

$$\sigma_2 = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^3 (0,826 r_i^2 + 0,7 R_i^2) + \frac{1,3 r_i^2 + 0,7 R_i^2}{r_i^2 - R_i^2} \cdot p_i + 2\sigma \frac{s \cdot r_i^2}{B(r_i^2 - R_i^2)}.$$

C. Die Festigkeit von ebenen Platten.

In folgenden Gleichungen bedeuten

s die Dicke der Platte in cm,
 f ihre Durchbiegung in der Mitte in cm,
 h_b in kg/cm^2 die zulässige Biegungsspannung,

$\alpha = \frac{1}{E}$ die Elastizitätszahl in cm^2/kg ,

μ und ψ Berichtigungskoeffizienten, die durch den Versuch zu bestimmen sind; ihre Größe wird in erster Linie durch die Art der Lagerung der Platte beeinflusst.

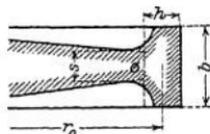


Fig. 96.

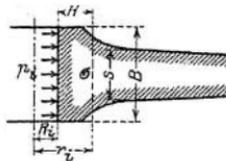


Fig. 97.

1. Die kreisförmige Platte, die durch eine gleichmäßig verteilte Pressung p kg/cm² beansprucht ist; der Radius ist r in cm

$$k_b \cong \mu \cdot \frac{r^2}{s^2} \cdot p; \quad f = \psi \cdot \alpha \cdot p \cdot \frac{r^4}{s^3}.$$

$\mu = 0,8 \div 1,2$ (Gußeisen); $\psi = 0,167 \div 0,6$, je nachdem sich die lose Auflagerung dem Zustande der Einspannung nähert.

Die Kraft P in kg greife in der Mitte der am Rande frei aufliegenden Platte an:

$$k_b \cong \mu \cdot \frac{3}{\pi} \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{r_0}{r}\right) \frac{P}{s^2}; \quad \mu = 1,5.$$

r_0 in cm ist der Radius des Kreises, auf den die Kraft P gleichmäßig verteilt angenommen werden darf.

$$f = \psi \cdot \alpha \cdot P \cdot \frac{r^2}{s^3}; \quad \psi = 0,4 \div 0,5.$$

2. Die elliptische Platte, lose aufliegend, mit a und b als Halbachsen infolge p in kg/cm²

$$k_b \cong \frac{1}{2} \mu \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \cdot \frac{b^3}{s^3} \cdot p; \quad \mu = 0,67 \div 1,12.$$

Für Mannlöcher ist im allgemeinen $a = \infty 1,5 b$ und damit

$$k_b \cong 0,425 \mu \cdot \frac{b^3}{s^3} \cdot p.$$

Ist P in kg die Belastung der lose aufliegenden Platte, so wird

$$k_b \cong \frac{8}{5\pi} \cdot \frac{8 + 4 \frac{b^2}{a^2} + 3 \frac{b^4}{a^4}}{3 + 2 \frac{b^2}{a^2} + 3 \frac{b^4}{a^4}} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{P}{s^2}; \quad \mu = 1,5 \div 1,67.$$

3. Die quadratische Platte mit der Seitenlänge a in cm und p kg/cm²

$$k_b \cong \frac{1}{4} \mu \frac{a^3}{s^3} \cdot p; \quad \mu = 0,75 \div 1,12,$$

P in kg in der Mitte

$$k_b \cong \frac{3}{4} \mu \cdot \frac{P}{s^2}; \quad \mu = 1,75 \div 2,0.$$

4. Die rechteckige Platte mit den Seiten a und b in cm und p kg/cm²

$$k_b \cong \frac{1}{2} \mu \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}} \cdot \frac{b^3}{s^3} \cdot p; \quad \mu = 0,75 \div 1,12,$$

bei P in kg in der Mitte

$$k_b \cong 1,5 \mu \cdot \frac{\frac{b}{a}}{1 + \frac{b^2}{a^2}} \cdot \frac{P}{s^2}; \quad \mu = 1,75 \div 2,00.$$

Chemie.

Die Reinigung der technischen Gebrauchswässer.

Bearbeitet von Ing. O. Heinrich.

Für technische Zwecke wird das Wasser entnommen aus: Brunnen, Quellen, Flüssen, Teichen, dem Meere, Kohlen-, Torf- und Tongruben, dem Niederschlagswasser, ferner werden die gewonnenen Kondenswässer wieder verwendet.

In allen diesen Fällen ist das Wasser durch verschiedenartige Stoffe verunreinigt, so daß es häufig im rohen Zustande nicht gebraucht werden kann. Diese Verunreinigungen können sich besonders unangenehm bemerkbar machen bei der Verwendung des Wassers: in allen Industrien, die mit Seife arbeiten, in Färbereien, im Gärungsgewerbe, in Zuckerfabriken und im Dampfkesselbetriebe.

Fremdstoffe im Wasser.

Mechanisch beigemengt: Ruß, Staub, Kohlenschlamm, Ton, organische, meist pflanzliche Stoffe, Öl (schwimmend und fein verteilt, schwebend-emulgiert).

In Lösung befindlich: Luft von hohem Sauerstoffgehalt — etwa 35 Raumprozent O_2 —, und zwar kann das Wasser bei $20^\circ C$ bis zu 1,9 Raumprozent Luft gelöst enthalten.

Freie Säuren. Kohlensäure — bei $20^\circ C$ bis zu etwa 10 Raumprozent. Ferner kommen in Einzelfällen vor: schweflige Säure, Schwefelsäure, salpetrige Säure, Salpetersäure und von organischen, Fettsäuren und Humussäuren.

Leicht lösliche Salze. Die Chloride des Calcium, des Magnesium, des Natrium und des Kalium; Magnesiumsulfat; verschiedene Nitrate und organische Verbindungen aus der Verwesung organischer Abfallstoffe herstammend.

Schwer lösliche Stoffe — Kesselsteinbildner. Die Karbonate des Kalks, der Magnesia und des Eisenoxyduls. Kalksulfat und geringe Mengen von Kieselsäure.

Der Gehalt an Kalk- und Magnesiaverbindungen bestimmt die sogenannte Härte des Wassers.

Sind diese Stoffe nur in geringen Mengen enthalten, so spricht man von weichem Wasser.

Die angeführten Verunreinigungen finden sich vornehmlich in den Wässern verschiedener Herkunft wie folgt:

Quell- und Brunnenwasser: Freie Kohlensäure, Härtebildner, Eisensalze. Ferner aus örtlicher Verunreinigung, Nitrate und organische Verbindungen.

Teich- und Flußwasser: Luft, pflanzlicher und mineralischer Schlamm.

Meerwasser: Luft, organische Verunreinigungen, Chlornatrium, und in kleinen Mengen Chlorkalium und Chlormagnesium.

Grubenwasser: Kohlen- und Tonschlamm, freie mineralische und organische Säuren, Härtebildner, Eisensalze.

Niederschlagswasser: Luft, Staub, geringe Mengen freier Säuren. Sonst chemisch rein. Leider kommt seine Verwendung für technische Zwecke wegen der Schwierigkeiten, welche das Auffangen genügender Mengen bietet, fast gar nicht in Betracht.

Kondenswasser: Öl, aus den Dampfzylindern. Freie Ölsäure, falls unter der Einwirkung überhitzten Dampfes eine Zersetzung des Öles im Zylinder stattfand.

Die Anforderungen an das Gebrauchswasser.

In Wäschereien: Weiches Wasser, da sonst ein Teil der Seife als wasserunlösliche Kalk- und Magnesiaseife unwirksam gemacht würde.

In Färbereien: Keine Eisensalze und freien Säuren, um eine Veränderung der Farben zu verhüten.

Im Gärungsgewerbe: Keine organischen Stoffe, weil diese den Gärungsvorgang beeinträchtigen würden.

In Zuckerfabriken; Kein Gips und Kochsalz im Wasser zur Herstellung des Zuckersaftes, da ersterer den Zucker verunreinigen, letzteres das Auskristallisieren des Zuckers verhindern würde.

Für die Kesselspeisung; Möglichst wenig Verunreinigungen jeglicher Art, da diese beim Kesselbetrieb die nachstehend näher bezeichneten Mängel hervorrufen.

Nachteile für den Dampfkesselbetrieb durch Wasserverunreinigung.

Schwächung der Kesselwände durch Anfressungen — Korrosionen — der Bleche.

Verschlechterung der Wärmeübertragung und dadurch Mehrverbrauch an Brennstoff durch Ablagerung schlecht wärmeleitender Stoffe — Kesselstein, Schlamm, Olschicht — auf die Heizfläche.

Wärmestauung in den geheizten Kesselwänden durch die eben genannten Ablagerungen, die zum Erglühen der Bleche, namentlich wenn sie im ersten Feuer liegen, führen kann. Dadurch aber verlieren dieselben an Festigkeit und können dem Kesseldruck nicht mehr widerstehen. Sie werden ausgebeult. Die Ausbeulungen können, falls warmbrüchiges oder wenig dehnbares Blechmaterial verwendet wurde, aufreißen und so zu Kesselexplosionen führen.

Unkosten und Betriebsunterbrechungen durch die Reinigung des Kesselinnern von Schlamm und namentlich Kesselstein. Letzterer ist nur durch Abklopfen von den Wänden zu entfernen, wobei Bleche und Nietköpfe beschädigt werden können.

An der Herbeiführung der genannten Schäden haben die einzelnen Fremdstoffe im Wasser folgenden Anteil:

Öle und Fette, nicht mineralischen Ursprungs, zersetzen sich schon bei den im Kessel herrschenden Temperaturen unter Abspaltung von Fettsäure. Diese kann den Kesselwänden gefährlich werden. — Ferner setzt sich, vor allem das in Emulsion enthaltene Öl, an den heißen Wänden fest und bildet dort einen dunkelbraunen Überzug. Infolge seines sehr geringen Wärmeleitungsvermögens gefährdet derselbe schon bei einer Stärke von etwa 1 mm die Bleche. Abflachungen an Wellrohren und schließliches Zusammenklappen derselben wurden durch Ölkrusten verursacht. — Weiter erzeugt Öl ein starkes Schäumen beim Kochen. Dadurch führt der Dampf viel Wasser mit sich fort, es tritt „Überkochen“ ein.

Sonstige mechanisch beigemengten Stoffe lagern sich entweder als loser Schlamm an den tiefsten Stellen des Kessels ab, was bei Unterfeuerung besonders gefährlich ist, oder brennen auf den Wandungen fest. Moorige, organische Bestandteile aus Torfgrubenwässern scheiden sich z. B. als flockige, schwarze Masse ab, die sich in den eigentlichen Kesselstein hineinlagert und dessen Wärmeleitungsvermögen stark vermindert.

Gelöste Gase — Luft und freie Kohlensäure — scheiden sich bei der Erwärmung des Wassers aus. Entweichen sie sofort in den Dampfraum, wie dies durch Hochspeisung wesentlich erleichtert wird, so werden sie mit dem Dampf fortgeführt und sind unschädlich. Setzen sie sich dagegen namentlich bei periodisch erfolgender Tiefspeisung in Bläschen dort an den Kesselwänden an, wo keine Wasserbewegung vorhanden ist, so erzeugen sie pockennarbige Ausrostungen. Besonders stark tritt dies Anrosten des Eisens durch Einwirkung der Luft in Gegenwart von Kohlensäure an den Wandungen solcher Kessel auf, die, frisch aufgespeist, längere Zeit außer Betrieb stehen bleiben.

Anderere freie Säuren greifen das Kesselblech ebenfalls an. Saure Grubenwässer können sehr gefährliche Anfrassungen namentlich in der Wasserlinie herbeiführen.

Leicht lösliche Salze sind nicht nur von Natur aus im Speisewasser enthalten, sondern können auch als Erzeugnisse einer chemischen Wasserreinigung in dasselbe gelangen, hauptsächlich Glaubersalz und Soda.

Aus dem Chlorid und dem Sulfat des Magnesium fällt das Kalkcarbonat in der Wärme das unlösliche Magnesiahydrat aus, das sich, soweit es nicht im Kesselstein aufgenommen wird, als Schlamm ausscheidet. Ferner kann sich das Magnesiumchlorid besonders in Anwesenheit von salpetersauren Salzen unter Abspaltung von Salzsäure zersetzen.

Ein kleiner Teil der in den Kessel gelangenden Soda zersetzt sich zu Ätznatron, indem Kohlensäure frei wird¹⁾. Der Gehalt an Ätznatron im Kesselinhalt kann nun allmählich so groß werden, daß dadurch die Armaturen — besonders stark zinkhaltige —, Dichtungen und Wasserstandsgläser angegriffen werden.

Die übrigen gelösten Salze greifen im allgemeinen die Kesselwände nicht an. Dagegen begünstigen sie dem Siedeverzug ähnliche Erscheinungen — stoßweise Dampfbildung — und tragen durch Schaumbildung zur Erhöhung der Dampf-feuchtigkeit bei. Der mitgeführten Salze wegen ist solcher Dampf für viele Kochzwecke unbrauchbar.

Eine Anreicherung gelöster Salze im Kessel ist daher durch regelmäßiges, teilweises und ganzes Ablassen des Kesselinhalts zu verhindern.

Die schwer löslichen Verbindungen verursachen hauptsächlich die Bildung des Kesselsteins.

Die Karbonate sind zunächst durch halbgebundene Kohlensäure als Bikarbonate in Lösung enthalten. Bei Siedetemperatur wird jedoch dieser Teil der Kohlensäure frei, so daß sie als unlösliche normale Karbonate in Schlammform ausfallen, mit Ausnahme des Magnesiumkarbonats, das eine geringe Löslichkeit besitzt.

Das Kalksulfat — der Gips — bleibt auch im warmen Wasser gelöst, bis durch die Verdampfung eine bestimmte Anreicherungsgrenze erreicht ist, die vom Druck und von der Anwesenheit anderer Salze abhängig ist. Dann scheidet er sich als $\text{CaSO}_4 + \frac{1}{2} \text{H}_2\text{O}$ in sich verfilzenden Kristallen aus, welche einen Teil des aus anderen Stoffen entstandenen Schlammes zusammenkitten. So entstehen auf allen wasserbespülten Kesselwänden die festen und oft sehr harten Kesselsteinkrusten, die durch Eisensalze und organische Stoffe gelbe, braune bis tiefschwarze Färbungen zeigen können.

Die Prüfung des Wassers.

Um die Brauchbarkeit eines Wassers für bestimmte technische Zwecke zu ermitteln, wird am besten eine vollständige chemische Analyse des Wassers vorgenommen. Auch lassen sich nur auf Grund dieser die näheren Maßnahmen für eine notwendig erscheinende Wasserreinigung wirksam treffen. Dagegen kann auch der Nichtchemiker leicht feststellen, ob eine solche Reinigung erforderlich sein dürfte, durch folgende Untersuchungen:

Auf feinere mechanisch beigemengte Stoffe: Durch Filtrieren.

Auf freie Säuren (außer Kohlensäure): Mittels einer wässrigen Lösung von Methylorange (etwa 1 : 1000). Schon ein geringer Säuregehalt verwandelt die ursprünglich gelbe Färbung in Rot.

Auf Eisen: Um das im Wasser farblos gelöste Eisenoxydsulfat, das Ferrobikarbonat, nachzuweisen, schüttelt man das Wasser mit Luft gut durch. Es entsteht dann durch Einwirkung des Sauerstoffs das Eisenoxydhydrat, welches, nachdem mit wenigen Tropfen Salzsäure angesäuert wurde, beim Hinzusetzen einiger Kubikzentimeter 5proz. Rhodankaliumlösung eine tiefrote Färbung gibt.

¹⁾ Siehe C. Blacher, Feuerungstechnisches. Riga 1909. Kymmel.

Auf Kesselsteinbildner: Durch eine Härtebestimmung.

Die Gesamthärte, im wesentlichen aus Kalk- und Magnesiasalzen herührend, setzt sich zusammen aus:

der vorübergehenden Härte — Gehalt an Bikarbonaten —, daher auch Karbonathärte genannt, die durch Kochen des Wassers fast völlig beseitigt werden kann und

der bleibenden Härte — Gehalt an Sulfaten und Chloriden — oder Resthärte.

Als Maß für die Härte dient ein sog. Härtegrad. In Deutschland wird derselbe angegeben nach dem Gehalt des Wassers an Calciumoxyd, den es als Hydrat haben würde, wenn die wirklich vorhandenen Kalk- und Magnesiasalze durch die äquivalente Menge Calciumoxyd CaO ersetzt wären. Der französische und englische Härtegrad dagegen rechnet nach der äquivalenten Menge Calciumkarbonat CaCO_3 .

Es ist in Gewichtsteilen:

1	Härtegrad deutsch:	1 CaO	in 100 000 Wasser
1	„	französisch 1 CaCO_3	„ 100 000 „
1	„	englisch: 1 CaCO_3	„ 70 000 „

Da nun 56 Gewichtsteile CaO äquivalent 100 Teilen CaCO_3 sind, so entspricht:

1	Härtegrad deutsch	= 1,79	Härtegrad französisch	= 1,25	Härtegrad englisch
0,56	„	= 1	„	= 0,7	„
0,8	„	= 1,43	„	= 1	„

Die Härte wird für die meisten Fälle der Praxis genügend genau, wie folgt, bestimmt:

Bestimmung der Gesamthärte. Nach Boutron und Boudet wird 40 ccm des Wassers, etwa bei Zimmertemperatur, in eine Meßflasche gebracht und aus einer engen Tropfbürette so lange eine normale Seifenlösung zugesetzt, bis sich beim Schütteln der verschlossenen Flasche ein Schaum zeigt, der sich auf der ruhenden Flüssigkeit ungefähr 5 Minuten hält. Die Bürettenteilung gibt die Menge der verbrauchten Seife an, woraus die Härte ermittelt werden kann.

Und zwar ist dazu die Bürette mit einer solchen Teilung versehen, daß 22 Teile — Grade genannt — der normalen Seifenlösung 8,8 mg CaCO_3 oder eine diesem äquivalente Menge der Härtebildner in unlösliche, also nicht schäumende Seife verwandeln. Außerdem reicht 1 Grad der Normalseife eben aus, um in 40 ccm völlig enthärteten Wassers den geforderten halbaren Schaum hervorzurufen. Hat man also z. B. $s + 1$ Grad Seife verbraucht, so sind damit

$s \cdot \frac{8,8}{22}$ mg CaCO_3 in 40 ccm Wasser, d. h. s g CaCO_3 in 100 000 g Wasser oder s französische Härtegrade nachgewiesen. Füllt man daher die Seifenlösung in der Tropfbürette bis zu einer Marke auf, die einen Grad über dem 0-Teilstrich liegt, so kann man nach Beendigung des Seifenzusatzes an der nach abwärts zählenden Bürettenteilung die Härte des untersuchten Wassers in französischen Härtegraden ohne weiteres ablesen.

Von sehr hartem Wasser bringt man zur Untersuchung in die Meßflasche am besten nur 10 ccm und füllt 30 ccm destilliertes Wasser auf. Die verbrauchte Seifenlösung gibt dann nur ein Viertel der Rohwasserhärte an.

Bestimmung der vorübergehenden Härte. 200 ccm des Wassers färbt man mit Methylorange schwach gelb und führt aus einer gewöhnlichen Tropfbürette vorsichtig so viel $\frac{1}{2}$ n-Salzsäure zu, bis das Wasser eine schwach rosa Farbe zeigt. Anfangs- und Endstand der Säure in der Bürette ergeben die verbrauchte Säuremenge in ccm. Jedes ccm $\frac{1}{2}$ n-Salzsäure macht nun 10 mg CaCO_3 neutral, bedeutet also 5 französische Härtegrade.

Die bleibende Härte: errechnet man dann als Differenz der Gesamthärte und der vorübergehenden Härte.

Wertung der Härteprüfung für den Kesselbetrieb.

Die Gesamthärte gibt Aufschluß über die Menge der im Kessel zu erwartenden Ausscheidungen. Diese werden als fester Kesselstein um so schwerer zu beseitigen sein, je größer die bleibende Härte ist. Dagegen deutet die vorübergehende Härte auf Bildung eines mehr oder weniger losen Schlammes hin. — Von der Härte des Speisewassers wird es somit abhängen, wie oft der Betrieb zwecks innerer Kesselreinigung zu unterbrechen ist.

Danach ist unter Berücksichtigung der Betriebsverhältnisse und der Zugänglichkeit des Kesselinnern die Frage zu entscheiden, ob eine besondere Reinigung des Wassers geboten ist. Dies trifft im allgemeinen für Großraumkessel zu bei Speisewasser von mehr als 12 Härtegraden, deutsch, Gesamthärte und für engerhörige Kessel schon von 6 Härtegraden an.

Ist eine Wasserreinigungsanlage vorhanden, so ist ihre Wirkung fortlaufend nachzuprüfen durch regelmäßige Härtebestimmung des gereinigten Wassers. Gut enthärtetes Wasser soll nicht mehr als 2 Härtegrade, deutsch, aufweisen.

Auch eine häufigere Prüfung des Rohwassers ist nicht zu unterlassen, um vielleicht eingetretene Änderungen der Wasserhärte festzustellen.

Die Wasserreinigung.

Wasser zu reinigen gelingt am vollkommensten durch Destillation, wie solche z. B. auf Sechsdampfern im Evaporator vorgenommen wird, um Meerwasser zur Kesselspeisung zu benützen. Das Destillieren stellt sich jedoch so teuer, daß man für die meisten technischen Zwecke Wasser als völlig gereinigt ansehen kann, das, wie folgt, behandelt wurde: 1. Befreiung von groben mechanischen Verunreinigungen — klären; 2. Vorwärmen; 3. Behandlung mit Chemikalien; 4. nochmalige mechanische Reinigung — filtrieren.

Mechanische Reinigung.

In Klärgefäßen: Beimengungen, die erheblich spezifisch schwerer sind als Wasser und dabei nicht zu fein verteilt, setzen sich am Boden des Gefäßes ab. Das reine Wasser wird aus der obersten Schicht entnommen.

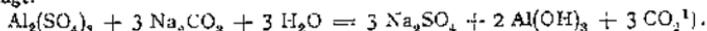
Im Filter: Um feinere und leichtere Stoffe auszuschneiden, tritt das Wasser mit etwa 1 mm/sek Geschwindigkeit durch eine etwa 300 bis 500 mm starke Filterschicht, am besten aus Kies. Die periodisch notwendige Reinigung des Kiesfilters läßt sich durch Aufrühren und gleichzeitiges Durchspülen mit reinem Wasser schnell ausführen. — Für ölige Beimengungen benutzt man am besten ein Filter aus einer Holzwooltschicht, darunter ein bis zwei Lagen Badeschwämme. Die Holzwoolte ist öfter zu erneuern, dagegen sind die Schwämme nach erfolgtem Auskochen mit Soda, wieder zu benutzen.

Chemische Reinigung.

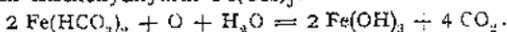
Hierbei bringt man das Wasser mit verschiedenen Chemikalien zusammen, deren Wirksamkeit durch Vorwärmung des Wassers beschleunigt werden kann.

Beseitigung freier Säuren. Soda wird dem Wasser zugesetzt, bis es basisch reagiert — rotes Lackmus also bläut.

Niederschlagen des emulgierten Öles. Durch Zusatz von schwefelsaurer Tonerde und Soda wird Tonerdehydrat $Al(OH)_3$ von gallertartiger Beschaffenheit fein verteilt ausgeschieden, welches das schwebende Öl einhüllt und niederschlägt.



Enteisung. Zur Belüftung läßt man das Wasser über ein Koksgradierwerk rieseln. Dieses überzieht sich allmählich mit einer rotbraunen Schicht des ausgeschiedenen Eisenoxydhydrat $Fe(OH)_2$.

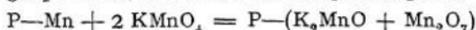


¹⁾ Die in folgendem — unterstrichenen Verbindungen fallen, da unlöslich, aus; die gekennzeichneten bleiben gelöst.

Die Durchlüftung genügt nicht, falls das Eisen — in Sumpfwässern — an Humussäuren gebunden ist. Man hat dann das Permutitfilter hinter dem Gradierwerk mit Vorteil angewandt. Seine Wirkung ist folgende: Permutit, $P-Na_2$, ist ein künstlich hergestelltes wasserhaltiges Natrium-Aluminium-Silikat, das die Fähigkeit besitzt, seinen Gehalt an Na gegen andere Basen auszutauschen. Aus feinen Körnern dieses Silikates wird eine Filterschicht hergestellt. Durch Behandlung mit Manganchlorür

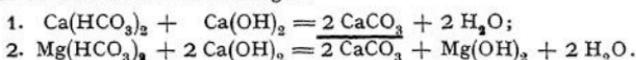


entsteht ein Manganpermutit, das durch Kaliumpermanganat

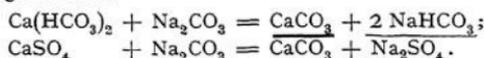


zu einem Stoff wird, der sehr leicht Sauerstoff abgibt und der dadurch die Ausscheidung des unlöslichen Eisenoxyhydrates bewirken kann. Nach einiger Zeit ist, da die Sauerstoffabgabe allmählich aufhört, mit Permanganat zu regenerieren.

Enthärtung. Durch Ätzkalk $Ca(OH)_2$, am besten in Form von gesättigtem Kalkwasser (Härte 130° deutsch) zugesetzt, erfolgt eine Umwandlung der Bikarbonate in unlösliche Verbindungen:



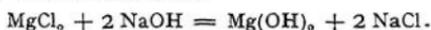
Durch Soda Na_2CO_3 werden die Kalksalze, das Bikarbonat und der Gips unlöslich ausgeschieden:



Gelöst gehen in den Kessel: Glaubersalz und Natriumbikarbonat, das sich dort in Soda, unter Abspaltung von Kohlensäure, zersetzt. — Die Magnesia-salze dagegen werden nur in das noch lösliche Karbonat übergeführt.

Durch Kalk und Soda. Beide Zusätze ergänzen sich wirksam. Der billige Kalk fällt die Karbonate, die Soda den Gips.

Durch Ätznatron $NaOH$, das wegen seines höheren Preises für die Fällung der Bikarbonate und Sulfate nicht in Betracht kommt, läßt sich das schädliche Magnesiumchlorid wirksam zersetzen:

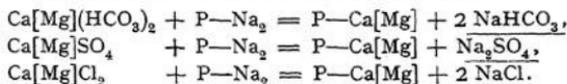


Durch kohlen-sauren Baryt $BaCO_3$ wird der Gips gefällt und dabei der Vorteil erreicht, daß keine Salze gelöst bleiben.



Leider geht die Umwandlung des Gipses durch Baryt ziemlich langsam vor sich. Ergänzend gebraucht man auch hier Kalk ebenso beim Ätznatron.

Durch Natriumpermutit $P-Na_2$ werden die Härtebildner in lösliche Natriumsalze, Soda, Glaubersalz und Kochsalz verwandelt.



Zur Bindung freier Säuren wird der Permutitschicht eine Filterschicht aus Marmorstückchen vorgeschaltet.

Sind viel Chloride vorhanden, so behindert das entstandene Kochsalz $NaCl$, weil es den Ca- bzw. den Mg-Permutit wieder in Na-Permutit umsetzt, die Einwirkung auf die Kalk- und Magnesia-salze. In diesem Falle ist die Permutit-enthärtung nicht mit Vorteil anwendbar.

Die angeführte Einwirkung des $NaCl$ auf $P-Ca$ benutzt man zur Regeneration des Filters. Sie wird notwendig, wenn sich das $P-Na_2$ zum größten Teil in $P-Ca$ oder $P-Mg$ umgewandelt hat, was durch Härteprüfung des filtrierten

Wassers mit Normseife festzustellen ist. Die Rückbildung in $P-Na_2$ geschieht durch etwa 10stündige Behandlung des Filters mit einer auf 50° vorgewärmten 15proz. Kochsalzlösung (am zweckmäßigsten aus denaturiertem Kochsalz):



Die entstandenen Chloride werden durch Nachspülen mit weichem Wasser entfernt. Dann ist das Filter wieder gebrauchsfähig. Der jährliche Verlust an Permutitmasse dürfte sich auf etwa 5% stellen.

Die sonstigen Kesselsteigenmittel sind teils zu teuer (oxalsaure, phosphorsaure, chromsaure Salze), teils führen sie im Kessel zur Bildung eines mit organischen Stoffen durchsetzten Schlammes, der leicht festbrennt (Catechu, Kartoffeln, Gerstschrot, Melasse); zum weitaus größten Teil sind es Geheimmittel, die entweder wertlos oder gar schädlich, immer aber, auch wenn sie einwandfreie Stoffe enthalten, viel zu teuer sind.

Petroleum, dem Kesselinhalt tropfenweise zugesetzt, veranlaßt die Bildung abplatzenden Steines auf den heißesten Flächen. An den anderen Stellen wird sich ein loser Stein ablagnen, der durch Abkratzen zu entfernen ist.

Für moderne engröhrige Kessel kommt jedoch eine Reinigung im Kessel, wodurch immer viel Schlamm oder loser Stein entstehen würde, nicht in Frage. Die Reinigung des Speisewassers wird überhaupt immer besser außerhalb des Kessels erfolgen.

Die Brennstoffe und ihre technische Verwendung.

Bearbeitet von Ing. O. Heinrich.

I. Der Verbrennungsvorgang.

Verbrennen heißt: Der brennbare Stoff verbindet sich mit solcher Intensität mit Sauerstoff, daß Wärme- und Lichterscheinungen wahrnehmbar sind.

Diese Intensität wird erreicht, sobald der Brennstoff die ihm eigentümliche Entzündungstemperatur erreicht hat. Damit geht die schon bei niedrigerer Temperatur stattfindende langsame Oxydation in die eigentliche Verbrennung über. Zur Beurteilung der Entzündlichkeit einiger Brennstoffe:

Entzündungstemperatur:

Kohlenoxyd	etwa 300° C	Torf	etwa 225° C
Wasserstoff	" 550° "	Steinkohle	" 325° "
Methan	" 650° "	Holzkohle	" 360° "
Kohlenstoff	" 700° "	Koks	" 700° "
schwere Kohlenwasserstoffe	600 bis 800° "	Leuchtgas	" 800° "

Flammpunkt flüssiger Brennstoffe,

d. i. diejenige Temperatur, bei der sich zuerst flüchtige brennbare Stoffe aus der Flüssigkeit ausscheiden.

Für Benzin, je nach den Siedegrenzen	-56° bis $+10^\circ$ C
" Benzol, " " " " " " " " " " " " " " " "	-15° " $+47^\circ$ "
" Naphthalin	$+80^\circ$ " "
" Petroleum	$+25^\circ$ " $+43^\circ$ "
" Spiritus (95%, denaturiert)	$+12^\circ$ " "
" Teeröl (im Mittel)	$+80^\circ$ " "

Brennpunkt flüssiger Brennstoffe,

d. i. diejenige Temperatur, bei welcher die Menge der ausgeschiedenen Gase so groß wird, daß sich auf der Oberfläche der Flüssigkeit bei Annäherung eines

Zündflämmchens eine dauernde Flamme zeigt, während beim Flamm punkt nur ein Hinüberhuschen einer Flamme über den Flüssigkeitsspiegel zu beobachten ist.

Der Brennpunkt flüssiger Brennstoffe liegt etwa 20° bis 60° C höher als ihr Flamm punkt.

Der Sauerstoff,

der zur Verbrennung nötig ist, wird fast ausschließlich dem Sauerstoffgehalt zugeführter atmosphärischer Luft entnommen. Es enthalten angenähert:

100 cbm Luft: 21 cbm Sauerstoff und 79 cbm Stickstoff,

100 kg „ 23,3 kg „ „ 76,7 kg „ „

Somit sind einem Brennstoff

für 1 cbm Sauerstoff. 4,8 cbm Luft

„ 1 kg „ 4,3 kg „

zuzuführen.

II. Die festen Brennstoffe

sind aus dem ursprünglich allein vorhandenen Holz durch Vermoderung hervorgegangen. Dieser Jahrtausende währende Vorgang der Mineralisierung des Holzes unter dem Einfluß von Wasser, Luftmangel, Bakterien und Gebirgsdruck stellt eine allmähliche Zerlegung der chemischen Verbindung $C_{\alpha}H_{\beta}O_{\gamma}$ dar, welche man entsprechend $C_6H_{10}O_5$ — Zellulose, Hauptbestandteil des Holzes — als Zusammensetzung der fossilen Hölzer allgemein annehmen kann. Aus $C_{\alpha}H_{\beta}O_{\gamma}$ schieden sich allmählich das chemisch gebundene Wasser und Kohlenwasserstoffverbindungen $C_{\delta}H_{\epsilon}$ sehr verschiedener Zusammensetzung, letztere teilweise flüchtig als Sumpfgas, Grubengas, aus, so daß die Produkte dieser Vermoderung — Torf, Braunkohle, Steinkohle — je älter, um so reicher an C und um so ärmer an H und O wurden.

Ferner kamen durch harzige Bestandteile der fossilen Hölzer, durch ölige Früchte und durch Fette tierischen Ursprungs Stoffe in die Kohle hinein, die man als Bitumen — Erdharz — bezeichnet.

Die unverbrennlichen Rückstände der Kohlen stammen zu allererst von den anorganischen Stoffen her, welche jede Pflanze dem Erdboden entnimmt — Kalium-, Natrium-, Kalk-, Magnesiumsalze —. Von diesen Stoffen wurden bei der Vermoderung zwar einige durch Wasser ausgelaugt; dafür aber gelangten andere mineralische Beimengungen in die Kohle hinein. Hoher Kalkgehalt läßt sie als lose Asche zurückbleiben. Dagegen begünstigen Silicium- und Eisengehalt die Bildung einer mehr oder weniger leichtflüssigen Schlacke.

Bemerkenswert ist noch das weit verbreitete Vorkommen von Schwefelkies in den Mineralkohlen, der sich meist in feinen Blättchen, seltener in Kristallen findet.

Endlich ist der Wassergehalt der Brennstoffe von Wichtigkeit, da er den Wert derselben für die Wärmeerzeugung ungünstig beeinflusst.

Das Holz

findet nur in vereinzelt Fällen als Brennstoff Verwendung, und zwar in folgenden Formen: Schlagholz, soweit es nicht als Nutzholz zu gebrauchen ist. Abfälle und Späne der Holzbearbeitung; Eriketts aus Sägespänen; Stroh; Gerberlöhe, nachdem daraus die Gerbsäure ausgezogen wurde; Juteabfälle; Bagasse — ausgepreßtes Zuckerrohr; Suddite — Eriketts aus Nilschilf.

Gewicht eines Raummeters aufgeklaferten Brennholzes: 300 bis 500 kg.

Wassergehalt: Frisch gefällt bis zu 45%; lufttrocken 12 bis 20%.

Holz ist leicht entzündlich, brennt mit langer Flamme und gibt eine lose, sehr leichte Asche (etwa 1%).

Der Torf

ist entstanden durch nasse Vermoderung verschiedener Sumpfpflanzen (Niederungsmoore) oder von Torfmoosen (Hochmoore).

Man unterscheidet: jungen Torf als Faser- oder Rasentorf — von gelbbrauner Farbe, mit deutlich erkennbaren verfilzten Pflanzenresten und alten Torf als Speck- oder Pechtorf — dunkelbraun bis schwarz, amorphes Gefüge. Nach der Gewinnung: Stichtorf (in einzelnen

Stücken, Soden genannt, von Hand oder mit Maschine abgestochen) zeigt große Verschiedenheit in der Zusammensetzung je nach den abgebauten Schichten; Baggertorf (selten von Hand mit Sieben ausgeschöpft, meistens als Rückstand im Eimer der Baggermaschine gewonnen) ist von größerer Gleichmäßigkeit.

Nach der Aufbereitung: Lufttrockener Stichtorf (die ausgestochenen Soden werden zum Trocknen in pyramidenförmigen Haufen lose zusammengesetzt) nimmt viel Raum ein, neigt sehr zum Bröckeln, saugt leicht wieder Feuchtigkeit auf. Backtorf (teilig angerührt, geformt und zum Trocknen ausgebreitet, ist schon formbeständiger als die lufttrockenen Soden.

Preßtorf (zerkleinert und in Strangform maschinell gepreßt) zeigt am meisten Festigkeit und Widerstandsfähigkeit gegen Feuchtigkeit.

Künstliche Trocknung des Torfes ist nach verschiedenen Verfahren versucht worden; erscheint aber bis jetzt nicht wirtschaftlich.

Gewicht eines Raummeters: Rohortorf etwa 1 t, Trockentorf gestochen 200 bis 800 kg, gepreßt 600 bis 1300 kg.

Wassergehalt: Lufttrockenen Torfes etwa 20%.

Aschengehalt: Sehr verschieden; bei 20% Wassergehalt kann er zwischen 2 und 60% schwanken. Am geringsten bei Hochmoortorfen. Torf mit mehr als 20% Asche ist im allgemeinen für Brennzwecke ungeeignet. — Ein Teil der Asche gibt eine leicht zusammenfritende Schlacke.

Die Braunkohle

ist ebenfalls aus der nassen Vermoderung hervorgegangen; aber viel älter als der Torf und unter Erddruck entstanden. Vielfach sind die darüberstehenden Erdschichten so wenig mächtig, daß Abbau in offenen Gruben — Tagebau — stattfindet. Man unterscheidet: Junge Braunkohle oder Lignit — gelbbraun mit deutlicher Holzstruktur; erdige Braunkohle — dunkler, etwa 20% Stücke, das übrige erdig; Pechkohle — schwarzbraun, fest, mit muschligem Bruch. Fette Braunkohle oder Schwelkohle — sehr bitumenreich — kommt für Brennzwecke nicht in Betracht.

Gewicht eines Raummeters Stückkohle: etwa 700 kg; Wassergehalt der Braunkohle: grubenfeucht bis 60%, der lufttrockenen Handelskohle bis etwa 45%; Aschengehalt: bis zu 20%. Das Verhalten der Asche im Feuer ist ähnlich wie bei Torf, also viel lose Asche, wenig zusammengefrittete Schlacke; herrschen jedoch, wie z. B. beim Kettenrost, dauernd höhere Temperaturen im Feuerraum, so tritt die Bildung zähflüssiger Schlacke ein.

Das Braunkohlenbrikett, einen wegen seines geringeren Wassergehaltes, seiner Festigkeit und großen Widerstandsfähigkeit gegen Feuchtigkeit technisch wertvollen Brennstoff, erhält man aus erdigen Braunkohlen bestimmten Bitumengehaltes durch Zusammenpressen der Kohle, nachdem man sie zur Trocknung (bis auf etwa 15% Wassergehalt) und zur Erschließung der bituminösen Bestandteile als Bindemittel in dampfbeheizten Gefäßen erwärmt hat.

Gewicht eines Raummeters: 1000 bis 1100 kg.

Die Steinkohle

ist das älteste Erzeugnis der Vermoderung, das im allgemeinen unter sehr hohem Druck und teilweise bei hoher Temperatur entstanden ist. Sie läßt kein Pflanzengefüge erkennen. Ihre Farbe ist meist glänzend schwarz, seltener matt und dunkelgrau. Der Schwefelgehalt (in organischen Verbindungen und als Sulfid) ist hier im allgemeinen höher als bei den übrigen Brennstoffen. Im Gegensatz zu diesen, welche mehr oder weniger nur eine örtliche Verwendung zulassen, sind die Steinkohlen, hauptsächlich ihres hohen Kohlenstoffgehaltes wegen, als verbreitetster Brennstoff anzusehen.

Folgende Unterscheidungen sind bemerkenswert:

Nach dem Verhalten der Kohle beim Erhitzen unter Luftabschluß:

Sandkohle gibt: eine pulverige, lose Masse,

Sinterkohle gibt: einen aus den einzelnen Stückchen zusammengefritteten Kuchen,

Backkohle gibt: eine völlig zusammengeschmolzene Masse, die sich stark aufgebläht hat.

Nach der beim Verbrennen sich zeigenden Flamme:

Kurzflämmige Kohle,

Langflämmige Kohle.

Die Länge der Flamme richtet sich nach der Menge der flüchtigen Bestandteile, ihre Neigung zum Qualmen und Rußen nach der Menge der im Flüchtigen enthaltenen Kohlenwasserstoffe.

Nach dem geologischen Alter:

Bezeichnung	Flüchtiges in %	Eigenschaften
Junge Sandkohle (trockene Kohle)	50 ÷ 45 vereinzelt höher, z.B. 82 ^o / _o in der australischen Bogheadkohle (nach Bunte)	sehr langflammig, starker Rauch.
Junge Sinterkohle (Flammkohle)	45 ÷ 40	sehr langflammig, starker Rauch.
Junge Backkohle (Gaskohle)	40 ÷ 33	noch gasreich genug u. da- bei großstückiger Koks.
Alte Backkohle (Eßkohle)	33 ÷ 15	als Schmiede- und Koks- kohle verwendet.
Alte Sinterkohle (Magerkohle)	15 ÷ 10	schwach rauchende ideale Kesselkohle.
Alte Sandkohle (an- thrazitische Kohle)	10 ÷ 5	für Schachtöfen.

Nach der Aufbereitung:

Förderkohle	ein Gemisch verschiedenster Stückgrößen, wie es zu- tage gefördert wurde,
Gewaschene Kohle	von Beimengungen befreit,
Stückkohle	nur große Stücke,
Würfelkohle	im Saarrevier und in Schlesien gebräuchlich für etwas kleinere Stücke,
Nußkohle	Siebungen gleicher Korngrößen,
Erbskohle, Griefkohle	in Schlesien für die feineren Nußkohlen gebräuchlich,
Nußgrußkohle, Feinkohle, Staubkohle.	

Ferner entfällt aus der Kohlenwäsche die durch das Wasser fortgeführte Schlammkohle, die lufttrocken an Ort und Stelle verfeuert wird.

Gewicht eines Raummeters: durchschnittlich 800 kg.

Wassergehalt: Infolge von Lagerung im Freien kann die Steinkohle eine viel größere Lagerfeuchtigkeit — grobe Feuchtigkeit — annehmen, als sie im lufttrockenen Zustande an hygroskopischem Wasser enthält. Diese Fähigkeit, Wasser aufzunehmen, ist im allgemeinen größer bei den mageren, sauerstoffreicheren Kohlen als bei den fetten.

Für lufttrockene Steinkohle schwankt der Wassergehalt zwischen 1,65% (bei westfälischer) und 9% (bei schottischer Kohle).

Aschengehalt: meistens zwischen 3 und 10%, vereinzelt bis zu etwa 25%.

Die Asche enthält hier so viel an Flußmitteln, daß ein großer Teil derselben als Schlacke zusammenschmilzt.

Das Steinkohlenbrikett wird zur Verwertung des beim Abbau und bei der Aufbereitung entstandenen Kohlenkleins aus diesem unter Zusatz von etwa 5% Schwarzpech durch Zusammenpressen gewonnen, und zwar entweder in Ziegel- oder in Eifform. Geringer Raumbedarf und wenig Neigung zur Selbstentzündung führen zu seiner Verwendung überall da, wo man größere Vorräte aufstapeln muß.

Gewicht des Raummeters: 1000 bis 1200 kg.

Anthrazit

nennt man die gasärmsten und daher kurzflammiqsten alten Sandkohlen. Glänzend tiefschwarz gefärbt, besitzen sie ein hohes spezifisches Gewicht (etwa 1,6). Abfälle werden ebenfalls brikkettiert.

Künstliche Anthrazite

werden aus den Brennstoffen als Rückstände bei der Trockendestillation gewonnen, enthalten also nur sehr wenig oder gar keine flüchtigen Bestandteile mehr, dagegen behalten sie die gesamte Asche und einen großen Teil des Schwefels.

Holzkohle: Lufttrockenes Holz gibt etwa 20 bis 35% stumpf schwarze, feste Holzkohle. Sie zeigt noch deutlich das Holzgefüge und ist so hygroskopisch, daß sie an der Luft wieder bis zu 10% Wasser aufnimmt. Im trockenen Zustande beträgt ihr Aschengehalt 2 bis 3%. Sie ist völlig schwefelfrei und wird deswegen, trotz ihres hohen Preises, noch in vereinzeltten Fällen vom Hüttenmann verwendet.

Gewicht des Raummeters: 200 bis 250 kg.

Torfkoks: Eine pulverige schwarze Masse, hat als Brennstoff keine Bedeutung erlangt.

Braunkohlenskoks — Grude — entsteht als Rückstand bei der Braunkohlenschwelerei. Er findet nur in Kochherden und Öfen als Brennstoff eine örtlich beschränkte Verwendung.

Steinkohlenskoks von grauschwarzer Farbe, wird als Brennstoff besonders geschätzt, wenn er großstückig, fest und dabei porös ist. Nach Fischer wird das feste Gefüge bei der Verkokung erzeugt durch die Bildung von Ferrosilizium und Karborund.

Gaskoks: Ein Nebenerzeugnis der Leuchtgasgewinnung (50 bis 70% und nach Abzug der zur Retortenbeheizung aufgewendeten 30 bis 60% Koksausbeute) enthält lufttrocken etwa 3% hygroskopisches Wasser. Er neigt zum Zerbröckeln.

Folgende Sortierungen kommen in den Handel: Große Stücke, Gabelkoks; Nußkoks; Kokslein, Koksseeze; Koksgrus, Koksstaub.

Gewicht eines Raummeters: Große Stücke etwa 350 kg; Kokslein etwa 500 kg.

Aschengehalt des lufttrockenen Koks im Mittel 10%.

Hüttenkoks: Als Haupterzeugnis aus alter Backkohle hergestellt (etwa 75% Koksausbeute). Er besitzt hohe Druckfestigkeit und ist dabei luftdurchlässig, so daß er in hohen Schichten verfeuert werden kann.

Gewicht eines Raummeters: im Mittel 450 kg.

Wassergehalt: lufttrocken bis 4%.

Aschengehalt: im Mittel 10%.

Schwefelgehalt: etwa 1%.

Phosphorgehalt: 0,01 bis 0,04%.

Nach dem Verwendungszweck spricht man von Heizkoks, Hochofenkoks und Gießereikoks. Letzterer ist großstückig und soll besonders vorsichtig verladen werden, damit möglichst wenig Abrieb entsteht.

Große Stücke werden auch gebrochen — Brechkoks — und nach Stückgröße abgeseibt — Siebkoks. Weiter sortiert man noch: Abfallkoks, Kleinkoks, Nußkoks und Koksgrus oder Koksasche. Aus diesem stellt man, soweit er nicht mit Unterwind verfeuert wird, mit Zellpech als Bindemittel ein Brikkett, den Preßkoks her.

Dem Koksgrus bei der Verfeuerung sehr ähnlich ist die Lokomotivlöschel, die sich in der Rauchkammer dieser Kessel dadurch ansammelt, daß kleine angekokte Kohlenstücke, mit wenig Flugasche vermischt, bei dem stoßweis auftretenden scharfen Zug durch die Heizröhren des Langkessels mitgerissen werden, um bei der Richtungsänderung der Heizgase in der Rauchkammer dort niederzufallen.

Gewicht eines Raummeters: etwa 500 kg.

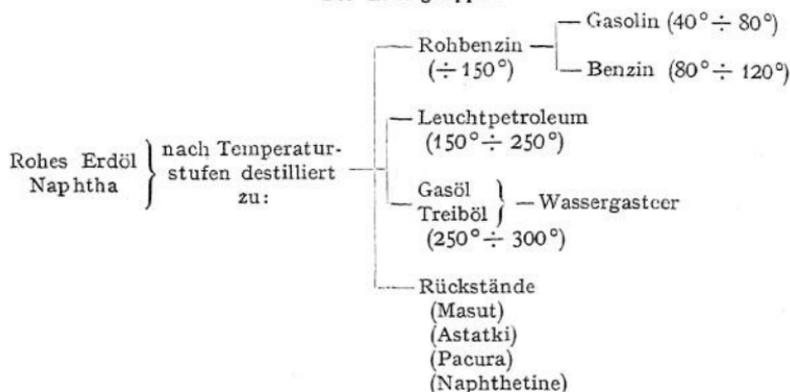
Wassergehalt: lufttrocken 3%.

Aschengehalt: etwa 20%.

III. Die flüssigen Brennstoffe¹⁾

sind fast ausschließlich mineralischen Ursprungs. Sie lassen sich ihrer Herkunft nach wie folgt gruppieren:

Die Erdölgruppe:



Das Erdöl ist nach der heute am meisten anerkannten Theorie von Engler und Höfer durch Zersetzung tierischer Stoffe unter Luftabschluß und unter hohem Druck durch darüber geschüttete Erdmassen entstanden.

Rohes Erdöl gelangt als Brennstoff nur dann zur Verwendung, wenn es zur Weiterverarbeitung nicht geeignet ist. Für Deutschland kommt nur Rohöl inländischer Herkunft in Betracht, da auf ausländischem ein hoher Einfuhrzoll ruht. Deutsche Rohöle jedoch stellen sich so teuer, daß sie nur als Treiböl für Dieselmotoren in Frage kommen. Dazu aber sind sie vorher vom Schlamm- und Wassergehalt zu befreien.

Aschengehalt: sehr gering, meist unter 0,1%.

Schwefelgehalt: unter 0,5%.

Flammpunkt: etwa 100° C.

Untere Siedegrenze: 120° C.

Zähflüssigkeit: bei 80° C soll nicht höher als 6 Englergrade sein.

Benzin ist vor allem als Betriebsmittel für Automobilmotoren wichtig.

Die einzelnen Benzinsorten unterscheiden sich wesentlich voneinander. Für ihre Benutzung als Brennstoff haben die Unterschiede im spezifischen Gewicht und in den Siedegrenzen am meisten Bedeutung. Bei einem guten Benzin von möglichst homogener Zusammensetzung sollen diese Siedegrenzen (vom Siedebeginn bis zum Verdampfen der Gesamtmenge) recht nahe beieinander liegen.

Einige Handelsbenzine.

Bezeichnung	Spez. Gew. bei 15° C	Siedegrenzen in $^\circ$ C
Gasolin, Solin, Petroleumäther (zur Bereitung von Luftgas)	0,65 \div 0,66	30 \div 80
Autoluxusbenzin	0,69 \div 0,70	50 \div 105
Automobilbenzin	0,70 \div 0,705	50 \div 110
Motorbenzin (für ortfeste Motoren)	0,715 \div 0,72	50 \div 115

Die Menge der über 100° C absiedenden Bestandteile soll bei gutem Automobilbenzin höchstens 5% betragen.

Flammpunkt: -58° bis $+10^\circ$ je nach den Siedegrenzen (nach Holde).

¹⁾ Schmitz, Die flüssigen Brennstoffe. Berlin 1912. Julius Springer.

Petroleum wird in geringem Umfange als Brennstoff für Explosionsmotoren benutzt, vereinzelt auch zur Befuerung von Dampfkesseln der Feuerspritzen.

Seine hohe obere Siedegrenze von 300° und seine Neigung zum Rußen erschweren seine Verwendung im Motor. Man stellt daher an gutes Motorenpetroleum die Anforderung, daß möglichst viele seiner Bestandteile schon bis etwa 275° absieden.

Spezifisches Gewicht: etwa 0,8.

Flammpunkt: 25÷43° C.

Gasöl (Treiböl, Mittelöl, Blauöl, Grünöl) ist der in Dieselmotoren am meisten angewandte Brennstoff. Für den gleichen Zweck wird auch der Wassergasteer gebraucht, der bei der heißen Karburierung des Wassergases mittels Gasöles als billiges Nebenerzeugnis gewonnen wird.

	Gasöl	Wassergasteer
Spezifisches Gewicht . . .	0,85÷0,89	0,99÷1,09
Flammpunkt in ° C . . .	55÷110	30÷100

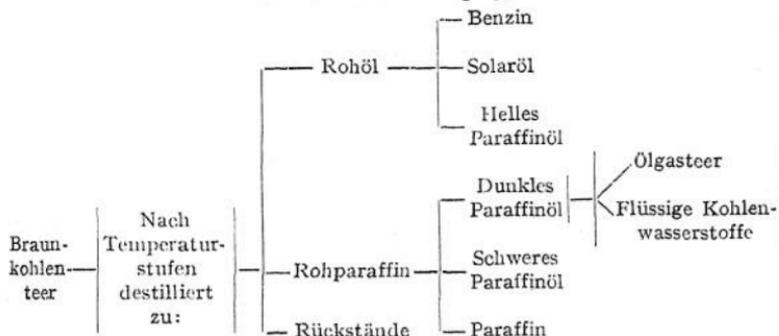
Beide Flüssigkeiten besitzen geringe Zähflüssigkeit.

Erdölrückstand. Soweit die nach dem Absieden des Gasöles verbleibenden Rückstände nicht (auf Schmieröl u. a.) weiterverarbeitet werden, dienen sie als Brennstoff für Dampfkesselfeuerungen hauptsächlich auf Schiffen und Lokomotiven. In Deutschland verhindert ein hoher Einfuhrzoll ihre Verwendung als Heizmittel.

Masut ist seines hohen Flammpunktes (bis 140°C) wegen von großer Feuer-sicherheit, er ist zwar bei gewöhnlicher Temperatur ziemlich zähe (6 bis 12 Englergrade bei 20° C), wird aber durch Erwärmen so leichtflüssig (etwas 2 Englergrade bei 80° C), daß er dann leicht zerstäubt und rauchlos verbrannt werden kann.

Spezifisches Gewicht: etwa 0,92.

Die Braunkohlenteergruppe.



Der Braunkohlenteer wird als Haupterzeugnis durch Trockendestillation der sehr bitumenreichen Schmelzkohlen gewonnen. Folgende aus ihm hergestellte Brennstoffe haben weitere Verwendungsgebiete gefunden:

Solaröl wird als Treiböl für Explosionsmotoren gebraucht.

Spezifisches Gewicht: etwa 0,83.

Flammpunkt: 45÷50° C.

Siedegrenzen: 150÷270° C.

Dunkles Paraffinöl wird auch Gasöl genannt, weil es zum großen Teil zur Herstellung des Öl- oder Fettgases dient. Sonst eignet es sich noch zur Verbrennung im Dieselmotor.

Spezifisches Gewicht: 0,89; Flammpunkt: 100÷120° C; Siedebeginn: 200÷250° C. Bei 300° C verdampft 40÷60%. Erstarrungspunkt: 0 ÷ -5° C.

Ölgasteer entfällt bei der Zersetzung der Paraffinöle (auch helle Öle werden teilweise verwendet) zu Ölgas. Bei der Verdichtung dieses Gases entsteht ein weiterer flüssiger Brennstoff als Nebenerzeugnis, die sogenannten flüssigen Kohlenwasserstoffe. Beide finden als Motorbetriebsstoff beschränkte Anwendung.

Schweres Paraffinöl wird ebenfalls als Treiböl im Dieselmotor benutzt.

Spezifisches Gewicht: 0,91; Flammpunkt: $115 \div 125^\circ \text{C}$; Siedebeginn: $220 \div 250^\circ \text{C}$. Bei 300° verdampft $10 \div 20\%$. Erstarrungspunkt: $-6 \div 7^\circ$. Zähflüssigkeit: $2,0 \div 2,06$ Englergrade.

Die Steinkohlenteergruppe.

Steinkohlenteer	nach Temperatur- stufen destilliert zu:	— Leichtöl—Benzol (u. a. m.) ($\div 170^\circ$)
		— Mittelöl—Naphthalin—Teeröl (als Rückstand) ($\div 230^\circ$) (u. a. m.)
		— Schweröl—Naphthalin—Teeröl (als Rückstand) ($\div 270^\circ$) (u. a. m.)
		— Anthrazenöl—(Anthrazen)—Teeröl (als ($\div 320^\circ$) (u. a. m.) Rückstand)
		— Pech.

Der Steinkohlenteer entsteht als Nebenerzeugnis bei der Trockendestillation von Steinkohlen sowohl zur Leuchtgasgewinnung als auch zur Kokszerzeugung. Er wird zum Teil in rohem Zustande als Brennstoff benutzt, doch ist dabei das Folgende zu beachten:

Zur Verwendung als Heizöl ist der Rohteer nur geeignet, wenn er durch Absetzenlassen oder Zentrifugieren möglichst wasserfrei gemacht ist. Anderenfalls verbrennt er sehr unruhig unter häufigem Zucken und Puffen der Flamme. Ferner ist er so zähflüssig, daß er zwecks guter Zerstäubung im Brenner vorzuwärmen ist. Die Vorwärmtemperatur ist nach Versuchen von Allner für die verschiedenen Teersorten so hoch zu wählen, daß seine Zähflüssigkeit nur noch etwa 3 Englergrade beträgt. Durch die Vorwärmung wird auch ein Stocken des Teers und das Absetzen von ausgeschiedenem Naphthalin in den Rohrleitungen verhindert.

Als Treiböl für Dieselmotoren ist der Teer geeignet, dessen Gehalt an freiem Kohlenstoff (durch Zersetzung von Kohlenwasserstoffen entstandener Ruß) und an Pech möglichst gering ist. Kohlenstoff- und Pechgehalt hat man durch Zentrifugieren des Rohteers zu verringern versucht.

Der Gasteer zeigt, abgesehen von den durch die Ursprungskohle bedingten Unterschieden, je nach der Bauart des Destillationsofens recht verschiedene Eigenschaften. Sie werden vor allem durch die Menge der bei der Entgasung der Kohlen zerfallenden Kohlenwasserstoffe beeinflusst. Diese aber hängt davon ab, ob die Gase mit der glühenden Retortenwandung in Berührung kommen oder in der entgasenden Kohle aufsteigen können. So verhält sich in bezug auf Zähflüssigkeit, Gehalt an Wasser, freiem Kohlenstoff und Rückstand am günstigsten der Vertikalofenteer, dann folgt der Schrägofenteer und schließlich der Horizontalofenteer.

Der Koksöfenteer steht in seinen Eigenschaften dem Gasteer aus Verikalöfen nahe.

Spezifisches Gewicht der Steinkohlenteere: $1,05 \div 1,2$; Flammpunkt: $40 \div 100^\circ \text{C}$; Zähflüssigkeit: sehr verschieden (vgl. Fig. 1).

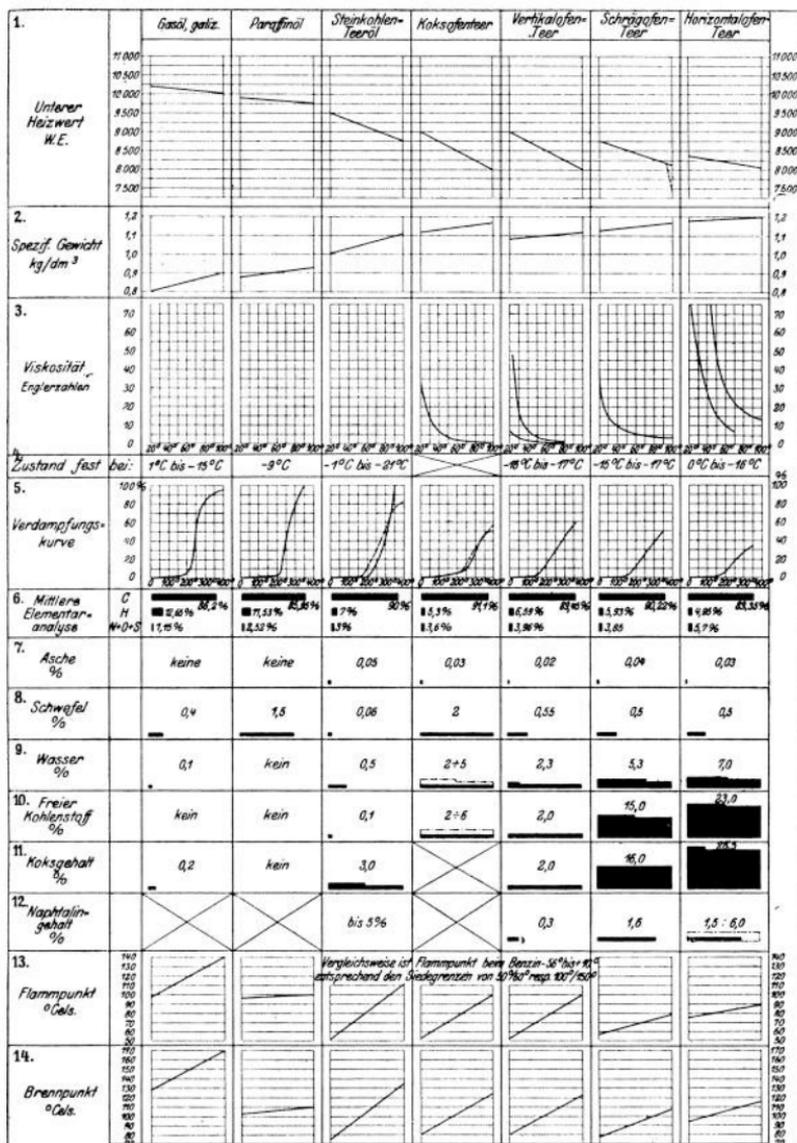


Fig. 1.

Da nach obigem der Rohteer einerseits gewisse Schwierigkeiten für seine Verwertung als Brennstoff bietet, andererseits in demselben für andere Zwecke sehr wertvolle Stoffe enthalten sind, so wird er zum großen Teil weiterverarbeitet. Dabei werden folgende Brennstoffe gewonnen:

Benzol. Aus dem Leichtöl und aus den Koksöfgasen läßt sich eine Flüssigkeit — Rohbenzol — ausscheiden, die hauptsächlich aus C_6H_6 , Benzol, besteht.

Um dieses als Treiböl im Explosionsmotor benutzen zu können, ist es möglichst frei von harzbildenden Bestandteilen und ferner so abzudestillieren, daß bis 100° Siedetemperatur 90% des Brennstoffes verdampft — gereinigtes 90er Benzol genannt.

Spezifisches Gewicht: $0,88 \div 0,883$; Flammpunkt: etwa -15°C ; Siedebeginn: 81°C ; Erstarrungspunkt: $-4 \div 5^{\circ}\text{C}$.

Es ist somit wegen seines niedrigen Flammpunktes feuergefährlich und von geringer Kältebeständigkeit. Letztere Eigenschaft macht es für Motoren, die im Freien arbeiten müssen, oft ungeeignet. Es wird deshalb vorteilhaft mit Benzin, Spiritus oder mit höher siedenden, ebenfalls aus dem Leichtöl gewonnenen Stoffen vermischt. Diese letzteren Mischungen, die also einen höheren Flammpunkt und eine niedrigere Erstarrungstemperatur besitzen, sind unter dem Namen: Autin, Ergin u. a. m. im Handel.

Autin, hergestellt aus gut gereinigtem Rohbenzol, verdampft 95% bis zur Siedetemperatur von 160°C .

Spezifisches Gewicht: 0,87; Flammpunkt: unter Zimmertemperatur; Erstarrungspunkt: -15°C .

Naphthalin: kristallisiert aus dem Mittelöl und Schweröl als einheitlicher chemischer Stoff C_{10}H_8 aus. Wegen seiner Billigkeit und Feuersicherheit wird es mit Vorteil in Explosionsmotoren angewandt, trotzdem es besondere Einrichtungen für die Verdampfung erfordert.

Spezifisches Gewicht: 1,15; Flammpunkt: 80°C ; Siedepunkt: 217°C ; Schmelzpunkt: 73°C .

Teeröle nennt man die hochsiedenden Rückstände aus der Verarbeitung der Mittel-, Schwer- und Anthrazenöle. Sie enthalten bis 12% saure Öle, welche die Herstellung feinerer Maschinenteile — Ventile, Düsen u. a. —, die mit dem Öl in Berührung kommen, aus Nickellegierungen (z. B. 25% Nickelstahl) erfordern. Ferner wird Dichtungsstoff pflanzlicher Herkunft — Gummi, Leinölkitt u. a. — von ihnen angegriffen. Ihr Naphthalin Gehalt bedingt ferner eine Vorwärmung der Öle, um Verstopfungen in den Röhren und größere, für die Verbrennung wertvolle Rückstände in den Ölbehältern zu vermeiden.

Spezifisches Gewicht: $1,0 \div 1,1$; Flammpunkt: $75 \div 85^{\circ}\text{C}$, er soll nicht unter 65°C betragen. Zähflüssigkeit: bei 20°C 1,38 Englergrade.

Beim Absieden sollen mindestens 60 Volumprocente bis 300°C verdampfen. Gehalt an Wasser: 1% und darunter; an Schwefel: etwa $0,3 \div 0,7\%$; an Schmutz: bis 2%; an Asche: bis 0,05%; spezifische Wärme: etwa 0,6.

Von flüssigen Brennstoffen pflanzlichen Ursprungs ist fast nur von Bedeutung:

Der Spiritus, welcher aus Kartoffeln durch Überführung ihres Stärkegehaltes in Zucker und Vergärung desselben zu Alkohol hergestellt wird. Sein Brennwert ist gering, so daß er für Motorenzwecke fast ausschließlich in der Landwirtschaft, die an seiner Verwertung besonderes Interesse hat, Verwendung findet. Aber auch hier wird er, am besten mit Benzol — 1 : 1 — gemischt, im Motor verbrannt. Sonst wird er noch für Brennzwecke angewendet, wo es auf eine völlig rußfreie Flamme ankommt.

Für die genannten Verwendungsgebiete kommt er denaturiert, d. h. für Genußzwecke ungeeignet gemacht, mit 90 und 95 Volumprozent Alkoholgehalt in den Handel. Für den letzteren gilt folgendes: Spezifisches Gewicht: 0,817; Flammpunkt: 12°C , Siedepunkt: 78°C .

Andere pflanzliche und tierische Fette kommen zurzeit aus Preisrückichten für die Benutzung als Brennstoffe nicht in Betracht.

IV. Die gasförmigen Brennstoffe

sind bis auf wenige Ausnahmen, wo Erdgas zur Verfügung steht, künstliche Erzeugnisse, die zum nicht geringen Teil nebenher gewonnen werden.

Das Leuchtgas wird auch als Heiz- und als Kraftgas gebraucht. Es entsteht durch Zersetzungsdestillation gasreicher Steinkohle. Gasausbeute und -zusammensetzung hängen bei derselben Kohle von der Temperatur ab, bei welcher die Destillation stattfindet.

Spezifisches Gewicht: $0,4 \div 0,5$.

Das Koksofengas, das als Nebenerzeugnis hinter dem Koksofen gewonnen wird, ist eine Art des Leuchtgases und wird auch wie dieses verwendet.

Das Azetylen, C_2H_2 , wird am besten in sogenannten Einwurfapparaten erzeugt, bei denen das Kalziumkarbid in kleinen Mengen in einen ziemlich großen Wasservorrat eingeführt wird [$CaC_2 + 2 H_2O = C_2H_2 + Ca(OH)_2$]. Es kommt als Heizgas fast nur für autogene Schweißerei zur Benutzung, dagegen zur Kräfteerzeugung gar nicht, da es zu teuer und feuergefährlich ist. 1 kg CaC_2 liefert bis 300 l C_2H_2 .

Das Ölgas (Fettgas) wird aus Gasöl des Braunkohlenteers, des Schiefersteins oder des Erdöls durch Verdampfung und Zersetzung des Öldampfes bei etwa 800° erzeugt. In Deutschland kommt dazu Petroleumgasöl des Einfuhrzolls wegen nicht in Frage. Ölgas wird fast ausschließlich zu Leuchtzwecken verwandt, nur ein geringer Teil als Kraftgas.

Das nach seinem Erfinder benannte Blaugas ist ein Fettgas, das bei etwa 600° Retorten-temperatur erzeugt ist. Es hat den Vorteil, daß es sich leicht verflüssigen läßt. Eine Flasche von 27 l gleich 10 kg Gasinhalt gibt etwa 8000 l Gas bei Atmosphärendruck. Es ist weniger giftig und von geringerer Explosionsfähigkeit als Leuchtgas, dabei besitzt es einen sehr hohen Brennwert.

Das Luftgas (Aerogengas) wird als Heizgas und als Kraftgas für kleinere Motoren benutzt. Es läßt sich in einfacher Weise am Verwendungsort herstellen durch Mischung von Luft und Dampf aus leicht siedendem Benzin (Solin), dessen obere Siedegrenze etwa 60° ist. Wegen seines geringen Sauerstoffgehaltes ist es nicht explosiv. Eine Abscheidung des Benzins tritt bei Temperaturen um 0° nur ein, sobald es mehr als 30% an Benzindampf enthält.

Das Braunkohlenschwefelgas entfällt als Nebenerzeugnis bei der Braunkohlenschwefelerei. Es kann nach Befreiung von Schwefelwasserstoff (1 bis 3%) als Kraftgas verwertet werden.

Das Gichtgas entsteht in großen Mengen als Abgas des Eisenhochofens. Von demselben stehen für 1 t erzeugten Roheisens etwa 2000 cbm zur Verwendung außerhalb des Hochofenbetriebes, zur Befuerung von Dampfkesseln oder zum Betriebe von Explosionsmotoren zur Verfügung. Für letzteren Zweck ist eine möglichst vollkommene Entfernung des mitgeführten Staubes (bis 40 g in 1 cbm) durch trockene und nasse Reinigung nötig. (Staubgehalt vor dem Motor soll höchstens 0,03 g in 1 cbm Gas betragen.)

Das Generatorgas wird in besonderen Schachtöfen — Generatoren — aus festen Brennstoffen dargestellt und zwar durch Entgasung, Entweichen gasförmiger Bestandteile aus dem festen Brennstoff und durch Vergasung, unvollkommene Verbrennung von Kohlenstoff zu Kohlenoxyd. Wird hierbei nur die zur Vergasung nötige Luft durch den Ofen geblasen, so nennt man das Generatorgas auch Luftgas. Man stellt es zu Heizzwecken aus Koks, Steinkohle, Braunkohle, Torf und Holzfällen her. Seine Verwendung zu Kraftzwecken setzt eine Reinigung von Staub und namentlich von Teer voraus. — Wassergas nennt man das Generatorgas, falls die Vergasung des Brennstoffs nicht durch freien Luftsauerstoff, sondern durch gebundenen Sauerstoff aus durchgeleitetem Wasserdampf hervorgerufen wird. Dies ist nur in periodischem Betrieb möglich, bei dem das Heißblasen des Generatorinhaltes unter Luftzuführung mit dem Gas machen, das eine Abkühlung des Generators zur Folge hat, abwechselt. Das während des Heißblasens entstandene Luftgas wird, wie oben angegeben, benutzt, während das wertvollere Wassergas zur Erzeugung hoher Temperaturen beim Löten, Schweißen, Schmelzen Verwertung findet. — Durch Karburierung, d. h. Mischung mit schweren Kohlenwasserstoffen, entweder durch Zersetzung von Petroleumgasöl oder durch Verdampfung von Benzol gewonnen, kann die Heiz- und Leuchtkraft des Wassergases erhöht werden. Karburiert, eignet es sich deswegen als Zusatz zum Leuchtgas. — Das Mischgas, auch Halbwassergas genannt, dient vorzüglich als Kraftgas. Es wird erzeugt, indem man ein Gemisch aus Luft und Wasserdampf oder feuchte Luft andauernd durch die Brennstoffschicht des Generators bläst. Dabei spielen sich fortwährend Entgasungs- und Vergasungsvorgänge des Brennstoffes unter Zersetzung des Wasserdampfes ab. Früher wurde als Brennstoff ausschließlich Koks und Anthrazit angewandt, während man jetzt auch Steinkohle, Braunkohle und Torf, ferner Abfälle wie: Perlkoks, Klauseberge, Lokomotivlöschergast. Die Hauptschwierig-

keit bei der Vergasung gasreicher Brennstoffe besteht in der Befreiung des Generatorgases von kondensierenden und sich unter Abscheidung von Ruß zersetzenden Kohlenwasserstoffen. — Mondgas wird nach seinem Erfinder ein Mischgas genannt, das unter Zuführung von erheblich mehr Wasserdampf, als zersetzt werden kann, gewonnen wird. Darunter leidet zwar der Wert des Gases; andererseits aber wird dadurch die Bildung von Ammoniak begünstigt, das als wertvolles Nebenerzeugnis entfällt. — Das Mischgas findet im Motor Anwendung als; Druckgas, Dowsongas (Dampf außerhalb des Generators erzeugt; im Generator herrscht Überdruck; das fertige Gas wird in einen Vorratsbehälter abgeführt) und als Sauggas (Wasser wird durch den Generator selbst verdampft; in diesem herrscht Unterdruck, da der Motor das Gas aus dem Generator absaugt).

V. Die Brennstofflagerung.

Steinkohle und Braunkohle neigen namentlich bei Lagerung in hohen Schichten zur Selbstentzündung. Um diese zu vermeiden, ist folgendes zu beachten: Zur Lagerung auf längere Zeit eignen sich am besten große Stücke mit nicht zu hohem Gehalt an Schwefelkies. Die Kohle ist tunlichst durch Überdachung und auch vom Boden her vor Feuchtigkeit zu schützen. Ferner ist der Lagerplatz so zu wählen, daß eine Erwärmung der Kohlen von außen her vermieden wird. Sollen Schüttböden über 2 m angewendet werden, so werden zur Kühlung der Kohle mit Vorteil stehende Röhren eingebaut, durch welche aus Kanälen, die sich unter dem Boden des Lagerplatzes entlang ziehen, Luft emporsteigt. Dagegen hat sich eine Durchlüftung der Kohlen nicht bewährt. Enge, unten offene Röhren, die man häufig in Kohlenhaufen aufgestellt findet, sollen auch nicht diesem Zweck dienen, sondern eine Feststellung von Temperatursteigerungen gestatten, indem man Thermometer in ihnen hinabsenkt. Ihre oberen Öffnungen werden am besten für gewöhnlich durch einen Pfropfen verschlossen. Zeigt sich an einer Stelle eine Temperatur von etwa 80° und darüber, so ist die Kohle dort auseinanderzuziehen.

Auch Braunkohlenbriketts zeigen Neigung zur Selbstentzündung, namentlich wenn sie noch warm aus der Presse aufgeschichtet wurden. Auch hier ist ein weiteres Umsichgreifen der Entzündung nur durch Umlagern zu verhüten.

Durch die beim Lagern nur durch Luftabschluß (Lagerung unter Wasser; Klönnesche Lagerung in geschlossenen Behältern), sonst aber unvermeidlichen Oxydationsverluste kann der Wert der Kohle als Feuer-, Gas- und Koks-kohle erheblich vermindert werden.

Für die Aufbewahrung flüssiger Brennstoffe sind wegen ihrer Feuergefährlichkeit Bestimmungen durch besondere Polizei-Verordnungen erlassen, und zwar werden besondere Vorsichtsmaßregeln angeordnet für die Lagerung von 1. Rohpetroleum und dessen Destillationsprodukten; 2. aus Braunkohlen- oder Steinkohlenteer bereiteten flüssigen Kohlenwasserstoffen und 3. Schieferölen, sofern alle diese bei 760 mm Barometerstand ihren Entflammungspunkt unterhalb 140° C haben. In Preußen werden 3 Gefahrenklassen unterschieden: Klasse I mit Flammpunkt unter 21° C; Klasse II Flammpunkt zwischen 21 und 65°; Klasse III, wenn die entflammaren Dämpfe zwischen 65 und 140° entstehen.

VI. Zusammensetzung der Brennstoffe.

Feste Brennstoffe.

Nach Beseitigung 1. der groben Feuchtigkeit durch 2 bis 3 Tage währende Lufttrocknung und 2. des Gehaltes an hygrokopischem Wasser durch zwei-stündige gleichmäßige Erwärmung auf 105 bis 110° im Trockenschrank erhält man den trockenen Brennstoff mit folgender mittlerer Zusammensetzung in Gewichtsprozenten:

Brennstoff	Gehalt an						Vor der Trocknung betrug der Feuchtigkeitsgehalt
	C	H	S	O	N	Asche	
Holz.	49	6	—	43	1	1	16
Torf.	49	5	1	28	2	15	20
Braunkohle (erdig)	60	5	2	20	1	12	50
„ (gute Stückkohle)	73	5	1	16	—	5	20
Braunkohlenbrikett	63	5	1	20	1	10	15
Steinkohle (Schlesische u. Saarkohle)	76	4	1	10	1	8	6
„ (Ruhrkohle)	80	4	1	7	1	7	3
Steinkohlenkoks	86	1	1	2	1	9	3
Anthrazit (deutsch)	84	2	2	4	—	8	2
„ (guter englischer)	93	3	1	2	—	1	2

Flüssige Brennstoffe.

Brennstoff	Gehalt an					
	C	H	S	O	N	
Erdöl	84	12		4		
Benzin	85	15	—	—	—	
Petroleum	85	14		1		
Gasöl	86	13		1		
Rückstände (Masut u. ä.)	86	13		1		
Solaröl	85	12		3		
Paraffinöl (dunkles)	86	12		2		
„ (schweres)	86	12		2		
Steinkohlenteer aus Horizontalofen	89	5		6		
„ „ Schrägofen	90	6		4		
„ „ Vertikalofen	89	7		4		
„ „ Koksofen	91	5		4		
Wassergasteer	91	7		2		
Ölgasteer	91	5		4		
Flüssige Kohlenwasserstoffe	89	8		3		
Benzol (gereinigtes 90er)	91	8		1		
Autin	87	9		4		
Naphthalin	94	6				
Teeröl	90	7		3		
Spiritus (95%)	48	12	—	32	—	8 Wasser
Erdnusöl	75	11	—	14		

Gasförmige Brennstoffe.

Brennstoff	H	CH ₄	C ₂ H _{2n} und C _n H _n	CO	CO ₂	O		N
Leuchtgas	49	35	5	7	2	—	2	
Koksofengas	51	28	3	6	1	—	11	
Fettgas	6	55	29	9	1	—	—	
Blaugas	3	44	52		1			
Braunkohlenschwefelgas	25	17	1	8	17	3	29	
Gichtgas	3	—	—	27	10	—	60	
Generatorluftgas aus Steinkohle	6	1	—	28	2	—	63	
„ „ Koks	2	—	—	29	2	—	67	
„ „ Braunkohle	10	2	—	25	6	—	57	
„ „ Holz	12	3	—	20	10	—	55	
„ „ Torf	16	3	—	9	16	1	55	
Wassergas aus Koks	49	—	—	44	3	—	4	
Mischgas aus Steinkohle	13	2	—	22	6	—	57	
„ (Mondgas)	28	2	—	11	16	—	43	
„ aus Anthrazit	15	1	—	25	5	1	53	
„ „ Koks	14	—	—	23	7	—	56	
„ „ Braunkohle	12	2	—	29	4	—	53	

VII. Die Verfeuerung der Brennstoffe.

Gase sollen zu Heizzwecken mit möglichst wenig leuchtender Flamme verbrannt werden, da das Leuchten durch Erglühen von Rußteilchen hervorgerufen wird. Dieser aus dem Zerfall von Kohlenwasserstoffverbindungen hergestammende

Kohlenstoff verbrennt dabei nur zum Teil, so daß dadurch Wärmeverluste entstehen. Die Luftzufuhr ist also nach dem Aussehen der Flamme zu regeln. — Ferner sind bei Gasen, die dem Feuer mit wechselndem Druck zuströmen, Vorkehrungen zu treffen, die ein Erlöschen der Flamme verhindern.

Flüssigkeiten sind entweder zu verdampfen oder möglichst fein zu zerstäuben, um sie gut mit Luft gemischt verbrennen zu können. Bei zähflüssigen ist dazu eine Vorwärmung notwendig. Diese darf jedoch nicht zu hoch getrieben werden, da sonst durch die Verdampfung der leichter siedenden Bestandteile vor dem Brenner, die Flamme unruhig brennt.

Feste Brennstoffe sind am schwierigsten zu verbrennen, und zwar hauptsächlich deswegen, weil sie sich am unvollkommensten mit Luft mischen lassen. Dazu kommt, daß sich die allermeisten von ihnen im Feuer in einen festen und einen gasförmigen Anteil scheiden, so daß diesen beiden ungleichartigen Teilen des Feuers, der Glut und der Flamme in geeigneter Weise genügend Luft zuzuführen ist. Die Veränderungen, die der frisch aufgeschüttete feste Brennstoff bei fortschreitender Erwärmung im Feuer durchmacht, werden wie folgt unterschieden:

1. Trocknung — Verdampfen der Feuchtigkeit unter Wärmebindung.
2. Entgasung — Kohlenwasserstoffe werden ausgeschieden und sollen möglichst vollkommen verbrennen.
3. Abbrand des entstandenen Kokes.

VIII. Das Rauchen der Feuerungen und seine Beseitigung.

Die verschiedenen Brennstoffe können je nach ihrem Gehalt an hochsiedenden, schwerverbrennlichen Kohlenwasserstoffverbindungen bei ihrer Verbrennung Anlaß zur Abscheidung von Ruß und Rauch geben. Der erste rührt aus dem bei Sauerstoffmangel stattfindenden Zerfall der genannten Kohlenwasserstoffe her, während man als Rauch diese Stoffe selbst bezeichnet, wenn sie dem Feuer bei nicht genügend hoher Temperatur des Feuerraums als Teernebel unverbrannt entströmen. Die Rußbildung wird demnach ihre Ursachen in der mehr oder weniger großen Schwierigkeit haben, den Brennstoff überall gleichmäßig gut mit Luft zu mischen, während die Entstehung des Rauches in der Bauart des Feuerraums (gekühlte Wände) und in der Art der Feuerbeschickung (periodische Zuführung größerer Mengen kalten Brennstoffs besonders bei Zutritt kalter Luft) begründet sein wird.

Von den Mitteln, den entstandenen Ruß und Rauch nicht ins Freie gelangen zu lassen, hat sich nur die trockene mechanische Abscheidung dieser Stoffe, die allerdings in bezug auf die Teernebel nur zum Teil gelingt, in vereinzelten Fällen als wirtschaftlich erwiesen. Dagegen ist das Waschen der Abgase zum Niederschlagen der Ausscheidungen und die Rauchverbrennung (z. B. in einem zweiten Koksfeuer) nach wenig erfolgreichen Versuchen wieder aufgegeben worden. Die heutigen Bestrebungen gehen dahin, das Rauchen zu verhüten, indem man die Ursachen für das Entstehen desselben zu beseitigen sucht. Dazu hat man, wie weiter oben gekennzeichnet, besonders für richtige Luftzuführung und für einen möglichst hoch und gleichmäßig erwärmten Flammraum zu sorgen.

IX. Der Luftbedarf der Brennstoffe.

Das Brennbare setzt sich hauptsächlich zusammen aus: Kohlenstoff, C (Atomgewicht 12); Wasserstoff, H (Atomgewicht 1), und Schwefel, S (Atomgewicht 32). In welchem Verhältnis sich diese Elemente mit Sauerstoff, O (Atomgewicht 16), verbinden, ergibt sich in Gewichtsmengen direkt aus den chemischen Gleichungen, in Raummengen ebenfalls aus diesen unter Berücksichtigung der Avogadro'schen Regel. Aus letzterer folgt nämlich: „Das Grammmolekül — 1 Mol genannt — nimmt bei allen Gasen unter gleichem Druck und gleicher Temperatur denselben Raum ein.“ (1 Mol eines Gases ist diejenige Gewichtsmenge desselben, welche in Gramm soviel enthält, wie sein Molekulargewicht angibt.)

1 Mol wiegt:

Wasserstoff (H ₂)	2 g	Schwefelwasserstoff (H ₂ S) . . .	34 g
Sauerstoff (O ₂)	32 „	Sumpfgas (CH ₄)	16 „
Kohlenoxyd (CO)	28 „	Äthylen (C ₂ H ₄)	28 „
Kohlensäure (CO ₂)	44 „	Acetylen (C ₂ H ₂)	26 „
Schweflige Säure (SO ₂)	64 „	Benzol (C ₆ H ₆)	78 „

1 Mol aller Gase hat den Rauminhalt von:

22,4 l bei 0° und 760 mm Barometerstand,

24,4 l „ 15° „ 735 „ „

Demnach ergibt sich für:

Kohlenstoff

a) unvollkommen verbrannt

C + O = CO	1 kg C gebraucht 1,33 kg O,
12 g 16 g 28 g	1 cbm O liefert 2 cbm CO,
1/2 Mol 1 Mol	

b) vollkommen verbrannt

C + 2 O = CO ₂	1 kg C gebraucht 2,67 kg O,
12 g 32 g 44 g	1 cbm O liefert 1 cbm CO ₂ .
1 Mol 1 Mol	

Wasserstoff

2 H + O = H ₂ O	1 kg H gebraucht 8 kg O,
2 g 16 g 18 g	1 cbm H gebraucht 1/2 cbm O,
1 Mol 1/2 Mol 1 Mol	1 cbm O liefert 2 cbm Wasserdampf.

Beispiel: Bei konstantem Druck verbrennen 2 cbm Wasserstoff von 200° mit 1 cbm Sauerstoff von derselben Temperatur zu überhitztem Wasserdampf, der nach Abkühlung auf 200° einen Raum von 2 cbm einnimmt.

Schwefel

S + 2 O = SO ₂	1 kg S gebraucht 1 kg O,
32 g 32 g 64 g	1 cbm O liefert 1 cbm SO ₂ .
1 Mol 1 Mol	

Kohlenoxyd

CO + O = CO ₂	1 kg CO gebraucht 0,57 kg O,
28 g 16 g 44 g	1 cbm CO gebraucht 1/2 cbm O,
1 Mol 1/2 Mol 1 Mol	1 cbm O liefert 2 cbm CO ₂ .

Leichte Kohlenwasserstoffe.**Sumpfgas**

CH ₄ + 4 O = CO ₂ + 2 H ₂ O	1 kg CH ₄ gebraucht 4 kg O,
16 g 64 g 44 g 36 g	1 cbm CH ₄ gebraucht 2 cbm O,
1 Mol 2 Mol 1 Mol 2 Mol	1 cbm O liefert 1/2 cbm CO ₂ und 1 cbm Wasserdampf.

Schwere Kohlenwasserstoffe.**Äthylen**

C ₂ H ₄ + 6 O = 2 CO ₂ + 2 H ₂ O	1 kg C ₂ H ₄ gebraucht 3,43 kg O,
28 g 96 g 88 g 36 g	1 cbm C ₂ H ₄ gebraucht 3 cbm O,
1 Mol 3 Mol 2 Mol 2 Mol	1 cbm O liefert 0,67 cbm CO ₂ und 0,67 cbm Wasserdampf.

Acetylen

C ₂ H ₂ + 5 O = 2 CO ₂ + H ₂ O	1 kg C ₂ H ₂ gebraucht 3,08 kg O,
26 g 80 g 88 g 18 g	1 cbm C ₂ H ₂ gebraucht 2,5 cbm O,
1 Mol 2,5 Mol 2 Mol 1 Mol	1 cbm O liefert 0,8 cbm CO ₂ und 0,4 cbm Wasserdampf.

Benzol

$C_6H_6 + 15 O = 6 CO_2 + 3 H_2O$	1 kg C_6H_6 gebraucht 3,08 kg O,
78 g 240 g 264 g 54 g	1 cbm C_6H_6 gebraucht 7,5 cbm O,
1 Mol 7,5 Mol 6 Mol 3 Mol	1 cbm O liefert 0,8 cbm CO_2 und 0,4 cbm Wasserdampf.

Der Mindestbedarf an Verbrennungsluft von 0° und 760 mm Barometerstand ergibt sich demgemäß:

für 1 kg eines festen oder flüssigen Brennstoffs von der Zusammensetzung:

c kg Kohlenstoff,
h „ Wasserstoff,
s „ Schwefel,
o „ Sauerstoff,
n „ Stickstoff,
a „ Asche,
w „ Gesamtfeuchtigkeit,
<hr/>
in 1 kg Brennstoff,

zu

$$L_{\min/\text{kg}} = 4,31 \cdot (2,67 \cdot c + 8 h - o + s) \text{ kg Luft}$$

oder

$$L_{\min/\text{cbm}} = 3,33 \cdot (2,67 \cdot c + 8 h - o + s) \text{ cbm Luft}$$

und an Luft von $15^\circ C$ und 735 mm Barometerstand:

$$L_{\min/\text{cbm}} = 3,63 \cdot (2,67 \cdot c + 8 h - o + s) \text{ cbm Luft.}$$

Ist von einem festen Brennstoff nur sein Heizwert, W , und sein Wassergehalt, w kg in 1 kg Brennstoff, bekannt, so ist angenähert:

$$L_{\min/\text{kg}} = \alpha \cdot \frac{W + 600 \cdot w}{1000},$$

worin für α zu setzen ist:

bei Koks 1,4	bei Braunkohle . . . 1,37
„ Anthrazit 1,39	„ Torf 1,36
„ Steinkohle 1,38	„ Holz 1,35

Der theoretische Luftbedarf für 1 cbm eines gasförmigen Brennstoffes von der Zusammensetzung:

h cbm Wasserstoff,
co „ Kohlenoxyd,
$c h_4$ „ Methan,
$c_2 h_4$ „ Äthylen,
$c_3 h_2$ „ Acetylen,
$c_6 h_6$ „ Benzol,
o „ Sauerstoff,
n „ Stickstoff,
co_2 „ Kohlensäure,
<hr/>
in 1 cbm Gas

ist:

$$L_{\min/\text{cbm}} = 4,77 \cdot \left(\frac{h + co}{2} + 2 c h_4 + 3 c_2 h_4 + 2,5 \cdot c_3 h_2 + 7,5 c_6 h_6 - o \right) \text{ cbm}$$

Luft von demselben Druck und der gleichen Temperatur, wie das Brenngas.

Ist der Gehalt an schweren Kohlenwasserstoffen nicht im einzelnen bekannt, sondern nur die Gesamtmenge kw cbm in 1 cbm Gas, so kann man angenähert setzen:

$$L_{\min/\text{cbm}} = 4,77 \cdot \left(\frac{h + co}{2} + 2 c h_4 + 3 kw - o \right).$$

Mittelwerte für die theoretische Verbrennungsluftmenge.

Feste Brennstoffe:

1 kg Brennstoff	Luftmenge		1 kg Brennstoff	Luftmenge	
	kg	cbm 15°; 73,5 cm		kg	cbm 15°; 73,5 cm
Holz	5,0	4,2	Steinkohle (schles.- russ.)	9,1	7,7
Torf	4,9	4,1	Steinkohle (russ.)	10,1	8,6
Braunkohle, erdig .	4,0	3,4	Anthrazit, deutsch	10,1	8,6
„ Stücke	7,5	6,3	„ englisch	11,4	9,6
„ Brikett	6,7	5,7	Steinkohlenkoks .	9,9	8,9

Flüssige Brennstoffe:

1 kg Brennstoff	Luftmenge		1 kg Brennstoff	Luftmenge	
	kg	cbm 15°; 73,5 cm		kg	cbm 15°; 73,5 cm
Erdöl, roh	13,8	11,6	Steinkohlenteer, (Vertikalofen) .	12,6	10,6
Benzin	15,0	12,7	(Koksofen) . . .	12,2	10,3
Petroleum	14,6	12,4	Wassergasteer . .	12,8	10,8
Gasöl	14,4	12,2	Ölgasteer	12,2	10,3
Masut	14,4	12,2	Flüssige Kohlen- wasserstoffe . .	13,0	11,0
Paraffinöl, dunkles	14,0	11,8	Benzol	13,2	11,2
Paraffinöl, dunkles schweres	14,0	11,8	Autin	13,1	11,1
Steinkohlenteer (Horizontalofen)	11,9	10,1	Naphthalin . . .	12,9	10,9
Schrägofen	12,4	10,5	Teeröl	12,8	10,8
			Spiritus 95% . .	8,3	7,0

Brenngase:

1 cbm Brennstoff	Luft- menge cbm	1 cbm Brennstoff	Luft- menge cbm
Leuchtgas	5,4	Generator-Luftgas aus Braunkohle	1,0
Koksofengas	4,5	Holz	1,1
Acetylen	11,9	Torf	0,8
Fettgas	9,7	Wassergas aus Koks	2,2
Blaugas	15,0	Mischgas aus Steinkohle . . .	1,0
Aerogengas	2,6	„ „ Koks	0,9
Braunkohlenschwefelgas	2,4	„ „ Anthrazit	1,0
Gichtgas	0,7	„ „ Braunkohle	1,1
Generator-Luftgas aus Steinkohle	1,1	„ „ Lokomotivlöschel	0,9
Koks	0,7	Mondgas	1,1

Praktisch läßt sich eine möglichst vollkommene Verbrennung nur bei Zuführung eines Vielfachen der theoretisch erforderlichen Luftmenge erzielen. Der dabei vorhandene Luftüberschuß wird ausgedrückt durch

$$m = \frac{L}{L_{\min}},$$

worin L die tatsächlich zugeführte Luftmenge bezeichnet.

Nachteile durch Luftüberschuß. Mit wachsendem Luftüberschuß sinkt die Temperatur des Feuers, da die Menge der Rauchgase ebenfalls zunimmt. Das letztere hat außerdem eine Erhöhung der in den Schornstein abgeführten, also verlorenen Wärmemenge zur Folge, während das Sinken der Temperatur im Feuerraum zur Ausscheidung von Teernebeln aus den Kohlenwasserstoffen, also zur Rauchbildung Anlaß geben wird.

Vorteile durch Luftüberschuß. Die unvollkommene Verbrennung des Kohlenstoffs zu Kohlenoxyd läßt sich bei reichlicher Luftzufuhr leichter verhindern, ebenso die Abspaltung von Kohlenstoff, in Form von Rußflocken, aus den Kohlenwasserstoffen. — Bei der motorischen Verbrennung ist es durch Luftüberschuß ferner möglich, die Verdichtungsgrenze des Gasgemisches zu steigern, eine zu hohe Erwärmung der inneren Zylinderteile zu verhüten und dadurch das Gewicht der Ladung zu vergrößern. Dazu kommt, daß bei einzelnen Brennstoffen wie z. B. Spiritus, die Bildung von Verbrennungserzeugnissen verhindert wird, welche die Zylinderwandung angreifen würden.

Mittelwerte für m

a) bei der Verbrennung im offenen Raum

Brennstoff	Planrost Hand- beschickung	Planrost mechanische Beschickung	Schütt- feuerung	ohne Rost
Anthrazit, Koks	1,5	1,4	—	—
Steinkohle in Stücken	1,6÷1,9	1,4÷1,8	1,3÷1,6	—
„ staubförmig	—	—	—	1,2
Braunkohle	1,8÷2,0	1,5	1,5	—
Torf	1,8÷2,0	—	1,5	—
Holz	1,8÷2,0	—	1,5÷2,0	—
Brenngase	—	—	—	1,15÷1,3
Flüssigkeiten	—	—	—	1,2÷1,4

b) bei der Verbrennung im geschlossenen Raum

Brennstoff		Brennstoff	
Leuchtgas	1,4÷1,5	Erdöl, roh	1,6÷1,8
Koksofengas	1,3	Petroleum	1,4÷1,9
Generator-Kraftgas	1,3÷1,4	Benzin	1,3÷1,7
Gichtgas	1,3÷1,6	Spiritus, 90%	1,5÷2,0

Bestimmung der Luftüberschußzahl.

1. Auf Grund der vollständigen Elementaranalyse des Brennstoffes läßt sich nach den Ausführungen auf Seite 518 berechnen, welcher Kohlen säuregehalt

$c_{O_2 \max}$ in Raumprozenten

in den trockenen Rauchgasen (also nach Abzug des entstandenen Wasserdampfes) vorhanden wäre, falls der Brennstoff ohne Luftüberschuß verbrennt werden würde. — Hat man nun ferner mittels Orsatapparates oder Hempelbürette den durchschnittlichen Kohlen säuregehalt der trockenen Abgase

c_{O_2} in Raumprozenten

ermittelt, der tatsächlich bei der Verfeuerung des Brennstoffes erreicht wurde, dann ist

$$m = \frac{79 \cdot c_{O_2 \max} + c_{O_2}(21 - c_{O_2 \max})}{c_{O_2}(100 - c_{O_2 \max})}$$

oder angenähert:

$$m = \frac{c_{O_2 \max}}{c_{O_2}}$$

Nach dieser Formel läßt sich für Überschlagsrechnungen auch ohne genaue Kenntnis der Brennstoffzusammensetzung die Luftüberschußzahl schätzen unter Benutzung der Werte aus folgender Zusammenstellung:

Mittelwerte für $\text{CO}_2 \text{ max.}$

Brennstoff	Brennstoff	Brennstoff	
Koks	20,5	Braunkohlen, böhmische . . .	18,6
Anthrazit	19,8	Braunkohlenbrikett	18,7
Steinkohle	18,9	Torf	19,4
Braunkohle, deutsche	18,3	Holz	20,1
Erdöl, roh	15,7	Steinkohlenteer (Koksofen) . . .	18,5
Benzin	14,7	Ölgasteer	18,5
Petroleum	15,1	Wassergasteer	17,7
Masöl	15,5	Flüssige Kohlenwasserstoffe . . .	17,2
Masut u. ä.	15,5	Benzol (90er)	17,4
Solaröl	15,7	Autin	17,1
Paraffinöl	15,8	Naphthalin	18,3
Steinkohlenteer, Horizontal- ofen, Schrägofen.	18,5	Teeröl	17,7
Steinkohlenteer, Vertikalofen	17,5	Spiritus (95er)	15,1
Leuchtgas	11,2	Generatorluftgas aus Braunk.	19,4
Acetylen	17,5	„ „ Holz	19,4
Koksofengas	10,1	„ „ Torf	23,1
Fettgas	13,8	Wassergas	20,8
Blaugas	14,9	Generator-Mischgas aus	
Aerogengas	14,2	Steinkohle	17,9
Schwelgas	16,7	Anthrazit	19,0
Gichtgas	24,1	(Mondgas)	18,0
Generatorluftgas aus		Lokomotivlösche	19,5
Steinkohle	18,6	Braunkohle	19,4
Koks	19,9	Koks	19,2

2. Hat man außer dem Kohlensäuregehalt c_{O_2} auch den Sauerstoffgehalt o in den Rauchgasen bestimmt und ist der Stickstoffgehalt n der Rauchgase als Rest, $n = 100 - (c_{\text{O}_2} + o)$ berechnet, so ist:

$$m = \frac{21}{21 - 79 \cdot \frac{o}{n}}$$

Für Brennstoffe mit geringem Wasserstoffgehalt wird n nur wenig von 79 abweichen, so daß man annähern kann:

$$m = \frac{21}{21 - 0}$$

3. Kennt man vom Brennstoff den Kohlenstoff-, Wasserstoff- und Sauerstoffgehalt und hat man den Kohlensäuregehalt der Abgase bestimmt, so kann man, ohne den Umweg über $c_{\text{O}_2 \text{ max}}$ einzuschlagen, die Luftüberschußzahl errechnen nach:

$$m = \frac{0,21}{c_{\text{O}_2}} \frac{c + 3 c_{\text{O}_2} \left(h - \frac{0}{8} \right)}{c + 3 \left(h - \frac{0}{8} \right)}$$

Für c_{O_2} ist der auf die Einheit bezogene Wert einzusetzen, c , h und o sind Gewichtsprozente.

4. Will man den Einfluß unvollkommener Verbrennung in Rechnung ziehen, so ist es nötig, eine vollständige Untersuchung der Rauchgase vorzunehmen (Bestimmung des Gehaltes an schwefeliger Säure $s o_2$; Kohlensäure $c o_2$; Kohlenoxyd $c o$; Methan $c h_4$ und an Ruß R g in 1 cbm Gas). Dann ist nach Hassenstein:

$$m = \alpha \cdot \frac{n}{s o_2 + c o_2 + c o + c h_4 + \frac{R}{5,36}}$$

Dabei ist für α zu setzen bei:

Steinkohle und Anthrazit:	0,235,	Koks und Holz:	0,258
Braunkohle:	0,238	Torf:	0,247.

X. Die Rauchgase.

I. Die Rauchgasmenge.

a) Sie berechnet sich für 1 kg Brennstoff von der auf S. 514 angegebenen Zusammensetzung zu:

$$G_{kg} = 1 + m L_{kg} - a \text{ kg Gas,}$$

$$= 1 - a + 4,31 \cdot (2,67 \cdot c + 8 h - o + s) \cdot m$$

oder

$$G_{cbm,760} = 22,4 \left[\frac{m}{0,21} \left(\frac{c}{12} + \frac{h}{4} - \frac{o}{32} + \frac{s}{32} \right) + \frac{w}{18} + \frac{h}{4} + \frac{o}{32} + \frac{n}{28} \right] \text{ cbm Gas.}$$

Darin sind enthalten in cbm:

$$\text{Kohlensäure: } 22,4 \cdot \frac{c}{12},$$

$$\text{Wasserdampf: } 22,4 \left(\frac{w}{18} + \frac{h}{4} \right),$$

$$\text{Schweflige Säure: } 22,4 \cdot \frac{s}{32},$$

$$\text{Stickstoff: } 22,4 \left[\frac{n}{28} + m \cdot \frac{79}{21} \left(\frac{c}{12} + \frac{h}{4} - \frac{o}{32} + \frac{s}{32} \right) \right],$$

$$\text{Sauerstoff: } 22,4 \cdot (m - 1) \cdot \left(\frac{c}{12} + \frac{h}{4} - \frac{o}{32} + \frac{s}{32} \right).$$

Die Rauchgasmenge aus 1 cbm Brenngas, der auf S. 514 angegebenen Zusammensetzung ist:

$$G_{cbm} = 1 + \frac{m}{0,21} \left(\frac{h}{2} + \frac{c o}{2} + 2 c h_4 + 2,5 c_2 h_2 + 3 c_2 h_4 + 7,5 c_6 h_6 - o \right) - \frac{1}{2} (h + c o + c_2 h_2 - c_6 h_6) \text{ cbm}$$

Gas von derselben Temperatur und demselben Druck, wie Brenngas und Verbrennungsluft.

Darin sind enthalten in cbm:

$$\text{Kohlensäure: } c o + c o_2 + c h_4 + 2 c_2 h_4 + 2 c_2 h_2 + 6 c_6 h_6;$$

$$\text{Sauerstoff: } (m - 1) \cdot \left(\frac{h}{2} + \frac{c o}{2} + 2 c h_4 + 3 c_2 h_4 + 2,5 c_2 h_2 + 7,5 c_6 h_6 - o \right);$$

$$\text{Stickstoff: } n + \frac{79}{21} \cdot m \left(\frac{h}{2} + \frac{c o}{2} + 2 c h_4 + 3 c_2 h_4 + 2,5 c_2 h_2 + 7,5 c_6 h_6 - o \right);$$

$$\text{Wasserdampf: } h + 2 c h_4 + 2 c_2 h_4 + c_2 h_2 + 3 c_6 h_6.$$

b) Ist außer der Zusammensetzung des Brennstoffs auch der Gehalt der trockenen Abgase (c_{O_2}), (o), (n) auf die Einheit bezogen, bekannt, dann ergibt sich die Rauchgasmenge für 1 kg Brennstoff zu:

$$G_{kg} = 3,667 \cdot c + 2,67 \cdot c \cdot \frac{(o)}{(c_{O_2})} + 2,34 \cdot c \cdot \frac{(n)}{(c_{O_2})} + 9h + w + 2s$$

oder
$$G_{cbm_{0,700}} = \frac{1,867 \cdot c}{(c_{O_2})} + \frac{9 \cdot h + w}{0,804}$$

und für 1 cbm Brenngas:

$$G_{cbm} = \frac{h + 2c h_4 + c_2 h_2 + 2c_3 h_4 + 3c_6 h_6 + c o + c_{O_2} + c h_4 + 2c_2 h_3 + 2c_3 h_4 + 6c_6 h_6}{(c_{O_2})}$$

c) Soll das Unverbrannte in den Herdrückständen — c kg Kohlenstoff für 1 kg Kohle — und der Einfluß unvollkommener Verbrennung berücksichtigt werden, dann ist für 1 kg Brennstoff:

$$G_{cbm_{0,700}} = \frac{1,867(c - c')}{(c_{O_2}) + (c o) + (c h_4) + \left(\frac{R}{5,36}\right)} + \frac{9h + w}{0,804}$$

Für 1 cbm Brenngas ergibt sich die Rauchgasmenge bei unvollkommener Verbrennung, wenn man in der unter 2 angegebenen Formel für G_{cbm} an Stelle von (c_{O_2}) die Summe: $(c_{O_2}) + (c o) + (c h_4) + \left(\frac{R}{5,36}\right)$ einsetzt.

Ist für einen Brennstoff $c_{O_{2max}}$ bekannt, so kann man aus dem gefundenen c_{O_2} und o , den Kohlenoxydgehalt der Abgase — co — nach Fig. 2 rechnerisch ermitteln.

Tafel zur rechnerischen Ermittlung des CO-Gehaltes in den Verbrennungsabgasen (nach Herberg, Feuerungstechnik. Berlin 1913. Julius Springer.)

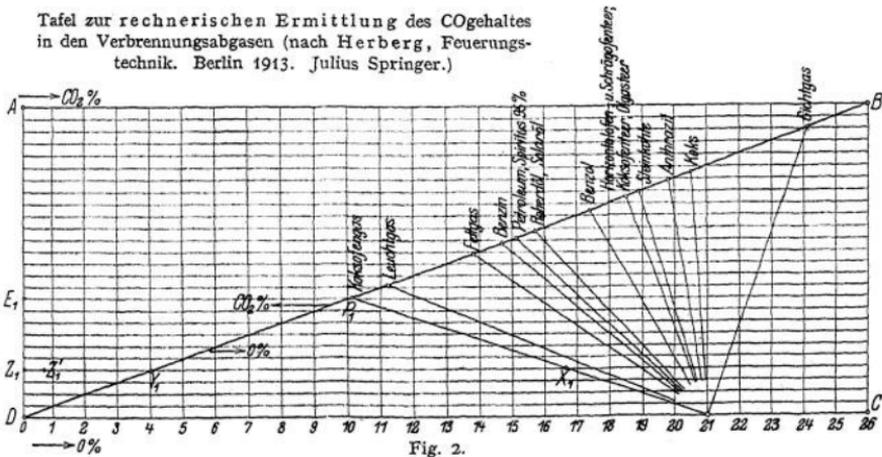


Fig. 2.

Für irgend einen Brennstoff errechne man zunächst, nach seiner chemischen Zusammensetzung den Wert für $c_{O_{2max}}$, oder entnehme ihn annäherungsweise den auf S. 517 angegebenen Mittelwerten. Dann errichte man auf DC in dem der Zahl $c_{O_{2max}}$ entsprechenden Punkt das Lot und ziehe vom Schnitt desselben mit der Diagonale DB die Verbindungsgerade nach Punkt 21. — Wäre z. B. $CO_{2max} = 10,1\%$, so ergäbe sich nach obigem die Gerade $P_1 - 21$. — Zieht man darauf durch den Punkt auf DC , der dem beim Verfeuern des Brennstoffes gefundenen Wert o entspricht, die Parallele zu DB bis zum Schnitt mit $P_1 - 21$, für $o = 12,6\%$ wäre dies Punkt x_1 , dann wäre auf der Wagerechten durch x_1 der Abschnitt bis zur Diagonalen $X_1 Y_1 = o$ und der auf der andern Seite liegende $Y_1 Z_1 = c_{O_2}$ — im Beispiel also gleich 4% . Hätte sich nun aber in den Abgasen ein geringer CO_2 -gehalt gefunden, z. B. nur $3,3\%$, so erhält man aus der Differenz $Z_1 Z_1' = 0,7$, wenn man sie mit $1,6$ multipliziert, den CO -gehalt der Abgase — $Z_1 Z_1' = 0,7$, also $co = 1,6 \cdot 0,7 \approx 1,1\%$.

d) Die Menge der trockenen Abgase läßt sich für Brennstoffe mit geringem Wasserstoffgehalt aus ihrem Heizwert W angenähert berechnen. Es ist nach Dosch:

$$G_{\text{kg}} \approx 1,4 \cdot \frac{m \cdot W}{1000}$$

und

$$G_{\text{cbm}_{0/760}} \approx 1,05 \cdot \frac{m \cdot W}{1000}$$

2. Das spezifische Gewicht der Rauchgase

ergibt sich aus:

$$\rho_{0/760} = \frac{G_{\text{kg}}}{G_{\text{cbm}_{0/760}}}$$

Für mittleren Luftüberschuß kann es allgemein bei 0°C und 760 mm Barom. zu 1,3 kg für 1 cbm geschätzt werden.

3. Der Wärmeinhalt der Rauchgase.

Die mittlere spez. Wärme bei gleichbleibendem Druck für 1 kg Gas in den Temperaturgrenzen $t_1 \div t_2$ ist

$$c_p \Big|_{t_1}^{t_2} = a_p + b(t_1 + t_2)$$

Für 1 cbm Gas mit dem Molekulargewicht μ , das bei 0° und 760 mm Barom. also $\frac{\mu}{22,4}$ kg oder bei 15° und 735 mm Barom. $\frac{\mu}{24,4}$ kg wiegt, folgt somit

$$C_p \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{\mu}{22,4} [a_p + b(t_1 + t_2)]$$

(1 cbm; $0/760$)

Werte für a_p und b .

Stoff	a_p	b	$\frac{\mu}{22,4} \cdot a_p$	$\frac{\mu}{22,4} \cdot b$	$\frac{\mu}{24,4} \cdot a_p$	$\frac{\mu}{24,4} \cdot b$
Luft	0,238	0,000 020	0,303	0,000 026	0,279	0,000 024
H	3,400	0,000 300	0,303	0,000 026	0,279	0,000 024
O	0,212	0,000 018	0,303	0,000 026	0,279	0,000 024
N	0,243	0,000 021	0,303	0,000 026	0,279	0,000 024
CO	0,243	0,000 021	0,303	0,000 026	0,279	0,000 024
CO ₂	0,197	0,000 059	0,387	0,000 115	0,355	0,000 106
H ₂ O	0,438	0,000 119	0,351	0,000 095	0,323	0,000 088
CH ₄	0,481	0,000 500	0,343	0,000 357	0,315	0,000 328
C ₂ H ₄	0,335	0,000 393	0,418	0,000 491	0,384	0,000 451
Zur Berechnung von	c_p		$C_p(0/760)$		$C_p(15/735)$	

Beispiel: Eine Steinkohle mit 76% C; 4% H und 6% Feuchtigkeit wurde verfeuert. Die Kesselhaustemperatur betrug etwa 15°C . Das Barometer stand auf 735 mm. In den trockenen Abgasen wurde 15% CO₂ und 3,5% O im Mittel festgestellt. Danach wurde mit Hilfe der Tafel 2 der Gehalt an CO zu 1,3% berechnet.

Welche mittlere spez. Wärme haben die Abgase, wenn sie das Kesselmauerwerk mit 350°C verlassen? —

Die Kohle ergibt nach S. 519 eine Rauchgasmenge von

$$G_{\text{cbm}_{15/735}} = \underbrace{\frac{2,033 \cdot 0,76}{0,15}}_{\text{trockene Gase}} + \underbrace{\frac{9 \cdot 0,04 + 0,06}{0,738}}_{\text{Wasserdampf}}$$

Daraus berechnet sich die Zusammensetzung der Abgase mit dem Wasserdampfgehalt zu: 14,3% CO₂; 3,3% O; 1,2% CO; 76,0% N und 5,2% Wasserdampf. Danach ist die gesuchte spez. Wärme der Abgase

$$C_p = \frac{1}{100} [14,3 \cdot (0,355 + 0,000106 \cdot (15 + 350)) \\ + (3,3 + 1,2 + 76,0) \cdot (0,279 + 0,000024 \cdot (15 + 350)) \\ + 5,2 \cdot (0,323 + 0,000088 (15 + 350))] \\ C_p = 0,306.$$

Dies entspricht einem

$$c_p \approx 0,24.$$

XI. Der Heizwert der Brennstoffe.

Durch die Verbrennung von B kg Brennstoff, der vorher eine Temperatur t_0 , also einen Wärmehalt $B \cdot c_{p_0} \cdot t_0$ hat, wurde eine Gasmenge $B \cdot G$ mit dem größeren Wärmehalt $B \cdot G \cdot c_{p_1} \cdot t_1$ erzeugt. Dann stellt

$$B \cdot W = B \cdot G \cdot c_{p_1} \cdot t_1 - B \cdot c_{p_0} \cdot t_0 - B \cdot L \cdot c'_{p_0} \cdot t_0^1) - Q^2)$$

diejenige Wärmemenge dar, die bei der Verbrennung entwickelt wird. Die so für 1 kg des Brennstoffes (bei Gasen für 1 cbm) gefundene Wärmemenge W nennt man den Heizwert — Brennwert, absoluten Wärmeeffekt, Verbrennungswärme — des Brennstoffes.

Sollte dieser völlig ausgenutzt werden, so wären die Verbrennungserzeugnisse bis auf die Anfangstemperatur t_0 des Brennstoffes abzukühlen. Der in ihnen enthaltene Wasserdampf wäre dabei niederschlagen, da t_0 unterhalb der Verdampfungstemperatur liegen wird. Praktisch ist aber nun eine so weitgehende Ausnutzung nicht möglich, infolgedessen geht von dem oberen Heizwert W_0 , bezogen auf Abgase, in denen der gesamte Wassergehalt w (in kg) flüssig geworden ist, die Verdampfungswärme desselben — etwa 600 Wärmeeinheiten für jedes kg — verloren. Die um diesen Betrag verkleinerte Verbrennungswärme heißt der untere Heizwert (W_u). Er wird somit auf Abgase bezogen, die den gesamten Wassergehalt dampfförmig abführen. Es ist daher

$$W_u = W_0 - 600 \cdot w.$$

Der Heizwert berechnet sich aus der Zusammensetzung des Brennstoffes folgendermaßen: Es ergibt:

$$1 \text{ kg C} + 2,66 \text{ kg O}_2 = 3,66 \text{ kg CO}_2 + 8080 \text{ WE,} \\ 1 \text{ kg H}_2 + 8 \text{ kg O} = 9 \text{ kg H}_2\text{O}^3) + 28775 \text{ WE,} \\ 1 \text{ kg S} + 1 \text{ kg O}_2 = 2 \text{ kg SO}_2 + 2450 \text{ WE.}$$

Danach hat ein Brennstoff, von der auf Seite 514 angegebenen Zusammensetzung

$$W_u \approx 8100 \cdot c + 29000 \left(h - \frac{o}{8} \right) + 2500 \cdot s - 600 \cdot w$$

$h - \frac{o}{8}$ heißt „disponibler Wasserstoff“. Es ist also derjenige Teil des Wasserstoffgehaltes, der nach Bindung des im Brennstoff vorhandenen Sauerstoffes übrigbleibt.

Für 1 cbm Brenngas ergibt sich:

$$W_u \approx 3050 c_o + 2600 \cdot h + 8580 c h_4 \\ + 14200 c_3 h_4 + 13600 c_2 h_2 + 34100 c_6 h_6.$$

Bestimmen läßt sich der Heizwert eines Brennstoffes durch Verbrennung einer möglichst einwandfreien Durchschnittsprobe desselben im Kalorimeter. Als solches kommt für feste und in der Hauptsache auch für flüssige Brennstoffe das Berthelot - Mahlersche und für Gase das Juncker'sche in Anwendung.

1) Falls die Luft ebenfalls mit t_0^0 zugeführt wurde.

2) Die zur Zündung nötige Wärme.

3) Dampfförmig.

Mittelwerte für W_u .

Feste Brennstoffe.

Brennstoff	Heizwert für 1 kg	Brennstoff	Heizwert für 1 kg
Holz	2400—3700	Steinkohle: Ruhr . . .	6100—8100
Torf	2000—4200	Saar	5000—7800
Braunkohle, deutsche	1900—3000	Schlesische	5200—7500
böhmische	3800—5900	Steinkohlenbrikett . .	6200—7600
Braunkohlenbrikett . .	4400—5200	Koks	5500—7200
		Anthrazit	7300—8000

Flüssige Brennstoffe.

Brennstoff	Heizwert für 1 kg	Brennstoff	Heizwert für 1 kg
Erdöl, roh	10 000	Koksofenteer	8 500
Benzin	10 200	Wassergasteer	9 100
Petroleum	10 500	Ölgasteer	9 000
Gasöl	9 800	Flüssige Kohlenwasserstoffe	9 000
Erdölrückstände	10 000	Benzol, 90er	10 000
Solaröl	10 000	Autin	9 800
Paraffinöl	9 800	Naphthalin	9 600
Steinkohlenteer:		Teeröl	9 000
Horizontalofen	8 200	Spiritus 95proz.	5 800
Schrägofen	8 400	Erdnußöl	5 800
Vertikalofen	8 500		

Gasförmige Brennstoffe.

Brennstoff	Heizwert für 1 cbm 0; 760	Brennstoff	Heizwert für 1 cbm 0; 760
Leuchtgas	5 100	Generator-Luftgas aus:	
Acetylen	13 600	Braunkohle	1 200
Koksofengas	4 500	Holz	1 200
Fettgas	9 000	Torf	900
Blaugas	14 000	Wassergas	2 600
Aerogengas	2 500	Mischgas aus:	
Schwelgas	2 500	Steinkohle	1 200
Gichtgas	900	Anthrazit	1 300
Generator-Luftgas aus:		Mondgas	1 300
Steinkohle	1 100	Lokomotivlöschse . . .	1 100
Koks	900	Braunkohle	1 400
		Koks	1 100

XII. Die Verbrennungstemperatur.

1. Für offene Feuerungen, in denen sich die Verbrennungsvorgänge bei gleichbleibendem Druck vollziehen, gilt für die Temperatur im Feuer:

$$t_f = t_a + \frac{\eta_1(1 - \sigma) \cdot W_u}{(1 + m L_{kg} - a) c_p}$$

Darin bedeutet: t_a^0 C die Kesselhaustemperatur, η_1 den Wirkungsgrad der Feuerung d. i. derjenige Teil des Heizwertes, der wirklich zur Entfaltung gelangt (70 ÷ 90%), σ der durch Ausstrahlung, an die Heizfläche und nach außen

hin, für die Erwärmung der Verbrennungsgase verloren gegangene Teil der entwickelten Wärme, und zwar ist

σ für Innenfeuerung	25 bis 30%
für Unterfeuerung	20 „ 25%
für Vorfeuerung	10 „ 15%

Für c_p kann als Mittelwert 0,24 eingesetzt werden. Will man es auf Grund der Brennstoffanalyse und der Zusammensetzung der Rauchgase berechnen, so ist als obere Temperaturgrenze vorläufig ein Mittelwert aus nachstehender Tabelle einzusetzen.

Brennstoff	Heizwert	Verbrennungstemperatur bei		
		Innen-	Unter- Feuerung	Vor-
Steinkohle	7500	1000 ÷ 1300	1100 ÷ 1400	1300 ÷ 1700
	7000	900 ÷ 1200	1000 ÷ 1300	1200 ÷ 1600
Braunkohle	4800	900 ÷ 1200	1000 ÷ 1300	1200 ÷ 1600
	2500	600 ÷ 800	700 ÷ 900	800 ÷ 1000
Holz und Torf . .	3000	700 ÷ 900	800 ÷ 1000	900 ÷ 1100

2. Für die motorische Verbrennung (bei gleichbleibendem Rauminhalt!) ergibt sich die Verbrennungstemperatur wie folgt:

1 kg Brennstoff mit dem Heizwert W_u , gemischt mit $(m \cdot L_{kg})$ kg Luft und R kg Verbrennungsrückständen habe vor der Entzündung im Verbrennungsraum die Temperatur t_0 und damit angenähert den Wärmeinhalt:

$$J_0 = t_0 \cdot (1 + m L_{kg}) \cdot (c_{v(Luft)} \Big|_0^{t_0}) + J_R.$$

Hierin bedeutet c_v die spez. Wärme bei konstantem Volumen für 1 kg des betreffenden Gases und J_R den Wärmeinhalt der Rückstände. Setzen sich diese aus einzelnen Stoffen zusammen, die g_1, g_2 usw. kg wiegen, dann ist:

$$J_R = t_0 \cdot \sum [g \cdot (c_{v_g} \Big|_0^{t_0})].$$

Hat man nun die einzelnen Bestandteile, die nach der Verbrennung vorhanden sind, in ihren Gewichtsmengen g'_1, g'_2 usw. kg rechnerisch ermittelt, und nimmt man ferner eine Verbrennungstemperatur t_r° C an, so ergibt sich der Wärmeinhalt der Verbrennungserzeugnisse:

$$J_r = t_r \cdot \sum [g' \cdot (c_{v_{g'}} \Big|_0^{t_r})].$$

Daraus folgt nun:

$$t_r = \frac{W_u + t_0 [(1 + m L_{kg}) \cdot (c_{v(Luft)} \Big|_0^{t_0}) + \sum [g \cdot (c_{v_g} \Big|_0^{t_0})]]}{\sum [g' \cdot (c_{v_{g'}} \Big|_0^{t_r})]}.$$

Für $c_{v_{g'}} \Big|_0^{t_r}$, die spezifische Wärme der einzelnen Bestandteile g' , ist die obere Temperaturgrenze t_r zunächst zu schätzen, damit der Wert für t_r zu berechnen und diese so erhaltene Verbrennungstemperatur für eine nochmalige Nachrechnung als Temperaturgrenze einzusetzen.

Für Brenngase erhält man auf gleiche Weise:

$$t_r = \frac{W_u + t_0 \cdot \sum [r \cdot (C_{v_r} \Big|_0^{t_0})]}{\sum [r' \cdot (C_{v_{r'}} \Big|_0^{t_r})]},$$

wenn W_u den Heizwert für 1 cbm Brenngas, r cbm die einzelnen Bestandteile des Brenngemisches vor der Zündung, C_{v_r} ihre spez. Wärme für 1 cbm und r' und $C_{v_{r'}}$ das Entsprechende für die Verbrennungserzeugnisse bedeuten. Dabei ist für alle Raumbangaben der gleiche Druck und die gleiche Temperatur zugrunde

zu legen. Für die Auswertung von c_v (für 1 kg) und C_v (für 1 cbm) ist folgendes zu beachten:

$$c_v = c_p - \frac{2}{\mu} \dots \text{ (vgl. Seite 520),}$$

$$c_v \Big|_{t_1}^{t_2} = a_v + b(t_1 + t_2)$$

und

$$C_v (0; 760) \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{\mu}{22,4} \cdot [a_v + b(t_1 + t_2)],$$

$$C_v (15; 735) \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{\mu}{24,4} \cdot [a_v + b(t_1 + t_2)].$$

Werte für a_v .

Stoff	a_v	$\frac{\mu}{22,4} \cdot a_v$	$\frac{\mu}{24,4} \cdot a_v$
Luft	0,169	0,214	0,197
H	2,400	0,214	0,197
O	0,150	0,214	0,197
N	0,172	0,214	0,197
CO	0,176	0,214	0,197
CO ₂	0,152	0,298	0,273
H ₂ O	0,327	0,262	0,241
CH ₄	0,356	0,254	0,233
C ₂ H ₄	0,264	0,329	0,302
Zur Berechnung von:	c_v	$C_{v(0; 760)}$	$C_{v(15; 735)}$

XIII. Die Erhöhung des Druckes im Verbrennungsraum bei der motorischen Verbrennung.

Es seien:

p_0 , kg/cm², der Druck im Verbrennungsraum vor der Zündung;

p_f , kg/cm², der Druck nach der Verbrennung;

T_0 und T_f , °C, die entsprechenden absoluten Temperaturen;

V_0 , cbm, der Rauminhalt des Brenngemisches bei einem bestimmten Druck- und Temperaturzustand, z. B. bei 15° und 735 mm Baromstd.;

V_f , cbm, der Rauminhalt der Verbrennungserzeugnisse ebenfalls für 15° C und 735 mm Baromstd.

Dann ist

$$p_f = p_0 \cdot \frac{T_f}{T_0} \cdot \frac{V_f}{V_0}.$$

XIV. Die Vergasung fester Brennstoffe.

I. Im Gegensatz zur Entgasung, d. i. Trennung des Flüchtigen in einem Brennstoff vom Koks, versteht man unter Vergasung: die Verwandlung des gesamten festen Brennstoffes (nach Abzug des Unverbrennlichen) in Brenngas.

Dies wird im Generator dadurch erreicht (vgl. Fig. 3), daß aus dem zunächst getrockneten (oberste Zone) und entgasten (2. Zone) Brennstoff der Kohlenstoff des Kokes in Kohlenoxyd verwandelt wird. Es wird nämlich im untersten Teile des Schachtofens (Verbrennungszone) der Kohlenstoff zu Kohlen-säure verbrennen, um in der darüberliegenden glühenden Kohlenschicht, der eigentlichen Vergasungszone zu Kohlenoxyd reduziert zu werden.

2. Luftgas.

In die Verbrennungszone wird Luft eingeblasen und so die Vergasung durch freien Sauerstoff herbeigeführt.

Wählt man dann als Brennstoff reinen Kohlenstoff, so spielen sich folgende Vorgänge ab:

Verbrennungszone: $C + O_2 = CO_2$, dabei entwickelt	+ 12 × 8080 WE,
Vergasungszone(*): $CO_2 + C = 2 CO$, dazu verbraucht	- 39 792 WE
Ergebnis aus der Vergasung von 2 × 12 kg C:	
	+ 96 960 WE,
	- 39 792 „
	57 168 WE + 2 CO

(letztere mit einem Heizwert von: $2 \cdot 28 \cdot 2442 = 136\,752$ WE).

Daraus folgt, daß in einem verlustlosen Generator 100 WE gebunden in C durch Luftvergasung umgesetzt werden in:

29,5 WE freier und

70,5 „ in CO gebundener Wärme, und dabei ein ideales Luftgas entsteht, mit 34,7 Raumproz. CO und 65,3 % N, erwärmt auf etwa 1300° C.

(*) Voraussetzung dafür, daß die Reduktion des CO_2 überhaupt eintritt, ist eine Mindesttemperatur im Vergasungsraum von 450° C. Erst von 1000° C an kann die Gesamtmenge CO_2 in CO verwandelt werden.

Praktisch läßt sich letzteres nicht erreichen, so daß stets ein Gehalt von CO_2 im Generatorgas vorhanden sein wird. Sein Gehalt an Kohlenoxyd (co) und an Kohlensäure (c_{O_2}) steht zueinander in folgendem Zusammenhang:

$$c_{O_2} = \frac{34,7 - co}{1,65}$$

Für ein praktisch erreichbares $co_{max} = 32$, folgt daraus ein $c_{O_2min} = 1,6$ und für $c_{O_2} = 4$, der nicht überschritten werden soll, erhält man $co = 28$. Für den letztgenannten Fall steigt die Temperatur des Gases auf 1500° C.

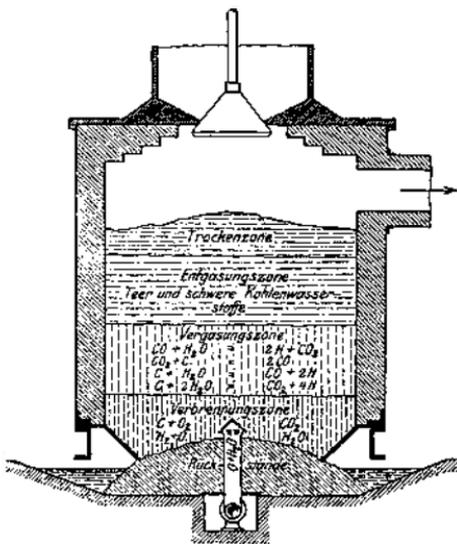


Fig. 3.1)

3. Wassergas.

Führt man in einen Generator, der, bisher durch Luft betrieben, in Beharrungszustand gelangte, statt der Luft Wasserdampf ein, so findet eine Vergasung des C durch den in H_2O gebundenen O statt:

1. Verbrennungszone	bei mindestens 600° C	: $C + 2 H_2O = CO_2 + 4 H + 12 \times 8080$ WE - 4 × 28 766
2. Vergasungszone	bei mindestens 450° C	: $CO_2 + C = 2 CO - 39\,792$ WE

Ergebnis aus der Vergasung von 2 × 12 kg C:

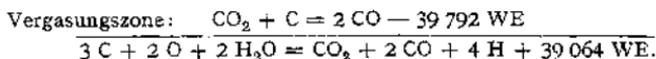
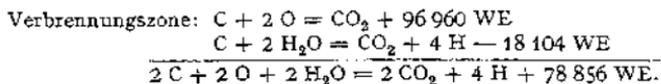
$$\begin{array}{r}
 4 H + 2 CO - [18\,104] \text{ WE} \\
 - [39\,792] \text{ „} \\
 \hline
 4 \times 28\,766 + 2 \times 28 \times 2442 - 57\,896 \text{ WE} \\
 \hline
 \text{gebunden:} \quad \text{dem Feuer entzogen:} \\
 251\,816 \text{ WE,} \quad 57\,896 \text{ WE.}
 \end{array}$$

Somit sind für je 100 WE der vergasteten Kohle etwa 130 WE im Wassergase enthalten, d. h., 30 WE wurden dabei dem Wärmeverrat des Ofens entnommen. Der Ofen wird kalt geblasen. Je weiter dies nun fortgesetzt wird, um so weniger Wasserdampf wird zersetzt und um so höher steigt der Kohlensäuregehalt des Gases, während im idealen Wassergase: $c_{O_2} = 0\%$ und $co = 50\%$; $h = 50\%$ enthalten wäre.

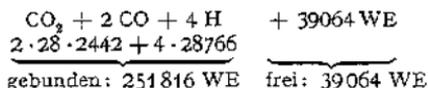
1) Aus Fuchs, Wärmetechnik des Gasgenerator- und Dampfkessel-Betriebes. 3. Aufl. Berlin 1913. Julius Springer.

4. Mischgas.

Um die dem Generator schädlichen, hohen Temperaturen zu vermeiden und gleichzeitig die freiwerdende Wärme zu verringern, kann man mit Vorteil in den Generator dauernd ein Gemisch von Luft und Wasserdampf einblasen. Ihr Mischungsverhältnis versucht man dabei so zu regeln, daß sich möglichst folgende Vorgänge abspielen:



Ergebnis aus der Vergasung von 3 · 12 kg C:



d. h. 13% der Wärme des C wird frei und 87% ist im Mischgas gebunden enthalten. Das dabei erzielte ideale Mischgas enthielte:

$$h = 23\% ; \quad co = 23\% ; \quad co_2 = 11\% ; \quad n = 43\% .$$

Unter Berücksichtigung des Wärmeinhaltes im zugeführten Wasserdampf ergibt sich für das Gas eine Temperatur von etwa 900°, mit der es die Vergasungszone verlassen würde.

5. Bei den vorstehenden Entwicklungen ist von den Wärmeverlusten durch Leitung und Strahlung abgesehen worden. Ferner sind die bei der Verwendung feuchten, gashaltigen Brennstoffes durch die Trocknung und Entgasung bedingten Verluste nicht berücksichtigt.

Gasreiche Brennstoffe sind schwierig zu vergasen, da sich hierbei die Erzeugnisse der bei verhältnismäßig niedrigen Temperaturen stattfindenden Entgasung zum großen Teil in unbeständiger Form ausscheiden. Trotzdem ist es möglich, auch minderwertige Brennstoffe mit einem Wirkungsgrade bis zu 70% zu vergasen und sie damit in eine Form zu bringen, die ihre Verwendung für den Motorbetrieb (Kraftgas) gestattet und für ihre Verbrennung im offenen Feuer (Heizgas) folgende Vorteile gewährt:

1. Verbrennung mit geringem Luftüberschuß;
2. ruß- und rauchfreie Verbrennung;
3. genaue Regelbarkeit des Feuers und einfachste Bedienung desselben;
4. leicht zu erreichende hohe Vorwärmung der Verbrennungsluft;
5. bequeme Möglichkeit, die Flamme oxydierend oder reduzierend zu machen;
6. Vereinfachung der Brennstoffzuführung und der Herdrückstandsabfuhr durch Anlage eines Zentralgenerators.

Stoffkunde.

Bearbeitet von Ing. O. Heinrich.

Internationale Atomgewichte.¹⁾

Aluminium	Al	27	Mangan	Mn	55
Antimon	Sb	120	Natrium	Na	23
Arsen	As	75	Nickel	Ni	59
Barium	Ba	137	Osmium	Os	191
Blei	Pb	207	Phosphor	P	31
Bor	B	11	Platin	Pt	195
Brom	Br	80	Quecksilber	Hg	200
Calcium	Ca	40	Sauerstoff	O	16
Cerium	Ce	140	Schwefel	S	32
Chlor	Cl	35,5	Selen	Se	79
Chrom	Cr	52	Silber	Ag	108
Eisen	Fe	56	Silicium	Si	28
Fluor	Fl	19	Stickstoff	N	14
Gold	Au	197	Strontium	Sr	87,5
Iridium	Ir	193	Tantal	Ta	181
Jod	J	127	Wasserstoff	H	1
Kalium	K	39	Wismut	Bi	208
Kohlenstoff	C	12	Wolfram	W	184
Kupfer	Cu	63,5	Zink	Zn	65
Magnesium	Mg	24	Zinn	Sn	119

Chemische Zusammensetzung technisch wichtiger Stoffe.

Acetylen C_2H_2

Alaun $KAl(SO_4)_2 + 12 H_2O$

Alkohol:

Äthyl- $C_2H_5(OH)$

Methyl- $CH_3(OH)$

Ammoniak NH_3

Arsenik As_4O_6

Asbest (Ca—Mg) Silikate

(Äthyl)-Äther $(C_2H_5)_2O$

Ätzkalk CaO

Ätzkali KHO

Ätznatron $NaHO$

Benzin. Die zwischen 80 und 120° C siedenden Stoffe der Paraffinreihe

C_nH_{n+2} aus dem Rohpetroleum

Benzol C_6H_6

Bleiweiß $Pb_3(CO_3)_2(OH)_2$

Blutlaugensalz:

gelbes $K_4[Fe(CN)_6] + 3 H_2O$

rotes $K_3[Fe(CN)_6]$

Borax $Na_2B_4O_7$

Braunstein MnO_2

Calciumkarbid CaC_2

Cellulose $C_6H_{10}O_5$

Chlorkalk $CaCl(OCl)$

Chlorcalcium $CaCl_2$

Essigsäure $C_2H_4O_2$

Fette, Gemenge von:

Tripalmitin $C_3H_5(C_{16}H_{31}O_2)_3$

Tristearin $C_3H_5(C_{18}H_{35}O_2)_3$

Triolein $C_3H_5(C_{18}H_{33}O_2)_3$

Fixiersalz $Na_2S_2O_3$

¹⁾ Abgerundet.

Gips CaSO_4	Mergel — Gemisch von kalk- und tonhaltigen Erden
Glas (Na—Ca) Silikat	Natronlauge NaOH
Glimmer $\text{K}_2\text{H}_2\text{Al}_3(\text{SiO}_4)_3$	Petroleum:
Glaubersalz Na_2SO_4	Leucht-, die zwischen 150° und 250° siedenden Stoffe des Rohpetroleum
Glycerin $\text{C}_3\text{H}_5\text{O}_3$	Pottasche K_2CO_3
Grubengas CH_4	Pyrogallussäure $\text{C}_6\text{H}_6\text{O}_3$
Hammerschlag Fe_3O_4	Rost $\text{Fe}(\text{OH})_3$
Holzgeist $\text{CH}_3(\text{OH})$	Ruß C mit Teerbeimischungen
Höllenstein AgNO_3	Salmiak NH_4Cl
Kalilauge KOH	Salpeter:
Kalk:	indischer KNO_3
gebrannter CaO	Chile NaNO_3
gelöschter $\text{Ca}(\text{OH})_2$	Salzsäure HCl
Karborund SiC	Schwefelsäure H_2SO_4
Kochsalz NaCl	Schwerspat BaSO_4
Kohlensäure CO_2	Seifen:
Kohlenwasserstoff:	harte: ölsaures Na
leichter (Methan) CH_4	weiche: ölsaures K
schwerer (Äthylen) C_2H_4	Seifenstein NaOH
(Acetylen) C_2H_2	Soda Na_2CO_3
Korund (Schmirgel) Al_2O_3	Stärke $\text{C}_6\text{H}_{10}\text{O}_5$
Kreide CaCO_3	Teer, Gemisch von Kohlenwasserstoffen, Phenolen und stickstoffhaltigen Basen
Kupfervitriol CuSO_4	Terpentinöl $\text{C}_{10}\text{H}_{18}$
Lehm — Ton, verunreinigt durch Sand und Eisenhydroxyd	Ton $\text{H}_4\text{Al}_2\text{Si}_2\text{O}_9$
Lötwasser — Wässrige Lösung von ZnCl_2	Wasser H_2O
Marienglas $\text{CaSO}_4 + 2\text{H}_2\text{O}$	Wasserglas $\text{K}_2\text{SiO}_4; \text{Na}_4\text{SiO}_4$
Marmor CaCO_3	Zinnober HgS
Mennige Pb_3O_4	Zinkweiß ZnO

Einheitsgewichte

in kg für 1 cbdm

Metalle und Legierungen.

Aluminium	2,6	Kupfer:	
Antimon	6,6	gegossen	8,8
Blei	11,4	gewalzt	8,9
Bronzen (Rotguß)	7,4 ÷ 8,9	Draht	9,0
Chrom	6,8	Magnesium	1,7
Eisen:		Mangan	7,6
Roheisen, grau	6,6 ÷ 7,6	Messing:	
Roheisen, weiß	7,0 ÷ 7,9	Gelbguß	8,2 ÷ 8,7
Gußeisen	7,0 ÷ 7,2	Draht	8,7
Stahlformguß	7,8	Nickel	8,7
Flußeisen	7,8	Platin	21,5
Flußstahl	7,9	Quecksilber	13,6
Schweißeisen	7,8	Weißmetall (Lagermetall) ..	7,0 ÷ 7,5
Schweißstahl	7,9	Wismut	9,8
Tiegelstahl	7,9	Wolfram	19,1
Schnellschneidstahl	8,5 ÷ 9,2	Zink:	
Eisendraht	7,7	gegossen	6,9
Stahldraht	7,9	gewalzt	7,2
		Zinn	7,4

Hölzer — lufttrocken.

Birke	0,6	Pöckholz	0,9
Eiche	0,9	Rotbuche	0,7
Erle	0,5	Rottanne	0,6
Esche	0,7	Rüster	0,6
Kiefer (Föhre)	0,5	Weißbuche	0,7
Lärche	0,5	Weißtanne	0,5
Pappel	0,4		

Frisch geschlagene Hölzer wiegen etwa 1,8 mal soviel.

Mauerwerk und seine Baustoffe.

Beton	1,8 ÷ 2,5	Sandstein	2,2 ÷ 2,5
Gipsguß (trocken)	1,0	Schamottesteine	1,8 ÷ 2,0
Granit	2,5 ÷ 3,0	Ziegelsteine, gebrannt:	
Kalkbrei	1,4	gewöhnliche	1,4 ÷ 1,6
Kalkmörtel	1,5 ÷ 1,8	Klinker	1,7 ÷ 2,0
Korksteine	0,25	ungebrannt:	
Mauerwerk aus:		Kalksand-	1,9
gebrannten Ziegeln	1,6	Zementmörtel	2,1
Klinkern	1,8 ÷ 2,0		
Kalksandziegeln	1,9		
Bruchstein	2,5		

Verschiedene Hilfsstoffe.

Asbest — verarbeitet	1,2	Gummi — verarbeitet	1,4
Asphalt	1,1 ÷ 1,5	Kork	0,24
Fette	0,9	Korundschmirgel	4,0
Glas	2,5	Leder	0,9 ÷ 1,1
Graphit	2,1	Porzellan	2,3

Flüssigkeiten bei 15° C.

Äther (Schwefeläther) ...	0,73	Petroleum (Leuchtöl) ...	0,79 ÷ 0,82
Alkohol	0,79	Salpetersäure — rohe mit	
Benzin	0,68 ÷ 0,72	etwa 70% HNO ₃	1,42
Benzol	0,89	Salzsäure mit etwa 20%	
Glyzerin	1,26	HCl	1,1
Leinöl	0,93	Schwefelsäure — rohe mit	
Mineralöle:		etwa 66% H ₂ SO ₄	1,6
Spindelöle	0,89 ÷ 0,90	Spiritus — 90 Raum% ..	0,83
Maschinenöle	0,90 ÷ 0,91	Steinkohlentee	1,2
Eisenbahnachsenöle ...	0,90 ÷ 0,92	Teeröl	1,0 ÷ 1,1
Zylinderöle	0,92 ÷ 0,94	Terpentinöl	0,86

Gase bei 0° und 760 mm Barometerstand.

Gewicht von 1 cbcm in g.

Acetylen	1,177	Luft:	
Grubengas	0,7	trocken	1,293
Kohlenoxyd	1,25	mittelfeucht	1,3
Kohlensäure	0,53 ÷ 0,56	Sauerstoff	1,429
Leuchtgas	1,964	Stickstoff	1,254
		Wasserstoff	0,0895

Mittlere Lagergewichte

für 1 cbm in kg.

Brennstoffe:		Mais	750
Holzkohle	200	Heu und Stroh	150
Koks	400	Hülsenfrüchte	800
Holz	400	Kalk (gebrannt)	1100
Torf	500	Kartoffeln	700
Braunkohlen	700	Malz	550
Steinkohlen	800	Mehl	700
Preßkohlen	950	Müll	650
Eis	900	Obst	350
Erde, Lehm, Ton, Kies	1800	Rüben	600
Formsand	1200	Salz:	
Getreide:		grobkörnig	750
Weizen, Roggen, Gerste, Buch-		feingemahlen	1000
weizen	680	Zement	1400
Hafer	450	Zucker	750

Die Maschinenbaustoffe.

Das Eisen.

Nicht als chemisch reines Fe verwandt, sondern mit wechselndem Gehalt an C, (Cr, Mo, W, Va, Ti, Al, Ni) Si, Mn, P und S.

Einfluß der Beimengungen.

C wirkt auf Schmelzpunkt, Festigkeit und Härtebarkeit.

Cr, Mo, W, Va, Ti, Al, Ni wirken vor allem auf Festigkeit und Härte.

Si begünstigt die C-Ausscheidung in Graphitform; macht das Eisen faulbrüchig.

Mn verhindert die Graphitausscheidung, erzeugt Härte und Schwindung.

P macht dünnflüssig; vermindert die Festigkeit — kaltbrüchig.

S macht dickflüssig; erzeugt Sprödigkeit — rotbrüchig.

Eisenerze: Brauneisenstein (Minette) $2 \text{Fe}_2\text{O}_3 + 3 \text{H}_2\text{O}$; Magneteseisenstein Fe_3O_4 ; Roteisenstein Fe_2O_3 ; Spateisenstein FeCO_3 .

Daraus im Hochofen:

Roheisen.

	Im 100 Gew. Teil. sind enthalten:				Schmelzpunkt in °C	Verwendungszweck
	C	Si	Mn	P		
Weißes Roheisen ..	3 ÷ 4	0,1 ÷ 2	2 ÷ 6	0,1 ÷ 3	1100 ^o	Zur Erzeugung des schmelzbaren Eisens
Spiegeleisen	4,5	0,5	5 ÷ 30	0,1		als Rückkohlungs- und Desoxydationsmittel bei der Erzeugung schmelzbaren Eisens
Eisenmangan	6,5	1,3	60 ÷ 80	0,1		Zur Erzeugung bestimmter Gußsorten (Selten erzeugt)
Halbiertes Roheisen ..	2,5	1	2	1		Gießereiroheisen.
Graues Roheisen ..	3 ÷ 4	2 ÷ 3	0,8	0,6	1200 ^o	als Desoxydationsmittel, wenn nicht gleichzeitig eine Kohlung beabsichtigt ist.
Eisensilizium	1,5	10 ÷ 20	1	0,1		

Weißes Roheisen kommt noch mit einem P-Gehalt bis zu 2% vor und wird dann als Thomas-Roheisen benutzt. Dagegen erzeugt man auch graues Roheisen mit einem P-Gehalt unter 0,1%, Hämatit genannt. Es dient als Gießereiroheisen.

Der S-Gehalt des Roheisens schwankt zwischen 0,02 und 0,12. Er ist am geringsten — unter 0,01% — beim Holzkohlen-Roheisen.

Gußeisen (C-Gehalt $3 \div 4\%$). Entweder direkt im Hochofen oder zum größten Teil durch Umschmelzen in Kupol-, Flamm- und Tiegelöfen erzeugt und in Sand-, Masse-, Lehm-, seltener in gußeisernen Formen — Kokillen — gegossen. Dies letztere wird angewandt zur Herstellung von

Hartguß. Die Oberflächenschicht wird hart, da dort durch Abschrecken des die Kokillenwand berührenden Gießgutes eine Ausscheidung des C als Graphit verhindert wird. Angewandt zur Herstellung von Walzen, Eisenbahnradern, Kollergangringen u. a. m.

Temperguß — schmiedbarer Guß — durch Glühfrischen im Temperofen entkohltes Gußeisen. Dazu werden die Stücke aus Si-armem Roheisen, gattiert mit schmiedeeisernem Schrott in Sandformen, abgessogen und dann, umgeben von O abgebenden Stoffen, Roteisenstein, Hammerschlag o. ä., etwa 8 Tage lang bei $850 \div 1000^\circ$ geglüht. Der C-Gehalt kann so von etwa 3% bis auf 1% vermindert werden. Angewandt für dünnwandige Stücke, die sich nicht aus Stahlguß herstellen lassen, als da sind: Schraubenschlüssel, kleinere Teile für landwirtschaftliche Maschinen, Nähmaschinen u. ä. m.

Schmiedbares Eisen (C-Gehalt $0,06 \div 1,6\%$). Aus Roheisen hergestellt in Flammöfen und in Konvertern. Schmelzpunkt $1300 \div 1500^\circ$.

Unterschieden wird: weiches (Schmiede-) Eisen — wenig härtbar — und Stahl — gut härtbar. Die Grenze zwischen beiden liegt etwa bei 0,5% C-Gehalt. Da aber andere Beimengungen den C-Gehalt in bezug auf die Härbarkeit teilweise ersetzen können, so ist dieser allein nicht als Unterscheidungsmerkmal anzusehen. Man zieht es deswegen vielfach vor, die Zugfestigkeit als Grenze zu benutzen, und zwar kann man gelten lassen:

Flußeisen: $K_2 \leq 5000 \text{ kg/cm}^2$; Schweißeisen: $K_2 \leq 4200 \text{ kg/cm}^2$.

Flußstahl: > 5000 Schweißstahl: > 4200

Für gute Schweißbarkeit muß, nach Diegel, sein:

der Gehalt an: C $< 0,5\%$; Si $< 0,2$; Mn = $0,6 \div 0,8$; P $< 0,05$; S $< 0,05$.

Nach der Art der Gewinnung wird unterschieden:

Schweißeisen und Schweißstahl — teigig in kleinen zu Luppen zusammenschweißenden Stücken — im Puddelofen, ganz vereinzelt noch auf dem Frischherd gewonnen.

Schweißeisen: $0,06 \div 0,5\%$ C. Nur noch wenig angewandt für Ketten, Niete, Schrauben, Lasthaken.

Schweißstahl: $0,5 \div 0,8\%$ C. Vereinzelt gebraucht zum Verstählen von Werkzeugen.

Zementstahl: $0,8 \div 1,8\%$ C, hergestellt aus Schweißeisen oder Schweißstahl durch Einsetzen desselben in Holzkohlenpulver und langsames Glühen unter Luftabschluß. Danach erfolgt Zusammenschweißen der Stäbe — Gärstahl — oder Einschmelzen derselben im Tiegel. Angewandt zu Schneidwerkzeugen, hauptsächlich Messerklingen.

Flußeisen und Flußstahl — flüssig — in der Bessemerbirne (Konverter) aus phosphorarmen oder in der Thomasbirne aus phosphorreichen Erzen oder im Siemens-Martin-Ofen gewonnen.

Flußeisen: etwa $0,1 \div 0,3\%$ C. Gebräuchlichster Maschinenbaustoff.

Flußstahl: etwa $0,3 \div 0,5\%$ C und für besonders hohe Festigkeit bis $1,20\%$ C-Gehalt. Für hochbeanspruchte Maschinenteile.

Stahl(form)guß, Formflußeisen, Formflußstahl. $0,1 \div 0,7\%$ C, gewonnen durch Eingießen von Flußeisen oder Flußstahl direkt aus dem Siemens-Martin-Ofen oder aus dem Tiegel, dem elektrischen Ofen, dem Kleinkonverter in die Form. Sehr hohe Schwindung, Ausglühen erforderlich. Verwendet für Maschinenteile, die Stößen oder großem Verschleiß ausgesetzt sind: z. B. Schienen-

herzstücke, Kesselstutzen, Ringe und Platten von Mahlgängen und Steinbrechern.

Mitiguß: etwa 0,1% C, hergestellt durch Einschmelzen von kohlenstoffarmen Flußeisenabfällen unter Zusatz von Aluminium-Eisen im Tiegel und Eingießen in gebrannte Formen. Bildsam wie weiches Flußeisen; aber teuer.

Tiegelstahl — früher Gußstahl genannt: $0,35 \div 1,6\%$ C, gewonnen durch Einschmelzen von Zement-, Herdfrisch-, Puddel- und Flußstahl in kleinen Tiegeln aus kohlenstoffreicher, feuerbeständiger Masse. Dabei wird C aus der Tiegelwandung aufgenommen. Verwendet für Wellen, Kolbenstangen und andere Konstruktionsteile mit sehr hoher Festigkeit, außerdem für Werkzeuge.

Elektrostahl: dargestellt durch Einschmelzen von Thomasstahl oder von Roheisen und Schrott unter Zusatz von Manganeisen, Siliziumeisen, Kalziumkarbid bzw. von Kohle, im elektrischen Lichtbogen- oder Widerstandsofen. Verwendung wie beim Tiegelstahl, dabei billiger.

Besondere Stahlsorten: Sowohl im Tiegel, wie auch im Elektroofen können dem Stahl Zusätze gegeben werden, die ihn für bestimmte Zwecke ganz besonders geeignet machen. So erzeugt man:

Si-Stähle — bis 4% Si — für Federstahl und Dynamobleche.

Mn-Stähle — bis 1,45% Mn — für Eisenbahnschienen, Walzdorne, Kohlen-säureflaschen.

Cr-Stähle — bis 14% Cr — für Werkzeuge, Kugellager, Federn.

W-Stähle — bis 9% W — für Werkzeuge, Magnete.

Va-Stähle — bis 1% Va — für Werkzeuge.

CrVa-Stähle — bis 1% Cr und bis 0,2% Va — für Federn, Wellen, Automobilachsen.

Ni-Stähle — 1 bis 8% Ni — für Rohre, Niete, Bleche, Autoteile.

— 25 bis 46% Ni — für Ventile von Explosionsmotoren, elektrische Widerstände.

CrNi-Stähle — bis 0,5% Cr und bis 2,75% Ni — für höchstbeanspruchte Teile, besonders im Automobilbau.

Schnelldrehstahl: $0,6 \div 0,8\%$ C; $Si + Mn < 0,15$; $5 \div 6$ Cr; $17 \div 19$ W, $0,1 \div 1,0$ Va.

Der Einfluß höherer Temperaturen auf die Eigenschaften des Eisens.

Wird eine Eisenlegierung erwärmt, so wird bei einer bestimmten Temperatur der C-Gehalt in der Form sog. Härtungskohle enthalten sein. Diese für die reinen C-Stahlsorten nicht sehr verschiedene kritische Temperatur nennt man den Umwandlungs- oder Haltepunkt. Des näheren unterscheidet man 1. die Temperaturgrenze, bei welcher die Umwandlung eintritt und, falls die Erwärmung genügend lange andauert, vollendet wird — den Kaleszenzpunkt (für 1% C-Gehalt etwa 740°) und 2. eine etwas tieferliegende Grenze, welche beim Wiedererkalten nicht unterschritten werden darf, wenn die Wirkung der Erwärmung auf den C-Gehalt nicht wieder aufgehoben werden soll — den Rekalcsenzpunkt (für 1% C-Gehalt etwa 700°).

Beide Grenzen werden durch einen Gehalt an Cr, W, Ni u. a. m. wesentlich verändert.

Erwärmt man nun eine Eisenlegierung längere Zeit bis zum Umwandlungspunkt oder besser etwas darüber und kühlt sie danach langsam und gleichmäßig wieder ab, so kann man dadurch in derselben ein an allen Stellen gleichmäßiges Gefüge erzeugen. Es lassen sich so — durch Ausglühen — Spannungen in einem Werkstück beseitigen, die durch ungleichmäßige Erwärmung oder durch Bearbeitung mit stumpfen Werkzeugen entstanden sein können.

Wird die Erwärmung zu hoch getrieben (etwa über 900°), so wird das Eisen dadurch spröde und leicht brüchig. Man sagt: es ist überhitzt. Durch geeignete

Wärmebehandlung — mehrmaliges Erwärmen und Abkühlen —, auf die bei Flußeisen ein sorgfältiges Überschmieden des Stückes zu erfolgen hat, kann der Einfluß der Überhitzung wieder behoben werden. Ausgeschlossen ist dies jedoch, wenn die ursprüngliche Erwärmung etwa bis zu Temperaturen von 1200° stattgefunden hatte, bei denen der Stahl verbrennt.

Läßt man auf die Erwärmung bei der Umwandlungstemperatur eine plötzliche Abkühlung — Abschrecken — folgen, so bleibt der Zustand der Legierung — C in fester Lösung als Härtungskohle vorhanden — erhalten. Das Eisen ist dadurch, falls der C-Gehalt desselben mindestens $0,25\%$ beträgt, hart geworden.

Das Härten des Stahles.

1. Erwärmung desselben bis etwas über den Umwandlungspunkt. Dazu wird für die Stahlsorte am besten der Haltepunkt vorher genau bestimmt (Saladins Spiegelgalvanometer).

2. Abschrecken. Die zu erreichende Härte hängt außer von der Temperatur, die der Stahl vorher hatte, wesentlich von der Schnelligkeit der Abkühlung ab und von der Temperatur, bis zu der abgekühlt wurde. Als Mittel zum Abschrecken verwendet man:

Wasser, entweder von Zimmertemperatur oder bis zu 40° vorgewärmt.

Wässrige Salzlösungen, die sich so herstellen lassen, daß man sie bis auf etwa 80° angewärmt benutzen kann.

Ole. Mineralischen und pflanzlichen Ursprungs, Petroleum, Glycerin. Sie besitzen eine weniger energische Kühlwirkung als Wasser.

Metallbäder. Für mäßige Härtegrade angewandt. Ähnliches gilt für die Härtung im

Luftstrom.

Metallkästen oder Walzen, die durch hindurchströmende Flüssigkeit auf eine gewünschte Temperatur gekühlt werden. Dünnwandige Stücke preßt man zum Abschrecken zwischen jenen.

3. Anlassen. Der Stahl zeigt nach dem Abschrecken — vor allem in Wasser — eine so große Sprödigkeit, daß er in diesem Zustande für viele Verwendungszwecke ungeeignet ist. Außerdem können nach dem Abkühlen so große Spannungen zwischen einzelnen Teilen desselben Stückes bestehen, daß schon eine Erschütterung genügt, um einen Riß zu erzeugen. Beides soll durch das Anlassen — eine Wiedererwärmung des Stückes nach dem Abschrecken — vermieden werden. Die Temperatur dieser Wiederanwärmung wird vielfach nach den sog. Anlauffarben beurteilt, die sich dabei durch Oxydation der Außenschicht auf einer blanken Oberfläche zeigen. Sie erscheinen in folgender Reihenfolge und werden bei reinen C-Stählen, wie angegeben, angewendet:

Hellgelb für Werkzeuge zum Bearbeiten von hartem Stahl, Schaber für Messing, Holzschneidwerkzeuge, Prägestempel.

Dunkelgelb: Fräser, Schraubenschneidbacken, Reibahlen, Gewindebohrer, Durchschläge, Metallsäge.

Rotbraun: Handhammer, Spiralbohrer, Holzbohrer.

Purpurrot: Werkzeuge zur Bearbeitung weniger harter Metalle, Äxte, Meißel.

Violett bis Blau: Werkzeuge für die Holzbearbeitung, Steinmeißel, Schraubenzieher, Federn.

Da man jedoch dieselbe Anlauffarbe durch Veränderung der Erwärmungsdauer bei verschiedenen Temperaturen erzeugen kann, so ist es für ein sorgfältiges Anlassen notwendig, die Temperatur vor dem endgültigen Abkühlen genau zu bestimmen.

Man benutzt dazu Bäder (Öl, Blei, Bleilegierungen u. a. m.), die dauernd auf der gewünschten Temperatur erhalten werden können. Den obengenannten Anlauffarben entsprechen etwa die folgenden Temperaturen:

Hellgelb: 225°; Dunkelgelb: 250°; Rotbraun: 265°; Purpurrot: 275°; Violett: 285°; Blau bis 320°.

Die Behandlung der Sonderstähle zwecks Härtung kann von obigem wesentlich abweichen, da die verschiedenen Metallzusätze den Zustand des C-Gehaltes im Stahl beeinflussen. (Selbsthärter, naturharte Stähle, Stähle mit Rotgluthärte.)

Einsatzhärtung.

Bei bestimmten Sorten weichen, zähen Eisens läßt sich durch ein wenige Stunden währendes Glühen in geeigneten Einsatzstoffen eine Kohlung der Oberflächenschicht herbeiführen. Dadurch ist eine Härtung der eingesetzten Stücke an der Oberfläche möglich, während der Kern weich und zähe bleibt.

Nach Guillet eignet sich für die Einsatzhärtung Eisen am besten, wenn es bei 0,1 ÷ 0,15% C nicht mehr als 0,4% Mn, 0,04% S, 0,05% P und weniger als 0,3% Si enthält.

Als geeignete Glühetemperatur kommt 900 bis 1000° in Betracht für folgende Einsatzstoffe: Gemisch aus 60% Buchen- oder Eichenholzkohle und 40% Bariumkarbonat, Lederkohle, Gemische aus Holzkohle und Knochenkohle. Auch durch Gase — Leuchtgas, Acetylen u. a. — läßt sich die Kohlung der Außenschicht bewirken.

Um die Wirkungen der Überhitzung, die der Kern bei dem 6 bis 8 Stunden dauernden Glühen erfährt, wieder zu beseitigen, ist nach Brearley folgende Behandlung eingesetzter Stücke geboten:

1. Langsames Erkalten nach Beendigung des Glühens.
2. Schnelles Wiedererwärmen auf 900 bis 950°, um das Stück etwa 15 bis 20 Minuten bei dieser Temperatur zu belassen.
3. Abkühlen in der Luft.
4. Erwärmen bis auf 800°.
5. Abschrecken in Öl.
6. Erwärmen auf 760°, Abschrecken, Anlassen wie bei Stahl.

Von Sonderstählen eignen sich die Ni- und CrNi-Stähle vorzüglich zur Einsatzhärtung.

Härtung durch Aufstreupulver.

Bringt man auf das bis zur dunklen Rotglut erwärmte Stück ein zementierendes Härtemittel und brennt dies darauf bei weiterer Erwärmung bis zur Umwandlungstemperatur ein, so läßt sich dadurch eine Kohlung der Oberflächenschicht und somit eine Härtung derselben erreichen. Die Mittel kommen pulverförmig oder dickflüssig in den Handel, ihre wirksamen Bestandteile sind teils Kohlenstoff abgebende — Zyankalium, Blutlaugensalz, verschiedene organische Stoffe — teils Stoffe, die zur Bildung eines schützenden Schlackenüberzuges Anlaß geben: Kochsalz, Glas u. a.

Das Vergüten

oder Veredeln, eine den Härteverfahren ähnliche Wärmebehandlung, hat im Gegensatz zu diesen, nicht den Endzweck, die Härte der Stähle zu vergrößern, sondern ihre Festigkeit, deren größter Wert im allgemeinen bei Glashärte erreicht wird, nur so weit zu steigern, wie dies im Interesse der verlangten Zähigkeit — Widerstandsfähigkeit gegen Stöße — möglich ist.

Es wird hauptsächlich bei Spezialstählen angewandt und zwar an fertigen Schmiedestücken, am besten nach dem Vorschruppen jedoch vor der Fertigbearbeitung.

Im einzelnen wird sich die vergütende Wärmebehandlung folgendermaßen gestalten: Anwärmen des gereinigten Stückes bis etwas über den Umwandlungspunkt, Glühen bei dieser Temperatur, Abschrecken, Anlassen. Die bei einer bestimmten Stahlsorte dadurch erreichte Zähigkeit — Dehnung, Kon-

traktion — Festigkeit ist für Schmiedestücke von gleichen Abmessungen abhängig von der:

1. Höhe der Glühtemperatur, 2. Glühdauer, 3. Art des Abschreckmittels,
4. Höhe der Anlaßtemperatur, 5. Dauer des Anlassens.

Das Schweißen.

Wird schmiedbares Eisen über 1000° hinaus erwärmt, so geht es schließlich in einen teigigen Zustand über, und zwar dauert dieser Zustand vor dem eigentlichen Schmelzen während einer um so größeren Temperaturzunahme an, je geringer der C-Gehalt des Eisens. In diesem Zustande nun ist es möglich, zwei Stücke miteinander zu verbinden, falls keine trennende Oxydschicht die Vereinigung verhindert. Man streut deswegen, wenn die Stücke beim Erwärmen Rotglut zeigen, Schweißpulver auf, das etwa schon vorhandenes Oxyd lösen und durch Bildung leichtflüssiger Schlacke vor weiterer Oxydation schützen soll. Bei Schweißisen erübrigt sich, infolge seines natürlichen Schlackengehaltes, die Anwendung besonderer Schweißmittel. Ferner läßt sich der Bildung einer trennenden Schicht wirksam dadurch vorbeugen, daß man zur Erwärmung der Schweißenden eine (infolge von Luftmangel) reduzierende Flamme benutzt.

Gewöhnliche Feuerschweißung. Erwärmung der Stücke im Schmiedefeuer bis zur hellen Weißglut (etwa 1400°), darauf Zusammenschweißen unter Handhammer, Dampfhammer oder hydraulischer Presse.

Wassergasschweißung. Da Wassergas die Erzeugung hoher Temperaturen auf kleinem Raume gestattet, so eignet sich eine reduzierende Wassergasflamme vorzüglich zur Erwärmung von Schweißstellen, besonders bei großen Arbeiten aus stärkeren Blechen.

Thermitschweißverfahren. Das Goldschmidtsche Thermit, ein Gemisch von Aluminiumpulver und Eisenoxyd, läßt sich leicht entzünden und ergibt dadurch nach $2Al + Fe_2O_3 = Fe_2 + Al_2O_3 + 185 \text{ Kal.}$ als Erzeugnis flüssiges Eisen. Durch Eingießen desselben in die Schweißstelle erfolgt das Zusammenschweißen. Mit Vorteil hauptsächlich für Reparaturarbeiten angewandt.

Autogene Schweißung. Durch eine Stichflamme von hoher Temperatur werden die Schweißenden so weit erwärmt, daß sie zusammenschmelzen (dünne Stücke), oder man erwärmt sie so weit, daß man, zwischen ihren abgeschrägten Kanten, in der Flamme eingeschmolzenes Eisen keilartig einschweißen kann (stärkere Stücke). Um die dazu notwendige Temperatur zu erzielen, verbrennt man Gase unter Zuführung von Sauerstoff, und zwar führt man etwa die Hälfte der theoretisch erforderlichen Verbrennungssauerstoffmenge zu, nicht nur um eine reduzierende Flamme zu erhalten, sondern um auch ein Zurückschlagen der Flamme in den Brenner zu verhüten. Als Brenngase kommen hier in Anwendung: Wasserstoff, Acetylen, seltener Blaugas, Leuchtgas, Benzoldampf. Gegenüber den anderen hat Wasserstoff den Vorzug, daß durch ihn keine Kohlung des Eisens an der Schweißstelle stattfinden kann; dagegen ist Acetylen billiger und von größerem Heizwert, also bei stärkeren Schweißstücken besonders am Platze. Die autogene Schweißung läßt sich bei den verschiedensten Metallen, z. B. auch bei Gußeisen und Aluminium, anwenden, wenn auf die Entfernung der Oxydkrusten genügend acht gegeben wird.

Auch zum Trennen zweier Stücke voneinander lassen sich die Flammen der Brenngas-Sauerstoffgemische erfolgreich benutzen. Zunächst Erwärmung einer Stelle durch die Stichflamme bis zur Weißglut, darauf Abstellen des Gases und Aufblasen von Sauerstoff allein auf die glühende Stelle. Dadurch erfolgt das autogene Durchbrennen, das sich mit etwa 0,2 m minutlicher Geschwindigkeit nach einer beliebigen Schnittrichtung vom Ausgangspunkt aus weiterführen läßt.

Elektrische Schweißverfahren¹⁾.

1. Lichtbogenschweißung — in Gleichstrom von etwa 60 Volt Spannung.

Nach Bernardos schließt man das Werkstück an den einen Pol einer Dynamomaschine an, deren anderer Pol mit einem Kohlenstift verbunden ist. Berührt man nun die Schweißstelle mit dem Stift, um ihn darauf etwas zu entfernen, so entsteht ein Lichtbogen, der ein Zusammenschmelzen der Schweißränder herbeiführt. Viel zur Ausbesserung schadhafter Stahlgußstücke angewandt.

Nach Slavianoff wird statt des Kohlenstiftes ein Metallstab von etwa 10 mm \varnothing , aus gleichem Stoff wie das Schweißstück als Anode benützt. Dieser schmilzt im Lichtbogen ab und füllt den Zwischenraum zwischen den Schweißrändern. Vorzug gegenüber den Verfahren von Bernardos und von Zerener: Keine Kohlung des Eisens an der Schweißstelle.

Nach Zerener stellt man sich durch magnetische Ablenkung eines gewöhnlichen Lichtbogens eine Stichflamme her, die man als Schweißflamme benutzen kann.

2. Widerstandsschweißung — in einphasigem Wechselstrom von 50 Perioden.

Nach Elihu Thomson werden die Schweißenden kurz vor der Schweißstelle in den Stromkreis (große Stromstärke, geringe Spannung von 1 ÷ 10 Volt) eingeschaltet und stumpf gegeneinander gepreßt. Nach kurzer Zeit (meist weniger als 1 Minute) ist an der Berührungsstelle Schweißhitze, gleichmäßig über den ganzen Querschnitt verteilt, vorhanden, so daß die Vereinigung der Stücke durch das Zusammenpressen erfolgt. Angewendet für Eisen bis zu 20 qcm und für Kupfer bis zu 25 qcm Querschnitt.

Durch geeignete Zuleitung hochgespannten Stromes von 120 bis 300 Volt lassen sich so auch Überlappungen dünner Bleche an einzelnen Punkten oder fortlaufend zusammenschweißen. (Punktschweißung.)

Handelserzeugnisse des Eisens.

Im Deutschen Stahlwerksverband werden unterschieden:

Produkte A, die nur durch den Stahlwerksverband Akt.-Ges. zu Düsseldorf verkauft werden:

1. Halbzeug — Blöcke, Brammen, Knüttel u. a. m.

2. Eisenbahn-Oberbaumaterial.

3. Formeisen — Profileisen von 80 mm Höhe und darüber, sowie Belag- (Zores-) Eisen.

Produkte B, die durch die einzelnen Werke verkauft werden:

1. Stabeisen: Rundeisen. Quadrateisen. Flacheisen — 10 bis 180 mm breit bei mehr als 5 mm Stärke. Universaleisen — 180 bis 1000 mm breit bei mehr als 5 mm Stärke. Bandeseisen — bis 250 mm breit bei weniger als 5 mm Stärke. Röhrenstreifen. Sonstige Stabeisen z. B. mit Sechskantquerschnitt. Stabformeisen — Profile unter 80 mm Höhe. Weichenplatten, Klemmplatten zur Schienenbefestigung. Streckdraht — weniger als 5 mm \varnothing .

2. Walzdraht — über 5 mm \varnothing , mit verschiedenen Querschnittsformen.

3. Bleche: Grobbleche — über 5 mm stark. Feinbleche — unter 5 mm stark. Gemusterte Bleche, z. B. Riffelbleche — in Stärken von 4 bis 25 mm, in Breiten bis 1350 mm und bis 450 kg Gewicht eines Bleches.

4. Röhren.

5. Guß- und Schmiedestücke: Eisenbahnachsen, Räder, Radreifen, Stahlgußstücke und alle anderen Stahlfabrikate, die nicht in einer der vorherigen Gruppen angegeben sind.

Sonstige Handelserzeugnisse: Gußeiserne Röhren. Gußeiserne Säulen — am häufigsten angewandt in Längen bis zu 7 m bei 100 bis 400 mm Außendurchmesser und 10 bis 40 mm Wandstärke. Auflagerplatten für Träger. Auflager für Brücken und Hochbauten. Niete. Schrauben. Nägel. Drahtseile. Ketten u. a. m.

Lieferungsvorschriften für Eisenerzeugnisse.

1. Vorschriften für Lieferung von Eisen und Stahl 1911. (Verlag Stahleisen m. b. H. Düsseldorf.)

2. Normalbedingungen für die Lieferung von Eisenkonstruktionen usw. (Otto Meißners Verlag, Hamburg 1908.)

3. Besondere Vertragsbedingungen für die Anfertigung, Lieferung und Aufstellung von Eisenbauwerken. Ministerialrunderlaß vom 14. Juni 1912. (Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin.)

4. Lieferungsvorschriften für Gußeisen. Ministerialerlaß vom 14. August 1909.

¹⁾ Z. Ver. deutsch. Ing. 1911, S. 1665.

5. Materialvorschriften für Landdampfkessel und solche für Schiffsdampfkessel. Anlage I der „Allgemeinen polizeilichen Bestimmungen über die Anlage von Landdampfkesseln bzw. von Schiffsdampfkesseln vom 17. Dezember 1908“. (Carl Heymanns Verlag, Berlin.)

Lieferungsbedingungen.

Die für den Konstrukteur besonders wichtigen Abmessungsgrenzen für die Grundpreise und Überpreise der verschiedenen Erzeugnisse ersehe man aus den Veröffentlichungen der einzelnen Firmen bzw. der einzelnen Verbände. Z. B.:

„Überpreisliste der Deutschen Grobwalzwerke.“ (Titus Waechter Nachflgr. Max Braun, Essen a. Ruhr.)
 „Eisen im Hochbau“, herausgeg. vom Stahlwerks-Verband. 4. Aufl. Julius Springer, Berlin 1913.

Angaben über Formeisen und Stabformeisen¹⁾.

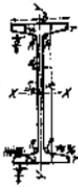
Normalprofile für I-Eisen.

Normallängen²⁾: 4 bis einschließlich 12 m.

Lagerlängen: 4 ÷ 9 m in Abstufungen von 200 mm.

9 ÷ 12 m in Abstufungen von 250 mm.

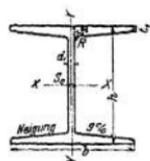
Abrundungshalbmesser: $R = d$; $r = 0,6 \cdot d$.



Profil Nr.	Abmessungen				Quer- schnitt <i>F</i> qcm	Ge- wicht <i>G</i> kg/m	Momente für die XX-Biegungs- achse		Momente für die YY-Biegungs- achse	
	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>t</i>			<i>J_x</i>	<i>W_x</i>	<i>J_y</i>	<i>W_y</i>
	mm	mm	mm	mm			cm ⁴	cm ³	cm ⁴	cm ³
8	80	42	3,9	5,9	7,58	5,95	77,8	19,5	6,29	3,00
9	90	46	4,2	6,3	9,00	7,07	117	26,0	8,78	3,82
10	100	50	4,5	6,8	10,6	8,32	171	34,2	12,2	4,88
11	110	54	4,8	7,2	12,3	9,66	239	43,5	16,2	6,00
12	120	58	5,1	7,7	14,2	11,15	328	54,7	21,5	7,41
13	130	62	5,4	8,1	16,1	12,64	436	67,1	27,5	8,87
14	140	66	5,7	8,6	18,3	14,37	573	81,9	35,2	10,7
15	150	70	6,0	9,0	20,4	16,01	735	98,0	43,9	12,5
16	160	74	6,3	9,5	22,8	17,90	935	117	54,7	14,8
17	170	78	6,6	9,9	25,2	19,78	1166	137	66,6	17,1
18	180	82	6,9	10,4	27,9	21,90	1446	161	81,3	19,8
19	190	86	7,2	10,8	30,6	24,02	1763	186	97,4	22,7
20	200	90	7,5	11,3	33,5	26,30	2142	214	117	26,0
21	210	94	7,8	11,7	36,4	28,57	2563	244	138	29,4
22	220	98	8,1	12,2	39,6	31,09	3060	278	162	33,1
23	230	102	8,4	12,6	42,7	33,52	3607	314	189	37,1
24	240	106	8,7	13,1	46,1	36,19	4246	354	221	41,7
25	250	110	9,0	13,6	49,7	39,01	4966	397	256	46,5
26	260	113	9,4	14,1	53,4	41,92	5744	442	288	51,0
27	270	116	9,7	14,7	57,2	44,90	6626	491	326	56,2
28	280	119	10,1	15,2	61,1	47,96	7587	542	364	61,2
29	290	122	10,4	15,7	64,9	50,95	8636	596	406	66,6
30	300	125	10,8	16,2	69,1	54,24	9800	653	451	72,2
32	320	131	11,5	17,3	77,8	61,07	12510	782	555	84,7
34	340	137	12,2	18,3	86,8	68,14	15695	923	674	98,4
36	360	143	13,0	19,5	97,1	76,22	19605	1089	818	114
38	380	149	13,7	20,5	107	84,00	24012	1264	975	131
40	400	155	14,4	21,6	118	92,63	29213	1461	1158	149
42 ^{1/2}	425	163	15,3	23,0	132	103,62	36973	1740	1437	176
45	450	170	16,2	24,3	147	115,40	45852	2037	1725	203
47 ^{1/2}	475	178	17,1	25,6	163	127,96	56481	2378	2088	235
50	500	185	18,0	27,0	180	141,30	68738	2750	2478	268
55	550	200	19,0	30,0	213	167,21	99184	3607	3488	349
60	600	215	21,6	32,4	254	199,40	138957	4632	4668	434

¹⁾ Die angegebenen Gewichte gelten für Flußeisen und sind nur annähernde.

²⁾ Bedingen keinen Preisaufschlag.



Breitflanschige Differdinger I-Eisen.

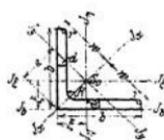
Normallängen: 4 bis einschließlich 12 m.

Lagerlängen: 4 „ „ 15 m in Abstufungen
von 500 mm.Abänderungshalbmesser: $R = d$

Profil Nr.	Abmessungen					Quer- schnitt F qcm	Ge- wicht G kg/m	Momente für die Biegungsachse X—X		Momente für die Biegungsachse Y—Y	
	h mm	b mm	t_1 mm	t_2 mm	d mm			J_x cm ⁴	W_x cm ³	J_y cm ⁴	W_y cm ³
18 B	180	180	9,0	16,72	8,5	59,9	47,0	3 512	390	1073	119
20 B	200	200	9,5	18,12	8,5	70,4	55,3	5 171	517	1 568	157
22 B	220	220	10,0	19,5	9,0	82,6	64,8	7 379	671	2 216	201
24 B	240	240	10,5	20,85	10,0	96,8	76,0	10 260	855	3 043	254
25 B	250	250	10,9	21,7	10,5	105,1	82,5	12 066	965	3 575	286
26 B	260	260	11,7	22,9	11,0	115,6	90,7	14 352	1 104	4 261	328
27 B	270	270	11,95	23,6	11,25	123,2	96,7	16 529	1 224	4 920	365
28 B	280	280	12,35	24,4	11,5	131,8	103,4	19 052	1 361	5 671	405
29 B	290	290	12,7	25,2	12,0	141,1	110,8	21 866	1 508	6 417	443
30 B	300	300	13,25	26,25	12,5	152,1	119,4	25 201	1 680	7 494	500
32 B	320	300	14,1	27,0	13,0	160,7	126,2	30 119	1 882	7 867	524
34 B	340	300	14,6	27,5	13,4	167,4	131,4	35 241	2 073	8 097	540
36 B	360	300	16,15	29,0	14,2	181,5	142,5	42 479	2 360	8 793	586
38 B	380	300	17,0	29,8	14,8	191,2	150,1	49 496	2 605	9 175	612
40 B	400	300	18,2	31,0	15,5	203,6	159,8	57 834	2 892	9 721	648
42 1/2 B	425	300	19,0	31,75	16,0	213,9	167,9	68 249	3 212	10 078	672
45 B	450	300	20,3	33,0	17,0	229,3	180,0	80 887	3 595	10 668	711
47 1/2 B	475	300	21,35	34,0	17,6	242,0	190,0	94 811	3 992	11 142	743
50 B	500	300	22,6	35,2	19,4	261,8	205,5	111 283	4 451	11 718	781
55 B	550	300	24,5	37,0	20,6	288,0	226,1	145 957	5 308	12 582	839
60 B	600	300	24,7	37,2	20,8	300,6	236,0	179 303	5 977	12 672	845
65 B	650	300	25,0	37,5	21,1	314,5	246,9	217 402	6 690	12 814	854
70 B	700	300	25,0	37,5	21,1	325,2	255,3	258 106	7 374	12 818	854
75 B	750	300	25,0	37,5	21,1	335,7	263,4	302 560	8 068	12 823	855
80 B	800	300	26,0	38,5	21,5	354,9	278,6	360 486	9 012	13 269	885
85 B	850	300	26,0	38,5	21,5	365,6	287,0	414 887	9 762	13 274	885
90 B	900	300	26,0	38,5	21,5	376,4	295,5	473 964	10 533	13 279	885
95 B	950	300	27,0	39,5	21,9	396,2	311,0	550 974	11 600	13 727	915
100 B	1000	300	27,0	39,5	21,9	407,2	319,7	621 287	12 425	13 732	915

Normalprofile für gleichschenklige L-Eisen.

Normallängen: 4 bis einschließlich 12 m.

Lagerlängen: 4 bis einschließlich 9 m mit Abstufungen von
200 mm.9 bis einschließlich 16 m mit Abstufungen von
250 mm.Abrundungshalbmesser: $R = \frac{d_{\max} + d_{\min}}{2}$,

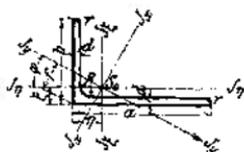
$$r = \frac{R}{2}$$

Profil Nr.	Abmes- sungen		Quer- schnitt	Ge- wicht	Abstände der Hauptachsen u. des Schwerpunktes (S_0)			Trägheitsmomente			
	b	d	F	G	w	e	ξ	J_x	J_y	$J_\eta = J_\xi$	J_b
	mm	mm	qcm	kg/m	cm	cm	cm	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴
1 ^{1/2}	15	3	0,82	0,64	1,06	0,67	0,48	0,24	0,06	0,15	0,34
		4	1,05	0,82		0,73	0,51	0,29	0,08	0,18	0,46
2	20	3	1,12	0,88	1,41	0,85	0,60	0,62	0,15	0,38	0,79
		4	1,45	1,14		0,90	0,64	0,77	0,19	0,48	1,08
2 ^{1/2}	25	3	1,42	1,12	1,77	1,03	0,73	1,27	0,31	0,79	1,55
		4	1,85	1,45		1,08	0,76	1,61	0,40	1,01	2,07
3	30	4	2,27	1,78	2,12	1,24	0,89	2,85	0,76	1,80	3,60
		6	3,27	2,57		1,36	0,96	3,91	1,06	2,49	5,50
3 ^{1/2}	35	4	2,67	2,10	2,47	1,41	1,00	4,68	1,24	2,96	5,63
		6	3,87	3,04		1,53	1,08	6,50	1,77	4,14	8,65
4	40	4	3,08	2,42	2,83	1,58	1,12	7,09	1,86	4,48	8,34
		6	4,48	3,52		1,70	1,20	9,98	2,67	6,33	12,8
		8	5,80	4,55		1,81	1,28	12,4	3,38	7,89	17,4
		5	4,30	3,38		1,81	1,28	12,4	3,25	7,83	14,9
4 ^{1/2}	45	7	5,86	4,60	3,18	1,92	1,36	16,4	4,39	10,4	21,2
		9	7,34	5,76		2,04	1,44	19,8	5,40	12,6	27,8
5	50	5	4,80	3,77	3,54	1,98	1,40	17,4	4,59	11,0	20,4
		7	6,56	5,15		2,11	1,49	23,1	6,02	14,6	29,1
		9	8,24	6,47		2,21	1,56	28,1	7,67	17,9	37,9
		6	6,31	4,95		2,21	1,56	27,4	7,24	17,3	32,7
5 ^{1/2}	55	8	8,23	6,46	3,89	2,32	1,64	34,8	9,35	22,1	44,2
		10	10,07	7,90		2,43	1,72	41,4	11,27	26,3	56,1
		6	6,91	5,42		2,39	1,69	36,1	9,43	22,8	42,5
6	60	8	9,03	7,09	4,24	2,50	1,77	46,1	12,1	29,1	57,4
		10	11,07	8,69		2,62	1,85	55,1	14,6	34,9	72,7
		7	8,70	6,83		2,62	1,85	53,0	13,8	33,4	63,2
6 ^{1/2}	65	9	10,98	8,62	4,60	2,73	1,93	65,4	17,2	41,3	82,2
		11	13,17	10,34		2,83	2,00	76,8	20,7	48,8	101
		7	9,4	7,38		2,79	1,97	67,1	17,6	42,4	78,8
7	70	9	11,9	9,34	4,95	2,90	2,05	83,1	22,0	52,6	103
		11	14,3	11,23		3,01	2,13	97,6	26,0	61,8	127
		8	11,5	9,03		3,01	2,13	93,3	24,4	58,9	111
7 ^{1/2}	75	10	14,1	11,07	5,30	3,12	2,21	113,0	29,8	71,4	140
		12	16,7	13,11		3,24	2,29	130,0	34,7	82,4	170
		8	12,3	9,66		3,20	2,26	115,0	29,6	72,3	135
8	80	10	15,1	11,86	5,66	3,31	2,34	139,0	35,9	87,5	170
		12	17,9	14,05		3,41	2,41	161,0	43,0	102	206
		9	15,5	12,17		3,59	2,54	184,0	47,8	116	216
9	90	11	18,7	14,68	6,36	3,70	2,62	218,0	57,1	138	266
		13	21,8	17,11		3,81	2,70	250,0	65,9	158	317
		10	19,2	15,07		3,99	2,82	280	73,3	177	329
10	100	12	22,7	17,82	7,07	4,10	2,90	328	86,2	207	398
		14	26,2	20,57		4,21	2,98	372	98,3	235	468
		10	21,2	16,64		4,34	3,07	379	98,6	239	439
11	110	12	25,1	19,70	7,78	4,45	3,15	444	116	280	529
		14	29,0	22,75		4,54	3,21	505	133	319	618
		11	25,4	19,94		4,75	3,36	541	140	341	627
12	120	13	29,7	23,31	8,48	4,86	3,44	625	162	394	745
		15	33,9	26,61		4,96	3,51	705	186	446	863
		12	30,0	23,55		5,15	3,64	750	194	472	870
13	130	14	34,7	27,24	9,19	5,26	3,72	857	223	540	1020
		16	39,3	30,85		5,37	3,80	959	251	605	1173
		13	35,0	27,48		5,54	3,92	1014	262	638	1176
14	140	15	40,0	31,40	9,90	5,66	4,00	1148	298	723	1363
		17	45,0	35,33		5,77	4,08	1276	334	805	1554
		14	40,3	31,64		5,95	4,20	1343	347	845	1556
15	150	16	45,7	35,87	10,6	6,07	4,30	1507	391	949	1794
		18	51,0	40,04		6,17	4,40	1665	438	1052	2039
		15	46,1	36,19		6,35	4,50	1745	453	1099	2033
16	160	17	51,8	40,66	11,3	6,46	4,60	1945	506	1226	2322
		19	57,5	45,14		6,58	4,60	2137	558	1348	2564

Normalprofile für ungleichschenklige L-Eisen.

Normallängen: 4 bis einschließlich 12 m.

Lagerlängen: 4 bis einschließlich 14 m in Abständen von 250 mm.



$$\text{Abrundungshalbmesser: } R = \frac{d_{\max} + d_{\min}}{2}$$

$$r = \frac{R}{2}$$

$$\text{Verhältnis der Schenkellängen } \frac{b}{a} = \frac{1}{1\frac{1}{2}}$$

Profil Nr.	Abmessungen			Querschnitt <i>F</i> qcm	Gewicht <i>G</i> kg/m	Abstände der Hauptachsen und des Schwerpunktes <i>S</i> ₀				Trägheitsmomente			
	<i>b</i> mm	<i>a</i> mm	<i>d</i> mm			<i>η</i> cm	<i>ξ</i> cm	tg φ	<i>f</i> cm	<i>J</i> _x cm ⁴	<i>J</i> _y cm ⁴	<i>J</i> _η cm ⁴	<i>J</i> _ξ cm ⁴
$\frac{2}{3}$	20	30	3	1,42	1,11	0,99	0,49	0,4216	0,83	1,42	0,28	0,45	1,25
			4	1,85	1,45	1,03	0,54	0,4214	0,90	1,82	0,33	0,56	1,60
$\frac{3}{4\frac{1}{2}}$	30	45	4	2,87	2,25	1,48	0,74	0,4334	1,27	6,63	1,19	2,05	5,77
			5	3,53	2,77	1,52	0,78	0,4288	1,32	8,01	1,44	2,46	6,99
$\frac{4}{6}$	40	60	5	4,79	3,76	1,95	0,97	0,4319	1,66	19,8	3,66	6,21	17,3
			7	6,55	5,14	2,04	1,05	0,4275	1,77	26,3	4,63	7,99	22,9
$\frac{5}{7\frac{1}{2}}$	50	75	7	8,33	6,54	2,47	1,24	0,4304	2,12	53,1	9,58	16,4	46,3
			9	10,5	8,24	2,56	1,32	0,4272	2,22	65,4	11,90	20,1	57,2
$\frac{6\frac{1}{2}}{10}$	65	100	9	14,2	11,15	3,31	1,59	0,4101	2,73	160	26,8	46,6	140
			11	17,1	13,42	3,40	1,67	0,4074	2,83	189	32,9	55,1	167
$\frac{8}{12}$	80	120	10	19,1	14,99	3,92	1,95	0,4348	3,35	317	56,8	98,2	276
			12	22,7	17,82	4,00	2,02	0,4304	3,44	370	67,5	115	323
$\frac{10}{15}$	100	150	12	28,7	22,53	4,89	2,42	0,4361	4,18	747	134	232	649
			14	33,2	26,06	4,97	2,50	0,4339	4,27	854	153	264	743

$$\text{Verhältnis der Schenkellängen } \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$$

$\frac{2}{4}$	20	40	3	1,72	1,35	1,43	0,44	0,2575	0,78	2,96	0,31	0,48	2,80
			4	2,25	1,77	1,47	0,48	0,2528	0,83	3,78	0,40	0,60	3,58
$\frac{3}{6}$	30	60	5	4,29	3,37	2,15	0,68	0,2544	1,19	16,5	1,71	2,61	15,6
			7	5,85	4,59	2,24	0,76	0,2479	1,28	21,8	2,28	3,41	20,7
$\frac{4}{8}$	40	80	6	6,89	5,41	2,85	0,88	0,2568	1,56	47,6	4,99	7,63	45,0
			8	9,01	7,07	2,94	0,96	0,2518	1,65	60,8	6,41	9,62	57,6
$\frac{5}{10}$	50	100	8	11,5	9,03	3,59	1,12	0,2665	1,97	123	12,8	19,6	116
			10	14,1	11,07	3,67	1,20	0,2658	2,03	150	14,6	23,5	141
$\frac{6\frac{1}{2}}{13}$	65	130	10	18,6	14,60	4,65	1,45	0,2569	2,56	339	35,4	54,2	320
			12	22,1	17,35	4,75	1,53	0,2549	2,65	395	41,3	62,9	373
$\frac{8}{16}$	80	160	12	27,5	21,59	5,72	1,77	0,2686	3,14	762	79,4	122	719
			14	31,8	24,96	5,81	1,85	0,2679	3,29	875	86	139	822
$\frac{10}{20}$	100	200	14	40,3	31,64	7,12	2,18	0,2608	3,91	1754	182	283	1653
			16	45,7	35,87	7,20	2,26	0,2586	3,99	1973	205	316	1862



Normalprofile für C-Eisen.

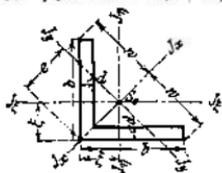
Normallängen: 4 bis einschließlich 10 m.

Lagerlängen: 4 bis einschließlich 9 m mit Abstufungen von 200 mm.

9 bis einschließlich 10 m mit Abstufungen von 250 mm.

Abrundungshalbmesser: $R = t$; $r = \frac{t}{2}$.

Profil Nr.	Abmessungen				Quer-schnitt F qcm	Gewicht G kg/m	Schwer-punkts-Abstand		Momente für die Biegungsachsen				
	h mm	b mm	d mm	t mm			e cm	e ₁ cm	xx		yy		h-h cm ⁴
									J _x cm ⁴	W _x cm ³	J _y cm ⁴	W _y cm ³	
3	30	33	5,0	7,0	5,44	4,27	1,31	1,99	6,39	4,26	5,33	2,68	14,7
4	40	35	5,0	7,0	6,21	4,87	1,33	2,17	14,1	7,05	6,68	3,08	17,7
5	50	38	5,0	7,0	7,12	5,59	1,37	2,43	26,4	10,6	9,12	3,75	22,5
6 ^{1/2}	65	42	5,5	7,5	9,03	7,09	1,42	2,78	57,5	17,7	14,1	5,07	32,3
8	80	45	6,0	8,0	11,0	8,64	1,45	3,05	106	26,5	19,4	6,36	42,5
10	100	50	6,0	8,5	13,5	10,60	1,55	3,45	206	41,2	29,3	8,49	61,7
12	120	55	7,0	9,0	17,0	13,35	1,60	3,90	364	60,7	43,2	11,1	86,7
14	140	60	7,0	10,0	20,4	16,01	1,75	4,15	605	86,4	62,7	14,8	125
16	160	65	7,5	10,5	24,0	18,84	1,84	4,66	925	116	85,3	18,3	167
18	180	70	8,0	11,0	28,0	21,98	1,92	5,08	1354	150	114	22,4	217
20	200	75	8,5	11,5	32,2	25,28	2,01	5,49	1911	191	148	27,0	278
22	220	80	9,0	12,5	37,4	29,36	2,14	5,86	2690	245	197	33,6	368
24	240	85	9,5	13,0	42,3	33,21	2,23	6,27	3598	300	248	39,6	458
26	260	90	10,0	14,0	48,3	37,92	2,36	6,64	4823	371	317	47,7	586
28	280	95	10,0	15,0	53,3	41,84	2,53	6,97	6276	448	399	57,2	740
30	300	100	10,0	16,0	58,8	46,16	2,70	7,30	8026	535	495	67,8	924



Scharfkantige L-Eisen.

Normallängen: 4 bis einschließlich 12 m.

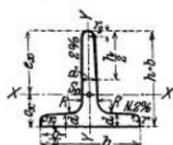
Lagerlängen: 4 bis einschließlich 14 m in Abstufungen von 250 mm.

Profil Nr.	Abmessungen		Quer-schnitt F qcm	Gewicht G kg/m	Abstände der Haupt-achsen u. des Schwer-punktes (S ₀)			Träg-heitsmo-moment J _x cm ⁴	Träg-heitsmo-moment J _y cm ⁴	Träg-heitsmo-moment J _ξ = J _η cm ⁴
	b mm	d mm			w cm	e cm	ξ cm			
15	15	3	0,81	0,63	1,07	0,68	0,48	0,25	0,07	0,16
		4	1,04	0,81		0,73	0,52	0,30	0,09	0,20
20	20	3	1,11	0,87	1,42	0,86	0,61	0,64	0,17	0,40
		4	1,44	1,12		0,91	0,64	0,79	0,22	0,50
25	25	3	1,41	1,10	1,78	1,04	0,74	1,30	0,34	0,82
		4	1,84	1,44		1,09	0,77	1,63	0,44	1,03
30	30	4	2,24	1,75	2,13	1,26	0,90	2,94	0,77	1,86
		6	3,24	2,53		1,36	0,97	3,98	1,10	2,54
35	35	4	2,64	2,06	2,49	1,44	1,02	4,81	1,24	3,03
		6	3,84	3,00		1,54	1,09	6,61	1,78	4,20
40	40	4	3,04	2,37	2,84	1,62	1,15	7,34	1,88	4,61
		6	4,44	3,46		1,72	1,22	10,20	2,70	6,45
45	45	5	4,25	3,32	3,20	1,85	1,31	12,84	3,30	8,07
		7	5,81	4,53		1,95	1,38	16,80	4,46	10,63
50	50	5	4,75	3,73	3,55	2,02	1,43	17,91	4,59	11,25
		7	6,51	5,11		2,12	1,51	23,59	6,20	14,89
60	60	5	5,75	4,50	4,26	2,38	1,69	31,74	8,07	19,90
		6,5	7,38	5,70		2,45	1,74	39,72	10,22	24,97

Hochstegige T-Eisen $\frac{b}{2} = \frac{1}{1}$

Normallängen: 4 bis einschließlich 12 m.

Lagerlängen: 4 bis einschließlich 12 m in Abstufungen von 250 mm.



Abrundungshalbmesser: $R = d$; $r_1 = \frac{R}{2}$; $r_2 = \frac{R}{4}$.

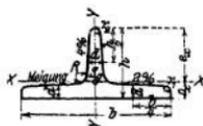
Profil Nr.	Abmessungen		Querschnitt F	Gewicht G	Schwerpunkts- Abstände S_0		Momente für die Biegungsachsen			
	$b=h$	$d=R$			σ_x	ϵ_x	XX		YY	
	mm	mm	qcm	kg/m			cm	cm	Trägheits- moment J_x cm ⁴	Widerstands- momente $W_{e_x} = \frac{J_x}{e_x}$ cm ³
$\frac{2}{2}$	20	3,0	1,12	0,88	0,58	1,42	0,38	0,27	0,20	0,20
$\frac{2^{1/2}}{2^{1/2}}$	25	3,5	1,64	1,29	0,73	1,77	0,87	0,49	0,43	0,34
$\frac{3}{3}$	30	4,0	2,26	1,77	0,85	2,15	1,72	0,80	0,87	0,58
$\frac{3^{1/2}}{3^{1/2}}$	35	4,5	2,97	2,33	0,99	2,51	3,10	1,24	1,57	0,90
$\frac{4}{4}$	40	5,0	3,77	2,96	1,12	2,88	5,28	1,83	2,58	1,29
$\frac{4^{1/2}}{4^{1/2}}$	45	5,5	4,67	3,67	1,26	3,24	8,13	2,51	4,01	1,78
$\frac{5}{5}$	50	6,0	5,66	4,44	1,39	3,61	12,1	3,35	6,06	2,42
$\frac{6}{6}$	60	7,0	7,94	6,23	1,66	4,34	23,8	5,48	12,2	4,07
$\frac{7}{7}$	70	8,0	10,6	8,32	1,94	5,06	44,5	8,79	22,1	6,32
$\frac{8}{8}$	80	9,0	13,6	10,68	2,22	5,78	73,7	12,75	37,0	9,25
$\frac{9}{9}$	90	10,0	17,1	13,42	2,48	6,52	119	18,25	58,5	13,0
$\frac{10}{10}$	100	11,0	20,9	16,41	2,74	7,26	179	24,66	88,3	17,7
$\frac{12}{12}$	120	13,0	29,6	23,24	3,28	8,72	366	41,92	178	29,7
$\frac{14}{14}$	140	15,0	39,9	31,32	3,80	10,2	660	64,71	330	47,2

Breitflanschtige T-Eisen $\frac{b}{h} = \frac{2}{1}$

Normallängen: bis einschließlich 12 m.

Lagerlängen: 4 bis einschließlich 12 m in Abstufungen von 250 mm.

Abrundungshalbmesser:



$R = d$; $r_1 = \frac{R}{2}$; $r_2 = \frac{R}{4}$.

Profil Nr.	Abmessungen			Querschnitt F	Gewicht G	Schwer- punkts- abstände S ₀		Momente für die Biegungsachsen			
	b	h	d = R			o _x	e _x	XX		YY	
								Träg- heits- mo- ment J _x	Widerstands- momente (Min.) W _x = $\frac{J_x}{e_x}$	Träg- heits- mo- ment J _y	Widerstands- moment W _y = $\frac{J_y}{o_y}$
mm	mm	mm	qcm	kg/m	cm	cm	cm ⁴	cm ³	cm ⁴	cm ³	
$\frac{6}{3}$	60	30	5,5	4,64	3,64	0,67	2,33	2,58	1,11	8,62	2,87
$\frac{7}{3^{1/2}}$	70	35	6,0	5,94	4,66	0,77	2,73	4,49	1,65	15,1	4,31
$\frac{8}{4}$	80	40	7,0	7,91	6,21	0,88	3,12	7,81	2,50	28,5	7,13
$\frac{9}{4^{1/2}}$	90	45	8,0	10,2	8,01	1,00	3,50	12,7	3,63	46,1	10,2
$\frac{10}{5}$	100	50	8,5	12,0	9,42	1,09	3,91	18,7	4,78	67,7	13,5
$\frac{12}{6}$	120	60	10,0	17,0	13,35	1,30	4,70	38,0	8,09	137	22,8
$\frac{14}{7}$	140	70	11,5	22,8	17,90	1,51	5,49	68,9	12,6	258	36,9
$\frac{16}{8}$	160	80	13,0	29,5	23,16	1,72	6,28	117	18,6	422	52,8
$\frac{18}{9}$	180	90	14,5	37,0	29,05	1,93	7,07	185	26,2	670	74,4
$\frac{20}{10}$	200	100	16,0	45,4	35,64	2,14	7,86	277	35,2	1000	100

— — — — —Belag-Eisen.

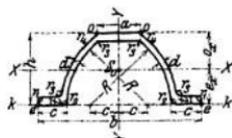
Normallängen: 4 bis einschließlich 8 m.

Lagerlängen: 4 bis einschließlich 12 m in Abstufungen von 250 mm.

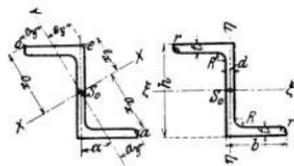
Abrundungshalbmesser:

$$r_1 = d; r_2 = d - 0,5 \text{ mm}; r_3 = t;$$

$$r_4 = 0,6 \cdot d + 1,3 \text{ mm.}$$



Profil Nr.	Abmessungen							Querschnitt F	Gewicht G	Momente für die Biegungs- achsen				Schwer- punkts- abstände S ₀		Momente für die Achse k-k					
	h	b	a	c	R	t	d			J _x	Widerstands- moment W _x = $\frac{J_x}{o_x}$	Träg- heits- moment J _y	Widerstands- moment W _y = $\frac{J_y}{b/2}$	e _x	o _x	J _k	W _k = $\frac{J_k}{h}$				
																		XX		YY	
																		cm ⁴	cm ³	cm ⁴	cm ³
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	qcm	kg/m	cm ⁴	cm ³	cm ⁴	cm ³	cm	cm	cm ⁴	cm ³					
5	50	120	33,0	21,0	60	5	3,0	6,74	5,29	23,3	9,21	86,4	14,4	2,47	2,53	64,4	12,9				
6	60	140	38,0	24,0	70	6	3,5	9,33	7,32	47,3	15,6	164	23,4	2,96	3,04	129	21,5				
7 ^{1/2}	75	170	45,5	28,5	85	7	4,0	13,2	10,36	107	28,1	347	40,8	3,69	3,81	287	38,3				
9	90	200	53,0	33,0	100	8	4,5	17,9	14,05	207	46,1	651	65,1	4,50	4,50	571	63,4				
11	110	240	63,0	39,0	120	9	5,0	24,2	19,00	420	75,9	1272	106,0	5,47	5,53	1144	104				



L-Eisen.

Normallängen: 4 bis einschließlich 10 m.

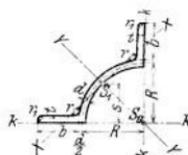
Lagerlängen: 4 bis einschließlich 12 m in Abstufungen von 250 mm.

Die inneren Flanschenflächen sind den äußeren parallel.

Abrundungshalbmesser: $R = t$; $r = \frac{t}{2}$.

Profil Nr.	Abmessungen				Quer- schnitt F	Gewicht G	Lage der Haupt- achse Y—Y tg α	Abstände von den Hauptachsen						Trägheits- und Widerstandsmomente für die Biegungsachsen							
								XX			YY			XX		YY		ξξ		ηη	
	h	b	d	t				o_x	e_x	a_x	e_y	a_y	o_y	J_x = max. cm ⁴	W_x cm ³	J_y = min. cm ⁴	W_y cm ³	J_ξ cm ⁴	W_ξ cm ³	J_η cm ⁴	W_η cm ³
3	30	38	4	4,5	4,32	3,39	1,655	3,86	0,61	3,54	1,39	0,87	0,58	18,1	4,69	1,54	1,11	5,96	3,97	13,7	3,80
4	40	40	4,5	5	5,43	4,26	1,181	4,17	1,12	3,82	1,67	1,19	0,91	28,0	6,72	3,05	1,83	13,5	6,75	17,6	4,66
5	50	43	5	5,5	6,77	5,31	0,939	4,60	1,65	4,21	1,89	1,49	1,24	44,9	9,76	5,23	2,76	26,3	10,5	23,8	5,88
6	60	45	5	6	7,91	6,21	0,779	4,98	2,21	4,56	2,04	1,76	1,51	67,2	13,5	7,60	3,73	44,7	14,9	30,1	7,09
8	80	50	6	7	11,1	8,71	0,588	5,83	3,30	5,35	2,29	2,25	2,02	142	24,4	14,7	6,44	109,3	27,3	47,4	10,1
10	100	55	6,5	8	14,5	11,38	0,492	6,77	4,34	6,24	2,50	2,65	2,43	270	39,8	24,6	9,26	222	44,4	72,5	14,0
12	120	60	7	9	18,2	14,29	0,433	7,75	5,37	7,16	2,70	3,02	2,80	470	60	37,7	12,5	402	67,0	106	18,8
14	140	65	8	10	22,9	17,98	0,385	8,72	6,39	8,08	2,89	3,39	3,18	768	88	56,4	16,6	676	96,6	148	24,3
16	160	70	8,5	11	27,5	21,59	0,357	9,74	7,39	9,04	3,09	3,72	3,51	1184	121	79,5	21,4	1053	132	211	32,1
18	180	75	9,5	12	33,3	26,14	0,329	10,7	8,40	9,99	3,27	4,08	3,86	1759	164	110	27,0	1599	178	270	38,4
20	200	80	10,0	13	38,7	30,38	0,313	11,8	9,39	11,0	3,47	4,39	4,17	2509	213	147	33,4	2299	230	357	47,6

$$W_x = \frac{J_x}{o}; \quad W_y = \frac{J_y}{e_y}; \quad W_\xi = \frac{J_\xi}{\frac{h}{2}}; \quad W_\eta = \frac{J_\eta}{b - \frac{d}{2}}.$$



Quadrant-Eisen.

Normallängen: 1 bis einschließlich 10 m.

Lagerlängen: 5 bis einschließlich 14 m in Abstufungen von 500 mm.

Abrundungshalbmesser: $r = 0,12 R$; $r_1 = 0,06 \cdot R$.

Profil Nr.	Abmessungen				Für ein Quadranteisen			Trägheitsmomente			Für die volle Röhre				
	R	b	d	t	Quer- schnitt F	Ge- wicht G	Abstand für S_1 s	J_x	J_y	J_k	Quer- schnitt F	Ge- wicht G	Trägheits- moment für jede Biegungs- achse J	 Größtes Widerstands- moment W_z cm ³	 Klein- stes Widerstands- moment $W_x = W_y$ cm ³
5 min.	50	35	4	6	7,44	5,84	3,46	3,59	110	144	29,8	23,36	576	89,6	66,2
5 max.	50	35	8	8	12,00	9,42	3,47	6,37	159	227	48,0	37,68	908	135	102
7 ¹ / ₂ min.	75	40	6	8	13,7	10,75	4,95	7,69	360	517	54,8	43,00	2068	237	175
7 ¹ / ₂ max.	75	40	10	10	20,0	15,70	4,97	13,3	479	745	80,0	62,80	2980	331	248
10 min.	100	45	8	10	22,0	17,27	6,43	16,5	909	1366	88,0	69,08	5464	497	367
10 max.	100	45	12	12	30,0	23,55	6,49	25,1	1144	1870	120,0	94,20	7480	664	495
12 ¹ / ₂ min.	125	50	10	12	32,2	25,28	8,02	37,5	1876	3039	128,8	101,12	12156	917	675
12 ¹ / ₂ max.	125	50	14	14	42,2	33,13	8,00	49,2	2386	3945	168,8	132,52	15780	1165	867
15 min.	150	55	12	14	44,6	35,01	9,51	73,2	3549	5909	178,4	140,04	23636	1522	1120
15 max.	150	55	18	17	62,6	49,14	9,54	104	4633	8079	250,4	196,56	32316	2029	1510

Angaben über Stabeisen¹⁾.

Gewöhnliche Längen: 3 bis 10 m.

Größte Längen: bis 30 m.

Gewichtstabelle von Quadrat- und Rundeisen.

Stärke <i>d</i> mm	Gewicht <i>G</i> kg/m		Stärke <i>d</i> mm	Gewicht <i>G</i> kg/m		Stärke <i>d</i> mm	Gewicht <i>G</i> kg/m	
								
5	0,20	0,15						
6	0,28	0,22	42	13,85	10,88	130	132,67	104,2
7	0,38	0,30	44	15,20	11,94	135	143,07	112,36
8	0,50	0,39	46	16,61	13,05	140	153,86	120,84
9	0,64	0,50	48	18,09	14,21	145	165,05	129,63
10	0,79	0,62	50	19,63	15,41	150	176,63	138,72
11	0,95	0,75	52	21,23	16,67	155	188,60	148,12
12	1,13	0,89	54	22,89	17,98	160	200,96	157,83
13	1,33	1,04	56	24,62	19,33	165	213,72	167,85
14	1,54	1,21	58	26,41	20,74	170	226,87	178,18
15	1,77	1,39	60	28,26	22,20	175	240,41	188,81
16	2,01	1,58	62	30,18	23,70	180	254,34	199,76
17	2,27	1,78	64	32,15	25,25	185	268,66	211,01
18	2,54	2,00	66	34,19	26,86	190	283,39	222,57
19	2,83	2,23	68	36,30	28,51	195	298,50	234,44
20	3,14	2,46	70	38,47	30,21	200	314,00	246,61
21	3,46	2,72	72	40,69	31,96	205	329,90	259,10
22	3,80	2,98	74	42,99	33,76	210	346,19	271,89
23	4,15	3,26	76	45,34	35,61	215	362,87	285,00
24	4,52	3,55	78	47,76	37,51	220	379,94	298,40
25	4,91	3,85	80	50,24	39,46	225	397,40	312,12
26	5,31	4,17	82	52,78	41,46	230	415,27	326,15
27	5,72	4,49	84	55,39	43,50	235	433,52	340,48
28	6,15	4,83	86	58,06	45,60	240	452,16	355,13
29	6,60	5,18	88	60,79	47,74	245	471,20	370,08
30	7,07	5,55	90	63,59	49,94	250	490,63	385,34
31	7,54	5,93	92	66,44	52,18	260	530,66	416,78
32	8,04	6,31	94	69,36	54,48	270	572,27	449,46
33	8,55	6,71	96	72,35	56,82	280	615,44	483,37
34	9,07	7,13	98	75,39	59,21	290	660,19	518,51
35	9,62	7,55	100	78,50	61,65	300	706,50	554,88
36	10,17	7,99	105	86,55	67,97	310	754,39	592,49
37	10,75	8,44	110	94,99	74,60	320	803,84	631,34
38	11,34	8,90	115	103,82	81,54	330	854,87	671,41
39	11,94	9,38	120	113,04	88,78	340	907,46	712,72
40	12,56	9,86	125	122,66	96,33	350	961,63	755,26

Das Gewicht von Sechskanteisen ergibt sich aus der obigen Tabelle, wenn man als Stärke des Sechskantes seinen Durchmesser des eingeschriebenen Kreises zugrunde legt, durch Multiplikation der Werte für Rundeisen gleicher Stärke mit der Zahl 1,1.

¹⁾ Die Gewichte gelten für Flußeisen. Sie sind zu multiplizieren für:
Schweißeisen mit 0,994; Kupfer mit 1,134; Stahl mit 1,001; Kupferlegierungen mit 1,09 im Mittel.

Gewichtstabelle für Bandeisen, Flacheisen und Universaleisen.

Dicke s mm	Breite in mm									
	10	12	14	15	16	18	20	22	24	25
1	0,079	0,094	0,110	0,118	0,126	0,141	0,157	0,173	0,188	0,196
2	0,157	0,188	0,220	0,236	0,251	0,283	0,314	0,345	0,377	0,393
3	0,236	0,283	0,330	0,353	0,377	0,424	0,471	0,518	0,565	0,589
4	0,314	0,377	0,440	0,471	0,502	0,565	0,628	0,691	0,754	0,785
5	0,393	0,471	0,550	0,589	0,628	0,707	0,785	0,864	0,942	0,981
6	0,471	0,565	0,659	0,707	0,754	0,848	0,942	1,036	1,130	1,178
7	0,550	0,659	0,769	0,824	0,879	0,989	1,099	1,209	1,319	1,374
8	0,628	0,754	0,879	0,942	1,005	1,130	1,256	1,382	1,507	1,570
9	0,707	0,848	0,989	1,060	1,130	1,272	1,413	1,554	1,666	1,766
10	0,785	0,942	1,099	1,178	1,256	1,413	1,570	1,727	1,884	1,963
11	0,864	1,036	1,209	1,295	1,382	1,554	1,727	1,900	2,072	2,159
12	0,942	1,130	1,319	1,413	1,507	1,696	1,884	2,072	2,261	2,355
13	1,021	1,225	1,429	1,531	1,633	1,837	2,041	2,245	2,449	2,551
14	1,099	1,319	1,539	1,649	1,758	1,978	2,198	2,418	2,638	2,748
15	1,178	1,413	1,649	1,766	1,884	2,120	2,355	2,591	2,826	2,944
16	1,256	1,507	1,758	1,884	2,010	2,261	2,512	2,763	3,014	3,140
17	1,335	1,601	1,868	2,002	2,135	2,402	2,669	2,936	3,203	3,336
18	1,413	1,696	1,978	2,120	2,261	2,543	2,826	3,109	3,391	3,533
19	1,492	1,790	2,088	2,237	2,386	2,685	2,983	3,281	3,580	3,729
20	1,570	1,884	2,198	2,355	2,512	2,826	3,140	3,454	3,768	3,925
21	1,649	1,978	2,308	2,473	2,638	2,967	3,297	3,627	3,956	4,121
22	1,727	2,072	2,418	2,591	2,763	3,109	3,454	3,799	4,145	4,318
23	1,806	2,167	2,528	2,708	2,889	3,250	3,611	3,972	4,333	4,518
24	1,884	2,261	2,638	2,826	3,014	3,391	3,768	4,145	4,522	4,710
25	1,963	2,355	2,748	2,944	3,140	3,533	3,925	4,318	4,710	4,905
26	2,041	2,449	2,857	3,062	3,266	3,674	4,082	4,490	4,898	5,103
27	2,120	2,543	2,967	3,179	3,391	3,815	4,239	4,663	5,087	5,299
28	2,198	2,638	3,077	3,297	3,517	3,956	4,396	4,836	5,275	5,495
29	2,277	2,732	3,187	3,415	3,642	4,098	4,553	5,008	5,464	5,691
30	2,355	2,826	3,297	3,533	3,768	4,239	4,710	5,181	5,652	5,888
31	2,434	2,920	3,407	3,650	3,894	4,380	4,867	5,354	5,840	6,084
32	2,512	3,014	3,517	3,768	4,019	4,522	5,024	5,526	6,029	6,280
33	2,591	3,109	3,627	3,886	4,145	4,663	5,181	5,699	6,217	6,476
34	2,669	3,203	3,737	4,004	4,270	4,804	5,338	5,872	6,406	6,673
35	2,748	3,297	3,847	4,121	4,396	4,946	5,495	6,045	6,594	6,869
36	2,826	3,391	3,956	4,239	4,522	5,087	5,652	6,217	6,782	7,065
37	2,905	3,485	4,066	4,357	4,647	5,228	5,809	6,390	6,971	7,261
38	2,983	3,580	4,176	4,475	4,773	5,369	5,966	6,553	7,159	7,458
39	3,062	3,674	4,286	4,592	4,898	5,511	6,123	6,735	7,348	7,654
40	3,140	3,768	4,396	4,710	5,024	5,652	6,280	6,908	7,536	7,850
41	3,219	3,862	4,506	4,828	5,150	5,793	6,437	7,081	7,724	8,046
42	3,297	3,956	4,616	4,946	5,295	5,935	6,594	7,253	7,913	8,243
43	3,376	4,051	4,726	5,063	5,401	6,076	6,751	7,426	8,101	8,439
44	3,454	4,145	4,836	5,181	5,526	6,217	6,908	7,599	8,290	8,635
45	3,533	4,239	4,946	5,299	5,652	6,359	7,065	7,772	8,478	8,831

Bandeisen: bis 5 mm stark, in Abstufungen von $\frac{1}{4}$ mm, bis 250 mm breit.

Flacheisen: 5 ÷ 45 mm stark; 10 ÷ 180 mm breit.

Universaleisen: 5 ÷ 45 mm stark; 180 ÷ 1000 mm breit.

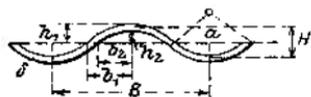
Angaben über Bleche.

Nr. d. Blechlehre	Gewichtstabelle für verschiedene Metallbleche in kg pro qm									
	Dicke mm	Schweiß-eisen	Fluß-eisen	Fluß-stahl	Kupfer	Messing	Bronze	Zink	Blei	Alumi-nium
27	0,300	2,340	2,355	2,358	2,670	2,565	2,580	2,160	3,411	0,804
26	0,375	2,925	2,944	2,948	3,338	3,206	3,225	2,700	4,264	1,005
25	0,438	3,416	3,438	3,443	3,898	3,745	3,767	3,154	4,980	1,174
24	0,500	3,900	3,925	3,930	4,450	4,275	4,300	3,600	5,685	1,340
23	0,562	4,384	4,412	4,418	5,000	4,805	4,833	4,047	6,390	1,506
22	0,625	4,875	4,906	4,913	5,563	5,344	5,375	4,500	7,106	1,675
21	0,75	5,850	5,888	5,895	6,675	6,413	6,450	5,400	8,528	2,010
20	0,875	6,825	6,869	6,878	7,788	7,482	7,525	6,300	9,950	2,345
19	1,000	7,800	7,850	7,860	8,900	8,550	8,600	7,200	11,370	2,680
18	1,125	8,775	8,832	8,843	10,013	9,620	9,675	8,100	12,792	3,015
17	1,25	9,750	9,813	9,825	11,125	10,688	10,750	9,000	14,213	3,350
16	1,375	10,725	10,794	10,810	12,238	11,757	11,825	9,900	15,634	3,685
15	1,500	11,700	11,775	11,790	13,350	12,825	12,900	10,800	17,055	4,020
14	1,75	13,650	13,738	13,755	15,575	14,963	15,050	12,600	19,898	4,690
13	2,00	15,600	15,700	15,720	17,800	17,100	17,200	14,400	22,74	5,360
12	2,25	17,55	17,66	17,69	20,03	19,24	19,35	16,20	25,58	6,030
11	2,50	19,50	19,63	19,65	22,25	21,38	21,50	18,00	28,43	6,700
10	2,75	21,45	21,60	21,62	24,41	23,52	23,65	19,80	31,27	7,370
9	3,00	23,40	23,55	23,58	26,70	25,65	25,80	21,60	34,11	8,040
8	3,25	25,35	25,52	25,55	28,93	27,79	27,95	23,40	36,95	8,710
7	3,50	27,30	27,48	27,51	31,15	29,93	30,10	25,20	39,80	9,380
6	3,75	29,25	29,45	29,48	33,38	32,06	32,25	27,00	42,64	10,050
5	4,00	31,20	31,40	31,44	35,60	34,20	34,40	28,80	45,48	10,720
4	4,25	33,15	33,36	33,41	37,83	36,34	36,55	30,60	48,33	11,390
3	4,50	35,10	35,32	35,37	40,05	38,48	38,70	32,40	51,17	12,060
2	5,00	39,00	39,25	39,30	44,50	42,75	43,00	36,00	56,85	13,400
1	5,50	42,90	43,18	43,25	48,95	47,03	47,30	39,60	62,54	14,740
6		46,80	47,10	47,16	53,40	51,30	51,60	43,20	68,22	16,080
7		54,60	54,95	55,02	62,30	59,85	60,20	50,40	79,59	18,76
8		62,40	62,80	62,88	71,20	68,40	68,80	57,60	90,96	21,44
9		70,20	70,65	70,74	80,10	76,95	77,40	64,80	102,33	24,12
10		78,00	78,50	78,60	89,00	85,50	86,00	72,00	113,70	26,80
11		85,80	86,35	86,46	97,90	94,05	94,60	79,20	125,07	29,48
12		93,60	94,20	94,32	106,80	102,00	103,20	86,40	136,44	32,16
13		101,40	102,05	102,18	115,70	111,15	111,80	93,60	147,81	34,84
14		109,20	109,90	110,04	124,60	119,70	120,40	100,80	159,18	37,52
15		117,00	117,75	117,90	133,50	128,25	129,00	108,00	170,55	40,22
16		124,80	125,60	125,76	142,40	136,80	137,60	115,20	181,92	42,88
17		132,60	133,45	133,62	151,30	145,35	146,20	122,40	193,29	45,56
18		140,40	141,30	141,48	160,20	153,90	154,80	129,60	204,66	48,24
19		148,20	149,15	149,43	169,10	162,45	163,40	136,80	216,03	50,92
20		156,00	157,00	157,20	178,00	171,00	172,00	144,00	227,40	53,60

Gelochte Bleche.

Für Siebzwecke: in allen Stärken der Feinblechlehre bis zu 2,5 m breit u. 6 m lang, in verschiedenen Lochungen, z. B. runde Lochung von 0,5 ÷ 100 mm \varnothing , hergestellt.

Für Verkleidungen: verschieden gemusterte Zierbleche von 0,75 ÷ 2 mm Stärke.



Wellblech.

Flaches Wellblech: für Dachdeckungen, Verkleidungen.

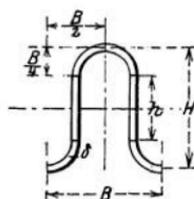
$$B > 2H; \quad B = 20 \div 200 \text{ mm.}$$

1,6 ÷ 2,2 mm stark, 650 ÷ 950 mm breit, 2 ÷ 3 m lang.

Trägerwellblech: für Decken, Laufbühnen u. ä.

$$B \cong 2H; \quad B = 30 \div 160 \text{ mm.}$$

Gewöhnliche Stärken 1 ÷ 2 mm; 450 ÷ 900 mm breit, 3 ÷ 6 m lang.



Riffelbleche (für Belagzwecke).Rhombisch geriffelt, Höhe der Riffel etwa $1\frac{1}{2} \div 2\frac{1}{2}$ mm.

Dicke in Millimeter ohne Riffel	Bei einer Breite von Millimetern							Annäherndes Gewicht in kg eines qm einschl. Riffel
	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	
	beträgt die größte Länge in Millimetern							
4	5000	4500	4000	4000	3500	3000	—	38
5	5000	4500	4000	4000	3500	3000	—	46
6	6000	5500	5000	5000	4500	4000	3000	54
7	6000	5500	5000	5000	4500	4000	3000	62
8	6000	5500	5000	5000	4500	4000	3500	70
9	6000	5500	5000	5000	4500	4000	3500	78
10	6000	5500	5000	5000	4500	4000	3500	86
11	6000	5500	5000	5000	4500	4000	3500	94
12	6000	5500	5000	5000	4500	4000	3500	102
13	6000	5500	5000	5000	4500	4000	3500	110
14	6000	5500	5000	4500	4000	5000	3000	118
15	5500	5000	4500	4000	4000	3500	3000	126

Größte Stärke (ausschl. Riffel) 25 mm.

Bleche mit Metallüberzügen.

Sämtliche Feibleche, glatt oder in den oben angeführten Sonderformen, werden auch mit Überzügen aus Zink und Blei geliefert. Außerdem kommen für glatte Bleche noch Zinn-, Kupfer- und Nickelüberzüge zur Anwendung. Weißbleche, verzinnte Schwarzbleche, werden in Stärken von 0,5 ÷ 2,5 mm bis zur Plattengröße von etwa 1,5 qm in den Handel gebracht.

Angaben über Draht.

Gewicht der Drähte nach der deutschen Millimeterdrahtlehre.

Nr. der Lehre	Stärke mm	Gewicht in kg für 10 000 m Draht aus				Nr. der Lehre	Stärke mm	Gewicht in kg für 10000 m Draht aus			
		Eisen	Stahl	Kupfer	Messing			Eisen	Stahl	Kupfer	Messing
100	10	6008	6249	7069	6823	14	1,4	117,8	122,5	138,6	133,7
94	9,4	5309	5521	6246	6029	13	1,3	101,5	105,6	119,5	115,3
88	8,8	4653	4839	5474	5284	12	1,2	86,5	90,0	101,8	98,3
82	8,2	4040	4202	4753	4588	11	1,1	72,7	75,6	85,5	82,6
76	7,6	3470	3609	4083	3941	10	1,0	60,1	62,5	70,7	68,2
70	7,0	2944	3062	3464	3343	9	0,9	48,7	50,6	57,3	55,3
65	3,5	2539	2640	2986	2883	8	0,8	38,5	40,0	45,2	43,7
60	6,0	2163	2250	2545	2456	7	0,7	29,4	30,6	34,6	33,4
55	5,5	1818	1890	2138	2064	6	0,6	21,6	22,5	25,5	24,6
50	5,0	1502	1562	1767	1706	$\frac{5}{8}$	0,55	18,2	18,9	21,4	20,6
46	4,6	1271	1322	1496	1444	5	0,5	15,0	15,6	17,7	17,1
42	4,2	1060	1102	1247	1203	$\frac{4}{8}$	0,45	12,2	12,7	14,3	13,8
38	3,8	868	900	1021	985	4	0,4	9,6	10,0	11,3	10,9
34	3,4	695	722	817	789	$\frac{3}{2}$	0,37	8,2	8,6	9,7	9,3
31	3,1	577	601	679	656	$\frac{3}{4}$	0,34	7,0	7,2	8,2	7,9
28	2,8	471	490	554	535	$\frac{3}{1}$	0,31	5,8	6,0	6,8	6,6
25	2,5	376	391	442	427	$\frac{2}{8}$	0,28	4,7	4,9	5,5	5,3
22	2,2	291	302	342	330	$\frac{2}{6}$	0,26	4,1	4,2	4,8	4,6
20	2,0	240	250	283	273	$\frac{2}{4}$	0,24	3,5	3,6	4,1	3,9
18	1,8	195	203	229	221	$\frac{2}{2}$	0,22	2,9	3,0	3,4	3,3
16	1,6	154	160	181	175	2	0,2	2,4	2,5	2,8	2,7

Schutz des Eisens gegen Rosten

läßt sich dadurch herbeiführen, daß man den Luftsauerstoff, Feuchtigkeit und Säuren entweder durch möglichst haltbare, dicht abschließende Überzüge (1.) von der Oberfläche des Eisens fernzuhalten oder aber diese Stoffe durch die Einwirkung geeigneter Chemikalien (2.) unschädlich zu machen sucht.

1. Auf die gut gereinigte Oberfläche des Eisens werden aufgebracht: Metallüberzüge, am besten aus Zink oder Blei. Schmelzüberzüge durch ein-gebrannte Emaile. Ölanstriche mit dickflüssigen Mineralölen oder mit Harzölen, z. B. einer Lösung von Kautschuk in Terpentin. Teer- und Asphaltanstriche, die am besten heiß aufgetragen werden. Ölfarbenanstriche, und zwar für den Grundanstrich, am besten Bleimennige mit Leinölfirnis angerieben, danach für den Deckanstrich eine dünnflüssige Farbe aus Firnis, Bleiweiß, Graphit und Zinkstaub. Ferner sind besondere Rostschutzfarben im Handel, die sich zum Teil auch bei höheren Temperaturen gut bewährt haben. Reiner Zement, entweder in dünnem Anstrich oder in stärkerer Kruste (Einbettung in Beton).

Hierher gehört ferner der Schutz vor Rost durch künstliche Oxydation¹⁾ und durch Brünieren.

2. Anstriche mit Kalkmilch, Einlagerung in Kalksteinschlag (zur Bindung schwefeliger Säure). Beseitigung der Feuchtigkeit in geschlossenen Räumen durch wasseraufnehmende Stoffe wie konzentrierte Schwefelsäure, Chlorkalzium.

Das Kupfer

Cu, mit geringen Verunreinigungen — etwa 0,5% — von Fe, Bi, Pb, Ni, P. Fe und Bi machen es kaltbrüchig.

Kupfererze: Kupferkies CuFeS_2 ; Kupferglanz Cu_2S ; Rotkupfererz Cu_2O ; Malachit $\text{CuCO}_3 + \text{Cu(OH)}_2$ u. a.

Daraus durch mehrfaches Rösten und Schmelzen Schwarzkupfer, das im Flammofen weiter raffiniert wird. Aus armen Erzen nach dem nassen Verfahren gewonnen durch Auslaugen und elektrolytische Fällung. Letztere immer mehr zur Raffinierung von Kupfer in Anwendung.

Kupfer ist nicht gießbar, dagegen sehr bildsam, gut lötbar, schweißbar (siehe S. 536) und gut mit anderen Metallen zu legieren.

Handelserzeugnisse des Kupfers.

Stangenkupfer: Rundkupfer — $3 \div 100$ mm \varnothing (Lokomotivstehbolzen), Quadratkupfer — $3 \div 50$ mm stark (Dichtungsringe). Draht: $0,14 \div 10$ mm \varnothing (elektrische Leitungen u. ä.). Blech: $0,1 \div 26$ mm stark (Kupferschmiedearbeiten, Lokomotivfeuerbüchsen). Röhren, gezogene, mit Naht und nahtlos hergestellt, von 3 bis etwa 400 mm l. \varnothing . (Vorwärmeröhren, Kühlschlangen u. ä.)

Das Zink

Zn, verunreinigt durch Pb, Cd und S.

Zinkerze: Zinkblende ZnS , Galmei ZnCO_3 , Kieselgalmei $\text{Zn}_2\text{SiO}_4 + \text{H}_2\text{O}$.

Daraus durch Rösten bzw. Brennen und nachfolgendes reduzierendes Schmelzen in Muffelöfen das Rohzink und aus diesem, nach Abscheidung von As, Sb, Cu, Bi, Pb, Fe — durch Seigern — das Raffinadzink.

Das Zink ist spröde, bis es bei $100 \div 150^\circ$ bildsam wird. Es läßt sich gut gießen, füllt die Form scharf aus (für billigen Kunstguß geeignet).

Handelserzeugnisse des Zink.

Blech: glatt (und als Wellblech), nach der deutschen Zinkblechlehre in 26 Stärken von 0,1 — 2,68 mm Stärke erhältlich. Am meisten zu Bauzwecken angewandt in den Stärken:

Nr. der Lehre	12	13	14	15	16
Stärke in mm	0,66	0,74	0,82	0,95	1,08
Gewicht kg/qm	4,7	5,2	5,8	6,7	7,7
Lagergrößen bis 1,6 × 4 m.					

¹⁾ Z. Ver. deutsch. Ing. 1910, S. 906 und 1911, S. 396

Das Blei

Pb verunreinigt durch As, Sb, Cu, Fe, Sn, Zn. Sb macht das Blei widerstandsfähiger gegen Säuren, erhöht seine Festigkeit und Härte (Hartblei).

Bleierze: Bleiglanz PbS ; Weißbleierz $PbCO_3$.

Daraus nach dem Röstereduktionsverfahren im Flammofen und im Schachtofen gewonnen: das Werkblei. Weitere Raffinierung durch Ausschmelzen.

Das Blei läßt sich gut gießen, walzen und pressen, dagegen schlecht mit Feile und Säge bearbeiten.

Handelserzeugnisse des Bleis.

Draht: $0,5 \div 15$ mm \emptyset für Dichtungen und für elektrotechnische Zwecke.

Blech: $0,5 \div 10$ mm stark, zum Auskleiden von Behältern für chemische Zwecke und zur Herstellung von Dichtungen und von Mauerisolierschichten, ferner für elektrische Akkumulatoren.

Die größten Plattenabmessungen betragen, je nach der Blechstärke, $1,3 \times 10$ bis $3,25 \times 15$ qm.

Röhren. Meistens aus Weichblei $10 \div 80$ mm l. \emptyset bei $2,5 \div 7,5$ mm. Wandstärke für Wasserleitungszwecke innen entweder verzinkt oder mit PbS überzogen (durch Einfüllen von Schwefelnatrium oder Schwefelammonium).

Nahtlose, rohrartige Überzüge aus Blei erhalten die Kabel, um ihre Isolierung vor Nässe zu schützen (Bleikabel).

Bleiwolle: dient zum Abdichten von Muffenröhren.

Das Zinn

Sn verunreinigt durch Fe, Pb, Cu, W.

Zinnerze: Zinnstein SnO_2 .

Daraus durch Rösten und reduzierendes Schmelzen das Rohzinn, welches entweder durch Ausseigern oder durch Behandlung mit Holzkohle weiter gereinigt wird.

Aus Weichblechabfällen wird das Zinn entweder durch Behandlung mit Säuren oder mit Chlorgas und danach elektrolytisch gewonnen.

Das Zinn ist härter als Blei und sehr bildsam. Es läßt sich, namentlich mit geringem Bleizusatz (für Speisengefäße unter 10% wegen der Giftigkeit des Bleis), gut gießen. Andere Metalle können leicht, wenn ihre Oberfläche gesäubert, durch Eintauchen in geschmolzenes Zinn, mit einer haltbaren dünnen Zinnschicht überzogen werden.

In geringem Umfange stellt man aus Zinn Röhren und Bleche her, die in der chemischen Industrie gebraucht werden.

Bei der vielseitigen Verwendung des Zinns in der Metallgießerei ist sein hoher Preis von besonderer Bedeutung. Es ist nämlich

etwa	8mal	so	teuer	wie	Zink,
„	14	„	„	„	Blei,
„	3	„	„	„	Aluminium,
„	3,5	„	„	„	Kupfer.

Das Aluminium

Al mit Spuren von Fe, Na, C, Si.

Rohstoffe zur Aluminiumgewinnung: Bauxit $Al_2O_3 + 2 H_2O$; Kryolith $6 NaFl + Al_2Fl_6$.

Daraus durch Schmelzelektrolyse das ziemlich reine Metall.

Das Aluminium wird vor allem seines geringen Gewichtes wegen vielfach verwendet. Es läßt sich gießen, legieren und besitzt große Bildsamkeit, dagegen

kann man es nur schlecht lüten. Auch ist es mit besonderer Vorsicht zu bearbeiten, da es die Werkzeuge durch Verschmieren leicht stumpf macht. Es zeigt bei höheren Temperaturen sehr lebhaft Neigung zum Sauerstoff und wird deswegen im Hüttenbetriebe und in der Sprengmittelindustrie verwendet.

An Erzeugnissen aus Aluminium kommen Bleche, Röhren, Walzprofile und Draht in den Handel.

Nickel, Antimon und Wismut sind für den Maschinenbau wichtig, da sie vielfach zu Legierungen benutzt werden. Nickellegierungen zeichnen sich besonders durch hohe Widerstandsfähigkeit gegenüber hohen Temperaturen aus.

Antimon erhöht im allgemeinen die Härte, Wismut erniedrigt dagegen den Schmelzpunkt der Legierungen.

Die Legierungen

werden durch Zusammenschmelzen verschiedener Metalle hergestellt. Dabei lassen sich, durch mannigfache Änderung in der Zusammensetzung, Baustoffe erzielen, welche für die einzelnen Verwendungszwecke besonders geeignet sind und den verschiedensten Anforderungen entsprechen, welche an die Billigkeit, Gießfähigkeit, Bearbeitbarkeit, an das Gewicht, die Festigkeit, Härte und Widerstandsfähigkeit gegen physikalische und chemische Einflüsse zu stellen sind.

Für die Herstellung und Behandlung der Legierungen ist folgendes zu beachten:

Aus der flüssigen Schmelze aus zwei oder mehreren Metallen erhält man nur bei einer ganz bestimmten, von der Natur dieser Metalle abhängigen Zusammensetzung einen in allen seinen Teilen gleichartig gemischten Stoff, der als festgewordene Lösung der legierten Metalle ineinander anzusehen ist. Man bezeichnet solche Mischungen als eutektische. Findet hingegen eine Mischung von Metallen statt, bei welcher gegenüber der Zusammensetzung des Eutektikums eine der Komponenten überwiegt, so wird sich beim Erstarren der Legierung zunächst so viel von diesem Bestandteil in festen Kristallen abscheiden, bis der Rest eutektisch geworden ist. Diese gesamte Restmasse wird dann ohne weitere Veränderungen fest werden, sobald ihr Erstarrungspunkt erreicht ist.

In dem so entstandenen Stoff finden sich die Kristalle der überwiegenden Komponente eingebettet in das Eutektikum. Der geschilderte Zerfall der Mischung beim Erstarren kann dazu führen, daß sich die ausgeschiedenen Kristalle infolge ihrer Schwere aus der eutektischen Grundmasse absondern und zusammen ausfallen. Diese Entmischungerscheinungen nennt man das Seigern. Da ähnliches auch unter dem Einfluß höherer Temperaturen auf die feste Legierung erfolgen kann, so werden im allgemeinen diejenigen Legierungen für technische Zwecke die besten sein, welche im festen Zustande die größte Gleichmäßigkeit in der Zusammensetzung zeigen, d. h. die sich möglichst dem eutektischen Zustande nähern.

Auf das Gefüge der Legierung ist ferner von besonderem Einfluß die Schnelligkeit, mit der sie erkaltet, und zwar werden im allgemeinen die ausgeschiedenen Kristalle um so größer werden, je langsamer die Erstarrung vor sich geht.

Auch mechanische Bearbeitung, Hämmern, Walzen, Ziehen usw. können das Gefüge nicht unwesentlich verändern und somit auf Festigkeit und Härte einwirken.

Nachstehende Zusammenstellung enthält einige der im Maschinenbau häufig angewandten Metallegierungen¹⁾:

Namen	In 100 Gewichtsteilen im Mittel enthalten:	Bemerkungen
Bronze:		ursprünglich nur CuSn-Legierungen
Aluminium-	97 \div 90 Cu; 3 \div 10 Al	mit abnehmendem Cu-Gehalt vermindert sich die Dehnung, walz-, schmied- und preßbar.
Armaturen-	80 Cu; 5 Sn; 12 Zn; 3 Pb	für gewöhnliche Armaturen,
	7 Cu; 10 Sn; 3 Zn	zäh, aber schlecht gießbar,
	85 Cu; 15 Sn	hart.
Mangan-	84 Cu; 15,6 Sn; 0,4 Mn	zäh und fest.
Maschinen-	78 \div 90 Cu; 10 \div 18 Sn; 2 \div 8 Zn; 0 \div 10 Pb; 0 \div 3 Sb; 0 \div 10Al; 0 \div 20 Ni; 0 \div 20Mn; 0 \div 3 Fe; 0 \div 0,5 P	Zusammensetzung den jeweils verlangten Eigenschaften anzupassen.
Phosphor-		Phosphorkupfer oder Phosphorzinn als Desoxydationsmittel zugesetzt.
	70 \div 90 Cu; 4 \div 13 Sn; 5,5 \div 16 Pb; 0,5 \div 1 P	Neigung zum Seigern.
	78 \div 90 Cu; 7 \div 20 Sn; 0 \div 7 Zn 0 \div 2 P	spröde, sobald P-Gehalt über 1%.
Nickel-	50 \div 80 Cu; 1 \div 16 Sn; 0 \div 20 Zn; 3 \div 40 Ni	Größte Zähigkeit, Dichtigkeit, Festigkeit und Härte erreichbar.
	50 Cu; 2 Sn, 18 Zn, 18 Pb, 12 Ni	Ni verhindert hier das Ausseigern des Pb.
Rübel-	34 Cu; 7 Al, 30 Ni, 29 Fe	sehr hohe Festigkeit, aber geringe Dehnung.
Silicium-	91 \div 98 Cu; 1 \div 9 Sn; 0 \div 1 Zn; ∞ 0,05 Si	für Telephondrähte, wegen sehr hoher Festigkeit, benutzt.
Wolfram-	95 Cu; 3 Sn; 2 W	sehr zäh und fest.
Wismut-	25 Cu; 50 Sb; 24 Ni; 1 Bi	hart, glänzend.
	45 Cu; 16 Sb; 21,5 Zn; 32,5 Ni; 1 Bi	hart, widerstandsfähig gegen Seewasser.
Rotguß	83 \div 92 Cu; 8 \div 17 Zn; 0 \div 0,6 Mn	gut gießbarer Maschinenbaustoff.
Messing (Gelbguß)		gut gießbar, kalt und warm zu bearbeiten.
Blech	55 \div 72 Cu; 0 \div 1 Sn; 27 \div 44 Zn; 0 \div 2 Pb	
Draht	70 Cu; 30 Zn	
Röhren	66 \div 80 Cu; 20 \div 34 Zn	
Guß	63 \div 72 Cu; 0 \div 2,5 Sn; 24 \div 37 Zn; 0 \div 3 Pb; 0 \div 2 Fe	
Aluminium-	60 \div 68 Cu; 27 \div 32 Zn; 1,5 \div 8 Al	widerstandsfähig gegen chemische Einflüsse.
Armaturen-	70 \div 90 Cu; 10 \div 30 Zn	weich, für Stücke, die anzunieten und zu verstemmen sind.
	60 Cu; 37 Zn; 3 Pb	für gewöhnliche Hähne u. ä.
Mangan-	50 \div 60 Cu; 15 \div 40 Zn; 4 \div 25 Mn; 0 \div 2 Ni; 0 \div 2 Fe	zäh, fest, hart.
Eichmetall } Stereometall }	60 Cu; 38 Zn; 2 Fe	fest und schmiedbar.

Namen	In 100 Gewichtsteilen im Mittel enthalten;	Bemerkungen
Deltametall	60 Cu; 39 Zn; 0,6 Pb; 0,4 Fe	fest und schmiedbar.
Duranametall	65 Cu; 2 Sn; 30 Zn; 1,5 Al; 1,5 Fe	fest und schmiedbar.
Muntzmetall } Yellowmetall }	60 Cu; 39 Zn; 1 Fe	fest und schmiedbar.
Weißgußlagermetall	8 Cu; 2 Sn; 88 Zn; 2 Sb 7 Cu; 13 Sn; 80 Sb 85 Sn; 15 Ni 6 Cu; 86 Sn; 8 Sb 6 Cu; 18 Sn; 76 Zn 8 Cu; 80 Sn; 12 Sb	billiges Lagerausgußmetall. für schnellaufende Achsen. für schnellaufende Achsen. für große Belastung. für große Belastung. für geringere Belastung.
Konstantan	60 Cu; 40 Ni	Draht, Blech für elektr. Widerstände.
Manganin	82,12 Cu; 2,29 Ni; 15,02 Mn; 0,57 Fe	Draht, Blech für elektr. Widerstände.
Nickelin	58 Cu; 41 Ni; 1 Mn 56 Cu; 13 Sn; 31 Ni	Draht, Blech für elektr. Widerstände.
Stehbolzenkupfer	92 Cu; 0,3 Zn; 0,7 Pb; 0,7 Ni; 5,5 Mn; 0,77 Fe; 0,03 Si	
Stopfbüchsenmetall	15 Sn; 70 Pb; 15 Sb 80 Pb; 20 Sb	für Packungen und Dichtungen.
Weichlot	33 Sn; 17 Cd; 50 Bi 50 Sn; 50 Pb 15 Sn; 78 Pb; 7 Sb	sehr leicht schmelzend. gewöhnliches Lot. für Weißblech, Messing, Kupfer.
Hartlot (Schlaglot): Silberlot	42 Cu; 52 Zn; 6 Ag	für Messing.
Argentanlot	36 Cu; 50 Zn; 14 Ni	für Eisen und Stahl.
Messinglot	57 Cu; 28 Zn; 15 Pb	leichtflüssig, weiß.
Aluminiumlot	20 Cu; 50 Zn; 30 Al 85 Zn; 9 Al; 6 Messing	strengflüssig zum Appretieren der Lötflächen. eigentliches Lot für Aluminium.
Magnalium Blech Guß	98 $\frac{1}{100}$ Al; 2 $\frac{1}{100}$ Mg 88 $\frac{1}{100}$ Al; 12 $\frac{1}{100}$ Mg	leichter und fester als reines Alu- minium.
Zimalium	4 Zn; 91 Al; 5 Mg	leichter und fester als reines Alu- minium.

Der Spritzguß. Durch Einspritzen einer Weißmetallegerung in Metallformen lassen sich kleinere Stücke ziemlich komplizierter Form mit einer Genauigkeit von $\pm \frac{1}{100}$ mm herstellen, so daß sie keiner Nachbearbeitung bedürfen. Bei Teilen, die an bestimmten Stellen größerer Abnutzung unterworfen sind, kann man Stahlstifte, Buchsen, Steine oder ähnliches mit eingießen. Besondere Sorgfalt ist auf die Entfernung der Luft und der Gießgase aus den dichtschießenden Formen zu verwenden. Nach den Patenten von Veeder, Hartford werden dazu die Formen zunächst luftleer gemacht und dann das flüssige Metall hineingepreßt. Der Guß erfolgt meistens auf besonderen Gießmaschinen.

Wegen der teuren Formen eignet sich der Spritzguß nur zur Herstellung von Massenartikeln. Für diese läßt er sich mit großem Vorteil anwenden, namentlich wenn sie sonst eine teure Bearbeitung erfordern würden. So werden jetzt in großem Umfange in Spritzguß hergestellt: Zahlenrollen und Triebwerksteile für Elektrizitäts-, Gas-, Wassermesser, für Zahlkassen u. ä. m.

Das Holz.

Gefüge des Holzes. Der durch das Wachstum des Holzes bedingte innere Aufbau desselben bringt es mit sich, daß Schnitte, die man in verschiedener Lage zur Achse des Stammes führt, wesentlich voneinander abweichende Gefügebilder zeigen. Charakteristisch dafür sind:

- der Querschnitt, der das „Hirnholz“ zeigt,
- der Sehnen(längs)schnitt, der das „Langholz“ zeigt,
- der Radial(längs)schnitt, der den „Spiegel“ zeigt.

Eigenschaften des Holzes.

Spez. Gew.	1,39 ÷ 1,0	0,98 ÷ 0,62	0,53 ÷ 0,4
Eigenschaften	Sehr schwer	Schwer	Leicht
	Sehr hart	Hart	Weich
	Sehr schwer spaltbar	Schwer spaltbar	Leicht spaltbar
Holzarten	Pockholz	Teakholz	Erle
	Buchsbaumholz	Eiche	Kiefer
		Esche	Tanne
		Rotbuche	Fichte
		Weißbuche	Linde
		Birke	Pappel
		Lärche	

Holz zeichnet sich ferner dadurch aus, daß es viel Wasser in sich aufnehmen kann, z. B. Fichte bis zu 170% ihres Gewichtes. Der Feuchtigkeitsgehalt aber ist von großem Einfluß auf die Verwendungsmöglichkeit des Holzes. Es sinkt nämlich seine Festigkeit mit zunehmendem Wassergehalt, außerdem verändert es dabei seine Abmessungen, und zwar am meisten in der Sehnenrichtung (Kiefer etwa 4,5, Rotbuche 8%) und am wenigsten in der Längsrichtung (Tanne 0,1 bis Erle 0,4%). Man sagt: es „quillt“ durch Wasseraufnahme und „schwindet“ beim Trocknen. Will man dieses Arbeiten des Holzes, das ein Verziehen, Verdrehen seiner Form zur Folge haben kann, bei eingebauten Stücken verhindern, so darf man nur gutgetrocknetes Holz verwenden und muß dieses durch geeigneten Anstrich (Firnis, Ölfarbe, Teer u. ä.) vor Feuchtigkeit schützen. Das Trocknen des Holzes geschieht entweder durch Lufttrocknung des Schnittholzes im Stapel, der vor Nässe jeder Art, vor Sonne und Wind zu schützen ist, oder durch künstliche Trocknung. Letztere wird durch erhitze Luft bei etwa 30 ÷ 50° in besonderen Darräumen vorgenommen.—Wo sich das Quellen des Holzes nicht verhindern läßt, ist dieses beim Zusammenbau der einzelnen Stücke zu berücksichtigen, da die Treibwirkung quellenden Holzes eine außerordentlich kräftige ist.

Die Haltbarkeit des Holzes ist je nach der Holzart und dem Aufstellungs-ort eine sehr verschiedene. Besonders wirkt abwechselndes Wasseraufnehmen und Wiederaustrocknen zerstörend auf die Holzfaser ein. Dagegen hält sich dauernd unter Wasser befindliches Holz im allgemeinen sehr gut, unter Umständen auf unbegrenzte Zeit (namentlich Eiche). Ähnlich günstig wirken auch Bodenarten, in denen der Feuchtigkeitsgehalt nicht häufigem Wechsel unterworfen ist. Sehr schädlich ist dem Holz die Einbettung in kalkhaltigen Boden oder in Kalkmörtel.

Die Zerstörung des Holzes kann erfolgen:

a) Durch Verbrennen. Davor kann man es schützen durch feuersichere Verkleidungen — starke Asbestpappe, Rabitzputz, Gipsdielen — oder durch Anstriche, die es möglichst nicht entflammbar machen sollen — Wasserglas, schwefelsaures Ammoniak, wolframsaures Natron u. a. m. Wirksamer als diese Anstriche haben sich Imprägnierungen mit ähnlichen Stoffen nach besonderen Verfahren (Moore, Hülsberg & Co., Rütgerswerke u. a.) erwiesen.

b) Durch Faulen. Dies wird hervorgerufen durch die unter Mitwirkung von Bakterien erfolgende chemische Zersetzung namentlich der Eiweißstoffe, die sich im Inhalt der Holzzellen finden. Werden diese im Holzsaft enthaltenen Stoffe ausgelaugt, so wird das Holz dadurch dauerhafter, und zwar um so mehr, je vollkommener die Entfernung derselben erfolgte. Dieses Auslaugen des Holzsaftes tritt schon durch einfache Wasserlagerung ein; besser jedoch durch Behandlung des Holzes mit Wasserdampf in geschlossenen Behältern. Wird das ausgelaugte Holz dann noch gut getrocknet, so ist es gegen Fäulnis ziemlich widerstandsfähig, Erhöht kann diese Eigenschaft noch werden durch folgende Mittel.

1. Imprägnierung mit Metallsalzen — Kupfervitriol oder Zinkchlorid. Diese bilden mit den Eiweißstoffen widerstandsfähige Verbindungen. Das Verfahren wird angewandt für Telegraphenstangen, Grubenhölzer u. ä. Nachteilig ist hierbei, daß die Holzfaser angegriffen wird, so daß die Festigkeit leidet. Ferner laugt Wasser die Salze wieder aus, wodurch ihre Wirkung aufgehoben wird. — Die Imprägnierung erfolgt dadurch, daß die Flüssigkeit unter Eigendruck (etwa 1 Atm.) in das Langholz hineingepreßt wird.

2. Imprägnierung mit Kreosotöl (hergestellt aus dem Schweröl und dem Anthrazenöl des Steinkohlenteers). Dadurch werden die Fäulniserreger zerstört. Besonders für Eisenbahnschwellen und für Holz zu Wasserbauzwecken hat sich dieses Schutzmittel gut bewährt. — Um das Öl allseitig möglichst tief in das Holz eindringen zu lassen, wird das Holz im geschlossenen eisernen Behälter zunächst einer Luftverdünnung unterworfen. Darauf wird das Öl dem Behälter zugeführt, dort erwärmt und, dadurch leichtflüssig gemacht, unter einem Druck bis zu 4 Atm. in das entlüftete Holz eingepreßt.

3. Schutzanstriche mit Teer, Karbolineum u. ä.

4. Oberflächenverkohlung. Die entstehende schwache Holzkohlenschicht bietet nur einen geringen Fäulnischutz.

c) Durch Hausschwamm, ein auf dem Holz schmarotzendes Pilzgewächs, das die Holzfaser allmählich völlig mürbe macht. Feuchtigkeit, Abschluß von Luft und Licht begünstigen sein Fortwuchern. Durch Anstriche mit Karbolineum, Antinonin, Mikrosol läßt sich der Hausschwamm erfolgreich bekämpfen.

d) Durch Wurmfraß, hervorgerufen durch Insektenlarven. Hiergegen zeigen sich die oben genannten Anstrich- und Imprägnierungsmittel ebenfalls wirksam.

Das Holz im Handel.

Die in einem Stamm oder einem bearbeiteten Stück enthaltene Holzmenge wird in „Festmetern“, dagegen wird aufgeschichtetes Holz in „Raummetern“ gemessen.

Folgende Normalabmessungen sind in Deutschland für Bauhölzer und Schnitthölzer vereinbart:

Bauhölzer.												
8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	cm	breit
8	10	12	14	16	18	20	28	24	26	30	}	cm hoch
10	12	14	16	18	20	22	26	28				
	14	16	18	20	22	24	30					
			20	22	24	26						

Schnitthölzer (Bretter, Bohlen, Pfosten, Latten).

Längen: 3,5; 4; 4,5; 5; 5,5; 6; 7 und 8 m.

Stärken: 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 12 und 15 cm.

Besäumte Bretter in Breiten von Zentimeter zu Zentimeter steigend.

Im allgemeinen versteht man unter:

„Bohlen“ Schnitthölzer von 5 ÷ 10 cm Stärke,

„Bretter“ Schnitthölzer von 1,5 ÷ 4,5 cm Stärke,

„Latten“ Schnitthölzer von 2 ÷ 3 cm Stärke und 5 ÷ 7 cm Breite.

Holzpfaster, geeigneter Fußbodenbelag für Werkstättenräume. Verwendete Holzarten: Fichte, Kiefer, Buche, Pitch-pine, Tallowwood. Die 10 bis 15 cm starken Klötze werden, mit dem Hirnholz nach oben, in Teer auf einer abgeglichenen Betonschicht verlegt und am besten mit heißem Asphalt vergossen. Gegen Feuchtigkeit schützt die Pflasterklötze hier am besten eine Imprägnierung mit Teeröl.

Leitungsmasten werden meistens aus Fichten- oder Kiefernstangenholz hergestellt — 4 bis 10 m lang, dabei 10 bis 15 cm stark am dünneren Ende. Ihre Dauerhaftigkeit beträgt je nach Güte (möglichst kein Astloch und kein Langriß) und Schutzbehandlung des verwendeten Holzes bis zu 25 Jahren.

Im Maschinenbau findet Holz im besonderen Verwendung für:

Amboßklötze — Eiche, Weißbuche.

Gießereimodelle — Fichte, Kiefer, Erle, Rotbuche, Linde.

Hammersteile — Buche, Esche, Hickory.

Landwirtschaftliche und Müllereimaschinen — Eiche, Rotbuche, Fichte, Kiefer.

Radkämme — im Trocken: Esche, Weißbuche; im Nassen: Eiche, Rotbuche.

Riemenscheibenkränze, Walzen, Zapfenlager unter Wasser — Pockholz.

Endlich noch für Verpackungszwecke:

Kisten — Pappelholz.

Die Steine

sind für den eigentlichen Maschinenbau nur von untergeordneter Bedeutung. Sie finden hier hauptsächlich Verwendung zu Maschinenfundamenten, im Mauerwerk der Dampfkessel, Feuerungen und Schornsteine, als Schleif-, Abzieh- und Poliersteine, als elektrische Isoliermittel.

Natürliche Steine. Für ihre Anwendung im Maschinenbau ist vielfach ihre Härte ausschlaggebend. Nach dieser lassen sie sich folgendermaßen aneinanderreihen:

1. Talkstein, 2. Steinsalz, 3. Kalkspat, 4. Flußspat, 5. Apatit, 6. Feldspat, 7. Quarz, 8. Topas, 9. Korund, 10. Diamant.

Aus ihrer großen Zahl werden die folgenden häufiger verwendet:

Bimsstein — eine Lava — als Schleifmittel.

Diamant — kristallisierter Kohlenstoff — in der Form schwarzen Diamanten (Karbonen) in Werkzeuge, zur Bearbeitung sehr harter Stoffe eingesetzt, z. B. in Stichel, Bohrern, Sägen. In Pulverform für Schleif- und Sägezwecke.

Gips — schwefelsaurer Kalk — kristallisiert Marienglas genannt, daraus dünne durchsichtige Scheiben für Schaulöcher an Feuerungen. Gebrannter Gips für Formen.

Glimmer — ein Tonerdesilikat — in der Elektrotechnik als vorzügliches Isoliermittel.

Granit und ähnliche feste und harte Gesteine an den Befestigungsstellen von Fundamentankern.

Kalkstein — kohlenaurer Kalk — als Bruchstein in Fundamenten. Als Marmor für elektrische Schalttafeln u. ä.

Korund — kristallisierte Tonerde — ein vielangewandtes Schleifmittel.

Sandstein — Quarztrümmer in kieseliger Bindemasse — zu Schleifsteinen.

Schiefer (Tonschiefer) — ein durch Kohlenstoff grau bis schwarz gefärbtes Gestein, aus erhärtetem, tonigem Mineralschlamm bestehend — zu Kontaktplatten und Schalttafeln, vereinzelt auch zu Schleifsteinen und Abziehsteinen.

Quarzit — fast reiner Quarz — zu Mülsteinen und Läufersteinen für Kollergänge.

Künstliche Steine. Normalziegelformat: 25 × 12 × 6,5 cm, daraus Wände von:

$\frac{1}{2}$ -Stein-Stärke	=	12 cm
1	„	= 25 „
$1\frac{1}{2}$	„	= 38 „
2	„	= 51 „
$2\frac{1}{2}$	„	= 64 „ usw.

Für 1 cbm fertiges Mauerwerk werden gebraucht etwa 400 Steine und 0,3 cbm Mörtel. 1 qm flachverlegtes Ziegelpflaster erfordert 30, hochkantverlegtes 50 Steine. Auf 1 m Höhe rechnet man 13 Mauerwerksschichten.

Gebrannte Ziegel, aus gehörig aufbereitetem Ton von Hand oder durch Maschine geformt, darauf lufttrocken gemacht und in sog. Ringöfen gebrannt. Die Aufbereitung hat besonders dafür zu sorgen, daß Kalkstücke aus dem Ton entfernt werden, da sie beim späteren Nässen der Steine abgelöscht und dabei den Stein zersprengen würden. Das Brennen erfolgt für gewöhnliche Steine bei Temperaturen, bei denen die Sinterung der Ziegelmasse beginnt. Will man dagegen Klinker erzeugen, so wird bei höheren Temperaturen bis zur vollkommenen Verglasung gebrannt. Klinker sind hart und dicht, sie nehmen kein Wasser auf und sind in Zementmörtel zu vermauern. Sie eignen sich daher für Fundamente in feuchtem Baugrunde. — Verblender heißen Ziegel, die aus besonders sorgfältig aufbereitetem (meist geschlämmtem) Ton in ganzen, halben und Viertelsteinen hergestellt werden. Mit weißer Glasur versehen, werden sie mit Vorteil zur Verkleidung namentlich von Kesselmauerwerk benutzt, um die Wärmeausstrahlung zu vermindern. — Feuerfeste Steine sollen die folgenden Eigenschaften besitzen:

1. Schwer schmelzbar (Schmelzpunkt zwischen Segerkegel 26 und 30 — 1580 bis 1670° C — dann feuerfest; Schmelzpunkt zwischen Segerkegel 30 und 36 — 1670 bis 1790° C — dann hochfeuerfest genannt).

2. Volumenbeständig bei höheren Temperaturen. Weder Schwinden noch Aufquellen.

3. Widerstandsfähig gegen Temperaturwechsel.

4. Widerstandsfähig gegen die auflösende Wirkung von Asche und Schlacke. Neutrale besser basische Steine widerstehen den basischen und saure Steine den kieseläurereichen Schlacken.

Neutrale Steine: aus fettem, tonerreichem Ton.

Basische Steine: aus Bauxit, Korund, Dolomit, Magnesit oder aus Kohle (gemahlenem Koks).

Saure Steine: aus Quarzit und mageren kieseläurereichen Tonsorten.

Schamottesteine. Brennt man Rohton in Stücken bis zur vollendeten Sinterung, so nennt man ihn Schamotte. Durch Vermischung gemahlener Schamottes mit Rohton läßt sich eine bildsame Masse herstellen. Daraus geformte und nochmals scharf gebrannte Ziegel heißen Schamottesteine. Ihre Feuerbeständigkeit kann auf der dem Feuer zugekehrten Fläche erhöht werden durch einen etwa 1 cm starken Überzug aus Korundmasse (nach Goldschmidt¹⁾ hergestellter gemahlener Korund durch Mischung mit wenig Ton bildsam gemacht), den man scharf einbrennt.

Bauxitsteine werden aus eisenarmem Bauxit und fettem Ton geformt und stark gebrannt. Sie zeichnen sich durch Feuerfestigkeit und großen Widerstand gegen chemische Einflüsse aus.

Magnetsitsteine. Rohmagnesit, zunächst zu „Sintermagnesia“ gebrannt, wird vermahlen und mit Wasser und Dextrin oder mit Teer zu Steinen gepreßt und bei heller Weißglut gebrannt.

Dolomitsteine werden in ähnlicher Weise aus einem Gemisch von gebranntem Dolomit mit etwa 5 Teilen wasserfreiem Teer hergestellt.

Kohlensteine aus gemahlenem Koks mit Teer als Bindemittel gepreßt, werden unter Luftabschluß in Muffeln hart gebrannt. Dabei bewirken die Aschenbestandteile des Koks die Sinterung der Masse.

Silikat- oder Dinassteine. Geschlämmter und ausgeglühter Quarzitsand wird mit etwa 3% Kalkmilch angerührt und zu Steinen geformt. Nachdem diese lufttrocken, werden sie so scharf gebrannt, daß die erhaltenen Steine als hochfeuerfest gelten können. —

¹⁾ S. Thermitschweißverfahren, S. 535.

Im Handel werden die Steine nach folgenden Sorten unterschieden:

Kesselsorte: für feuerfestes Kesselmauerwerk, soweit es nicht der strahlenden Wärme des Feuers ausgesetzt ist, und für Schmiedefeuer.

Kalkofensorte: für Mauerwerk von Feuerungen.

Schweißofensorte: für Glas-, Zementöfen, sowie für verschiedene Zwecke der chemischen Industrie.

Kupolofensorte: für Feuerbrücken und für Feuerungen, in denen mit geringem Luftüberschuß gearbeitet wird.

Gußstahl- und Generatorsorte.

Poröse feuerfeste Steine werden namentlich für Wärmeisoliermauerwerk verwandt.

Außer dem deutschen Normalformat kommen bei feuerfesten Steinen noch das englische Format, $22,8 \times 11,4 \times 6$ cm und die Neunzöller $23,5 \times 11,7 \times 6,5$ cm vor. —

Formsteine. Die angeführten künstlichen Steine werden auch für verschiedene Zwecke in besonderer, wesentlich vom Normalformat abweichender Gestalt hergestellt, so z. B. für Gewölbe, für den Schaft runder Schornsteine u. ä. die Radialsteine.

Von weiteren Erzeugnissen aus gebranntem Stein sind noch zu nennen: Platten und Röhren. Für die Zwecke des Wärmeschutzes werden die ersteren vielfach aus gebranntem Kieselgur (Infusorenerde) hergestellt.

Nicht gebrannte Steine.

Kalksandsteine werden aus einem Gemisch von losem Quarzsand mit $5 \div 8\%$ gelöschtem Kalk unter starkem Druck geformt. Sie erhärten durch die Bildung von Kalkhydrosilikat, wenn sie $8 \div 10$ Stunden lang im „Härtekessel“ Wasserdampf von etwa 8 Atm. ausgesetzt werden. Dem gebrannten Ziegel gegenüber gelten sie als gleichwertig, nur geben sie langsamer als jener die aufgenommene Feuchtigkeit wieder ab. Für Ofen- und Kesselmauerwerk, sowie für Schornsteine wurden sie bisher nur vereinzelt angewandt.

Korksteine werden aus Korkstückchen mit verschiedenen Bindemitteln, am besten Teer, zusammengedrückt und eignen sich dann vorzüglich als Kälteschutzmittel. Aus Mischungen von Kork, Asbestfasern mit geeigneten Bindemitteln werden ferner auch Schalen, Platten und Formsteine für den Wärmeschutz hergestellt.

Der Mörtel.

Kalkmörtel — ein Gemisch aus gelöschtem Kalk und Sand — erhärtet durch Aufnahme von Kohlensäure aus der Luft. Er haftet am besten an gut durchnässten Steinen. Sowohl Frost als auch zu schnelle Wasserentziehung durch Erwärmung sind frischem Kalkmörtel schädlich.

Das Mischungsverhältnis (im Mittel: 1 R.-T. Kalk : 3 R.-T. Sand) richtet sich zunächst danach, ob ein fetter oder (durch Magnesiagehalt) magerer Kalk vorliegt. Letzterer gestattet nur einen geringeren Sandzusatz. Ferner wird man für Grundbaumauerwerk dem Mörtel im allgemeinen mehr Sand zumischen als für das über der Erde. Als Mörtelsand ist scharfkantiger Quarzsand, der etwa nur zu einem Drittel aus feinen Körnern besteht, am besten geeignet.

Fugen zwischen Eisen und Mauerwerk sind nicht mit Kalkmörtel zu verstreichen, da dieser das Eisen angreift.

Zementmörtel wird aus einem Gemisch eines Zementes mit Sand hergestellt. Am verbreitetsten ist die Anwendung des Portlandzementes. Dieser wird aus einer Mischung von kohlenurem Kalk und Ton durch Brennen bis zur Sinterung und nachfolgendes Mahlen künstlich erzeugt. Er gehört zu den „hydraulischen“ Mörtelstoffen. Darunter versteht man Stoffe, zu deren Erhärtung nur ihre Mischung mit Wasser notwendig ist, im Gegensatz zu den

Luftmörteln, die Kohlensäure binden müssen, um hart zu werden. Hydraulische Mörtel werden sich daher in erster Linie für Mauerwerk unter Wasser oder in feuchtem Erdreich eignen. Aber auch für anderes Mauerwerk sind die hydraulischen Mörtel ihrer schnelleren Erhärtung und höheren Festigkeit wegen sehr geschätzt. Letzteres namentlich seitdem man bestrebt ist, stets Mörtel zu verwenden, der möglichst die gleiche Festigkeit wie die vermauerten Steine besitzt.

Der Begriff „Portlandzement“ ist gegenüber anderen, teils natürlichen, teils künstlichen, hydraulischen Bindemitteln genau festgelegt, ferner sind seine Eigenschaften und die Ermittlung seiner Güte vorgeschrieben worden durch die „Deutsche Normen für einheitliche Lieferung und Prüfung von Portlandzement“¹⁾ (Dezember 1909).

Das Mischungsverhältnis von Portlandzement mit Sand schwankt zwischen 1 : 1 und 1 : 4, je nach dem Verwendungszweck des Mörtels zu mehr oder weniger belasteten oder durch Wasserspülung gefährdeten Bauten.

Verlängerter Zementmörtel ist Kalkmörtel, dem Portlandzement zugesetzt wurde. Solche Mischungen werden zweckmäßig hergestellt in folgenden Verhältnissen:

1 Zement $\frac{1}{2}$ ÷ 2 Kalk 5 ÷ 10 Sand 1,3 ÷ 1,7 Wasser.

Sie sind hydraulisch; besitzen aber geringere Festigkeit als reiner Zementmörtel.

Feuerfester Mörtel zur Aufmauerung feuerfesten Mauerwerks wird entweder als Schamotte- oder als Zementmörtel hergestellt. Die Fugen sind dabei, am besten durch vorheriges Aufeinanderschleifen der einzelnen Steine, möglichst dünn auszuführen. — Schamottemörtel: Schamottemehl wird mit so viel feuerfestem Ton (Rohkaolin) wässrig angerührt, daß ein steifer Mörtelbrei entsteht. — Feuerfester Zementmörtel aus einem hochfeuerfesten (Krater-) Zement, eignet sich wegen seines hohen Gehaltes an Kieselsäure mit Vorteil zur Vermauerung saurer feuerfester Steine.

Lehmmörtel, magerer Lehm naß angerührt, trocknet zu einem wenig festen und nur leicht an den Steinen haftenden Bindemittel ein. Er eignet sich daher für Mauerwerk, mit dem man Öffnungen zeitweilig verschließen will.

Grobmörtel oder Beton

nennt man eine Masse, die aus allerlei Steinstückchen oder grobem Kies besteht, denen ein Mörtel, meistens aus Portlandzement, als Bindemittel dient. Als Zuschläge kommen hauptsächlich Quarzkies, Steinschlag, Ziegelbrocken und Schlacke zur Verwendung. ¶ Die Güte des Betons hängt wesentlich von der Festigkeit dieser Zuschläge und seinem Zementgehalt ab, ferner davon, ob die Mischung möglichst innig, am besten in der Mischmaschine, erfolgte und ob der Beton geschüttet (für Bauten unter Wasser) oder aufgestampft wurde. Diese letztere Aufbringungsart, bei welcher die Betonmasse erdfeucht verarbeitet wird, liefert Beton von höchster Festigkeit und Dichtigkeit, besonders wenn der Wasserzusatz richtig gewählt wurde — etwa 14 bis 17% der Raumteile Zement und Sand. Danach hängt die Güte des erzeugten Betonmauerwerks wesentlich von der Sorgfalt ab, mit der die Ausführung erfolgte. Daher sind für diese und für die Gütermittelung von Beton vom Deutschen Ausschuß für Eisenbeton Grundsätze²⁾ aufgestellt worden, die in Preußen auch behördlich als maßgebend für Staatsbauten anerkannt wurden.

Die Mischungsverhältnisse für Beton halten sich in den Grenzen: 1 Zement : 2 ÷ 5 Sand : 4 ÷ 10 Steinschlag.

Für Maschinenfundamente aus Beton können folgende Mittelwerte in Rechnung gestellt werden:

¹⁾ Erschienen bei Ernst & Sohn, Berlin.

²⁾ „Allgemeine Bestimmungen für die Vorbereitung, Ausführung und Prüfung von Bauten aus Stampfbeton.“ Berlin 1908. W. Ernst & Sohn.

Art des Zuschlags	Raumgewicht des Betons in kg/cbm
Kies	2200
Schotter	
Ziegelbrocken	1800
Schlacken	1100
Bimssteinkies	

Der Eisenbeton

besteht aus Zementmörtel (1 : 3¹) bis 1 : 4), oft mit etwa 1 R.-T. kleinstückigem Steinschlag, in welchem dem Verwendungszweck entsprechend geformte Eisenstücke (Rundeisen, Profileisen, Drahtgewebe, Streckmetall u. a. m.) eingelegt werden. Die Betonmasse wird dazu meistens „plastisch“ hergerichtet, d. h. mit so viel Wasser (etwa 8 ÷ 14 R.-T.) gemischt, daß sie zwischen die Eiseneinlagen durch Gießen eingebracht werden kann. Sorgfältiges Einstampfen erhöht hier ebenfalls die Güte des Betons. Die erhebliche Adhäsion zwischen Zement und Eiseneinlage und das nahezu gleiche Wärmeausdehnungsvermögen beider ermöglichen ein vorzügliches, sich ergänzendes Zusammenwirken von Eisen (für die Zugspannungen) und Zement (für die Druckspannungen). Eisenbeton findet daher für alle möglichen Bauzwecke, besonders auch für industrielle Bauten, vielfache Anwendung, zumal da er die Vorteile des Eisenbaues besitzt und dabei seine Nachteile: Rostgefahr und geringe Feuersicherheit, wesentlich vermindert. Für die Festigkeitsberechnung sei auf die „Preußischen Bestimmungen für die Ausführung von Konstruktionen aus Eisenbeton bei Hochbauten“, Erlaß des Arbeitsministers vom 24. 5. 1907, hingewiesen, ferner auf die einschlägigen Erlasse vom 18. 9. und 21. 12. 1909 und die vom Verbands Deutscher Architekten und Ingenieur-Vereine und dem Deutschen Beton-Verein aufgestellten Leitsätze für die Vorbereitung, Ausführung und Prüfung von Eisenbetonbauten²).

Das Raumgewicht des Eisenbetons schwankt zwischen 2300 und 2500 kg/cbm.

Hilfsstoffe des Maschinenbaus.

Der Asbest, durch Verwitterung silikatreicher Gesteine entstanden, besteht aus seidenglänzenden, biegsamen, unverbrennlichen und gegen Chemikalien sehr widerstandsfähigen Fasern. Namentlich dieser letzten beiden Eigenschaften wegen ist seine technische Verwendung eine mannigfaltige. Unter anderem stellt man aus Asbest her: Dichtungsstoffe (Schnur, Pappe, Dichtungsringe u. ä.), zu denen er zum Teil in Verbindung mit Gespinsten aus haltbarer Faser, mit Gummi und auch mit verschiedenen Metalleinlagen verarbeitet wird. — Wärmeschutzstoffe (Platten und Rohrumhüllungen), schieferähnliche Wandbekleidungs- und Fußbodenbelegstoffe (Gemische aus Asbestfaser und Portlandzement, Gips u. ä.). Gespinste.

Kautschuk, Guttapercha, Balata werden aus dem milchigen Pflanzensaft verschiedener tropischer Gewächse durch Eindickung des an der Luft geronnenen Saftes gewonnen. Ihre vielfache technische Verwendung verdanken sie vor allem dem Umstande, daß sie sich zu Stoffen von hoher Elastizität verarbeiten lassen. Dazu kommen ihre große Beständigkeit gegenüber chemischen Einflüssen und ihr vorzügliches Isolationsvermögen für Elektrizität.

Nachteilig ist dagegen ihre geringe Wärmebeständigkeit; doch ist es gelungen, sie in für viele Zwecke geeignete Formen zu bringen, die diesen Mangel nicht mehr zeigen. Der wichtigste der 3 genannten Stoffe ist:

der Kautschuk. Von den Vorgängen bei seiner Verarbeitung sind folgende hervorzuheben:

¹) Sand + Kies.
²) Siehe Beton-Kalender.

1. Das Waschen des Rohkautschuks zur Entfernung mechanischer Verunreinigungen und wasserlöslicher Stoffe.

2. Das Vulkanisieren. Darunter ist seine Behandlung mit Schwefel oder Schwefelverbindungen zu verstehen, um ihn wärmebeständiger zu machen. Durch Veränderung des Schwefelzusatzes und der Erwärmung kann man dabei Weichgummi und Hartgummi erzeugen. Ersterer ist zwischen -20° und $80 \div 100^{\circ}$ unverändert elastisch. Er eignet sich, namentlich mit Gewebeeinlagen, zu Dichtungen, Ventilkappen, Schläuchen, Riemen, Membranen, wasserdichten Stoffen (Ballonhüllen), Automobilbereifungen, Bufferscheiben u. a. m. Der Hartgummi besitzt dagegen bei gewöhnlichen Temperaturen große Festigkeit und Härte und läßt sich etwa wie Elfenbein bearbeiten. Er findet hauptsächlich in der Elektrotechnik für die mannigfachsten Isolationszwecke Verwendung, ferner werden auch für die chemische Industrie allerlei Gefäße, Rohrleitungen u. ä. daraus verfertigt.

3. Das Mischen mit Zusatzstoffen geschieht oft gleichzeitig mit der Beimischung des Schwefels zur Vulkanisation und bezweckt, den Gummi entweder für bestimmte Zwecke besonders geeignet zu machen oder ihn z. B. durch Zusatz von Altgummi oder von Stoffen ähnlicher chemischer Natur zu verbilligen.

Die Guttapercha unterscheidet sich vom Kautschuk, mit dem sie ihrem chemischen Aufbau nach eng verwandt ist, vor allem durch ihre geringere Elastizität und Festigkeit und ihre geringe Beständigkeit an der Luft. Durch mechanische und chemische Reinigung kann man daraus einen lederartigen Stoff erzeugen, der sich namentlich unter Wasser gut hält. Er läßt sich bei Temperaturen um 50° herum beliebig formen, z. B. zu dünnen Häuten auswalzen. Diese eignen sich vorzüglich zur Isolation von Unterwasserkabeln. Durch Zusatz von paraffinartigen Stoffen kann die Geschmeidigkeit der Guttaperchahäute wesentlich erhöht werden. Andererseits stellt man aus Guttapercha härtere Stoffe her, die wegen ihrer Beständigkeit gegen Chemikalien, z. B. gegen Flußsäure, zur Herstellung von Gefäßen, Röhren u. ä. für die chemische Industrie gebraucht werden.

Die Balata hat gegenüber der Guttapercha den Vorteil größerer Luftbeständigkeit. Auch besitzt sie derartige Festigkeitseigenschaften, daß sie mit Vorteil als Ersatz für Leder zu Treibriemen benutzt werden kann.

Kitte

finden im Maschinenbau **1.** zum Ausfüllen von Fugen, Löchern, Poren, ferner **2.** als Dichtungsmittel und **3.** vereinzelt auch zur Befestigung verschiedener Stücke aneinander Verwendung.

Zu 1. Legierungen, die sich beim Erkalten ausdehnen und sich daher zum Flicken von Gußteilen eignen:

9 Pb, 2 Sb, 1 Bi oder 8 Pb, 3 Sb, 1 Bi.

Für denselben Zweck: Innige, durch Schmelzen herzustellende Mischung aus: 1 Talg, 2 Harz, 8 Wachs, 24 Gußeisenfeilspäne. Die auszukittenden Stellen sind durch Auflegen glühenden Eisens anzuwärmen, darauf der abgekühlte, aber noch flüssige Kitt aufzutragen.

Für poröse Gußeisenstücke: Kochend herzustellen: 100 Wasser, 15 Salmiak, 15 Schwefelblüte, 2 Roggenmehl. Der Kitt ist nach dem Erkalten aufzutragen, darauf das Stück unter Wasser zu bringen, so daß der Kitt durch Wasserdruck in die Poren eingedrückt wird. Erhärtungszeit etwa 24 Stunden.

Feuerfester Eisenkitt: 4 Eisenfeilspäne, 2 Ton, 1 Schamottmehl mit Kochsalzlösung teigig angerührt.

Wärmebeständiger Ofenkitt: 1 Holzasche, 1 Lehm in Salzlösung.

Steinkitte: Kalk oder Zementmörtel dem Kasein zugesetzt wird. Asphalt mit Sand heiß gemischt und warm eingegossen.

Holzkitte: Glaserkitt aus Leinölfirnis, Schlemmkreide und Bleiweiß angerieben. Magnesiumzement, dazu wird Magnesiumhydroxyd mit konzentrierter Magnesiumchloridlösung vermischt und der Mischung Holzmehl zugesetzt.

Zu 2. Für Gas und Dampf:

Mennigekitt: 2 Mennige, 5 Bleiweiß mit Leinölfirnis angerieben. Als Ersatz dafür giftfreie fertig zu beziehende wie Mastixkitt, Veronit, Manganesit, Manganol u. a. m.

Rostkitt für Muffenrohre: 1 Schwefelblumen, 2 Salmiak, 10 Eisenfeilspäne mit Essig angerührt.

Für Wasser und Säuren:

Glyzerinkitt: trockene, geschlämmte Bleiglätte mit Glycerin angerieben. Asphalt für Muffenrohre.

Harzkitt: 1 Kolophonium in 1 Firnis warm gelöst, dazu 8 hydraulischer Kalk und etwa 3 Bleiweiß.

Zu 3. Eisen auf Eisen: Auf die mit konzentrierter Schwefelsäure bestrichenen Eisenflächen bringt man ein Gemisch von 3 Schwefel, 3 Bleiweiß und 1 Borax auf und preßt fest zusammen. Die Erhärtung dauert mehrere Tage.

Eisen in Stein: 4 Zement, 4 Ziegelmehl, 1 Eisenfeilspäne wässrig angerührt oder die unter 1. genannten Bleilegierungen.

Holz oder Glas auf Eisen: In geschmolzenem Schellack etwa die gleiche Gewichtsmenge Schlemmkreide verrührt und warm aufgetragen.

Metalle auf Glas: 2 Wachs, 1 Pech, 4 Harz, geschmolzen mit 1 Ziegelmehl, angerührt und warm verstrichen.

Glas in Metallhülsen: Warmer Brei aus Siegellack und Terpentin oder Schmelze aus 8 Kolophonium, 2 Wachs, 4 Englischrot mit 1 Terpentin verrührt.

Schleifmittel

sollen dazu dienen, von dem zu bearbeitenden Gegenstände sehr feine Späne abzutrennen. Ihre wichtigste Eigenschaft wird somit die Härte sein. Von den unter den höheren Graden der Härteskala (S. 557) aufgeführten Stoffen kommen für den Maschinenbau fast nur zwei in Betracht. Es sind dies Quarz, SiO_2 (Härte 7) und Korund (Härte 9). Diese bilden auch den Ursprung sämtlicher künstlicher Schleifmittel, so daß man allgemein unterscheiden kann:

1. Kieselsäurehaltige Schleifmittel:

natürliche: Quarzit, Feuerstein, Quarzsandstein, Quarzsand;

künstliche: Siliziumkarbid oder Karborund, SiC , ein elektrothermisch aus Quarzsand und Koks gewonnener Stoff von großer Härte (etwa 9,5). Glas, das meistens in Pulverform angewandt wird.

2. Tonerdehaltige Schleifmittel:

natürliche: Korund mit etwa 95% Al_2O_3 , Schmirgel mit 60% Al_2O_3 und Tonschiefer;

künstliche: Korubin, Diamantin, Alundum, Elektrit, das sind entweder nach Goldschmidt (S. 535) oder meistens im elektrischen Schmelzofen hergestellte Korundmassen mit mehr oder minder hohem Gehalt an Al_2O_3 .

Die genannten Stoffe werden nun entweder in größeren Stücken als Feilen, Bohrer, Handsteine und Schleifräder oder in Pulverform gebraucht. Sollen im ersteren Falle künstlich erzeugte Schleifmittel Verwendung finden, so sind dieselben, da sie nicht unmittelbar in den gewünschten Formen hergestellt werden können, zunächst zu zerkleinern, danach ist das Mahlgut mit einem Bindemittel, erforderlichenfalls unter hohem Druck, zu formen. Je nach der Art des Bindemittels unterscheidet man:

Mineralische Bindung.

a) Erhärtung erfolgt auf kaltem Wege — Bindemittel zementartig.

b) Erhärtung erfolgt durch Brennen — Bindemittel feuerfester Ton. Dies nennt man „keramische“ Bindung.

Vegetabilische Bindung — Bindemittel harzartig, Erhärtung erfolgt durch Erkalten.

Vielfach bevorzugt wird die keramische Bindung. Sie liefert etwas poröse, sehr feste, aber spröde Steine. Poröses Gefüge ist für die Schleifwirkung günstig. Die hohe Festigkeit gestattet es, solche Schleifscheiben mit hoher Umfangsgeschwindigkeit¹⁾ laufen zu lassen. Auf die Sprödigkeit aber kann man leicht Rücksicht nehmen, indem man die Scheiben zur Befestigung auf der Welle seitlich zwischen nachgiebigen Platten (Gummi, Blei, Leder, Pappe) einspannt.

In Pulverform werden die Schleifmittel so benutzt, daß man sie entweder auf Leinen oder Papier aufklebt oder sie auf Schleifscheiben — aus Holz mit Überzügen aus Leder — aufstreut. Außerdem ist hier die Verwendung von Sand im Dampfstrahlgebläse zu nennen.

Härte und Körnung des Schleifmittels sind nach dem zu bearbeitenden Stoff und der gewünschten Schliffeinheit zu wählen. Dabei ist zu berücksichtigen, ob naß oder trocken, ob von Hand oder mit Maschine, ferner bei welcher Umfangsgeschwindigkeit geschliffen werden soll.

Poliermittel.

Das Polieren, d. h. das Glätten einer Fläche zur Beseitigung von Einritzungen kann entweder durch Niederdrücken der Unebenheiten oder durch Abschleifen derselben erfolgen.

Zum Druckpolieren dienen Werkzeuge aus hartem Stahl — verschieden geformte Handstähle, Ahlen, Hämmer in Verbindung mit Polierstöcken, umlaufenden Scheiben und Walzen — ferner passend geformte Stücke verschiedener harter Quarzgesteine — Achat, Feuerstein, Jaspis. Die Druckflächen dieser Werkzeuge müssen selbst völlig rißfrei sein.

Zum Schleifpolieren hingegen werden Werkzeuge nur als Träger für die Stoffe gebraucht, welche durch milde Schleifwirkung die Politur erzeugen sollen, als da sind:

Schmirgel in feinsten Mahlung.

Eisenoxyd unter den Namen: Englischrot, Polierrot, Caput mortuum, Crokus martius, Colkothar.

Pariserrot, d. i. geschlammte rote Bleimennige.

Aluminiumoxyd, in reinster Form aus Alaun hergestellt.

Chromoxyd.

Wiener Kalk, der ungelöscht, daher gut verschlossen aufzubewahren und nicht mit Wasser zu verwenden ist.

Knochenasche, hauptsächlich aus Kalziumorthophosphat bestehend, hergestellt durch Verbrennen tierischer Knochen.

Tripel, auch Polierschiefer oder Terra tripolitana genannt, eine weiß, grau, gelb und rot vorkommende Kieselgurart.

Zinnasche, weißes Zinndioxyd.

Die beiden letzten dienen in der Hauptsache zum Polieren von Steinen.

Alle diese Stoffe kommen nur in äußerst feiner Verteilung zur Anwendung, und zwar entweder angerührt mit Wasser, Alkohol, säurefreiem Mineralöl, Stearinöl, Glycerin oder aber in Form fertiger Pasten. Wasser ist nicht zu benutzen, wenn leicht oxydierende Metalle bearbeitet werden sollen.

Die Art, wie man diese Mittel auf das Arbeitsstück einwirken läßt, ist eine mannigfaltige und richtet sich vor allem nach der Form desselben. Dies erhellt aus folgender Zusammenstellung. Es werden poliert:

1. Kleinere Stücke, Massenerzeugnisse, in Poliertrommeln unter Zusatz von Lederspänen.

2. Stücke von der Form eines Drehkörpers, auf der Drehbank mittels Leder, Filz, weicher, mit diesen Stoffen überzogener Hölzer oder mittels Polierkluppen.

¹⁾ Erlaß des Handelsministers vom 8. X. 1909.

3. Stücke mit ebenen Flächen, an umlaufenden Polierschleifen, d. s. Leder- oder Baumwollenriemen oder an Polierscheiben. Von diesen sind im Gebrauch: Hölzerne Scheiben mit Leder- und mit Tuchbezug, ferner solche aus Gußeisen, Filz, Kork, Papier, Tuch (die letzteren Schwabbelscheiben genannt), endlich Scheiben, die am Umfang mit einem Kranz weicher Borsten versehen sind. (Bürstenscheiben.)

4. Stücke mit Hohlräumen, an umlaufenden Polierkegeln aus Filz.

Außerdem hat man für besondere Zwecke Poliermaschinen verschiedener Bauart.

Für metallographische Zwecke werden in Einzelfällen Schlitze mit „Reliefpolitur“ hergestellt. Bei dieser sollen die härteren Gefügeteile aus der Schlifffläche hervortreten. Man bedient sich dazu einer Scheibe mit ganz weicher Pergament- oder Gummiauflage. Wird auf dieser das Schleifmittel nicht mit Wasser sondern mit einer ätzenden Flüssigkeit angerührt, aufgebracht, so spricht man von „Ätzpolieren“. Flüssigkeiten, die dazu benutzt werden, sind z. B. Süßholzwasser und 2proz. Ammoniumnitratlösung.

Die Vollkommenheit der Politur wird gewöhnlich nach folgenden Stufen unterschieden:

Mattpolitur — mit Öl und feinstem Schmirgel auf der Lederscheibe.

Glanzpolitur — mit Öl und Kalk oder Wasser und Polierrot o. a. auf der Leder- oder Grobfilzscheibe, in Sonderfällen auch auf gußeisernen Scheiben.

Hochglanzpolitur — mit Wasser oder Alkohol und Polierrot o. a. auf der Sammetfilz-, Bürsten- oder Schwabbelscheibe.

Die Schmiermittel.

Zweck der Schmierung. Die Reibung zwischen zwei aufeinander gleitenden Körpern und damit der zur Überwindung der Reibung nötige Kraftaufwand soll auf ein möglichst geringes Maß beschränkt werden. Ferner gilt es, Erwärmung der Gleitflächen und Abnutzung derselben zu verhindern.

Die Eignung eines Stoffes als Schmiermittel hängt davon ab, ob er eine möglichst kleine innere Reibung besitzt, also möglichst wenig Arbeit zur Bewegung seiner Teilchen gegeneinander erfordert und dabei zwischen den Gleitflächen eine auch gegen Druck und Wärme beständige Flüssigkeitsschicht bilden kann.

Des näheren werden folgende Eigenschaften den Wert eines Schmiermittels bestimmen:

1. Das Anhaftvermögen an Metallflächen.

2. Die Zähflüssigkeit oder Viskosität. Sie gibt ein Maß für die innere Reibung und für die Beständigkeit der schmierenden Schicht. Leichtflüssige Schmiermittel eignen sich für gering belastete Flächen, die sich mit hoher Geschwindigkeit gegeneinander bewegen, zähflüssige für hohe Belastungen und kleine Geschwindigkeiten.

3. Die Wärmebeständigkeit. Die Viskosität soll sich in möglichst weiten Temperaturgrenzen wenig verändern. Ferner sind erwünscht: Geringe Neigung zum Verdunsten und Eintrocknen, hohe Verdampfungs- und tiefe Erstarrungstemperatur.

4. Die Entzündlichkeit. An diese sind bestimmte Anforderungen aus Rücksicht auf die Verwendbarkeit der Schmiermittel bei hohen Temperaturen und auf ihre gefahrlose Lagerung zu stellen.

5. Die Reinheit von festen und flüssigen Fremdstoffen. Von letzteren sind besonders Säuren, Harze und Wasser schädlich, da schon ein geringer Säuregehalt die Gleitflächen angreift, Harz das Eintrocknen zu klebriger Masse begünstigt und Wasser das Saugvermögen von Schmierdochten wesentlich beeinträchtigt.

Prüfung der Schmiermittel. Zur Beurteilung eines Schmiermittels sind vor allem die folgenden Feststellungen notwendig:

a) Für Flüssigkeiten:

1. Die Menge der festen Fremdstoffe — Filtrieren durch feinmaschige Siebe.
2. Grad der Zähflüssigkeit (bei verschiedenen Temperaturen) wird fast allgemein im Englerschen Viskosimeter bestimmt. Dabei vergleicht man die Zeit, die Wasser von $+ 20^{\circ} \text{C}$ zum Ausfließen aus einem Gefäß von bestimmter Form gebraucht, mit der, in welcher das zu untersuchende Öl bei gleichen Bedingungen (mit Ausnahme der Temperatur) ausfließt. Man erhält so den „Englergrad“.
3. Der Flammpunkt (vgl. S. 499). Zu seiner Bestimmung sind am meisten im Gebrauch: der Pensky-Martenssche (Erwärmung im gedeckten Gefäß) und der Marcussonsche Apparat (mit offenem Gefäß). Der erstgenannte gibt immer niedrigere Werte für den Entflammungspunkt, da bei ihm den entstehenden brennbaren Dämpfen ein Entweichen, wie beim offenen Tiegel, nicht möglich ist.
4. Die Erstarrungsgrenze oder der Stockpunkt. Er wird gefunden durch länger andauernde Abkühlung des Öles bei völliger Ruhe bis zu der Temperatur, bei welcher es salbenartig erstarrt¹⁾. Meistens genügt es festzustellen, ob ein Öl bei der im Betriebe zu erwartenden niedrigsten Temperatur nicht stockt.
5. Chemische Prüfung. Sie wird sehr verschieden weit ausgedehnt und hat sich namentlich bei besonderen Verwendungszwecken des Öles auf bestimmte Einzelheiten zu erstrecken.

b) Für feste Stoffe:

1. Chemische Zusammensetzung.
2. Tropfpunkt (nach dem Verfahren von Ubbelohde).
3. Konsistenzmessung (nach Kießling).

Außerdem prüft man die Schmiermittel in der Praxis auch auf besonderen Prüfmaschinen, in denen man dieselben möglichst unter den gleichen Verhältnissen, namentlich in bezug auf Lagerdruck und Umlaufgeschwindigkeit, auszuwählen sucht, unter welchen sie verwendet werden sollen.

Arten der Schmiermittel.

1. Flüssige und feste Fette pflanzlicher (fette Öle) und tierischer (Trane) Herkunft.

Pflanzenöle werden aus den Samen verschiedener Pflanzen gewonnen. Sie zersetzen sich leicht, namentlich unter dem Einfluß hoher Temperaturen, unter Abspaltung freier Fettsäure, zeichnen sich aber durch ein vorzügliches Haftvermögen an metallischen Flächen aus. Für die Schmierung sind nur diejenigen unter ihnen geeignet, die geringe Neigung (namentlich unter dem Einfluß von Staub) zum Eintrocknen besitzen: Es sind dies: Rüb-, Baumwoll- (Kottonöl), Oliven-, Rizinus-, Senf-, Erdnußöl u. a. m., ferner die bei gewöhnlichen Temperaturen butterartig festen: das Palm- und das Kokosöl. Aus den zuerst genannten, dem Rüböl und dem Baumwollöl, stellt man durch Einblasen von Luft bei $70 \div 120^{\circ}$ oxydierte oder geblasene Öle her, die sich durch größere Viskosität auszeichnen und in Mineralölen löslich, also mit diesen gut mischbar sind.

Tierische Öle und Fette werden aus den Hufen, Knochen, dem Talg und Speck von Tieren gewonnen. So gewinnt man flüssige Schmiermittel, die sich fast durchgehend durch große Beständigkeit an der Luft auszeichnen, ganz besonders gilt dies von einer Sorte von Fischtran, dem Spermazetiöl. Auch die festen tierischen Fette finden als Schmiermittel vielfache Verwendung.

2. Die eigentlichen Öle sind mineralischen, zum geringen Teil auch pflanzlichen Ursprungs.

¹⁾ Näheres siehe Holde, Untersuchung der Kohlenwasserstofföle usw. 4. Aufl. Berlin 1913. Julius Springer.

Mineralöle haben vor allem infolge ihrer Billigkeit die tierischen und pflanzlichen Fette verdrängt. Dies konnten sie um so eher, da sie außerdem die folgenden Vorzüge besitzen: Sie sind widerstandsfähig gegen den Einfluß der Luft, trocknen nicht ein und zersetzen sich nicht, greifen daher Metallflächen nicht an. Sie können in den verschiedensten Zähflüssigkeitsgraden hergestellt werden.

Ihre Gewinnung erfolgt aus den Rückständen der Erdöldestillation bis auf unbedeutende Mengen, die aus Destillaten des Schieferöles erzeugt werden.

Durch geeignete Mischung mit pflanzlichen Ölen läßt sich ihre Verwendbarkeit bei hohen Temperaturen steigern.

Als Mineralfette bezeichnet man feste Schmierstoffe, die entweder durch Mischung von Erdwachs (Zeresin) oder von Seifen mit dicken Mineralölen oder aus natürlichem Vaseline hergestellt werden. Dieses wird aus verschiedenen Erdölsorten durch Abtreiben der leichteren Öle als salbenartiger Rückstand gewonnen.

Die Harzöle werden aus dem Harz verschiedener Nadelhölzer dargestellt. Sie dicken leicht zu einer klebrigen Masse ein, können aber so weit raffiniert werden, daß man sie wegen ihrer isolierenden Eigenschaften als Transformatorenöl, zum Verschneiden von Schmierölen und zur Erzeugung wasserlöslicher Öle gebrauchen kann.

3. Wasserlösliche oder emulgierbare Öle sind Mineralöle, die durch Behandlung mit geeigneten Seifen unter Zusatz von Ammoniak, Benzin oder Alkohol so verändert sind, daß sie entweder mit Wasser klare Lösungen oder haltbare Emulsionen ergeben. So liefern sie vor allem billige Schmiermittel, die sich zum Kühlen von Bohrern, Fräsern u. ä. eignen.

4. Mineralien. Einige wenige von ihnen besitzen die Eigenschaft, Unebenheiten von Metallflächen auszugleichen und sie dadurch zu glätten, wenn sie, äußerst fein verteilt, auf diese verrieben werden. In hervorragendem Maße gilt dies für Graphit, der deswegen in der Form von Flockengraphit, vor allem in Verbindung mit Öl, zu Schmierungszwecken Anwendung findet. Dabei ist aber darauf zu achten, daß er völlig frei von Verunreinigungen ist.

5. Sonstige Schmiermittel. Für besondere Fälle, bei denen entweder die Schmierung unter außergewöhnlich hohen Temperaturen oder unter dem Einfluß von Chemikalien vor sich gehen muß, sind die oben genannten Stoffe als Schmiermittel nicht verwendbar. An ihre Stelle treten z. B. Glycerin (bei der Erzeugung flüssigen Sauerstoffs), Schwefelsäure (bei Chlorkompression) u. a. m.

Verwendbarkeit der Schmieröle.

1. Eismaschinen- Kompressor-, Separatorenöle, dünnflüssig $f_e \approx 5$, e_p unterhalb -20°C , $f_p = 140 \div 180^\circ \text{C}$.

2. Spindelöle für Spinnereimaschinen, leicht flüssig, nur für geringe Lagerdrucke geeignet. $f_e = 5$ bis 12 ; $f_p = 160$ bis 200°C .

3. Öle für leichtbelastete Maschinenteile, Transmissions-, Turbinen- und Dynamoöle, mäßig zähflüssig. $f_e = 10$ bis 25 ; $f_p = 170$ bis 220°C . Gas-motorenöle: $f_p = 195$ bis 220°C .

4. Öle für schwerbelastete Maschinenteile, insbesondere Transmissionen, zähflüssig. $f_e = 25$ bis 45 , vereinzelt bis 60 ; $f_p = 185$ bis 220°C .

5. Dunkle Wagenachsen- und Lokomotivöle, zähflüssig. $f_e = 45$ bis 60 für Sommeröl und $f_e = 25$ bis 45 für Winteröl. $e_p = -5^\circ \text{C}$ (S.-Ö.), $e_p = -20^\circ \text{C}$ (W.-Ö.); t_p (im offenen Tiegel) $\geq 160^\circ \text{C}$ (S.-Ö.); $f_p \geq 145^\circ \text{C}$ (W.-Ö.) — nach Bedingungen der preußischen Staatsbahnen.

6. Dunkle Dampfzylinderöle, dickflüssig. fe (bei 50°) = 23 bis 45 und bei 100° = 4 bis 10; fp = 260 bis 320° C; für Heißdampf: $fp > 280^\circ$ C.

Hierin bedeutet:

fe die Englerzahl, ermittelt bei 20° C.

fp den Flammpunkt im Pensky-Martens-Apparat.

ep den Erstarrungspunkt.

Für die Lieferung von Schmiermitteln sind von den Staatsbahnverwaltungen, von Militär- und Marinebehörden besondere Bedingungen erlassen worden, die zum Teil auch für die Privatindustrie allgemeine Bedeutung erlangt haben

Taschenbuch für den Maschinenbau

Bearbeitet von

Ing. H. Dubbel-Berlin, Dr. G. Glage-Berlin, Dipl.-Ing. W. Gruhl-Berlin, Dipl.-Ing. R. Hänchen-Berlin, Ing. O. Heinrich-Berlin, Dipl.-Ing. M. Krause-Berlin, Ing. E. Toussaint-Berlin, Dipl.-Ing. H. Winkel-Berlin, Dr.-Ing. K. Wolters-Berlin

Herausgegeben von

Ing. H. Dubbel
Berlin

Mit 2448 Textfiguren und 4 Tafeln

In zwei Teilen
II. Teil (S. 569—1482)



Berlin
Verlag von Julius Springer
1914

II. Teil.

Inhaltsverzeichnis.

Maschinenteile.	Seite
Bearbeitet von Dr.-Ing. K. Wolters	569
Die Dampferzeugungsanlagen.	
Bearbeitet von Ing. O. Heinrich	763
Die Kraft- und Arbeitsmaschinen mit Kolbenbewegung.	
Bearbeitet von H. Dubbel	859
Die rotierenden Kraft- und Arbeitsmaschinen.	
Bearbeitet von H. Dubbel	951
Pumpen und Kompressoren verschiedener Bauart.	
Bearbeitet von H. Dubbel	1010
Abwärmeverwertung.	
Bearbeitet von H. Dubbel	1012
Schwungräder und Regulatoren.	
Bearbeitet von H. Dubbel	1021
Die Kondensation.	
Bearbeitet von H. Dubbel	1035
Rohrleitungen.	
Bearbeitet von H. Dubbel	1051
Hebemaschinen.	
Bearbeitet von Dipl.-Ing. R. Hänchen	1059
Werkzeugmaschinen für spanabhebende Metallbearbeitung.	
Bearbeitet von Ing. E. Toussaint	1227
Elektrotechnik.	
Bearbeitet von Dipl.-Ing. W. Gruhl	1371
Sachverzeichnis	1470

(Das ausführliche Inhaltsverzeichnis befindet sich in Teil I, S. V—XI.)

Maschinenteile.

Bearbeitet von Dr.-Ing. K. Wolters.

Bezeichnungen.

Es bezeichne:

- $\pi = 3,14$ die Ludolphsche Zahl,
- γ kg/dcm³ das spezif. Gewicht,
- σ kg/qcm die wirkliche Längsspannung allgemein,
- σ_z „ „ „ „ Zugspannung,
- σ_b „ „ „ „ Biegungsspannung,
- h „ „ „ den zulässigen Flächendruck,
- h_z „ „ die zulässige Zugbeanspruchung,
- h_b „ „ „ Biegungsbeanspruchung,
- h_s „ „ „ Schubbeanspruchung,
- h_r „ „ „ resultierende Beanspruchung aus mehreren,
- K_z „ „ „ Zerreißfestigkeit,
- E „ „ den Elastizitätsmodul,
- G „ „ = $0,4 \cdot E$ den Gleitmodul,
- M_b cmkg ein Biegemoment,
- M_d „ „ „ Drehmoment,
- W cm³ ein achsiales Widerstandsmoment,
- ω 1/sek. die Winkelgeschwindigkeit = in der Zeiteinheit zurückgelegter Drehwinkel,
- $\mu = \text{tg} \varphi$ die Reibungsziffer.

I. Vernietungen.

1. Allgemeines.

Material der Nieten: Schweißeisen, Flußeisen und Nickelstahl; ersteres mitunter für Dampfkessel, da es häufigere Erhitzungen besser verträgt als Flußeisen, das letzte für Eisenkonstruktionen. Nach den „polizeilichen Bestimmungen über die Anlegung von Land-Dampfkesseln“ vom 17. Dezember 1908 soll für das zu den Nieten verwandte Nieteisen (Festigkeit des gepreßten Nietes ist höher, noch größer des geschlagenen) betragen: bei Schweißeisen $K_z = 3500$ bis 4000 kg/qcm bei mindestens 20% Dehnung und bei Flußeisen $K_z = 3400$ bis 4100 kg/qcm bei mindestens 25% Dehnung und einer Gütezahl (Festigkeit in kg/qmm + Dehnung in %) von mindestens 62, kann aber steigen bis $K_z = 4700$ kg/qcm bei gleichzeitiger Verwendung von Blechen höherer Festigkeit als 4100 kg/qcm, wenn die Dehnung der Nieten mindestens dieselbe wie die zulässige der Bleche ist.

Durchmesser der Nieten. Am besten wählt man den Durchmesser nach Zollmaßen: $\frac{1}{4}$ “, $\frac{3}{8}$ “, $\frac{1}{2}$ “, $\frac{5}{8}$ “ usw. oder nach mm: 6, 7, 8, 9, 10 usw. bis 26 mm bei Handnietung bzw. 36 mm bei Maschinennietung.

Die Nietlänge beträgt (Fig. 1):

$$l = \Sigma \text{ Blechstärken} + \frac{1}{2} \text{ bis } \frac{7}{4} \cdot d$$

für Bildung des Schließkopfes je nach dessen Form (siehe unten) und Genauigkeit des Loches. Im Mittel:

$$l = \Sigma \text{ Blechstärken} + 1,5 \cdot d.$$

Einteilung der Vernietungen in:

1. Überlappungsnietzungen (Fig. 9, 11, 12, 13) und Laschennietzungen (Fig. 10, 14—17);

2. einschnittige (Fig. 9—13), zweischnittige (Fig. 14—17), dreischnittige usw., je nach der Zahl der Flächen, die abgesichert werden müssen, wenn eine gewaltsame Zerstörung eintreten soll;

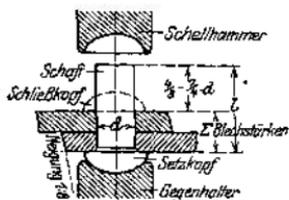


Fig. 1.

3. einreihige (Fig. 9, 10, 14), zweireihige (Fig. 11, 12, 15, 16), dreireihige (Fig. 13, 17) usw., je nach der Zahl der Nietreihen der Naht bzw. bei Laschennietzung einer Nahthälfte.

4. Zickzacknietzungen und Parallel- oder Kettennietzungen, je nachdem die Nieten einer Reihe gegen die der anderen versetzt sind (Fig. 11, 15), oder parallel stehen (Fig. 12);

Einteilung: 5. nach dem Zweck, dem sie dienen. Hierbei unterscheidet man Vernietungen, die

- a) große Kräfte aufnehmen und gleichzeitig dichten (Kessel),
- b) hauptsächlich nur dicht halten (Behälter, eiserne Schornsteine),
- c) nur große Kräfte aufnehmen sollen (Eisenkonstruktionen).

Verstemmen zwecks Dichthaltens soll bei beiden Blechen von 5 mm Blechstärke an und stets bei beiden Köpfen geschehen. Die Bleche werden hierzu nach einer Neigung von 1 : 8 abgeschrägt (Fig. 1). Bleche unter 5 mm werden meist mittels Dichtband, das ist mit Mennige getränkte Leinwand, oder Papier gedichtet.

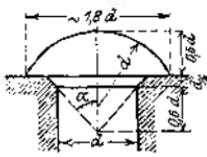


Fig. 2.

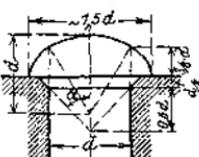


Fig. 3.

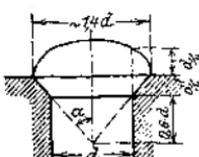


Fig. 4.

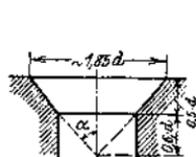


Fig. 5.

Kopfformen. Fig. 2 für Verbindungen nach 5a (Kopfbildung erfordert mehr Arbeit, verglichen mit Fig. 3, das Niet dichtet aber besser); Fig. 3 für solche nach 5b; Fig. 4, wenn Platz für einen vollen Kopf nicht vorhanden, und Fig. 5, wenn ein Überstehen überhaupt vermieden werden muß. Bei allen wählt man $\alpha = 40^\circ$. Gewichte siehe Tabelle.

Gewicht von 1000 Stück Nietköpfen in kg.

Niet \varnothing d mm	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36
Kopf nach Fig. 2	3,6	7,0	12,2	19,4	28,9	41,2	56,5	75,2	97,6	124,1	155	190,6	231,3	277,5	329,4
" " " 3	2,3	4,4	7,6	12,1	18,0	25,7	35,2	46,9	60,8	77,3	96,6	118,8	144,2	172,9	205,3

Die Herstellung der Löcher geschieht durch Lochen (Stanz) oder Bohren. Ersteres ist billiger, aber auch schlechter, da das Material leicht leidet, denn vom Loch ausgehend bilden sich leicht Haarrisse, die später zum Bruch Anlaß geben können. Um dies zu vermeiden, bohrt man besser die Löcher nach oder reibt sie auf. Zusammengehörige Teile erhalten tunlichst zugleich ihre Löcher. Der kegelförmige Ansatz von der Höhe $\frac{d}{8}$ (Fig. 2 und 3) erleichtert das Umlegen der Nietfasern und, da er vom Loch herrührenden Grat sicher beseitigt, das Aufeinanderliegen der Bleche (Fig. 6 und 7); auf die Höhe des Gleitwiderstandes (siehe unten) hat er keinen Einfluß.

Bei Dampfkesseln müssen nach obigen Bestimmungen bei einer Festigkeit der Bleche größer als $K_2 = 4100$ die Löcher im zusammengebauten Zustande der Kessel gebohrt werden; ferner bei größerer Blechstärke als 27 mm. Werden die Nietlöcher schwächerer Bleche gelocht, so ist x (siehe S. 574) um $\frac{1}{4}$ zu erhöhen, außer wenn das Loch bis zu $\frac{3}{4} \cdot d$ gelocht und der Rest von $\frac{1}{4} \cdot d$ nachgebohrt wird, in welchem Falle nur 0,1. als Zuschlag zu geben ist.

Die Bildung des Schließkopfes soll in warmem Zustande geschehen. (Nur Niete unter 8 mm Durchmesser werden eventuell kalt eingezogen.) Sie erfolgt durch Handnietung, mittels Druckluflthämmer oder Nietmaschinen, die durch Druckwasser oder Elektrizität betätigt werden. In den beiden ersten Fällen geschieht die Kopfbildung durch eine größere Anzahl Schläge, wobei die unmittelbar getroffenen Teile des Nietes den stärksten Druck auszuhalten haben, mithin am meisten nachgeben und durch seitliches Umlegen den Kopf bilden, während der Schaft weniger beeinflusst wird, mithin seine Form weniger ändert. Damit nehmen die Fasern die in Fig. 6 angedeutete Lage ein und pressen beim Erkalten die Bleche fest aufeinander, was der Schaft ungehindert zuläßt. Bei der Vernietung mit Nietmaschinen dagegen geschieht die Kopfbildung in einem Arbeitsgang durch ruhenden Druck, wobei der Schellhammer die unmittelbar an ihm anliegenden Teile an seitlicher Bewegung hindert, während die übrigen seitlich frei ausweichen können. Da der Druck sich auch auf den Schaft fortpflanzt, gibt auch dieser seitlich nach, bis er durch die Bleche gehindert wird, füllt mithin das Loch voll aus, so daß ein Aufeinanderpressen beim Erkalten nicht so gut vor sich gehen kann wie im ersten Fall. Die Faserrichtung veranschaulicht Fig. 7.

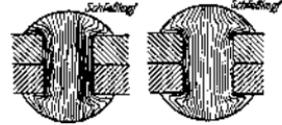


Fig. 6.

Fig. 7.

Je höher der Stempeldruck genommen wird, um so mehr wird das weiche Niet gegen die Lochwandung gepreßt, so daß bei zu hohem Druck das Blech leicht Risse erhält. Man darf deshalb den Druck nur so hoch wählen, wie zur Kopfbildung erforderlich, etwa 6500 bis 8000 kg/qcm Nietquerschnitt.

2. Berechnung der Vernietungen.

Da bei zu großer Belastung einer Nietverbindung die Bleche zunächst das Bestreben haben, aufeinander zu gleiten, so sind sie so zu berechnen, daß dies auf keinen Fall eintritt, d. h. die angreifende Kraft muß kleiner als der Gleitwiderstand zwischen den Blechen sein. Der durch 1 qcm Nietquerschnitt beim Erkalten hervorgerufene Gleitwiderstand möge mit k_n bezeichnet werden, dann hängt die Größe von k_n ab von der Nietlänge, von der Beschaffenheit und Anzahl der Berührungsflächen, von der Herstellung des Schließkopfes und von der Konstruktion und Ausführung (vor allem erhöht Verstemmen der Bleche und Köpfe den Wert k_n). Es können daher, wie bei den einzelnen Vernietungen unten geschieht, nur Mittelwerte angegeben werden, bei denen man sich entsprechend den jeweiligen Verhältnissen der unteren oder oberen Grenze zu nähern hat. Das Biegemoment $P \cdot s$ (Fig. 9) wird dabei vernachlässigt und angenommen, daß die Bleche ihre ursprüngliche Lage beibehalten. Teilweise trifft dies zu, da die Konstruktion sie hierzu zwingt, teilweise nehmen sie mehr oder weniger die Form der Fig. 8 an, weshalb man ihnen in diesen Fällen gleich von vornherein diese Form zu geben hat.



Fig. 8.

Ein zu langes Niet würde schon beim Erkalten leicht reißen, weshalb man möglichst als Grenze wählt:

Nietlänge zwischen den Köpfen = Σ Blechstärken $\frac{1}{4} \cdot 4 \cdot d$.

Im Notfall kann man sich dadurch helfen, daß man nur die Enden der Niete erwärmt, besser verwendet man jedoch in solchen Fällen Schrauben.

a) Dampfkesselvernietungen.

1. Überlappungsvernietungen.

Diese sind stets einschneittig. Die Nietstärke wählt man bei ihnen im Mittel $\bar{d} \text{ cm} = s \text{ cm} + 0,8 \text{ cm}$, wenn s die Blechstärke bezeichnet.

a) Einreihige Vernietung. Die von C. Bach ausgeführten Versuche ergeben hier einen zulässigen Gleitwiderstand $k_n = 600$ bis 700 kg/qcm . Die Teilung t (Fig. 9) ergibt sich dadurch, daß der Blechquerschnitt zwischen zwei Nieten den Gleitwiderstand eines Nietes übertragen soll und auf Zug genau soviel halten muß wie ein Niet auf Abscheren. Beides stimmt nicht genau, da der Gleitwiderstand weder ganz durch die Strecke $(t - \bar{d})$ zu übertragen ist, noch diese Strecke gleichmäßig beanspruchen kann, und da das Niet infolge des Gleitwiderstandes niemals voll auf Schub ausgenutzt werden kann. Unter Vernachlässigung dieser Fehler erhält man somit für die Kraft P , die ein Blechstreifen von der Länge t aufzunehmen imstande ist, die Beziehung:

$$2 \cdot P = 2 \cdot (t - \bar{d}) \cdot s \cdot k_2 = 2 \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \cdot k_n = 2 \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \cdot k_s = D \cdot t \cdot p,$$

wenn die Längsnaht eines Kessels vom Durchmesser D und p Atm. Überdruck betrachtet wird. Da der Gleitwiderstand pro Berührungsfläche nur bei der vorliegenden Vernietung den üblichen Wert von $k_2 = 700 \text{ kg/qcm}$ bei K_2 bis 3800 erreicht, bei allen folgenden aber sich als kleiner erweist, genügt es, wenn die Rechnung lediglich auf Gleitwiderstand durchgeführt wird. Da bei einer Belastung von 1000 bis 1800 kg/qcm Nietquerschnitt das Gleiten eintritt, ist ≈ 2 - bis 3 -fache Sicherheit gegen $\infty 5$ -fache für Schub vorhanden.

Der aus dieser Beziehung sich ergebende Wert der Teilung ist zu nehmen, sofern er nicht so klein ist, daß die Nieten nicht mehr unterzubringen sind ($t' \leq 2 \cdot \bar{d}$), und sofern er nicht so groß ist, daß ein Verstemmen wirkungslos ist, (erwünschte Teilung $t'' \text{ cm} = 2 \cdot \bar{d} \text{ cm} + 0,8 \text{ cm}$), also

$$t' < t \leq t''.$$

Den Randabstand wählt man wie auch bei allen folgenden Vernietungen



Fig. 10.

$$e = 1,5 \cdot \bar{d}$$

mit Rücksicht auf Ausscheren des Bleches vor dem Niet.

Das Verhältnis des durch die Nieten geschwächten Querschnittes zum ungeschwächten wird als Festigkeitsverhältnis bezeichnet. Es beträgt

$$f = \frac{t - \bar{d}}{t}.$$

Die einseitige Laschenvernietung, Fig. 10, ist nach den gleichen Beziehungen zu berechnen; Laschenstärke $s_1 = 1,2$ bis $1,5 \cdot s$.

b) Zweireihige Vernietung (Fig. 11 und 12). Hier ist $k_n = 550$ bis 650 kg/qcm und

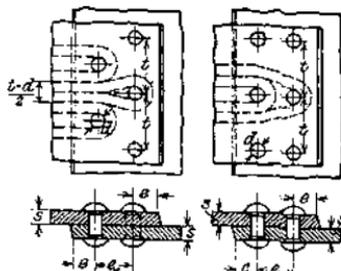


Fig. 11.

Fig. 12.

$$2 \cdot (t - \bar{d}) \cdot s \cdot k_2 = 4 \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \cdot k_n = D \cdot t \cdot p;$$

ferner für das Verstemmen bei der Zickzacknietung eine Teilung erwünscht

$$t'' \text{ cm} = 2,6 \cdot d \text{ cm} + 1,5 \text{ cm},$$

und bei der Parallelnietung (dichtet schlechter als die Zickzacknietung, daher zu vermeiden):

$$t'' \text{ cm} = 2,6 \cdot d \text{ cm} + 1 \text{ cm}.$$

Ferner im Mittel:

$$e_1 = 0,6 \cdot t \text{ bei der Zickzacknietung}$$

und

$$e_1 = 0,8 \cdot t \text{ bei der Parallelnietung.}$$

Das Festigkeitsverhältnis $f = \frac{t-d}{t}$ gibt größere Werte als bei a), da t größer ist; mithin werden die Bleche besser ausgenutzt, weshalb man zweireihige Vernetungen für größere Kesseldurchmesser und höhere Drücke wählt.

Die Beanspruchung ist in der inneren Nietreihe eines jeden Bleches am größten, da hier noch die ganze Kraft aufzunehmen ist. Da für $k_2 = k_3 = k_4$ jedes Niet soviel auszuhalten hat, wie ein Blechstreifen von der Breite $\frac{t-d}{2}$, kann man dies veranschaulichen, wenn man sich ein Band von der Breite $\frac{t-d}{2}$ um jedes Niet geschlungen denkt. Dann ist der Querschnitt in der inneren Nietreihe voll ausgenutzt, nicht dagegen in der äußeren. f ist dann auch das Verhältnis dieser Bandbreiten zum vollen Blech.

Beispiel: Ein Kessel 1600 Ø, 9 Atm. Überdruck ist für Zickzacknietung in der Längsnaht und für einreihige Vernetung in der Rundnaht zu berechnen. Beanspruchung des Bleches in der Naht $k_2 = 1000 \text{ kg/qcm}$. Die Beanspruchung im vollen Blech beträgt in Kessellängsrichtung stets nur $\frac{1}{2}$ derjenigen quer zur Achse, wie sich unmittelbar aus folgenden beiden Beziehungen ergibt:

$$\frac{D^2 \pi}{4} \cdot p = D \cdot \pi \cdot s \cdot \sigma_2,$$

daraus Beanspruchung in der Richtung senkrecht zur Kesselaachse $\sigma_2 = \frac{D}{4 \cdot s} \cdot p$;

$$D \cdot p = 2 \cdot s \cdot \sigma_2,$$

daraus Beanspruchung in der Längsrichtung des Kessels $\sigma_1 = \frac{D}{2 \cdot s} \cdot p$.

Man kommt deshalb bei der Rundnaht stets mit einfacherer Vernetung aus als bei der Längsnaht.

Längsnaht: Am besten nimmt man f an, schätzungsweise = 0,65; dann ist

$$D \cdot t \cdot p = 2 \cdot (t-d) \cdot s \cdot k_2;$$

$$160 \cdot 9 = 2 \cdot \frac{t-d}{f} \cdot s \cdot 1000;$$

$$s = \frac{160 \cdot 9}{2 \cdot 0,65 \cdot 1000} = \infty 1,1 \text{ cm} = 11 \text{ mm},$$

ferner

$$d = 1,1 + 0,8 = \infty 2 \text{ cm} = 20 \text{ mm},$$

damit

$$\frac{d^2 \pi}{4} = 3,14 \text{ qcm}$$

endlich aus

$$160 \cdot t \cdot 9 = 4 \cdot 3,14 \cdot 650;$$

$$t = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 650}{160 \cdot 9} = 5,7 \text{ cm} = 57 \text{ mm},$$

obere Grenze:

$$t'' = 2,6 \cdot d + 1,5 = 2,6 \cdot 2 + 1,5 = 6,7 \text{ cm} = 67 \text{ mm},$$

wird $t = 60 \text{ mm}$ gewählt, folgt

$$f = \frac{60-20}{60} = 0,67. \text{ Dies stimmt mit dem angenommenen}$$

Wert genügend überein; andernfalls wäre die Rechnung zu wiederholen.

$$\begin{aligned} \text{Rundnaht: Gesamter Druck} &= \frac{D^2 \pi}{4} \cdot p = \frac{160^2 \pi}{4} \cdot 9 = 180\,900 \text{ kg,} \\ \text{erforderliche Anzahl der Nieten} &= \frac{180\,900}{3,14 \cdot h_n} = \frac{180\,900}{3,14 \cdot 700} = 82; \\ \text{Teilung} &= \frac{160 \cdot \pi}{82} = 6,14 \text{ cm,} \end{aligned}$$

obere Grenze $t'' = 2 \cdot d + 0,8 = 4,8 \text{ cm};$
es müssen also mehr genommen werden, z. B. 100, womit die Teilung

$$t = \frac{160 \cdot \pi}{100} = 50 \text{ mm wird, was beibehalten werden kann.}$$

Würde es sich um einen Landdampfessel handeln, so ist den auf Seite 569 erwähnten Vorschriften zufolge die Wandstärke mit Rücksicht auf Rosten um 1 mm stärker zu machen, mithin nach der Gleichung zu berechnen:

$$s = \frac{D \cdot p \cdot t \cdot x}{2 \cdot (t - d) \cdot K_z} + 0,1 \text{ cm.}$$

Hierbei soll s tunlichst nicht unter 7 mm genommen werden.

In dieser Gleichung ist zu wählen:

$K_z = 3300 \text{ kg/qcm}$ bei Schweißseisen, bzw. ein höherer nachgewiesener Wert,

$K_z = 3600 \text{ kg/qcm}$ bei Flußeisen von 3400 bis 4100 kg/qcm Zugfestigkeit,

$K_z = 4000 \text{ kg/qcm}$ bei Flußeisen von 4000 bis 4700 kg/qcm Zugfestigkeit,

$K_z = 4400 \text{ kg/qcm}$ bei Flußeisen von 4400 bis 5100 kg/qcm Zugfestigkeit,

ferner:

bei Handnietung

$$x = 4,75$$

$$x = 4,25$$

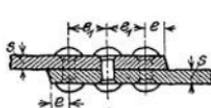
$$x = 4,35$$

bei Maschinennietung

$x = 4,5$ bei überlappten oder einseitig gelaschten Nähten, auch wenn bei dreireihiger Laschenvernietung eine Lasche eine Nietreihe weniger enthält als die andere,

$x = 4,00$ bei doppeltgelaschten Nähten, auch wenn deren eine Lasche bei dreireihiger Vernietung eine Nietreihe weniger enthält als die andere,

$x = 4,10$ bei doppeltgelaschten zweireihigen Nähten, deren eine Lasche nur einreihig genietet ist.



(Siehe auch unter „Herstellung der Löcher“, S. 571.)

c) Dreireihige Vernietung, Fig. 13. Hier ist $h_n = 500 \text{ bis } 600 \text{ kg/qcm}$ und

$$2 \cdot (t - d) \cdot s \cdot h_n = 6 \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \cdot h_n = D \cdot t \cdot p;$$

während Verstemmen gut ausführbar bis:

$$t'' \text{ cm} = 3 \cdot d \text{ cm} + 2,2 \text{ cm,}$$

$$e_1 = \infty 0,5 \cdot t.$$

2. Doppellaschenvernietungen.

Laschenstärke $= \frac{2}{3} \text{ bis } \frac{3}{4} \text{ bis } \frac{4}{5} \cdot s$; Faserrichtung der Laschen muß wie die der Bleche in Richtung des Kesselumfanges liegen. Vorzug der Laschennietung ist, daß ein Biegemoment überhaupt nicht auftritt, weshalb man sie für hohe Drücke und große Durchmesser wählt.

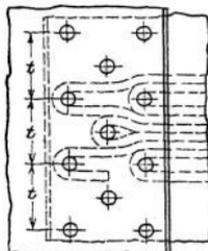


Fig. 13.

a) Einreihige Vernietung (Fig. 14). Hier ergibt der Versuch, bedingt durch die doppelte Anzahl der Berührungsflächen und größere Nietlänge:

$$k_n = 1000 - 1200 \text{ kg/qcm};$$

ferner wählt man

$$d = s \text{ cm} + 0,7 \text{ cm}.$$

Weiterhin ergibt sich

$$2 \cdot (t - d) \cdot s \cdot k_2 = 2 \cdot \frac{d^3 \pi}{4} k_n = D \cdot t \cdot p,$$

während Verstemmen gut ausführbar bis

$$t'' \text{ cm} = 2,6 \cdot d \text{ cm} + 1 \text{ cm}.$$

Endlich nimmt man

$$e_2 = 0,9 \cdot e, \quad \text{da } 2 \cdot s_1 > s.$$

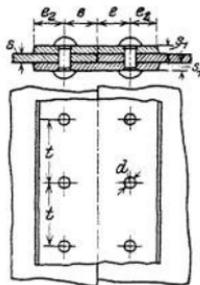


Fig. 14.

b) Zweireihige Vernietung (Fig. 15 und 16). Bei dieser ist $k_n = 950$ bis 1150 und $d = s \text{ cm} + 0,6 \text{ cm}$ zu wählen. Ferner wie unter 1b für Fig. 15:

$$2 \cdot (t - d) \cdot s \cdot k_2 = 4 \cdot \frac{d^3 \pi}{4} \cdot k_n = D \cdot t \cdot p,$$

und:

$$t'' = 3,5 \cdot d + 1,5 \text{ cm},$$

$$e_1 = 0,5 - 0,6 \cdot t,$$

$$e_2 = 0,9 \cdot e.$$

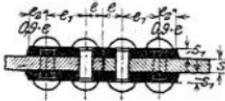


Fig. 15.

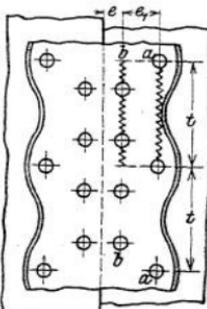


Fig. 16.

Für Fig. 16 ergibt sich ebenso, wenn die Beanspruchung in der Nietreihe $a-a$ des Bleches gleich der der Nietreihe $b-b$ der Lasche sein soll:

$$2 \cdot (t - d) \cdot s \cdot k_2 = 6 \cdot \frac{d^3 \pi}{4} \cdot k_n = 4 \cdot (t - 2 \cdot d) \cdot s_1 \cdot k_2;$$

hierdurch ist der kleinste mögliche Wert von s_1 gegeben.

Sodann wählt man meist

$$t'' = 5 \cdot d + 1,5 \text{ cm},$$

im Mittel

$$e = e_2 = 1,5 \cdot d, \quad e_1 = 0,4 - 0,45 \cdot t.$$

Mit Rücksicht auf besseres Verstemmen bildet man die Laschen auch wohl wie in Fig. 15 rechte Seite gezeichnet aus, was bei der Konstruktion nach Fig. 16 meist erforderlich ist.

c) Dreireihige Vernietung (Fig. 17). Gebräuchliche Werte sind hier:

$$k_n = 900 - 1100 \text{ kg/qcm},$$

$$d = s \text{ cm} + 0,5 \text{ cm}, \quad s_1 = 0,8 \cdot s,$$

$$t'' = 6 \cdot d + 2 \text{ cm}, \quad e_1 = \frac{3}{8} \cdot t, \quad e_2 = \frac{3}{10} \cdot t.$$

Außere Lasche entweder geradlinig begrenzt, wie in der linken Hälfte gezeichnet (äußere und innere werden verstemmt), oder wellenförmig (rechte Hälfte: innere wie vor und nicht verstemmt). Ihrer schweren Herstellung wegen

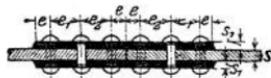
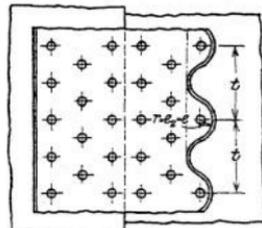


Fig. 17.



macht man sie auch wohl schmaler, wie — · — · — angedeutet. Beide Ausführungen einer verjüngten Vernietung nach der rechten Hälfte der Figur verfolgen den Zweck, die Beanspruchung im Blech günstiger zu gestalten. k_n , der nur eine Lasche fassenden Niete sinkt auf 500—600 (siehe Seite 574 unter c).

b) Vernietungen für Wasserbehälter, genietete Rohre, eiserne Schornsteine.

Bei diesen kommt es hauptsächlich auf Dichthalten an; hierfür genügt bei einreihiger Überlappungsvernietung eine Teilung:

$$t \text{ cm} = 3 \cdot d \text{ cm} + 0,5 \text{ cm.}$$

c) Vernietungen für Eisenkonstruktionen.

Weder Verstemmen, das hier nicht üblich, noch Dichthalten bedingt die Teilung, sondern lediglich die Bedingung, daß sämtliche Querschnitte ($t_1 - d$) noch die Kraft der hinter ihnen liegenden Niete aufzunehmen imstande sein müssen. Dies läßt sich durch Einzeichnen der Bänder veranschaulichen (Fig. 18 und 19), wobei sämtliche Bänder — vorausgesetzt, daß ihre Lage bestimmt ist — die Linien ($t_1 - d$) senkrecht schneiden müssen, wenn ($t_1 - d$) einen kleinsten Wert erhalten soll. Da der Gleitwiderstand geringer



Fig. 18.

als bei 1 und 2 ist, kann Berührung zwischen Blech und Niet eintreten. Mithin sind die Niete auf Abscheren zu berechnen und stets folgende Gleichungen zu erfüllen:

1. $P = b \cdot s \cdot k_z$, wobei b den gesamten Blechquerschnitt zwischen den Niete bezeichnet;

2. $P = \frac{d^2 \pi}{4} \cdot k_s \cdot n$, Schnittzahl der Flächen (Überlappungsvernietung = 1, doppelte Laschennietung = 2). n = Anzahl der Niete.

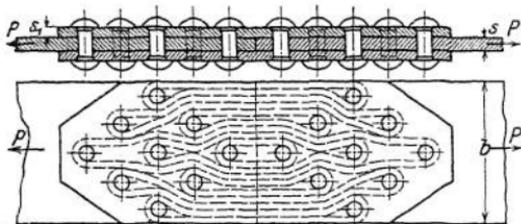


Fig. 19.

3. $P = d \cdot s \cdot k \cdot n$, wenn k den Lochleibungsdruck, das ist der Druck zwischen Nietschaft und Blech, bedeutet. Dieser wird etwa gewählt $k = 2$ bis $2,5 \cdot k_z$. Den Nietschaftsdurchmesser wählt man meist $d = s \text{ cm} + 1,0 \text{ cm}$.

Beispiel. Eine Verbindung nach Fig. 18 soll bei einem Querschnitt des vollen Bleches von $120 \cdot 10 \text{ mm}$ eine Kraft $P = 9t$ aufnehmen.

Mithin ergibt sich: $d = 1,0 + 1,0 = 2 \text{ cm} = 20 \text{ mm}$;

$$k = \frac{P}{d \cdot s \cdot n} = \frac{9000}{2 \cdot 1,0 \cdot 9} = 500 \text{ kg/qcm};$$

da einschnittig: $k_z = \frac{P}{\frac{d^2 \pi}{4} \cdot n} = \frac{9000}{3,14 \cdot 9} = 286 \text{ kg/qcm}$

und die von jedem Niet zu übertragende Kraft = $\frac{9000}{9} = 1000 \text{ kg}$.

Damit die Beanspruchung im vollen Blech $\sigma_z = \frac{P}{b \cdot s} = \frac{9000}{12 \cdot 1,0} = 750 \text{ kg/qcm}$

und im untern Blech im Schnitt a-a: $\sigma_z = \frac{P}{b \cdot s} = \frac{9000}{(12 - 2) \cdot 1,0} = 900 \text{ kg/qcm}$

„ „ „ „ „ „ b-b: $\sigma_z = \frac{9000 - 1000}{(12 - 2 \cdot 2) \cdot 1,0} = 1000 \text{ kg/qcm}$

„ „ „ „ „ „ c-c: $\sigma_z = \frac{9000 - 3 \cdot 1000}{(12 - 3 \cdot 2) \cdot 1,0} = 1000 \text{ „}$

„ „ „ „ „ „ d-d: $\sigma_z = \frac{9000 - 6 \cdot 1000}{(12 - 2 \cdot 2) \cdot 1,0} = 375 \text{ „}$

„ „ „ „ „ „ e-e: $\sigma_z = \frac{9000 - 8 \cdot 1000}{(12 - 2) \cdot 1,0} = 100 \text{ „}$

Die Verbindung Fig. 19 ist ebenso zu berechnen, da zweischnittig wird $k_z = \frac{P}{\frac{d^2 \pi}{4} \cdot n \cdot 2}$.

3. Ausführungsbeispiele.

Einige weitere Ausführungsbeispiele zeigen folgende Figuren:

Fig. 20: Rohrverbindung mittels Stemming, der eingelegt ist, weil beide Rohre sonst im Innern nicht zu verstemmen sind. Aus gleichem Grunde beginnt der Ring erst 2—3 mm außerhalb der Rohrkürmung.

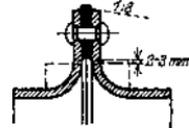


Fig. 20.

Fig. 21 und 22: Drei- bzw. Vierplattenstoß bei einreihiger Überlappungsnielung. Der letztere ist tunlichst zu vermeiden, was meist möglich, wenn die Entfernung der Nietreihen AA und BB um einige Teiungen größer genommen wird.

Fig. 23: Dreiplattenstoß bei einreihiger Rundnaht und zweireihiger Längsnaht. Innenkante des Bleches III und Mitte Blech von I und II bilden

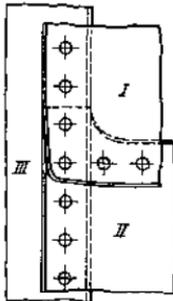


Fig. 21.

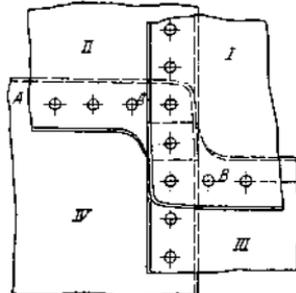
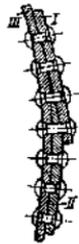


Fig. 22.

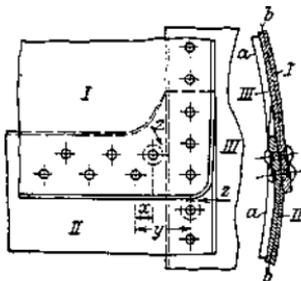
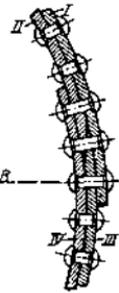


Fig. 23.

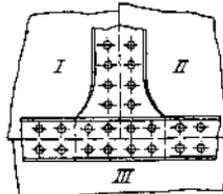


Fig. 24.

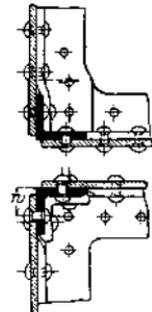


Fig. 25.

die konzentrischen Kreise $a-a$ und $b-b$. In der Längsnaht sind beide Bleche nach Fig. 8 gebogen. Platz bei x für den Kopfsetzer bestimmt die Entfernung $(y-x)$, y möglichst gleich der Teilung.

Fig. 24: Dreiplattenstoß bei Laschennietung.

Fig. 25: Behälterrecke. Die Nieten werden dabei auf das Wurzelmaß $w = \frac{1}{2}$ Schenkelbreite + 5 mm von der Ecke aus bei allen Winkeln mit größerer Schenkelbreite als 40 mm gesetzt.

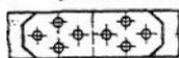


Fig. 26.

Fig. 26: Verbindung für Eisenkonstruktionen ähnlich Fig. 19.

II. Schrumpfringe und -platten.

Sie dienen zum Zusammenhalten geteilter Gegenstände, z. B. von Fundamentplatten, Schwungradern, Riemen- und Seilscheiben, Kupplungen, sowie zur Verstärkung einteiliger Körper, z. B. gußeiserner Zylinder. Die Kraft, mit der dieses geschieht, ist gleich der des Schwindens beim Erkalten. Beispiele zeigen Fig. 27, 28, Kupplung Fig. 125, Riemenscheibe Fig. 336.

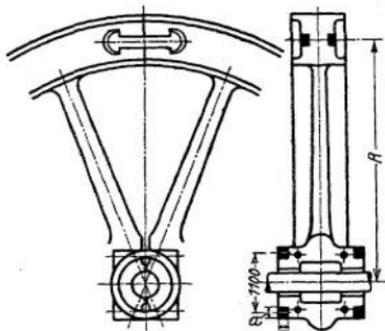


Fig. 27.



Fig. 28.

Beispiel: Bei einem Schwungrad nach Fig. 27 möge die Fliehkraft jeder Hälfte

$$m \cdot r \cdot \omega^2 = m \cdot \left(\frac{2}{\pi} \cdot R\right) \cdot \omega^2 = 12000 \text{ kg}$$

betragen.

Die beiden Schrumpfringe sollen erst bei der doppelten Umdrehungszahl, also bei 48 t Belastung, bis zur Elastizitätsgrenze von ∞ 2000 kg/qcm beansprucht werden, bei normalem Betrieb dagegen noch beide Hälften mit 24 t zusammenpressen. Damit müssen sie im ungünstigsten Falle

$$48 + 24 = 72 \text{ t aushalten.}$$

Bei quadratischem Querschnitt ergibt sich damit unter der Voraussetzung überall gleicher Beanspruchung

$$2 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot 2000 = 72000$$

$$a = \sqrt{\frac{72000}{8000}} = 3,0 \text{ cm} = 30 \text{ mm.}$$

Bei normalem Betrieb beträgt ihre Beanspruchung

$$\sigma_z = \frac{12000 + 24000}{4 \cdot a^2} = \frac{36000}{4 \cdot 3^2} = 1000 \text{ kg/qcm.}$$

Bei 1100 mm mittlerem Durchmesser würden sie sich mithin, sofern ihr Sitz nicht nachgibt, um

$$\lambda \text{ cm} = \alpha \cdot l \cdot \sigma_z = \frac{1}{2000000} \cdot 110 \cdot \pi \cdot 1000 \text{ Längen;}$$

sonach müssen sie im Durchmesser um

$$\frac{\lambda}{\pi} = \frac{110 \cdot 1000}{2000000} = 0,055 \text{ cm} = 0,55 \text{ mm enger gedreht werden;}$$

und, wenn sie zwecks Aufbringens im Durchmesser 2 mm größer werden sollen, erwärmt werden um θ° , wobei

$$\frac{\lambda_w}{\pi} = \frac{(0,2 + 0,055) \cdot \pi}{\pi} = 110 \cdot \alpha_w \cdot t = 110 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot t,$$

also um

$$\theta^\circ = \frac{100000 \cdot 0,255}{110 \cdot 1,2} = \infty 194^\circ,$$

Je weniger die Voraussetzung, daß der Sitz unnachgiebig, zutrifft, um so enger müssen die Ringe im Durchmesser gedreht werden. Die genaue Rechnung ist dann ähnlich wie bei Hohlzylindern mit innerem und äußerem Überdruck durchzuführen (s. Seite 480 u. f.). Würde z. B. $\frac{2}{3}$ der Formänderung auf den Ring und

$\frac{1}{3}$ auf die Gußnabe entfallen, so wäre der Ring in obigem Falle um $0,55 \cdot \frac{3}{2} = 0,825$ mm enger zu drehen, und man erhielt

$$\frac{\frac{\lambda}{\pi}}{\text{Durchmesser}} = \frac{0,825}{1100} = \frac{1}{1335}$$

Meist stellt sich dies Verhältnis bei schmiedeeisernen Ringen auf Gußnaben auf etwa 1 : 750; bei Kurbeln, die auf Kurbelzapfen warm aufgezogen werden, auf 1 : 200 und bei Gußnaben, die auf Wellen oder dgl. aufgezogen werden, auf 1 : 800.

Bei Anordnung nach Fig. 28 werden die Dorne mit Rücksicht auf Festigkeit meist länglich ausgeführt. Sie sind auf zusammengesetzte Festigkeit zu berechnen und zwar auf Abscheren und Biegung mit dem Biegemoment $P \cdot \frac{a}{2}$, wenn P die von dem Ring ausgeübte Kraft.

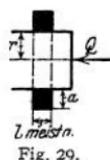
Die Laschen, Fig. 27, müssen mindestens die Spannkraft des Ringes = $\gamma \cdot \frac{V_{\max}^2}{g} \times$ Kranzquerschnitt aufnehmen (vgl. Seilscheiben S. 699)

und sind ebenso wie die Ringe nach dem Hookschen Gesetz zu berechnen, wobei die Formänderung des Kranzes zu berücksichtigen ist.

Soll das Aufziehen eines Ringes im kalten Zustande geschehen, so ist dazu eine Kraft

$$Q = 2 \cdot \gamma \cdot \pi \cdot l \cdot h \cdot \mu \text{ erforderlich,}$$

wenn h = Druck zwischen Ring und Körper (Fig. 29).



III. Keilverbindungen.

a) **Längskeile**, sind solche, deren Längsachse mit der Längsachse der Welle gleichgerichtet ist. Kräfteverhältnisse beim Aufkeilen und Lösen s. S. 297. Die meist vorkommenden sind der Nutenkeil, Fig. 30, meist mit Nase als Nasenkeil ausgebildet; Anzug = $\tan \alpha = 1 : 100$, und der Federkeil, Fig. 31, ohne Anzug, wenn nötig durch Schrauben in der Welle gehalten. Er wird dann gebraucht, wenn ein Nutenkeil nicht verwendbar, z. B. für die mittlere Nabe dreier unmittelbar nebeneinander auf der Welle sitzenden Teile, in welchem Falle das Lösen eines Nutenkeiles Schwierigkeiten bereiten würde, ferner wenn ein schiefes Aufkeilen oder Schläge auf das Lager unbedingt vermieden werden müssen, was beides beim Nutenkeil

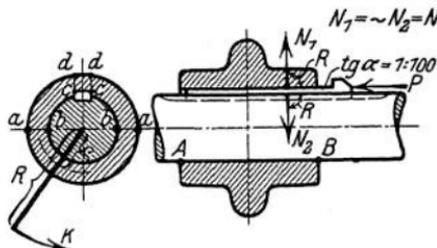


Fig. 30.

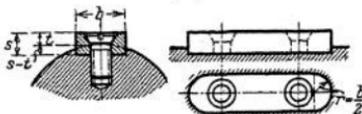


Fig. 31.

vorkommen kann. Nachteil: Nabe axial nicht gesichert. Den Nuten für beide Keile gibt man bei ein und derselben Welle stets den gleichen Querschnitt; gebräuchliche Abmessungen siehe folgende Tabelle.

Herstellung der Nuten durch Fräsen, wobei sie auslaufen (Fig. 30) oder auf der Langlochbohrmaschine (Enden halbrund, Fig. 31) oder durch Hobeln, wenn zwei Endlöcher gebohrt; bei Naben Herstellung auf der Nutenstoßmaschine.

Wellen-Durchm.	$d = 15$	19	20	29	30	39	40	49	50	59	60	69	70	79	80	89	90	99	100	109	110	$110-1$
Nutenbreite	$b = 9$		10		12		14		16		18		20		22		24		26		28	
Nutentiefe	$t = 3$		4		5		5		6		7		7		8		8		9		9	
Keilstärke	$s = 5$		6		7		8		9		10		11		12		13		14		15	
$d = 120$	129	130	139	140	159	160	179	180	199	200	229	230	259	260	289	290	319	320	319	320	319	$320-3$
$b = 30$		32		36		40		44		50		56		62		68		75		80		85
$t = 10$		10		11		12		13		14		16		18		20		23		26		29
$s = 16$		17		19		21		23		26		29		32		36		40		45		50

Die Beanspruchung der Nabe ist ziemlich verwickelt. Wird der Keil mit der Kraft P angezogen, so übt er den Normaldruck N auf die Nabe aus, beansprucht sie damit näherungsweise in den Schnitten $a-b$ mit $\frac{N}{2}$ auf Zug und in den Schnitten $c-d$ mit der gleichen Kraft auf Abscheren. Während des Betriebes kommt zu beiden Kräften die Kraft $K \cdot \frac{R}{\rho}$, von der Umfangskraft herrührend, hinzu. Durchbiegungen der Welle bedingen außerdem zusätzliche Beanspruchungen.

Beispiel: $K = 600$ kg, $R = 500$ mm, Welle 80 mm \varnothing , Nabe 150 mm \varnothing , 140 mm lang, Keil 22 x 12 bei 4 mm Nutentiefe in der Welle.

$$\text{Nabenquerschnitt} = \frac{15-8}{2} \cdot 14 = 49 \text{ qcm};$$

$$\text{Beanspruchung durch } K: = \frac{K \cdot \rho}{49} = \frac{600 \cdot 50}{5,75 \cdot 49} = 107 \text{ kg/qcm};$$

folglich können wir den Keil noch so stark anziehen, daß die Beanspruchung durch das Anziehen beträgt

$$= k_z - 107 = 200 - 107 = 93 \text{ kg/qcm};$$

also

$$N = 2 \cdot 14 \cdot 3,5 \cdot 93 = 2 \cdot 49 \cdot 93 = 9100 \text{ kg}.$$

Infolgedessen kommt die Nabe auf der dem Keil gegenüberliegenden Seite auf der Strecke AB zum Anliegen. Das Moment der Kraft K ist bestrebt, die Reibung an dieser Stelle zu überwinden. Dieses Reibungsmoment beträgt mithin für $\mu = 0,1$

$$\infty = 9100 \cdot 0,1 \cdot 8 = 7280 \text{ cmkg}, \text{ und das Moment der Kraft } K \\ = K \cdot R = 600 \cdot 50 = 30000 \text{ cmkg};$$

folglich tritt Bewegung ein. Bei wechselnder Drehrichtung ist dieses unbedingt zu vermeiden, da mit der Zeit ein Lockern infolge der Abnutzung die Folge ist.

Jetzt wird der Keil beansprucht und zwar

1. auf Flächenpressung, wobei k sich aus

$$14 \cdot 0,4 \cdot k \cdot \left(4 - \frac{0,4}{2}\right) = 30000 \text{ ergibt zu } k = \frac{30000}{14 \cdot 0,4 \cdot 3,8} = 1410 \text{ kg/qcm}.$$

Meist nur zulässig bis zu $k = 1000$ kg/qm. Mit $(s-t) = \frac{d}{20}$ folgt: $k = \frac{M_d}{d} \cdot \frac{1}{l \cdot \frac{d}{20}}$

$$k_d = \frac{M_d}{0,2 \cdot d^2} \text{ gibt } \frac{k}{k_d} = 8 \cdot \frac{d}{l}; \text{ woraus mit } \frac{l}{d} = 1,5 \text{ bis } 2 \text{ (S. 669)} \frac{k}{k_d} = \frac{8}{1,5} \text{ bis } \frac{8}{2} = 5,3 \text{ bis } 4.$$

2. auf Abscheren, wobei

$$2,2 \cdot 14 \cdot k_z \cdot 4 = 30000, \text{ woraus } k_z = \frac{30000}{2,2 \cdot 14 \cdot 4} = 244 \text{ kg/qm}$$

(Breite b obiger Tabelle bedingt, daß k_z etwa $= k_d$ der Welle).

Der Hohlkeil Fig. 32 ist lediglich auf Reibung zu berechnen; Reibungsmoment und Abmessungen wie vor. Größere Kräfte überträgt der Flachkeil Fig. 33, während der Federkeil auf Flächenpressung zu berechnen ist; desgl. der Rundkeil Fig. 34, dessen Anwendungsgebiet sich auf Stirnflächen beschränkt, wenn ein späteres Lösen nicht erforderlich, z. B. bei Kurbeln.



Fig. 32.

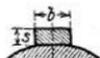


Fig. 33.

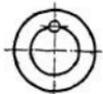


Fig. 34.

Reicht bei gleicher Drehrichtung die zulässige Flächenpressung oder bei wechselnder die Reibung nicht aus, so verwendet man zwei um 90° versetzte Keile, Fig. 35. Die Nabe ist, wie \cdots angedeutet, dem einen Keil gegenüber oft zu verstärken, da hier die Verstärkung durch den Arm entfällt. Es soll

aus diesem Grunde ein Keil möglichst stets einem Arm gegenüber sitzen; bei geteilten Naben dagegen ist der Keil stets in die Teilungsebene zu legen, da er andernfalls beim Anziehen die Schrauben beanspruchen würde. Um die Flächenpressung zu verringern, haben die Keilbahn und die Nabe gleiche Länge, Fig. 35.

Statt zweier Keile nimmt man ebensogut Tangentialkeile, Fig. 36. Bei ihnen ist ein Lockern ausgeschlossen, wenn beide Keilpaare so stark angezogen werden, daß auch das nicht unmittelbar die Kraft aufnehmende noch mit Pressung anliegt. Wenn z. B. die Welle treibt, wird bei Drehrichtung 1 das Keilpaar *a* die Kraft auf die Nabe weiterleiten; dann muß das Paar *b* ebenfalls noch mit Pressung anliegen. Lage einer Teilfuge der Nabe nach Figur. Keilstärke = $\frac{d}{10}$, Breite beider Keile = $\frac{3}{10} \cdot d$.

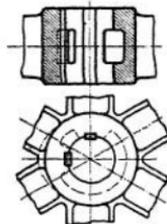


Fig. 35.

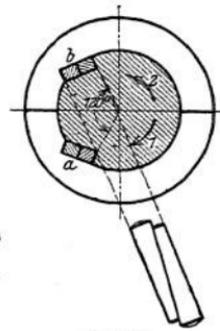


Fig. 36.

Nachteil der Keile mit Anzug: aufgekeilte Teile verziehen sich, daher sind für empfindliche Teile Schrumpfringe, konische Wellenenden mit Verschraubung, Fig. 138, oder konische geschlitzte Büchse, Fig. 205, vorzusehen.

b) Querkeile, deren Achse senkrecht zur Achse der zu verbindenden Teile. Sie erhalten einfachen oder doppelten Anzug je nach dem Maß der gewünschten Nachstellung. $\text{tg } \alpha$ schwankt aus gleichem Grunde innerhalb der Grenzen 1 : 10 bis 1 : 15, wenn öfteres Lösen erforderlich, in welchem Falle meist Keilsicherungen (Splinte oder Druckschrauben) vorgesehen werden, fallend bis 1 : 25, unter Umständen sogar bis 1 : 100, wenn die Verbindung dauernd. Die Ecken der Keile rundet man mit Rücksicht auf die Beanspruchung der zu verbindenden Teile ab.

Beispiele zeigen Fig. 37: Verbindung einer Kolbenstange mit einem Kreuzkopf. Die Ringfläche = Berührungsfläche zwischen Stange und Kreuzkopf ist auf Druck zu berechnen nach der Beziehung

$$\left(\frac{d^2 - d_1^2}{4}\right) \cdot k = \text{Dampfdruck} + \text{Zuschlag infolge Anziehens des Keiles}$$

z. B. = $1,25 \cdot P$, wenn *P* der Dampfdruck. Die Berührungsfläche zwischen Stange und Keil ist auf Flächenpressung aus der Gleichung

$$d_1 \cdot s \cdot k = 1,25 \cdot P$$

zu berechnen. Dabei darf die Zugbeanspruchung des neben dem Keil übrig bleibenden Stangenquerschnittes nicht zu groß werden und ist zu kontrollieren nach

$$\left(\frac{d_1^2 \pi}{4} - d_1 \cdot s\right) \cdot k_2 = 1,25 \cdot P.$$

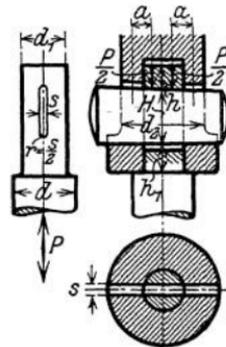


Fig. 37.

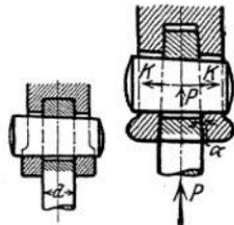


Fig. 38.

Fig. 39.

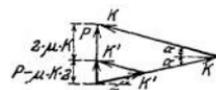


Fig. 40.

Wird k_2 zu groß, so verwendet man Konstruktionen nach Fig. 38 oder Fig. 39. Hierbei würde der Kreuzkopf bei reibungslosen Flächen mit der Kraft *K* auseinandergetrieben, Fig. 40. Da aber *K* ihrerseits wiederum Rei-

bung annähernd in Richtung von P , jedoch P entgegengesetzt erzeugt, kommt nur die Kraft $P - 2 \cdot \mu \cdot K$ zur Wirkung, welche den Wert K' bedingt. Man wählt etwa $\alpha = 5 - 6^\circ$.

Sodann ist h mit Rücksicht auf Abscheren zu berechnen, wobei jedoch k_b nur etwa $\frac{1}{4} \cdot k_b$ genommen werden kann, da gleichzeitig auch Biegung auftritt, also Berechnung aus der Beziehung

$$2 \cdot d_1 \cdot h \cdot \frac{k_b}{6} = 1,25 \cdot P.$$

Der Hülsendurchmesser d_2 ist mit Rücksicht auf Flächenpressung zwischen Hülse und Keil zu ermitteln aus

$$(d_2 - d_1) \cdot s \cdot k = 1,25 \cdot P;$$

dann h_1 wie oben aus

$$2 \cdot (d_2 - d_1) \cdot h_1 \cdot \frac{k_b}{6} = 1,25 \cdot P.$$

Zum Schluß ist der Keil selbst auf Biegung und Abscheren zu berechnen; Biegemoment etwa $\frac{P}{2} \cdot a$, wenn angenommen wird, daß $\frac{P}{2}$ je in der Entfernung $\frac{d_1}{4}$ von Stangenmitte angreift und a der Abstand von $\frac{P}{2}$ bis Mitte Hülse ist. Damit ergeben sich die Gleichungen:

$$\frac{P}{2} \cdot a = k_b \cdot \frac{s \cdot H^2}{6}$$

und

$$2 \cdot H \cdot s \cdot k_z = 1,25 \cdot P,$$

wobei man meist mit einem geringen Zuschlag für Schub zu H , das aus der ersten Gleichung bestimmt wird, auskommt.

Bei Ankerschrauben verstärkt man meist nach Fig. 41 das durch den Keil geschwächte Ende und hat dann im Anker und dem durch den Keil geschwächten Querschnitt gleiche Beanspruchung, also

$$P = \frac{d^2 \pi}{4} \cdot k_z = \left(\frac{D^2 \pi}{4} - D \cdot s \right) \cdot k_z.$$



Fig. 41.

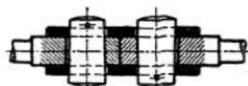


Fig. 42.

Im Mittel kann man nehmen

$$D = \frac{4}{3} \cdot d \quad \text{und} \quad s = \frac{D}{4}.$$

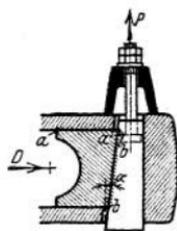


Fig. 43.

Weitere Anwendungsbeispiele zeigen Fig. 42: eine Stangenverbindung mittels Hülse, und Fig. 43: Stahlkeil zur Lagerstellung: $\tan \alpha = 1 : 4$ bis $1 : 10$. Die Schraube ist (vgl. nach S. 298), falls sie unter Last angezogen werden muß, zu berechnen nach der Beziehung $P = D \cdot \tan(\alpha + 2 \cdot \rho)$, wenn die Reibung auf den Flächen $a-a$ und $b-b$ gleich groß angenommen wird; und, wenn sie ohne Last angezogen wird, unter Vernachlässigung der Reibung nach $P = D \cdot \tan \alpha$. Zum Anziehen eines doppelseitigen Keiles unter Last ist erforderlich $P = D \cdot 2 \cdot \frac{\sin(\alpha + \rho) \cdot \cos \rho}{\cos(\alpha + 2 \rho)}$.

IV. Schrauben.

Die Schraube entsteht, wenn ein Prisma mit gleichbleibender Steigung auf einen Zylinder aufgewickelt wird. Geschieht das Aufwickeln im Sinne des Uhrzeigers gegen die Längsachse der Schraube gesehen, so ist die Schraube rechtsgängig

(bei Drehung rechts herum wird die Mutter heranbewegt), geschieht es entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn, so ist sie linksgängig (bei Drehung rechts herum wird die Mutter fort bewegt). Werden gleichzeitig zwei, drei oder noch mehr Prismen aufgewickelt, so entsteht die zwei- (oder doppel-), drei- bzw. mehrgängige Schraube im Gegensatz zu der gewöhnlichen, der eingängigen Schraube. Da das Prisma alle möglichen Querschnitte haben kann, sind unendlich viele Schraubenarten möglich. Gebrauchlich sind in der Grundform dreieckige Querschnitte: scharfgängiges Gewinde, rechteckige Querschnitte: flachgängiges Gewinde, trapezförmige Querschnitte: Trapezgewinde und kreisförmig begrenzte, rundes Gewinde. Der aufgewickelte Teil trägt den Namen Gewinde, der ursprüngliche Zylinder wird Kern genannt. Zu jeder Schraube gehört eine entsprechende Mutter, in die ein entsprechendes Gewinde eingeschnitten ist. Die Strecke in Richtung der Zylinderachse, um die sich die Schraube bzw. die Mutter bei einer Umdrehung bewegt, heißt die Steigung S ; der Abstand zweier Gewindegänge ist die Ganghöhe h , so daß bei eingängiger $h = S$, bei i -gängiger Schraube $S = i \cdot h$. Ist r der mittlere Radius des Gewindes, so ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{S}{2 \cdot r \cdot \pi} = \frac{i \cdot h}{2 \cdot r \cdot \pi}$$

Steigung bei der gewöhnlichen eingängigen Schraube = $\frac{h}{2 r \pi}$.

Zum Anziehen entgegen einer Last Q ist dann bei flachgängigem Gewinde lediglich zur Überwindung des Widerstandes auf den Gewindegängen ein Moment erforderlich (vgl. S. 296).

$$M_d = Q \cdot r \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varrho) = Q \cdot r \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha + \mu}{1 - \mu \cdot \operatorname{tg} \alpha} = Q \cdot r \cdot \frac{i \cdot h + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \mu}{2 \cdot r \cdot \pi - \mu \cdot i \cdot h}$$

und zum Herablassen

$$M_d = Q \cdot r \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \varrho) .$$

Meist ist $\alpha < \varrho$, M_d also negativ, die Schraube ist selbstsperrend.

Bei scharfgängiger Schraube gelten dieselben Gleichungen, nur tritt an Stelle von μ der Wert $\frac{\mu}{\cos \beta}$, wenn β der Spitzenwinkel des Gewindes, Fig. 44.

Da $\frac{\cos \beta}{2} < 1$, zieht sich die scharfgängige Schraube mithin schwerer

an, löst sich also auch schwerer als die flachgängige, weshalb sie vornehmlich als Befestigungsschraube Verwendung findet, während die flachgängige sich zur Aufnahme größerer Kräfte und zur Übertragung von Bewegungen eignet, da der Flächendruck infolge der größeren Berührungsf lächen zwischen Mutter und Bolzen, wie auch die Arbeitsverluste, geringer werden.



Fig. 44.

Meist wird das Gewinde rechtsgängig ausgeführt; linksgängig z. B., wenn rechtsgängiges sich losdrehen würde oder bei Ventilspindeln, bei denen stets Rechtsdrehung das Ventil schließen muß, oder aus ähnlichen Gründen.

a) **Gebrauchliche Gewinde:** Whitworth - Gewinde. Querschnitt Fig. 45, geschnitten wie auch bei den folgenden Figuren in Längsrichtung der Achse, also nicht normal zum Gewinde.



Fig. 45.

$$\frac{h}{a} = \operatorname{tg} 27 \frac{1}{2}^{\circ}, \quad a = \frac{h}{2 \cdot \operatorname{tg} 27 \frac{1}{2}^{\circ}} = 0,96 \cdot h .$$

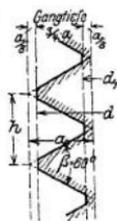


Fig. 46.

Gangbare Größen s. Tabelle S. 586.

Äuß. Gewinde-Ø	d mm	6	7	8	9	10	11	12	14	16	18	20
Kern-Ø	d_1 mm	4,59	5,59	6,24	7,24	7,89	8,89	9,54	11,19	13,19	14,48	16,48
Ganghöhe	h mm	1	1	1,25	1,25	1,5	1,5	1,75	2	2	2,5	2,5
Gangtiefe	t mm	0,705	0,705	0,88	0,88	1,055	1,055	1,23	1,405	1,405	1,76	1,76
Schlüsselweite	s_0 mm	12	13	15	16	18	19	21	23	26	29	32

Ferner das Sellers-Gewinde nach Fig. 46 (besonders in Amerika verbreitet), das infolge seiner geradlinigen Begrenzung leichter herstellbar.

$$a = 0,866 \cdot h.$$

Sellers-Gewinde.

Äuß. Gewindedurchmesser d Zoll engl.	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1
Ganghöhe h Zoll engl.	0,0250	0,0417	0,0500	0,0556	0,0625	0,0714	0,0769	0,0833	0,0909	0,1000	0,1111	0,1250
Zahlenwert $n = h/d$	0,2000	0,2222	0,2000	0,1778	0,1667	0,1633	0,1538	0,1481	0,1455	0,1333	0,1270	0,1250
Äuß. Gewindedurchmesser d Zoll engl.	$1\frac{1}{8}$	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{3}{8}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{5}{8}$	$1\frac{3}{4}$	$1\frac{7}{8}$	2	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	3
Ganghöhe h Zoll engl.	0,1429	0,1429	0,1667	0,1667	0,1818	0,2000	0,2000	0,2222	0,2222	0,2500	0,2500	0,2857
Zahlenwert $n = h/d$	0,1270	0,1143	0,1212	0,1111	0,1119	0,1143	0,1067	0,1111	0,0988	0,1000	0,0909	0,0952
Äuß. Gewindedurchmesser d Zoll engl.	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	4	$4\frac{1}{4}$	$4\frac{1}{2}$	$4\frac{3}{4}$	5	$5\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{2}$	$5\frac{3}{4}$	6
Ganghöhe h Zoll engl.	0,2857	0,3077	0,3333	0,3333	0,3478	0,3636	0,3810	0,4000	0,4000	0,4211	0,4211	0,4444
Zahlenwert $n = h/d$	0,0879	0,0879	0,0889	0,0833	0,0818	0,0808	0,0802	0,0800	0,0762	0,0766	0,0732	0,0741

Das S.-J.-Gewinde = Internationales metrisches Gewinde (Système International), Fig. 47, das eine größere Genauigkeit dadurch bedingt, daß nur Berührung auf den schrägen Gewindeflächen vorhanden ist. Es ist $a = 0,866 \cdot h$; die äußeren Kanten an Mutter und Bolzen werden in der Entfernung $\frac{a}{8}$ von der Spitze lotrecht begrenzt, die inneren beliebig abgerundet; der Spielraum soll jedoch $\approx \frac{a}{16}$ sein, meist wird er $= r = \frac{a}{16}$ gewählt, wobei der Krümmungsmittelpunkt auf die lotrechte Begrenzung fällt.

Ferner ist

$$\frac{b}{2} = \frac{a}{8} \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{8} \cdot \frac{h}{2}; \quad \text{daraus} \quad b = \frac{h}{8}.$$

$$\text{Gangtiefe} = \frac{3}{4} \cdot a + \frac{a}{16} = 0,704 \cdot h;$$

$$d_1 = d - 2 \cdot 0,704 \cdot h.$$

Das Löwenherz-Gewinde besonders für Feinmechanik und Elektrotechnik, Fig. 48. Es ist in ein Quadrat eingezeichnet, mithin $a = h$, Flankenneigung = 1:2.

Löwenherz-Gewinde.

Äußerer Ø d mm	1	1,2	1,4	1,7	2	2,3	2,6	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	7	8	9	10
Ganghöhe h mm	0,25	0,25	0,3	0,35	0,4	0,4	0,45	0,5	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
Kern Ø d_1 mm	0,625	0,825	0,95	1,175	1,4	1,7	1,925	2,25	2,6	2,95	3,375	3,8	4,15	4,5	5,35	6,2	7,05	7,9

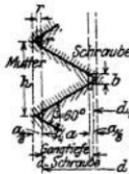


Fig. 47.

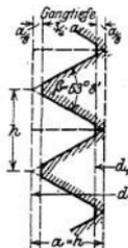


Fig. 48.

Gewinde.

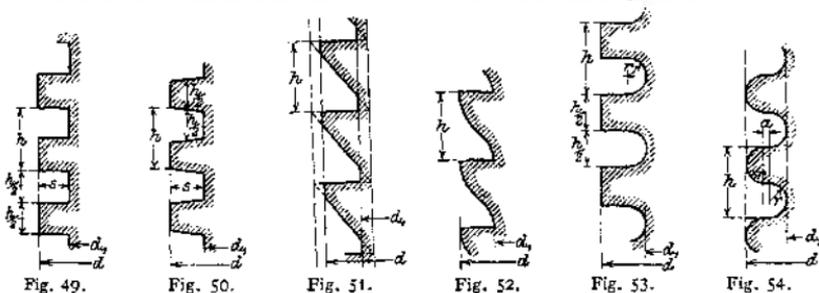
22	24	27	30	33	36	39	42	45	48	52	56	60	64	68	72	76	80
18,48	19,78	22,78	25,08	28,08	30,37	33,37	35,67	38,67	40,96	44,96	48,26	52,26	55,56	59,56	62,85	66,85	70,15
2,5	3	3	3,5	3,5	4	4	4,5	4,5	5	5	5,5	5,5	6	6	6,5	6,5	7
1,76	2,11	2,11	2,46	2,46	2,815	2,815	3,165	3,165	3,52	3,52	3,87	3,87	4,22	4,22	4,575	4,575	4,925
35	38	42	46	50	54	58	63	67	71	77	82	88	94	100	105	110	116

Für die Fälle, in denen das normale Whitworth-Gewinde zu grob ist, hat man ein Feingewinde nach demselben Querschnitt, jedoch mit größerer Gangzahl auf 1" geschaffen, s. S. 587.

Für Gasrohre, überhaupt schmiedeeiserne Rohre, Abdichtungen usw. verwendet man nach dem Whitworth-System ein Gewinde mit besonders kleiner Ganghöhe, das Gasgewinde, das nach dem lichten Durchmesser der Rohre, Tabelle S. 588, benannt wird.

Fig. 49 und 50 zeigen Flachgewinde, verwendet für Pressen, Leitspindeln usw., da Flächenpressung und mithin auch die Abnutzung geringer als bei den vorgenannten Gewinden ist. Abmessungen sind nicht mehr an Normalien gebunden und können, wie auch bei den folgenden Gewindearten, ganz beliebig gewählt werden. Die Steigung richtet sich nach der Ganghöhe und der Übersetzung der Leitspindel an der Drehbank und ist mit Rücksicht hierauf nach Zoll- bzw. mm-Maßen zu wählen. Ebenso ist die Gangtiefe s beliebig. Gebräuchlich ist eine doppelt so große Ganghöhe wie beim Whitworth-Gewinde und $s = \frac{h}{2}$.

Bei gleichem Material für Schraube und Mutter ist die Gewindestärke des Bolzens gleich der der Mutter, bei verschiedenem Material können sie verschieden groß gewählt werden. Fig. 50 hat größere Festigkeit gegenüber Fig. 49 ohne wesentlich größere Reibung. Fig. 51 und 52 zeigen Trapez-Gewinde, das nur für Belastung in einer Richtung Verwendung finden kann. Beim Halbrundgewinde nach Fig. 53 sind die inneren Ecken mit $r = \frac{h}{4}$ ausgerundet, beim Rundgewinde Fig. 54 auch die äußeren Ecken; a kann dabei bis auf 0 abnehmen. Diese beiden Arten eignen sich für Druck in beiden Richtungen; Rundgewinde hat den Vorteil, daß Staub und Dämpfe es nicht so leicht angreifen.



b) Die Berechnung der Schrauben erfolgt, wenn sie ohne Belastung eingeschraubt werden, diese also erst nach dem Einschrauben zur Wirkung kommen kann, nach der Beziehung

$$Q = \frac{d_1^2 \pi}{4} \cdot k_z,$$

und, wenn sie unter Belastung angezogen werden, auf zusammengesetzte Festigkeit nach der Gleichung (s. S. 469 u. f.)

$$k_r = k_z \cdot \left(0,35 + 0,65 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot k_d}{k_z} \right)^2} \right).$$

Beispiel: Mit einer normalen 2'' Whitworth-Schraube soll eine Last von 6,5 t gehoben werden. Dann ist

$$r = \frac{d + d_1}{4} = \frac{5,08 + 4,36}{4} = 2,36 \text{ cm};$$

da 9 Gänge auf die Länge $d = 5,08$ kommen:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2 \cdot r \cdot \pi} = \frac{5,08}{2 \cdot 2,36 \cdot \pi} = 0,038$$

$$\text{mit } \frac{\mu}{\cos \frac{\beta}{2}} = 0,15: \quad M_d = 6500 \cdot 2,36 \cdot \frac{0,038 + 0,15}{1 - 0,15 \cdot 0,038} = 2900 \text{ cm/kg.}$$

NB.: μ liegt innerhalb der Grenzen 0,03 und 0,35. $\frac{1}{\cos \frac{\beta}{2}} = \frac{1}{\cos 27 \frac{1}{2}^\circ} = \frac{1}{0,887} = 1,12$.

Damit

$$k_d = \frac{2900}{d_1^3 \pi} = \frac{2900 \cdot 16}{4,36^3 \cdot \pi} = 178 \text{ kg/qcm};$$

$$k_z = \frac{Q}{d_1^2 \pi} = \frac{6500}{14,9} = 436 \text{ kg/qcm};$$

$$k_r = 436 \cdot \left(0,35 + 0,05 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot 178}{436} \right)^2} \right) = 520 \text{ kg/qcm.}$$

Whitworth-Gewinde.

Äußerer Gewindedurchmesser		Kern-durchmesser		Anzahl der Gewindegänge auf		Höhe der Mutter	Höhe des Kopfes	Schlüsselweite	$Q = \frac{d_1^2 \pi}{4} \cdot k_z$, wenn $k_z = 480$ $k_z = 600$	
d	d_1	Querschnitt $\frac{d_1^2 \pi}{4}$	einen Zoll englisch	die Länge d	H	H_1	D	kg	kg	
engl. Zoll	mm	mm	qcm		mm	mm	mm			
$\frac{1}{4}$	6,35	4,72	0,175	20	5	6	4	13	85	105
$\frac{5}{16}$	7,94	6,13	0,295	18	$5 \frac{5}{8}$	8	6	16	140	175
$\frac{3}{8}$	9,52	7,49	0,441	16	6	10	7	19	210	265
$\frac{7}{16}$	11,11	8,79	0,607	14	$6 \frac{1}{8}$	11	8	21	290	365
$\frac{1}{2}$	12,70	9,99	0,784	12	6	13	9	23	375	470
$\frac{5}{8}$	15,87	12,92	1,311	11	$6 \frac{7}{8}$	16	11	27	630	785
$\frac{3}{4}$	19,05	15,80	1,961	10	$7 \frac{1}{2}$	19	13	33	940	1 175
$\frac{7}{8}$	22,22	18,61	2,720	9	$7 \frac{7}{8}$	22	15	36	1 305	1 630
1	25,40	21,33	3,573	8	8	25	18	40	1 715	2 145
$1 \frac{1}{8}$	28,57	23,93	4,498	7	$7 \frac{7}{8}$	29	20	45	2 160	2 700
$1 \frac{1}{4}$	31,75	27,10	5,768	7	$8 \frac{3}{4}$	32	22	50	2 770	3 460
$1 \frac{3}{8}$	34,92	29,50	6,835	6	$8 \frac{1}{4}$	35	24	54	3 280	4 100
$1 \frac{1}{2}$	38,10	32,68	8,388	6	9	38	27	58	4 030	5 030
$1 \frac{5}{8}$	41,27	34,77	9,495	5	$8 \frac{1}{8}$	41	29	63	4 560	5 700
$1 \frac{3}{4}$	44,45	37,94	11,31	5	$8 \frac{3}{4}$	44	32	67	5 430	6 780
$1 \frac{7}{8}$	47,62	40,40	12,82	$4 \frac{1}{2}$	$8 \frac{7}{16}$	48	34	72	6 150	7 690
2	50,80	43,57	14,91	$4 \frac{1}{2}$	9	51	36	76	7 160	8 950
$2 \frac{1}{4}$	57,15	49,02	18,87	4	9	57	40	85	9 060	11 320
$2 \frac{1}{2}$	63,50	55,37	24,08	4	10	64	45	94	11 560	14 450
$2 \frac{3}{4}$	69,85	60,55	28,80	$3 \frac{1}{2}$	$9 \frac{5}{8}$	70	49	103	13 820	17 280
3	76,20	66,90	35,15	$3 \frac{1}{2}$	$10 \frac{1}{2}$	76	53	112	16 870	21 090
$3 \frac{1}{4}$	82,55	72,57	41,36	$3 \frac{1}{4}$	$10 \frac{9}{16}$	83	58	121	19 850	24 820
$3 \frac{1}{2}$	88,90	78,92	48,92	$3 \frac{1}{4}$	$11 \frac{3}{8}$	89	62	130	23 480	29 350
$3 \frac{3}{4}$	95,25	84,40	55,95	3	$11 \frac{1}{4}$	95	67	138	26 860	33 570
4	101,60	90,75	64,68	3	12	102	71	147	31 050	38 810
$4 \frac{1}{4}$	107,95	96,65	73,37	$2 \frac{7}{8}$	$12 \frac{7}{32}$	108	76	156	35 220	44 020
$4 \frac{1}{2}$	114,30	102,98	83,29	$2 \frac{7}{8}$	$12 \frac{15}{16}$	114	80	165	39 980	49 970
$4 \frac{3}{4}$	120,65	108,84	93,04	$2 \frac{3}{4}$	$13 \frac{1}{16}$	121	85	174	44 660	55 820
5	127,00	115,19	104,2	$2 \frac{3}{4}$	$13 \frac{3}{4}$	127	89	183	50 020	62 530
$5 \frac{1}{4}$	133,35	120,96	114,9	$2 \frac{5}{8}$	$13 \frac{25}{32}$	133	93	192	55 159	68 940
$5 \frac{1}{2}$	139,70	127,31	127,7	$2 \frac{5}{8}$	$14 \frac{7}{16}$	140	98	201	61 102	76 378
$5 \frac{3}{4}$	146,05	133,05	139,0	$2 \frac{1}{2}$	$14 \frac{3}{8}$	146	102	209	66 740	83 420
6	152,40	139,39	152,6	$2 \frac{1}{2}$	15	152	106	218	73 250	91 560

Feingewinde nach Whitworth.

Äußerer Gewinde	1	1 1/8	1 1/4	1 1/2	1 3/4	1 7/8	2	2 1/4	2 1/2	2 3/4	3	3 1/4	3 1/2	3 3/4	4	4 1/4	4 1/2	4 3/4	5	5 1/4	5 1/2	5 3/4	6
	Zoll engl.	1	1 1/8	1 1/4	1 1/2	1 3/4	1 7/8	2	2 1/4	2 1/2	2 3/4	3	3 1/4	3 1/2	3 3/4	4	4 1/4	4 1/2	4 3/4	5	5 1/4	5 1/2	5 3/4
Kern	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
Gänge auf 1"	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
d ₁ mm	13,2	16,3	19,5	22,4	25,3	28,5	30,9	34	37,2	40,4	43,0	46,2	52,5	58,9	64,4	70,8	77,1	83,5	88,7	95,1	101,4	107,8	114,3
d ₂ mm	13,2	16,3	19,5	22,4	25,3	28,5	30,9	34	37,2	40,4	43,0	46,2	52,5	58,9	64,4	70,8	77,1	83,5	88,7	95,1	101,4	107,8	114,3

Beim Anziehen von gewöhnlichen Befestigungsschrauben tritt ebenfalls stets Drehungsbeanspruchung auf; diese wird jedoch meist einfach dadurch berücksichtigt, daß nur auf Zug gerechnet wird, wobei die Beanspruchung = $\frac{3}{4} \cdot k_z$ genommen wird, da k_r im Mittel = $\frac{1}{3} \cdot \sigma_z$. Damit ergibt sich die Gleichung

$$Q = \infty \frac{3}{4} \cdot k_z \frac{d_1^2 \pi}{4}$$

Die zulässige Beanspruchung kann im Belastungsfall II für Schmiedeseisen zu 600 kg/qcm bei sauberer Herstellung des Gewindes auf der Bank gewählt werden, wenn also das Material beim Gewindeschneiden nicht gelitten hat, sinkend bis auf $\infty 0,8 \cdot 600 = 480$ kg/qcm, je weniger diese Voraussetzung zutrifft. Da kleine Schrauben beim Anziehen bereits stark beansprucht werden, diese Beanspruchung aber nicht zu ermitteln ist, so muß man bei ihnen noch weiter herunter gehen, etwa bis auf die Hälfte obiger Werte. Aus gleichem Grunde sind Schrauben unter $\frac{5}{8}$ '' nach Möglichkeit zu vermeiden, da sie schon von Hand abgedreht werden können.

Beim Anziehen ist meist noch die Reibung zwischen Mutter und Unterlage zu überwinden. Hierzu ist ein Moment erforderlich

$$M_r = Q \cdot \mu \cdot \frac{D_1 + D_2}{4}$$

wenn die Mutter auf der Ringfläche zwischen den Durchmessern D_1 und D_2 aufliegt. Meist $D_1 =$ Schlüsselweite D , $D_2 = \infty d$.



Fig. 55.

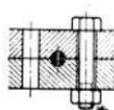


Fig. 56.

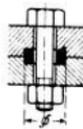


Fig. 57.

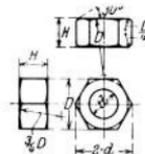


Fig. 58.

Müssen Kräfte senkrecht zur Achse aufgenommen werden, so verwendet man, wenn sie gering sind, gedrehte Schrauben, bei größeren konische Bolzen, Fig. 55, mit $\text{tg } \alpha = \frac{1}{20}$ bis $\frac{1}{10}$, oder nimmt die Kräfte durch besondere Hilfsmittel auf, z. B. durch runde Bolzen, Fig. 56, die im Durchmesser etwas größer als das Loch gewählt werden, so daß der Bolzen mit geringer Pressung anliegt, mithin ein Lockern ausgeschlossen ist, durch Federn oder Keile mit Anzug, Entlastungsringe, Fig. 57, oder man bildet die zu verbindenden Teile so aus, daß sie selbst die Kräfte aufnehmen können und die Schrauben nur noch zum Zusammenhalten dienen.

c) Die **Muttern** werden meist sechseckig ausgeführt; Kanten abgeschragt nach einem Kegel unter 30° , dessen Grundkreisdurchmesser die Schlüsselweite D ; Grenzmaß für rohe und bearbeitete Muttern und Köpfe, das der Schlüssel nicht nach innen und die Mutter bzw. der Kopf nicht nach außen über-

Gasgewinde nach Whitworth.

Lichter (Zoll engl.)	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	2	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	3
Rohr $\left(\begin{array}{l} \text{Zoll engl.} \\ \text{D mm} \end{array} \right.$	3,175	6,350	9,525	12,700	15,875	19,050	22,225	25,400	28,574	31,749	34,924	38,099	41,274	44,449	50,799
Äuß. Gew. (Zoll engl.)	0,3825	0,5180	0,6563	0,8257	0,9022	1,0410	1,1890	1,3090	1,4920	1,6500	1,7450	1,8825	2,0210	2,0470	2,3470
Winkel $\left(\begin{array}{l} \text{Zoll engl.} \\ \text{d mm} \end{array} \right.$	9,7153	13,1560	16,6697	20,9724	22,9154	26,4409	30,2000	33,2479	37,8961	41,9992	44,3224	47,8146	51,3324	51,9927	59,6126
Kern $\left(\begin{array}{l} \text{Zoll engl.} \\ \text{d}_1 \text{ mm} \end{array} \right.$	0,3367	0,4506	0,5889	0,7342	0,8107	0,9495	1,0975	1,1925	1,3755	1,5335	1,6285	1,7660	1,9045	1,9305	2,2305
Zahl der Gänge auf 1" engl.	8,5520	11,4450	14,9578	18,6483	20,5913	24,1168	27,8759	30,2889	34,9371	38,9302	44,1631	44,8556	48,3734	49,0337	56,6536
	28	19	19	14	14	14	14	11	11	11	11	11	11	11	11

schreiten soll. Als Durchdringungen entstehen mithin Hyperbeln. Statt dieser zeichnet man Kreise nach den in Fig. 58 eingeschriebenen Maßen. Den umschriebenen Kreis wählte man früher allgemein im Durchmesser $= 2 \cdot d$, was

$$D = 1,732 \cdot d$$

ergibt; heute meist

$$D = 1,4 \cdot d + 0,4 \text{ cm.}$$

Die Mutterhöhe bestimmt sich mit Rücksicht auf Flächenpressung, Abscheren und Biegung. Beischarfängigen Befestigungsschrauben wählt man dabei, um ein Fressen zu vermeiden,

$$k = \frac{1}{4} \text{ bis } \frac{1}{6} \cdot k_z = 150 - 120 \text{ kg/qcm}$$

bei $k_z = 600$ für Schmiedeseisen; für Stahl/Stahl oder Stahl/Bronze $k = \sim 300$; bei Bewegungsschrauben nur etwa halb so viel. Bei Schmiedeseisen bedingt die Flächenpressung bei z Gewindegängen in der Mutter die Gleichung

$$Q = \frac{d_1^2 \pi}{4} \cdot k_z = \left(\frac{d^2 \pi}{4} - \frac{d_1^2 \pi}{4} \right) \cdot z \cdot k.$$

Für normales Whitworth-Gewinde folgt daraus als Mittelwert die Mutterhöhe $= H = d$, während für Abscheren und Biegung, wobei der Kerndurchmesser maßgebend ist, mit $\sim \frac{7}{8} \cdot h$ als Gewindehöhe sich ergibt

$$Q = \frac{d_1^2 \pi}{4} \cdot k_z = d_1 \cdot \pi \cdot \left(\frac{7}{8} \cdot h \right) \cdot z \cdot k_z;$$

$$k_z = k_z: H = \infty 0,25 \cdot d$$

$$\text{bzw. } Q \cdot \frac{a}{3} = k_b \cdot \frac{d_1 \cdot \pi \cdot z \cdot \left(\frac{7}{8} \cdot h \right)^2}{6};$$

$$k_b = k_z: H = \infty 0,5 \cdot d.$$

Es ist also $H = d$ zu wählen.

Bei den übrigen Gewindearten ist die Mutterhöhe ebenso zu berechnen. Bei Bewegungsschrauben und Schmiedeseisen auf Schmiedeseisen im Mittel

$$H = 1,5 \text{ bis } 2 \text{ bis } 2,5 \cdot d.$$

Besteht die Mutter aus irgend einem anderen Material, so ist ihre Höhe entsprechend der Festigkeit dieses Materials höher oder niedriger zu machen. Bei Grauguß meist $H = 1,2$ bis $1,5$ bis $2 \cdot d$. Will man eine normale Mutter verwenden, so wählt man einen entsprechend stärkeren Bolzen, der dann nicht voll ausgenutzt wird.

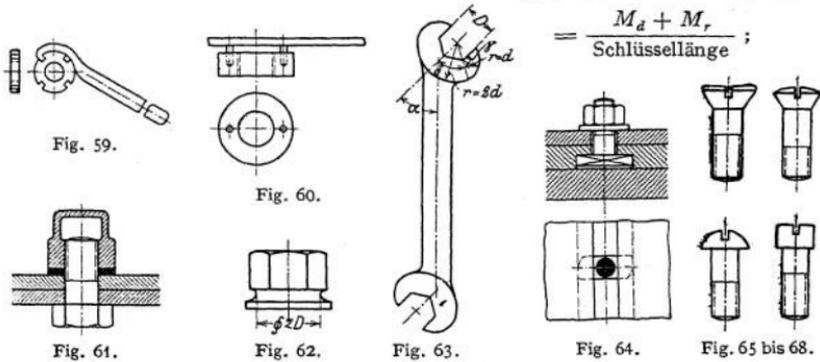
Tunlichst sollen Schraube und Mutter beide Zug- oder beide Druckbeanspruchung erhalten, damit beide sich gleichzeitig längern oder verkürzen, mithin die Gewindegänge möglichst gleichmäßig tragen.

Fig. 59 und 60 zeigen runde Muttern, letztere versenkt, nebst zugehörigen Schlüsseln; Fig. 61 eine geschlossene Mutter zum Zweck, ein Austreten von Flüssigkeit durch das Gewinde hindurch zu verhindern; Dichtung unter der Mutter, Hohlraum zweckmäßig mit Fett ausgefüllt; Fig. 62 schließlich eine bearbeitete Mutter mit Fußscheibe. Der Zweck der Eindrehung ist, die Bearbeitung des Sechskantes bequem vornehmen zu können, sonach muß ihr Durchmesser $\cong D$ sein. Auch bearbeitete Muttern ohne Fußscheibe erhalten nur einseitige Abschragung der Kanten.

d) Die Köpfe erhalten eine Höhe

$$H_1 = 0,7 \text{ bis } 0,8 \cdot H$$

(Fig. 69 und 70) mit Rücksicht auf Kantenpressung beim Anziehen. Für genügenden Platz hierzu neben Kopf und Mutter ist stets zu sorgen. Für $\alpha = 15^\circ, 30^\circ$ oder 45° in Fig. 63 genügt mit Umdrehen des Schlüssels bereits eine Drehung von 30° ; bei Steckschlüsseln 60° . Zum Anziehen ist am Schlüsselende eine Kraft aufzuwenden



ev. Gasrohr als Verlängerung aufsetzen. Quadratische Köpfe (ev. auch Muttern) verwendet man meist dort, wo Einlassen in Holz erforderlich, Schlüsselweite $= D$ quadratisch, Fig. 70; längliche Köpfe, wenn ein Maschinenteil Drehung der Schraube verhindern soll, z. B. Fig. 64. Bei runden Köpfen kann zum Festhalten ein Stift oder eine Nase dienen. Andere Kopfformen zeigen Fig. 65, 66, 67 und 68.

Die Herstellung der Köpfe geschieht meist im Gesenk, der rohen Muttern meist aus Sechskanteisen, große werden geschmiedet, zu bearbeiteten Muttern kann auch gezogenes Sechskanteisen verwandt werden.

e) Ausführungsbeispiele: Fig. 69 zeigt die meist vorkommende Verbindungsschraube; der Durchmesser, Längen l und l_1 bestimmen bereits die Schraube; Fig. 70 desgl. mit viereckigem Kopf. Fig. 71 eine Stiftschraube mit zugehörigem Stiftsetzer zum Einschrauben. Man kann auch in der Mitte der Schraube ein Stück Gewinde fehlen lassen, um hier mit einem Schlüssel anfassen zu können, oder sie mit Hilfe zweier Muttern einschrauben. Fig. 72 die zu vermeidende Kopfschraube. Fig. 73 eine leicht lösbare Verbindung mit Flügelmutter und drehbarer Unterlegscheibe, um schiefes Anziehen zu vermeiden. Statt der Schraube kann auch ein Bügel genommen werden. Fig. 74 und 75 zwei Distanzbolzen; beim letzteren ist die Entfernung A leicht zu ändern. Diese kann auch statt durch die Verstärkung des Bolzens oder die beiden inneren Muttern durch ein Gasrohr eingehalten werden. Soll die Beanspruchung im glatten Bolzen möglichst gleich der des Teiles mit Gewinde sein, um ein Abreißen infolge von Stößen

zu vermeiden, so schwächt man den glatten Bolzen, am einfachsten durch Abdrehen, Fig. 76, Parsons-Bolzen genannt. Die Berührungsstellen behalten natürlich den größeren Durchmesser. Anker können aus gleichem Grunde verstärkte Enden erhalten (Fig. 80). Fig. 77 und 78 zwei Steinschrauben, letztere aus Flacheisen. Fig. 79 desgl. mit Gußhülse. Sind Zugkräfte aufzunehmen, kommen Ankerschrauben in Frage: Fig. 80 mit eingemauerter Platte, Anker später von oben eingehängt, wobei ein eventl. überstehendes Ende auf Montage

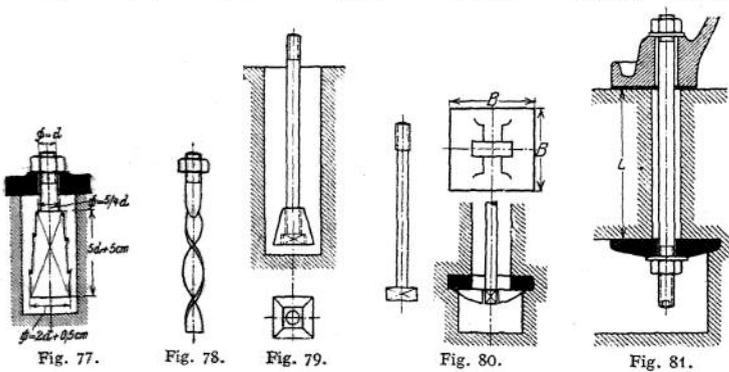
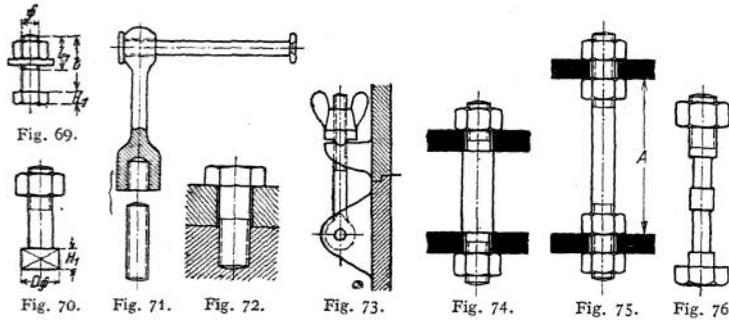
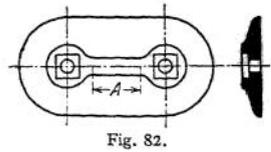


Fig. 82 zeigt schließlich eine Doppelwandankerplatte, Ecken abgerundet, Fig. 80, Ecken meist scharf; Mittelteil A, Fig. 82, geradlinig begrenzt, um das Modell für beliebige Ankerentfernung verwenden zu können.



Beispiel: Ein Anker soll 1000 kg in vertikaler und 800 kg in horizontaler Richtung aufnehmen. Dann ist, wenn für die Reibung zwischen Fundament und Maschine $\mu = 0,3$ genommen wird, der Anker mindestens anzuziehen mit einer Kraft

$$= 1000 + \frac{800}{\mu} = 3670 \text{ kg;}$$

zur Sicherheit mit $1,5 \cdot 3670 = \infty 5500 \text{ kg.}$

Mit $k_2 = 600$ genügt $1\frac{1}{8}''$. Die Ankerlänge bestimmt sich aus der Bedingung, daß 1000 kg das auf der Ankerplatte ruhende Mauerwerk nicht heben dürfen, bzw., wenn dieses Mauerwerk ein Klotz von $800 \times 800 \text{ mm}$ ist, muß die Länge mindestens (Fig. 81)

$$L = \frac{1000}{0,8 \cdot 0,8 \cdot \gamma} \text{ sein; } \gamma \text{ für Ziegelmauerwerk} = 1600 \text{ kg/cbm, ergibt}$$

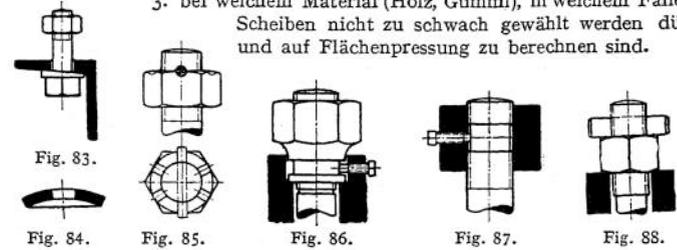
$$L = \frac{1000}{0,8 \cdot 0,8 \cdot 1600} = 0,98 \text{ m, zur Sicherheit} = 1200 \text{ mm.}$$

Die Größe der Ankerplatte folgt schließlich unter Vernachlässigung des Loches aus der Beziehung (Fig. 80).

$$B^2 \cdot k = 5500; \text{ mit } k = 10 \text{ kg/qcm zu } B = \sqrt{550} = 23,5 \text{ cm } \approx 250 \text{ mm Seitenlänge.}$$

f) Unterlegscheiben (rohe bzw. bearbeitete, Tabelle s. Bolzen S. 592) finden Verwendung

1. wenn das Schraubenloch wesentlich größer als der Bolzen ist;
2. bei unebener Oberfläche oder wenn diese nicht senkrecht zur Schraubenachse, Fig. 83: Flansch eines U-Eisens;
3. bei weichem Material (Holz, Gummi), in welchem Falle die Scheiben nicht zu schwach gewählt werden dürfen und auf Flächenpressung zu berechnen sind.



g) Schraubensicherungen sind erforderlich, wenn die Gefahr des Lockerns infolge des Auftretens von Stößen vorliegt, da die Stöße eine vorübergehende Längung der Schraube bewirken, so daß die Muttern zu diesen Zeiten frei auf dem Bolzen sitzen können. Mithin kann man eine Sicherung dadurch schaffen, daß man

1. eine zweite Mutter so stark anzieht, daß die infolge des Anziehens bedingte Längung des Bolzens zwischen beiden Muttern größer als die infolge der Stöße ist. Sitzt diese Mutter unmittelbar über der ersten, so trägt meist nur diese Gegenmutter, mithin ist ihre Höhe mindestens $= d$ zu wählen, da sie außer der Last noch die Kraft infolge des Anziehens auszuhalten hat;
2. dafür sorgt, daß die Mutter niemals frei auf dem Bolzen sitzt. Dies kann man erreichen durch Einschalten einer federnden Unterlage, etwa aus Gummi, oder federnder Unterlegscheiben, z. B. der Schraubenspannplatte Fig. 84.
3. die Mutter mechanisch sichert, z. B. nach Fig. 85; Nachstellung um 60°

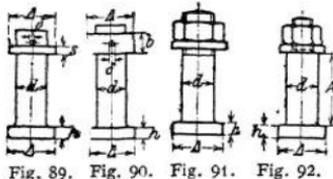
Gewichte von schweißeisernen Muttern, Köpfen ($\gamma = 7,8$), Unterlegscheiben und Bolzen. Whitworth-Gewinde.

Gewindedurchmesser Zoll engl.	1/4	5/16	3/8	7/16	1/2	5/8	3/4	7/8	1	1 1/8	1 1/4	1 3/8	1 1/2	1 5/8	1 3/4	1 7/8	2	2 1/4	2 1/2	2 3/4	3	3 1/4	3 1/2	3 3/4	4	4 1/4	4 1/2	4 3/4	5	5 1/4	5 1/2	5 3/4	6
Gewicht der Mutter kg	0,005	0,011	0,020	0,026	0,036	0,058	0,105	0,137	0,187	0,274	0,367	0,467	0,572	0,736	0,877	1,112	1,294	1,788	2,435	3,194	3,606	5,150	6,229	7,525	9,318	10,83	12,72	14,99	17,32	19,87	22,90	25,67	28,98
„ des sechseckig. Kopfes kg	0,005	0,010	0,018	0,024	0,032	0,054	0,096	0,131	0,195	0,274	0,372	0,473	0,614	0,778	0,970	1,191	1,405	1,966	2,686	3,512	4,491	5,736	7,078	8,619	10,51	12,49	14,71	17,38	20,13	23,16	26,75	30,09	34,03
„ des quadrat. Kopfes kg	0,005	0,012	0,020	0,028	0,037	0,063	0,110	0,152	0,225	0,316	0,429	0,545	0,692	0,898	1,120	1,375	1,618	2,227	3,101	4,055	5,186	6,624	8,173	9,952	12,14	14,43	16,99	20,07	23,25	26,74	30,88	34,75	39,29
„ der Unterlegscheibe kg	0,003	0,004	0,007	0,009	0,013	0,018	0,036	0,049	0,058	0,062	0,074	0,113	0,170	0,196	0,247	0,274	0,344	0,487	0,585	0,801	1,118	1,311	1,646	1,970	2,403	2,879	3,454	3,871	4,467	5,088	5,954	6,773	7,664
„ von 100 mm Bolzen kg	0,025	0,039	0,056	0,076	0,099	0,154	0,233	0,302	0,395	0,500	0,618	0,747	0,889	1,043	1,210	1,389	1,581	2,001	2,470	2,989	3,557	4,175	4,842	5,558	6,324	7,139	8,004	8,516	9,881	10,90	11,96	13,07	14,23

oder Fig. 86: Pennsche Sicherung, Nachstellung beliebig; ebenso Fig. 87, wobei die Sicherungsschraube in der Mutter selbst angebracht ist und auf den Bolzen drückt, bei dem an dieser Stelle das Gewinde entfernt ist. Wird der Splint ähnlich Fig. 85 durch die Mitte der Mutter gesteckt, so ist eine Nachstellung um 180° nur bei länglichem Loch in Mutter oder Bolzen möglich; wird er oberhalb nur im Bolzen angebracht, so verhindert er lediglich das Verlorengehen der Mutter. Fig. 88 schließlich zeigt eine Sicherung mittels Keil. Sie eignet sich besonders dort, wo der Bolzen starken Längungen durch Stöße ausgesetzt ist, z. B. für Fundamentanker an Dampfhammern usw.

V. Bolzen.

Sie finden Verwendung zur Verbindung einzelner Teile, besonders wenn sie gelenkartig sein soll. Ihre Berechnung hat auf Abscheren, Flächenpressung und Biegung zu erfolgen. Fig. 90 hat vor Fig. 89 den Vorteil, daß eine Drehung der Unterlegscheibe den Splint nicht abnutzen kann. Erscheint die Splintsicherung nicht ausreichend, so greift man zu Ausführungen nach Fig. 91 bzw. 92. Der Bolzen von der Länge A wird durch das Anziehen nicht beansprucht.



Normalien der preußischen Staatsbahnen.

Schaftdurchmesser d mm gedreht	10	13	16	20	23	26	30	33	36	40	43	46	50	} Fig. 89 und 90 s mm auch für Fig. 91.
Höhe des Bolzenkopfes . . . h mm	5	6	7	8	9	10	10	11	11	12	12	13	13	
Höhe der Unterlegscheibe . . s mm	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	
Höhe des Splintringes . . . b mm	10	11	12	13	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
Durchmesser dieser drei . . . Δ mm	16	22	26	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	
Desgleichen für Fig. 91	22	28	36	44	50	56	62	68	74	80	86	92	100	
Splintdurchmesser δ mm	4	5	5	6	6	7	7	8	9	9	10	10	10	

VI. Zapfen.

Übergang zur Welle s. S. 600.

1. Tragzapfen,

Halszapfen genannt, wenn sie in Wellenmitte sitzen, oder Stirnzapfen, wenn am Wellenende; Druckrichtung vornehmlich senkrecht zur Achse.

Der Zapfen habe die beliebige Gestalt der Fig. 93; dann ergibt sich, wenn bezeichnet:

dF ein beliebiges Flächenteilchen, bestimmt durch die Koordination z bzw. $z + dz$ und die Winkel φ_1 bzw. $\varphi_1 + d\varphi_1$;

φ_2 den Winkel zwischen der Normalen AN und dem Halbmesser AR (als Projektionen mit $[\varphi_2]$ angedeutet);

φ den Winkel zwischen der Normalen AN und der y -Richtung (als Projektion mit $[\varphi]$ angedeutet), das ist auch zugleich der Winkel zwischen der Pressung p kg/qcm und dem Lagerdruck P kg;

$$P = \int_{z=0}^{z=l} \int_{\varphi_1=-\varphi_0}^{\varphi_1=+\varphi_0} p \cdot dF \cdot \cos \varphi .$$

Bei einem neuen Zapfen ist hierin p , bei einem eingelaufenen dagegen die Abnutzung in Richtung des Lagerdruckes P konstant. Unter Berücksichtigung dieses Umstandes nimmt, wenn der Halbmesser A mit ϱ bezeichnet wird, die Gleichung die Form an:

$$P = \frac{p \cdot \varrho}{\cos \varphi} \cdot \int_{z=0}^{z=l} \cos \varphi_2 \cdot dz \int_{\varphi_1 = -\varphi_0}^{\varphi_1 = +\varphi_0} \cos^2 \varphi_1 \cdot d\varphi_1,$$

wobei $\frac{p \cdot \varrho}{\cos \varphi}$ konstant ist.

Das zum Drehen erforderliche Moment beträgt ebenso

$$M = \int_{z=0}^{z=l} \int_{\varphi_1 = -\varphi_0}^{\varphi_1 = +\varphi_0} p \cdot dF \cdot \mu \cdot \varrho$$

bzw.

$$= \mu \cdot \frac{p \cdot \varrho}{\cos \varphi} \int_{z=0}^{z=l} \varrho \cdot dz \int_{\varphi_1 = -\varphi_0}^{\varphi_1 = +\varphi_0} \cos \varphi_1 \cdot d\varphi_1.$$

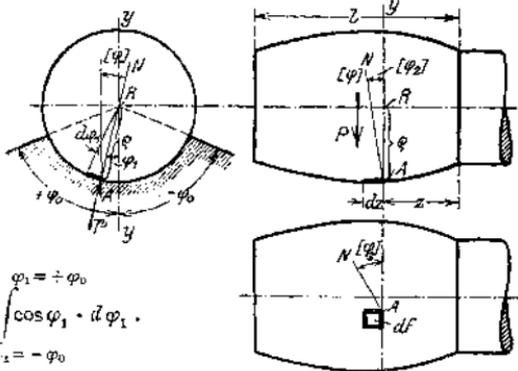


Fig. 93.

a) Bei einem **zylindrischen Zapfen**, Fig. 94, ist

$$\varrho = r = \text{konst.}, \quad \varphi_2 = 0, \quad \cos \varphi_2 = 1,$$

mithin:

$$\int_{z=0}^{z=l} \cos \varphi_2 \cdot dz = l;$$

damit bei einem neuen Zapfen:

$$P = 2 \cdot p \cdot r \cdot l \cdot \sin \varphi_0;$$

daraus folgt für

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4} = 45^\circ: \quad p = \frac{P}{2 \cdot r \cdot l} \cdot 1,41,$$

und für

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} = 90^\circ: \quad p = \frac{P}{2 \cdot r \cdot l}.$$

Bei einem eingelaufenen Zapfen ist:

$$P = \frac{p \cdot r}{\cos \varphi_1} \cdot l \cdot (\sin \varphi_0; \cos \varphi_0 + \varphi_0)$$

bzw.

$$p = \frac{P \cdot \cos \varphi_1}{r \cdot l} \cdot \frac{1}{\sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 + \varphi_0}.$$

Daraus ergibt sich der größte Druck für $\varphi_1 = 0$; er beträgt für

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4}: \quad p_{\max} = \frac{P}{2 \cdot r \cdot l} \cdot 1,55,$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}: \quad p_{\max} = \frac{P}{2 \cdot r \cdot l} \cdot \frac{4}{\pi} = \frac{P}{2 \cdot r \cdot l} \cdot 1,27.$$

ρ radial aufgetragen ergibt Fig. 95 für den neuen und Fig. 96 für den eingelaufenen Zapfen; es schmiert sich also der eingelaufene besser, da das Öl bei a unter der Pressung = 0 leicht eintreten kann.

Das erforderliche Drehmoment ergibt sich ebenso bei einem neuen Zapfen zu

$$M = \mu \cdot P \cdot r \cdot \frac{\varphi_0}{\sin \varphi_0},$$

also für

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4}: M = \mu \cdot P \cdot r \cdot 1,11,$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}: M = \mu \cdot P \cdot r \cdot \frac{\pi}{2} = \mu \cdot P \cdot r \cdot 1,57,$$

und bei einem eingelaufenen Zapfen zu:

$$M = 2 \cdot \mu \cdot P \cdot r \cdot \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 + \varphi_0},$$

also für

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4}: M = \mu \cdot P \cdot r \cdot 1,1,$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}: M = \mu \cdot P \cdot r \cdot \frac{4}{\pi} = \mu \cdot P \cdot r \cdot 1,27 = \mu_1 \cdot P \cdot r,$$

wenn für diesen mit Rücksicht auf die Flächenpressung meist ausgeführten Fall $\frac{4}{\pi} \cdot \mu = \mu_1 = \text{Zapfenreibungskoeffizient}$ gesetzt wird.

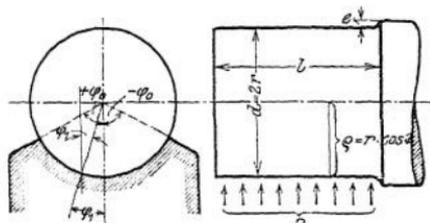


Fig. 94.

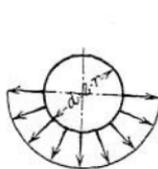


Fig. 95.



Fig. 96.

Fig. 69, S. 302, stellt $\mu_1 = f(k) = f\left(\frac{P}{l \cdot d}\right)$ dar für $n = 5,5$ bis 1100 Um-

drehungen in der Minute. Bei den Versuchen wurde ein Sellerslager mit Graugußschalen und Ringschmierung benutzt, Bohrung 70 mm, Lagertemperatur 25° C. Alle Kurven fallen bis zu einem Minimum und steigen dann wiederum an. Dieses Ansteigen ist dadurch bedingt, daß die Ringschmierung nicht mehr die für die steigende Pressung erforderliche Menge Öl lieferte. Es versagt also die Ringschmierung bei geringer Tourenzahl.

Fig. 71, S. 303, gibt wieder μ_1 als Funktion der Umdrehzahl bzw. der Gleitgeschwindigkeit v . Es wurde dasselbe Lager bei gleicher Temperatur benutzt. Alle Kurven enden dabei für $v = 0$ im Punkte $\mu_1 = 0,14$, der Reibung der Ruhe für Schmiedeeisen auf Grauguß; das Schmiermaterial ist also ohne Einfluß.

Fig. 66 und 67, S. 301, veranschaulichen μ_1 als Funktion der Lagertemperatur bei den eingeschriebenen mittleren Pressungen k für $n = 1100$ oder

$$v = \frac{0,07 \cdot \pi \cdot 1100}{60} = 4,03 \text{ m/sek}$$

beim gleichen Lager. Alle Kurven enden dort, wo der Beharrungszustand erreicht ist.

Im Mittel beträgt etwa für

gewöhnliche Ringschmierlager	$\mu_1 = 0,02$ bis $0,04$
Lager mit Docht- oder Tropföhlern	$\mu_1 = 0,04$ bis $0,07$
Lager mit Schmierloch	$\mu_1 = 0,07$ bis $0,10$
Eisenbahnschlager mit Weißmetall	$\mu_1 = 0,01$
Eisenbahnschlager mit Bronze	$\mu_1 = 0,014$.

Als Mittelwert für Stahlzapfen in Metallagern wählt man meist

$$\mu = \frac{1}{20}, \quad \text{mithin} \quad \mu_1 = \frac{4}{\pi} \cdot \mu = \infty \frac{1}{16}$$

ebenso die Reibung der Ruhe beim Anlauf für

Ringschmierlager mit Graugußschalen	$\mu_1 = 0,14$
Ringschmierlager mit Weißmetall	$\mu_1 = 0,24$.

Die Berechnung erfolgt:

1. auf Festigkeit mit Zuschlag für Abnutzung,
2. auf Auflagerdruck, bedingt durch das Schmiermittel, das bei zu großer Pressung sich auf den Flächen nicht mehr halten würde,
3. auf Erwärmung, da die durch die Reibung erzeugte Wärme durch das Lager bzw. den Zapfen fortgeleitet werden muß. Sie spielt bei unterbrochenem Betriebe unter Umständen keine Rolle, wenn während des Stillstandes ein Ausgleich eintritt, ist aber bei rasch laufenden Maschinen häufig allein maßgebend.

Unter der Annahme, das Lager liege auf der ganzen Länge l gleichmäßig an, gibt die Rücksicht auf 1 für den vollen Stirnzapfen,

Fig. 94, die Gleichung

$$P \cdot \frac{l}{2} = W \cdot k_b = \infty 0,1 \cdot d^3 \cdot k_b$$

und für den hohlen Stirnzapfen, Fig. 97,

$$P \cdot \frac{l}{2} = \infty 0,1 \cdot \frac{d^4 - d_1^4}{d} \cdot k_b.$$

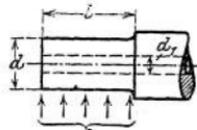


Fig. 97.

Meist liegt bei stillstehendem Zapfen für k_b Belastungsfall I oder II vor, bei sich drehendem Fall III (s. S. 404). Bei Halszapfen ergibt sich der Durchmesser meist aus der Berechnung der Welle, seine Länge ist mit Rücksicht auf Flächenpressung nach 2 zu bestimmen, mitunter ist auch d mit Rücksicht auf Erwärmung zu ermitteln.

Wird $P = k \cdot l \cdot d$ eingesetzt, dann ergibt sich für den vollen Stirnzapfen

$$\frac{l}{d} = \sqrt[3]{0,2 \cdot \frac{k_b}{k}}$$

k ist dabei die auf die Projektionsfläche des Zapfens bezogene mittlere Flächenpressung und kann um so höher gewählt werden, je genauer die mathematische Form für Zapfen und Lager erreicht (gehärtete, geschliffene und polierte Zapfen) und je schwerflüssiger das Schmiermaterial ist; bei unterbrochenem Betriebe größer als bei Dauerbetrieb; um so kleiner, je höher die Lagertemperatur im Betriebe (Kühlung durch Luft, Wasser), ferner je weniger die Flächen rein gehalten werden können (Aufbereitungen für Kohle, Sand, Zement). Bei veränderlicher Belastung (Riemen, Seil) ist k meist mit Rücksicht auf P_{\max} zu wählen.

Ein großes k bedingt rasche Abnutzung; im Mittel kann man etwa wählen für

Tiegelstahl, gehärtet, auf gehärtetem Gußstahl	k bis 150 kg/qcm
Tiegelstahl, gehärtet, auf Bronze oder Weißmetall	k „ 90 „
Tiegelstahl, ungehärtet, auf Bronze oder Weißmetall	k „ 60 „
Flußeisen, Schweißeisen auf Bronze oder Weißmetall	$k = 30$ bis 40 „

je nach Beschaffenheit der Oberfläche des Zapfens,

Gußeisen auf Bronze je nach Beschaffenheit der Oberfläche des Gußeisens $k = 25$ bis 30 kg/qcm
 Flußeisen, Schweißeisen auf Grauguß oder Pockholz. . . k bis 25 „

ferner als Sonderwerte:

Kurbel- und Kreuzkopfpapfen aus Gußstahl auf Bronze
 bei Dampfmaschinen $k = 60$ bis 90 „
 Kurbel- und Kreuzkopfpapfen aus Gußstahl auf Bronze
 bei Verbrennungskraftmaschinen $k_{\max} \leq 100$ „ 125 „
 Kurbel- und Kreuzkopfpapfen der Lokomotiven . . . $k = 100$ „ 150 „
 Kurbelzapfen der Scheren (unterbrochener Betrieb) . . k bis 200 „
 Halszapfen der Schwungradwellen von Dampfmaschinen k „ 15 „
 Dampfmaschinen mit großem n erhalten geringeres k .

Die unter 3 erwähnte durch die Reibung bedingte Erwärmung ist verhältnismäßig der Zapfenoberfläche $l \cdot d \cdot \pi$. Als Vergleichsmaß nimmt man

$$\frac{\text{Reibungsarbeit mkg}}{l \text{ cm} \cdot d \text{ cm}} = \frac{\text{Moment mkg} \cdot \omega}{l \cdot d} = A \text{ mkg/qcm.}$$

Durch Einsetzen des Wertes für M ergibt sich für den eingelaufenen halb umschlungenen Zapfen

$$\frac{\frac{4}{\pi} \cdot \mu \cdot P \cdot r \cdot \frac{\pi \cdot n}{30}}{100 \cdot l \cdot d} = A,$$

daraus mit $\mu = \frac{1}{20}$:

$$30000 \cdot A = \frac{P \cdot n}{l} = w,$$

oder

$$l \geq \frac{P \cdot n}{w};$$

P ist dabei der mittlere, nicht der höchste Lagerdruck.

Dabei kann gewählt werden

für normale, nicht durch Wasser oder dgl. gekühlte Zapfen der Schwungrad- und Kurbelwellen auf Bronze $A = 1\frac{1}{3}$ mkg/qcm oder $w = 40\,000$
 für Zapfen wie vor auf Weißmetall. . $A = 1\frac{1}{2}$ „ „ $w = 45\,000$
 für Kurbelzapfen (Gußstahl auf Bronze oder Weißmetall) mit Rücksicht auf die Luftkühlung $A = 3$ „ „ $w = 90\,000$
 für Zapfen der Personenwagen der Eisenbahn $A = 2\frac{2}{3}$ „ „ $w = 80\,000$
 für Achsen der Schnellzugslokomotiven $A = 5$ „ „ $w = 150\,000$
 für äußere Kurbelzapfen der Lokomotiven $A = 8\frac{1}{3}$ „ „ $w = 250\,000$

Beispiel: Stirnzapfen einer Schwungradwelle $P = 8,5 \text{ t}$, $n = 85$, Belastungsfall III mit $k_b = 500$, $k = 40 \text{ kg/qcm}$:

$$\frac{l}{d} = \sqrt{0,2 \cdot \frac{500}{40}} = 1,58;$$

$$P = k \cdot l \cdot d = 40 \cdot \frac{l}{d} \cdot d^2 = 40 \cdot 1,58 \cdot d^2;$$

$$d = \sqrt{\frac{8500}{40 \cdot 1,58}} = 11,6 \text{ cm} \approx 120 \text{ mm};$$

$$l = 1,58 \cdot 11,6 = 18,3 \approx 180 \text{ mm};$$

$$w = \frac{8500 \cdot 85}{18} = 40\,200, \text{ zulässig.}$$

Flächenpressung, neu $\dot{p} = \frac{8500}{2 \cdot 6 \cdot 18} = 39,4 \text{ kg/qcm};$

„ eingelaufen: $\dot{p}_{\max} = \frac{8500}{2 \cdot 6 \cdot 18} \cdot 1,27 = 50 \text{ kg/qcm};$

erforderliches Drehmoment, neu $(\mu_1 = 0,14 = \frac{4}{\pi} \cdot \mu):$

$$M = \mu \cdot P \cdot r \cdot \frac{\pi}{2} = 0,14 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 8500 \cdot 6 \cdot \frac{\pi}{2} = 8800 \text{ cm/kg};$$

desgl. eingelaufen:

$$M = 0,14 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 8500 \cdot 6 \cdot \frac{4}{\pi} = 7140 \text{ cm/kg}.$$

Drehmoment während des vollen Betriebes, neu:

$$M = \mu \cdot P \cdot r \cdot \frac{\pi}{2} = 0,05 \cdot 8500 \cdot 6 \cdot \frac{\pi}{2} = 4020 \text{ cm/kg};$$

desgleichen eingelaufen:

$$M = 0,05 \cdot 8500 \cdot 6 \cdot \frac{4}{\pi} = 3240 \text{ cm/kg};$$

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{\pi \cdot 85}{30} = 8,9.$$

Arbeit während des vollen Betriebes neu: $\frac{M \text{ mkg} \cdot \omega}{75} = \frac{40,2 \cdot 8,9}{75} = 4,77 \text{ PS},$

desgleichen eingelaufen: $= \frac{32,4 \cdot 8,9}{75} = 3,84 \text{ PS}.$

b) **Kugelförmige Zapfen**, Fig. 98, finden wohl dort Verwendung, wo die genaue Lage einer Achse nicht einzuhalten ist, z. B. als Kurbelzapfen. Ihr Nachteil ist die schwierige Herstellung; auch bleibt bei eingetretener Abnutzung die Kugelform nicht erhalten.

Mit $z = r \cdot \sin \varphi_2$ folgt aus der allgemeinen Gleichung S. 593 für den eingelaufenen Zapfen

$$\dot{p} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{P \cdot \cos \varphi_1}{r^2 \cdot (\alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha)},$$

woraus für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ sich ergibt

$$\dot{p} = \frac{8}{2 + \pi} \cdot \frac{P}{r^2 \cdot \pi} \cdot \cos \varphi_1$$

und für $\varphi_1 = 0:$

$$\dot{p}_{\max} = \frac{8}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{P}{r^2 \cdot \pi};$$

ferner

$$M = \frac{4}{\pi} \cdot P \cdot \mu \cdot r.$$

Mit $A = \frac{5}{4} \text{ mkg/qcm}$ und $\mu = \frac{1}{20}$ folgt

$$\frac{P \cdot n}{d} = \infty 30000 = w.$$

Meist wählt man $d = 1,4 \cdot d_1$ und erhält d_1 aus der Beziehung

$$P \cdot (0,4 \text{ bis } 0,5) \cdot (1,4 \cdot d_1) = 0,1 \cdot d_1^3 \cdot k_b.$$

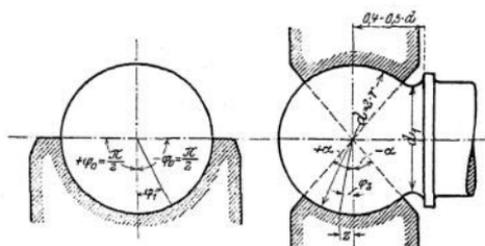


Fig. 98.

2. Stützapfen.

Hier ist

$$P = \int_{y=r_1}^{y=r_2} p \cdot dy \cdot (y \cdot 2\pi) = 2 \cdot \pi \cdot \int_{y=r_1}^{y=r_2} p \cdot y \cdot dy \quad (\text{Fig. 100})$$

und

$$M = \int_{y=r_1}^{y=r_2} \mu \cdot p \cdot dy \cdot y \cdot (y \cdot 2\pi) = 2 \cdot \pi \cdot \mu \cdot \int_{y=r_1}^{y=r_2} y^2 \cdot p \cdot dy ;$$

da für den eingelaufenen Zapfen $p \cdot y$ konstant ist, folgt für ihn

$$P = 2\pi \cdot p \cdot y \int_{y=r_1}^{y=r_2} dy ;$$

$$M = 2 \cdot \pi \cdot \mu \cdot p \cdot y \int_{y=r_1}^{y=r_2} y \cdot dy .$$

a) Der ebene Spurzapfen hat hiernach mit $r_1 = 0$, $r_2 = r$ (Fig. 99) im eingelaufenen Zustand die Pressung

$$p = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot y} \quad \text{oder} \quad p \cdot y = \frac{P}{2\pi r} = \text{konst.}$$

Dies gibt die in Fig. 99 dargestellte gleichseitige Hyperbel mit $p_{\max} = \infty$ in der Mitte. Infolgedessen ist die Schmierung in der Mitte sehr schwierig; man durchbohrt deshalb meist den Zapfen und führt hier das Schmiermaterial (häufig unter Druck) zu. Das erforderliche Drehmoment ergibt sich im neuen Zustande zu

$$M = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot P \cdot r$$

und sinkt im eingelaufenen Zustand auf

$$M = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot P \cdot r .$$

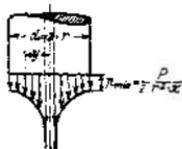


Fig. 99.

Die Berechnung geschieht

1. auf Flächenpressung, wobei die mittlere Pressung $k = \frac{P}{\frac{d^2 \pi}{4}}$ so groß wie

bei den Tragzapfen gewählt wird. Schmiernuten sind unter Umständen zu beachten;

2. auf Erwärmung, wobei $A = \frac{3}{8}$ mkg/qcm für Dauerbetrieb bei Spurlagern gewöhnlicher Triebwerke gewählt werden kann, wenn keine besondere Kühlung vorgesehen wird.

Hiermit ergibt sich

$$A = \frac{\frac{1}{2} \cdot \mu \cdot P \cdot \frac{d}{2 \cdot 100} \cdot \frac{\pi \cdot n}{30}}{\frac{d^2 \pi}{4}} = \frac{\mu \cdot P \cdot n}{3000 \cdot d}$$

oder

$$\frac{P \cdot n}{d} = \frac{3000 \cdot A}{\mu} = w \approx 40\,000 .$$

Bei Turbinenzapfen kommt A bis 2,09 entsprechend $w = 125\,000$ vor.

b) **Der ebene Ringzapfen**, Fig. 100. Hier ergibt sich im eingelaufenen Zustand die Pressung

$$p = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot (r_2 - r_1) \cdot y};$$

ferner im neuen Zustand das Moment

$$M = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot P \cdot \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2}$$

und im eingelaufenen Zustand

$$M = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot P \cdot (r_2 + r_1).$$

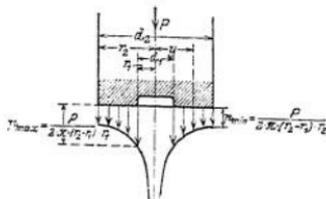


Fig. 100.

Er erfordert also ein größeres Drehmoment als der ebene Spurzapfen.

Die Berechnung geschieht wie vor, also für normale Triebwerkslager nach den Beziehungen

$$P = (d_2^3 - d_1^3) \frac{\pi}{4} \cdot k$$

bzw.

$$\frac{P \cdot n}{d_2 - d_1} = w \cong 40\,000.$$

Beispiel: $P = 2800$ kg, $n = 90$, $p_{\max} = 150$ (meist gebräuchlich), $k = 60$, $r_1 = 1$ cm angenommen ergibt:

$$\frac{(d_2^3 - 2^3) \cdot \pi}{4} \cdot 60 = 2800,$$

$$d_2 = 8 \text{ cm} = 80 \text{ mm},$$

$$p_{\max} = \frac{2800}{2 \cdot \pi \cdot (4 - 1) \cdot 1} = 148 \text{ kg/qcm},$$

$$w = \frac{2800 \cdot 90}{8 - 2} = 42\,000,$$

$$p_{\min} = \frac{2800}{2 \cdot \pi \cdot (4 - 1) \cdot 4} = 37 \text{ kg/qcm},$$

eingelaufen

$$M = \frac{1}{2} \cdot 2800 \cdot \frac{4 + 1}{20} = 350 \text{ cm} \cdot \text{kg}.$$

3. Kammzapfen,

Fig. 101, für große Kräfte und wechselnde Druckrichtung. Mehrere Kämme nimmt man, um das Moment klein zu halten. Im Mittel wählt man

$$b = 0,1 \text{ bis } 0,15 \cdot d_1;$$

damit bestimmt sich die Anzahl z der Kämme aus

$$P = k \cdot d_m \cdot \pi \cdot b \cdot z,$$

wobei

$$\frac{P \cdot n}{2 \cdot b \cdot z} = \frac{3000 \cdot A}{\mu} = w \cong 40\,000.$$

Meist geht man jedoch nur bis auf 0,5 bis 0,3 dieses Wertes, da mit wachsender Ringzahl die Wärmeableitung schlechter wird; da auch schwerlich sämtliche Kämme gleichmäßig tragen, geht man auch in gleichem Maß mit k zurück. Querschnitt der Kämme quadratisch oder, um größere Festigkeit zu erzielen, einseitig oder auch doppelseitig trapezförmig, wobei geringe Nachstellung und geringes Lüften des Lagers möglich, und bei der geringen Flankenneigung das Drehmoment nicht wesentlich erhöht wird.

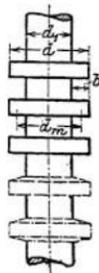


Fig. 101.

VII. Wellen und Achsen.

Achsen dienen hauptsächlich zum Tragen eines Maschinenteiles, z. B. eines Schwungrades, Wellen dagegen zum Übertragen eines Drehmomentes auf größere Entfernung. Mithin spielt bei ersteren die Biegung die Hauptrolle (Einfluß der



Fig. 102.



Fig. 103.

Durchbiegung auf die Eisenkonstruktion von Fördertrommeln, das magnetische Feld elektrischer Maschinen, fliegend angeordnete Teile, bei letzteren die Verdrehung. Die Biegung macht sich auch im Lager durch Veränderung der Pressungen bemerkbar, dies kann selbst durch bewegliche Lagerschalen nicht beseitigt werden, da die Achse sich ja auch im Lager selbst durchbiegt; ferner erleiden die Naben eine zusätzliche Beanspruchung. Auf Verdrehung ist besonders dann zu achten, wenn zwei Zahnradpaare gleichzeitig im Eingriff sind. Zweckmäßig setzt man bei den Wellen die Riemenscheiben, Räder und Kupplungen unmittelbar neben ein Lager, um die Durchbiegung gering zu halten. Für die Beanspruchung der Wellen und Achsen ist stets der Fall III (s. S. 403) maßgebend. Sind axiale Kräfte aufzunehmen, so versieht man die Lagerstelle der Achse mit einem Anlauf (Fig. 102), den man macht

$e = 5 \text{ mm} + 0,07 \cdot d \text{ mm}$ bis $5 \text{ mm} + 0,1 \cdot d \text{ mm}$ und wählt $r = e$ bzw. $r = \frac{e}{2}$, je nachdem diese Kräfte gering oder größer sind; Wellen erhalten Stellringe, seltener feste Bunde; Durchmesseränderung siehe Fig. 107 oder nach Fig. 103 mit möglichst großem r .

1. Normale Triebwerkswellen.

Aus der allgemeinen Arbeitsgleichung

$$N_{PS} = \frac{P_{kg} \cdot v_m}{75} = \frac{P_{kg} \cdot 2 \cdot R_{cm} \cdot \pi \cdot n}{60 \cdot 75 \cdot 100}$$

folgt das von einer Welle bei n Umdrehungen zu übertragende Moment

$$M_{dcmkg} = T_{kg} \cdot R_{cm} = \frac{60 \cdot 75 \cdot 100}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{N}{n} = 71620 \cdot \frac{N}{n};$$

damit wird:

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_d \cdot 16}{k_d \cdot \pi}}$$

Da die durch die Riemenzüge und dergl. auftretenden Biegemomente im voraus meist nicht zu bestimmen sind, berücksichtigt man sie, indem man $k_d = 120 \text{ kg/qcm}$ für Belastungsfall II einsetzt, womit folgt

$$d = \sqrt[3]{3000 \cdot \frac{N}{n}} = 14,4 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}$$

Meist stellt man noch die Bedingung, daß der Verdrehungswinkel nicht mehr als $\vartheta = \frac{1}{4}^\circ$ pro lfm betragen soll; durch Einsetzen dieses Wertes in die Gleichung (s. S. 450 und 451)

$$\vartheta_{abs} = \frac{M_d}{G} \cdot \frac{l}{J_p}$$

erhält man

$$\frac{2 \pi}{360} \cdot \frac{1}{4} = \frac{71620 \cdot \frac{N}{n}}{0,4 \cdot 2000000} \cdot \frac{100}{d^4 \pi}, \quad \text{woraus folgt} \quad d = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}$$

Die sich aus dieser Gleichung ergebenden Werte sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Triebwerkswellen.

N in PS	Minutliche Umlaufzahl n															
	40	60	80	100	120	140	160	180	200	225	250	275	300	350	400	
1	50	45	45	40	40	35	35	35	35	35	35	30	30	30	30	
2	60	55	50	50	45	45	40	40	40	40	40	35	35	35	35	
3	65	60	55	50	50	50	45	45	45	45	40	40	40	40	40	
4	70	65	60	55	55	50	50	50	50	45	45	45	45	40	40	
5	75	65	60	60	55	55	55	50	50	50	50	45	45	45	45	
6	75	70	65	60	60	55	55	55	50	50	50	50	50	45	45	
7	80	75	70	65	60	60	55	55	55	55	50	50	50	50	45	
8	85	75	70	65	65	60	60	55	55	55	55	50	50	50	50	
9	85	75	70	70	65	65	60	60	60	55	55	55	50	50	50	
10	85	80	75	70	65	65	60	60	60	55	55	55	55	50	50	
11	90	80	75	70	70	65	65	60	60	60	55	55	55	55	50	
12	90	85	75	75	70	65	65	65	60	60	60	55	55	55	50	
13	95	85	80	75	70	70	65	65	65	60	60	60	55	55	55	
14	95	85	80	75	75	70	70	65	65	60	60	60	60	55	55	
15	95	85	80	75	75	70	70	65	65	65	60	60	60	55	55	
16	100	90	85	80	75	70	70	70	65	65	65	60	60	60	55	
17	100	90	85	80	75	75	70	70	65	65	65	60	60	60	55	
18	100	90	85	80	75	75	70	70	70	65	65	65	60	60	60	
19	100	90	85	80	80	75	75	70	70	65	65	65	65	60	60	
20	105	95	85	85	80	75	75	70	70	70	65	65	65	60	60	
25	110	100	90	85	85	80	80	75	75	70	70	65	65	60	60	
30	115	105	95	90	85	85	80	80	75	75	70	70	70	65	65	
35	120	105	100	95	90	85	85	80	80	80	75	75	75	70	70	
40	120	110	105	100	95	90	85	85	85	80	80	75	75	70	70	
45	125	115	105	100	95	95	90	85	85	85	80	80	75	75	70	
50	130	115	110	105	100	95	90	85	85	85	80	80	75	75	75	
55	130	120	110	105	100	95	95	90	85	85	85	80	80	80	75	
60	135	120	115	110	105	100	95	95	90	90	85	85	85	80	75	
65	140	125	115	110	105	100	100	95	95	90	90	85	85	80	80	
70	140	125	120	110	105	105	100	95	95	90	90	90	85	85	80	
75	145	130	120	115	110	105	100	95	95	90	90	85	85	85	80	
80	145	130	120	115	110	105	105	100	100	95	95	90	90	85	85	
85	145	135	125	120	115	110	105	100	100	95	95	90	90	85	85	
90	150	135	125	120	115	110	105	105	100	100	95	95	90	90	85	
95	150	135	130	120	115	110	110	105	100	100	95	95	90	90	85	
100	155	140	130	120	115	115	110	105	105	100	100	95	95	90	85	

Beispiel: $N = 40$, $n = 180$:

$$d = 14,4 \sqrt[3]{\frac{40}{180}} = 3,7 \text{ cm} \approx 90 \text{ mm},$$

$$\vartheta_{\text{abs}} = \frac{M_d}{G} \cdot \frac{l}{J_p} = \frac{71\,620 \cdot \frac{40}{180}}{0,4 \cdot 2\,000\,000} \cdot \frac{100 \text{ cm}}{\frac{9^4 \pi}{32}} = 0,0031^{\circ} \text{ pro lfm},$$

$$\vartheta^0 = \frac{360}{2\pi} \cdot 0,0031 = 0,177^{\circ} = 10' 37'' 12''$$

Die Umdrehungszahl wählt man etwa

$n = 120-150$ für Hauptwellenleitungen

$n = 200-300$ für Nebenwellenleitungen

und $n = 250-400$ für schnell laufende Arbeitswellen (Holzbearbeitungsmaschinen).

Die Lagerentfernung kann man bestimmen nach der Gleichung

$l \text{ cm} = 100 \cdot \sqrt[3]{d} \text{ cm}$ bei zweimal gelagerten Wellen

und $l \text{ cm} = 125 \cdot \sqrt[3]{d} \text{ cm}$ bei durchlaufenden Wellen, sofern die Durchbiegung $\frac{1}{3} \text{ mm}$ auf 1 m nicht überschreitet. Ein Lager — meist ein mittleres — jedes Stranges ist, um die Lage der Welle zu sichern, als Bundlager auszuführen. Aufgeschweißte Bunde sind jedoch teuer, Eindrehungen schwächen die Welle, da sie die Formänderungsarbeit hauptsächlich aufnehmen; man verwendet daher fast stets Stellringe. Fig. 104: ungeteilter Stellring mit einer oder zwei um 90° versetzten Stellschrauben mit Schlitz und konischer Spitze; Fig. 105: geteilter Stellring mit an der Welle abgeflichter Vierkantschraube. Das Bundlager erhält zwei Stellringe seitlich oder einen in Lagermitte. In den übrigen Lagern läuft die Welle glatt durch, um Ausdehnungen durch die Wärme zu ermöglichen. Aus den Endlagern läßt

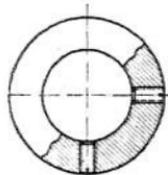


Fig. 104.

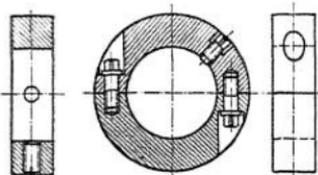


Fig. 105.

man sie so weit hervorstehen, daß eine Kupplungshälfte zwecks späterer Verlängerung des Wellenstranges aufgesetzt werden kann. Material der Stellringe Grauguß oder Schmiedeeisen; Material der Wellen Flußeisen — Rohmaterial um 5 mm stärker — oder gezogenes Eisen, das nicht gedreht wird. Es verzieht sich jedoch meist beim Nuten, da

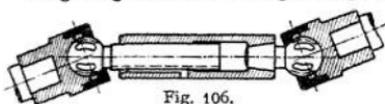


Fig. 106.

die Spannungsverteilung sich dabei ändert. Um dies zu vermeiden, nutzt man am besten auch Flußeisenwellen vor dem Fertigdrehen. Länge der einzelnen Wellen gewöhnlich 6 m.

Fig. 106 zeigt eine Gelenkwelle; die Drehung wird durch Kugeln übertragen, die einerseits in Nuten der Teleskopwelle, andererseits in Laufrillen der Köpfe der parallel angenommenen Wellenstränge laufen.

2. Achsen.

Bis 150 mm \varnothing meist aus Rundeisen, stärkere aus Blöcken geschmiedet; geschmiedete Achsen sind den aus Rundeisen hergestellten vorzuziehen, da ihr Gefüge dichter. Um Schmiedefehler erkennen zu können, werden Achsen häufig auf 50—80 mm hohl gebohrt.

a) Achse einer Seilscheibe.

Fig. 107 zeigt eine Achse, auf der eine Seilscheibe mit angeschraubtem Seilkrans sitzen möge, so daß sie nur auf Biegung beansprucht wird. Die Auflagerdrücke A und B sowie die Momente können rechnerisch oder graphisch ermittelt werden; im letzten Falle ist die gleichmäßige Belastung für die Nabenslänge durch parabolische Form der Momentenfläche leicht zu berücksichtigen.

Für $P = 3t$ resultierenden Seilzug ergibt sich

$$A = 1260 \text{ kg} \quad B = 1740 \text{ kg},$$

womit die Zapfenabmessungen festliegen (S. 595—597).

Damit $M_{\max} = A \cdot 55 = 69\,500$ cmkg, womit sich die Wellenstärke zu 110 mm ergibt. Der normale Keil für die Welle 110 \varnothing beträgt 28×15 bei 6 mm Nutentiefe, mithin

$$J_v = \frac{a^4 \cdot \pi}{64} = \frac{0,6 \cdot 2,8^4}{12} = \approx \frac{11^4 \cdot \pi}{64} = 719 \text{ cm}^4;$$

nach Seite 187

$$J_x = 719 - (J_1 + F \cdot a^2) = 719 - \left(\frac{2,8 \cdot 0,6^3}{12} + 2,8 \cdot 0,6 \cdot (5,5 - 0,3)^2 \right) \\ = 719 - (0 + 45) = 674 \text{ cm}^4.$$

damit

$$W'_y = \frac{719}{5,5} = 131 \text{ cm}^3,$$

$$W'_x = \frac{674}{5,5} = 122 \text{ cm}^3,$$

und

$$h_{b,z} = \frac{69\,500}{122} = 570 \text{ kg/qcm für den Punkt c,}$$

$$h_{b,y} = \frac{69\,500}{131} = 530 \text{ kg/qcm für die Punkte a und b.}$$

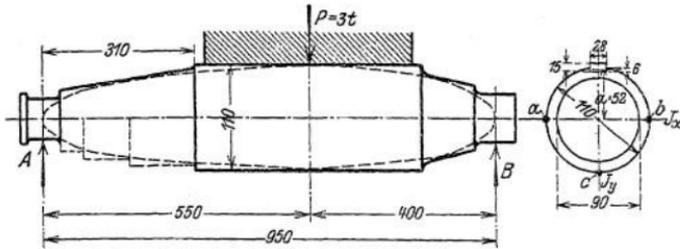


Fig. 107.

Die übrigen Abmessungen der Achse können rechnerisch oder graphisch ermittelt werden, da sie nirgends in die Form gleicher Festigkeit, der kubischen Parabel (S. 128), eindringen darf; z. B. ergibt sich für den Abstand 310 mm vom linken Ende das Moment = $1260 \cdot 31$ cmkg, und damit der Durchm. zu 90 mm. Bei 6 mm Nutentiefe bleibt mithin bis zur Keilnutbahn noch ein Spielraum von $(55 - 6) - 45 = 4$ mm; es ragt also die Nutenbahn nicht mehr in diesen anschließenden Achsteil hinein, was mit Rücksicht auf Aussehen, Herstellung und Montage stets erwünscht ist. Der an den Zapfen anschließende Durchmesser ergibt sich aus dem Anlauf nach S. 600.

b) Kurbelachse.

Beispiel: In Figur 108 und 109 sei die größte Kolbenstangenkraft = 7650 kg, die mittlere = 6000 kg, Schwungrad = 8200 kg, Kurbelhalbmesser = 425 mm, $\kappa = 90$.

Nach S. 701 ergibt sich (Kolbenstangenkraft ist hier P_k statt P zum Unterschied der Zapfenbelastungen genannt)

$$\text{größte Schubstangenkraft } S_{\max} = \frac{P_k}{\cos \beta} = \frac{7650}{0,98} = 7800 \text{ kg, wenn für } \alpha = 90^\circ$$

die größte Kolbenstangenkraft noch vorhanden sein würde,

$$\text{mittlere Schubstangenkraft annähernd } S_{\text{mittel}} = \frac{6000}{0,98} = 6120 \text{ kg.}$$

$$\text{Druck auf die Gleitbahn } V_{\max} = S_{\max} \cdot \sin \beta = 7800 \cdot 0,2 = 1560 \text{ kg.}$$

1. Die Kurbelzapfenabmessungen l und d ergeben sich nach S. 595—597 für $k_b = 500$ und $k = 60$ aus

$$7800 = k \cdot \frac{l}{d} \cdot d^2 = 60 \cdot 1,3 \cdot d^2$$

zu

$$d = 100 \text{ mm} \quad \text{und} \quad l = 130 \text{ mm};$$

damit

$$w = \frac{P \cdot n}{l} = \frac{6120 \cdot 90}{13} = 42\,300.$$

2. Die Lagerabmessungen d_1 und l_1 bestimmen sich mit $k_b = 600$ (Beanspruchung günstiger als beim Kurbelzapfen, da die Beanspruchung durch das Schwungrad nicht in dieselbe Ebene mit der durch den Kurbelzapfen fällt) und $k_d = 450$ aus (S. 469)

$$0,1 \cdot d_1^3 \cdot k_r = M_b \cdot \left(0,35 + 0,65 \cdot \sqrt{1 + \left(x_0 \cdot \frac{M_d \sqrt{3}}{M_b} \right)^2} \right),$$

woraus mit $M_d = 7800 \cdot 42,5$ und $M_b = 7800 \cdot 40$ (40 vorläufig geschätzt und später beim Konstruieren zu kontrollieren) folgt

$$0,1 \cdot d_1^3 \cdot 600 = 7800 \cdot 40 \cdot \left(0,35 + 0,65 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{42,5}{40} \right)^2} \right);$$

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{7800 \cdot 40 \cdot 1,32}{60}} = \infty 19 \text{ cm} = 190 \text{ mm}.$$

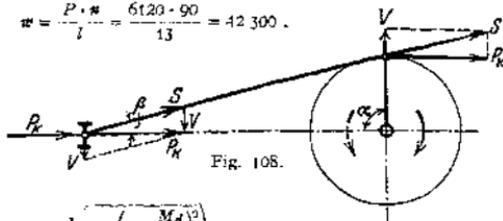


Fig. 108.

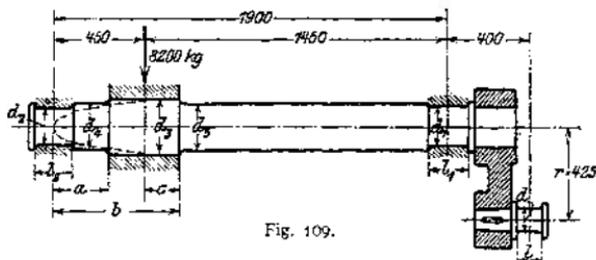


Fig. 109.

Für die Länge l_1 ist Flächenpressung und Erwärmung maßgebend. Der größte Lagerdruck setzt sich nun aus zwei Teilen zusammen:

1. einem Anteil vom Schwungrad herrührend, lotrecht gerichtet

$$= 8200 \cdot \frac{45}{190} = 1940 \text{ kg},$$

2. von der Kolbenstangenkraft herrührend,

$$\text{horizontal} = 7650 \cdot \frac{190 + 40}{190} = 9260 \text{ kg};$$

$$\text{lotrecht} = 1560 \cdot \frac{190 + 40}{190} = 1890 \text{ kg}.$$

Bei rechtslaufenden Maschinen ist diese Kraft Entlastung; würde die Maschine sich links herum drehen, wäre sie Belastung. Mithin erhält man in lotrechter Richtung

$$= 1940 - 1890 = 50 \text{ kg}.$$

Ein lotrechter Druck nach unten ist möglichst zu erhalten, um Stöße zu vermeiden. Der resultierende Lagerdruck beträgt damit

$$P_1 = \sqrt{9260^2 + 50^2} = \infty 9260 \text{ kg}.$$

Sonach ergibt sich die Lagerlänge mit $k = 15$ nach S. 595 und 596 aus

$$P_1 = k \cdot l_1 \cdot d_1$$

zu

$$l_1 = \frac{9260}{15 \cdot 19} = 32,5 \text{ cm} = 325 \text{ mm}$$

und

$$w = \frac{9260 \cdot 90}{32,5} = 25\,600.$$

Eigentlich müßte der mittlere Lagerdruck genommen werden, der z. B. in der Totlage sich ergibt zu

$$\sqrt{9260^2 + 1940^2} = 9540 \text{ kg}.$$

3. d_2 und l_2 ergeben sich ebenso mit $k_b = 500$ und $k = 15$ wie folgt:
Lagerdrücke: 1. lotrecht vom Schwungrad herrührend

$$= 3200 \cdot \frac{145}{190} = 6260 \text{ kg.}$$

2. vom Kurbelzapfen

$$\text{wagerecht} = 7650 \cdot \frac{40}{190} = 1610 \text{ kg,}$$

$$\text{lotrecht} = 1560 \cdot \frac{40}{190} = 330 \text{ kg Belastung bei Rechtsdrehung;}$$

mithin der resultierende Druck

$$P_2 = \sqrt{(6260 + 330)^2 + 1610^2} = \infty 6800 \text{ kg;}$$

$$\frac{l_2}{d_2} = \sqrt[3]{0,2 \cdot \frac{500}{15}} = 2,56;$$

$$P_2 = 15 \cdot 2,56 \cdot d_2^2 = 6800;$$

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{6800}{15 \cdot 2,56}} = 13,3 \text{ cm} = \infty 135 \text{ mm;}$$

$$l_2 = 2,56 \cdot 133 = 340 \text{ mm;}$$

$$w = \frac{6800 \cdot 90}{34} = 19000.$$

4. Der Achsendurchmesser d_3 ergibt sich für

$$M_b = P_2 \cdot 45 = 6800 \cdot 45 \quad \text{und} \quad M_d = 7800 \cdot 42,5 \quad \text{aus}$$

$$0,1 \cdot d_3^3 \cdot 500 = 6800 \cdot 45 \cdot \left(0,35 + 0,65 \cdot \sqrt[3]{1 + \left(\frac{7800 \cdot 42,5}{6800 \cdot 45}\right)^2}\right)$$

zu

$$d_3 = \sqrt[3]{\frac{6800 \cdot 45 \cdot 1,33}{50}} = \infty 20 \text{ cm} = 200 \text{ mm.}$$

5. d_4 kann mit Hilfe der kubischen Parabel oder aus dem Biegemoment $P_2 \cdot a$ ermitteln werden.

6. Der Durchmesser d_3 endlich folgt genügend genau aus dem Biegemomente $M_b = P_2 \cdot b = 3200 \cdot c$ und wird meist für das rechts anschließende Achsenstück beibehalten.

7. Berechnung der Kurbel s. S. 705 und 706.

c) Gekröpfte Kurbelachse eines stehenden Kompressors.

Die Längenabmessungen seien in Fig. 110 wiedergegeben, und sie sei in A und B gelagert, Schwungradgewicht $G = 850$ kg, Kolbenstangenkraft $P = 1500$ kg, $u = 100$, $r = 225$ mm; dann ergibt sich für $k_b = 500$ und $k_d = 400$

a) für aufwärts gerichteten Kurbelzapfendruck, Fig. 110:

$$\text{Lagerdruck } A = \frac{G \cdot 103 - P \cdot 36}{81} = \frac{850 \cdot 103 - 1500 \cdot 36}{81} = 414 \text{ kg;}$$

$$\text{Lagerdruck } B = \frac{G \cdot 22 + P \cdot 45}{81} = \frac{850 \cdot 22 + 1500 \cdot 45}{81} = 1060 \text{ kg.}$$

b) Für abwärts gerichteten Kurbelzapfendruck, Fig. 111:

$$\text{Lagerdruck } A = \frac{G \cdot 103 + P \cdot 36}{81} = \frac{850 \cdot 103 + 1500 \cdot 36}{81} = 1750 \text{ kg;}$$

$$\text{Lagerdruck } B = \frac{P \cdot 45 - G \cdot 22}{81} = \frac{1500 \cdot 45 - 850 \cdot 22}{81} = 603 \text{ kg;}$$

mithin

1. für den Durchmesser d des Halszapfens, Fig. 112,

$$M_b = 1060 \cdot 36; \quad M_d = 1060 \cdot r = 1060 \cdot 22,5;$$

womit

$$0,1 \cdot d^3 \cdot 500 = 1060 \cdot 36 \cdot \left(0,35 + 0,65 \cdot \sqrt[3]{1 + \left(\frac{1060 \cdot 22,5}{1060 \cdot 36}\right)^2}\right)$$

woraus

$$d = \sqrt[3]{\frac{1060 \cdot 36 \cdot 1,12}{50}} = 9,5 \text{ cm} = 95 \text{ mm.}$$

Für ein zulässiges $k = 20$ (S. 595 und 596) folgt die Zapfenlänge

$$l = \frac{1500}{20 \cdot 9,5} = 7,9 \text{ cm} = 80 \text{ mm}$$

und

$$w = \frac{1500 \cdot 100}{8} = 18750.$$

2. Für einen Schnitt im Abstände x von Achsenmitte durch die rechte Kurbelseite ergibt sich (Fig. 110 und 112)

$$M_b = 1060 \cdot x; \quad M_d = 1060 \cdot (36 - 8).$$

Da M_d konstant, ergibt sich die größte Beanspruchung mit $M_{b_{\max}}$ für $x = r$. Wird der Querschnitt rechteckig = $70 \cdot 120$ mm angenommen, dann folgt für die äußersten Fasern der kurzen Seiten (Strecke ab)

$$k_b = \frac{1060 \cdot 22,5}{7 \cdot 12^2} = 142 \text{ kg/qcm},$$

und nach S. 451 für die Mitten dieser Strecken ab

$$k_d = \frac{9}{2} \cdot \frac{M_d}{b \cdot h^2} = \frac{9}{2} \cdot \frac{1060 \cdot 28}{7 \cdot 12^2} = 132 \text{ kg/qcm},$$

mithin nach S. 469 für diese Mitten von ab :

$$k_r = k_b \cdot \left(0,35 + 0,65 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot \alpha_0 \cdot k_d}{k_b}\right)^2}\right) = 142 \cdot \left(0,35 + 0,65 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot 132}{142}\right)^2}\right);$$

$$= 244 \text{ kg/qcm},$$

ferner für die Mitten c der langen Seiten:

$$k_d = \frac{9}{2} \cdot \frac{M_d}{h \cdot b^2} = \frac{9}{2} \cdot \frac{1060 \cdot 28}{12 \cdot 7^2} = 227 \text{ kg/qcm}.$$

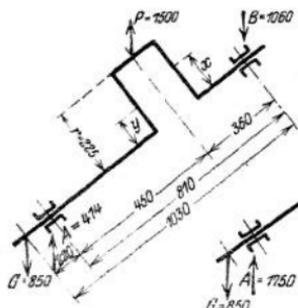


Fig. 110.

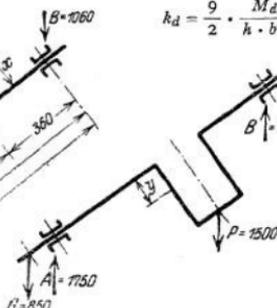


Fig. 111.

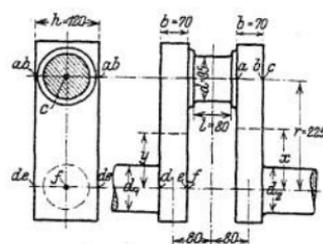


Fig. 112.

3. Ebenso für einen Schnitt im Abstände y der linken Seite

$$\text{im Fall a): } M_b = 1060 \cdot y + 1500 \cdot (22,5 - y) = 1500 \cdot 22,5 - 440 \cdot y,$$

$$M_d = 1060 \cdot (36 + 8) - 1500 \cdot 8 = 1060 \cdot 36 - 440 \cdot 8,$$

$$\text{im Fall b): } M_b = 603 \cdot y + 1500 \cdot (22,5 - y) = 1500 \cdot 22,5 - 897 \cdot y,$$

$$M_d = 603 \cdot (36 + 8) - 1500 \cdot 8 = 603 \cdot 36 - 897 \cdot 8.$$

M_b erreicht in beiden Fällen seinen größten Wert für $y = 0$, während M_d konstant ist; mithin ergeben sich die größten Beanspruchungen für die Strecke $d e$:

$$k_b = \frac{1500 \cdot 22,5}{7 \cdot 12^2} = 201 \text{ kg/qcm},$$

für die Mitten dieser Strecken:

$$k_d = \frac{9}{2} \cdot \frac{1060 \cdot 36 - 440 \cdot 8}{7 \cdot 12^2} = 155 \text{ kg/qcm},$$

$$k_r = 201 \cdot \left(0,35 + 0,65 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot 155}{201}\right)^2}\right) = 310 \text{ kg/qcm};$$

für den Punkt f :

$$k_d = \frac{9}{2} \cdot \frac{1060 \cdot 36 - 440 \cdot 8}{12 \cdot 7^2} = 265 \text{ kg/qcm}.$$

4. Der Durchmesser im Lager A ist auf zusammengesetzte Festigkeit zu berechnen mit

$$M_b = G \cdot 22 = 850 \cdot 22 \text{ cmkg} \quad \text{und} \quad M_d = 1500 \cdot 22,5 \text{ cmkg};$$

die Länge des Lagers A auf Flächenpressung und Erwärmung; der Durchmesser d_1 nach dem größeren der beiden Momente

$$M_b = 850 \cdot (22 + 45 - 8 - 3,5) = 414 \cdot (45 - 8 - 3,5)$$

$$\text{bzw.} \quad M_b = 850 \cdot (22 + 45 - 8 - 3,5) = 1750 \cdot (45 - 8 - 3,5)$$

und $M_d = 1500 \cdot 22,5$,

$$\text{der } \varnothing d_1 \text{ aus} \quad M_b = 1060 \cdot (36 - 8 - 3,5) = 0,1 \cdot d_1^3 \cdot k_b.$$

5. Der Stirnzapfen B nach S. 595—597 für 1060 kg Lagerdruck.

Fig. 113 zeigt Ausführung einer Kurbelwelle mit eingesetztem Kurbelzapfen und aufgezogenen Kurbelblättern, die ähnlich Fig. 388 als Gegengewicht ausgebildet sind. Schmierung erfolgt durch die hohlgebohrte Welle.

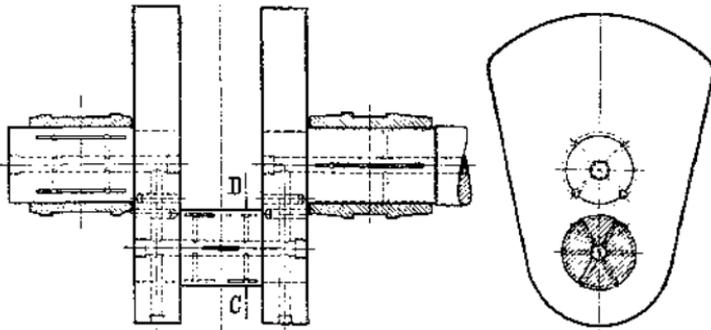


Fig. 113.

Fig. 114 zeigt eine doppelt gekröpfte Kurbelwelle; Berechnung wie oben; Schmierung mittels Schmierringe, die von einem Tropföler oder dgl. zugeführtes Öl durch die Zentrifugalkraft nach außen schleudern und durch eine im Kurbelzapfen angebrachte Bohrung zur Lauffläche gelangen lassen.

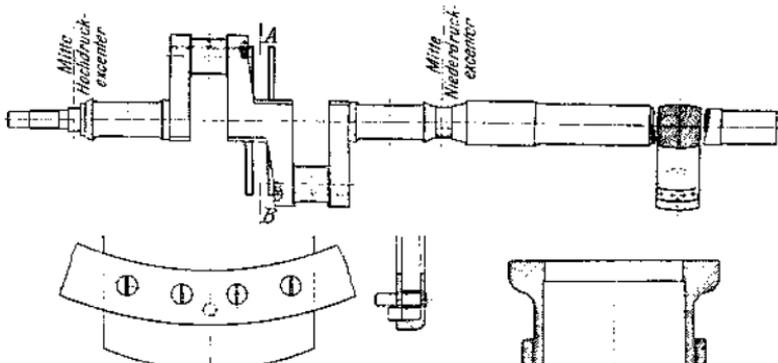


Fig. 114.

Fig. 115¹⁾: Welle eines Einzylinder-Explosionsmotors, 250 mm Hub, 250 mm Zylinder $\varnothing n = 300$ bis 350; Kurbeldruck mithin

$$= 30 \cdot \frac{25^2 \pi}{4} = 14\,800 \text{ kg}$$

bei 30 Atm.; 4 Kugelreihen zu je 11 Kugeln 40 mm Durchmesser, mithin Kugelpressung $k = 105$ (vgl. S. 441).

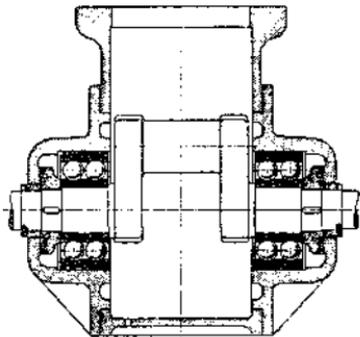


Fig. 115.

d) Die Durchbiegung

wird am einfachsten nach dem Verfahren von Mohr (S. 428) bestimmt, nach dem sie als Durchhang eines Seiles erhalten wird, das horizontal

¹⁾ Entnommen aus: Volk, Einzelkonstruktionen aus dem Maschinenbau IV: Ahrens, Die Kugellager. Berlin 1913. Julius Springer.

mit einer Kraft $= E$ gespannt und dessen Belastung die $\frac{M}{J}$ -Fläche wäre.

Bei zweimaliger Lagerung bietet das Verfahren keine Schwierigkeiten; bei durchlaufendem Träger werden die Stützenmomente nach S. 442 ermittelt; bei abgesetzten Wellen mit dreimaliger Lagerung kann das Mittelstützenmoment nach dem Verfahren von Klobb errechnet werden. Will man dabei die Vorstellung des Seiles beibehalten, so muß man es in den beiden letzten Fällen durch nach unten und oben gerichtete Kräfte belastet annehmen;

die Momenten- und $\frac{M}{J}$ -Fläche wäre also für die Teile, deren Krümmungsmittelpunkt unterhalb des Balkens liegt, negativ zu nehmen und soll deshalb oberhalb der Achse gezeichnet werden; die entsprechenden Kräfte im Streckenzuge haben mithin die Richtung nach oben.

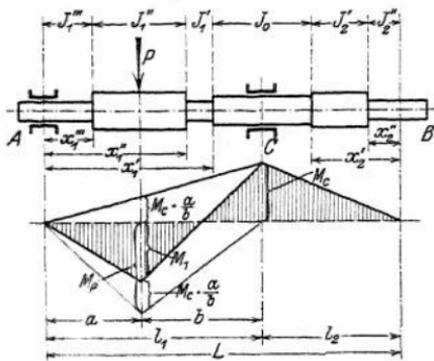


Fig. 116.

Da das Trägheitsmoment infolge der Schwächung durch die Nut nicht konstant ist (s. Beispiel S. 603), so ändert sich im Laufe einer Umdrehung die Biegelinie, was besonders für die Lagerpressungen nachteilig ist. Tangentialkeile verdienen hier den Vorzug.

Der Beitrag einer Kraft P zum Mittelstützenmoment M_c ergibt sich aus (vgl. Fig. 116)

$$M_c = -M_p \cdot \frac{\varepsilon_1 \cdot l_1 + \left[a + \frac{b}{2} \right] + \varepsilon_2 \cdot l_2}{\varepsilon_1 \cdot l_1 + L + \varepsilon_2 \cdot l_2} \quad \text{mit} \quad M_p = \frac{P \cdot a \cdot b}{l_1}.$$

Dabei ist das Glied $\varepsilon_2 \cdot l_2$ ausschließlich durch Absätze im unbelasteten Felde (Feld 2) bedingt und wäre beispielsweise bei Fig. 116

$$\varepsilon_2 = \lambda'_2 + \frac{J_0}{J'_2} \cdot \lambda''_2.$$

Der Wert λ ist dabei für jeden Wellenabsatz zu bilden und beträgt, wenn x seine Entfernung von Auflager bei einer Feldlänge $= l$ ist, hier wie auch in den folgenden Ausdrücken ε_1 und ε_2 allgemein

$$\lambda = \left(\frac{x}{l} \right)^3 \cdot \left(\frac{\text{Trägheitsmoment der Welle jenseits des Schnittes } x \text{ nach dem Mittelager hin}}{\text{Trägheitsmoment der Welle diesseits des Schnittes } x \text{ nach dem Auflager hin}} - 1 \right);$$

der Faktor $\frac{J_0}{J'_2}$ hat die allgemeine Form:

$$\text{Trägheitsmoment im Mittelager}$$

Trägheitsmoment jenseits des Schnittes x nach dem Mittelager hin $= \frac{J_0}{J}$; jeder Wert λ ist mit ihm zu multiplizieren.

Jeder Absatz im belasteten Felde (Feld 1) bedingt im Zähler und Nenner einen Beitrag zum Gliede $\varepsilon_1 \cdot l_1$ mit beispielsweise

$$\varepsilon_1 = \lambda'_1 + \frac{J_0}{J'_1} \cdot \lambda''_1 + \frac{J_0}{J''_1} \cdot \lambda'''_1;$$

zum Gliede $\varepsilon_2 \cdot \lambda_2$ gibt jeder Absatz zwischen Kraft und Mittelager den Beitrag $= \lambda \cdot x$ bzw. $\frac{J_0}{J} \cdot \lambda \cdot x$ und jeder Absatz zwischen Kraft und Außenlager einen solchen $= \frac{b}{a} \cdot \lambda$ bzw. $\frac{J_0}{J} \cdot \frac{b}{a} \cdot \lambda$, also beispielsweise

$$\varepsilon_2 = \lambda'_1 \cdot x'_1 + \frac{J_0}{J'_1} \cdot \lambda''_1 \cdot x''_1 + \frac{J_0}{J''_1} \cdot \frac{b}{a} \cdot \lambda'''_1.$$

Die allgemeine Gleichung für x ist:

$$x = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\xi \cdot (1 - \alpha)} - 1 - \frac{1}{1 - \alpha} - \frac{\alpha^2}{2 \cdot (1 - \alpha) \cdot \xi^2}$$

mit

$$\xi = \frac{x}{l}$$

$$\alpha = \frac{a}{l}$$

$$1 - \alpha = \frac{b}{l}$$

Aus den Biegemomenten ergeben sich sofort die Auflagerdrücke, z. B.

$$A = \frac{M_1}{a}, \quad B = \frac{M_2}{l_2}, \quad C = P - A - B.$$

Ausführungsbeispiele zeigen: Fig. 117: mit je einer Last in jedem Felde; dabei ist die wirkliche Momentenfläche durch Addition der Momentenflächen der Kräfte P_1 und P_2 gebildet.

Wo die Momentenfläche den Wert 0 hat, muß auch die $\frac{M}{J}$ -Fläche denselben Wert annehmen, es müssen also bei konstantem J (zylindrische Wellenteile) die Verlängerungen der Begrenzungen der Momenten- und $\frac{M}{J}$ -Fläche sich in denselben Punkt der Achse schneiden. Für $\frac{M}{J} = 0$ (Stelle 6 und 10) erhält die Biegelinie einen Wendepunkt.

$$M_{P_1} = P_1 \cdot \frac{a_1 b_1}{l_1} = 2500 \cdot \frac{75 \cdot 95}{170} = 104800 \text{ cmkg};$$

$$M_{P_2} = P_2 \cdot \frac{a_2 b_2}{l_2} = 2400 \cdot \frac{65 \cdot 65}{130} = 78000 \text{ cmkg};$$

$$\lambda_1' = \left(\frac{x_1'}{l_1} \right)^3 \cdot \left(\frac{J_0}{J_1'} - 1 \right) = \left(\frac{147,5}{170} \right)^3 \cdot \left(\frac{3217}{4100} - 1 \right) = -0,144;$$

$$\lambda_1'' = \left(\frac{x_1''}{l_1} \right)^3 \cdot \left(\frac{J_0'}{J_1''} - 1 \right) = \left(\frac{107,5}{170} \right)^3 \cdot \left(\frac{4100}{5153} - 1 \right) = -0,052;$$

$$\lambda_1''' = \left(\frac{x_1'''}{l_1} \right)^3 \cdot \left(\frac{J_1'''}{J_1'''} - 1 \right) = \left(\frac{42,5}{170} \right)^3 \cdot \left(\frac{5153}{2485} - 1 \right) = 0,0167;$$

$$\lambda_1'''' = \left(\frac{x_1''''}{l_1} \right)^3 \cdot \left(\frac{J_2''''}{J_1''''} - 1 \right) = \left(\frac{22,5}{170} \right)^3 \cdot \left(\frac{2485}{1402} - 1 \right) = 0,00178;$$

$$\lambda_2' = \left(\frac{x_2'}{l_2} \right)^3 \cdot \left(\frac{J_0}{J_2'} - 1 \right) = \left(\frac{107,5}{130} \right)^3 \cdot \left(\frac{3217}{1886} - 1 \right) = 0,396;$$

$$\lambda_2'' = \left(\frac{x_2''}{l_2} \right)^3 \cdot \left(\frac{J_2''}{J_2''} - 1 \right) = \left(\frac{22,5}{130} \right)^3 \cdot \left(\frac{1886}{1402} - 1 \right) = 0,001785;$$

$$\xi_1' = \frac{x_1'}{l_1} = \frac{147,5}{170} = 0,867; \quad \xi_1'' = \frac{x_1''}{l_1} = \frac{107,5}{170} = 0,633; \quad \xi_2' = \frac{x_2'}{l_2} = \frac{107,5}{130} = 0,827;$$

$$\alpha_1 = \frac{a_1}{l_1} = \frac{75}{170} = 0,44; \quad 1 - \alpha_1 = 0,56;$$

$$\alpha_2 = \frac{a_2}{l_2} = \frac{65}{130} = 0,5; \quad 1 - \alpha_2 = 0,5;$$

$$x = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\xi \cdot (1 - \alpha)} - 1 - \frac{1}{1 - \alpha} - \frac{\alpha^2}{2 \cdot (1 - \alpha) \cdot \xi^2};$$

$$x_1' = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{0,867 \cdot 0,56} - 1 - \frac{1}{0,56} - \frac{0,1936}{2 \cdot 0,56 \cdot 0,647} = 0,05;$$

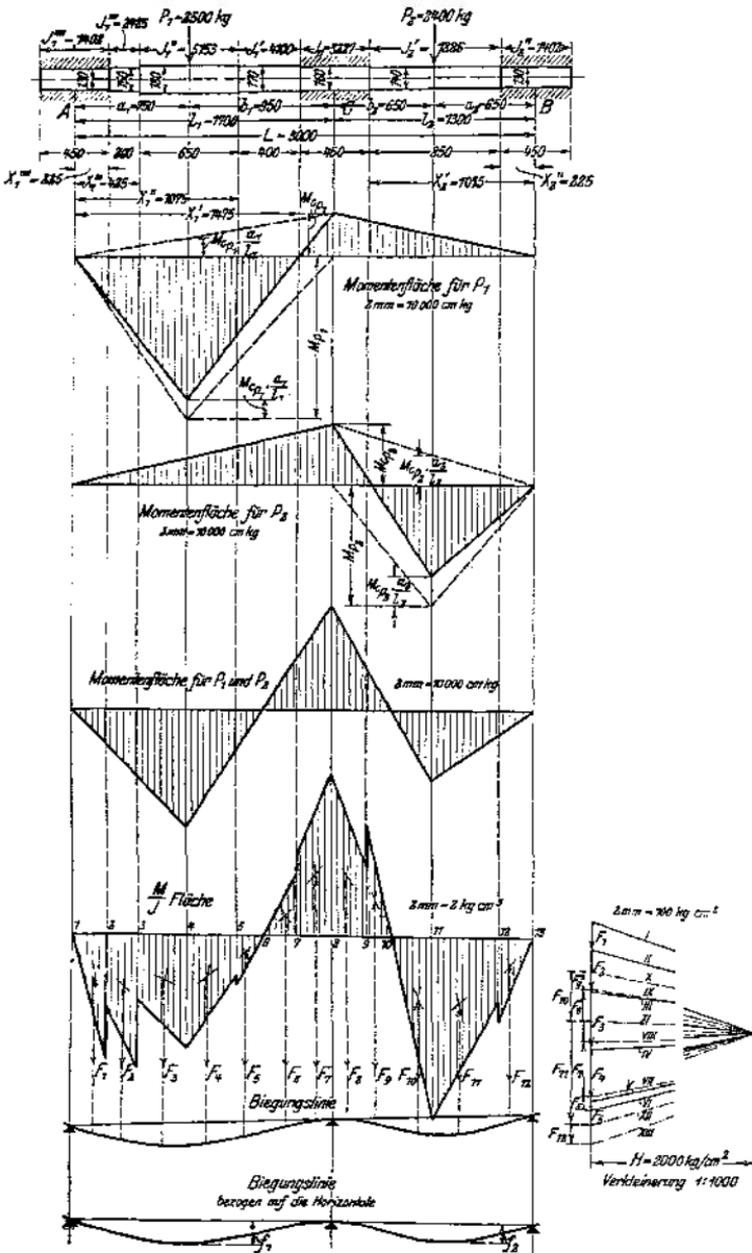


Fig. 117.

$$\begin{aligned} \alpha_1'' &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{0,633 \cdot 0,56} - 1 - \frac{1}{0,36} - \frac{0,1936}{2 \cdot 0,56 \cdot 0,254} = 0,7656; \\ \alpha_2' &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{0,827 \cdot 0,5} - 1 - \frac{1}{0,5} - \frac{0,25}{2 \cdot 0,5 \cdot 0,827} = 0,19; \\ \varepsilon_1 &= \lambda_1' + \lambda_1'' \cdot \frac{J_0}{J_1'} + \lambda_1''' \cdot \frac{J_0}{J_1''} + \lambda_1'''' \cdot \frac{J_0}{J_1'''} \\ &= -0,141 - 0,052 \cdot \frac{3217}{4100} + 0,0167 \cdot \frac{3217}{5153} + 0,00178 \cdot \frac{3217}{2485} = -0,1689; \\ \varepsilon_2 &= \lambda_2' + \lambda_2'' \cdot \frac{J_0}{J_2'} = 0,396 + 0,001785 \cdot \frac{3217}{1886} = 0,396; \\ \varepsilon_3 &= \lambda_1' \alpha' + \alpha_1'' \cdot \frac{J_0}{J_1'} \lambda_1'' + \frac{b_1}{a_1} \cdot \lambda_1''' \cdot \frac{J_0}{J_1''} + \frac{b_1}{a_2} \cdot \lambda_1'''' \cdot \frac{J_0}{J_1'''} \\ &= -0,141 \cdot 0,05 + 0,7656 \cdot \frac{3217}{4100} \cdot (-0,052) + \frac{95}{75} \cdot \frac{3217}{5153} \cdot 0,167 + \frac{95}{75} \cdot \frac{3217}{2485} \cdot 0,00178 = -0,02; \\ \varepsilon_4 &= \lambda_2' \alpha_2' + \frac{b_2}{a_2} \cdot \frac{J_0}{J_2'} \cdot \lambda_2'' = 0,396 \cdot 0,19 + \frac{65}{65} \cdot \frac{3217}{1886} \cdot 0,001785 = 0,0787; \\ M_{eP_1} &= -M_{P_1} \cdot \frac{\varepsilon_1 l_1 + (a_1 + \frac{b_1}{2}) + \varepsilon_3 l_1}{\varepsilon_1 \cdot l_1 + L + \varepsilon_3 l_2} = 104800 \cdot \frac{-0,1689 \cdot 170 + (75 + \frac{95}{2}) + (-0,02) \cdot 170}{-0,1689 \cdot 170 + 300 + 0,396 \cdot 130}; \\ M_{eP_2} &= -28250 \text{ cmkg}; \\ M_{eP_3} &= -M_{P_2} \cdot \frac{\varepsilon_2 l_2 + (a_2 + \frac{b_2}{2}) + \varepsilon_4 l_2}{\varepsilon_2 l_2 + L + \varepsilon_4 l_1} = 78000 \cdot \frac{-0,396 \cdot 130 + (65 + \frac{65}{2}) + 0,0787 \cdot 130}{0,396 \cdot 130 + 300 - 0,1689 \cdot 170}; \\ M_{eP_4} &= -38600 \text{ cmkg}. \end{aligned}$$

Stelle	∅ in cm	J cm ⁴	M ₀ cmkg	$\frac{M}{J} = \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$	Fläche	Grundl. cm	Höhe $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$	Flächeninh. kg/qcm
1	13	1402	0	0	F ₁	22,5	8,1	184,5
2			22 500	16,2				
2	15	2485	22 500	9,2	F ₂	20	13,3	266
3			43 500	17,4				
3	18	5153	43 500	8,3	F ₃	32,5	11,5	374
4			75 800	14,7				
4	18	5153	75 800	14,7	F ₄	32,5	9,9	322
5			26 500	5,2				
5	17	4100	26 500	6,5	F ₅	18	3,25	58,5
6			0	0				
6	17	4100	0	0	F ₆	22	4,13	91
7			- 33 800	8,25				
7	16	3227	- 33 800	10,4	F ₇	22,5	15,6	352
8			- 66 000	20,8				
8	16	3227	- 66 000	20,8	F ₈	22,5	14,9	334
9			- 28 000	8,8				
9	14	1886	- 28 000	14,6	F ₉	16	7,3	117
10			0	0				
10	14	1886	0	0	F ₁₀	26,5	11,8	313
11			44 500	23,6				
11	14	1886	44 500	23,6	F ₁₁	42,5	14,8	673
12			14 800	8,1				
12	13	1402	14 800	10,8	F ₁₂	22,5	5,4	124
13			0	0				

$$f_1 = \frac{3 \cdot 50}{1000} = 0,015 \text{ cm}; \quad f_2 = \frac{2,4 \cdot 50}{1000} = 0,012 \text{ cm},$$

wenn 3 bzw. 2,4 mm abgemessen werden, die Achse im Maßstab 1:50 gezeichnet ist, und die Verkleinerung des Polabstandes 1:1000 beträgt.

Fig. 118 mit drei Lasten; wirkliche Momentenfläche ist aus den dreien der Einzelkräfte zu bilden.

$$M_{eP_1} = -M_{P_1} \frac{\varepsilon_1 l_1 + \left[a_1 + \frac{b_1}{2} \right] + \varepsilon_3 \cdot l_1}{\varepsilon_1 \cdot l_1 + L + \varepsilon_3 \cdot l_2};$$

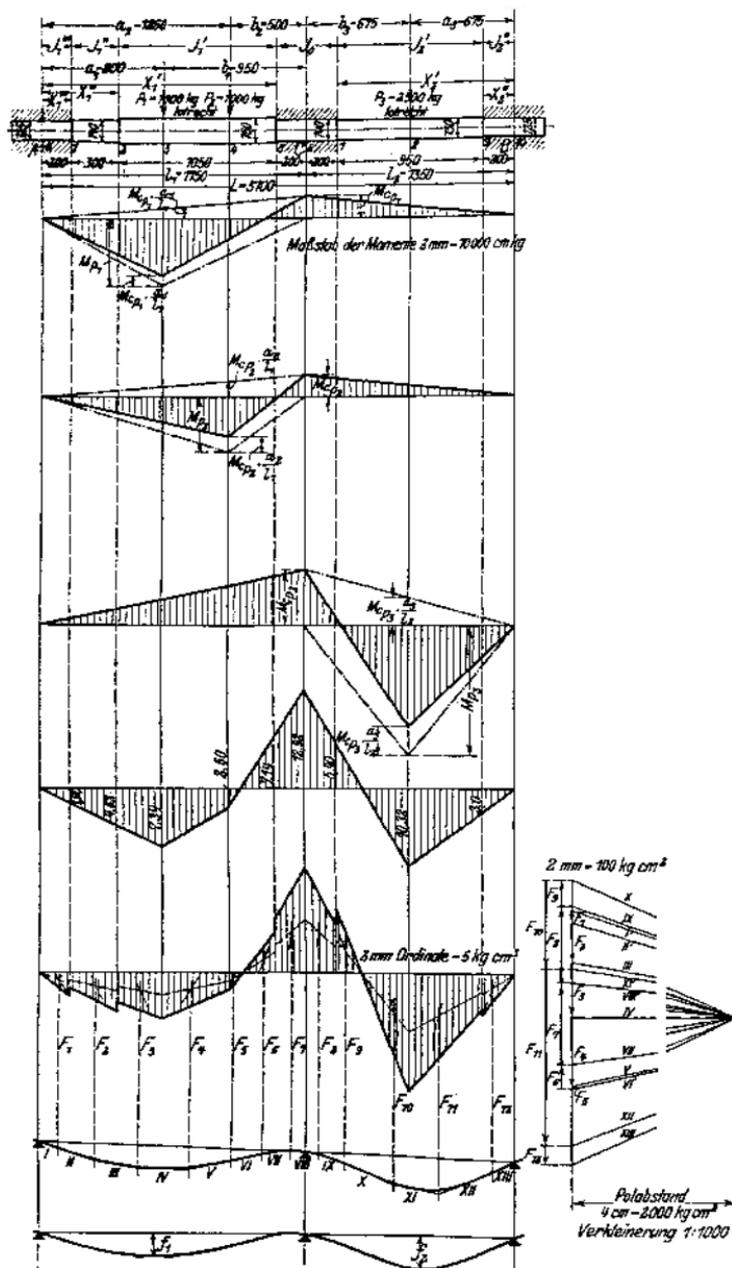


Fig. 118.

$$M P_1 = P_1 \frac{a_1 \cdot b_1}{l_1} = 1000 \cdot \frac{80 \cdot 95}{175} = -43\,400 \text{ cmkg};$$

$$\lambda_1' = \left(\frac{x_1}{l_1}\right)^3 \cdot \left(\frac{J_0}{J_1'} - 1\right) = \left(\frac{155}{175}\right)^3 \cdot \left(\frac{1886}{2485} - 1\right) = -0,167;$$

$$\lambda_1'' = \left(\frac{x_2''}{l_1}\right)^3 \cdot \left(\frac{J_1'}{J_1''} - 1\right) = \left(\frac{50}{175}\right)^3 \cdot \left(\frac{2485}{1886} - 1\right) = 0,0075;$$

$$\lambda_1''' = \left(\frac{x_1'''}{l_1}\right)^3 \cdot \left(\frac{J_1''}{J_1'''} - 1\right) = \left(\frac{20}{175}\right)^3 \cdot \left(\frac{1886}{1198} - 1\right) = 0,000858;$$

$$\lambda_2' = \left(\frac{x_2'}{l_2}\right)^3 \cdot \left(\frac{J_0}{J_2'} - 1\right) = \left(\frac{115}{135}\right)^3 \cdot \left(\frac{1886}{1402} - 1\right) = 0,212;$$

$$\lambda_2'' = \left(\frac{x_3''}{l_2}\right)^3 \cdot \left(\frac{J_2'}{J_2''} - 1\right) = \left(\frac{20}{135}\right)^3 \cdot \left(\frac{1402}{1198} - 1\right) = 0,00056;$$

$$\epsilon_1 = \lambda_1' + \frac{J_0}{J_1'} \cdot \lambda_1'' + \frac{J_0}{J_1''} \cdot \lambda_1''' = -0,167 + \frac{1886}{2485} \cdot 0,0075 + \frac{1886}{1886} \cdot 0,000858 = -0,160;$$

$$\epsilon_1 \cdot l_1 = -0,160 \cdot 175 = -28, \quad a_1 + \frac{b_1}{2} = 80 + \frac{95}{2} = 127,5$$

$$\kappa = \frac{3}{2} \frac{1}{\xi(1-\alpha)} - 1 - \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)\xi^3}$$

$$\kappa_1' = \frac{3}{2} \frac{1}{\frac{155}{175} \left(\frac{95}{175}\right)} - 1 - \frac{1}{\frac{95}{175}} - \frac{\left(\frac{80}{175}\right)^2}{2 \cdot \frac{95}{175} \cdot \left(\frac{155}{175}\right)^3} = 0,002;$$

$$\epsilon_3 = \lambda_1' \cdot \kappa_1' + \lambda_1'' \cdot \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{J_0}{J_1'} + \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{J_0}{J_1''} \cdot \lambda_1'''$$

$$= (-0,167)(0,002) + 0,0075 \cdot \frac{95}{80} \cdot \frac{1886}{2485} + \frac{95}{80} \cdot \frac{1886}{1886} \cdot 0,000858 = 0,0075; \quad \epsilon_3 \cdot l_1 = 1,3;$$

$$\epsilon_2 = \lambda_2' + \lambda_2'' \cdot \frac{J_0}{J_2'} = 0,212 + 0,00056 \cdot \frac{1886}{1402} = 0,213; \quad \epsilon_2 \cdot l_2 = 28,8;$$

$$M_{eP_1} = -43\,400 \cdot \frac{-28 + 127,5 + 1,3}{-28 + 310 + 28,8} = -14030 \text{ cmkg}.$$

$$M P_2 = P_2 \frac{a_2 \cdot b_2}{l_2} = 1000 \frac{125 \cdot 50}{175} = 35\,700 \text{ cmkg};$$

$$\kappa_1'' = \frac{3}{2} \frac{1}{\xi(1-\alpha)} - 1 - \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)\xi^3} = \frac{3}{2} \frac{1}{\frac{155}{175} \cdot \frac{50}{175}} - 1 - \frac{1}{\frac{50}{175}} - \frac{\left(\frac{125}{175}\right)^2}{2 \cdot \frac{50}{175} \cdot \left(\frac{155}{175}\right)^3}$$

$$\kappa_1'' = 0,13; \quad a_2 + \frac{b_2}{2} = 125 + \frac{50}{2} = 150;$$

$$\epsilon_3' = \lambda_1' \cdot \kappa_1'' + \lambda_1'' \cdot \frac{J_0}{J_1'} \cdot \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_2}{a_2} \cdot \frac{J_0}{J_1''} \cdot \lambda_1'''$$

$$= (-0,167) \cdot 0,13 + 0,0075 \cdot \frac{1886}{2485} \cdot \frac{50}{125} + \frac{50}{125} \cdot \frac{1886}{1886} \cdot 0,000858 = -0,01908; \quad \epsilon_3 \cdot l_1 = -3,34;$$

$$M_{eP_2} = -35\,700 \cdot \frac{-28 + 150 - 3,34}{-28 + 310 + 28,8} = -13\,600 \text{ cmkg}.$$

$$M P_3 = P_3 \frac{a_3 \cdot b_3}{l_3} = \frac{67,5 \cdot 67,5}{135} \cdot 2500 = 84\,500 \text{ cmkg};$$

$$\epsilon_2 = \lambda_2' + \lambda_2'' \cdot \frac{J_0}{J_2'} = 0,212 + 0,00056 \cdot \frac{1886}{1402} = 0,213;$$

$$\varepsilon_2 \cdot l_2 = 0,213 \cdot 135 = 28,8; \quad \varepsilon_2 + \frac{b_2}{2} = 67,5 + \frac{67,5}{2} = 101,25;$$

$$\varkappa_2' = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{135 \cdot \frac{67,5}{135}} - 1 - \frac{1}{67,5} - \frac{\left(\frac{67,5}{135}\right)^2}{2 \cdot \frac{67,5}{135} \cdot \left(\frac{115}{135}\right)^2} = 0,117;$$

$$\varepsilon_4 = \lambda_2' \cdot \varkappa_2' + \frac{b_2}{a_2} \cdot \lambda_2'' \cdot \frac{J_0}{J_2'} = 0,212 \cdot 0,117 + 1 \cdot 0,00056 \cdot \frac{1886}{1402} = 0,0255; \quad \varepsilon_4 \cdot l_2 = 3,45;$$

$$M_{eP_1} = -84500 \frac{28,8 + 101,25 + 3,45}{28,8 + 310 - 28} = \frac{133,5}{318,8} = 36300 \text{ cmkg};$$

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{3,0 \cdot 50}{1000} = 0,015 \text{ cm}; \\ f_2 &= \frac{4,3 \cdot 50}{1000} = 0,0215 \text{ cm}. \end{aligned} \right\} \text{ (s. S. 611).}$$

Fig. 119 mit lotrechter Belastung in einem und wagerechter im anderen Felde; $N = 250$ PS, $n = 480$. Hier ergibt sich die wirkliche Biegelinie als Kurve im Raum und ist als Resultierende der Durchbiegungen in wagerechter und lotrechter Richtung zu bestimmen.

Bei vertikaler Last.

$$M_{eP_1} = -M_{P_1} \cdot \frac{\varepsilon_1 \cdot l_1 + \left[a_1 + \frac{b_1}{2} \right] + \varepsilon_2 \cdot l_2}{\varepsilon_1 \cdot l_1 + L + \varepsilon_2 \cdot l_2}; \quad \varepsilon_1 = \lambda_1' + \lambda_1'' \cdot \frac{J_0}{J_1'} + \lambda_1''' \cdot \frac{J_0}{J_1''};$$

$$\lambda_1' = \left(\frac{x_1'}{l_1} \right)^2 \cdot \left(\frac{J_0}{J_1'} - 1 \right) = \left(\frac{147,5}{170} \right)^2 \cdot \left(\frac{3217}{4100} - 1 \right) = -0,137;$$

$$\lambda_1'' = \left(\frac{x_1''}{l_1} \right)^2 \cdot \left(\frac{J_1'}{J_1''} - 1 \right) = \left(\frac{52,5}{170} \right)^2 \cdot \left(\frac{4100}{1886} - 1 \right) = 0,035;$$

$$\lambda_1''' = \left(\frac{x_1'''}{l_1} \right)^2 \cdot \left(\frac{J_1''}{J_1'''} - 1 \right) = \left(\frac{22,5}{170} \right)^2 \cdot \left(\frac{1886}{1402} - 1 \right) = 0,00077;$$

$$\frac{J_0}{J_1'} \cdot \lambda_1'' = \frac{3217}{4100} \cdot 0,035 = 0,027; \quad \frac{J_0}{J_1''} \cdot \lambda_1''' = \frac{3217}{1886} \cdot 0,00077 = 0,001;$$

$$\varepsilon_1 = -0,137 + 0,027 + 0,001 = -0,109; \quad \varepsilon_2 = \lambda_2' + \lambda_2'' \cdot \frac{J_0}{J_2'};$$

$$\lambda_2' = \left(\frac{x_2'}{l_2} \right)^2 \cdot \left(\frac{J_0}{J_2'} - 1 \right) = \left(\frac{107,5}{130} \right)^2 \cdot \left(\frac{3217}{1886} - 1 \right) = 0,392;$$

$$\lambda_2'' = \left(\frac{x_2''}{l_2} \right)^2 \cdot \left(\frac{J_2'}{J_2''} - 1 \right) = \left(\frac{22,5}{130} \right)^2 \cdot \left(\frac{1886}{1402} - 1 \right) = 0,00176;$$

$$\frac{J_0}{J_2''} \cdot \lambda_2'' = \frac{3217}{1886} \cdot 0,00176 = 0,003;$$

$$\varepsilon_2 = 0,392 + 0,003 = 0,395; \quad \varepsilon_3 = \lambda_1' \cdot \varkappa_1' + \frac{b_1}{a_1} \cdot \lambda_1'' \cdot \frac{J_0}{J_1'} + \frac{b_1}{a_1} \cdot \lambda_1''' \cdot \frac{J_0}{J_1''};$$

$$\varkappa_1' = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\xi_1' \cdot (1 - \alpha_1)} - 1 - \frac{1}{1 - \alpha_1} - \frac{\alpha_1^2}{2 \cdot (1 - \alpha_1) \cdot \xi_1'^2};$$

$$\xi_1' = \frac{x_1}{l_1} = \frac{147,5}{170} = 0,868; \quad \alpha_1 = \frac{a_1}{l_1} = \frac{100}{170} = 0,589; \quad 1 - \alpha_1 = 1 - 0,589 = 0,411;$$

$$\varkappa_1' = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{0,868 \cdot 0,411} - 1 - \frac{1}{0,411} - \frac{0,589^2}{2 \cdot 0,411 \cdot 0,868^2} = 0,123;$$

$$\varepsilon_3 = -0,137 \cdot 0,123 + \frac{70}{100} \cdot 0,035 \cdot \frac{3217}{4100} + \frac{70}{100} \cdot 0,00077 \cdot \frac{3217}{1886} = 0,003;$$

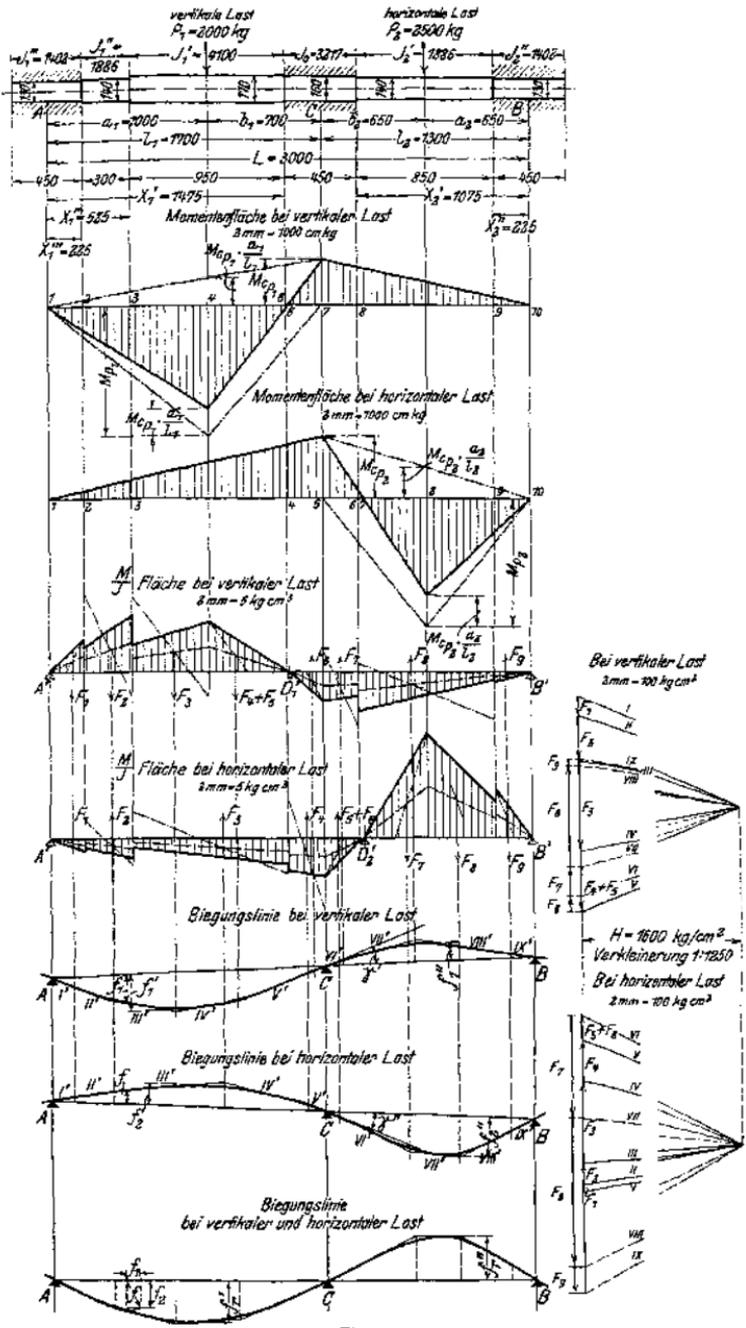


Fig. 119.

$$M_{P_1} = P_1 \cdot \frac{a_1 \cdot b_1}{l_1} = 2000 \cdot \frac{100 \cdot 70}{170} = 82400 \text{ cmkg};$$

$$M_{eP_1} = -82400 \cdot \frac{-0,109 \cdot 170 + [100 + 35] + 0,003 \cdot 170}{-0,109 \cdot 170 + 300 + 0,395 \cdot 130} = -29000 \text{ cmkg};$$

$$M_{eP_1} \cdot \frac{a_1}{l_1} = -29000 \cdot \frac{100}{170} = -17050 \text{ cmkg}. M_1 = M_{P_1} - M_{eP_1} \cdot \frac{a_1}{l_1} = 82400 - 17050 = 65350.$$

Bei horizontaler Last.

$$M_{eP_2} = -M_{P_2} \cdot \frac{\varepsilon_2 \cdot l_2 \cdot \left[a_2 + \frac{b_2}{2} \right] + \varepsilon_4 \cdot l_2}{\varepsilon_2 \cdot l_2 + L + \varepsilon_1 \cdot l_1}; \quad \varepsilon_4 = \kappa_2' \cdot \lambda_2' + \frac{b_2}{a_2} \cdot \lambda_2'' \cdot \frac{J_0}{J_1};$$

$$\kappa_2' = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\xi_2' \cdot (1 - \alpha_2)} - 1 - \frac{1}{1 - \alpha_2} - \frac{\alpha_2^2}{2 \cdot (1 - \alpha_2) \cdot \xi_2'^3};$$

$$\xi_2' = \frac{x_2'}{l_2} = \frac{107,5}{130} = 0,825; \quad \alpha_2 = \frac{a_2}{l_2} = \frac{65}{130} = 0,5; \quad 1 - \alpha_2 = 0,5;$$

$$\kappa_2'' = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{0,825 \cdot 0,5} - 1 - \frac{1}{0,5} - \frac{0,5^2}{2 \cdot 0,5 \cdot 0,825^3} = 0,19;$$

$$\varepsilon_4 = 0,19 \cdot 0,392 + \frac{65}{65} \cdot 0,00176 \cdot \frac{3217}{1886} = 0,078;$$

$$M_{P_2} = P_2 \cdot \frac{a_2 \cdot b_2}{l_2} = 2500 \cdot \frac{65 \cdot 65}{130} = 81300 \text{ cmkg};$$

$$M_{eP_2} = -81300 \cdot \frac{0,395 \cdot 130 + [65 + 32,5] + 0,078 \cdot 130}{0,395 \cdot 130 + 300 + (-0,109) \cdot 170} = -38800 \text{ cmkg};$$

$$M_{eP_2} \cdot \frac{a_2}{l_2} = -38800 \cdot \frac{65}{130} = 19400 \text{ cmkg}. M_2 = M_{P_2} - M_{eP_2} \cdot \frac{a_2}{l_2} = 81300 - 19400 = 61900.$$

$\frac{M}{J}$ Fläche bei vertikaler Last.

Stelle	Durchm. in cm	$J \text{ cm}^4$	$M_0 \text{ cmkg}$	$\frac{M}{J} \frac{\text{cmkg}}{\text{cm}^4} = \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$	Fläche	Grund- linie cm	mittl. Höhe $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$	Flächen- inhalt $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$
1	13	1402	0	0	} F_1	22,5	5,25	118
2			$65350 \cdot \frac{225}{1000} = 14700$	10,5				
2	14	1886	14700	7,8	} F_2	30	13	390
3			$63350 \cdot \frac{525}{1000} = 34300$	18,2				
3	17	4100	34300	8,37	} F_3	47,5	12,14	576
4			65350	15,9				
4	17	4100	65350	15,9	} F_4	47,5	8,15	392
5			$65350 \cdot \frac{10}{485} = 1345$	0,38				
5	16	3217	1345	0,42	} F_5	1	0,21	0,21
6			0	0				
6	16	3217	0	0	} F_6	21,5	-4,63	-100
7			-29000	-9,25				
7	16	3217	-29000	-9,25	} F_7	22,5	-8,37	-189
8			$-29000 \cdot \frac{1075}{1300} = -24000$	-7,48				
8	14	1886	-24000	-12,7	} F_8	85	-7,55	-643
9			$-29000 \cdot \frac{225}{1300} = -5025$	-2,68				
9	13	1402	-5025	-3,54	} F_9	22,5	-1,77	-39,8
10			0	0				

$$\frac{M}{J} \text{ Fläche bei horizontaler Last.}$$

Stelle	Durchm. in cm	J cm ⁴	M_b cmkg	$\frac{M}{J} \frac{\text{cmkg}}{\text{cm}^4} = \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$	Fläche	Grund- linie cm	mittl. Höhe $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$	Flächen- inhalt $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$
1	13	1402	0	0	} F_1	22,5	-1,83	-41,2
2			$-38800 \cdot \frac{225}{1700} = -5125$	-3,66				
2	14	1886	-5125	-2,72	} F_2	30	-4,54	-136,2
3			$-38800 \cdot \frac{525}{1700} = -11980$	-6,35				
3	17	4100	-11980	-2,92	} F_3	95	-5,55	-527
4			$-38800 \cdot \frac{1475}{1700} = -33650$	-8,18				
4	16	3217	-33650	-10,45	} F_4	22,5	-11,22	-257
5			-38800	-12,0				
5	16	3217	-38800	-12,0	} F_5	22,5	-6,28	-141
6			$-38800 \cdot \frac{10}{235} = -1800$	-0,56				
6	14	1886	-1800	-0,97	} F_6	1	-0,49	-0,49
7			0	0				
7	14	1886	0	0	} F_7	41,5	16,4	680,6
8			61900	32,8				
8	14	1886	61900	32,8	} F_8	42,5	22,08	940
9			$61990 \cdot \frac{225}{650} = 21400$	11,35				
9	13	1402	21400	15,25	} F_9	22,5	7,63	172
10			0	0				

$$f_1' = \frac{4,7 \cdot 50}{1250} = 0,019 \text{ cm}; \quad f_2'' = \frac{3,1 \cdot 50}{1250} = 0,022 \text{ cm};$$

$$f_1'' = \frac{2,4 \cdot 50}{1250} = 0,009 \text{ cm}; \quad f_7' = \frac{5,4 \cdot 50}{1250} = 0,0216 \text{ cm};$$

$$f_3' = \frac{2,7 \cdot 50}{1250} = 0,011 \text{ cm}; \quad f_7'' = \frac{5,46 \cdot 50}{1250} = 0,022 \text{ cm}.$$

Das resultierende Biegemoment im Mittellager ergibt sich zu (Fig. 120)

$$M_{cr} = \sqrt{M_c P_1^2 + M_c P_2^2} = 10000 \cdot \sqrt{2,9^2 + 3,88^2} = 48400 \text{ cmkg},$$

und das Drehmoment

$$M_d = 71620 \cdot \frac{N}{n} = 71620 \cdot \frac{250}{480} = 37150 \text{ cmkg};$$

mithin die resultierende Beanspruchung aus

$$\frac{J_0}{e} \cdot \bar{k}_r = M_b \cdot \left(0,35 + 0,65 \cdot \sqrt{1 + \left(\alpha_0 \cdot \frac{M_d}{M_b} \right)^2} \right),$$

$$\frac{3217}{8} \cdot \bar{k}_r = 48400 \cdot \left(0,35 + 0,65 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{37150}{48400} \right)^2} \right)$$

zu

$$\bar{k}_r = \frac{48400 \cdot 1,17 \cdot 8}{3217} = 141 \text{ kg/qcm}.$$

Die Auflagerdrücke betragen, Fig. 121, für das Lager A:

$$\text{lotrecht} \quad A_v = -\frac{M_1}{a_1} = -\frac{82400 - 17050}{100} = -654 \text{ kg},$$

$$\text{wagerecht} \quad A_h = -\frac{M_c P_2}{l_1} = -\frac{-38800}{170} = +228 \text{ kg},$$

$$A_r = \sqrt{A_v^2 + A_h^2} = \sqrt{654^2 + 228^2} = 692 \text{ kg}.$$

mit der Neigung gegen die Lotrechte

$$\text{tg } \alpha = \frac{A_h}{A_v} = \frac{228}{-654} = -0,349.$$

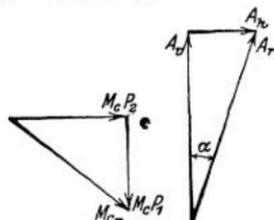


Fig. 120.

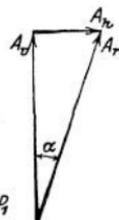


Fig. 121.

Ebenso, Fig. 122, für Lager B:

$$\text{lotrecht} \quad B_v = -\frac{M_c P_1}{l_1} = -\frac{-29000}{130} = +224 \text{ kg,}$$

$$\text{wagrecht} \quad B_h = -\frac{M_2}{a_2} = -\frac{81300 - 19400}{65} = -\frac{61900}{65} = -950 \text{ kg,}$$

$$B_r = \sqrt{B_v^2 + B_h^2} = \sqrt{224^2 + 950^2} = 977 \text{ kg,}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{P_v}{B_h} = \frac{224}{-950} = -0,236$$

und für Lager C, Fig. 123:

$$\text{lotrecht} \quad C_v = -A_v - B_v - P_1 = +654 - 224 - 2000 = -1570 \text{ kg;}$$

$$\text{wagrecht} \quad C_h = -A_h - B_h - P_2 = -228 + 950 - 2500 = -1778 \text{ kg,}$$

$$C_r = 1000 \cdot \sqrt{1,57^2 + 1,778^2} = 2370 \text{ kg,}$$

$$\text{tg } \gamma = \frac{C_h}{C_v} = \frac{1778}{1570} = 1,13.$$

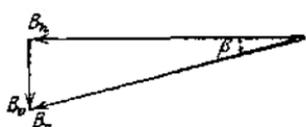


Fig. 122.

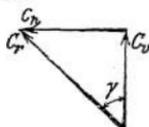


Fig. 123.

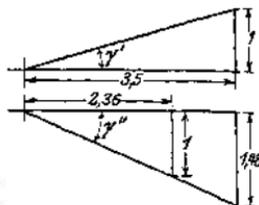


Fig. 124.

Der Neigungswinkel der Biegelinie in den Lagern kann am einfachsten aus der Biegelinie abgegriffen werden, und ist dann durch den Maßstab des Polabstandes zu dividieren. Z. B. wird abgegriffen (Fig. 124)

$$\text{für das Mittelager} \quad \text{tg } \gamma' = \frac{56}{160} \quad \text{als Neigung in lotrechter Ebene} = \frac{1}{3,5}$$

$$\text{und} \quad \text{tg } \gamma'' = \frac{68}{160} \quad \text{als Neigung in wagerechter Ebene} = \frac{1}{2,36} = \frac{1,48}{3,5};$$

dann ist für den Winkel der räumlichen Kurve

$$\text{tg } \gamma_I = \frac{\sqrt{1^2 + 1,48^2}}{3,5} = \frac{1}{1,97};$$

mithin bei einem Maßstab des Polabstandes $\frac{1}{1250}$ die wirkliche Abweichung von der ursprünglich geraden Achse

$$\text{tg } \gamma_I = \frac{1}{1,97 \cdot 1250} = \frac{1}{2460}.$$

Als größter Neigungswinkel wird gewöhnlich $\frac{1}{1000}$ zugelassen. Obige Neigung bedingt bei 450 mm Lagerlänge eine Differenz in der Höhenlage von Mitte Welle im Lager um

$$450 \cdot \text{tg } \gamma_I = \frac{450}{2460} = 0,183 \text{ mm}$$

und dem entsprechend eine Veränderung der Lagerpressungen, die sich bei nicht einstellbaren Lagern erst durch das Einlaufen teilweise ausgleichen. Vollkommen werden sie es auch bei einstellbaren in den meisten Fällen nicht tun, weil die Schwächung durch den Keil einen stetigen Wechsel der Biegelinie bedingt, und die Welle im Lager selbst ebenfalls sich durchbiegt.

VIII. Kupplungen.

1. Feste Kupplungen

gestatten keine gegenseitige Bewegung der beiden gekuppelten Wellen, deren Achsen in eine Gerade fallen.

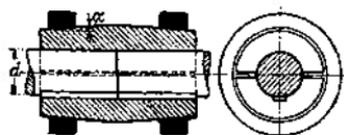


Fig. 125.

a) Gleichen Durchmesser für beide Wellen erfordern folgende Kupplungen:

Die Hülsenkupplung Fig. 125, aus zwei Hülsenhälften bestehend, die durch aufgeschraubte oder fest aufgeschlagene Ringe an die Welle gepreßt werden und deren Mitnahme durch Reibung erzwingen.

Zur Sicherheit wird meist eine Feder eingelegt. Mittlere Hülsestärke $= \frac{d}{3} + 5$ mm,
 $\operatorname{tg} \alpha = 1:20$ bis $1:25$, Hülselänge $= 3$ bis $4 \cdot d$, Ringquerschnitt $= \frac{d^2}{6}$ bis $\frac{d^2}{4}$.

In einfacherer Form kommt diese Kupplung als Muffenkupplung vor, bei der die Ringe fehlen und statt der geteilten Hülse eine prismatische Muffe auf beide Wellenenden aufgekelt wird. Ihr Nachteil ist der zum Einbringen der Keile erforderliche große Platzbedarf. Statt der Keile können die Wellenenden

auch mit Vier- oder Sechskantversehen werden oder nach Fig. 126 Hohlkehlen enthalten; durch elastische Zwischenglieder wird — bei Walzwerken — erreicht, daß die Kupplung in eine elastische übergeht.



Fig. 126.

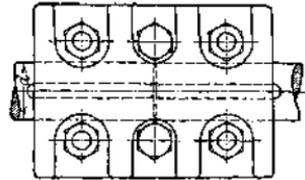
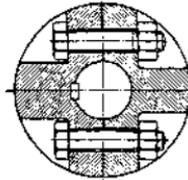


Fig. 127.

Die Schalenkupplung, Fig. 127, bei der die Wirkung der Ringe der Fig. 125 durch Schrauben ersetzt ist, die nicht, wie die Ringe, vor der Montage auf die Welle gebracht zu werden brauchen. Beide Kupplungshälften werden zuerst gehobelt, dann mit zwischengelegtem Papier ausgebohrt und pressen somit, ohne Zwischenlage auf die Welle gebracht, diese fest. Die mittleren Schrauben sind umgekehrt wie die äußeren eingebracht, um die Kupplungslänge etwas zu verkürzen. Je zwei gegenüberliegende Schrauben ergeben an der Welle den Druck $= 2Q$, mithin n -Schrauben wie beim neuen Zapfen das übertragbare Drehmoment

$$M_d = n \cdot Q \cdot \mu \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

b) Für verschiedene Durchmesser eignen sich folgende Kupplungen: Die Scheibenkupplung, Fig. 128. Da beim Aufkeilen die Scheiben sich etwas schiefe stellen, müssen sie nach dem Aufkeilen abgedreht werden, oder sie werden warm aufgezogen, wobei eine Feder eingelegt wird. Die Welle wird meist etwas abgesetzt, um die genaue Lage jeder Hälfte einzuhalten. Der außen überstehende Rand schützt vor Berühren der Schrauben. Nabellänge $= 1,2$ bis $1,5 \cdot d$. Bei n -Schrauben, deren jede mit der Kraft Q angezogen wird, übertragen diese lediglich durch Reibung ein Drehmoment, das sich ergibt aus

$$\frac{M_d}{D_1} = Q \cdot \mu \cdot n \quad \text{mit} \quad \mu = 0,25$$

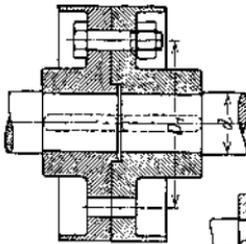


Fig. 128.

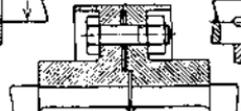


Fig. 129.

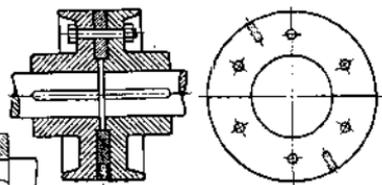


Fig. 130.

für überschrappte Stirnflächen. Ein größeres Moment kann man bei gleicher Drehrichtung durch Verwendung gedrehter Schrauben, bei wechselnder besser durch konische Bolzen aufnehmen, oder man gibt der Reibung einen größeren Hebelarm, indem man die Scheiben sich nur außen auf einem kleinen Rande berühren läßt, Fig. 129. Die Zentrierung wird durch Ineinandergreifen beider Hälften erreicht; damit ist der Nachteil verbunden, daß eine Welle erst nach

Längsverschiebung um die Höhe dieses Ansatzes auszubauen ist. Dies vermeidet Fig. 130, bei der ein zweiteiliger Ring die Zentrierung übernimmt. Nachteil aller

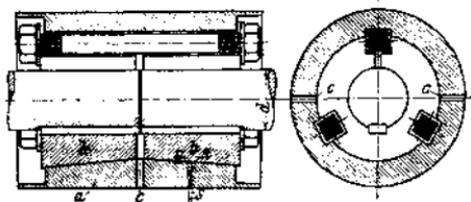


Fig. 131.

Scheibenkupplungen: sämtliche Räder und Riemscheiben müssen geteilt, sämtliche Lager offen (Kugellager nicht verwendbar) sein. Dies vermeidet die Sellerskupplung, Fig. 131. Beim Anziehen der Schrauben mit der Kraft Q pressen diese die außen kegelförmig ausgebildeten, geschlitzten Teile

b gegen die innen doppelkegelförmige Hülse a und zugleich gegen die Welle, so deren Mitnahme durch Reibung erzwingend; Feder dient zur Sicherheit, zum gleichen Zweck liegen die Schrauben in a und b . Neigung der Kegelflächen etwa 1:8. Zwei um 180° versetzte Schaulöcher c in Kupplungsmitte lassen die richtige Lage der Welle erkennen. Bei n -Schrauben ist annähernd

$$M_d = n \cdot S \cdot \mu \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

2. Bewegliche Kupplungen

gestatten eine gegenseitige Bewegung beider Wellen gegeneinander in Achsenrichtung, sowie senkrecht dazu, auch Neigung einer Welle gegen die andere. Verschiebungen in Achsenrichtung sind durch Längenänderungen infolge Temperaturschwankungen bedingt und würden, wenn sie nicht in den Kupplungen aufgehoben werden, den Eingriff von Rädern stören und die Laufflächen der Wellen in den Lagern verändern; Verschiebungen senkrecht zur Achsenrichtung sowie Abweichungen von der Geraden sind die Folge von Abnutzung oder Bodensenkungen. Soweit die Kupplungen diese Bewegungen durch Vermittlung einer elastischen Zwischenlage ermöglichen, können sie auch als isolierende verwandt

werden, wenn die Zwischenlage dieser Bedingung entspricht.

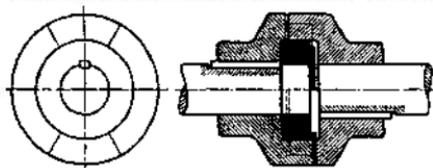


Fig. 132.



Fig. 133.

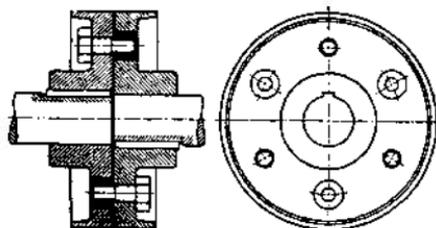


Fig. 134.

Die Klauenkupplung, Fig. 132 und 133, mit zwei oder drei Paar Klauen gestattet nur eine Längsverschiebung. Zur Zentrierung wird entweder ein Ring eingelegt, oder die eine Welle greift in die verlängerte Nabe der anderen.

Bewegliche Scheibenkupplung, Fig. 134, zu berechnen auf Flächenpressung zwischen Zapfen und Büchse aus

Metall, Stahl, Hartgummi oder dgl. Sich der Kugelform nähernde Bolzen gestatten Ablenkungen der Wellenmitten voneinander. Zapfen sitzen abwechselnd

in der rechten und linken Scheibe, so daß beide Scheiben gleich. Fig. 135: zylindrische Bolzen.

Lederbolzenkupplung, Fig. 136 verwendet Bolzen aus Leder. Federnde Ringe *a*, zur Hälfte in die Kupplungsscheiben eingreifend, sichern die Bolzen.

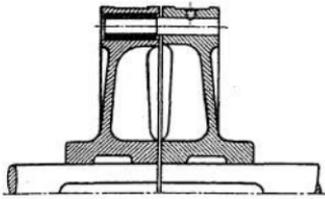


Fig. 135.

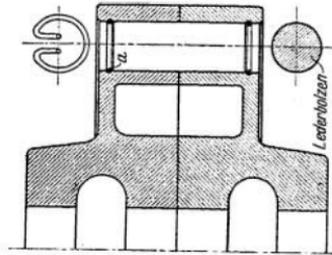


Fig. 136.

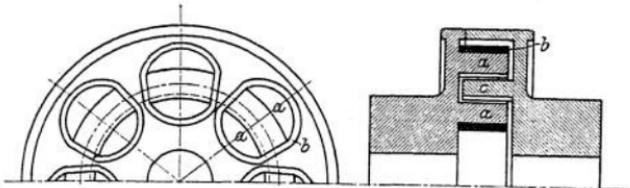


Fig. 137.

Elastische Lederringkupplung, Fig. 137. Die linke Kupplungshälfte trägt Vorsprünge *a*, um die Lederringe *b* geschlungen; die rechte Hälfte zwischen die Vorsprünge *a* passende Vorsprünge *c*, die sich seitlich gegen die Ringe legen und so die Mitnahme verursachen.

Lederlamellenkupplung, Fig. 138. Übertragung geschieht durch Lederlamellen, von denen eine — — — — — eingezeichnet ist. Auf jedem Bolzen sitzen vier Lamellen, je zwei für jede Drehrichtung.

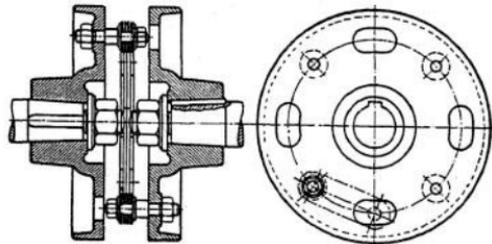


Fig. 138.

Cardansches, Hooksches oder Kreuzgelenk, Fig. 139/140, für größern Neigungswinkel γ beider Wellen. Auf jedem Wellenende sitzt fest aufgekeilt ein mit zwei Zapfen versehenes Kuppelstück; alle vier Zapfen werden umschlossen

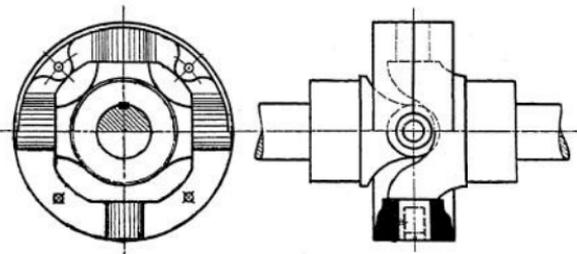


Fig. 139.

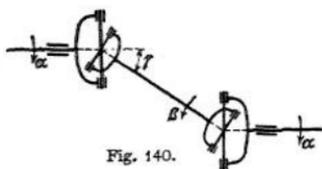
von einem geteilten Ring, der durch vier Schrauben zusammengehalten wird. Die Zapfen sind hohl und werden mit Fett zur Schmierung gefüllt. Nachteil:

beide Wellen drehen sich nicht mit konstanter Winkelgeschwindigkeit und zwar ergibt sich der Drehwinkel aus

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \cdot \cos \gamma .$$

Werden zwei parallele Wellen durch eine Zwischenwelle verbunden, Fig. 140, so tritt dieser Nachteil nicht in Erscheinung.

Fig. 140.



Bandkupplung der Firma J.M.Voith, Heidenheim, Fig. 141, für eine Drehrichtung. Ein endloser Leder- oder Baumwollriemen ist

um je 8 Schlaufen jeder Kupplungshälfte geschlungen, so die elastische Mitnahme der getriebenen Welle bedingend. Nach Lösen der Schrauben *A* kann jede Welle für sich herausgenommen werden, wobei das Band in seiner Lage auf

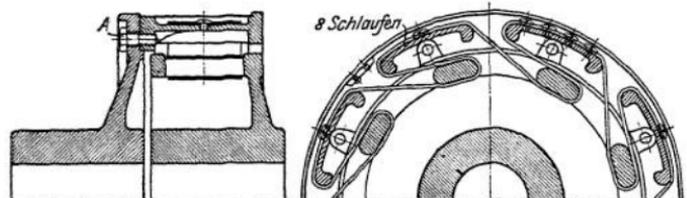


Fig. 141.

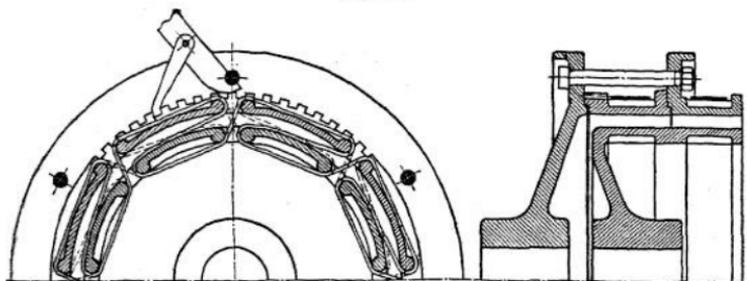


Fig. 142.

den Schlaufen (auf den äußeren ist es verschraubt) verbleibt. Für wechselnde Drehrichtung werden zwei Bänder nach Fig. 142 vorgesehen — eins für Rechts-, eins für Linkslauf —,

da ein Band schnell verschleibenwürde. Die äußeren Schlaufen jedes Bandes sitzen auf einer Hälfte des geteilten Ringes; Nachspannung geschieht durch gegenseitige Verdrehung beider Ringhälften, wozu man sich eines Spannhelms bedienen kann.

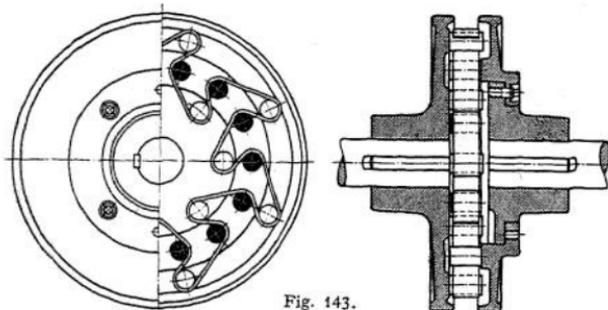


Fig. 143.

Cachinkupplung des Eisenwerkes Wülfel vor Hannover, Fig. 143, die auch ausrückbar, ähnlich Fig. 148, ausgeführt wird.

Für stoßweisen Betrieb eignen sich diese Kupplungen nicht.

E1-Is-Kupplung (elastisch isolierend) der Peniger Maschinenfabrik in Penig, Fig. 144: die linke Nabe trägt Bolzen *a*; auf diesen sitzen mittels Druckschrauben

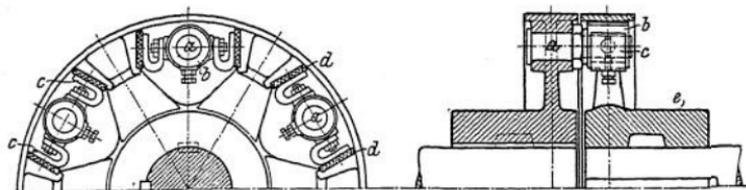


Fig. 144.

gehalten Hülsen *b*, die seitliche Federn *c* tragen; diese legen sich gegen isolierende Beilagen *d* in der zweiten Nabe *e*.

3. Während des Stillstandes ein- und ausrückbare Kupplungen.

Das ausrückbare Stück wird am besten auf die getriebene Welle gesetzt, so daß nur während des Betriebes Abnutzung des Schleifringes eintritt. Verschieben des Schleifringes und damit der Kupplungshälfte durch Hebel von Hand, bei größeren mittels Zahnstange und Rad oder Schraubenspindel und Wandermutter. Zahnstange hat den Vorteil, daß nach Aufhören der Einrückkraft jede Rückwirkung auf den Schleifring sicher aufhört; ein Zurückdrehen der Spindel zu gleichem Zweck könnte die Kupplung in nur teilweise eingerückten Zustand versetzen.

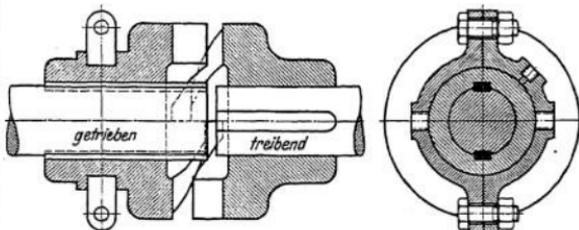


Fig. 145.

Bei der ausrückbaren Klauenkupplung, Fig. 145, sind die Klauen im Gegensatz zu Fig. 132/133 abgeschragt, um das Einrücken zu erleichtern. Feste Kupplungshälfte mit einem Keil aufgekeilt, ausrückbare auf zwei Federn verschiebbar. Bei wechselnder Drehrichtung Klauen nach Fig. 132/133.

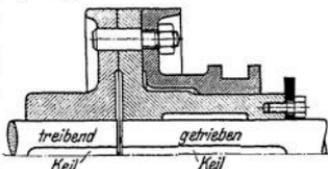


Fig. 146.

Ein- und Ausrücken während des Ganges führt zu Beschädigungen der Klauen; ersteres auch der zu beschleunigenden Massen wegen leicht zu Brüchen; unter Last ist beides erschwert durch die Reibung auf den Kupplungsflächen und an den Federn und bedingt den Nachteil dieser Kupplung: die schnelle Abnutzung der Federn.

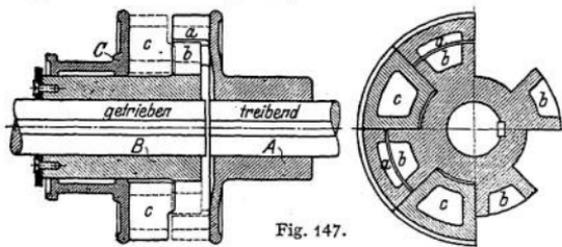


Fig. 147.

Hiervon frei sind die ausrückbare Bolzenkupplung, Fig. 146, und die Hildebrandtkupplung, Fig. 147. Teile *A* und *B* sind auf den Wellen aufgekelt und tragen je vier Klauen *a* und *b*, die im ausgerückten Zustand eine Drehung einer Welle gegen die andere zulassen, da der äußere Durchmesser der Klauen *b* kleiner als der innere von *a*. Wird Muffe *C* bei entsprechender Stellung von *a* und *b* nach rechts verschoben, wobei sich ihre Klauen *c* zwischen *a* und *b* schieben, so wird die getriebene Welle mitgenommen. Um das Einrücken zu erleichtern, greifen Klauen *c* stets mit kleinem Vorsprung in *b* ein.

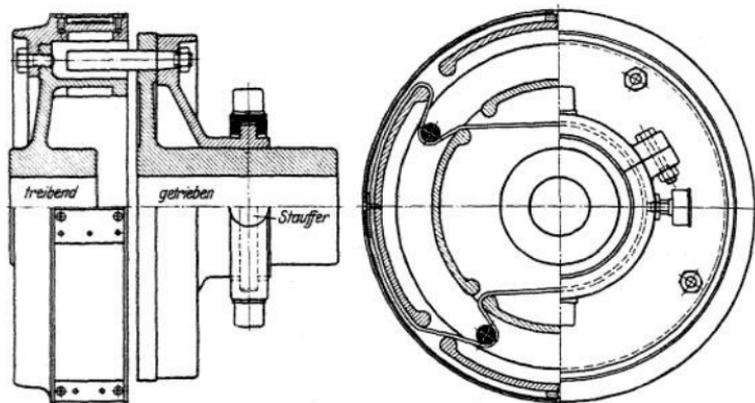


Fig. 148.

Ebenso ist von obigem Fehler frei die ausrückbare Bandkupplung Zodel-Voith, in Fig. 143 für eine Drehrichtung dargestellt: vier Bolzen legen sich gegen das Band und stellen so den Kupplungsschluß her.

4. Während des Betriebes ein- und ausrückbare Kupplungen.

Um langsames Einrücken und mehr oder weniger plötzliches Ausrücken zu erzielen, kuppelt man beide Wellen mittels Reibflächen.

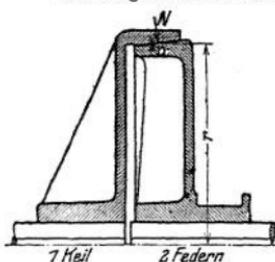


Fig. 149.

Bei der Reibungskegelkupplung, Fig. 149, muß der Normaldruck $N \cdot \mu \geq$ als die Umfangskraft $\frac{M_d}{r}$ sein. Seine axiale Komponente

$$Q = N \cdot \sin \alpha = \frac{M_d}{r} \cdot \frac{\sin \alpha}{\mu}$$

muß beim Einrücken während des Betriebes vom Schleifring ausgeübt werden. Beim Einrücken während des Stillstandes und beim Ausrücken (relative Ruhe beider Kupplungshälften) ist außerdem die Komponente der Reibung $= \mu \cdot N \cdot \cos \alpha$ zu berücksichtigen (während des Betriebes wird die Reibung in tangentialer Richtung durch die Umfangskraft voll ausgenutzt, sofern $\mu \cdot N$ nicht größer als $\frac{M_d}{r}$), so daß sich in diesem Falle die vom Schleifring auszuübende Kraft ergibt zu

$$Q_1 \text{ bzw. } Q_2 = N \cdot (\sin \alpha \pm \mu \cdot \cos \alpha) = \frac{M_d}{r} \cdot \frac{\sin \alpha \pm \mu \cdot \cos \alpha}{\mu}$$

+ beim Einrücken = Q_1 , - beim Ausrücken = Q_2 . Für $Q_1 > Q > Q_2$ bleibt die Kupplung geschlossen; für $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ wird $Q = 0$. Meist $\mu < \operatorname{tg} \alpha$, oder $\operatorname{tg} \alpha \approx \frac{1}{n}$, da andernfalls ein Klemmen leicht eintritt. Für Grauguß etwa $\mu = 0,1$ bis $0,125$. Zum Ausrücken etwa 5 mm erforderlich.

Beispiel: $\mu = 0,1$, $\alpha = 10^\circ$, $r = 275$, $n = 125$, $N = 3$ PS,
 $Q = 71620 \cdot \frac{3}{125 \cdot 27,5} \cdot \frac{\sin 10^\circ \pm 0,1 \cdot \cos 10^\circ}{0,1} = 62,5 \cdot \frac{0,174 \pm 0,098}{0,1}$,
 $Q_1 = \frac{62,5 \cdot 0,272}{0,1} = 172 \text{ kg}$, $Q_2 = \frac{62,5 \cdot 0,076}{0,1} = 47,5 \text{ kg}$.

Ein Nachteil dieser Kupplung ist neben der Abnutzung der Federn (vgl. Fig. 145), daß die Gegenkraft dieses Anpressdruckes vom Lager aufzunehmen ist. Dies ist bei den folgenden Kupplungen dadurch vermieden, daß sich die zum Anpressen erforderlichen Kräfte innerhalb der Kupplungen selbst ausgleichen, so daß nur beim Ein- und Ausrücken eine äußere Kraft auf sie zur Wirkung kommt:

Dohmen - Leblanc - Kupplung, Fig. 150: Auf der treibenden Welle sitzt fest aufgekeilt Teil *a*, auf der getriebenen *b*; wird Kuppelstück *c* nach

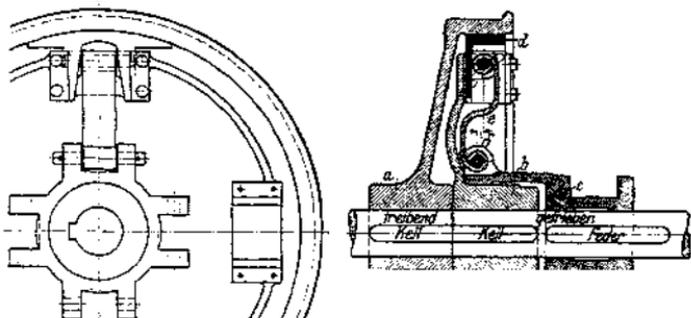


Fig. 150.

links verschoben, so werden die vier Backen *d* mittels Federn *e* gegen *a* gepreßt, wobei die Reibung die Mitnahme der rechten Welle erzwingt. Um im eingerückten Zustande den Schleifring zu entlasten, überschreiten die inneren Bolzen um δ die Mittellage.

Muß der ausrückbare Kupplungsteil auf der treibenden Welle sitzen, so werden Backen *d* durch Gegengewichte ausgeglichen, Fig. 151, da andernfalls die

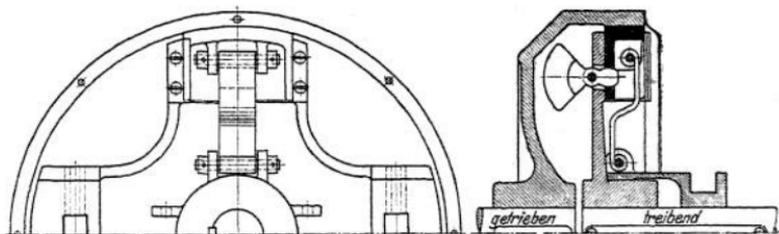


Fig. 151.

Zentrifugalkraft die Backen gegen *a* pressen könnte; auch wird das Lösen der Kupplung hierdurch erleichtert. Keilförmige Rillen als Berührungsfläche, Fig. 152, vergrößern die übertragbare Umfangskraft. Trotzdem eignet sich diese Kupplung entsprechend der Stärke der Federn *e* nur für geringe Kräfte und hat außerdem den Nachteil, daß geringe Abweichungen in den Berührungsflächen

durch Abnutzung und dgl. sich bei der geringen Federung von *e* stark bemerkbar machen.

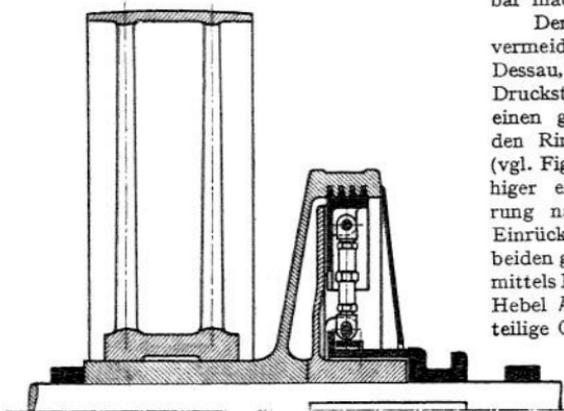


Fig. 152.

Den letzter. Nachteil vermeidet G. Polysius, Dessau, durch nachstellbare Druckstangen, die sich auf einen gemeinsamen federnden Ring stützen, Fig. 152 (vgl. Fig. 159), und die ruhiger einrückende Ausführung nach Fig. 153: beim Einrücken von *d* werden die beiden gemeinsamen Ringe *e* mittels Druckstangen *m* und Hebel *k* und *l* an das zweiteilige Gehäuse *a/b* gepreßt, so den Reibenschluß bewirkend. Eine gemeinsame Ringfeder *r* stützt dabei Stangen *m*,

wozu deren innere Bolzen etwas Luft haben, so daß sämtliche Stangen gleichen Druck erhalten. In *e* gelagerte Traversen *f* übertragen die Kraft auf Scheibe *c*, wobei elastische Beilagen *z* zwischen *f* und *c* geschaltet sind.

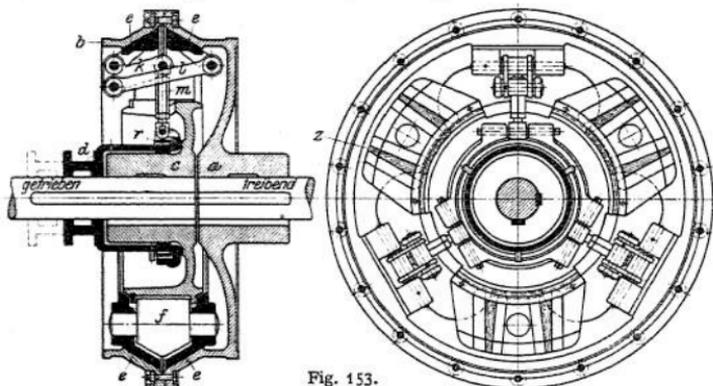


Fig. 153.

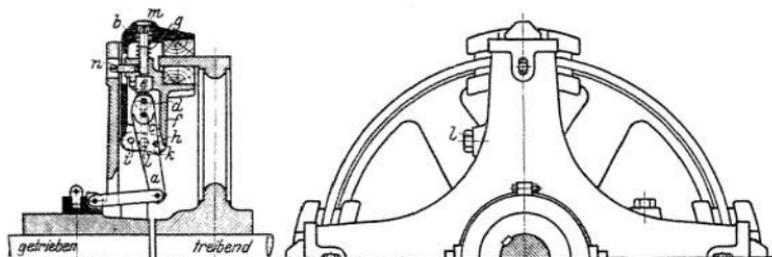


Fig. 154.

Hill-Kupplung, in Fig. 154 im eingerückten Zustand wiedergegeben. Beim Einrücken wird der Doppelhebel *a* um den in der äußeren Backe *b* gelagerten

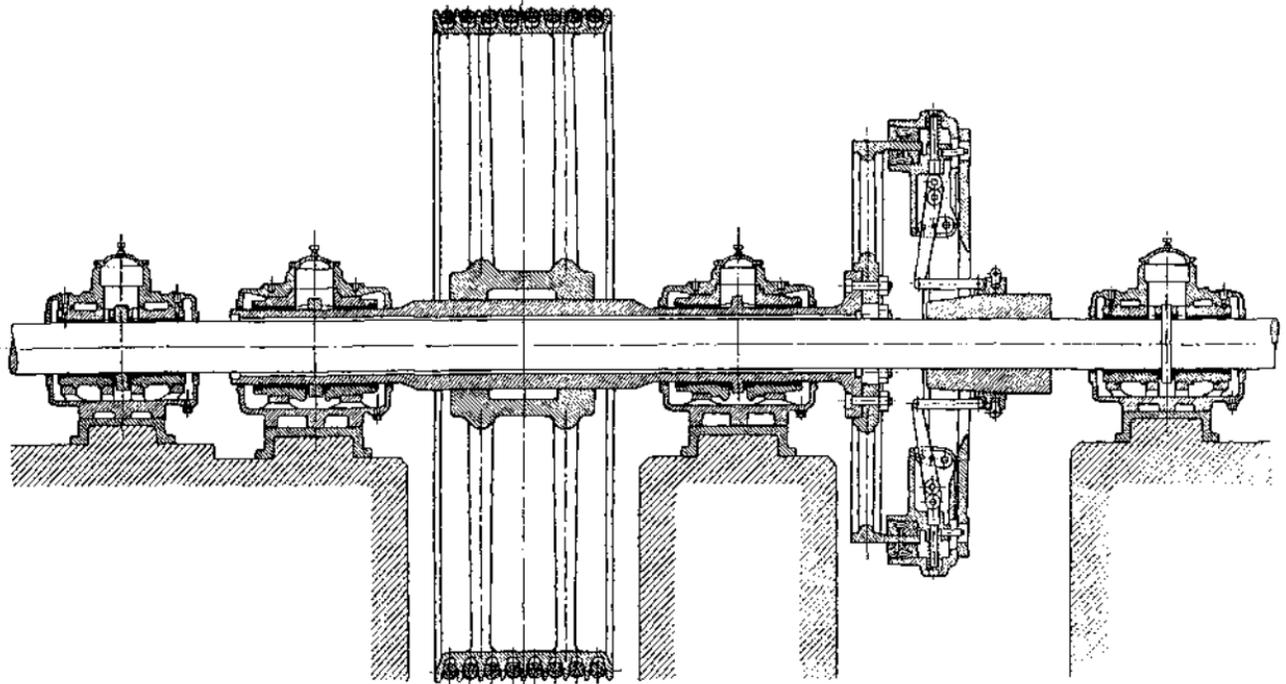


Fig. 155.

Zapfen *c* gedreht. Hierbei drückt Rolle *d* an *a* sitzend gegen den Bolzen *e* der inneren Backe *f*, so daß beide Backen mit gleicher Kraft gegen den Reibungsring gepreßt werden. Auch hier überschreitet *d* um ein geringes die Mittellage, um den Schleifring zu entlasten. Federn *g* entfernen beim Zurückgehen des Schleifringes die Backen von der Kupplungsscheibe, wobei der mittels Bolzen *h* und *i* mit beiden Backen *b* und *f* verbundene Doppelhebel *k*, der im Armkreuz im Bolzen *l* seinen festen Drehpunkt hat, die Backen zwingt, sich gleich weit vom Reibungsring zu entfernen. Bei eingetretener Abnutzung wird *e* mittels Schraube *m* nach unten geschraubt, wobei *n* die Sicherung übernimmt.

Die paarweise angeordneten Backen bedingen gegenüber der vorhergehenden Kupplung bei gleicher Umfangskraft nur den halben Anpressungsdruck, der außerdem den Ring nicht radial beansprucht.

Fig. 155 zeigt die Hill-Kupplung in Verbindung mit einer Hohlwelle, die nach Bedarf ein- und ausgeschaltet werden kann; ausgerückt steht sie still, so daß jede Reibung vermieden ist. Ausgeführt wird sie wie die folgende vom Eisenwerke Wülfel in Hannover-Wülfel.

Reibungsflächen lotrecht zur Achse benutzt die X-Kupplung,

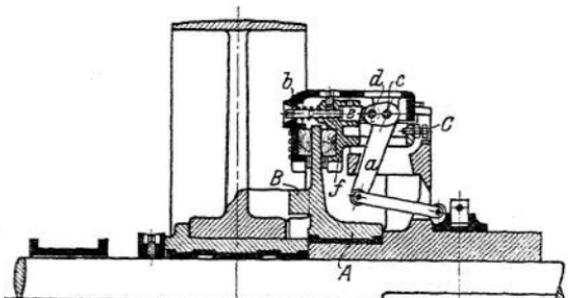


Fig. 156.

Fig. 156, zum Zweck, Staubablagerungen und zugleich den Nachteil der Hill-Kupplung zu vermeiden, daß bei eingetretener Abnutzung der Leerlaufbüchse (vgl. Fig. 159) die exzentrisch zur treibenden Welle laufende Riemenscheibe die Kupplung beeinflusst.

Hierzu ist die Mitnehmerscheibe *A* auf der Nabe der festen Kupplungshälfte lose laufend angeordnet und trägt zwei Knaggen *B*, die sich gegen Nasen der Riemscheibe legen, so daß sowohl die freie Beweglichkeit zwischen Riemen- und Mitnehmerscheibe als auch der zentrische Lauf beider Kupplungshälften gewährleistet ist. Die übrigen Bezeichnungen sind die der Hill-Kupplung. Stellschraube *C* sichert beim Ausrücken der Kupplung das gleichmäßige Abheben der Backen durch Anschlagen des Hebels *a*.

Benn-Kupplung von Vogel & Schlegel, Dresden-Plauen, Fig. 157: seitlich neben der getriebenen Welle liegende Federn *a* drücken im eingerückten

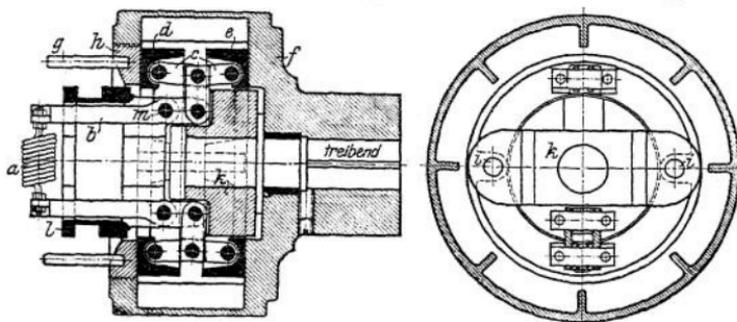


Fig. 157.

Zustand mittels ungleicharmiger Doppelhebel b und Kniehebel c die beiden Reibringe d und e gegen die fest aufgekeilte Kupplungshälfte f bzw. den in dieser mittels Stifte g nachstellbaren Ring h , wobei zwei Bolzen i , die durch beide Teile d und e und die auf der getriebenen Welle aufgekeilte Kupplungshälfte h greifen, die Kraftübertragung auf die getriebene Welle vermitteln. Gelöst wird die Kupplung, indem Teil l nach links gerückt wird, wobei der mittels Bolzen m mit ihm verbundene Hebel b mitgenommen wird.

Eine fast gleiche Kupplung baut Lohmann & Stolterfoht, Witten.

Bei einer zweiten Kupplung dieser Firma wird in ähnlicher Weise ein Bolzen mit Rechts- und Linksgewinde von einer Ausrückmuffe aus gedreht und klemmt beim Einrücken zwei Backen fest gegen einen auf der treibenden Welle aufgekeilten Zylinder.

Isfort-Kupplung von Hesselbein & Reygers, Bocholt, Fig. 158: Beim Einrücken dreht sich Hebel H um Bolzen B , der im Arm A befestigt ist. Rollen R drücken dabei auf Bolzen D und pressen Holzklötze C zwischen Ring E und Kupplungshälfte K , so den Kupplungsschluß herstellend. Rollen R überschreiten etwas den Scheitelpunkt, so daß der Schleifring entlastet wird und axiale Kräfte nicht auftreten.

Beim Ausrücken lösen sich Rollen R von den Bolzen D , wobei Zwischenring E durch Federn abgedrückt wird. Bolzen D dienen zugleich zum Nachstellen.

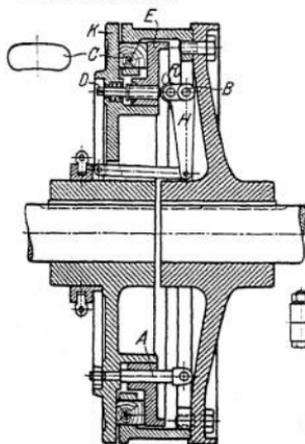


Fig. 158.

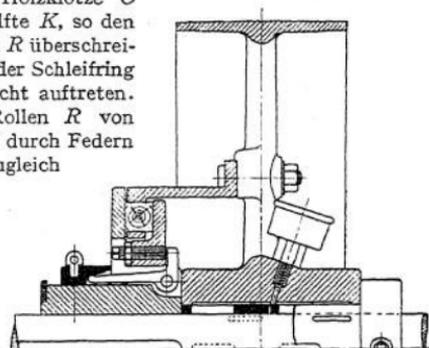


Fig. 159.

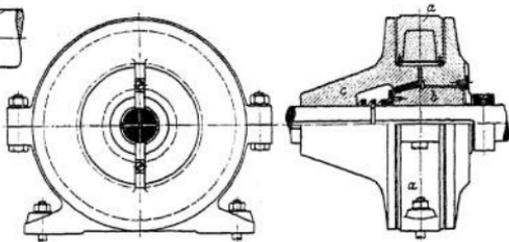


Fig. 160.

Fig. 159 zeigt eine etwas einfachere Bauart, welche einen kleineren Durchmesser gestattet, in Verbindung mit einer Riemscheibe (vgl. Fig. 152). Diese kann zur Kraftentnahme oder -abgabe ein- und ausgeschaltet werden (Fest- und Losscheibe). Man kommt mit nur einer Scheibe aus, und der Riemen braucht nicht verschoben zu werden; er leidet also nicht durch das Verschieben. Dagegen bewirkt bei stillstehender Scheibe die laufende Welle leicht eine einseitige Abnutzung der Leerlauffläche, weshalb für größere Kräfte Fig. 155 anzuwenden ist.

Beim Einrücken werden die längeren Arme der Winkelhebel zur Welle hin gedrückt, wobei die kürzeren den Zwischenring gegen die Holzklötze pressen.

Statt auf mechanischem Wege den Druck auf den Berührungsflächen zu erzeugen, kann dies auch auf elektromagnetischem geschehen. Kupplungen dieser Art können von jeder beliebigen Stelle der Werkstatt aus leicht und augenblicklich ein- und ausgerückt werden, verbrauchen jedoch während der Kraftüber-

tragung dauernd Strom. Ein Beispiel zeigt die Watzke-Kupplung, Fig. 160, ausgeführt von der Penig Maschinenfabrik und Eisengießerei, Penig. Sie besteht aus dem zweiteiligen, stillstehenden Magnetkörper *a*, der die Spulen trägt, und den beiden ihn umfassenden Ankern. Der getriebene *b* ist auf Feder und Nut axial verschiebbar und mit einem konischen Reibring aus Bronze versehen; der treibende *c*, welcher fest aufgekeilt ist, enthält die entsprechende Reibfläche. Der Bronzering ist in beide Anker genau eingeschliffen. Bei ausgeschaltetem Strom wird der getriebene Anker durch eine Feder von dem treibenden abgedrückt, so daß er sofort zur Ruhe kommt. Da die Spulen stillstehen, sind Schleifringe und Bürsten vermieden.

Statt für die übertragbare Umfangskraft den Normaldruck unmittelbar zu verwenden, benutzt die Triumph-Kupplung, Fig. 161, (Louis Schwarz & Co., Dortmund), die Seilreibung: auf der getriebenen Welle sitzt fest aufgekeilt Hartgußmuffe *A*; um diese ist bandartig eine Schraubenfeder gewunden, deren eines Ende bei *B* mit der auf der treibenden Welle fest aufgekeilten Hälfte *C* verbunden ist, indem ein Vorsprung in eine Aussparung von *C* greift, wobei Lasche *D* die Sicherung übernimmt. Das freie Ende trägt den Doppelhebel *E*. Wird auf diesen von der Einrückzscheibe *F* aus ein Druck nach links ausgeübt, so legt der Hebel sich mittels Regulierschraube gegen den Nocken *G* der zweiten Federwindung, dabei das freie Federende mittels Bolzen *H* an *A* anpressend und nach abwärts ziehend. Geschieht dies mit der Kraft *P*, so kann bei *B* die Umfangskraft $= P \cdot e^{\mu \alpha}$ (vgl. S. 312) aufgenommen werden.

Beispiel: Der Anpressendruck von *F* in axialer Richtung möge 10 kg betragen und das Hebelverhältnis $a : b = 1 : 5$; so ergibt sich:

$$P = 10 \cdot 5 = 50 \text{ kg}$$

und die Umfangskraft bei *B* bei $4\frac{1}{4}$ Umschlingungen mit $\mu = 0,12$:

$$= 50 \cdot e^{0,12 \cdot 4\frac{1}{4}} \cdot 2\pi = 50 \cdot 24,5 = 1225 \text{ kg.}$$

Es eignet sich diese Kupplung also bis zu den größten übertragbaren Umfangskräften (Walzwerke). Der geringe axiale Druck ist unbedeutend.

Die rechte Welle wird in der Nabe von *C* gelagert, da die Muffe *A* eine ziemlich

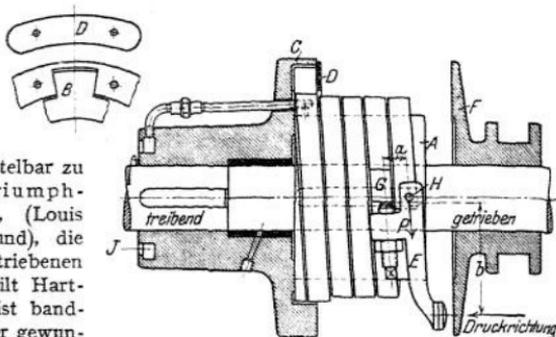


Fig. 161.

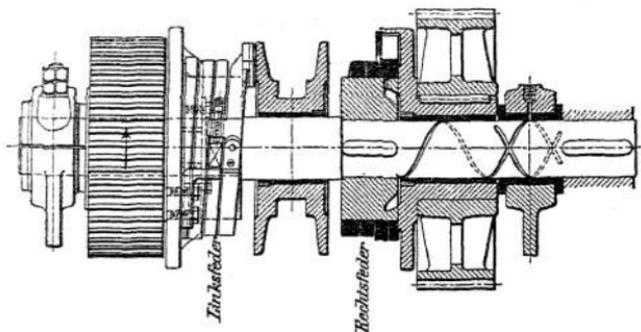


Fig. 162.

große Baulänge bedingt. Schmierung von *A* erfolgt in der gezeichneten Weise, wobei das Öl durch die Zentrifugalkraft aus dem Ölring *J* geschleudert wird (vgl. Fig. 114).

Auch die rechte Welle kann bei umgekehrter Drehrichtung treiben; Schmierung ist dann zu ändern.

Wechselnde Drehrichtung läßt sich mit Rechts- und Linksfeder erreichen, Fig. 162. Bei Verwendung zweier in ein drittes Rad eingreifender Kegelräder statt der Stirnräder ergibt sich ein Wendegetriebe.

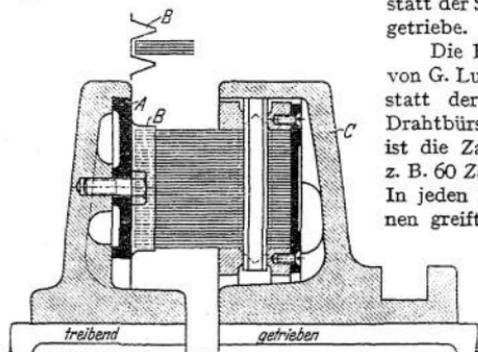


Fig. 163.

Die Bürstenkupplung, Fig. 163, von G. Luther, Braunschweig, verwendet statt der Reibung die Elastizität von Drahtbürsten. Mit der treibenden Scheibe ist die Zahnscheibe *A* verschraubt, die z. B. 60 Zähne *B* von Dreiecksform trägt. In jeden Spielraum zwischen zwei Zähnen greift etwa 6—10 mm tief eine aus $36 \cdot 4 = 144$ Stäbchen bestehende federnde Bürste ein, die mit der ausrückbaren Kupplungshälfte *C* fest verbunden ist, und überträgt die Kraft. Zum Ausrücken (meist Bürsten verschiebbar)

genügen einige Millimeter Spiel zwischen Zähnen *B* und Bürstenende.

Diese, wie sämtliche Reibungskupplungen, überträgt nur eine durch die Stärke der Bürsten bzw. der Reibung gegebene größte Kraft, mithin können sie sämtlich als

5. Sicherheitskupplungen

gegen Übertragung eines zu großen Drehmomentes verwandt werden (Rutschkupplungen). Diesen Zweck verfolgt ausgesprochen die ausrückbare Klinken-Reibungskupplung von Lohmann & Stolterfoht, Witten.

Beispiele für nicht ausrückbare Kupplungen sind die Federreibungskupplung von Stuckenholz, Fig. 164 (vgl. Fig. 134), und Ausführung von Lauchhammer, Fig. 165, bei der die Kuppelschrauben entlastet sind.

Statt von der Reibung kann man die größte übertragbare Umfangskraft auch von der Scherkraft von Stiften oder Bolzen abhängig machen — Stiftkupplungen — (vgl. Fig. 128), wenn deren Querschnitt bemessen wird nach der Beziehung

$$\text{Umfangskraft} = \text{gesamter Bolzenquerschnitt} \cdot \text{Ks.}$$

Soll einseitig die Arbeit einer oder mehrerer Hilfsmaschinen auf eine anderweitig angetriebene Welle übertragen werden, so kommen

6. Kraftmaschinenkupplungen.

in Frage, die je nach der Geschwindigkeit der Hilfsmaschine selbsttätig ein- und ausschalten (falls Welle des Hilfsmotors nicht am Ende der des Hauptmotors angebracht werden kann, ist sie als Hohlwelle, Fig. 155, auszubilden).

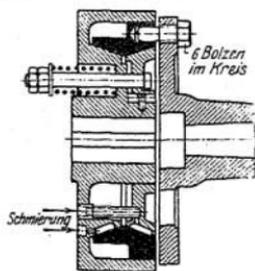


Fig. 164.

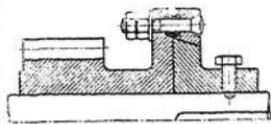


Fig. 165.

Uhlhorn - Kupplung, Fig. 166: Sobald der Hilfsmotor die Umdrehzahl des Hauptmotors erreicht, legen sich die beiden Klinken *a*, die ihren Drehpunkt in der Kupplungshälfte *b* haben, welche auf der Welle des Hilfsmotors (meist

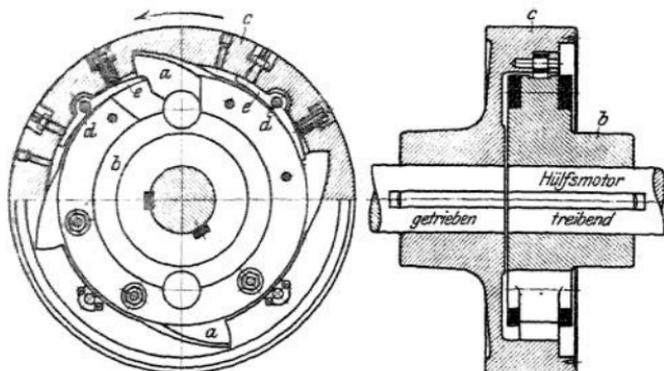


Fig. 166.

Hohlwelle, Fig. 155) aufgekeilt ist, in Lücken der auf der getriebenen Welle aufgekeilten Hälfte *c* und erzwingen so deren Mitnahme (bevor diese Geschwindigkeit erreicht war, eilte *c* vor, wobei um *d* drehbare Federn *e* die Klinken *a* herunterdrückten). Das Einrücken geschieht also selbsttätig, da bei Erreichen obiger Umdrehzahl *a* an Federn *e* stoßen, wobei diese Federn die Klinken in die richtige Lage aufrichten; ebenso erfolgt das Ausrücken selbsttätig, da dann *e* über die Klinken hinweggleitet, diese in Lücken von *b* drückend.

Das Einrücken der Kupplung geschieht also im ungünstigsten Falle bei einer Relativgeschwindigkeit, die im Lauf einer Viertelumdrehung erreicht werden kann.

Arndtsche Kupplung von Luther, Braunschweig, Fig. 167. Eilt die rechte Hälfte vor (oder bleibt die linke zurück), so bewirken die in spiralförmigen Nuten geführten Stifte, daß die rechte Hälfte sich nach links verschiebt, bis ihre Schraubenflächen gegen

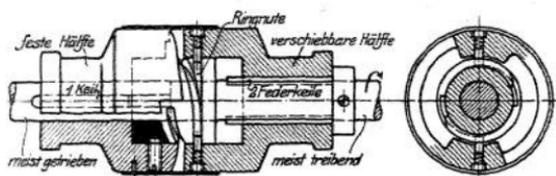


Fig. 167.

die der linken Hälfte anliegen. Bleibt die rechte aber zurück, so wird der rechte Teil nach rechts verschoben, bis die Stifte in einer Ringnut laufen, die im Grunde etwas

größeren Durchmesser als die spiralförmigen Nuten hat, wobei die Stifte mittels einer hinter ihnen liegender Feder die kleine Stufe jedesmal herunterspringen.

Bei umgekehrter Drehrichtung kann auch die linke Welle treiben.

Die Mitnahme der getriebenen Welle erfolgt also plötzlich.

Dreika - Kupplung der Peniger Maschinenfabrik. Auf der Welle des Hilfsmotors sitzen mit Rechts- und Linksgewinde zwei Mitnehmerscheiben. Eilt dieser Motor vor, so klemmen sie eine auf der Welle des Hauptmotors sitzende Reibscheibe fest zwischen sich; bleibt er aber zurück, geben sie sie frei.

Die Ohnesorge - Kupplung der Berlin-Anhaltischen Maschinenbau-A.-G. benutzt die Seilreibung.

Schmierung

von Bewegungsflächen kann erfolgen:

1. Mittels Starrschmiere. Diese tropft nicht, beschmutzt daher nicht die benachbarten Teile, füllt alle Lücken gut aus, so daß Staub und Schmutz nicht eintreten können und haftet auch bei schnellerer Bewegung an den Flächen; dagegen bedingt sie einen größeren Kraftverbrauch als Öl, da sie zähflüssiger als dieses, ist nicht wieder zu verwenden und fließt nicht selbsttätig den Gleitflächen zu. Man verwendet sie daher vornehmlich für langsam und Ölschmierung für schneller laufende Teile.

Die Zuführung der Starrschmiere geschieht entweder durch Stauffer, Fig. 168: durch Niederschrauben der mit Starrschmiere gefüllten Kapsel erfolgt die Schmierung, oder durch Federdruckbüchsen, Fig. 169: der Kolben wird durch Federdruck selbsttätig herabgedrückt. Der Federdruck kann auch durch ein Gewicht ersetzt werden, dessen Zentrifugalkraft bei sich drehenden Teilen das Schmiermaterial durch die hohlen Kolben selbsttätig hindurchtreten läßt, Fig. 170 (oder durch Spindel mit Gewinde, wenn die Nachstellung wie beim Stauffer von Hand geschehen kann).

Bei diesen selbsttätigen Schmiervorrichtungen ist die Schmierung jedoch unregelmäßig, da sie von der Zähflüssigkeit der Schmiere abhängt (Temperaturänderungen).

2. Mittels Öl. Es fließt in kurzer Zeit vom höchsten zum tiefsten Punkte, folgt leicht der Zentrifugalkraft, kann unter Umständen wieder verwendet werden, läßt Unreinigkeiten leicht erkennen, und sein Verbrauch kann bei den meisten Apparaten je nach Bedarf geregelt werden.

a) Bei der Dochtschmierung ist der Ölverbrauch während des Betriebes und Stillstandes in der Zeiteinheit stets gleich; auch können leicht Dochtteilchen zwischen die Gleitflächen gelangen; Fig. 171.

b) Bei den Nadelschmierapparaten, Fig. 172, verschließt eine Nadel die untere Öffnung eines Ölbehälters fast ganz und läßt während des Ganges der Maschine infolge der Erzitterungen beispielsweise einer Welle, auf der sie ruht, Öl aus dem Behälter unten austreten. Nachteil: Welle leidet leicht, Ölzufuhr nicht gleichmäßig.

c) Öltropfapparate am besten mit sichtbarem Tropfenfall, Fig. 173, Ausführung von Dreyer, Rosenkranz & Droop, Hannover. Wird der obere Knopf um 90° gedreht, so wird der Stift angehoben und gibt dabei unten seitliche Öffnungen frei, so daß Öl in Tropfen herabfällt, wobei dieses durch ein Glasröhrchen sichtbar wird. Die Ölmenge ist von der Stellung des Stiftes abhängig und kann durch die dem Knopf als Auflage dienende Mutter eingestellt werden. Obere Schale dient zum Einfüllen des Öles.

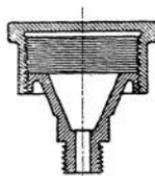


Fig. 168.

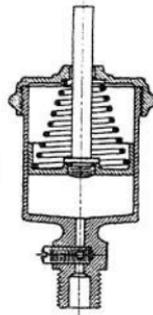


Fig. 169.

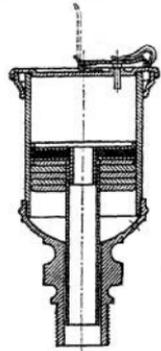


Fig. 170.

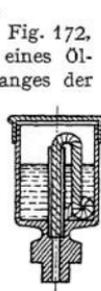


Fig. 171.



Fig. 172.



Fig. 173.

Mehrere dieser Apparate können zu einem Zentralschmierapparat vereinigt werden: ein Ölbehälter hat so viel Tropfdüsen, als Stellen gleichzeitig zu schmieren sind. Dünne Röhren führen das Öl zu den Verbrauchsstellen.

d) Ringschmierung: Ein oder mehrere Ringe hängen auf der Welle, tauchen unten in einen Ölbehälter ein und führen das an ihnen anhaftende Öl bei der durch die Reibung an der Welle bedingten Mitnahme auf diese, wobei vornehmlich das im Inneren des Ringes befindliche Öl bei der Berührung mit der Welle durch den Druck des Ringes zur Seite gepreßt und zur Schmierung verwandt wird. Statt des Ringes können auch, besonders bei geringer Umdrehzahl, feste Bunde oder Stellerie verwendet werden, da ein loser Ring leicht hängen bleibt. Bei diesen wird das Öl oben durch einen Abstreifer der äußeren Ringfläche entnommen; Bunde können gleichzeitig zur Aufnahme axialer Kräfte dienen. Sind Längenänderungen infolge Temperaturschwankungen zu berücksichtigen, so kommen mittels Federdruckes aufgeklemmte Ölringe zur Anwendung.

Vorteile der Ringschmierung: Die starke Ölzirkulation nimmt alle Unreinigkeiten mit fort; diese sammeln sich unten im Lager, von wo sie gelegentlich (ca. alle 4—6 Monate) entfernt werden. Sie eignet sich für hohe Umlaufzahlen (bei geringer versagt sie; vgl. Zapfen, S. 594), benötigt geringe Wartung und schmutzt nicht durch abtropfendes Öl.

c) Schöpferschmierung siehe Fig. 346.

d) Ölpumpen führen unter Druck stehenden oder höher liegenden Flächen Öl zu. Schmierung nur während des Ganges der Maschine. Die Ölpressung

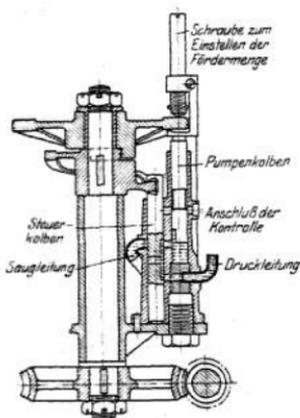


Fig. 174.

sichtbar machend, und gelangt wieder in den Ölbehälter. Ölzufuhr ist für jede einzelne Verbrauchsstelle regelbar.

IX. Lager.

Sie werden nach ihrem Verwendungszweck in Traglager und Spur- oder Stütz- lager ferner nach ihrer Konstruktion in Gleitlager und Kugel- bzw. Rollenlager eingeteilt. Lagerschalen der Gleitlager aus Rotguß (besonders für stoßweise belastete Lager und geringe Geschwindigkeiten), Bronze (bei größerer Geschwindigkeit), Grauguß (bedingt große Schalenlänge) oder Grauguß mit Weißmetallausguß (größere Reibung wie Bronze, läuft aber nicht so leicht warm, da er gegen Staub und Schmutz weniger empfindlich, bedingt aber öfteres Nachstellen als Bronze infolge größerer Abnutzung; besonders für gleichmäßig belastete Lager geeignet). Lager mit eingesetzten Schalen sind teurer als solche mit Weißmetallausguß, da erstere mehr Dreharbeit erfordern, haben aber den Vorzug, leicht von Form-

sand gereinigt und schneller ausgebessert werden zu können, da letztere neu ausgegossen werden müssen. Wärmeableitung ist bei den ausgegossenen Lagern ohne eingesetzte Schalen am günstigsten.

Weißmetall, gehalten durch schwalbenschwanzförmige Rillen oder radiale Löcher; erstere eingegossen oder gehobelt bzw. gedreht. Schalen am besten mit Rücksicht auf Wärmeübertragung innen bearbeitet und vor dem Ausgießen verzinkt. Bearbeitung der Schalen: erst Teilfugen hobeln, dann zusammenschweißen und außen bearbeiten, eventuell ausgießen und innen ausbohren.

1. Traglager.

a) Gleitlager.

Fig. 175: Normallager. Zapfen der oberen Schale verhindert die Drehung, untere Schale meist ohne Zapfen, da er ihren Ausbau erschwert, denn sobald die Welle angehoben wird, kann die untere Schale ohne Zapfen herausgedreht werden. Lagerschrauben mit Unterlegscheiben und ohne Gegenmutter, Deckelschrauben ohne Unterlegscheiben und mit Gegenmutter, um sie (ohne Druck auf den Deckel auszuüben) gegeneinander anziehen zu können. Wenn P der gesamte auf das Lager fallende Druck ist, so bestimmt sich der Kerndurchmesser d_1 der Deckelschrauben aus der Beziehung

$$\frac{P}{2} = \frac{d_1^2 \pi}{4} \cdot k_z,$$

und der Kerndurchmesser der Lagerschrauben d'_1 aus

$$\frac{3}{4} \cdot P = \frac{d_1'^2 \pi}{4} \cdot k_z,$$

wenn sie $\frac{P}{2}$ bzw. $\frac{3}{4} P$ aufnehmen sollen.

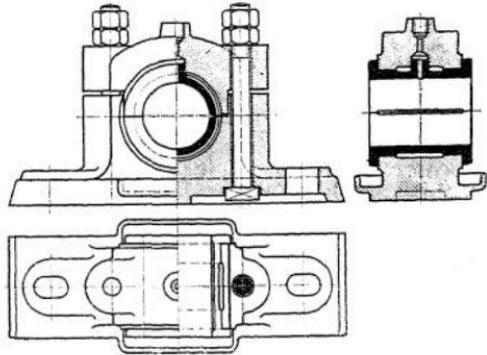


Fig. 175.

Druck der Sohlplatte auf das Fundament 6 bis 10 kg/qcm. Kommt das Lager unmittelbar auf Holz zu stehen, so entfallen Sohlplatte und die Arbeitsleisten des Lagerkörpers. Bei großen Kräften greift der Deckel seitlich über, Fig. 419 u. 420.

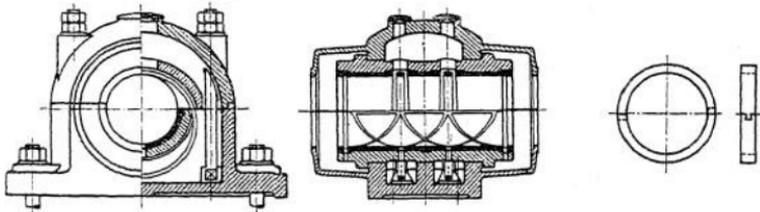


Fig. 176.

Fig. 177.

Fig. 176: Ringschmierlager mit herausnehmbaren Schalen mit Weißmetallausguß von Hesselbein & Reygers, Bocholt. Stellringe oder Bunde innerhalb des Lagers, damit die seitlichen Flächen Schmierung erhalten. Ringe zweiteilig, bei Endlagern auch einteilig; Fig. 177, schwalbenschwanzförmig ineinandergreifend oder Scharnier und Stift. Fig. 178 und 179: Ausführung der Peniger Maschinenfabrik mit losem bzw. auf der Welle feststehendem Schmierling. Fig. 180 bis 182: Lager mit beweglichen Schalen (Sellers-

lager) der gleichen Firma. Sie werden angewandt für lange Zapfen, um geringen Flächendruck zu erhalten; Kugelbewegung mit Rücksicht auf Einstel-

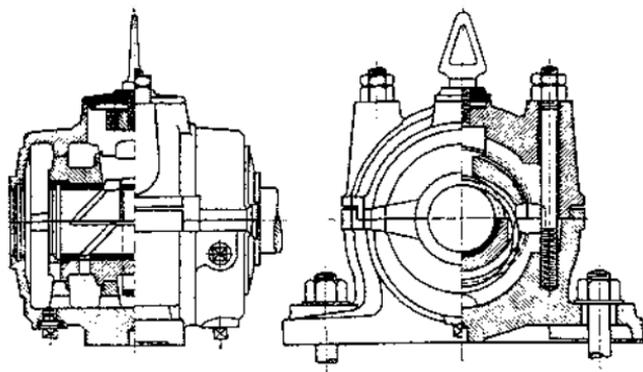


Fig. 178.

lung bei der großen Schalenlänge erforderlich. Mitte des kugelförmigen Lagerzapfens = Mitte Welle; meist $l = \infty 4 d$. Fig. 180 mit losem Schmiering; Schmierung nach Abnahme der Deckel sichtbar; Welle mit Spritzring, entweder an die Welle angedreht oder aufgesetzt (meist aus Grauguß) und mit Körnerschlag gesichert. Wie der Querschnitt erkennen läßt, hat das Lager seitlich einen doppelten Dichtungsrand. Zwischen beiden Rändern sammelt sich seitlich austretendes Öl und fließt durch eine untere Öffnung in das Lager zurück. Fig. 181 mit festem Schmiering, Kammern für Talg, das bei größerer Erwärmung schmilzt und schmiert; Fig. 182 ohne Weißmetallausguß.

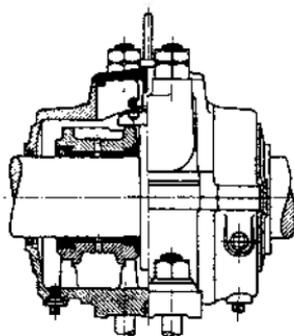


Fig. 179.

Die Deutschen Calypsol-Transmissionswerke, G. m. b. H., Düsseldorf, verwenden als Schmiermaterial ein kanadisches Pflanzenfett (Calypsol) von besonders hohem Schmelzpunkt. Dieses wird in einer Kammer untergebracht, die gegen die zu schmierenden Flächen durch Wollfäden (Garn) abgeschlossen wird.

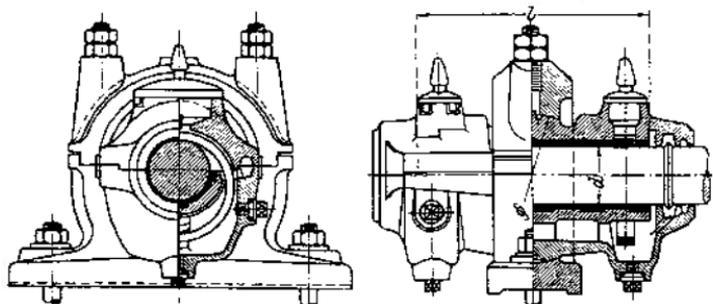


Fig. 180.

Der Zweck dieses Abschlusses ist, das Eindringen von Staub zu verhindern und dadurch die Flächen rein zu halten (geringer Verschleiß) und nur soviel Schmiermaterial zu den Flächen gelangen zu lassen, wie zur Schmierung unumgänglich erforderlich. Damit reicht der Kammervorrat sehr lange, so daß

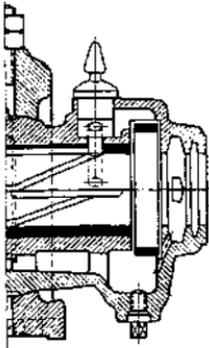


Fig. 181.

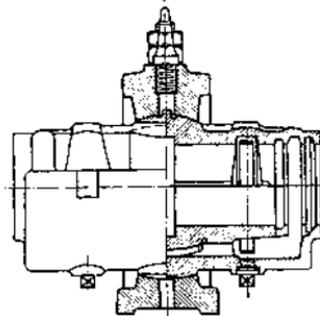


Fig. 182.

diese Lager äußerst wenig Wartung und geringe Unterhaltungskosten erfordern und nicht schmutzen. Außerdem eignet sich das Calypsol besonders für hohe Lagerdrücke, da es nicht so leicht wie Öl zur Seite gepreßt wird. Läßt sich das Garn nicht einbringen, kann auch nur das Calypsol verwendet werden, z. B. bei Schmierung von Zahnrädern und dem Kammlager, Fig. 210. Fig. 183 zeigt das normale Transmissionslager mit Graugußschalen; auch mit Weißmetall und Rotgußschalen werden die Lager geliefert.

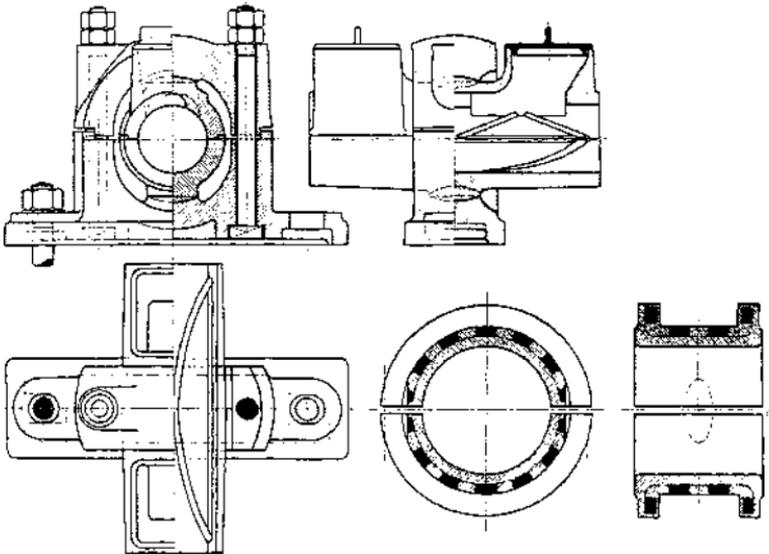


Fig. 183.

Fig. 184.

Die Glyco-Metallgesellschaft, G. m. b. H., Wiesbaden, verwendet gelochte Bleche aus Bronze oder verzinnem Eisen entweder allein als Träger für das

aus einer Bleilegierung bestehende Lagermetall, „Glycometal“, oder verschraubt

diese Bleche mit einer Lagerschale und gießt sie dann mit einer dünnen Schicht Metall aus. Bronze wird verwendet, um bei Auslaufen der Lager ein Schadhafwerden des Zapfens durch Berührung mit dem Blech zu verhindern. Fig. 184 zeigt ein reines „Skelettlager“, Fig. 185 ein solches mit Rückenschale.

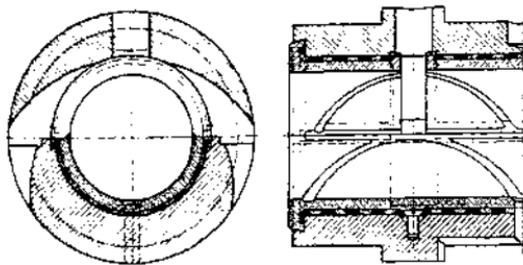


Fig. 185.

Befestigungsteile: Am Fundament: Sohlplatten Fig. 186, Lager mit besonderen Schrauben befestigt, so daß es leicht entfernt werden kann, wobei die Sohlplatte nicht gelöst wird, Lagerstuhl Fig. 187, Lagerbock

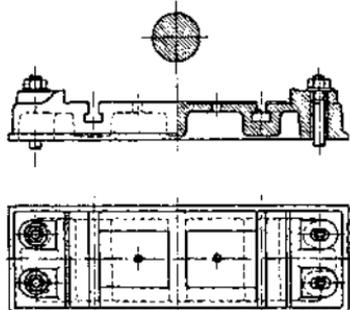


Fig. 186.

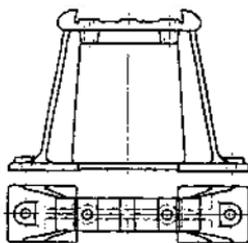


Fig. 187.

Fig. 188 für Sellerslager, das in der Höhe verstellbar; an der Wand: Wandkonsol Fig. 189, ev. mit Rippe *R* zur Entlastung der Schrauben. Ausladung *A*

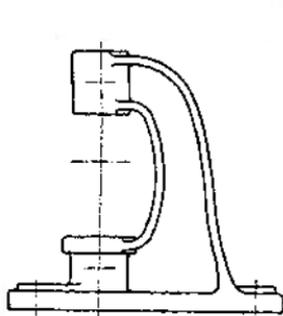


Fig. 188.

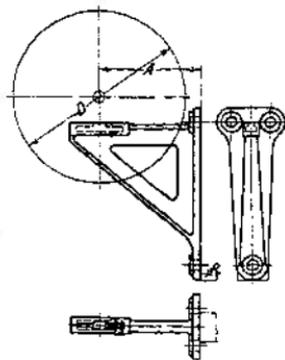


Fig. 189.

bestimmt sich nach dem Durchmesser *D* der größten Riemenscheibe; Fig. 190 für Sellerslager, Lager nebst Einzelheiten nach Fig. 191. Kugelform in Lager-

mitte durch Ränder begrenzt, deren Zweck ist, ein Herausfallen des Lagers bei etwaigem Lockern zu vermeiden. Diese Ränder können auch durch einen in die obere Stellschraube fassenden Zapfen versetzt werden, so daß das ganze Lager

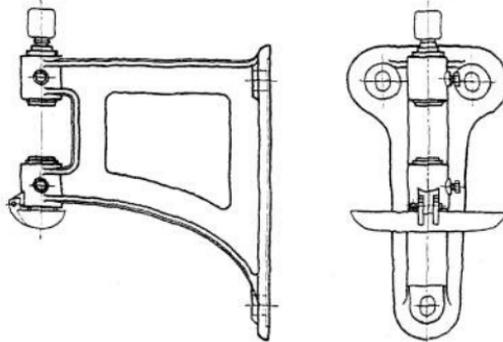


Fig. 190.

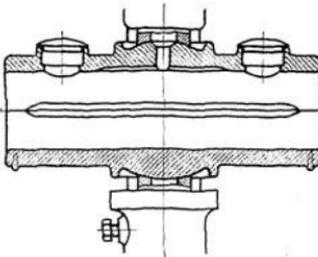
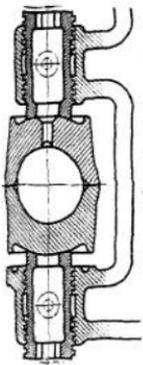


Fig. 191.

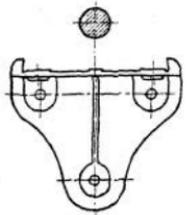
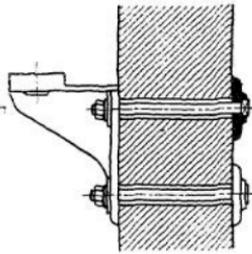


Fig. 192.

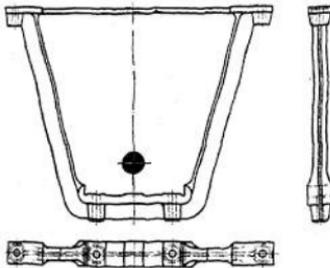


Fig. 193.

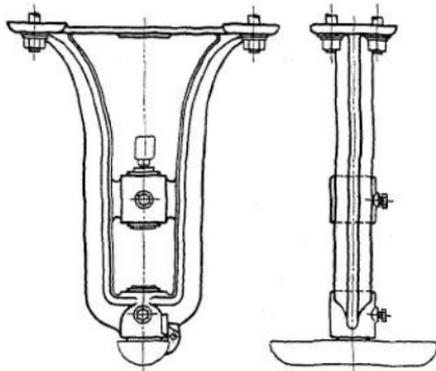


Fig. 194.

nur nach Lösung dieser oberen Stellschraube herausgedreht werden kann, ohne die Welle anzuheben. Winkelkonsol Fig. 192; an der Decke: Fig. 193 und 194: geschlossener Hängebock, Fig. 195: offener Hängebock mit Verstärkungsschraube, Fig. 196 mit einem dem Profil angepaßten Fuß, Lagerung in den Hängeböcken

der einseitigen Lagerung der Wandkonsole vorzuziehen; in der Wand: Mauerkasten Fig. 197, meist ohne Verankerung nur durch das Mauerwerk gehalten.

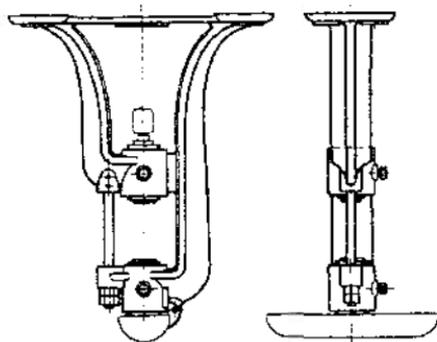


Fig. 195.

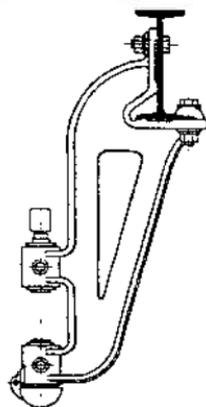


Fig. 196.

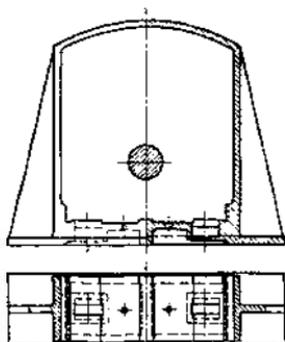


Fig. 197.

kurze Baulänge, Unempfindlichkeit gegen Staub und Schmutz, wodurch kein Fressen, sondern nur stärkere Abnutzung bedingt wird, sowie gegen Durchbiegungen der Welle (vergrößerte Flächenpressung bei Gleitlagern) und geringer Ölbedarf.

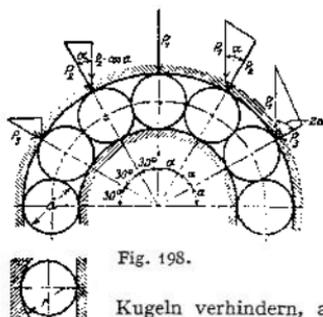


Fig. 198.

Kugeln verhindern, andererseits die Montage erleichtern soll.

Unter der Annahme, daß auf jede Kugel in lotrechter Richtung der gleiche Druck P_1 entfällt, ergibt sich der gesamte Lagerdruck bei n Kugeln, mithin $\alpha = \frac{360}{n}$, zu (vgl. Fig. 198)

$$P = P + 2 \cdot P_2 \cdot \cos \alpha + 2 \cdot P_3 \cdot \cos(2\alpha) + 2 \cdot P_4 \cdot \cos(3\alpha) + \dots$$

Tunlichst erhalten diese Befestigungsteile ein prismatisches Stück, um durch Auswechseln dieses Teiles verschiedene Ausladungen mit demselben Modell zu ermöglichen. Je nachdem ob eine Verschiebung des Lagers gegenüber dem Befestigungsteil in Richtung oder senkrecht zur Achse oder überhaupt nicht in Frage kommt, werden Schlitze in diesen Richtungen bzw. nur Löcher vorgesehen. Leisten zum Verkeilen des Lagers können unter Umständen fehlen.

b) Kugellager.

Ihr Vorteil ist geringer Anlaufwiderstand, von Anfang an fast konstante Lagerreibung, kurze Baulänge, Unempfindlichkeit gegen Staub und Schmutz, wodurch kein Fressen, sondern nur stärkere Abnutzung bedingt wird, sowie gegen Durchbiegungen der Welle (vergrößerte Flächenpressung bei Gleitlagern) und geringer Ölbedarf. Nachteile sind die Empfindlichkeit gegen Stöße und die Unteilbarkeit.

Sie bestehen aus den vier Hauptteilen: den Kugeln, dem inneren Laufring (mit Preßsitz aufpassen und seitlich sichern), dem äußeren (mit seitlichem Spiel einpassen außer bei dem Lager, welches das Bundlager ersetzt; ein zu leichtes Einpassen kann zur Folge haben, daß der äußere Ring sich lockert und auf der Druckseite außen abblättert) und dem Kugelhäufchen, der einerseits die gegenseitige Berührung der

Kugeln verhindern, andererseits die Montage erleichtern soll.

Unter der Annahme, daß auf jede Kugel in lotrechter Richtung der gleiche Druck P_1 entfällt, ergibt sich der gesamte Lagerdruck bei n Kugeln, mithin $\alpha = \frac{360}{n}$, zu (vgl. Fig. 198)

$$P = P + 2 \cdot P_2 \cdot \cos \alpha + 2 \cdot P_3 \cdot \cos(2\alpha) + 2 \cdot P_4 \cdot \cos(3\alpha) + \dots$$

wenn P_1, P_2 usw. der Normaldruck zu den Kugeln. Daraus folgt mit

$$P_2 = P_1 \cdot \cos \alpha, \quad P_3 = P_2 \cdot \cos(2\alpha), \quad P_4 = P_1 \cdot \cos(3\alpha) \text{ usw.}$$

$$P = P_1 + 2 \cdot P_1 \cdot \cos^2 \alpha + 2 \cdot P_1 \cdot \cos^2(2\alpha) + 2 \cdot P_1 \cdot \cos^2(3\alpha) + \dots$$

Beispiel: $P = 1500 \text{ kg}$, $n = 12$ Kugeln; damit $\alpha = \frac{360}{12} = 30^\circ$.

$$P = P_1 + 2 \cdot P_1 \cdot 0,75 + 2 \cdot P_1 \cdot 0,25 = 3 \cdot P_1 = 1500,$$

$P_1 = 500 \text{ kg}$ = größter Druck pro Kugel = $k \cdot d^2 \text{ cm}$ mit
 $k = 100 \text{ kg}$ bei Kugeln aus gehärtetem Stahl auf ebener, kugelförmiger oder zylindrischer Lauffläche.

$k = 200 \text{ kg}$ bei Kugeln aus gehärtetem Stahl in Lauffrinnen mit einem Krümmungshalbmesser $r = \frac{2}{3} \cdot d$.

Mithin: $500 = 200 d^2$,

wenn beide Ringe Lauffrinnen aufweisen;

$$d = \sqrt{\frac{500}{200}} = 1,58 = \infty \frac{1}{8}''.$$

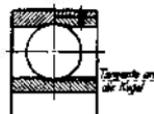


Fig. 199.

Handelware von $\frac{1}{8}''$ bis $4''$ Durchm.

Die Reibungsziffer beträgt etwa $\mu = 0,0015$ bis $0,002$ bei hohen Belastungen.



Fig. 201.

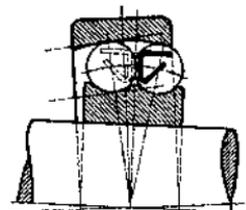
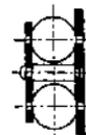
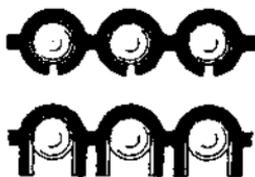


Fig. 202.

Fig. 200.

Zum Einbringen der Kugeln wird (vgl. Fig. 199) entweder eine besondere Platte eingesetzt oder ein Stück abgeflacht (am inneren Lauf ring eingezeichnet) oder beide Ringe exzentrisch aneinandergelagt, so daß etwa die Hälfte der Kugeln der Fig. 198 plus 1 eingebracht werden können.

Beispiele von Kugelkäfigen zeigen Fig. 200 (Bronze, gegossen, und Enden umgebogen) und Fig. 201 aus Blechen, desgleichen Fig. 202 (S. K. F.-Kugellager von Schuchardt & Schütte, Berlin): aus in einem Stück gepreßten Blech, so

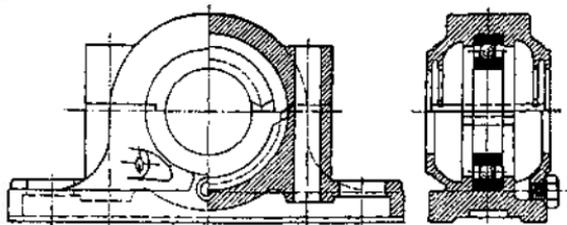


Fig. 203.

daß die Gefahr des Zerspringens ganz gering. Der äußere Lauf ring ist innen kugelförmig, so daß das Lager sich ohne weiteres einstellen kann. Die Tangenten in den Berührungspunkten des inneren und äußeren Lauf rings sind einander parallel, so daß der Druck auf Mitte Lager übertragen wird.

Fig. 203 zeigt ein Transmissionslager von G. Polysius, Fig. 204 Lager mit einteiligem Körper und Deckel, Fig. 205 Lager mit zwei Kugereihen für 7780 kg

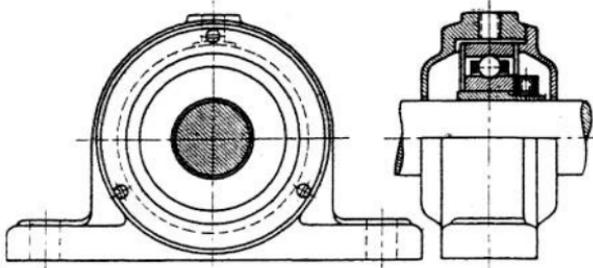


Fig. 204.

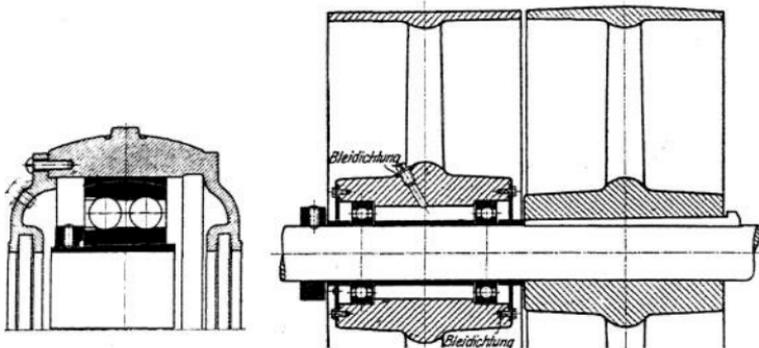


Fig. 205.

Fig. 206.

Lagerdruck, Ausführung der Deutschen Waffen- und Munitionsfabriken; geschlitzte Spannhülse dient besonders bei hohen Umlaufzahlen zum Zentrieren; Fig. 206: Lagerung einer Losscheibe.

c) Rollen- oder Walzenlager.

Sie werden statt Kugellagern verwendet, wenn diese für den Druck nicht mehr ausreichen würden. Es ist $P_1 = k \cdot d \text{ cm} \cdot l \text{ cm}$ mit $d = \text{Durchm.}$ und $l = \text{Länge eine Rolle, ferner}$

$k = 60$ bei Rollen aus gehärtetem Stahl auf Stahlguß,

$k = 150$ „ „ „ „ „ „ „ „ Stahl.

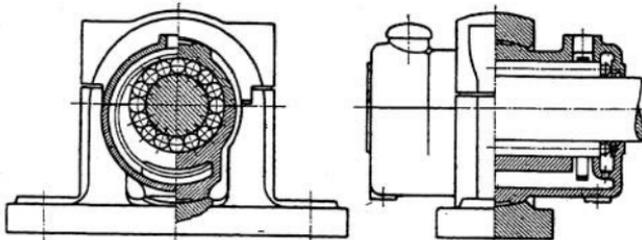


Fig. 207.

Beispiel zeigt Fig. 207: Schmierring auf den Walzen hängend, Längsverschiebung durch vorstehende Ränder am Deckel und Lagerkörper verhindert.

2. Stütz- oder Kammlager.

a) Gleitlager.

Fig. 208 zeigt eine Ausführung. Die unten kugelförmige Bronzeplatte wird durch zwei Stifte an der Drehung gehindert, kann sich aber im Gehäuse der Druckrichtung entsprechend einstellen; auf der Oberseite dient sie als Spurplatte für den in die Welle eingesetzten Stahlzapfen, der durch einen Stift oder eine Nase gezwungen ist, an der Drehung der Welle teilzunehmen. Seitliche Führung durch Halslager. Bei hohen Pressungen axiale Schmierung von unten mittels Preßpumpe, Ölabfluß oben bei *A*.

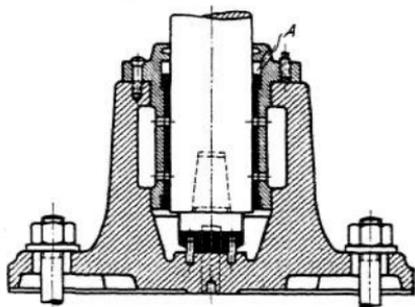


Fig. 208.

Wird das Öl mit einer dem Lagerdruck fast gleichen Pressung eingedrückt, so kommen die Laufflächen kaum zur Berührung; nicht mehr Reibung von Metall auf Metall, sondern Flüssigkeitsreibung kommt in Frage.

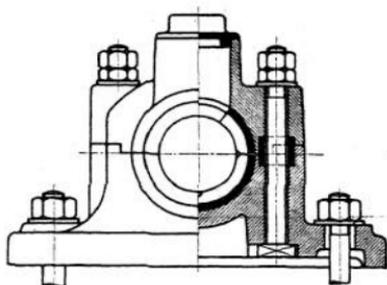


Fig. 209.

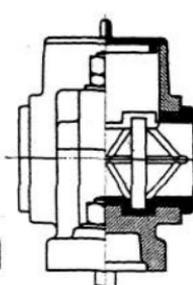


Fig. 210.

Fig. 209 u. 210: Kammlager mit Calypsolubrication (S. 636). In den Körper und Deckel eingreifende Ringe übertragen den axialen Druck vom Deckel auf den Körper oder letzterer greift seitlich über den Körper.

b) Kugellager.

Sollen die Kugeln rollen, ohne zu gleiten, so müssen ihre Berührungspunkte mit der Rille auf in der Achse sich schneidenden Geraden liegen (Fig. 211). Da

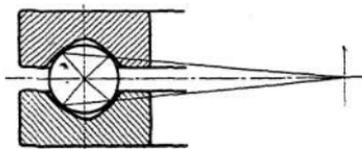


Fig. 211.

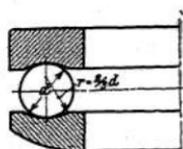


Fig. 212.

dies bei kleinen Kugeln schlecht erreichbar, führt man eine Rille gekrümmt und die andere gerade aus, wenn seitliche Verschiebungen zu erwarten, bzw. beide gekrümmt, wenn dies nicht der Fall, Fig. 212. Der untere Laufring wird dabei

kugelförmig ausgebildet und das Gehäuse ihm angepaßt; ist das nicht möglich, so wird Ausführung Fig. 213 oder 214 verwendet. Kugelkäfige zeigen Fig. 215 aus gegossener Bronze mit gebohrten Löchern, Kugeln durch Körnerschlag gesichert, Fig. 216 aus zwei Ringen mit versenkten Löchern, Fig. 217 aus zwei Blechringen durch Rohrstück zusammengehalten, Fig. 214 aus einem Stück gepreßtem Blech (Schuchardt & Schütte, Berlin), Fig. 218 einbaufertiges Kugellager für wechselnde Druckrichtung.

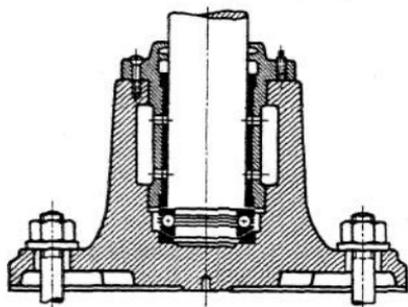


Fig. 213.

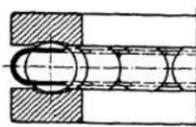


Fig. 214.



Fig. 215.



Fig. 216.



Fig. 217.

Bei der Berechnung ist P_1 für alle Kugeln gleich, mithin
mit $P_1 = k \cdot d^2 \text{ cm}$,

$k = 150$ bis 50 bis 40 bei $n = 10$ bis 150 bis 300 , wenn beide Ringe Laufrillen erhalten und die Ringe ebene Auflageflächen haben können (Fig. 211);
 $k = 30$ bis 25 bis 20 bei $n = 500$ bis 1000 bis 1500 , wenn ein Lauf ring im Kugellauf eben und die Auflagefläche kugelförmig (Fig. 212).

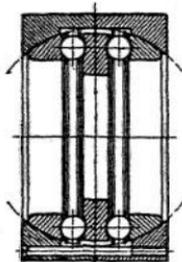


Fig. 218.

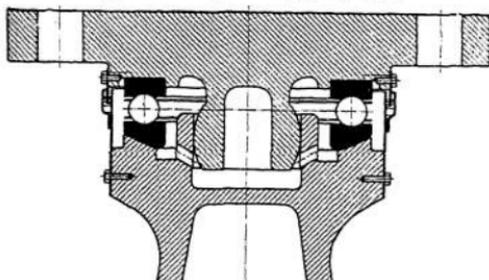


Fig. 219.

Einige Ausführungsbeispiele der Deutschen Waffen- und Munitionsfabriken zeigen: Fig. 219: Königsstuhl einer Lokomotivdrehzscheibe 18 t Belastung; das Gehäuse wird mit konsistentem Fett gefüllt und jährlich erneuert; Fig. 220 und 221: Lagerung einer durchgehenden vertikalen Welle $n = 2000$ mit bzw. ohne axial aufzunehmende Kräfte. Bis $x-x$ ist das Gehäuse mit Öl zu füllen; Fig. 222: Kopflager einer Welle von Schuchardt & Schütte.

c) Rollenlager.

Sie werden bei hohen Drücken verwandt; Kegelflächen der Rollen müssen sich in einem Punkt auf der Achse schneiden; Ringe verhindern die gegenseitige Berührung; Fig. 223.

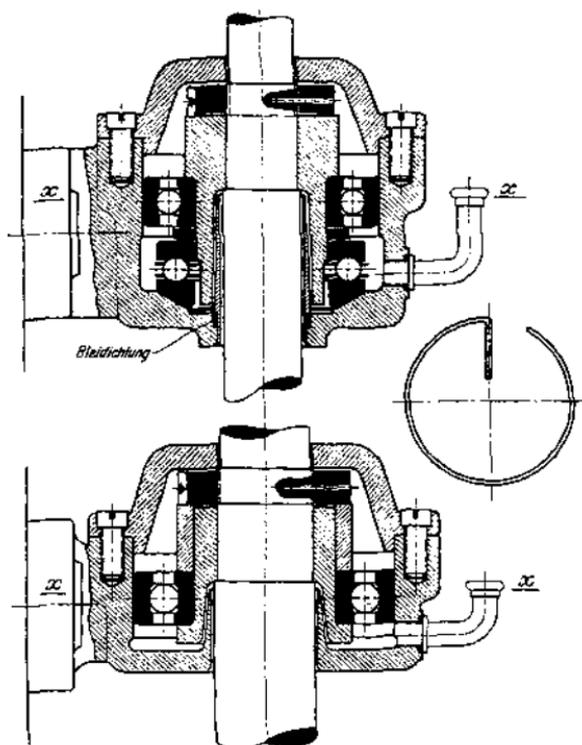


Fig. 220 und 221.

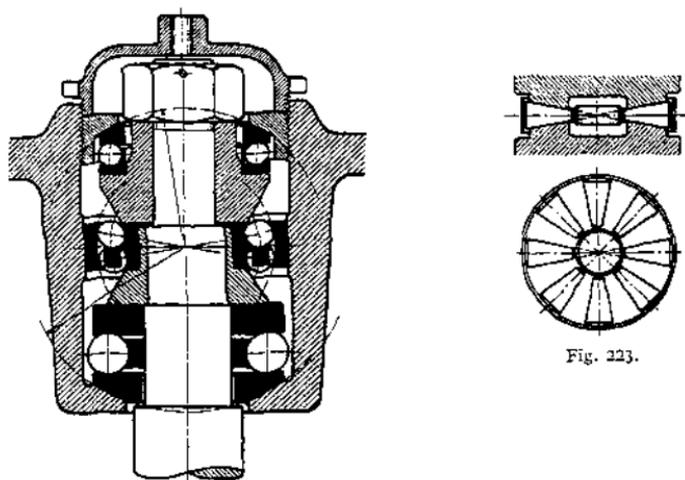


Fig. 222.

Fig. 223.

X. Zahnräder.

Bei geringem Achsenabstand zweier Wellen kommen als Übertragungsmittel der Bewegung einer Welle auf die zweite Zahnräder in Frage, bei denen die Winkelgeschwindigkeit der getriebenen Welle durch die der treibenden genau bestimmt ist.

Je nach Lage der Wellen zu einander unterscheidet man

1. Stirnräder — Wellen sind einander parallel;
2. konische oder Kegelräder — Wellen schneiden sich
3. hyperboloidische Räder, Schraubenräder bzw. Schnecke mit Rad — Wellen kreuzen sich.

1. Stirnräder mit geraden Zähnen.

a) Zahnformen. 1. Allgemeines. Soll die Mitnahme eines Rades durch ein zweites unter Ausschluß der Reibung erfolgen, so muß eines von beiden mit

Vorsprüngen (Zähnen) versehen sein, die in Vertiefungen (Zahn-lücken) des anderen eingreifen, Fig. 224. Hierbei möge M_1 die treibende Welle und M_2 die getriebene sein. Der augenblickliche Berührungspunkt A beider Räder hat

1. als Punkt des Rades I eine Geschwindigkeit tangential zu seiner Bahn, also senkrecht zum Radius R_1

$$v' = M_1 A \cdot \omega_1 = R_1 \cdot \omega_1,$$

2. als Punkt des Radius 2 ebenso

$$v'' = M_2 A \cdot \omega_2 = R_2 \cdot \omega_2.$$

Zerlegt man beide in ihre Komponenten

1. in Richtung der Tangente TAT an beide Zahnkurven BAD bzw. EAF im augenblicklichen Berührungspunkt A ,

2. in Richtung der Normalen NAN dazu, so müssen bei gleichmäßiger Drehung die beiden letzten einander gleich sein, da andernfalls sofort das sich in dasselbe hineindrücken

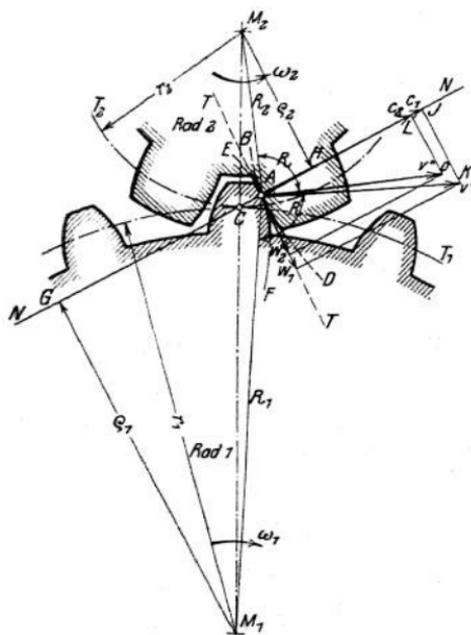


Fig. 224.

eine Rad sich von dem andern abheben oder würde, d. h. es muß sein

$$c_1 = c_2.$$

Die Differenz $w_1 - w_2$ der Komponenten in Richtung der Tangente gibt die Geschwindigkeit des Gleitens des Zahnes in der Lücke an, der die Abnutzung verhältnismäßig ist.

Sind G und H die Fußpunkte der Lote ρ_1 und ρ_2 aus den Wellennitten auf NAN gefällt, dann ist

$$AAJK \sim \Delta M_1GA$$

und

$$AALO \sim \Delta M_2HA,$$

mithin

$$\frac{c_1}{v'} = \frac{Q_1}{R_1} \quad \text{und} \quad \frac{c_2}{v''} = \frac{Q_2}{R_2};$$

damit

$$c_1 = v' \cdot \frac{Q_1}{R_1} = \omega_1 \cdot Q_1 = c_2 = v'' \cdot \frac{Q_2}{R_2} = \omega_2 \cdot Q_2,$$

woraus folgt

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{M_2 C}{M_1 C} = \frac{r_2}{r_1}, \quad \text{d. h.}$$

1. Die gemeinsame Normale im jeweiligen Berührungspunkt A geht durch den Zentralpunkt C , der sich ergibt, wenn die Zentrale $M_1 M_2$ im Verhältnis $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ geteilt wird. ω_1 und ω_2 brauchen dabei nicht konstant zu sein (unrunde Räder).
2. Sollen die Winkelgeschwindigkeiten konstant sein, so muß das Verhältnis $\frac{r_2}{r_1}$, mithin auch r_1 und r_2 , konstant sein, also $\omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2 = \text{konst.} = v = \text{Geschwindigkeit des Punktes } C \text{ tangential zu den Kreisen } T_1 \text{ und } T_2, \text{ den Teilkreisen, die sich bei der Drehung stets berühren.}$

Aufgabe: Gegeben die Teilkreise T_1 und T_2 und das Profil ACB der Figur 225; gesucht das zugehörige des zweiten Rades. Zunächst bestimmt man die Punkte, in denen sich das gegebene Profil mit dem gesuchten bei der Drehung berührt. Für den Punkt A ist z. B. hierzu der

1. geometrische Ort ein Kreis K_1 , mit dem Radius $M_1 A$ beschrieben, da A als Punkt des Rades 1 sich nur auf einem Kreis um M_1 bewegen kann;
2. geometrische Ort dadurch gegeben, daß im Augenblick der Berührung die Normale durch den Punkt C gehen muß. Die Normale hat jetzt aber die Lage $A I$, wenn $A I$ normal zur Zahnkurve im Punkt A errichtet wird. Mithin ist der Schnittpunkt E_1 der Kreise K_1 und I' , mit dem Radius $C E_1 = A I$ um C beschrieben, der gesuchte Punkt. In dieser Weise ist $E_1 C G$ punktweise bestimmt. Diese Kurve, die also angibt, an welcher Stelle ein Zahn mit dem anderen im Eingriff ist, heißt die Eingriffslinie. Aus ihr ergibt sich das gesuchte Zahnprofil, da der

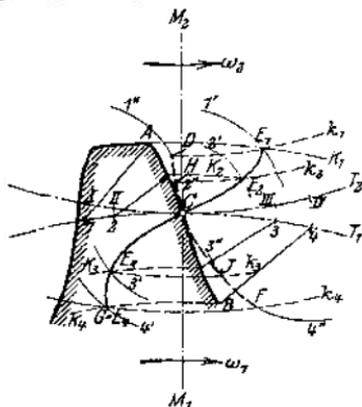


Fig. 225.

1. geometrische Ort für den dem Berührungspunkt E_1 entsprechenden gesuchten Punkt des Zahnprofils der Kreis k_1 , um M_1 ist, der Punkt als zum Rade 2 gehörig sich nur auf diesem Kreise bewegen kann;
2. geometrische Ort wiederum durch die Normale bestimmt ist. Im Augenblick des Eingriffes ist aber I der Berührungspunkt der Teilkreise, wenn $C I = C I'$, mithin ist der zweite gesuchte Ort der Kreis I'' mit dem Radius $A I$ um I beschrieben.

Der Schnittpunkt beider Kreise D ist der gesuchte Profilpunkt. In dieser Weise ist das ganze Profil DCF bestimmt. Da $D I, H I I, J I I I$ und $F I V$ Normalen zum gesuchten Zahnprofil $D H C F$, muß dieses die Kreise $I'', 2'', 3''$ und $4''$ umhüllen; mithin kann man es auch ohne Eingriffslinie als umhüllende Kurve finden, wenn man nur mit $A I$ um I usw. die Kreise I'' usw. schlägt.

Die Bedingungen, die zwei Räder also erfüllen müssen, sind

1. sie müssen gleiche Teilung besitzen;
 2. ihre Eingriffslinien müssen sich in ihren Teilen $C E_1$ und $C G$ decken.
- Räder, die dieser Bedingung genügen, sind Satzräder, weil je zwei einen brauchbaren Satz liefern.

Bezeichnungen und Abmessungen. Der durch die Punkte $A B A' B'$ usw. der Figur 226 gehende Kreis heißt der Kopfkreis, der durch $C D C' D'$ der Fußkreis. Im Teilkreis gemessene Entfernung $\widehat{E F E'} = \widehat{F E' F'} = t$ = Teilung. $A A_1 = b$ = Zahnbreite, $\widehat{E F} = \widehat{E' F'} = s$ = Zahnstärke, $\widehat{F E'}$

= Zahnücke. Die seitliche Begrenzung AA_1C_1C usw. sind die Zahnflanken. Der radiale Abstand zwischen Fuß- und Kopfkreis = Zahnlänge = l , der außerhalb des Teilkreises liegende Teil heißt Zahnkopf, der innerhalb liegende Zahnfuß. Die Länge des Zahnkopfes wählt man meist = $0,3 \cdot t$ (oder auch $= \frac{t}{3}$, vgl. S. 656), die des Zahnfußes = $0,4 \cdot t$, Sa. = $0,7 \cdot t = l$. Es bleibt sonach beim Eingriff in Richtung des Radius ein Spielraum = $0,1 \cdot t$. Bei unbearbeiteten Zähnen wählt man etwa für beide Räder $s = \frac{1,9}{10} \cdot t$, mithin die Zahnücke

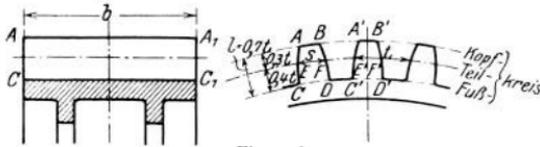


Fig. 226.

mitin die Zahnücke = $\frac{2,1}{10} \cdot t$; bei bearbeiteten $s = \frac{3,9}{10} \cdot t$, Lücke = $\frac{4,1}{10} \cdot t$, Spielraum mitin = $\frac{1}{10} \cdot t$ und weniger bis herab auf 0, je nach der erforderlichen Genauigkeit.

Die Bogen IC_1A und IC_1A' (Fig. 225) heißen die Eingriffsbogen. Da stets Berührung zwischen zwei Zähnen vorhanden sein muß, weil andernfalls die Mitnahme des getriebenen Rades nicht möglich, muß der

Eingriffsbogen $\geq t$ sein.

$$\text{Das Verhältnis } \frac{\text{Eingriffsbogen}}{t} = \frac{e}{t} \text{ heißt die Eingriffsdauer}$$

$$= \frac{\text{Zeit zum Durchlaufen des Bogens}}{\text{Zeit zum Durchlaufen der Teilung}}$$

Es muß mithin ≥ 1 sein. Ist z. B. $\frac{e}{t} = 1,3$, dann ist ein Zahnpaar stets im Eingriff und während 30% der Zeit noch ein zweites; bei 2,5 stets zwei Paare und während 50% der Zeit noch ein drittes.

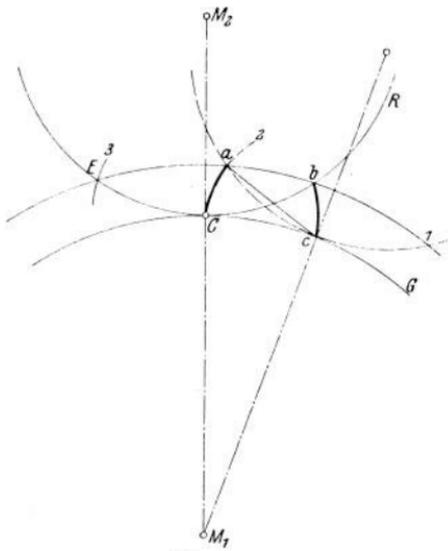


Fig. 227.

2. Einteilung der Zahnformen. Man teilt die Räder ein in

1. solche, deren Zahnprofil gegeben; das zugehörige ist nach Fig. 225 zu bestimmen.

2. solche, deren Eingriffslinie gegeben ist, und zwar besteht diese meist aus Kreisbögen oder einer Geraden.

Rollt, Fig. 227, ein Kreis R (Rollkreis) auf einem zweiten G (Grundkreis), so möge Punkt C die Kurve Ca beschreiben, während der Kreis abrollt, bis b auf c fällt. Die drei Punkte a, b und c sind dann durch die Bedingungen festgelegt:

$$\widehat{Cb} = \widehat{Cc},$$

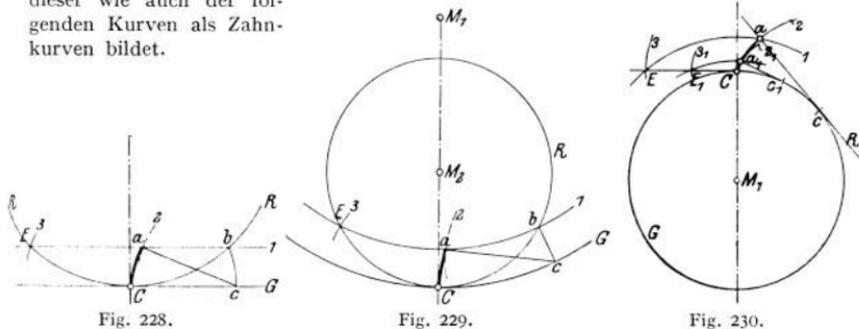
$Ca = bc$, da aus Symmetriegründen b dieselbe Bahn beschreibt wie Punkt C .

a und b liegen auf einem Kreise mit M_1 als Mittelpunkt.

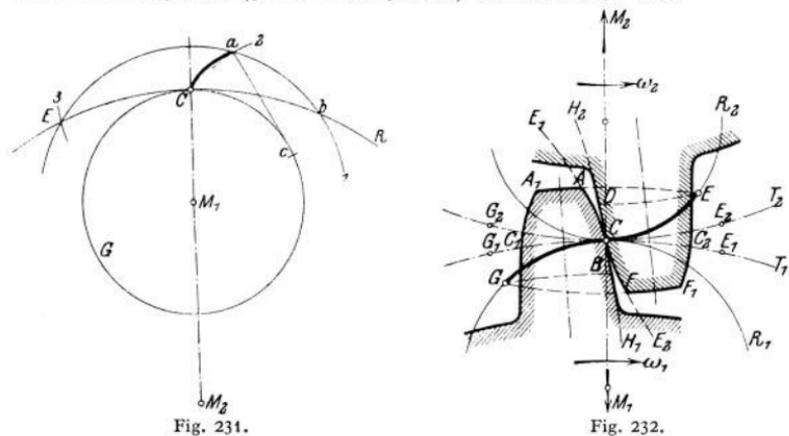
Die Kurve Ca ist eine Epizykloide (kleine Außenzykloide) (S. 134) und hat die Eigentümlichkeit, daß $ac = Cb \perp$ zur Kurve im Punkte a , d. h. die Nor-

male in einem beliebigen Punkte (a) geht stets durch den zugehörigen Berührungspunkt (c) beider Kreise. Hierauf beruht ihre Verwendbarkeit als Zahnkurve. (Die Epizykloide ist auch umhüllende Kurve zu den Kreisen \mathcal{Z} um c mit $ac = Cb$ usw. beschrieben.)

Schlägt man mit ac um C den Kreis \mathcal{Z} bis zum Schnittpunkt mit I , so erhält man in E als Schnittpunkt dreier Kreise einen Punkt der Eingriffslinie. Da sämtliche so erhaltenen Punkte auf dem Rollkreis R liegen, bildet dieser ein Stück der Eingriffslinie. Es fallen mithin Eingriffslinie, Eingriffsbogen und Rollkreis zusammen, so daß Fig. 225 sich sehr vereinfacht, was den Grund für die Verwendung dieser wie auch der folgenden Kurven als Zahnkurven bildet.



Wächst der Durchm. des Kreises G bis ∞ , so ergibt sich mit G als Geraden der Sonderfall Fig. 228. Ca ist eine gewöhnliche Zykloide (S. 133). Schließlich erhalten beide Kreise Krümmung, im gleichen Sinn, Fig. 229, mit $Ca =$ Hypozykloide (Innenzykloide) (S. 135). Ebenso geht Fig. 227 mit zunehmendem Durchm. des Rollkreises für $R = \infty$ in Fig. 230 über, wobei die Kreisevolvente Ca entsteht (S. 135). Diese kann man sich auch entstanden denken durch Abwickeln eines Fadens, dessen Endpunkt dabei die Evolvente beschreibt ($\widehat{Cc} = \widehat{ca}$). Der Punkt a_1 , gegeben durch $\widehat{Cc}_1 = \widehat{c_1c}$, mithin $2 \cdot a_1c_1 = \widehat{ac}$, bestimmt den Punkt E_1 der Eingriffslinie, wobei $\widehat{CE}_1 = \widehat{EE}_1$, d. h. die Eingriffslinie ist eine Gerade. Schließlich erhalten beide Kreise wiederum gleichen Krümmungssinn, Fig. 231, wobei die Perizykloide (große Außenzykloide) Ca entsteht (S. 135).



3. Zykloidenverzahnung. Rollt Kreis R_1 in T_1 . Fig. 232 (Rollkreisdurchm. $<$ Teilkreishalbmesser), so erzeugt C die Hypozykloide H_1 ; ebenso beim

Abrollen von R_2 auf T_1 die Epizykloide E_1 . Die aus beiden bestehende Kurve E_1ACBH_1 hat mithin die Eigentümlichkeit, daß ihre Normalen stets durch den augenblicklichen Berührungspunkt beider Kreise T_1 und T_2 gehen; also ist sie als Zahnkurve verwendbar (stand die Kurve weiter links, lag der augenblickliche Berührungspunkt rechts, steht sie weiter rechts, liegt er links).

Rollen R_1 und R_2 ebenso auf T_2 , so entstehen E_2 und H_2 , die zusammen wiederum als Zahnkurve verwendbar. Da für E_2 und H_1 bzw. H_2 und E_1 die Normalen stets durch den gleichen jeweiligen Berührungspunkt gehen, mithin zusammenfallen, also nach Fig. 224 $c_1 - c_2 = 0$ ist, so arbeiten beide Zahnflanken miteinander.

Die Zahnflanken A_1C_1 und F_1C_2 sind Spiegelbilder der ersteren.

Die Rollkreise EC und CG bilden die Eingriffslinie; ihre Länge ist

$$\widehat{ECG} = \widehat{E_1CG_1} = \widehat{E_2CG_2}.$$

Bei Beginn des Eingriffes berühren sich B und F in G und am Ende D und A in E . Mithin findet ein Gleiten statt um $\widehat{FC} - \widehat{BC}$ bzw. $\widehat{AC} - \widehat{DC}$. Diesem entspricht ein Arbeitsverlust

$$\mu \cdot N \cdot \{ (FC - BC) + (AC - DC) \},$$

wenn der Normaldruck konstant angenommen wird, oder in % der Nutzarbeit $N \cdot \widehat{ECG}$

$$\text{Arbeitsverlust} = \mu \cdot \frac{(FC - BC) + (AC - DC)}{EC + CG}$$

$$= \infty \pi \cdot \mu \left(\frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2} \right) \cdot \text{Eingriffsdauer};$$

+ bei äußerer, - bei innerer Verzahnung, z_1 und z_2 = Zähnezahlen der Räder, μ etwa 0,1 bei bearbeiteten, bis 0,3 bei unbearbeiteten Rädern.

Die Folge dieser gleitenden Reibung ist Abnutzung der Zähne, und zwar wird diese größer sein auf der Strecke DCB , also an den Zahnfüßen, geringer auf der Strecke ACF , an den Zahnköpfen. Beide Hypozykloiden unterhalb B bzw. D kommen nicht zum Eingriff.

Da in jeder Stellung die Normale durch C geht, die Berührungspunkte aber auf Kreisen liegen, so gehen sämtliche Tangenten durch die Schnittpunkte der Rollkreise mit der Verlängerung der Zentralen.

Der Durchmesser der Rollkreise kann beliebig sein, wenn nur zwei Räder zusammen arbeiten sollen. Meist wird aber verlangt, daß jedes Rad mit jedem beliebigen anderen gleicher Teilung zusammen arbeiten soll (Satzräder); dann müssen die Eingriffslinien gleich sein, d. h. die Räder müssen gleiche Rollkreise erhalten. Der Rollkreisdurchmesser bestimmt sich nach dem kleinsten Rad des ganzen Satzes, und zwar nimmt man für Winden als kleinste Zähnezahl etwa 9—10 Zähne, für Triebzwecke etwa 24.

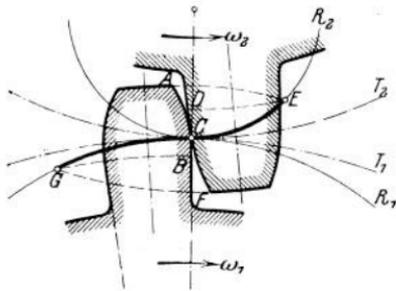


Fig. 233.

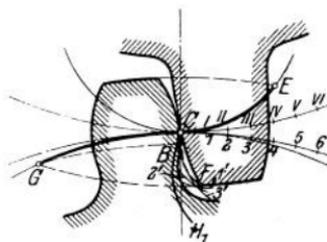


Fig. 234.

Vergrößert man den Durchm. des Rollkreises R_1 bis er = Halbmesser des Teilkreises T_1 , so geht die Hypozykloide in eine radial gerichtete Gerade über, Fig. 233. Vergrößert man ihn noch weiter, so weicht die Hypozykloide von der radialen Richtung nach der Zahnmitte hin ab, Fig. 234. Da unterhalb B der Zahn nicht zum Eingriff kommt, kann man diesen Teil verstärken. Diese Verstärkung darf aber nicht in die Bahn des Punktes F einschneiden, die man erhält, wenn von I mit FI der Kreis I' usw. geschlagen wird, welche Kreise die Kopfbahn CF — — — einhüllen. CF ist eine verlängerte Zykloide, wird vom Punkte F beim Abrollen des oberen Teilkreises auf den unteren durchlaufen und darf natürlich niemals in den Zahnfuß des eingreifenden Rades einschneiden.

Die Folge dieser Vergrößerung ist

1. Verlängerung der Eingriffslinie ECG , d. h. der Eingriffsdauer, d. h. Vermehrung der Zahl der gleichzeitig eingreifenden Zähne.

2. Der Normaldruck (\perp zur Flanke, im ungünstigsten Falle bestimmt durch CE bzw. CG) nimmt mehr und mehr tangential Richtung an, wird mithin etwas kleiner. (Bei der Berührung in C ist er \perp zur Zentralen M_1M_2 , mithin schneidet die Eingriffslinie die Zahnkurve \perp).

3. Der Punkt B nähert sich mehr und mehr dem Punkte C und fällt schließlich für Rollkreis-Durchm. = Teilkreis-Durchm. mit ihm zusammen. Dies bedingt schnell wachsende Abnutzung, schneller als der langsam abnehmende Druck verhindert.

Meist wählt man Rollkreis-Durchm. = Halbmesser des kleinsten Rades des Satzes, Zahnfuß des kleinsten Rades mithin radial gerichtet. Besonders große Räder eines Satzes erhalten größere Rollkreise; ebenso kleine Räder, damit die Zähne nicht zu spitz werden.

Fig. 235 zeigt Innenverzahnung: Hypo- auf Hypo- und Epi- auf Epizykloide; Fig. 236 Zahnstangenverzahnung, bei der sowohl die Epi- wie die Hypozykloide mit einer gewöhnlichen Zykloide zusammen arbeiten. Bei Fig. 237 ist $R_1 = T_1$,

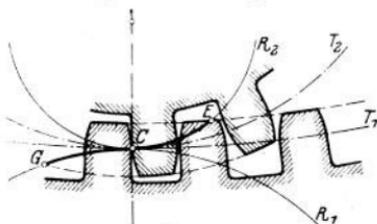


Fig. 235.

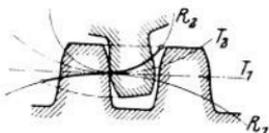


Fig. 236.

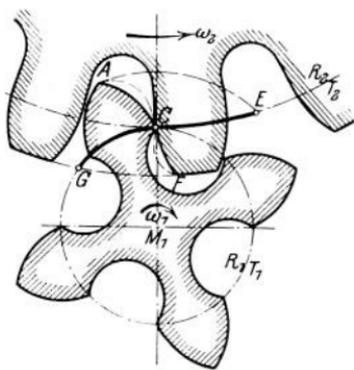


Fig. 237.

$R_2 = T_2$, also die größte Länge der Eingriffsdauer erreicht, um die Zahnzahl des kleinsten Rades möglichst klein wählen zu können. Von G bis C arbeiten die Spitzen C des Ritzels mit den Epizykloiden CF , von C bis E die Flanken CA mit den Teilkreispunkten C des Rades 2. Der Nachteil dieser Punktverzahnung ist schnelle Abnutzung am Berührungspunkte der Teilkreise. Ausgeführt wird das Ritzel mit Bordscheiben.

4. Evolventenverzahnung. Durch Abwickeln der Geraden CH auf dem Grundkreis G_1 , Fig. 238, möge die Evolvente E_1ACB und der Geraden CJ auf Grundkreis G_2 die Evolvente $DCFE_2$ entstehen, die beide als zusammenarbeitende Zahnflanken verwendet werden können, da JCH als Normale beider

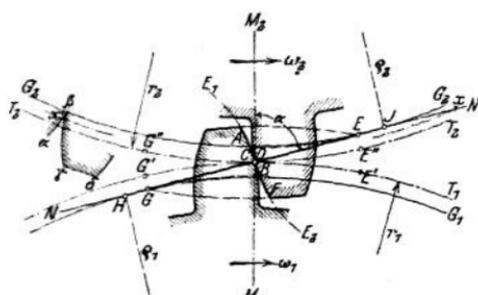


Fig. 238.

Kurven eine Gerade. Diese neigt man meist um $\alpha = 75^\circ$ gegen die Zentrale M_1M_2 , womit folgt

$$\rho_1 = r_1 \cdot \sin \alpha = 0,966 \cdot r_1,$$

$$\rho_2 = r_2 \cdot \sin \alpha = 0,966 \cdot r_2.$$

Liegt der Fußkreis innerhalb des Grundkreises, so bildet man den innerhalb des Grundkreises liegenden Teil radial aus; zum Eingriff kommt er nicht. Eingriffslinie = EG gemessen auf der Grundkreistangente

$$EG = EC \cdot \frac{r_2}{\rho_2} + CG \cdot \frac{r_1}{\rho_1} = \widehat{E''CG''} = \widehat{E'CG'}$$

gemessen auf dem Teilkreis. Mithin muß sein

$$\widehat{E''CG''} \text{ bzw. } \widehat{E'CG'} > t \quad \text{und} \quad \widehat{EG} < \widehat{JH},$$

da ein Punkt x beispielsweise x' als Eingriffspunkt bedingen, sich also die unausführbare Zahnflanke $\alpha\beta\gamma\delta$ ergeben würde. Außerdem würde die Kopfbahn des zu langen Zahnes in den Fuß des anderen einschneiden. Falls $EG > JH$, ist α oder die Kopfhöhe zu ändern. α im allgemeinen nicht unter 70° , da sonst der Radialdruck auf die Achsen zu groß wird. Da die Geschwindigkeit in der Eingriffsgerade = Geschwindigkeit im Grundkreis = $v \cdot \sin \alpha$, ist die Eingriffsdauer auch = $\frac{EG}{t \cdot \sin \alpha}$.

Die kleinste mögliche Zähnezah z_1 ergibt sich für $\alpha = 75^\circ$ und $0,3 \cdot t$ Kopfhöhe bei

$$\frac{z_2}{z_1} = 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad \infty,$$

$$\text{zu} \quad z_1 = 20 \quad 24 \quad 26 \quad 28 \quad 30.$$

Bei Vergrößerung der Kopfhöhe des kleinen und Verringerung der des großen Rades folgt die kleinste überhaupt mögliche Zähnesumme beider Räder für eine Eingriffsdauer = 1, also für $JH = t \cdot \sin \alpha = (r_1 + r_2) \cdot \cos \alpha$ aus

$$(z_1 + z_2) = \frac{2\pi \cdot (r_1 + r_2)}{t} = 2 \cdot \pi \cdot \operatorname{tg} \alpha = 24.$$

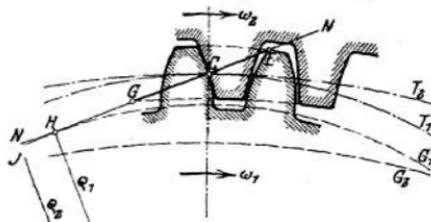


Fig. 239.

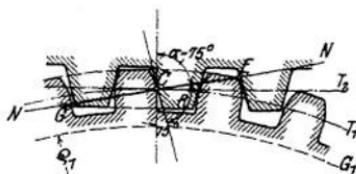


Fig. 240.

Fig. 239 zeigt Innenverzahnung; Fig. 240 eine Zahnstange, erhalten für $r_2 = \infty = \rho_2$. J liegt im ∞ , NN behält seine Neigung, mithin wird die Zahnflanke der Stange eine um 15° gegen die Zentrale geneigte Gerade. — Arbeitsverlust wie unter c).

Die Evolventenverzahnung hat folgende Eigentümlichkeiten:

1. Die Richtung und Größe des Normaldruckes ist unveränderlich = NN , stets angreifend am Halbmesser des Grundkreises.
2. Werden beide Wellen einander genähert oder voneinander entfernt (Teilkreise schneiden sich bzw. kommen nicht mehr zur Berührung), so ändern sich die Evolventen nicht, mithin sind Ungenauigkeiten in der Montage auf die richtige Verzahnung ohne Einfluß und haben solchen nur auf die Richtung des Normaldruckes, dessen Richtung stets tangential an die Grundkreise bleibt.
3. Alle Evolventenräder gleicher Teilung und gleichen Winkels α sind Satzräder, da die Punkte J und G sich auf der Geraden NN verschieben.
5. Triebstockverzahnung. Bei ihr, Fig. 241, arbeiten zylindrische Bolzen (Triebstöcke) mit den Zähnen eines zweiten Rades zusammen. Die Rollkreis-

Durchm. sind = Teilkreis-Durchm. Die Hypozykloide H_1 schrumpft zu einem Punkt zusammen, also kommt vom Rad 1 nur der Zahnkopf zum Eingriff. Die Verzahnung des Rades 2 ist durch den Triebstockdurchmesser $= \frac{1}{4} \cdot t$ gegeben.

Wird der Teilkreis-Durchm. $T_2 = \infty$, so erhält man eine Zahnstange, bei gleichem Krümmungssinn mit T_1 ergibt sich Innenverzahnung.

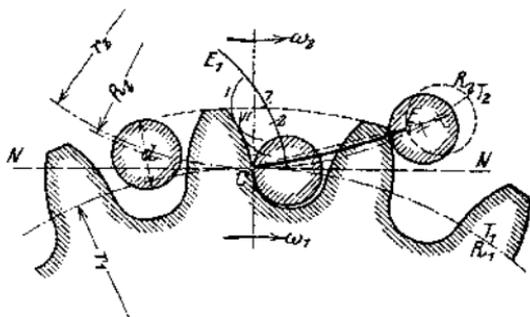


Fig. 241.

Die Eingriffslinie bestimmt sich dadurch, daß die gemeinschaftliche Normale stets durch den Punkt C und durch die Triebstockmitte gehen muß.

Es ist der Schnittpunkt der Verbindungslinie der Triebstockmitte und C mit dem Umfang des Triebstockes stets ein Punkt der Eingriffslinie. In dieser Weise ist EC bestimmt (da $H_1 = 0$, ist der Eingriff nur auf einer Seite der Zentralen vorhanden, Eingriffsdauer kurz). Aus der Eingriffslinie kann man das gesuchte Zahnprofil entweder nach Fig. 225 bestimmen oder als Einhüllende zu den Kreisen I, II usw. mit dem Triebstockhalbmesser um die Punkte $I, 2$ usw. der Epizykloide E_1 beschreiben. Wird die Zahndruckrichtung NN bei der Berührung in $C \perp$ Zentralen angenommen, dann kommt von den Triebstöcken ein möglichst großes Stück des Umfanges zum Eingriff. In diesem Falle müssen ihre Mitten

auf einem Kreise vom Radius $R_3 = \sqrt{r_1^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$ liegen (seltener liegen sie auf dem Teilkreis). — Für $r_2 = \infty = R_2$ fällt die Eingriffslinie mit T_2 zusammen und die Zahnflanken gehen in Evolventen über.

Nachteil dieser Verzahnung: rasche Abnutzung der Triebstöcke. Länge dieser im Mittel

$$l = 3,6 \cdot d \text{ bei Zähnen aus Grauguß,}$$

$$l = 1,8 \cdot d \text{ „ „ „ Stahlguß oder Schmiedeeisen.}$$

6. Wahl der Zahnform. Vorteile der Evolventenräder:

1. Die Evolventen sind leicht zu fräsen, während Zykloiden, besonders wenn die Zahnflanke von der radialen Richtung nach der Zahnmitte abweicht (Fig. 234) schwerer herstellbar.
2. Geringe Änderungen der Achsenentfernung spielen keine Rolle; diese treten aber oft schon infolge der Abnutzung der Lager auf.

3. Der Evolventenzahn ist bei großen Zähnezahlen am Fuße meist stärker als der Zykloidenzahn, bietet mithin größere Sicherheit gegen Bruch, was dort von Ausschlag, wo Stöße auftreten oder nur die Festigkeit maßgebend, z. B. bei Winden, wo Kräfte zu übertragen: Krafträder.

4. Bei normaler Ausführung wird die Eingriffsdauer meist größer als bei Zykloiden.

Vorteile der Zykloidenverzahnung.

1. Besonders kleine Räder (Fig. 237) lassen sich durch Vergrößerung der Rollkreise leichter herstellen als bei Evolventen.

2. Bei der meist vorkommenden Verzahnung nach Fig. 232 bis 234 steht eine Hypo- mit einer Epizykloide im Eingriff, also zwei hohle Flächen miteinander, Fig. 242; bei der Evolventenverzahnung dagegen zwei gewölbte, Fig. 243 stärkste Krümmung (kleinster Krümmungsradius) bei beiden am Fuß; ersteres ist aber bei gleichem Druck für die Abnutzung günstiger oder bei gleicher zulässiger Abnutzung kann man mit der Zykloidenverzahnung größere Arbeiten übertragen. Man wählt sie deshalb für dauernden Betrieb bei Transmissionen u. dgl. als Arbeitsräder. Außerdem bleibt die Form der Verzahnung länger erhalten als bei Evolventen (vgl. Fig. 248 und 249).

3. Die Abnutungsverhältnisse, durch Differenz der Wege ($CF - CB$) bzw. ($CA - CD$) bedingt, sind bei Zykloiden günstiger als bei Evolventen.

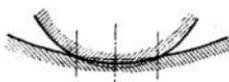


Fig. 242.

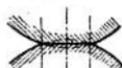


Fig. 243.

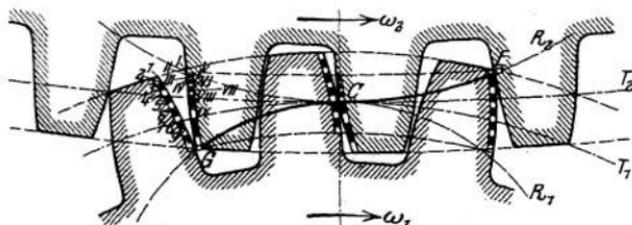


Fig. 244.

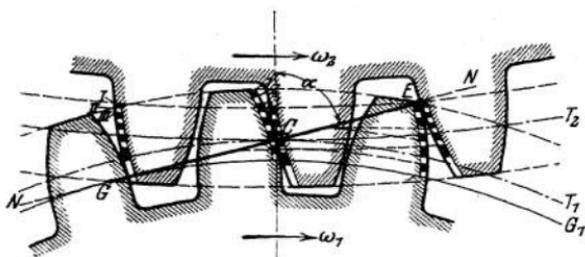


Fig. 245.

Bei ersteren ist das Verhältnis des Gleitens einer Flanke auf der anderen in den Teilen innerhalb und außerhalb der Teilkreise konstant, bei letzteren nimmt es nach der Spitze hin zu. Dies veranschaulichen Fig. 244 und 245, wobei ein Profil durch die Punkte 1, 2, 3 usw. gleichmäßig geteilt ist und die Eingriffspunkte

I, II, III usw. im zweiten Rade bestimmt sind. Das Verhältnis der Längen $1-2, 2-3$ usw. zu $I-II, II-III$ usw., also z. B.

$$\frac{(I-2) - (I-II)}{(I-2)} = \gamma_1, \quad \frac{(I-2) - (I-II)}{(I-II)} = \gamma_2$$

usw., bilden dann ein Maß des Gleitens (vgl. Fig. 224). (Bei Zykloiden konstant.) Gleitrichtung am Fuß des treibenden Zahnes nach innen, am Kopf nach außen, umgekehrt am getriebenen: mithin Richtungswechsel im Teilkreis. Es wird infolgedessen das Schmiermaterial hier nicht fortgewischt, und ein Fettfaden

bleibt zurück. Die Abnutzung ist dann $= \frac{\text{Normaldruck}}{\text{Fläche}} \times \text{Reibungsziffer} \times \text{Gleitweg} \times \text{Umdrehungszahl} = \text{spez. Flächendruck} \cdot \mu \cdot \gamma \cdot n = p_1 \cdot \mu \cdot \gamma_1 \cdot n_1$ bzw. $= p_2 \cdot \mu \cdot \gamma_2 \cdot n_2$. Dies veranschaulichen Fig. 246 und 247 für Zykloiden bzw. Evolventenräder, woraus sich die Abnutzungsfiguren Fig. 248 und 249 herleiten. Mithin kann man die Abnutzung bei beiden Verzahnungen am Kopf und Fuß gleichmäßig erhalten, wenn das Verhältnis der Eingriffsdauer vor und hinter den Zentralen entsprechend den Umdrehungszahlen gewählt wird. Bei Evolventen kann man dieses Verhältnis außerdem günstiger gestalten durch Verringerung der Kopfhöhe des großen und Vergrößerung der Kopfhöhe des kleinen Rades, Fig. 250, wobei gleichzeitig der Zahnfuß des kleinen Rades eine Verstärkung erfährt. Ferner wird erwähntes Verhältnis geringer, je mehr der Eingriff in der Nähe der Zentralen bleibt und bei kleiner Teilung.

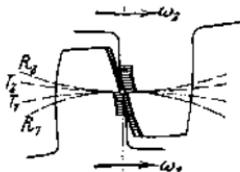


Fig. 246.

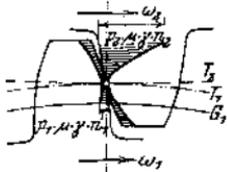


Fig. 247.



Fig. 248.

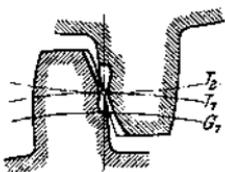


Fig. 249.

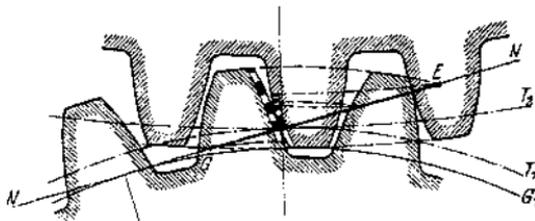


Fig. 250.

b) **Berechnung der Zähne.** Sie geschieht lediglich auf Festigkeit, wobei ev. — besonders bei Arbeitsrädern — für Abnutzung (Flächenpressung), Erwärmung und Stöße ein Zuschlag gegeben wird (bei Evolventen größer als bei Zykloiden). Unter der Voraussetzung richtig gelagerter und auf Durchbiegung berechneter Wellen greift im ungünstigsten Falle die Umfangskraft P gleichmäßig auf der Länge AA_1 (Fig. 226) an. Würde die Durchbiegung nicht beachtet, so könnte P auch in einer Ecke bei A oder A_1 zur Wirkung kommen, ebenso bei unbearbeiteten Zähnen, wovon das Ausbrechen einer Ecke leicht die Folge. Damit ergibt sich

$$P \cdot l = \frac{b \cdot h^2}{6} \cdot k_b = \frac{b \cdot (CD)^2}{6} \cdot k_b$$

Mit $l = 0,7t$, $h \approx 0,5t$ wird $P = 0,06$ bis $0,07 k_b \cdot bt = b \cdot c \cdot t$. Für Krafräder aus Gußeisen wird ($k_b = 300$), $c = 21$ bis 24 ; für Stahlguß doppelte Werte. Für Arbeitsräder gibt Tabelle S. 657 die Werte $c \cdot t$ an.

Setzt man $h = \alpha \cdot t = \infty 0,52 \cdot t$, ferner $b = \beta \cdot t$ und den meist vorkommenden Wert $l = 0,7 \cdot t$, multipliziert beide Seiten mit $R = \frac{z \cdot t}{2 \cdot \pi}$, wenn z die Zähnezah, so folgt nach einigen Umformungen

$$\frac{t}{\pi} = \sqrt[3]{\frac{0,7 \cdot 6 \cdot 2}{\alpha^2 \cdot \pi^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{k_b} \cdot \frac{M_d}{z}} = 1,47 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{k_b} \cdot \frac{M_d}{z}}$$

wenn $M_d = P \cdot R = 71\,620 \cdot \frac{N}{n}$ das zu übertragende Drehmoment. Da bei unbearbeiteten Zähnen die Voraussetzung stets möglich, daß P am Ende eines Zahnes angreift, so sind sie nach dieser Gleichung zu bestimmen. Bei bearbeiteten Zähnen werden entsprechend der Eingriffsdauer im allgemeinen mehrere gleichzeitig im Eingriff sein, es kommt also auf einen Zahn nur ein Bruchteil, beispielsweise bei zwei arbeitenden Zähnen $\frac{P}{2}$. Zur Sicherheit geht man jedoch meist auf diesen Wert nicht herunter, sondern denkt sich die ganze Kraft im Teilkreis wirkend, also am Hebelarm $0,4 \cdot t$; dann ergibt sich

$$\frac{t}{\pi} = \sqrt[3]{\frac{0,4 \cdot 6 \cdot 2}{\alpha^2 \cdot \pi^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{k_b} \cdot \frac{M_d}{z}} = 1,22 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{k_b} \cdot \frac{M_d}{z}}$$

Dabei wird z als Zähnezah des kleinsten Rades angenommen. Der Raddurchmesser ist dann $D = z \cdot \frac{t}{\pi} = z \cdot m$, wenn $m = \frac{t}{\pi} = \text{Modul}$. Da π keine ganze Zahl, kann entweder t oder D als Bruch angenommen werden, da z eine ganze Zahl sein muß. Meist wird D inn als ganze Zahl gewählt, damit auch $\frac{t}{\pi}$ mm eine ganze Zahl. Der Außen $\emptyset = z \cdot \frac{t}{\pi} + 2 \cdot 0,3 \cdot t = z \cdot \frac{t}{\pi} + 2 \cdot 0,3 \cdot \pi \cdot \frac{t}{\pi}$; soll auch er eine ganze Zahl sein, wählt man die Kopfhöhe $= m = \frac{t}{\pi}$ und erhält Außen $\emptyset = z \cdot \frac{t}{\pi} + 2 \cdot \frac{t}{\pi} = (z + 2) \cdot m$. Ebenso mit $1,2 \cdot \frac{t}{\pi}$ als Fußtiefe: Fußkreis $\emptyset = (z - 2,4) \cdot m$.

Der Wert β wird gewählt = 2 wachsend bis 5, je mehr Wert auf ruhigen Gang gelegt wird und je schneller die Räder laufen, da mit wachsender Breite die Teilung kleiner wird, sonach die Eingriffsdauer zunimmt. Es sind mithin gleichzeitig mehr Zähne miteinander im Eingriff, so daß etwaige Ungleichmäßigkeiten in der Teilung, die zu Beschleunigungen des eingreifenden Rades führen müßten, sich weniger bemerkbar machen, weil sie mit geringerer Teilung auch kleiner ausfallen werden. Im Mittel ist

$$\begin{aligned} \beta &= 2 \text{ bei unbearbeiteten Zähnen der Krafträder,} \\ \beta &= 2\text{--}3 \text{ bei gewöhnlichen Triebwerksrädern,} \\ \beta &\text{ bis } 5 \text{ bei großen Arbeitsübertragungen.} \end{aligned}$$

Die so gefundenen Werte sollen bei Arbeitsrädern mit gefrästen Evolventenzähnen ergeben:

als Umfangskraft in kg pro cm Zahnbreite:

$$\frac{P}{b} \leq 50\text{--}60 \text{ bei Bronze-Stahl, } \leq 15\text{--}20 \text{ bei Rohhaut-Grauguß mit Rücksicht auf Flächenpressung (vgl. Tabelle S. 657),}$$

$\frac{P}{b}$ = Zahndruck in kg pro 10 mm Zahnbreite bei Rohhaut-Gußeisen nach Ludw. Loewe & Co., A.-G., Berlin.

Modul mm	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	3
v m/sek = 0,25	9	11	12	15	17,5	20	22	26
0,5	8,5	11	12	15	17	19	21	25
1	8	10	11	14	16	18	20	24,5
2	7,5	9,5	10,5	13	15	17	19	22,5
3	7	8,5	9,5	12	13	15,5	17	20,5
4	6,5	8,5	9	11,5	13	15	16,5	20
5	6	8	9	11	12,5	14	16	19
6	6	7	8	10	12	13	14,5	17,5
7	5,5	6,5	7,5	9,5	11	12	13,5	15,5
8	5,5	6,5	7	9	10	11	12,5	14,5
9	5	6	6,5	8	9,5	10,5	12	14
10	4,5	6	6	8	9	10	11,5	13,5
11	4,5	5,5	6	7,5	9	10	11	13
12	4	5	6	7,5	8,5	9,5	10,5	12,5

Belastungsfall III angenommen; wenn II vorliegt, können obige Werte um ca. 40% erhöht werden.

Ferner sind die Werte zu multiplizieren

bei Phosphorbronze und Deltametall mit 1,75

„ schmiegbarem Guß und Stahlguß „ 2

„ Stahl „ 3

$\frac{P \cdot n}{\varphi \cdot b} \leq 8000$ —10000 bei Bronze-Stahl, ≤ 4000 —6000 bei Rohhaut-Grauguß mit

Rücksicht auf Zahnreibung und Abnutzung, wenn φ die Eingriffsdauer und n die Umdrehungszahl des kleinen Rades. Andernfalls sind die Zähne entsprechend zu verstärken (vgl. Lasche, Z. Ver. deutsch. Ing. 1899).

Den Tabellen Fig. 251 und 252 von Fr. Stolzenberg, Reinickendorf, kann man die Werte unmittelbar entnehmen. Dabei überträgt derselbe Zahn bei Bessemerstahl 3 mal, Werkzeugstahl 3,3 mal, Stahlguß 2 mal, Phosphorbronze 1,2 mal, Nickelstahl je nach Qualität ungehärtet 2—5 mal, gehärtet 5—8 mal, Deltametall gegossen 2,5 mal, geschmiedet 2,7 mal, Rohhaut 1 mal Buchenholz 0,6 mal soviel wie der Gußeisenzahn. Mithin sind die gleichen Tabellen auch für diese Materialien zu verwenden, wenn z. B. bei 30 PS und Stahlguß die PS-Zahl entsprechend kleiner genommen wird = $\frac{30}{2} = 15$ PS.

z muß bei geteilten Rädern durch zwei teilbar, bei Holzzähnen (Fig. 285) ein Vielfaches der Armzahl sein. Ist die Zähnezahl des einen Rades ein Vielfaches der des anderen, z. B. ihr Verhältnis 1 : 1, 1 : 2 usw., so arbeiten sich die Räder schneller aus, als wenn die Zähnezahlen nicht durch einander teilbar. Dies Verhältnis bezeichnet man als Übersetzungsverhältnis

$$i = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\text{Zähnezahl des treibenden Rades}}{\text{Zähnezahl des getriebenen Rades}} = \frac{z_1 \cdot t}{z_2 \cdot t} = \frac{2 \cdot r_1 \cdot \pi}{2 \cdot r_2 \cdot \pi} = \frac{r_1}{r_2}$$

Ferner ist die Umfangsgeschwindigkeit

$$v = r_1 \cdot \omega_1 = r_2 \cdot \omega_2;$$

daraus

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\frac{\pi \cdot n_2}{30}}{\frac{\pi \cdot n_1}{30}} = \frac{n_2}{n_1}$$

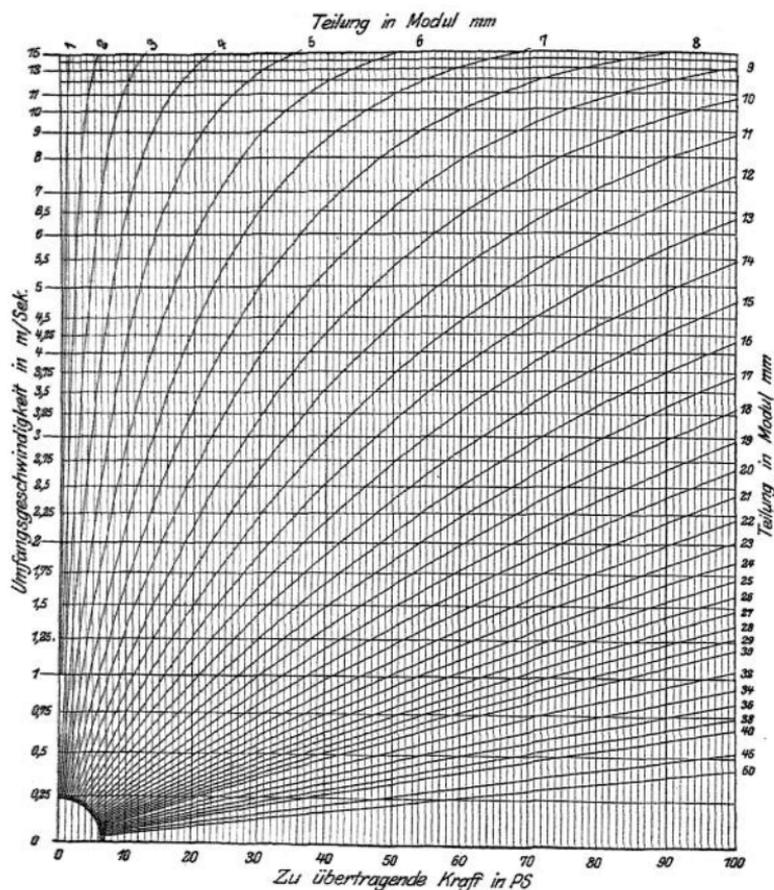


Fig. 251.

Sonach auch

$$i = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Man geht bei geringen Umdrehungszahlen mit i bis zu 1 : 7 bei Triebwerksrädern und bis zu 1 : 10 bei Krafrädern (sonst zu kurze Eingriffslinie). Ist die Länge der Zentralen

$$\begin{aligned} a &= r_1 \pm r_2 \text{ (— bei Innenverzahnung),} \\ &= r_1 \left(1 \pm \frac{z_2}{z_1} \right) = r_2 \cdot \left(\frac{z_1}{z_2} \pm 1 \right), \end{aligned}$$

so folgt

$$r_1 = \frac{a}{1 \pm \frac{z_2}{z_1}} = \frac{a \cdot i}{i \pm 1}, \quad r_2 = \frac{a}{\frac{z_1}{z_2} \pm 1} = \frac{a}{i \pm 1}.$$

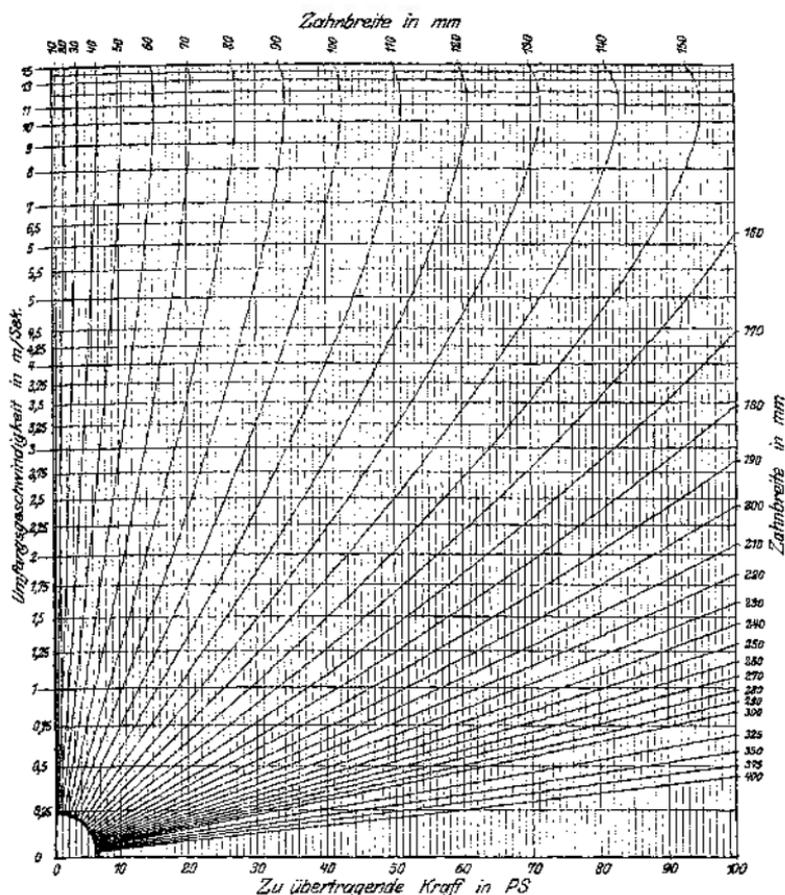


Fig. 252.

Bearbeitung kann geschehen:

1. mittels Fräser, dessen Profil genau der Zahnlücke entspricht. Herstellung in einem Arbeitsgang. Nach dem Rücklauf des Fräasers wird das Rad um eine Teilung gedreht. Nachteil: bei Zykloiden wird der Rückenwinkel an der Seitenfläche des Fräasers in der Nähe des Teilkreises zu klein, so daß der Schnitt schlecht ausfällt, bei Evolventen am Fuß, der aber nicht mehr zum Eingriff kommt; Evolventen erhalten deshalb häufig den Vorzug;
2. durch Hobeln und Stoßen. Führung des Werkzeuges mittels Lehre, oder die Stichelspitze bewegt sich bei entsprechender Drehung des Rades auf der Eingriffslinie. Nachteil: Flanken werden riefig;
3. nach dem Abwälzverfahren: das Werkzeug erhält eine als Zahnflanke profilierte Schneide und wird dem zu bearbeitenden Rad gegenüber einer relativen Bewegung unterworfen, die dem Abrollen des ihrer Schneide entsprechenden Rades gleichkommt. Hierbei entstehen glatte Flanken. Das Werkzeug kann dabei ausgebildet werden:
 - a) als Stirnrad, dessen Zähne sämtlich als Werkzeug dienen, und das als Stoßrad verwendet wird,

b) als Schneckenfräser, dessen Achse um den mittleren Steigungswinkel der Schnecke schräg zur Tangente an den Teilkreis des Rades eingestellt wird, so daß die Schraubengänge in die Richtung der zu schneidenden Zahnücken fallen und beim Vorschub in Richtung der Radachse die Lücken ausschneiden, wenn Fräser und Rad zwangläufig gleichförmig gedreht werden.

Bei nicht genauer Herstellung der Flankenform findet die Berührung nicht auf der Eingriffslinie statt; infolgedessen ändert sich das Übersetzungsverhältnis, so daß Stöße die Folge sind. Von noch größerem Einfluß sind Fehler in der Teilung.

2. Stirnräder mit Winkelzähnen.

Die Zähne sitzen schraubenförmig auf einem Zylinder vom Durchmesser des Grundkreises und stoßen unter einem Winkel in Radmitte zusammen. Unter Vernachlässigung dieser Schraubenform berechnet man die Zähne wie bei Stirnrädern mit geraden Zähnen, wobei die früheren Gleichungen gelten, wenn die Umfangskraft P und die ganze Zahnbreite b , oder auch, wenn der Normaldruck

$$\mathfrak{N} = \frac{P}{2 \sin \beta}$$

für den halben Zahn und die halbe Breite $= \frac{b}{\sin \beta}$ zugrunde gelegt werden,

und konstruiert darauf das Zahnprofil wie bei Stirnrädern. Dieses benutzt man dann bei unbearbeiteten Zähnen als schräge Grundfläche (senkrecht zur Radachse) für den Winkelzahn, indem man seine Enden um den Winkel γ gegen die Mitte verdreht. Fig. 253. Hierbei fällt der Normalschnitt etwas schwächer aus: will man dies nicht, so kann man das errechnete Profil senkrecht zur Schraubenlinie, also auf dem großen

Krümmungshalbmesser der Ellipse $= \frac{a^2}{b}$ (Halbmesser $= a$ und b , vgl. S. 163) = beispielsweise $\left(\frac{r_1}{\sin \beta}\right)^2 \cdot \frac{1}{r_1} = \frac{r_1}{\sin^2 \beta}$ auftragen; bei bearbeiteten Zähnen erforderlich. Die Achse des Zahnes wird eine Schraubenlinie. Der Teilkreisbogen $r \cdot \gamma$ heißt der Sprung des Zahnes $= \sigma$. Er bedingt die

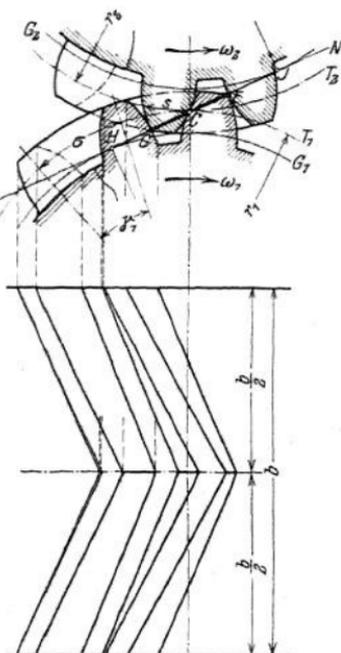


Fig. 253.

Steigung der Schraubenlinie

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{0,5 \cdot b}{\sigma} = \frac{1}{2} \frac{b}{r \cdot \gamma}$$

Als Zahnform sind sowohl Evolventen wie Zykloiden verwendbar. Nimmt man z. B. Evolventen und läßt die Räder mit der Spitze voran drehen, so kommt zunächst die Spitze des getriebenen Rades mit dem Fuß des treibenden in Eingriff. Bei fortschreitender Drehung rückt der Eingriff am treibenden Rad nach außen, am getriebenen nach innen, während gleichzeitig die Zahnflanken zur Berührung gelangen, und zwar in einer schräg zur Radachse verlaufenden Linie, deren Projektion eine Gerade ist, da die Berührung nur auf der Eingriffslinie erfolgen kann. Endlich kommt die Spitze des treibenden Rades zum Eingriff.

Jetzt ist die größte Länge der Berührungslinie erreicht. Je nach der Größe des Sprunges kann diese eine Zeitlang konstant bleiben; später sinkt sie wieder auf 0. Fig. 254 zeigt die einzelnen augenblicklichen Berührungslinien, beginnend mit der Linie von der Länge 0 bei a und endigend mit einer gleichen Länge bei b . Sämtliche Geraden sind dabei Tangenten an den Grundkreis $G_2 G_2$. Bei Zykloidenverzahnung erhält man statt der Geraden Kreise als Eingriffslinien.

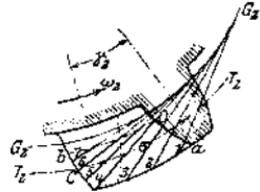


Fig. 254.

Da infolge der Bearbeitung mit gewöhnlichem Fräser die Teilung normal zum Zahn, t_n , festliegt, also

$\frac{t_n}{\pi}$ ein gerades Maß sein muß, kann bei bearbeiteten Zähnen der Teilkreisdurchm. $= \frac{\sigma}{\sin \beta} \cdot \frac{t_n}{\pi}$ kein gerades Maß sein.

Vorteile der Winkelräder gegenüber gewöhnlichen Stirnrädern:

1. Eingriff dauert länger; Eingriffsdauer $= \frac{\sigma + \sigma}{t}$ (vgl. S. 648).
2. Der Eingriff beginnt und endet auch in einem Punkte entsprechend einem Wachstum der Kraft von 0 bis zu einem Maximum und Abnahme bis auf 0 gegenüber konstanter Kraftübertragung bei Stirnrädern; infolgedessen ist der Gang ruhiger.
3. Da die Kraftübertragung etwa verhältnismäßig der Größe der Berührungsfäche, ist die Beanspruchung günstiger, denn bei der größten Berührung ist der Hebelarm kleiner als die ganze Zahnlänge (Linie 4 Fig. 254).

Winkelräder sind daher bis $v = 15$ m/sek geeignet.

Meist läßt man die Spitze voreilen, da ungleichmäßige Kraftübertragung (durch Stöße), wenn überhaupt, bei Beginn des Eingriffes stattfindet, wo die Stöße am wenigsten schaden können, da beide Zähne in Zahnmitte anliegen, an welcher Stelle die Zähne ihre größte Festigkeit besitzen. Um bei wechselnder Drehrichtung die Kraftübertragung durch die freien Enden zu vermeiden, schneidet man diese fort oder gibt einen Bordring, Fig. 255, und führt das Rad ca. 10 mm breiter als das eingreifende aus, oder man bricht die Zähne zweimal: Doppelwinkelzähne.

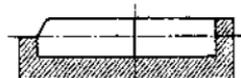


Fig. 255.

Um besonders bei unbearbeiteten Zähnen jeden Axialdruck zu vermeiden, erhält die Ritzelwelle axiales Spiel in den Lagern, oder man setzt das Ritzel auf zwei Federn.

Wird der Sprung $\sigma =$ Eingriffsbogen gewählt, so endet der Eingriff am Zahnprofil der Mitte in dem Augenblick, in welchem er für das Profil der Stirnflächen beginnt. Nur in diesem einen Augenblick hat die Berührungslinie ihre größte Länge. Wird σ größer gewählt, so tritt Berührung über die volle Breite $\frac{b}{2}$ niemals ein, ist σ kleiner, so findet während einer entsprechenden Zeit Berührung über die volle Breite statt ($\sigma = 0 =$ Stirnräder: Berührung während der ganzen Zeit über die volle Breite). Man nimmt etwa

und erhält damit

$$\sigma = t, \quad b = 4t$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{0,5 \cdot b}{\sigma} = \frac{2 \cdot t}{t} = 2, \quad \beta = 63^\circ 26'$$

oder meist

$$\beta = 60^\circ, \quad 2\beta = 120^\circ.$$

Bei unbearbeiteten Zähnen muß das Modell radial nach innen gezogen werden; radiale Fußansätze deshalb nicht möglich, diese dürfen höchstens parallele Seitenflanken haben, worauf bei den um $\frac{\sigma}{2}$ versetzten Endflächen zu achten;

Kopfhöhe meist = $0,25 t$, Zahnfuß = $0,35 \cdot t$. Kopf- und Fußflanken werden auch wohl gegenüber dem richtigen Profil zurückgesetzt, um Kanteneingriff (Stöße) zu vermeiden. Ist $\sigma > t$, so läßt sich dadurch der Eingriff fast auf den Zentralpunkt beschränken (Reibung = 0).

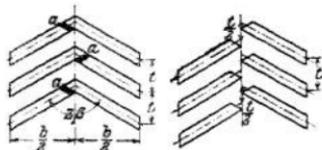


Fig. 256.

Fig. 257.

Sollen die Räder bearbeitet werden, so kann dieses

1. mittels Scheibenfräsers geschehen, wobei bei einteiligem Rad nach Fig. 256, um einen Auslauf für den Fräser zu erhalten, die Teile *a* in Fortfall kommen;

dies wird vermieden bei in der Mitte geteiltem Rad, Fig. 281;

2. mit einem Fingerfräser ausgeführt werden (Citroën-Räder), wobei die Teile *a* erhalten bleiben; Nacharbeiten in Radmitte erforderlich;

3. mittels Schneckenfräser erfolgen, Rad zweiteilig oder einteilig: Fig. 257; Wüst-Getriebe, beide Zahnhälften gegeneinander versetzt.

2a. Stirnräder mit Schraubenzähnen.

Sie erhalten nur eine Hälfte des Winkelzahnes, weisen mithin als Nachteil gegenüber den Stirnrädern mit Winkelzähnen den Axialdruck = $\frac{1}{\text{ctg } \beta}$ Umfangskraft auf. Sie eignen sich deshalb nur für geringe Umfangskräfte und Geschwindigkeiten. $\beta = 85 - 70^\circ$.

Bearbeitung:

1. Hobeln bei gleichzeitiger Drehung des Rades;
2. Fräsen mittels Scheibenfräser;
3. „ „ Fingerfräser;
4. nach dem Abwälzverfahren.

3. Kegelräder.

Ebenso wie man die Bewegung zweier Stirnräder als das Rollen zweier Zylinder auffassen kann, kann man die zweier

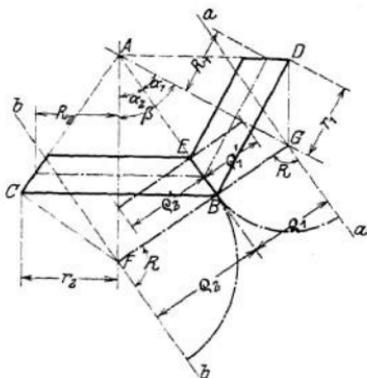


Fig. 258.

den gemeinsamen Rollen zweier Zylinder ansehen, deren gemeinsame Spitze im Schnittpunkt beider Achsen liegt. Die beiden Kegel — Grundkegel — seien *ABC* und *ABD*, Fig. 258, von denen nur das durch *BE* bestimmte Stück benutzt wird. Die Grundkreise der Grundkegel, deren Radien r_1 und r_2 sind, bilden die Teilkreise. Das Zahnprofil ist $\perp BE$, also senkrecht zur Zahnmitte zu entwerfen (als Grundfläche einer Pyramide, da die Zähne Pyramidenform mit der Spitze in *A*), also auf den Mantelflächen der „Ergänzungskegel“ *FCB* und *GBD*, deren Erzeugende *FB* bzw. *GB* $\perp BA$ (*BA* ist zugleich die Erzeugende zweier Stirnräder, deren Achsen *a— a* bzw. *b— b* und Radien ρ_1 bzw. ρ_2 ; man kann sich ja auch die Kegelräder aus diesen Stirnrädern durch Aufgabe des Parallelismus der Achsen entstanden denken). Hierzu werden die Kegel nach Fig. 259 abgewickelt, meist auch die mit den Radien ρ'_1 und ρ'_2 .

Die Maße der Profile sind auf den Abwickelungen der Ergänzungskegel bzw. der Kreise mit den Radien ρ_1' und ρ_2' einzuschreiben, Teilung und Durchmesser dagegen auf den Teilkreisen.

Die Berechnung erfolgt unter Zugrundelegung der mittleren Halbmesser R_1 und R_2 genau wie bei Stirnrädern. Außendurchm. z. B. $= 2 \cdot r_1 = 2 \cdot R_1 + EB \cdot \sin \alpha_1 = D_1 = D_m + b \cdot \sin \alpha_1$ meist ein rundes Maß, da Normalteilung hier nicht erforderlich. Ebenso

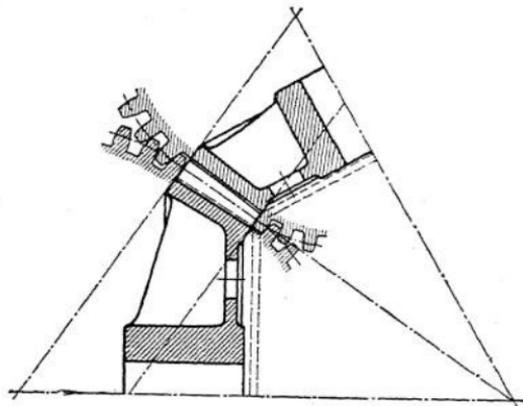


Fig. 259.

$$t = t_m + \frac{\pi}{z} \cdot b \cdot \sin \alpha_1,$$

wenn t_m die errechnete mittlere Teilung. Zähne meist gerade, Schraubenform möglich. Es ist

$$(\alpha_1 + \alpha_2) = \beta \quad \text{oder} \quad \alpha_1 = \beta - \alpha_2,$$

damit $\sin \alpha_1 = \sin \beta \cdot \cos \alpha_2 - \cos \beta \cdot \sin \alpha_2,$

$$i = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin \beta}{\operatorname{tg} \alpha_2} - \cos \beta,$$

also $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\sin \beta}{i + \cos \beta}.$

$\beta = 90^\circ:$ $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{1}{i} = \frac{R_2}{R_1}.$

Räder mit $\beta = 90^\circ$ heißen Winkelräder. Sie sind möglichst anzustreben, da sie dann leichter wieder verwendbar. Für $\sphericalangle BAC = 2\alpha_2 = 180^\circ$ erhält man das Planrad, mit dem bei Evolventenverzahnung alle Kegelräder gleicher Teilung zusammenarbeiten, wenn ihre Spitze nach A fällt (Fig. 260 und 261)

(Zahnstange bei Stirnrädern). Als Zahnformen sind Evolventen und Zykloiden ausführbar. Bearbeitung geschieht 1. durch Hobeln oder Stoßen bei stillstehendem Rad, 2. nach dem Abwälzverfahren, bei dem ein sich abwälzender Hilfskegel die richtige Stellung des Werkstückes gegenüber dem Stichel bzw. Schrauben- oder Schneckenfräser bedingt.

Auch mit Winkelzähnen und schraubenförmigen Zähnen werden die Kegelräder ausgeführt, letztere eignen sich infolge der großen Eingriffsdauer für Übersetzungen bis 1 : 10 gegenüber 1 : 4 bei geraden Zähnen und werden mittels Fingerfräser bearbeitet.

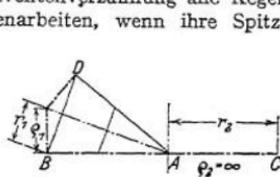


Fig. 260.

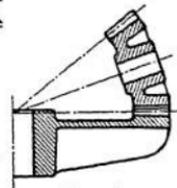


Fig. 261.

4. Zahnräder für sich kreuzende Wellen.

a) **Hyperboloidenräder.** Von der Achse AB , Fig. 262, soll ein Drehmoment auf die Achse CD übertragen werden. Dies ist dadurch ausführbar, daß EF als Erzeugende zweier Hyperboloide mit den Achsen AB bzw. CD genommen wird. Beide Hyperboloide berühren sich dann stets in der Geraden EF , die mithin als Zahnachse genommen werden muß. Kann die Gerade EF einer Achse parallel gelegt werden, dann geht das eine Hyperboloid in einen Zylinder über. Diese Räder sind jedoch teuer und haben große Reibung, weil der augenblickliche Berührungspunkt als Punkt des einen Hyperboloides sich auf einem Kreis um dessen Achse und ebenso als zum zweiten Rad gehörig auf einem zweiten Kreis um eine zweite Achse bewegt. Sie werden deshalb fast stets vermieden, was meist durch eine dritte Welle, die beide Achsen schneidet, mit Hilfe zweier Kegelräderpaare möglich ist.

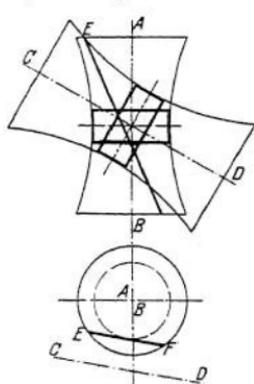


Fig. 262.

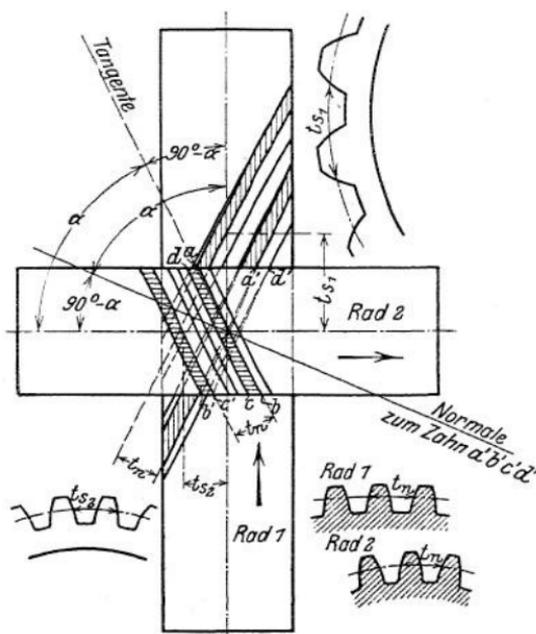


Fig. 263.

b) **Zylindrische Schraubenzahnräder** sind zylindrische Räder mit schraubenförmig gewundenen Zähnen für sich unter dem Winkel $(\alpha + \beta)$ kreuzende Achsen Fig. 263. $abcd$ sei ein Zahn, der nach einer Drehung von 180° die Lage $a'b'c'd'$ erreicht; mithin wird er auf ein zweites Rad ein Drehmoment zu übertragen imstande sein, wenn dessen Zähne ihn in $a'b'$ berühren. Die Teilung gemessen auf der Stirnfläche der Räder beträgt:

$$t_{n1} = \frac{t_n}{\cos \alpha} = \frac{D_1 \cdot \pi}{z_1},$$

bzw.

$$t_{n2} = \frac{t_n}{\cos \beta} = \frac{D_2 \cdot \pi}{z_2},$$

wenn t_n die Teilung normal zum Zahn. Damit ist die Übersetzung

$$i = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{D_1 \cdot \pi}{t_{n1}}}{\frac{D_2 \cdot \pi}{t_{n2}}} = \frac{D_1 \cdot \pi \cdot \cos \alpha}{D_2 \cdot \pi \cdot \cos \beta} = \frac{D_1 \cdot \cos \alpha}{D_2 \cdot \cos \beta}.$$

Eingriffsbogen bei Evolventen

$$= \frac{\text{Eingriffsstrecke im Normalschnitt zur Achse}}{\sin \alpha} + \text{Sprung,}$$

vgl. S. 648, 652 und 661.

Meist ist $\alpha + \beta = R$, womit

$$i = \frac{D_1 \cdot \cos \alpha}{D_2 \cdot \sin \alpha} = \frac{D_1}{D_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}.$$

z. B.: $\alpha = \beta = 45^\circ$, $i = 1 : 2$ gibt $\frac{1}{2} = \frac{D_1}{D_2 \cdot 1}$, also $D_2 = 2 \cdot D_1$,
 $i = 1 : 2,5$, $D_1 = D_2$ gibt $\frac{1}{2,5} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$, also $\operatorname{tg} \alpha = 2,5$,
 $\alpha = 68^\circ 10'$, $\beta = 21^\circ 50'$.

Nachteile der Schraubenräder sind:

1. Starke Abnutzung, bedingt durch Gleiten und kleine Berührungsfläche (theoretisch in einem Punkte), Material deshalb meist Stahl-Phosphorbronze; Zahndruck nur etwa halb so groß wie bei Stirnrädern.

2. Große Seitenkräfte in Richtung der Radachse.

Die Zähne sind zu entwerfen für Ebenen normal zum Zahn. Diese schneiden die Umfänge der Zylinder vom Durchm. D_1 und D_2 in Ellipsen, auf denen die Verzahnungen zu zeichnen sind.

c) Schraube (Schnecke) mit Schrauben-(Schnecken)rad. Werden in Fig. 263 der Durchmesser des Rades 1 und $\angle \beta = 90^\circ - \alpha$ kleiner, so bilden die Zähne schließlich einen geschlossenen Schrauben- oder Schneckengang, Fig. 264. Schräkungswinkel der Achsen kann beliebig sein, meist jedoch auch hier $= 90^\circ$. Beim Drehen der Schnecke ist das Rad bestrebt, sich in Richtung der Schneckenachse AA parallel zu verschieben. Es kann sich aber nur um seine Achse BB drehen. Mithin sind seine Zähne keine reinen Gewindengänge, nähern sich ihnen aber mit zunehmendem Rad-Durchm. Dies erkennt man auch, wenn die Schnecke an der Drehung gehindert und parallel verschoben wird; dann arbeitet sie wie eine Zahnstange. Mithin ist die Verzahnung für Ebene $CC = \text{Mitte Rad und Längsschnitt Schnecke}$ genau so zu bestimmen wie für Zahnstange mit Rad. Damit liegt dann das Profil der Schnecke fest. Für die nicht in der Ebene CC liegenden Teile des Zahnes des Rades ist damit das eingreifende Zahnstangenprofil gegeben und nach ihm nach Fig. 225 das Zahnprofil zu bestimmen, und zwar entweder für parallel CC liegende oder bequemer für sich in der Schneckenachse

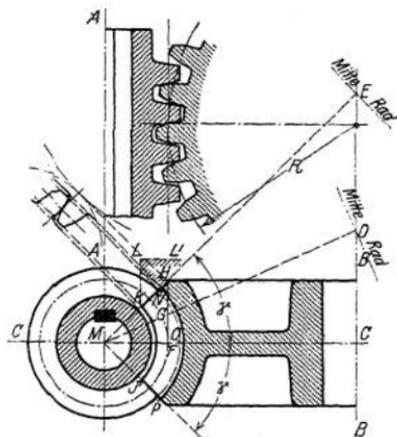


Fig. 264.

liegenden Teile des Zahnes des Rades ist damit das eingreifende Zahnstangenprofil gegeben und nach ihm nach Fig. 225 das Zahnprofil zu bestimmen, und zwar entweder für parallel CC liegende oder bequemer für sich in der Schneckenachse

schneidende Ebenen. Da für diese das Übersetzungsverhältnis $= \frac{MF}{FC}$ ist, sind bei

der Bestimmung des Profils beispielsweise für die Ebene MD und ME die Strecken GD und HE als Radien für die gedachten Räder mit den Mitten in D und E zu nehmen. Diese Konstruktion ist bei unbearbeiteten Rädern durchzuführen; bei bearbeiteten ist nur Verzahnung des äußersten Schnittes ME zu ermitteln (s. Seite 666). Die Zahnprofile dieser Ebenen sind gegen den

Zentralpunkt versetzt, z. B. für ME mit $h =$ Steigung um $h \cdot \frac{\gamma}{2 \cdot \pi}$. Teilung der durch G und H gegebenen Teilkreise $= t =$ Teilung im Mittelschnitt.

Ungenauigkeiten in der Ausführung kommen am leichtesten an den Ecken J und K vor und machen sich bei Beginn des Eingriffes besonders bei langen Schnecken bemerkbar. Ausführung Fig. 265 vermeidet dies. Bei fertigen Schnecken können solche Störungen im Eingriff durch Verkürzung der Schnecke beseitigt werden. Man läßt dabei aber mindestens zwei Zahnflanken im vollen Schneckenprofil arbeiten. Hierzu wickelt man die Schnecke ($= 2 \cdot r \cdot \pi$, Fig. 266) und ebenso das Rad ab, wobei die Schneckenlänge sich sofort ergibt.

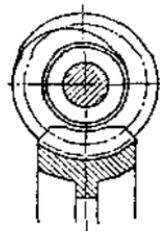


Fig. 265.

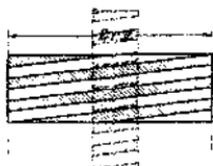


Fig. 266.

Herstellung. Schnecke rob gegossen, gedreht oder gefräst; Rad entweder unbearbeitet oder gefräst mit einem als Schnecke ausgebildeten Fräser, dessen

Profil genau gleich ist dem der Betriebsschnecke. Material: Grauguß für geringe, Phosphorbronze für hohe Belastungen; Stahlguß ungeeignet, da er frist.

Verzahnung meist Evolventen; da diese beim Rad genau nur in der Mitte vorhanden, muß die Achsenentfernung genau eingehalten werden, ebenso der Schrägungswinkel. Der Zentriwinkel 2γ ist so groß zu nehmen als die Rücksicht auf Vermeidung zu spitzer Zahnformen bei J und K es gestattet; ev. Ausführung nach KLL' .

Es sei (Fig. 267) \mathcal{N} der Normaldruck, vom Rad auf die Schnecke ausgeübt. Dann ergibt sich in Richtung der Achse

$$\mathcal{N}_x = \mathcal{N}_1 \cdot \cos \alpha = \mathcal{N} \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha$$

$$(\mathcal{N}_1 = \text{horizontale Komponente von } \mathcal{N}, \beta = \sphericalangle \text{ zwischen } \mathcal{N}_1/\mathcal{N}_1, \\ \alpha = \sphericalangle \text{ zwischen } \mathcal{N}_1/\mathcal{N}_x).$$

Wagrecht und senkrecht dazu:

$$\mathcal{N}_y = \mathcal{N}_1 \cdot \sin \alpha = \mathcal{N} \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha,$$

lotrecht und senkrecht dazu

$$\mathcal{N}_z = \mathcal{N} \cdot \sin \beta.$$

Als weitere Kraft ist noch vorhanden die Reibung $\mu \cdot \mathcal{N}$ tangential zur Schnecke; mithin ergibt sich die

$$\text{Axialkraft} = P = \mathcal{N} \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha - \mu \cdot \mathcal{N} \cdot \sin \alpha$$

$$\text{Umfangskraft} = P_u = \mathcal{N} \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha + \mu \cdot \mathcal{N} \cdot \cos \alpha$$

$$\text{Radialkraft} = P_r = \mathcal{N} \cdot \cos \beta.$$

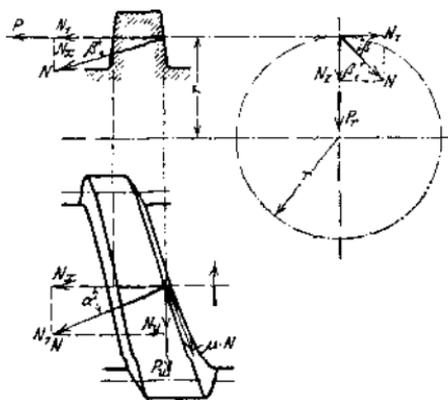


Fig. 267.

Daraus

$$P_u = P \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varrho'), \quad \text{wenn} \quad \frac{\mu'}{\cos \beta} = \mu' = \operatorname{tg} \varrho'.$$

Aus N ergibt sich P_u , daraus P , damit \mathfrak{M} . Die drei Kräfte sind sowohl von den Lagern des Rades (durch einen Wellenabsatz [Fig. 290] oder Radnabe [Fig. 289], da Rad am besten auf Feder) wie der Schnecke aufzunehmen. μ für Stahl auf Phosphorbronze etwa = 0,03, $\text{Guß}_1/\text{Guß} \approx 0,1$. Die Übersetzung beträgt $i = 1:z$ bei eingängiger, $= 2:z$ bei zweigängiger usw. $= \frac{m}{z}$ bei

m -gängiger Schnecke, wenn z die Zähnczahl des Rades = $\frac{\text{Gangzahl der Schnecke}}{\text{Zähnczahl des Rades}}$.

$$\text{Wirkungsgrad } \eta = \frac{P \cdot h}{2r\pi \cdot P_u}, \quad \text{wenn } h = \text{Steigung} = m \cdot t,$$

oder

$$\eta = \frac{P}{P_u} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varrho')}.$$

Soll die Schnecke selbstsperrend sein, so muß, wenn die Lagerreibung unberücksichtigt bleibt,

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \mu'$$

sein.

Bei der Berechnung müßte man eigentlich vom Normaldruck \mathfrak{M} ausgehen; meist nimmt man statt dessen P , dessen Moment = $P \cdot R$, und erhält damit nach den früheren Gleichungen

$$\frac{t}{x} = 1,47 \text{ bzw. } = 1,22 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{h_b} \cdot \frac{M_d}{z}}$$

gültig für das Rad; dabei $\beta \cdot t = b = \text{NOP}$

oder da

$$t = \frac{2r\pi \cdot \operatorname{tg} \alpha}{m} = \frac{2 \cdot R \cdot \pi}{z} \quad \text{also} \quad r = R \cdot \frac{m}{z} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

damit

$$P_u \cdot r = P \cdot R \cdot \frac{m}{z} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \varrho')}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$M_{d\text{Schnecke}} = M_d \cdot \frac{m}{z} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \varrho')}{\operatorname{tg} \alpha} = M_d \cdot \frac{m}{z} \cdot \frac{1}{\eta}$$

$$\frac{t}{x} = 1,47 \text{ bzw. } 1,22 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{h_b} \cdot \frac{M_{d\text{Schnecke}}}{m} \cdot \eta}$$

$$= 61 \text{ bzw. } 50,6 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{h_b} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{N}{n} \cdot \eta}.$$

Das Drehmoment der Schnecke ist

$$= P \cdot r \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varrho') = P \cdot r \cdot \frac{h + 2r\pi\mu'}{2r\pi - \mu' \cdot h},$$

wozu noch ca. 10% Zuschlag für Lagerreibung kommen. Ihr Kern-Durchmesser = Wellen-Durchmesser bestimmt sich mit $k_d = 120$ aus der Gleichung (S. 600)

zu $d = \sqrt[3]{3000 \cdot \frac{N}{n}}$. Schneckenwelle erhält meist Gleitlager als Traglager, da

bei Kugellagern die Stützstellen weiter von der Schnecke forttrücken, so daß infolge der größeren Durchbiegung der Eingriff leidet. Der Axialdruck wird durch ein Lager aufgenommen, damit die Wärmeausdehnungen nicht schaden können.

5. Unrunde Räder.

Statt der bei der Drehung sich berührenden Teilkreise kann man auch beliebige Kurven verwenden, wenn nur die Summe der jeweiligen Radien konstant = Länge der Zentralen. Da stets

$$v_1 = r_1 \cdot \omega_1 = v_2 = r_2 \cdot \omega_2$$

sind bei konstantem ω_1 veränderlich v_1 , v_2 und ω_2 (vgl. Fig. 224). Räder meist als Stirnräder ausgeführt; Verzahnung wie bei Kreisrädern, wobei Mittelebene Zahn normal zur Kurve. Am häufigsten kommen zwei gleiche elliptische Räder vor, Fig. 268, $C1 = CI$, $12 = III$ usw., wobei die Achsen mit den Brennpunkten zusammenfallen müssen. Achsenentfernung = $2a$, da $\triangle ABD \cong \triangle AED$, mithin $\triangle ACB \cong \triangle DCE$, also $AC = DC$ und $BC = CE$. Mit

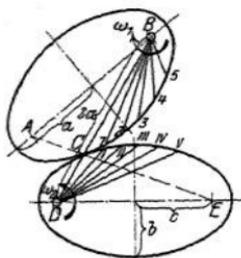


Fig. 268.

$$r_{\max} = a + c \quad \text{und} \quad r_{\min} = a - c$$

folgt

$$i_{\max} = \frac{a + c}{a - c} \quad \text{und} \quad i_{\min} = \frac{a - c}{a + c}$$

und

$$\frac{b}{a} = \frac{2 \cdot \sqrt{J}}{1 + \sqrt{J}} \quad \text{wenn} \quad J = \frac{i_{\max}}{i_{\min}}$$

6. Ausführung der Räder

(vgl. auch Riemen- und Seiltrieb).

Material: meist Grauguß; bearbeitete Zähne kleiner Teilung aus dem Vollen gefräst, größere vorgegossen, unbearbeitet tunlichst nur bis $v = 2$ m/sek; $\eta = 0,9$ bis $0,95$, wenn Zähne unbearbeitet und geschmiert, $\eta =$ bis $0,97$ wenn Zähne bearbeitet und geschmiert, ungeschmiert etwa $1,7\%$ weniger. Soll die Lagerreibung berücksichtigt werden, so ist $\eta_{\text{gesamt}} = \eta \times \eta_{\text{Lager}}$ statt η zu setzen. Reicht die Festigkeit von Grauguß nicht mehr aus: Stahlguß (bearbeitete Zähne meist aus dem Vollen gefräst, nur ganz große Teilungen werden vorgegossen und können auch unbearbeitet verwendet werden; Evolventen leichter ausführbar, da Fuß stärker), Flußstahl, Bronze (bis $v = 9$ m/sek) mit stets bearbeiteten Zähnen und für besonders ruhigen Gang Rohhaut, Papier und Holz. Flußstahl kommt als Material für Ritzel in Frage und erhält durch die Herstellung bedingt bearbeitete Zähne; fast stets auch das eingreifende Rad. Die mit Rädern aus Bronze, Rohhaut, Papier und Holz zusammen arbeitenden Räder werden stets bearbeitet, da sie andernfalls die ersteren schnell zerstören würden.

Rohhaut oder Papier verwendet man für das kleinere Rad (des Preises wegen), wenn besonders ruhiger Gang verlangt wird oder versieht zum gleichen Zweck das größere Rad (der Abnutzung und des Preises wegen, da Fräsen des kleinen billiger als das des großen, welcher Unterschied durch die Kosten der Holzzähne nicht aufgehoben wird) mit eingesetzten Holzzähnen (Kämmen).

Rohhaut wird für $v > 9$ m/sek stets angewandt (möglich bis $v = 12$ m/sek), da Bronze auf Stahl oder Grauguß warm laufen würde; beim Anlauf kann gewählt werden k_b bis 450 kg/qcm, für Dauerbetrieb $k_b = 60$ bis 90 bis 120 . Infolge des großen Verschleißes dieser Räder tritt das Stirnschneckengetriebe (Rabitzy) mit ihnen erfolgreich in Wettbewerb.

Bei Verwendung von Holzzähnen für das eine Rad wählt man, um gleichmäßige Abnutzung und Festigkeit zu erhalten, die Stärke des eingreifenden Eisenzahnes, die normal $s = \frac{1}{4} \cdot t$ beträgt, auch wohl kleiner, etwa $\frac{1}{8} \cdot t = 0,4 \cdot t$, wobei die Holzzähne $s = \frac{3}{8}$ bis $\frac{2}{4} \cdot t$ erhalten. In diesem Fall müssen beide Zähne nach der Gleichung $P \cdot l = \frac{b \cdot k_b^2}{6} \cdot k_b$ berechnet werden; Holzzähne meist aus Weißbuche mit $k_b = 100$ kg/qcm hergestellt.

Zahnkranz: Stärke etwa $0,5 \cdot t$, Fig. 269, ebenso bei Kegelrädern. Bei großen Rädern und großen Kräften wird er durch die Rippen a verstärkt, da die radialen Komponenten von \mathcal{N} und $\mu \cdot \mathcal{N}$ den Teil zwischen den Armen auf Biegung beanspruchen.

Nabe: Berechnung siehe Keile

S. 580; im Mittel $\delta = \infty \frac{d}{3} + 5$

mm; $L = 1,2 - 1,5 - 2 \cdot d$; in letzterem Falle Ausführung nach Fig. 270.

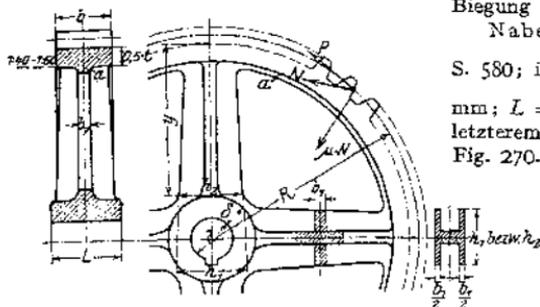


Fig. 269.

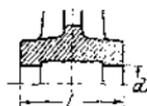


Fig. 270.

Arme: Da der Arm sowohl in der Nabe wie im Kranz eingespannt ist, biegt er sich so durch, daß die Tangente der Biegungslinie an der Nabe und am Kranz radial gerichtet ist, sofern der Kranz selbst nicht nachgibt. Je weniger diese Ausnahme zutrifft, um so mehr geht die radiale Richtung am Kranz verloren. Daraus folgt

1. daß an der Nabe nicht das ganze Moment $P_1 \cdot y$ zu übertragen ist, wenn P_1 die vom Arm zu übertragende Kraft bedeutet, da der Arm ja durch ein entgegengesetzt gerichtetes Moment zurückgebogen wird,

2. daß am Kranz ebenfalls ein Biegemoment auftritt.

Das Moment zu 1. beträgt etwa $\frac{2}{3} \cdot P_1 \cdot y$, das zu 2. etwa $\frac{1}{3} \cdot P_1 \cdot y$. Dieser Momente wie des Gleitens wegen ist der Übergang von der Nabe zum Arm und von diesem zum Kranz mit großer Abrundung auszuführen.

Findet der Eingriff an einem Zahn in Armmitte statt, dann erhält der Arm seine größte Beanspruchung. Nimmt man an, daß diese in den Armen gleichmäßig abnimmt, so daß ein gegenüberliegender nichts zur Übertragung beiträgt, dann erhält man beispielsweise bei 6 Armen, Fig. 271

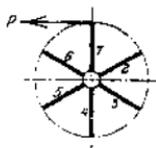


Fig. 271.

Kraft für Arm 4	= 0	Sa. = 0
Kraft für Arm 3 und 5 je	= P'	„ = $2 P'$
Kraft für Arm 2 und 6 je	= $2 P'$	„ = $4 P'$
Kraft für Arm 1	= $3 P'$	„ = $3 P'$
		Sa. = $9 P' = P =$ Umfangskraft.

Mithin entfällt als größte Kraft auf einen Arm $P_1 = 3 P' = \frac{P}{3}$. Bei vier Armen trifft die gemachte Annahme kaum zu, und man legt der Rechnung meist die Bedingung, daß 3 Arme noch die ganze Umfangskraft aufnehmen sollen, zugrunde.

Armquerschnitt meist kreuzförmig oder I-förmig. Bei der Berechnung vernachlässigt man die mit ihrer Mittelebens in die neutrale Faserschicht fallende Rippe und rechnet entweder

$$\frac{2}{3} \cdot P_1 \cdot R = \frac{b_1 \cdot h_1^2}{6} \cdot k_b \quad \text{oder} \quad \frac{2}{3} \cdot P_1 \cdot y = \frac{b_1 \cdot h_2^2}{6} \cdot k_s.$$

Dann verjüngt man den Arm nach dem Kranz zu, obiger Momentenabnahme entsprechend, im Verhältnis $\sqrt{2} : \sqrt{1} = 1,4 : 1 = \infty 1:0,75$.

Die Armzahl nimmt man etwa $= \frac{1}{7}$ bis $\frac{1}{8} \cdot \sqrt{D \text{ mm}}$ mit $D = 2R$. Bei Holzzähnen muß sie ein Vielfaches der Zähnezah, bei geteilten Rädern durch zwei teilbar sein, da die Teilfläche durch eine Zahnücke gehen muß. Um das Tönen schnell laufender Räder zu vermeiden, erhält der Radkörper einen Ausguß aus Blei oder Zement.

Geteilte Räder. Da sich die Nabe am langsamsten abkühlt, entstehen am Übergang von der Nabe in den Arm am ehesten Spannungen, und zwar um so mehr, je größer die Nabe, d. h. das Rad. Um dem zu begegnen, teilt man entweder die Nabe, Fig. 336, oder das Rad. In diesem Falle kann man das Rad entweder in einem Stück gießen und sprengen (stets die Nabe zuerst, da andernfalls der sich zusammenziehende Kranz die Arme an der Nabe abbrechen würde — Sprengflächen an der Nabe nicht zu groß —), wobei die Sprengfläche unbearbeitet bleibt und nicht gedrehte Schrauben verwendet werden können, oder in zwei Teilen gießen, in welchem Fall die Berührungsflächen bearbeitet werden und gedrehte Schrauben oder Paßstifte zu verwenden sind. Hierbei ist bei Modellguß nur ein halbes Modell erforderlich, dagegen kommen die Bearbeitungskosten für die Teilflächen hinzu. Teilung meist im Arm.

Kleinere unbearbeitete Räder erhalten Bordscheiben, wenn die normale Nabenstärke nicht mehr ausführbar. Die Zahnbreite ist dann etwa 10 mm größer als die des eingreifenden Rades zu nehmen, da die Ecken nicht gut aus-zuputzen sind.

Beispiele. Fig. 272: Innenverzahnung, Fig. 273: Rohhautritzel, hergestellt aus Rohleder, das unter hohem Druck zusammengepreßt wird. In einer der beiden Bordscheiben werden etwa drei Zähne (entsprechend der Länge der Eingriffslinie) mit herausgefräst, um das Ritzel einbringen zu können. Eingreifendes Rad meist aus Grauguß und ca. 5 mm schmaler. Will man beide Räder gleich breit machen, so müssen beide Bordscheiben mit gefräst werden. Ist die Zähnezah

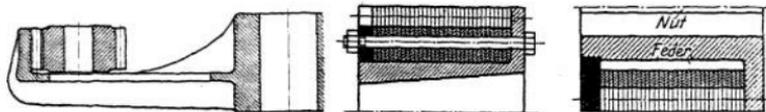


Fig. 272.

Fig. 273.

Fig. 274.

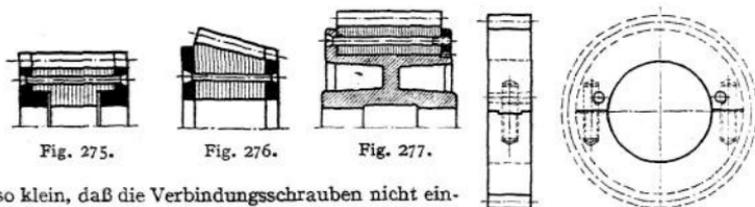


Fig. 275.

Fig. 276.

Fig. 277.

Fig. 278.

so klein, daß die Verbindungsschrauben nicht einzubringen sind, dann legt man etwa 3 Federn ein und schraubt die Bordscheibe davor, Fig. 274. Nabe konisch bei großem v oder auf konischer Büchse montiert. Andere Beispiele Fig. 275 bis 277, 278: geteiltes Rad. Fig. 279 und 280: großes Rad geteilt, so daß tangentialer Spielraum durch Verspannen infolge Anziehens der Tangentialkeile bzw. der Schrauben = 0 (Patent Duffing). Fig. 281: Stirnschnecken- oder Rabitzgetriebe¹⁾ für Übersetzungen bis 1 : 30, kleines Rad bis zu drei Zähnen ausführbar. ²⁾ besser als beim Schnecken- und Grissongetriebe. Fig. 282 bis 284: konische Räder, letztere mit schraubenförmigen Zähnen¹⁾. Fig. 285 und 286 zeigen die Be-

¹⁾ Ausführung der Zahnräderfabrik vorm. Renk, Augsburg.

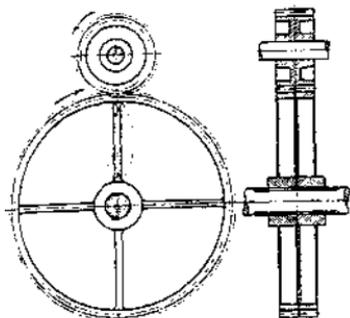


Fig. 279.

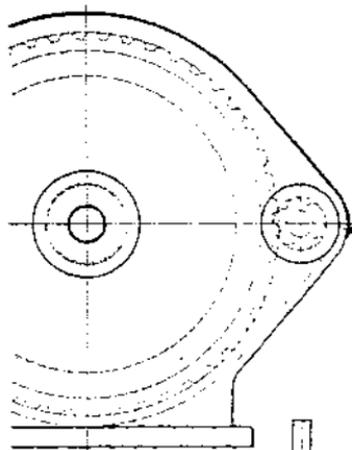


Fig. 280.

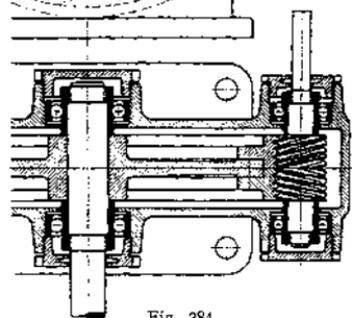


Fig. 281.

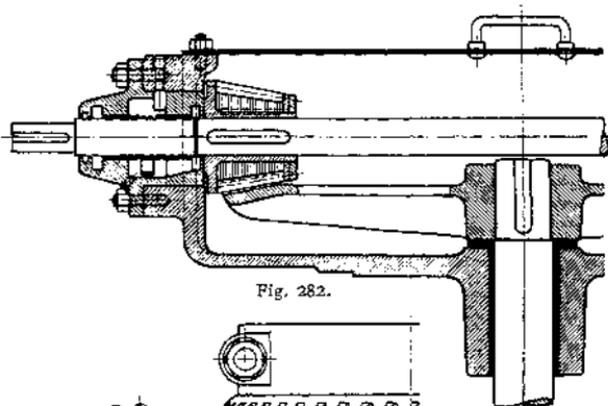


Fig. 282.

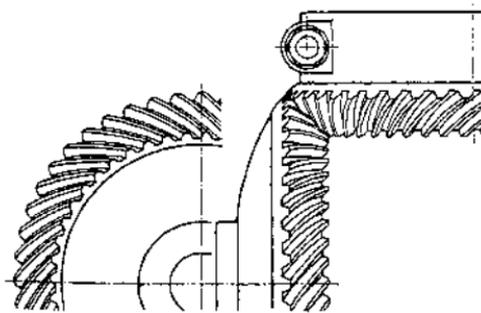


Fig. 283.

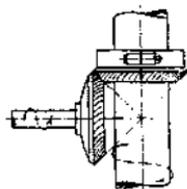


Fig. 284.

festigung von Holzzähnen mittels Splint bzw. Dübel a ; Fig. 287: Kegelrad. Welle abgesetzt, um den Achsdruck in horizontaler Richtung aufnehmen zu

können. Vom Normaldruck $\mathfrak{N} = \frac{\text{Umfangskraft}}{\sin \alpha}$ (bei Evolventen $= \frac{P}{\sin \alpha}$) fällt

in Längsachse Zahn der Wert CA , daraus die Horizontalkomponente CH , wozu noch eine Komponente von $\mu \cdot \mathfrak{N}$ kommt. $CH = CA \cdot \sin \alpha_1 = P \cdot \text{ctg} \alpha \cdot \sin \alpha_1$ beispielsweise bei Evolventen für das kleinere Rad der Fig. 258. Ausführung

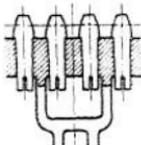


Fig. 285.

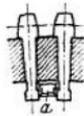


Fig. 286.

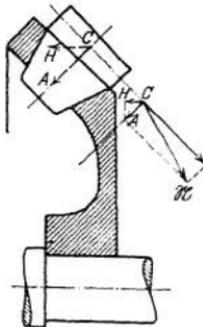


Fig. 287.

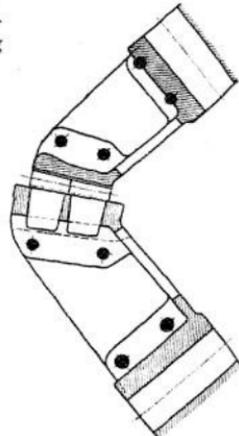


Fig. 288.

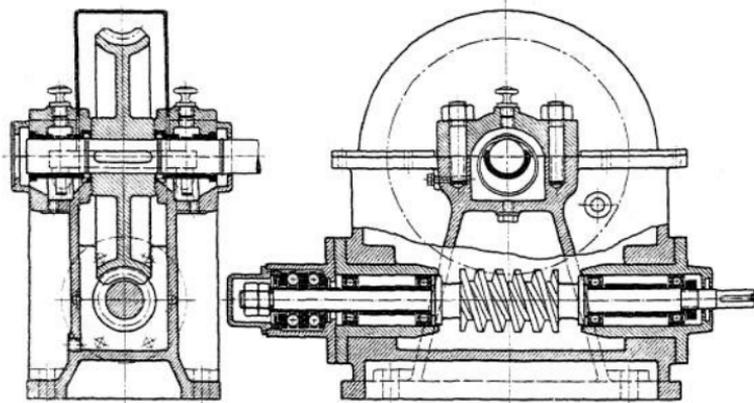


Fig. 289.

breiter Räder zeigt Fig. 288. Fig. 289¹⁾: Schneckengetriebe mit unten im Öltrog laufender Schnecke; bei großer Geschwindigkeit würde jedoch das Öl durch die Zentrifugalkraft nach außen geschleudert werden, deshalb läßt man in diesem Fall das Rad in das Öl tauchen, wobei die Zähne schöpfend Öl mit an die Schnecke bringen, das sich beim Herunterfließen abkühlt und unten im ruhigen Öl die Ablagerung von Schmutz nicht hindert. Schmiermaterial: Zylinderöl ev. mit Zusatz von Graphit. Fig. 290¹⁾: Schnecke gehärtet, geschliffen und poliert aus bestem Stahl oder besser aus naturhartem Stahl, da beim Härten die

¹⁾ Ausführung der Zahnradfabrik vorm. Renk, Augsburg.

Schnecke sich verzieht und länger wird. Gehäuse geteilt, um das Rad einbringen zu können. Fig. 291¹⁾: Rad mit warm aufgezoogenem Bronzekranz; Schrauben

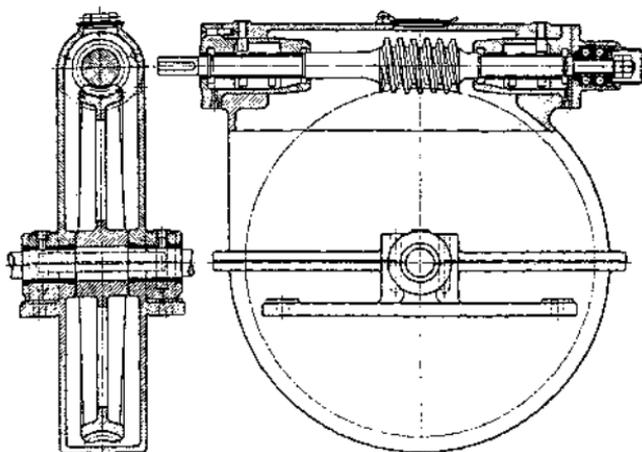


Fig. 290.

zur Sicherung. Fig. 292: Grissongetriebe; Sonderfall der Triebstockverzahnung, kleines Rad schrupft zu einem Daumen zusammen. *A* wirkt in der gezeichneten Stellung auf *a*, nach 90° bis ∞ 270° Drehung *B* auf *b*, dann *A* auf *c*, so daß nach 360° *c* an Stelle von *a* tritt, d. h. bei den 6 Rollenpaaren der Figur $i = 1:6$; ausführbar innerhalb der Grenzen 1:5 bis 1:50. Es ist sowohl Übersetzung ins Langsame wie ins Rasche möglich. $\eta = 0,7-0,95$ bei Übersetzung ins Schnelle bzw. Langsame. Infolge seiner Empfindlichkeit wird Grissongetriebe durch Bauart nach Fig. 281 verdrängt.

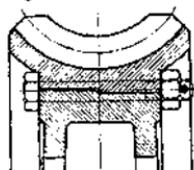


Fig. 291.

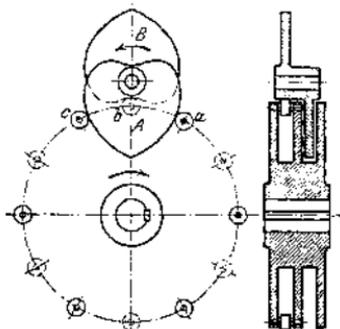


Fig. 292.

Beispiel: Eine Welle soll 20 PS bei $n = 32$ abgeben und von einem Motor $n = 960$ einmal mittels doppelter Stirnräderübersetzung, alternativ mittels Schneckenvorgelege angetrieben werden, Fig. 293 und 294.

1. Rohhaut/Grauguß bearbeitet bzw. Grauguß/Grauguß unbearbeitet gewählt.

$$i = \frac{32}{960} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = i_1 \cdot i_2;$$

letztere Übersetzung größer, damit die Zwischenwelle möglichst schnell läuft, mithin ein kleineres M_d erhält, also leichtere Räder.

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 = 0,97 \cdot 0,94 = 0,91.$$

$$\text{Motor } N = \frac{20}{0,91} \cdot 22 \approx 25 \text{ PS; maximal} \\ = 2,5 \cdot 25 = 62,5 \text{ PS.}$$

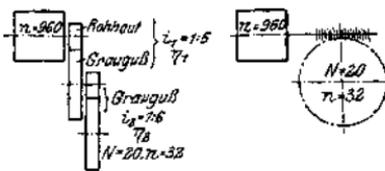


Fig. 293.

Fig. 294.

¹⁾ Ausführung der Zahnradfabrik vorm. Renk, Augsburg. Taschenbuch.

Rohhaut: im Betrieb $k_b = 100$, mithin ist dieses maßgebend, da $k_{b\max} = 2,5 \cdot 100 = 250 < 450$; $\beta = 3$, $z_1 = 16$ angenommen.

$$M_d = 71\,620 \cdot \frac{N}{n} = 71\,620 \cdot \frac{25}{960} = 1890 \text{ cmkg.}$$

$$\frac{t}{\pi} = 1,22 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{k_b} \cdot \frac{M_d}{z_1}} = 1,22 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1890}{16}} = 0,894 \approx 0,9 \text{ cm} = 9 \text{ mm}$$

mithin:

$$z_1 = 16, \quad \varnothing = 16 \cdot \frac{t}{\pi} = 16 \cdot 9 = 144 \text{ mm}, \quad b = 3 \cdot t + 5 \text{ mm} = 3 \cdot 9 \cdot \pi + 5 = 85 + 5 = 90 \text{ mm}$$

$$z_2 = 80, \quad \varnothing = 80 \cdot \frac{t}{\pi} = 80 \cdot 9 = 720 \text{ mm}, \quad b = 3 \cdot t = 3 \cdot 9 \cdot \pi = 85 \text{ mm.}$$

Vorgelege: $k_{b\max} = 120$, $\beta = 3$, $z_1 = 12$ angenommen:

$$M_d = \frac{1}{i_1} \cdot 1890 \cdot \eta_1 = 5 \cdot 1890 \cdot 0,97 = 9150 \text{ cmkg}$$

$$\frac{t}{\pi} = 1,47 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{k_b} \cdot \frac{M_d}{z_1}} = 1,47 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{120} \cdot \frac{9150}{12}} = 1,89 \approx 1,9 \text{ cm} = 19 \text{ mm}$$

mithin:

$$z_1 = 12, \quad \varnothing = 12 \cdot 19 = 228 \text{ mm}, \quad b = 3 \cdot t = 3 \cdot 19 \cdot \pi = \approx 180 \text{ mm}$$

$$z_2 = 6 \cdot 12 = 72, \quad \varnothing = 72 \cdot 19 = 1368 \text{ mm}, \quad b = 180 \text{ mm.}$$

Räder sind jetzt zu zeichnen und Eingriffslinie und -dauer aus der Zeichnung festzustellen.

2. alternativ Schneckenvorgelege; Schnecke zweigängig angenommen, Rad mit Bronze-kranz, η -Schnecke = 0,78 vorläufig geschätzt, mithin

$$\text{Motor } N = \frac{20}{0,78} = 25,7 \text{ PS, zur Sicherheit } 30 \text{ PS angenommen.}$$

$i = \frac{32}{960} = \frac{1}{30}$, $\beta = 2,5$ vorläufig geschätzt, Schnecke gedreht, Zähne geschnitten, k_b im Betrieb = 400 kg/qcm möge maßgebend sein. Mit η -Lager = 0,95 ist für das Schneckenrad

$$M_d = 71\,620 \cdot \frac{N}{n} = 71\,620 \cdot \frac{0,95 \cdot 0,78 \cdot 30}{32} = 49\,700 \text{ cmkg,}$$

mithin

$$\frac{t}{\pi} = 1,22 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2,5} \cdot \frac{1}{400} \cdot \frac{49\,700}{2 \cdot 30}} = 1,22 \cdot \sqrt[3]{0,83} = 1,15 \approx 1,2 \text{ cm} = 12 \text{ mm;}$$

damit für das Rad

$$z = 2 \cdot 30 = 60, \quad \varnothing = 60 \cdot 12 = 720 \text{ mm.}$$

Jetzt ist die Schnecke zu entwerfen $\beta = 2,5$ zu kontrollieren, desgl. η abhängig von dem gewählten Durchm. der Schnecke.

Teilung t mm	4 Arme			6 Arme			8 Arme			10 Arme		
	α	β	γ									
15	0,03	—	0,3	0,04	—	0,5	0,05	—	1,1	0,07	—	1,3
20	0,08	—	0,8	0,10	—	1,3	0,13	—	2,3	0,15	—	3,4
25	0,15	0,01	1,5	0,20	0,01	3,2	0,25	0,01	4,9	0,30	0,01	6,5
30	0,25	0,01	2,7	0,34	0,01	5,2	0,43	0,01	8,5	0,51	0,01	11,1
35	0,40	0,01	4,3	0,54	0,01	8,0	0,68	0,01	12,6	0,81	0,01	17,2
40	0,60	0,01	5,5	0,81	0,01	12,7	1,01	0,02	19,9	1,21	0,02	26,2
45	0,86	0,02	8,1	1,15	0,02	17,5	1,44	0,02	28,0	1,73	0,02	37,3
50	1,18	0,02	11,5	1,58	0,02	24,7	1,98	0,03	38,0	2,38	0,03	51,2
55	1,56	0,02	15,6	2,10	0,03	33,3	2,63	0,03	51,0	3,16	0,03	67,4
60	2,03	0,03	20,5	2,72	0,03	42,0	3,41	0,04	65,5	4,10	0,04	88,8
65	2,58	0,03	24,8	3,46	0,04	54,1	4,34	0,04	83,4	5,22	0,05	112,7
70	3,22	0,04	31,4	4,32	0,05	68,1	5,42	0,05	104,1	6,52	0,05	141,4
75	3,97	0,05	39,3	5,32	0,05	83,7	6,67	0,06	128,3	8,02	0,06	172,7
80	4,81	0,05	46,2	6,42	0,06	102,0	8,09	0,07	155,8	9,73	0,07	209,6
85	5,77	0,06	56,2	7,74	0,07	122,2	9,70	0,07	186,1	11,67	0,08	252,0
90	6,85	0,07	67,6	9,19	0,07	144,9	11,52	0,08	222,3	13,85	0,09	299,7
95	8,06	0,07	77,8	10,80	0,08	170,4	13,55	0,09	260,6	16,29	0,10	353,2
100	9,40	0,08	92,0	12,60	0,09	198,0	15,80	0,10	304,0	19,00	0,11	410,0

Bei der Berechnung der Gewichte kann annähernd der über den Teilkreis hervorragende Teil des Zahnes = Lücke unterhalb des Teilkreises gesetzt werden, oder man verwendet die Gleichung: Gewicht in kg = $z \cdot (\alpha + \beta \cdot b) - \gamma$ kg, wobei für gußeiserne Stirnräder mit geraden Zähnen α, β, γ der vorstehenden Tabelle von Otto Gruson & Co., Magdeburg-Buckau, zu entnehmen sind, z = Zähnezah, b = Zahnbreite. Die gleichen Werte gelten auch annähernd für Holzkammräder, Schraubenräder und Stirnräder mit Winkelzähnen. Kegellräder sind um ca. 10% leichter, Stahlgußräder um ca. 13% schwerer.

XI. Reibungsräder.

Werden zwei Räder unter Fortfall der Verzahnung aneinander gedrückt, so kann die Reibung am Umfange des einen Rades zur Mitnahme des anderen benutzt werden. Es sind mithin sämtliche Räderformen als Reibungsräder ausführbar. Die Umfangskraft dieser Räder ist jedoch nur gering; eine Erhöhung kann durch Anordnung von Keilnuten erfolgen. Bei glatten Rädern läßt sich eine Änderung der Übersetzung leicht erzielen, wenn die Lage des einen Rades gegenüber dem anderen geändert wird. Die Umfangsgeschwindigkeiten stimmen auch hier genau nur im Teilkreis überein; hierdurch ist — außer bei glatten Stirnrädern — starke Abnutzung bedingt. Die Größe der Berührungsflächen ist damit in einer Richtung stets beschränkt.

Beispiele zeigen: Fig. 295: Stirnräder mit fester Übersetzung. Die Umfangskraft pro cm Radbreite wählt man hier für

$$\text{Grauguß/Grauguß etwa } p = \frac{P}{b} = 20 \text{ bis } 30 \text{ kg,}$$

$$\text{Grauguß/Leder „ „ } = 15 \text{ bis } 25 \text{ kg,}$$

$$\text{Grauguß/Papier „ „ } = 15 \text{ kg.}$$

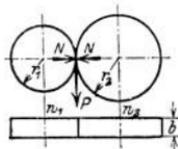


Fig. 295.

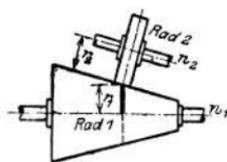


Fig. 296.

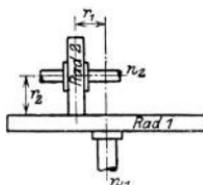


Fig. 297.

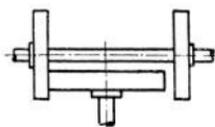


Fig. 298.

Fig. 296 und 297: Räder mit veränderlicher Übersetzung, Rad 1 oder 2 treibend; Fig. 298: Wendegetriebe. Bei allen beträgt die übertragbare Umfangskraft

$$P \approx \mu \cdot N,$$

wenn N der Normaldruck, mit dem die Räder aufeinander gepreßt werden. Übersetzung

$$i = \frac{r_1}{r_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Fig. 299: Keilräder, meist mit 3 bis 5 Rillen ausgeführt. Hier gilt

$$P \approx 2 \cdot \mu \cdot N,$$

wobei die Räder mit der Kraft Q aufeinander gepreßt werden, die sich zu

$$Q = 2 \cdot (N \cdot \sin \alpha + \mu \cdot N \cdot \cos \alpha) \text{ ergibt.}$$

Damit

$$P = \frac{\mu \cdot Q}{\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha}.$$

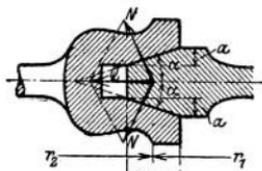


Fig. 299.

Bei Grauguß/Grauguß wählt man meist $\alpha = 15^\circ$, $e = 10$ bis 12 mm und die Anpressungskraft pro cm Projektionslänge der Berührungslinie

$$p_0 = \frac{Q_0}{2a} = 120 \text{ bis } 130 \text{ kg/cm,}$$

wenn bei z Rillen per Rolle $Q_0 = \frac{Q}{z}$ entfällt. Damit

$$P \cong \frac{\mu \cdot 2 \cdot a}{\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha} \cdot p_0 \cdot z,$$

z. B. $\alpha = 15^\circ$, $\mu = 0,12$, $e = 1,2 \text{ cm}$:

$$a = e \cdot \operatorname{tg} 15^\circ = 1,2 \cdot 0,268 = 0,32,$$

$$P \cong \frac{0,12 \cdot 2 \cdot 0,32}{0,26 + 0,12 \cdot 0,97} \cdot p_0 \cdot z \cong 0,20 \cdot p_0 \cdot z.$$

Fig. 300: glatte Kegelhäder mit

$$P \cong \mu \cdot N \cong \frac{\mu \cdot Q}{\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha}.$$

Dabei ist α durch die Übersetzung bedingt:

$$i = \frac{r_1}{r_2} = \operatorname{tg} \alpha.$$

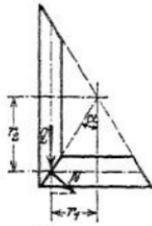


Fig. 300. Bei Grauguß/Grauguß ist etwa $\mu = 0,1$ bis 0,15
 „ Grauguß/Papier „ „ $\mu = 0,15$ bis 0,20
 „ Grauguß/Leder „ „ $\mu = 0,20$ bis 0,30
 „ Grauguß/Holz „ „ $\mu = 0,30$ bis 0,5

Grauguß/Stahl arbeitet nicht gut. Die Räder aus Papier, Leder und Holz werden ähnlich Fig. 273 bis 277 durch Aufeinanderlegen bzw. -leimen von Scheiben dieser Stoffe hergestellt und stets für den Antrieb verwandt, damit etwaiges Schleifen beim Anlauf kein Unrundwerden zur Folge hat. Holz hat großen Verschleiß. Die Montage hat besonders sorgfältig zu geschehen; die Räder sind entweder nach dem Aufkeilen abzdrehen oder auf konischen Spannhülsen (Fig. 204 und 205) anzuordnen.

XII. Kettenräder.

Sie finden Verwendung für Achsenentfernungen, die für Übertragung mittels Zahnäder zu groß, für Riemenübertragung zu klein sind; letzterer gegenüber haben Ketten den Vorteil der Unempfindlichkeit gegen Feuchtigkeit und Wärme.

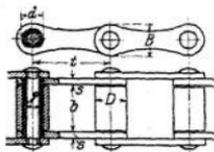


Fig. 301.

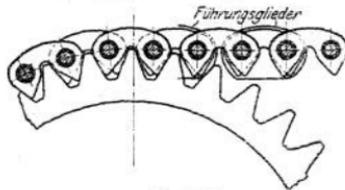


Fig. 302.

Die Ketten werden meist entweder als Rollenketten, Fig. 301, oder als Zahnketten (Renoldketten), Fig. 302, ausgeführt (letztere von Friedr. Stolzenberg & Co., Berlin-Reinickendorf). Mit zunehmendem Achsenabstand wächst die Lebensdauer der Kette, da die Abnutzung sich auf eine größere Anzahl Glieder verteilt. Zweckmäßig ist eine Achse verschiebbar anzuordnen, um die Längenänderungen auszugleichen. Wenn dies nicht möglich, kann ein Spannräder ähnlich dem Lenix-Getriebe, Fig. 306, angeordnet werden. Auch lotrechter Antrieb ist ausführbar; hierbei machen sich Längenänderungen stärker bemerkbar als bei wagerechter Anordnung, bei welcher der Durchhang der Kette das genaue Auflaufen begünstigt. Für Schmierung genügt meist Tropfschmierung; bei

Zahnketten muß dabei das Öl auf die verzahnte Seite der Kette fallen. In Räumen mit Staub- und Schmutz oder im Freien ist ein Schutzgehäuse vorzusehen; bei $v > 6,5$ m/sek soll die Kette in einem Ölbad laufen. Je geringer die Geschwindigkeit der Kette, um so schwerer wird sie; mit zunehmender Geschwindigkeit wächst die Abnutzung; am besten etwa $v = 6$ m/sek für Zahn- und $= 4$ m/sek für Rollenketten. Je kleiner die Zähnezahzahl der Räder, um so größer der Drehwinkel der Glieder und damit die Abnutzung an den Bolzen; daher große Zähnezahzahl anzustreben. Ungenauigkeiten in der Montage machen sich durch schnellen Verschleiß bedeutend stärker als bei Riemen bemerkbar. Bei ungerader Gliederzahl sind besondere Zwischenstücke vorzusehen, z. B. Fig. 303 für Zahnketten.

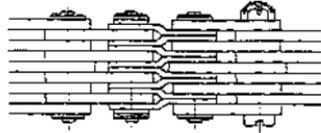


Fig. 303.

Rollenketten eignen sich für i bis 1:7, wobei $10 \leq z \leq 70$ ($z =$ Zähnezahzahl des Rades) und der Achsenabstand $\leq 1,5 \times$ Durchmesser des großen Rades ≤ 3 bis 4 m. Die Verzahnung ist als Triebstockverzahnung nach S. 653 zu konstruieren.

Zahnketten wandern leichter auf den Zähnen nach außen, haben deshalb vor Rollenketten den Vorzug, daß sich Längenänderungen nicht so stark bemerkbar machen. Sie eignen sich für i bis 1:6,5 (ausnahmsweise 1:8), wobei $15 \leq z \leq 100$. Achsenabstand im Mittel $= 50 \times$ Teilung. Verzahnung: Zahnstangenverzahnung. Führung entweder seitlich an den Bolzenköpfen oder durch besondere Führungsglieder, die meist in Lücken zwischen die geteilten Zähne eingreifen.

Rollenketten von Otto Kötter, Barmen.

Zulässige Beanspruchung	kg	100	150	200	250	300	350	400	500	600	700
Teilung	mm $t =$	30	35	40	45	50	55	60	65	70	80
Rollendurchmesser	mm $D =$	12	15	15	18	20	23	23	26	28	31
Hülsendurchmesser	mm $d =$	8	10	10	12	14	14	17	18	20	23
Bolzendurchmesser	mm $b =$	5	7	7	8	9	9	11	12	14	17
lichte Weite	mm $b =$	18	20	24	26	30	32	35	40	45	50
Plattenbreite	mm $B =$	12	15	17	20	22	25	27	30	32	36
Plattendicke	mm $s =$	2½	3	3	3½	4	4	4½	4½	5	5
Gewicht pro m	kg	1,060	1,506	1,790	2,450	3,030	3,750	3,990	5,100	5,870	6,350

Ist der Achsenabstand noch größer als der der Kettenräder, so verwendet man den

XIII. Riemen- bzw. Seiltrieb.

Gegenüber den Kettenrädern und noch mehr den Zahnrädern ist hier die Winkelgeschwindigkeit der getriebenen Welle nicht genau durch die der treibenden bestimmbar.

1. Allgemeines.

Es bezeichnen:

S_1 die Spannkraft des ziehenden Trumes in kg,

S_2 die Spannkraft des unbelasteten Trumes in kg,

e die Basis des natürlichen Logarithmus $= 2,718$,

μ die Reibungsziffer zwischen Scheibe und dem die Kraft übertragenden Faden (Riemen oder Seil),

α den vom Faden an der kleineren Scheibe umspannten Bogen in Bogenmaß (s. S. 71),

P die zu übertragende Umfangskraft in kg,

v die Geschwindigkeit des Fadens in m/sek.,

q das Gewicht des Fadens in kg pro lfdm (spez. Gewicht von Lederriemen $\gamma = 0,9-1,1$),

δ die Stärke des Fadens (Durchm. des Seiles bzw. Stärke des Riemens) in cm,

E den Elastizitätsmodul des Fadens (Lederriemen $= 1250$ kg/qcm im neuen Zustand wachsend bis 2250 kg/qcm für alte Riemen).

dann ist (s. S. 312) bei der Anordnung nach Fig. 304 für kleinere und mittlere Geschwindigkeiten

$$S_1 = S_2 \cdot e^{\mu \alpha}$$

oder

$$S_1 - S_2 = S_2 \cdot (e^{\mu \alpha} - 1) = S_1 \cdot \frac{e^{\mu \alpha} - 1}{e^{\mu \alpha}} = P,$$

d. h. die übertragbare Kraft P ist gleich der Differenz der Seilspannungen, unabhängig von dem Durchmesser der Scheiben. Dieser hat mithin nur Einfluß auf die Flächenpressung (und damit auf die Abnutzung) und Biegungsspannungen im Faden. Tabelle für $e^{\mu \alpha}$ s. S. 313. Es muß also im unbelasteten Trum mindestens eine Spannung S_2 herrschen, damit im ziehenden die Spannung S_1 auftritt. Diese Spannung S_2 kann erzeugt werden:

1. Durch das Eigengewicht des Fadens, wenn beide Scheiben etwa in einer Horizontalen liegen. In diesem Fall bestimmt sich genügend genau der Durchhang in dem beliebigen Abstände m und n von den Scheibenmitten (s. Fig. 304) aus der Beziehung:

$$h = \frac{q \cdot m \cdot n}{2 \cdot S_2},$$

worin h , m und n in Metern zu nehmen sind; daraus die Fadenspannung

$$S_2 = \frac{q \cdot m \cdot n}{2 \cdot h};$$

ebenso für das ziehende Trum

$$h' = \frac{q \cdot m' \cdot n'}{2 \cdot S_1} \quad \text{bzw.} \quad S_1 = \frac{q \cdot m' \cdot n'}{2 \cdot h'}.$$

2. Durch Spannen des Fadens von vornherein (Betrieb mit Dehnungsspannung). Bei Drahtseilen nicht ausführbar. Mittel anwendbar, wenn der Achsenabstand so klein oder die Abweichung der Scheibenmitten aus der horizontalen Lage (s. Fig. 305) [Grenzfall bildet die lotrechte Lage] so groß wird, daß das Eigengewicht die Spannung S_2 nicht mehr hervorrufen kann. Das öftere Nachspannen, das nur durch Herausnahme eines Fadestückes möglich ist, sowie bei Riemen und Hanfseilen die Längenänderungen und damit Spannungsänderungen, hervorgerufen durch die wechselnde Luftfeuchtigkeit, bilden den Hauptnachteil des Betriebes mit Dehnungsspannung.

Auch müssen die Lager und Wellen mit Rücksicht auf die größere Anfangsspannung reichlich bemessen werden.

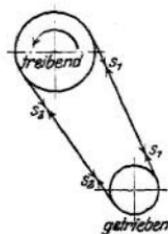


Fig. 305.

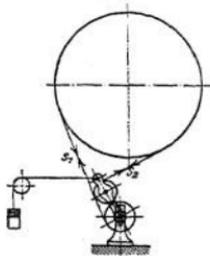


Fig. 306.

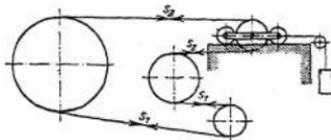


Fig. 307.

3. Durch besondere Spannvorrichtungen (Betrieb mit Belastungsspannung); Beispiel: Lenix-Getriebe, Fig. 306; ferner Anordnung nach Fig. 307. Nachteil:

Biegung des Fadens nach zwei Seiten verkürzt seine Lebensdauer, bedingt Kraftverluste und setzt schließlich beim Riemenantrieb eine nicht überstehende Riemenverbindung voraus. Vorteil: stets gleiche Lagerbelastung, Riemen leicht aufzulegen.

Um die Spannungen S_1 und S_2 im Betriebe zu erhalten, legt man bei Anordnung nach 2. den Faden von vornherein mit der Vorspannung

$$S_0 = \frac{S_1 + S_2}{2}$$

auf; mithin ist der Achsdruck während des Stillstandes $= \infty 2 \cdot S_0$, womit die Lager zu berechnen sind. Die infolge der Zentrifugalkraft während des Betriebes auftretende Spannung $\frac{q \cdot v^2}{g}$ (S. 692) ersetzt einen Teil der Vorspannung S_0 , so daß der Achsdruck im Betriebe um $2 \cdot \frac{q \cdot v^2}{g}$ sinkt. Ist die Spannung $\frac{q \cdot v^2}{g} =$ Vorspannung, dann wird der Achsdruck $= 0$; wird sie noch größer, so hat der Riemen das Bestreben, sich von der Scheibe abzuheben. Mit wachsendem Scheibendurchmesser nimmt der Achsdruck zugleich mit der Umfangskraft ab.

$$\text{Aus } S_1 = P + S_2 = P + 2 \cdot S_0 - S_1 \text{ folgt } S_1 = S_0 + \frac{P}{2},$$

d. h. die Spannung im ziehenden Trum = Vorspannung + halbe Nutzspannung.

Den ziehenden Faden legt man meist nach unten, da sein Durchhang kleiner ist und der umspannte Bogen α , mithin auch $\frac{S_0}{S_1}$, dann größer wird (vgl. Fig. 304). Es läuft dann der unbelastete Faden auf die getriebene Scheibe auf; bei kurzem Achsenabstand schleudert die Zentrifugalkraft bei schnell laufenden Trieben mit Hanf- und Baumwollseilen diese nach außen, weshalb man in diesem Falle meist das ziehende Seil nach oben legt.

Das Übersetzungsverhältnis beträgt bei gleichmäßigem Faden (Fig. 308)

$$i = \frac{r_1 + 0,5 \cdot \delta}{r_2 + 0,5 \cdot \delta} \cdot (1 - \psi'),$$

wobei $(1 - \psi')$ für Riemen $= 0,97 - 0,98$, für Drahtseile $= 0,99$ die Gleitverluste berücksichtigt; d. h. die getriebene Scheibe hat eine um 1—3% geringere Umfangsgeschwindigkeit als die treibende. Ist δ klein gegen r_1 und r_2 so folgt annähernd:

$$i = \frac{r_1}{r_2}.$$

Die Arbeitsverluste sind bedingt durch Zapfenreibung, Gleitverluste und Verlust durch Riemen-, bzw. Seilsteifigkeit; zusammen für Riemen etwa 3—4%, so daß der Wirkungsgrad $\eta = 0,96 - 0,97$.

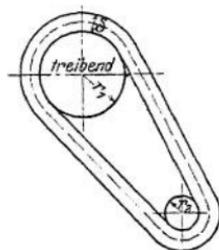


Fig. 308.

2. Der Riemetrieb.

a) Der Riemen.

Riemen meist aus Ochsenleder oder Rindleder, seltener Kuhleder. Die Häute haben bis etwa 100 mm von der Rückenmitte aus eine Stärke von 5 mm, zunehmend bis 8 mm in etwa 400 mm Entfernung. Das beste Leder ist das aus der Nähe der Wirbelsäule, Kernleder genannt. Mithin sind einfache Riemen bis zu einer Breite von 800 mm (Kanten eventuell verstärkt nach Fig. 309) und solche aus Kernleder bis 200 mm Breite möglich. Genügt ein solcher einfacher Riemen nicht, so ist er aus zwei Lagen herzustellen: Doppelriemen. Dieser hat den Nachteil, daß er nicht so biegsam wie der einfache ist, mithin weniger als das Doppelte des einfachen überträgt. Breite beliebig. Die aus den Seiten-



Fig. 309.

teilen geschnittenen Riemen längen sich stärker als die der Mitte entnommen; sonach muß bei schnellaufenden Riemen stets

Mitte Riemen = Mitte Wirbelsäule

sein.

Die einzelnen Riemenstücke werden durch Leimen oder Nähen aneinander gesetzt, ebenso wird die Schlußverbindung des fertigen Riemens hergestellt. Der geleimte Riemen läuft am ruhigsten, hat aber den Nachteil, daß die Verbindung in feuchten Räumen leicht aufweicht. In diesem Fall wird er besser außerdem genäht. Weniger zweckmäßig ist der stumpf genähte Riemen, Fig. 310. Andere Verbindungsformen zeigen die Fig. 311 bis 317, die

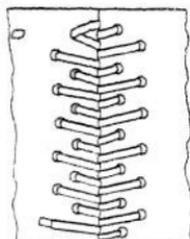


Fig. 310.

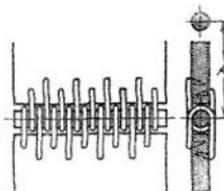


Fig. 311.

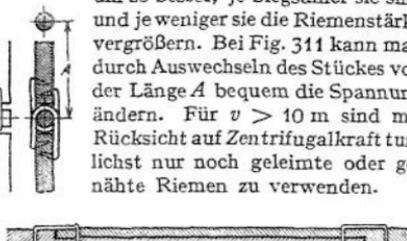


Fig. 312.



Fig. 313.



Fig. 314.



Fig. 315.

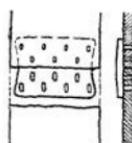


Fig. 316.

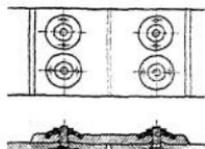


Fig. 317.

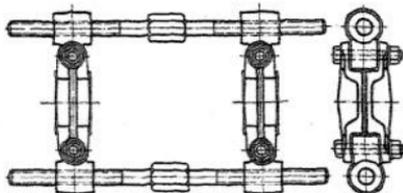


Fig. 318.

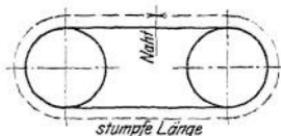


Fig. 319.

Riemen bis 100 mm Breite werden nach Fertigstellung der Schlußverbindung aufgebracht; bei breiteren empfiehlt sich dieses nicht, sie werden mittels der Spannvorrichtung, Fig. 318, gespannt, und darauf erst wird die Schlußverbindung hergestellt.

Bei der Riemenlänge sind zu unterscheiden: stumpfe Länge = Konstruktionslänge (Fig. 319) und Länge der Bestellung = Konstruktionslänge + 100 bis 300 mm Zugabe für die Naht.

Die Verlängerung infolge der Spannung $\frac{S_0}{\text{Querschnitt}}$ kann meist vernachlässigt werden.

Vor allem infolge des hohen Lederpreises hat man auch wohl zu anderen Materialien gegriffen und verwendet Balatarriemen (Hanf oder Baumwolle in Balatamasse eingebunden, das ist der verarbeitete Saft des in Guayama einheimischen Sternapfelbaumes), ferner Riemen aus Baumwolle (die sich stärker dehnen und auch mehr von der Luftfeuchtigkeit beeinflusst werden als Lederriemen), Gummi,

Hanf und aus Kamelhaaren, sowie Stahlbänder, deren Schlußverbindung Fig. 320 zeigt. Zweck der Krümmung ist, tangentialen Lauf zu gestatten. Fig. 321 veranschaulicht einen Gliederriemen, ähnlich einer Gelenkkette aus einzelnen Lederlaschen zusammengesetzt. Verwendung findet er bei kleinerem Achsenabstand mit großer Übersetzung.

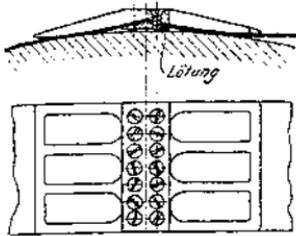


Fig. 320.

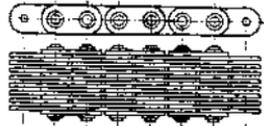


Fig. 321.

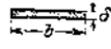


Fig. 322.

Für mittlere Verhältnisse kann der Riemenquerschnitt aus der Beziehung (Fig. 322) $S_1 = b \cdot \delta \cdot k_2$ berechnet werden, wobei $K_2 = 250$ für neue Riemen steigend bis 450 kg/qcm für alte Riemen, demgemäß $k_2 = 20$ bis 30 kg/qcm zu wählen ist. Wählt man als Mittelwert für gußeisnerne Scheiben $\mu = 0,25$ und $\alpha = 2,8$, so nimmt die Gleichung, S. 678, den Wert an

$$S_1 = P \cdot \frac{e^{\mu \alpha}}{e^{\mu \alpha} - 1} = 2 P.$$

Da $S_1 - S_2 = P$, folgt $S_2 = P$, sonach wird übereinstimmend mit der früheren Angabe der Lagerdruck $= 3 P$.

Man kann infolgedessen statt mit der tatsächlichen Beanspruchung auch mit einem Wert $k =$ übertragbarer Kraft pro qcm Riemenquerschnitt $= \frac{k_2}{2}$ rechnen und erhält:

$$P = b \cdot \delta \cdot k,$$

mit $k = 10$ bis 15 kg/qcm in obigen Fällen.

Der unteren Grenze muß man sich dabei bei kleinem Durchmesser sowie starker Wölbung der Scheiben nähern, da die äußeren Riemenfasern stärker beansprucht werden; ferner bei kleinem Achsenabstand, damit ein Nachspannen nicht so leicht erforderlich wird. Bei der Übersetzung ins Langsame wird das ziehende Trum um die kleinere Scheibe gebogen, bei der Übersetzung ins Schnelle dagegen das unbelastete. Infolgedessen kommt im ersten Fall die untere Grenze, im letzten die obere in Frage. Dieser kann man sich ferner nähern bei großem v (ausführbar bis 50 m/sek), da der Riemen nicht genügend Zeit hat, der wechselnden Beanspruchung zu folgen, mithin nicht so stark leidet. Außerdem wird der Riemen auf der Scheibe in tangentialer Richtung fortgeschleudert und zieht das folgende Teilchen infolgedessen an die Scheibe, so daß er bei großem v besser durchzieht. Dagegen vermindert die Zentrifugalkraft mit zunehmender Geschwindigkeit die Pressung zwischen Riemen und Scheibe, während sie anderseits die Spannung S_2 ersetzt, so daß S_1 nicht mehr $= S_2 \cdot e^{\mu \alpha}$ sein kann. Diese Einflüsse haben zur Folge, daß der Riemen bei etwa $v = 30$ bis 40 m/sek am besten ausgenützt werden kann.

Großes k_2 bedingt raschen Verbrauch des Riemens.

Ein Doppelriemen ist der geringen Biegsamkeit wegen um 10—20% schwächer zu belasten; halb geschränkte mit Rücksicht auf die Beanspruchung infolge der Verdrehung um 5—15% geringer, gekreuzte aus gleichem Grunde um 10—30% weniger. Wird der Riemen durch Riemenleiter geführt und oft verschoben, so ist außerdem noch ein entsprechender Abzug zu machen.

Bei Gummi-, Balata-, Baumwoll- und Haarriemen wählt man $k_z = 15$ bis 20 kg/qcm, bei Stahlbändern $k_z = 600$ bis 800 kg/qcm ($K_z = 150$ kg/qmm, $v = 30$ m/sek). Diese benötigen sonach bedeutend weniger Querschnitt als die übrigen Riemen und haben damit den Vorteil großer Biegsamkeit (Stärke = 0,2—1 mm bei 30—200 mm Breite, Stärke : Breite = 1 : 300 bis 1 : 350), dagegen den Nachteil, daß ein Zerreißen bei ihnen plötzlich eintritt, so daß die freien Enden sehr leicht Beschädigungen herbeiführen. Sie sind deshalb auf das sorgfältigste einzuhüllen und für jedes Band ist ein gleiches in Reserve zu halten, um längere Betriebsstörungen zu vermeiden. Gegen Montagefehler, Durchbiegungen der Wellen, Feuchtigkeit, Öl usw. sind sie im Gegensatz zu Leder- und den übrigen Riemen ganz unempfindlich. Die ohne Wölbung auszuführenden Scheiben umhüllt man, um größere Reibung zu erhalten, mit einer Korkschiicht ($\mu = 0,25$) und kann durch die Wahl ihrer Stärke die Spannung S_0 genau herstellen. Sie eignen sich vornehmlich für offenen nicht ausrückbaren Betrieb, große Kraft, großen Achsenabstand und langsamlaufende Maschinen, da das Band schnellen Spannungswechsel nicht gut verträgt. Bandlänge mindestens = $\frac{3}{4} \cdot v$ m/sek. Nicht verwendbar für Stufenscheiben, Ausrückung und halb geschränkten Betrieb; bei gekreuztem nur, wenn die Kreuzungsstelle um mindestens den 60- bis 70-fachen Betrag der Bandbreite von jeder Scheibe entfernt ist.

Kolophonium vergrößert zwar die Reibung zwischen Leder und Eisen, jedoch auf Kosten der Haltbarkeit des Riemens.

Da das Seitenleder zwar stärker als das Kernleder ist, aber pro qcm Querschnitt nicht so stark belastet werden darf wie letzteres, kann man statt mit der pro qcm Querschnitt übertragbaren Kraft auch mit der pro cm Riemenbreite übertragbaren rechnen und erhält damit folgende von C. O. Gehrrens, Hamburg, aufgestellte Tabelle:

		Einfache Riemen:						
		$v = 3 \quad 10 \quad 20 \quad 30 \quad 40 \quad 50$ m/sek.						
Scheiben $\varnothing =$		$P =$						
100 mm		2	3	3,5	3,5	3,5	3	kg/cm Breite
200	„	3	5	6	6,5	6,5	6,5	„ „
500	„	6	8	10	11	11,5	12	„ „
1000	„	9	11	13	14	14,5	15	„ „
2000	„	11	13	14	15	15,5	16	„ „
		Doppelriemen:						
500	„	8	11	13	13,5	14	14	„ „
1000	„	13	17	20	22	13	24	„ „
2000	„	17	21	25	28	29	30	„ „

Beispiel: Von einer Transmission $n_1 = 120$ sollen 10 PS auf eine zweite $n_2 = 180$ übertragen werden. Der Scheibendurchmesser der getriebenen Welle sei = 600; mithin der Durchmesser der treibenden Scheibe

$$= 600 \cdot \frac{180}{120 \cdot (1 - \eta)} = 600 \cdot \frac{180}{120 \cdot 0,98} = \infty 900 \cdot \frac{1}{0,98} = \infty 920 \text{ mm}$$

Riemengeschwindigkeit (Scheibendurchmesser = 910 angenommen):

$$v = \frac{0,91 \cdot \pi \cdot 120}{60} = 5,7 \text{ m/sek; (vgl. Tabelle S. 684)}$$

mithin die Umfangskraft

$$P = \frac{75 \cdot 10}{5,7} = \infty 132 \text{ kg; (vgl. Tabelle S. 685)}$$

übertragbare Kraft pro cm Breite = 8 kg angenommen:

$$b = \frac{132}{8} = 16,5 \text{ cm} = 165 \text{ mm Riemenbreite.}$$

Tabelle der Umfangskraft in kg.

$$P = \frac{N \cdot 75}{v} = \frac{716200 \cdot N}{n R}$$

Pferde- stärken	Umfangsgeschwindigkeit in Meter pro Sekunde											
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
1	25	15	11	8,3	6,8	5,8	5	4,4	3,9	3,6	3,3	3
2	50	30	21	17	14	12	10	8,8	8	7	6,5	6
3	75	45	32	25	20	17	15	13	12	11	10	9
4	100	60	43	33	27	23	20	18	16	14	13	12
5	125	75	54	42	34	29	25	22	20	18	16	15
6	150	90	64	50	41	35	30	26	24	21	20	18
7	175	105	75	58	48	40	35	31	28	25	23	21
8	200	120	86	67	55	46	40	35	32	29	26	24
9	225	135	96	75	61	52	45	40	36	32	29	27
10	250	150	108	83	68	58	50	44	39	36	33	30
12	300	180	128	100	82	69	60	53	47	43	39	36
14	350	210	150	117	96	81	70	62	55	50	46	42
16	400	240	172	133	109	92	80	71	63	57	52	48
18	450	270	193	150	123	104	90	79	71	64	59	54
20	500	300	215	166	136	115	100	88	79	71	65	60
25	625	375	270	208	170	144	125	110	99	89	82	75
30	750	450	322	250	205	173	150	132	119	107	98	90
35	875	525	375	292	238	202	175	154	138	125	114	105
40	1000	600	428	334	273	231	200	177	158	143	130	120
45	1125	675	482	375	307	260	225	198	178	161	147	135
50	1250	750	537	417	341	288	250	220	198	178	163	150
60	1500	900	644	500	408	346	300	265	237	214	196	180
70	1750	1050	750	583	477	404	350	309	276	250	228	210
80	2000	1200	858	668	545	462	400	353	316	286	261	240
90	2250	1350	965	750	613	520	450	397	355	321	294	270
100	2500	1500	1070	833	681	577	500	441	395	357	326	300
110	2750	1650	1178	913	749	635	550	485	435	393	358	330
120	3000	1800	1285	1000	817	693	600	529	474	428	391	360
130	3250	1950	1392	1083	885	750	650	573	513	464	424	390
140	3500	2100	1500	1166	954	808	700	617	553	500	457	420
150	3750	2250	1607	1250	1022	865	750	661	592	536	489	450
160	4000	2400	1714	1333	1090	923	800	705	632	572	522	480
170	4250	2550	1820	1417	1160	980	850	750	672	607	554	510
180	4500	2700	1928	1500	1228	1040	900	794	711	643	587	540
190	4750	2850	2035	1583	1296	1098	950	838	750	679	619	570
200	5000	3000	2142	1665	1364	1155	1000	882	790	715	652	600
225	5625	3375	2410	1873	1534	1300	1125	992	889	804	734	675
250	6250	3750	2680	2085	1705	1444	1250	1100	988	893	815	750
275	6875	4125	2945	2290	1875	1588	1375	1214	1086	982	897	825
300	7500	4500	3220	2500	2045	1730	1500	1325	1185	1072	979	900

Tabelle der Umfangsgeschwindigkeit in Meter pro Sekunde.

$$v = \frac{D \pi n}{60}$$

Scheiben- Durch- messer in mm	Umdrehungen in der Minute																	
	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	175	200	225	250	275	300
200	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,8	2,1	2,4	2,6	2,9	3,2
250	0,5	0,7	0,8	0,9	1,1	1,2	1,3	1,4	1,6	1,7	1,8	2,0	2,2	2,6	2,9	3,3	3,6	3,9
300	0,6	0,8	1,0	1,1	1,3	1,4	1,6	1,7	1,9	2,1	2,2	2,4	2,8	3,2	3,6	3,9	4,3	4,7
350	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,2	3,7	4,1	4,6	5,1	5,5
400	0,8	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3	2,5	2,7	2,9	3,2	3,7	4,2	4,7	5,2	5,8	6,3
450	0,9	1,2	1,4	1,7	1,9	2,1	2,4	2,6	2,8	3,1	3,3	3,5	4,1	4,7	5,3	5,9	6,5	7,1
500	1,1	1,3	1,6	1,8	2,1	2,4	2,6	2,9	3,1	3,4	3,7	3,9	4,6	5,2	6,0	6,5	7,2	7,9
550	1,2	1,4	1,7	2,0	2,3	2,6	2,9	3,2	3,5	3,8	4,0	4,3	5,0	5,8	6,5	7,2	8,0	8,7
600	1,3	1,6	1,8	2,2	2,5	2,8	3,2	3,5	3,8	4,1	4,4	4,7	5,5	6,3	7,1	7,5	8,7	9,4
650	1,4	1,7	2,0	2,4	2,7	3,1	3,4	3,8	4,1	4,4	4,8	5,1	6,0	6,8	7,7	8,5	9,5	10,1
700	1,5	1,8	2,2	2,6	2,9	3,3	3,7	4,0	4,4	4,8	5,1	5,5	6,4	7,3	8,3	9,3	10,8	11,0
750	1,6	2,0	2,4	2,8	3,1	3,6	3,9	4,3	4,7	5,1	5,5	5,9	6,9	7,9	8,9	9,8	10,8	11,8
800	1,7	2,1	2,5	2,9	3,4	3,8	4,2	4,6	5,0	5,5	5,9	6,3	7,3	8,4	9,4	10,5	11,6	12,6
850	1,8	2,2	2,7	3,1	3,6	4,0	4,5	4,9	5,3	5,8	6,2	6,7	7,8	8,9	10,0	11,2	12,2	13,4
900	1,9	2,4	2,8	3,3	3,8	4,3	4,7	5,2	5,7	6,1	6,6	7,1	8,3	9,5	10,6	11,8	13,0	14,2
950	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,7	9,0	11,2	12,4	13,7	14,9
1000	2,1	2,6	3,1	3,7	4,3	4,7	5,2	5,8	6,3	6,8	7,3	7,8	9,2	10,5	11,8	13,1	14,4	15,7
1100	2,3	2,9	3,5	4,0	4,6	5,2	5,8	6,3	6,9	7,5	8,1	8,6	10,1	11,5	13,0	14,4	15,8	17,3
1200	2,5	3,1	3,8	4,4	5,0	5,7	6,3	6,9	7,6	8,2	8,8	9,4	11,0	12,6	14,2	15,8	17,3	18,9
1300	2,7	3,4	4,1	4,8	5,5	6,1	6,8	7,5	8,2	8,9	9,5	10,2	11,9	13,6	15,3	17,0	18,7	20,4
1400	2,9	3,7	4,4	5,1	5,9	6,6	7,3	8,1	8,8	9,5	10,3	11,0	12,8	14,7	16,5	18,3	20,2	22,0
1500	3,2	3,9	4,7	5,5	6,3	7,1	7,9	8,6	9,4	10,2	11,0	11,8	13,7	15,7	17,7	19,6	21,6	23,6
1600	3,4	4,2	5,0	5,9	6,7	7,5	8,4	9,4	10,1	10,9	11,7	12,6	14,7	16,8	18,9	20,9	23,0	25,2
1700	3,6	4,5	5,4	6,2	7,1	8,0	8,9	9,8	10,7	11,6	12,5	13,4	15,6	17,8	20,0	22,3	24,5	26,7
1800	3,8	4,7	5,7	6,6	7,6	8,5	9,4	10,4	11,3	12,3	13,2	14,1	16,5	18,8	21,2	23,6	26,9	28,3
1900	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	10,9	11,9	12,9	13,9	14,9	17,4	19,9	22,4	24,9	27,4	29,9
2000	4,2	5,2	6,2	7,3	8,4	9,4	10,5	11,5	12,6	13,6	14,7	15,7	18,3	21,0	23,6	26,2	28,8	31,4
2200	4,6	5,8	6,9	8,1	9,2	10,4	11,5	12,7	13,8	15,0	16,1	17,3	20,2	23,1	25,9	28,8	31,7	34,6
2400	5,0	6,3	7,6	8,8	10,1	11,3	12,6	13,8	15,1	16,3	17,6	18,9	22,0	25,2	28,3	31,5	34,6	37,7
2600	5,4	6,8	8,2	9,5	10,9	12,3	13,6	15,0	16,3	17,7	19,1	20,4	23,8	27,3	30,7	34,0	37,5	40,8
2800	5,9	7,3	8,8	10,3	11,7	13,2	14,7	16,2	17,6	19,1	20,5	22,0	25,7	29,4	33,0	36,7	40,3	44,0
3000	6,3	7,9	9,4	11,0	12,6	14,1	15,7	17,3	18,9	20,4	22,0	23,6	27,5	31,4	35,4	39,4	43,2	47,2
3250	6,8	8,5	10,2	11,9	13,6	15,3	17,0	18,7	20,4	22,2	23,8	25,5	29,8	34,0	38,3	42,6	46,8	51,1
3500	7,3	9,2	11,0	12,8	14,7	16,5	18,4	20,2	22,0	23,8	25,7	27,6	32,2	36,7	41,3	45,8	50,5	55,0
3750	7,9	9,8	11,8	13,8	15,7	17,7	19,6	21,6	23,6	25,5	27,5	29,5	34,4	39,3	43,2	49,2	54,0	58,9
4000	8,4	10,5	12,6	14,7	16,8	18,8	20,9	23,1	25,2	27,3	29,4	31,4	36,7	41,9	47,2	52,3	57,7	62,8
4250	8,9	11,5	13,4	15,4	17,8	20,0	22,3	24,5	26,7	29,0	31,2	33,4	39,0	44,6	50,0	55,8	61,2	66,8
4500	9,4	11,8	14,2	16,5	18,9	21,2	23,6	25,9	28,3	30,7	33,0	35,4	41,3	47,2	53,0	58,9	64,8	70,7
4750	10,0	12,5	14,9	17,4	19,9	22,4	24,8	27,4	29,8	32,3	34,8	37,3	43,3	49,5	56,0	62,2	68,4	74,7
5000	10,5	13,1	15,7	18,3	20,9	23,6	26,2	28,8	31,4	34,1	36,7	39,3	45,8	52,3	59,0	65,4	72,0	78,5

b) Anordnung des Riementriebes.

Erzeugt nach Fig. 304 und 305 das Eigengewicht oder die Elastizität des Riemens die Spannung S_0 , so ist anfangs die Spannung größer als später, mithin wird im Laufe der Zeit eine Verkürzung des Riemens erforderlich. Diesem Nachteile steht als Vorteil der einfache Betrieb gegenüber. Bei Belastungsspannung nach Fig. 306 und 307 erhält man stets gleiche Spannung und größere Umschlingungswinkel, dagegen infolge der Biegung des Riemens nach zwei Seiten größere Arbeitsverluste.

Den Achsenabstand wählt man außer bei Belastungsspannung möglichst mindestens = $4 \times$ Durchmesser der größeren Scheibe; bei gekreuzten außerdem mindestens = $20 \times$ Riemenbreite; über 10 m geht man nicht gern hinaus.

Der Scheibendurchmesser soll $\geq 100 \cdot \delta$ sein; die Übersetzung bis $i = 1 : 5$.

Damit sich der Riemen auf der Scheibe hält, muß er gerade auflaufen, d. h. das Riemenstück, welches sich zur Scheibe hinbewegt, muß sich in der Ebene

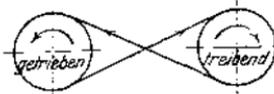


Fig. 323.



Fig. 324.

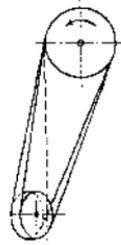


Fig. 325.

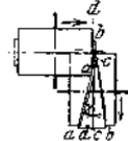
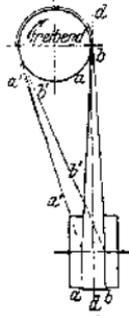


Fig. 326.

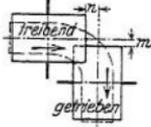


Fig. 327.

dieser Scheibe, das ist die Ebene senkrecht zur Scheibenachse, bewegen. Der ablaufende Riemen kann aus dieser Ebene abweichen. Die beiden Wellen können dabei parallel liegen und gleiche Drehrichtung haben — offener Riemen, parallel liegen bei entgegengesetzter Drehrichtung, Fig. 323 und 324 — gekreuzter oder geschränkter Riemen, oder sie können sich kreuzen, Fig. 325; die Durchschnittslinie der Mittelebenen beider Scheiben ist Tangente an beide Scheibenumfänge (Sonderfall: Wellen kreuzen sich rechtwinkelig: halb geschränkter oder halb gekreuzter Riemen, Fig. 326). Der Berührungspunkt obiger Tangente muß Ablaufstelle des Riemens sein, wodurch die Umdrehungsrichtung der Scheiben gegeben ist. Da die Riemenmitte cc gegen die Ebene der Scheibenmitte dd um den Winkel γ in Fig. 326 geneigt ist, wird der Riemen aus der Ebene dd im Grundriß auf der getriebenen Scheibe nach rechts wandern, zumal seine innere Kante aa stets kürzer, mithin auch weniger beansprucht wird als die äußere bb ,

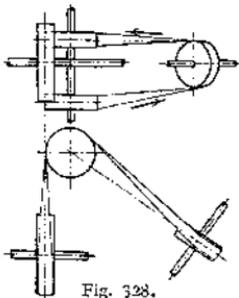


Fig. 328.

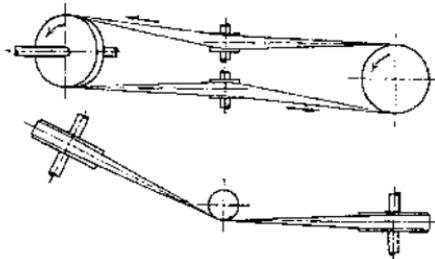


Fig. 329.

so daß er sich um die Kante aa biegen wird; genau so im anderen Trum. Infolgedessen verschiebt man die Mitte der getriebenen Scheibe um das Maß $n = 0,5 - 0,6 \cdot b$, und die Mitte der treibenden um $m = 0,1 - 0,2 \cdot b$ (Fig. 327),

führt beide Scheiben gerade aus und macht sie zur Sicherheit noch um 25% breiter als bei geradlaufendem Riemen.

Die beiden Wellen können ferner sich schneiden oder eine für unmittelbare Kraftübertragung nicht geeignete Lage haben, in welchem Falle besondere Leitrollen zu verwenden sind, Fig. 328 und 329.

c) Bauliche Ausführung der Teile des Riementriebes.

Material der Riemscheiben meist Grauguß; kleinere früher nach Modellen von Hand geformt, größere nach Schablone. Beide Verfahren haben den Nachteil, daß der Guß schwer wird; deshalb heute meist Herstellung auf gewöhnlichen Formmaschinen, in welchem Falle die Scheiben ballig ausgeführt werden können, oder nach dem Durchziehverfahren, wobei die Scheiben zylindrisch ausfallen. Kranz ist möglichst schwach zu wählen, damit er beim Abkühlen gegenüber den Armen nachgeben kann. Randstärke (Fig. 330).

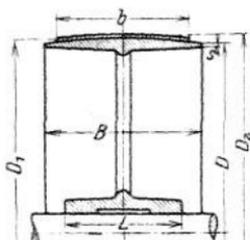


Fig. 330.

$$s = \frac{D}{300} + 2 \text{ mm, mindestens aber } 3 \text{ mm.}$$

Fig. 330 zeigt eine einteilige Riemscheibe. Für offenen Riemen wählt man: $B = 1,1 \cdot b + 1 \text{ cm}$; 10% größer bei geschränktem, da der Riemen unruhiger

läuft. Wölbung $w \text{ mm} = \frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{3} \sqrt{B}$ mm; Scheiben, auf denen der Riemen verschoben wird, erhalten keine Wölbung; desgl. Scheiben mit mehreren Riemen. Vorteil der Wölbung: Der Riemen läuft stets mit seiner Mitte in Scheibenmitte, denn wenn er z. B. zu Anfang, wie in Fig. 331 gezeichnet, lag, kommt Punkt a nach $\frac{1}{4}$ Umdrehung nach a_1 , mithin der Riemen in die gestrichelte Lage bis schließlich Mitte Riemen = Mitte Scheibe. Der Nachteil der Wölbung ist stärkere Beanspruchung der mittleren Teile des Riemens, die sich aus der Beziehung (s. S. 391)

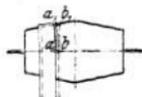


Fig. 331.

$$\frac{w \cdot \pi}{D_1 \cdot \pi} = \frac{\sigma}{E} \quad \text{ergibt zu} \quad \sigma = \frac{w}{D_1} \cdot E,$$

und zu der vorhandenen Biegebungsbeanspruchung

$$\sigma_1 = \frac{\delta}{D_2} \cdot E = \frac{\delta}{D + 2 \cdot w + \delta} \cdot E$$

hinzukommt.

Meist wölbt man die getriebene Scheibe, weil bei ihr der Riemen mit geringerer Spannung als bei der treibenden aufläuft, so daß die durch die Wölbung hinzukommende Spannung nicht so schädlich wirken kann. Bei $v > 25 \text{ m/sek}$ ist auch die treibende zwecks Riemenführung zu wölben.

$$\text{Armszahl} = \frac{1}{7} \text{ bis } \frac{1}{8} \sqrt{D} \text{ mm.}$$

Armquerschnitt mit Rücksicht auf Luftwiderstand meist elliptisch; Achsenverhältnis 1 : 2 bis 1 : 2,5; nach dem Kranz zu wird der Querschnitt verjüngt im Verhältnis 5 (Nabe) : 4 (Kranz) der Achsen. (Berechnung s. Räder, S. 669.)

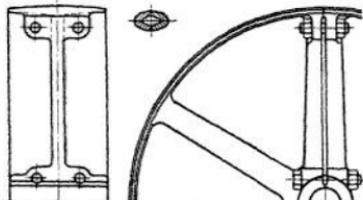


Fig. 332 und 333.

Naben (vgl. Räder, S. 669, Keile, S. 580). Nabenlänge $L = B$, sofern $B \leq 1,2 - 1,5 \cdot d$. Sehr breite Scheiben erhalten kleinere Nabenlänge. Bei Losscheiben $L = 2 \cdot d$.

Fig. 332 zeigt eine zweiteilige Riemscheibe, die im Arm geteilt ist. Teilung geschieht mit Rücksicht auf die Montage. Um den Spalt im geteilten Arm zu vermeiden, führt man ihn besser nach Fig. 333 aus. Man gießt die Scheibe in

einem Stück und sprengt sie nachher auseinander. Dabei muß man tunlichst von der Nabe aus sprengen, da andernfalls die Arme an der Nabe infolge der

ausgelösten Gußspannungen leicht brechen. Sprengflächen bleiben unbearbeitet. Bei kleinen Kräften kann man auch wohl den Keil vermeiden und mittelst der an der Nabe sitzenden Schrauben die Scheibe auf die Welle aufklemmen. Bei kleinen Geschwindigkeiten auch wohl Teilung zwischen den Armen, Fig. 334, nicht nach Fig. 335, bei der die Schrauben am Kranz beim Anziehen die Scheibe verziehen würden. Um beim Sprengen jede Gefahr des Bruches der Arme an der Nabe zu vermeiden, teilt man auch wohl nur die Nabe durch Zwischenlegen von mit Graphit bestrichenen Platten beim Gießen, Fig. 336, und stellt den Kranz in einem Stück her. Die einzelnen Teile der Nabe werden dann durch Schrumpfringe zusammengehalten und die Trennungsfugen, in denen die Platten saßen, mit Zinn ausgegossen.

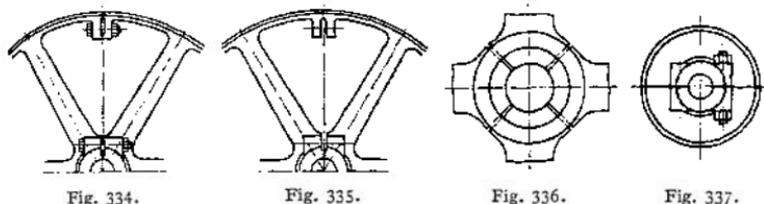


Fig. 334.

Fig. 335.

Fig. 336.

Fig. 337.

Fig. 337 zeigt eine kleine geteilte Scheibe, durch Schrauben mit zwei Muttern zusammengehalten.

Breite Scheiben erhalten zwei Armsysteme nach Fig. 338. Bei großem Durchmesser wird der Steg *a a* in der Mitte vorgesehen, um die Knicklänge der Arme zu verringern.

Gewichte von Riemenscheiben s. Tabelle S. 689.

Wagerechte Scheiben meist ohne Rand oder mit lose drehbarem Rand.

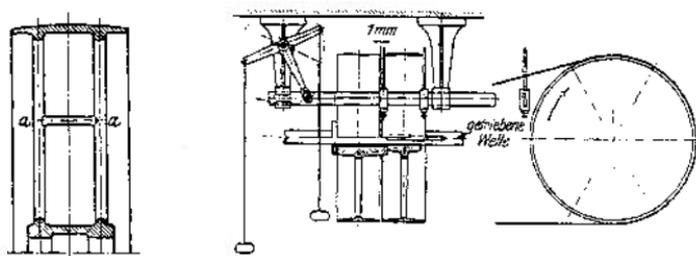


Fig. 338.

Fig. 339.

Fig. 339 zeigt eine Fest- und Losscheibe, letztere stets auf der angetriebenen Welle sitzend, da andernfalls ein Einrücken nicht möglich. S. auch Kupplungen Fig. 152, 155, 156, 159, Lager Fig. 206. Stets ist der auflaufende Riemen zu verschieben, und zwar verschiebt sich der treibende schwerer als der angetriebene. Nabe der Losscheibe vorteilhaft mit Weißmetallausguß oder Rotguß- (bzw. Leerlauf-)Büchse. Stellung oder dgl. hindert die Bewegung in Achsenrichtung; Schmierung meist mittels Fett, wobei darauf zu achten, daß etwa austretendes Fett nicht an den Riemen gelangen kann. Meist läßt man die Naben beider Scheiben aneinander laufen, so daß etwa 1 mm Spielraum zwischen den Kränzen vorhanden ist, um das Reibungsmoment zu verringern. Ist die Zeitdauer, während welcher der Riemen auf der Losscheibe läuft, sehr groß und wird er nur selten verschoben, so empfiehlt es sich, die Losscheibe im Durchmesser etwas kleiner zu machen, da dann während dieser Zeit eine Entlastung der Lager infolge des Nachlassens der Riemen Spannung eintritt. Wird sie z. B. im

Gewichte von Riemenscheiben. (Bamag, Dessau.)

Die erste Reihe enthält die Gewichte des Rohgusses von ungeteilten, die zweite von gesprengten Scheiben einschl. Schrauben; Bearbeitungsangabe 3 mm. Die dritte und vierte Reihe geben die Fertiggewichte von geraden, genuteten Scheiben einschl. Keil, und zwar die Reihe 3 von ungeteilten und Reihe 4 von geteilten Scheiben.

In mm	75	100	150	200	250	300	350	400	450	500	600	mm Breite
200	8,0	10,0	12,5	15,5	18,5							
	9,0	11,0	14,0	17,5	20,5							
	6,5	7,5	10,0	12,0	14,5	18,0	25,0	30,0				
	7,5	8,5	11,5	14,0	16,5	21,0	28,0	33,0				
250	9,0	11,5	15,0	18,0	22,0							
	10,0	12,5	16,5	20,0	26,5							
	7,5	9,0	12,5	14,5	17,0	22,0	30,0	35,5				
	8,5	10,0	14,0	16,5	21,5	26,0	35,5	43,0				
300	11,5	14,0	18,0	22,0	26,0							
	12,5	15,0	19,5	24,0	30,5							
	10,0	11,5	15,0	17,0	22,0	27,0	37,0	43,0				
	11,0	12,5	16,5	19,0	26,5	31,0	43,0	53,0				
400	16,5	19,0	25,0	31,0	37,0							
	17,5	20,5	26,5	36,0	41,5							
	15,0	16,5	20,0	23,0	32,0	37,0	52,0	58,0				
	16,0	18,0	21,5	28,0	36,5	44,0	61,0	73,0				
500	21,5	24,0	32,0	40,5	49,5							
	23,0	26,0	35,0	45,5	54,5							
	20,0	21,5	28,0	33,0	42,0	49,0	67,0	74,0	86,0	98,0		
	21,5	23,5	31,0	38,0	47,0	59,0	81,0	95,0	96,0	108,0		
600	26,0	30,0	40,5	51,5	62,5							
	28,0	33,0	44,5	57,5	71,5							
	24,0	25,5	35,0	42,0	50,0	61,0	83,0	92,0	106,0	122,0		
	26,0	28,5	39,0	48,0	59,0	71,0	99,0	117,0	120,0	136,0		
800		44,5	60,0	76,0	92,0							
		48,5	67,0	85,0	101,0							
		39,0	51,0	62,0	76,0	89,0	120,0	132,0	154,0	174,0		
		43,0	58,0	71,0	85,0	101,0	145,0	165,0	178,0	192,0		
1000		65,0	85,5	106,5	127,5							
		71,0	95,5	120,5	138,5							
		55,0	69,0	84,0	104,0	123,0	165,0	178,0	212,0	236,0		
		61,0	79,0	98,0	115,0	137,0	199,0	217,0	244,0	260,0		
1250		97,0	124,0	152,0	180,0							
		106,0	136,0	171,0	189,0							
		79,0	98,0	118,0	150,0	173,0	231,0	245,0	298,0	324,0		
		88,0	110,0	137,0	159,0	187,0	278,0	296,0	338,0	360,0		
1500		135	162	204	231	310	326	394	432			
		151	183	215	248	369	387	444	478			
1750		181	212	261	301	400	425	508	554			
		201	237	284	322	473	492	567	614			
2000		270	330	378	506	538	642	692				
		303	365	408	589	619	714	766				
2250			338	409	464	632	674	794	850	1045		
			382	459	507	727	764	887	938	1148		
2500			416	496	560	776	828	968	1034	1254		
			473	561	618	889	927	1078	1136	1376		
2750			506	595	666	940	1000	1162	1236	1488		
			577	670	742	1068	1115	1283	1354	1629		
3000			608	706	784	1116	1188	1372	1456	1748		
			693	791	878	1259	1327	1510	1596	1904		
3250			719	827	914	1308	1390	1599	1696	2024		
			822	925	1027	1463	1556	1763	1856	2195		
3500			838	956	1048	1512	1604	1838	1950	2318		
			963	1071	1188	1685	1797	2034	2134	2508		
3750			963	1092	1196	1722	1824	2084	2214	2629		
			1114	1224	1358	1924	2048	2310	2431	2834		
4000			1096	1234	1346	1932	2050	2334	2486	2938		
			1269	1383	1532	2169	2303	2590	2738	3160		

Radius um das Maß Δ kleiner gemacht, so ergibt sich die Entlastung annähernd aus der Beziehung:

$$\frac{\Delta \cdot \pi}{\text{gesamte Riemenlänge}} = \frac{\text{Entlastung}}{E}$$

z. B.

$$\Delta = 1 \text{ cm, Riemenlänge} = 1000 \text{ cm, } E = 2000 \text{ kg/qcm,}$$

$$\text{Entlastung} = \frac{1 \cdot \pi \cdot 2000}{1000} = 6,28 \text{ kg/qcm.}$$

Andere Riemenausrücker zeigen die Fig. 340 bis 343, letztere für zwei Riemen. Bei Rechtsdrehung der Scheibe A kommt Stift a außer Berührung mit Ausrücker 1, während Stift b den Ausrücker 2 und damit den Riemen verschiebt. Umgekehrt bei Linksdrehung.

Um die Abnutzung der Welle zu verhindern, befestigt man die Leerlaufbüchse auch wohl mittels Stellschraube auf der Welle; geteilte Leerlaufbüchse durch

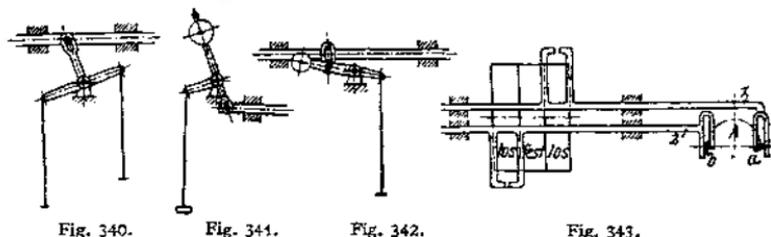


Fig. 340.

Fig. 341.

Fig. 342.

Fig. 343.

Schrauben ähnlich Stellring Fig. 105 zusammengehalten. Man führt auch wohl die Büchse selbst als Vorratsbehälter für Fett aus, Fig. 344, die eine Lünнеманnsche Schmierbüchse zeigt, wobei die Zentrifugalkraft bei der Drehung das Fett auf die Schmierflächen preßt, während bei stillstehender Welle ein Stauffer die Schmierung übernimmt; oder man befestigt die Leerlaufbüchse unabhängig von der Welle an einem Konsol oder dgl., Leerscheibenträger, Fig. 345, was sich besonders empfiehlt, wenn Mitnahme der Welle durch die Reibung beim Leerlauf zu befürchten ist. Meist wird eine solche Leerscheibe auf der treibenden Welle angeordnet, da dann der ausgerückte Riemen still steht und somit jede Abnutzung vermieden ist. Zum Einrücken wird dann zunächst die Losscheibe an die Festscheibe angepreßt; sobald sie infolge der Reibung am Umfang an der Drehung

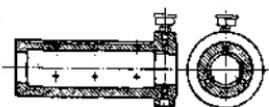


Fig. 344.

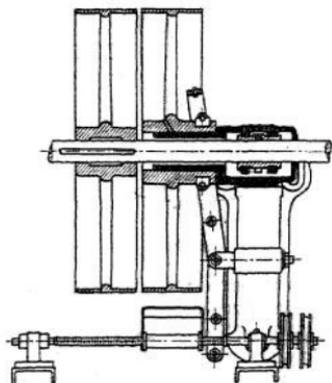


Fig. 345.

teilnimmt, wird der Riemen überführt, wobei die Riemengabel von dem zweiten hinter dem der Anpreßvorrichtung liegenden Kettenrade aus betätigt wird. Verwendbar ist diese Anordnung, wenn beim Einrücken nicht sofort der ganze Widerstand zu überwinden ist. Fig. 346 zeigt eine zweiteilige Ölkammer-Kugellager-Laufbüchse von Polysius, Dessau; Schmierung erfolgt durch Schöpfer a , die das Öl hochheben. Fig. 347 zeigt eine schmiedeeiserne Riemenscheibe. Die

Arme werden entweder in die Nabe eingegossen, eingeschraubt oder warm eingezogen; die Verbindung mit dem Kranz geschieht durch Vernieten oder Verschrauben.

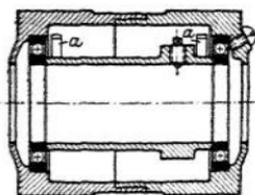


Fig. 346.

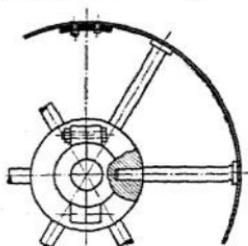


Fig. 347.

Vorteil hölzerner Riemscheiben besteht im geringen Gewicht, sowie größerem Wert μ (S_1 kleiner); Nachteil; leichtes Verziehen, besonders in feuchten Räumen und Feuersgefahr bei Lockerwerden.

Fig. 348 bis 350 veranschaulichen Riemenleiter zum Riementrieb nach Fig. 328 und 329.

Steht die Achse im Arm lotrecht nach unten (Fig. 348 und 349), so wird die Nabe als Ölkammer ausgebildet, wobei während des Laufes die Zentrifugalkraft wie angedeutet das Öl selbsttätig auf die Flächen bringt. Steht die Achse lotrecht nach oben (Fig. 350), so wird eine besondere Ölkammer vorgesehen, aus der ein Docht das Öl hebt. Bei wagerechter Achse wird Ringschmierung oder Schöpferschmierung nach Fig. 346 angewandt. Muß die Rollenachse verstellbar sein,

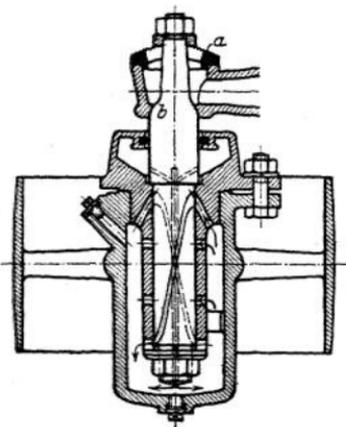


Fig. 348.

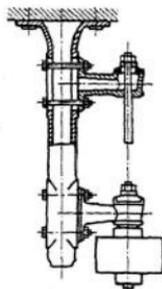


Fig. 349.

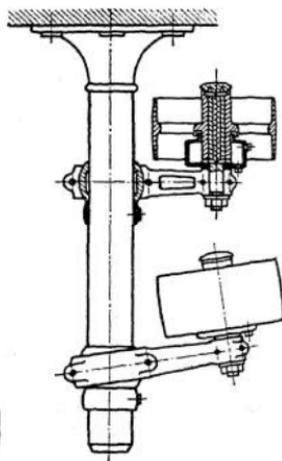


Fig. 350.

so kann hierzu entweder der Arm drehbar angeordnet werden (Fig. 350) und die Achse in ihm fest, oder der Arm fest und die Achse in ihm verstellbar (Fig. 348 und 349). Hier ist Deckel *a* unten ein Umdrehungskörper, oben trägt er einen Schlitz, so daß die bei *b* kugelförmige Achse nach jeder Richtung geneigt werden kann. Fliegende Anordnung der Riemenrolle erleichtert das Auflegen des Riemens gegenüber zweiseitiger Lagerung.

Bei veränderlichem Übersetzungsverhältnis sind Stufenscheiben (s. Werkzeugmaschinen) zu verwenden oder auch kegelförmige Trommeln Fig. 351 und 352, wenn ein allmählicher Übergang von einer Übersetzung in eine andere erforderlich ist. Dabei muß die Riemenlänge konstant sein. Dies bedingt bei gekreuztem Riemen, wie bei den Stufenscheiben angegeben, daß die Summe der Radien $R + r$ konstant bleibt; dies trifft zu, wenn die kegelerzeugenden AB gerade sind. Bei offenem Riemen sind wie bei Stufenscheiben, wenn eine Erzeugende gerade angenommen

wird, für einzelne Stellen der zweiten Trommel die Radien r_1, r_2, r_3 usw. zu berechnen. AB wird dann etwas von einer Geraden abweichen; $\tan \alpha$ bis 1 : 10. Offener Riemen meist in der Mitte verstärkt, gekreuzter konisch.

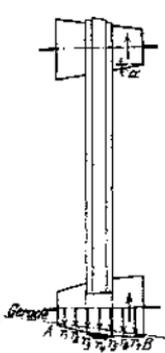


Fig. 351.

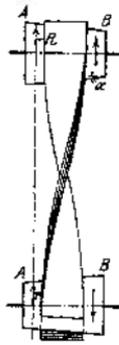


Fig. 352.

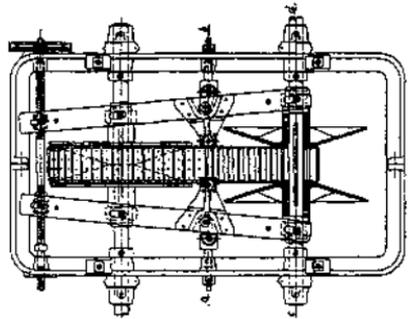
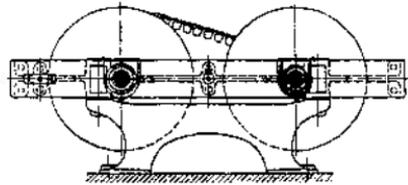


Fig. 353.

Eine andere Ausführungsform zeigt die Fig. 353, ausgeführt von Polysius, Dessau, wobei ein mit konischen Holzklötzchen besetzter Riemen die veränderliche Übersetzung dadurch herstellt, daß seine Lauffläche mehr oder weniger von der Achse entfernt wird.

3. Seiltrieb.

Für größeren Achsenabstand, als für Riemen günstig, kommt das Seil in Frage. Drahtseile ermöglichen überdies gegenüber Riemen, vor allem den meist verwendeten Lederriemen, Übertragung größerer Kräfte.

a) **Das Seil.** Man verwendet Drahtseile, Hanfseile und Baumwollseile. Erstere meist aus Runddrähten mit Hanfseele in jeder Litze und außerdem gemeinsamer Hanfseele, wie z. B. Fig. 354 zeigt, aus 6 Litzen zu 38 Drähten bestehend. Der Zweck der Hanfseele ist, dem Seil große Biegsamkeit und gleichmäßige Beanspruchung zu verleihen, ihr Nachteil große Dehnung des Seiles besonders im Anfange. Da bei Anordnung der Drähte jeder Litze in zwei oder mehreren konzentrischen Lagen die Länge der Drähte des inneren Ringes infolge der stärkeren Steigung kleiner als die des äußeren ist, so kann ihre Beanspruchung bei Eintritt einer Verlängerung nicht genau gleich sein, sofern keine Möglichkeit des Ausweichens vorhanden. Diese schafft die Hanfseele. Statt dieser gibt man dem Seil auch wohl eine Seele aus weichem Eisendraht oder, sofern man auf eine gleichmäßige Beanspruchung verzichtet, eine aus gleichem Draht, wie zu den äußeren Litzen verwendet. Mit Rücksicht auf die Abnutzung während des Betriebes gibt man den äußeren Drähten auch wohl einen größeren Durchmesser als den inneren. Bruchlast von Flußstahldrähten ca. 70 kg/qmm und von Gußstahldrähten etwa 130—140 kg/qmm. Da auch die Oberfläche, bedingt durch die Konstruktion des Seiles, auf die Abnutzung von großem Einfluß ist, sind der Seilfabrik stets Durchmesser und die Bauart der Scheiben sowie die Verhältnisse, unter denen das Seil arbeiten soll, anzugeben. Übliche Abmessungen s. Tabelle Seite 694.



Fig. 354.

Im Freien liegende Seile sind zu verzinnen.

Sollen die beiden Seilenden miteinander verbunden werden, so werden die Drähte auf eine Länge von etwa 1,5—4 m einzeln gelöst und miteinander verspleißt. Die Spleißlänge ist bei Bestellung zuzugeben (vgl. Fig. 319).

Hanfseile werden aus gewöhnlichem Hanf oder Manilahanf hergestellt. Dieser ist steifer als ersterer (badischer Schleißhanf) und widerstandsfähiger gegen Feuchtigkeit, weshalb sein Anwendungsgebiet hauptsächlich auf große Scheibendurchmesser und Betrieb im Freien sich erstreckt. Ihr Querschnitt ist rund, Fig. 369 (der Durchmesser jeder Litze erscheint infolge der Neigung der Litze als Ellipse), oder quadratisch, Fig. 370 (Quadratseile aus 8 Litzen bestehend), zum Zweck, eine Verdrehung im Betrieb zu vermeiden. Diese sind zugleich biegsamer; den gleichen Vorteil bieten die Dreikantseile, Fig. 355. Statt des Hanfes verwendet man Baumwolle, wenn sehr

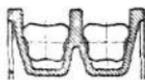


Fig. 355.

elastische und biegsame Seile erforderlich sind. Verspleißen ähnlich wie bei Drahtseilen.

Während des Betriebes sind Draht-, Hanf- und Baumwollseile zu schmieren; für alle nimmt man etwa v bis 25—30 m/sek; Stärke bis 55 mm Durchmesser bzw. Quadrat.

Die **Berechnung des Seilquerschnittes** hat bei Drahtseilen die Bieigungsbeanspruchung, die das Seil allein durch die Biegung um die Scheibe erleidet und welche bei Riemenbetrieb nur bei gewölbten Scheiben unter Umständen zu beachten war, stets zu berücksichtigen, da sie hier infolge des größeren Elastizitätsmoduls größer ausfällt. Sie beträgt:

$$\sigma_b = \infty \frac{3}{8} \cdot \frac{\delta}{D} \cdot E,$$

wenn δ die Drahtstärke und D den Scheibendurchmesser bezeichnet. Infolge der spiralförmigen Windungen, sowie der Hanfseele werden die Drähte ja elastischer, es sinkt also E auf im Mittel $\infty \frac{3}{8}$ des Wertes E des Drahtmaterials, also auf: $\frac{3}{8} \cdot 2000000 = 750000$ bis $\frac{3}{8} \cdot 2100000 = \infty 800000$ kg/qcm.

Es ergeben also dünne Drähte geringe Bieigungsbeanspruchung, aber starke Abnutzung, stärkere Drähte dagegen größere Bieigungsbeanspruchung, aber längere Lebensdauer des Seiles. Mithin beträgt die größte Beanspruchung bei i Drähten im Seil:

$$\sigma = \sigma_z + \sigma_b = \frac{S_1}{\delta^2 \pi \cdot i} + \frac{3}{8} \cdot E \cdot \frac{\delta}{D}.$$

Für $k_z = 2500$, gibt dies $\sigma_z = k_z - \sigma_b$ und die Werte für

$$\frac{\delta}{D} = \frac{1}{1500} \quad \frac{1}{2000} \quad \frac{1}{2500}$$

$$\sigma_z = 2000 \quad 2175 \quad 2200 \text{ kg/qcm.}$$

Bei großen Geschwindigkeiten ist außerdem stets die Spannung infolge der Zentrifugalkraft in die Rechnung einzuführen, was bei Riemen zahlenmäßig nicht möglich, da die zur Formänderung erforderliche Zeit vor allem infolge des geringen Achsenabstandes dort nicht vorhanden war. Außerdem ist die Zentrifugalkraft schon infolge des geringeren Eigengewichtes bei Riemen an sich bedeutend kleiner. Diese Spannung beträgt im freischwebenden Schwungring

$$\sigma_{\text{kg/qcm}} = \gamma_{\text{kg/m}^3} \cdot \frac{v_{\text{m}^2/\text{sek}^2}}{g_{\text{m}/\text{sek}^2}} = \left(\frac{1}{10000} \cdot \gamma \cdot \frac{v^2}{g} \right) \text{kg/qcm} = \sigma_e \text{ kg/qcm.}$$

Mithin:

$$\sigma_{\text{kg/qcm}} = \sigma_z + \sigma_b + \sigma_e$$

oder die Zugbeanspruchung $\sigma_z = \sigma - \sigma_b - \sigma_c$. Aufgetragen ergibt sich Fig. 356. Hierbei ist von der zulässig angenommenen Spannung $k_z = 2500$ zunächst die Biegungsspannung, die beispielsweise von

$$\sigma_b = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{1500} \cdot 2000000 = 500 \text{ kg/qcm}$$

auf $\sigma_b = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4000} \cdot 2000000 = 375 \text{ ,,}$

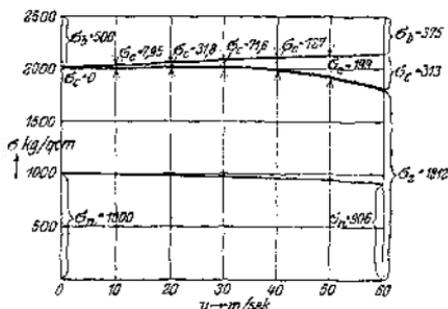


Fig. 356.

fallen möge, und darauf die Zentrifugalspannung abgezogen, beispielsweise für $v = 10 \text{ m}$:

$$\sigma_c = \frac{1}{10000} \cdot 7800 \cdot \frac{10^2}{9,81} = 7,95 \text{ kg/qcm.}$$

Es verbleibt die σ_z -Kurve. Ferner wird S_1 und S_2 vergrößert um den Betrag $\gamma \cdot \frac{v^2}{g} \cdot F$, wenn F den Seilquerschnitt in qm bedeutet oder, da $\gamma \cdot F \cdot 1 = \text{Gewicht eines Seilstückes von der Länge} = 1 \text{ m}$ ist $= q$, um den Betrag:

$$q \cdot \text{kg/m} \cdot \frac{v^2 (\text{m/sek})^2}{g (\text{m/sek}^2)},$$

Mithin wird:

$$S_1 = P \cdot \frac{e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1} + q \cdot \frac{v^2}{g}.$$

$$S_2 = P \cdot \frac{1}{e^{\mu\alpha} - 1} + q \cdot \frac{v^2}{g}.$$

Es wird also für $e^{\mu\alpha} = 2$ die übertragbare Kraft

$$P = \frac{1}{2} \cdot \left(S_1 - q \cdot \frac{v^2}{g} \right),$$

d. h. gleich der halben Spannkraft des Seiles; mithin erhält man in obiger Figur in Höhe der halben Ordinaten der σ_z -Kurve die Kurve der Nutzsanspannung σ_n . Infolge der gleichen Gründe wie beim Riemtrieb und unten beim Hanfseiltrieb näher angegeben, die hier, wenn auch lange nicht in dem Maße wie dort zutreffen, wird man jedoch in Wirklichkeit mit der Nutzsanspannung um ein geringes höher gehen können.

Bei $v > 25 \text{ m}$ ist bei der Konstruktion der Scheiben darauf zu achten, daß das Seil nicht herauspringen kann.

Der Achsdruck beträgt in der Ruhe:

$$= 2 \cdot S_0 = S_1 + S_2;$$

Felten & Guilleaume Lahmeyer-Werke Akt.-Ges.

Transmissionsdrahtseile mit Hanf in den Litzzen				Transmissionsdrahtseile ohne Hanf in den Litzzen			
Drahtstärke mm	Seildurchmesser mm	Anzahl der Drähte	Gewicht für 1 m in kg	Drahtstärke mm	Seildurchmesser mm	Anzahl der Drähte	Gewicht für 1 m in kg
Für kleine Scheibendurchmesser							
1,0	11	48	0,36	1,0	7	24	0,18
	12	54	0,40		9	42	0,32
	13	60	0,45		11	49	0,38
	14	64	0,48		12	56	0,42
	15	72	0,55		7,5	24	0,22
1,2	16	64	0,69	1,1	10	42	0,38
	18	72	0,79		12	49	0,45
	20	80	0,88		13	56	0,51
1,4	22	80	1,2	1,2	8,5	24	0,26
	24	88	1,33		11	42	0,46
	26	80	1,56		13	49	0,54
1,6	28	88	1,73	1,3	14	56	0,60
	30	80	1,98		9	24	0,30
1,8	32	88	2,19	1,4	12	42	0,54
	34	96	2,41		14	49	0,63
Für normale Scheibendurchmesser							
1,0	9	36	0,26	1,4	15	56	0,71
	10	42	0,31		17	56	0,82
1,2	11	36	0,38	1,5	10,5	24	0,41
	12	42	0,45		14	42	0,71
1,4	13	36	0,51	1,6	16	49	0,84
	14	42	0,61		18	56	0,95
1,6	15	48	0,70	1,7	11	24	0,46
	16	42	0,79		15	42	0,81
1,8	18	48	0,91	1,8	17	49	0,96
	20	48	1,15		19	56	1,08
2,0	22	54	1,30	2,0	12	24	0,52
	24	60	1,46		16	42	0,92
	26	60	1,80		18	49	1,08
					20	56	1,21
					17	24	0,58
					17	42	1,03
					19	49	1,22
					21	56	1,36
					14	24	0,72
					19	42	1,27
					21	49	1,50
					23	56	1,68

verringert sich aber im Betrieb auf den Wert

$$= 2 \cdot \left(S_0 - q \cdot \frac{v^2}{g} \right).$$

Der Wirkungsgrad des Seiles (Steifigkeit und Luftwiderstand des Seiles) beträgt etwa $\eta = 0,98$ bis $0,99$ für Spannweiten bis 100 m; für je weitere 100 m

1—2% weniger. Der Gleitverlust kann vernachlässigt werden. Lagerreibung und Luftwiderstand der Scheiben bedingen weitere Verluste.

Der Drahtseiltrieb eignet sich innerhalb der Grenzen 15 bis 200 PS. Aktien-Gesellschaft für Seilindustrie vorm. Ferdinand Wolff, Mannheim-Neckarau.

Quadratseile							
Stärke	25	30	35	40	45	50	55 mm Quadrat
Gewicht pro m . . .	0,55	0,90	1,10	1,45	1,75	2,15	2,70 kg

Transmissionsseile der Firma F. & A. Falck, Zwickau i. S.

Rundseile					
Seildurchmesser	30	35	40	45	50 mm
Manilahanf.	0,70	1,00	1,25	1,70	1,95 kg pro m
Bad. Schleißhanf	0,80	1,20	1,50	1,75	2,15 „
Baumwolle	0,75	1,00	1,35	1,65	1,95 „

Bei Hanf- und Baumwollseilen kann die Biegungsbeanspruchung vernachlässigt werden, nicht dagegen der Einfluß der Zentrifugalkraft. Die zulässige Beanspruchung wählt man bei Hanfseilen gewöhnlich innerhalb der Grenzen 8 bis 15 kg/qcm des vollen Seiles, also bezogen auf

den Querschnitt $\frac{d^2 \pi}{4}$ (s. Fig. 369).

Dabei macht der Querschnitt der Fasern etwa 60 bis 66% des Kreisquerschnittes aus. Die Bruchlast im neuen Zustande beträgt $K_2 = 700$ bis 900 kg/qcm und E etwa 6000 bei badischem Schleißhanf und 5000 bei Manilahanf, beides bezogen auf $\frac{d^2 \pi}{4}$. Bei Quadratseilen macht

der reine Faserquerschnitt nur etwa $0,85 \cdot d^2$ aus (Fig. 370). Bei Baumwollseilen ist etwa $k_2 = 8$ bis 10 kg/qcm zu wählen. Der unteren Grenze nähert man sich bei kleinem v , der oberen bei großen Geschwindigkeiten. Trägt man sich wiederum die Werte auf, so erhält man mit dem spez. Gewicht des Hanfes $\gamma = 1,5$ die Fig. 357. Da ebenso wie beim Riemen die zur vollständigen Formänderung erforderliche Zeit meist nicht zur Verfügung steht, fallen, wie die Versuche von Kammerer auch bestätigen, die Dehnungen kleiner aus als die Rechnung ergibt; mithin kann man eine größere Kraft übertragen als dem Wert σ_n entspricht und etwa bis auf 0,7 der wirklichen Beanspruchung gehen. Diese Kurve ist — — — eingezeichnet. Hiernach hört bei etwa $v = 42$ m die Kraftübertragung auf; dies stimmt in Wirklichkeit nicht, es muß also die Kurve aus dem angegebenen Grunde in Wahrheit höher liegen, etwa wie — — — angedeutet. Nähere Angaben hierüber fehlen jedoch zurzeit noch. Bei $v > 25$ m liegt wiederum die Gefahr des Herausspringens der Seile vor.

Die Seilspannungen S_1 und S_2 sind ebenso wie vor zu bestimmen; desgl. der Achsdruck. Der Wirkungsgrad unter Einschluß des Gleitens, Steifigkeit und Luftwiderstand des Seiles, also ausschließlich Lagerreibung und Luft-

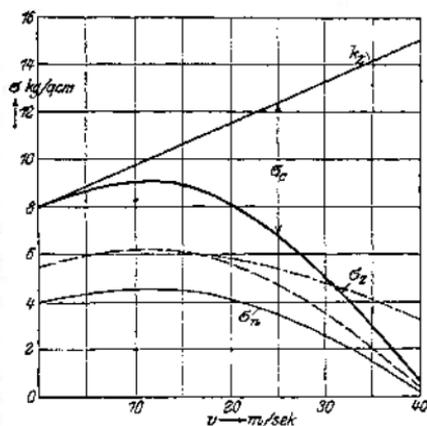


Fig. 357.

widerstand der Scheiben liegt beim Seiltrieb innerhalb der Grenzen 0,94 bis 0,97. Bei größerer Geschwindigkeit als $v = 25$ m/sek nimmt er schnell ab, ebenso bei kleinem v ; erreicht 0,97 bei großem Scheibendurchmesser, sinkt mit zunehmender Seilzahl (Fig. 155) und beim Kreisseiltrieb (s. 360, 362, 363) auf 0,80 bis 0,90, da der Lauddurchmesser der Seile (Fig. 360 u. 362) niemals genau der gleiche ist, so daß eine Rille mehr Seil aufwickelt als eine andere, wodurch ungleiche Beanspruchungen und Gleiten des Seiles bedingt sind.

b) Anordnung der Seiltriebe. Je zwei zusammengehörige Scheiben müssen in einer Ebene liegen, da andernfalls die Scheiben und besonders das Seil stark leiden würden.

1. Drahtseile. Der erforderliche Seilzug im gezogenen Trum wird meist durch den Durchhang erzeugt — bei sehr kleinem Achsenabstand und lotrechttem Betrieb auch wohl mittels Spangewichte — nach der Gleichung (s. S. 678).

$$h = \frac{q \cdot m \cdot n}{2 \cdot H}$$

Sehr kleine Achsenentfernungen sind mithin nicht möglich, da ein kleines h durch Schwankungen und Temperaturänderungen leicht aufgehoben werden oder zu starke Lagerdrücke verursachen könnte; die obere Grenze ist andererseits durch die Festigkeit des Seiles gegeben. Bei großem Achsenabstand werden Unterstützungsrollen angebracht, wie Fig. 358 beispielsweise für das gezogene obere Trum zeigt, dessen Durchhang

größer ist als des ziehenden. Dies wird deshalb tunlichst stets nach unten gelegt. Auf den Wirkungsgrad hat seine Lage im Gegensatz zum Riementrieb kaum Einfluß. Als geringste Achsenentfernung wählt man 12 bis 15 m, als größte etwa 80—125 m. Seilscheibendurchmesser ca. $1500 \times$ Drahtstärke. Die Seillänge kann man bei großem Durchhang nach der Gleichung

$$s = x \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{y^2}{x^2} \right)$$

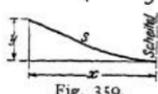


Fig. 359.

angenähert bestimmen, Fig. 359, jedoch verändert auch die Temperatur die Länge um $s \cdot \alpha \cdot t$, mit $\alpha = 1,1 \cdot 10^{-5}$, also bei 1° um 1,1 mm auf 100 m; mithin bei 40° größtem Unterschied um ∞ 50 mm; außerdem längt sich das Seil infolge der Spannkraft S_1 und S_2 . Stets wird nur ein Seil verwendet, da bei mehreren infolge der geringen Elastizität doch nur ein einziges Arbeit übertragen würde.

2. Hanfseile. Die erforderliche Spannung wird durch die Elastizität der Seile (seltener durch den Durchhang) oder durch besondere Spannvorrichtungen erzielt, in welchem Fall auch Betrieb im Freien möglich ist. Achsenentfernung 6 bis 25 m; Seilscheibendurchmesser bei Rundseilen $30 \times$ Seildurchmesser, bei Quadrattseilen $20 \times$ Seildurchmesser. Bei Aufnahme von Feuchtigkeit wird das Seil verkürzt, bei Austrocknung längt es sich.

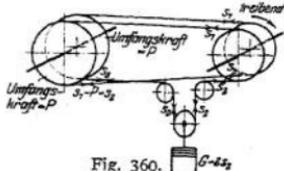


Fig. 360.

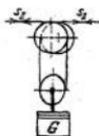


Fig. 361.

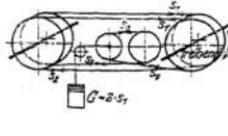


Fig. 362.

3. Bei sehr kleinem Achsenabstand verwendet man, und zwar infolge ihrer großen Elastizität meist ohne Spannvorrichtung, Baumwollseile. Scheibendurchmesser = $20 \times$ Seildurchmesser.

Besonders für Hanfseile geeignete Anordnungen zeigen die Fig. 360 bis 363. Sie bieten den Vorteil, daß

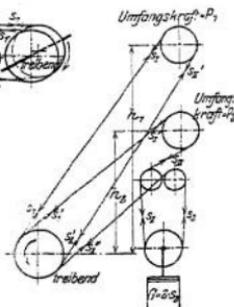


Fig. 363.

die Spannung konstant und genau so groß ist, wie die Umfangskräfte auch bei Schwankungen der Temperatur und Luftfeuchtigkeit erfordern. Damit ist auch der Lagerdruck konstant. Nachteilig ist, daß der ganze Betrieb an einem Seil hängt. Die Spansscheibe wird im gezogenen Trum unmittelbar vor der Treibscheibe eingebaut, weil dann das Belastungsgewicht seinen kleinsten Wert

$$G = 2 \cdot S_2$$

erreicht. Die Spansscheibe liegt bei allen Ausführungen schief, da die Ebene des auflaufenden Seiles eine andere als die des ablaufenden ist (vgl. Fig. 369). Das Seil kehrt nach jeder Umschlingung der getriebenen Scheibe zur Treibscheibe zurück, durchläuft also nicht erst sämtliche angetriebenen Scheiben, um dann erst zurückzukehren, da in diesem Fall die Spannung S_1 bedeutend größer ausfallen würde. Soll bei Fig. 360 das Seil nur in einer Richtung gebogen werden, was bei Quadratseilen erforderlich, so ordnet man die Spansscheibe nach Fig. 361 an. Weg der Spansscheibe = 2,5 bis 3,5 % der Seillänge, so daß das Seil sich um 5 bis 7 % längen kann, ehe ein Stück herausgenommen werden muß. Belastungsgewicht der Regelbarkeit wegen aus einzelnen Platten bestehend, da zu Anfang während des Einlaufens besonders die Lager und das Seil größeren Widerstand bieten als später. Sind die Höhen h_1 und h_2 der Fig. 363 groß, so muß dies bei Aufstellung der Spannungen berücksichtigt werden. Es ändern sich bei einer Höhendifferenz von h in m die Spannungen um $q \cdot h$, so daß sich unter Fortlassung des Einflusses der Zentrifugalkraft ergibt:

$$\begin{aligned} S_1 &= S'_2 \cdot e^{\mu \alpha}, & S'_1 &= S''_2 \cdot e^{\mu \alpha}, \\ S_I &= S_1 + q \cdot h_1, & S'_I &= S'_1 + q \cdot h_2, \\ S_I - P_1 &= S_{II}', & S'_I - P_2 &= S_{II}. \end{aligned}$$

Beispiel: Von einer Scheibe aus sollen auf eine zweite, wagerecht, um 40 m von ihr entfernt liegend, 50 PS mittels Drahtseil bei $n_1 = 160$ und $n_2 = 125$ übertragen werden, Fig. 364.

Drahtstärke = 1 mm angenommen: Treibscheibe 1600 mm Durchmesser:

$$\frac{D \pi n}{60} = v = \frac{1,6 \pi \cdot 160}{60} = 13,4 \text{ m,}$$

$$P = \frac{75 \cdot N}{v} = \frac{75 \cdot 50}{13,4} = \infty 280 \text{ kg.}$$

Eisen auf Leder: $\mu = 0,25$, $e^{\mu \alpha}$ (s. S. 313) = $\infty 2$:

$$S_1 = 2 \cdot P = 560 \text{ kg.}$$

Seildurchmesser = 12 mm = 56 Drähte à 1,0 mm Durchmesser = 0,42 kg/m angenommen:

$$\sigma = \frac{560}{\frac{0,1^2 \pi}{4} \cdot 56} + 750000 \cdot \frac{1}{1600} = 1740 \text{ kg/qcm,}$$

$$S_2 = 280 \text{ kg.}$$

Durchmesser der angetriebenen Scheibe = $1600 \cdot \frac{160}{125} = 2050 \approx 2100 \text{ mm}$. Seildurchhang in der Mitte:

$$h_1 = \frac{0,42 \cdot 20 \cdot 20}{2 \cdot 560} = 0,15 \text{ m,} \quad h_2 = \frac{0,42 \cdot 20 \cdot 20}{2 \cdot 280} = 0,3 \text{ m.}$$

Während des Stillstandes ist

$$S_0 = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{560 + 280}{2} = 420 \text{ kg} \quad \text{und} \quad h = \frac{0,42 \cdot 20 \cdot 20}{2 \cdot 420} = 0,2 \text{ m.}$$

Achsdruck = $2 \cdot S_0 = 820 \text{ kg}$. Dieser könnte um

$$2 \cdot \frac{q \cdot v^2}{g} = 2 \cdot \frac{0,42 \cdot 13,4^2}{9,81} = \infty 15 \text{ kg}$$

kleiner genommen werden, da die Spannkraft $\frac{q \cdot v^2}{g}$ beim Betrieb durch die Zentrifugalkraft erzeugt wird.

Beispiel: Von einer Dampfmaschine sollen mittels Hanfseile 230 PS bei $n = 95$ abgenommen werden; Durchmesser der Seilscheibe = 3500 mm.

$$v = \frac{D \pi n}{60} = \frac{3,5 \cdot \pi \cdot 95}{60} = 17,4 \text{ m.}$$

$$P = \frac{75 \cdot 230}{17,4} = 990 \text{ kg}$$



Fig. 364.

Mit $d^{1/2} \approx 2$ bei i Seilen: $S_1 = 2 \cdot 990 = 1980 \text{ kg} = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot i \cdot k_2$ bei Rundseilen bzw.
 $= d^2 \cdot i \cdot k_2$ bei Quadratseilen oder $P = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot i \cdot \sigma_n$ bei Rundseilen.

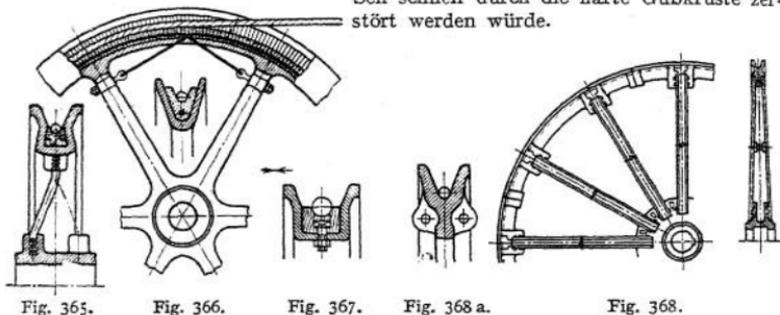
Mit $\sigma_n = \infty 6 \text{ kg/qcm}$ für $v = 17,4$ (s. Fig. 357) ergibt sich bei einem angenommenen Durchmesser von 55 mm die erforderliche Seilzahl

$$i = \frac{990}{\frac{5,5^2 \pi}{4} \cdot 6} = \frac{990}{23,8 \cdot 6} = 7.$$

Zur Sicherheit für den Fall, daß ein Seil reißt, nimmt man 8 Seile.

c) **Konstruktion der Seilscheiben.** Bezüglich Arme, Naben, Keile usw. siehe auch Räder und Riemscheiben. Häufig werden geteilte Scheiben nur aufgeklemmt, um möglichst jedes Verziehen infolge des Aufkeilens zu vermeiden; eine Feder dient in diesem Falle nur als Sicherheit.

Sämtliche Scheiben sind sauber im Seillauf abzdrehen, da andernfalls das Seil schnell durch die harte Gußkruste zerstört werden würde.



Scheiben für Drahtseile werden fast stets ausgefüllt, da einerseits die Reibung der Drähte auf Guß zu klein sein, andererseits auch das Seil zu schnell sich abnutzen würde. Mit Rücksicht auf Abnutzung wird auch die Auflagefläche des Seiles in der Rille möglichst groß gemacht ($\sphericalangle \gamma$ in Fig. 365). Einige Bauarten zeigen: Fig. 365 mit Lederausfütterung; Leder von oben eingebracht und letzte Stücke verleimt. Arme aus Schmiedeeisen eingegossen. Enden dazu verzinkt. Fig. 366: Ausführung von E. Heckel: Lederstücke durch einen besonders eingezogenen Draht gehalten, der seinerseits an den Armen gespannt wird. Fig. 367: Hirnholz (Eiche oder Weißbuche) statt des teureren Leders. Holz leicht auswechselbar. Wenn nicht erforderlich, kann man Konstruktion Fig. 365 verwenden, wenn man eine Stelle zwecks Einbringens der Hölzer verbreitert. Fig. 368: Nicht ausgefüllte Scheibe (meist nur als Tragscheibe gebräuchlich) mit Armen aus U-Eisen. Bei kleinen Kräften dafür Flacheisen. Verbindung der Arme mit dem Kranz durch seitliche Lappen. Durchmesser der Tragscheiben nicht zu klein mit Rücksicht auf die Biegungsbeanspruchung des Seiles. Große Scheiben erhalten schmiedeeisernen Kranz aus U-Eisen ähnlich Fig. 367 mit Ausfütterung, ohne Ausfütterung Kranz aus Walzblech, Profil ähnlich Fig. 368; Verbindung mit den Armen durch Knotenblech oder im letzten Falle auch wohl durch Stahlgußschuhe.

Treibscheiben für Hanf- und Baumwollseile zeigen eine keilförmige Rille, um das Seil festzuklemmen, da es im Gegensatz zu einem Drahtseil hierdurch nicht leidet. Der Reibungskoeffizient μ vergrößert sich auf

$$\frac{\mu}{\sin \frac{\beta}{2} + \mu \cdot \cos \frac{\beta}{2}}$$

So sind ausgeführt Fig. 369 für Rund- und Fig. 370 für Quadratseile, $\beta = 45^\circ$ bei Rund- und $= 75^\circ$ bei Quadratseilen. Eine Tragrolle gibt Fig. 371 wieder; für Quadratseile ist sie nach Fig. 370 mit $\beta = 90^\circ$ auszubilden.

Die Arme (vgl. Festigkeitslehre S. 476, woselbst sich eine genauere Rechnung findet) sind stets auf Biegung zu berechnen, da sie das Moment der Umfangskraft aufnehmen müssen.

Bei großer Geschwindigkeit kommt noch in Richtung der Längsachse eine durch die Zentrifugalkraft bedingte Spannung hinzu. Diese ergibt für jeden Arm etwa die Kraft

$$= \frac{G \cdot v^2}{g \cdot 2 \cdot R \cdot \pi} \cdot \frac{f}{f_1} \cdot \frac{E}{E_1},$$

wenn G das Eigengewicht, f und f_1 die Querschnitte an den Stellen der Fig. 372 und E der zugehörige Elastizitätsmodul. Diese Gleichung ist unter der Bedingung aufgestellt, daß die Formänderung des Kranzes infolge der Spannung $\gamma \cdot \frac{v^2}{g}$ auf-

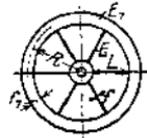


Fig. 372.

tritt; in Wirklichkeit ist das um so weniger zutreffend, je mehr Arme vorhanden. Daher mit zunehmender Geschwindigkeit größere Armzahl.

Bei großem Seilzug werden außerdem die Arme auf Knickung beansprucht und haben bei A Armen eine Belastung auszuhalten:

$= \frac{2}{A} \cdot G_1$, wenn alle Arme tragen, also sowohl die der Zug- wie die der Druckseite; $G_1 =$ Resultierende aus Eigengewicht und Seilzügen, bzw.

$= \frac{4}{A} \cdot G_1$, wenn die Arme als Zugorgane ausgebildet sind. Die Rücksicht auf Knickung bedingt auch Zahl und Lage der Versteifungsstellen (Fig. 368), da nach S. 411 das Trägheitsmoment J_x (Fig. 373) beider Arme für die ganze Knicklänge L maßgebend ist und sich bestimmt aus:

$$\frac{2}{A} \cdot G_1 = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E \cdot J_x}{L^2},$$

während die Entfernung zweier Versteifungsstellen l sich ergibt aus:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{A} \cdot G_1 = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E \cdot J_x}{l^2}.$$



Fig. 373.

Bei geteilten Scheiben müssen die Verbindungsschrauben der Nabe und des Kranzes das halbe Gewicht bei wagerechter Lage der Teilfläche und (stets unter der Voraussetzung, daß die Arme steif sind) die Zentrifugalkraft $= M \cdot r \cdot \omega^2$ aufnehmen, wenn M die Masse der halben Scheibe und r der Schwerpunktsabstand

$= \infty \frac{2}{\pi} \cdot R$; sofern die Arme vernachlässigt werden, müssen die Verbindungsschrauben im Kranz die Kraft $= \gamma \cdot \frac{v^2}{g} \cdot f_1$ und die der Nabe die Kraft $M \cdot r \cdot \omega^2 + \frac{1}{2}$ Gewicht aushalten.

Je nach den vorliegenden Verhältnissen kommt die eine oder andere Rechnung bzw. die resultierende Beanspruchung k_b (vgl. S. 461) in Frage.

Beispiel: Seilscheibe 3 m Durchmesser, Kranzgewicht $G = 400$ kg, Gesamtgewicht $G_0 = 630$ kg, $P = 150$ kg, $S_1 = 300$ kg, $S_2 = 150$ kg, $n = 200$, $\frac{f}{f_1} = \frac{1}{15}$, 3 Schrauben im Kranz, 2 Schrauben an der Nabe, Nabdurchmesser $\delta = 240$ mm:

Biegemoment für den Fuß des Armes:

$$= P \cdot \left(R - \frac{\delta}{2} \right) = 150 \cdot (150 - 12) = 20700 \text{ cmkg} = (x \cdot A) \cdot W \cdot k_b,$$

wenn $(x \cdot A)$ Arme tragen (vgl. Seite 669).

Beanspruchung durch Fliehkraft:

$$v = \frac{D \pi n}{60} = \frac{3 \cdot \pi \cdot 200}{60} = 31,4 \text{ m/sek};$$

Kraft pro Arm:

$$= 400 \cdot \frac{31,4^2}{9,81 \cdot 2 \cdot 1,5 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{2\,000\,000}{1\,000\,000} = 565 \text{ kg.}$$

Knickung bei wagerechten Seilzügen:

$$G_1 = \sqrt{G^2 + (S_1 + S_2)^2} = \sqrt{400^2 + 450^2} = \infty 600 \text{ kg,}$$

damit Kraft pro Arm bei steifen Armen:

$$= \frac{2}{A} \cdot 600 = \left(\frac{1200}{A} \right) \text{ kg.}$$

Verbindungsschrauben bei Teilung der Scheibe:

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{\pi \cdot 200}{30} = 21.$$

Sollen die 4 Schrauben der Nabe allein die Zentrifugalkraft und das Eigengewicht aufnehmen, dann ist

$$4 \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \cdot k_z = M \cdot r \omega^2 + \frac{G_0}{2} = \frac{200}{9,81} \cdot \left(\frac{2}{\pi} \cdot 1,5 \right) \cdot 21^2 + \frac{650}{2} = 8600 + 325 = 8925 \text{ kg,}$$

$$k_z = 480, \quad d = 1 \frac{1}{4} \text{ ' .}$$

Schrauben des Kranzes bei gleicher Bedingung:

$$2 \cdot 3 \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \cdot k_z = 8600 + 325 = 8925 \text{ kg}$$

$$k_z = 480, \quad d = 1 \text{ ' .}$$

Spannung durch Fliehkraft:

$$\sigma \text{ kg/qm} = 7800 \cdot \frac{31,4^2}{9,81} = 780\,000 \text{ kg/qm,}$$

$$\sigma \text{ kg/qcm} = 78 \text{ kg/qcm,}$$

mithin

$$3 \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \cdot k_z = 78 \cdot f_1.$$

XIV. Kurbeltrieb.

1. Bewegungs- und Kraftverhältnisse.

a) Kolbenwege. Zeichnerisch findet man die zu einer beliebigen Kurbelstellung K (Fig. 374 und 375) gehörige Kreuzkopf- bzw. Kolbenstellung durch Schlagen eines Kreises um K mit l als Radius, wobei der Schnittpunkt mit der Kolbenweglinie in B die gesuchte Kreuzkopfstellung ergibt. Sollen die Totstellungen des Kreuzkopfes in der Zeichnung mit denen der Kurbel zusammenfallen, so muß man B um die Länge l nach rechts verschieben bis K'' , bzw. man schlägt um B den Kreis KK'' mit l als Radius oder man schlägt (nach Müller) die beiden den Kurbelkreis in $K_0 K_0$ berührenden Kreise $k k$ bzw. $k_1 k_1$ (Fig. 376) mit l als Radius und kann dann den Kolbenweg x unmittelbar parallel der Kolbenweglinie abgreifen. Für $l = \infty$ oder $r/l = \lambda = 0$ fällt K'' mit K' zusammen, wenn KK' das Lot auf $K_0 K_0$.

Rechnerisch ergibt sich der Kolbenweg

$$1. \text{ für } l = \infty \text{ zu } K_0 K' = r \cdot (1 - \cos \alpha),$$

2. für endliches l zu $K_0 K'' = K_0 K' + f$, wenn $K'K''$ als Fehlerglied f bezeichnet wird.

Aus dem Verhältnis

$$f : K K' = K K' : (2l - f)$$

folgt

$$f = \frac{(K K')^2}{2l - f} = \frac{r^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2l - f} = \infty \frac{r^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2l} = \frac{\lambda}{2} \cdot r \cdot \sin^2 \alpha;$$

damit

$$K_0 K'' = x = r \cdot (1 - \cos \alpha) \pm \frac{\lambda}{2} r \cdot \sin^2 \alpha,$$

wobei das Minuszeichen für den Rückgang gilt.

Für $\alpha = 90^\circ$ ergibt sich der größte Wert des Fehlergliedes

$$f_{\max} = \frac{\lambda}{2} \cdot r.$$

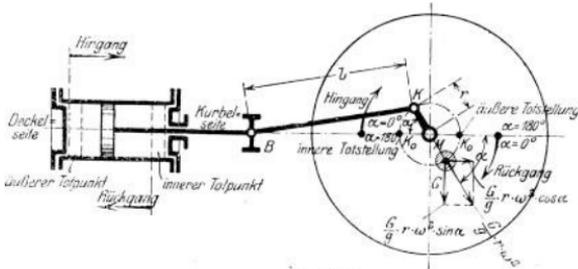


Fig. 374.

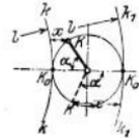


Fig. 376.

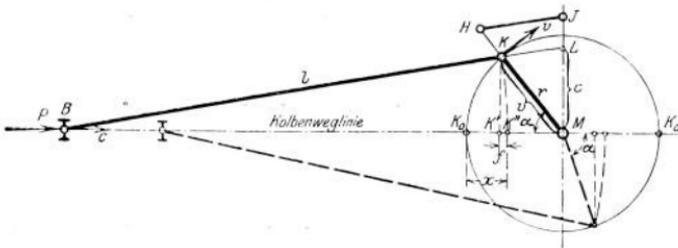


Fig. 375.

b) Kraftverhältnisse. Die Kolbenstangenkraft P bedingt (Fig. 377) bei ihrer Zerlegung die Kraft S in der Schubstange und den stets nach unten gerichteten Normaldruck N zur Gleitbahn, wobei

$$S = \frac{P}{\cos \beta} \quad \text{und} \quad N = P \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

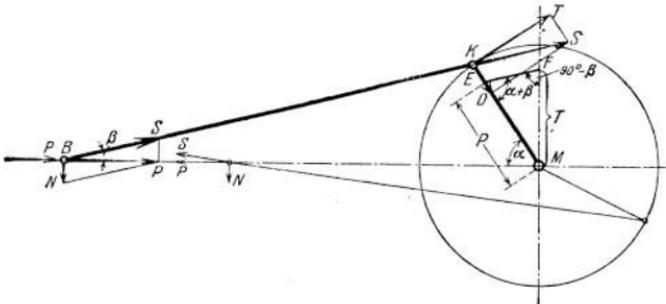


Fig. 377.

Für $\alpha = 90^\circ$ erreicht β seinen größten Wert, mithin auch S und N ; dieser beträgt für das normale Verhältnis $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ mit $\operatorname{tg} \beta = \infty \sin \beta = \frac{1}{5}$:

$$S = \frac{P}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} = \frac{P}{\sqrt{1 - \lambda^2}} = 1,02 \cdot P \quad \text{und} \quad N = \frac{P}{5}.$$

Die Kraft S ergibt am Kurbelzapfen bei ihrer Zerlegung den Radialdruck D (Horizontaldruck stets $= P$) und die Tangentialkraft T ; diese wiederum das auf die Welle übertragbare Drehmoment $T \cdot r$, wobei

$$T = S \cdot \sin(\alpha + \beta) = P \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta};$$

also für $\alpha = 0^\circ$ und $\alpha = 180^\circ$: $T = 0$

$$\alpha + \beta = 90^\circ: T_{\max} = S = \frac{P}{\cos \beta} = P \cdot \sqrt{1 + \lambda^2},$$

$$\alpha = 90^\circ: T = P.$$

Macht man $ME = P$, so schneidet $EF \parallel BK$ gezogen auf der Lotrechten $MF = T$ ab.

Für $l = \infty$ wird $EF \parallel BM$, d. h. $T = P \cdot \sin \alpha$.

Bezeichnen P_m und T_m die Mittelwerte, so folgt aus

$$T_m \cdot r \cdot \pi = P_m \cdot 2 \cdot r: \quad T_m = \frac{2}{\pi} \cdot P_m.$$

In Wirklichkeit entstehen durch Reibung etwa 4 bis 5% Arbeitsverluste.

c) Kolbengeschwindigkeiten. Sie ergeben sich unmittelbar aus den Wegen

1. für $l = \infty$ zu

$$c = \frac{dx}{dt} = r \cdot \sin \alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt} = r \cdot \omega \cdot \sin \alpha = v \cdot \sin \alpha,$$

wenn v die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens.

2. für endliches l zu

$$c = r \cdot \omega \cdot \left[\sin \alpha \pm \frac{l}{2} \cdot \sin(2\alpha) \right].$$

Nun muß

$$T \cdot v = P \cdot c \text{ sein} \quad \text{oder} \quad \frac{T}{P} = \frac{c}{v}.$$

Trägt man also in Richtung P (der Kurbel) v auf $= MH$ (Fig. 375), macht $HJ \parallel BK$, dann ergibt sich in Richtung T (der Lotrechten) $MJ = c$.

Für $\omega = 1$ folgt: $v = r \cdot \omega = r$, d. h. die Verlängerung von BK schneidet stets $c = ML$ ab. Für $l = \infty$ wird $c = v \cdot \sin \alpha =$ lotrechten Projektion von $v = KK'$ oder in Fig. 378 = wagerechten Projektion von v auf die Kolbenweglinie.

c als $f(x)$ dargestellt ergibt

1) für $l = \infty$ und $\omega = 1$: $c = r \cdot \sin \alpha$, also einen Kreis; mithin für $\omega = \omega$ eine Ellipse (Fig. 379), da sämtliche Ordinaten im gleichen Verhältnis geändert erscheinen.

2) für endliches l weichen, wie --- gezeichnet, die Werte ab. Die größte Geschwindigkeit c_{\max} wird erreicht, wenn die Schubstange den Kurbelkreis tangiert; dann ist (Fig. 380)

$$\frac{c_{\max}}{v} = \frac{\sqrt{r^2 + l^2}}{l} = \sqrt{1 + \lambda^2} = 1,02,$$

also

$$c_{\max} = 1,02 \cdot v.$$

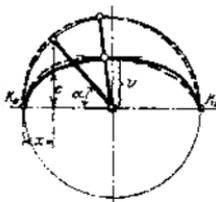


Fig. 379.

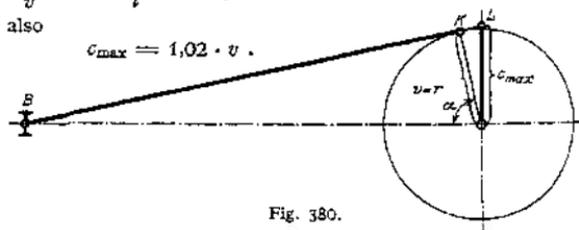


Fig. 380.

Mit $c_m = \frac{s \cdot 2 \cdot \pi}{60}$ als mittlerer Kolbengeschwindigkeit und $v = \frac{s \cdot \pi \cdot n}{60}$ folgt die Beziehung

$$v = \frac{c_m}{2} \pi.$$

d) Beschleunigungen. Aus der Geschwindigkeit c folgt unmittelbar die Kolbenbeschleunigung b .

1. für $l = \infty$: $b = \frac{dc}{dt} = r \cdot \omega \cdot \cos \alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt} = r \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha.$

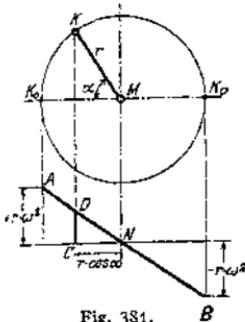


Fig. 381.

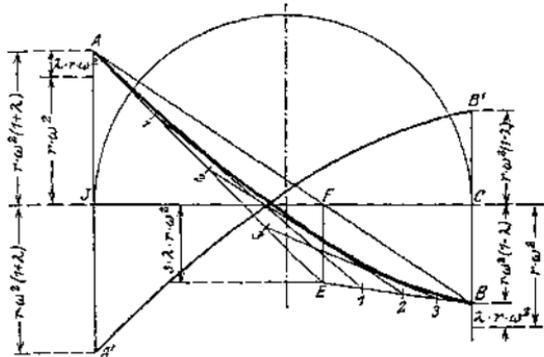


Fig. 382.

Dies gibt aufgetragen eine Gerade AB (Fig. 381) mit dem Ansteigungsverhältnis

$$\frac{CD}{CN} = \frac{r \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha}{r \cdot \cos \alpha} = \omega^2.$$

2. für $l = l$: $b = \frac{dc}{dt} = r \cdot \omega^2 \cdot (\cos \alpha \pm \lambda \cdot \cos [2\alpha]).$

Für den Hingang ergibt Darstellung die Parabel AB der Fig. 382, wobei A und B durch Auftragen der eingeschriebenen Werte gefunden sind. Verbindet man A mit B , errichtet im Schnittpunkt F das Lot $EF = 3 \cdot \lambda \cdot r \cdot \omega^2$, so sind EA und EB Tangenten an die Parabel in den Punkten A und B ; desgl. 1-1, 2-2, 3-3, wenn AE und EB in gleiche Teile geteilt sind. Für den Rückgang wird ebenso die Parabel $A'B'$ erhalten, die gleich der vorigen, jedoch um 180° gedreht.

An dieser Beschleunigung in wagerechter Richtung nehmen teil der Kolben, die Kolbenstange, der Kreuzkopf und zum Teil die Schubstange, da ihr Kreuzkopfeinde geradlinig und das andere Ende im Kreise sich bewegt. Ihr Anteil ergibt sich nach Mollier zu

$$G_0 = \omega^2 \cdot a_0 \cdot \frac{f}{l} \cdot M + \omega^2 \cdot b_0 \cdot \left(\frac{h}{l} - \frac{h^2}{l^2} \right) \cdot M,$$

wenn $\omega \cdot a_0 = b$, M ihre Masse, f ihr Schwerpunktsabstand vom Kurbel- und h vom Kreuzkopfpapfen, J ihr Trägheitsmoment, bezogen auf die Kreuzkopfachse,

$h = \sqrt{\frac{J}{M}}$ ihr Trägheitshalbmesser bedeutet. Kurve der

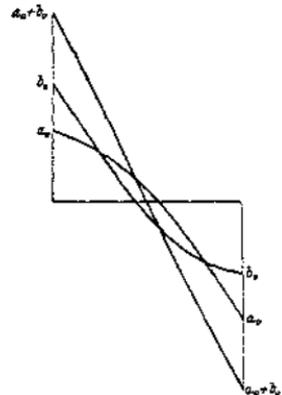


Fig. 383.

Werte a_0 etwa die der Werte b_0 , jedoch verdreht, Fig. 383, so daß $a_0 + b_0$ annähernd eine Gerade. Mit $a_0 = b_0$ folgt: $G_0 = M \cdot a_0 \cdot \omega^2 \left(1 - \frac{h^2}{l^2}\right) \approx 0,5 M \cdot b$. Man schlägt demgemäß $\approx \frac{1}{2}$ bis $\frac{2}{3}$ ihrer Masse den hin und her gehenden hinzu.

Beispiel: Maschine 400 mm Zylinderdurchm., 600 mm Hub, Gewicht von Kolben + Stange + Kreuzkopf + $\frac{1}{2}$ Schubstange = 350 kg (nach Radinger im Mittel für liegende Maschinen ohne Kondensation = 0,28 und mit Kondensation = 0,33 kg/qcm Kolbenfläche), $n = 120$, $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$.

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 120}{30} = 12,6 \text{ 1/sek}^2$$

$$r \cdot \omega^2 = 0,3 \cdot 12,6^2 = 47,7 \text{ m/sek}^2$$

$$r \cdot \omega^2 \cdot (1 + \lambda) = 47,7 \cdot (1 + \frac{1}{5}) = 57,4$$

$$r \cdot \omega^2 \cdot (1 - \lambda) = 47,7 \cdot (1 - \frac{1}{5}) = 38,2$$

$$r \cdot \omega^2 \cdot \lambda \cdot 3 = 47,7 \cdot \frac{1}{5} \cdot 3 = 28,7$$

$$\text{Beschleunigungsdruck im inneren Totpunkt} = \frac{350}{9,81} \cdot 57,4 = 2040 \text{ kg}$$

$$\text{„ „ „ äußeren „} = \frac{350}{9,81} \cdot 38,2 = 1360 \text{ „}$$

$$\text{„ „ „} r \cdot \omega^2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \text{Masse} = \frac{350}{9,81} \cdot 28,7 = 1020 \text{ „}$$

$$\text{Kolbenfläche} = \frac{40^2 \pi}{4} = 1257 \text{ qcm.}$$

$$\text{Beschleunigungsdruck pro qcm Kolbenfläche} = \frac{2040}{1257} = 1,62 \text{ kg.}$$

$$\text{„ „ „} = \frac{1360}{1257} = 1,08 \text{ „}$$

$$\text{„ „ „} = \frac{1020}{1257} = 0,81 \text{ „}$$

e) **Gegengewicht.** Um den Beschleunigungsdruck ist die jeweils nutzbare Kolbenstangenkraft stets vom Dampfdruck verschieden, und zwar ist sie anfangs um ihn geringer, da der Beschleunigungsdruck zum Beschleunigen der Massen verwandt wird, später ist sie um diesen Betrag größer, da die beschleunigten Massen ihre Arbeit wieder abgeben.

Da der im Zylinder arbeitende Dampf aber stets auf den Deckel und Kolben gleichmäßig drückt, wird durch den Maschinenrahmen hindurch ein voller Ausgleich der Kräfte nicht stattfinden können, vielmehr wird eine größere Kraft anfangs vom Deckel, später von der Kurbel aus aufgenommen. Dieser Überschuß der Kräfte wird bestrebt sein, die Maschine zu bewegen, vor allem bei liegenden Maschinen eine Längsverschiebung herbeizuführen. Diese wird gewöhnlich durch ein genügend schweres Fundament unschädlich gemacht, kann aber auch durch Gegengewichte fast vollständig aufgehoben werden. Hierzu wird, wie in Fig. 374 angedeutet, im Kurbelkreis, gegen den Kurbelzapfen um 180° versetzt, ein Gewicht G gleich dem der hin und her gehenden Teile angebracht. Die Horizontalkomponente seiner Fliehkraft beträgt dann $\pm \frac{G}{g} \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha$. Für $l = \infty$ würde der Beschleunigungsdruck der Massen denselben Wert erreichen, jedoch stets entgegengesetzte Richtung aufweisen. Mithin wird durch Anbringen des Gewichtes G der Horizontaldruck auf das Kurbellager anfangs vermehrt, später verringert, so daß er stets gleich dem Dampfdruck. Ein vollkommen genauer Ausgleich tritt infolge der endlichen Schubstangenlänge nicht ein (vgl. Fig. 381 und 382).

Die lotrechte Komponente $\pm \frac{G}{g} \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \sin \alpha$ übt auf die Bewegung der Maschine keinen Einfluß aus, sondern vermehrt bzw. vermindert nur den Druck auf das Lager und damit auf das Fundament.

Um diesen geringer zu halten, und da andererseits das Gewicht der Maschine und des Fundamentes die Längsverschiebung ebenfalls hindern, macht man meist

das Gewicht nicht ganz gleich dem der hin- und hergehenden Teile, sondern nur etwa 0,5 bis 0,8 dieses Gewichtes.

Werden bei zwei Zylindern liegender oder stehender Maschinen die Kurbeln um 180° versetzt, so wird eine Längsverschiebung vollkommen verhindert. Da aber die Beschleunigungskräfte nicht in gleicher Ebene liegen, erzeugen sie ein Drehmoment, dessen Hebelarm die Zylinderentfernung; mithin wird man diese möglichst gering halten, wenn auch in den meisten Fällen dieses Moment vom Fundament ohne weiteres aufgenommen wird.

2. Kurbeln.

Sie sitzen am Wellenende und heißen infolgedessen auch Stirnkurbeln (unter Gegenkurbeln versteht man solche, die mittels des Kurbelzapfens mit der Kurbel verbunden sind, vgl. Fig. 384). Material: Stahl, Fluß- oder Schweißisen, seltener Grauguß. Meist werden sie warm aufgezogen oder hydraulisch auf die Welle gepreßt, selten angeschmiedet. Aufkeilen ist zu vermeiden. Bohrung der Nabe bei Grauguß um $\frac{1}{1000}$ bis $\frac{1}{2000}$ enger als Wellendurchm., bei Schmiedeeisen etwa $\frac{1}{200}$. Zur Sicherung wird eine Feder eingelegt oder ein Rundkeil oder Flachkeil angewandt, dessen vorstehendes Ende entfernt wird, oder es wird statt des Rundkeiles eine Schraube verwandt.

Im Mittel kann man etwa nehmen (Fig. 385):

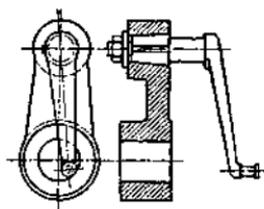


Fig. 384.

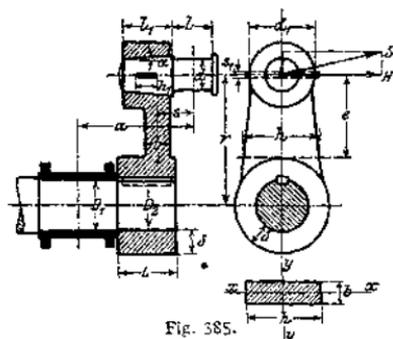


Fig. 385.

D_2 einige mm kleiner als D_1 ; $L \leq D_2$, wenn die Kurbel warm aufgezogen oder aufgepreßt wird, und $L \leq 1,25 \cdot D_2$, wenn sie nur aufgekeilt wird.

Nabenstärke geschmiedeter Kurbeln im Mittel $\delta = 0,4 \cdot D_2 + 1$ cm, gußeiserner 30 bis 50% stärker.

Der Kurbelarm ist auf zusammengesetzte Festigkeit zu berechnen und zwar wird der Querschnitt $b \cdot h$ im Abstände e vom Zapfen beansprucht

1. durch die Radialkomponente V der Schubstangenkraft S auf Zug bzw. Druck und Biegung mit dem Moment $M_1 = V \cdot s$, wobei xx die neutrale Achse,
2. durch die senkrecht dazu stehende Komponente H auf Schub und Biegung mit dem Moment $M_2 = H \cdot e$, wobei yy die neutrale Achse, und gleichzeitig auf Drehung durch das Moment $M_d = H \cdot s$.

Unter Vernachlässigung der Zug- bzw. Druck- und Schubbeanspruchung ergibt sich mithin (vgl. S. 469) das ideale Biegemoment

$$M_1' = 0,35 \cdot M_1 + 0,65 \cdot \sqrt{M_1^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot \alpha_0 \cdot M_d\right)^2} = \frac{1}{6} \cdot h \cdot b^3 \cdot k_b$$

$$\text{und } M_1'' = 0,35 \cdot M_2 + 0,65 \cdot \sqrt{M_2^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot \alpha_0 \cdot M_d\right)^2} = \frac{1}{6} \cdot b \cdot h^3 \cdot k_b,$$

wobei

$$\alpha_0 = \frac{k_b}{1,3 \cdot k_d}.$$

Hieraus ergeben sich die größten Beanspruchungen für die Mitten der Seiten. Die Querschnitte werden zunächst geschätzt.

Dabei muß

$$\frac{M_1}{\frac{1}{6} \cdot h \cdot b^2} + \frac{M_2}{\frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2} \leq \bar{k}_b$$

sein, mit $\bar{k}_b = 600$ bei Schmiedestahl.

Meist ist die Beanspruchung in der Kurbelstotstellung maßgebend, in der auch durch niedrige Beanspruchung auf Stöße infolge der Richtungsänderung der Kräfte Rücksicht zu nehmen ist. Hier ist $M_b = S \cdot s = P \cdot s$, wenn P die Kolbenstangenkraft; damit unter Berücksichtigung der Zug- bzw. Druckbeanspruchung

$$\frac{M_b}{\frac{1}{6} \cdot h \cdot b^2} + \frac{P}{b \cdot h} \leq \bar{k}_b \quad \text{oder} \quad P \cdot \left(s + \frac{b}{6} \right) \leq \frac{h \cdot b^2}{6} \cdot \bar{k}_b.$$

Der Lagerdurchmesser D_1 hat in den Totlagen nur das Biegemoment $M_b = P \cdot a$, sonst $S \cdot a$ und auch noch das Drehmoment $M_d = T \cdot r$ (siehe S. 702) aufzunehmen und ist demzufolge zu bestimmen für den größten Wert M_i der Gleichung

$$M_i = 0,35 \cdot M_b + 0,65 \cdot \sqrt{M_b^2 + M_d^2} = 0,1 \cdot D_1^3 \cdot \bar{k}_b.$$

Um M_b möglichst klein zu halten, ist a klein zu wählen, was durch kurze Nabenlänge L erreichbar.

Der Kurbelzapfen ist meist konisch eingesetzt und seine Lage durch einen Keil gesichert, seltener, wie in Fig. 384, durch eine Mutter gehalten oder aus einem Stück mit der Kurbel hergestellt. Berechnung s. S. 595 u. f. Im Mittel kann man etwa wählen

$$l_1 = 1,5 \text{ bis } 1,75 \cdot d;$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{25} \text{ bis } \frac{1}{15};$$

$$d_1 = 2 \cdot d \text{ bei geschmiedeten} \quad \text{und} \quad = 2,5 \cdot d \text{ bei Gußkurbeln};$$

$$h_1 = 0,3 \text{ bis } 0,4 \cdot l_1;$$

$$s_1 = 0,2 \text{ bis } 0,25 \cdot d.$$

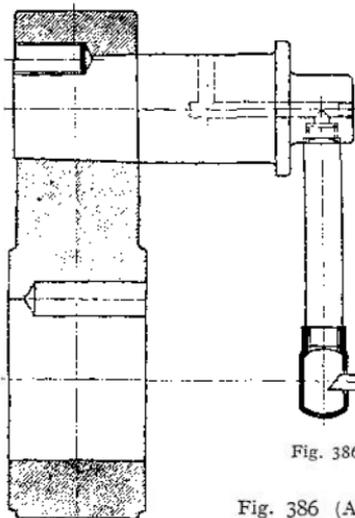


Fig. 386.

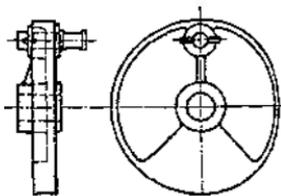


Fig. 387.

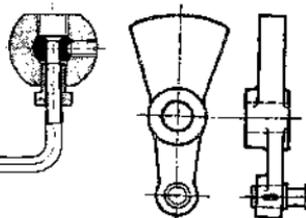


Fig. 388.

Fig. 386 (Ausführung von Ph. Swiderski, Leipzig-Plagwitz) zeigt Ausführungsbeispiel mit Anbringung der Schmierung für den Kurbelzapfen; Fig. 387 eine gußeiserne Kurbelscheibe mit Gegengewicht (s. S. 704); Fig. 388 eine geschmiedete Kurbel mit Gegengewicht.

3. Exzenter und -stangen.

Der Exzenter besteht aus der mit Rücksicht auf Montage ein- oder zweiteilig ausgeführten Exzenterscheibe und dem zweiteiligen Bügel. In Ausnahmefällen wird die Scheibe auch wohl mit der Welle aus einem Stück hergestellt, um ihren Durchmesser möglichst klein zu halten.

Bezeichnet in cm

q die Exzentrizität und D den Durchm. der Welle, dann muß (vgl. Fig. 389)

$$d \text{ cm} > 2 \cdot (q + 0,5 \cdot D)$$

sein.

Meist führt man jedoch die Exzenter mit voller Nabe aus, Fig. 390: Exzenter einer Walzenzugmaschine der Maschinenbau-Akt.-Ges. vorm Gebr. Klein, Dahlbruch. Dann muß sein

$$d \text{ cm} > 2 \cdot (q + 0,5 \cdot D + \delta + x),$$

wenn δ die Nabenstärke und x das Maß in cm bezeichnen, um welches die Lauffläche des Exzenters über der Nabe hervorsteht. Die Länge der Lauffläche muß betragen (vgl. Zapfen, S. 596)

$$l \text{ cm} \cong \frac{P_m \cdot n}{w},$$

wenn bedeuten

P_m in kg den in der Mittelebene des Exzenters wirkenden mittleren Druck, n die Umdrehzahl des Exzenters in der Minute

und w gesetzt wird etwa = 10000 bei Bügeln aus Flußeisen oder Stahl und etwa = 20 000 bei Bügeln mit Weißmetallguß auf gußeisernen Scheiben.

Diesen Werten entsprechen $A_z = 0,33$ bzw. 0,66 bei $\mu = 0,05$. Bei Exzenter der Lokomotiven und solchen, bei denen durch Luftzug oder dgl. für gute Wärmeableitung gesorgt ist, kann w höher gewählt werden.

Fig. 391 zeigt einen mittels Druckschraube verstellbaren Exzenter der Maschinenbau-A.-G. vorm. Ph. Swiderski, Leipzig-Plagwitz;

Fig. 392 einen Exzenterbügel derselben Firma in Hohlguß nebst Schmierring; beide Hälften zweiteiliger Scheiben werden meist durch Stiftschrauben mit Querkeilen oder Muttern zusammengehalten, Fig. 393.

Die Exzenterbügel aus Flußeisen erhalten, um die Reibung zu verringern, meist eine Ausfütterung aus Weißmetall, die gußeisernen häufig.

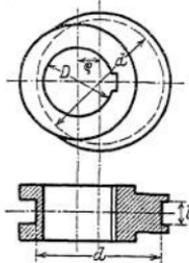


Fig. 389.

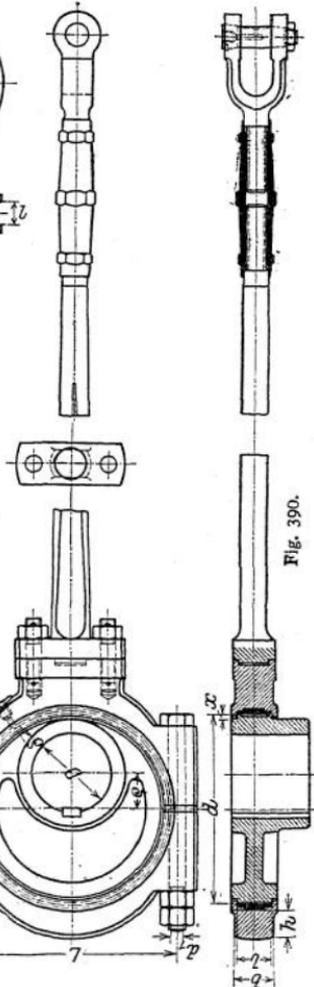


Fig. 390.

Ihre Stärke s ergibt sich bei Annahme eines rechteckigen Querschnittes aus der Beziehung

$$\frac{P_{\max}}{2} \cdot \left(\frac{L}{2} - \frac{D}{4} \right) = \frac{b \cdot h^3}{6} \cdot k_b,$$

wenn P_{\max} die größte Zugkraft der Stange bezeichnet. Der Kerndurchmesser der Bügelschrauben folgt aus

$$\frac{P_{\max}}{2} = \frac{d_1^2 \pi}{4} \cdot k_s.$$

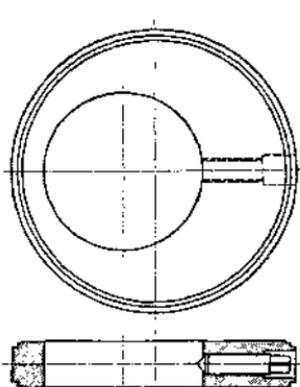


Fig. 391.

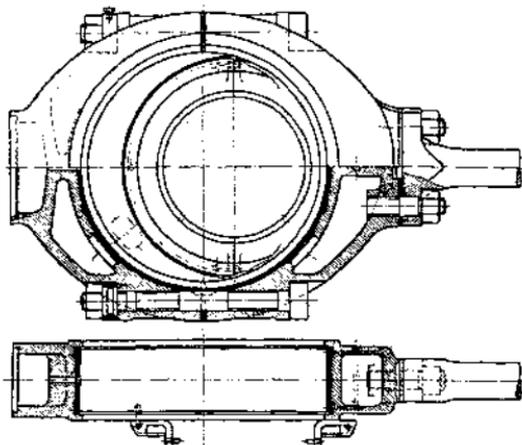


Fig. 392.

Der Querschnitt der meist rund, seltener rechteckig ausgeführten Exzenterstangen ist auf Knickung zu bestimmen. Zur Verbindung mit der einen Bügelhälfte wird dieser ein Flansch der Stange angeschraubt, Fig. 390, oder es werden runde Stangen unmittelbar eingeschraubt. Seltener werden Stange und eine Bügelhälfte in einem Stück hergestellt oder durch Querkeil verbunden.

Fig. 394 zeigt eine Konstruktion, bei der die Druckkräfte zwischen Exzenter- und Schieberstange nicht durch den Gelenkbolzen, sondern mittels eines Zwischenstückes übertragen werden, das durch einen Keil gegen den Gelenkkopf gepreßt wird. Auf diese Weise wird jeder tote Gang vermieden.

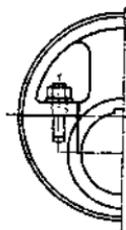


Fig. 393.

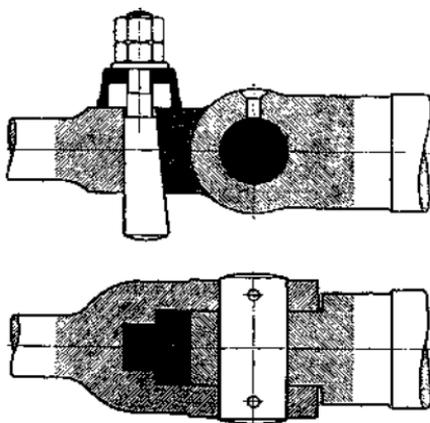


Fig. 394.

4. Schubstangen (auch Pleuel-, Lenk- oder Treibstangen genannt).

Der am umlaufenden Maschinenteil (Stirnzapfen einer Kurbel, Halszapfen einer gekröpften Welle) angreifende Kopf trägt stets ein Lager, der an dem geradlinig geführten Teil (Kreuzkopf, Plunger oder dgl.) kann gabelförmig ausgebildet auch den Zapfen aufnehmen. Die Herstellung wird dadurch teurer, das Gewicht der hin und her gehenden Massen des Kreuzkopfes und der Schubstange aber geringer, weshalb diese Konstruktion sich für raschlaufende Maschinen eignet. In diesem Fall greift man auch häufig zu geschmiedeten Kreuzköpfen; bei ihnen läßt sich leicht das Lager, bei den gegossenen dagegen ebenso bequem der Zapfen einbauen.

Der Schaft erhält bei langsam laufenden Maschinen meist runden Querschnitt, seltener mit abgeflachten Seiten oder doppel-T-förmig (Fig. 395). Sein Querschnitt kann lediglich auf Knickung bestimmt werden aus der Beziehung (S. 410)

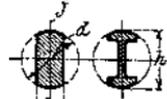


Fig. 395.

$$P = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{S \cdot l^3},$$

da die Zug- bzw. Druckbeanspruchung im allgemeinen nicht maßgebend sein wird. P bedeutet darin die größte Kolbenstangenkraft, l cm die Länge der Schubstange von Mitte zu Mitte Zapfen, J das kleinste Trägheitsmoment. Die in der Mitte vorhandene größte Stärke d bzw. Höhe h läßt man in der Regel nach dem Kurbelzapfen hin auf 0,8 dieses Wertes, nach dem Kreuzkopfbolzen hin auf 0,7 abnehmen; bei großem Durchm. des Kurbelzapfens nimmt h jedoch nach diesem hin zu. Den Sicherheitsfaktor S wählt man sehr hoch, da die Zentrifugalkraft nicht berücksichtigt wird, und zwar etwa

= 25 bei normalen Dampfmaschinen mit 1,5 bis 2 m/sek Kolbengeschwindigkeit; bei geringerer Geschwindigkeit noch höher;

≤ 20 bei Verbrennungsmotoren;

= 40 bis 60 bei stoßweise arbeitenden Maschinen, z. B. Pumpen.

Bei rechteckigem Querschnitt wählt man etwa $d = 1,5$ bis $1,75 \cdot b$.

Für schnelllaufende Maschinen eignet sich vornehmlich der runde Querschnitt mit abgeflachten Seiten

$$(d = 1,75 \text{ bis } 2 \cdot b),$$

sowie der doppel-T-förmige, da beide die durch die Zentrifugalkraft bedingten Biegungsspannungen besser als der runde Querschnitt aufnehmen. Diese Kraft erreicht ihren größten Wert für $\alpha = 90^\circ$ beim Hin- und Rückgang, Fig. 396, und nimmt in diesem Falle vom Wert $m \cdot r \cdot \omega^2$ am Kurbelzapfen auf 0 am Kreuzkopfzapfen ab. Genügend genau kann man sie senkrecht zur Stange wirkend denken; dann bedingt ein Stangenteilchen von der Länge = l cm am Kurbelzapfen die Beschleunigungskraft in kg

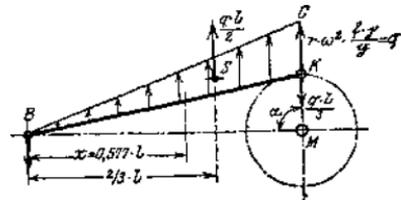


Fig. 396.

$$q = r_{cm} \cdot \omega^2 \cdot \frac{f \cdot \gamma}{g} = \frac{r_{cm}}{100} \cdot \left(\frac{n}{30}\right)^2 \cdot f \cdot \gamma = \left(\frac{n}{300}\right)^2 \cdot r_{cm} \cdot f_{cm} \cdot \gamma,$$

wenn f der Stangenquerschnitt. Das hierdurch bedingte Biegemoment erreicht für $x = 0,577 \cdot l$ vom Kreuzkopf aus seinen größten Wert

$$M_{b_{max}} = \infty \frac{q \cdot l^2}{16},$$

ist also halb so groß, als wenn die Kraft $\frac{q \cdot l}{2}$ sich gleichmäßig über die Stange verteilen würde. Hieraus ergibt sich die Biegungsspannung

$$\sigma_b = \frac{M_{b \max}}{\frac{J}{e}} = \left(\frac{\pi}{1200} \right)^2 \cdot \gamma \cdot r \cdot \frac{f \cdot l^2}{e},$$

wenn J das Trägheitsmoment für die wagerechte Achse und e der Abstand der äußersten Faser von dieser Achse ist.

Die Resultierende der Biegungskräfte $= \frac{q \cdot l}{2}$, im Abstände $\frac{2}{3} \cdot l$ vom Punkt B angreifend, bedingt eine Belastung des Kurbelzapfens von der Größe $\frac{q \cdot l}{3}$ und des Kreuzkopfbolzens mit $\frac{q \cdot l}{6}$.

Beispiel:

$n = 180$; $r = 250$ mm; $l = 1250$ mm; $f = 24$ g/cm; $\gamma = 0,0078$ kg/ccm;

$$q = \left(\frac{180}{300} \right)^2 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 0,0078 = 1,685 \text{ kg};$$

$$\frac{q \cdot l}{3} = \frac{1,685 \cdot 125}{3} = \approx 70 \text{ kg}.$$

Ist f nicht konstant, so tritt an Stelle der Geraden BC eine Kurve, die sich ergibt, wenn man die Masse jedes Stangenteilchens beispielsweise obiger Länge von 1 cm mit der zugehörigen Zentrifugalkraft $r \cdot \omega^2 \cdot \frac{x}{l}$ multipliziert. Wird dabei



Fig. 397.

der ganze Stangenkopf berücksichtigt, so liegt der Schwerpunkt S meist weiter nach dem Kurbelzapfen (Fig. 397¹⁾), d. h. es entfällt mehr als $\frac{q \cdot l}{3}$ auf den Kurbelzapfen, unter Umständen sogar $\frac{q \cdot l}{2}$, wenn S auf MC liegt (die Belastungsfläche geht ja über K hinaus). (Fig. 396.)

In dieser Rechnung ist die Beschleunigung des Punktes B in Richtung BM sowie der Einfluß der Zapfenreibung an beiden Zapfen vernachlässigt.

Auf Knickung ergibt sich ebenso wie vorher

$$P = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{S \cdot l^2},$$

jedoch wählt man $S =$ etwa 6 bis 3, je weniger die zur Ausbildung der Knickung erforderliche Zeit zur Verfügung steht, d. h. je schneller die Maschine läuft.

Die gesamte Beanspruchung aus Zug (Druck) und Biegung muß kleiner als k_b sein, d. h.

$$k_b \geq \frac{P}{f} + \left(\frac{\pi}{1200} \right)^2 \cdot \gamma \cdot r \cdot \frac{f \cdot l^2}{e}.$$

Die Köpfe werden entweder geschlossen oder mit Rücksicht auf Montage offen ausgeführt. Die Nachstellung der Lagerschalen ist so einzurichten, daß die Entfernung l von Mitte zu Mitte Lager auch bei eingetretener Abnutzung konstant bleibt; sie muß deshalb bei dem einen Lager eine Verlängerung der Stange, beim anderen eine Verkürzung bedingen, d. h. an einem Lager muß die äußere, am anderen die innere Schale nachstellbar sein.

¹⁾ Entnommen aus: Frey, Schubstangen und Kreuzköpfe. Einzelkonstruktionen aus dem Maschinenbau, VI. Berlin 1913. Julius Springer.

Ausführungsbeispiele zeigen: Fig. 398 und 398 a: Stange mit beiderseits geschlossenen Köpfen der Maschinenbau-Aktiengesellschaft vorm. Gebr. Klein, Dahlbruch, für eine Tandem-Walzenzugmaschine 600/1000 \varnothing , 1000 Hub, $n = 75$ bis 80. Die Neigung des Keiles wird 1 : 5 bis 1 : 10 genommen und ist durch die Größe der zulässigen Abnutzung bedingt.

Fig. 399: Ausführung der Preußischen Staatseisenbahnen.

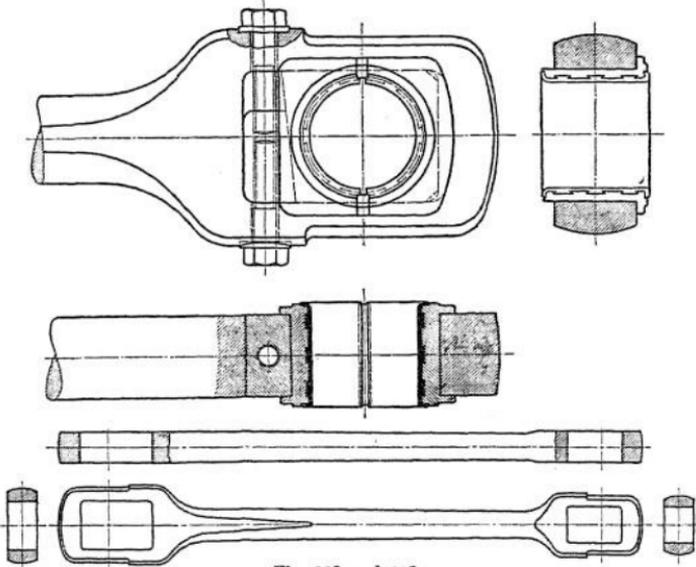


Fig. 398 und 398 a.

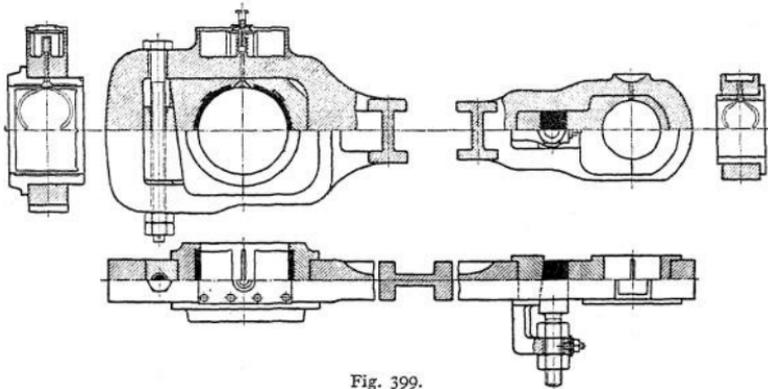


Fig. 399.

Fig. 400: Stange einer liegenden Verbundmaschine $n = 150$, 290/540 \varnothing , 630 Hub, $p = 10$ Atm. Überdruck; Ausführung von Hugo Lentz, Berlin. Ein Stangenkopf ist offen ausgeführt (Marinekopf). Schrauben und Zwischenlagen (Messingbleche verschiedener Stärke) hindern die Schalen am Drehen. Durch Ändern der Zwischenlage-Stärke wird nachgestellt. Fig. 400 a zeigt die Stange vor Teilung des Kopfes. Wird die Zwischenlage stärker als die Teilfuge gewählt, und die Schale dann ausgebohrt, so fällt ihre Stärke in der Mitte größer aus.

Fig. 401 und 401 a zeigen eine Konstruktion der Maschinenbau-Aktiengesellschaft vorm. Ph. Swiderski, Leipzig-Plagwitz; Schrauben zur Aufnahme der Biegungskräfte sorgfältig eingepaßt; Fig. 402, Bauart der Preußischen Staatsbahnen.

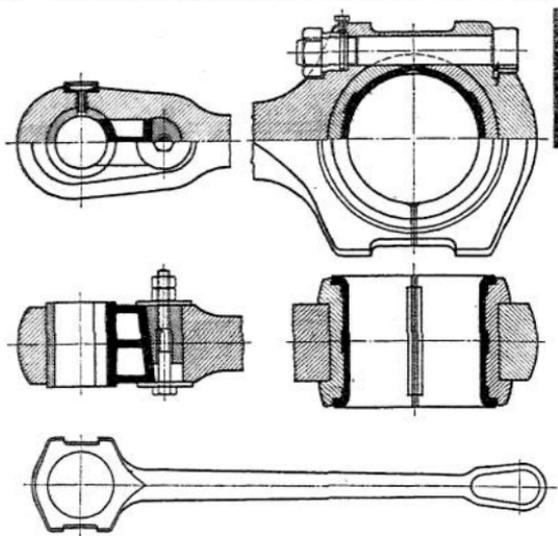


Fig. 400 und 400 a.

Fig. 403: Lenkstange für einen Kompressor der Maschinenbau-Aktiengesellschaft Balcke, Frankenthal. Fig. 404: ausgebohrte Stange aus Chromnickelstahl.

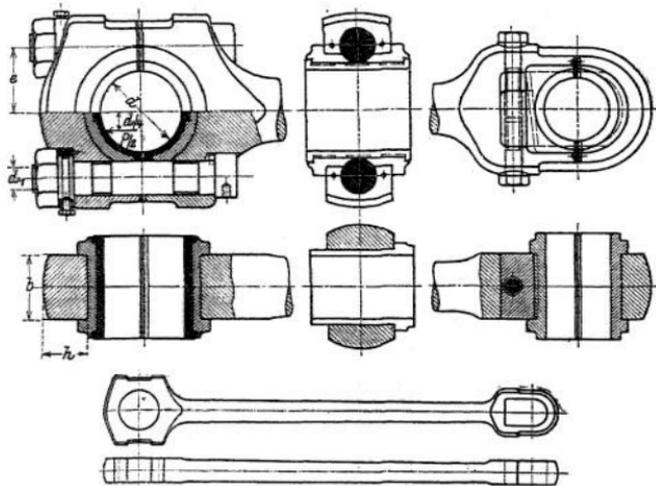


Fig. 401 und 401 a.

Fig. 405 bis 407 zeigen Ausführungen mit gegabelten Köpfen. Ist der Kreuzkopfbolzen in der Stange fest (Fig. 406 und 407), so wird er bei größeren Kräften konisch eingepaßt, wobei beide konischen Flächen auf ein und demselben Kegel-

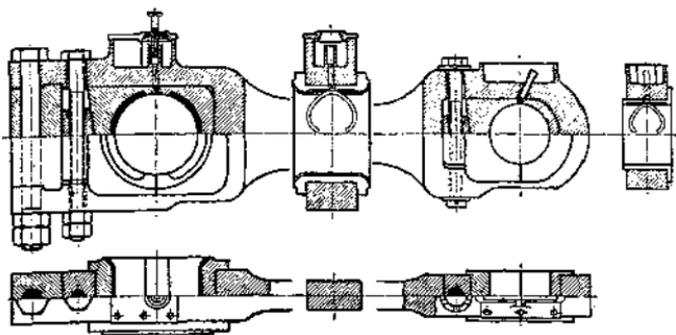


Fig. 402.

mantel liegen ($\operatorname{tg} \alpha = 1 : 10$ bis $1 : 20$) (Fig. 406, Swiderski, Leipzig); bei kleineren Kräften ist auch zylindrische Ausführung zulässig, Fig. 407, wobei der Bolzen durch Keile gehalten wird. Ein Verspannen des Kopfes ist dabei ausgeschlossen.

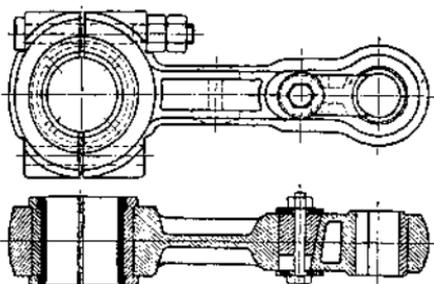


Fig. 403.

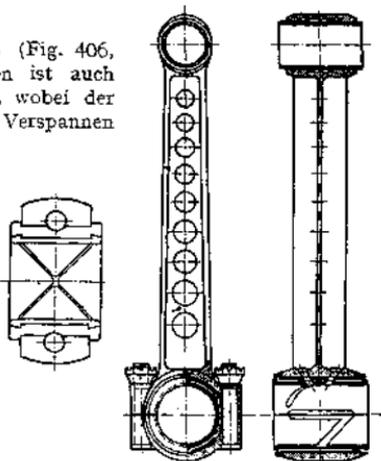


Fig. 404.

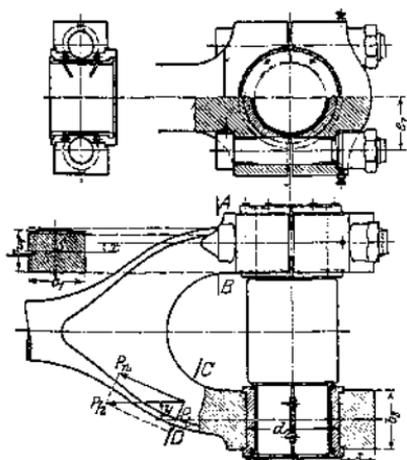


Fig. 405.

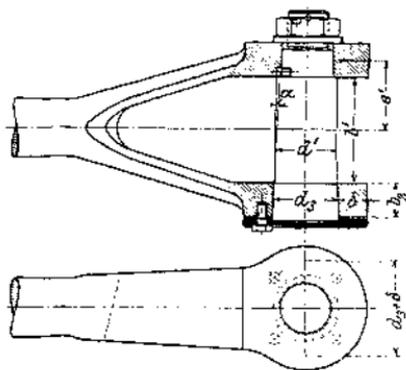


Fig. 406.

Fig. 408¹⁾: Stange eines Kompressors für 800 kg Kolbenstangenkraft; zwei-reihiges Kugellager mit je 12 Kugeln 7/16'' ($k = 134$, s. S. 641), einreihiges

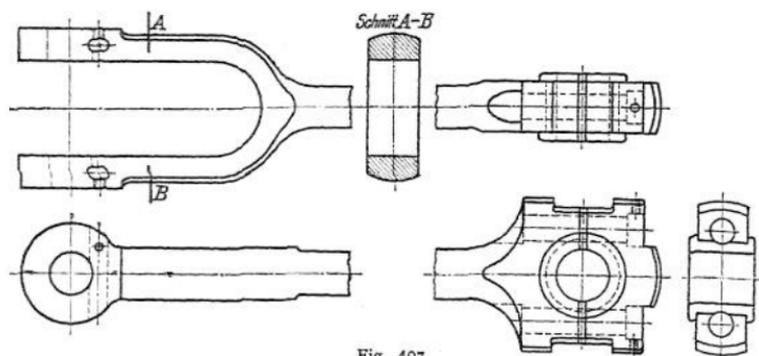


Fig. 407.

mit 18 Kugeln 9/16'' ($k = 110$). Der äußere Laufring des Kreuzkopflagers hat axiales Spiel, um Klemmungen zu verhindern. Am Halslager der Welle ist eine zweiteilige Hülse eingeschaltet, um dem inneren Laufring zwecks Aufbringens einen größeren Durchmesser geben zu können.

Die Berechnung der Schrauben geteilter Köpfe erfolgt nach der Beziehung (vgl. Fig. 401)

$$0,5 \cdot (1 + m) P = \frac{d_1^2 \pi}{4} \cdot k_z,$$

wobei m die Vorspannung berücksichtigt. Berechnung der Deckelstärke h bei Vernachlässigung der Lagerschalen nach

$$0,5 \cdot P \cdot \left(e - \frac{d}{4} \right) = \frac{b \cdot h^2}{6} \cdot k_b.$$

Der Stangenquerschnitt AB (vgl. Fig. 405) wird auf Zug und Druck beansprucht, ferner auf Biegung, wenn sein Schwerpunkt S nicht auf Lagermitte liegt, wenn also $x > 0$. Wird der Querschnitt rechteckig angenommen, dann ergeben sich diese Beanspruchungen zu

$$\sigma_z = \frac{0,5 \cdot P}{b_1 \cdot h_1} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_b = \frac{0,5 \cdot P \cdot x}{\frac{b_1 \cdot h_1^2}{6}}$$

mithin die größte Beanspruchung

$$\sigma = \sigma_z + \sigma_b.$$

Ein beliebiger Querschnitt CD erleidet ebenso Zugbeanspruchung durch die Normalkraft P_n , und Biegebungsbeanspruchung durch das Moment $0,5 \cdot P \cdot y$; die Schubbeanspruchung P_t kann vernachlässigt werden.

¹⁾ Entnommen aus Volk: Einzelkonstruktionen aus dem Maschinenbau, IV: Ahrens, Kugellager. Berlin 1913. Julius Springer.

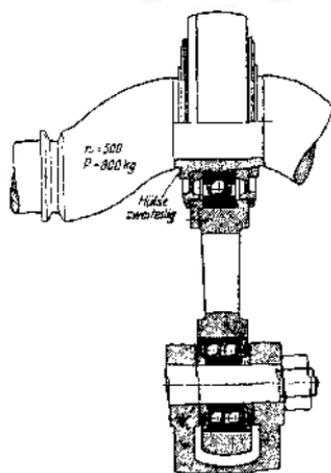


Fig. 408.

Die Wandstärke δ ergibt sich aus

$$0,5 \cdot P \cdot \left(a_1 - \frac{d_2}{4} \right) = \frac{b_2 \cdot \delta^2}{6} \cdot k_b,$$

die Bügelstärke eines geschlossenen Kopfes (vgl. Fig. 406) aus

$$0,5 \cdot P \cdot \left(\frac{d_3 + \delta}{8} \right) = \frac{b_2 \cdot \delta^2}{6} \cdot k_b,$$

wenn man die Nabe als zweiseitig eingespannt und in der Mitte mit $\frac{P}{2}$ belastet auffaßt (Entfernung von Mitte zu Mitte Einspannstelle = $d_3 + \delta$).

Der Durchmesser des Kreuzkopfpfapfens folgt aus

$$\frac{P}{2} \cdot \left(e' - \frac{l'}{4} \right) = 0,1 \cdot d'^3 \cdot k_b,$$

wobei die Flächenpressung bis zu $k \approx 120$ kg/qcm für Stahl (Lauffläche gehärtet) auf harter Bronze betragen darf. Im Mittel $l' = 1,5 \cdot d'$, $b_2 = 0,5 \cdot d'$.

Mithin $P = k \cdot l' \cdot d' \approx 120 \cdot 1,5 \cdot d'^2$; daraus $d' = \sqrt{\frac{P}{120 \cdot 1,5}}$; dann ist $\sigma_b \approx k_b$ zu ermitteln. Erwärmung durch Reibungsarbeit kommt nicht in Frage.

5. Kreuzköpfe.

Vgl. Schubstangen S. 709, 713 und 715. Die Kreuzköpfe können den Zapfen oder das Lager tragen: Zapfen- bzw. Lagerkreuzköpfe.

Baustoff des Kreuzkopfkörpers: Grauguß, Stahlguß oder Flußstahl. Die abnehmbaren und nachstellbaren Schalen bestehen aus Grauguß, mitunter mit Weißmetall-Ausguß. Die Gleitflächen werden eben ausgeführt, wenn die Geradföhrung sich in einfacher Weise hobeln läßt, z. B. bei stehenden Maschinen und Lokomotiven, meist jedoch zylindrisch gedreht. Die Schuhe werden entweder mit dem Körper zusammen abgedreht, wobei seitlichen Schrauben, Fig. 441, solchen in der Mittelebene, Fig. 410, der Vorzug zu geben, oder zu 4 oder 6 in einem Stück gegossen, abgedreht und darauf getrennt. Die größte Flächenpressung soll 2 bis 3 kg/qcm für Grauguß und 4 kg/qcm für Weißmetall nicht überschreiten, wodurch sich die Größe der Gleitflächen bestimmt; bei Lokomotiven kommt bis 10 kg/qcm vor, was größere Abnutzung bedingt. Nachstellung erfolgt bei ebenen Flächen meist durch gegenseitiges Nähern der Führungsflächen, bei zylindrischen durch Unterlegen von Platten unter die Schuhe des Kreuzkopfes. Die größte Abnutzung tritt in der Mitte der Führungsflächen ein.

Stangenende schwach konisch (Kreuzkopfnabe fällt stärker aus, Fig. 39) oder zylindrisch (liegt im Grunde an, Fig. 38) und durch Keil gehalten oder eingeschraubt.

Ausführungsbeispiele. Fig. 409: einfachste Form mit nicht nachstellbaren, ebenen Gleitflächen; das Loch in der Wand am Ende der Kolbenstange dient zum Austreiben der Stange. Bei Fig. 410, Ausführung von Hugo Lentz, Berlin, wird nur der obere Schuh durch zwei Schrauben gehalten; in der Mitte wird das Schmiermaterial zugeführt; Sicherung des Bolzens durch Schraube mit

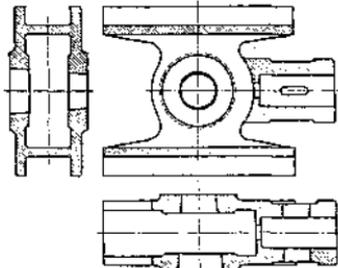


Fig. 409.

Platte. Beim größten Ausschlage der Schubstange muß zwischen ihr und dem Schuh noch Spielraum vorhanden sein, wodurch der Durchmesser des Kreuzkopfes festgelegt ist. Fig. 411 zeigt eine Ausführung der Maschinenbau-

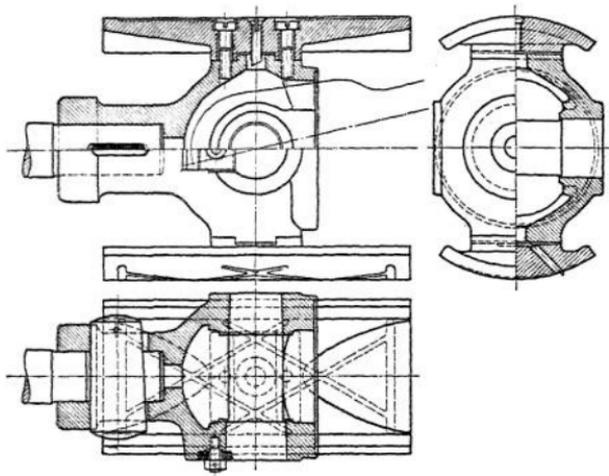


Fig. 410.

Aktiengesellschaft vorm. Gebr. Klein, Dahlbruch, für eine Walzenzugmaschine 800/975 \varnothing 1000 Hub. Die Erhebungen *A* am Körper legen sich in Vertiefungen zwischen den seitlichen Erhebungen *B* der Schuhe, die als Rippen-

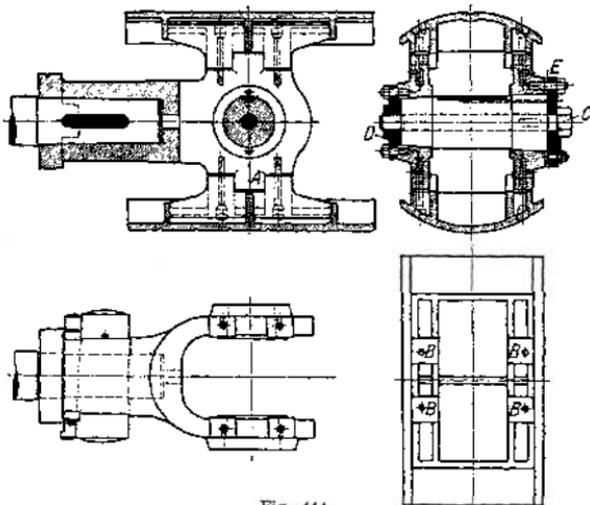


Fig. 411.

gußkörper ausgebildet sind. Durch Anziehen der Schraube *C*, deren Muttergewinde in der Platte *D*, wird der Bolzen eingepreßt. Mittelst in der Platte *E* vorgesehener, nicht gezeichneter Abdrückschrauben kann der Bolzen gelöst werden. Zapfen zur Schmierung durchbohrt.

Statt dessen können auch zwei außen konische, innen zylindrische geschlitzte Ringe zwischen Kreuzkopf und zylindrischem Bolzen beim Anziehen mittels Schraube die Sicherung des Bolzens übernehmen, oder die außen zylindrischen Bolzenenden werden geschlitzt, innen kegelförmig ausgebohrt, wobei die beiden Kegelstücke in den Bolzen verlegt werden.

Da der Normaldruck N auf die Kreuzkopfbahn bei Rechtsdrehung stets nach unten, bei Linksdrehung stets nach oben gerichtet ist (vergl. Fig. 377) — umgekehrt bei Pumpen und dergl., wenn der Kurbelzapfen treibt —, so kann man bei stets gleicher Drehrichtung eine Gleitfläche fortlassen, wenn nicht an den Hubenden infolge Kompression ein Druckwechsel stattfindet. Da der Schwerpunkt des Kreuzkopfes dann aber nicht mehr mit der Kolbenstangenmitte zusammenfällt, so haben diese einseitigen Kreuzköpfe infolge des Momentes der Reibung an der Bahn und infolge der Beschleunigung ihrer Masse das Bestreben zu ecken, weshalb ihre Verbindung mit der Stange besonders sorgfältig zu geschehen hat, häufig werden sie auch aus einem Stück mit ihr geschmiedet. Man ist dabei bestrebt, liegende Maschinen rechtsdrehend zu bauen, da einerseits die untere Gleitfläche sich besser schmieren läßt und außerdem das Eigengewicht des Kreuzkopfes stets Berührung mit seiner Gleitfläche bedingt, während bei Benutzung der oberen Gleitfläche infolge des Eigengewichtes und der Kompression ein Abheben und damit Stöße eintreten können. Aus diesem Grunde sieht man stets Deckleisten oder schwalbenschwanzförmige Führung vor.

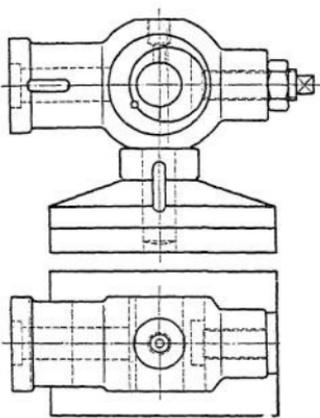


Fig. 412.

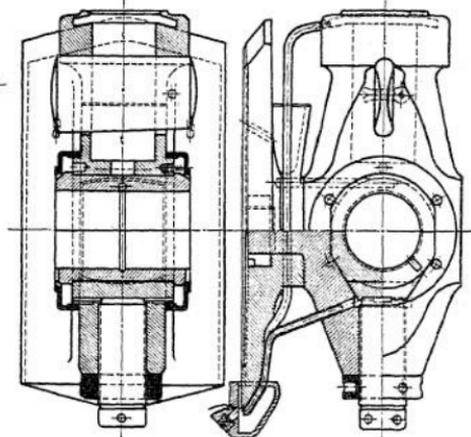


Fig. 413.

Ausführungsbeispiele: Fig. 412, zur Schubstange Fig. 407 gehörig. Der Schuh wird durch einen Keil gehalten; das Lager ist zweiteilig und kann mittels Druckschraube nachgestellt werden, die auf eine stählerne Beilage drückt, welche in eine Rotgußschale eingelassen ist; hierbei verliert diese Schale ihre Anlagefläche im Kopf. Wird der Kreuzkopf unter Fortfall der Keilverbindung an die Stange ausgeschmiedet, so ergibt sich die kürzeste Baulänge der Maschine. Soll die andere Schale nachgestellt werden, so kann die Kolbenstange Gewinde und Stellmutter erhalten.

Fig. 413: Kreuzkopf einer stehenden Verbundmaschine 400 mm Hub der Firma Swiderski, Leipzig. Nachstellung durch eine Druckschraube wie bei Fig. 412. Da Gleitschuh größer als Maschinenhub, bleibt eine Stelle der Gleitbahn stets überdeckt. Von hier erfolgt die Schmierung; Abfluß des verbrauchten Schmiermaterials unten.

Fig. 414¹⁾: Kreuzkopf einer Gasmaschine. Eingeschraubte Stange hohl für Wasserkühlung, linke Lagerschale mittels Keil nachstellbar. Fig. 415¹⁾: durch-

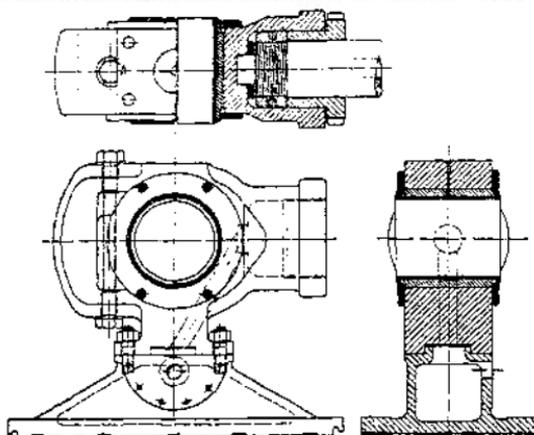


Fig. 414.

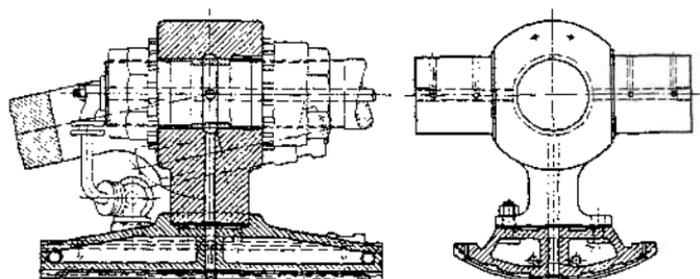


Fig. 415

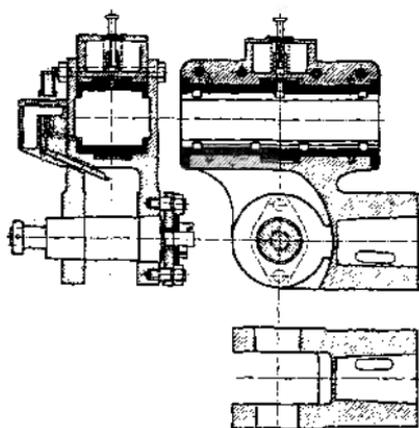


Fig. 416.

bohrte Stange durch Muttern gehalten; auch diese Konstruktion erreicht kürzeste Baulänge der Maschine. Schmierung des Zapfens erfolgt von der Gleitbahn aus; Kreuzkopf ist hierzu durchbohrt; das Öl tritt von dem ringförmigen Raum zwischen Kreuzkopf und Zwischenstück aus in die Zapfendurchbohrungen.

Auch bei wechselnder Drehrichtung kann man einseitige Kreuzköpfe verwenden und hierbei entweder die Rückseite des Schuhs anliegen lassen oder nach Fig. 416, Ausführung für Schnellzugslokomotiven der Preussischen Staatsbahnen, den Schuh die Gleitbahn umfassen lassen.

¹⁾ Entnommen aus: Dubbel, Großgasmaschinen. Berlin 1910. Julius Springer.

6. Kreuzkopfführungen.

Bei kleineren Maschinen wird die Kreuzkopfführung mit den beiden Kurbelagern in einem Stück gegossen: Gabelrahmen, Fig. 417, für eine Maschine 200 Durchm. 300 Hub. Welle wird mit Kröpfung ausgeführt. Bei größeren Maschinen zieht man vor, ein besonderes Außenlager für die mit Stirnkurbel versehene Welle auszuführen und erhält damit den einseitigen Bajonettrahmen,

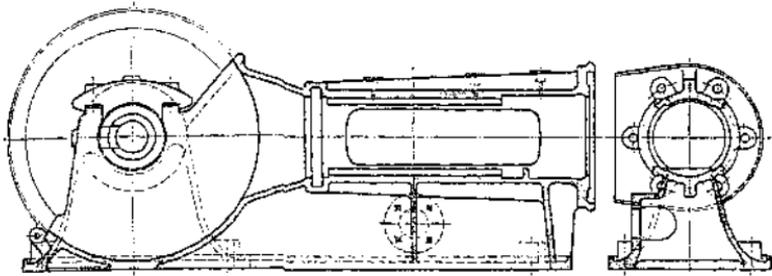


Fig. 417.

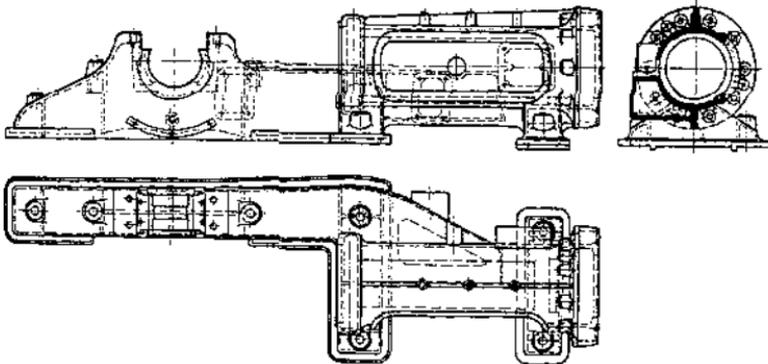


Fig. 418.

Fig. 418. Wird die Kolbenstange mittels eines Keiles mit dem Kreuzkopf verbunden, so ist in der Rückwand ein besonderes Keilloch vorzusehen, um den Keil austreiben zu können. Das Wellenlager erhält bei kleineren Ausführungen meist nur zwei Lagerschalen mit Teilfuge unter 45° , um den Kolbenstangendruck nicht auf sie wirken zu lassen; bei größeren ist das Lager drei- oder vierteilig, Fig. 419 und 420.

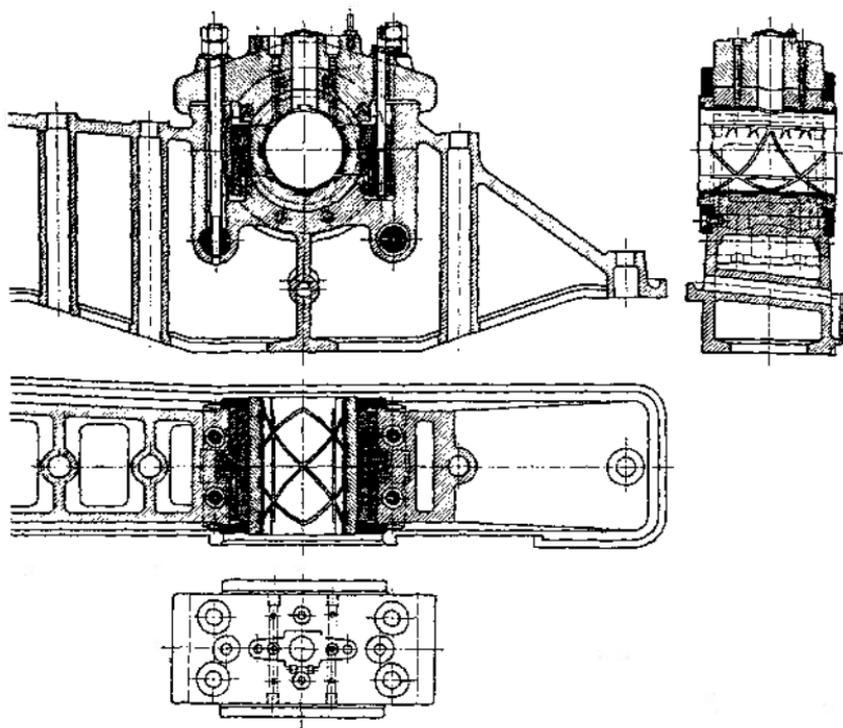


Fig. 419.

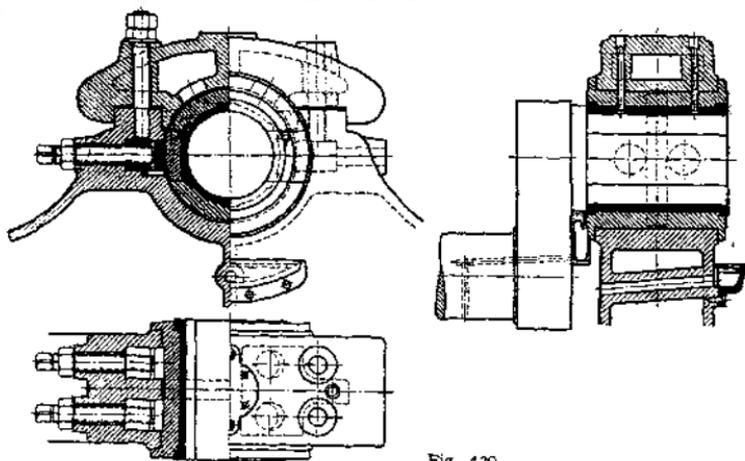


Fig. 420.

Die in der Wagrechten liegenden Schalen können bei Fig. 419 durch Keile nachgezogen werden, wobei die Stellschrauben kaum beansprucht werden, während bei Fig. 420 der ganze auf die wagerechten Schalen entfallende Druck von den Schrauben aufgenommen werden muß. Beim Übergang vom Rahmen zum Lager ist die ge-

fährlichste Stelle. Bruch erfolgt etwa nach ab und cd der Fig. 421 durch gleichzeitige Wirkung der Normalkraft P_n und des Biegemomentes $M_b = P(a+c)$ (Fig. 422). Größte Beanspruchung an der Innenseite im Abstände e vom Schwerpunkt der Bruchfläche f ergibt sich nach Bach bei Vernachlässigung von cd und der Schubbeanspruchung P_s zu

$$\sigma_{\text{kg/qcm}} = \frac{P_n}{f} + \frac{M_b}{f \cdot \varrho} + \frac{M_b}{x \cdot f \cdot \varrho} \cdot \frac{e}{\varrho + e},$$

$$\text{mit } \varrho = e + r,$$

$x \cdot f = - \int \frac{\eta}{\varrho + \eta} \cdot d f$, wobei η der Abstand eines beliebigen Flächenteilchens vom Schwerpunkt der Bruchfläche; negative Werte nach (Fig. 421) a (größter Wert $-e$), positive nach b hin. Zeichnerische Lösung s. S. 472; für zusammengesetzte rechteckige Querschnitte, Fig. 423, ist für jeden einzelnen Querschnitt f' :

$$x \cdot f' = -f' + \varrho \cdot b \cdot \ln \frac{\varrho + e_1}{\varrho + e_0} \quad \text{und} \quad x \cdot f = \sum x \cdot f'$$

M_b ist negativ zu nehmen, wenn es Vergrößerung der Krümmung bedingt, sonst positiv.

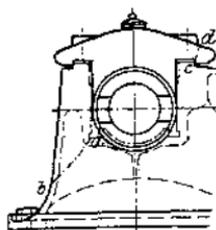


Fig. 421.

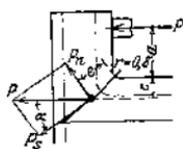


Fig. 422.

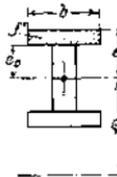


Fig. 423.

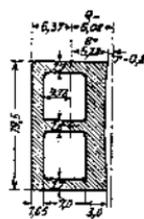


Fig. 424.

Der Neigungswinkel α der Bruchfläche ab ist dadurch zu ermitteln, daß für verschiedene Winkel α die Größe von f und σ bestimmt wird; das zu σ_{max} gehörige f ist die wahrscheinliche Bruchfläche (meist $\alpha = 40 - 45^\circ$).

Beispiel: $r = 0,8$ cm, $P = 2125$ kg, $a = 7,4$ cm, $c = 3,13$ cm, $\alpha = 40^\circ$, Querschnitt nach Fig. 424:

$$f = 19,5 \cdot 11,65 - 7,0 \cdot 14,5 = 227,175 - 101,5 = 125,675 \text{ qcm},$$

$$e = \frac{227,175 \cdot 5,825 - 101,5 \cdot (3,0 + 3,5)}{125,675} = 5,28 \text{ cm},$$

$$\varrho = 0,8 + 5,28 = 6,08 \text{ cm},$$

$$x \cdot f = -19,5 \cdot 3,0 + 6,08 \cdot 19,5 \cdot \ln \frac{6,08 - 2,28}{6,08 - 5,28},$$

$$-5,0 \cdot 7,0 + 6,08 \cdot 5,0 \cdot \ln \frac{6,08 + 4,72}{6,08 - 2,28},$$

$$-19,5 \cdot 1,65 + 6,08 \cdot 19,5 \cdot \ln \frac{6,08 + 6,37}{6,08 + 4,72},$$

$$= -106,07,$$

$$x = \frac{106,07}{125,675} = 0,844,$$

$$P_n = 2125 \cdot \sin 40^\circ = 1320 \text{ kg},$$

$$M_b = -2125 \cdot (7,4 + 3,13) = -22\,370 \text{ cmkg,}$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1320}{125,675} - \frac{22\,370}{125,675 \cdot 6,08} - \frac{22\,370}{0,844 \cdot 125,675 \cdot 6,08} \cdot \frac{-5,28}{6,08 - 5,28}, \\ &= 10,5 - 29,3 + 229,0. \\ &= \infty 210 \text{ kg/qcm.} \end{aligned}$$

7. Kolbenstangen.

Sie werden meist aus hartem, zähem Stahl hergestellt, um die Abnutzung und Reibung in der Stopfbüchse gering zu halten.

Bei stehenden Maschinen sind sie vornehmlich auf Knickung zu berechnen nach der Beziehung (vgl. S. 411)

$$P = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot J}{m \cdot l^2} = \infty \frac{E \cdot d^4}{2 \cdot m \cdot l^2}$$

bzw.

$$P = \infty \frac{E}{2 \cdot m} \cdot \frac{d^4 - d_2^4}{l^2},$$

wenn d_2 der innere Durchmesser einer hohlen Stange ist. Dabei

$$m = 8 \text{ bis } 10,$$

wenn die Kolbenstangenkraft zwischen 0 und P schwankt:

$$m = 15 \text{ bis } 20,$$

wenn sie zwischen $+P$ und $-P$ schwankt. Im Mittel $d = \infty \frac{1}{7} \cdot D$, wenn $D =$ Zylinderbohrung.

Bei liegenden Maschinen wird der Kolben entweder von der Zylinderwand getragen, in welchem Falle die Stange wie vor zu berechnen ist, oder bei durchgehender Stange häufig von dieser (vgl. Kolben). In diesem Falle ist die Stange außerdem auf Biegung zu berechnen, wobei ihre Durchbiegung (S. 430) sich ergibt zu (Fig. 425)

$$f = \frac{L^3}{48} \cdot \frac{G_k + \frac{5}{8} \cdot G_s}{E \cdot J},$$

wenn $G_k =$ Gewicht des Kolbens,

$G_s =$ Eigengewicht der Stange,

$J =$ Trägheitsmoment zum Durchmesser d_1 oder einem Mittelwert zwischen d und d_1

und L bei tragenden Stopfbüchsen deren Entfernung, bei nicht tragenden (meist der Fall) die Entfernung von Mitte Kreuzkopf bis Mitte Gleitschuh. Im letzten Falle müssen die Stopfbüchsen sich um f heben und senken können.

Diese Durchbiegung f kann man vermeiden, wenn man die mit G_k belastete Stange bei einer Stützweite L mit umlaufendem Stichel abdreht, so daß sie in unbelastetem Zustande sich nach oben durchbiegt, vgl. S. 911.

Durchgehende Stangen sind bei liegenden Maschinen stets zu empfehlen.

Die Befestigung des Kolbenkörpers geschieht entweder durch Konus — Neigung $\tan \alpha = 1 : 1$ bis $1 : 2$ bei kurzem Kegel (Fig. 425) oder $1 : 10$ bis $1 : 20$ bei langem Kegel (Fig. 426) — oder mit Mutter, seltener mit Keil oder Gewinde (vgl. Fig. 435); die des Kreuzkopfes meist durch schlanken Konus und Keil, seltener durch Gewinde.

Unter der Annahme, daß P den Normaldruck N und dieser wiederum die Reibung $\mu \cdot N$ entgegengesetzt gerichtet P erzeugt, so daß nur $\frac{P}{2} - \mu \cdot N$ für eine Nabhälfte zur Wirkung kommt, kann der Querschnitt F der auf dem Konus

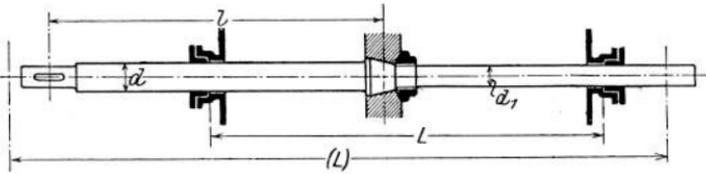


Fig. 425.

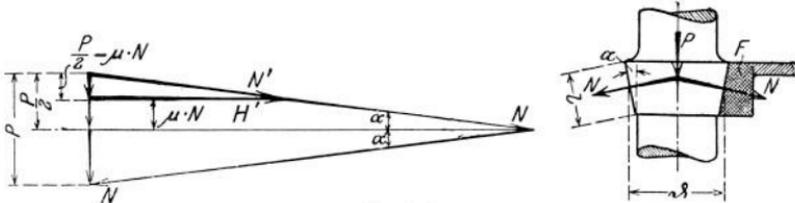


Fig. 426.

sitzenden Nabe des Kolbens bzw. des Kreuzkopfes näherungsweise berechnet werden aus (Fig. 426)

$$H' = 2 \cdot F \cdot k_z$$

und die Flächenpressung auf den Konus aus dem Normaldruck

$$N' = \vartheta \cdot l \cdot k$$

Kurzer Kegel bedingt kleines H' , also auch kleineres k_z .

8. Kolben.

Nach ihrer Konstruktion werden sie eingeteilt in

1. Scheibenkolben;
2. Taucherkolben oder Plunger, auch Rohrkolben genannt;
3. Ventilkolben oder durchbrochene Kolben — Kolben mit eingebauten Ventilen.

Die Abdichtung zwischen Kolben und Zylinder kann geschehen

1. durch im Kolben eingebaute Dichtungen — meist bei Scheibenkolben;
2. durch im Zylinder eingebaute Dichtungen (fast stets Stopfbüchsen) — meist bei Taucherkolben;
3. durch Einschleifen des Kolbens — gleicher Ausdehnung wegen nur bei gleichem Material für Kolben und Zylinder zu empfehlen.

Das Kolbengewicht soll möglichst gering sein, um die hin und her gehenden Massen und ferner bei liegenden Maschinen die Reibung klein zu halten. Leichte Kolben werden bei diesen von der Stange getragen. Biegt sich die Stange dabei maximal um y durch, dann wird der Kolben um mindestens $3 \cdot y$ im Durchmesser kleiner als die Zylinderbohrung gehalten. Schwere Kolben werden meist von der Zylinderwandung getragen, und man läßt sie auf etwa $\frac{1}{3}$ des Umfanges aufruhcn, Fig. 427.

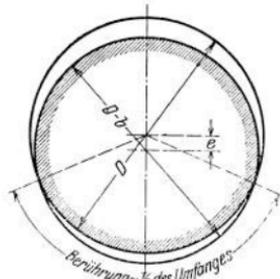
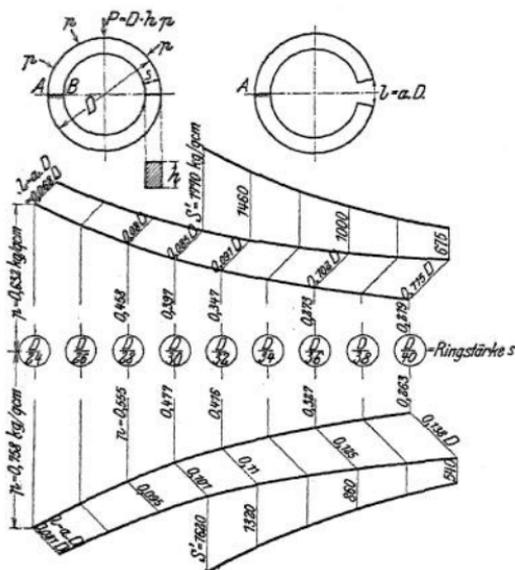


Fig. 427.

Der Kolben wird zuerst genau nach der Zylinderbohrung D gedreht, dann exzentrisch um e aufgespannt, und auf den Durchmesser $(D - b)$ fertig gestellt, wobei b bis zu 1 mm gewählt wird. Durch Wahl von b und die Länge der Berührung



Obere Hälfte für $k_b = 1000 \text{ kg/qcm}$
 Untere " " $k_b = 1200 \text{ "}$
 S' = Spannung beim Überstreifen.

Fig. 428.

ergibt sich dann e . Meist wird nur der Teil zwischen den Kolbenringen exzentrisch gedreht, der übrige Teil zentrisch zum Zylinder, und zwar so, daß er die Wandung nicht berührt. Kolbenkörper aus Stahlguß dürfen die Wandung nicht berühren. Flächenpressung zwischen Zylinder und Kolben bei Dampfmaschinen = 0,5 bis 1 kg/qcm, in Ausnahmefällen etwas höher. Der Nachteil der Berührung ist ungleichmäßige Abnutzung des Zylinders, die bei stehenden Maschinen ganz vermieden wird.

Der äußere Dichtungsring des Kolbens soll die Zylinderlauffläche um 0,5 bis 1 mm überschleifen, um Gratbildungen zu verhindern; umgekehrt muß der Kol-

ben eine Metaldichtung überschleifen, falls sie im Zylinder angebracht.

Alle Muttern sind am besten aus Bronze herzustellen, um Festrosten zu vermeiden; sie sind außerdem zu sichern.

Die Kolbenringe bestehen meist aus weichem zähem Grauguß und werden zu mehreren als Zylinder gegossen und einzeln von ihm abgestochen. Sie müssen, um Schlägen zu verhindern, möglichst leicht und hoch sein. Soll ein Ring im Betrieb um das Maß $l = a \cdot D$ zusammengedrückt werden, Fig. 428¹⁾, so beträgt

im Rohguß: sein Durchmesser = $D + \frac{l}{\pi} + y$, wenn y die Bearbeitungszugabe,

mithin die Wandstärke = $s + y$;

vorgedreht: sein Durchmesser = $D + \frac{l}{\pi} + \frac{y}{2}$.

Wandstärke = $s + \frac{y}{2}$, wenn die halbe Zugabe abgedreht wird.

Nach dem Vordrehen wird ein Stück von der Länge l herausgeschnitten, darauf der Ring zusammengespant und auf den Durchmesser D und die Wandstärke s fertig gedreht. Man wählt etwa $l = a \cdot D = \text{bis } \frac{1}{8} \text{ bis } \frac{1}{5} D$. Der Nachteil dieser Konstruktion ist ungleicher Druck auf die Zylinderwandungen und zwar zu starker an der Stoßfuge, zu schwacher bei A . Besser läßt man deshalb die Wandstärke nach der Stoßfuge hin abnehmen auf etwa $0,5 \cdot s$ bis $0,7 \cdot s$, womit allerdings ungleiche seitliche Auflagerflächen, mithin ungleiche seitliche Abnutzung

¹⁾ Entnommen aus Volk, Einzelkonstruktionen aus dem Maschinenbau, II: Kolben. Berlin 1912. Julius Springer.

verbunden ist. In diesem Falle sind auch die Nuten des Kolbens exzentrisch zu drehen, da sonst der Dampf in den Räumen unter den Ringen bei der Expansion das Schmiermaterial aus den Fugen drücken würde. Man verwendet auch unrunde Ringe nach dem Verfahren von K. Reinhardt, Dortmund. Dieser sägt einen kreisrunden Ring vom Durchmesser D auf und klemmt ein Stück von der Länge $l + \text{Sägeblattstärke}$ zwischen die freien Enden. Wird dann ein gleicher geschlossener Ring (ellipsenförmig) hergestellt und ein Stück gleicher Länge herausgeschnitten, so wird sich der Ring nach dem Zusammenspannen mit gleichmäßigem Druck an den Zylinder legen. Zum gleichen Zweck dreht die Davy Robertson Kolbenring-Gesellschaft, Berlin, den Ring auf den richtigen Durchmesser, hämmert dann aber von innen Nuten dreieckförmigen Querschnittes ein, Fig. 429, so daß er sich dehnt. Da der Nutenquerschnitt gleichmäßig abnimmt bis auf Null an der Teilfuge, wird der Ring mit gleicher Pressung in der Bohrung anliegen, sogar noch nach eingetretener Abnutzung.

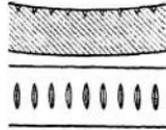


Fig. 429.

Unter der Voraussetzung eines gleichmäßigen Druckes p kg/qcm zwischen Ring und Zylinder erfährt der Querschnitt AB eine Beanspruchung, die sich annähernd ergibt aus

$$M_b = D \cdot h \cdot p \cdot \frac{D}{2} = \frac{h \cdot s^2}{6} \cdot k_b$$

mit $k_b = 800$ bis 1200 kg/qcm und $p = 0,1$ bis $1,2$ kg/qcm als üblichen Werten, wobei die höheren Werte p für höhere Dampfspannungen und langsam laufende Maschinen gelten. Hieraus folgt die Ringstärke

$$s = D \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot p}{k_b}}$$

oder die Pressung

$$p = \frac{k_b \cdot s^2}{3 \cdot D^2}.$$

Mit $s = \frac{D}{x}$ ergeben sich mit Hilfe der Festigkeitslehre die weiteren Beziehungen:

$$k_b = \frac{a \cdot E}{2,4 \cdot x} \quad \text{und} \quad p = \frac{a \cdot E}{7,2 \cdot x^3};$$

z. B. $E = 800\,000$, $x = 36$, $l = a \cdot D = \frac{D}{10}$:

$$k_b = \frac{800\,000}{2,4 \cdot 10 \cdot 36} = 930 \text{ kg/qcm,}$$

$$p = \frac{800\,000}{7,2 \cdot 10 \cdot 36^3} = 0,33 \text{ kg/qcm.}$$

Die Spannung beim Überstreifen des Ringes über den Kolben ergibt sich aus

$$k_{b1} = 1,6 \cdot E \cdot \left(\frac{s}{D - s + \frac{l}{\pi}} \right)^2;$$

sie soll < 1800 kg/qcm sein.

Z. B. für obigen Ring:

$$k_{b1} = 1,6 \cdot 800\,000 \cdot \left(\frac{\frac{D}{36}}{D - \frac{D}{36} + \frac{D}{10 \cdot \pi}} \right)^2 = 1,6 \cdot 800\,000 \cdot \left(\frac{1}{36,145} \right)^2 = 985 \text{ kg/qcm.}$$

Fig. 428 veranschaulicht übliche Werte $p = f(s)$; zugleich ist auch noch die Spannung beim Überstreifen des Ringes über den Kolben eingetragen, z. B.

folgt für $s = \frac{D}{36}$ bei $l = 0,102 \cdot D$ eine Flächenpressung $p = 0,273$ für $k_b = 1000$ kg/qcm und ferner 1000 kg/qcm Spannung beim Überstreifen; für $k_b = 1200$ und $l = 0,125 \cdot D$ eine Flächenpressung $p = 0,327$ und 860 kg/qcm beim Überstreifen.

Reicht die Federung der Ringe nicht aus, so können besondere Federringe aus Grauguß oder Stahl verwandt werden, Fig. 430; sie sind nicht der Abnutzung unterworfen, mithin bleibt ihre Spannung annähernd konstant. Diese Figur zeigt einen Kolben mit Deckel, um die Ringe seitlich einlegen zu können, was bei starken Ringen, die ein Aufbiegen nicht vertragen, und bei kleinen Durchmesser erforderlich ist. Die Wirkung der Federringe kann auch durch Blattfedern oder Spiralfedern erreicht werden. Beide Ringe liegen unmittelbar aneinander; die dadurch erreichte geringe Kolbenhöhe ist mit dem Nachteil erkauft, daß die Ringe sich gegenseitig an der Federung hindern.

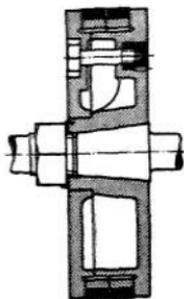


Fig. 430.

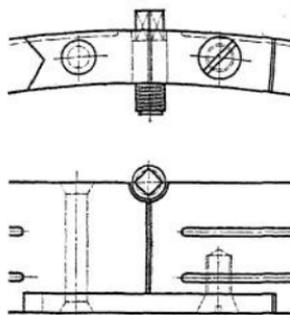


Fig. 431.



Fig. 432.

Die äußeren Kanten der Ringe sind zu brechen, da scharfe Kanten das Öl von den Zylinderwänden abstreifen. Brechen der inneren Kanten erleichtert das Einbringen in die Nut.

Breite Ringe erhalten Schmiernuten, Fig. 431¹⁾.

Die Stoßstelle darf ein Hindurchtreten des Dampfes in Richtung der Zylinderachse nicht gestatten; man ordnet deshalb bei liegenden Maschinen die Stoß-

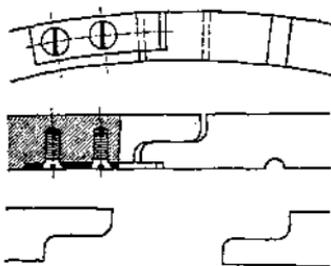


Fig. 433.

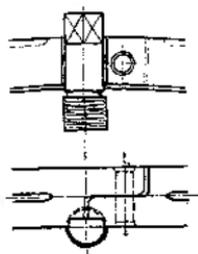


Fig. 434.

stelle im unteren Drittel, Fig. 427, an, da der Kolbenkörper die Dichtung dann übernimmt, besser führt man den Stoß schräg aus, Fig. 432, wobei zugleich wie auch bei den folgenden Ausführungen das Einlaufen von Riefen in den Zylinder vermieden ist, oder man sieht besondere Zungen vor, Fig. 431. Diese Zunge wird mit einer Hälfte des Ringes vernietet; die Schraube dient nur zum Zusammenhalten des Ringes beim Abdrehen. Ferneres Beispiel Fig. 433¹⁾. Die Stoßstellen

¹⁾ Entnommen aus Volk, Einzelkonstruktionen aus dem Maschinenbau, II: Kolben. Berlin 1912. Julius Springer.

der einzelnen Ringe sind gegeneinander zu versetzen. Die Ringe, besonders die der Fig. 432, sind am Wandern zu hindern, beispielsweise durch einen Stift, Fig. 431 und 434¹⁾, wobei der Stift wiederum durch den Kolbenring gesichert ist.

Auch zwischen Ring und Kolben soll kein Dampf gelangen.

Die Verbindung des Kolbens mit der Stange geschieht häufig durch Konus mit gesicherter Mutter oder durch Gewinde, Fig. 435, wobei der Splint die Sicherung übernimmt. Ein solcher einwandiger Kolben eignet sich infolge seines geringen Gewichtes besonders für hohe Geschwindigkeiten. Kolbenkörper meist aus Stahlformguß oder aus Flußstahl geschmiedet bzw. gepreßt. Bei flachem Kolben wird auch die Baulänge der Maschine geringer als bei langem.

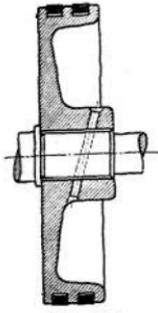


Fig. 435.

Kernöffnungen doppelwandige Kolben, Fig. 438, durch Stopfen verschraubt.

Die Berechnung der Kolben kann nach Pfeleiderer geschehen, und zwar bestimmt sich bei einem Scheibenkolben, Fig. 436, h bei einem Überdruck von p kg/qcm, wenn der Naben-

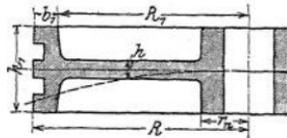


Fig. 436.

durchmesser mindestens $1,6 \cdot \text{Bohrung und } R - R_1 > 0,8 \cdot h$ ist, aus

$$\sigma_{\text{res}} = \frac{p}{h^2} \cdot (R_1 - r_n) \cdot \left(11,5 \cdot \frac{R_1^2}{\frac{R_1^2}{10 \cdot r_n} + 16 \cdot r_n} + 0,52 \cdot \pi \cdot \frac{R^2 - R_1^2}{\frac{R_1}{5} + r_n} \right)$$

$$= c_1 \cdot \frac{p}{h^2}$$

zu

$$h = \sqrt{c_1 \cdot \frac{p}{\sigma_{\text{res}}}} = c_2 \cdot \sqrt{\frac{p}{\sigma_{\text{res}}}}$$

Z. B. für $2R =$	400	800	1200
$2r_n =$	120	170	260
$R - R_1 =$	30 bis 40	40 bis 55	60 bis 75
$c_2 =$	24,2 bis 23,3	59,8 bis 59,0	93,5

also z. B. für $p = 10$ Atm. $\sigma_{\text{res}} = 600$ (Stahl) und $c_1 = 24,2$

$$h = 24,2 \cdot \sqrt{\frac{10}{600}} = 3,12 \text{ cm} \approx 32 \text{ mm.}$$

Ist die Kolbenfläche keine ebene Platte, sondern gewölbt (— — in Fig. 436 angedeutet), so kann die Wandstärke h etwas verringert werden.

Bei einem durchbrochenen Kolben, Fig. 437, ergibt sich unter der Voraussetzung, daß i Rippen allein tragen, das biegende Moment für eine Rippe zu

$$M_b = (R^2 - r_n^2) \frac{\pi}{i} \cdot p \cdot Z = \frac{b h^2}{6} \cdot k_b,$$

wenn $Z = \frac{2}{3} \cdot R - r_n$ als Schwerpunktsabstand eingesetzt wird. Bei nicht durchbrochenem Kolben wird der Einfluß der ebenen Platte am einfachsten durch höhere Werte k_b berücksichtigt.

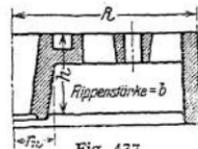


Fig. 437.

¹⁾ Entnommen aus Volk, Einzelkonstruktionen aus dem Maschinenbau, II: Kolben. Berlin 1912. Julius Springer.

Bei einem doppelwandigen Kolben mit ausgesparten Rippen, Fig. 438, ergibt sich die größte Beanspruchung in der Rippe am äußeren Lochrand, also in der Entfernung x von der Kolbenmitte. Diese beträgt nach Pfeleiderer

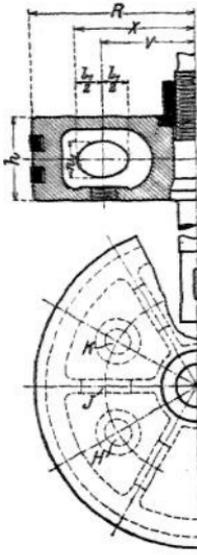


Fig. 438.

$$\sigma = \frac{h}{2} \cdot \frac{M_b}{\theta} + \frac{P \cdot l_1}{4} \cdot \left(\frac{1}{a \cdot f} + \frac{a - \frac{w_1}{2}}{\theta_1} \right),$$

wenn

$$P = (R^2 - v^2) \frac{\pi}{i} \cdot p,$$

$$M_b = p \cdot \frac{\pi}{3 \cdot i} \cdot (R - x)^2 \cdot (2R + x),$$

θ = Trägheitsmoment des I-förmigen Querschnittes HJK ,

θ_1 = Trägheitsmoment des \perp -förmigen Querschnittes vom Inhalt f ,

$2a$ = Entfernung der Schwerpunkte beider Querschnitte f ,

i = Anzahl der Rippen.

σ wird also für große Werte v klein; man muß mithin die Aussparungen möglichst weit nach außen legen.

Beispiele von Kolben für Explosionsmaschinen zeigen folgende Figuren: Fig. 439¹⁾: Kolben eines Gasmotors $N = 6$ PS, $n = 240$; Fig. 440: Ausführung der Gasmotorenfabrik Deutz, mit gewölbtem Boden, Zapfen mit Innenschmierung. Statt der Wölbung sieht man auch wohl Versteifung durch Ringe vor, Fig. 441. Bei diesen Kolben für einfach wirkende Maschinen wählt man den Flächendruck zwischen Kolben und

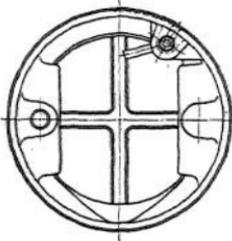
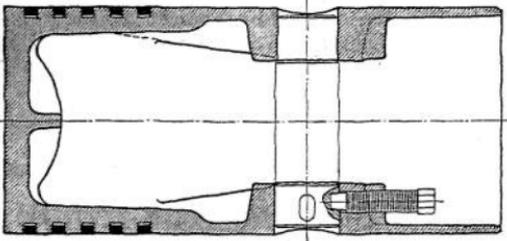
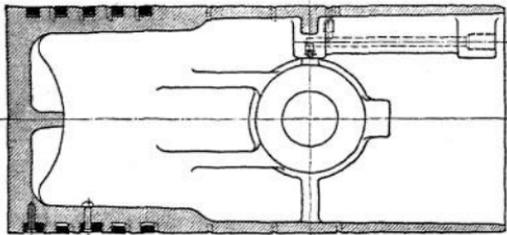


Fig. 439.



¹⁾ Entnommen aus Volk, Einzelkonstruktionen aus dem Maschinenbau, II: Kolben. Berlin 1912. Julius Springer.

Zylinderwand (Gleitbahndruck) = 1,25 bis 1,5 kg/qcm und das Verhältnis
 $\frac{\text{Kolbenlänge}}{\text{Kolbendurchmesser}} = 1,8 \text{ bis } 2,0$ bei kleinen Maschinen, abnehmend bis 1,5
 bis 1,6 bei größeren. Der Bolzendurchmesser bestimmt sich auf Biegung
 aus der Beziehung (Fig. 442)

$$M_b = \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{l_2}{2} - \frac{l}{4} \right) = 0,1 \cdot d^3 \cdot k_b,$$

wenn P der Explosionsdruck ist — das ist der größte auftretende Druck —

und $l_2 = \infty l + \frac{2}{3} \cdot l_i$; und auf
 Flächenpressung aus

$$P = l \cdot d \cdot k$$

mit $k \cong 125 \text{ kg/qcm}$ für Flußstahl
 und $k \cong 190 \text{ kg/qcm}$ für gehärteten
 Stahl auf Weißmetall (vgl. Schub-
 stangen, S. 715).

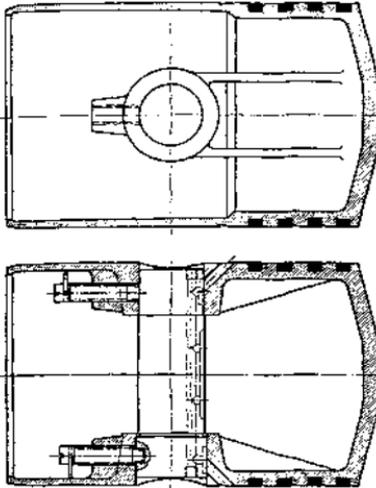


Fig. 440.

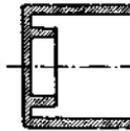


Fig. 441.

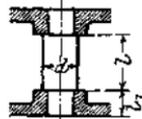


Fig. 442.

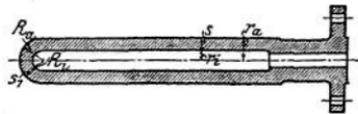


Fig. 443.

Beispiele von Kolben zum Fördern von Flüssigkeiten: Fig. 443,
 Kolben einer Preßpumpe. Bei geringem Flüssigkeitsdruck p ergibt sich seine
 Wandstärke aus

$$s = r_a \cdot \frac{p}{k},$$

bei hohem aus

$$r_a = r_i \cdot \sqrt{\frac{k}{k - 1,7 \cdot p}} + 0,2 \text{ bis } 0,5 \text{ cm Zuschlag};$$

ebenso die Bodenstärke aus

$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot R_a \cdot \frac{p}{k}$$

bzw.

$$R_a = R_i \cdot \sqrt[3]{\frac{k}{k - 1,05 \cdot p}}. \quad \text{Meist } R_i = r_i.$$

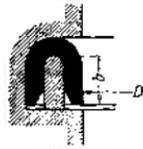


Fig. 444.

Dichtung durch Lederstulp, Fig. 444, (vgl. Stopfbüchsen, Fig. 545 und 546),
 dessen Reibungswiderstand sich ergibt zu etwa

$$R_{kg} = R_0 \text{ kg} + D \cdot \pi \cdot b \cdot p \cdot \mu,$$

wenn R_0 für den Leergang, also für $p = 0$ erforderlich. Dabei ist für gefettetes Leder etwa $\mu = 0,07$ bis $0,08$. Diese Dichtung eignet sich besonders für hohen

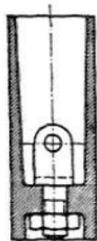


Fig. 445.

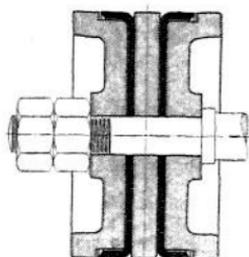


Fig. 446.

Druck, reines Wasser, $t \geq 30^\circ$ und $v \geq 1$ m/sek Kolbengeschwindigkeit. Ihr Nachteil ist, daß das Leder bei längeren Betriebspausen leicht eintrocknet. Ähnlich Kolben Fig. 445, Zwischenraum zwischen Mutter und Kolben auszufüllen oder versenkte runde Mutter; ferner Fig. 446¹⁾: Scheibenkolben mit Ledermanschette; Fig. 447: Kolben eines Stufenkompressors der Maschinenbau-Akt.-Ges. Balcke, Frankenthal; Fig. 448¹⁾: Ventilkolben einer Naßluftpumpe mit

zweisitzigem Ringventil; Fig. 449: Kolben mit federbelasteten Ventilen der Maschinenfabrik Odessa, Oschersleben.

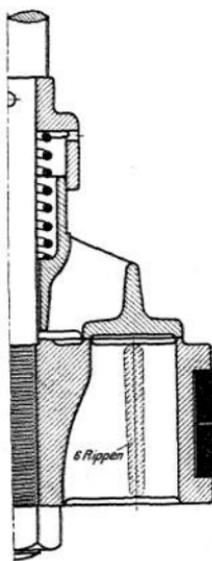


Fig. 448.

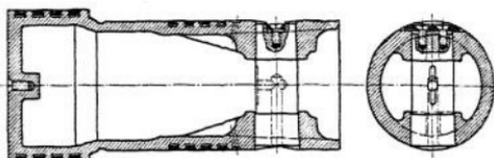


Fig. 447.

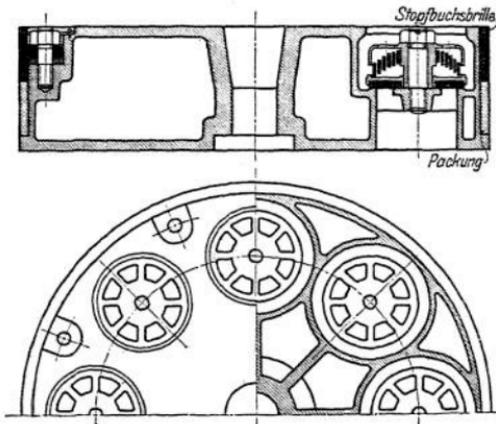


Fig. 449.

XV. Rohrleitungen.

1. Röhre und Formstücke.

Der Durchmesser D in m bestimmt sich aus der Beziehung

$$\frac{D^2 \pi}{4} \cdot v = V,$$

wenn V in cbm das sekundliche Durchflußvolumen bei einer Geschwindigkeit v in m/sek . Die sich aus der Beziehung

$$D \cdot p_i = 2 \cdot s \cdot k_z$$

¹⁾ Entnommen aus Volk, Einzelkonstruktionen aus dem Maschinenbau, II: Kolben. Berlin 1912. Julius Springer.

unter der Annahme gleichmäßig über die Wandung s verteilter Beanspruchung ergebende Wandstärke ist bei geringen inneren Überdrücken p_i meist nicht maßgebend, sondern die Rücksicht auf Herstellung, Transport, Rosten, äußere Kräfte beim Verlegen in der Erde usw. Bei höheren Drücken bestimmt sich s aus der Beziehung (vgl. S. 482)

$$s = 0,5 \cdot \left(\sqrt{\frac{k_z + 0,4 \cdot p_i}{k_z - 1,3 \cdot p_i}} - 1 \right) \cdot D.$$

Für Rosten, ungleiche Wandstärke beim Guß usw. gibt man meist noch einen Zuschlag; bei liegend gegossenen Rohren einen höheren als bei stehend gegossenen.

Chemische (saurer Boden) und elektrochemische (vagabundierende Ströme) Einflüsse bedingen das Rosten. Rosten tritt im letzteren Fall vor allem dort ein, wo Ströme von bzw. zu Straßenbahnschienen übergehen. Verdichten sich die Ströme infolge ungleicher Oberflächenbeschaffenheit der Rohre, so entsteht leicht Lochfraß. Bestes Verhütungsmittel: mit dem Rohre werden auswechselbare, isolierte Elektroden verbunden, die den Stromübergang vermitteln, so daß diese angegriffen werden.

a) Rohre aus Grauguß. Fig. 450: normale Flanschenverbindung für $p_i \leq 10$ Atm. mit Arbeitsleisten, deren Zweck ist, die Bearbeitung des ganzen Flansches zu vermeiden. Dichtung: Gummi, meist mit Leinwandeinlagen, Papier und Pappe, getränkt mit Firnis und Mennige, Blei, Asbest, Kupfer, meist als gewellter Ring. Zur Sicherung der Dichtung werden auch wohl Rillen eingedreht. In die Vertikalebene durch die Längsachse sind tunlichst keine Schrauben zu setzen, da die Schrauben unter dem Rohr schwer zugänglich. Übergang vom Rohr zum Flansch muß allmählich erfolgen. Tabelle S. 732/733.

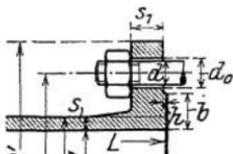


Fig. 450.

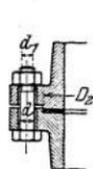


Fig. 451.

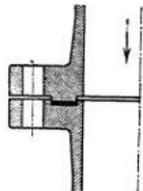


Fig. 452.

Um bei $p_i \leq 10$ Atm. ein Herauspressen der Dichtung durch den Flüssigkeitsdruck zu vermeiden, gibt man den Flanschen möglichst Vor- und Rücksprung, Fig. 451, womit allerdings der Nachteil verbunden ist, daß ein einzelnes Rohr sich schlecht ausbauen läßt. Bei Fig. 452 wird auch ein Eindringen der Dichtung in das Rohrinne durch Feder und Nut verhindert; Nut auf der Eintrittsseite, Feder auf der Austrittsseite der Flüssigkeit.

Bei i Schrauben erleiden diese im Betriebe eine Spannung σ , die sich ergibt aus (Fig. 451)

$$\frac{D_2^2 \pi}{4} \cdot p_i = i \cdot \frac{d_1^2 \pi}{4} \cdot \sigma,$$

wenn zur Sicherheit D_2 statt D genommen wird. Hierzu kommt noch die Pressung, die infolge des Anziehens von vornherein vorhanden ist, sofern die Dehnung, hervorgerufen durch σ im Betriebe, diese Pressung nicht wesentlich vermindert; das ist der Fall bei starkem elastischem Dichtungsmaterial, z. B. dicken Gummischeiben. Bei unelastischem, z. B. dünner Metalldichtung, wird sich infolge der Dehnung der Schrauben der von ihnen auf die Dichtung ausgeübte Druck im Betrieb stärker vermindern, so daß obiger Wert σ sich nur wenig erhöht. Im Mittel kann man die Schraubenstärke bestimmen nach der Beziehung

$$1\frac{1}{2} \cdot \frac{D_2^2 \pi}{4} \cdot p_i = i \cdot \frac{d_1^2 \pi}{4} \cdot k_z.$$

Deutsche Rohr-Normalien für guß-eiserne Muffen- und Flanschrohre¹⁾

				Muffenrohre, Fig. 453									Flanschenrohre, Fig. 450														
Lichter Durch- messer D	Normale Wandstärke s	Äußerer Rohr- durchmesser D_1	Gewicht eines (glatten) Rohrstückes von 1 m Länge, auschl. Muffe oder Flansch	Weite der Dichtungsfuge f		Äußerer Muffen- weite D_2	Äußerer Muffen- durchmesser D_3	Äußerer Muffen- tiefe t	Dichtungstiefe $t' = t - 1,5s$	Übliche Nutzlänge eines Rohres L	Gewicht der Muffe	Gewicht eines Rohres von vorstehender Nutzlänge	Gewicht für den Hfd. m. Rohr bei vorstehender Nutzlänge	Flansch		Dichtungs- leiste		Schrauben		Durchmesser des Schrauben- loches d_0	Übliche Baulänge L	Gewicht des Flansches nebst Anschluß	Gewicht eines Rohres bei vorstehender Baulänge	Gewicht für das Hfd. m. Rohr bei vorstehender Baulänge	Lichter Durch- messer D		
				Durch- messer D'	Stärke s_1									Betrieb b	Höhe h	Lochkreis- durchmesser D''	Anzahl	Stärke a	Länge l								
mm	mm	mm	kg	mm	mm	mm	mm	mm	m	kg	kg	kg	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
40	8	56	8,75	7	70	116	74	62	2	2,68	20,18	10,09	140	18	25	3	110	4	12,7	$\frac{1}{2}$	70	15	2	1,89	21,28	10,64	40
50	8	66	10,57	7,5	81	127	77	65	2	3,14	24,28	12,14	160	18	25	3	125	4	15,9	$\frac{5}{8}$	75	18	2	2,41	25,96	12,98	50
60	8,5	77	13,26	7,5	92	140	80	67	2	3,89	30,41	15,21	175	19	25	3	135	4	15,9	$\frac{5}{8}$	75	18	2	2,96	32,44	16,22	60
70	8,5	87	15,20	7,5	102	150	82	69	3	4,35	49,95	16,65	185	19	25	3	145	4	15,9	$\frac{5}{8}$	75	18	3	3,21	52,02	17,34	70
80	9	98	18,24	7,5	113	163	84	70	3	5,09	59,81	19,94	200	20	25	3	160	4	15,9	$\frac{5}{8}$	75	18	3	3,84	62,40	20,80	70
90	9	108	20,29	7,5	123	173	86	72	3	5,70	66,57	22,19	215	20	25	3	170	4	15,9	$\frac{5}{8}$	75	18	3	4,37	69,61	23,20	90
100	9	118	22,34	7,5	133	183	88	74	3	6,20	73,22	24,41	230	20	28	3	180	4	19,0	$\frac{3}{4}$	85	21	3	4,96	76,94	25,65	100
125	9,5	144	29,10	7,5	159	211	91	77	3	7,64	94,94	31,65	260	21	28	3	210	4	19,0	$\frac{3}{4}$	85	21	3	6,26	99,82	33,27	125
150	10	170	36,44	7,5	185	239	94	79	3	9,89	119,21	39,74	290	22	28	3	240	6	19,0	$\frac{3}{4}$	85	21	3	7,69	124,70	41,57	150
175	10,5	196	44,36	7,5	211	267	97	81	3	12,00	145,08	48,36	320	22	30	3	270	6	19,0	$\frac{3}{4}$	85	21	3	8,96	151,00	50,33	175
200	11	222	52,86	8	238	296	100	83	3	14,41	172,99	57,66	350	23	30	3	300	6	19,0	$\frac{3}{4}$	85	21	3	10,71	180,00	60,00	200
225	11,5	248	61,95	8	264	324	100	83	3	16,89	202,71	67,57	370	23	30	3	320	6	19,0	$\frac{3}{4}$	85	21	3	11,02	207,89	69,30	225
250	12	274	71,61	8,5	291	353	103	84	4	19,61	306,05	76,51	400	24	30	3	350	8	19,0	$\frac{3}{4}$	100	21	3	12,98	240,79	80,26	250
275	12,5	300	81,85	8,5	317	381	103	84	4	22,51	349,91	87,48	425	25	30	3	375	8	19,0	$\frac{3}{4}$	100	21	3	14,41	274,37	91,46	275
300	13	326	92,68	8,5	343	409	105	85	4	25,78	396,50	99,13	450	25	30	3	400	8	19,0	$\frac{3}{4}$	100	21	3	15,32	308,68	102,89	300
325	13,5	352	104,08	8,5	369	437	105	85	4	28,83	445,15	111,29	490	26	35	4	435	10	22,2	$\frac{7}{8}$	105	25	3	19,48	351,20	117,07	325
350	14	378	116,07	8,5	395	465	107	86	4	32,23	496,51	124,13	520	26	35	4	465	10	22,2	$\frac{7}{8}$	105	25	3	21,29	390,79	130,26	350
375	14	403	124,04	9	421	491	107	86	4	34,27	530,43	132,61	550	27	35	4	495	10	22,2	$\frac{7}{8}$	105	25	3	24,29	420,70	140,23	375
400	14,5	429	136,89	9,5	448	520	110	88	4	39,15	586,71	146,68	575	27	35	4	520	10	22,2	$\frac{7}{8}$	105	25	3	25,44	461,55	153,85	400
425	14,5	454	145,15	9,5	473	545	110	88	4	41,26	621,82	155,46	600	28	35	4	545	12	22,2	$\frac{7}{8}$	105	25	3	27,64	490,73	163,58	425
450	15	480	158,87	9,5	499	573	112	89	4	44,90	680,38	170,10	630	28	35	4	570	12	22,2	$\frac{7}{8}$	105	25	3	29,89	536,39	178,80	450
475	15,5	506	173,17	9,5	525	601	112	89	4	48,97	741,65	185,41	655	29	40	4	600	12	22,2	$\frac{7}{8}$	105	25	3	32,41	584,33	194,78	475
500	16	532	188,04	10	552	630	115	91	4	54,48	806,64	201,66	680	30	40	4	625	12	22,2	$\frac{7}{8}$	105	25	3	34,69	633,50	211,17	500
550	16,5	583	212,90	10	603	683	117	92	4	62,34	913,94	228,49	740	33	40	5	675	14	25,4	1	120	28,5	3	44,28	727,26	242,42	550
600	17	634	238,90	10,5	655	737	120	94	4	71,15	1026,75	256,69	790	33	40	5	725	16	25,4	1	120	28,5	3	47,41	811,52	270,51	600
650	18	686	273,86	10,5	707	793	122	95	4	83,10	1178,54	294,64	840	33	40	5	775	18	25,4	1	120	28,5	3	50,13	921,84	307,28	650
700	19	738	311,15	11	760	850	125	96	4	98,04	1342,64	335,66	900	33	40	5	830	18	25,4	1	120	28,5	3	56,50	1046,45	348,82	700
750	20	790	350,76	11	812	906	127	97	4	111,29	1514,33	378,58	950	33	40	5	880	20	25,4	1	120	28,5	3	59,81	1171,90	390,63	750
800	21	842	392,69	12	866	964	130	98	4	129,27	1700,03	425,01															
900	22,5	945	472,76	12,5	970	1074	135	101	4	160,17	2051,21	512,80															
1000	24	1048	559,76	13	1074	1184	140	104	4	195,99	2435,03	608,76															
1100	26	1152	666,81	13	1178	1296	145	106	4	243,76	2911,00	727,75															
1200	28	1256	783,15	13	1282	1408	150	108	4	294,50	3427,10	856,78															

¹⁾ Aufgestellt vom Verein deutscher Ingenieure und dem Verein deutscher Gas- und Wasserfachmänner; revidiert i. J. 1882.

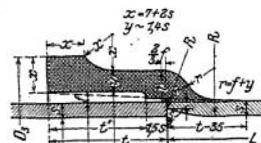


Fig. 453.

Fig. 453: normales Muffenrohr, verwendet für geringen Druck, hauptsächlich für Wasser und Gas (innen asphaltiert). Zur Dichtung wird zuerst ein mit Teer oder Leinöl getränktes Hanfseil fest eingetrieben, darüber Bleiausguß, der verstemmt wird. Tabelle S. 732/733.

Normale Wandstärke s gültig für Rohre mit $p_t = 10$ Atm. und 20 Atm. Probedruck.

Bei geringeren Drücken ist eine Verminderung zulässig (Druck der Wasserleitungen meist 4 bis 7 Atm.). Der äußere Durchmesser D_1 ist dabei beizubehalten, also D zu ändern. Ebenso sind die innere Muffenform und der Anschluß an das Rohr stets gleich auszuführen. Gewichtstoleranz bei geraden Rohren $\pm 3\%$. Für die Berechnung ist in der Tabelle $\gamma = 7,25$ angenommen.

Fig. 454: U-Stück: doppelte Überschiebmuffe, wird für Auswechslungen von schadhaften Rohren verwendet, da ein Muffenrohr in diesem Falle nicht einzubauen ist. $L = 4 \cdot t$.

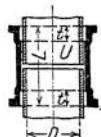


Fig. 454.

Fig. 455: *E*-Stück, dient zum Übergang vom Flanschenrohr zum Muffenrohr; $L = 300$ mm; zulässig für $D \geq 40$ mm.

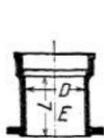


Fig. 455.

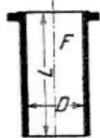


Fig. 456.

Fig. 456: *F*-Stück, dient zum Übergang vom Muffenrohr zum Flanschenrohr. $L = 600$ mm für $D = 40$ bis 475 mm; $L = 800$ mm für $D = 500$ bis 750 mm.

Fig. 457: *R*-Stück zur Änderung des Durchmessers. $L = 1$ m.

Fig. 458, 459: *A*- bzw. *B*-Stück:

$$a = 0,2 \cdot D + 0,5 \cdot d + 100 \text{ mm};$$

$$l = 0,1 \cdot d + 120 \text{ mm}; r = 0,05 \cdot d + 40 \text{ mm}.$$

Fig. 460: *C*-Stück: $a = 0,1 \cdot D + 0,7 \cdot d + 80$ mm; $l = 0,75 \cdot a$; $r = d$.

Fig. 461: *J*-Krümmer; $R = 250$ mm für $D = 40$ bis 90 mm; $R = D + 150$ mm für $D \geq 100$ mm; $L = D + 200$ mm für $D = 40$ bis 375 mm; $L = 600$ mm für $D \geq 400$ mm.



Fig. 457.

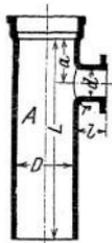


Fig. 458.

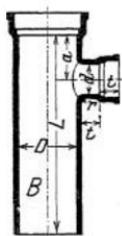


Fig. 459.

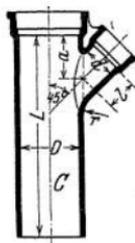


Fig. 460.

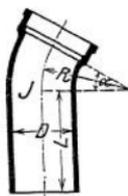


Fig. 461.

Fig. 462: *K*-Krümmer; $R = 10 \cdot D$; zulässig für $D \geq 40$ mm.

Fig. 463: *L*-Krümmer; $R = 5 \cdot D$; zulässig für $D \geq 300$ mm.

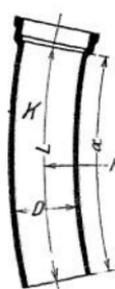


Fig. 462.

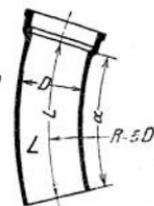


Fig. 463.

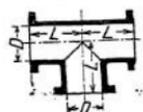


Fig. 464.



Fig. 465.

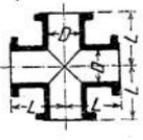


Fig. 466.

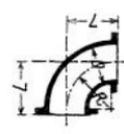


Fig. 467.

Fig. 464/465: *T*-Stücke; Fig. 466: Kreuzstück; Fig. 467: normaler Krümmer;

bei allen vier ist $L = D + 100$ mm; bei Fig. 465 außerdem: $l = \frac{1}{2} \cdot (D + d) + 100$ mm.

Die Bezeichnung der Formstücke erfolgt für Fig. 454 bis 463 in der Weise, daß zu der Bezeichnung der lichte Durchmesser hinzugefügt wird; ferner wird bei Abzweigungen bzw. bei den Stücken nach Fig. 461 bis 463 unter einem Bruchstrich der lichte Durchmesser der Abzweigung bzw. der Wert $\frac{90^\circ}{\alpha^\circ}$ hinzugefügt, z. B. $A \frac{400}{150}$ bedeutet *A*-Stück $D = 400$ mm, $d = 150$ mm; $K \frac{250}{6}$ bedeutet

K-Stück $D = 250$ mm, $\alpha = \frac{90}{6} = 15^\circ$. Dabei meist $\frac{90}{\alpha} = 8, 4, 3, 2, 1\frac{1}{2}$ und 1 bei Fig. 461 und $= 6, 4, 3$ und 2 bei Fig. 462.

Gewichte der Formstücke Fig. 467, 464 und 466 in kg.

Lichter Durchmesser: = D mm	40	50	60	70	80	90	100	125	150	175	200	225	250	275	300	325	350	375	400	425	450
Krümmen Fig. 467	7	8	10	13	15	18	20	26	35	45	55	65	80	95	110	130	150	175	200	226	225
T-Stück Fig. 464	10	13	15	19	21	25	29	40	52	64	76	88	110	135	165	190	220	255	290	328	370
Kreuzstück Fig. 466	13	17	20	25	28	33	39	53	69	85	102	117	147	180	205	255	295	340	390	436	490

Grauguß wird verwendet

1. bis $p_i = 8$ Atm. für Rohre und Formstücke jeden Durchmessers,

2. von $p_i = 8$ bis $p_i = 13$ Atm. für Formstücke jeden Durchmessers, für Rohre bis 150 mm l. W. Reicht Grauguß nicht mehr aus, so kommt für Formstücke hauptsächlich Stahlguß in Frage, Beispiel Fig. 468.

Wird das Rohr infolge des großen Durchmessers oder des hohen Druckes in Grauguß zu schwer, so verwendet man

b) Schmiedeeiserne Rohre; sie rosten leichter als solche aus Grauguß. Man stellt her

1. genietete Rohre mit aufgenietetem Flansch, Fig. 469, für große Durchmesser; Niete der Rundnaht versenkt, um den Flanschdurchmesser kleiner zu erhalten;

2. geschweißte Rohre, und zwar stumpf geschweißte: Gasrohre, überlappt geschweißte: Siede- oder Kesselrohre und die seltener vorkommenden spiral geschweißten, deren Schweißnaht spiralförmig verläuft.

Normale Gasrohre siehe Tabelle.

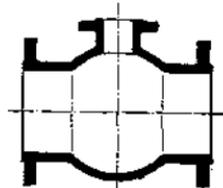


Fig. 468.

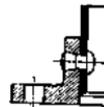


Fig. 469.

d = lichte Weite in engl. Zoll	Gasrohre															
	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{3}{8}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{5}{8}$	$1\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	2	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	
Äußerer Rohr- und Gewinde- \varnothing in mm	13	16,5	20,5	23	26,5	33	42	48	52	59	70	76	89	101,5	114	
Gewicht pro lfm in kg	0,57	0,86	1,19	1,47	1,78	2,52	3,69	4,52	5,17	6,30	7,46	8,67	11,20	13,08	15,84	

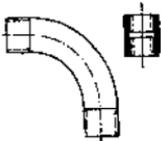


Fig. 470 und 471.



Fig. 472.



Fig. 473.



Fig. 474.

Die Verbindungsstücke der Gasrohre (Fittings) meist aus schmiedbarem Guß: Fig. 470: gewöhnliche Muffe; Fig. 471: 90°-Bogenstück; Fig. 472: 90°-Kniestücke mit Innengewinde; Fig. 473: T-Stück; Fig. 474: Kreuzstück, beide ebenfalls mit Innengewinde. Sämtliche Stücke auch für Änderung des Durchmessers mit verschiedenem Anschlußgewinde.

Siederohre werden in allen Wandstärken geliefert (starkwandige Druckrohre) und einem Probedruck unterworfen = 3 · Betriebsdruck, mindestens 30 Atm.

Siederöhre (Akt.-Ges. Lauchhammer).

Äußerer Ø		Wandstärke	Gewicht pro lfm	Gewicht bei stärkerer Wand um																
mm	Zoll engl.			mm	kg	$\frac{1}{4}$ mm	$\frac{3}{8}$ mm	$\frac{1}{2}$ mm	1 mm	$1\frac{1}{2}$ mm	2 mm	$2\frac{1}{2}$ mm	3 mm	$3\frac{1}{2}$ mm	4 mm	5 mm	6 mm	7 mm	8 mm	9 mm
38	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	1,97	2,17	2,37	2,57	2,76	3,14	3,50	3,86	4,37	4,53	4,85	5,45	6,00	6,50				
41 $\frac{1}{2}$	$1\frac{5}{8}$	$2\frac{1}{4}$	2,17	2,39	2,61	2,83	3,05	3,47	3,88	4,28	4,60	5,03	5,39	6,07	6,71	7,30				
44 $\frac{1}{2}$	$1\frac{7}{8}$	$2\frac{1}{4}$	2,32	2,58	2,81	3,04	3,28	3,74	4,18	4,62	5,04	5,45	5,84	6,60	7,31	7,97				
47 $\frac{1}{2}$	$1\frac{7}{8}$	$2\frac{1}{4}$	2,4	2,75	3,01	3,26	3,52	4,01	4,50	4,97	5,43	5,87	6,31	7,14	7,92	8,65				
51	2	$2\frac{1}{4}$	2,97	3,25	3,53	3,80	4,07	4,60	5,12	5,63	6,12	6,61	7,08	7,98	8,84	9,63				
54	$2\frac{1}{8}$	$2\frac{1}{4}$	3,15	3,44	3,74	4,03	4,32	4,89	5,45	5,99	6,52	7,04	7,56	8,53	9,46	10,34	11,17	11,95	12,68	
57	$2\frac{1}{8}$	$2\frac{3}{4}$	3,65	3,95	4,26	4,57	4,87	5,47	6,08	6,63	7,20	7,75	8,28	9,32	10,32	11,26	12,15	12,99	13,79	
60	$2\frac{3}{8}$	$2\frac{3}{4}$	4,20	4,50	4,83	5,15	5,47	6,10	6,72	7,33	7,92	8,50	9,07	10,17	11,22	12,22	13,18	14,08	14,95	
63 $\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{8}$	3	4,45	4,79	5,13	5,48	5,82	6,49	7,14	7,79	8,42	9,05	9,66	10,85	11,99	13,07	14,11	15,11	16,05	
70	$2\frac{7}{8}$	3	4,90	5,30	5,69	6,07	6,45	7,20	7,94	8,67	9,39	10,09	10,78	12,12	13,41	14,66	15,86	17,01	18,11	
76	3	3	5,35	5,76	6,19	6,61	7,04	7,85	8,64	9,44	10,26	11,04	11,80	13,29	14,74	16,13	17,47	18,76	20,01	
83	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{4}$	6,35	6,82	7,28	7,74	8,20	9,11	10,00	10,87	11,74	12,59	13,44	15,10	16,69	18,24	19,74	21,21	22,60	
89	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	6,78	7,29	7,79	8,29	8,78	9,76	10,73	11,68	12,63	13,56	14,48	16,28	18,02	19,72	21,38	22,97	24,52	
95	$3\frac{3}{4}$	$3\frac{1}{4}$	7,30	7,85	8,38	8,92	9,44	10,48	11,51	12,53	13,54	14,55	15,54	17,49	19,39	21,24	23,04	24,78	26,48	
102	4	$3\frac{3}{4}$	9,01	9,58	10,15	10,72	11,29	12,42	13,53	14,63	15,71	16,79	17,85	19,94	21,98	23,96	25,91	27,81	29,66	
108	$4\frac{1}{4}$	$3\frac{3}{4}$	9,56	10,17	10,78	11,38	11,99	13,18	14,37	15,54	16,71	17,85	18,99	21,23	23,41	25,56	27,63	29,66	31,66	
114	$4\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	10,10	10,75	11,40	12,04	12,68	13,95	15,21	16,46	17,69	18,92	20,13	22,51	24,84	27,12	29,36	31,56	33,70	
121	$4\frac{3}{4}$	4	11,46	12,15	12,83	13,51	14,19	15,54	16,88	18,21	19,52	20,82	22,11	24,66	27,15	29,60	32,00	34,33	36,63	
127	5	4	12,03	12,76	13,48	14,20	14,92	16,34	17,75	19,15	20,54	21,91	23,27	25,96	28,60	31,19	33,74	36,23	38,68	
133	$5\frac{1}{4}$	4	12,65	13,41	14,17	14,93	15,68	17,17	18,65	20,13	21,60	23,05	24,49	27,32	30,11	32,84	35,53	38,17	40,76	
140	$5\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	14,90	15,70	16,50	17,29	18,08	19,65	21,22	22,76	24,29	25,81	27,32	30,30	33,23	36,16	38,99	41,78	44,51	
146	$5\frac{3}{4}$	$4\frac{1}{2}$	15,56	16,40	17,23	18,06	18,89	20,53	22,16	23,78	25,39	26,98	28,56	31,70	34,77	37,85	40,82	43,77	46,66	
152	6	$4\frac{1}{2}$	16,22	17,10	17,93	18,83	19,70	21,41	23,12	24,81	26,49	28,16	29,81	33,09	36,31	39,50	42,64	45,72	48,75	
159	$6\frac{1}{4}$	$4\frac{1}{2}$	17,00	17,91	18,82	19,73	20,64	22,44	24,23	26,01	27,77	29,53	31,27	34,71	38,11	41,35	44,64	47,89	51,10	
165	$6\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	17,65	18,61	19,55	20,50	21,44	23,32	25,18	27,03	28,87	30,70	32,51	36,11	39,65	43,15	46,60	50,01	53,35	
171	$6\frac{3}{4}$	$4\frac{1}{2}$	18,31	19,30	20,29	21,27	22,25	24,20	26,13	28,06	29,97	31,87	33,76	37,50	41,19	44,80	48,40	51,94	55,45	
178	7	$5\frac{1}{2}$	19,08	20,11	21,14	22,17	23,19	25,22	27,24	29,26	31,25	33,24	35,21	39,14	42,98	46,80	50,55	54,24	57,89	
191	$7\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	24,93	26,03	27,13	28,22	29,31	31,48	33,62	35,78	37,92	40,04	42,04	46,32	50,45	54,50	58,50	62,50	66,50	
203	8	$5\frac{1}{2}$	26,60	27,80	29,00	30,15	31,30	33,60	35,90	38,20	40,50	42,80	45,10	49,50	53,90	58,30	62,70	66,90	71,10	
216	$8\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	33,20	34,45	35,70	36,95	38,20	40,70	43,20	45,60	48,00	50,40	52,80	57,50	62,20	66,80	71,40	76,00	80,50	
229	9	$6\frac{1}{2}$	35,30	36,60	37,90	39,20	40,50	43,10	45,70	48,30	50,90	53,50	56,00	61,00	66,00	71,00	76,00	80,90	85,70	
241	$9\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	37,20	38,60	40,00	41,35	42,70	45,40	48,20	51,00	53,80	56,50	59,20	64,50	69,80	75,00	80,20	85,40	90,50	
254	10	$6\frac{1}{2}$	39,50	41,00	42,50	43,90	45,30	48,20	51,00	53,90	56,80	59,70	62,60	68,30	74,00	79,50	84,90	90,50	96,00	
267	$10\frac{1}{2}$	7	44,50	46,10	47,70	49,25	50,80	53,90	56,90	59,90	62,90	65,80	68,80	74,80	80,90	86,70	92,40	98,20	104,00	
279	11	$7\frac{1}{2}$	49,60	51,25	52,90	54,50	56,10	59,40	62,60	65,70	68,80	72,00	75,10	81,30	87,60	93,80	99,80	105,70	111,70	
292	$11\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{2}$	52,10	53,75	55,40	57,10	58,80	62,20	65,50	68,90	72,30	75,60	78,90	85,30	91,80	98,30	104,80	111,10	117,40	
305	12	$7\frac{1}{2}$	54,70	56,45	58,20	59,95	61,70	65,10	68,60	72,10	75,60	79,10	82,50	89,50	96,20	102,90	109,70	116,40	123,10	

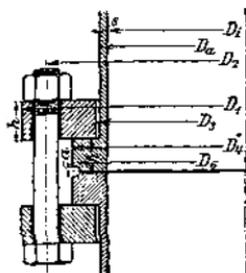


Fig. 475.

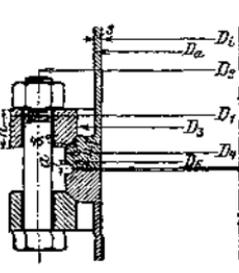


Fig. 476.

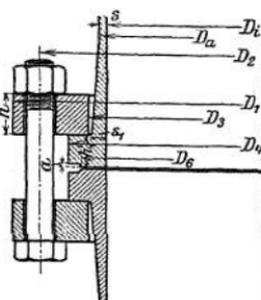


Fig. 477.

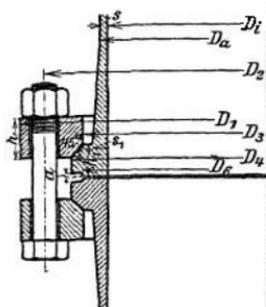


Fig. 478.

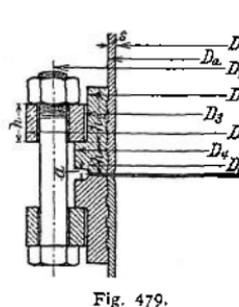


Fig. 479.

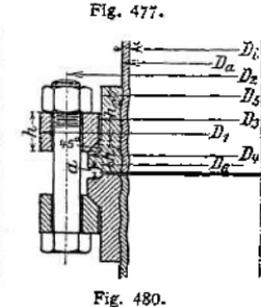


Fig. 480.

Verbindung mittels aufgeschweißter schmiedeeiserner Bunde und loser Flanschen aus Schmiedeeisen oder Stahlguß (zulässig bis 250 mm Durchmesser) oder durch Einwalzen der Rohre in Flanschen bzw. Aufnieten derselben (meist Stahlguß), Fig. 475 bis 484, selten mittels fester Flanschen. Dichtung für Heißdampf meist Metall oder Klingerit. Normalien s. Tabelle S. 738/739.

Diese Normalien gelten für Rohre von 25 bis 400 mm Durchmesser, für einen Betriebsdruck bis 20 Atm. Überdruck und bis 400° C Dampf-temperatur. Die Einzel-

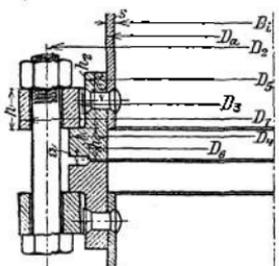


Fig. 481.

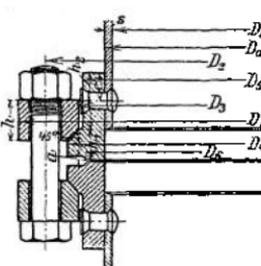


Fig. 482.

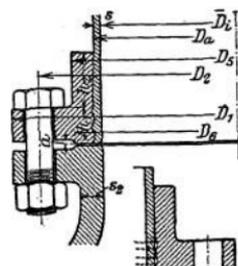


Fig. 483.

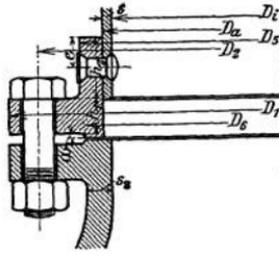


Fig. 484.

stücke sind mit dem Zweifachen des höchsten Betriebsdruckes bei gewöhnlicher Temperatur zu prüfen, wobei sie unter Druck mit dem Hammer abzuklopfen sind.

3. Hartgelötete Rohre, namentlich für Dampfheizungen; Flanschen aufgelötet.

Normalien zu Rohrleitungen für Dampf von hoher Spannung 1912.

Aufgestellt vom Verein deutscher Ingenieure.

Table with 32 columns (1-32) and multiple rows. Columns 1-15 are for 'Rohre' (Pipes), columns 16-21 for 'Bordringe' (Flanges), columns 22-24 for 'Nieten' (Rivets), and columns 25-32 for 'Schrauben' (Bolts). Rows include dimensions like outer/inner diameter, wall thickness, and specific design parameters for different types of fittings and connections.

Die durch * und schrägen Druck kenntlich gemachten Abmessungen gelten für Rohrweiten, die als Zwischengrößen und nicht als normal anzunehmen sind.

1) Diese Werte sind durch Umrechnung aus englischem Maß erhalten.

4. nahtlose Rohre, gewalzt (Mannesmann) oder gezogen (Ehrhardt) als Siederohre, für Druckwasser usw. Flanschen wie unter b. Gewalzte werden in den Abmessungen und Gewichten wie Siederohre unter b hergestellt; gezogene in Wandstärken von 0,5 bis 2 mm um je $\frac{1}{10}$ mm steigend und von 2,0 bis 8 mm um je $\frac{1}{4}$ mm steigend, wobei der äußere Durchmesser von 10 bis 40 mm um je 2 mm und von 40 bis 200 mm um je 5 mm zunimmt, und zwar:

Bei einem äußeren Ø von mm	10	12	14 bis 18	20 bis 24	26 und 28	30 bis 38	40	40 und 50	55 bis 90	95	100 und 105	110 und 115	120	125 bis 160	165 und 170	175 und 180	185 bis 200
Mit einer Wand- stärke von mm	0,5 bis 3	0,5 bis 3,5	0,5 bis 3,75	0,5 bis 6	0,5 bis 6,5	0,5 bis 7	0,5 bis 7,5	0,5 bis 7,5	1 bis 8	1,5 bis 8	1,8 bis 8	2,5 bis 8	2,5 bis 8	3 bis 8	3,5 bis 8	4 bis 8	5 bis 8

Kupfer und Bronzerohre.

Gewicht in kg/m (1 cbm Metall wiegt 9000 kg).

Innerer Durchm. mm	Wandstärke in mm								Innerer Durch- messer mm	Wandstärke in mm							
	1	1½	2	2½	3	3½	4	5		3	3½	4	5	6	7	8	
3	0,11	0,19	0,28	0,39	0,51	0,64	.	.	135	11,71	13,73	15,76	19,82	23,92	28,15	.	32,35
4	0,14	0,23	0,34	0,46	0,59	0,74	.	.	140	12,13	14,20	16,29	20,59	24,77	29,11	.	33,47
5	0,17	0,28	0,40	0,53	0,68	0,84	1,02	.	145	12,56	14,70	16,85	21,24	25,61	30,09	.	34,61
6	0,20	0,32	0,45	0,60	0,76	0,94	1,13	1,55	150	12,98	15,19	17,41	21,91	26,46	31,08	.	35,73
8	0,25	0,40	0,56	0,74	0,93	1,14	1,36	1,84	155	13,39	15,68	17,98	22,61	27,31	32,06	.	36,86
10	0,31	0,49	0,68	0,88	1,10	1,34	1,58	2,12	160	13,82	16,18	18,55	23,35	28,16	33,06	.	38,01
12	0,37	0,57	0,79	1,02	1,27	1,53	1,81	2,40	165	14,25	16,68	19,11	24,03	29,01	34,03	.	39,12
13	0,40	0,61	0,85	1,07	1,36	1,63	1,92	2,54	170	14,67	17,17	19,67	24,74	29,85	35,03	.	40,26
15	0,45	0,70	0,96	1,24	1,53	1,83	2,15	2,83	175	15,09	17,67	20,24	25,35	30,71	36,02	.	41,34
16	0,48	0,74	1,02	1,31	1,61	1,93	2,26	2,97	180	15,53	18,16	20,81	26,15	31,55	37,01	.	42,53
18	0,54	0,83	1,13	1,45	1,78	2,13	2,49	3,25	185	15,93	18,65	21,36	26,85	32,40	38,04	.	43,63
20	0,59	0,91	1,24	1,59	1,95	2,33	2,71	3,53	190	16,37	19,15	21,94	27,57	33,25	39,09	.	44,78
22	0,65	1,00	1,36	1,73	2,12	2,52	2,94	3,82	195	16,77	19,64	22,49	28,27	34,10	40,02	.	45,90
25	0,73	1,12	1,53	1,94	2,37	2,82	3,28	4,24	200	17,22	20,14	23,08	28,98	34,95	40,97	.	47,05
28	0,82	1,25	1,70	2,16	2,63	3,12	3,62	4,66	205	17,63	20,64	23,63	29,68	35,80	41,95	.	48,16
30	0,88	1,34	1,81	2,30	2,80	3,31	3,84	4,93	210	18,06	21,13	24,20	30,39	36,65	42,95	.	49,31
32	0,93	1,42	1,93	2,44	2,97	3,51	4,07	5,23	215	18,49	21,63	24,75	31,09	37,49	43,93	.	50,43
35	1,02	1,55	2,09	2,65	3,22	3,81	4,41	5,66	220	18,92	22,13	25,34	31,82	38,34	44,93	.	51,58
38	1,10	1,67	2,26	2,86	3,48	4,11	4,75	6,08	225	19,33	22,62	25,89	32,52	39,18	45,91	.	52,68
40	1,16	1,76	2,37	3,00	3,65	4,30	4,98	6,36	230	19,76	23,11	26,46	33,22	40,03	46,91	.	53,83
45	1,30	1,97	2,66	3,36	4,07	4,80	5,54	7,07									
50	1,44	2,18	2,94	3,71	4,50	5,29	6,11	7,77									
55	1,58	2,40	3,22	4,06	4,92	5,79	6,67	8,48									
60	1,72	2,61	3,51	4,42	5,34	6,28	7,24	9,19									
65	1,87	2,82	3,79	4,77	5,77	6,78	7,80	9,90									
70	2,01	3,03	4,07	5,12	6,19	7,27	8,37	10,60	240	27,59	34,63	41,73	48,89	56,08	63,36	.	70,69
75	2,15	3,24	4,35	5,48	6,62	7,77	8,93	11,31	250	28,71	36,05	43,43	50,87	58,34	65,91	.	73,52
80	2,29	3,46	4,64	5,83	7,04	8,26	9,50	12,02	260	29,85	37,46	45,13	52,85	60,60	68,45	.	76,34
85	2,43	3,67	4,92	6,18	7,46	8,76	10,07	12,73	270	30,98	38,87	46,82	54,83	62,87	70,99	.	79,16
88	2,43	3,67	4,92	6,18	7,46	8,76	10,07	12,73	280	32,11	40,28	48,52	56,81	65,12	73,55	.	82,00
90	2,57	3,88	5,20	6,54	7,89	9,25	10,63	13,43	290	33,25	41,70	50,21	58,79	67,38	76,09	.	84,83
95	2,71	4,09	5,48	6,89	8,31	9,75	11,20	14,14	300	34,38	43,11	51,91	60,76	69,66	78,68	.	87,65
100	2,86	4,30	5,77	7,24	8,74	10,24	11,76	14,84	310	.	44,53	53,61	62,74	71,93	81,17	.	90,48
105	.	4,52	6,05	7,60	9,16	10,74	12,33	15,55	320	.	45,95	55,31	64,72	74,19	83,72	.	93,30
110	.	4,73	6,33	7,95	9,59	11,23	12,89	16,26	330	.	47,36	57,00	66,70	76,45	86,27	.	96,13
115	.	4,94	6,61	8,30	10,01	11,73	13,46	16,97	340	.	48,77	58,70	68,68	78,72	88,81	.	98,96
120	.	5,15	6,90	8,66	10,44	12,22	14,02	17,67	350	.	50,19	60,39	70,66	80,98	91,36	.	101,79
125	.	5,36	7,17	9,01	10,86	12,72	14,59	18,37	360	.	51,60	62,09	72,64	83,24	93,96	.	104,61
130	.	5,58	7,46	9,36	11,28	13,21	15,15	19,08	370	.	53,01	63,79	74,62	85,50	96,44	.	107,44
									380	.	54,43	65,48	76,60	87,76	98,99	.	110,28

Innere Durchmesser von 200 bis 230 mm auch mit 9 und 10 mm Wandstärken.

Messingrohre.

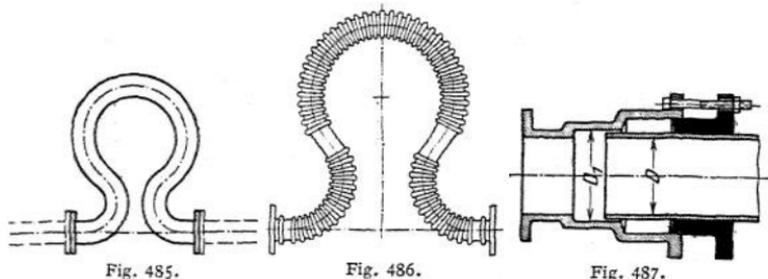
Gewicht in kg/m (1 cbm Messing wiegt 8500 kg).

Äußerer Durchm.	Wandstärke in mm																
	1/2	3/4	1	1 1/4	1 1/2	1 3/4	2	2 1/4	2 1/2	2 3/4	3	3 1/4	3 1/2	3 3/4	4	4 1/2	5
5	0,06	0,08	0,11
6	0,07	0,10	0,13	0,16
8	0,10	0,15	0,19	0,22	0,26	0,29	0,32	0,34
10	0,13	0,19	0,24	0,29	0,34	0,39	0,43	0,47	0,50	0,53
12	0,15	0,22	0,29	0,36	0,42	0,48	0,53	0,59	0,63	0,68	0,72
13	0,17	0,24	0,32	0,39	0,46	0,53	0,59	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,89
14	0,18	0,26	0,35	0,42	0,50	0,57	0,64	0,70	0,77	0,83	0,88	0,93	0,98
15	0,19	0,28	0,37	0,46	0,54	0,62	0,69	0,77	0,83	0,90	0,96	1,02	1,07	1,13	1,17	.	.
16	0,21	0,30	0,40	0,49	0,58	0,67	0,75	0,83	0,90	0,97	1,04	1,11	1,16	1,23	1,28	1,38	1,47
18	0,23	0,35	0,45	0,56	0,66	0,76	0,85	0,95	1,03	1,12	1,20	1,28	1,35	1,43	1,50	1,60	1,73
20	0,26	0,39	0,51	0,62	0,74	0,85	0,96	1,07	1,17	1,27	1,36	1,45	1,54	1,63	1,71	1,86	2,00
22	0,29	0,43	0,56	0,69	0,82	0,95	1,07	1,19	1,30	1,41	1,52	1,63	1,73	1,83	1,92	2,10	2,27
24	0,31	0,47	0,61	0,76	0,90	1,04	1,17	1,31	1,43	1,56	1,68	1,80	1,92	2,03	2,14	2,34	2,54
25	0,33	0,49	0,64	0,79	0,94	1,09	1,23	1,37	1,50	1,63	1,76	1,89	2,01	2,13	2,24	2,46	2,67
26	0,34	0,51	0,67	0,83	0,98	1,13	1,28	1,43	1,57	1,71	1,84	1,97	2,10	2,23	2,35	2,58	2,80
28	0,37	0,55	0,72	0,89	1,06	1,23	1,39	1,55	1,70	1,85	2,00	2,15	2,29	2,43	2,56	2,82	3,07
30	0,39	0,59	0,77	0,96	1,14	1,32	1,50	1,67	1,84	2,00	2,16	2,32	2,48	2,63	2,78	3,06	3,34
32	0,42	0,63	0,83	1,03	1,22	1,41	1,60	1,79	1,97	2,15	2,32	2,49	2,66	2,83	2,99	3,30	3,60
35	0,46	0,69	0,91	1,13	1,34	1,55	1,76	1,97	2,17	2,37	2,56	2,75	2,94	3,13	3,31	3,66	4,01
38	0,50	0,75	0,99	1,23	1,46	1,69	1,92	2,15	2,37	2,59	2,80	3,02	3,22	3,43	3,63	4,03	4,41
40	0,53	0,79	1,04	1,29	1,54	1,79	2,03	2,27	2,50	2,73	2,96	3,19	3,41	3,63	3,84	4,27	4,67
42	0,56	0,83	1,09	1,36	1,62	1,88	2,14	2,39	2,64	2,88	3,12	3,36	3,60	3,83	4,06	4,51	4,94
45	0,60	0,89	1,17	1,46	1,74	2,02	2,30	2,57	2,84	3,10	3,36	3,62	3,88	4,13	4,38	4,87	5,34
48	0,64	0,95	1,25	1,56	1,86	2,16	2,46	2,75	3,04	3,32	3,60	3,88	4,15	4,43	4,70	5,23	5,74
50	0,66	0,99	1,31	1,63	1,94	2,25	2,56	2,87	3,17	3,47	3,76	4,06	4,35	4,63	4,91	5,47	6,01
52	0,69	1,03	1,36	1,69	2,02	2,35	2,67	2,99	3,30	3,62	3,92	4,23	4,53	4,83	5,13	5,71	6,27
55	0,73	1,09	1,44	1,79	2,14	2,49	2,83	3,17	3,50	3,83	4,16	4,49	4,81	5,13	5,44	6,06	6,67
58	0,76	1,15	1,52	1,89	2,26	2,63	2,99	3,35	3,71	4,06	4,41	4,75	5,09	5,43	5,76	6,42	7,07
60	0,79	1,19	1,58	1,96	2,34	2,72	3,10	3,47	3,84	4,20	4,57	4,92	5,28	5,63	5,98	6,66	7,34
65	0,85	1,29	1,71	2,13	2,54	2,95	3,36	3,77	4,17	4,57	4,97	5,36	5,75	6,13	6,51	7,26	8,01
70	0,92	1,39	1,84	2,29	2,74	3,19	3,63	4,07	4,51	4,94	5,37	5,79	6,21	6,63	7,04	7,87	8,67
75	0,98	1,49	1,97	2,46	2,94	3,42	3,90	4,37	4,84	5,30	5,77	6,23	6,68	7,13	7,58	8,47	9,34
80	1,06	1,59	2,11	2,63	3,14	3,65	4,16	4,67	5,17	5,67	6,17	6,66	7,15	7,63	8,11	9,07	10,01
85	.	.	2,24	2,79	3,34	3,89	4,43	4,97	5,51	6,04	6,57	7,09	7,61	8,13	8,65	9,67	10,68
90	.	.	2,38	2,96	3,54	4,12	4,70	5,27	5,84	6,41	6,97	7,53	8,08	8,63	9,18	10,27	11,34
95	3,74	4,36	4,96	5,57	6,17	6,77	7,37	7,96	8,55	9,13	9,71	10,87	12,01
100	3,94	4,60	5,23	5,87	6,50	7,14	7,77	8,39	9,01	9,63	10,25	11,47	12,68
105	4,14	4,83	5,50	6,17	6,84	7,51	8,17	8,83	9,48	10,14	10,78	12,07	13,35
110	4,34	5,07	5,77	6,47	7,18	7,88	8,57	9,26	9,95	10,64	11,32	12,68	14,02
115	4,55	5,29	6,04	6,77	7,52	8,24	8,97	9,70	10,42	11,14	11,85	13,27	14,69
120	4,77	5,53	6,30	7,07	7,84	8,61	9,37	10,13	10,88	11,64	12,38	13,88	15,36
125	6,57	7,37	8,18	8,98	9,77	10,56	11,35	12,14	12,92	14,48	16,02
130	6,83	7,67	8,51	9,34	10,17	10,99	11,82	12,64	13,46	15,08	16,68
135	7,10	.	8,84	.	10,57	.	12,20	.	13,99	.	17,36
140	7,37	.	9,18	.	10,97	.	12,76	.	14,53	.	18,02
145	7,64	.	9,51	.	11,37	.	13,22	.	15,06	.	18,69
150	7,90	.	9,85	.	11,78	.	13,69	.	15,59	.	19,36
155	8,17	.	10,18	.	12,18	.	14,16	.	16,13	.	20,03
160	8,44	.	10,51	.	12,58	.	14,63	.	16,66	.	20,69
165	10,85	.	12,98	.	15,10	.	17,20	.	21,36
170	11,19	.	13,38	.	15,56	.	17,73	.	22,03
175	11,52	.	13,78	.	16,03	.	18,27	.	22,70
180	11,85	.	14,18	.	16,50	.	18,80	.	23,37

c) Rohre aus Messing, Kupfer, Blei. Die aus Messing und Kupfer (bis 250° C zulässig) werden hart gelötet wie nahtlos verwendet, Flanschen hart gelötet.

2. Zubehörteile.

Die Längenänderungen der Rohrleitungen, bedingt durch Temperaturschwankungen, werden teilweise durch die Dichtungen aufgenommen. Bei



langen Leitungen müssen jedoch außerdem besondere Ausgleich- oder Dehnungsrohre eingebaut werden, wenn es nicht möglich ist, die Leitung so anzuordnen, daß sie sich ungehindert ausdehnen kann. Beispiele: Fig. 485: Rohr aus

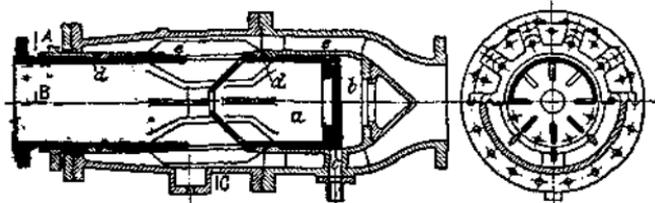


Fig. 488.

Schmiedeeisen oder Kupfer; Fig. 486: aus Wellrohr; Fig. 487: Stopfbüchse, nachteilig, daß axiale Kräfte $= \frac{D_1^2 \pi}{4} \cdot p_l$ von den Lagerstellen der Leitung aufzunehmen sind, ferner: daß sie leicht festbrennen, auch wenn der Stopfbüchsendrucker aus Metall gemacht wird, um annähernd für das Rohr und den Drucker gleiche Ausdehnung zu erhalten.

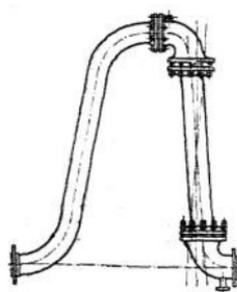


Fig. 489.

Eine Verbesserung, bei der die axialen Kräfte ausgeglichen sind, zeigt Fig. 488, System „König“, ausgeführt von der Gesellschaft für Hochdruckrohrleitungen. Rohr *a* verschiebt sich in dem Gehäuse *e*, wobei Raum *b* durch *c* mit der freien

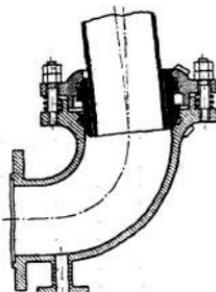


Fig. 490.

Luft in Verbindung steht. Packungen *d* besorgen die Abdichtung. Fig. 489 und 490: selbstdichtender Kugelgelenkkompensator der Gesellschaft für Hochdruckrohrleitungen. Bei Ausdehnungen stellt sich das lotrechte Rohr entsprechend schief, wobei Kugelflächen an den Enden stets die Dichtung aufrechterhalten, da der Dampfdruck sie fest aufeinander preßt. Die untere Kugelhälfte verhindert ein Abheben durch den

äußeren Überdruck bei Auftreten eines Vakuums in der Leitung nach ihrem Absperrren.

Die Rohrleitungen werden, um Längenänderungen zu ermöglichen, nach Fig. 491 aufgehängt bzw. auf Rollen montiert, Fig. 492, und nur die Punkte, die es ihrer Natur nach bedingen, festgehalten. Die ganze Leitung wird dann isoliert (meist mit Kieselgur), darauf mit Asphaltpappe umhüllt, die mit Draht zusammengehalten wird; Flanschen erhalten besondere Kappen, Fig. 493,

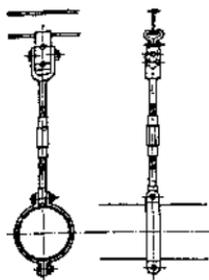


Fig. 491.

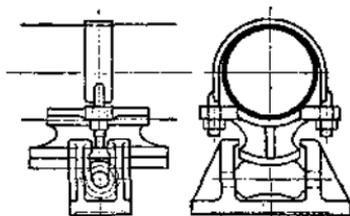


Fig. 492.

um sie bequem nachsehen zu können. Vor der Maschine wird zum Entwässern ein Dampftrockner eingebaut, Fig. 494, System Werth, Bauart Hübner & Mayer, Wien; er entwässert

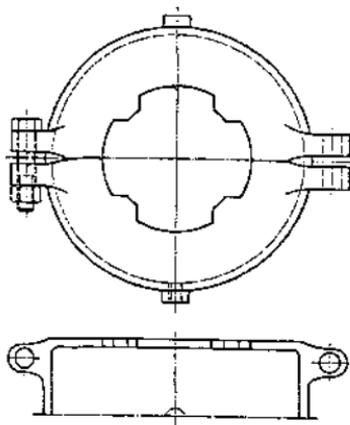


Fig. 493.

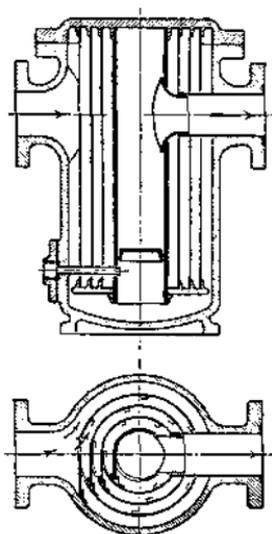


Fig. 494.

1. da infolge der geringeren Dampfgeschwindigkeit (größere Querschnitte) die Wasserbläschen nicht mehr mitgerissen werden können und niederfallen.
2. mechanisch durch Anhaften des Wassers an der Wand, welche Wirkung durch die Zentrifugalkraft unterstützt wird.

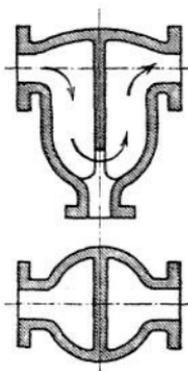


Fig. 495.

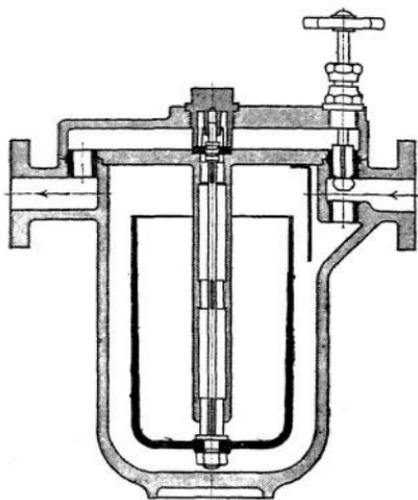


Fig. 496.

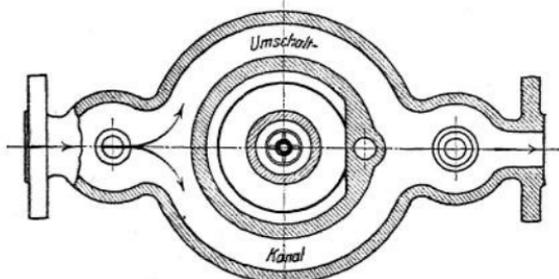
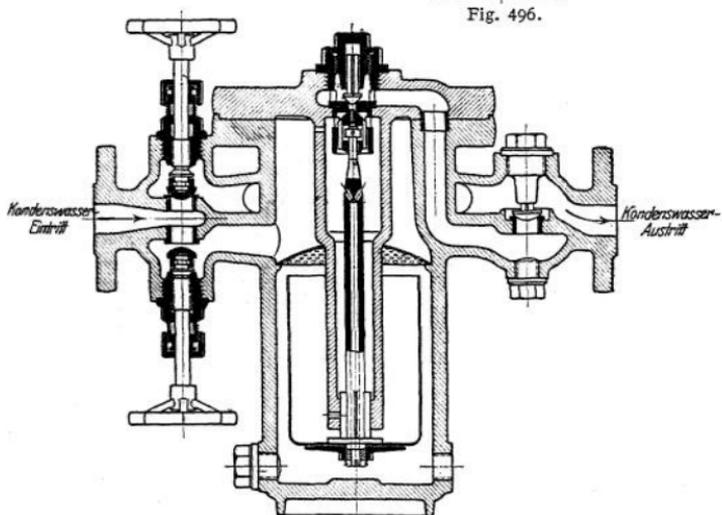


Fig 497.

Fig. 495 zeigt eine einfachere Ausführung.

Das Kondenswasser wird unten durch den Kondensstopf abgeleitet, Fig. 496. Das zufließende Wasser füllt allmählich den Topf, bis er sinkt. Dann öffnet sich oben ein Ventil, und der Dampfdruck drückt das Wasser hindurch. Über diesem Ventil, befindet sich ein Rückschlagventil, um etwaigen Druck in der Abwasserleitung bei geöffnetem Umlaufventil nicht auf den Topf wirken zu lassen. Das Umlaufventil wird beim Anlassen der Maschine von Hand geöffnet und läßt das Wasser unmittelbar in die Abwasserleitung treten, da der Topf die große Menge des Niederschlagwassers beim Anlassen nicht schnell genug fortschaffen würde. Fig. 497: Ausführung „Patent Hübner & Mayer, Wien“, mit Kegel- und großem Hauptventil zur schnellen Öffnung. Der Deckel ist während des Betriebes abnehmbar, so daß der Topf nachgesehen werden kann. Das Wasser unter dem Topf tritt durch die hohle Schwimmerstange aus; durch seitliche Bohrungen im unteren Teil des Führungsrohres strömt während des Schließens Dampf nach und drückt das Wasser hinaus.

XVI. Absperrvorrichtungen.

1. Absperrventile und -schieber.

Material. Grauguß bei jedem Durchmesser bis 13 Atm., bei höchstens 50 mm \varnothing bis 20 Atm. zulässig; Bronze bis 220° C zulässig, wenn sie bei gewöhnlicher Temperatur mindestens eine Zugfestigkeit von 2000 kg/qcm und wenigstens 15% Dehnung besitzt. Nickeldichtung für überhitzten Dampf; Gehäuse dazu meist aus Stahlguß. Flanschen: glatt, mit Vor- und Rücksprung oder Feder und Nut (Nut auf der Eintrittsseite, Feder auf der Austrittsseite der Flüssigkeit).

1. Ventile, bei denen die abschließenden Flächen im Augenblick des Abschlusses sich senkrecht aufeinander bewegen, und zwar Hubventile, wenn der abschließende Teil gehoben wird, Klappenventile, wenn er aufgeklappt wird.

2. Schieber, bei denen die abschließenden Flächen aufeinander gleiten, und zwar Normalschieber bei geradlinigen Bahnen der abschließenden Teile und Hähne, bei denen eine Drehung der abschließenden Teile um ihre Achse erfolgt.

Wann Hubventile, Schieber oder Hähne am Platze sind, ist mit Rücksicht auf folgende Gesichtspunkte zu bestimmen:

Hubventile:

- Vorteile: 1. Dichtungsflächen leicht herzustellen und nachzuschleifen;
2. schnelles Öffnen und Schließen (Ventilhub verhältnismäßig der Spindelumdrehung).
- Nachteile: 1. großer Widerstand infolge Richtungsänderung der Flüssigkeit. Dieser beträgt etwa soviel wie der eines geraden Rohres von 17 m Länge; beispielsweise für ein Ventil 100 l W. bei 16 Atm. Kesseldruck für
- | | | | | | | | | |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----------|
| $v =$ | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 50 | 60 m/sek |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----------|
- Druckverlust = 0,037 0,066 0,102 0,148 0,2 0,264 0,408 0,592 Atm.
2. Schmutzablagerung in den toten Räumen neben der Trennungswand;
3. Stöße in der Rohrleitung beim Öffnen und Schließen.

Schieber:

- Vorteile: 1. Widerstand infolge des geraden Durchganges nicht größer als im Rohr;
2. keine Schläge beim Öffnen und Schließen;
3. genauere Regelung der Flüssigkeitsmenge als beim Ventil.
- Nachteile: 1. Bearbeitung schwieriger, da die Dichtungsflächen meist nicht rechtwinklig zur Rohrachse;

2. sie dehnen sich infolge ungleicher Materialverteilung ungleich aus. Aus diesem Grunde sind gewöhnlich Schieber schon bei gesättigten Dämpfen und mittleren Drücken nicht verwendbar, bei überhitzten überhaupt nicht. Werden sie kalt geschlossen, so lassen sie sich nach dem Erwärmen nicht öffnen, da sich der Schieber festklemmt;
3. Abnutzung der dichtenden Flächen infolge ihres Gleitens unter Druck (Abheben beim Ventil);
4. infolgedessen Reserveschieber erforderlich.
5. Schmutzablagerung in dem toten Raume unter dem Schieber.

Hähne:

- Vorteile:
1. einfach und billig;
 2. leicht nachzuarbeiten;
 3. gerader Durchgang.
- Nachteile:
1. für unreine Flüssigkeiten nicht verwendbar;
 2. schlechtes Dichthalten;
 3. große Hähne schlecht herstellbar;
 4. Schläge beim Öffnen und Schließen.

Sämtliche Ventile und Schieber schließen bei Rechtsdrehung der Spindel; hiernach ist das Gewinde als rechts- oder linksgängig zu bestimmen. Baulänge der Flanschenschieber meist = D

(= lichter Durchmesser) + 200 mm. In die Vertikalebene durch die Längsachse sind keine Schrauben zu setzen.

Der Nachteil der Rippen unterhalb des Ventiltellers, Fig. 498, ist Erhöhung des Ventilwiderstandes und ungleiche Abnutzung von Sitz und Kegel, bei Anordnung oberhalb (Fig. 501) wird dies vermieden. Die Rippen werden außen mit Rücksicht auf Abnutzung meist verbreitert und unten eventuell abgeschragt, um bei jedesmaligem Hub eine geringe Drehung zu erzielen, so daß der Sitz sich gleichmäßig abnutzt. Im Mittel

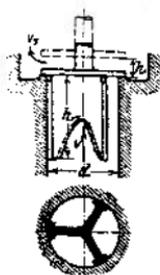


Fig. 498.

$h_1 = \infty d$, kleiner bei genauer axialer Führung, größer bei starker seitlicher Flüssigkeitsablenkung. Die Hubhöhe bestimmt sich aus

$$\left(\frac{d^2 \pi}{4} - \text{Rippenquerschnitt} \right) \cdot v = (d \cdot \pi - \text{gesamte Rippenbreite}) \cdot h \cdot v_1,$$

woraus für $v = v_1$ bei Vernachlässigung der Rippen folgt:

$$\frac{d^2 \pi^2}{4} = d \cdot \pi \cdot h, \quad \text{d. h.} \quad h = \frac{d}{4}.$$

Die Sitzbreite vor allem der selbsttätigen Ventile bestimmt sich aus der Flächenpressung; diese wählt man für Rotguß ≈ 150 kg/qcm, Bronze ≈ 200 kg/qcm und bei Leder (geeignet für kalte Flüssigkeiten) und Gummi ≈ 50 kg/qcm, bei Grauguß ≈ 80 kg/qcm; bei nur gelegentlich arbeitenden

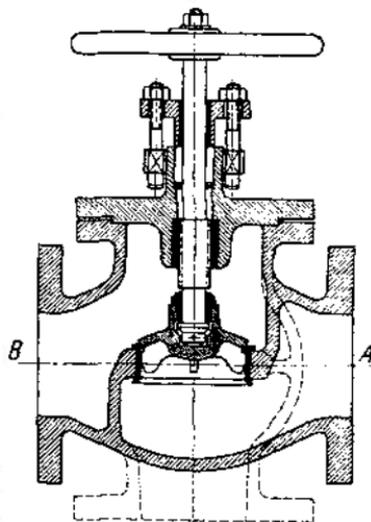


Fig. 499.

Ventilen kann Pressung höher gewählt werden. Dichtungsfläche eben oder kegelförmig. Der Druckpunkt der Spindel am Kegel soll unterhalb der Dichtungsfläche liegen.

Fig. 499 Durchgangsventil¹⁾. Flüssigkeit strömt von *B* nach *A* und drückt auf den Kegel, unterstützt also das Abdichten. Wo dies nicht ausschlaggebend ist, z. B. bei Kesselspeiseventilen für mittlere Dampfdrücke, läßt man besser die Flüssigkeit von *A* nach *B* durchströmen, da dann selbst bei Lösen des Kegels von der Spindel der Betrieb noch aufrechtzuerhalten ist. Bei Fig. 502 wäre dies z. B. andernfalls nicht möglich. In diesem Falle kann auch bei geschlossenem Ventil die Packung der Spindel erneuert werden. Um bei Durchflußrichtung *B* nach *A* bei großem p und großem Durchmesser das Anheben zu erleichtern, sieht man eine Umführung vor, Fig. 500¹⁾. Spindelgewinde

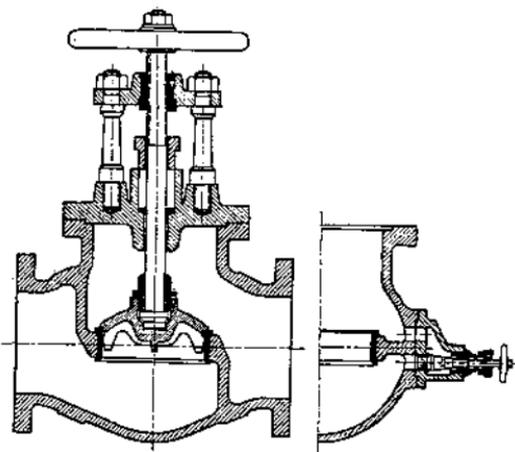


Fig. 500.

liegt außerhalb der Flüssigkeit, wozu eine Brücke mit Säulen vorgesehen. Warzen am Gehäuse zur Anbringung einer Entwässerung. Spindel und Deckel tragen kegelförmige Flächen, die bei geöffnetem Ventil die Dichtung übernehmen, um die

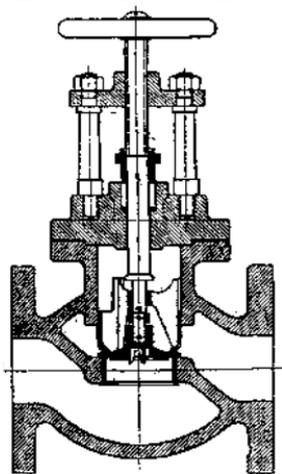


Fig. 501.

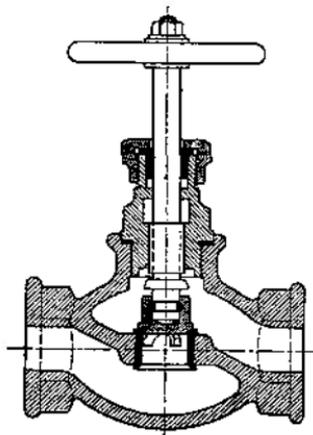


Fig. 502.

Packung erneuern zu können. Fig. 501¹⁾ zeigt statt der Umführung ein besonderes kleines Ventil, das sich vor dem großen öffnet. Führung des Sitzes oberhalb der Dichtungsfläche. Fig. 502¹⁾: Verbindung des Kegels mit der Spindel durch

¹⁾ Ausführung von Schäffer & Budenberg.

vorgesteckten Stift, besonders für geringe Kräfte geeignet. Fig. 503¹⁾: Ventil mit zentraler Strömung, Wiß-Ventil; Vorteil: gleichmäßige Abnutzung der

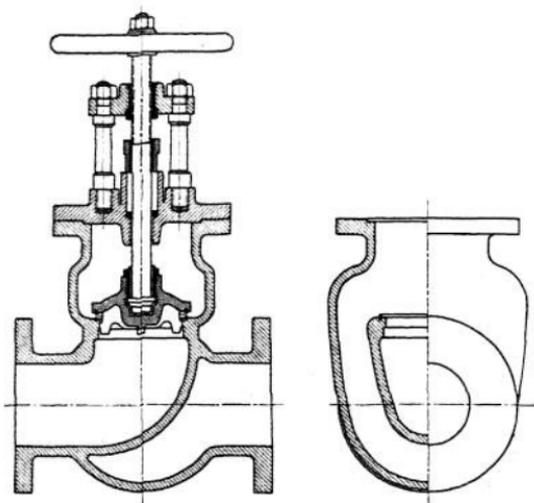


Fig. 503.

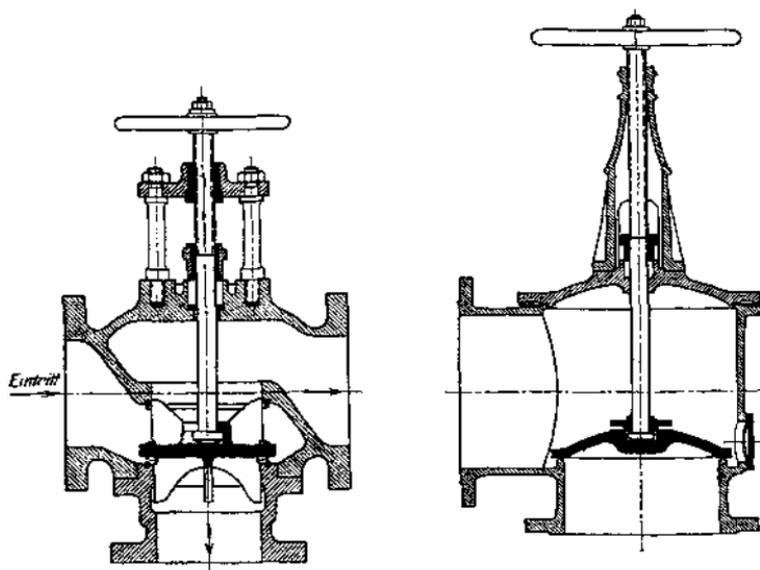


Fig. 504.

Fig. 505.

Dichtungsflächen. Fig. 504¹⁾: Wechselventil mit Nickeldichtung. Fig. 505²⁾

¹⁾ Ausführung von Schäffer & Budenberg.

²⁾ Ausführung der Armaturen- und Maschinenfabrik A.-G. vorm. Hilpert, Nürnberg-Pegnitz.

Gaseckventil. Fig. 506¹⁾: Gasdreiwegeventil. Fig. 507²⁾: Entlastetes Eckventil, bei dem beide Durchlaßöffnungen gleichen Querschnitt mit der Hauptleitung

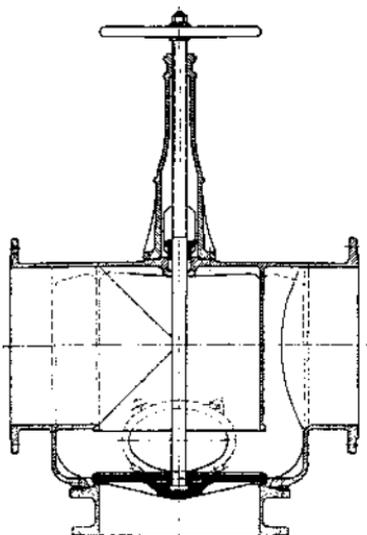


Fig. 506.

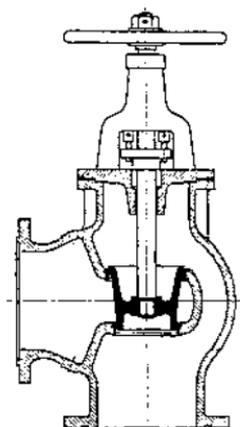


Fig. 507.

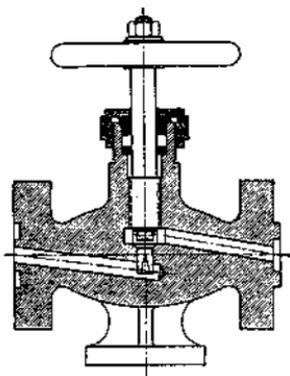


Fig. 508.

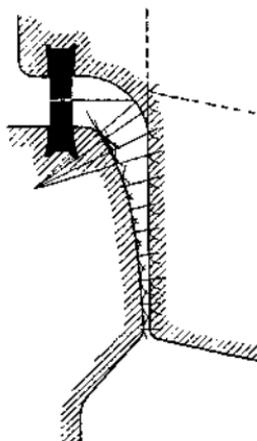


Fig. 509.

aufweisen. Fig. 508²⁾: Regulierventil mit dreieckigen Ausschnitten im Ventilkegel, um langsames Öffnen zu erreichen. Den gleichen Zweck verfolgt Fig. 509, wobei die innere Begrenzung des Gehäuses so ausgebildet werden kann,

¹⁾ Ausführung der Amaturen- und Maschinenfabrik A.-G. vorm. Hilpert, Nürnberg-Pegnitz.

²⁾ Ausführung von Schäffer & Budenberg.

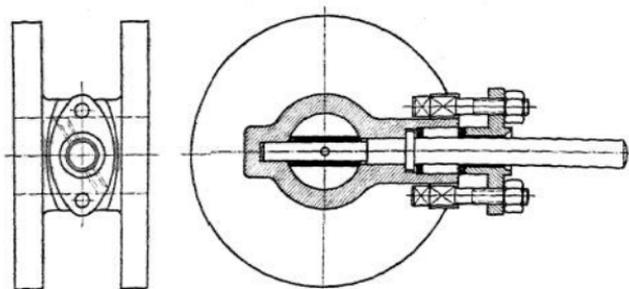


Fig. 510.

daß der Durchtrittsquerschnitt in jedem beliebigen Verhältnis zum Hube steht. Fig. 510¹⁾: Drosselklappe.

Fig. 511¹⁾: Normalschieber mit Innengewinde und Abdichtung nach beiden Seiten, wenn von jeder Seite aus ein Überdruck möglich. Führung des Schiebers im halbgeöffneten Zustande durch seitliche Rippen. Nachteil des Innengewindes ist Rosten. Neigung der Dichtungsfläche gegen die Spindel etwa 1:10.

Fig. 512¹⁾: Normalschieber mit Außengewinde, dessen Nachteil: größere Bauhöhe und damit höherer Preis. Die Stopfbüchse wird durch Herunterschrauben einer Mutter angezogen, deren Gegengewinde in dem Bock. Bei geringen Drücken kann die Haube flach ausgeführt werden, da die Baulänge dann kürzer ausfällt, Fig. 513²⁾ und 514²⁾. Bei größeren würden jedoch Dehnungen im Betriebe die Folge sein, die einen sicheren Abschluß selbst bei Verstärkungsrippen in Frage stellen.

Die Vorteile der Schieber vereinigen folgende Bauarten mehr oder weniger mit denen der Ventile: Fig. 515¹⁾: Schieberventil, bei dem die abdichtenden Flächen sich in einem Kugellager gegeneinander stützen, so daß sie sich bei einseitiger Dehnung des Gehäuses entsprechend einstellen können. Bei Linksdrehung des Teiles *a* steigt die Spindel *a* empor und öffnet dabei das Ventil; Fig. 516: Missong-Schieber; Dichtungs-

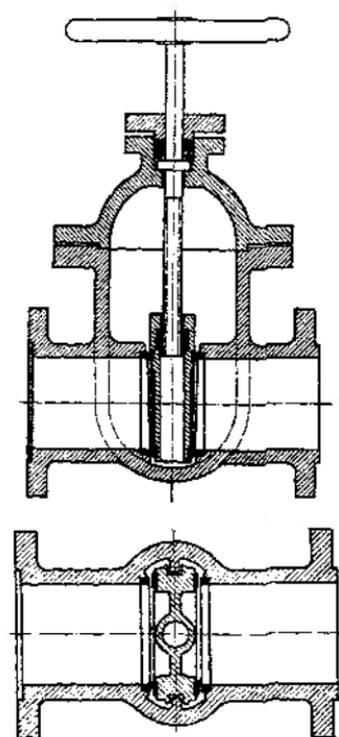


Fig. 511.

fläche senkrecht zur Rohrachse, mithin leichtes Abdrehen, Öffnen und Schließen erfolgt langsamer als bei einem gewöhnlichen Schieber, da dieser sich auch noch senkrecht zur Dichtungsfläche bewegt. Dichtungsfläche des Schiebers

¹⁾ Ausführung Schäffer & Budenberg.

²⁾ Ausführung der Armaturen- und Maschinenfabrik A.-G. vorm. Hilpert, Nürnberg-Pegnitz.

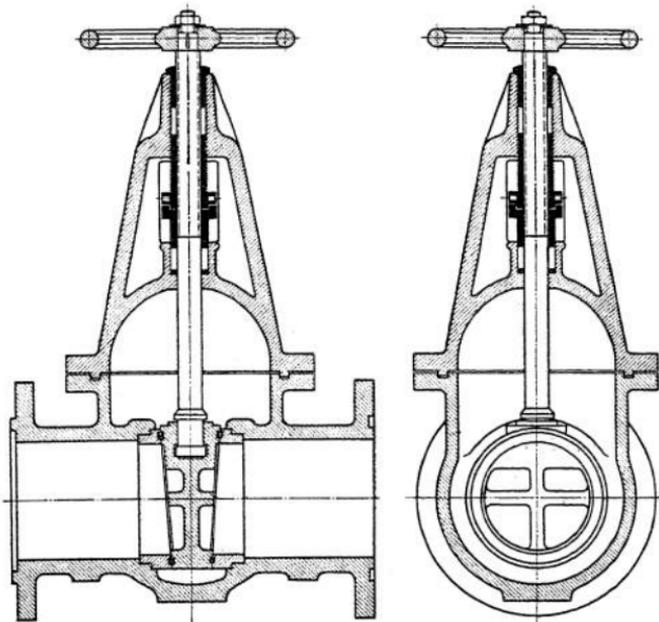


Fig. 512.

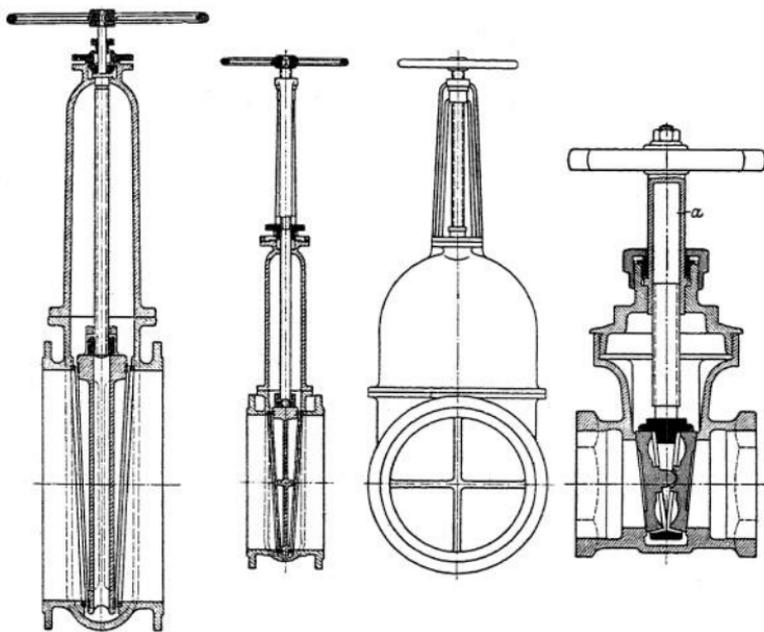


Fig. 513.

Fig. 514.

Fig. 515.

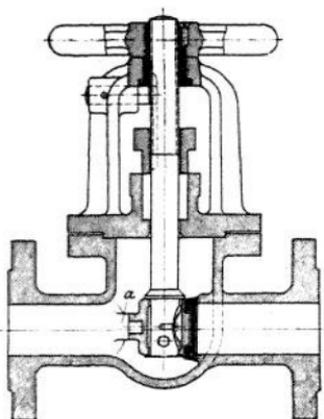


Fig. 516.

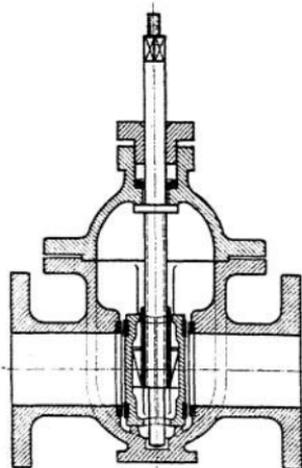


Fig. 517.

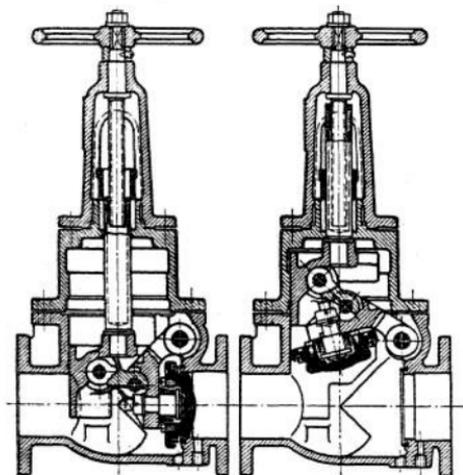


Fig. 518.

wird durch eine Feder angepreßt, die sich andererseits gegen die Spindel legt. In der Endlage legt sich der ganze Schieber gegen kegelförmige Flächen *a* am Gehäuse. Fig. 517: Peet-Ventil oder -Schieber. Bis unmittelbar vor der Abdichtung wirkt er als Schieber, im Augenblick der Abdichtung dagegen drücken konische Flächen beide Dichtungsflächen auseinander und bewegen sie senkrecht zum Sitz. Werden 25% zur Sicherheit zugeschlagen, so beträgt in Richtung der Rohrachse die zum Schließen erforderliche Kraft

$$P = \frac{5}{4} \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \cdot p,$$

mithin bei $\alpha = 25^\circ$ Steigungswinkel des Konus die Kraft in der Spindel

$$= 2 \cdot P \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varrho) = 2 \cdot P \cdot \operatorname{tg} 35^\circ = 1,75 \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \cdot p.$$

Fig. 518: Borsig-Schieber (Schieber nach der Bauart des Gehäuses, Ventil nach der Arbeitsweise), wiedergegeben in geschlossener und geöffneter Stellung,

sowie in der Lage zum Nachschleifen. Ventilteller c ist mittels Bolzens im Hebel d frei drehbar gelagert, wobei Feder h ihn stets von d abdrückt, so daß Schwingungen des Tellers nicht auftreten können. d hat in einem oberhalb des Ventilsitzes liegenden Bolzen seinen Drehpunkt. Beim Schließen führt sich der außen konische Teller in dem innerhalb des Sitzes abgedrehten Gehäuse, so die Dichtungsflächen zentrierend. Eine durch Zapfen mit d und einem Schlitten verbundene Druckstelze übermittelt die Bewegungen des Hebels d . In der Schlußstellung steht sie fast waagrecht, so mit dem Schlitten einen Kniehebel bildend und c auf seinen Sitz pressend. Der Schlitten bewegt sich senkrecht zur Rohrachse; hierzu trägt er eine hohle Spindel mit Gewindemutter, in die das Spindelgewinde eingreift. Er ist ein Drehkörper und, um seitliche Rückwirkungen auf die Spindel auszuschließen, etwa als $3/4$ -Zylinder ausgebildet. Knaggen am Gehäuse unter dem Schlitten verhindern bei eingetretener Abnutzung ein Durchdrücken der Stelze.

Zum Nachschleifen läßt man nur noch d und c , das zu diesem Zweck einen Kranz von Löchern trägt, im Gehäuse. Auf die Verlängerung w des Drehzapfens wird dann ein Schlüssel x aufgesetzt, der mit dem unteren Ende in eines dieser Löcher von c faßt und beim Hin- und Herschwingen das Einschleifen auszuführen gestattet. Hierbei wird gleichzeitig d an c angedrückt, wozu Aussparungen y vorgesehen.

Fig. 519 veranschaulicht den Verlauf des Spannungsverlustes verschiedener Bauarten für eine Leitung 200 \varnothing . Die Figur läßt erkennen, in welchem Maße v durch Zunahme des Spannungsverlustes vergrößert werden kann, so daß der Rohrdurchm. selbst und die Strahlungsverluste kleiner werden.

Fig. 520¹⁾: Hochdruck-Dampfschieber Patent Ferranti. Vor und hinter dem Ventil sind Rohrstücke eingeschaltet,

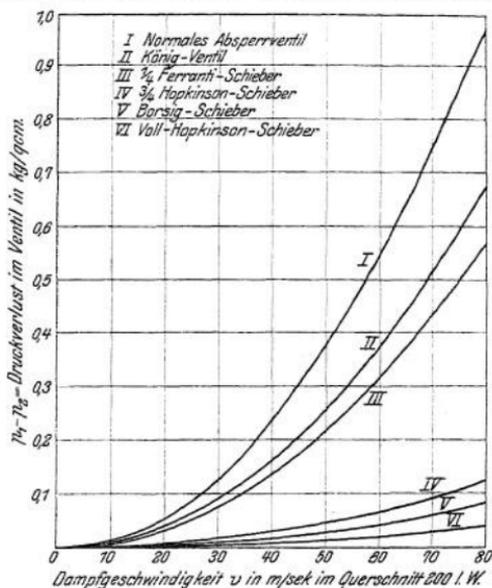


Fig. 519.

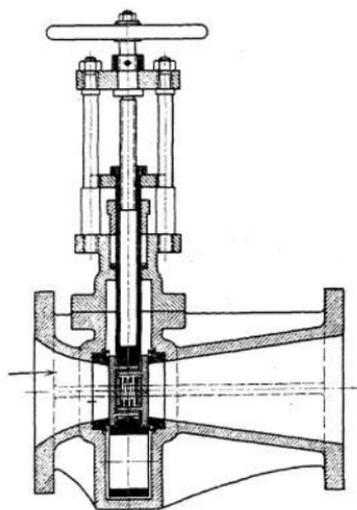


Fig. 520.

¹⁾ Ausführung Schäffer & Budenberg.

welche die Form der Laval-Düsen aufweisen. Es wird dadurch im Schieber die potentielle Energie des Dampfes in kinetische umgesetzt, der Druck verringert, die Geschwindigkeit erhöht. Mithin kann der Schieberquerschnitt verkleinert werden (gewöhnlich auf $\frac{1}{4}$ des Rohrquerschnittes), so daß der Schieber kleiner und leichter ausfällt, die Dampfverluste durch Undichtigkeit geringer werden und er sich leichter öffnen und schließen läßt. Er ist mithin dann am Platz, wenn diese Verluste geringer als die Druckverluste durch die Düse. Der Schieber selbst besteht aus zwei Platten mit zylindrischen Ansätzen, die durch eine Spiralfeder gegen ihre Sitze gepreßt werden. Unten trägt der Schieber eine Verlängerung, die bei voll geöffnetem Schieber sich zwischen die Sitze legt und dadurch eine glatte Düsenwandung herstellt.

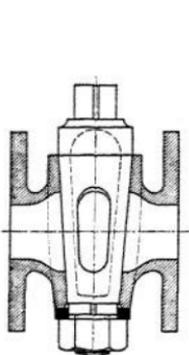


Fig. 521.

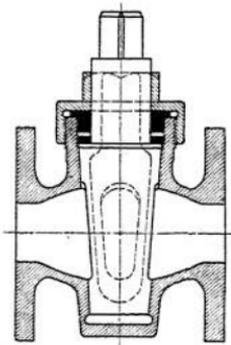


Fig. 522.

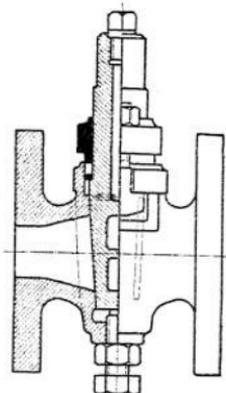


Fig. 523.

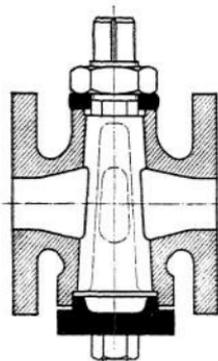


Fig. 524.

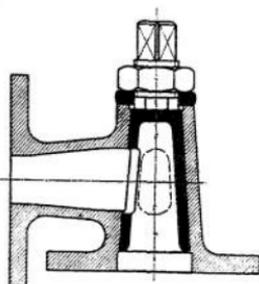


Fig. 525.

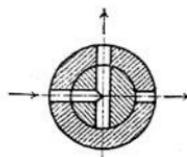


Fig. 526.

Fig. 521: Durchlaßbahn. Soweit Berührung zwischen Kücken und Gehäuse, sind beide Teile konisch (Neigung der Kegelseite gegen die Achse 1 : 8 bis 1 : 15), wo solche nicht mehr vorhanden, zylindrisch bzw. ausgespart, also Kücken oben, Gehäuse unten, zum Zweck, Ansätze nach eingetretener Abnutzung zu vermeiden. Der vierkantige Zapfen zwingt die Unterlegscheibe und damit auch die Mutter an der Drehung teilzunehmen, so daß diese sich nicht selbst lösen wird. Durch-

gangsquerschnitt $= b \cdot h = \frac{d^2 \pi}{4}$; mit $h = 2 \cdot b$: $b = d \sqrt{\frac{\pi}{8}} = 0,68 \cdot d$;

mithin nimmt er $\frac{0,68 \cdot 2 \cdot d}{d \cdot \pi} = \infty \frac{1}{s}$ des Umfanges ein, wenn der mittlere Kükendurchmesser = Rohrdurchmesser. Weitere Beispiele: Fig. 522 mit Stopfbüchse, Fig. 523, bei der das Kükens als Behälter für Schmiermaterial ausgebildet ist, das durch Nuten auf die Dichtungsfläche gelangt und ein Festbrennen verhindert, Fig. 524 mit unten offenem Kükens, so daß die Flüssigkeitspressung die Dichtung selbst übernimmt, Fig. 525: Eckhahn. Fig. 526 zeigt die Wirkungsweise eines Dreiweghahnes.

2. Selbsttätige Ventile.

Berechnung und Beispiele für Dampfmaschinen, Pumpen usw. s. diese Kapitel. Für Rohrleitungen kommen in Frage:

Rückschlagventile: Fig. 527 und Fig. 528: Wiß-Ventil mit zentraler Strömung (vgl. Fig. 503), und Rückschlagklappen, sowohl für wagerechte wie lotrechte Leitungen verwendbar.

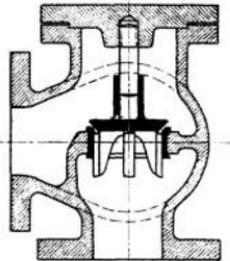


Fig. 527.

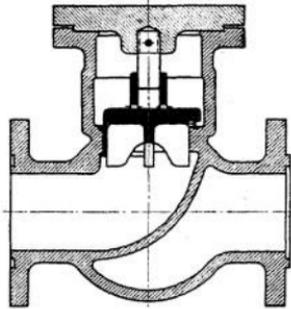


Fig. 528.

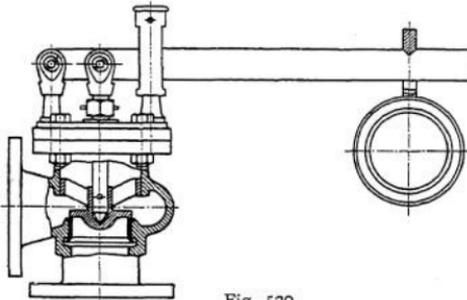


Fig. 529.

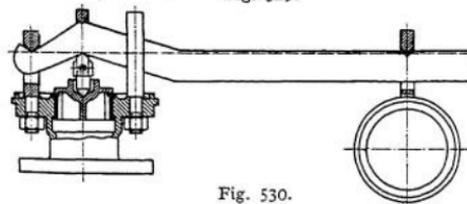


Fig. 530.

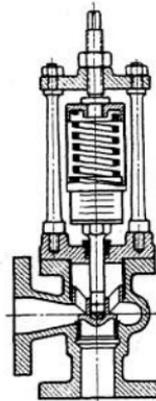


Fig. 531.

Sicherheitsventile: Fig. 529 und 530 mit Gewichtsbelastung, letzte Ausführung mit Schneidenlagerung vorzuziehen, Schneiden in einer Geraden. Fig. 531 für bewegliche Kessel, mit Federbelastung und außen liegender Feder,

um ihre Spannung nicht durch die Flüssigkeitstemperatur zu beeinflussen; Federspannung einstellbar. Infolge ihrer geringen Erhebung lassen diese Ventile nur kleine Flüssigkeitsmengen austreten. Sie sind mithin dort am Platze, wo kleiner Hub genügt, z. B. bei hohem Wasser-, sehr hohem Gasdruck, Speiseleitungen, nicht aber dort, wo rascher Drucksteigerung zu begegnen ist, z. B. infolge plötzlich verminderter Dampfentnahme. Hier kommen die Hochhub-sicherheitsventile in Frage, die ihren ganzen Querschnitt (Hub = $d/4$) freigegeben. Beispiel Fig. 532: Bauart „Hübner & Mayer“, Wien. Der Dampf reißt beim Ausströmen die Luft aus dem Raum über dem Ventil mit; hierdurch entsteht ein Unterdruck über diesem, so daß es sich schneller und höher hebt als ein gewöhnliches Ventil.

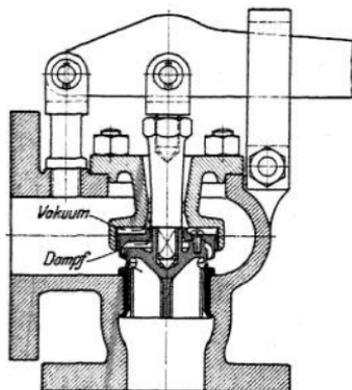


Fig. 532.

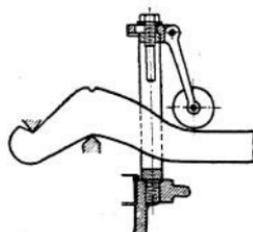


Fig. 533.

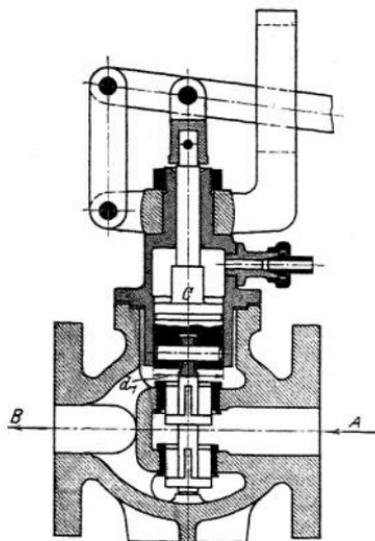


Fig. 534.

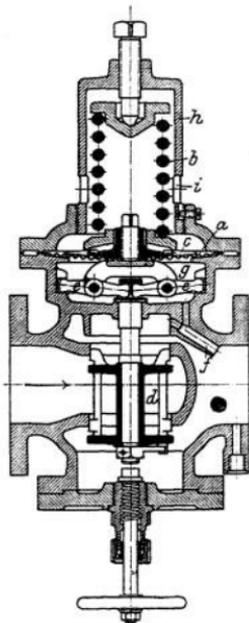


Fig. 535.

Beim schnellen Öffnen geht die dem größeren Druck entsprechende Flüssigkeitsmenge verloren. Ist die Drucksteigerung nur kurz vorübergehend, so ist das ein wirtschaftlicher Nachteil. Da 10% Überschreitung bei Dampfkesseln gestattet sind, ordnet Dreyer, Rosenkranz und Droop eine Rollgewichtsbremse

an, Fig. 533, die den vollen Hub erst bei dieser Überschreitung freigibt, zu Anfang aber das Ventil wie ein gewöhnliches arbeiten läßt, da das Rollgewicht den Hebel noch nicht berührt. Erst bei geringer Öffnung findet dies unter zunehmender Belastung mit wachsendem Hebelausschlage statt, wobei das Rollgewicht um seinen oberen einstellbaren Drehpunkt schwingt.

Reduzierventile: Fig. 534: Der Dampf strömt von *A* nach *B* durch das entlastete Ventil; bei *B* kann nur ein solcher Dampfdruck p_1 entstehen, daß er der Belastung des Kolbens *C* das Gleichgewicht hält: $\frac{d_1^2 \pi}{4} \cdot p_1 =$ Belastung des

Kolbens *C*. Wird p_1 größer, so hebt sich *C*, das Ventil schließt sich, der Dampf wird gedrosselt; wird p_1 geringer, so öffnet sich das Ventil, der Dampfdruck steigt. Statt der Gewichtsbelastung auch solche durch Feder möglich, wobei die Lage des Ventiles beliebig sein kann. Fig. 535: Bauart „Hübner & Mayer“ für gesättigten Dampf.

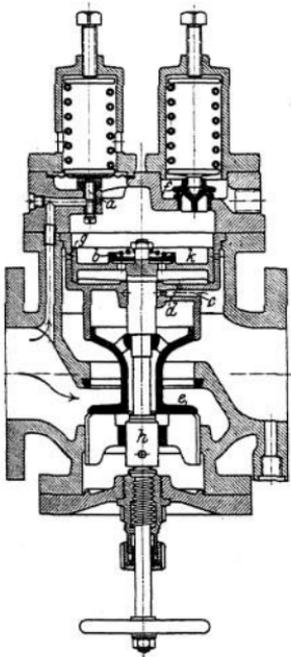


Fig. 536.

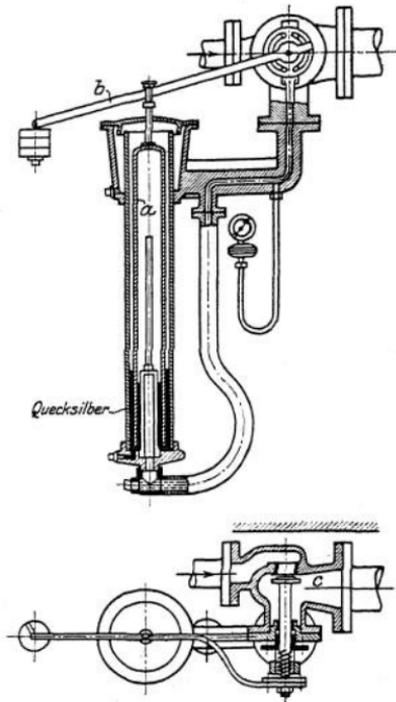


Fig. 537.

Eine Membran *a* wird durch eine Feder *b*, wobei zur Druckverteilung ein fächerförmiges Gerippe *c* zwischengefügt ist und durch den bereits reduzierten Dampfdruck belastet. Die einerseits am Gehäuse, andererseits an der Spindel gelagerten Hebel *e* übertragen die Bewegung auf das Ventil *d*, das sich mithin entsprechend dem verminderten Dampfdruck einstellt. Bei geringen Abmessungen entfallen die Zwischenhebel, deren Zweck ist, eine Übersetzung zwischen Spindel und Membran einzuschalten. Durch die Saugdüse *f* wird bei zunehmender Dampfentnahme der Dampfdruck unter der Membran im Raum *g* etwas vermindert, so daß das Ventil dem größeren Dampfverbrauch entsprechend sich etwas mehr öffnet. Schlitz *i* im Gehäuse *h* lassen ein Undichtwerden der

Membran erkennen. Fig. 536 zeigt eine Bauart der gleichen Firma, bei dem das kleinere Reduzierventil *a* den Dampfdruck oberhalb des Kolbens *k* einstellt, der von unten durch den reduzierten Dampfdruck belastet wird und beim Herabgehen zuerst das kleine Entlastungsventil *h* und sodann Hauptventil *e* öffnet. Mit diesem Kolben ist Ventil *b* verbunden. *c* ist die obige Saugdüse; Öffnung *d* läßt bei Überdruck in der rechten Leitung durch Ventil *b* Dampf in den Raum über dem Kolben treten, aus dem das Sicherheitsventil *f* ihn entfernt. Dem gleichen Zweck dienen Öffnungen *g*, die bei höherem Hub des Kolbens freigegeben werden.

Fig. 537: Ausführung von Salzmann: der unten offene Kolben *a* schwimmt in Quecksilber; sein Innenraum steht mit der Niederdruckleitung in Verbindung. Steigt in ihr der Druck, so hebt sich *a* und schließt dabei mittels Hebel *b* Ventil *c* entsprechend ab, so die Dampfentnahme regelnd. Da die auf den Kolben wirkende Flüssigkeitsreibung geringer als bei den vorhergehenden Ventilen, so folgt dieses Ventil leichter den Druckschwankungen. Es vermindert von jeder Höhe bis auf 0,05 Atm.

Rohrbruchventile: Fig. 538¹⁾: Kugel-Rückschlagventil nach beiden Seiten wirkend, bei dem eine Kugel bei Eintritt eines Rohrbruches durch die erhöhte

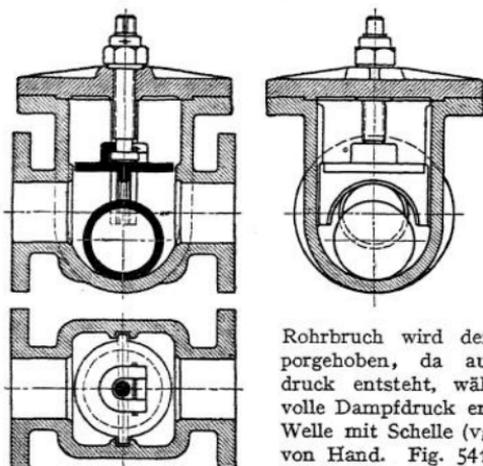


Fig. 538.

Dampfgeschwindigkeit mitgerissen wird und die Leitung verschließt. Einstellung der Empfindlichkeit durch Verringern des Querschnittes über der Kugel. In Fig. 539¹⁾ ersetzt ein durch Federkraft in der Schwebe gehaltener Teller die Wirkung der Kugel und nimmt bei Abschluß der Leitung durch das Absperrventil seine Mittellage wieder ein. Fig. 540²⁾: Bei

Rohrbruch wird der Kegel gegen den Sitz emporgehoben, da auf der Oberseite ein Unterdruck entsteht, während auf der Unterseite der volle Dampfdruck erhalten bleibt. Eine gekröpfte Welle mit Schelle (vgl. Fig. 541) gestattet Anheben von Hand. Fig. 541²⁾ zeigt Ausführung mit Wirkung nach beiden Seiten. Der obere Kegel kann dabei als Absperrventil verwandt werden. Fig. 542²⁾

ist bestimmt für wagerechte Ringleitungen. Dabei werden bei normalem Betriebe die Kegel durch den Dampfdruck nach außen gepreßt, da ihre Unterseiten mit der freien Luft in Verbindung stehen.

Beispiel. Leitung 300 mm Durchmesser, Dampfüberdruck 10 Atm, $v = 30$ m/sek, Ventil ist eingestellt, bei $v = 50$ m/sek zu schließen.

Normal strömen 42 000 kg/st. Dampf hindurch; mithin müssen weitere $\frac{3}{8} \cdot 42\,000 = 28\,000$ kg/st. hindurchtreten, damit Schluß eintritt. Damit ergibt sich bei 450 m/sek Grenzggeschwindigkeit s. S. 376), die dazu erforderliche Öffnung f qm aus

$$28\,000 = 450 \cdot f \cdot \text{qm} \cdot \gamma \cdot 3600$$

$$f \cdot \text{qm} = \frac{28\,000 \cdot 100 \cdot 100}{450 \cdot 5,53 \cdot 3600} = 31,3 \text{ qcm.}$$

Der plötzliche Schluß bedingt starke Stöße, weshalb elektrisch betätigte Schieber oder Ventile in manchen Fällen vorzuziehen.

¹⁾ Ausführung Schäffer & Budenberg.

²⁾ Ausführung Hübner & Mayer, Wien.

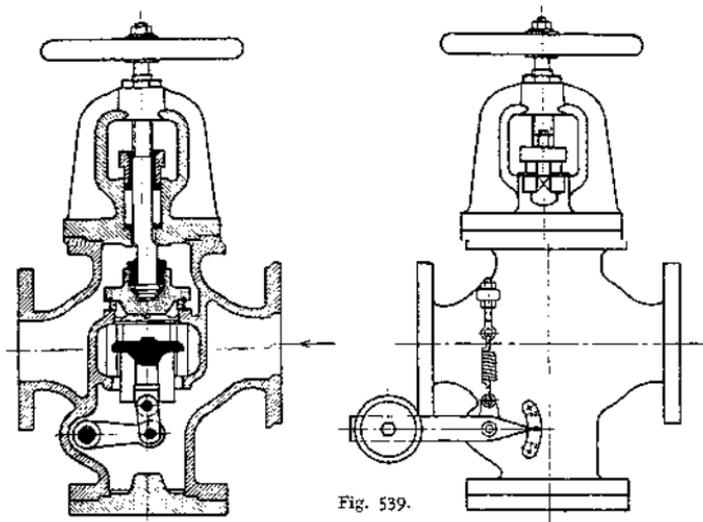


Fig. 539.

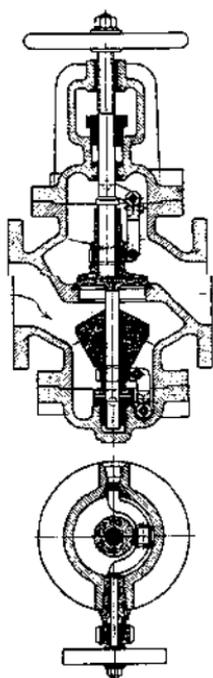
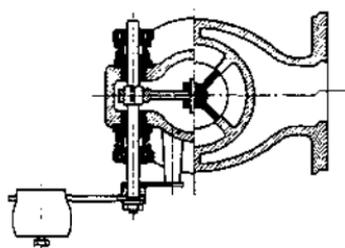


Fig. 541.

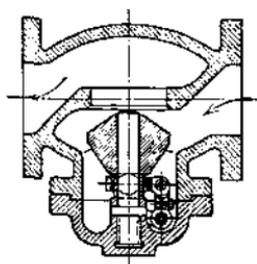


Fig. 540.

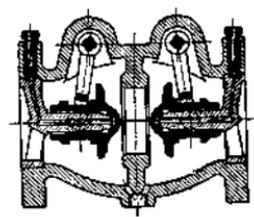


Fig. 542.

3. Stopfbüchsen.

Weitere Beispiele s. Ventile.

Sie bestehen aus dem die Dichtung übernehmenden Teil (Weich- bzw. Metallpackung), der Brille (oder Drücker), die mit Hilfe der Stopfbüchsen-schrauben die Packung an die Stange preßt oder nur zum Abschluß dient, und meist noch einem Grundringe. Weichpackung eignet sich vornehmlich für Wasser, Gas und Dampf niedriger Temperatur, Metallpackung für hohe Dampfspannungen und überhitzten Dampf. Grundringe und Brille aus Metall, bzw. letztere bei größerer Ausführung mit Metallfutter. Brille und Grundring werden meist auf der Seite der Packung abgeschrägt, um diese an die Stange zu pressen. Weichpackung aus Hanf, Baumwollschur, Leder (Scheiben oder Manschette, vgl. Fig. 546), Asbest. Bei ihr wählt man etwa, Fig. 543,

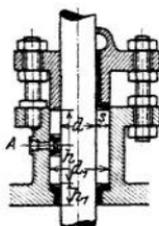


Fig. 543.

$$s = 0,65 \text{ bis } 0,8 \bar{d} ,$$

$$h = \infty d_1 ,$$

$h_1 = d$ bei liegenden und $h_1 = 0,5 \cdot d$ bei stehenden Maschinen.

Die Anzahl der Stopfbüchsen-schrauben bestimmt sich dadurch, daß sie mindestens den Druck $(d_1^2 - d^2) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot p \cdot c$ aufzunehmen imstande sein müssen. $c = 1$, wenn die Packung durch die Stopfbüchsen-schrauben nicht zusammengepreßt wird und die Reibung zwischen Stange und Packung vernachlässigt werden

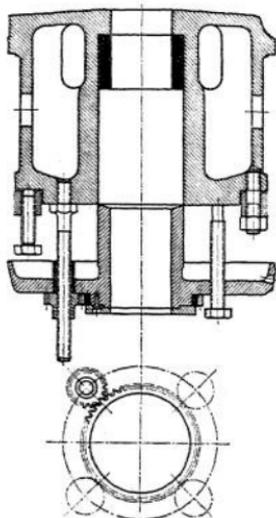


Fig. 544.

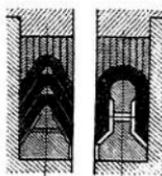


Fig. 545 und 546.

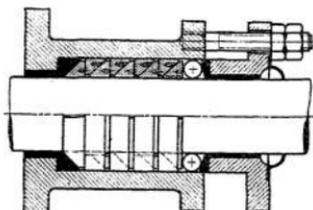


Fig. 547.

kann; c wachsend bis 3 für Weichpackung, die durch Anziehen der Schrauben erst zum Dichten gebracht wird. Bei kleineren Stopfbüchsen genügen zwei Schrauben mit ovalem Flansch, Befestigung nach Fig. 543; bei kleinen eine Überwurfmutter, s. Fig. 502 und 508. Diese zieht ganz gleichmäßig an, was bei Schrauben dadurch erreicht werden kann, daß die Muttern als Schneckenräder

ausgebildet werden, die gleichzeitig von einer Schneckenwelle aus ihre Drehung erhalten, oder als Zahnräder, die in ein axial sitzendes Rad eingreifen, Fig. 544: hängende Stopfbüchse, Ausführung der Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg, A.-G. Zuführung des Schmiermaterials am besten bei *A*, Fig. 543, wobei ev. ein Ring (nur links, im Schnitt gezeichnet) zur Ölverteilung eingelegt wird. *h* ist dann entsprechend zu vergrößern. Weitere Beispiele siehe Rohrleitungen, Fig. 487 und Ventile; ferner Kolben, Fig. 444; das Widerlager der Manschette wird auch wohl selbst aus Leder hergestellt, auch mehrere Manschetten angewandt, Fig. 545 und 546. Manschette wird naß in' die richtige Form gepreßt.

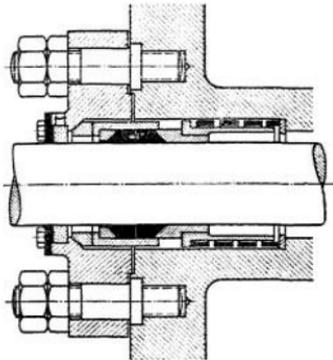


Fig. 548.

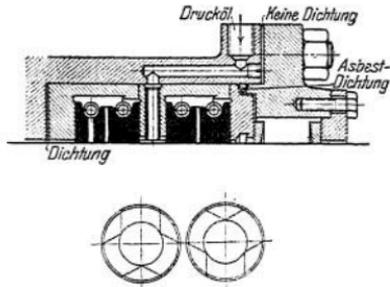


Fig. 549.

Beispiele von Metallpackungen: Fig. 547: Howaldt-Packung, bestehend aus geteilten Metallringen, deren eine Seite kegelförmig ausgebildet ist, so daß sie beim Anziehen gegen die Kolbenstange bzw. den Packungsraum gedrückt werden. Teilfugen der Ringe gegeneinander versetzt. Zum Herausnehmen dienen Löcher mit Gewinde; zwischen ersten Ring und Drücker wird eine elastische Schnur eingelegt, um gleichen Anpressungsdruck zu erhalten.

Packungen, die Durchbiegungen der Kolbenstange (s. diese) folgen:

Fig. 548: Ausführung der Preußischen Staatseisenbahn; die dichtenden Ringe werden durch Federn aufeinander gepreßt. Die Stopfbüchse mit Weichpackung dient nur zum Aufsaugen des Öles und gleichmäßiger Fettung der Stange, nicht zur Dichtung, weshalb der Abschlußdeckel nicht nachstellbar ist.

Fig. 549: „Patent Proell“; die einzelnen Dichtungsflächen sind in Ansicht unter dem Längsschnitt gezeichnet. In jeder Ringkammer befinden sich zwei aus je sechs Teilen bestehende Ringe, die durch eine umgelegte Spiralfeder gleichmäßig gegen die Stange gepreßt werden. Seitlich sind sie sauber eingeschliffen und passen ohne axiales Spiel in die Kammer; radiales Spiel ist dagegen vorhanden. Je nach der Höhe des Dampfdruckes sind 1 bis 4 Ringpaare erforderlich. Druckölschmierung wird im allgemeinen bei Temperaturen über 270° oder 11 Atm. Druck angewandt.

Fig. 550: Lentz-Packung. Sie besteht aus den Ringen *a*, zwischen diesen und der Kolbenstange ist noch Spielraum vorhanden. Die Ringe bilden die Kammern *c* und schließen außerdem die Dichtungsringe *b* ein. Diese sind zwischen *a* mit geringem Spielraum eingepaßt, so daß sie sich mit der Stange, die ohne Spielraum in ihnen beweglich, seitlich verschieben können. An der dem Zylinder zugewandten Seite sind Nuten *q* in den Ringen *b* vorgesehen.

Der Dampfdruck preßt nun bei der Bewegung der Stange nach außen den Ring *b* gegen die Fläche des folgenden Ringes *a*, wobei der in die folgende Kammer *c* tretende Dampf nur noch geringeren Druck aufweist. Auch wird das

Maximum des Druckes zeitlich später erreicht als in dem Zylinder; ebenso in den folgenden Kammern *c*. Damit wird (während der Expansion besonders am Ende derselben) in einer späteren Kammer zeitweise ein höherer Druck herrschen als in der vorhergehenden; infolgedessen wird Ring *b* nach dem Zylinder zu gepreßt, und der Dampf strömt durch die Nuten *g* zurück. Die Undichtigkeitsverluste fallen damit nur gering aus. Etwa austretender Dampf wird als Flüssigkeit durch das Rohr des Stopfbüchsendrückers entfernt.

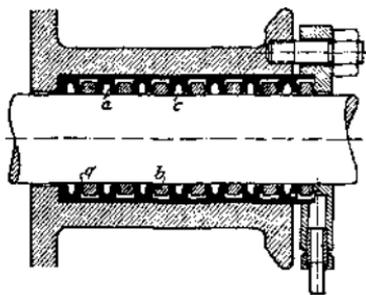


Fig. 550.

Der Druck auf die Stange kann bei dieser Dichtung bis auf 0 sinken, so daß die Reibung auf ein Minimum beschränkt wird; auch kann die durch die Durchbiegung der Stange bewirkte Abnutzung in den Dichtungsflächen zwischen *a* und *b* kein Undichtwerden zur Folge haben.

Die Dampferzeugungsanlagen.

Bearbeitet von Ing. O. Heinrich.

Als Dampfkessel, im Sinne der einschlägigen Reichsgesetzgebung¹⁾, gelten alle geschlossenen Gefäße, die den Zweck haben, Wasserdampf von höherer als atmosphärischer Spannung zur Verwendung außerhalb des Dampferwicklers zu erzeugen.

Ausgenommen werden ; 1. Niederdruckkessel, sofern sie mit einem höchstens 5 m hohen, nicht verschließbaren Standrohr versehen sind. 2. Zwergkessel, deren Heizfläche $\frac{1}{10}$ qm und deren Dampfspannung 2 Atm. Überdruck nicht übersteigt, wenn sie mit einem zuverlässigen Sicherheitsventil ausgerüstet sind. 3. Zentralüberhitzer.

I. Die Leistungsfähigkeit einer Kesselanlage.

1. Größe der Leistung.

a) des Rostes: $\frac{B}{R} = \frac{\text{Stündliche Brennstoffmenge (kg)}}{\text{Gesamte Rostfläche (qm)}}$, Rostbelastung genannt, abhängig vom Brennstoff (Stückgröße, Verhalten im Feuer, Rückstände) und von der Zugstärke.

Mittelwerte für $\frac{B}{R}$.

Brennstoff	Heizwert	Schütthöhe mm	$\frac{B}{R}$	Zugstärke Wassersäule mm
Anthrazit	7800	70 ÷ 80	60 ÷ 70	10
Koks	7200	130 ÷ 170	70 ÷ 90	10
Steinkohle, gasarm	6800	90 ÷ 130	70 ÷ 110	10
Steinkohle, gasreich	7500	80 ÷ 100	90 ÷ 120	10
Braunkohlenbriketts	4800	100 ÷ 300	120 ÷ 180	8
Böhmische Braunkohle	4800	150 ÷ 200	120 ÷ 180	8
Deutsche Braunkohle	2400	200 ÷ 300	170 ÷ 300	8
Torf	3000	100 ÷ 300	120 ÷ 200	8
Holz	2500	200 ÷ 400	120 ÷ 180	8

Bei künstlichem Zug wird $\frac{B}{R}$ für Steinkohlen gesteigert

bei Schiffskesseln: bis zu 400 kg/qm/st.

bei Lokomotivkesseln: bis zu 450 kg/qm/st.

b) der Heizfläche: $\frac{D}{H} = \frac{\text{Stündliche Dampfmenge (kg)}}{\text{Wasserberührte Heizfläche (qm)}}$, die mittlere Heizflächenbeanspruchung, abhängig von der Größe des Wärmedurchganges,

¹⁾ Allgemeine polizeiliche Bestimmungen über die Anlegung von Landdampfkesseln und von Schiffsdampfkesseln vom 17. Dezember 1908.

d. h. von der Menge und Temperatur der Heizgase, der mehr oder weniger guten Durchwirbelung und der Zuggeschwindigkeit derselben, dem Material und der Reinheit der Heizflächenwandung und ferner davon, ob die erzeugten Dampfblasen sich schnell von der Wandung ablösen (emporsteigen oder am besten von dem zu den Heizgasen sich im Gegenstrom bewegenden Kesselinhalt abgekehrt werden).

Ihre obere Grenze findet sie durch die bei wachsender Beanspruchung gleichzeitig zunehmende Nässe des Dampfes.

Mittelwerte für $\frac{D}{H}$.

Kesselbauart	Anstrengungsgrad des Betriebes			
	mäßig	normal	flott	gesteigert
Batterieessel	12	17	22 ¹⁾	
Ein-, Zwei-, Drei-Flammrohrkessel .	15; 16; 22	20; 22; 28	25; 30 ¹⁾ ; 35	
Doppelkessel (unten 2 Flammrohre; oben Heizröhren)	12	16	20 ¹⁾	
Mac-Nicol-Kessel	16 ¹⁾	20 ¹⁾	25 ¹⁾	
Heizröhrenkessel	10	14	20 ¹⁾	
Lokomobilkessel	—	14	18	27 ¹⁾
Lokomotivkessel	—	—	40	60 ¹⁾
Schiffs- (Zylinder-) Kessel	—	—	28	35
Wasserrohrkessel ohne Kammern . .	9 ¹⁾	12 ¹⁾	15 ¹⁾	
Kammer-Wasserrohr-Kessel	14 ¹⁾	18 ¹⁾	26 ¹⁾	35 ²⁾
Steilrohrkessel	18 ¹⁾	24 ¹⁾	30 ¹⁾	40 ²⁾
Schiffs-Wasserrohr-Kessel	—	22	36	50 ¹⁾
Stehende Kessel	10	14	20 ¹⁾	

2. Güte der Leistung.

a) Wirkungsgrad der Feuerung:

$$\eta_1 = 1 - \frac{1}{100} (V_B + V_G + V_R)^3,$$

abhängig von der Bauart des Rostes (besonders der Weite der Rostspalten), der Rostbelastung, dem Brennstoff und der mehr oder weniger vollkommenen Verbrennung der gasförmigen Bestandteile des Brennstoffes.

Mittelwerte für η_1 :

$$\eta_1 = 0,87 \div 0,95.$$

b) Wirkungsgrad der Heizfläche:

$$\eta_2 = 1 - \frac{V_{Sch} + V_{St}}{100 - (V_B + V_G + V_R)^3}$$

$$= \frac{D}{B} \cdot \frac{i}{W} \cdot \frac{100}{100 - (V_B + V_G + V_R)^3},$$

worin: D die stündliche Dampfmenge in kg; i die Wärmemenge in 1 kg Dampf, soweit sie im Kessel zugeführt wurde; B die stündliche Brennstoffmenge in kg und W den Heizwert des Brennstoffes bedeutet. Er ist also vor allem abhängig von der Güte der Wärmeübertragung und der Menge der durch Ausstrahlung aus den Heizgasen verlorenen Wärme.

Mittelwerte für η_2 :

$$\eta_2 = 0,5 \div 0,75.$$

¹⁾ Mit Überhitzer.

²⁾ Mit Überhitzer und Rauchgasvorwärmer.

³⁾ Über die Bedeutung der einzelnen Größen V vgl. den Abschnitt Wärmeverluste auf S. 766.

c) Wirkungsgrad der gesamten Anlage:

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 = \frac{D}{B} \cdot \frac{i}{W}$$

Mittelwerte für η :

$$\eta = 0,4 \div 0,7.$$

Eine Steigerung dieses Wertes ist bis zu 0,85 möglich durch Ausrüstung des Kessels mit mechanischer Rostbeschickung, mit Vorwärmer und Überhitzer.

Bei flammenloser Oberflächenverbrennung — eines Gasluftgemisches in Heizröhren, die mit Stücken einer feuerfesten schamotteartigen Masse angefüllt sind — soll Steigerung des Gesamtwirkungsgrades η bis auf 0,95 möglich sein.

II. Die Leistungsfähigkeit der Brennstoffe

in einer Dampfkesselanlage wird beurteilt nach der bei ihrer Verfeuerung erreichten

$$\text{Verdampfungsziffer: } d = \frac{D}{B},$$

die da angibt, wieviel kg Dampf mit 1 kg Brennstoff erzeugt wurden.

Man unterscheidet: die Bruttoverdampfung d , die auf die Menge D des Dampfes bezogen wird, wie er bei der vorhandenen Vorwärmung, Dampfspannung als Naßdampf oder als überhitzter Dampf geliefert wird, die Nettoverdampfung d' , die sich auf eine Dampfmenge D' von Normaldampf bezieht (entstanden aus Wasser, welches mit 0° C in den Kessel gelangte und mit einer Dampfspannung von 1 Atm. abs., also 639 WE Gesamtwärme). Da D' und D den gleichen Wärmeinhalt haben sollen, so folgt:

$$d' = \frac{D'}{B} = \frac{d \cdot i}{639},$$

wenn i die in 1 kg der Dampfmenge D enthaltene Wärme bedeutet ¹⁾.

Die Nettoverdampfungsziffer gestattet einen Vergleich der Leistungen des selben Brennstoffes in verschiedenen Kesselanlagen.

Mittelwerte für d .

Brennstoff	Heizwert	d -fache Verdampfung für $i =$		
		600	650	700
Holz (lufttrocken)	3 000	2 ÷ 3,2	1,8 ÷ 3,0	1,7 ÷ 2,8
Torf (lufttrocken)	2 400	1,6 ÷ 2,6	1,5 ÷ 2,4	1,4 ÷ 2,2
Guter Preßtorf	3 800	2,8 ÷ 4,1	2,6 ÷ 3,8	2,4 ÷ 3,5
Braunkohle, erdige	2 400	1,6 ÷ 2,7	1,5 ÷ 2,5	1,4 ÷ 2,3
Braunkohle, böhmische	4 500	3 ÷ 5	2,8 ÷ 4,6	2,5 ÷ 4,2
Braunkohle, böhmische, Brikett	4 800	3,2 ÷ 5,2	3,0 ÷ 4,8	2,7 ÷ 4,5
Steinkohle	6 000	5 ÷ 7	4,6 ÷ 6,4	4,3 ÷ 6
	6 800	5,6 ÷ 7,9	5,2 ÷ 7,3	4,8 ÷ 6,8
	7 300	6,0 ÷ 8,9	5,6 ÷ 8,2	5,2 ÷ 7,7
Steinkohle, Brikett	6 900	5,7 ÷ 8,4	5,3 ÷ 7,7	4,9 ÷ 7,2
Koks	6 300	5,2 ÷ 7,6	4,9 ÷ 7,1	4,5 ÷ 6,6
Anthrazit	7 500	7 ÷ 9	6,4 ÷ 8,7	6,0 ÷ 8,1
Rohöl, Masut, Teeröl	10 000	10 ÷ 15	9,2 ÷ 12,4	8,6 ÷ 11,4
Gichtgas	850 f. 1 cbm	0,85 ÷ 1	0,78 ÷ 0,91	0,73 ÷ 0,85
Koksofengas	4500 f. 1 cbm	4,5 ÷ 5,3	4,1 ÷ 4,9	3,8 ÷ 4,5

¹⁾ Vielfach $i = \lambda - t_v$, also nur die im Kessel zugeführte Wärme gerechnet. Dem Charakter von d' als Vergleichswert entspricht besser $i = \lambda - t_0 + c_p(t' - t)$, also die im Abgasvorwärmer, Kessel und Überhitzer zugeführte Wärme.

III. Die Wärmeverluste

werden allgemein auf 100 WE des Brennstoffheizwertes bezogen. Sie ergeben sich im einzelnen wie folgt:

V_B , Verlust durch Unverbranntes in den Herdrückständen, wird dadurch ermittelt, daß man für die Zeit (x Stunden), in der eine bestimmte Kohlenmenge ($x \cdot B$ kg) verfeuert wurde, das Gewicht der unverbrannten Rückstände (aus Aschenfall und Herd) — (A kg) — feststellt und sie durch eine Veraschungsprobe auf ihren Gehalt an Unverbranntem (u %) untersucht. Da das Unverbrannte hauptsächlich Kohlenstoff (Heizwert 8080) sein wird, so folgt:

$$V_B = u \cdot \frac{A}{2 \cdot B} \cdot \frac{8080}{W} \% \text{ von } W.$$

Mittelwert: $V_B = 2 \div 3\%$.

V_G , Verlust durch unverbrannte Gase, entsteht durch einen Gehalt der Abgase an: CO und CH₄. Will man bei längerer Versuchsdauer für diese Mengen einen zuverlässigen Durchschnittswert erhalten, so ist eine ununterbrochen abgesaugte Gasmenge über einer 50proz. Glycerinlösung aufzufangen und aus diesem Gase (durch Verbrennen des CO und CH₄) der Gehalt an Unverbranntem als h Raumprozent Wasserstoff und c o% Kohlenoxyd zu bestimmen, und zwar bezogen auf die trockene Rauchgasmenge G cbm aus 1 kg Brennstoff. Es ist dann:

$$V_G = \frac{G_{\text{cbm}} (3050 \cdot c + 2600 \cdot h)}{W}$$

oder nach Seite 519

$$= \frac{1,867 \cdot (c - c')}{c_{O_2} + c + c h_4 + \frac{R}{5,36}} \cdot \frac{3050 \cdot c + 2600 \cdot h}{W},$$

worin c kg in 100 kg Brennstoff den Kohlenstoffgehalt, c' kg für die gleiche Brennstoffmenge den nicht verbrannten Kohlenstoff

$$c' = \frac{V_B \cdot W}{8080}$$

bedeutet und c_{O_2} , c , $c h_4$ in Raumprozenten und R in g für 1 cbm Gas sich auf die Zusammensetzung der Rauchgase beziehen.

Meistens wird man sich damit begnügen müssen, c o nach den Orsatangaben für c_{O_2} und o nach S. 519 zu berechnen; dann ist angenähert nach Brauß:

$$V_G = \frac{70 \cdot c \cdot o}{c_{O_2} + c \cdot o} \% \text{ von } W.$$

Mittelwerte für V_G :

$$\begin{aligned} V_G &= \div 1\% \quad \text{bei Magerkohle und} \quad c_{O_2} \leq 11\%, \\ &= \div 2\% \quad \text{bei gasreicher Kohle und} \quad c_{O_2} \leq 11\%, \\ &= \div 7\%^1 \quad \text{bei gasreicher Kohle und} \quad c_{O_2} > 11\%. \end{aligned}$$

V_R Verlust durch Ruß in den Abgasen. Der Rußgehalt der Abgase kann durch Abmengen einer zu messenden Gasmenge durch ein Asbestfilter bestimmt werden, indem man den so aufgefangenen Ruß verbrennt und seine Menge aus der entstandenen Kohlensäure berechnet. Diese kann bei gasreicher Kohle und schwärzlichem Rauch bis zu $R = 3$ g in 1 cbm Rauchgas betragen. Für V_R ergibt sich:

$$V_R = R \cdot \frac{1,865 (c - c')}{c_{O_2} + c + c h_4 + \frac{R}{5,36}} \cdot \frac{808}{W} \%.$$

Mittelwert für $V_R = 1 \div 2\%$ bei nicht rauchfreier Verbrennung.

¹⁾ Haier, Feuerungsuntersuchungen. Berlin 1906. Julius Springer.

V_{Sch} , **der Schornsteinverlust**, entsteht durch den Unterschied des Wärmeinhaltes der Abgase gegenüber dem der in den Feuerraum eintretenden Verbrennungsgasmenge für 1 kg Brennstoff recht gering zu halten — durch möglichst geringen Luftüberschuß (vgl. S. 516) und 2. die Abgastemperatur, die gewöhnlich zwischen 300 und 400° C schwankt, und die mit dem Anstrengungsgrad des Kessels wächst, möglichst zu erniedrigen (z. B. durch Einbau eines Rauchgasvorwärmers).

Die genaue Berechnung des Schornsteinverlustes folgt aus den Angaben auf S. 520:

$$V_{Sch} = 100 \cdot C_p \cdot G_{cbm} \cdot \frac{t_e - t_a}{W} \%.$$

Daraus angenähert nach der sog. Verbandsformel:

$$V_{Sch} = \left[\left(0,32 \cdot \frac{186,7 (c - c')}{c \cdot O_2} \right) + 0,48 (9h + w) \right] \cdot \frac{t_e - t_a}{W} \% \text{ 1).}$$

Hierin bedeuten t_e° die Temperatur im Fuchs und t_a° diejenige im Kesselhause.

Ferner gilt mit guter Annäherung nach Siegert für Steinkohle:

$$V_{Sch} = 0,65 \frac{t_e - t_a}{c \cdot O_2} \% \text{ von } W$$

oder falls die Verbrennung unvollkommen:

$$V_{Sch} = 0,65 \frac{t_e - t_a}{c \cdot O_2 + c \cdot O + c \cdot h_4 + 0,33} \% \text{ von } W,$$

wenn für $R \approx 1,8$ g im Mittel eingesetzt wird.

Nach Hassenstein läßt sich die Siegert'sche Formel für Braunkohle anwenden in folgender Form:

$$V_{Sch} = v \cdot \frac{t_e - t_a}{k} \% ,$$

worin $k = c \cdot O_2 + c \cdot O + c \cdot h_4 + \frac{R}{5,36}$ ist und

für v die Werte bei bekanntem Feuchtigkeitsgehalt der Braunkohle und bekanntem Werte für k aus nebenstehendem Diagramm zu entnehmen sind.

Im Durchschnittsbetriebe wird sich V_{Sch} auf etwa 20% stellen.

V_{St} , **Verlust durch Strahlung und Leitung** wird als Restverlust angegeben:

$$V_{St} = 100 - \left(\frac{100 \cdot d \cdot i}{W} + V_B + V_G + V_R + V_{Sch} \right) \%.$$

Im allgemeinen hält sich V_{St} unter 10%.

1) worin C_p für 1 cbm Rauchgas mit 0,32 und c_p für 1 kg Wasserdampf mit 0,48 eingesetzt wurde. c , c' , h , w , $c \cdot O_2$ sind auf 100 bezogen.

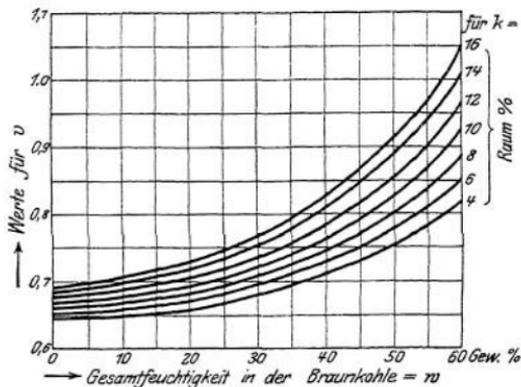


Fig. 1.

IV. Bericht über einen Verdampfversuch.

a) Mechanische Verhältnisse der Anlage.

Bauart des Kessels, Überhitzers, Vorwärmers und der Feuerung.

Größe — in qm — der Heizfläche H , der Überhitzerfläche H_u der Vorwärmfläche H_v und der Rostfläche R .

b) Versuchsanordnung und -ausführung.

Die Messungen wurden womit und in welchen Zeitabschnitten vorgenommen.

c) Versuchsergebnisse.

1. Dauer des Versuches z Stunden.

2. Brennstoff.

Art, Zusammensetzung und Heizwert W des Brennstoffes. Gesamte Brennstoffmenge Stündliche Brennstoffmenge B kg.

3. Rückstände.

Gesamtmenge der Asche und Schlacke — A kg, darin gefunden $u\%$ Unverbranntes.

4. Äußere Luft.

Temperatur der Verbrennungsluft vor ihrem Eintritt in den Rost t_a^0 .

5. Heizgase.

Zusammensetzung der trockenen Heizgase, entnommen am Kesselende, und zwar in Raumprozenten: o ; $c o_2$; [$c o$; $c h_2$] als Rest m ; [ferner nach Gewicht den Rußgehalt Rg in 1 cbm trockenen Gases]. Danach zu berechnen die Luftüberschußzahl m nach S. 516. Temperatur der Gase am Kesselende (vor dem Rauchschieber) t_e^0 . [Ist ein Abgasvorwärmer vorhanden, dann auch t_e^0 vor dem Vorwärmer außer t_e hinter demselben.]

6. Speisewasser.

Gesamtmenge. Stündliche Menge D kg. Temperatur desselben vor dem Vorwärmer t_o^0 und hinter demselben vor Eintritt in den Kessel t_o^0 .

7. Dampf.

Mittlere Dampfspannung p Atm. Überdruck, danach Dampftemperatur t_k^0 und Wärmeinhalt i unter Abzug der Flüssigkeitswärme, mit welcher das Wasser in den Kessel gelangte. Ferner Dampftemperatur, unmittelbar hinter dem Überhitzer gemessen t_u , danach Gesamtwärme i' des überhitzten Dampfes, ebenfalls unter Berücksichtigung der Temperatur t_v^0 .

d) Auswertung des Ermittelten.

Bruttoverdampfung $d = \frac{D}{B}$; Nettoverdampfung $d' = \frac{d \cdot i}{639}$; Rostbelastung $\frac{B}{R}$; Heizflächenbeanspruchung $\frac{D}{H}$.

e) Wärmebilanz.

Heizwert der Kohle W	= 100%
Nutzbar: im Vorwärmer $d \cdot (t_v - t_o) \cdot \frac{100}{W}$	= ...%
„ Kessel $d \cdot i \cdot \frac{100}{W}$	= ...% 1)
„ Überhitzer $d \cdot c_p \cdot (t_u - t_k) \cdot \frac{100}{W}$	= ...% 2)
Zusammen $\Sigma I = \dots\%$	
Verloren: durch Herdrückstände V_B	= ...%
„ unverbrannte Gase V_G	= ...%
„ Ruß in den Abgasen V_R	= ...%
„ die Wärme der Abgase V_{sch}	= ...%
Zusammen $\Sigma II = \dots\%$	
Restverlust: „ Strahlung und Leitung V_{St} $100 - (\Sigma I + \Sigma II) = \dots\%$	

f) Güte der Kesselleistung.

1. Wirkungsgrad der Feuerung:

$$\eta_1 = 100 - (V_B + V_G + V_R) \cdot 100$$

2. Gesamtwirkungsgrad der Heizflächen:

$$\eta_2 = 10000 \frac{d [i + t_v - t_o + c_p (t_u - t_k)]}{W} \cdot 100$$

3. Gesamtwirkungsgrad der Kesselanlage:

$$\eta = \frac{100 \cdot d [i + t_v - t_o + c_p (t_u - t_k)]}{W} \cdot 100$$

1) Hierin: $i = \lambda - t_v$ für trockenen Dampf. Soll $w\%$ Dampfnaße berücksichtigt werden siehe Seite 824), dann $i = q - t_v + \left(1 - \frac{w}{100}\right) \cdot r$.

2) für nassen Dampf wäre einzusetzen $d \cdot \left[c_p (t_u - t_k) + \frac{w}{100} \cdot r \right] \cdot \frac{100}{W}$.

V. Die Feuerungen.

1. Lage der Feuerung zum Kessel.

a) **Innenfeuerung**, umgeben von wassergekühlten Kesselwänden, in Flammrohren, Feuerbüchsen und Tenbrink-Vorlagen eingebaut (Fig. 2).

Vorteile: Geringste Strahlungsverluste.

Nachteile: Rostgröße beschränkt durch Kesselabmessungen. Niedrige Temperatur im Feuerraum, der außerdem bei vielen Kesseln für die Flammenentwicklung bei

sehr gasreichen Brennstoffen nicht genügend groß zu gestalten ist. — Schwere Kessel-schäden bei Wassermangel.

b) **Unterfeuerung** am häufigsten unter Wasserrohrkesseln ausgeführt (Fig. 3).

Vorteile:

Beim Anfeuern schneller Temperaturengleich des gesamten Kesselinhalts.

Nachteile: Die Kesselteile, auf denen sich am meisten ausgeschiedener Schlamm und Kesselsteinsplitter ablagern werden, liegen im ersten Feuer.

c) **Vorfeuerung** im besonderen Mauerwerk — bei Flammrohr-, Batterie- und bei Steilrohrkesseln (Fig. 4) — oder in einem fahrbaren eisernen Gestell — bei ausziehbaren Lokomobilen (Fig. 5) angewandt.

Vorteile: Große Rostflächen anwendbar. Temperatur im Feuerraum am leichtesten gleichmäßig hoch zu halten.

Nachteile: Große Strahlungsverluste. Vergrößerung der Kesselgrundfläche durch die Feuerung. Hohe Unterhaltungskosten für das Mauerwerk der Feuerung.

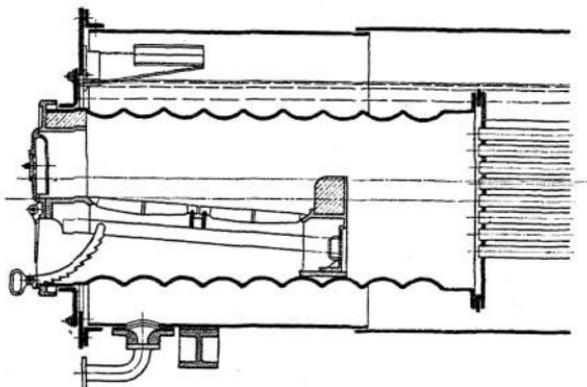


Fig. 2. Planrost-Innenfeuerung.

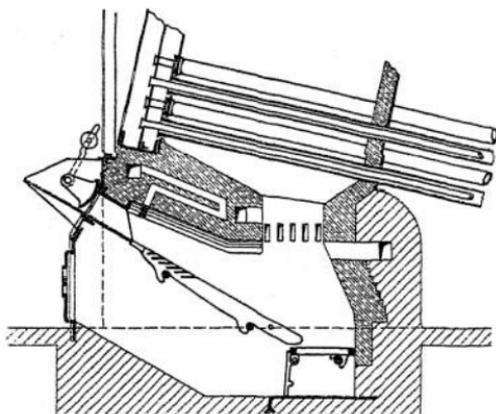


Fig. 3. Schrägrrost-Unterfeuerung von Dürr.

2. Der Rost

bildet den wesentlichsten Bestandteil einer Feuerung. Er kommt nur in Fortfall, wenn Staubkohle, Flüssigkeiten oder Gase verfeuert werden.

a) Roste für Wurfbefuerung.

Der Planrost (Fig. 2). Oberfläche annähernd wagerecht, läßt sich bei allen Feuerungsarten verwenden.

Vorteile: Gut zu übersehen. Die im ersten Feuer liegenden Kesselteile werden nicht verdeckt. Die Rostfläche läßt sich durch Abdecken leicht verkleinern.

Nachteile: Rostlänge aus Bedienungsrücksichten nicht über 2 m. Bedienung erfordert besondere Erfahrung und Geschicklichkeit. Sie muß bei offener Feuertür erfolgen.

Brennstoffarten für Planrost: Alle Sorten Brennstoff, von Sägespänen und Koksstaub bis zur hochwertigsten Kohle.

b) Roste für Schüttbefuerung.

Der Schrägrost (Fig. 3), ein unter etwa 40° geneigter Planrost, auf welchem die Kohle aus einem vor dem Rost aufgestellten Schüttrichter allmählich hinuntergleitet. Rostlänge beträgt gewöhnlich bis zu 2 m, ausnahmsweise bis zu 3 m.

Vorteile: Einfache Bedienung. Große Rostflächen. Staubfreie Kohlenzuführung leicht ausführbar. Die Herdrückstände können außerhalb des Heizraumes beseitigt werden.

Nachteile: Wenig geeignet für ungleichmäßige Betriebsverhältnisse und einschichtige Betriebe.

Brennstoffarten für Schrägrost: Wenig backende und schlackende Kohle, frei von feinkörnigen Beimengungen.

Der Treppenrost (Fig. 4 und 5) ebenfalls steil geneigt, aber nach Art einer

Treppe aufgebaut, bei der die Setzstufen fehlen. Dadurch wagerechte Luftspalten, so daß nichts vom hinableitenden Brennstoff unverbrannt durch die Luftspalten fallen kann. Rostlänge bis zu 2,5 m.

Vorteile und Nachteile etwa die gleichen wie beim Schrägrost.

Brennstoffarten für den Treppenrost: Jeder minderwertige, staubige oder zerfallende Brennstoff, der nicht durch Schlacken auf den Treppenstufen festbrennt.

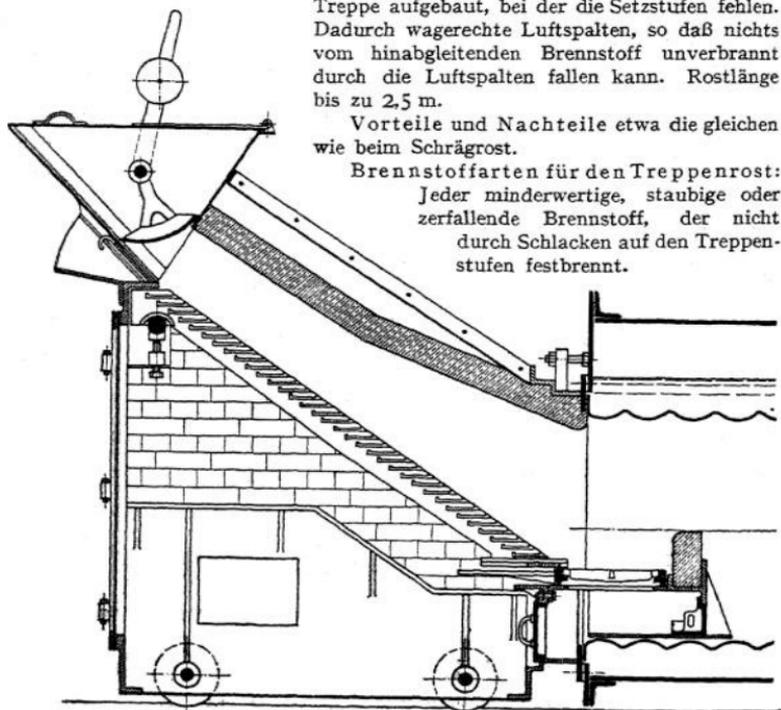


Fig. 4. Fahrbare Treppenrost-Vorfeuerung von R. Wolf-Magdeburg.

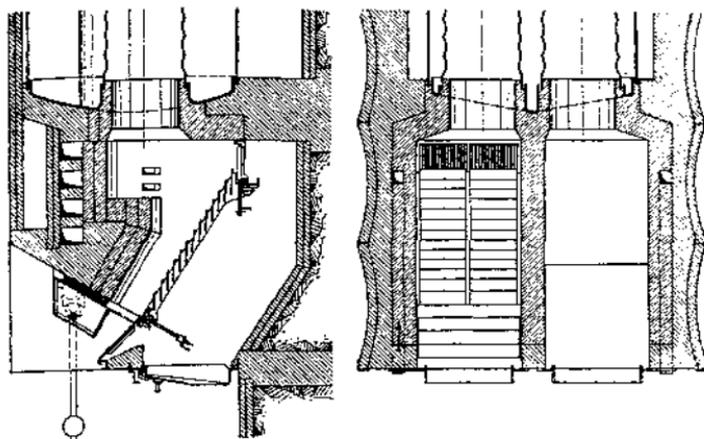


Fig. 5. Treppenrost-Vorrichtung von Topf.

3. Die Rostfläche.

Die Leistungsfähigkeit einer Feuerung hängt vor allem ab von der Größe der Rostoberfläche.

Totale Rostfläche — R qm — Rostlänge (zwischen Schürplatte und Feuerbrücke gemessen) \times Rostbreite.

Freie Rostfläche — R_f qm — Summe der Luftspalten.

Berechnung der (totalen) Rostfläche für eine nach der geforderten Dampfmenge ermittelte Brennstoffmenge am einfachsten unter Zugrundelegung einer mäßigen Rostbelastung (S. 763):

$$R = \frac{B}{\left(\frac{B}{R}\right)},$$

da sich sehr häufig die Zusammensetzung der auf dem Rost verfeuerten Kohle ändert und die Kesselleistung und damit auch die Rostbelastung bald (dauernd oder doch zeitweise) das ursprünglich zugrunde liegende Maß erheblich überschreitet. Für einen Kessel, der von Anfang an sehr hoch beansprucht werden soll, ist die Rostfläche so groß zu machen, wie es überhaupt nach den Kesselabmessungen möglich ist. Für einen voraussichtlich auf längere Zeit nur mäßig beanspruchten Kessel ist eine zu große Rostfläche besonders schädlich, da sie zu dauernder, unsachgemäßer und nachlässiger Bedienung des Feuers veranlaßt.

Die freie Rostfläche ist im Verhältnis zur totalen stets so groß wie möglich zu machen. Ihre obere Grenze ist durch die Minstdicke der Roststäbe und die für die einzelnen Fälle verschieden zulässige Höchstweite der Rostspalten gegeben. Diese sind nämlich bei Plan- und Schrägrosten so eng zu bemessen, daß möglichst wenig kleine Brennstoffstücke hindurchfallen können. Darauf ist bei staubigem und bei zerfallendem Brennstoff Rücksicht zu nehmen, während für backende und stark schlackende Kohlen weite Spalten geeignet sind (vgl. S. 775). Bei Treppenrosten wird die Weite der Luftspalten so gewählt, daß sie leicht von Asche gereinigt werden können.

So ergeben sich für

$$\frac{R_f}{R} = 0,20 \div 0,50 \quad \text{bei Plan- und Schrägrosten,}$$

$$0,60 \div 0,70 \quad \text{bei Treppenrosten}$$

türen ausgeführt (Fig. 10). Sie haben den Vorzug geringsten Raumbedarfs, bequemer Bedienung, dichten Abschlusses namentlich bei Unterwind und

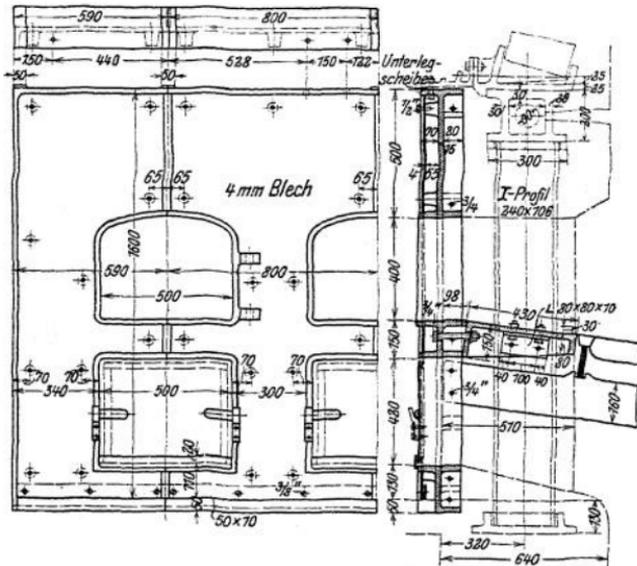


Fig. 8.

schützen den Heizer vor Verletzungen durch herausgeschleuderte Glut oder durch (infolge eines Kesselschadens) austretenden Dampf.

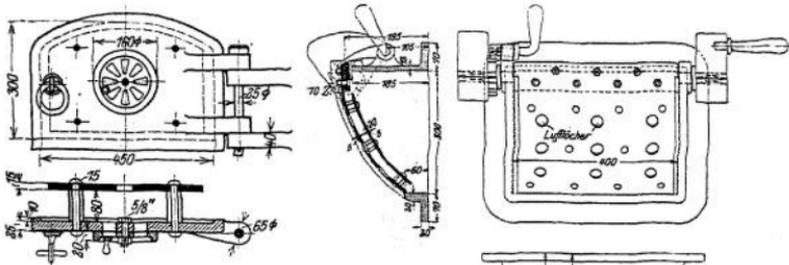


Fig. 9.

c) Die Schürplatte wird aus Gußeisen hergestellt und meistens an die Vorsatzplatte angeschraubt. Bei Planrostinnenfeuerungen dient sie als Auflager für das Schamottemauerwerk, womit die Innenseite der Vorsatzplatte um die Türöffnung herum verkleidet wird. Ferner werden an derselben gewöhnlich befestigt: das Sperrsegment zum Feststellen der Aschfalltür, die Verankerung der Rostbalken und eine Leiste zum Auflagern der Roststäbe (Fig. 6 und 7). Bei Schrägrosten dient die Schürplatte nur dem letzteren Zweck; bei Treppenrosten fehlt sie meistens.

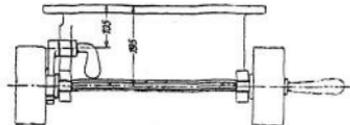


Fig. 10.

Die Schürplatte erleichtert die Bearbeitung des Feuers und gestattet, vorn aufgeworfene Kohle erst zu trocknen und teilweise zu entgasen, bevor sie auf der Glut ausgebreitet wird.

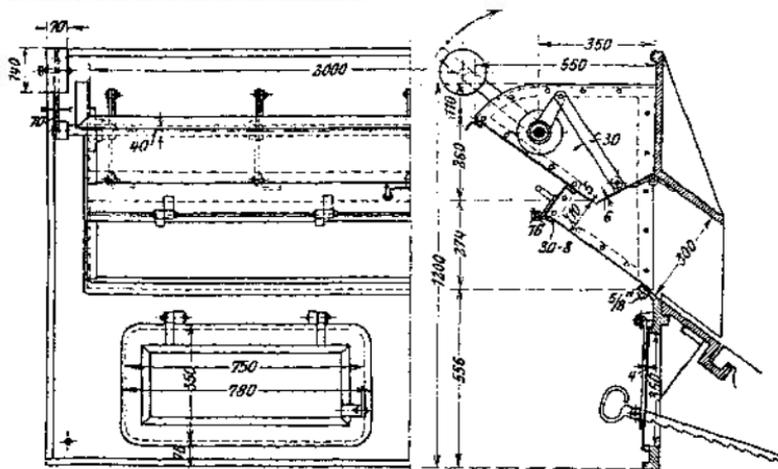


Fig. 11.

d) Der Schütttrichter, aus dem bei Schräg- und Treppenrosten die Kohle auf den Rost gelangt, wird in den mannigfaltigsten Formen und sowohl aus Gußeisen wie auch aus Schmiedeeisen hergestellt. Zur Einstellung der Schichthöhe und zum Abschluß des Trichters in den Betriebspausen dient ein Schieber oder eine Drehklappe. Bei Schrägrosten wird meistens, bei Treppenrosten seltener eine schmale Tür ($100 \div 150$ mm hoch und so breit wie der Rost) angeordnet, die zur Bearbeitung des Feuers dient (Fig. 11 und 12).

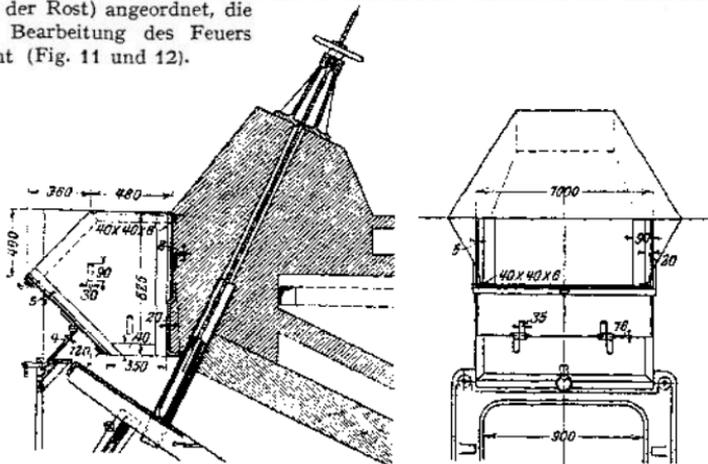


Fig. 12.

e) Die Roststäbe.

Baustoff für Roststäbe. 1. Gußeisen, und zwar eine Mischung aus möglichst phosphorfreiem Grauguß und weißem Roheisen oder Stahlabfällen.

Die Tragfläche der Stäbe wird auf einer eisernen Platte eingeformt, um die Fläche besonders hart, dicht und dadurch widerstandsfähig gegen glühende Schlacke zu machen. — Gewicht eines aus gußeisernen Stäben aufgebauten Rostes, für 1 qm, 280 ÷ 420 kg. 2. Stahlguß und Schmiedeeisen, wird namentlich bei Schiffskesseln für Planroststäbe des höheren Schmelzpunktes und des geringeren Gewichtes wegen angewendet. Gewicht für 1 qm Rostfläche bei langen Stäben etwa 250 kg.

Roststabformen: 1. für Planrost. Gußeiserne Stäbe werden am vorteilhaftesten als einzelne glatte Balken von nach unten sich etwas verjüngendem Querschnitt ausgeführt. Die Stabhöhe bleibt auf der ganzen Länge, mit Ausnahme der Stabköpfe, gleich, um einer ungleichmäßigen Erwärmung des Stabes vorzubeugen. An den Enden, den Stabköpfen, deren Querschnittshöhe nur auf etwa $\frac{1}{3}$ der sonstigen Höhe bemessen wird, sind entsprechend der Weite der Rostspalten, entweder einseitig oder besser auf beiden Seiten Ansätze angegossen. Bei Stäben von etwa 500 mm Länge und darüber finden sich diese Ansätze auch in der Stabmitte.

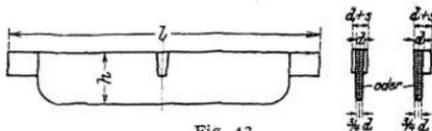


Fig. 13.

Mittlere Roststababmessungen.

Brennstoff	Feinkörnig	Zerfallend	Mit kleineren Stücken gemischt	Stark schlackend
Obere Roststabdicke d mm	5 ÷ 6	8 ÷ 10	10 ÷ 13	13 ÷ 20 (25)
Spaltweite . . . s mm	3 ÷ 5	5 ÷ 8	8 ÷ 10	10 ÷ 15 (20)

Untere Roststabdicke: $d_u \approx \frac{4}{5} \cdot d$,

Stablänge: $l \approx 60 \cdot d$,
 $1000 > l > 300$,
 $l > 1000$ nur bei Schiffskesseln.

Querschnittshöhe: $h \approx 12 \cdot d$,
 $h \leq 100$ für Flammrohrinnenfeuerung.

Aus Walzeisen, seltener aus Stahlguß, werden Bündelroststäbe (Fig. 13 a) hergestellt, wodurch ein Verziehen der dünnen Stäbe verhindert werden soll.

$l \approx 600$; $\delta \approx 8$; $s \approx 5$.

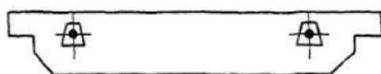


Fig. 13 a.



Fig. 14.

Neuerdings werden aus Schmiedeeisen auch bis 2,5 m lange Hohlroststäbe hergestellt — Deutsche Prometheus-Hohlrostwerke, Hannover (Fig. 14). Bei ihnen tritt aus einer gemeinsamen vorderen Kammer das Kühlwasser zunächst in den unteren Teil des Stabes, durchströmt diesen bis zur Feuerbrücke und kehrt im oberen Stabkanal in die Kammer zurück. Das Innere der Stäbe und der Kammer ist zur Reinigung zugänglich, ferner können sich die Stäbe frei ausdehnen. Diese Umstände in Zusammenhang mit dem durch die Wasserkühlung erzielten Vorteil, daß keine Schlacke an den Stäben festbrennen kann, gewährt ihnen lange Haltbarkeit und macht sie besonders geeignet für stark schlackenden Brennstoff und hohe Rostbelastungen. — Roststäbe besonderer Form (Fig. 15, 16 und 17) sind aus dem Bestreben entstanden: bei geringer Spaltweite und kräftigem, gegen Verziehen widerstandsfähigem Stabquerschnitt die freie

Rostfläche möglichst groß zu gestalten. Leider verlieren dabei die Luftspalten in der Längsrichtung ihre gerade Form, so daß sie sich schlecht reinigen lassen.

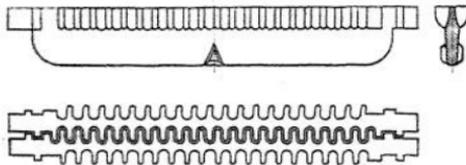


Fig. 15.

Formroststäbe sind daher häufig als bei Planrost glatte Roststäbe an (Fig. 19), da leicht ein Abbrennen der unteren Stabenden eintritt, falls die Spaltweite auf der ganzen Länge die gleiche ist.

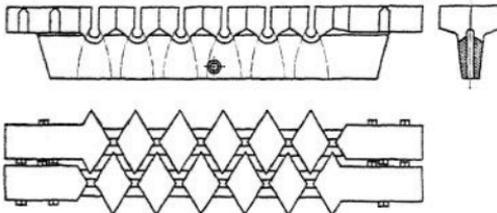


Fig. 16.

Bei feinkörnigen, wenig schlackenden Brennstoff geeignet. Beimischen vorliegt, die Spaltweite im oberen Teil enger als im unteren (Fig. 20). Soll dagegen das Hindurchfallen kleiner Stücke im oberen Teil des Rostes, wo ein Zusammenbacken noch nicht stattgefunden hat, verhindert werden, so gibt man den Stäben dort stufenartige Ansätze (Fig. 21).

Fig. 20 zeigt ferner, wie durch ein eingelegetes Blech Herausheben der Stäbe beim Schüren verhindert wird.

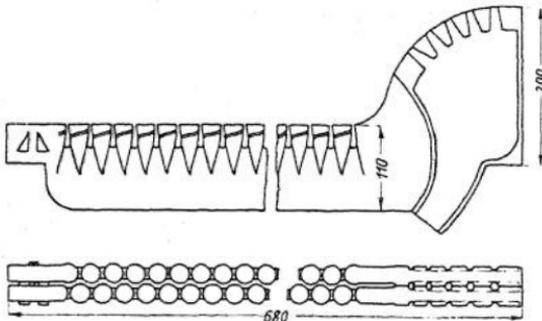


Fig. 17. Thostscher Roststab mit angegossener hohler Feuerbrücke.

Da beim Schrägrrost nur ausnahmsweise mehrere Roststäbe hintereinander aufgebaut werden, so schwankt die Stablänge hier zwischen 1000 und 1600 mm. Die Querschnittshöhe beträgt etwa $\frac{1}{9}$ der Stablänge. Stabdicke und Spaltweite wie beim Planrost.

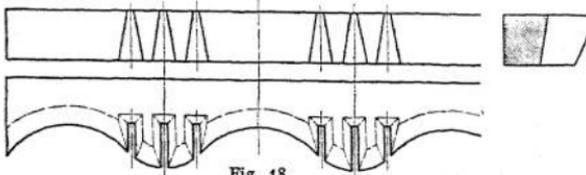


Fig. 18.

3. Für Treppenrost dienen gewöhnlich glatte Platten — etwa 500 mm lang, 150 mm breit und 8 bis 12 mm stark — als Roststäbe (Fig. 22). Auflagerung

oder durch Rundeisen miteinander verbunden sind (Fig. 27). Diese Rostbalkenträger werden an der Schürplatte und der Feuerbrücke befestigt. Bei Unter- und Vorfeuerung können die Rostbalken in den Seitenmauern gelagert werden. Um die Roststabhöfe vor Verbrennen zu schützen, sind sowohl die Rostbalken, wie auch die an Schürplatte und Feuerbrücke angebrachten Auflagerleisten mit Lufspalt zu versehen.

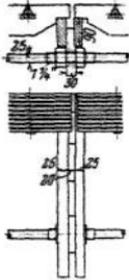


Fig. 27.

Beim Einlegen der Stäbe ist auf die Ausdehnung derselben durch Erwärmung Rücksicht zu nehmen.

Bei Schrägrost stützen sich die Roststäbe meistens oben auf die Schnürplatte und unten, etwa um $\frac{1}{3}$ ihrer Länge vom Ende entfernt, auf ein Rundeisen (50 bis 60 mm Durchm.) oder ein Rohr (80 mm Durchm. außen), das in den Seitenmauern gelagert ist (siehe Fig. 20 und 21).

Bei Treppengrost: Gußeiserne Treppengangen — von 100 bis 200 × 20 bis 25 mm Querschnitt — werden entweder wie Schrägroststäbe gelagert oder so, daß ihre Neigung verstellbar ist (siehe Fig. 28).

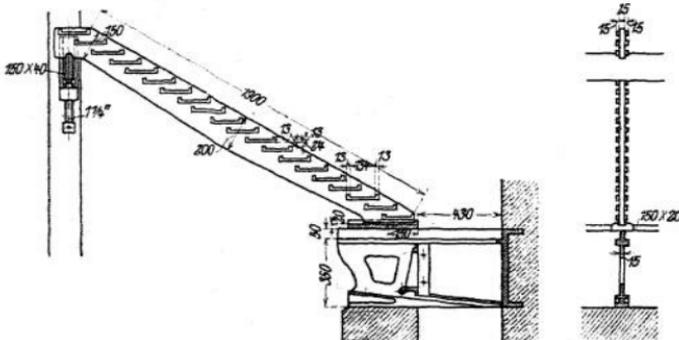


Fig. 28.

An den Wangen sind Leisten angegossen, auf welche die Roststahlplatten eingelegt werden.

g) Die Feuerbrücke

dient als Abschluß der Rostfläche. Sie verhindert beim Planrost, daß die Kohle über das hintere Ende des Rostes hinwegfällt und begünstigt ein auf der ganzen Rostfläche gleichmäßiges Abbrennen. Mit Hilfe der Feuerbrücke läßt sich überdies bei allen Rostarten unmittelbar hinter dem Rost eine Einschnürung des Zugquerschnittes erzeugen, die eine gute Mischung der Gase mit der Verbrennungsluft bewirkt. — Bei Planrostinnenfeuerung besteht die Feuerbrücke aus einem gußeisernen Gestell,

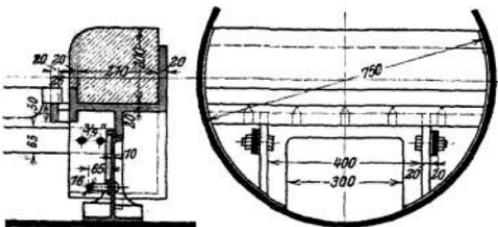


Fig. 29.

das oben mit Schamottesteinen ausgelegt wird. Im unteren Teil ist eine Öffnung zum Entfernen von Asche aus dem Flammrohr vorgesehen, auf deren möglichst dichten Verschuß besonders Wert zu legen ist (Fig. 29).

Bei anderen Feuerungen fehlt die Feuerbrücke entweder ganz oder sie besteht aus einer Abschlußwand aus Schamottesteinen, an welcher eine Leiste zum Auflagern der hinteren Roststabhöfe angebracht ist (Fig. 30).

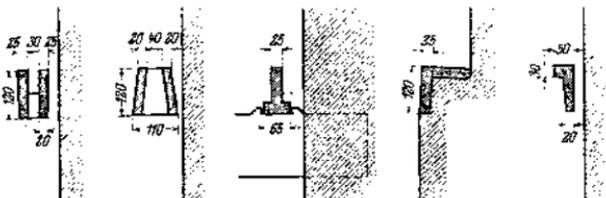


Fig. 30.

h) Der Fangrost

ist ein kleiner Planrost von 400 bis 500 mm Länge, der bei Schrägrost meistens, bei Treppenrost immer am unteren Ende des schrägen Rostes eingebaut ist. Um die Herdrückstände von dem Fangrost entfernen zu können, wird er meistens als Schüttelrost (Fig. 31) ausgebildet.

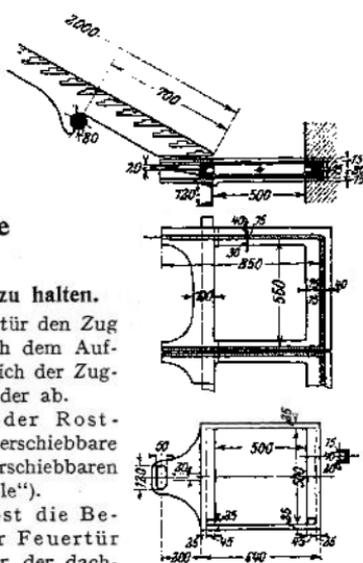


Fig. 31.

VI. Übersicht über besondere Feuerungseinrichtungen.

a) Mittel, um den Luftüberschuß gering zu halten.

Zugregler stellen beim Öffnen der Feuertür den Zug fast ganz ab und schließen, wenn sie nach dem Aufwerfen der Kohle so betätigt wurden, daß sich der Zuschieber völlig öffnete, diesen allmählich wieder ab.

Vorrichtungen zur Veränderung der Rostfläche — bei Planrosten durch eine verschiebbare Feuerbrücke, bei Schrägrost durch einen verschiebbaren Schüttkasten (Kraftsche Feuerung „Variable“).

Vorrichtungen, welche bei Planrost die Bedienung des Rostes bei geschlossener Feuertür gestatten — Cario-Feuerung, bei welcher der dachförmig gestaltete Rost mittels eines langen Löffels beschickt wird (gut geeignet für nicht stark schlackende Kohle). Fränkel-Feuerung, ein Muldenrost, als Vorfeuerung (auch bewegliche) hauptsächlich für Braunkohle benutzt. Die Kohle fällt hier aus einem Füllschacht an beiden Längsseiten auf den Rost. — Ferner alle mechanischen Feuerungen (siehe S. 783 und 784).

Vorrichtungen, welche das Abschlacken in kürzester Zeit ermöglichen. Besondere Kühlung der Roststäbe. — Hohlroste (Fig. 14). — Perret-Roststäbe, die mit Ansätzen in ein unter dem Rost aufgestelltes Wasserbecken tauchen. — Dampfbräusen unter dem Rost.

Sekundärluftregler wirken ähnlich wie die Zugregler auf die Sekundärluftzuführung ein (siehe diese).

b) Mittel zur Rauchverhütung.

Sekundärluftzuführungen. Bei Planrost wird Sekundärluft zugeführt: 1. über oder unterhalb der Feuertür oder durch dieselbe; 2. durch hohle Flanken-

roststäbe; 3. durch die hohle Feuerbrücke (Fig. 17) oder kurz hinter derselben. Bei Schräg- und Treppenrosten durch Kanäle in den Seitenmauern.

Alle unter a) genannten Vorrichtungen, die ein Öffnen der Feuertür vermeiden wollen und damit den Feuerraum vor Abkühlung schützen.

Dampfschleier, welche von vorn über der Feuertür aus über den Rost geblasen werden. Sie bewirken eine gute Mischung der Luft mit den Gasen und halten diese zunächst von den kalten Kesselwänden ab. (Ausführungen von Marcotty, Bender, Mederer u. a. m.)

Halbgasfeuerungen erzielen eine möglichst vollkommene Verbrennung der Kohlenwasserstoffe dadurch, daß die Schwelgase, welche sich in einem besonderen Entgasungsraum (Vorraum, der durch eine unten offene Schamottewand vom eigentlichen Verbrennungsraum getrennt ist) aus der frischen Kohle ausscheiden, gut mit vorgewärmter Sekundärluft gemischt, dem Feuerraum zugeführt werden, in dem die durch die Vorentgasung gasarm gewordene Kohle abbrennt. Hierher gehören: Schräg-, Treppen- und Muldenroste in Ausführungen von Reith, Völcker, Fränkel. Auch der Donnely-Korbrost ist hierher zu rechnen.

c) Mittel, um die Verfeuerung schwer brennender Stoffe zu ermöglichen und die Leistungsfähigkeit der Feuerungen zu erhöhen.

Künstlicher Zug ist nach gesetzlichen Bestimmungen als vorliegend anzusehen, wenn bei Druckzug mehr als 30 mm Wassersäule Überdruck unter dem Rost und bei Saugzug mehr als 25 mm Unterdruck im Abgaskanal herrschen.

1. Er kann als Druckzug erzeugt werden durch:

Oberwind. Dazu wird in dem durch Doppeltüren dicht gesetzten Heizraum mittels Ventilators ein Überdruck erzeugt, und zwar bis zu 60 mm Wassersäule für Rostbelastungen von etwa 250 kg und in besonderen Fällen bis zu 120 mm für 400 kg Rostbelastung. Oberwind wird ausschließlich bei der Marine angewandt, wo er gleichzeitig als wirksame Lüftung der tiefliegenden Heizräume dient.

Unterwind wird erzeugt durch Einblasen von Luft oder Dampf in den dicht abgeschlossenen Aschenfall (Fig. 32). Dabei sind Pressungen unter dem Rost von mehr als 20 mm Wassersäule im allgemeinen zu vermeiden, da sonst die feinen Körner des Brennstoffes leicht unverbrannt aus dem Feuer fortgeführt werden. Dies ist besonders zu beachten, da der Unterwind meistens bei der Verfeuerung feinkörnigen bis staubigen Brennstoffes — Kohlengrus, Koksbröckel, Lokomotivlösch — angewandt wird, um denselben aufzulockern und für Luft durchlässig zu machen. Es empfiehlt sich Zusammensetzung des Rostes aus durchlöchernten Platten oder besonders geformten Stäben. — Bei stark schlackendem Brennstoff wird der Unterwind angewandt, um die Rostspalten frei zu halten. Hierbei ist es vorteilhaft, falls nicht Dampfstrahlgebläse benutzt wird, die Prebluft anzufeuchten, z. B. durch Zuführung heißen Wassers, das man dem Kessel am besten in Höhe von N. W. entnimmt (Wasserstaubeuerung, Hydrowirbelfeuerung). — Beim Unterwind macht sich ein Vorteil des Druckzuges besonders bemerkbar, nämlich daß durch zweckmäßige Einstellung der Pressung unter dem Rost und gleichzeitige Drosselung des Schornsteinschiebers in den Zugkanälen ein von dem atmosphärischen nur sehr wenig abweichender Druck eingestellt werden kann, wodurch Undichtheiten im Mauerwerk am wenigsten schädlich werden. — Der Dampfverbrauch für das Strahlgebläse beträgt etwa 5% der erzeugten Dampfmenge und für den Ventilatorantrieb etwa 2%, so daß eine wirtschaftliche Verwertung obengenannter minderwertiger Brennstoffe mittels Unterwindfeuerung nur bei entsprechend niedrigem Preise derselben möglich ist.

2. **Künstlicher Saugzug:** Absaugung der Abgase dadurch, daß man sie durch besondere Einrichtungen in Bewegung setzt, wird mit Vorteil in folgenden Fällen angewandt: Zur Ergänzung natürlichen Schornsteinzuges, wo dieser

für die gewünschte Rostbelastung nicht ausreicht und eine Erhöhung des Schornsteinzuges entweder nicht möglich oder, z. B. wenn die erhöhten Kesselleistungen nur vorübergehend verlangt werden, nicht wirtschaftlich ist. — Zum Ersatz des Schornsteinzuges, wenn wie bei ortsbeweglichen Kesseln oder bei schlechtem Baugrunde oder bei Platzmangel ein Schornstein nicht aufgestellt werden kann, endlich wenn die Kesselanlage nur vorübergehend am Aufstellungsort benutzt werden soll.

Nachteile und Vorteile des Saugzuges: Geringere Betriebssicherheit als bei natürlichem Zuge. Erhöhte Anforderungen an die Wartung der Anlage. Der Heizer neigt leicht dazu, zu hohe Zugstärken einzustellen, dadurch Erhöhung des Luftüberschusses. Dagegen Unabhängigkeit von Wind und Wetter, die den Schornsteinzug beeinflussen. Die Zugstärke kann in weiten Grenzen den Betriebsverhältnissen angepaßt und die Wärme der Abgase weiter ausgenutzt werden als bei natürlichem Zuge.

Absaugen der Gase durch Dampfstrahlgebläse: Immer bei Lokomotiven und Lokomobilen (Abdampf-Auspuff-Blasrohr im unteren Teile des Schornsteins) und vereinzelt bei kleineren ortfesten Anlagen (in den Schornstein eingebautes Dampfbläsen-system, für Abdampf- oder Frischdampftrieb). Geringere Anschaffungskosten, einfache Wartung stehen einem höheren Dampfverbrauch als bei Verwendung eines Ventilators gegenüber.

Durch Schleudergebläse werden die Gase abgesaugt entweder unmittelbar (vgl. Fig. 33) oder mittelbar (Fig. 34). Ventilator saugt bei letzterem Frischluft an. Seine Druckleitung endigt in einem Ejektor, der im unteren Teile eines eisernen

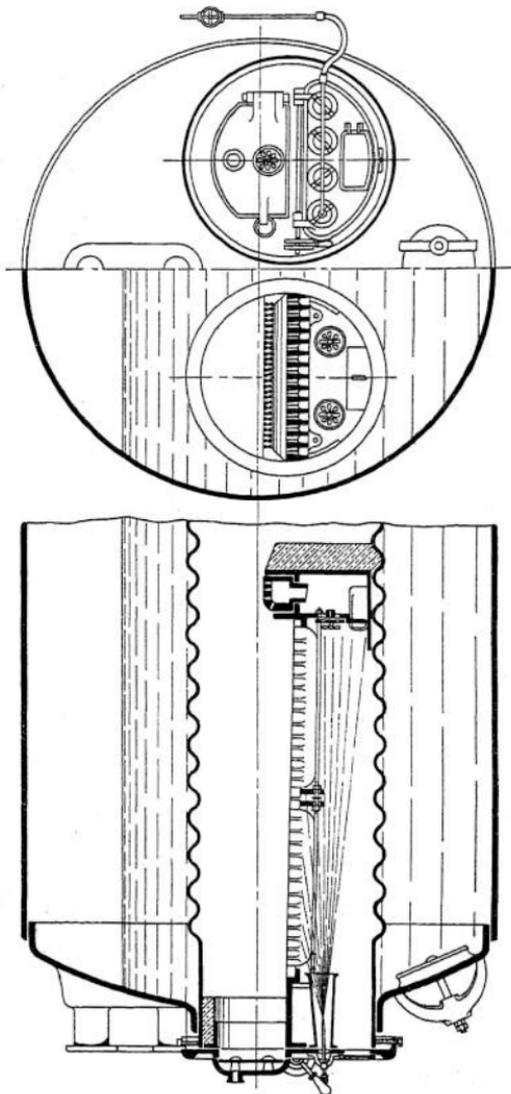


Fig. 32. Thost-Unterwindfeuerung.

Abzugrohres (10 bis 15 m hoch) eingebaut ist (vgl. Fig. 35). Durch die Saugwirkung des Ejektors werden die Abgase bewegt. Im ersten Fall wird das Ventilatorinnere emailliert, um es gegen die chemische Einwirkung der heißen Abgase zu schützen. Dagegen kommen diese bei mittelbarer

Absaugung mit dem Ventilator gar nicht in Berührung. Allerdings stellt sich dabei der Kraftbedarf des Ventilators bis dreimal so hoch wie bei unmittelbarer Absaugung. Für große Einheiten kann der Dampfverbrauch des Ventilatorantriebes herabgemindert werden

bis auf etwa $1 \div 2,5\%$ der Kesselleistung bei mittelbarem Saugzug,

bis auf etwa $0,5 \div 1\%$ der Kesselleistung bei unmittelbarem Saugzug,

je nach der verlangten Rostbelastung.

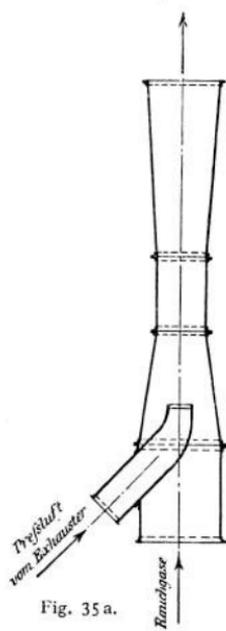


Fig. 35 a.

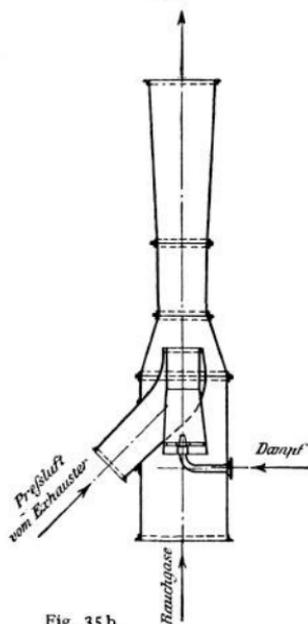


Fig. 35 b.

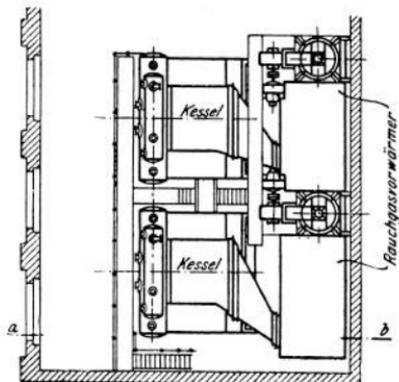
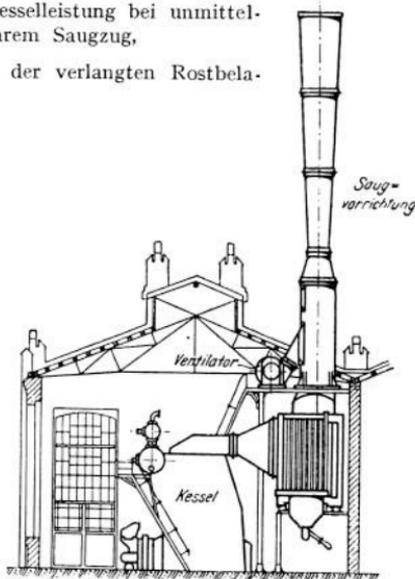


Fig. 34.

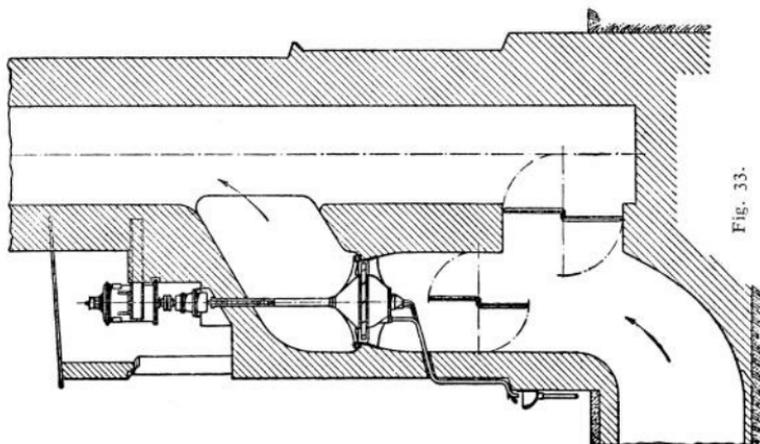


Fig. 33.

d) Mittel zur Selbstbedienung der Feuerung.

1. Selbsttätiges Beschicken von Planrosten.

Mechanische Wurffeuerungen. Vor dem Rost ist eine Wurfmachine aufgestellt, in welche die Kohle aus einem Schütttrichter fällt. In dieser wird

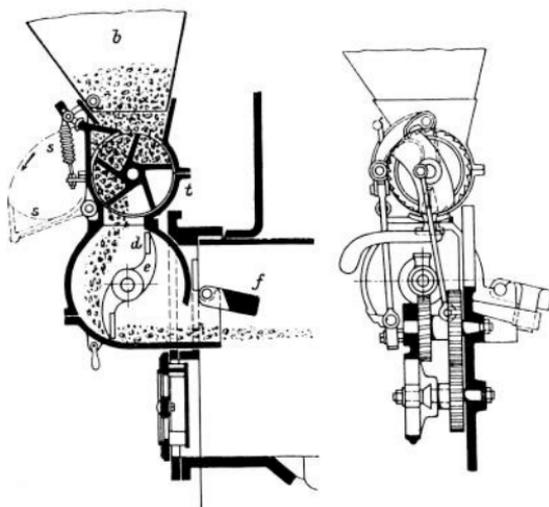


Fig. 36. Leach-Feuerung.

b Schütttrichter; *t* Gehäuse mit Zubringerwalze; *s* federnde Vorderwand dieses Gehäuses, klappt, wenn große Stücke in die Walze gelangen, nach vorn auf; *d* Wurfgehäuse mit *e* Schaufelrad auf der angetriebenen, mit $n = 300 \div 420$ umlaufenden Welle; *f* Prellklappe, die zwecks gleichmäßiger Kohlenverteilung auf und nieder bewegt wird.

die Kohle (am zweckmäßigsten solche von gleichmäßiger Korngröße) entweder durch ein beständig umlaufendes Schleuderrad (Leach-Feuerung, Fig. 36) oder durch eine in regelmäßigen Zwischenräumen wirkende Wurfschaufel (Fig. 37)

auf den Rost gestreut. Durch besondere Einrichtungen: bewegte Prellklappen, Einwirkung verschieden großer Antriebskräfte auf die Wurfschaufeln, wird gleichmäßige Verteilung der Kohle auf dem Roste angestrebt. Um auch die billigere Förderkohle verfeuern zu können, werden bei einigen Ausführungen zwischen Schütttrichter und Wurfapparat eine Brechwalze eingebaut (Fig. 37). Wenn

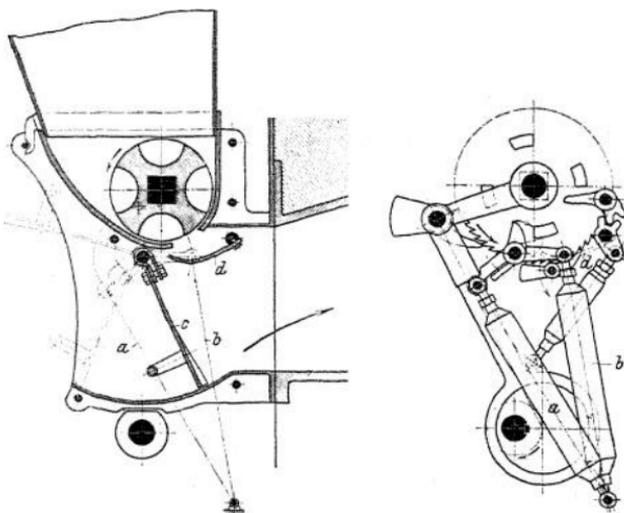


Fig. 37. Axer-Feuerung.

Im untersten Teil des Trichters eine Kohlenbrechwalze. *d* Zubringerschau ei; *c* Wurfschaufel; *a* und *b* Federn zur Bewegung der Wurfschaufel.

auch hierbei die Bestreuung nicht so gleichmäßig wird, wie bei Verfeuerung von Nußkohle, so fällt das doch wegen des immer ungleichen Abbrandes nicht so sehr ins Gewicht. Vielmehr muß der Heizer das Feuer in beiden Fällen öfter wieder abgleichen.

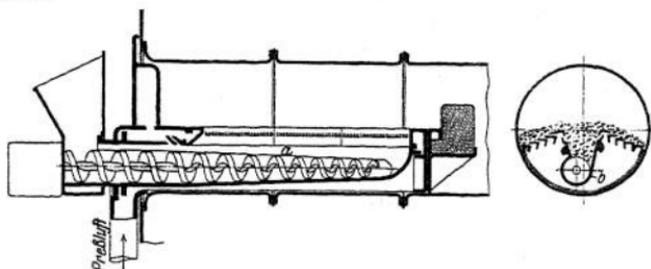


Fig. 38. Mannheimer Unterschubfeuerung. *a* Förderschnecke; *b* Schneckengehäuse.

Unterschubfeuerungen. Die Kohle wird hier dem Rost meistens durch eine sich dauernd drehende, unter der Rostmitte liegende Schnecke (Fig. 38) auf der ganzen Länge so zugeführt, daß die aus den Frischkohlen entweichenden Schwelgase eine darüber befindliche Glutschicht durchstreichen. Am zweckmäßigsten ist der Unterschub für gasreiche Kohlen von gleicher Korngröße. Für gasärmere wird hierbei Unterwind erfolgreich angewandt.

2. Selbsttätiges Abschlacken von Schrägrosten.

Durch Walzenroste (Ausführung Piontek), bei denen eine am unteren Ende des Schrägrostes eingebaute, langsam umlaufende Trommel, die mit Roststäben belegt ist, die Herdrückstände gleichmäßig abführt.

3. Selbsttätiges Beschicken und Abschlacken von Planrosten.

Durch Wanderroste, auf welchen die Kohle allmählich von der Schürplatte aus nach der Feuerbrücke zu vorrückt.

1. Die Roststäbe schieben die Kohle unter Vorwärts- und Rückwärtsbewegungen langsam bis zum Rostende vor, über das hinweg die Herdrückstände in eine Schlackenammer fallen. In der Ausführung der Düsseldorfer Sparfeuerungs-Gesellschaft werden die oben auf der ganzen Rostlänge mit 4 bis 6 flachen Zähnen versehenen Roststäbe alle zusammen vorwärts bewegt, während gleichzeitig eine bestimmte Menge frischer Kohle aus dem Trichter vorn auf den Rost gelangt. Ist die Endstellung erreicht, so senkt sich jeder zweite Roststab etwas, um in die Anfangslage zurückzukehren, darauf folgen die anderen Stäbe nach. — Die Feuerung läßt sich auch bequem als Innenfeuerung ausführen. Geeignete Kohle muß frei von feinkörnigen Beimischungen sein.

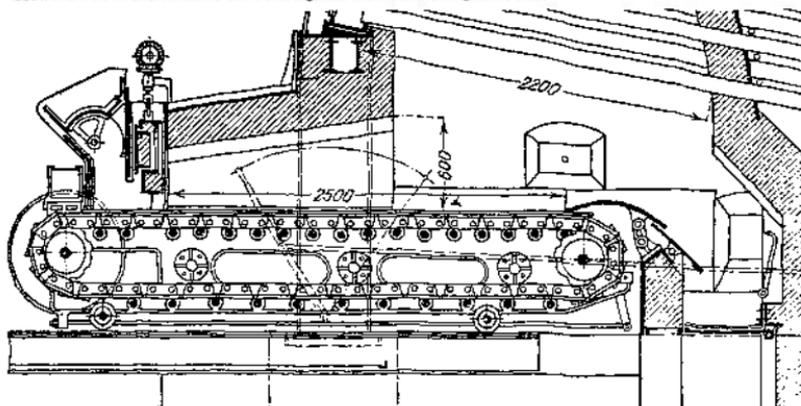


Fig. 39. Steinmüller-Kettenrost.

2. Die Roststäbe machen nur eine Vorwärtsbewegung, um schließlich die Herdrückstände über einen als Feuerbrücke eingebauten gußeisernen Schlackenstauer (Abstreicher) abzuführen. Dazu ist der Rost aus nebeneinander liegenden, zu einem breiten Bande vereinigten Roststabketten ohne Ende aufgebaut (Fig. 39). Das Band wird durch eine vor dem Feuerraum liegende, mit Kettenrädern versehene Welle dauernd vorwärts bewegt. Unterhalb des Schlackenabstreichers liegt eine zweite Welle, um deren Kettenräder das Roststabband umkippt, worauf dann unterhalb der Feuerfläche, also abgekühlt durch die zugeführte Luft, das Band nach vorn zurückkehrt.

Statt des Kettenbandes, das nur eine geringe freie Rostfläche auszuführen gestattet, werden auch einzelne Gelenkketten angewandt, welche zur Befestigung entsprechend geformter Roststabträger dienen, in welche die Roststäbe eingelegt werden (Fig. 40). Dadurch wird besonders das Auswechseln der Stäbe erleichtert. Die Stäbe selbst können dünner und deswegen die freie Rostfläche reichlicher bemessen werden.

Auch bei Flammrohr-Innenfeuerung ist versucht worden, den Kettenrost anzuwenden, doch macht hier die Entfernung der Herdrückstände Schwierigkeiten. Außerdem wird der Flammraum ziemlich klein, so daß gasreicherer Brennstoff nicht mit Vorteil verfeuert werden kann.

Im allgemeinen eignet sich für Kettenrost jede nicht allzu stark backende Kohle ohne fließende Schlacke.

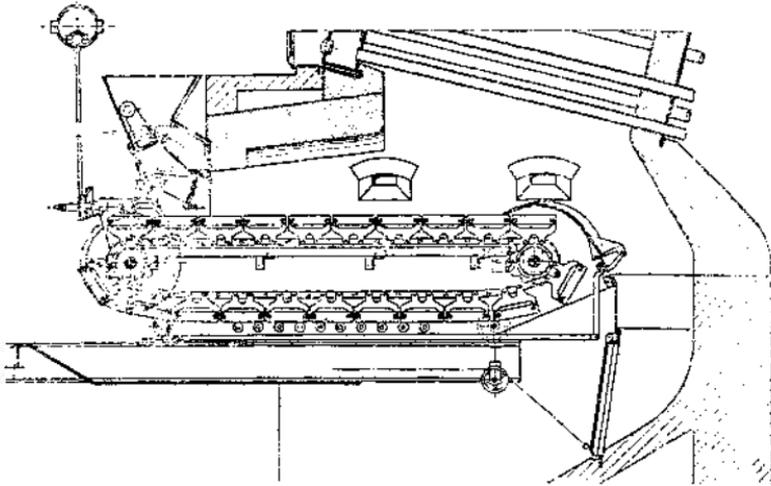


Fig. 40. Wanderrost Petry Dereux.

Die Rostlängen betragen bis zu 5 m. Bei natürlichem Zuge lassen sich Rostbelastungen bis zu 160 kg erzielen. Die Zugstärke ist der Schichthöhe und der Vorschubgeschwindigkeit anzupassen.

4. Kohlenstaubfeuerungen.

Fein gemahlener und gut getrockneter Kohlenstaub läßt sich, gehörig verteilt einem mit Schamotte ausgefüllten Verbrennungsraum zugeführt, ohne Rost mit geringem Luftüberschuß und rauchfrei verbrennen. Die hohen Aufbereitungskosten des Staubes haben bisher eine ausgedehnte Verwendung dieser Feuerungen verhindert.

e) Feuerungen für flüssige Brennstoffe.

Ähnlich wie beim Kohlenstaube wird hier flüssiger Brennstoff dem Feuerraum fein verteilt zugeführt und verbrannt. Die zur innigen Mischung mit Luft notwendige Zerstäubung der Flüssigkeit, die mit Vorteil vorher bis auf etwa 80° anzuwärmen ist, kann erfolgen durch:

Streudüsen, denen das Heizöl, das kurz vor dem Brennen bis etwa zum Siedepunkt — 160° — weiter vorgewärmt wurde, unter Druck — 4 bis 10 Atm. — zugeführt wird.

Druckluft. Das Öl fließt einem Brennerrohr zu, um bei seinem Austritt aus der düsenförmigen Öffnung durch vorgewärmte Druckluft — von etwa 0,8 Atm. Pressung — die den feinen Ölstrahl umgibt (häufig von innen und außen, Querschnitt des Ölstrahles dann kreisringförmig), zerstäubt zu werden. Stündliche Brennerleistung bis 100 kg Öl unter Zuführung von etwa 50 cbm Luft (gewöhnlicher Pressung).

Dampfstrahl — von 1 bis 2 Atm. Überdruck —, der Luft ansaugt. Zerstäubung ähnlich wie bei Druckluft. Trotzdem der Dampfverbrauch dabei ziemlich hoch ist (etwa 4% der Kesselleistung), kommt diese Art der Zerstäubung namentlich für kleinere Anlagen der geringen Anschaffungskosten wegen am ehesten in Betracht. (Vergl. Fig. 41, 42 und 43.)

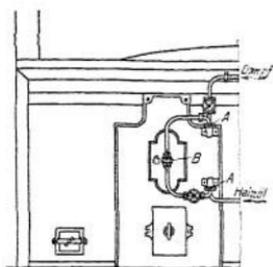
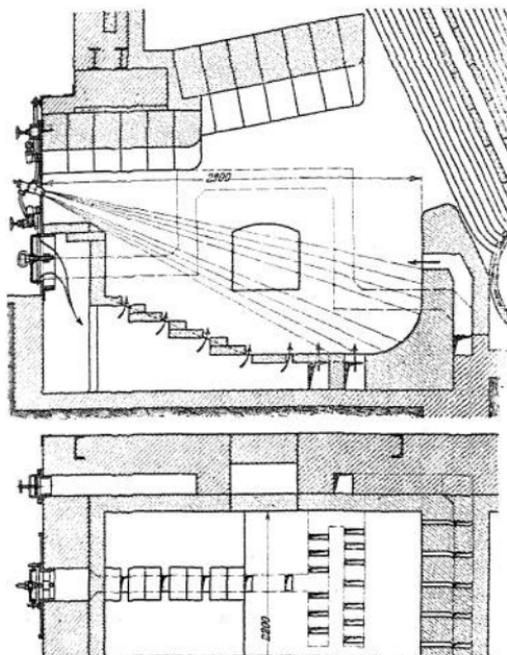


Fig. 41.

Ölfeuerung unter einem
Borsig-Steilrohrkessel.

A Zuführungshähne
(vergl. Fig. 42).

B Brenner
(vergl. Fig. 43).

Fig. 42.
Zuführungshahn in
der Öl- und in der
Dampfleitung.

Ausführung:
Simonis & Lanz.

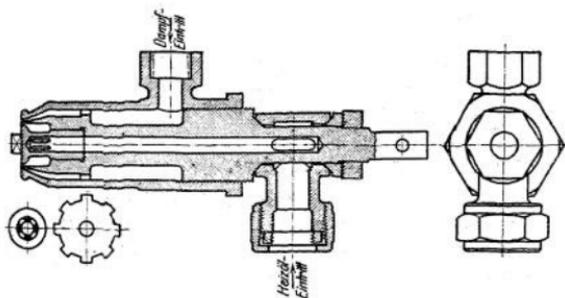
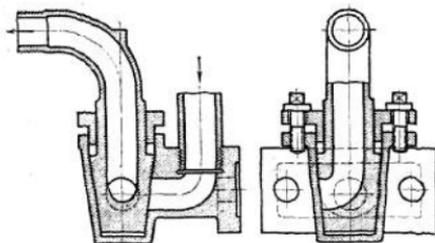


Fig. 43.

Ölbrenner.

Ausführung:
Simonis & Lanz.

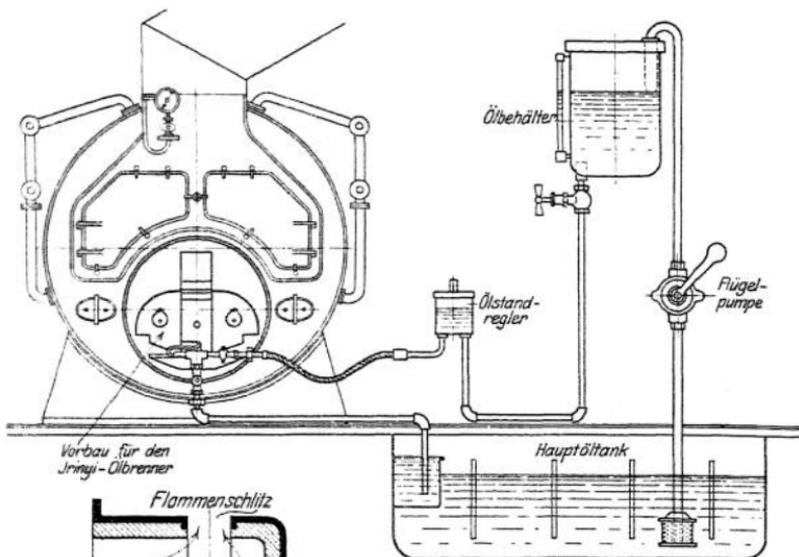


Fig. 44.

Anordnung der Ölfeuerung an einem Schiffskessel.
Ausführung: Deutsche Ölfeuerungs-Gesellschaft in
Hamburg.

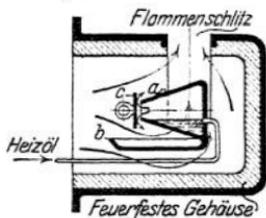


Fig. 45. Irinyi-Ölbrenner.
a Verdampfer; b Zündschale;
c Windschutzplatte, verstellbar
in den Verdampfermundstück
zum Regeln der Flammengröße.

Schamottewänden gebildeten Brennerraum verläßt. Vorzug: Fortfall aller zur Ölzerstäubung benötigten Nebenapparate.

f) Gasfeuerungen.

Das Gas wird der Feuerung in einem gemauerten Kanal oder in einer Rohrleitung zugeführt, zunächst gut mit vorgewärmter Luft gemischt und gelangt so in den eigentlichen Verbrennungsraum, in welchem bei Verfeuerung von Hochofengas ein Hilfsfeuer unterhalten wird (Fig. 46). Als Abschluß des Verbrennungsraumes dient vielfach ein Gitterwerk aus feuerfesten Steinen, um ein Entweichen unverbrannten Gases zu verhindern. Bei Verfeuerung hochwertiger Brenngase — Koksogengas, Grubengas — werden besondere Brenner mit regelbaren Luftzuführungen zwischen Zuführungsrohr und Verbrennungskammer eingebaut (Fig. 47).

g) Befeuung durch Abhitze.

Aus den verschiedenen Öfen der hüttenmännischen Betriebe stehen reichliche Mengen von Abgasen teilweise mit Temperaturen über 1000° zur Verfügung. Zur Verwertung dieser Abhitze werden die Gase, unter Zwischenschaltung eines möglichst kurzen Kanals, Dampfkesseln als Heizgase zugeführt (Fig. 48). Da in fast allen dieser Öfen mit reduzierender Flamme gearbeitet wird und deswegen

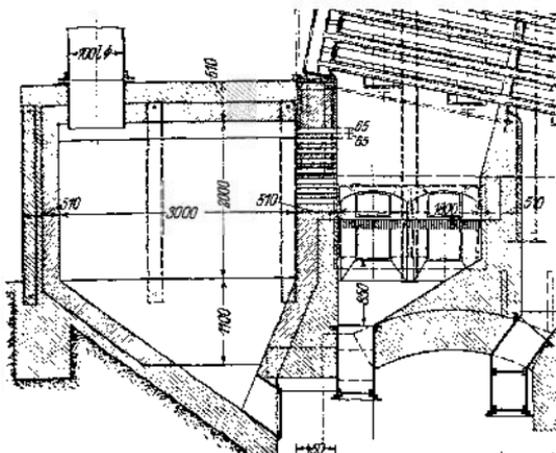


Fig. 46.
Hochofengas-
Feuerung.

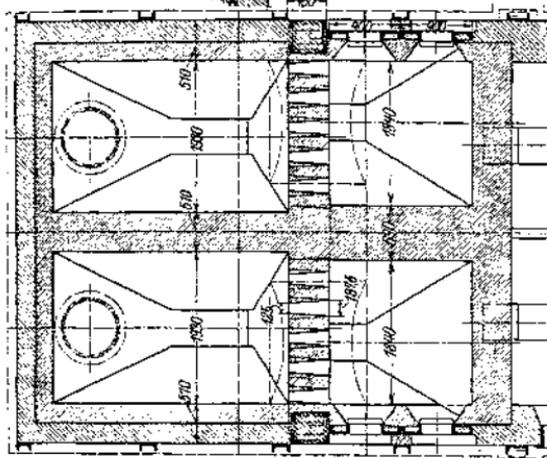
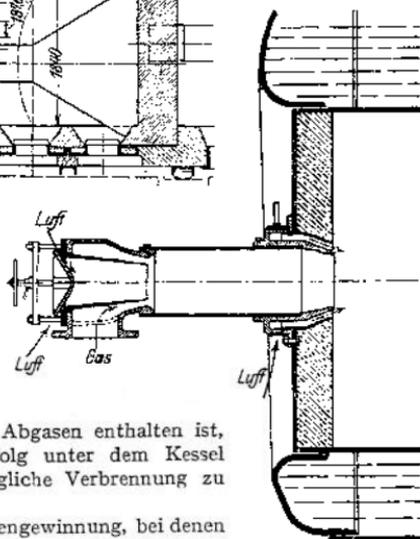


Fig. 47.
Koksogas-Feuerung.
Ausführung Terbeck.



häufig noch Unverbranntes in den Abgasen enthalten ist, so hat man den Gasen mit Erfolg unter dem Kessel Luft zugeführt, um eine nachträgliche Verbrennung zu bewirken.

Bei Koksöfen mit Nebenproduktengewinnung, bei denen etwa 50% der entstandenen Gasmenge zur Ofenbeheizung dient, kann durch die Abhitze dieser Gase für 1 kg im Ofen verkokten Brennstoffes etwa 1 kg Dampf im Abhitzeessel erzeugt werden.

Bei Schweißöfen mit 1 kg Brennstoff 3 bis 4 kg Dampf,
bei Glühöfen mit 1 kg Brennstoff 1,5 bis 2,5 kg Dampf.

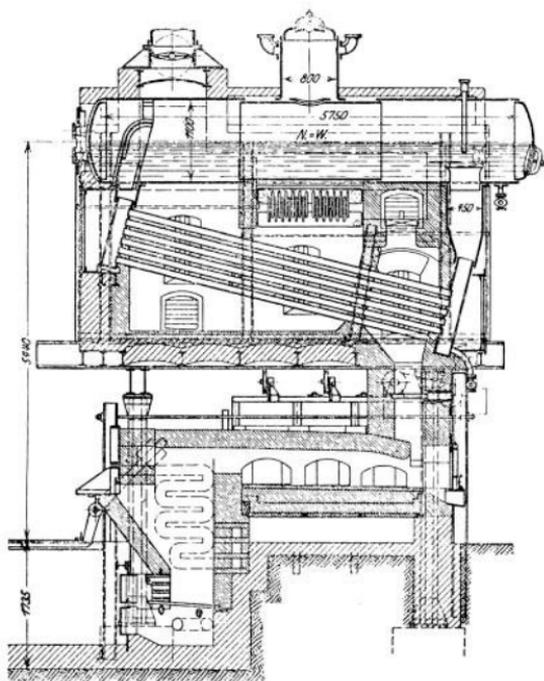


Fig. 48. Abhitzkessel.

Bei Öfen mit Regeneratoren, in denen die Abgastemperatur etwa 650° beträgt, läßt sich noch 1 kg Dampf und darüber für 1 kg verbrauchte Kohle erzeugen.

VII. Die Feuerzüge — Zugkanäle.

a) Ihr Querschnitt ist im allgemeinen unter Berücksichtigung der fortschreitenden Abkühlung der Gase für eine Gasgeschwindigkeit von etwa 4 m zu bemessen, Höchstgrenze für natürlichen Zug 6 m. Für kurze Zugeinschnürungen und Züge in oder zwischen Röhren, die häufig durch Bürste oder Dampfstrahl gereinigt werden können, sind Gasgeschwindigkeiten bis 15 m zuzulassen. Für mittlere Rostbelastungen ergeben sich so für R qm Rostfläche die Zugquerschnitte in qm, wie folgt (Fig. 49):

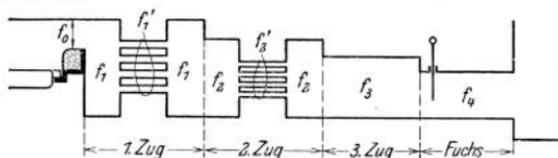


Fig. 49.

$$f_0 = 0,15 \cdot R; \quad f_1 = (0,38 \div 0,43) \cdot R; \quad f_2 = (0,31 \div 0,37) \cdot R; \\ f_3 = (0,25 \div 0,30) \cdot R; \quad f_4 = (0,20 \div 0,25) \cdot R$$

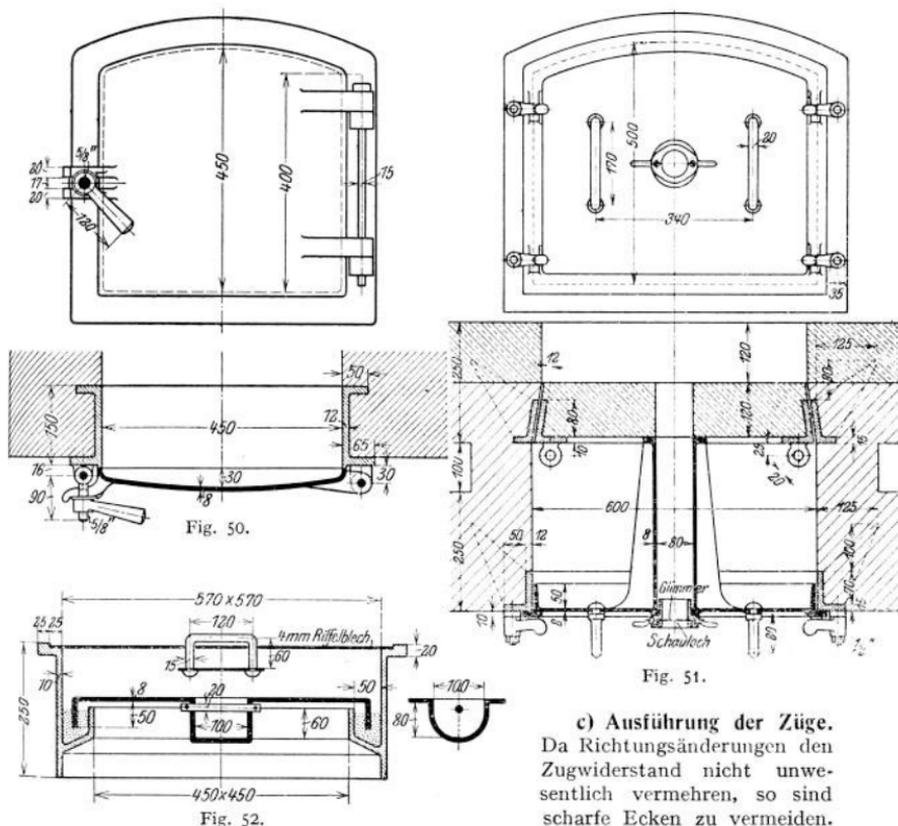
und in oder zwischen Röhren:

$$f_1' = (0,20 \div 0,25) \cdot R; f_2' = (0,17 \div 0,22) \cdot R.$$

Darin gelten die kleineren Werte für Steinkohle, die größeren für Braunkohle.

Bei der Querschnittsbemessung ist zu berücksichtigen, daß die Kanäle zwecks Reinigung möglichst befahrbar sein sollen. Zu diesem Zweck müßte sich in die Querschnittsfläche ein Quadrat von etwa 45×45 cm einzeichnen lassen.

b) Lage der Züge: Höchster Punkt derselben mindestens 100 mm^4 unter N. W. Im übrigen dürfen nichtwasserberührte Kesselwände den Heizgasen (z. B. in Oberzügen) ausgesetzt werden, wenn die vorher bestrichene Heizfläche bei natürlichem Zuge das 20fache, bei künstlichem²⁾ das 40fache der Rostfläche beträgt¹⁾.



c) Ausführung der Züge.

Da Richtungsänderungen den Zugwiderstand nicht unwesentlich vermehren, so sind scharfe Ecken zu vermeiden.

Andererseits führen Richtungsänderungen infolge Durchwirbelung der Gase immer neue heiße Gasteilchen an die Heizfläche und beeinflussen dadurch den Wärmedurchgang günstig. Man sucht daher in längeren geraden Zugkanälen Ähnliches dadurch zu erreichen, daß man durch eingebaute Wände kurze Zugverengungen herbeiführt. Die größte Länge der Zugkanäle in einem Kesselmauerwerk beträgt etwa

¹⁾ § 3 der Allg. pol. Best. über Landkessel und § 3 der Allg. pol. Best. über Schiffskessel

²⁾ Siehe S. 780.

35 m. Der Kesselfuchs — Abgaskanal — ist so kurz wie möglich zu machen und, falls mehrere Kessel an denselben Schornstein angeschlossen sind, in den gemeinsamen Rauchkanal so einzuführen, daß die Gase möglichst stoßfrei in den gemeinsamen Hauptkanal übertreten können. Zum Entfernen der abgelagerten Flugasche und zur Reinigung der Heizfläche von Ruß- und Aschenansatz müssen die Kanäle durch Einfahröffnungen im Mauerwerk zugänglich sein (Fig. 50, 51 und 52). Lichtweite derselben $45 \times 45 \text{ cm}^1$). Im letzten Zugkanal oder im Fuchs dicht am Kessel wird eine Vorrichtung zum Regeln der Zugstärke eingebaut, die entweder in einer Drehklappe (Fig. 53), welche durch Gestänge vom Heizerstande aus betätigt wird oder in einem Zugschieber besteht (Fig. 54).

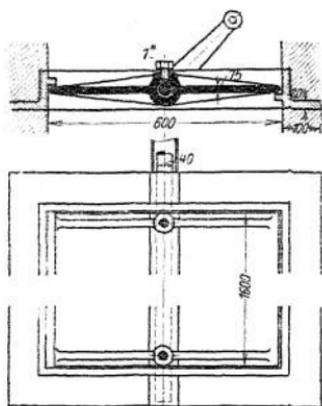


Fig. 53.

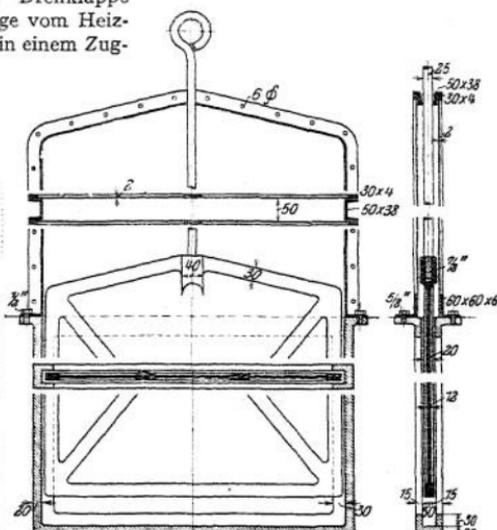


Fig. 54.

Um bei letzterem das Einsaugen kalter Luft zwischen Schieber und Führungsrahmen zu vermeiden, ist es vorteilhaft, auf den Rahmen außerhalb des Mauerwerks einen dichtschießenden Kasten zur Aufnahme des herausgezogenen Schiebers aufzusetzen. Der Schieber wird mittels einer auf Rollen über das Kesselmauerwerk geführten Kette (oder Drahtseil) bewegt, an deren Ende am Heizerstande ein zur Vermeidung von Unfällen zu umwehrendes Ausgleichsgewicht hängt oder ein Zugregler angebracht ist.

VIII. Das Mauerwerk.

Baustoffe. In den Umfassungsmauern: gewöhnliches Ziegelmauerwerk in Kalkmörtel (1:3), für Grundmauern in verlängertem Zementmörtel (1 Kalk : 1 Zement : 5 Sand), für Berührungsstellen mit der Kesselwandung in Lehm oder Schamottemörtel (Kalk unbedingt zu vermeiden). An Stellen, wo das Mauerwerk mit heißen Gasen von etwa 450° an dauernd in Berührung kommt, wird Schamottfutter in reinem Schamottmörtel aufgemauert — Normalsteine in Verband mit dem gewöhnlichen Ziegelmauerwerk. Für Feuerbrücken, Gewölbe über Feuerungen u. ä. m. Schamotteformsteine, die mit besonders dünnen Fugen zu vermauern sind (Fig. 55). Für diese letzteren Zwecke ist hochwertiger

¹⁾ Vgl. Jaeger, Bestimmungen über Anlegung und Betrieb von Dampfkesseln. Berlin 1910, S. 100.

Schamotte von Segerkegel 33 an, und zwar basischer oder saurer, in Übereinstimmung mit dem Verhalten der entstehenden Asche zu wählen, während für die übrigen Stellen, die nicht mit den Flammen in Berührung kommen und vor allem nicht durch die Ausstrahlung der Glut zu leiden haben, Schamotte vom Segerkegel 30 genügt¹⁾.

Außenmauern des Kesselmauerwerks müssen (nach § 16 der A.P.-B.) einen Mindestabstand von 80 mm von den Kesselhauswänden haben. Stärke der Außenmauern $1\frac{1}{2} \div 2\frac{1}{2}$ Stein, und zwar die größeren Stärken für die besonders dem Anprall heißer Gase ausgesetzten Mauern. Wo notwendig, $\frac{1}{2} \div 1$ Stein starkes Schamottefutter. Zur Verminderung der Wärmeausstrahlung dienen: Verblenden mit weißen Glasurziegeln, ferner $\frac{1}{4} \div \frac{1}{2}$ Stein starke Isolierschichten, ausgefüllt entweder mit Flugasche, Schlackenwolle, Kieselgurerde oder mit im Verbands eingemauerten Kieselgursteinen (Fig. 56). Für die Dichtigkeit der Seitenmauern besonders vorteilhaft ist die Herstellung derselben im Bogensystem (Fig. 56 und 57).

Ragen Kesselteile aus dem Mauerwerk heraus, so sind dieselben durch Asbestschnureinlage gegen das Mauerwerk abzudichten, nicht durch Mörtelfuge.

Zwischenmauern, d. s. Trennungswände zwischen 2 Kesseln mit gemeinsamem Mauerwerk, sind (nach § 16 der A.P.-B.) mindestens 34 cm stark auszuführen.

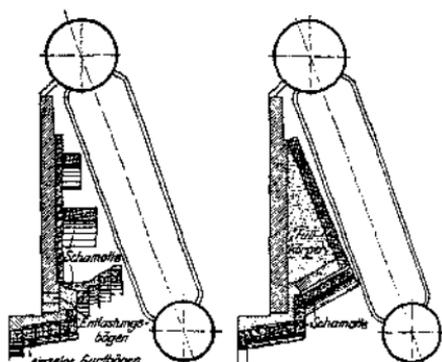


Fig. 55.

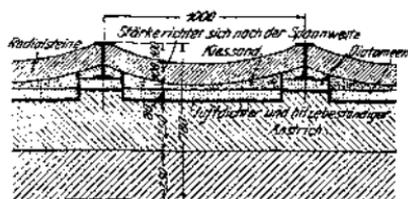


Fig. 56.

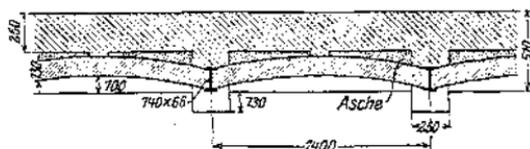


Fig. 57.

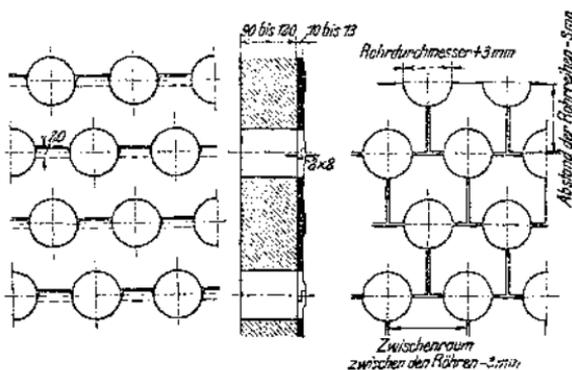


Fig. 58. Zwischenwand senkrecht zu den Wasserröhren.

¹⁾ Siehe Herberg, Feuerungstechnik und Dampfkesselbetrieb, Berlin 1913, Julius Springer.

Scheidewände zwischen Zugkanälen, auf deren gute Instandhaltung im Interesse der Wärmeausnutzung der Heizgase besonders zu achten ist, werden als halbsteinstarke Mauerzungen oder bei Wasserröhrenkesseln durch zwischen den Röhren eingebaute Platten (Fig. 58 und 59) ausgeführt, entweder aus Schamotteformsteinen (etwa 100 mm stark), aus gußeisernen Formstücken (20 mm stark) oder aus beiden — Feuerseite Schamotte, dahinter Gußeisen — zusammengesetzt.

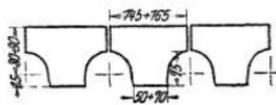


Fig. 59. Zwischenwand parallel zu den Wasserröhren.

Die Abdeckung der Zugkanäle erfolgt durch Auskrägung der Seitenmauern (Fig. 60a). Darauf werden 3 bis 4 Steinschichten gegen den Kessel gestoßen. Auf diese gibt man eine etwa 100 mm starke Lehm- oder Sandfüllung, dann als Füllstoff

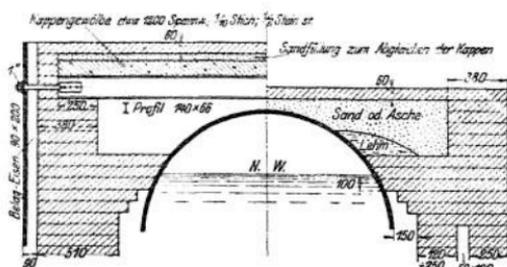


Fig. 60b.

Fig. 60a.

gestellt und durch Längs- und Queranker (etwa 1" Durchm.) miteinander verbunden, die in nicht zu heiße Stellen des Mauerwerks zu verlegen sind. Hohes Mauerwerk für Steilrohrkessel wird in ein genietetes Eisengerippe eingebaut.

Sand, Schlacke od. ä., endlich als Abschluß eine Flachschiicht. Fig. 60b zeigt eine Ausführung, bei der die Füllung fehlt.

Fuchskanal: Seitenwände etwa 1 Stein stark, unten durch Rollschicht, oben durch $\frac{1}{2}$ bis 1 Stein starke Kappe abgedeckt.

Verankerungen: An den Seitenwänden und an den Ecken werden passende Profileisen auf-

IX. Der Schornstein.

Es bezeichnen:

H_{sch}	in m	die Schornsteinhöhe über dem Rost,
d	„ m	den mittleren lichten Schornsteindurchmesser,
u	„ m	den Umfang des mittleren Schornsteinquerschnittes,
F	„ m ²	den mittleren Querschnitt,
d_0	„ m	den lichten Durchmesser an der Mündung,
F_0	„ m ²	den lichten Querschnitt an der Mündung,
t_m	„ °C	die Temperatur der Abgase in der Schornsteinmitte,
t_0	„ °C	die Temperatur der Abgase am Schornsteinkopfe,
t_a	„ °C	die Temperatur der Außenluft,
γ_i	„ kg	das Gewicht 1 cbm Außenluft bei 0° und 760 mm Barometerstand,
γ_g	„ kg	das Gewicht 1 cbm der wasserdampfhaltigen Abgase bei 0° und 760 mm Barometerstand,
q		die Reibungszahl für die Reibung der Gase an den Schornsteinwänden,
g		die Erdbeschleunigung,
v	„ m/sek	die mittlere Gasgeschwindigkeit im Schornstein,
G_{cbm}	„ cbm	die Rauchgasmenge aus 1 kg Brennstoff unter Berücksichtigung des Wasserdampfes und des Luftüberschusses,
B	„ kg	die stündlich verfeuerte Brennstoffmenge.

a) Dann ergibt sich der **nutzbare Schornsteinzug** gemessen am Schornsteinfuß bei offenem Zugschieber, wenn man von der Saugwirkung des Windes absieht, in mm Wassersäule:

$$Z_n = 273 \cdot H_{Sch} \left(\frac{\gamma_l}{273 + t_a} - \frac{\gamma_g}{273 + t_m} \right) - \frac{\gamma_g \cdot 273}{273 + t_m} \cdot \frac{v^2}{2g} - \rho \cdot H_{Sch} \cdot \frac{u}{F} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{\gamma_g \cdot 273}{273 + t_m}$$

Für runden Querschnitt wird somit:

$$Z_n = 273 \left[H_{Sch} \cdot \left(\frac{\gamma_l}{273 + t_a} - \frac{\gamma_g}{273 + t_m} \right) - \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{\gamma_g}{273 + t_m} \left(1 + 4 \cdot \rho \cdot \frac{H_{Sch}}{d} \right) \right],$$

hierin kann gesetzt werden:

$\gamma_l = 1,29$ kg/cbm für mittelfeuchte Luft,

$\gamma_g = 1,27$ kg/cbm für Abgase mit 10% CO₂-Gehalt aus Braunkohle,

$\gamma_g = 1,33$ kg/cbm für Abgase mit 10% CO₂-Gehalt aus Steinkohle,

für t_m die Temperatur der Abgase, gemessen an irgendeiner Stelle hinter Kessel und Rauchgasvorwärmer, vermindert um je 1° C für jedes laufende m bis zur Schornsteinmitte,

für ρ nach Rietschel etwa 0,007.

b) Die **Schornsteinhöhe** ergibt sich daraus für mittlere Verhältnisse — $\gamma_l = \gamma_g = 1,29$; $t_a = +27^\circ$; $t_m = 273^\circ$ für Kessel ohne Rauchgasvorwärmer zu:

1)
$$H_{Sch} = 1,9 \cdot Z_n + 0,06 \cdot v^2$$

und für Kessel mit Rauchgasvorwärmer — $t_m = 180^\circ$:

2)
$$H_{Sch} = 2,4 \cdot Z_n + 0,1 \cdot v^2$$

Für v wählt man:

bei 1 bis 3 Kesseln $v = 4 \div 5$ m/sek

bei 4 bis 6 Kesseln $v = 5 \div 7$ „

bei 7 und mehr Kesseln. $v = 7 \div 10$ „

Die zur Überwindung der Widerstände in der Brennschicht und in den Zugkanälen bis zum Schornsteinfuß nötige Zugkraft Z_n kann man etwa an folgenden Erfahrungswerten abschätzen, die auch für hohe Rostbelastungen ausreichen:

Nach Herberg soll die erforderliche Zugstärke, gemessen am Schornsteinfuß bei offenem Zugschieber, betragen:

Für Kesselanlagen bis zu 100 qm Heizfläche etwa $13 \div 18$ mm Wassersäule

„ „ „ „ 400 „ „ „ $18 \div 23$ „ „

„ „ „ „ 800 „ „ „ $23 \div 28$ „ „

„ „ „ „ 1200 „ „ „ $28 \div 35$ „ „

„ „ „ „ 1800 „ „ „ $35 \div 40$ „ „

„ „ „ „ 2500 „ „ „ $40 \div 48$ „ „

Ferner sind Zuschläge zu machen:

für Dampfüberhitzer 1 bis 3 mm Wassersäule

„ Flugaschenfänger 1 „ 3 „ „

„ Rauchgasvorwärmer 1 „ 4 „ „

Weiter sind noch folgende Annäherungsformeln für die Schornsteinhöhe im Gebrauch:

$$3. \quad H_{Sch} = \left[\alpha \cdot d_0 + 5 + 0,05 \cdot (l - 20) \right] \frac{700 - t_m}{200 + t_m} + \beta,$$

worin zu setzen ist

für α : 15 bis 20, je nach den geringeren oder größeren Reibungswiderständen der Gase in den Zugkanälen,

„ l in m die gesamte Länge der Zugkanäle aller an den Schornstein angeschlossenen Kessel und der Fuchskanäle bis zum Schornsteinfuß,

„ β : 5 m, wenn ein Rauchgasvorwärmer vorhanden ist, sonst $\beta = 0$,

4. nach Heinicke:

Für Kessel ohne Rauchgasvorwärmer und ohne Überhitzer, bei einer Heizflächenbeanspruchung von etwa 25 kg

$$H_{Sch} = 18 + 2,6 \sqrt{H_k} + a + b ;$$

ist ein Überhitzer vorhanden:

$$H_{Sch} = 18 + 2,6 \sqrt{H_k + H_{\ddot{u}} + H_v} + a + b + c$$

kommt noch ein Rauchgasvorwärmer dazu:

$$H_{Sch} = 30 + 3,2 \sqrt[3]{H_k + H_{\ddot{u}} + H_v} + a_1 + b_1 + c_1 .$$

Darin bedeuten: H_k ; $H_{\ddot{u}}$; H_v in qm die Heizfläche des Kessels, des Überhitzers, des Vorwärmers.

Die Zuschläge $a = 9$ bis 13 m für erhöhten Rostwiderstand bei Verfeuerung erdiger Kohle,

$b \leq 10$ m für erhöhten Widerstand in besonders komplizierten Zugkanälen,

$c = 4$ bis 6 m für erhöhten Widerstand in den Zügen durch Einbau eines Überhitzers,

$a_1 = 12 \div 17$ m für erdige Kohle,

$b_1 \leq 14$ m für komplizierte Kessel,

$c_1 = 6 \div 8$ m für Überhitzer.

Als geringste Höhe ist etwa 16 m anzusehen. Über die Höhe der Schornsteine für industrielle Feuerungen, an sich und im Verhältnis zu Nachbargebäuden, sind besondere Bestimmungen in den verschiedenen Baupolizeiverordnungen enthalten.

c) Die Lichtweite des Schornsteins an der Mündung.

$$1. F_0 = \frac{B \cdot G \text{ cbm} \cdot (273 + t_0)}{3600 \cdot v \cdot 273}, \text{ darin kann ohne genauere Kenntnis der}$$

Kohle für einen mittleren Luftüberschuß gesetzt werden:

$G \text{ cbm} = 15$ für Koks und Steinkohle,

12 für böhmische Braunkohle und Braunkohlenbriketts,

8 für Holz, Torf und erdige Braunkohle,

für $t_0 \infty 300^\circ$, wenn kein Rauchgasvorwärmer vorhanden,

$\infty 180^\circ$, wenn ein Rauchgasvorwärmer vorhanden,

für v die weiter oben angegebenen Werte.

Soll der Schornstein in Anbetracht einer späteren Betriebsvergrößerung bemessen werden, so ist es vorteilhaft, zunächst einen Deckring aufzulegen, damit v nicht unter 4 m sinkt.

$$2. d_0 = \frac{2}{\alpha} \sqrt{F_0}, \text{ wenn gesetzt wird:}$$

$\alpha = 1,77$ bei Kreisquerschnitt,

$= 1,82$ bei achteckigem Querschnitt,

$= 2$ bei quadratischem Querschnitt.

Als kleinster oberer Schornsteindurchmesser kommt 0,6 m zur Ausführung.

d) Statische Berechnung gemauerter Schornsteine.

Ein beliebiger Querschnitt der Schornsteinsäule — mit $f \text{ cm}^2$ — wird beansprucht:

1. Auf Druck durch Eigengewicht — $G \text{ kg}$ — des darüber befindlichen Säulenteiles. Dadurch erfolgt die Druckspannung:

$$\sigma_d = \frac{G}{f} .$$

Zur Berechnung des Eigengewichtes — $G = V \cdot g$ — ist gewöhnlich zu setzen:

$g = 1600 \text{ kg/m}^3$ für gewöhnliches Ziegelmauerwerk,

1800 „ „ Hartbrandziegelmauerwerk,

2000 „ „ Beton.

Höhere Gewichte: für Hartbrand bis 2000 kg; für Beton bis 2400 kg sind auf behördliches Verlangen besonders nachzuweisen. Für die Einhaltung der in Rechnung gestellten Gewichte g bei der Ausführung haftet der Erbauer des Schornsteins.

In folgendem bedeutet:

V_1	in cbm	den Inhalt des Mauerwerks der ganzen Säule,
V_1'	" "	den Inhalt des Mauerwerks einer Trommel,
V_2	" "	den Inhalt des Mauerwerks des Sockels,
H_1	" m	die Höhe der ganzen Säule,
H_2	" "	die Höhe des Sockels,
h	" "	die Höhe einer Trommel,
H'	" "	die Entfernung des oberen Querschnittes einer Trommel von der Mündung,
R_0	" "	den oberen äußeren Halbmesser ¹⁾ der Säule,
R_u	" "	den unteren äußeren Halbmesser ¹⁾ der Säule,
R	" "	den äußeren Halbmesser ¹⁾ des Sockels,
r	" "	den inneren Halbmesser ¹⁾ des Sockels,
R'	" "	den oberen äußeren Halbmesser ¹⁾ einer Trommel,
R''	" "	den unteren äußeren Halbmesser ¹⁾ einer Trommel,
δ	" "	die Wandstärke einer Trommel.

Dann ist der Inhalt einer beliebigen Schornsteintrommel d. i. eines Teiles der Schornsteinsäule, in welchem die Wandstärke gleich bleibt und der die Form eines hohlen Kegel- oder Pyramidentumpfes hat:

$$V' = z \cdot h \cdot \delta \cdot (R' + R'' - \delta).$$

Hierin ist zu setzen für z :

z	Querschnittsform
π	Kreisring
3,314	hohles Achteck
4	hohles Quadrat

ferner

$$R' = R_0 + \frac{H'}{H_1}(R_u - R_0) \quad \text{und} \quad R'' = R_0 + \frac{H' + h}{H_1}(R_u - R_0)$$

Der Inhalt des Sockelmauerwerks

$$V_2 = (z_a \cdot R^2 - z_t \cdot r^2) \cdot H_2,$$

wenn für z_a und z_t die oben angegebenen Werte für z entsprechend der Form des äußeren und des inneren Umfanges des Querschnittes eingesetzt werden.

Gesimse u. ä. sind für die Gewichts- und ebenso weiter unten für die Winddruckermittlung zu vernachlässigen.

2. Auf Biegung durch das Moment des Winddruckes auf die Fläche des über dem betrachteten Querschnitt liegenden Säulenteiles. Dieses Windmoment ist auch bei eckigem Querschnitt der Säule als für alle Windrichtungen gleich groß anzusehen.

Es bedeute:

M	in cmkg	das Windmoment in bezug auf einen Querschnitt,
F	" m ²	die (in der Regel trapezförmige) Schnittfläche durch die Schornsteinachse bis zum betrachteten Querschnitt,
s	" cm	den Abstand des Schwerpunktes der Fläche F vom betrachteten Querschnitt,
w	" kg/m ²	den spezifischen Winddruck.

Dann ist:

$$M = w \cdot n \cdot F \cdot s,$$

worin zu setzen ist:

$w = 125$ nach den für Preußen geltenden Erlassen, wenn M zur Prüfung, wie weit sich die Lagerfuge des betrachteten Querschnitts öffnet (siehe weiter unten), benutzt werden soll;

$w = 150$, wenn M für die Berechnung der größten Randdruckspannung dient;

$w = 200$, an Stelle des Wertes 150 bei Berechnung von Schornsteinen im Küstengebiet der Nordsee;

$n = 0,67$ für kreisförmigen äußeren Umfang,

= 0,71 für achteckförmigen äußeren Umfang,

= 1,00 für quadratförmigen äußeren Umfang;

$F = (R_0 + R') \cdot H'$, wenn der betrachtete Querschnitt um H' m unter der Schornsteinsmündung liegt und dort ein äußerer Halbmesser R' vorhanden ist;

$s = 100 \cdot \frac{H' R' + 2 R_0}{3 R' + R_0}$ in cm.

Daraus folgt:

$$M = g \cdot (2 R_0 + R') \cdot H'^2 \text{ in cmkg.}$$

¹⁾ Bei eckigem Querschnitt den des eingeschriebenen Kreises.

Werte für q .

Form des äußeren Querschnitts- umfangs	spez. Winddruck in kg/m^2		
	125	150	200
Kreis	2780	3330	4440
Achteck	2960	3550	4730
Quadrat	4170	5000	6660

also für den untersten Querschnitt der Säule:

$$M_1 = q_1 \cdot (2R_0 + R_u) \cdot H_1^2,$$

für den Sockel allein:

$$M_2 = q_2 \cdot 3 \cdot R \cdot H_2^2,$$

und somit für das Gesamtmoment für den in Flurhöhe gelegenen Schornsteinquerschnitt:

$$M_f = M_1 + M_2 + 3 \frac{H_2}{H_1} \frac{R_0 + R_u}{2R_0 + R_u} \cdot M_1,$$

ferner für einen Querschnitt des Grundbaues, der T' m unter dem Gelände liegt:

$$M_t = M_f + T' \cdot \left(3 \frac{M_1}{H_1} \frac{R_0 + R_u}{2R_0 + R_u} + \frac{2 \cdot M_2}{H_2} \right).$$

3. Die durch das Windmoment hervorgerufenen Biegungs- und die Druckspannungen (nach 1.) setzen sich wie folgt zusammen:

Die Resultante aus Eigengewicht und Winddruck schneidet den Querschnitt schräg, und zwar in einem Punkte, der um

$$a = \frac{M}{G}$$

vom Schwerpunkt des Querschnittes entfernt ist. Unter der Einwirkung dieser Kraft klappt die geöffnete Lagerfuge (unter der Annahme, daß der Mörtel nicht an den Steinen haftet) nach Lang höchstens bis zum Schwerpunkt des Querschnittes, wenn

$$a \leq \frac{R}{2} + \frac{r}{4},$$

worin R in cm den Halbmesser des im äußeren und r , in cm, denjenigen des im inneren Querschnittsumfang eingeschriebenen Kreises bedeutet.

Die größte Kantenpressung in dem belasteten Teil des Querschnittes wird ebenfalls nach Lang:

$$\sigma_{\max} = \sigma_d \left(1 + \frac{a}{k} \right) + \sigma_d \left(1 - \frac{a}{k} \right) \left(\frac{a - k}{c - k} \right)^2,$$

wenn für $t = \frac{a}{k}$ der absolute Wert eingesetzt wird. Ferner ist darin $c = \frac{R}{2} + \frac{r}{4}$ und k die kleinste Kernweite des Querschnittes, und zwar für Ringquerschnitte:

$$k = n \cdot R \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right)$$

wo

$$n = 0,25 \text{ für Kreisring,}$$

$$0,244 \text{ „ Achtecksring,}$$

$$0,236 \text{ „ Quadrating;}$$

für andere, namentlich im Sockel gebräuchliche Querschnittsformen wird k (s. nebenstehende Tabelle).

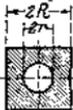
Für die Grundbausohle mit vollem kreisförmigem oder quadratischem Querschnitt wird

$$\sigma_{\max} = \sigma_d \left(1 + \frac{a}{k} \right),$$

$$(k = 0,25 \cdot R \text{ für Kreis und } k = 0,236 \cdot R \text{ für Quadrat}).$$

4. Die Schubspannungen können unbedenklich vernachlässigt werden, da die oft recht beträchtlichen Wärmespannungen und der Einfluß des Schwankens ebenfalls nicht berücksichtigt werden.

5. Den behördlichen Bauvorschriften für Schornsteine ist nun folgendermaßen zu genügen:

	Kleinste Kernweite	Querschnittsform
	$0,876 - 0,785 \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^4$ $R \cdot \frac{3,579 - 3,393 \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^2}{R}$	
	$1,333 - 0,785 \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^4$ $R \cdot \frac{5,656 - 4,442 \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^2}{R}$	
	$1,333 - 0,876 \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^4$ $R \cdot \frac{5,656 - 4,686 \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^2}{R}$	

Für $w = 125 \text{ kg/m}^2$ darf die offene Lagerfuge höchstens bis zur Querschnittsmittle klaffen. Also ist nach obigem zu untersuchen, ob für die Querschnitte:

$$\frac{M_{125}}{G} \leq \frac{R}{2} + \frac{r}{4}$$

ist. Für diese und die folgenden Nachrechnungen genügt es im allgemeinen, nur die Querschnitte am Fuße der einzelnen Säulentrommeln und vielleicht einen Grundbauquerschnitt zu untersuchen.

Die größten Kantenpressungen, die sich bei klaffender Fuge ergeben, dürfen für $w = 150$ (im Küstengebiet der Nordsee $w = 200$) die nachstehenden Werte nicht überschreiten:

$\sigma_{\max} \leq$	7 kg/cm ²	bei gewöhnlichem Ziegelmauerwerk in Kalkmörtel (1 R.-T. Kalk und 3 R.-T. Sand);
$= 12 \div 15$	"	bei Mauerwerk aus Hartbrandsteinen (mit nachgewiesener Druckfestigkeit von $\leq 250 \text{ kg/cm}^2$) in Kalk-Zement-Mörtel (1 R.-T. Zement, 2 R.-T. Kalk, 6 \div 8 R.-T. Sand);
\leq	25	bei Verwendung festerer Steine und zementreicheren Mörtels, auf Grund amtlicher Prüfung an ganzen Mauerkörpern ist $1/10$ der nachgewiesenen Bruchbeanspruchung zulässig;
$\sigma_{\max} =$	6 \div 8	" für geschütteten Beton im Grundmauerwerk;
$= 10 \div 15$	"	für gestampften Beton im Grundmauerwerk;
$= 3 \div 4$	"	für guten Baugrund unter der Grundbausohle, doch gibt es hiervon teilweise abweichende Vorschriften von Baupolizeibehörden.

Die Fundamente dürfen sich auf der Windseite nicht von der Grundbausohle abheben; dies ist erfüllt, wenn für den Sohlenquerschnitt

$$a < h$$

ist. Die Erdlast auf den Absätzen des Grundbaues soll dabei unberücksichtigt bleiben.

6. Zu beachten ist ferner, daß, wenn eiserne Wasserbehälter am Schornstein angebracht werden, die Festigkeitsrechnungen sowohl mit Berücksichtigung des entleerten wie auch des völlig gefüllten Behälters durchzuführen sind.

e) Statische Berechnung der Betonschornsteine.

Auch hier ist die Zugfestigkeit des Baustoffs nicht in Rechnung gezogen, also wie bei Schornsteinen aus Ziegelmauerwerk mit Lagerfugen gerechnet, die durch den Winddruck geöffnet werden. Als größte Kantenpressungen läßt man $1/20$ der Bruchfestigkeit zu¹⁾.

Betonmischung im Schaft	1 : 3 bis 1 : 4
" " Grundbau	1 : 6 " 1 : 8

Im übrigen sind für die Bauausführung maßgebend: Die allgemeinen Bestimmungen für die Vorbereitung, Ausführung und Prüfung von Bauten aus Stampfbeton, aufgestellt vom Deutschen Ausschuß für Eisenbeton.

f) Statische Berechnung der Schornsteine aus Eisenbeton.

Bei doppelwandigen Schornsteinen kommt nur der äußere Mantel für die Festigkeitsrechnungen in Betracht. Für diesen sei in einem beliebigen kreisringförmigen Querschnitt:

R	in cm der äußere Halbmesser,
δ	" " die Wandstärke,
r_m	" " der mittlere Halbmesser: $r_m = R - \frac{\delta}{2}$
f	" cm ² die Querschnittsfläche: $f = 2\pi \cdot r_m \cdot \delta$
f_0	" " der Querschnitt eines eisernen Armierungsstabes,
f_E	" " der Gesamtquerschnitt der im Querschnitt vorhandenen z Armierungsstäbe: $f_E = z \cdot f_0$.
G	" kg das Eigengewicht des belastenden Säulenteiles,
M	" cmkg das Windmoment für den Querschnitt,

a " cm der Ausschlag des Druckmittelpunktes: $a = \frac{M}{G}$,
dann ergeben sich die

$$\begin{aligned} \text{Druckbeanspruchungen: im Beton } \sigma_{\max} &= \frac{G}{A \cdot f}, \\ & \text{im Eisen} = \frac{15 \cdot G}{A \cdot f}, \\ \text{Zugspannungen: im Eisen} &= \frac{B \cdot G}{A \cdot f}. \end{aligned}$$

Die Werte für A und B ergeben sich aus nachstehender Tabelle, in welcher $\mu = 1000 \frac{f_E}{f}$ bedeutet.

¹⁾ Runderlaß des Preuß. Arbeitsminister vom 8. Dezember 1910.

μ	$1000 \cdot A$								
	$\mu = 2,5$	5	10	15	20	25	30	35	40
0,5	519	538	575	613	650	688			
0,6	461	480	515	550	584	618			
0,7	400	421	455	489	521	553			
0,8	342	365	402	437	470	500	530		
0,9	291	319	360	394	425	455	485		
1,0	253	283	325	358	388	418	446		
1,1	223	254	297	328	357	385	413	438	
1,2	199	230	273	303	331	358	384	407	
1,3	180	211	253	282	309	334	358	381	
1,4	163	195	235	264	290	313	336	358	380
1,5	150	181	219	247	272	295	317	338	358
1,6	138	170	206	233	257	279	300	320	340
1,8		151	184	209	231	251	270	289	307
2,0		137	166	189	210	229	246	263	279
2,2			151	173	193	210	225	241	256
2,4				160	178	195	209	223	236
2,6				149	166	181	195	208	220

μ	$10 \cdot B$								
	$\mu = 2,5$	5	10	15	20	25	30	35	40
0,5	0	0	0	0	0	0			
0,6	24	24	23	22	21	20			
0,7	62	57	51	46	42	40			
0,8	120	100	85	73	67	63	59		
0,9	190	148	115	99	89	82	77		
1,0	260	196	145	122	109	100	93		
1,1	320	238	171	143	127	116	107	101	
1,2	395	275	195	161	142	130	120	112	
1,3	450	309	216	178	156	142	131	123	
1,4	500	338	234	193	169	153	141	133	126
1,5	540	365	250	206	180	163	150	142	134
1,6	570	390	266	218	190	172	158	149	141
1,8		432	293	237	207	187	172	162	154
2,0		470	318	254	221	200	184	173	165
2,2			340	269	233	211	193	182	174
2,4				282	244	221	202	191	182
2,6				293	253	230	211	198	189

Zulässig ist: für den Beton eine Druckspannung $\sigma_{\max} \leq \frac{1}{10}$ der nach 28 Tagen am Probekörper nachgewiesenen Bruchfestigkeit;

für die Eiseneinlagen sowohl an Druck- wie auch an Zugspannung

$$\sigma_{\max} \leq 1000 \text{ kg/cm}^2.$$

Als Eigengewicht für Eisenbeton kann 2400 kg für das Raummeter gesetzt werden.

g) Statische Berechnung der Blechschornsteine.

Nach Fig. 61 bezeichne:

- H in cm die Höhe des Schornsteinteiles, der dem Winde ausgesetzt ist,
- h_1 „ „ die Höhe des Schornsteinteiles über der Schelle für die Spannseile,
- h_2 „ „ die Höhe des Schornsteinteiles zwischen Dach und Schelle oder bei freistehenden Schornsteinen zwischen Schornsteinfuß und Schelle,
- h_3 „ „ die Höhe des Schornsteinteiles vom Fuß bis zum Dach.
- D_a „ „ den äußeren Durchm. der Säule,
- D_i „ „ den inneren Durchm. der Säule,
- d_0 „ „ den Durchm. eines Spannseiles,
- d_1 „ „ den Kerndurchm. der Spannschraube,
- a „ „ den Abstand des Angriffspunktes eines Seiles von der Schornsteinachse,
- α „ „ Grad den Winkel, den das Spannseil mit der Senkrechten bildet,

dann ist für $w = 150 \text{ kg/m}^2$ der Winddruck auf 1 cm der Schornsteinsäule:

$$p = 0,01 \cdot D_a.$$

Spannseile (oder Ketten, Rundeisen): Wird der gesamte Winddruck von einem Spannseil aufgenommen, dann entsteht in dem Seil eine Zugkraft S , deren wagerechte Komponente

$$S_1 = 0,005 \cdot D_a \cdot H \cdot \frac{H + 2h_2}{h_2 + h_2}$$

ist. Daraus folgt für den Querschnitt des Spannseiles:

$$f_s = \frac{0,005 \cdot D_a \cdot H \cdot (H + 2h_2)}{k_2 \cdot \sin \alpha \cdot (h_2 + h_2)} = \frac{\pi \cdot d_0^2}{4}$$

und

$$d_1 = 0,067 \cdot \sqrt{\frac{S_1}{\sin \alpha}}$$

Hierin ist für k_2 allgemein zulässig: $k_2 \leq 1000 \text{ kg/cm}^2$.

Das Schornsteinrohr wird beansprucht: 1. auf Biegung durch den Winddruck und durch die senkrechte Komponente S_2 der Zugkraft S ;

2. auf Knickung durch S_2 und durch das Eigengewicht. Die Knickbeanspruchung ist jedoch im allgemeinen gegenüber derjenigen durch Biegung so klein, daß es genügt, ihr Rechnung zu tragen, indem man den Schornstein, für die Ermittlung der Biegebungsbeanspruchung, am Fuße nicht als fest eingespannt ansieht.

Zu untersuchen ist dann:

der Querschnitt, in welchem die Spannseile angreifen: Windmoment $M = \frac{\rho \cdot h_1^2}{2}$;

Biegungsspannung: $\sigma_b = \frac{M}{W}$, worin W Widerstandsmoment: $W = 0,1 \cdot \frac{D_a^4 - D_i^4}{D_a}$.

Es muß dann sein: $\sigma_b \leq k_b$, wenn k_b die zulässige Biegungsspannung — etwa 800 kg/cm^2 — bezeichnet.

Der Querschnitt, der

$$x = \frac{h_2^2 - h_1^2}{2(h_2 + h_1)}$$

über dem Dach liegt. Dort ergibt sich für den Säulenteil zwischen Dach und Schelle der größte Wert für das Winddruckmoment:

$$M' = \frac{\rho}{8} \cdot \frac{h_2^2 - h_1^2}{(h_2 + h_1)^2} \cdot [(h_2 + 2h_1)^2 - h_1^2]$$

Ferner als Moment der Kraft S_2 :

$$M'' = S_2 \cdot \text{ctg } \alpha \cdot a$$

und danach

$$\sigma_b = \frac{M' + M''}{W} \leq k_b$$

Fundament: Die Fundamentsohle ist, genügende Verspannung der Säule vorausgesetzt, nur auf Druck durch das Eigengewicht zu berechnen.

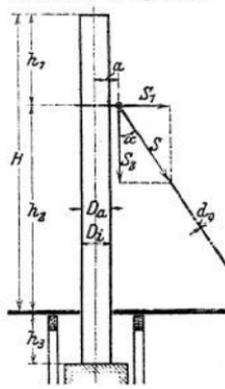


Fig. 61.

X. Ausführung der Schornsteine.

Schornsteinteile: Grundbau, Sockel, Schaft.

Baustoffe: Ziegelmauerwerk, Beton (bis jetzt bei uns nur vereinzelt angewandt) und Flußeisenblech.

Ausrüstung: Blitzableiter, der an benachbarte größere Metallmassen und an die vielleicht vorhandenen eisernen Schornsteinbänder anzuschließen ist. Steigeisen (aus 1'' Rundeisen), die im Abstände von 300 bis 400 mm außen neben dem Blitzableiter einzumauern sind.

a) Schornsteine aus Mauerwerk.

Schaft oder Säule außen konisch, mit Anlauf:

$$\frac{R_u - R_0}{H_1} = \frac{1}{40} \text{ bis } \frac{1}{60}$$

Oberer lichter Durchmesser mindestens 0,6 m, damit der Schornstein ohne Gerüst aufgemauert werden kann. Die vorteilhafteste Querschnittsform ist die runde. Dabei werden am besten gelochte Radialsteine angewandt. Wandstärken:

am Kopfe bei Verwendung von Formsteinen: 15, 20, 25 cm, je nach Lichtweite und Schornsteinhöhe; dann nach unten zu in Absätzen von 5 bis 7 m (Trommelhöhe) anwachsend um je 5 cm. Werden Steine in Normalformat benutzt, so beginnt man oben gewöhnlich mit 1 Stein und macht jede darunter folgende, hier 8 bis 10 m hohe Trommel um $\frac{1}{2}$ Stein stärker. Bis zu etwa $\frac{1}{4}$ der Gesamthöhe wird mit Vorteil im Schornsteinrohr vom Grundbau aus ein Schutzfutter, $\frac{1}{2}$ bis 1 Stein stark, aus Schamotte- oder Hartbrandziegeln frei hochgeführt. Der etwa 5 cm weite Zwischenraum zwischen dem tragenden Mantel und dem Futter wird am besten mit einer Wärmeschutzmasse ausgefüllt. Schamotte ist für das Futter zu verwenden, falls es vor der Einwirkung sehr heißer — über 350° —, saurer Gase schützen soll. Der Schornsteinkopf wird entweder ganz glatt oder mit wenig ausladendem, etwa $\frac{1}{2}$ m unter der Mündung umlaufenden Gesims ausgeführt. Gesims und Mündung sind oben etwas abgeschrägt mit Zementmörtel zu verputzen. Bekrönungen aus Sandstein oder Gußeisen sind unbedingt zu vermeiden, da sie den Einflüssen der Witterung und der Gase dauernd nicht widerstehen und bei starkem Winde höchst gefährlich werden können. Um eine Rauchverdünnung herbeizuführen, wendet man neuerdings für den obersten Teil der Schornsteinsäule radial durchlochte Formsteine an. (Dissipator D. R. P.)

Der Sockel, früher allgemein bis zu ungefähr $\frac{1}{7}$ der Schornsteinhöhe unterhalb der Säule in vier- oder achteckigem Querschnitt ausgeführt, fehlt, da zwecklos, bei neueren Bauten ganz. Dafür macht man den untersten Teil der Säule $\frac{1}{2}$ bis 1 m über dem Gelände äußerlich nur etwas stärker als den darüber ansitzenden Schaft.

Der Grundbau dient im allgemeinen zur Einführung eines oder zweier Fuchskanäle, unter deren Sohle das Schornsteinrohr etwa $\frac{1}{2}$ m hinuntergeführt wird (Aschensack). Münden 2 Fuchskanäle gegenüberliegend ein, so ist unter 45° zur Fuchsachse im Schornstein eine senkrechte Trennungswand aus Schamotte-, bzw. Hartbrandsteinen im Verband mit dem Futter etwa 2 bis 3 m hochzuführen. Ist nur 1 Fuchskanal vorhanden, so ist es vorteilhaft, gegenüber eine Einsteigeöffnung im Mauerwerk vorzusehen. — Als Baustoff kommt Ziegel- oder Bruchstein-Mauerwerk und neuerdings häufig Beton zur Verwendung. Im ersten Fall ist die Grundrißform gewöhnlich quadratisch, im letzteren kreisrund. Die Bausohle soll etwa 1,5 m unterhalb des Aschensackes liegen. Namentlich bei feuchtem Baugrunde ist es von Vorteil, auf die Bausohle immer zunächst eine 1 m starke Betonplatte aufzustampfen, darauf eine Isolierschicht zu bringen und dann aufzumauern. Bildet die Seitenlinie des Grundbaues, die durch die meistens in Absätzen erfolgende Verbreiterung des Querschnittes vom Sockel bis zur Bausohle gegeben ist, einen Winkel von 45° oder weniger mit der Wagerechten, so ist die Betonplatte durch nahe der Sohle kreuzweis eingelegte Schienen biegungsfest zu machen.

b) Schornsteine aus Beton

wurden bisher nur vereinzelt ausgeführt. Beton bietet den Vorteil großer Druckfestigkeit und hohen Gewichtes. Dagegen ist er gegen hohe Temperaturen und namentlich schweflige Säure wenig widerstandsfähig, so daß ein Schutzfutter aus Steinen hier besonders am Platze ist. Das Rohr wird zylindrisch ausgeführt. Die Wandstärke nimmt nach unten stetig zu.

c) Schornsteine aus Eisenbeton.

haben vor allem den Vorteil, daß sich auch bei starker Windbeanspruchung keine Fugen öffnen. Infolge der sehr hohen Druck- und Zugfestigkeit des Eisenbetons ergeben sich geringe Wandstärken und daher billiger Grundbau. Ferner lassen sich Schaft und Grundbau biegungsfest miteinander verbinden. Leider stellten sich bisher ihre Kosten nicht wesentlich geringer als bei gemauerten Schornsteinen.

In den äußeren tragenden Mantel der Säule mit kreisrundem Querschnitt wird ein innerer konzentrischer Schutzmantel eingebaut, der bei einigen Ausführungen in der ganzen Schornsteinhöhe, bei anderen nur im unteren Drittel vorhanden ist. In beide Mäntel werden zur Armierung wagerechte, eiserne Ringe, im Abstände von 45 bis 90 cm und senkrechte Rundeisenstäbe eingelegt. Die Wandstärken wachsen im äußeren Mantel von 7 bis 13 cm (oben) in Absätzen bis auf 12 bis 25 cm an. Das Futter, das innen zylindrisch gestaltet wird, nimmt in Absätzen auf seiner Außenfläche ebenfalls nach unten an Stärke zu. Der Mantel erhält häufig noch durch Längsrippen an seiner inneren, das Futter durch solche an seiner äußeren Mantelfläche weitere Verstärkung. Zwischen den Rippen des Mantels und denen des Futters verbleibt ein Spielraum von etwa 2 cm.

d) Blechschornsteine

werden meistens nur für kleinere Anlagen verwendet. Im übrigen können ihr geringes Gewicht und die daher niedrigen Grundbankkosten, ferner die Einfachheit der Aufstellung und des Abbruchs ihre Verwendung bei schlechtem Baugrunde und für vorübergehend aufgestellte Anlagen ratsam erscheinen lassen, trotzdem ihre Zugstärke infolge stärkerer Abkühlung der Rauchgase geringer ist als bei gemauerten Schornsteinen. — Das fast immer zylindrische Rohr wird aus einzelnen konischen Schüssen — 3 bis 10 mm stark — zusammengefügt, so daß der obere über den unteren greift. Unten wird es in einen gußeisernen Fuß eingesetzt, der auf einem Mauersockel mit Steinschrauben befestigt wird. In etwa $\frac{2}{3}$ der Schornsteinhöhe wird eine Schelle um das Rohr gelegt, an welcher 3 bis 4 Anker angreifen, die mit Spannschloß auszurüsten sind. Jedes dieser Spannschloß ist wiederum im Boden genügend fest zu verankern.

XI. Die Dampfkessel

werden in den gesetzlichen Bestimmungen nach ihrer Aufstellung eingeteilt in: Landkessel und zwar:

feststehende — dauernd ortsfest aufgestellte
und bewegliche — an wechselndem Aufstellungsort betriebene, denen auch Kessel zuzurechnen sind, die nur vorübergehend auf schwimmenden Bauten benutzt werden.

Schiffskessel — dauernd mit einem Fahrzeug verbunden.

1. Gemeinsames.

a) **Die Heizfläche:** Die Größe eines Kessels drückt man aus durch seine Heizfläche (H in qm). Darunter ist nach § 3 der A. P. B. zu verstehen: „Der auf der Feuerseite¹⁾ gemessene Flächeninhalt der einerseits von den Heizgasen, andererseits vom Wasser berührten Wandungen.“

Direkte Heizfläche ist diejenige Kesseloberfläche, auf welche die Wärme durch Strahlung aus dem Feuer übertragen wird, im Gegensatz zur

indirekten Heizfläche, die nur durch Berührung mit den Verbrennungs-erzeugnissen Wärme aufnimmt.

Die Größe der für eine bestimmte Dampfleistung — D in kg für die Stunde — erforderlichen Heizfläche läßt sich praktisch am vorteilhaftesten berechnen nach den Erfahrungswerten für die Heizflächenbeanspruchung — $\frac{D}{H}$ — bei den einzelnen Kesselbauarten (siehe S. 764).

$$H = \frac{D}{\left(\frac{D}{H}\right)}$$

¹⁾ Bei Schiffskesseln „der auf der Wasserseite gemessene“ usw.

Für die Wahl der Bauart ist in modernen Anlagen sehr häufig der Platzbedarf, also das Verhältnis von Heizfläche zur Grundfläche des Kessels $\frac{H}{Gr}$ maßgebend:

Kesselbauart	$\frac{H}{Gr}$
Batteriekessel	1,7 bis 3,7
Flammrohrkessel, Einflammrohr	1,3 „ 2,1
Zweiflammrohr	1,9 „ 2,4
Dreiflammrohr	2,4 „ 2,7
Doppelkessel (unten: Zweiflammrohr-, oben Heizröhren-Kessel)	4,0 „ 11,5
Mac-Nicol-Kessel	3,4 „ 5,6
Liegender Feuerbuchskessel mit vorgehenden Heizröhren	2,6 „ 6
mit rückkehrenden Heizröhren	3,6 „ 13
Wasserrohr-Kammerkessel	3,2 „ 14
Wasserrohr-Steilrohrkessel	7 „ 15

Anhalt für die Wahl einer Kesselbauart kann auch die folgende Darstellung geben, in welcher die Heizflächenbeanspruchung $\frac{D}{H}$ und der Platzbedarf $\frac{H}{Gr}$ zusammengesetzt zu $\frac{D}{Gr}$, der stündlich über 1 qm Grundfläche erzeugten Dampfmenge, zur stündlichen Gesamtleistung des Kessels (Kesselgröße) in Beziehung gebracht ist. (Nach Münzinger, Z. Ver. deutsch. Ing. 1913.)

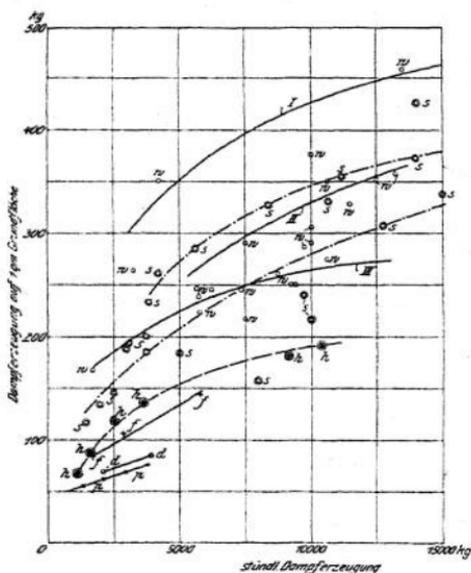


Fig. 62.

- Zweikammer-Wasserrohrkessel, I Hochleistungskessel der Schiffskesselbauart, II Hochleistungskessel, kurzrohrige mit Längsoberkesseln, III Gewöhnliche Zweikammerkessel,
- - - - ● - - - - Steilrohrkessel,
- - - - ⊙ - - - - Doppelkessel; unten Flammrohre, oben Heizröhren,
- - - - + - - - - Doppelkessel; unten Flammrohre, oben Flammrohre,
- - - - ○ - - - - Dreiflammrohrkessel,
- - - - ● - - - - Zweiflammrohrkessel.

b) Der Wasserraum, der im Betriebe mit Wasser angefüllte Teil des Kessels stellt wegen des großen Wärmeinhaltes, der in ihm aufgespeichert ist, für den Dampfkessel einen Spannungsregler dar. Die Eignung einer Kesselbauart für bestimmte Betriebsverhältnisse hängt deswegen nicht zum mindesten von der Größe seines Wasserraumes ab. Allgemein gilt, daß der Wasserraum groß zu wählen ist für stark schwankende Heizflächenbeanspruchungen des Kessels; daß dagegen ein kleiner Wasserraum die Schnelligkeit des Aufwehrens wesentlich

begünstigt. — Ohne eine scharfe Grenze zu ziehen, werden danach die verschiedenen Bauarten eingeteilt in:

Groß(wasser)raumkessel — hauptsächlich Walzen- und Flammrohrkessel — Kesselinnere zur Reinigung gut zugänglich, daher auch für härteres Wasser geeignet.

Klein(wasser)raumkessel — der größte Teil der Heizfläche besteht aus engen Röhren und zwar entweder aus:

Heizröhren (innen die Heizgase, außen das Wasser),

oder aus Siederöhren oder Wasserröhren (innen das Wasser, außen die Heizgase) —

Geringerer Platzbedarf, schnelle Betriebsbereitschaft.

c) Der Dampfraum, der für die Dampfansammlung im Kessel verfügbare Raum, soll verhindern, daß die mit dem Dampf emporgeschleuderten Wasserteilchen in die Rohrleitung gelangen. Besondere Vergrößerungen dieses Raumes durch Dom oder Dampfsammler; diese und Einbau siebförmiger Dampfnahmeröhren und ähnliches mehr begünstigen das Abscheiden mitgeführten Wassers aus dem Dampf.

d) Der Speiseraum wird begrenzt durch die Ebene des festgesetzten „Niedrigsten Wasserstandes“ und der des höchsten, der im Einzelfalle zulässig erscheint, ohne daß man ein Überkochen des Kesselinhaltes zu befürchten hat. Ein großer Speiseraum erleichtert es, vorausgesehene Perioden höchster Beanspruchung zu bewältigen und ferner ein zu hohes Ansteigen der Dampfspannung während der Betriebspausen zu vermeiden.

e) Die Verdampfungsoberfläche ist die jeweilige Trennungsfäche zwischen Wasser- und Dampfraum. Je größer diese Fläche im Verhältnis zur erzeugten Dampfmenge ist, um so weniger naß der Dampf.

2. Die gebräuchlichsten Kesselbauarten.

a) Die Walzenkessel.

Zylindrische Kessel, ohne irgend welche Einbauten. Sie werden nur noch als Batteriekessel (Fig. 63) verwendet.

Mehrere bis 10 m lange Walzen, von 600 ÷ 800 Durchm. und ÷ 1000 Durchm. für die Oberkessel, werden neben und übereinander gelagert. Ihre Verbindung geschieht durch senkrechte, bei den Unterkesseln am hinteren Ende außerdem noch durch wagerechte Stützen von 400 ÷ 500 Durchm. Besseren Wasserumlaufs wegen liegen die Unter- und die Mittel-Kessel etwas schräg. Gebräuchlichste Anzahl der Walzen: 4 und 6 in je zwei Reihen; 9 in drei Reihen übereinander. Quer zu den Oberkesseln liegt ein gemeinsamer Dampfsammler mit etwa gleichem Durchmesser wie die Oberkessel.

Heizflächengrößen: 50 bis 200 qm.

Feuerungen: Schrägrost, vielfach in Tenbrink-Quervorlagen; Treppenrost; Kettenrost.

Feuerzüge: Gase auf der ganzen Kessellänge durch senkrechte Kulissenwände mehrfach auf- und absteigend geführt.

Lagerung: Auf Kesselstühlen (siehe Fig. 64).

Speisung: In jeden Oberkessel gesondert.

Überhitzeranordnung: Liegender Überhitzer über den Oberkesseln, hinter $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{2}$ der Kesselheizfläche.

b) Die Flammrohrkessel.

Liegende Walzenkessel, die von einem Boden bis zum anderen durch ein oder mehrere weite Rohre, von 600 ÷ 1200 Durchm., durchzogen werden. Die fast ausnahmslos gewölbten Böden werden mit Ein- oder Aushalungen zur Aufnahme der Flammrohre versehen. Diese werden am häufigsten entweder glatt mit Adamson-Versteifungs-Ringen in den Schußverbindungen oder als Wellrohre ausgeführt. Der Dampf wird dem Dom entnommen, der entweder auf dem mittelsten oder dem nächsten nach hinten folgenden Mantelschuß aufgenietet wird.

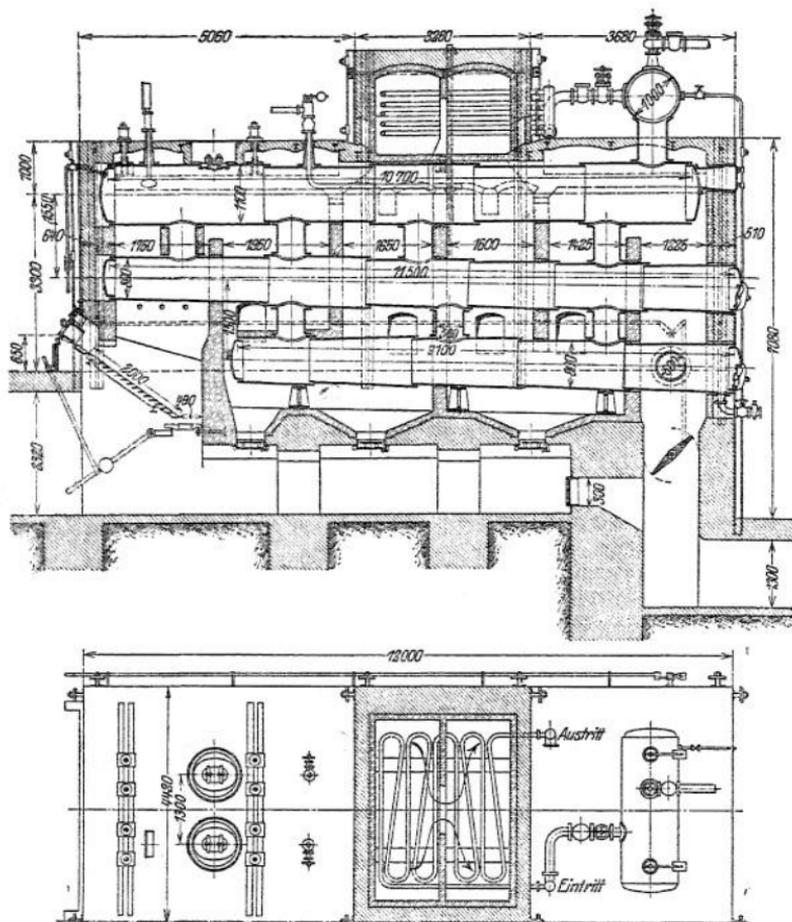


Fig. 63.

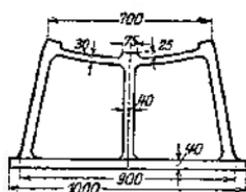


Fig. 64.

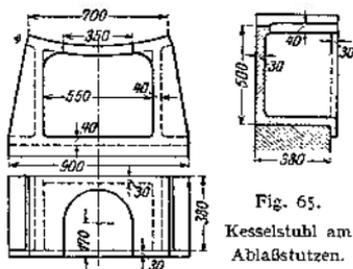


Fig. 65.

Kesselstuhl am
Abläßstutzen.

Heizflächengrößen: 20 bis 250 qm.

Feuerungen: Planrost-Innenfeuerung
von Hand oder als mechanische Wurffeuerung.

Ferner: Cario-Unterschub-, Fränkel-Feuerung und Treppenrost-Vorfeuerung.

Feuerzüge: I. Zug: Flammrohr; II. Zug: a) ein Seitenzug oder b) zwei Seitenzüge oder
c) Unterzug; III. Zug: a) ein Seitenzug oder b) Unterzug oder c) zwei Seitenzüge.

Lagerung: Auf Kesselstühlen (Fig. 64 und 65).

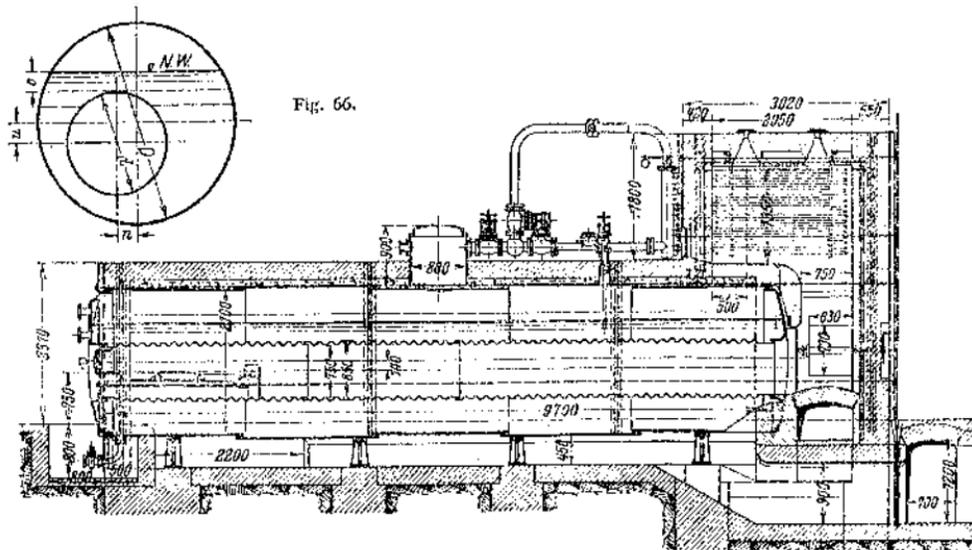


Fig. 66.

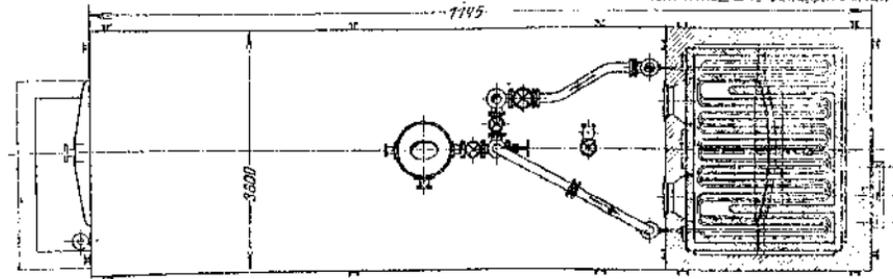
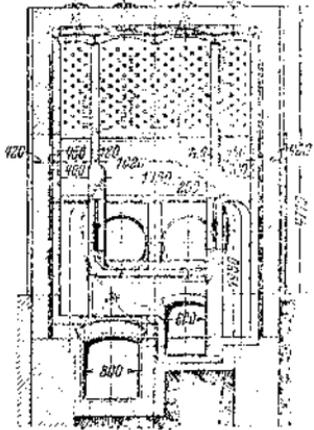


Fig. 67

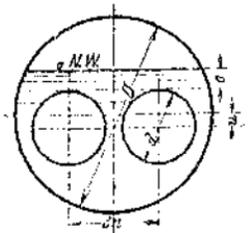


Fig. 68.

Speisung: Am besten von der vorderen Stirnwand aus, da hierbei das Speiseventil am Heizerstande. Sonst auch vielfach vom oberen Scheitel eines hinteren Mantelschusses aus.

Überhitzeranordnung: Liegender Überhitzer am hinteren Kessellende, Heizgase steigen zu diesem aus den Flammrohren auf. — Weniger häufig hängender Überhitzer hinter die Flammrohre eingebaut, dann im allgemeinen nicht ausschaltbar.

Einflamrohrkessel: Für Heizflächen bis zu etwa 50 qm, für größere besser Zweiflamrohrkessel, die den Vorteil größeren Dampfdruckes und gleichmäßigerer Dampfentwicklung (2 getrennte Feuerungen!) besitzen.

Flammrohranordnung: Fig. 66.

Durch die Seitrohranordnung wird das Kessellinnere besser zugänglich, dazu soll auch die Laufschiene beitragen.

Im allgemeinen wird gewählt für H qm Heizfläche: in m: $D = 0,26 \cdot \sqrt{H}$; $d = 0,5 D$; $u = 0,1 \cdot D$; $n = 0,1 D$; $o = 0,1 D + 0,01$ und wegen der Befahrbarkeit $D \geq 1,4$ m.

d bezeichne bei Wellrohren den mittleren Durchmesser. Ihre Heizfläche wird zu etwa 14% größer gerechnet als die des glatten Rohres vom inneren Durchmesser d .

Zweiflamrohrkessel (Fig. 67) für H bis etwa 100 qm.

Flammrohranordnung: Fig. 68.

$D = 0,24 \cdot \sqrt{H}$; $d = 0,5 D - (0,25 \div 0,3)$; $u = 0,1 D - 0,07$; $2n = 0,5 \cdot D - (0,075 \div 0,06)$; $o = 0,1 D + 0,02$; $D \geq 1,8$ m.

Dreiflamrohrkessel: Für H bis 250 qm. Ungefähre Abmessungen: $D = 2,3 \div 3,0$ m; $d_o = 0,8 \div 1,1$ m für die oberen Rohre; $d_u = 0,7 \div 1,0$ m für das untere Rohr. Wegen schlechterer Zugänglichkeit des Kessellinnern haben sie nicht die weite Verbreitung gefunden wie die anderen Flammrohrkessel.

c) Zusammengesetzte Kessel.

Die mannigfachen Bauarten dieser Kessel sind entweder aus dem Bestreben hervorgegangen, auch bei Verwendung von Großraumkesseln größere Heizflächen auf kleiner Grundfläche unterzubringen oder aus der Absicht, die Vorteile

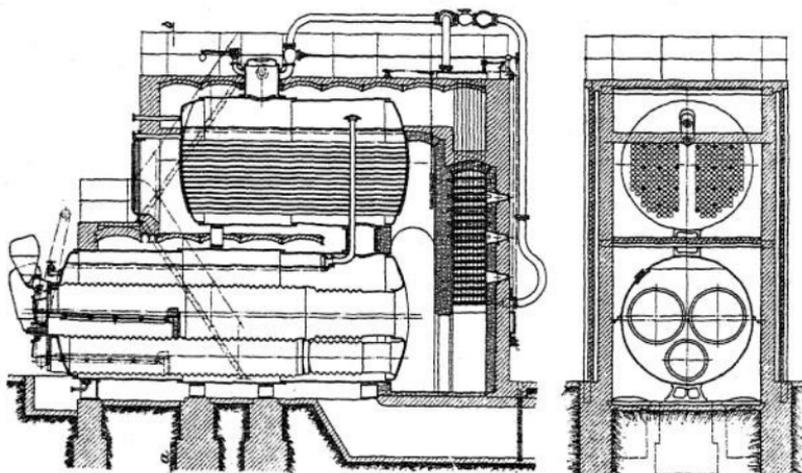


Fig. 69.

des Großraumkessels mit denen des Kleinraumkessels in einer Bauart zu vereinigen. Von den so entstandenen Kesseltypen sind besonders zwei auch heute noch von größerer Bedeutung.

Der Doppelkessel (Fig. 69). Am häufigsten so ausgeführt, daß über einen Zwei- oder Dreiflamrohrkessel ein Heizröhrenkessel gelegt wird. Beide Kessel

durch einen senkrechten Stutzen verbunden, und zwar so, daß die getrennten Dampfäume durch ein weites Dampfrohr und die Wasserräume durch einen Überlauf aus dem Ober- in den Unterkessel miteinander in Verbindung stehen. Fig. 69 zeigt einen Doppelkessel, bei dem nur die Dampfäume getrennt sind. Das Überlaufrohr, in dem Kesselsteinansatz leicht zu Verstopfungen führen kann, wird hierbei vermieden (siehe auch Fig. 70).

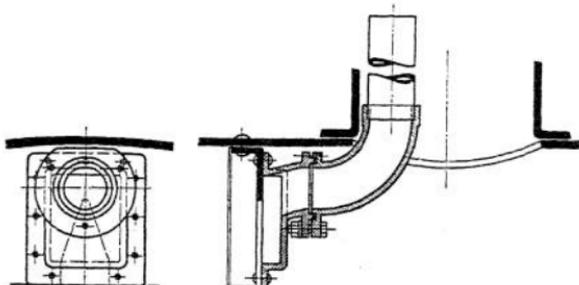


Fig. 70. Stutzen im Unterkessel zur Verbindung der beiden Dampfäume

Gebräuchliche Abmessungen:

Durchmesser des Unterkessels für H bis 250 qm:

Zweiflammrohrkessel: $1,9 \div 2,4$ m,

für größere Heizflächen:

Dreiflammrohrkessel: $2,4 \div 3,2$ m,

Durchmesser des Oberkessels: etwa gleich dem des Unterkessels,

Länge des Oberkessels: $1 \div 1,2$ m kürzer als die des Unterkessels,

Stutzendurchmesser: $500 \div 1000$ mm.

Heizflächengrößen: $100 \div 400$ qm, ausnahmsweise bis 700 qm.

Feuerungen: Planrost-Innenfeuerung, vereinzelt auch Treppenrost-Vorfeuerung.

Feuerzüge: I. Zug: die Flammrohre; II. Zug: die Heizröhren; III. Zug: am Mantel des Oberkessels; IV. Zug: zwei Seitenzüge am Unterkessel; V. Zug: Unterzug am Unterkessel.

Lagerung: Oberkessel ruht durch den Stutzen und durch 1 bis 2 gußeiserne Lagerböcke (zum Teil auf Rollen verschiebbar) auf dem Unterkessel, dieser wiederum auf 3 bis 4 Kesselstützen. Speisung: Ober- und Unterkessel erhalten je eine besondere Speisung; der erstere vom Mantel, der letztere von der vorderen Stirnwand aus.

Überhitzeranordnung: Überhitzer, meist mit liegenden Rohrstrahlen, ausschaltbar hinter dem Kessel eingebaut, so daß ihn die Gase zwischen Flammrohraustritt und Heizröhren eintritt bestreichen.

Der Mac Nicol-Kessel (Abb. 71) stellt die Vereinigung eines Zweikammerwasserrohrkessels mit einem mehrfachen Walzenkessel dar. Dadurch wird erreicht: schneller Wärmeausgleich im Kessel beim Anfeuern durch guten Wasserumlauf und andererseits geringe Empfindlichkeit gegen plötzlich gestiegene Dampfbildung. —

An die hintere Wasserkammer eines Kammerkessels (vergl. Fig. 80) sind 2 Walzenkessel angehängt, die als Untersieder durch je einen schrägen Stutzen mit dem nach hinten verlängerten Oberkessel des Wasserrohrkessels verbunden sind.

Gebräuchliche Abmessungen:

Oberkessel: $1,4 \div 1,8$ m Durchm.; $10 \div 11$ m lang,

Unterkessel: $0,8 \div 1,1$ m Durchm.; $6 \div 7$ m lang,

Wasserrohre: $87,5/95$ mm Durchm.; $4 \div 4,5$ m lang, je 14 bis 21 Stück in 6 bis 9 Reihen übereinander;

Verbindungsstutzen: 500 bis 600 mm Durchm.

Heizflächengrößen: $H = 150 \div 350$ qm.

Feuerungen: Planrost-, Schrägrost- und Treppenrostunterfeuerungen. Von mechanischen besonders: Kettenrost.

Feuerzüge: I. Zug: An den Wasserrohren (durch eingelegte Mauerzungen ziehen die Gase einmal nach hinten und wieder nach vorn). II. Zug: Am Mantel des Oberkessels von vorn nach hinten. III. Zug: In zwei Kanälen getrennt an den außen liegenden Mantelhälften der beiden Unterkessel nach vorn. IV. Zug: Wieder vereinigt, an den innen liegenden Mantelhälften der Unterkessel nach hinten. Oder: II. Zug: Am Mantel des Oberkessels nach hinten; aber nur

bis auf etwa die halbe Kessellänge. III. Zug: durch Kulissenwände abwärts zu den Unterkesseln, wieder aufsteigend zum Oberkessel und dann zum Fuchs abfallend geführt.

Lagerung: Wasserkammern auf gußeisernen Unterlagstücken. Unterkessel auf je zwei Kesselstühlen. Ferner Gewicht des Oberkessels nahe dem vorderen Ende durch ein umgelegtes Band auf zwei über dem Kessel quergelagerte \square -Schienen übertragen.

Speisung: Von der vorderen Stirnwand des Oberkessels aus. Ventilspindel vorteilhaft bis zum Heizerstand nach unten verlängert.

Überhitzeranordnung: Liegende Überhitzer zu beiden Seiten des Oberkessels am Anfang des II. Zuges eingebaut.

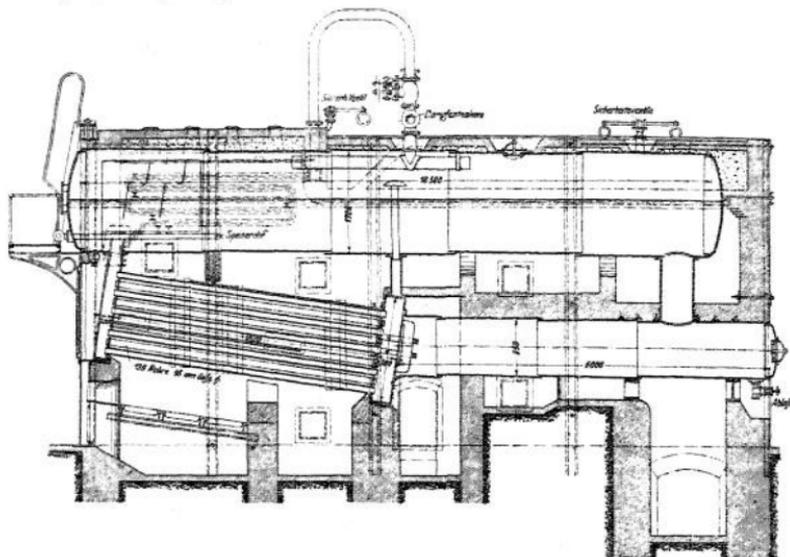


Fig. 71.

d) Feuerbüchskessel

machen den Heizröhrenkessel (einen Walzenkessel, in den, vom vorderen zum hinteren Boden durchgehend, viele Heizröhren eingebaut sind) für Innenfeuerung geeignet. Entsprechend den sehr verschiedenen Verwendungszwecken dieser Kessel wurde der Kesselteil, der zur Aufnahme der Feuerung dient, die Feuerbüchse, mannigfach gestaltet. Hauptsächlich jedoch finden sich zwei Formen: quaderförmige (Feuerkisten) und runde, flammrohrartige.

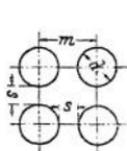


Fig. 72.

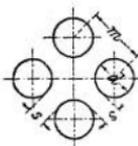


Fig. 73.

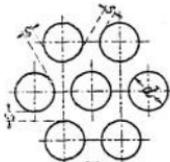


Fig. 74.

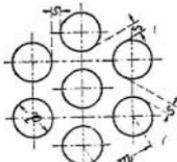


Fig. 75.

Die Rohranordnung zeigt folgende Verschiedenheiten: Rohrmitten in den Ecken von Quadraten (Fig. 72 und 73), findet sich vor allem bei nicht ausziehbaren Kesseln, deren Inneres nur durch Auswaschen gereinigt werden kann. Die Röhren sind dabei zwar nur in zwei Richtungen zugänglich, doch haben die Spalten zwischen den Rohrreihen die volle Breite der Stegstärke $s = m - d$.

Rohrmitten in den Ecken regelmäßiger Sechsecke: (Fig. 74 und 75).

Diese Anordnung gewährt den Vorteil, daß man auf kleinem Raum eine größere Anzahl einbauen kann, außerdem Zugänglichkeit von 3 Richtungen, Spaltweite dabei allerdings geringer = 0,87 m — *d*. Sie genügt jedoch zur Reinigung der Röhren mittels Meißel oder Kette bei Rohrsystemen, die sich dazu aus dem Kessel herausziehen lassen.

Die Anordnungen nach Fig. 72 und 75 haben ferner den Vorzug, daß sie den Dampfblasen schnelles Emporsteigen ermöglichen.

Für alle Anordnungen gilt:

$$m = (1,25 \div 1,5) d \text{ und } s \geq 20 \text{ mm.}$$

Liegende Feuerbüchskessel mit vorgehenden Heizröhren werden hauptsächlich, ihres verhältnismäßig geringen Gewichtes und ihrer Unempfindlichkeit gegen Erschütterungen wegen, als Lokomotiv- (Fig. 76), Lokomobil- (Fig. 77) und Dampfpluggessel, seltener als Schiffskessel angewendet; aber auch als fest-

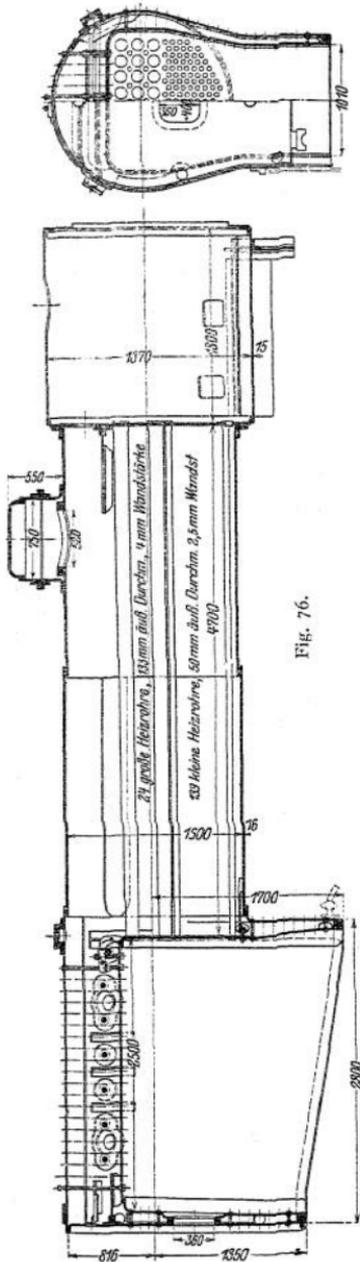


Fig. 76.

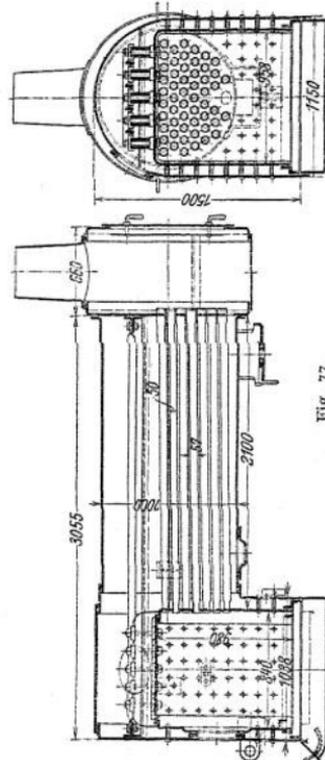


Fig. 77.

stehende Kessel (Fig. 78) haben sie weite Verbreitung gefunden. — An einem stehenden, vierckigen Kesselteil, die äußere Feuerbüchse, schließt sich ein liegender zylindrischer Kessel, der Langkessel an. Diesem ist die Rauchkammer vorgebaut. Die quaderförmige Feuerbüchse ist in die äußere Feuerbüchse so eingebaut, daß sich zwischen beiden eine 70 bis 100 mm starke Wasserschicht befindet. Eine große Zahl von Heizröhren durchziehen von der Feuerbüchse aus den Langkessel. —

Wenn statt der eckigen eine runde Feuerbüchse eingesetzt wird, dann kann der Kesselmantel in seiner ganzen Länge zylindrisch gemacht werden. Diese einfache Kesselform ermöglicht durch Anwendung geeigneter Schraubenverbindungen an den Stirnböden Ausziehbarkeit der Feuerbüchse samt dem Rohrsystem.

Fig. 76 stellt den bisher fast ausschließlich benutzten Lokomotivkessel dar, den man erst in neuerer Zeit durch andere Bauarten (Anwendung von Wasserrohren) zu ersetzen bestrebt ist. (Brotan-, Jacobi-, Strohmänn-Kessel).

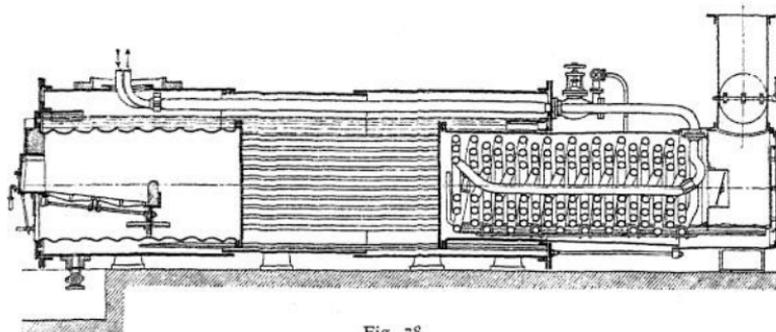


Fig. 78.

Gebrauchliche Abmessungen:

- Äußere Feuerbüchse: 600 ÷ 2800 mm lang und 700 ÷ 2300 breit.
- Innere Feuerbüchse: Auf den öffentlichen Eisenbahnen Europas allgemein aus Kupfer; sonst aus Flußeisen hergestellt. 450 ÷ 2600 lang und 550 ÷ 2200 breit.
- Langkessel: 700 ÷ 1900 mm Durchm. bei 2 ÷ 5 m Länge.
- Heizröhren: 50 bis 350 Stück, $25_{40} \div 45_{50}$ Durchm., 2,1 ÷ 5,2 m lang.
- Dom: mit abnehmbarem Oberteil, 250 ÷ 800 Durchm., 0,4 ÷ 1 m hoch.
- Heizflächengrößen: $H = 15 \div 280$ qm.
- Feuerungen: Planrost-Innenfeuerung für Handbeschickung und Ölfuehrungen.
- Feuerzüge: Nur 1 Zug: aus der Feuerbüchse durch die Heizröhren in den Schornstein.
- Lagerung: Kessel starr mit dem Maschinenrahmen verbunden, der sich unter Zwischenschaltung von Federn auf die Radachsen stützt.
- Speisung: In den Langkessel seitlich etwa in Höhe der Kesselmitte nahe an der Rauchkammer.

Überhitzeranordnung: Rauchkammer- oder Rauchrohrüberhitzer.

Fig. 77 zeigt den für fahrbare Lokomobile (Dampfmaschine auf dem Kessel aufgebaut) am meisten verwendeten Kessel.

Gebrauchliche Abmessungen:

- Äußere Feuerbüchse: 700 ÷ 1300 mm lang, 800 ÷ 1500 breit.
- Innere Feuerbüchse: 500 ÷ 1100 mm lang, 650 ÷ 1300 breit.
- Langkessel: 700 ÷ 1100 mm Durchm., 1,5 ÷ 2,5 m lang.
- Heizröhren: 25 bis 100 Stück, $51/57 \div 57/63$ Durchm., 1,6 ÷ 2,7 m lang.
- Heizflächengrößen: $H = 10 \div 50$ qm.
- Lagerung: Starr mit den Radachsen verbunden.
- Überhitzer: fehlt bis auf wenige Ausnahmen, wo Rauchkammerüberhitzer eingebaut.

Fig. 78. Ausziehbarer Kessel, der ebenfalls mit oben aufgestellter Dampfmaschine als fahrbarer, namentlich aber als feststehender Kessel weit verbreitet ist. Letzteres verdankt er dem geringen Raumbedarf und den niedrigen Aufstellungskosten für Kessel und Maschine. Außerdem läßt sich sein Hauptmangel: der durch die geringe Zuglänge bedingte etwas höhere Schornsteinverlust, durch Einbau eines Überhitzers wirksam einschränken, im übrigen

wird er durch den fehlenden Spannungsabfall des Dampfes zwischen Kessel und Maschine aufgewogen.

Gebräuchliche Abmessungen:

Mantel: $1 \div 2,3$ m Durchm., $2,5 \div 6,5$ m lang.

Feuerbüchse: $0,6 \div 1,2$ m Durchm., $1 \div 3$ m lang.

Heizröhren: 30 bis 120 Stück von $51/57 \div 64/70$ mm Durchm.

Heizflächengrößen: $H = 10 \div 120$ qm.

Feuerungen: Planrost-Innenfeuerung für Hand- oder mechanischen Betrieb. Treppenrost-Vorfeuerung (vgl. Fig. 5).

Feuerzüge: In einigen Fällen schließt sich an den I. Zug durch das Kesselinnere als II. Zug ein Unterzug an.

Lagerung: Auf 2 bis 3 Paar angelegten Tragfüßen.

Speisung: Am Kesselmantel, etwa 200 mm unter N.W., nahe am vorderen Stirnboden.

Überhitzeraordnung: Rauchkammer-Spiralrohrüberhitzer.

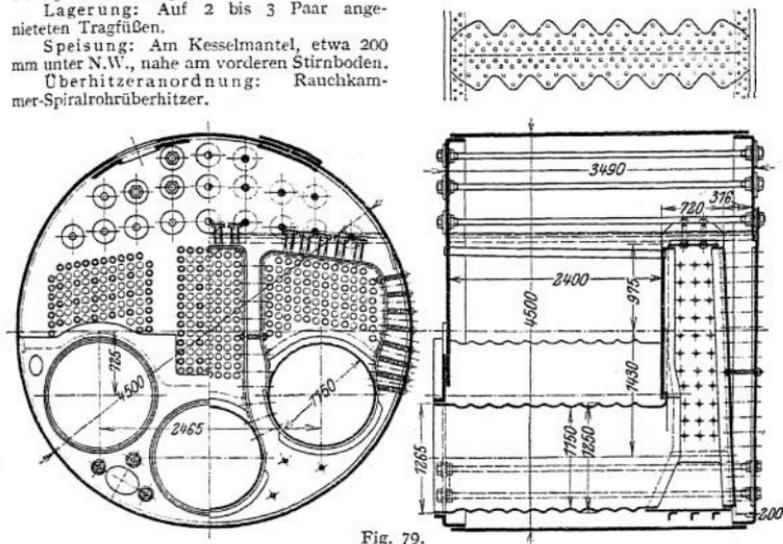


Fig. 79.

Liegende Feuerbüchskessel mit rückkehrenden Heizröhren (Fig. 79) kommen als Schiffskessel bei der Handelsmarine zur Verwendung, während sie auf den Fahrzeugen der Kriegsmarine, wo es ganz besonders auf schnelles Anfeuern und geringen Platzbedarf ankommt, durch Wasserrohrkessel verdrängt wurden. —

In einem kurzen zylindrischen Kessel mit ebenen Böden werden 1 bis 4 flammrohrartige Feuerbüchsen eingebaut. An diese schließen sich Wendekammern an, deren dem Heizerstande zugekehrte ebenen Wände durch nach vorn wenig ansteigende Heizröhren mit dem vorderen Kesselboden verbunden sind. Für große Heizflächen: „Doppelender“, die von beiden Stirnseiten aus befeuert werden. Die Wendekammern sind dabei gewöhnlich für die jetzt nach beiden Stirnböden zu gelegenen Heizröhren gemeinsam.

Gebräuchliche Abmessungen:

Mantel: $1,2 \div 5$ m Durchm., $1,8 \div 3,5$, bei Doppelendern $\approx 6,5$ m lang.

Flammrohr-Feuerbüchse: $0,5 \div 1,2$ m Durchm., $1 \div 2$ m lang.

Wendekammern: Bei 4 Feuerbüchsen für die beiden mittleren eine gemeinsame, sonst für jede Feuerbüchse eine besondere Wendekammer. Tiefe der Kammer $400 \div 700$ bei Doppelendern $\div 1300$ mm.

Heizröhren: 40 bis 400, Doppelender bis 900 Stück. $57/63 \div 80/89$ mm Durchm.

Heizflächengrößen: $H = 10 \div 300$, Doppelender $\div 600$ qm.

Feuerungen: Planrost-Innenfeuerung. Ölfeuerung.

Feuerzüge: I. Zug: durch die Feuerbüchsen zu den Wendekammern. II. Zug: durch die Heizröhren wieder nach vorn zurück.

Lagerung: Auf 2 bis 6 Paar angelegten Lagerböcken, die mit den Spanten oder den Bodenstücken verbunden werden.

Speisung: Speiseventile an der vorderen Stirnwand neben den Feuer Türen. Jedoch wird das Wasser durch anschließende Röhren im Kesselinnern so geführt, daß es etwa 150 mm unter N. W. austritt.

Überhitzeraordnung: Rauchkammer- oder Rauchrohrüberhitzer.

Die stehenden Feuerbüchskessel werden gewöhnlich für Heizflächen bis zu 30 qm (Dampframme, Dampffeuerspritze u. a.), in einigen besonderen Fällen bis zu 100 qm (Hilfskessel auf Schiffen) in recht verschiedenen Ausführungen gebaut. Die allgemeinere Bedeutung, die sie früher als Kessel für Kleinbetriebe hatten, kommt ihnen nicht mehr zu. Ihre Anwendung wird sich immer mehr auf bestimmte Fälle beschränken, in denen es vor allem auf ganz geringen Platzbedarf für den Kessel ankommt und man die großen Mängel dieser Kesselbauart, sehr kleine Verdampfungsoberfläche, schwierige Reinigung des Kesselinnern, hoher Schornsteinverlust, in den Kauf nehmen muß.

c) Die Wasserrohrkessel

oder engröhrigen Siederohrkessel haben sich ihrer vielen Vorzüge wegen die weiteste Verbreitung verschafft. Besonders zeichnen sie sich durch niedrigen Preis, geringen Platzbedarf und schnelle Betriebsbereitschaft aus. Dazu kommt, daß sie den Bau sehr großer Kesseleinheiten und damit die Herstellung übersichtlicher und leichter zu wartender Großanlagen ermöglichen. Mit (Hochleistungs-) Wasserrohrkesseln sind Heizflächenbeanspruchungen und Wirkungsgrade erzielt worden, welche die Ergebnisse der besten Großraumkessel erreichen. —

Der wesentliche Bestandteil der Kessel bildet ein Bündel gerader oder gekrümmter Wasserröhren. Gerade Röhren lassen sich besser reinigen als gekrümmte, die aber gegen ungleiche Erwärmung der einzelnen Röhren weniger empfindlich sind. — Die Hauptunterschiede zwischen den einzelnen Bauarten bestehen in der Lage der Röhren und in der Art der Verbindung der Rohrenden miteinander.

Die am meisten ausgeführte Bauart hat schwach gegen die Wagerechte geneigte Röhren.

Gliederkessel. Die Enden der Wasserröhren werden durch Rohrkrümmer miteinander verbunden, so daß sich die Kessel aus Einzelteilen geringer Abmessung leicht zusammensetzen lassen. Deswegen eignen sich diese Kessel zur Aufstellung an schlecht zugänglichen Orten. Leider ist der erzeugte Dampf, namentlich wegen des weiten Weges der Dampfblasen zum Dampfraum, sehr naß. Wahrscheinlich würden daher die Gliederkessel wohl nur für den vorgenannten Fall zur Anwendung kommen, wenn nicht durch eine besondere, nur auf sie zutreffende, gesetzliche Bestimmung, ihre Aufstellung über oder unter Räumen, in denen sich häufiger Menschen aufhalten pflegen, gestattet wäre. Dies ist, ohne Begrenzung der Betriebsspannung und der Heizfläche nach § 15 der A. P. B. zulässig für Kessel, die ausschließlich aus Wasserröhren und Verbindungsstücken von weniger als 100 mm Lichtweite zusammengesetzt sind, auch wenn sie mit weiterem Schlammfänger und Dampfsammelrohr versehen sind.

Kammerkessel. Das Röhrenbündel endet in einer gemeinsamen Wasserkammer. Diese ist ebenwandig und steht senkrecht zu den Röhren, so daß die Rohrenden in der dem Bündel zugekehrten Kammerwand eingewalzt werden können, da in der gegenüberliegenden Wand vor jedem Rohr eine Öffnung — Putzloch — angebracht ist. Die Wasserkammern werden mit einem oder zwei über dem Rohrbündel längsliegenden Oberkessel verbunden.

Einkammerkessel. Nur die vorderen Rohrenden sind in einer Wasserkammer eingewalzt. Am hinteren Ende ist jedes Rohr für sich verschlossen (Field-Rohr). Zur Erzeugung geordneten Wassercirculations ist in jedes Wasserrohr ein engeres Umlaufrohr eingesetzt und die Wasserkammer zur Aufnahme dieser Umlaufrohre mit einer Zwischenwand versehen. — Dem Vorteile dieser Bauart — freie Ausdehnung der einzelnen Röhren — stehen so erhebliche Nachteile entgegen, schwierige Reinigung, Durchbrennen der Wasserröhren bei verbogenem Umlaufrohr oder durch mangelhafte Wasserzuführung besonders bei höheren Beanspruchungen, daß sich der Einkammerkessel wenig eingeführt hat.

Zweikammerkessel (Fig. 80) haben sich bisher am besten bewährt. — Auch an den hinteren Rohrenden ist hier eine Wasserkammer angebracht, wodurch der Wassercirculation wesentlich begünstigt wird.

Gebrauchliche Abmessungen:

Wasserröhren: bis zu 400 Stück, 95/88,5 mm Durchm., in den untersten Rohrreihen 95/87 mm Durchm., 5 m lang. Rohranordnung Fig. 74. Wagerechte Entfernung der Rohrmitten 150 ÷ 171 mm. Senkrechter Abstand der Rohrreihen 130 ÷ 150 mm. Rohrsteigung 1 : 5 bis 1 : 3,5. Anzahl der wagerechten Rohrreihen 4 ÷ 12.

Wasserkammern: durch Einschweißen eines Rahmenbleches zwischen die Rohr- und die Putzlochwand hergestellt. Abstand dieser Wände voneinander am besten in beiden Kammern gleich, und zwar $150 \div 350$ mm. Breite $1,2 \div 4$ m bei Anschluß an einen Oberkessel und bis 6 m bei zwei Oberkesseln.

Anschlußstutzen: Querschnitt möglichst groß, mindestens $\frac{1}{4}$ des Gesamtrührquerschnittes.

Oberkessel: Wagrecht oder wenig nach hinten geneigt. Bis zu etwa 250 qm Heizfläche: 1 Oberkessel von $700 \div 1800$ mm Durchm., $5 \div 7$ m lang. Bei größeren Heizflächen: 2 Oberkessel von $1 \div 1,5$ m Durchm. — N. W. liegt etwa in Kesselmitte oder wenig darunter.

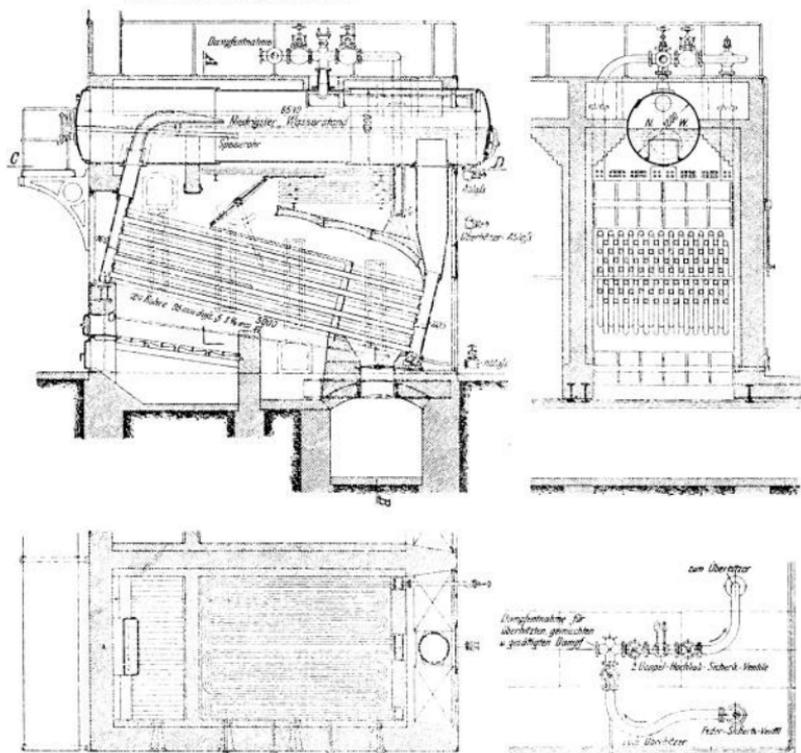


Fig. 80.

Heizflächengrößen: $H = 16 \div 500$ qm.

Feuerungen: Unterteuerung mit Planrost, Schrägrost, Treppenrost. Von mechanischen Feuerungen besonders Kettenrost.

Feuerzüge: Je nach der Lage der zwischen den Röhren eingebauten Platten werden die Gase entweder in Horizontalzügen (parallel zu den Röhren) und in Vertikalzügen (senkrecht zu den Röhren) zum Fuchs geführt. Mit Horizontalzügen läßt sich im allgemeinen eine größere Zuglänge erreichen, während sich mit Vertikalzügen besser die Abstufung der Zugquerschnitte durchführen läßt.

Lagerung: Das Kesselgewicht kann durch die Wasserkammern auf das Mauerwerk übertragen werden. Dabei wird die vordere Kammer fest, die hintere beweglich auf Rollen (Fig. 81) oder pendelnd gelagert. Unter diesen Auflagern eingezogene Träger dienen zur Entlastung der Bögen über den Türöffnungen bzw. über dem Fuchskanal. — Für die freie

Ausdehnung der Röhren ist es jedoch vorteilhaft, wenn das Kesselgewicht wenigstens an

Fig. 81.

gefangen wird durch Aufhängung des Oberkessels an Querträgern, die sich auf genietete, in den Mauerwerksecken aufgestellte Ständer stützen.

Speisung: Von der vorderen Stirnwand des Oberkessels aus.

Überhitzeranordnung: Meistens zwischen Rohrbündel und Oberkessel, seltener vorn zu beiden Seiten des Oberkessels.

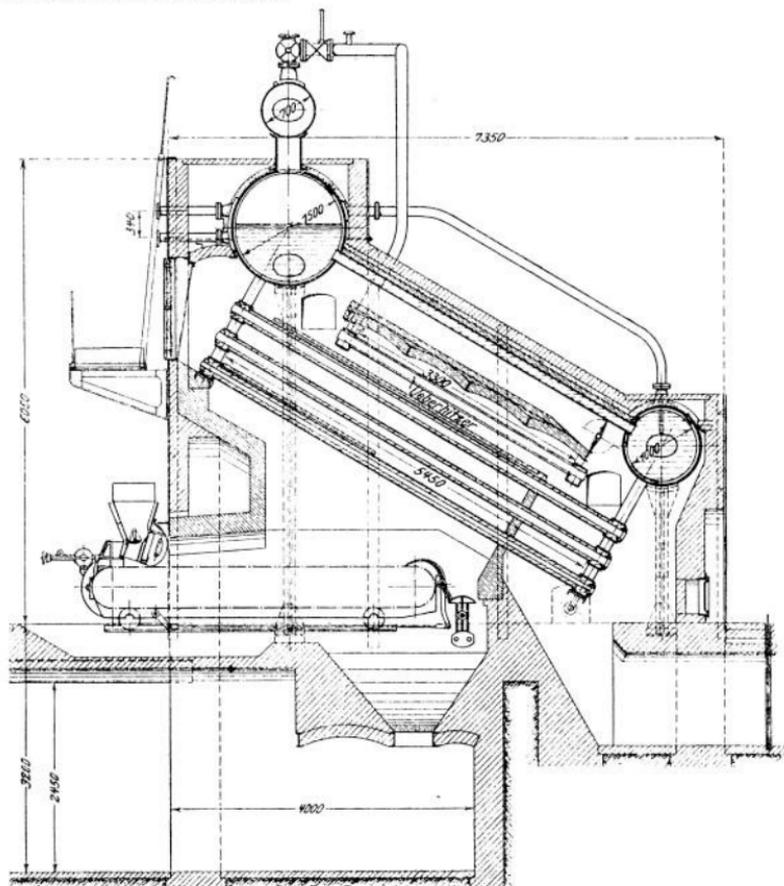


Fig. 82.

Teilung der Wasserkammern in Sektionen ist zwecks Herstellung der Kammersektionen als Massenerzeugnis mitunter gebräuchlich; aber ohne besonderen Vorteil für die Bauart oder Wartung des Kessels. Erst neuerdings ist dies bei dem Sektions-

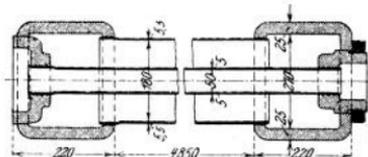


Fig. 83.

kammerkessel von Glogner dadurch erreicht worden, daß die vielen Putzlochverschlüsse durch eine bedeutend geringere Anzahl einfacher Rohrverschraubungen ersetzt wurden.

Glogner-Kessel (Fig. 82). Wagerechte Kammersektionen. Etwa unter 30° ansteigende Wasserröhren von 190 mm Durchm. Innenröhren, 60 Durchm. in der untersten Reihe, sonst 100 Durchm. Diese werden mittels einer Verschraubung dicht gesetzt (Fig. 83). — Beheizt werden sowohl die Außen- wie auch die

Innenröhren, ferner beide Seiten der Wasserkammern. — Vom hinteren Oberkessel gehen zwei im Mauerwerk liegende Wasserzuführungsrohre zur untersten Sektion der hinteren Wasserkammer.

Hochleistungskammerkessel. Die früher mit Kammerkesseln erzielten Dauerleistungen von etwa 18 kg Heizflächenbeanspruchung hat man bei den Hochleistungskesseln auf 25 kg durch folgende Mittel steigern können:

1. Anwendung einer Feuerung, die eine gleichmäßige und hohe Temperatur im Feuerraum ermöglicht (Kettenrost).
2. Verringerung der Verluste durch Strahlung und durch Einsaugen falscher Luft. Sorgfältigste Ausführung des Mauerwerks, Entlastung desselben vom Kesselgewicht. Vereinigung von Kessel- und Vorwärmer-Mauerwerk.
3. Verbesserung der Wärmeübertragung von Heizgas auf Kesselwand durch hohe Gasgeschwindigkeit in den Zugkanälen und gute Durchwirbelung der Heizgase. Ersteres erfordert größere Zugstärken, letzteres ist nur durch mehrfache Richtungsänderung der Heizgase, am besten in Vertikalzügen, zu erreichen. Beides erhöht somit den Zugwiderstand und führt zur ausgedehnten Anwendung künstlichen Zuges.

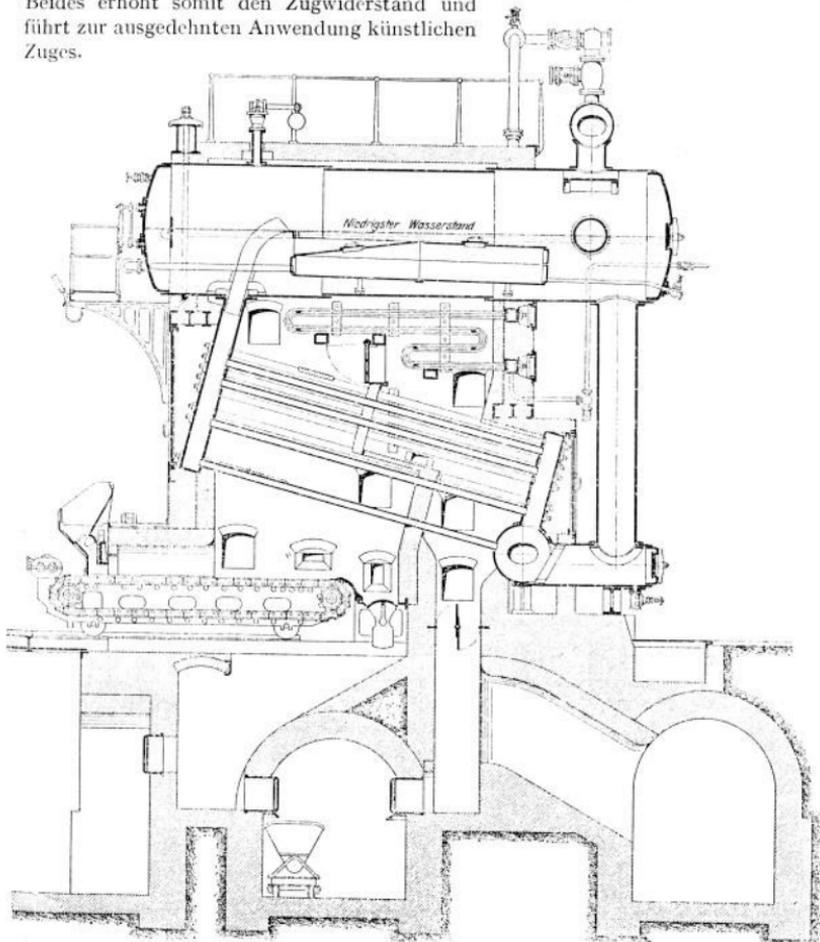


Fig. 84. Ausführung: Augsburg-Nürnberg A.-G.¹⁾

¹⁾ R. Spalckhaver und Fr. Schneiders, Die Dampfkessel nebst ihren Zubehörs- und Hilfsrichtungen. Berlin 1911. Julius Springer. Taschenbuch.

4. Verbesserung der Heizgasführung. Alle Teile der Heizfläche sollen im Gasstrom liegen.

5. Verringerung des Schornsteinverlustes nicht durch Vergrößerung des Gasweges an der Kesselheizfläche, sondern durch Ausnützung der Abgaswärme im Ekonomiser.

6. Übertragung der Wärme auf die Kesselwandung möglichst durch Strahlung aus dem Feuer. Dazu eignen sich breite Kessel am besten, weil bei ihnen recht große Rostflächen unterhalb des Kesselkörpers untergebracht werden können.

7. Verbesserung des Wasserumlaufes durch Verkürzung des Umlaufweges und Verringerung der Umlaufwiderstände. Außerdem kürzere Wasserröhren — gewöhnlich auf 4,5 m vereinzelt bis auf etwa 3 m verkürzt — in größerer Anzahl. Besondere Wasserzuführung zu den beiden untersten Rohrreihen. Reichliche Querschnitte in den Kammeranschlüssen.

8. Sorgfältige Trennung des Dampfes von dem infolge der erhöhten Umlaufgeschwindigkeit reichlicher mitgerissenen Wasser. Besondere Einbauten in die Oberkessel, Dampfentnahmerohre und vor allem reichlich bemessene Überhitzer.

Neuere Hochleistungskessel zeigen die Fig. 84, 85 und 86.

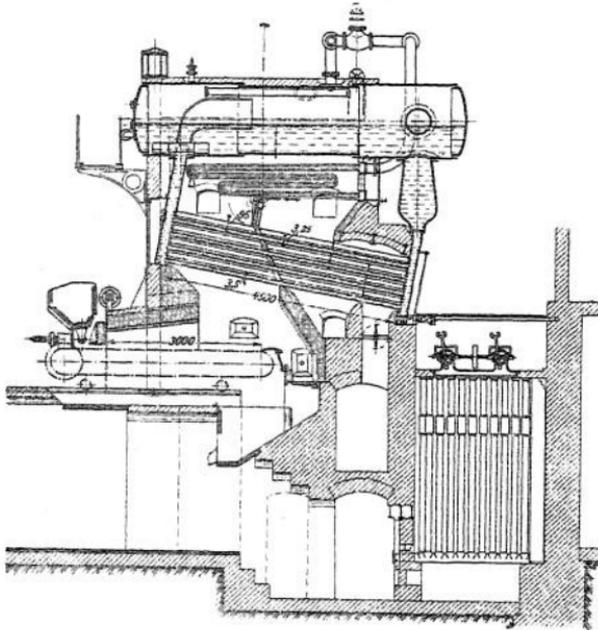


Fig. 85.

Die Steilrohrkessel stellen gegenüber den Kammerkesseln in vielen Beziehungen einen Fortschritt dar, einmal durch die Einführung der steilgestellten Röhren, die den Umlauf verbessern und an denen sich außen keine Asche und innen kein Schlamm ablagern kann, vor allem jedoch durch die Vermeidung der Wasserkammern mit ihren vielen Verankerungen und Putzlochverschlüssen. An ihre Stelle treten einfache, gut befahrbare Walzenkessel, die noch dazu einen besonderen Oberkessel entbehrlieh machen.

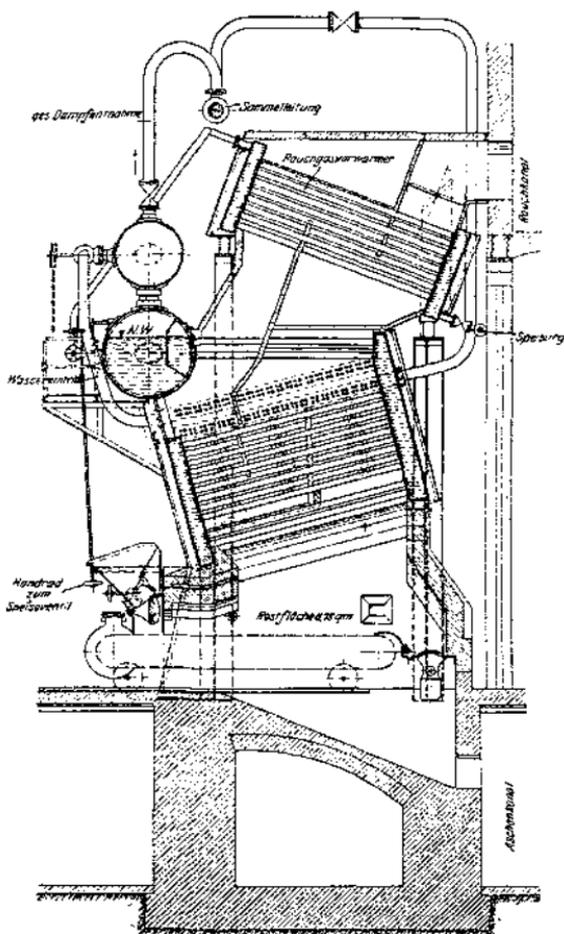


Fig. 86. Ausführung: Borsig.

Der Garbe-Kessel (Fig. 87 und 88). In die Walzenkessel sind Garbe-Stufenplatten eingietet. Ihre Form macht sie steif, läßt die Befestigung gerader Röhren in zur Rohrriechtung senkrechten Wänden zu und ermöglicht die leichte Auswechslung eines jeden Rohres.

Von seinen verschiedenen Ausführungen haben sich die Bauarten mit einem schräggestellten und namentlich die mit zwei Röhrenbündeln besonders bewährt.

Um beim Einbündelkessel eine Unterbrechung des Wasserlaufes zu verhindern, wird zwischen dem Ober- und dem Unterkessel mit Vorteil außerhalb des Mauerwerks ein Abfallrohr (200 ÷ 300 mm l. Durchm.) angebracht.

Beim Zweibündelkessel stehen die Oberkessel miteinander in Verbindung, entweder durch 2 Stützen (400 ÷ 500 mm Durchm.) gleichzeitig in den Wasser- und den Dampfäumen, oder die Wasserräume getrennt durch je ein zu beiden Seiten an den Böden angebrachtes, außerhalb des Mauerwerk gelegenes Rohr (300 Durchm.) und die Dampfäume durch einen gemeinsamen Dampfsammler.

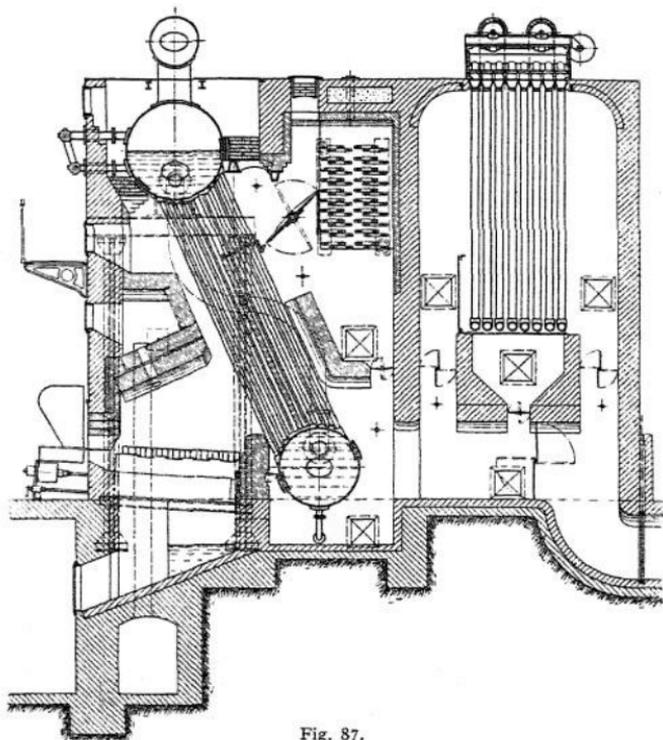


Fig. 87.

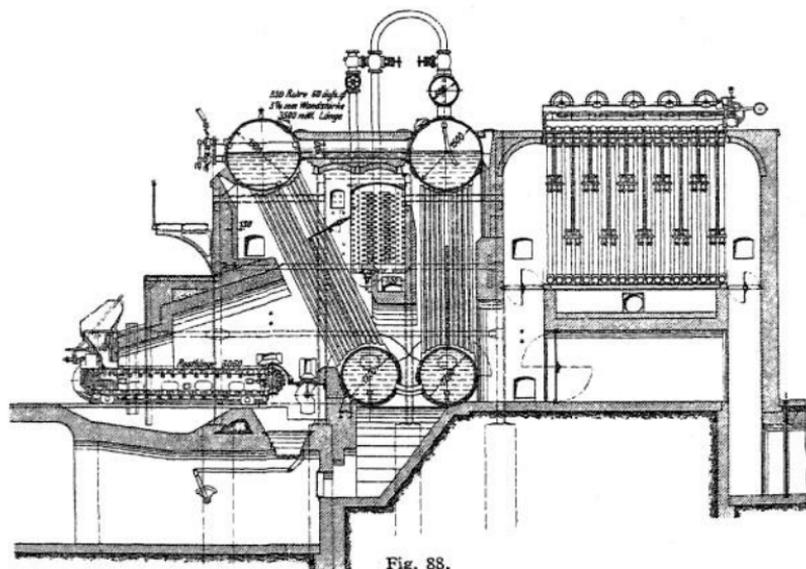


Fig. 88.

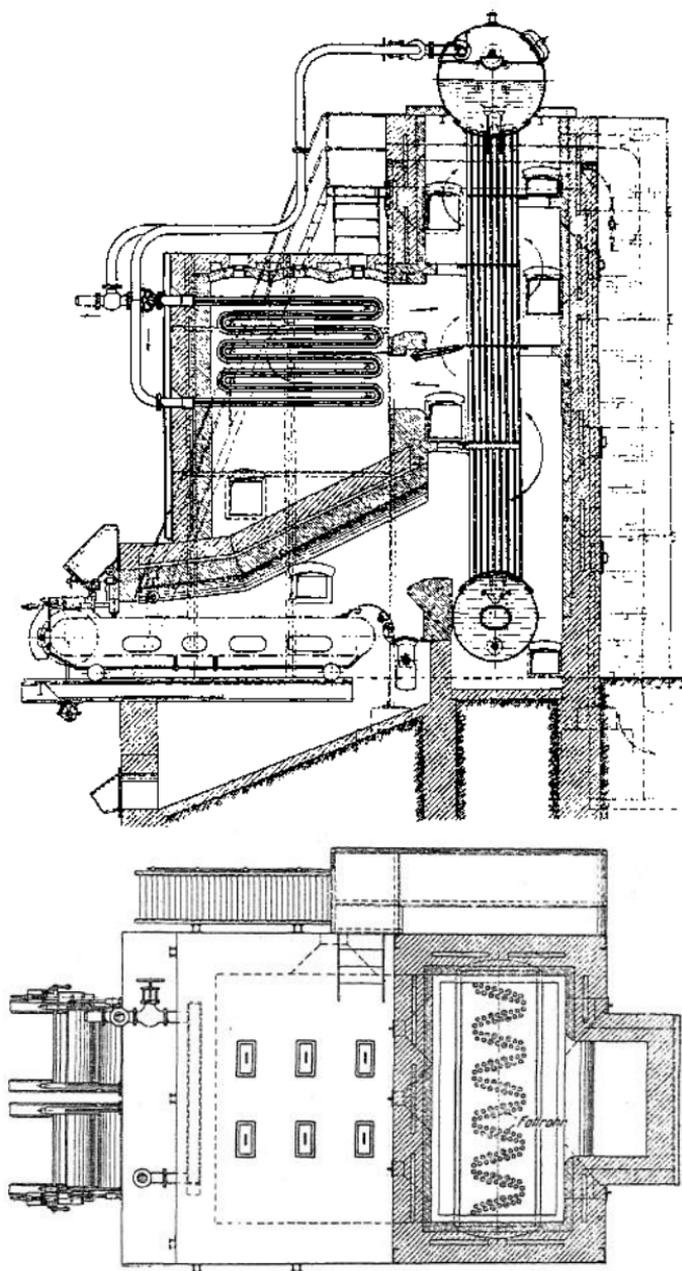


Fig. 89.

Die Unterkessel sind entweder ebenfalls durch 2 Stützen (300 ÷ 400 mm Durchm.) oder durch eine Anzahl Wasserröhren (100 Durchm.) miteinander verbunden.

Gebäuchliche Abmessungen:

	Einbündelkessel	Zweibündelkessel
Oberkessel:	1,5 m Durchm.; 1,6 ÷ 9,5 m lang N. W. etwa in der Mitte des Oberkessels.	÷ 6,5 m lang
Unterkessel:] Abstand der Kesselmitten eines Bündels:	1,2 m Durchm.; 1,3 ÷ 9,2 m lang	÷ 6,2 m lang
Wasserröhren:	5,5 ÷ 7 m 53,5/60 mm Durchm. 60 bis 540 Stück	5 ÷ 6 m 160 bis 720 Stück
Heizflächengrößen:	50 ÷ 600 qm	160 ÷ 720 qm
Feuerungen:	Kettenrost, Unterschub, Treppenrost.	
Feuerzüge:	I. Zug: aufwärts an den vorderen Röhren II. Zug: abwärts an den hinten liegenden Röhren	I. Zug: aufwärts II. Zug: abwärts am ersten Bündel III. Zug: aufwärts IV. Zug: abwärts am zweiten Bündel.

Lagerung: Die Oberkessel werden durch untergestellte Trageböcke auf einem genieteten Gestell gelagert, in welches die Mauerwerkswände zur Füllung der Fächer eingesetzt werden. Rohrbündel und Unterkessel hängen frei am Oberkessel. Beim Einbündelkessel legt sich der Unterkessel an der vorderen Seite gegen Führungsschienen.

Speisung: In den Oberkessel von einem Boden aus. Wassereintritt über den hinteren Röhren. In den hinteren Oberkessel.

Dampfentnahme: Aus dem hinteren Oberkessel.

Überhitzeranordnung: Meistens liegende Überhitzer am Anfang des II. Zuges.

Besondere Einrichtungen: Beruhigungsbleche für den Wasserstand und über den Röhren, in denen das Wasser aufsteigt. Beim Einbündelkessel zwischen Kessel und Überhitzer Einbau eines Wasserabscheiders für Hochleistungen erforderlich.

Der Kestner-Kessel (Fig. 89) mit nur einem Bündel senkrecht gestellter, gerader Röhren zeigt die folgenden wesentlichen Unterschiede gegen den Garbe-Kessel: Rohrbefestigung in verstärkten Mantelplatten, Rohranordnung in zwei nebeneinanderlaufenden Zickzacklinien. In etwa $\frac{1}{4}$ der Wasserröhren besondere Abfallröhren eingesetzt für die Wasserzuführung zum Unterkessel: Heizgasführung so, daß die Röhren stets rechtwinklig getroffen werden, dadurch gute Durchwirblung der Gase und gleichmäßige Erwärmung aller Röhren.

Für 270 qm Heizfläche zeigt diese Bauart die nachstehenden Abmessungen: Oberkessel 1,8 m Durchm., 4,5 m lang. Unterkessel 1,5 m Durchm., 3,7 m lang. Abstand der Kesselmitten etwa 8,5 m, Wasserröhren: 132 Stück einfache von 53,5/60 mm Durchm. und 44 Stück Doppelröhren von 76/83 mm Durchm. im Außenrohr und 46/51 mm Durchm. im Abfallrohr. Letztere auf beiden Enden 250 mm länger als die Außenrohre.

Steilrohrkessel mit gekrümmten Wasserröhren finden die ausgedehnteste Verwendung auf Kriegsschiffen. Sieht man von diesen Sonderbauten ab, so bleiben sehr viele verschiedenartige Ausführungen übrig, die als Landkessel Verwendung finden. Von diesen ist eine der verbreitetsten

Der Stirling-Kessel (Fig. 90). Mindestens 2, gewöhnlich aber 3 Oberkessel werden mit 1 oder 2 Unterkesseln durch Wasserröhren verbunden. Diese sind in Bündeln angeordnet, deren Anzahl immer um eins geringer ist als die Trommelzahl. Die Röhren sind gerade bis auf ihre Enden, die so gebogen werden, daß man sie radial zur Trommel einwalzen kann. Bei den Ausführungen der Hanomag, die diesen Kessel schon seit längerer Zeit in Deutschland baut, wird für die Krümmung aller Rohrenden immer der gleiche Radius angewandt. Sowohl die Dampf- wie die Wasserräume der Oberkessel sind durch eine größere Anzahl gekrümmter Röhren miteinander verbunden. Umlauf so, daß das Wasser in den vorderen 2 bzw. 3 Bündeln aufsteigt, während es im letzten Bündel abfällt.

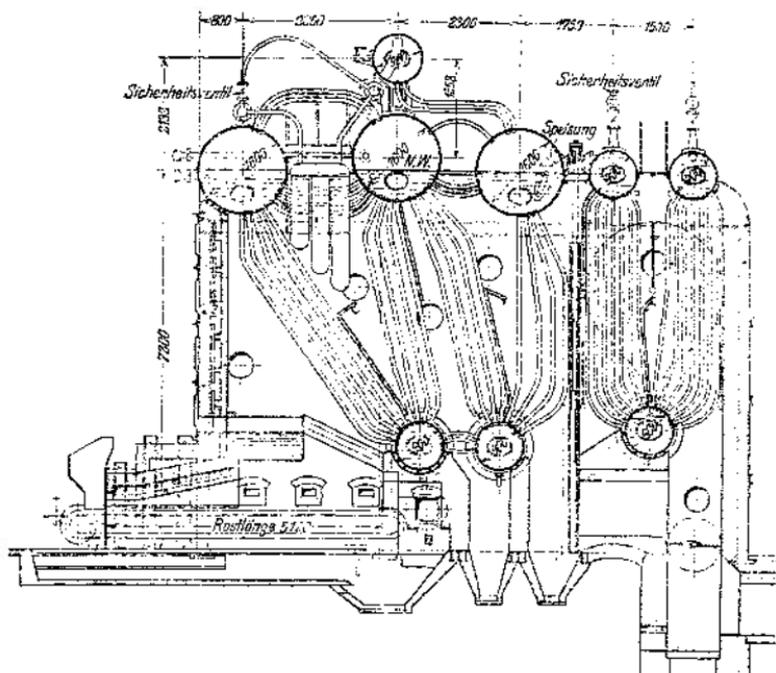


Fig. 90. Ausführung: Hanomag.

Gebrauchliche Abmessungen:

	Viertrommelkessel	Fünftrommelkessel
Oberkessel:	1,1 m Durchm., 2,5 ÷ 5,5 m lang	1,6 ÷ 1,8 m Durchm., ÷ 10 m lang
	N. W. etwa in der Mitte der Oberkessel.	
Unterkessel:	1,1 ÷ 1,3 m Durchm., 2 ÷ 5 m lang	0,9 ÷ 1 m Durchm., ÷ 9,5 m lang
Wasserröhren:	53,5/60 ÷ 76/83 mm Durchm., 4 ÷ 5 m lang	÷ 1000 Stück
Heizflächengrößen:	120 ÷ 400 Stück	÷ 1200 qm u. m.
	150 ÷ 500 qm	

Feuerungen: Für große Einheiten fast ausschließlich Kettenrost; für kleinere auch Planrost und Treppenrost.

Feuerzüge: Die Heizgase werden parallel mit den Röhren abwechselnd aufwärts und abwärts geführt, so daß in jedem Zuge ein volles Röhrenbündel liegt.

Lagerung: Oberkessel mit Tragefüßen auf einem Gerüst aus Profilleisen gelagert. Rohrbündel und Unterkessel hängen frei.

Speisung: In den letzten Oberkessel vom Boden aus.

Dampfentnahme: Aus dem letzten Oberkessel.

Überhitzeranordnung: Hängende oder liegende Überhitzer zwischen dem ersten und zweiten Rohrbündel.

Wasserstandsanzeiger: Am zweiten Oberkessel.

XII. Die Überhitzer

sind besonders ausgebildete Dampfrohrleitungen, in denen der nasse Sattdampf, wie ihn der Kessel liefert, getrocknet und ohne Druckerhöhung überhitzt wird.

Zu unterscheiden sind: besonders befeuerte oder Zentralüberhitzer und Kesselzugüberhitzer.

a) **Zentralüberhitzer**, in welche der Dampf aus mehreren Kesseln geleitet wird, haben sich nur bewährt, wenn sie bei sehr langer Leitung zwischen Kessel und Maschine kurz vor dieser aufgestellt wurden.

Vorzüge. Die Temperatur des überhitzten Dampfes läßt sich durch Regelung der Wärmezufuhr aus dem Feuer, auch bei wechselnden Dampfmen gen in den gewünschten Grenzen halten.

Nachteile. Der Wirkungsgrad der Überhitzerfeuerung ist wegen des hohen Luftüberschusses, mit dem man hier arbeiten muß, ein schlechter (etwa 50 %). Ferner besondere Bedienung erforderlich; hohe Instandhaltungskosten.

b) Kesselzugüberhitzer, die jedem einzelnen Kessel angegliedert werden, finden neuerdings fast allgemeine Anwendung, sofern es sich um Erzeugung von Dampf für Kraftzwecke handelt.

Vorzüge. Sie lassen sich fast durchweg ohne nennenswerte, in vielen Fällen überhaupt ohne jede Vergrößerung der Abkühlungsflächen des Kesselmauerwerks einbauen und sind oft geeignet, auf einfachste Weise den Wirkungsgrad der Kesselanlage zu verbessern.

Nachteile. Die Höhe der Überhitzung hängt nicht nur von der Güte der Verbrennung (Heizgasmenge), sondern auch von der Kesselbelastung ab. Wächst diese, so erhöht sich auch im allgemeinen die Dampf Temperatur. Dieser Umstand macht teilweise besondere Temperaturregler notwendig.

c) Berechnung der Überhitzer.

Es bedeute:

$H_{\bar{u}}$	in qm	die den Heizgasen ausgesetzte Oberfläche des Überhitzers,
D	„ kg	die stündliche Dampfmenge,
B	„ kg	die stündliche Brennstoffmenge,
w	„	Gew.-Proz. den Feuchtigkeitsgehalt des Rohdampfes,
G	„ kg	die Gasmenge aus 1 kg Brennstoff,
t	„ °C	die Temperatur des Rohdampfes,
t'	„ °C	die Temperatur des Heißdampfes,
$c_{p\bar{u}}$	„ WE	die mittlere spez. Wärme für 1 kg Heißdampf zwischen den Temperaturen t bis t' (siehe Tabelle S. 373),
$c_{p\bar{g}}$	„ WE	die spez. Wärme für 1 kg Heizgas (angenähert, $c_{p\bar{g}} = 0,24$),
r	„ WE	die Verdampfungswärme bei der Spannung des Rohdampfes (angenähert $r = 500$),
t_1	„ °C	die Gastemperatur vor dem Überhitzer,
t_2	„ °C	die Gastemperatur hinter dem Überhitzer,
k	„ WE	die Wärmedurchgangszahl für die Überhitzerfläche,
ϑ_m	„ °C	den mittleren Temperaturunterschied zwischen Heizgas und Dampf,
s	„ %	der durch Strahlung verloren gehende Teil der den Heizgasen beim Durchziehen des Überhitzerkanales entzogenen Wärme.

I. Dann berechnet sich die Überhitzerfläche:

$$H_{\bar{u}} = D \cdot \frac{\frac{w}{100} \cdot r + c_{p\bar{u}}(t' - t)}{k \cdot \vartheta_m} \approx D \cdot \frac{5 \cdot w + c_{p\bar{u}}(t' - t)}{k \cdot \vartheta_m}.$$

Hierin ist zu setzen:

$w = 2 \div 3\%$	für Flammrohrkessel;	$w = 4 \div 6\%$	für Steilrohrkessel,
$3 \div 5\%$	„ Kammerkessel;	$10 \div 15\%$	„ Hochleistungen,
$k = 12 \div 13$	„ Kesselzugüberhitzer	bei $15 \div 18$ kg	Kesselbelastung,
$13 \div 15$	„	„ $18 \div 20$	„
$15 \div 18$	„	„ $20 \div 25$	„
$18 \div 20$	„	„ $25 \div 30$	„
$20 \div 25$	„ Zentralüberhitzer.		

ϑ_m angenähert:

$$\vartheta_m = \frac{t_1 + t_2}{2} - \frac{t + t'}{2}, \quad \text{worin}$$

1. für Kesselzugüberhitzer t_1 geschätzt werden kann zu:

$t_1 = 450 \div 600^\circ \text{C}$	für Flammrohrkessel,
$550 \div 700$	„ Doppelkessel,
$500 \div 650$	„ Kammerkessel,
$400 \div 550$	„ Steilrohrkessel,

je nach der Zuglänge vor dem Überhitzer und der Kesselbelastung.

t_2 berechnet sich dann zu:

$$t_2 = t_1 - \frac{D}{B} \cdot \frac{\frac{w}{100} \cdot r + c_{p\bar{u}}(t' - t)}{\left(1 - \frac{s}{100}\right) \cdot G \cdot c_{p\bar{p}}}$$

$$\infty t_1 - \frac{D}{B} \cdot \frac{5 \cdot w + c_{p\bar{u}}(t' - t)}{0,95 \cdot G \cdot 0,24}$$

wenn für s etwa 5% gerechnet wird. G ist für die Luftüberschußzahl 2 zu berechnen und einzusetzen. Für mittlere Verhältnisse rechnet man mit einem Temperaturabfall $t_1 - t_2$ von 120° C.

2. für Zentralüberhitzer $t_1 \infty 900^{\circ}$; $t_2 \infty 350^{\circ}$ zu schätzen ist.

II. Die stündliche Brennstoffmenge für Zentralüberhitzer

$$B_{\bar{u}} = D \cdot \frac{\frac{w}{100} \cdot r + c_{p\bar{u}}(t' - t)}{\left(1 - \frac{s}{100}\right) \cdot G \cdot c_{p\bar{p}}(t_1 - t_2)}$$

oder für $s \infty 10\%$:

$$\infty D \cdot \frac{5 \cdot w + c_{p\bar{u}}(t' - t)}{120 \cdot G}$$

Hierin ist G für den Luftüberschuß zu berechnen, bei welchem sich eine Verbrennungstemperatur von 900° ergibt.

III. Der Gesamtröhrenquerschnitt f (in qm) ist für eine mittlere Geschwindigkeit des Dampfes in den Überhitzerröhren von s_m m zu berechnen, bei der ein Spannungsabfall Δp kg/cm² von höchstens 0,25 Atm. für Spannungen unter 10 Atm. Überdruck und höchstens 0,3 Atm. für höhere Spannungen eintritt. Nach Gutermuth und Eberle ist nun

$$\Delta p = \frac{10,5}{10^6} \cdot \gamma \cdot \frac{l}{d} s_m^5 \quad (1)$$

(siehe S. 1050).

Es ist:

$$s_m = \sqrt[5]{\frac{D \cdot v_{\bar{u}}}{3600 \cdot f}} \quad (2)$$

Unter Zugrundelegung eines Wertes für d kann dann aus Gl. (1) der Wert für s_m und damit aus Gl. (2) f berechnet werden.

Im allgemeinen kann man für Kesselzugüberhitzer $s_m = 12 \div 15$ m und für Zentralüberhitzer $s_m = 15 \div 25$ m wählen, und zwar die Werte der oberen Grenze für die Spitzenbelastungen, ohne den angegebenen Spannungsabfall zu überschreiten.

d) Ausführung der Überhitzer.

Die Überhitzerkammern, an welche sich die nebeneinander angeordneten Rohrelemente anschließen, dienen dazu, den Rohrdampf in die einzelnen Röhren zu verteilen und den Heißdampf wieder zu sammeln, so daß also gewöhnlich zwei Kammern vorhanden sind. Eine dritte kommt noch hinzu, wenn man die Rohrelemente wegen zu großer Länge in je zwei Äste zerlegt, die hintereinander durchströmt werden. Der Weg des Dampfes im Überhitzer ist dann: Rohrdampfkammer — erste Hälfte des Rohrweges — Umkehrkammer — zweite Hälfte des Rohrweges — Heißdampfkammer.

Die Kammern werden hergestellt aus möglichst phosphorarmem Gußeisen oder Stahlguß — runder Querschnitt von 100 \div 180 mm Durchm. bei 15 \div 20 mm Wandstärke — oder aus Flußeisen — rechteckiger Querschnitt von 100 bis 150 mm Vierkant und 20 mm Stärke. Im ersteren Fall werden die Röhren durch Flanschenverbindungen, im letzteren durch Einwalzen oder Einschrauben befestigt.

Die Kammern werden entweder stehend oder liegend angeordnet und so weit in das Mauerwerk eingebaut, daß die Schraubenverbindungen an den Röhren und an den Verschlüssen, die bei schmiedeeisernen Kammern gegenüber jedem Rohr angebracht sind (Pfropfen oder Deckelinnenverschluß), zugänglich bleiben.

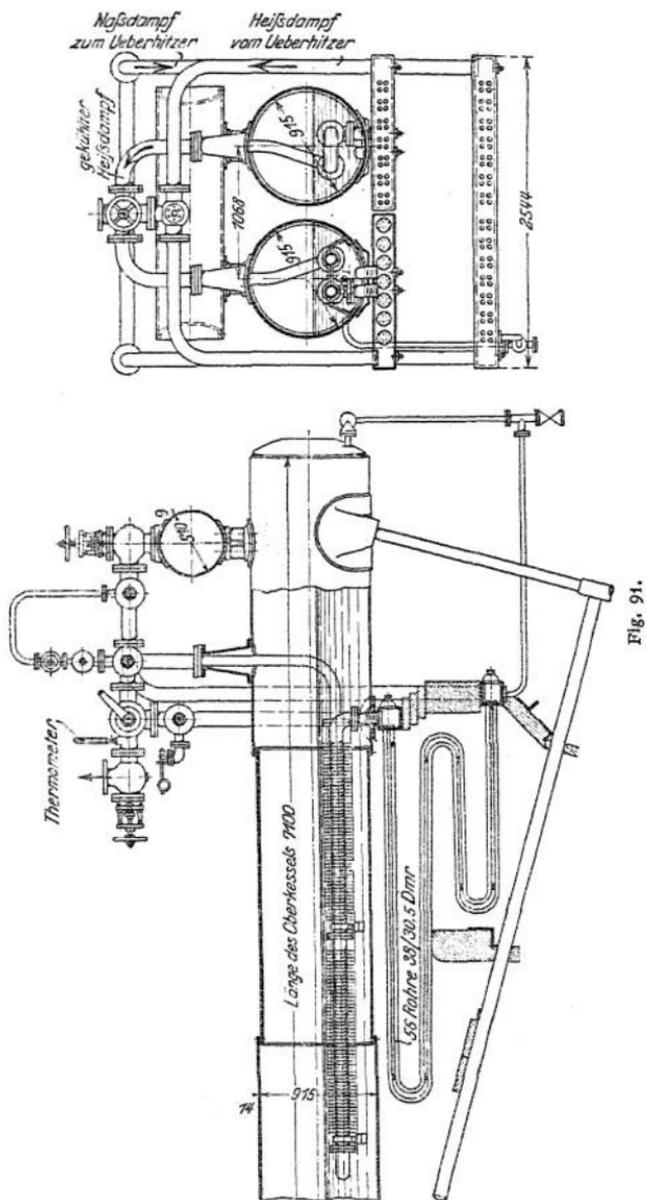


Fig. 91.

Die Röhren des Überhitzers werden neuerdings fast ausschließlich aus Flußeisen hergestellt. Man verwendet glatte nahtlos gewalzte Röhren, von $\frac{30}{36}$ bis $\frac{36}{44}$ mm Durchm., seltener bis $\frac{50}{58}$ mm Durchm., die in jeder gewünschten Länge lieferbar sind. Meistens werden daraus verschieden geformte ebene Schlangen oder für einzelne Sonderausführungen Spiralen gebogen, die man neben-

einander schaltet. Dadurch werden folgende Vorteile erzielt: Einfache, billige Überhitzer. Gleichmäßige Überhitzung aller Dampfteilchen. Freie Ausdehnung der einzelnen Röhren möglich. Trotz Schäden an einigen Röhren kann der Überhitzer, nach Verschließen dieser Röhren durch Einschlagen von Stopfen, vorläufig weiter betrieben werden.

Die Rohrelemente werden stehend oder liegend angeordnet. Im Einzelfalle wird das die bessere Anordnung sein, die eine möglichst vollkommene Entwässerung des Überhitzers gestattet.

Die Ausrüstung der Überhitzer¹⁾. Verlangt werden ein Sicherheitsventil und eine Entwässerungseinrichtung für den Überhitzer und für die Dampfleitung kurz vor demselben.

Angebracht wird außerdem am Dampfaustritt immer ein Thermometer, manchmal auch ein Manometer.

Ferner wird der Überhitzer durch Einschalten von Absperrventilen in die Dampfleitung vor und hinter demselben, wo es sich irgendwie ausführen läßt, so eingerichtet, daß er aus dem Dampfstrom ausgeschaltet werden kann. —

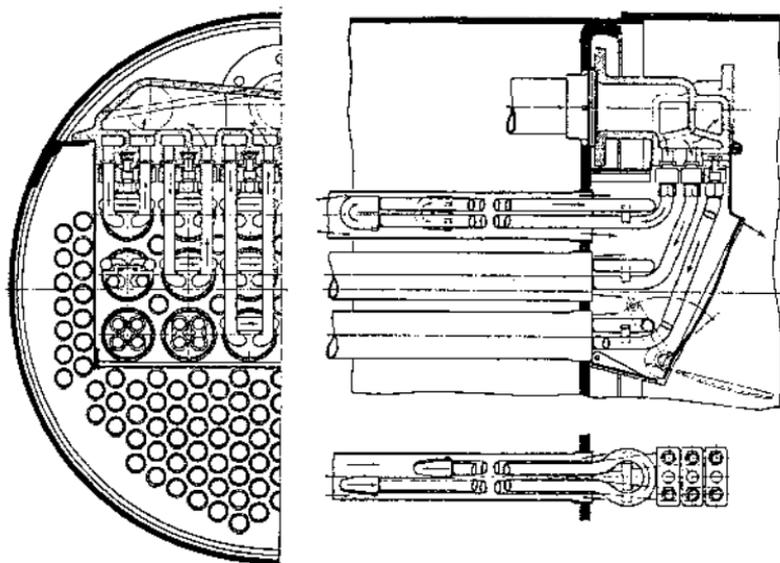


Fig. 92. Ausführung: Wilhelm Schmidt.

Die Sicherheitsventile sind mit Sitz und Kegel aus wärmebeständiger (Nickel-) Legierung herzustellen und am besten mit Hebelbelastung zu bauen. Ihr Durchmesser bewegt sich, je nach der Größe der Überhitzerfläche, in den Grenzen: $25 \div 50$ mm. —

Die Entwässerungseinrichtung ist, falls sie nicht am tiefsten Punkt des Überhitzers angebracht werden kann, durch eine Ausblasevorrichtung zu ersetzen.

Der Einbau der Kesselzugüberhitzer wurde bei den einzelnen Kesselbauarten besprochen. Im allgemeinen sollen die Heizgase den Überhitzer, im Interesse des Wärmedurchganges, im Gegenstrom zur Durchflußrichtung des Dampfes bestreichen. Die Regelung der Überhitzungstemperatur, die, wie weiter oben ausgeführt wurde, bei den Kesselzugüberhitzern besonders erforderlich ist, sucht man in folgender Weise zu erreichen:

¹⁾ Jaeger, Bestimmungen über Dampfkessel. Berlin 1910, S. 44.

1. Durch Klappen oder Schieber, die nur einen Teil der Heizgase über den Überhitzer zu leiten gestatten. Nachteilig ist hierbei, daß die Absperrorgane, wenn sie längere Zeit im Heizgasstrom verbleiben, leicht beschädigt werden.

2. Durch nachträgliche Mischung des Heißdampfes mit Rohdampf. So einfach dies Mittel zunächst erscheint, so schwierig läßt es sich in der Praxis

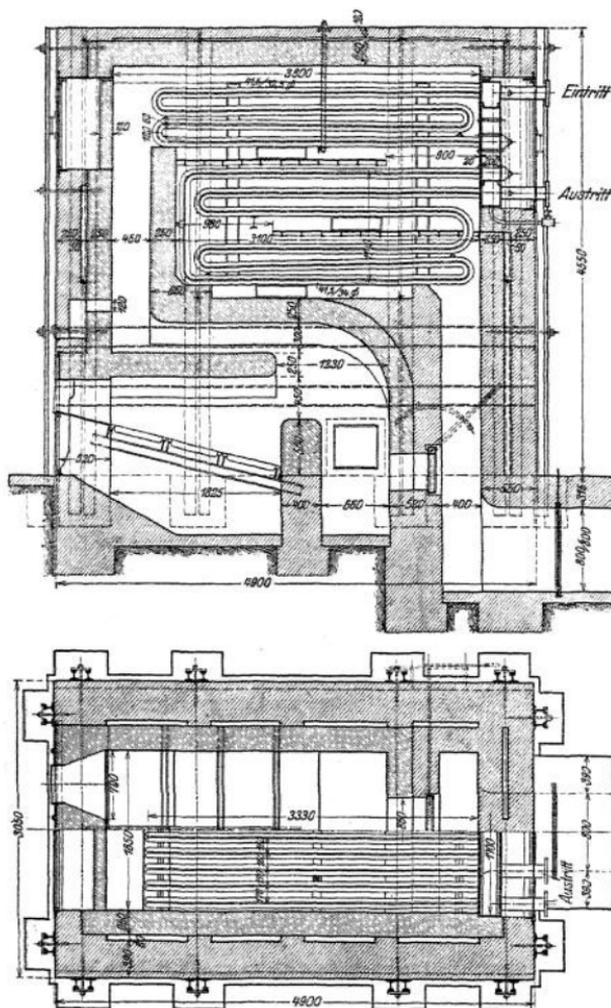


Fig. 93. Ausführung: Petry Dereux.

so durchführen, daß das Ergebnis der Mischung, wie man es doch anstrebt, überhitzter Dampf von etwas niedrigerer Temperatur, aber ohne Feuchtigkeitsgehalt ist.

3. Durch Zurückleiten einer zu regelnden Menge des Heißdampfes in geschlossener Rohrleitung durch den Wasserraum des Kessels und durch Mischung dieses

so abgekühlten Dampfes mit dem übrigen überhitzten Dampf (Babcock & Wilcox, Heißdampfregler, Fig. 91).

Sind Einrichtungen, wie sie unter 1. genannt, mit Ausschaltung aus dem Gasstrom, nicht vorhanden, so sind die Kesselzugüberhitzer durch Füllung mit Wasser beim Anfeuern des Kessels zunächst als Vorwärmer zu betreiben oder zu einem Teile des Kessels zu machen. —

Besonders bemerkenswert ist der Einbau von Überhitzern in weitere Heizröhren, sogenannte Rauchröhren, wie er bei Schiffskesseln und Lokomotiven in immer ausgedehnterem Maße angewandt wird. Er hat gegenüber den früher üblichen Rauchkammerüberhitzern den Vorteil, daß sich die einzelnen Rohrelemente leicht auswechseln lassen (Fig. 92).

Die Zentralüberhitzer. Schutz der Überhitzerröhren vor der strahlenden Wärme des Feuers, vor Nachverbrennungen und vor zu hoher Temperatur der sie berührenden Heizgase sind die wichtigsten Erfordernisse, die beim Bau eines besonders gefeuerten Übersitzers zu berücksichtigen sind, denn hiervon hängt die Betriebssicherheit und die Lebensdauer desselben ab. — Als geeignete Mittel, dies zu erreichen, kommen in Anwendung: Längerer Weg der Gase zwischen dem völlig verdeckten Feuer und den zuerst getroffenen Überhitzerröhren. — Oberluftzuführung, am besten so zu regeln, daß der CO_2 -Gehalt $7 \div 8\%$ beträgt. — Vorlagerung von Heizflächen oder Vorwärmerflächen. — Führung des Dampfes in dem zuerst getroffenen Teil (etwa $\frac{1}{3}$) des Überhitzers im Gleichstrom mit den Gasen. — Vgl. Fig. 93.

XIII. Die Vorwärmer

bezwecken, die im Dampfbetrieb verloren gehende Wärme für die Dampf- erzeugung möglichst nutzbar zu machen. Zu diesem Zweck wärmen sie das Speisewasser, ehe es in den Kessel gelangt, an und benutzen dazu als Wärmequelle den Maschinenabampf und die Abgase der Kesselfeuerung.

a) Die Abdampfvorwärmer sind zylindrische Gefäße, in welche ein Bündel enger Röhren von etwa $40 \div 60$ mm l. Durchm. bei $1 \div 3$ m Länge eingebaut ist. — Das Wasser strömt entweder durch die Röhren (leichtere Reinigung von Kesselstein) oder umspült dieselben (geringere Strahlungsverluste). Wasser und Dampf sind möglichst im Gegenstrom zu führen. — Bei Auspuffmaschinen läßt sich das Speisewasser so bis auf etwa 90° , bei Kondensationsmaschinen mit Vorteil nur bis auf 45° erwärmen.

Bestimmung der Abmessungen.

Die Größe der Querschnitte. Für die Durchflußgeschwindigkeit des Dampfes durch den Vorwärmer wählt man, im Interesse geringen Strömungswiderstandes:

$$s_d = 7 \div 12 \text{ m,}$$

bezogen auf den Eintrittszustand des Dampfes! Um aber den Wärmedurchgang zu steigern, wendet man neuerdings Geschwindigkeiten

$$s_d \text{ bis zu } 20 \text{ m}$$

an. Ähnliches gilt für die Wassergeschwindigkeiten. Für das Ausfällen des Schlammes sind Wassergeschwindigkeiten

$$s_w = 0,001 \div 0,004 \text{ m}$$

von Vorteil. Sie werden angewandt bei Vorwärmern mit Dampf in den Röhren. Bei solchen mit Wasser in den Röhren findet man vielfach noch

$$s_w = 0,01 \div 0,03 \text{ m,}$$

doch steigert man diese Geschwindigkeit bei modernen Ausführungen ebenfalls bis zu etwa

$$s_w = 0,1 \text{ m.}$$

Bei der Berechnung der Querschnitte sind außerdem vielleicht vorkommende Unterbrechungen der Speisung zu berücksichtigen. Soll z. B. die stündliche Wassermenge D kg den Vorwärmer in z Minuten durchströmen, so ist er für $D' = \frac{60 \cdot D}{z}$ kg stündliche Leistung zu berechnen.

Die Größe der Vorwärmläche H_v in qm berechnet sich aus der Gesamtwärme Q WE, die D' kg Wasser von t_0^0 auf t_e^0 C erwärmt, zu:

$$H_v = \frac{Q}{k \cdot \vartheta_m},$$

hierin gilt für k nach Hausbrand:

$$k_m = 750 \sqrt[3]{s_d + s_d'} \cdot \sqrt[3]{0,007 + s_w}$$

bei Röhren aus Kupfer oder Messing, und

$$k_e = 0,85 \cdot k_m$$

bei eisernen Röhren. s_d' bedeutet darin die Geschwindigkeit, mit welcher der Dampf, falls er nicht völlig kondensiert, den Vorwärmer verläßt. Bei größeren Dampfgeschwindigkeiten kann $s_d' = 0,75 \cdot s_d$ werden.

Der mittlere Temperaturunterschied zwischen Dampf und Wasser, ϑ_m , berechnet sich aus dem Eintritts- und dem Austrittsunterschied ϑ_1 und ϑ_2 zu

$$\vartheta_m = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2,3 \log \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}},$$

wenn mit ϑ_1 der größere der beiden Werte bezeichnet wird. Sieht man die Temperatur im Dampfraum des Vorwärmers t_d annähernd als gleichbleibend an, so ist $\vartheta = t_d - t_0$ und $\vartheta_2 = t_d - t_e$ und somit

$$\vartheta_m = \frac{t_d - t_0}{2,3 \log \frac{t_d - t_0}{t_d - t_e}}.$$

Nach einer Erfahrungsformel macht man vielfach $H_v = (0,6 \div 0,8) \cdot H$ und den Wasserinhalt des Vorwärmers $\frac{D}{4} \div \frac{D}{10}$.

Ausführung der Abdampfvorwärmer. Sie werden einerseits in die Abdampfleitung, meistens von Auspuff-, seltener von Kondensationsmaschinen (zwischen Niederdruckzylinder und Kondensator), andererseits in die Druckleitung der

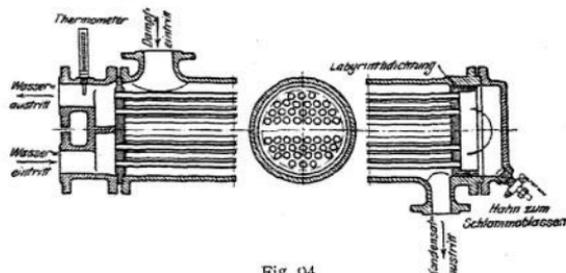


Fig. 94.

Speisepumpen eingebaut. Für das äußere Gehäuse und die Rohrböden verwendet man Gußeisen und auch Schmiedeeisen, für die Röhren Kupfer, Messing oder Schmiedeeisen. Das Rohrsystem ist so einzubauen, daß es sich frei ausdehnen kann. Zur Reinigung muß sich der Vorwärmer auseinander nehmen lassen. Umspült das Wasser die Röhren, so sind diese nur so dicht beieinander anzuordnen, daß eine Entfernung des Kesselsteins zwischen den Röhren möglich ist (Fig. 94).

b) Die Rauchgasvorwärmer. Als solche werden, bei Herstellung aus Gußeisen, gerade, bei Verwendung von Schmiedeeisen verschiedenartig gebogene Röhren, in Bündeln vereinigt, in den Abgasstrom eingebaut. Ihre Anwendung empfiehlt sich überall da, wo Abgase von etwa 300^0 und darüber zur Verfügung stehen. Dies ist z. B. bei modernen Hochleistungskesseln immer der Fall, deshalb werden diese auch stets mit Abgasvorwärmern ausgerüstet. Wegen des größeren Temperaturunterschieds zwischen dem Inhalt des Vorwärmers und den Abgasen nützt man so die Wärme der letzteren besser aus, als es bei Verlängerung des Gasweges an der Kesselheizfläche möglich wäre. — Ein Nachteil dieser Vorwärmer ist es, daß sie, je nach Bauart und Größe, die Zugstärke beeinträchtigen (bis zu 5 mm Wassersäule) und dauernd besondere Sorgfalt auf das Reinhalten ihrer Oberfläche

zu verwenden ist. Letzteres kann erleichtert werden, indem das Wasser, ehe es in den Raugasvorwärmer gelangt, im Abdampfvorwärmer oder durch Mischung mit bereits vorgewärmtem Wasser (Fig. 95), möglichst bis auf 40° angewärmt wird. Dadurch wird das Schwitzen der Röhren — Niederschlagen des in den Abgasen enthaltenen Wasserdampfes — vermieden, welches sonst Ansetzen von Ruß und Flugasche begünstigt und außerdem starkes Rosten auf der äußeren Rohroberfläche zur Folge hat. — Eine Reinigung des Vorwärmers im Innern ist an sich und wegen der längeren Außerbetriebsetzung kostspielig. Infolgedessen wird die Enthärtung des Speisewassers ganz besonders notwendig, wenn ein Abgasvorwärmer verwendet wird.

Mit diesen lassen sich Vorwärmertemperaturen bis zu 120° erzielen.

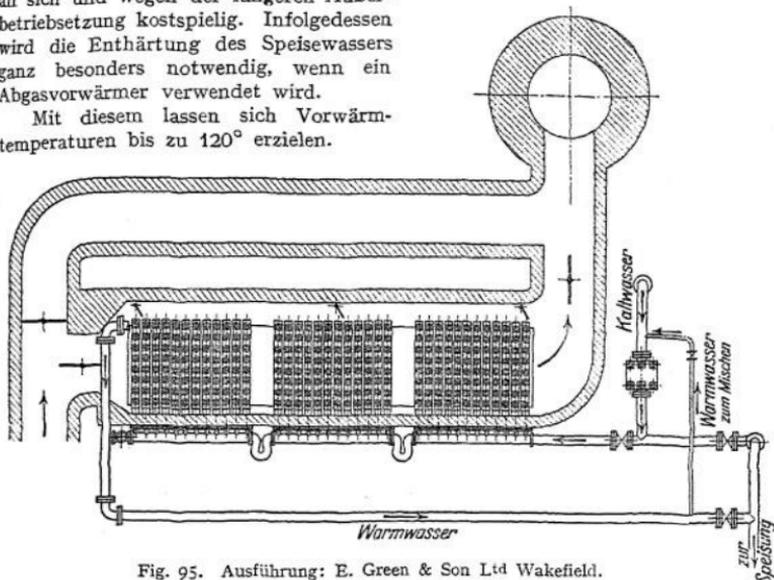


Fig. 95. Ausführung: E. Green & Son Ltd Wakefield.

Bestimmung der Abmessungen.

Größe der Querschnitte. Die Wassergeschwindigkeit in den Vorwärmerröhren schwankt zwischen

$$s_w = 0,01 \div 0,001 \text{ m,}$$

und zwar finden sich die höheren Werte bei schmiedeeisernen, die niedrigeren bei gußeisernen Vorwärmern.

Die Rauchgasgeschwindigkeit soll zwischen den Röhren

$$s_g \geq 6 \text{ m}$$

betragen.

Größe der Vorwärmfläche. Zur Vorwärmung der stündlichen Wassermenge D' steht zur Verfügung die Wärme Q_g WE, welche die stündliche Rauchgasmenge von $B \cdot (1 + m \cdot L_{kg})$ kg, bei einer Abkühlung von t_{g1} auf t_{g2} °C, abgibt, vermindert um den Anteil der durch Leitung und Strahlung verloren geht.

Nun ist:

$$Q_g = B (1 + m L_{kg}) \cdot c_p (t_{g1} - t_{g2}),$$

darin ist für Neuanlagen zu setzen: $m = 2$. Für L_{kg} der Wert, der sich nach Seite 518 für eine mittlere Zusammensetzung der zu verfeuernden Kohle ergibt. Für $c_p = 0,24$. t_{g1} ist nach Erfahrungswerten ähnlicher Anlagen zu schätzen, etwa zu $t_{g1} = 300 \div 400^\circ$, die obere Grenze für Hochleistungen. Für t_{g2} bei Schornsteinzug nicht unter 180° , bei künstlichem Zug $t_{g2} \geq 120^\circ$.

Ferner ist die stündlich vom Wasser aufzunehmende Wärmemenge:

$$Q_w = D' \cdot (t_{w2} - t_{w1}).$$

Daraus ergibt sich:

$$t_{w2} = t_{w1} + \frac{\eta \cdot Q_g}{D'},$$

wenn durch η ($= 0,8 \div 0,9$) der Strahlungsverlust berücksichtigt wird. t_{w1} ist, wie weiter oben ausgeführt, durch geeignete Einrichtungen möglichst auf 40° zu bringen.

Danach läßt sich für den Einzelfall der mittlere Temperaturunterschied ϑ_m zwischen Gas und Wasser und somit die Größe der Vorwärmläche aus

$$H_g = \frac{\eta \cdot Q_g}{k \cdot \vartheta_m}$$

berechnen.

Für k ist dabei zu setzen:

$k \approx 10$ für gußeiserne Röhren,

$k \approx 15$ „ schiedeeiserne Röhren.

Zu bemerken ist noch, daß sich die Abkühlung der Gase im Mittel zu 2°C für je 1° Wassererwärmung ergibt.

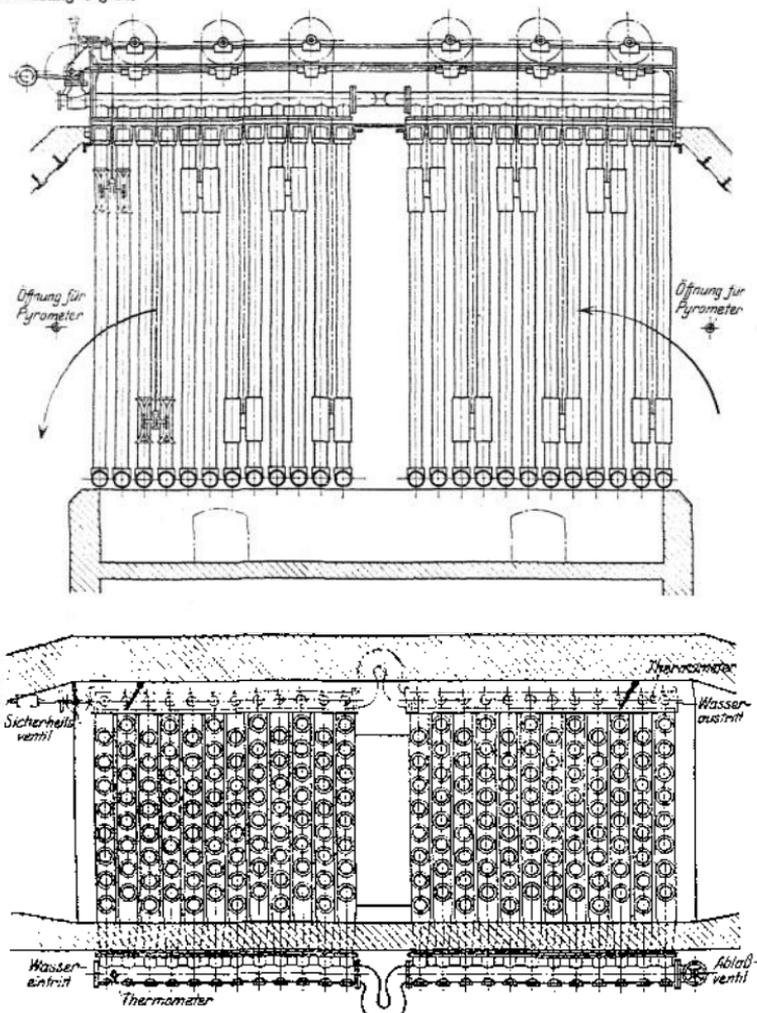


Fig. 96.

Der Wasserinhalt der Abgasvorwärmer bewegt sich in den Grenzen: $0,5 \div 1,25 \cdot D$. Bei vielen Ausführungen, sowohl mit gußeisernen wie auch mit schmiedeeisernen Röhren, ist er gleich D .

Ausführung der Rauchgasvorwärmer. Sie werden entweder hinter dem Zugschieber im Fuchs als Zentralvorwärmer (Fig. 95) oder im letzten Kesselzug als Einzelvorwärmer aufgestellt (Fig. 85, 86, 87, 88 und 90). Im ersteren Falle können sie immer mit Umlaufkanal, also aus dem Gasstrom ausschaltbar eingerichtet werden. Dagegen läßt sich mit Einzelvorwärmern, auch bei stark wechselnder Gesamtdampfleistung einer Anlage, eine gleichmäßigere Vorwärmung und bei manchen Kesselbauarten eine Verringerung der Strahlungsverluste erzielen.

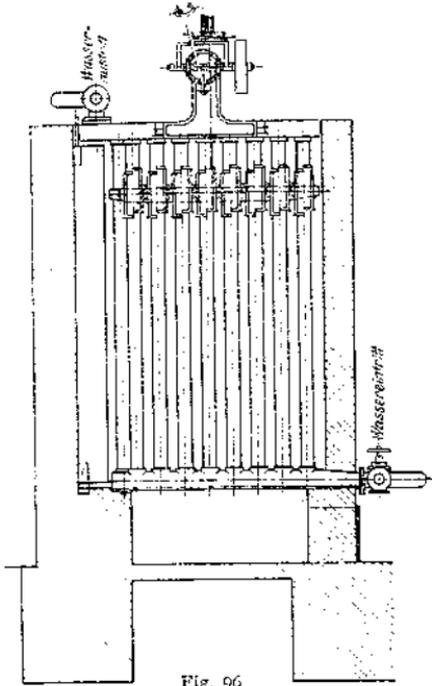


Fig. 96

Rauchgasvorwärmer aus Gußeisen (Fig. 96) sind mit wenigen Ausnahmen als Zentralvorwärmer im Gebrauch. — Als Baustoff wird ein gutes wärmebeständiges Gußeisen verwandt. Daraus stellt man gerade Röhren von 85 ÷ 100 mm l. Durchm. bei 2,7—3,5—4 m Länge her und vereinigt diese zu je 6—8—10—12 Stück nebeneinander, durch Einpressen der Röhrenden in gemeinsamen Kammern, zu einem Rohrelement. Eine durch 4 teilbare Anzahl solcher Elemente wird hintereinander, die Röhren senkrecht, aufgestellt. Der Zugänglichkeit wegen läßt man zwischen je zwei Gruppen von 8 oder 12 Rohrelementen einen Zwischenraum von etwa 400 mm, ferner bringt man an einer Seite oder in der Mitte einen Längskanal an, der während des Betriebes durch eiserne Zugklappen (Deflektoren) zur Erhöhung der Gasgeschwindigkeit in den Rohrzweischenräumen abgeschlossen wird. — Auf- und abwärts laufende Schaber entfernen von der Rohroberfläche den Rußansatz, der

sich in einer unterhalb der Rohrelemente vorgesehenen Rußkammer sammelt. Der Antrieb für diese dauernd bewegten Schaber erfordert $\frac{1}{2}$ ÷ 3 PS und wird durch Transmission, besondere Dampfmaschine oder elektrisch ausgeführt. — Das Wasser durchläuft den Vorwärmer nach folgenden verschiedenen Schaltungen:

1. Kaltwasser verteilt sich aus einer Längsleitung in alle unteren querliegenden Kammern und steigt aus diesen gleichzeitig in allen senkrechten Röhren empor, um aus den oberen Querkammern, vorgewärmt, in ein oberes Längsrohr zusammenzufließen (Green, Steinmüller).
2. Das Wasser durchläuft das erste Rohrelement abwärts, steigt im zweiten auf und so fort, so daß es sich im Gegenstrom zu den Heizgasen bewegt (Düsseldorfer Ekonomiser).
3. Das Wasser steigt in einer Gruppe von vier hintereinander liegenden Rohrelementen auf, strömt von deren oberen Kammern durch ein außerhalb des Vorwärmermauerwerks liegendes Rohr in die unteren Kammern der nächsten Gruppe usw., ebenfalls im Gegenstrom zu den Gasen (Krüger). —

Ein wesentlicher Vorteil dieser Gegenstromführungen gegenüber dem zuerst genannten Kreuzstrom, der den einfachsten Aufbau des Vorwärmers gestattet, hat sich bisher nicht ergeben.

Rauchgasvorwärmer aus Schmiedeeisen. Die Verwendung schmiedeeiserner Rauchgasvorwärmer in den mannigfachsten Formen ist wesentlich durch die Absicht gefördert worden, jeden Kessel für sich mit einem Vorwärmer zu versehen, um einerseits die Abkühlung der Gase zwischen Kessel und Vorwärmer und des heißen Wassers zwischen Vorwärmer und Kessel möglichst gering zu halten; andererseits bei wechselnder Zahl der im Betriebe befindlichen Kessel auch die Größe der Vorwärmläche der zur Verfügung stehenden Abgasmenge anpassen zu können. Dabei führte vor allem die Rücksicht auf Billigkeit und Raumersparnis zur Verwendung schmiedeeiserner Röhren, trotzdem diese stark durch Abrosten leiden und daher öfter ausgewechselt werden müssen. Diesen Nachteil sucht man durch die Wahl geeigneter Vorwärmerbauarten zu verringern, auch ist man vereinzelt bestrebt gewesen, die Haltbarkeit der Röhren zu erhöhen, indem man sie außen und innen verzinkte. —

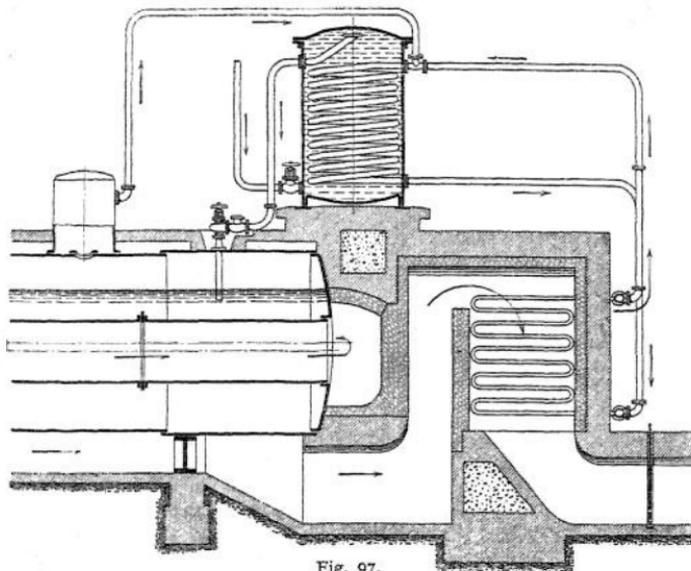


Fig. 97.

Der Durchmesser der Röhren ist hier meistens gering, $30 \div 50$ mm i. L. Zur Verbindung der einzelnen Röhren unter einander dienen gußeiserne Kammern, genietete Walzenkessel von $800 \div 1200$ mm Durchm. oder gemeinsame flache, geschweißte Kammern. Immer fehlen die Rußschaber. Den losen Belag auf der Rohraußenfläche sucht man durch Abblasen mit Dampf zu entfernen.

Besonders bemerkenswert ist eine Einrichtung, welche die Sächs. Maschinenfabrik vorm. R. Hartmann an ihren Einzelvorwärmern getroffen hat. Das in eine obere Walze eintretende kalte Wasser mischt sich hier mit einem Teil des schon vorgewärmten Wassers, ehe es in das Rohrsystem des Vorwärmers gelangt.

Der Schmidtsche Rauchgasvorwärmer (Fig. 97) erwärmt das Speisewasser mittelbar. An den eigentlichen Abgasvorwärmer, einem System schmiedeeiserner Röhren von $25 \div 40$ mm l. Durchm., schließt sich eine Ringleitung an, in welche eine kupferne Heizschlange eingeschaltet ist. In diesem Ringe läuft ständig Kondenswasser um, indem das heiße Wasser aus der Abgasvorwärmerschlange emporsteigt, seine Wärme im Vorwärmgefäß an das an der kupfernen Heizschlange im Gegenstrom vorbeigeführte Speisewasser abgibt, um zum Abgasvorwärmer zurückzukehren. — Die Abmessungen sind so gewählt, daß für je 1 kg Speisewasser 2 kg Heizwasser in das Vorwärmgefäß gelangen.

Vorzüge. Kein Kesselstein in den Röhren des Rauchgasvorwärmers, kein Rußansatz, da stets heißes Wasser durchströmt, also stets gleich guter Wärmedurchgang. Kein Anrosten der Röhren im Innern, da nur luft- und kohlenstoff-freies Wasser hindurchfließt.

XIV. Einzelheiten aus dem Kesselbau.

Bei der Bemessung der einzelnen Kesselschüsse ist zu beachten, daß von den Walzwerken ein Grundpreis für die Bleche gefordert wird, solange sie eine bestimmte Größe nicht überschreiten. Schulz-Knaudt, Essen läßt den Grundpreis für folgende normale Maße und Gewichte gelten:

bei einer Dicke von	Breite und Durchmesser bis zu mm	Fläche bis zu qm	Gewicht bis zu kg
5 bis unter 6 mm	1600	6	500
6 " " 7 "	1700	7	600
7 " " 8 "	1800	8	700
8 " " 9 "	1900	9	800
9 " " 10 "	2000	10	900
10 " " 15 "	2200	12	1250
15 " " 25 "	2400	15	2500
25 mm und darüber	2700	20	3500

Die Stärke der im Kesselbau verwendeten Bleche darf nicht unter 7 mm betragen. Die größte Stärke ist etwa 30 mm.

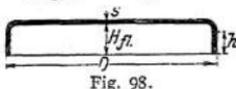


Fig. 98.

a) Einzelteile.
Normalböden. (Schulz-Knaudt.)
1. Volle Böden.



Fig. 99.

(Werden auch auf Bestellung mit eingepreßten Mannlöchern versehen.)

Für einreihige Rundnaht.

D	h ¹⁾	H _{fl.} ¹⁾	H _{gek.} ¹⁾	R	s ²⁾	D	h ¹⁾	H _{fl.} ¹⁾	H _{gek.} ²⁾	R	s ²⁾
300	65	90	110	400	6 ÷ 16	1450	80	125	240	1700	8 ÷ 26
350	65	90	115	500	6 ÷ 16	1500	80	125	270	1800	9 ÷ 26
400	65	90	120	550	6 ÷ 16	1550	80	125	270	1800	9 ÷ 26
450	65	95	125	600	6 ÷ 16	1600	80	125	270	2000	10 ÷ 26
500	65	95	135	650	6 ÷ 16	1650	80	125	275	2000	10 ÷ 26
550	65	105	135	700	6 ÷ 16	1700	80	125	275	2200	10 ÷ 26
600	65	105	160	750	6 ÷ 16	1750	80	130	275	2200	11 ÷ 26
650	65	105	175	800	6 ÷ 26	1800	80	130	275	2400	11 ÷ 26
700	65	105	175	850	6 ÷ 26	1850	85	130	275	2400	12 ÷ 26
750	65	105	175	900	6 ÷ 26	1900	85	130	290	2600	12 ÷ 26
800	70	110	185	950	6 ÷ 26	1950	85	130	300	2600	13 ÷ 26
850	70	110	185	1000	6 ÷ 26	2000	90	130	300	2800	13 ÷ 26
900	70	110	200	1100	6 ÷ 26	2100	90	130	300	3300	13 ÷ 26
950	70	110	200	1200	6 ÷ 26	2200	90	130	300	3300	14 ÷ 26
1000	70	110	200	1300	6 ÷ 26	2300	90	130	315	3300	15 ÷ 26
1050	70	110	205	1400	6 ÷ 26	2400	90	130	330	3300	15 ÷ 26
1100	70	115	215	1400	6 ÷ 26	2500	90	130	350	3300	15 ÷ 26
1150	70	115	215	1450	6 ÷ 26	2600	90	130	370	3300	15 ÷ 26
1200	75	115	230	1500	6 ÷ 26	2700	90	130	380	3500	15 ÷ 26
1250	75	115	230	1600	7 ÷ 26	2800	90	130	400	3500	15 ÷ 26
1300	75	115	230	1600	7 ÷ 26	2900	90	130	420	3500	15 ÷ 26
1350	75	120	235	1700	8 ÷ 26	3000	90	130	445	3500	15 ÷ 26
1400	75	120	235	1700	8 ÷ 26						

¹⁾ Für Blechstärken unter 9 mm ist h, H_{fl.}, H_{gek.} um 25 mm kleiner.

²⁾ Die angegebenen Werte beziehen sich auf normale Blechstärken, für welche der Grundpreis für Böden gilt.

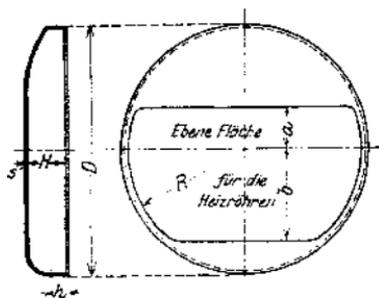


Fig. 100.

2. Böden für Heizröhrenkessel.

Für einreihige Rundnaht.

D	H	h	a	b	R	s
2000	310	135	450	825	875	25 ÷ 30
2100	350	135	475	825	925	25 ÷ 30
2200	355	140	500	850	975	25 ÷ 30
2300	360	145	525	850	1025	25 ÷ 30
2400	360	145	550	900	1075	25 ÷ 30

3. Böden für Einflamrohrkessel.

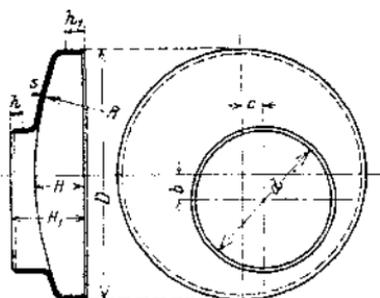


Fig. 101.

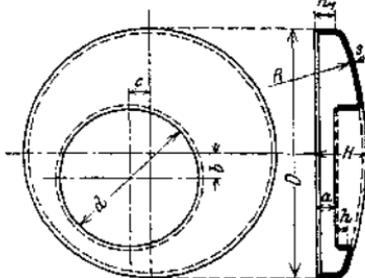


Fig. 102.

Für einreihige Rundnaht.

D	H	H ₁	a	h	h ₁	R	s
1300	230	340	45	70	75	1600	15 ÷ 20
1350	235	340	45	70	75	1700	15 ÷ 20
1400	235	340	45	70	75	1700	15 ÷ 20
1450	235	350	45	70	75	1700	15 ÷ 20
1500	270	365	50	70	80	1800	16 ÷ 23
1550	270	375	55	70	80	1800	16 ÷ 23
1600	270	390	65	70	80	2000	17 ÷ 23
1650	275	390	65	75	80	2000	17 ÷ 23
1700	275	400	65	75	80	2200	17 ÷ 24
1750	275	400	65	75	80	2200	17 ÷ 24
1800	275	400	70	75	80	2400	18 ÷ 25
1850	275	405	70	75	85	2400	18 ÷ 25
1900	290	410	75	75	85	2600	18 ÷ 25
1950	300	410	75	75	85	2600	18 ÷ 25
2000	300	410	75	80	90	2800	18 ÷ 25
2100	310	410	75	80	90	3000	18 ÷ 25
2200	325	410	75	80	90	3000	18 ÷ 25
2300	345	420	75	80	90	3000	18 ÷ 25
2400	365	425	75	80	90	3000	18 ÷ 25
2500	385	430	75	80	90	3000	18 ÷ 25

 Die Maße b , c und d werden nach Angabe ausgeführt.

4. Böden für Zweiflammrohrkessel.

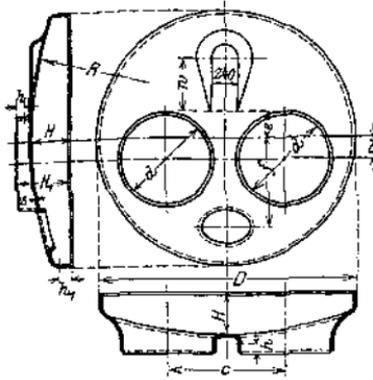


Fig. 103.

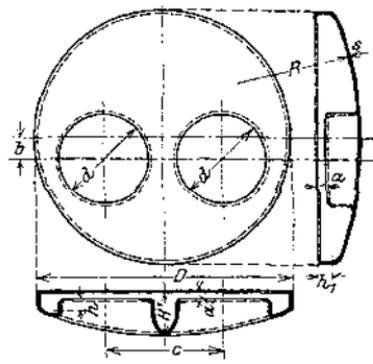


Fig. 104.

Für einreihige Rundnaht.

D	1800	1900	2000	2100	2200	2300	2400	2500
d	650	725	750	775	825	875	925	975
	625	700	725	750	800	850	900	950
	600	675	700	725	775	825	875	925
	575	650	675	700	750	800	850	900
		600	650	675	725	775	825	875
H	295	330	320	335	355	375	395	400
H ₁	445	465	455	470	490	515	535	545
H ₂	285	310	295	305	320	340	355	360
h	75	75	75	75	75	80	80	80
a ₁	90	90	90	90	90	90	90	90
a	60	65	65	65	60	55	55	55
b	110	115	130	140	150	160	160	160
c	825	875	925	970	1040	1085	1140	1180
e	220	230	260	260	350	390	425	470
f	600	650	700	700	750	810	810	925
R	2400	2500	3000	3000	3000	3000	3000	3000
s	20 ÷ 22	20 ÷ 22	20 ÷ 25	20 ÷ 25	20 ÷ 25	20 ÷ 25	20 ÷ 25	22 ÷ 25
w	450	450	450	450	450	450	450	450

Für zweireihige Rundnaht wird H; H₁; H₂; a₁; a um 35 mm größer.

5. Böden für Dreiflammrohrkessel.

Durchmesser	2500	2600	2700	2800	2900	3000
Wandstärke	22 ÷ 28					
Wölbungshalbmesser	3000	3000	3300	3300	3300	3300

6. Domböden mit Mannloch.

(Fig. 105)

Durchmesser	500	600	650	700	750	800	850	900	950
Wölbungshalbmesser	650	750	800	850	900	950	1000	1100	1200

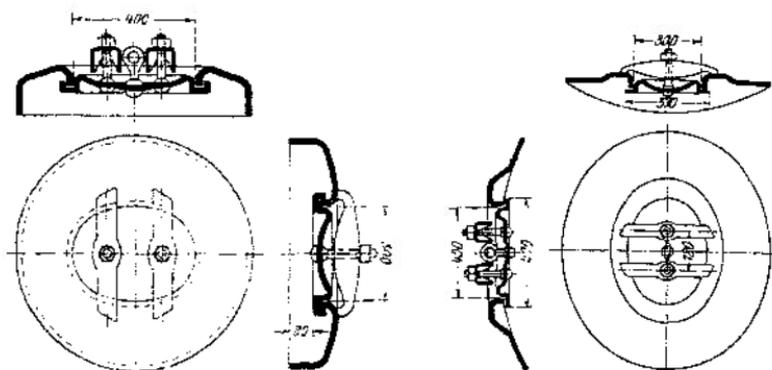


Fig. 105.

Fig. 106.

Mannlochplatten (Fig. 106) zum Aufnieten auf den Kesselmantel werden in verschiedenen Ausführungen und für die verschiedenen Manteldurchmesser passend fertig geliefert. Allgemein ist für Mannlöcher festgesetzt: Lichtweite: 300×400 mm, in Ausnahmefällen 280×380 mm. Sie sind durch Innenverschluß zu dichten. Die Ränder des Deckels sind so zu gestalten, daß die Pakung nicht herausgedrückt werden kann. Die Bolzen der Deckelschrauben (von $1\frac{1}{8}$ " Durchm.) sind im Deckel einzuschrauben und zu vernieten. Für Deckel und Bügel darf Gußeisen, auch getempert, nicht verwendet werden.

Wellen-Flammrohre.

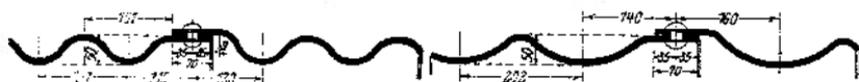


Fig. 107. Fox-Wellrohr.

Fig. 108. Morison-Wellrohr.

Kleinsten Innendurchmesser	Größter Außendurchmesser	Blechstärke
700	800	10 ÷ 14
750	850	10 ÷ 14
800	900	10 ÷ 16
850	950	10 ÷ 16
900	1000	10 ÷ 18
950	1050	10 ÷ 18
1000	1100	10,5 ÷ 20
1050	1150	10,5 ÷ 20
1100	1200	10,5 ÷ 20
1150	1250	10,5 ÷ 20
1200	1300	11 ÷ 20
1250	1350	11 ÷ 20
1300	1400	11,5 ÷ 20
1350	1450	11,5 ÷ 20
1400	1500	11,5 ÷ 20

Größte Längen etwa 6 m. Die Enden werden nach Wunsch, entweder aufgeweitet, eingezogen oder aufgefianscht geliefert.

Heizröhren überlappt geschweißt oder nahtlos gewalzt, erhalten die folgenden Wandstärken:

Äußerer Durchmesser	Wandstärke	Äußerer Durchmesser	Wandstärke	Äußerer Durchmesser	Wandstärke
38	2,00	63,5	3,00	127	4,25
41,5	2,50	70	3,00	140	4,50
44,5	2,50	76	3,00	152	4,50
47,5	2,50	83	3,50	165	4,50
51	2,75	89	3,50	178	4,50
54	2,75	95	3,50	191	5,50
57	2,75	102	3,75	203	6,00
60	3,00	114	3,75	203	6,00

Die Wandstärken werden auch bis 3 mm stärker, in Abstufungen von $\frac{1}{4}$ mm, hergestellt, dabei bleibt der äußere Durchmesser unverändert. (Ankerröhren.)

Für Lokomotiv- und für Schiffskessel verwendet man neuerdings auch gewellte Heizröhren, die von den Mannesmann-Röhrenwerken in Düsseldorf mit 60 ÷ 144 mm Außendurchmesser angefertigt werden.

Wasserröhren. In Bezug auf die Wandstärke der Wasserröhren bestimmen die Materialvorschriften der A. P. B. folgendes:

Äußerer Durchmesser	Wandstärke für	
	überlappt geschweißte Röhren aus Schweißeisen oder Flußeisen	nahtlose Röhren aus Flußeisen
bis 30	3,00	1,80
über 30 „ 50	3,00	2,00
„ 50 „ 57	3,00	2,50
„ 57 „ 60	3,00	2,75
„ 60 „ 83	3,00	3,00
„ 83 „ 102	3,25	3,25
„ 102 „ 121	3,75	3,75
„ 121 „ 140	4,00	4,00
„ 140 „ 191	4,50	4,50
„ 191 „ 216	5,50	5,50

Ferner können fertig bezogen werden: Böden und Rohrwände für Lokomotiven und Lokomobilen, geschweißte Wasserstands- und Verbindungsstutzen, Flammrohrschüsse und ähnliches mehr.

Der Kesselmantel soll möglichst aus einer ungeraden Anzahl von Schüssen bestehen, um konische Schüsse zu vermeiden. Jeder Schuß erhält tunlichst nur eine mindestens zweireihige Längsnaht. Auch die Rundnähte macht man bei Kesseldurchmessern von mehr als 1200 mm und für mehr als 8 Atm. Betriebsdruck zweireihig. Alle Nähte werden gewöhnlich überlappt genietet, nur bei größeren Durchmessern (etwa über 2 m) und höheren Drucken nietet man die Längsnähte mit Innen- und Außenlasche (Nietungen siehe S. 574.)

b) Verbindungen einzelner Kesselteile.

Mantel mit Boden. Gewöhnlich nach Fig. 109, nur bei nicht beheizten Böden, z. B. bei Lokomotiven, Lokomobilen und Schiffskesseln wendet man eine Zusammenfügung nach Fig. 110 an, da sie sich bequem durch maschinelle Nietung herstellen läßt. Bei ausziehbaren Kesseln werden noch Winkelringe nach Fig. 111 zwischen Mantel und Boden eingietet.

Boden mit Flammrohr. Fig. 112 und 113.

Dommantel mit Kesselmantel und Domboden (Fig. 114). Für einen Betriebsdruck von mehr als 8 Atm. wird der Dom zweireihig auf den Kesselmantel aufgenietet. Die Längsnaht des Dommantel wird entweder ganz oder doch wenigstens so weit, als sie in der unteren Krümmung liegt, durch Schweißung hergestellt. Die Blechstärke der Dommäntel wählt man stärker, als sie die Festigkeitsrechnung ergeben würde und zwar:

Domdurchmesser	700	800	900
Mantelblechstärke	$10 \div 12$	$12 \div 14$	$14 \div 16$

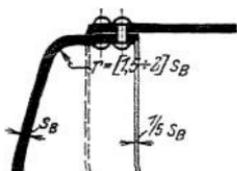


Fig. 109.

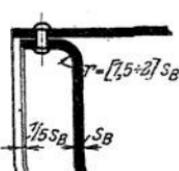


Fig. 110.



Fig. 112.
Aushalsung.



Fig. 113.
Einhalsung.

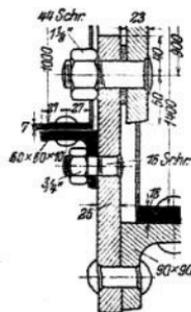


Fig. 111.

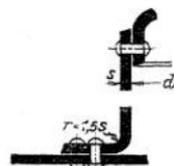
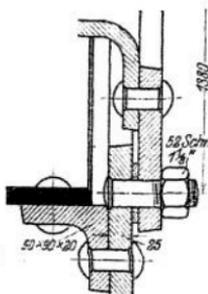


Fig. 114.

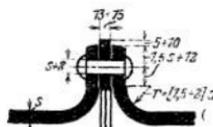


Fig. 115.

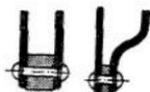


Fig. 116.

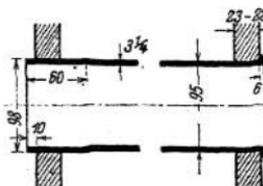


Fig. 117.

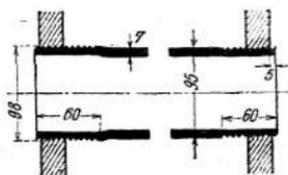


Fig. 119.

Verbindung von Flammrohrschüssen. Bei Wellrohren werden die Schüsse meistens glatt überlappt, einreihig zusammengenietet (vergl. Fig. 107 und 108); dagegen werden glatte Schüsse jetzt fast ausschließlich durch Adamson-Ringe (Fig. 115), miteinander verbunden.

Vorteil: Sie lassen sich sehr bequem maschinell nieten und kein Niet der Verbindung liegt im Feuer.

Verbindung der inneren mit der äußeren Feuerbüchse oder mit dem Kesselmantel: Fig. 116 und 117.

Befestigung der Heizröhren in den Rohrböden. Gewöhnlich werden die Röhren nur eingewalzt und zwar in glatte Löcher (Fig. 118). Die Enden, gegen welche die Flammen oder der heiße Gasstrom trifft, werden umgebördelt.

Verankerung des Ausschnitts über dem Wasserkammerhals.

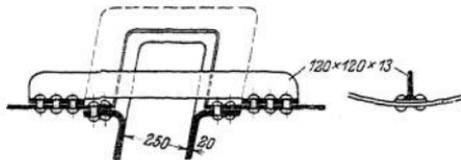


Fig. 127.

Putzloch-Verschlüsse werden hauptsächlich in den Wasserkammern vor jedem Wasserrohr und in Überhitzerkammern gebraucht. Die Deckel werden am besten

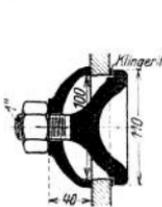


Fig. 128.

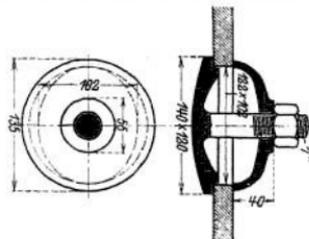


Fig. 129.

stets aus Flußeisen hergestellt. Fig. 128 zeigt eine Ausführung, bei welcher die Deckel durch besondere ovale Handlöcher (Fig. 129) von innen einzusetzen sind.

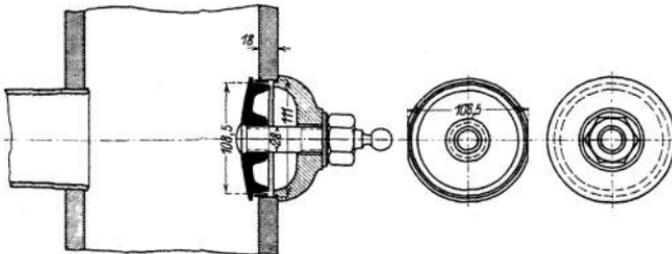


Fig. 130.

Fig. 130 stellt einen Verschluss dar, bei dem der Deckel seitlich abgeflacht ist, so daß er leicht von außen eingebracht werden kann. Nachträglich wird der Kupfer-ring, der sich federnd etwas zusammendrücken läßt, hindurchgeschoben, um auf

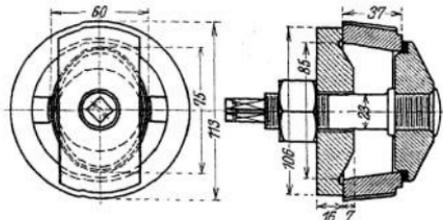


Fig. 131.

die Dichtungsfläche des Deckels gelegt zu werden. Bei nicht befahrbaren Kesseln bringt man Reinigungsöffnungen an, die nach Art der Handlöcher (Fig. 129) oder der Reinigungsluken (Fig. 131) hergestellt werden.

XV. Festigkeitsrechnungen.

Auf Grund der „Materialvorschriften“ und der „Bauvorschriften“ für die Land- und für die Schiffsdampfkessel, die als Anlagen¹⁾ der A. P. B. am 17. Dezember 1908 für das Deutsche Reich erlassen wurden, ist bei der Berechnung der Kesselteile folgendes zu beachten:

a) Die Bleche.

Blechstärke mindestens 7 mm, nur bei Kleinkesseln, z. B. für Feuerspritzen, Automobile u. ä., darf diese Grenze unterschritten werden.

Festigkeit und Dehnung der Bleche sind durch Prüfungen nachzuweisen:

Bezeichnung des Baustoffs	Verwendungszweck	Bruchfestigkeit		Berechnungsfestigkeit K_2	Zerreiße- dehnung in % mindestens	
		kg/qmm	kg/qmm		Längs- Faser	Quer- Faser
Schweißeisen Feuerblech	Für Kesselwandungen im ersten Feuer	36 ÷ 40	34 ÷ 40	die geringste nachgewiesene	20	15
Bördelblech	Für alle übrigen Wandungen	35 ÷ 40	33 ÷ 40		15	12
Flußeisen I	Für Wandungen im ersten Feuer und für Bördelarbeiten	34 ÷ 41		36	28 bei 34 kg Festk. 27 „ 35 26 „ 36 25 „ 37 ÷ 41	
„ II	Für alle übrigen Wandungen	40 ÷ 47		40	24 „ 42 23 „ 43	
„ III	Für alle übrigen Wandungen	44 ÷ 51		44	22 „ 44 21 „ 45 20 „ 46 ÷ 51	

Als Festigkeit des Kupfers kann, wenn nicht höher nachgewiesen: 22 kg/qmm bei Temperaturen bis zu 120° C gesetzt werden, für weitere je 20° C 1 kg/qmm weniger. Bei Temperaturen über 250° soll Kupfer nicht verwandt werden.

b) Zusammenfügung der Bleche.

Nietung siehe S. 568 u. figd.

Schweißung: Die Festigkeit überlappter Schweißnähte kann zu 0,7 derjenigen des vollen Bleches gerechnet werden.

c) Blechstärken zylindrischer Kesselwandungen.

Auf inneren Druck:

Bezeichnet D in mm den inneren Durchmesser eines zylindrischen Mantels,

s „ mm seine Blechstärke,

p „ kg/cm² den genehmigten höchsten Betriebsdruck,

K_2 „ kg/mm² die nach obiger Tabelle in Rechnung zu ziehende Zugfestigkeit des Bleches,

\mathcal{E} den Sicherheitsgrad $\frac{K_2}{k_2}$ gegen Zerreißen,

φ das Güteverhältnis $\frac{t-d}{t}$, d. i. das Verhältnis der Festigkeit des durch die

Nietlöcher verringerten Blechquerschnittes in der Nietnaht zu der des vollen Bleches,

so ergibt sich:

$$s = \frac{D \cdot p \cdot \mathcal{E}}{200 \cdot \varphi \cdot K_2} + 1.$$

Die Werte für φ siehe S. 573, für nahtlose Schüsse kann $\varphi = 1$ gesetzt werden.

Zulässige Werte für \mathcal{E} :

	Hand- nietung	Maschinen- nietung
1. Genietetete Schüsse:		
überlappt oder einseitig gelascht	4,75	4,5
doppeltgelascht, eine Lasche zreiheig die andere nur freiig	4,35	4,1
beide Laschen mindestens zreiheig	4,25	4,0
2. Geschweißte Schüsse		4,5
3. Nahtlose Schüsse		4,0

¹⁾ Jaeger, Dampfkesselbestimmungen. Berlin 1910, S. 112, 142, 199, 216.

Auf äußeren Druck:

Die Rechnung ist für Flammrohre und flammrohrartige Feuerbüchsen durchzuführen.

Bezeichnungen außer den obigen:

d in mm der mittlere innere Durchmesser zylindrischer oder konischer Flammrohrschüsse,

l „ mm die Länge des unversteiften Rohres oder die größte Entfernung zweier aufeinanderfolgender wirksamer¹⁾ Versteifungen (meistens Adamsringe nach Fig. 113),

α eine von der Art der Längsnaht und der Lage des Flammrohres abhängige Zahl.

Dann ist:

$$s = \frac{p \cdot d}{2400} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\alpha}{p} \cdot \frac{l}{d}} \right) + 2.$$

Hierin für α :

Art der Längsnaht:	Lage des Flammrohres	
	liegend	stehend
überlappt genietet	100	70
gelascht genietet oder geschweißt	80	50

Für Wellrohre wird $l = 0$, und somit:

$$s = \frac{p \cdot d}{1200} + 2,$$

wenn d in mm den kleinsten inneren Flammrohrdurchmesser bedeutet. Diese Formel gilt auch im Schiffskesselbau für Wellrohre; dagegen gilt dort für glatte Rohre:

$$s = 0,00375 \cdot \sqrt{p \cdot d \cdot l},$$

und wenn $\frac{p \cdot d}{l} > 3$ ist:

$$s = \frac{p \cdot d}{1000} + \frac{l}{300}.$$

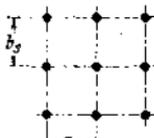


Fig. 132.

d) Blechstärken ebener Wandungen.

1. In flüßeiserner Wand sind Anker regelmäßig verteilt (Fig. 132).

Bezeichnet man mit a_s und b_s in mm die Seiten der Rechtecke, in deren Ecken die zur Versteifung dienenden Anker oder Stehbolzen angebracht sind, so ist die Blechstärke s in mm zu machen:

$$s = c \cdot \sqrt{p \cdot (a_s^2 + b_s^2)},$$

darin ist für die Zahl c zu setzen:

Werte für c .

Ausführung der Anker	Die Wand liegt:	
	heizgasberührt und wasserbespült	nicht heizgasberührt
eingeschraubt und vernietet	0,017	0,015
eingeschraubt und außen mit Mutter versehen	0,0155	0,0135
Ankerlöcher, beiderseits eingeschraubt	0,014	
Mit Mutter versehen, außerdem an der Durchführungsstelle außen und innen Verstärkungsscheiben auf der Wand	heizgasberührt und dampfbespült	nicht heizgasberührt
Durchmesser der Scheibe: $\varnothing = \frac{2}{5} \cdot a_s$ }	0,0143	0,013
Stärke der Scheibe: $s_1 = \frac{2}{3} \cdot s$ }		
$\varnothing = \frac{3}{5} \cdot a_s$ }	0,0132	0,012
$s_1 = \frac{5}{6} \cdot s$ }		
$\varnothing = \frac{4}{5} \cdot a_s$ }	0,0121	0,011
$s_1 = s$ }		

¹⁾ Jaeger, S. 149 u. f.

2. In flußeiserner Wand sind Anker unregelmäßig verteilt (Fig. 133):

$$s = c \cdot \frac{e_1 + e_2}{2} \cdot \sqrt{\bar{p}},$$

wenn für c die obigen Werte und für e_1 und e_2 in mm die Abmessungen nach Fig. 133 eingesetzt werden.

3. Anderweitig verankerte flußeiserne Wände:

$$s = 0,017 \cdot d \cdot \sqrt{\bar{p}},$$

worin d in mm den Durchmesser des größten Kreises bedeutet, den man auf der Wand zeichnen kann, ohne daß eine Befestigungsstelle einer Verankerung innerhalb der Kreisfläche fällt. Bodenkrempungen sind dabei als Verankerungen anzusehen.



Fig. 133.

4. In kupferner Wand sind Stehbolzen regelmäßig verteilt:

$$s = 5,83 \cdot c \cdot \sqrt{\frac{\bar{p}}{K_2} (a_1^2 + b_1^2)}.$$

5. In kupferner Wand sind Stehbolzen unregelmäßig verteilt:

$$s = 5,83 \cdot c \cdot \frac{e_1 + e_2}{2} \sqrt{\frac{\bar{p}}{K_2}}.$$

Die Werte für K_2 bei Kupfer sind nach S. 843 (vgl. S. 400) einzusetzen.

6. Gekrempte ebene Böden ohne Anker.

Bezeichnet d_B in mm den inneren Durchmesser des Bodens,

r „ mm den inneren Halbmesser seiner Krempung (ist dieser nicht angegeben, dann ist zu setzen: $r = 50$),

dann ist:

$$s = \frac{1}{98} \left[d_B - r \left(1 + \frac{2r}{d_B} \right) \right] \cdot \sqrt{\bar{p}}$$

und für Schiffskessel:

$$s = \sqrt{\frac{3 \cdot \bar{p}}{800 \cdot K_2}} \cdot \left[d_B - r \left(1 + \frac{2r}{d_B} \right) \right].$$

7. Ebene Rohrböden.

Bodenfläche außerhalb des Rohrbündels: Hierfür gilt das unter 1., 2., 3., 4., 5. Ausgeführte.

Bodenfläche innerhalb des Rohrbündels: Sind Ankerrohre vorhanden, so gelten ebenfalls die Berechnungen nach 1. u. f.; jedoch muß sein, wenn d_r in mm den äußeren Rohrdurchmesser bezeichnet:

$$\text{bei Flußeisenplatten} \quad s \geq 5 + \frac{d_r}{8} \quad \text{für} \quad (d_r = 38 \div 100),$$

$$\text{„ Kupferplatten} \quad s \geq 10 + \frac{d_r}{5} \quad \text{für} \quad (d_r = 38 \div 75),$$

und der Querschnitt f in qmm des Steges zwischen zwei Rohrlöchern:

$$\text{bei Flußeisenplatten} \quad f \geq 280 \div 450 \quad \text{für} \quad (d_r = 38 \div 100),$$

$$\text{„ Kupferplatten} \quad f \geq 340 \div 850 \quad \text{für} \quad (d_r = 38 \div 75).$$

Für Schiffskessel gilt im gleichen Falle:

$$s = c_1 \cdot l \cdot \sqrt{\bar{p}},$$

wenn mit l in mm der wagerechte Abstand der begrenzenden Rohrreihen, gemessen zwischen ihren senkrechten Mittellinien, bezeichnet und c_1 wie folgt ausgewertet wird:

Werte für c_1 :

c_1	wenn in den begrenzenden Rohrreihen:
0,0215	jedes 3. Rohr ein Ankerrohr ist
0,02	„ 2. „ „ „ „
0,0185	„ „ „ „ „

Sind Ankerrohre nicht vorhanden, so ist die Zulässigkeit der Teilung danach zu beurteilen, ob:

wenn die Röhren beiderseits umgebördelt oder in sich nach außen erweiternden konischen Löchern eingewalzt sind:

$$\sigma = \frac{\bar{p}}{100} \left[\frac{a_r \cdot b_r}{\pi \cdot d_r} - \frac{d_r}{4} \right] \leq 2,5$$

(a_r, b_r, d_r in mm nach Fig. 134), und wenn die Röhren beiderseits in zylindrische Löcher eingewalzt und nicht gebördelt sind:

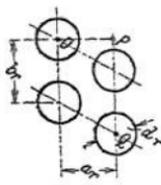


Fig. 134.

$$\begin{array}{l|l} \text{für } p \leq 7 \text{ Atm.} & p > 7 \text{ Atm} \\ \sigma \leq 2,5 & \sigma \leq 4,5 \end{array}$$

Ferner ist die Festigkeit der Wand zu untersuchen nach:

$$\frac{p \cdot e^3}{360 \cdot s^2 \cdot (e - 0,7 \cdot d_r)} \leq \frac{K_z}{4,5},$$

hierin bedeutet: e in mm die Seite des Quadrates, in dessen Ecken die Rohre angebracht sind, oder bei einer Rohrteilung nach Fig. 134 ist

$$e = \frac{OP + PQ}{2}.$$

Ist eine der vorgenannten Bedingungen nicht erfüllt, so sind Ankerröhren einzusetzen. Besonders notwendig ist es, die Randröhren auf die Größe von σ hin zu untersuchen. Sind solche vorhanden, die in den Ecken eines Dreiecks angeordnet sind, so gilt ohne weiteres der oben angegebene Ausdruck für σ , wenn a_r eine Seite des Dreiecks und b_r die dazugehörige Höhe bedeutet.

Für die Stärke, s in mm, einer Feuerbüchsenrohrwand gilt ferner, falls auf der ebenen Feuerbüchsenröhre Bügelanker (siehe Fig. 126) vorhanden sind, die sich auf den oberen Rand der Rohrwand stützen:

$$s \geq \frac{p \cdot w \cdot b_r}{1900 \cdot (b_r - d_{r_1})},$$

worin w in mm die Länge der Feuerbüchse, in Richtung der Ankerbügel gemessen,
 b_r „ „ die Entfernung der nebeneinanderliegenden Röhren von Mitte zu Mitte,
 d_{r_1} „ „ der innere Rohrdurchmesser und, falls alle Röhren der obersten Reihe Anker-
 röhren sind, das Mittel der inneren Durchmesser des Ankerrohres und des
 gewöhnlichen Heizrohres.

e) Blechstärken gewölbter Böden.

1. Volle Böden ohne Verankerung bei innerem Druck.

Bezeichnungen: R in mm der Halbmesser der inneren Wölbung,
 k_z „ kg/qmm die zulässige Zugbeanspruchung.

Dann ist:

$$s = \frac{p \cdot R}{200 \cdot k_z},$$

worin für k_z zu setzen ist:

bis zu 5 kg/qmm für Schweißisen,

„ „ 6,5 „ „ Flußeisen,

„ „ 4,0 „ „ Kupfer, sofern die Dampftemperatur 200° nicht übersteigt.

2. Volle nicht verankerte Böden bei äußerem Druck:

$$s = \frac{p \cdot R}{200 \cdot k}.$$

Hierin ist, wenn k in kg/qmm die zulässige Spannung für alle Baustoffe zu 0,4 derjenigen Spannung zugelassen wird, bei welcher die Durchbeulung des Bodens eintreten würde:

$$k = 0,4 \left[A - \frac{4B}{p} (\sqrt{5A \cdot p + 100B^2} - 10B) \right].$$

A und B sind wie folgt auszuwerten:

Beschaffenheit des Bodens	A	B
Kugelförmiger Boden, aus einem Stück stark gehämmerten Kupfers	25,5	1,2
Boden aus einem Stück geglähten Flußeisen bestehend	26	1,15
Flußeisenboden aus einzelnen Segmenten überlappt zusammengenietet	24,5	1,15

Als obere Grenze für k ist zulässig:

für geglähtes Flußeisen 6,5 kg/qmm
 „ gehämmertes Kupfer (unterhalb 200° C) . . . 4,0 „

Somit sind folgende Werte einzusetzen:

Höchstwerte für k .

Atm. Überdruck	Flußeisenboden aus 1 Stück	Flußeisenboden aus Segmenten überlappt genietet	Kupfer	Atm. Überdruck	Flußeisenboden aus 1 Stück	Flußeisenboden aus Segmenten überlappt genietet	Kupfer
1	1,7	1,7	1,5	14	6,1	5,6	4,0
2	2,7	2,5	2,5	15	6,2	5,7	4,0
3	3,4	3,1	3,2	16	6,3	5,8	4,0
4	3,9	3,6	3,7	17	6,4	5,9	4,0
5	4,3	4,0	4,0	18	6,5	6,0	4,0
6	4,6	4,3	4,0	19	6,5	6,1	4,0
7	4,9	4,6	4,0	20	6,5	6,2	4,0
8	5,2	4,8	4,0	21	6,5	6,2	4,0
9	5,4	5,0	4,0	22	6,5	6,3	4,0
10	5,6	5,1	4,0	23	6,5	6,4	4,0
11	5,8	5,3	4,0	24	6,5	6,4	4,0
12	5,9	5,4	4,0	25			
13	6,0	5,5	4,0	und mehr }	6,5	6,5	4,0

Für R in mm ist der Halbmesser der inneren Wölbung nach den Walzwerkstabellen + 5% Zuschlag für gestattete Abweichung in Rechnung zu stellen.

3. Böden mit Ein- oder Aushaltungen zur Flammrohrbefestigung:

$$s = \frac{p \cdot R}{200 \cdot k}$$

für $k \leq 7,5$ kg/qmm.

f) Schrauben.

Der Minstdurchmesser für im Kesselbau zu verwendende Schrauben ist 13 mm, außen gemessen. Ihre Herstellung aus härtbarem Stahl ist unzulässig. Flußeiserne Schrauben sollen kein scharfes, sondern abgerundetes Gewinde erhalten.

Für Schrauben, die nur auf Zug beansprucht werden, ohne daß in ihnen erhebliche Biegespannungen auftreten können, sind folgende Mindestabmessungen zulässig:

$$d_s = A \sqrt{P_1 + 5}$$

wenn bedeutet:

d_s in mm den Kerndurchmesser der Schraube,

P_1 „ kg den auf die einzelne Schraube entfallenden Teil des Gesamtdruckes P auf der belasteten Fläche,

A eine Zahl, deren Werte der folgenden Zusammenstellung zu entnehmen sind:

Werte für A :

0,45 bei guten Schrauben, guter Bearbeitung der Dichtungsflächen und weichem Dichtungsmittel,

0,55 wenn den eben genannten Bedingungen weniger vollkommen entsprochen ist,

0,4 wenn für das Schraubeneisen eine Zugfestigkeit von $34 \frac{1}{2}$ –41 kg/qmm bei mindestens 25% Dehnung nachgewiesen wurde, so daß die Summe der Festigkeits- und der Dehnungszahl mindestens 62 beträgt, und wenn es außerdem den an Nieteisen gestellten Forderungen entspricht.

Danach ergeben sich für Whitworth-Schrauben folgende zulässige Höchstbelastungen:

Äußerer Durchmesser der Schraube engl. "	mm	Kern- mm	Zulässige Belastung der Schraube		
			Koeffizient 0,4	Koeffizient 0,45	Koeffizient 0,55
$\frac{1}{2}$	12,70	9,98	155 kg	122,5 kg	82 kg
$\frac{3}{8}$	15,88	12,93	393 „	310 „	208 „
$\frac{1}{2}$	19,05	15,80	729 „	576 „	386 „
$\frac{3}{4}$	21,23	18,62	1159 „	916 „	613 „
1	25,40	21,34	1669 „	1318 „	883 „
$1\frac{1}{8}$	28,57	23,93	2240 „	1770 „	1185 „
$1\frac{1}{4}$	31,75	27,10	3053 „	2412 „	1614 „
$1\frac{3}{8}$	34,92	29,51	3755 „	2967 „	1986 „
$1\frac{1}{2}$	38,10	32,69	4792 „	3786 „	2535 „
$1\frac{3}{4}$	41,27	34,77	5539 „	4377 „	2930 „
$1\frac{7}{8}$	44,45	37,95	6785 „	5361 „	3589 „
$1\frac{1}{2}$	47,62	40,41	7837 „	6192 „	4145 „
2	50,80	43,59	9308 „	7355 „	4922 „
$2\frac{1}{4}$	57,15	49,02	12111 „	9569 „	6406 „
$2\frac{1}{2}$	63,50	55,37	15857 „	12528 „	8387 „
$2\frac{3}{4}$	69,85	60,55	19286 „	15237 „	10201 „
3	76,20	66,90	23947 „	18923 „	12667 „

Soll der Ring auf einen gewölbten Boden aufgenietet werden, so ist zu machen:

$$b_r = \delta + \frac{l \cdot s}{2r} \quad \text{und} \quad n = \frac{R \cdot l \cdot \delta}{250 \cdot \pi \delta^2}$$

XVI. Die Kesselausrüstung.

Der Kessel ist mit verschiedenen Vorrichtungen auszurüsten, die zum Teil als Sicherheitsvorrichtungen gesetzlich vorgeschrieben sind¹⁾.

a) Speisevorrichtungen.

„Jeder Dampfkessel muß mit mindestens zwei zuverlässigen Vorrichtungen zur Speisung versehen sein, die nicht von derselben Betriebsvorrichtung abhängig sind. Mehrere zu einem Betriebe vereinigte Dampfkessel werden hierbei als ein Kessel angesehen.“ (§ 4.)

An Stelle einer besonderen Speisevorrichtung darf die Wasserleitung unmittelbar benutzt werden, falls ihr Druck vor dem Kessel dauernd mindestens 2 Atm. höher ist als der genehmigte Höchstdruck im Kessel.

Hauptsächlich aber kommen für die Kesselspeisung in Betracht: Kolben-, Dampfstrahl- und Zentrifugalpumpen.

Die **Kolbenpumpe** wendet man an als Maschinen-Transmissions- und am meisten als schwingungsdlose Dampfpumpe. Letztere ist vor allem deswegen vorteilhaft, weil sie unabhängig von der Betriebsdampfmaschine ist und sich ihre Leistung in einfachster Weise nach dem Speisewasserbedarf genau einstellen läßt. — Als **Handpumpe** ist die Kolbenpumpe nur zulässig, wenn das Produkt aus der Heizfläche des Kessels (in qm) und der Dampfspannung (in Atm. Überdruck) die Zahl 120 nicht übersteigt.

Dampfstrahlpumpen siehe Seite 1010.

Die **Zentrifugalpumpe** wird, elektrisch oder mittels Dampfturbine direkt angetrieben, besonders im Großbetriebe mit Vorteil zur Kesselspeisung benutzt.

Die **Größe der Speisevorrichtungen** ist so zu bemessen, daß jede derselben (oder mehrere zusammen, die dann als eine Vorrichtung gelten) imstande ist dem Kessel doppelt so viel Wasser zuzuführen, als seiner normalen Verdampfungsfähigkeit entspricht. Als solche kann nach Jaeger gelten:

für Ein- und Zweiflammrohrkessel	18 ÷ 20 kg
für Heizröhrenkessel, kombinierte Kessel und Feuerbuchskessel	16 kg
für Wasserröhrenkessel	20 ÷ 30 kg für 1 qm Heizfläche und Stunde.

b) Speiseventile und Speiseleitungen.

„In jeder zum Dampfkessel führenden Speiseleitung muß möglichst nahe am Kesselkörper ein Speiseventil (Rückschlagventil) angebracht sein, das bei Abstellung der Speisevorrichtungen durch den Druck des Kesselwassers geschlossen wird.“ (§ 5.)

Um ein Ecken des Kegels in diesen Ventilen durch den einseitig wirkenden Wasserstrom zu verhindern, ist eine obere Führung des Ventilkegels vorzusehen oder der austretende Wasserstrom durch geeignete Bauart des Ventilgehäuses zu teilen (Bauart Wiß).

Die Größe des Ventils berechnet sich zu

$$\frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{D}{w}$$

wenn

d in mm der Ventildurchmesser,

w „ m die Wassergeschwindigkeit beim Ventildurchtritt und

D „ kg die stündliche Dampfmenge ist.

Für w ist zu setzen $w = 0,5 \div 0,8$ m, je nach der Kesselgröße. —

¹⁾ Abschnitt III der A. P. B.

Durch selbsttätige Einwirkung auf das Speiseventil (und auch auf das Dampfventil der Pumpe), die von sogenannten Speisereglern ausgeübt wird, sucht man mit Vorteil den Wasserstand im Kessel in bestimmten engen Grenzen zu halten. Trotz zuverlässigen Arbeitens dieser Apparate ist jedoch dabei die dauernde Beobachtung des Wasserstandes durch den Heizer dringend geboten. —

„Die Speiseleitung muß so beschaffen sein, daß sich der Dampfkessel bei undichtigem Rückschlagventil nicht durch die Speiseleitung entleeren kann.“

Dieser Anforderung wird durch die sogenannte „Hochspeisung“ entsprochen, d. h. man läßt, wenn das Speiseventil auf dem Kesselmantel angebracht wird, das anschließende Einhängerohr, welches das eintretende Wasser durch den Dampfraum führt, etwa 100 bis 200 mm unter dem festgesetzten niedrigsten Wasserstand endigen oder man bringt, bei Speisung vom Stirnboden aus, das Speiseventil und das sich im Kessel daran anschließende, etwa wagerecht geführte Speiserohr in der genannten Höhe an. Dadurch kann sich der Kessel bei undichtigem Speiseventil nicht viel unterhalb der höchsten Stelle der Feuerzüge vom Wasser entleeren. Weiterer Vorteil: Die im Wasser enthaltene Luft und Kohlensäure kann in den Dampfraum gelangen, ohne sich an der Kesselwand festzusetzen.

Die Form des Einhängerohres oder des Speiserohres ist möglichst gerade oder doch so wenig gekrümmt zu wählen, daß es sich bei kaltem Kessel zur Reinigung leicht herausziehen läßt. Durch eine Rinne unterhalb des nur am Ende schwach gekrümmten Einhängerohres oder durch Löcher auf der oberen Seite wagerechter Speiserohre erzielt man eine günstige Verteilung des Frischwassers im Kessel. Auch läßt sich dadurch verhüten, daß das eintretende Wasser seinen gesamten Kesselstein an Kesselwänden absetzt, die im ersten Feuer liegen.

Jede Speisevorrichtung muß, falls gemeinsame Saug- oder Druckleitungen vorhanden sind, von diesen Leitungen abschließbar sein.

Es empfiehlt sich dabei, zwischen Speisevorrichtung und Absperrvorrichtung ein Sicherheitsventil in die Druckleitung einzufügen, das für den höchsten Kesseldruck $+ 1 \div 2$ Atm. einzustellen ist. Für Schiffskessel werden diese Ventile in allen Druckleitungen der Maschinen- und der Transmissionspumpen gefordert.

Ober- und Unterkessel von Doppelkesseln mit getrennten Wasserräumen müssen ebenso wie Kesselgruppen mit verschiedenem Betriebsdruck je für sich gespeist werden können.

Weiter sind noch die Vorrichtungen zu erwähnen, die das Wasser, ehe es in den Wasserraum gelangt, dadurch von seinem Gehalt an Kesselsteinbildnern befreien wollen, daß sie es zunächst im Dampfraum liegenden Becken oder Rinnen zuführen. Über diese Becken rieselt das Wasser in feinen Strahlen (Vapor; Petrefakt), in den Rinnen läuft es in ganz dünner Schicht entlang (Antilithor). Der dabei ausfallende Schlamm wird in geschlossenem Rohre in die Nähe des Ablaufstutzens geführt.

c) Absperr- und Entleerungsvorrichtungen.

„Jeder Dampfkessel muß mit einer Vorrichtung versehen sein, durch die er von der Dampfleitung abgesperrt werden kann.“

Ausführung der Ventile siehe S. 745 u. f.

Für die **Größe des Absperrventiles** gilt:

$$\frac{\pi d^2}{4} = 600 \cdot \frac{D}{\gamma \cdot c},$$

darin bedeutet:

d in mm den Ventildurchmesser,

c „ m die Dampfgeschwindigkeit,

D „ kg die stündliche Dampfmenge,

γ „ kg/cbm das Dampfgewicht beim Kesseldruck.

Für c wählt man im allgemeinen:

$$c = 20 \div 30 , \\ = 15 \div 20 \text{ für sehr lange Leitungen.}$$

Selbstschluß - (Rohrbruch-) Ventile werden nur in vereinzelt Fällen bei gußeisernen Leitungen behördlich gefordert.

„Wenn mehrere Kessel, die für verschiedene Dampfspannung genehmigt sind, ihre Dämpfe in gemeinschaftliche Dampfleitungen abgeben, so müssen die Anschlüsse der Kessel mit niedrigerem Drucke an die gemeinsame Dampfleitung unter Zwischenschaltung eines Rückschlagventils erfolgen.“

Außerdem dürfte es sich empfehlen, noch ein Druckverminderungs- oder ein Druckregler-Ventil in die Anschlüsse der Kessel mit höherem Druck einzubauen, das nach der Hochdruckseite abgesperrt werden kann. Ferner wäre die gemeinsame Dampfleitung mit Manometer und Sicherheitsventil zu versehen.

„Jeder Dampfkessel muß zwischen dem Speiseventil und dem Kesselkörper eine Absperrvorrichtung erhalten, auch wenn das Speiseventil abschließbar ist.“

Das letztere wird heute kaum noch ausgeführt. — Das Absperrventil ist mit Vorteil so einzusetzen, daß das durchströmende Wasser den von der Spindel gelösten Kegel nicht auf den Sitz niederdrücken würde.

„Jeder Dampfkessel muß mit einer zuverlässigen Vorrichtung versehen werden, durch die er entleert werden kann.“

An der tiefsten Stelle des Kessels, geschützt gegen die Einwirkung der Heizgase und leicht zugänglich wird zu diesem Zweck entweder ein Absperrventil oder ein Hahn oder beides hintereinander, das Ventil zunächst dem Kessel zunächst, möglichst nahe dem Kesselkörper angebracht. Letztere Anordnung gewährt die größte Sicherheit und gestattet auch bei einfachster Bauart der Absperrorgane ein gefahrloses Abschlämmen des Kessels — Ablassen des Kesselinhaltes nach längeren Betriebspausen bis zum Niedrigsten Wasserstande —. Ähnliche Vorteile gewähren auch Doppelventile (Fig. 136).

Abblämmventile mit selbsttätigem Schluß, bei denen der Ventilkegel nur durch andauernde Betätigung eines Hebels offen gehalten wird, (Fig. 137) haben sich gut bewährt. Besonders vorteilhaft ist, daß man durch Drehen des Kegels die zwischen den Dichtungsflächen eingeklemmten Kesselsteinsplitter leicht entfernen kann.

Die Ablaßhähne zeigen den Mangel, daß sie nach längerer Nichtbenutzung durch Festbrennen des Kükens im Gehäuse oder beim Abschlämmen dadurch, daß sich das Hahnkükens höher erwärmt als das Gehäuse, leicht ungangbar werden. Man hat sich daher bemüht, sie durch Anbringen von Schmiervorrichtungen, von Anwärmkammern im Gehäuse, durch Kühlung des Kükens u. a. mehr zu verbessern.

Den Durchmesser der Ablaßvorrichtung wähle man etwa gleich dem des Speiseventils.

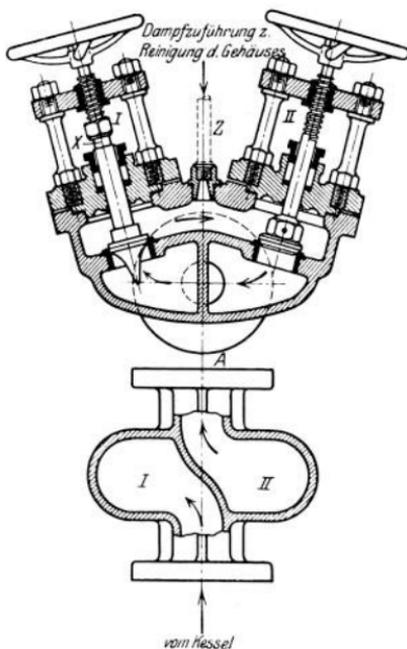


Fig. 136. Doppel-Ablaßventil.
Bauart: Dreyer, Rosenkranz & Droop.

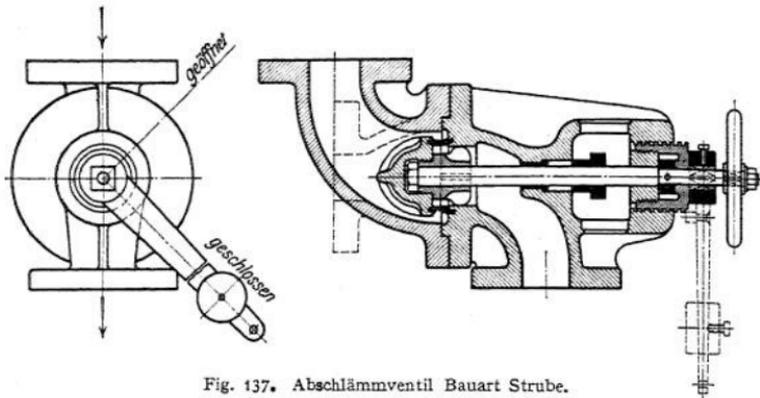


Fig. 137. Abschlammventil Bauart Strube.

d) Wasserstandsvorrichtungen.

„Jeder Dampfkessel muß mit mindestens zwei geeigneten Vorrichtungen zur Erkennung seines Wasserstandes versehen sein, von denen wenigstens die eine ein Wasserstandsglas sein muß.“ (§ 7.)

Als zweite Vorrichtung können statt eines Glases nur Probierhähne oder Probierventile angewendet werden.

Für Schiffskessel werden 3 Vorrichtungen gefordert und zwar mindestens 2 Gläser. Diese sollen in einer zur Längsrichtung des Schiffes senkrechten Ebene in gleicher Höhe und in gleicher möglichst großer Entfernung von der Kesselmitte angebracht werden. Doppelter erhalten außerdem an der anderen Stirnseite noch mindestens ein Wasserstandsglas möglichst nahe der Kesselmitte.

Höhenlage der Vorrichtungen am Kesselkörper (Fig. 138 u. 139).

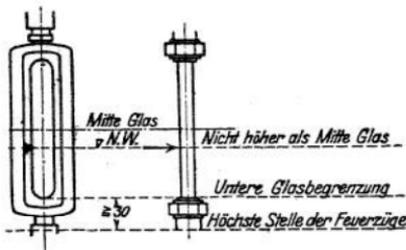


Fig. 138.

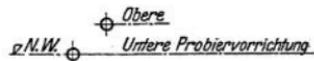


Fig. 139.

Jede Wasserstandsvorrichtung ist im allgemeinen für sich mit dem Kessel zu verbinden und zwar durch Röhren ohne scharfe Krümmung (unter Vermeidung von Wasser- und Dampfsäcken); die Röhren sind gegen die Einwirkung der Heizgase zu schützen. Als geringste Lichtweiten sind anzuwenden:

für gerade Röhren	20 mm Durchm.
für gebogene Röhren bei $H \leq 25$ qm	35 " "
für gebogene Röhren bei $H > 25$ qm	45 " "

Im Kesselinnern dürfen gebogene Zuleitungsröhren an den Wasserstandseinrichtungen nicht angebracht werden.

Bei Landkesseln ist es zulässig, alle Wasserstandsvorrichtungen eines Kessels an einem gemeinsamen Körper anzusetzen, wenn dessen Verbindungen mit dem Dampfraum und mit dem Wasserraum mindestens je 6000 qmm (etwa 90 mm Durchmesser) lichten Querschnitt haben.

Sollen 2 Gläser gesondert mit dem Kessel verbunden werden, so ist es gestattet, ihre Dampfrohre vor dem Kessel zu vereinigen, wenn das gemeinsame Rohr mindestens denselben Querschnitt, wie beide Röhren zusammengenommen, hat. —

Ausführung der Vorrichtungen.

Mindestlichtweite für die Gläser und die Bohrungen 8 mm. —

Die Hähne und Ventile aller Wasserstandsvorrichtungen müssen sich während des Betriebes in gerader Richtung durchstoßen lassen.

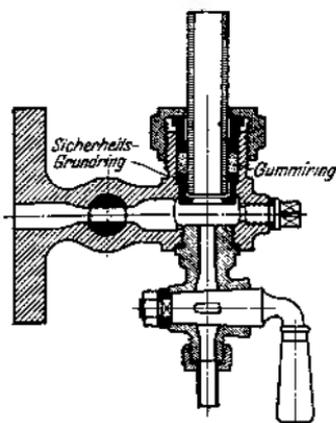
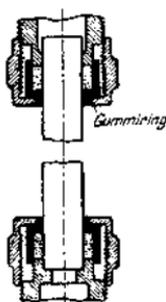


Fig. 140.

Bauart: J. B. Schwietzke G. m. b. H. Düsseldorf.

Fig. 141.
Bauart Strube.

Die Wasserstandsköpfe sind so zu gestalten, daß das Dichtungsmaterial (Gummiringe) nicht eine Verstopfung der Glasenden herbeiführen kann. — (Vgl. Fig. 140 und 141.)

Die Küken aller Hähne an den Vorrichtungen sollen sich völlig umdrehen lassen. Auf ihren Köpfen ist die Durchgangsrichtung deutlich zu kennzeichnen. Ihre Bohrungen sind so zu bemessen, daß sich der Durchgangsquerschnitt durch Nachschleifen nicht vermindert.

Zur Erkennung der Wasserstandshöhe in den Wasserstandsgläsern sind statt der Glasröhren auch ebene Glaswände, Klingergläser, in denen das Wasser schwarz und der Dampf silbern erscheint, im Gebrauch (Fig. 142 und 143).

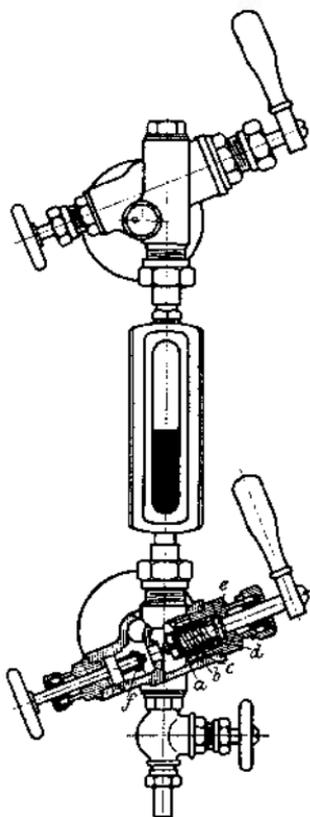


Fig. 142.

Wasserstand mit Klingerglas. Bauart: C. F. Scheer & Co. Feuerbach-Stuttgart a, b, c, d e Teile des Ventilverschlusses; f Hilfsverschluß, der das Auswechseln der Dichtungsplatte im Hauptverschluß unter Druck ermöglicht.

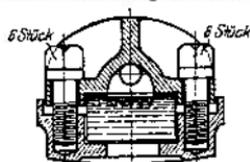


Fig. 143. Schnitt durch Klingerglasgehäuse.

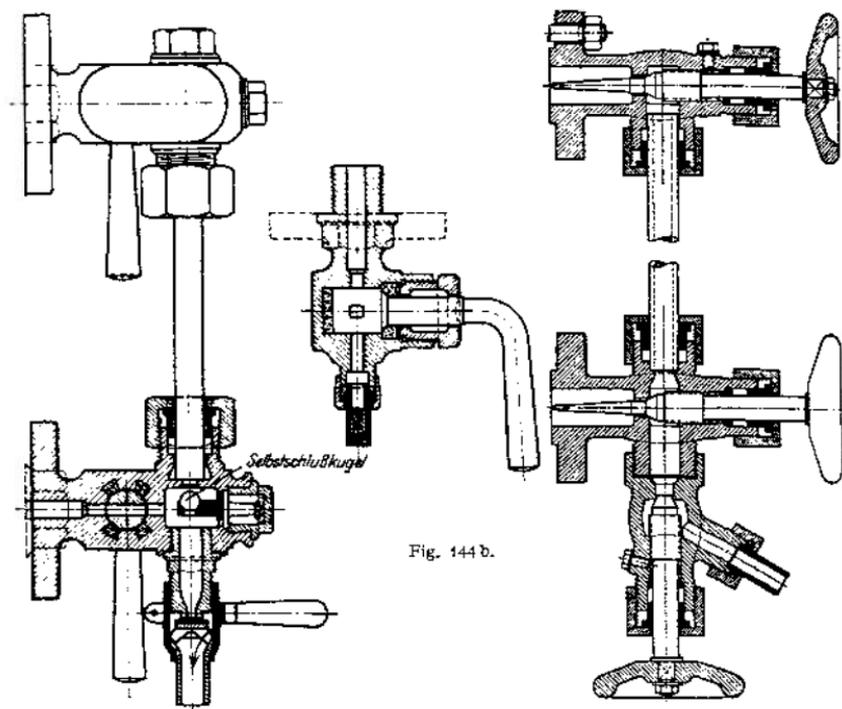


Fig. 144 b.

Fig. 144 a. Wasserstand. Bauart: Dreyer, Rosenkranz & Droop. Hähnehäuser mit Asbesteinlagen.

Fig. 145. Wasserstand aus Stahlguß. Bauart: Garbe.

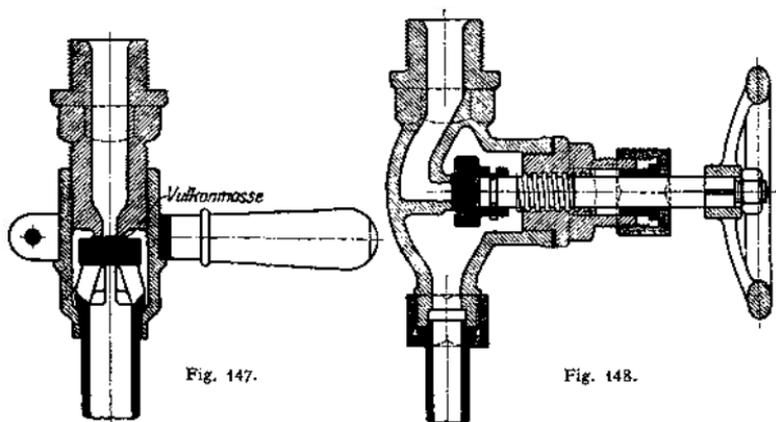


Fig. 147.

Fig. 148.

Abschlußventile für Wasserstände mit austauschbaren Dichtungsplatten (vgl. Fig. 144).

Bei letzteren können die gläsernen Schutzvorrichtungen, wie sie bei Röhren-gläsern vorgeschrieben sind, in Fortfall kommen, auch erübrigt sich die Anbringung einer Selbstschlußeinrichtung im unteren Wasserstandskopf (Fig. 144).

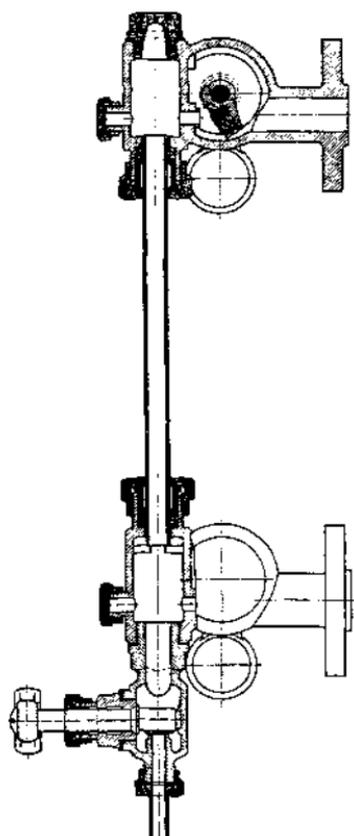
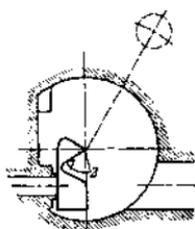
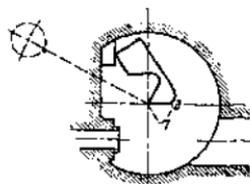
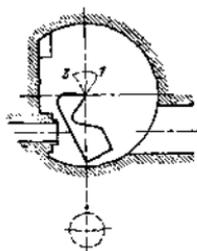


Fig. 146 a.

Wasserstand mit Klappenverschlüssen.

Mittels Handgriffes
geschlossen.Zum Durchstoßen ganz
geöffnet.

Betriebsstellung.

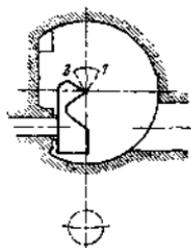
Stellung nach erfolgtem
Selbstschluß.

Fig. 146 b.

Die verschiedenen Stellungen der Verschlussklappen.

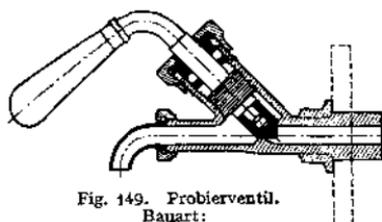


Fig. 149. Probierventil.

Bauart:

Dreyer, Rosenkranz & Droop.

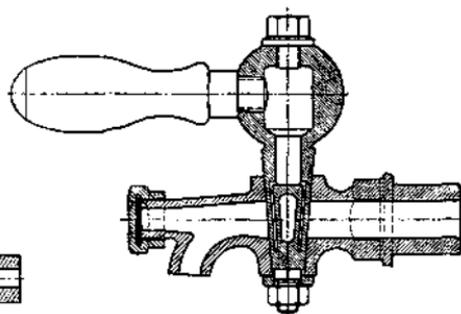


Fig. 150. Probierventil mit Schmierung.

Bauart: Schäffer & Budenberg.

Die besprochenen Vorrichtungen werden im allgemeinen aus Bronze — am besten zinkfrei — hergestellt, doch hat man auch neuerdings andere Stoffe z. B. Stahlguß angewendet. Letzteren namentlich wegen seiner Widerstandsfähigkeit gegen alkalische Wässer (Fig. 145).

Als Absperrorgane kommen, auch bei den Probiervorrichtungen, Hähne, Ventile und Klappen vor. Von den Hähnen haben sich besonders die mit Schmierung bewährt. (Vgl. Fig. 146, 147, 148, 149 und 150.)

e) Die Wasserstandsmarke.

„Der für den Dampfkessel festgesetzte niedrigste Wasserstand ist durch eine an der Kesselwand anzubringende feste Strichmarke von etwa 30 mm Länge, die von den Buchstaben N. W. begrenzt wird, dauernd kenntlich zu machen.“ (§ 8.)

Ferner ist neben oder hinter den Gläsern ein wagerechter Zeiger und ein Schild mit der Aufschrift „Niedrigster Wasserstand“ in Höhe der festen Strichmarke je nach der Lage der Vorrichtung entweder an der Kesselwand oder am Wasserstandskörper zu befestigen, bei Schiffskesseln außerdem noch ein Schild mit der Aufschrift „Höchster Feuerzug“, das die Lage der höchsten Feuerzüge nach der Richtung der Schiffsbreite angeben soll.

f) Das Sicherheitsventil.

„Jeder feststehende Dampfkessel ist mit wenigstens einem zuverlässigen Sicherheitsventil, jeder bewegliche Dampfkessel mindestens mit zwei solchen Ventilen zu versehen.“ (§ 9.)

Für Schiffskessel werden wenigstens zwei Ventile verlangt.

„Die Sicherheitsventile dürfen höchstens so belastet werden, daß sie bei Eintritt der für den Kessel festgesetzten Dampfspannung den Dampf entweichen lassen.“

Anbringung und Bau der Ventile.

Sie sind, nicht vom Kessel absperrbar, möglichst unmittelbar an einer zugänglichen Stelle des Kesselkörpers zu befestigen, damit Anlüften des Ventilkegels und Drehen desselben auf dem Sitz leicht möglich ist.

Sind zwei Ventile vorgeschrieben, so muß ihre Belastung unabhängig voneinander sein.

Für feststehende Kessel werden allgemein Ventile mit Gewichtsbelastung, für bewegliche Kessel meist solche mit Federbelastung gebraucht. Die Sicherheitsventile der Schiffskessel und auch vielfach die der Überhitzer zeigen direkten Angriff der Feder am Ventil.

Größe der Ventilfläche.

Die Größe des Dampfdruckes auf die Ventilfläche darf 600 kg nicht überschreiten, ergibt die Rechnung danach eine zu große Ventilfläche, so sind zwei Ventile anzubringen.

Für den Gesamtventilquerschnitt — F in qmm — der Sicherheitsventile eines Kessels, ergibt sich, wenn:

p in Atm.-Überdruck den genehmigten Höchstdruck,

H in qm die Heizfläche des Kessels,

γ in kg/cbm das Gewicht des Dampfes beim Drucke p

bedeutet:

$$F = k \cdot H \cdot \sqrt{\frac{1000}{p \cdot \gamma}}$$

Hierin ist zu setzen:

für $k = 15$ bei gewöhnlichen Niederhub- und bei Hochhubventilen.

≥ 5 bei Vollhubventilen, d. s. Ventile, bei denen durch besondere Gestaltung des Gehäuses ein seitliches Austreten des Dampfes zwischen Sitz und Kegel verhindert ist und bei denen ein Ventilhub von mindestens einem Viertel des Durchmessers erreicht wird.

Ausführungen von Sicherheitsventilen siehe S. 755.

g) Das Manometer.

„Mit dem Dampfraum jedes Dampfkessels muß ein (bei Schiffskesseln zwei) zuverlässiges nach Atmosphären geteiltes Manometer verbunden sein.“ (§ 10.)

Seine Anbringung an einem (zwei Wasserstandsvorrichtungen gemeinsamen) Wasserstandskörper ist zulässig.

Zur Zeit kommen nur zwei verschiedene Manometerbauarten zur Anwendung, und zwar solche mit Plattenfedern (Fig. 151) und solche mit Röhrenfedern (Fig. 152). Bei letzteren wird das federnde Rohr, mit Vorteil hängend angeordnet, da es so immer mit Flüssigkeit gefüllt bleibt. Außerdem ist, namentlich für hohe Drücke die Verbindung des Federrohres mit einer Stahlfeder von günstigster Wirkung.

„An dem Zifferblatte des Manometers ist die festgesetzte höchste Dampfspannung durch eine unveränderliche, in die Augen fallende Marke zu bezeichnen.“

Die Teilung soll im allgemeinen bis 5 Atm. über diese Marke fortgeführt sein.

Das Manometer ist so anzubringen, daß es vor der strahlenden Wärme möglichst geschützt ist. Ferner ist vor demselben im Zuleitungsrohr ein Wassersack und ein mit einem Dreiweghahn versehener Stutzen zur Anbringung des Kontrollmanometers einzubauen. Bei beweglichen und bei Schiffskesseln wird

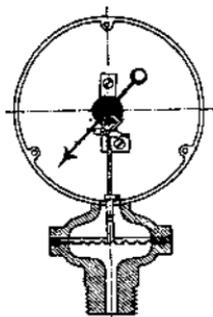


Fig. 151.

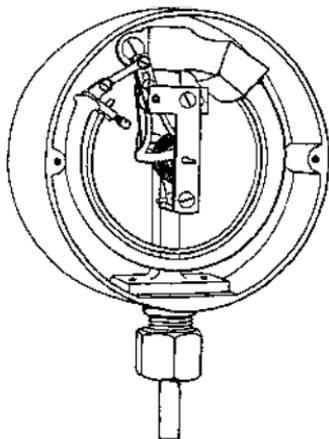


Fig. 152.

Bauart: Dreyer, Rosenkranz & Droop.

in allen Deutschen Bundesstaaten ein ovaler, mit Schlitz versehener Flansch am Kontrollstutzen angebracht, in Preußen auch bei feststehenden Kesseln, in den übrigen Staaten werden im letzteren Falle teils noch runde Flansche, teils mit Gewinde versehene Köpfe gebraucht.

h) Das Fabrikschild.

An jedem Dampfkessel muß, fest am Kesselkörper, und stets sichtbar bleibend, ein metallenes Schild angebracht werden, das folgende Angaben zu enthalten hat:

Festgesetzte höchste Dampfspannung,
Namen und Wohnort des Fabrikanten,
laufende Fabriknummer,
Jahr der Anfertigung.

Außerdem noch bei Schiffskesseln den Mindestabstand des festgesetzten niedrigsten Wasserstandes von der höchsten Stelle der Feuerzüge.

i) Die Armaturstutzen

dürfen, falls aus Gußeisen oder Temperguß hergestellt, nur für Kessel bis einschließlich 10 Atm. Überdruck benutzt werden, wenn ihre lichte Weite 250 mm nicht übersteigt. (§ 2) In allen übrigen Fällen sind Stutzen aus Stahlguß oder Schmiedeeisen zu verwenden.

Die Stutzen, an welchen die verschiedenen Ventile oder Rohrleitungen angeschraubt werden, sind am Kesselkörper durch Nietung zu befestigen. Dabei ist unter den gegossenen zum Abdichten ein bis zu 10 mm starkes Stemmblech einzunieten.

An Stutzenformen finden sich am häufigsten: Domkrümmer; in Lichtweiten von 40 bis etwa 200 mm, mit Wandstärken von 15 ÷ 20 bei Gußeisen: 10 ÷ 15 bei Stahlguß und 8 ÷ 12 bei Schmiedeeisen. Gerade Stutzen: 150 ÷ 300 mm hoch, die übrigen Maße wie bei den Krümmern.

Die Kraft- und Arbeitsmaschinen mit Kolbenbewegung.

Bearbeitet von H. Dubbel.

I. Die Dampfmaschinen.

Es bezeichnen:

PSi die indizierte Pferdestärke,

PSe die nutzbare oder effektive Pferdestärke,

N_i die Anzahl der PSi,

N_e die Anzahl der PSe,

$\eta = \frac{N_e}{N_i}$ den mechanischen Wirkungsgrad,

p die Einströmspannung in kg/qcm absolut,

p_g die Ausströmspannung in kg/qcm absolut,

p_m den mittleren Druck in kg/qcm,

D den Kolbendurchmesser,

O die wirksame Kolbenfläche unter Berücksichtigung des Kolbenstangenquerschnittes in qm,

s den Hub in m, $r = 0,5 s$ den Kurbelradius,

n die minutliche Umlaufzahl,

$c = \frac{2 n \cdot s}{60} = \frac{n \cdot s}{30}$ die mittlere Kolbengeschwindigkeit in m/sek.,

1. Das Dampfdiagramm.

Fig. 1 stellt das Dampfdiagramm einer Einzylindermaschine dar. Es bedeuten die Strecken: $f a$ Voreinströmung, $a b$ Füllung, $b c$ Vorausströmung, $d e$ Auslaß, $e f$ Kompression. s_0 gibt die Größe des schädlichen Raumes an. Die Voreinströmung ist so zu wählen, daß in der Kolbentotlage schon der volle Eintrittsdruck im Zylinder vorhanden ist. Im Kurbelwinkel gemessen, beträgt die Voreinströmung 8 bis 15°, wobei die kleineren Werte für langsamlaufende, die größeren für raschlaufende Maschinen gelten.

Die Größe der Füllung wird durch die Rücksicht auf möglichst wirtschaftlichen Betrieb bestimmt. Wo dieser angestrebt wird, sind Enddrücke von 0,6 bis 1,0 Atm. Überdruck bei Auspuff, bzw. 0,6 bis 1,0 Atm., absolut bei Kondensation normale Grenzwerte, im letzteren Fall ebenso für Einzylindermaschinen wie für Verbundmaschinen. Bei den Zweizylindermaschinen mit Auspuff geht die Expansion bis auf eine absolute Endspannung von 1,7 bis 1,25 Atm., bei Dreifachexpansionsmaschinen, die stets mit Kondensation ausgeführt werden, auf 0,6 bis 0,4 Atm. absolut herunter. Bei hohen Kohlenpreisen und ununterbrochenem Betrieb sind die kleineren Werte zu wählen, womit die Anlagekosten wegen der größeren Maschine zunehmen, also ebenso Verzinsung und Abschreibung, während infolge der besseren Dampfausnutzung die Betriebskosten abnehmen. Eine

weitere Verminderung des Expansionsenddruckes, durch welche die in Fig. 1 schraffierte Fläche gewonnen würde, verbietet sich mit Rücksicht auf die höheren Anlagekosten und die mit der Zylindergröße wachsende Eigenreibung und verstärkte Kondensation des eintretenden Dampfes an den ausgedehnten Zylinderwandungen.

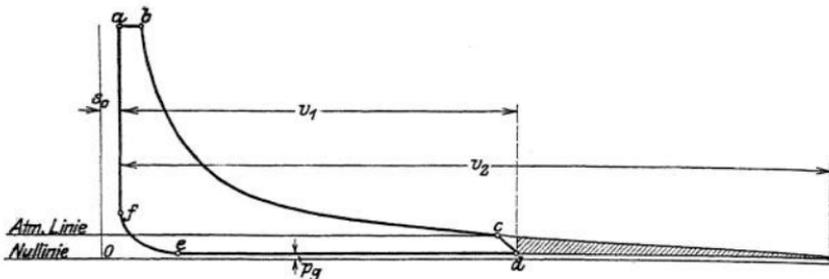


Fig. 1.

Höchstfüllung: bei Einzylindermaschinen etwa 60 v. H., bei Hochdruckzylindern von Verbundmaschinen etwa 70 v. H., damit die Maschinen leicht anspringen und vorübergehend größere Beschleunigungsarbeit leisten können. Kleinste Füllung 0 bis 5 v. H., je nach dem Widerstande, der im Leerlauf zu überwinden ist. Bei Kondensationsmaschinen ist hierbei die Arbeit zu berücksichtigen, die vom Inhalt des bei der Voreinströmung aufgefüllten schädlichen Raumes geleistet wird. Hier deshalb oft „00-Füllung“ (oder absolute Nullfüllung): es findet keine Voreinströmung statt.

Die Expansionslinie zeigt bei gesättigtem Dampf und normalem Verlauf annähernde Übereinstimmung mit einer vom absoluten Nullpunkt O aus entworfenen gleichseitigen Hyperbel. Ist der Zylinder geheizt, der Dampf trocken, so ist der Exponent der Gleichung $p v^n = \text{konst.}$ in der ersten Hälfte der Expansionslinie häufig größer als 1, im Niederdruckzylinder kleiner als 1. Für schwach überhitzten Dampf ist $n \approx 1,05$, für hochüberhitzten Dampf $n = 1,25$. Für größere Exponenten fällt die Expansionslinie stärker, bei gleicher Füllung nimmt sonach der Diagramminhalt ab.

Mit der Vorausströmung wird Erzielung niedrigsten Gegendruckes schon in Totlage bezweckt. Bei raschlaufenden Maschinen beträgt die Vorausströmung 15 bis 20 v. H., bei langsamlaufenden 5 bis 7 v. H. Bei kleinen Füllungen von Auspuffmaschinen wird Entstehung einer Schleife durch große Vorausströmung vermieden.

Die Gegendrucklinie soll möglichst tief liegen. Ihr Verlauf hängt — wie bei der Einströmung — von der Größe der Vorausströmung und den in den Kanälen zugelassenen Dampfgeschwindigkeiten ab. Bei normalen Auspuffmaschinen ist $p_g = 0,1$ bis $0,15$ Atm. Überdruck, bei Kondensationsmaschinen $p_g = 0,15$ bis $0,2$ absolut. Die Kompressionslinie wird meist als gleichseitige Hyperbel gezeichnet, zeigt aber größere Abweichung von dieser als die Expansionslinie. Bezüglich des durch die Kompression beeinflussten Druckwechsels in den Lagern des Kurbeltriebes s. S. 1025.

Wird die Kompression bis zur Eintrittsspannung getrieben, so braucht der schädliche Raum nicht aufgefüllt zu werden. Gegenüber einer Maschine mit gleich großem schädlichen Raum und ohne Kompression wird der Diagramminhalt kleiner, was durch zusätzliche Füllung auszugleichen ist. Diese und die Leistung der Kompressionsarbeit durch das Schwungrad unter doppeltem Reibungsverlust verringern den Gewinn durch Nichtauffüllung des schädlichen Raumes. Meist steigt die Kompression etwa bis zu $\frac{2}{3}$ der Eintrittsspannung an.

Ermittlung der Leistung aus dem Diagramm.

Es ist:

$$N_i = \frac{10000 \cdot O \cdot p_m \cdot c}{75} = 4,44 O \cdot p_m \cdot s \cdot n,$$

$$N_e = \eta \cdot N_i.$$

$\eta = 0,82$ bis $0,93$ je nach Ausführung der Maschine; bei stehender Anordnung ist η etwas größer als bei liegender.

p_m wird durch Aufzeichnung des Diagramms ermittelt (Fig. 2). Von Punkt O aus, dessen Lage durch die Größe von s_0 gegeben ist, werden Strahlen nach den beliebigen Teilpunkten 1, 2, 3 gezogen, die die durch Füllungsende b gehende Senkrechte in I, II, III schneiden. Die Übertragung dieser Schnittpunkte auf die Teillinien durch 1, 2, 3 ergibt Punkte der gleichseitigen Hyperbel. Eintragung der Vorausströmungslinie nach Gutdünken. Durch den Endpunkt der gewählten Kompression wird eine Wagerechte gelegt, die zum Schnitt mit dem durch Punkt x (Schnittpunkt der verlängerten Gegendrucklinie mit der die Kolben-totlage bezeichnenden Senkrechten) gezogenen Strahl Oy gebracht wird. Ist hingegen Kompressionsbeginn gegeben, so legt der Schnittpunkt der im Anfangspunkt der Kompression errichteten Senkrechten mit Oy die Kompressionshöhe fest.

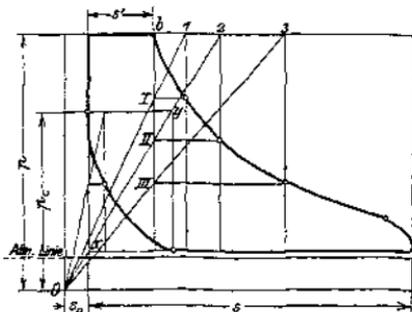


Fig. 2.

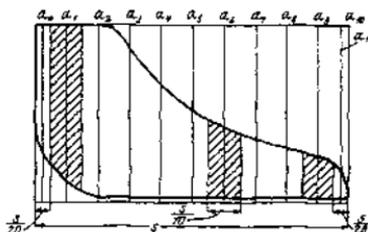


Fig. 3.

Fig. 3 zeigt die Feststellung des mittleren Druckes p_m . In einem Abstand von $\frac{1}{10}$ der Diagrammlänge werden die Ordinaten a_1 bis a_9 in einer Entfernung vom Rande gleich $\frac{1}{10}$ der Breite eines Teiles die Ordinaten a_0 und a_{11} gezogen. Jede Ordinate ist mittlere Höhe eines Trapezes. Es wird die Diagrammfläche:

$$J = \frac{s}{20} \cdot (a_0 + a_{11}) + \frac{s}{10} (a_1 + a_2 + \dots + a_9), \text{ oder:}$$

$$J = \frac{s}{10} \left(\frac{a_0}{2} + a_1 + a_2 + \dots + a_9 + \frac{a_{11}}{2} \right).$$

Nun kann $J = s \cdot h$ gesetzt werden, wenn $h =$ mittlerer Diagrammhöhe. Es folgt:

$$h = \frac{1}{10} \left(\frac{a_0}{2} + a_1 + \dots + a_9 + \frac{a_{11}}{2} \right).$$

h wird unter Berücksichtigung des Druckmaßstabes in p_m umgerechnet. Die Diagrammlänge wird meist zu 100 mm angenommen, Druckmaßstab so gewählt, daß Diagrammhöhe = 60 bis 70 mm.

2. Die Steuerungen.

Es bezeichnen:

 $f =$ Kanalquerschnitt, $h =$ Kanalhöhe, $a =$ Kanalbreite. $u =$ Dampfgeschwindigkeit.

Dann ist:

$$O \cdot c = u \cdot f; \quad f = \frac{O c}{u}.$$

Die Gleichung setzt ganz freigelegten Kanal bei mittlerer Kolbengeschwindigkeit voraus. Die höchste Kolbengeschwindigkeit steigt auf das ungefähr 1,6fache (für $L = \infty$ auf das $\frac{\pi}{2}$ fache) der mittleren, so daß sich u in demselben Maße vergrößert.

Es beträgt die Kanalhöhe:

$$h = 0,65 D \text{ bis } 0,8 D \text{ für Flachschieber,}$$

$$h = 0,9 D \text{ bis } 1,1 D \text{ für Corliss-Schieber.}$$

Werte von u : Bei Flachschiebern wird $u = 40$ m/sek. und darüber gewählt, um kleine Abmessungen des Schiebers und des Schieberspiegels, sowie geringere Reibungsarbeit zu erhalten. Bei Kolbenschiebern ist $u = 30$ bis 35 m/sek., bei Corliss-Schiebern $u = 40$ m/sek.

Für Ventile gelten folgende Werte von u , bezogen auf die unverengte Durchtrittsfläche (vgl. S. 877, wo also $\varphi = 1$ zu setzen):

Einlaß-Hochdruckzylinder:	$u = 25 - 35$
Auslaß- „	$u = 20 - 30$
Einlaß-Niederdruckzylinder:	$u = 30 - 40$
Auslaß- „	$u = 25 - 35$

Nach Schüle ist bei Annahme einer Eintrittsdrosselung von 0,1 Atm.:

für $p = 5 \quad 8 \quad 11$ Atm. Eintrittsdruck
zulässig $u = 42 \quad 33 \quad 28$ m/sek.

Für die Drosselung Δp gilt allgemein:

$$u = 294 \frac{\sqrt{\Delta p}}{p}.$$

Der Austrittsquerschnitt ist reichlicher zu bemessen. Auspuffgeschwindigkeit $u = 25$ bis 30 m/sek.

Für die Wahl der Steuerung ist hauptsächlich bestimmend: Leichte Verstellung durch den Regulator. Geringe Eigenreibung. Gute Dichtigkeit. Kleine schädliche Räume und Flächen. Eignung für überhitzten Dampf. Für Maschinen mit einem Hubverhältnis $\left(\frac{D}{s}\right)$ von ungefähr 1 : 2 und einer mittleren Kolbengeschwindigkeit von 2 bis 3 m/sek. beträgt der schädliche Raum in v. H. des Hubvolumens:

3 bis 6 v. H. bei Rundschiebern,	} Grundschieberinhalt eingerechnet.
5 bis 7 v. H. bei Ventilen,	
4 bis 8 v. H. bei Flachschiebern	
6 bis 12 v. H. bei Kolbenschiebern	

Die niedrigen Werte für Flach- und Kolbenschieber lassen sich durch Lagerung derselben dicht am Zylinder erreichen.

Sind die Corliss-Schieber oder Ventile im Deckel untergebracht, so verringern sich die angegebenen Werte um ungefähr 30 v. H.

Was die Dichtigkeit betrifft, so verhalten sich wgerecht gelagerte Kolbenschieber am ungünstigsten, da bei Ausführung ohne Dichtungsringe durch den Verschleiß infolge Eigengewicht die Entlastung aufgehoben wird. Flachschieber und Corliss-Schieber sind sehr dicht bei niedrigeren Drucken und Temperaturen. Bei höheren Temperaturen verwerfen sich die Gleitflächen.

Meist gebraucht wird das Ventil, da es besonders zum Betrieb mit überhitztem Dampf geeignet ist und fast keine Eigenreibung besitzt, so daß die Ventilsteuerungen leicht vom Regulator beherrscht werden können.

a) Die Schiebersteuerungen.

1. Der Muschelschieber. Fig. 4 zeigt denselben in der Mittellage, die Kanäle um die äußere Überdeckung e und die innere Überdeckung i überdeckend. Darstellung der Schieberbewegung durch das Müllersche Schieberdiagramm, dessen wagerechter Durchmesser den Schieberweg, dessen Kreisumfang den Weg

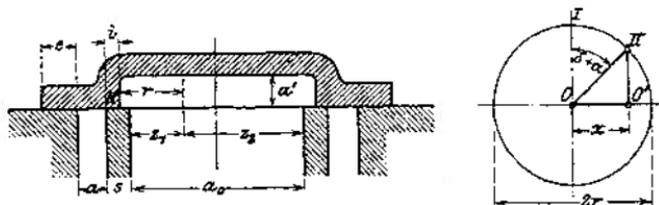


Fig. 4.

des Exzentermittelpunktes darstellt (Fig. 5). Bei der Exzenterlage $O II$ hat sich der Schieber um e aus der in Fig. 4 wiedergegebenen Mittellage herausbewegt, die Kanaleröffnung beginnt. Zur linken Kurbelotlage $O K$ gehört die Exzenterlage $O III$, der Schieber hat den Kanal um das „lineare Voreilen“ V_e freigelegt, und die Füllung beginnt. Diese dauert an bis zur Exzenterlage $O V$, dem Füllungs-

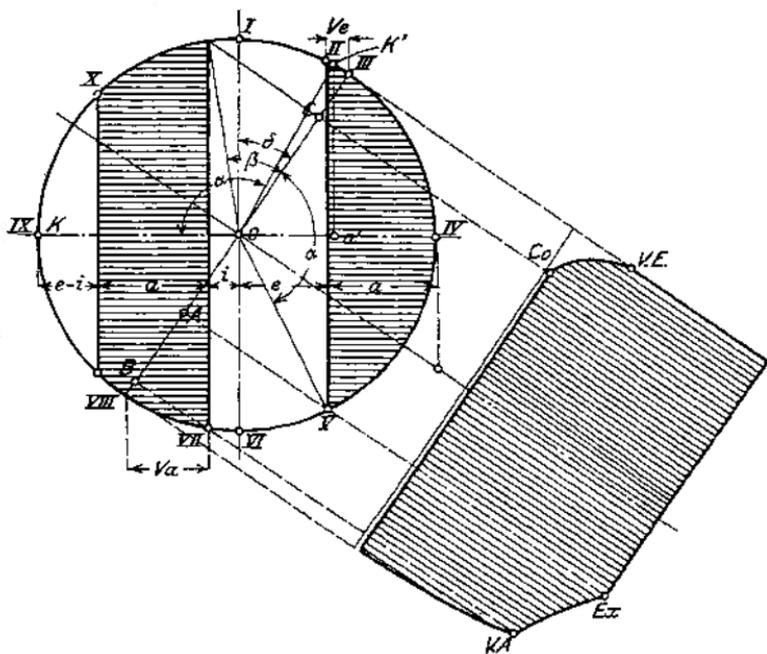


Fig. 5.

winkel α entsprechend. Um denselben Winkel hat sich Kurbel $O K$ gedreht und ist nach $O K'$ gelangt, so daß der Füllungsweg durch $K a'$, bequemer jedoch nach Loten des Punktes V auf die Kolbenweglinie $III O VIII$ durch Strecke $III A$ dargestellt wird. In $O VI$: Mittellage von Schieber und Exzenter. In VII ist der Schieber um i aus der Mittellage herausgegangen und eröffnet den Auspuff.

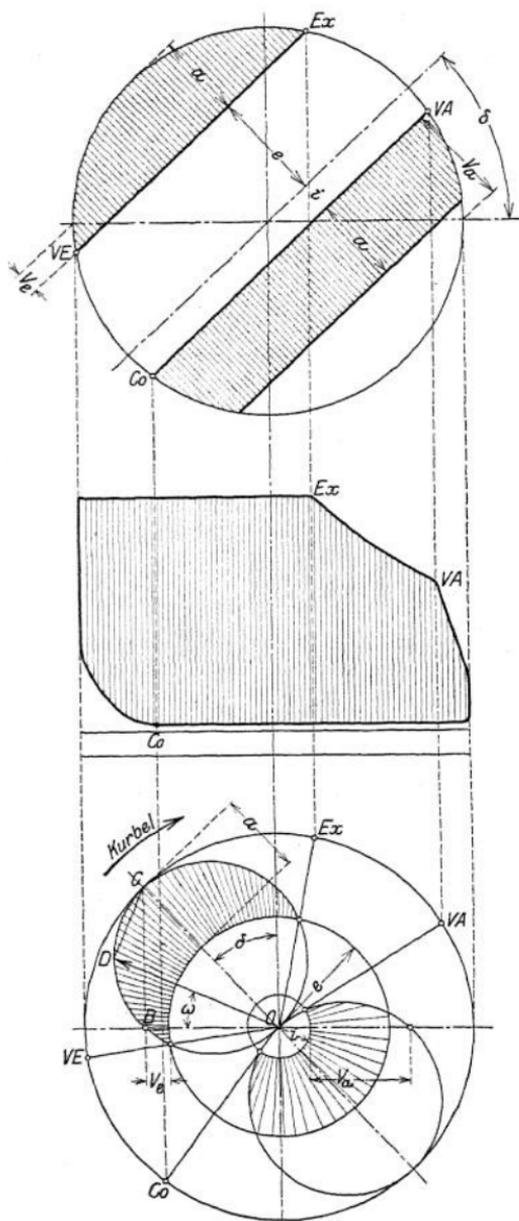


Fig. 6.

Zur Exzenterlage *O VIII* gehört rechte Kurbelstellung. V_a ist die „lineare Vorausströmung“. In *XI* schließt der Auspuff. Die Kompression beginnt und dauert während des Kurbeldrehwinkels β , dem Kolbenweg *III C* entsprechend.

Aus dem Diagramm geht hervor, daß das Exzenter der Kurbel um $90^\circ + \delta$ voreilt. δ wird als „Voreilwinkel“ bezeichnet. Exzentrizität $r = e + a$.

Bequemere Projektionen und Aufzeichnung des Dampfdiagramms wird durch das Diagramm von Müller - Reuleaux, Fig. 6, erreicht, das durch eine Verdrehung des Müllerschen Diagramms um einen Winkel $90^\circ + \delta$ entsteht.

Fig. 6 zeigt außerdem das Zeunersche Schieberdiagramm. Für die Entfernung des Schiebers aus der Mittellage ist nach Fig. 4 $x = r \cdot \sin(\delta + \omega)$, worin ω der Winkel ist, um den sich die Kurbel aus der Totlage herausgedreht hat.

Diese Beziehung ist die Polargleichung zweier Kreise, die sich im Pol *O* berühren und deren Zentrale mit der Senkrechten den Winkel δ einschließt. Wird in Fig. 6 unter dem beliebigen Winkel ω ein Vektor gezogen, so wird:

$$OD = OC_1 \cdot \sin OC_0 D; \quad \text{Winkel } OC_0 D = OC_1 B + BC_0 D = \delta + \omega. \\ OD = r \cdot \sin(\delta + \omega).$$

Ein unter Winkel ω gezogener Vektor gibt in seiner Länge die Entfernung des Schiebers aus der Mittellage für den Kurbelwinkel ω an. Werden mit e und i Kreise um O gezogen, so geben die über diese Kreise hinausragenden Strahlen die Kanaleröffnungen während der Füllung und des Auspuffes wieder. Strahlen, durch die Schnittpunkte der e - und i -Kreise mit den Schieberkreisen gezogen, bezeichnen die Kolbenstellungen bei Beginn von Voreinströmung, Expansion usw. Der obere „positive“ Kreis gibt die Schieberausschläge nach rechts, der untere, negative die nach links an.

In Fig. 7 ist die Schieberellipse dargestellt, welche die Kanaleröffnungen in Abhängigkeit vom Kolbenweg zeigt. Werden durch die Teilpunkte des Exzenterkreises wagerechte Linien gezogen, so geben diese in ihrer senkrechten Entfernung von der wagerechten Mittellinie die Schieberausschläge an, während die durch die Teilpunkte des Kurbelkreises gelegten Senkrechten Kolbenlagen darstellen.

Um den Beginn der Drosselung zu ermitteln, werden häufig die Kurven kleinster Kanaleröffnung in die Schieberellipse eingezeichnet. Bei $L = \infty$ stellen die senkrechten Ordinaten des Kreisbogens die Kolbengeschwindigkeiten dar, deren Maßstab dadurch gegeben ist, daß der Radius gleich c_{\max} ist. Werden diese Ordinaten in demselben Maßstab verkleinert wie der

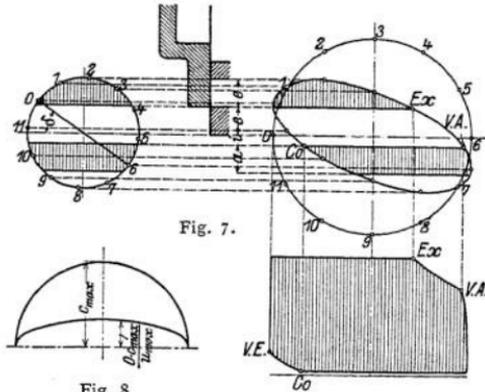


Fig. 7.

Fig. 8.

Radius durch $\frac{O \cdot c_{\max}}{u_{\max}}$, so ergibt sich die Kurve der mindestens freizulegenden Kanalweiten. Fig. 8. Meist ist $u_{\max} = 60$ m/sek.

Aus den Schieberdiagrammen können die Überdeckungen e und i bestimmt werden, indem diese Strecken mit dem Verhältnis der aus $f = a \cdot h$ berechneten Kanalweite zur gezeichneten Kanalweite multipliziert werden.

(Ist z. B. gezeichnet: $e = 24$, $a = 26$ und ist $a = 32$ berechnet, so ist e in der Größe $24 \cdot \frac{32}{26} = 29$ mm auszuführen.)

Die Auspuffkanalweite a_0 ist so zu bestimmen, daß in der Schibertotlage keine Verengung eintritt. Geht in Fig. 4 die linke Innenkante K nach rechts, so muß Strecke $z_2 = a + \sigma$ sein, worin $\sigma \cong a$ eine Sicherheitszugabe ist.

Sonach wird: $a_0 = z_1 + z_2 = r + a + i + \sigma - s$.

Wirkung der endlichen Stangenlängen. Die endliche Schubstangenlänge bewirkt, daß zu gleichen Füllungswinkeln ungleiche Füllungswege gehören, und zwar wird die Füllung auf der Deckelseite größer als auf der Kurbelseite. Diese Verhältnisse sind in Fig. 9 dargestellt, in der die Dampfverteilungspunkte durch Bogen mit $R = 5L$ auf die Kolbenweglinie gelotet sind. Gleichmäßigere Dampfverteilung wird durch Einstellung des Schiebers oder durch ungleiche Lappenlänge erzielt. Im ersteren Fall ist (bei äußerer Einströmung) der Schieber um eine bestimmte Strecke x nach der Deckelseite hin zu verschieben, so daß hier früher abgeschlossen wird. Überdeckungen auf der Deckelseite: $e + x$ und $i - x$, auf der Kurbelseite: $e - x$ und $i + x$. Ungleiche Lappenlänge gestattet größere Bewegungsfreiheit bezüglich der Überdeckungen.

Bei äußerer Einströmung nimmt die Ungleichheit der Dampfverteilung durch den Einfluß der Exzenterstangenlänge zu, Fig. 9. Bei innerer Einströmung erhalten die Deckungslinien entgegengesetzte Krümmung, die Dampfverteilung wird verbessert. Günstigste Verhältnisse, wenn $\frac{r}{l} = \frac{R}{r} \cdot \frac{R}{L} \cdot \sin \delta$ ($r =$ Exzenteradius, $l =$ Exzenterstangenlänge).

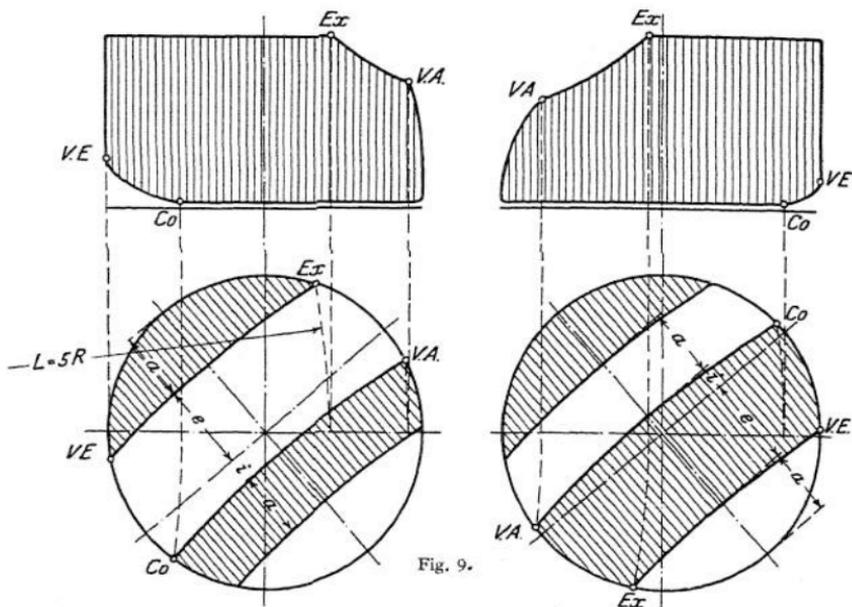


Fig. 9.

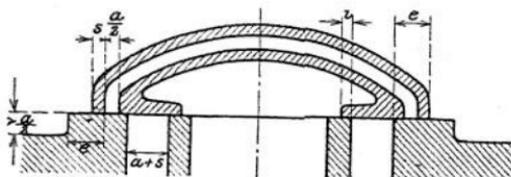


Fig. 10 a.

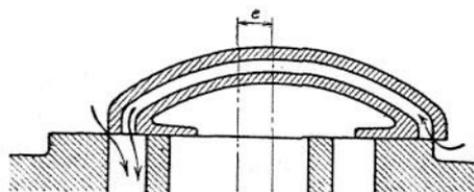


Fig. 10 b.

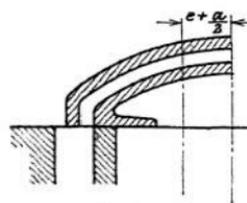


Fig. 10 c.

Nach Doerfel wird Füllungs-
ausgleich auch durch Anordnung
einer kurzen, schrägziehenden Ex-
zenterstange erreicht. Die Bewe-
gungsrichtung des Exzenterstangen-
endpunktes geht am Drehpunkt der
Exzenterkurbel vorbei, so daß im
Schieberdiagramm die Deckungs-
linien nicht mehr parallel verlaufen
und vom Diagrammkreis Bogen-
stücke verschiedener Länge ab-
schneiden.

2. Abarten des Muschel-
schiebers. Diese bezwecken
eine Verbesserung der Einströ-
mung oder Verringerung der
Exzentrizität und Schieberab-
messungen.

a) Trickschieber. Der Dampf
strömt an der Außenkante und
durch einen Kanal von der

Weite $\frac{a}{2}$ zu, wenn dieser über

einer Aussparung im Schieber-
spiegel steht. Sonach doppelte Eröffnung und volle

Freilegung des Kanals, wenn der Schieber um $e + \frac{a}{2}$

von der Mittellage entfernt ist. Kanalweite an der Mün-
dung = $a + s$, um Verengung des Kanals in Schieber-
stellung nach Fig. 10 c zu vermeiden. Häufige Anwendung,

um die Exzentrizität zu halbieren. In diesem
Fall stellt Fig. 10 c Schieber-totlage dar, Wirkung wie die

des gewöhnlichen Muschelschiebers. Zu beachten, daß zur

Vermeidung der Drosselung des Auspuffdampfes $r > a + i$. Ist $\left(s + \frac{a}{2}\right) > e$, so werden beide Zylinderseiten bei Schiebermittellage miteinander verbunden. Mitunter erwünscht, da Kompression erhöht, Auspuff erleichtert wird.

b) Pennsche Schieber. Durch Gabelung der Kanäle am Schieberspiegel und durch Querkanäle im Schieber, die mit dem Schieberkastenraum in Verbindung stehen, wird Verdoppelung von Ein- und Ausströmung erreicht. Fig. 11. Auspuffdrosselung wird vermieden, wenn $c_1 = r + \sigma - i$ ist. $c_2 > a$, damit Eintrittsdampf nicht gedrosselt wird.

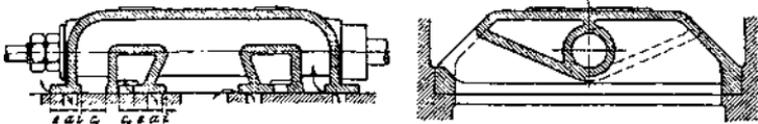


Fig. 11.

Weitere Abarten: Schieber von Weiß, Hochwald, die mit Überströmung arbeiten.

3. Entlastete Schieber. Gewöhnliche Flachschieber arbeiten mit 10 bis 12 kg/qcm spezifischem Auflagerdruck. Bei Dampfdrücken über 8 Atm. läßt sich dieser Auflagerdruck unter Vergrößerung des Gesamtdruckes nur durch sehr große, zum Verwerfen neigende Gleitflächen erreichen. Richtiger ist Anwendung von Entlastungen.

Entlastung mit Gegenplatte, durch die der Schieberücken abgedeckt wird. In Amerika gebräuchlich. Neigung zur Undichtheit, da Schieber ohne Klemmen gehen muß.

Anordnung besonderen Entlastungsraumes, der mit der Atmosphäre oder dem Kondensator verbunden ist. Ein federnder Ring dichtet Schieberkasten gegen Entlastungsraum ab.

Kolbenschieber stellen häufigste Entlastung dar. Form möglichst als einfacher Umdrehungskörper, um Spannungen zu vermeiden. Abdichtung durch Einschleifen oder besser durch Dichtungsringe. Buchsen, mit Stegen in den Kanaldurchbrechungen versehen, werden mit rechtwinkligen Ansätzen lose eingesetzt und mit Asbestschnüren abgedichtet. Ausgüben von Schieber und Buchse nach Bearbeitung zur Vermeidung von Gußspannungen.

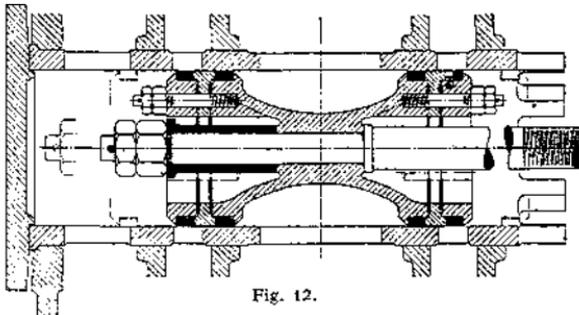


Fig. 12.

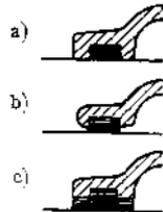


Fig. 13.

Fig. 12 zeigt einen mit „Inneneinströmung“ arbeitenden Lokomotivschieber (Ausführung Ha moversche Maschinenbau-A.-G.). Die äußeren Überdeckungen sind innen, die inneren (hier negativen) Überdeckungen außen angebracht. Vorteile: Der Schieberkasten ist mit Abdampf gefüllt, daher Entlastung der Schieberstangen-Stopfbuchse von Druck und Temperatur. Geringere Strahlungsverluste.

Die Abmessungen der Kolbenschieber sind davon abhängig, ob der Dampf nur an einer Seite oder an beiden Seiten zu- bzw. abströmen kann. Im ersteren Fall muß die gesamte Dampf-

menge durch den Schieberquerschnitt hindurchströmen, der doppelt so groß als im zweiten Fall sein muß.

Ausführung der Dichtungsringe nach Fig. 13. In 13b und c bildet der Dichtungsring die steuernde Kante. Infolge der kleinen Auflagerfläche neigt der Ring zum Einschlagen.

Weiteres s. Dubbel, Steuerungen. Berlin 1913, Verlag von Julius Springer.

4. Exzenteraufkeilung. Exzentereilt bei äußerer Einströmung um $90^\circ + \delta$ vor; bei innerer Einströmung oder Einschaltung eines die Schieberbewegung umkehrenden Hebels in das äußere Gestänge eilt Exzenter um $90^\circ - \delta$ nach. Ist Schieberbahn um Winkel α gegen Horizontale geneigt, so eilt Exzenter um $90^\circ + \delta \pm \alpha$ vor, da jetzt Exzentermittellage senkrecht zur geneigten Schieberbewegungsrichtung stehen muß.

5. Ausführung von Zylinder und Schieberkasten. Mündung der Kanäle in die Vorbohrung. Schieber schleift zur Verhinderung der Gratbildung über die Gleitfläche. In dieser sind zur Entlastung schräge Nuten anzubringen. Beispiel eines Zylinders mit Kolbenschiebergehäuse siehe Fig. 14. Zur Einstellung der Kolbenschieber ist Anordnung von verschraubbaren Schaulöchern an den Dampfkanälen erforderlich.

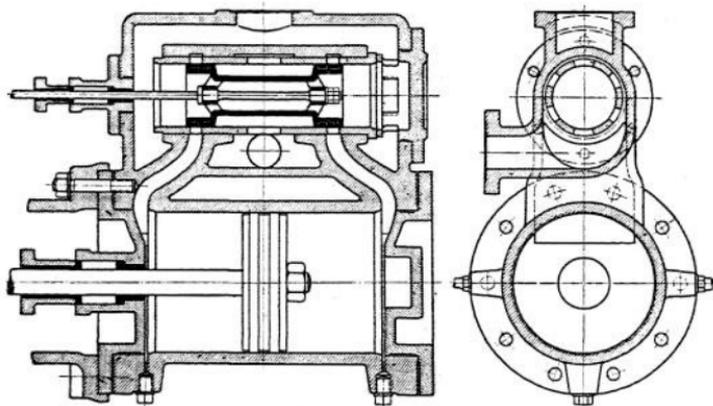


Fig. 14.

Bei Flachschiebern wird zur Erleichterung der Bearbeitung der Schieberkasten vielfach angeschraubt.

6. Einschieber-Expansionssteuerungen. Der Endpunkt der wirksamen Exzentrizität wird auf einer geraden oder bogenförmigen „Scheitelkurve“ verstellbar. Im ersteren Fall ist das lineare Voreilen konstant, im letzteren Fall veränderlich. Die bogenförmige Scheitelkurve wird nach Doerfel meist dadurch erhalten, daß ein äußeres „Drehexzenter“ um ein inneres, fest aufgekeiltes Exzenter vom Flachregler (siehe S. 1031) gedreht wird. Durch die Verstellung des wirksamen Exzentrums nimmt mit abnehmender Exzentrizität der Voreilwinkel zu. Geradlinige Scheitelkurve wird durch Verschiebung eines geschlitzten Exzentrums erhalten. Die entstehende Dampfverteilung zeigt das Müller-Reuleaux-Diagramm nach Fig. 15.

Starke Veränderlichkeit der Voreinströmung, im Kurbelwinkel gemessen, bei konstantem linearem Voreilen. Mit kleiner werdender Exzentrizität nehmen Expansion, Vorausströmung und Kompression zu. Kleinste Füllung hat dieselbe Dauer wie Voreinströmung, Vorausströmung und Kompression ergänzen sich hierbei zu 100 v. H. Nullfüllung bei geradliniger Scheitelkurve nicht erreichbar, bei bogenförmiger, wenn $r_{\min} \leq e$.

7. Zweischieber-Expansionssteuerungen. Grundschieber steuert unveränderlich Voreinströmung, Vorausströmung und Kompression. Expan-

sionsschieber steuert Füllung, indem der „Durchlaßkanal“ auf dem oberen Grundschieberspiegel geschlossen wird, wenn er unten noch mit Zylinderkanal in Verbindung steht.

a) Schieber mit veränderlicher Entfernung der steuernden Kanten. Grundexzenter wird nach Größe und Lage durch das Müllersche Schieberdiagramm gefunden, bei dessen Entwurf von Vorausströmung und Kompression ausgegangen wird. Expansionsexzenter eilt gewöhnlich der Kurbel um 180° vor und wird etwas größer als das Grundexzenter genommen (unter Benutzung desselben Exzenteringmodells, indem durch Versetzen der Kernmarke die Expansionsexzenterzscheibe mit geringerer Steg-

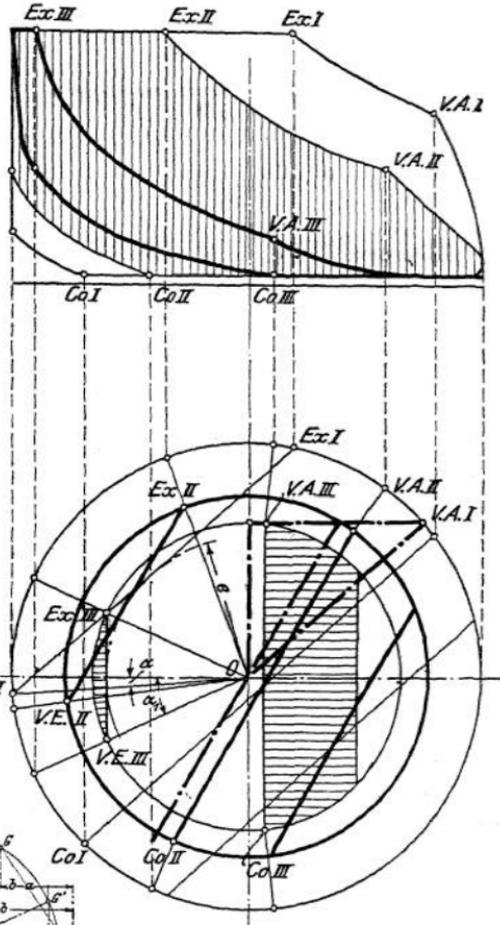


Fig. 15.

stärke ausgeführt wird). Um Lappenlänge l und Kanalausladung $L = l + y$ zu ermitteln, ist die Kenntnis der Schiebermittelenfernungen bei größter und kleinster Füllung im Augenblick des Füllungsschlusses erforderlich.

Ermittlung dieser Abstände in Fig. 16 für 5 und 60 v. H. Füllung. Wird in Fig. 16 der Expansionsschieber mit der Grundschiebermitte zur Dekkung gebracht (ein Fall, der bei jeder Umdrehung zweimal, und zwar dann vorkommt, wenn Exzenterpunkte G' und E' in einer Senkrechten liegen), so ergibt sich Fig. 17 b. Damit Kante K beim Linksgang um die größte Schie-

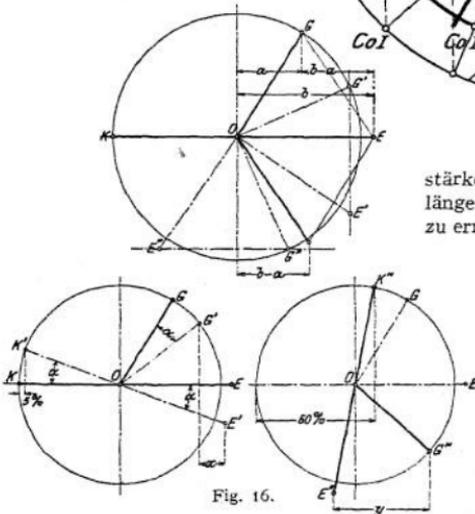


Fig. 16.

bermittelentfernung (die vorliegt, wenn G'' und E'' in einer Wagerechten liegen und welche die Größe $EG = E''G''$ hat) Kanalkante K_1 nicht unzeitgemäß freilegt, muß $l = x + a + EG + \sigma$ sein, worin $\sigma =$ Sicherheitszugabe = 10 bis 15 mm. In Figur 16 wird in gleicher Weise bezüglich Schiebermittelabstand y bei größter Füllung vorgegangen. Die Platten der Meyer-Steuerung sind hierbei ganz zusammengeschraubt. Es folgt $L = l + y$. Fig. 17 d.

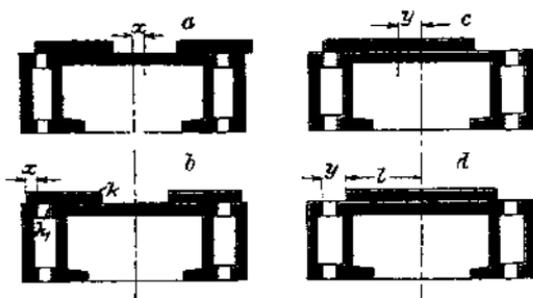


Fig. 17 a—d.

Bequemer ist Ermittlung mittels Relativzentrums, von dem man sich den Expansionschieber auf dem in O , Fig. 18, ruhend gedachten Grundchieber bewegt denkt. Die Größe dieses Relativzentrums muß gleich der Länge EG sein. Der Lage nach stellt das Relativzentrum die dritte Seite eines Parallelogramms dar, dessen eine Seite das Grundzentrum, dessen Diagonale das Expansionszentrum ist. Bewegen sich die drei Exzenter in derselben Richtung, so ist stets, wie erforderlich, die Entfernung des Relativzentrums von der durch O gehenden Senkrechten gleich der wagerechten Entfernung der durch G und E gelegten Senkrechten.

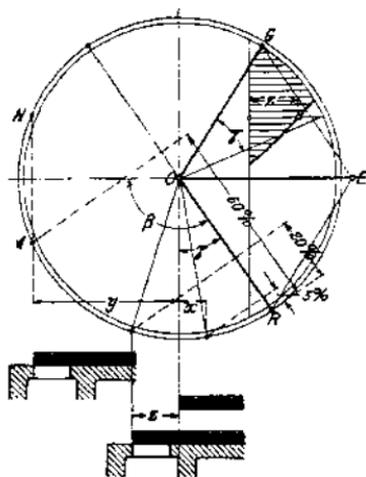


Fig. 18.



Fig. 19.

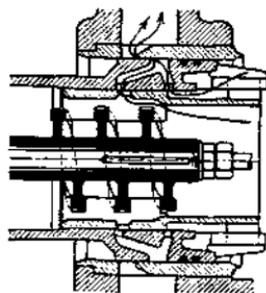


Fig. 20.

Damit keine Nachfüllung stattfindet, muß am unteren Schieberspiegel der Durchlaßkanal geschlossen sein. Bedingung erfüllt, wenn Winkel RON größer ist als der Winkel, währenddem Grundchieber Füllung gibt.

Fig. 18 zeigt weiterhin die Eintragung der „Schließkurve“.

Fig. 19: Meyer-Steuerung mit Flachschiebern.

Ausführungen der Meyer-Steuerung mit großer Schraube, die Eingreifen des Regulators gestattet, siehe Fig. 20¹⁾). Vermeidung der Rückwirkung auf den Regulator, wenn zur Erzielung von Selbstsperrung die Schraubensteigung

$$\frac{h}{d\pi} < 1:7.$$

Ridersteuerungen zeigen Verlegung der Schraubengänge an die Kanten des Expansionschiebers. Fig. 21 stellt Flachschieber oder Abwicklung des Rundschiebers dar. Ist $\alpha = 50 \div 60^\circ =$ Neigungswinkel der Kanäle, so ist Regulatorverstellung $u = (x + y) \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Abmessung l folgt aus Bedingung, daß bei Herausbewegung des Expansionschiebers aus Mittellage um Relativexzentrizität r z. B. linke Schieberkante rechte Durchlaßkanalkante nicht öffnen darf. Es folgt

$$l = r + \sigma + y - a. \quad \text{Schieberhöhe } H = h + u + 2\sigma.$$

Damit bei Rundschiebern die Kanallänge h der Abdichtung wegen kleiner als der Halbkreis bleibt und sich etwa über 150° erstreckt, wird der Rundschieberdurchmesser $d = \frac{360 h}{150 \cdot \pi} \cong 0,75 h$. Verdrehung der Expansionsschieberstange um Winkel

$$\gamma = \frac{u \cdot 360}{d \pi}.$$

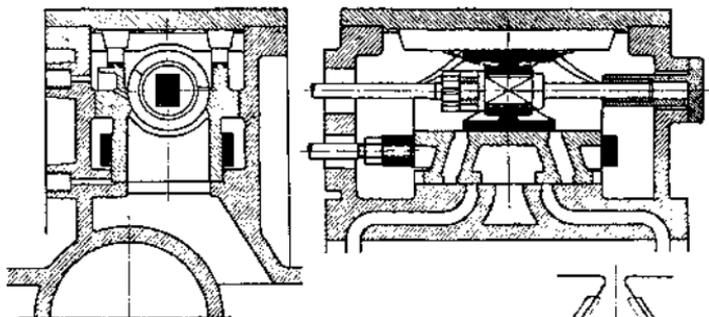


Fig. 22.

Fig. 22: Ausführung mit Expansions-Kolbenschieber und Grundflachschieber (Bauart R. Wolf, Magdeburg-Buckau).

Ausführung der Ridersteuerung mit Kolbenschiebern siehe Fig. 23²⁾). Abwicklung eines Kolbenschiebers Fig. 24. Infolge Verringerung von a' werden sämtliche Abmessungen (x, y, u) kleiner. Bei tiefster Lage für kleinste Füllung zu beachten, daß die nicht steuernden Kanten der Spalten die Durchlaßkanäle bei der Verschiebung um die Relativexzentrizität nicht mehr öffnen. Wage rechter Abstand $= R + \sigma$. Freilegung des Durchlaßkanals bei Füllungsbeginn durch die nicht steuernde Kante muß spätestens bei der Kolbenlage für Voreinströmung beginnen, besser vorher.

¹⁾ Ausführung Pokorny & Wittekind, Frankfurt a. M.

²⁾ Ausführung Escher, Wyss & Co., Zürich. (Aus „Leist. Steuerungen“.)

In Fig. 23 arbeiten beide Schieber mit Inneneinströmung.

Endliche Pleuelstangenlänge wird durch ungleiche Neigung der Expansionsschieberkanten und Durchlaßkanäle berücksichtigt.

b) Steuerungen mit Veränderung von Hub und Voreilwinkel des Expansionsschiebers,

Fig. 25. Der Expansionsschieber wird von einem Flachregler gesteuert. Im Diagramm Fig. 26 bewegt sich Endpunkt R des Relativzentrums auf einem Kreisbogen, der mit dem von E beschriebenen Kreisbogen übereinstimmt, dessen Mittelpunkt auf einer Parallelen zum Grundexzenter liegt und um dessen Länge vom Mittelpunkt der Expansionsexzenterkurve entfernt ist.

In Fig. 26 dreht sich bei der Verstellung des Expansionsexzentrums das Relativzentrum um O' . In Relativzenterlage OR muß Expansionsschieber den Weg $a + y$ bis zur Schließung des Durchlaßkanals zurücklegen.

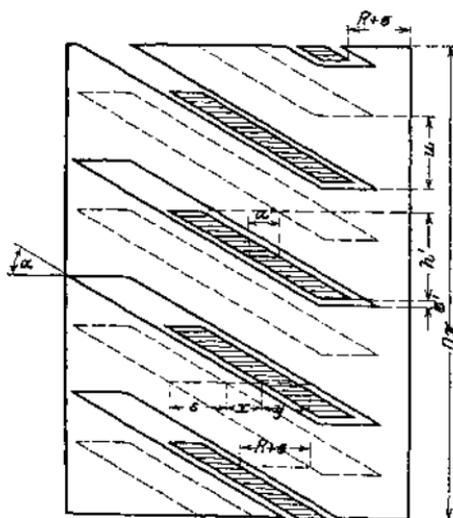


Fig. 24.

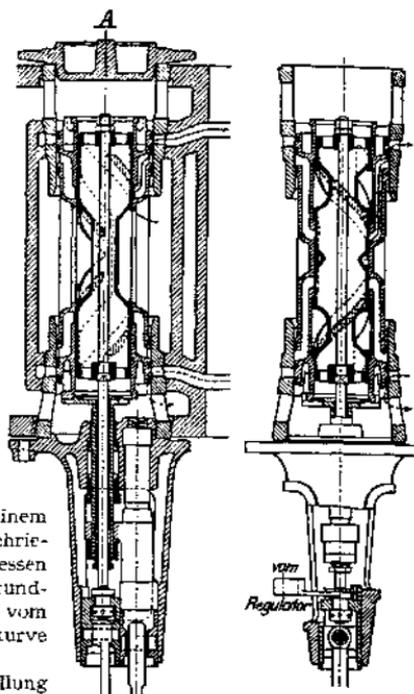


Fig. 23.

zurücklegen. $Rm =$ Kolbenweg bei größter Füllung. Stellt Flachregler Expansionsschieber so ein, daß bei Kurbel-totlage Relativexzenter Lage OR' einnimmt, so muß Weg $(y - b)$ zurückgelegt werden. Kleinste Füllung $= R'n$. Zur Vermeidung unzeitiger Wiedereröffnung muß $\gamma > \alpha$ sein.

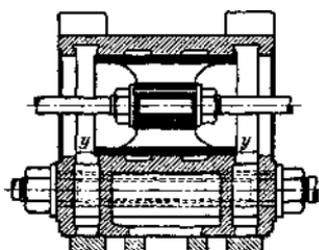


Fig. 25.

Ausführung von Stein mit kleinsten Exzentrizitäten bei kleinsten Füllungen, so daß die entstehende Drosselung den Leerlauf erleichtert. In relativer Mittel-lage überdeckt der Expansionsschieber die Durchlaßkanäle, wodurch absolute Nullfüllung ohne übermäßigen Regulatorhub erreicht wird.

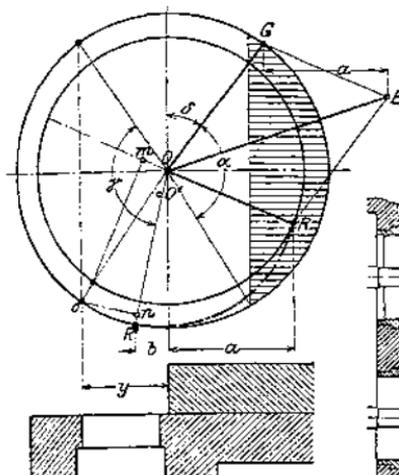


Fig. 26.

Ausführung der Zwei-schiebersteuerungen. Um die Mitnehmermutter auf die Stange der Meyer-Steuerung zu bringen, werden die Gewinde entweder mit ungleichem Durchmesser ausgeführt, so daß Muttern übergestreift werden können, oder letztere werden zweiteilig hergestellt. Besonders zweckmäßig Ausführung nach Regnier, der das Gewinde auf besondere, auf die glatte Stange aufzukleibende Buchsen anbringt. Fig. 19. Nuten im Schieberspiegel zur Entlastung, Leisten zur Führung des Expansionsschiebers. Die Kolbengrundschieber werden von der Stange entweder exzentrisch gefaßt oder zentrisch durch zwei Stangen oder durch hohle Stange, durch welche die Expansionsschieberstange hindurchgeführt wird. Wagerecht gelagerte Kolbenschieber werden häufig mit besonderen Tragflächen versehen. Die geradlinig begrenzten Expansionskolbenschieber der Meyer-Steuerung haben gegenüber den Riderschiebern den Vorteil leichter Herstellung und können mit Dichtungsringen versehen werden.

Fig. 27¹⁾ zeigt Zweikammersteuerung von Doerfel. Zur Erzielung guter Abdichtung wird Dampfeinströmung in Expansionsschieberaum durch besonderen Ring gesteuert.

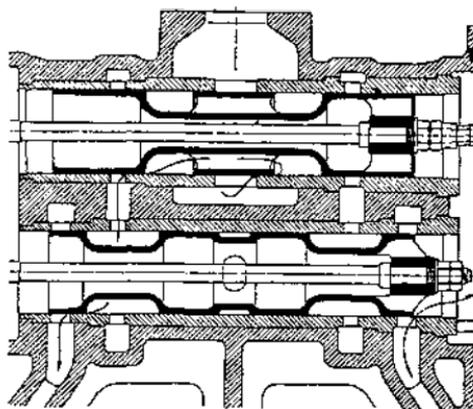


Fig. 27.

b) Steuerungen mit vierfach geteiltem Schieber.

1. Die Corliss-Steuerungen. Als solche werden Anordnungen nach Fig. 28—30 bezeichnet, während die von Corliss selbst herrührende Bauart in Fig. 28 dargestellt ist. Die Schiebergleitflächen sind zylindrisch; den Schiebern wird durch Exzenterantrieb eine schwingende Bewegung erteilt. Ausführung von Gehäuse und Schieber siehe Fig. 32. Entlastung der Spindel von biegenden Kräften durch Lagerung der Nabe des Antriebshebels zwischen Spindel und Gehäuse oder auch auf Gehäuse. Fortfall oder Entlastung der Stopfbuchse durch Bund, der von Feder und Dampfdruck gegen aufgeschliffene Fläche einer die Spindel umgebenden Buchse gepreßt wird. Kupplung mit Stange durch Blätter so, daß Schieber senkrecht zur Gleitfläche beweglich ist, Blätter möglichst lang zur

¹⁾ Ausführung Dingersche Maschinenfabrik, Zweibrücken.

Verminderung der Kräfte des antreibenden Kräftepaars. Anordnung der Auslaßschieber derart, daß sie vom Dampfdruck gegen Auspuffraum-Mündung gepreßt werden. Ausführung der Schieber mit Trickkanal siehe Fig. 31, häufig auch mit mehrfacher Eröffnung nach Penn.

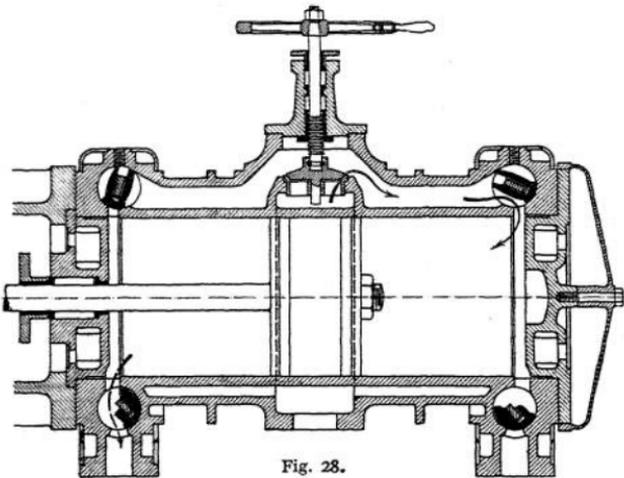


Fig. 28.

Zylinderausführungen siehe Fig. 28—31. Vermeidung von Gußanhäufungen an den zu je zweien nebeneinanderliegenden Hahngehäusen in Fig. 29. Für stehende Maschinen empfiehlt sich Bauart Doerfel nach Fig. 31¹⁾: bequeme Anordnung der die Schiebergehäuse verbindenden Kanäle, gut liegende Laufflächen, freie Zugänglichkeit des Kolbens.

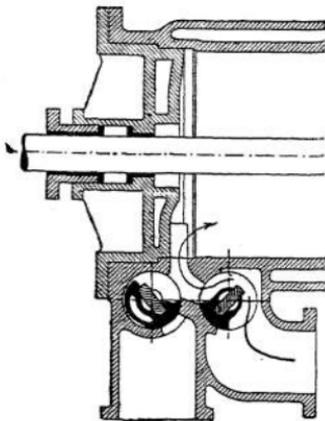


Fig. 29.

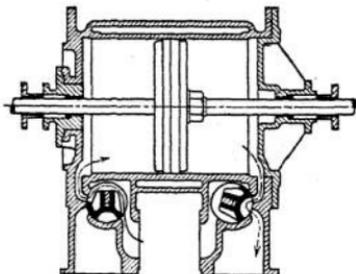


Fig. 30.

Schieberantrieb entweder unmittelbar durch Exzenter oder unter Einschaltung einer „Schwingscheibe“. Im letzteren Fall Verringerung der Schieberwege und Schieberdurchmesser infolge der Kniehebelwirkung („Corli ss-Schränkung“). Anordnung des Schwingscheibenantriebes von Steuerungen mit zwei „Drehmuschelschiebern“ nach Doerfel derart, daß am Einlaß Schieberweg $(e + a)$, am Auslaß $(i + a)$ beträgt. Fig. 30¹⁾.

¹⁾ Ausführung der Prager Maschinenbau-A.-G.

²⁾ Ausführung Märky, Bromovsky & Schulz, Prag.

Entwurf für gewöhnlichen Exzenterantrieb nach Fig. 33 mittels des Müllerschen Schieberdiagramms, das über Ausschlagbogen s_0, s_0' aufgezichnet wird. Fig. 34 zeigt Ermittlung bei Antrieb durch Schwing-scheibe. Schieber in Lage für Augenblick der Eröffnung bzw. des Schlusses gezeichnet. Dazugehörige Gestänge-lagen: $2' 2'$ und $II' II'$. Gestänge-mittellagen: $I' I'$ und $I' I'$. Streck-lagen: $4' 4'$ und $IV' IV'$. Den gleichen Winkelausschlägen $\alpha = \beta$ entsprechen verschieden große Ausschlagbogen $4' I'$ und $I' 3'$. Beim Entwurf ist von Strecklage auszugehen. Bei Überschreitung der Streck-lage: weitere Verringerung des Schieberweges, aber Erschwerung der Schmierung durch das „Nicken“ des Schiebers.

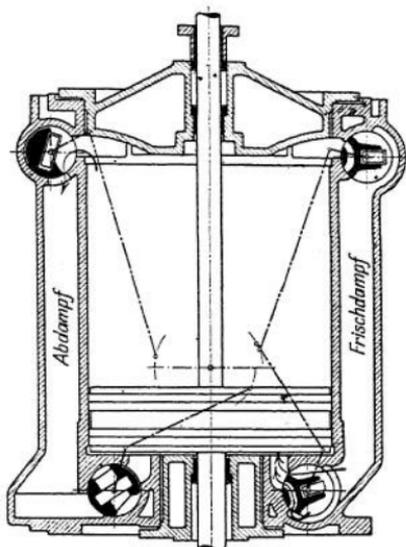


Fig. 31.

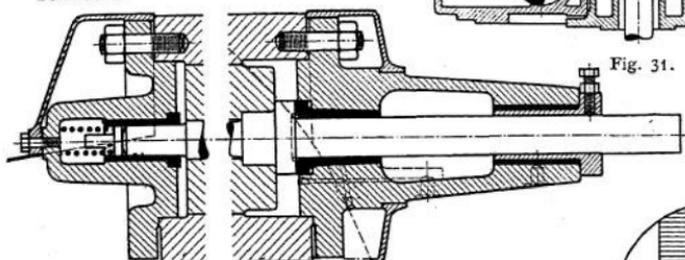


Fig. 32.

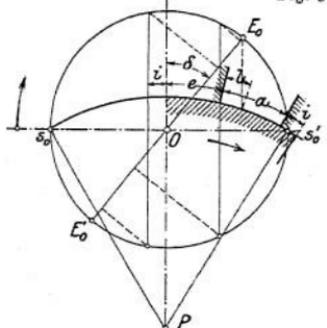


Fig. 33.

Erstreckung des Schieberquer-schnittes über etwa 120° . Ist l = Länge der Gleitfläche ($= 2r + \sigma$ bei Schiebern mit Exzenterantrieb), so folgt Durchmesser d aus

$$l = \pi \cdot d \cdot \frac{120}{360}; \quad d = \frac{3l}{\pi}.$$

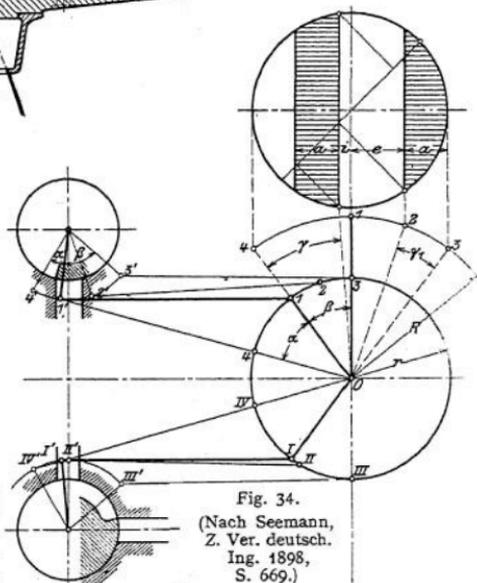


Fig. 34.

(Nach Seemann,
Z. Ver. deutsch.
Ing. 1898,
S. 669.)

2. Kolbenventilsteuerungen. Fig. 35 zeigt Ausführung nach Van den Kerchoven. Antrieb der Kolbenventile durch eine der auf S. 880 ff. behandelten Ventilsteuerungen. Besonders zweckmäßig paarschlüssiger Antrieb nach Fig. 44 oder durch Schwingdaumen, wodurch lautloser Gang bei beliebigen Umlauffzahlen erhalten wird.

3. Flachschiebersteuerungen, nur in Amerika gebräuchlich.

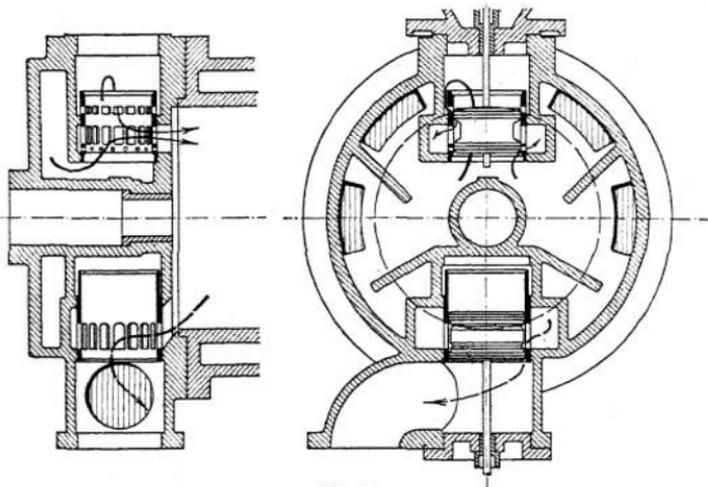


Fig. 35.

4. Anwendungsgebiet. Die Corliss-Steuerungen finden in Deutschland nur an Niederdruckzylindern Anwendung, da Rundschieber für hohe Drücke und besonders für Überhitzungen größer als etwa 230° nicht geeignet. Vorteil: bequeme, konstruktive Anordnung und zuverlässige Dichtheit. Kolbenventile entsprechen am meisten den heute gestellten Betriebsanforderungen.

c) Die Ventilsteuerungen.

1. Das Ventil. Ausführung des „Rohrventils“ nach Fig. 36 zweiseitig mit doppelter Eröffnung und weitgehender Entlastung vom Dampfdruck. Bei großen Zylinderdurchmessern finden sich viersitzige Ventile mit verringertem Hub nach Fig. 37. Die Ausführung gestattet getrenntes Aufschieben der Einzelventile, die nacheinander angehoben werden.

Baustoff: Gußeisen. Neigung der Ventilsitze bis 60° gegen die Wagerechte, besser wagerechter Sitz. Führung durch außen angebrachte Rippen nach Fig. 36, durch die verlängerte Ventilspindel nach Fig. 37 oder nach Fig. 38. Vollständige Entlastung des Ventils nach Radovanovic, Fig. 38, durch Abtrennen des mit dem Korb zusammengewachsenen Ventils. Mitunter Ausführung mit Überdeckungsringen, so daß Füllungsschluß nicht mit Auftreffen der Sitzflächen zusammentrifft, sondern vorher stattfindet. Ermöglichung raschen Abschlusses und „scharfer Diagrammecken“.

Ausführung des Korbes zur Vermeidung des Verdrücktwerdens durch die sich verziehenden Zylinderwandungen mit wagerechten Sitzen, statt mit konischen. Im ersten Fall Abdichtung durch Klingerit. Hochziehen des den oberen Ventilsitz umgebenden Steges nach Fig. 37, um axiales Zuströmen des Dampfes zu erhalten. Anordnung der Ventile in den Zylinderscheiteln nach Fig. 39a und 39b¹⁾. Seltener seitliche Ventillage. Für Heißdampfbetrieb wird möglichst ein-

¹⁾ Nach C. Volk, Einzelkonstruktionen. Heft 1. Berlin 1912, Julius Springer.

fache, rohrförmige Gestaltung des Zylinders ohne Mantel, Rippen zur Vermeidung von Spannungen angestrebt. Sehr zweckmäßig ist Anordnung der Ventile im Deckel.

Ventildurchmesser d folgt aus

$$\varphi \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{O \cdot c}{u} = F,$$

worin durch $\varphi = 0,65$ bis $0,80$ Verengung durch Rippen, Nabe usw. berücksichtigt wird.

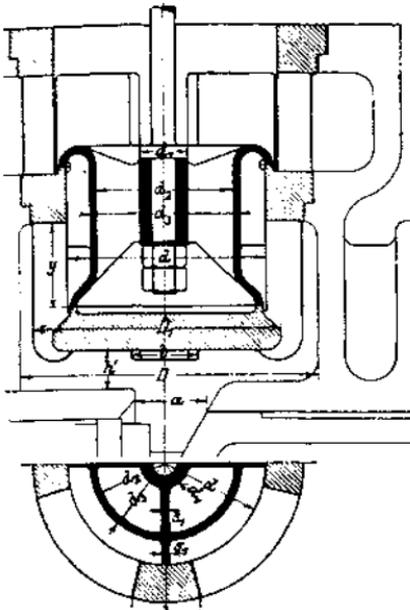


Fig. 36.

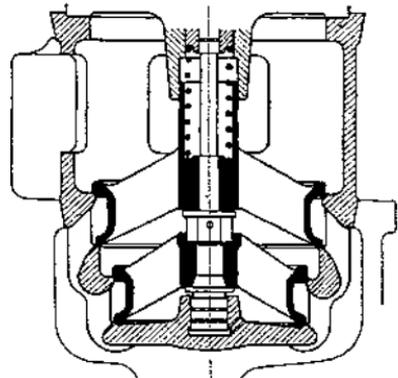


Fig. 37. (Görlitzer M. A.-G.)

Bei genauerer Festlegung muß sein:

$$(d^2 - d_2^2) \frac{\pi}{4} - n \cdot s_1 \cdot \left(\frac{d - d_2}{2} \right) = (d_2^2 - d_1^2) \frac{\pi}{4} - n \cdot s_1 \left(\frac{d_2 - d_1}{2} \right) = \frac{O \cdot s}{u},$$

worin n = Anzahl der Rippen, s_1 = Rippenstärke.

$$(D^2 - D_1^2) \frac{\pi}{4} - n' \cdot b \cdot s = F; \quad n' = \text{Anzahl der Stege am Ventilkorb.}$$

$$D \cdot a = F.$$

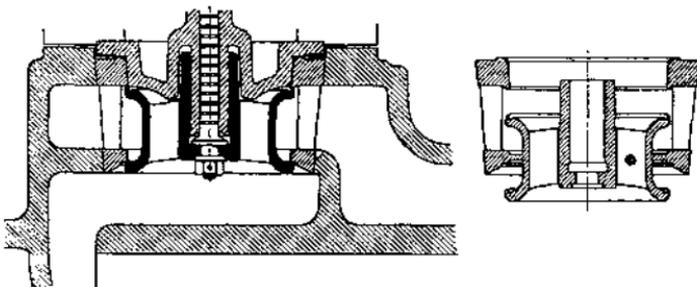


Fig. 38.

Höhe y ist so zu bemessen, daß bei ganz gehobenem Ventil zwischen Korbsitz und unterer Ventilkante noch genügend Querschnitt für die halbe Dampf-

menge bleibt. Der durch die Korbstege verengte Austrittsquerschnitt soll die Größe

$$2(\bar{d}\alpha \cdot h - n' \cdot b \cdot \bar{h}) = F$$

haben, worin h = Ventilhub.

2. Ventilantrieb. Durch Wälzhebel, unrunde Scheiben oder Schwingdaumen bei den zwangläufigen und paarschlüssigen Steuerungen.

Wälzhebel mit festem Drehpunkt siehe Fig. 40, mit beweglichem Drehpunkt Fig. 41. Bei letzteren geringere Beschleunigungskräfte infolge Verringerung

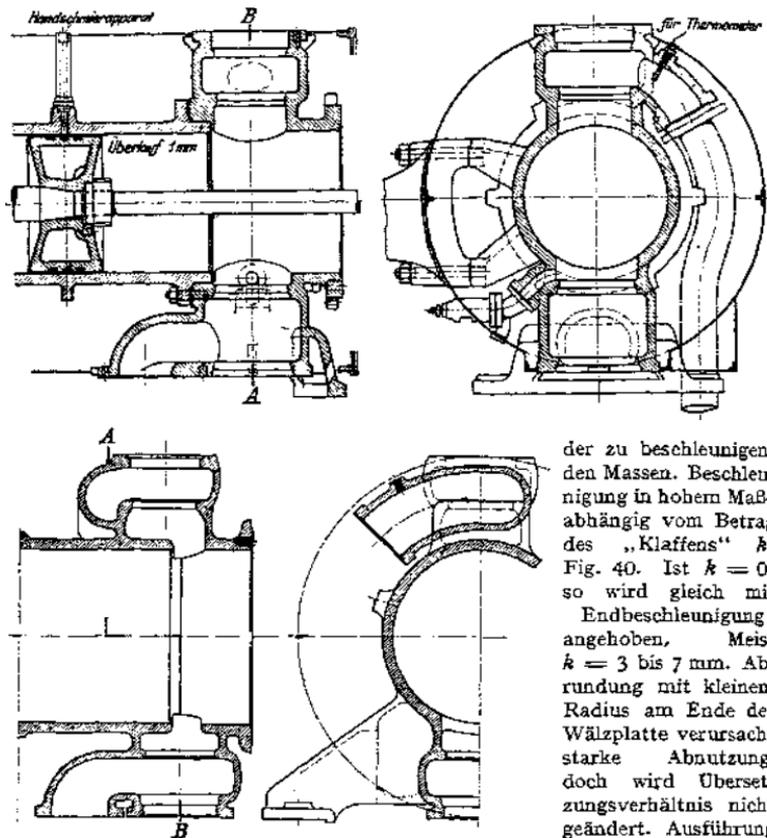


Fig. 39 a und b.

der zu beschleunigenen Massen. Beschleunigung in hohem Maße abhängig vom Betrag des „Klaffens“ k , Fig. 40. Ist $k = 0$, so wird gleich mit Endbeschleunigung angehoben, Meist $k = 3$ bis 7 mm. Ab-

rundung mit kleinem Radius am Ende der Wälzplatte verursacht starke Abnutzung, doch wird Übersetzungsverhältnis nicht geändert. Ausführung der Wälzhebel mit beweglichem Dreh-

punkt meist so, daß ein Teil mit gerader, der andere mit kreisbogenförmiger Wälzbahn ausgeführt wird.

Wälzhebelbewegung bei festem Drehpunkt kann man sich in der Weise hervorgebracht denken, daß Hebel $o_1 b$ zunächst auf oberer kreisförmiger Wälzplatte abgerollt wird, wobei b eine Zyklode beschreibt. Zur Erhaltung richtiger Schlußlage beider Hebel werden diese zusammen um o nach oben gedreht, wobei b sich auf Kreisbogen um o bewegt. Gestaltung der Hebel zur Vermeidung des Gleitens so, daß dieser Kreisbogen mit Zyklode möglichst zusammenfällt.

Fig. 42 zeigt Anordnung unrunder Scheiben. Dieselbe besteht aus drei Teilen, durch deren Verschiebung gegeneinander die Dampfverteilung

geändert werden kann. Ventilmovement während Auflaufen der Rolle auf An- und Ablaufkurve. Während Auflaufen auf konzentrischer „Rast“ bleibt Ventil in Ruhe. Gestaltung der Kurven mit Rücksicht auf die Beschleunigungen der zu bewegenden Massen des Ventils und des mit ihm verbundenen Gestänges.

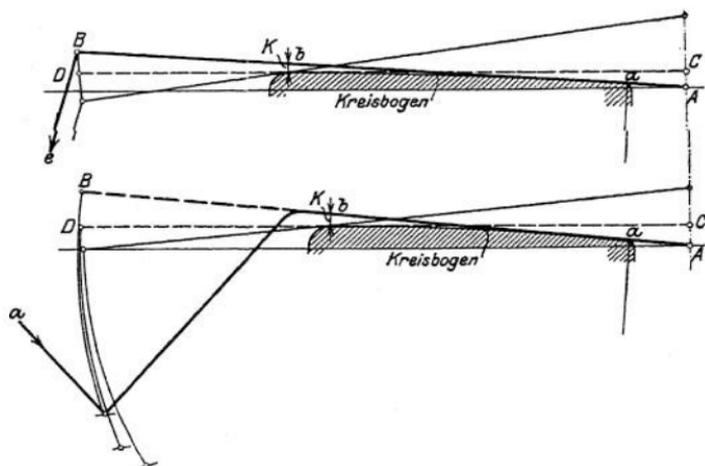


Fig. 40.

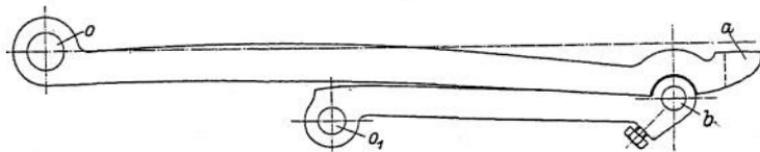


Fig. 41.

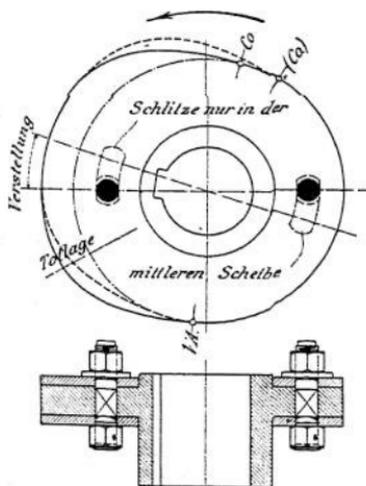


Fig. 42.

Der Entwurf geht aus von dem meist rechteckig oder trapezförmig angenommenen Beschleunigungs- und Verzögerungsdiagramm. (S. S. 195.) Im ersten Fall wird das Geschwindigkeitsdiagramm ein Dreieck, das Wegdiagramm setzt sich aus zwei Ästen quadratischer Parabeln zusammen. Die Ordinaten des Wegdiagramms werden auf einem Kreise aufgetragen, der um Rollenhalfmesser plus Rollenspiel von konzentrischer Nabe entfernt ist. Von den Endpunkten der aufgetragenen Ordinaten werden mit Rollenhalfmesser Kreisbogen geschlagen, welche die äquidistante Kurve umhüllen. Reduktion der Massen auf Ventilspindel s. S. 263.

Starke Belastung des Steuerungsstänges durch die erforderliche Schlußkraft der Feder, welche die Beschleunigung beim Niedergang aufzubringen hat.

Günstigere Verhältnisse schaffen die Schwingdaumen, die vom Exzenter eine schwingende Bewegung erhalten. In Fig. 43, Bauart Lentz, braucht die Feder nur Ventil nebst Spindel und Führungskloben zu beschleunigen.

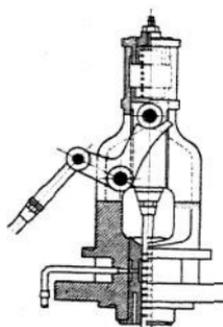


Fig. 43.

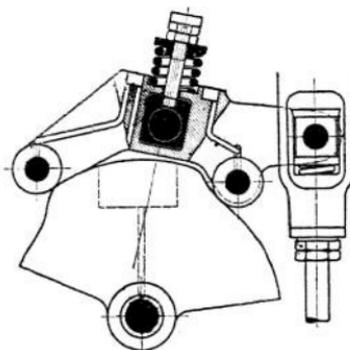


Fig. 44.

Fig. 44 zeigt paarschlüssigen Antrieb von Doerfel. Ventil hat oben Spielraum auf Spindel, so daß letztere zur Sicherung des Ventilschlusses nach Aufsetzen des Ventils noch weiter abwärts gehen kann. Da Ventil durch das äußere Gestänge geschlossen wird, so ergeben sich als Vor-

teile: Fortfall der Schlußfeder und infolgedessen geringere Beanspruchung des Gestanges, Verhinderung des „Hängenbleibens“ der Ventile, das namentlich bei Verbundmaschinen gefährlich werden kann.

Entwurf der Schwingdaumen in gleicher Weise wie bei den unrundern Scheiben, indem vom Beschleunigungsdiagramm ausgegangen wird. Den gleichen Teilen der als Abszissen aufgetragenen Zeiten entsprechen hier gleiche Bogenlängen auf dem Kreisumfang des antreibenden Exzenter und ungleiche Exzenterwege.

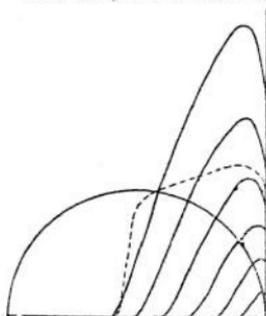


Fig. 45.

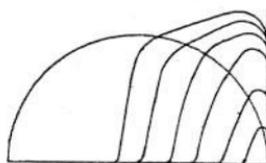


Fig. 46.

Klaren Vergleich zwischen Steuerungen mit Wälzhebeln und solchen mit Schwingdaumen ermöglichen die „Ventilerhebungsdiagramme“, deren Abszissen Kolbenwege, deren Ordinaten die Ventilhub darstellen. Fig. 45 und 46. Einzeichnung der Drosselkurve (meist mit

$u = 60$ m/sek., vgl. S. 865) läßt Beginn der Drosselung erkennen. Wegfall der übermäßigen Ventilhub, welche die Federkraft stark zunehmen lassen, bei den Schwingdaumen. Diese großen Ventilhub sind bei Wälzhebeln erforderlich, um nicht zu kleine, stark drosselnde Hübe bei kleinen Füllungen zu erhalten.

3. Die zwangläufigen und paarschlüssigen Ventilsteuerungen.

Die Steuerungen mit Flachregler. Da die Ventilsteuerungen grundsätzlich von dem vierfach geteilten Flachschieber nur insofern abweichen, als die äußeren Überdeckungen als Spielräume im Gestänge auftreten, so ergibt sich ohne weiteres die Eignung der Flachregler für die Ventilbewegung.

Die gebräuchlichste, ursprünglich von Proell herrührende Anordnung des Reglers zwischen beiden Exzenter zeigt die weitverbreitete Lentz-Steuerung, Fig. 47 (Schwingdaumen, s. Fig. 43, Regulator s. Fig. 18, S. 1032). Fig. 48 zeigt die Exzenterverstellung von Proell. Das von den Zugstangen des Flachreglers verdrehte Stellrohr besteht mit dem Drehexzenter aus einem Stück und ist unmittelbar auf dem Grundexzenter E_1 gelagert.

Doerfel verlegt den Regler in die Nähe des Konsollagers nach dem Rahmen hin, wobei der Regler mittels zweier Zugstangen eine zur Welle konzentrische Stellröhre verdreht, die mit den Drehzentern beider Zylinderseiten gekuppelt ist.

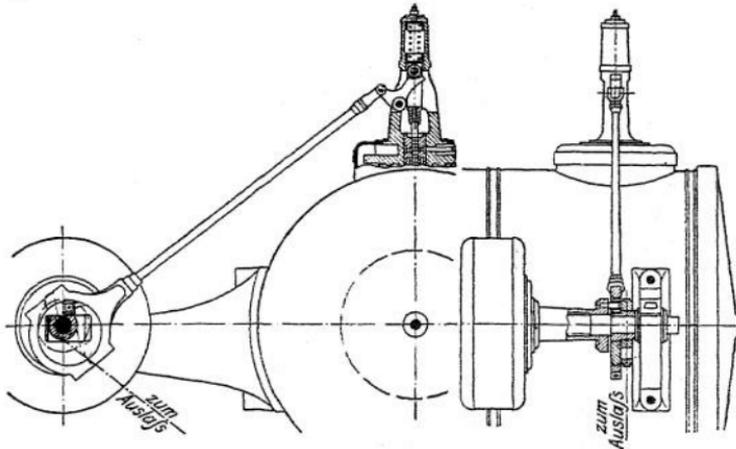


Fig. 47.

Mitunter findet sich gemeinsamer Antrieb beider Einlaßventile durch eine vom Flachregler bewegte, in den Ventilhauben gelagerte Schwingwelle. Dadurch wird die Ausführung zwar einfacher, die Dampfverteilung durch größere Abhängigkeit jedoch ungünstig beeinflusst, wenn nicht eine kurze Exzenterstange nach Doerfel (siehe S. 866) vorgesehen wird.

Sehr einfache Darstellung der Dampfverteilung ergibt sich bei Aufzeichnung des Steuerungsschemas nach Proell, Fig. 49. $MA =$ aufgekeiltes Grundexzenter. $AB = AC =$ Drehexzenter. $BC =$ Scheitelkurve. $DBE =$ Kreisbogen mit Ventilzugstangenlänge als Radius. Für wirksames Exzenter MF erfolgt Ventilantrieb während des Bogens GFH . Da $MF =$ Exzenterlage bei Kurbelstellung, so ist $GMF =$ Voreinströmungswinkel, FH Füllungsweg, FMH Füllungswinkel. Wird die Gerade DBE entgegengesetzt der Pfeilrichtung um Winkel $FMH = BLM$ gedreht, so gelangt sie nach FLK und BN ergibt im Verhältnis zu BP die Füllung. Dauer der Voreinströmung ergibt sich, wenn Gerade DBE um Winkel FMG dem Uhrzeigersinn entgegengesetzt gedreht wird. Die Darstellung ergibt weiterhin leichte Aufzeichnung des Ventilerhebungsdiagramms. Z. B. ist für 65 v. H. Füllung der größte Ventilhub gleich Abstand des Punktes C vom Kreisumfang. Abstand des Punktes C von der Geraden FLK gibt Ventilerhebung nach 30 v. H. Kolbenweg an.

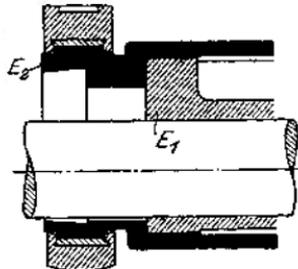


Fig. 48.

Füllungsausgleich bei Proellscher Regleranordnung nach Doerfel dadurch, daß Grund- und Drehexzenter für beide Seiten von gleicher Größe sind und nur der Verdrehwinkel vorn größer ist. Proell macht bei gleichen und genau entgegengesetzt aufgekeilten Grundexzentern den Drehexzenteradius auf der Deckelseite größer als auf der Kurbelseite. Die Sehnen der Bögen BC , Fig. 49, sind für beide Zylinderseiten gleich groß.

Weitere Ausführungen: Recke, Proell, Elsner.

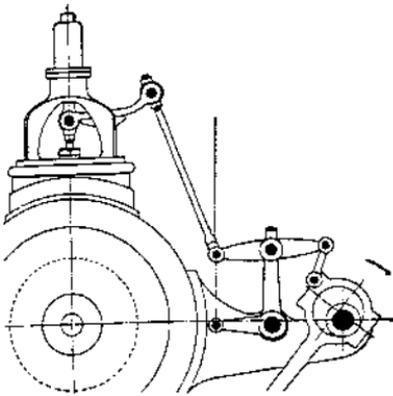


Fig. 50.

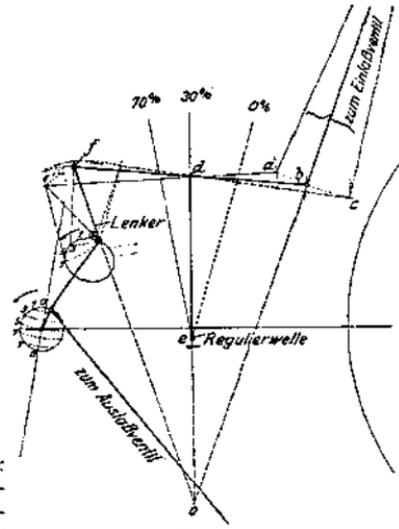


Fig. 51.

Steuerungen mit verstellbarer Geradführung eines Exzenterstangenpunktes. Der Endpunkt der Exzenterstange beschreibt je nach Neigung der Gleitbahn verschiedene Kurven, die Ventileröffnung verursachen, sobald sie den bei Ruhelage des Ventils mit der Zugstangenlänge geschlagenen Kreisbogen unterschreiten. Ausführung von Radovanovic, Fig. 52. Der Regulator verstellt einen Stein und verdreht damit die von der Exzenterstange umschlossene, als Zapfen ausgebildete Führung.

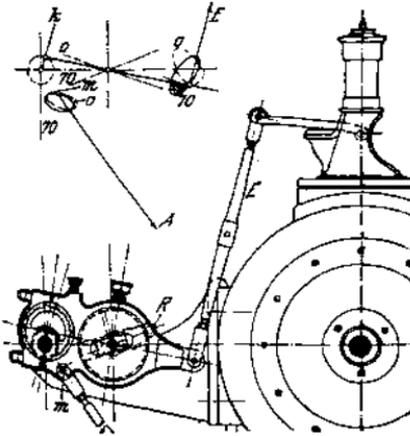


Fig. 52.

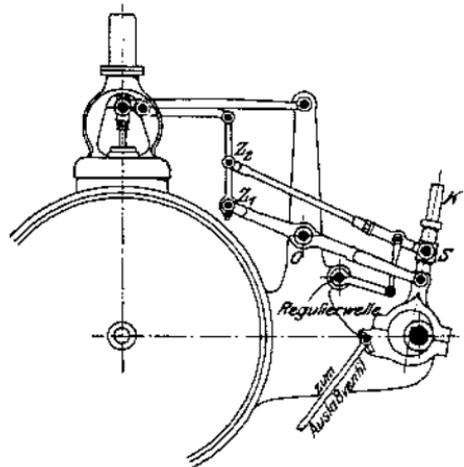


Fig. 53.

Unveränderliches Voröffnen und Vermeidung der Rückwirkung, wenn in der Voreinstellung der Kurbel der Stein in der Mitte Führungsscheibe steht. Ausführungen: König, Sondermann.

Steuerungen mit zwei Antrieben. Zerlegung der Exzenterbewegung in zwei Komponenten und Wiedervereinigung beider Komponenten in einem

das Ventil steuernde und veränderliche Kurven beschreibenden Gelenk. Collmann-Steuerung, Fig. 53. Die als Kulisse ausgebildete Exzenterstange K steuert unveränderlich den Zapfen z_1 , der sich um Punkt o dreht und dessen aufwärts-

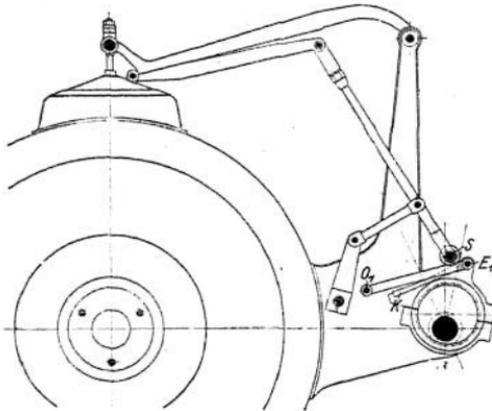


Fig. 54.

gehende Bewegung das Ventil zu eröffnen bestrebt ist. Auf Kulisse K wird Stein S verschoben, so daß je nach Stellung von K Zapfen z_2 größere oder kleinere Ausschläge macht, deren senkrechte Komponente der auf Ventileröffnung wirkenden Hebung des Zapfens z_1 entgegenwirkt. Voröffnen verändertlich, da für unveränderliches Voröffnen die gerade hergestellte Exzenterstange K bogenförmig mit z_2 S als Radius ausgeführt werden müßte.

Ausführungen: Kuchenbecker, Kliebisch.

Steuerungen mit veränderlicher Lage des Antriebspunktes. König-Steuerung, Fig. 54. Das Exzenter wird durch einen in E_1 angreifenden Lenker um Punkt o_1 geführt. Der Regulator verstellt die Rolle S auf der zur Erzielung unveränderlichen Voröffnens mit Zugstangenlänge als Radius gekrümmten Bahn.

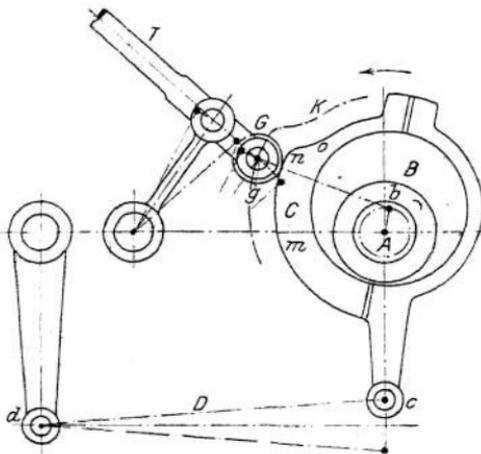


Fig. 55.

Der Ausschlag des Antriebspunktes S setzt sich aus der unveränderlichen, wagerechten Exzenterbewegung mit der Schwingungswerte $2r = 2(V_e + e)$ und aus einer veränderlichen Bewegung $r \cdot \frac{L}{l}$ zusammen, die der senkrechten Exzenterbewegungskomponente entspricht. l = Exzenterstangenlänge, L = veränderlicher Entfernung des Punktes S von E_1 . Steht S in E_1 , so wird das Ventil nur um V_e geöffnet.

Steuerungen mit un-

runden Scheiben. Steuerung von Zwonicek. Fig. 55. Der vom Regulator um die Exzenterstange B verdrehbare Bügel C ist zur unrunder Scheibe ausgebildet, Rolle G der Ventilstange T wird vom konzentrischen Teil m angehoben und läuft je nach Regulatorlage an Kurve no früher oder später ab.

4. Die freifallenden Ventilsteuerungen.

Steuerungen mit kleinem Einfallweg der Klinke. Fig. 56 zeigt die Collmann-Steuerung. Der obere Exzenterstangenendpunkt, an dem die Klinke hängt, wird durch Lenker um den Drehzapfen des Ventilhebels, der die Anschlagplatte trägt, geführt. Die Klinke setzt annähernd in Exzenterstotlage auf und nimmt bei der Abwärtsbewegung den Ventilhebel mit, bis sie auf den vom Regulator eingestellten Auslöseclauden trifft.

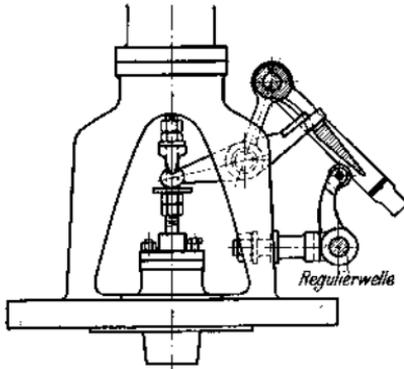


Fig. 56.

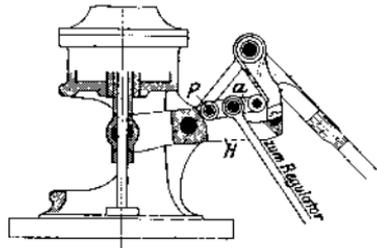


Fig. 57.

Ausführungen: v. Bavier.

Steuerungen mit großem Einfallweg der Klinke. Die Klinke erhält eine zweite, die Auslösung bewirkende Bewegung und kann infolgedessen tiefer einfallen. Steuerung der M.A.N., Werk Nürnberg, Figur 57. Hebel *a*, der die Auslöserolle trägt, ist durch Zapfen *P* mit Ventilhebel *H* verbunden. Indem Klinke den Hebel *H* nach abwärts zieht, geht Hebel *a* nach aufwärts und verdrängt die Klinke.

Ausführungen: Kaufhold, Wiegleb.

Steuerungen mit zwangläufiger Klinkenbewegung. Die Klinke bewegt sich nicht in einer beiderseits abgebrochenen Bahn, sondern in einer geschlossenen Kurve, indem ihr eine zweite Bewegung von einem Teile des Antriebsgestänges erteilt wird. Fig. 58. Die Fig. 59 und 60 zeigen Klinkenbahnen. Wie aus Fig. 59 ersichtlich, setzt die Klinke auf, wenn das Exzenter annähernd in der Mittellage steht, also seine größte Geschwindigkeit hat. Durch passende Hebelübertragung wird bei der Kurve nach Fig. 60 erreicht, daß die Klinke langsam und ohne Stoß aufsetzt und sodann sehr schnell abwärts geht. Die

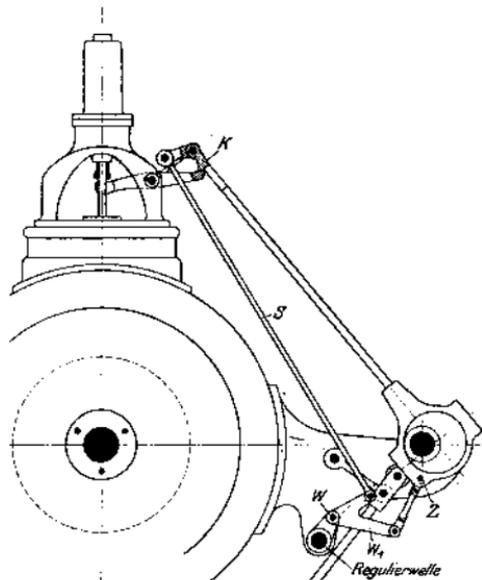


Fig. 58.

Nullkreise geben Stellungen der Klinkenkante nach je 30° Kurbelweg an. Bezüglich der Ausbildung dieser Steuerungen ist vor allem das Haus Gebr. Sulzer in Winterthur und Ludwigshafen zu nennen.

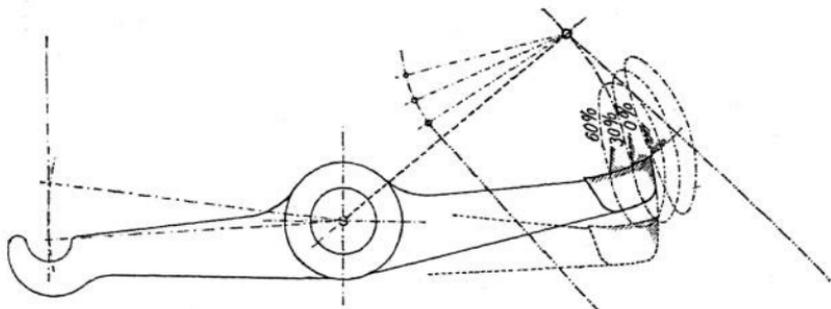


Fig. 59.

Fig. 61 zeigt die bei den Steuerungen der beiden ersten Gruppen nötige Exzentraufkeilung. Die Klinke legt vor Aufsetzen den sog. „Überhub“ zurück, so daß mit einer der Ordinate n entsprechenden Geschwindigkeit angehoben wird. Je nach Genauigkeit der Ausführung und Einstellung beträgt der Überhub 1 bis 2 mm.

Steuerungen mit ellipsenförmigen Klinkenbahnen verhalten sich ungünstiger, da die Klinke annähernd bei Höchstgeschwindigkeit des Exzentrers aufsetzt.

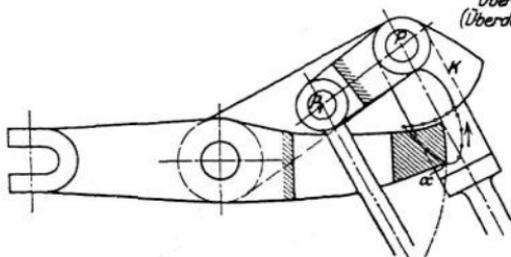


Fig. 60.

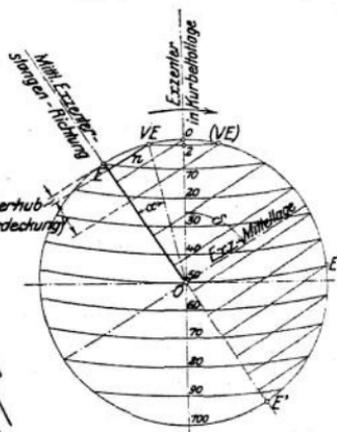


Fig. 61.

Füllungsausgleich wird durch ungleiche Exzentrizitäten in Verbindung mit ungleichen Voreilwinkeln oder durch abweichende Einstellung des vom Regler verstellten Triebwerkes erreicht. Bei den Steuerungen mit zwangsläufiger Klinkenbewegung läßt man die Klinke auf der Deckelseite bei den kleineren Füllungen weniger tief einfallen.

5. Steuerung des Auslasses durch den Dampfkolben (Gleichstrommaschinen).

Am Ende des Hubes legt der Kolben Schlitze frei, durch die der Dampf auströmt. Länge der Schlitze = $\frac{1}{10}$ Kolbenhub, sonach Vorausströmung 10 v. H., Kompression 90 v. H. Kolbenlänge gleich Hub minus Schlitzweite.

Verringerung des Dampfverbrauches ist hauptsächlich auf den Wegfall der Auslaßventile und der mit diesen verbundenen schädlichen Räume und Flächen,

weniger auf die Beibehaltung der Strömungsrichtung des Dampfes zurückzuführen. Eine Schichtung des Dampfes, wie sie mitunter angenommen wird, ist wegen des stürmischen Verlaufes der Ausströmung unwahrscheinlich. (Vgl. Dubbel, Steuerungen, S. 241. Berlin 1912, Julius Springer.) Versuche von Prof. Grassmann haben den geringen Wert der Gleichstromwirkung erwiesen. Der Dampfverbrauch erreicht den guter Verbundmaschinen. Als zweckmäßig hat sich Heizung des Deckels und der Anfänge der Zylinder (sog. Stufenheizung) erwiesen.

Die langandauernde Kompression macht entweder sehr tiefe Luftleeren oder besondere Bemessung der schädlichen Räume, die ohne Vergrößerung der schäd-

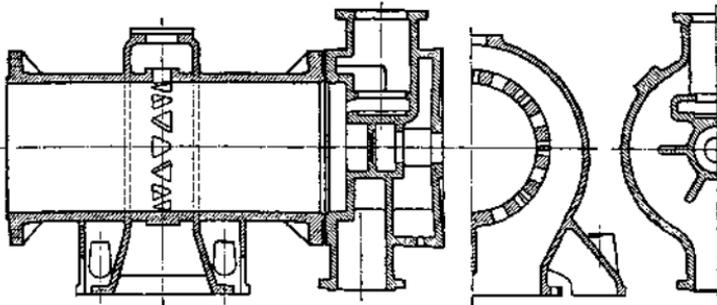


Fig. 62.

lichen Flächen zu erreichen ist — z. B. durch Aushöhlung des Kolbens —, erforderlich. Bei Auspuff wird ein schädlicher Raum von 17 v. H. nötig und Vorteile gegenüber der üblichen Einzylindermaschine sind nicht mehr vorhanden.

Bei Kondensationsmaschinen sind zusätzliche schädliche Räume anzuordnen, die bei Störung der Luftleere durch selbsttätige oder von Hand zu verstellende Zuschaltventile mit dem Hubraum verbunden werden. Meist werden diese Zusatzräume im Deckel untergebracht. Die Zuschaltventile sollen die gleichen Querschnittsflächen wie die Einlaßventile aufweisen, da sonst der gewünschte Druckausgleich zwischen Zylinderinnerem und Deckelraum nicht eintritt. Außerdem sind reichlich bemessene Sicherheitsventile anzuordnen. Wegen der sehr kleinen Füllungen sind als Steuerungen nur solche zwangsläufiger oder paarschlüssiger Art zu empfehlen.

Fig. 62 zeigt Zylinderausführung (Maschinenfabrik Grevenbroich, Bauart Stumpf). Die Einlaßventile sitzen ohne Korb unmittelbar auf Flächen des Deckels. Der Schlitzauslaßquerschnitt hat die ungefähre Größe $f = \frac{0 \cdot c}{10}$. Das Kurbeltriebwerk ist schwerer auszuführen als bei

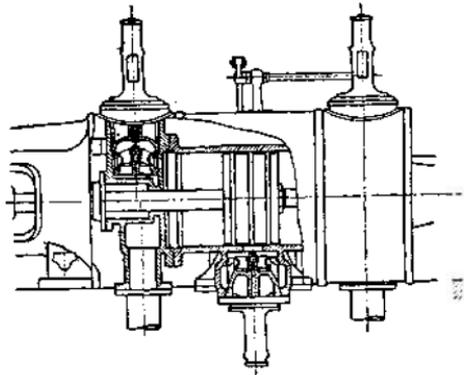


Fig. 63.

Tandemaschinen, wodurch der Preisunterschied zwischen beiden Maschinenarten erheblich beeinflußt wird. Dampfverbrauch etwa 4,7 kg pro Psi/Stunde bei $p = 10$ atm, $t = 300^\circ$.

Verringerung der Kompression von 90 auf 50 v. H. läßt sich durch Anordnung der Schlitze derart, daß sie in Mitte Hub geschlossen werden, erreichen, wobei die beliebig zu wählende Vorausströmung durch die Steuerung des hinter den Schlitzen angeordneten Organs eingestellt wird. Fig. 63, Ausführung Proell. Vorteil dieser Anordnung: Geringere Kompression. Ausführung des Kolbens in normaler Breite. Nachteil: Gegenüber der Gleichstrommaschine verstärkte Einwirkung des durch die Schlitze geschaffenen schädlichen Raumes auf den expandierenden Dampf.

6. Die Umsteuerungen.

a) Innere Umsteuerungen. Ein Beispiel dieser nur bei kleineren Maschinen zu findenden Umsteuerung zeigt Fig. 64, Ausführung Danek. Muschelschieber m , der mit äußerer Einstromung, und sog. E-Schieber n , der mit innerer Einstromung arbeitet, sind zu einem einzigen Steuerungsorgan vereinigt, durch dessen Drehung entweder m oder n zur Wirkung gelangt.

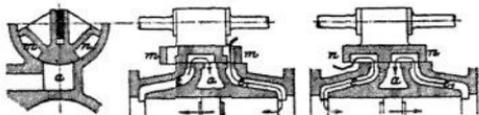


Fig. 64.

Nachteile der hierhin gehörigen Bauarten: Die Schieber müssen ohne jede Überdeckung ausgeführt werden, so daß das Diagramm rechteckige Gestalt ohne jede Expansion und Kompression erhält.

b) Umsteuerungen mit unmittellbarer Verstellung des Exzentrers. Letzteres ist geschlitzet und schwingt um einen festen Aufhängepunkt oder wird geradlinig geführt. Ausführung Lentz: Ein mit schrägen Zähnen versehenes Gleitstück greift in gleichartige Lücken der Exzentrerscheibe ein und wird senkrecht zu dieser verschoben.

c) Kulissensteuerungen. Ausführung mit zwei Exzentrern: Vorwärts- und Rückwärtsexzenter, oder mit nur einem Exzenter, wobei zweite Bewegung vom Kreuzkopf abgeleitet wird. Offene Stangen, wenn bei der in Fig. 65 wiedergegebenen, vom Schieberkasten abgewandten Kurbelotlage die Exzenterstangen die ausgezogene Lage haben, die punktiert wiedergegebene Lage kennzeichnet: „gekreuzte Stangen“.

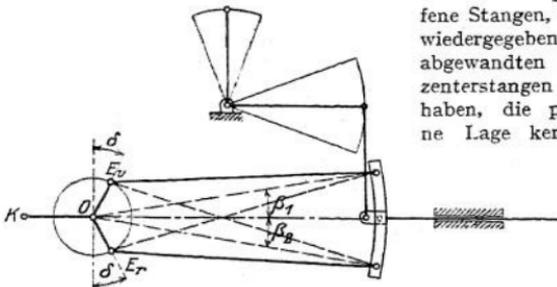


Fig. 65.

1. Steuerung von Stephenson, Fig. 65 und 66. Weg des Punktes A in der um β_1 gegen die Wagerechte geneigten Richtung:

$$s = r \cdot \sin(\delta + \alpha \pm \beta)$$

(vgl. S. 868). Zur Vereinfachung der Rechnung wird stets angenommen, daß die Endpunkte der Exzenterstangen sich in Wagerechten bewegen. Wagerechter Weg:

$$s' = \frac{r}{\cos \beta} \cdot \sin(\delta + \alpha \pm \beta).$$

Schieber erscheint sonach durch ein Exzenter $\frac{r}{\cos \beta}$ angetrieben.

Für Bewegung des Vorwärtsexzentrers ist unter Annahme festgehaltenen Punktes B und Berücksichtigung der Übersetzung, Fig. 66:

$$r_1 = \frac{r}{\cos \beta_1} \left(\frac{c + u}{2c} \right).$$

Ebenso für Rückwärtsexzenter

$$r_2 = \frac{r}{\cos \beta_2} \left(\frac{c - u}{2c} \right).$$

Durch Fällen von Senkrechten von den Punkten E_r und E_v auf die Schenkel der angetragenen Winkel β_1 und β_2 ergeben sich die Größen von $\frac{r}{\cos \beta_1}$ und $\frac{r}{\cos \beta_2}$. Nach Teilung von r_1 und r_2 nach Maßgabe der jeweiligen Übersetzung erhält man die resultierenden Exzenter, deren Endpunkte auf einer parabelförmigen Scheitelkurve liegen. Fig. 67. Bei Ausführung der Steuerung derart, daß in den Kulissenendlagen Mitte Stein mit Kulissenantriebspunkt zusammenfällt,

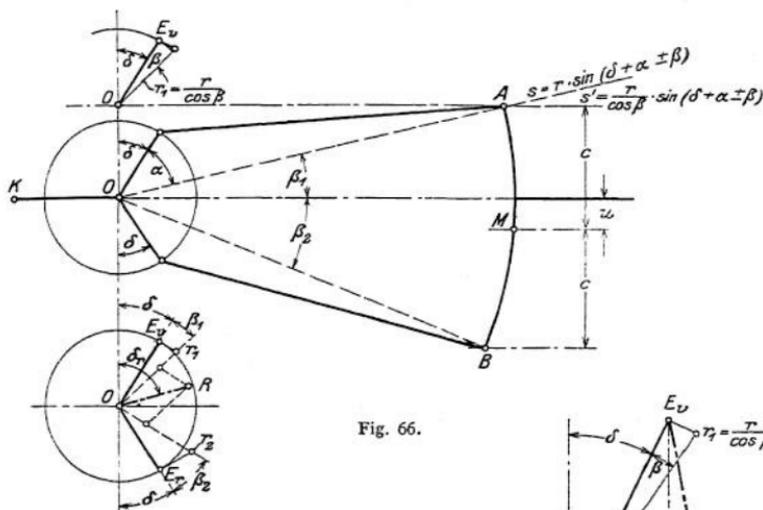


Fig. 66.

wird $\beta_1 = \beta_2 = 0$, und die wirklich ausgeführten Exzenter treten statt $\frac{r}{\cos \beta_1}$ bzw. $\frac{r}{\cos \beta_2}$ in Wirksamkeit. In Kulissenmittellage ist $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ und $u = 0$. Kleinste Exzenter $\frac{r_1}{2}$ und $\frac{r_2}{2}$. Ersatz der Parabel durch einen Kreisbogen, der durch die Endpunkte der beiden größten und des kleinsten Exzenter zu legen ist. Der Parabelkrümmung entsprechend liegt bei offenen Stangen der Mittelpunkt dieses Kreisbogens nach der Kurbel hin, bei gekreuzten Stangen nach dem Zylinder hin. Lineares Voreilen um Scheitelhöhe der Kurve veränderlich. Krümmung der Kulisse nach einem Radius gleich Exzenterstangenlänge.

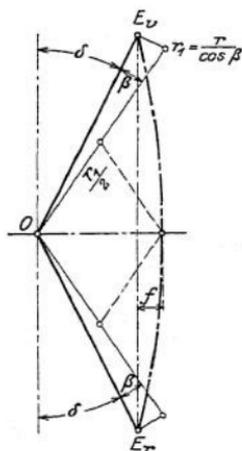


Fig. 67.

Fig. 68 und 69 zeigen schematisch die Steuerungen von Gooch und Allan. Bei ersterer wird die Kulisse unveränderlich durch eine Hängestange geführt und die Schieberstange verstellt. Winkel β bleibt bei der Verstellung unveränderlich, so daß für die Endlagen stets $r_1 = r_2 = \frac{r}{\cos \beta}$ ist.

Die Ermittlung der Scheitelkurve ist in gleicher Weise

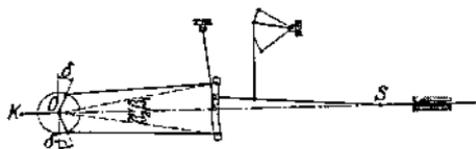


Fig. 68.

wie bei Stephenson unter Berücksichtigung der Übersetzung vorzunehmen. Scheitelkurve geradlinig, also lineares Voreilen konstant.

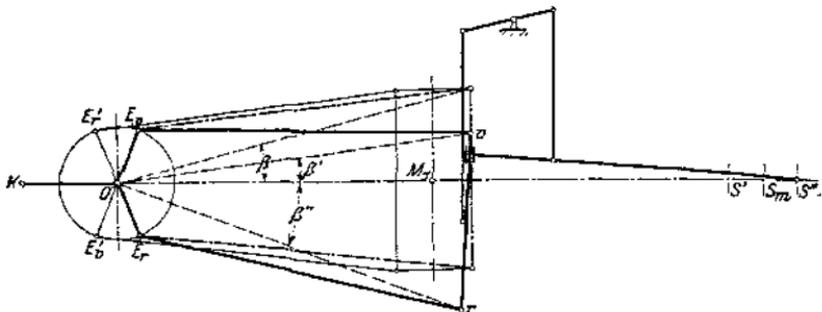


Fig. 69.

Bei der Steuerung von Allan wird sowohl die Kulisse als auch die Schieberstange verstell. Es ergeben sich als Vorteile: Gerade Kulisse und Verringerung des Verstellungsweges. Fig. 69. Die Scheitelkurve ist wie bei Stephenson eine Parabel, die aber infolge des weniger veränderlichen Winkels β geringere Pfeilhöhe hat. Winkel β hat größten Wert für Mittellage, kleinsten Wert für Endlage der Steuerung. Verhältnis der Steinhebung zur Kulissensenkung

$$\lambda = \frac{l_2}{l_1} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{l_1}{l_2}} \right),$$

worin l_1 = Exzenterstangenlänge, l_2 = Schieberstangenlänge.

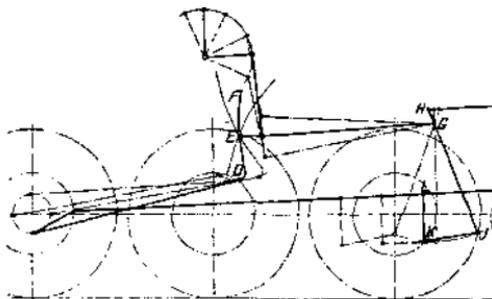


Fig. 70.

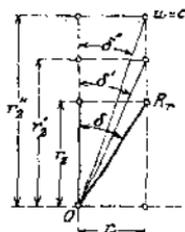


Fig. 71.

Fig. 70 zeigt schematisch die Heusinger-Waldegg-Steuerung. Eine der Kurbel um 90° nacheilende Gegenkurbel versetzt die im Punkt E gelagerte Kulisse in Schwingungen. Der mit dem Kreuzkopf L verbundene Mitnehmer LK ist durch Lenker KJ mit dem unteren Ende J des Pendels JGH verbunden. Vereinigung beider Bewegungen in G und Antrieb des Schiebers von H aus. Fig. 71 zeigt die geradlinige Scheitelkurve. Übertragung der Kreuzkopfbewegung auf den Schieber mit konstanter Übersetzung. Wirkung wie die eines

Exzenters vom Radius $r_1 = R \cdot \frac{n}{m}$, worin $n := HG$, $m = GJ$, R = Kurbelradius. Da Pendel JH Bewegungsrichtung umkehrt, so eilt diese Bewegung der Kurbel um 180° vor. Das der Kurbel um 90° voreilende Exzenter verursacht je nach Lage des Steins in Kulisse Bewegungen von der veränderlichen Exzenti-

bei Hackworth-Bremse, Fig. 73, von einem Zwischenpunkt abgenommen. Schieberweg:

$$\xi = r \cdot \frac{u}{c \pm u} \cdot \cos \omega \pm r \cdot \frac{c}{c \pm u} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \omega .$$

Die Joy-Steuerung zeigt Bewegungsableitung von der Pleuelstange. Durch die häufig zu findende Einschaltung eines

Ellipsenlenkers wird die Dampfverteilung verbessert.

Führung des Exzenterstangenpunktes auf einem Bogen statt in einer Geraden führt bei den Steuerungen nach Fig. 72 und 73 Füllungsausgleich herbei. Auf diesen ist auch die Lage des Umsteuerhebels von Einfluß; als Vorwärtsgang ist diejenige Drehrichtung zu wählen, die durch

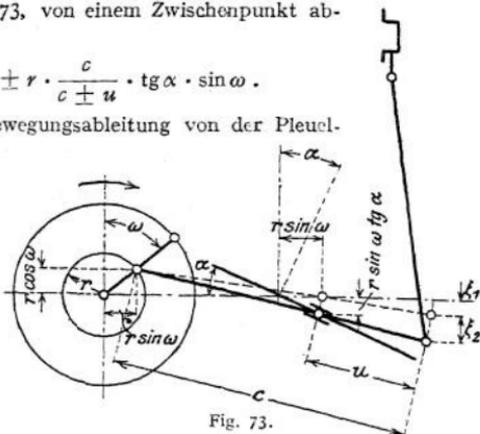


Fig. 73.

eine den Füllungsausgleich begünstigende Steuerhebelage eingestellt wird.

e) Die Nockensteuerungen der Fördermaschinen. Bei älteren Fördermaschinen sind die Ventile — nebeneinander liegend — noch häufig in seitlicher Anordnung zu finden, während bei neueren Maschinen die Ventillage in den Scheiteln der Zylinder, wie bei den gewöhnlichen Betriebsmaschinen, bevorzugt wird. Durch Gegenüberstellung der Antriebshebel ermöglicht diese Lage die Anwendung nur je eines Doppelnockens für den Einlaß und für den Auslaß. Fig. 74 zeigt die Ausführung des Gestänges. Das eine Einlaßventil wird unmittelbar durch $H_1 H_2$ gesteuert, das zweite erhält seine Bewegung von h_1 durch Vermittlung des Gestänges $h_2 h_3 h_4$. Die Zugstangen der Ventile liegen hierbei in der gleichen zur Maschinenachse parallelen Ebene. Wird hierauf verzichtet, so vereinfacht sich die Ausführung, indem h_1 direkt die Antriebsstange des Ventils steuert.

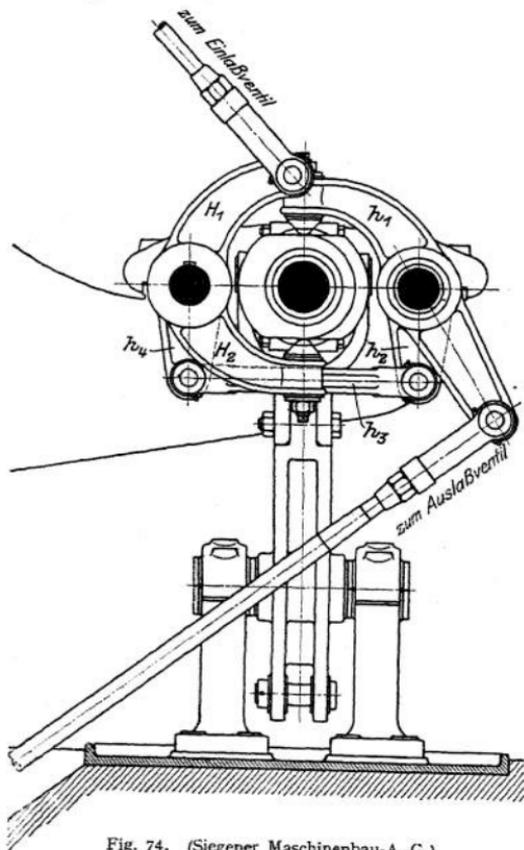


Fig. 74. (Siegener Maschinenbau-A.-G.)

Die Nocken sind in der Weise auszuführen, daß in der Nähe der Steuerbebelmittellage große Füllungen ohne Voreinströmung und bei verringerter Vorausströmung und Kompression zur Erleichterung des „Kapsens“ gegeben werden. Die Fig. 75 und 76 zeigen Abwicklungen neuerer Nockenformen. In Fig. 75 nimmt die Füllung von innen nach außen ab, während in Fig. 76 das Umgekehrte der Fall ist und obiger Bedingung dadurch entsprochen wird, daß ein besonderer Streifen von der Breite b zur Einstellung großer Füllungen vorgesehen ist. Die Steigung der An- und Ablaufkurven ist mit Rücksicht auf die zugelassenen Beschleunigungen zu wählen. Als größter Steigungswinkel sei schätzungsweise 40° genannt, während 30° einen guten Mittelwert darstellt. Die Steigung in der Axialebene hängt von den für die verschiedenen Füllungen vorgesehenen Erhebungen in den Radialebenen ab. Von diesem Umstand wird die Nockenlänge bestimmt.

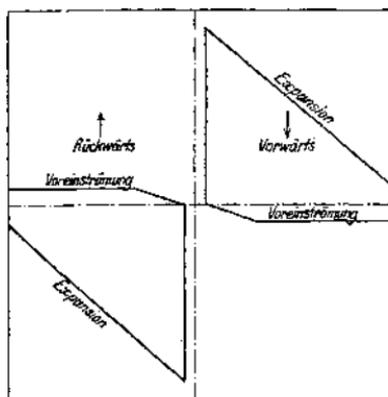


Fig. 75.

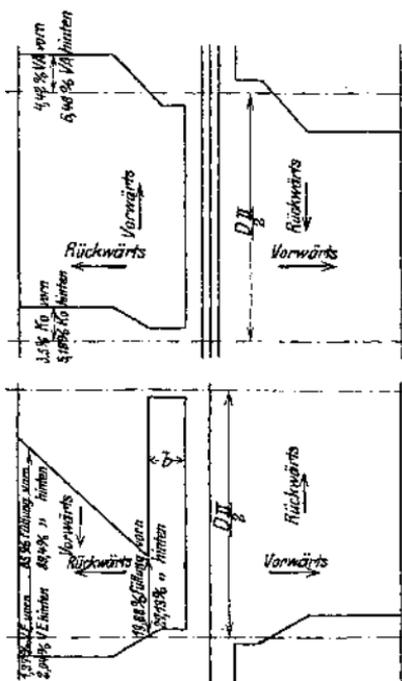


Fig. 76.

3. Die Mittel zur Verringerung der Eintrittskondensation.

Ist im Diagramm Fig. 2 γ das zum Drucke p , γ_c das zum Drucke p_c gehörige spezifische Dampfgewicht, so ist für jeden Hub der Zylinder mit dem Dampfgewicht $(s_0 + s') \cdot \gamma - s_0 \cdot \gamma_c$ aufzufüllen, so daß sich als „sichtbarer“ oder „nutzbarer“ Dampfverbrauch pro Stunde ergibt:

$$G = 2\pi \cdot 60 [(s_0 + s') \gamma - s_0 \cdot \gamma_c].$$

Dieser Dampfverbrauch wird in Wirklichkeit durch die Verluste infolge Undichtigkeit und Eintrittskondensation (d. h. Niederschlag des eintretenden Dampfes an den während des Auspuffes abgekühlten Wandungen namentlich des schädlichen Raumes) um 20 bis 50 v. H. und mehr überschritten.

Die Verluste durch Undichtigkeit sind bei gut ausgeführten und instandgehaltenen Maschinen von untergeordneter Bedeutung. Wesentlichen Einfluß hat der Eintrittsverlust.

1. Dampfmantel. Dieser bezweckt, durch Erhöhung der mittleren Zylinderwandtemperatur die Rückgabe der an die Zylinderwandungen übergegangenen Wärmemenge schon während der Expansion zu bewirken und so den schädlichen

Übergang während des Auspuffes zu vermeiden oder wenigstens zu verringern. Außerdem wird die am Wärmeaustausch beteiligte Metallmasse vermindert. Der Wert der Heizung nimmt mit wachsender Füllung und Umlaufzahl ab (Versuche von Prof. Capper, Z. Ver. deutsch. Ing. 1906, S. 1066).

Bei Verwendung überhitzten Dampfes würde durch den Dampfmantel die Wandungstemperatur über den betriebssicheren Betrag von etwa 200° hinaus erhöht und die Schmierung erschwert, außerdem Wärmespannungen in dem komplizierteren Gußstück verursacht. In neuerer Zeit ist Anwendung des Dampfman­tels selten. Vorteile: Leichtes Anwärmen bei der Inbetriebsetzung und bequeme Auswechslung der Laubbuchse, wenn diese eingesetzt.

2. Verbundwirkung. Verringerung der Kondensation durch Teilung des Temperaturgefälles. Verringerung der Undichtheitsverluste tritt nicht ein, da auch in den Verbundzylindern kritisches Druckverhältnis überschritten, sonach Dampfgeschwindigkeit bei Überströmung durch undichte Stellen 450 m sek betragen wird. Anforderungen: 1. gleiches Temperaturgefälle in beiden Zylindern; 2. gleichmäßige Verteilung der Arbeiten auf beide Zylinder; 3. für Verbundmaschinen mit zwei Kurbeln: möglichst geringer Unterschied in den der Gestängeberechnung zugrunde liegenden Kolbendrücken.

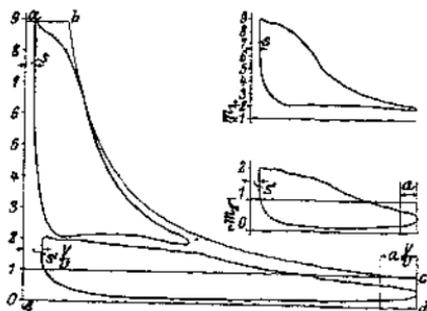


Fig. 77.

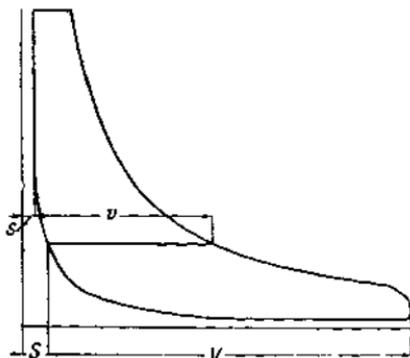


Fig. 78.

Fig. 77 zeigt „rankinisierte“ Diagramme. Hoch- und Niederdruckdiagramme werden auf denselben Druckmaßstab gebracht, wobei Maßstab der Niederdruckfeder maßgebend ist. Niederdruckdiagramm wird „verstreckt“, d. h. Abstand a je zweier der 10 Teilordinaten im Verhältnis $a \frac{V}{v}$ vergrößert, ebenso schädlicher

Raum. Einzeichnung beider Diagramme in ein Diagramm mit 1 Atm. Gegen­druck bzw. 0 Atm. bei Kondensationsmaschinen, ohne Vorausströmung und Kompression und mit Expansionslinie, die entweder durch Anfangspunkt (meist bei überhitztem Dampf) oder durch Endpunkt der wirklichen Expansion gelegt wird. Verhältnis der Summe der Flächen der aufgenommenen Diagramme zu der des Hilfsdiagramms wird als „Völligkeitsgrad“ bezeichnet, der 60 bis 70 v. H. je nach Dampfbeschaffenheit beträgt.

Benutzung des Hilfsdiagramms zur Berechnung, indem dessen Fläche ausgemessen und der indizierte Druck der Abmessung des Niederdruckzylinders nach Multiplikation mit dem Völligkeitsgrad zugrunde gelegt wird. Hierauf Wahl des Zylinderverhältnisses, das im Durchschnitt 1 : 2,5 bis 1 : 3 (bei den Wölfchen Lokomobilen z. B. 1 : 4) beträgt.

Genauere Ermittlung durch Aufzeichnung des Diagramms nach Fig. 78; Annahme, daß schädliche Räume gleichen Prozentsatz der Hubräume ausmachen, so daß Expansions- und Kompressionslinie von demselben Nullpunkt aus aufgezeichnet werden können.

Teilung des Diagramms durch Wagerechte so, daß Forderungen nach S. 894 erfüllt werden. Hierauf genauere Untersuchung im „Volumendiagramm“, in das die aus Fig. 78 sich ergebenden Strecken s , S , v und V eingetragen werden. Aufnehmercylinder \propto Hochdruckzylindervolumen vorausgesetzt.

Fig. 79 zeigt Volumendiagramm für Tandemaschine. Teilung der Kurbelhalbkreise in gleiche Anzahl von Teilen, Loten der Teilpunkte auf Wagerechte, die in gleichen, aber beliebigen Abständen voneinander gezogen sind. Verbindung dieser Punkte durch eine Sinuskurve. AB = Dauer einer Umdrehung. Die Abstände der Kurvenpunkte von der Geraden AB geben die Kolbenstellungen an.

Hochdruckdiagramm: Füllung af , Expansion ab und nach gewählter Kompressionsendspannung Aufzeichnung der Kompressionslinie von e ab wie im gewöhnlichen Diagramm. Anfangspunkt d der Kompression zunächst noch unbekannt. In b strömt Dampf in den Aufnehmer und von dort in den Niederdruckzylinder. Expansion von b bis c , da Niederdruckkolben größeres Volumen

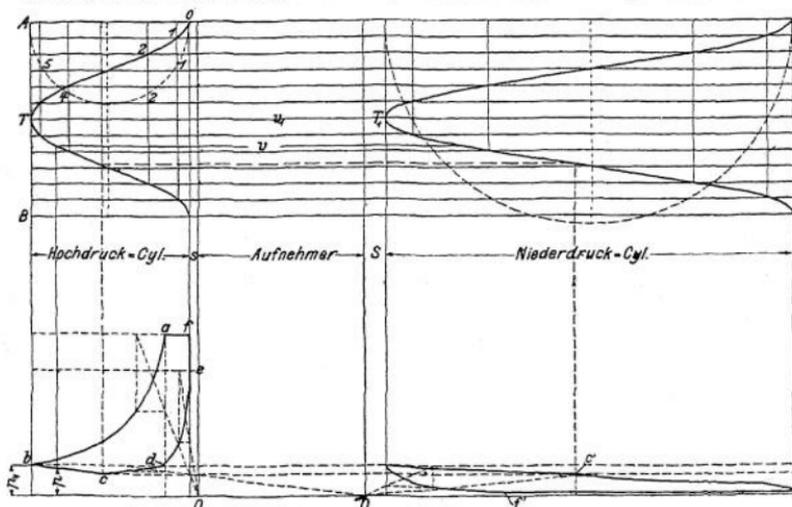


Fig. 79.

freilegt, als Hochdruckkolben verdrängt. Berechnung der Expansionslinien bc und $b'c'$ als „Linien gemeinsamen Vorganges“: $p = \frac{p_1 v_1}{v}$. Lage von Punkt c

noch unbekannt. Anfangspunkt d der Kompression, in dem Hochdruckauslaß schließt, muß in gleicher Höhe wie b liegen, damit beim folgenden Hub wieder Druck p_1 im Aufnehmer vorhanden ist. In c schließt Niederdruckeinlaß und Hochdruckauslaßdampf wird in den Aufnehmer hineinkomprimiert. Konstruktion der Kompressionslinie dc bis zum Schnittpunkt mit bc von O_1 aus. Übertragung von Punkt c nach c' mit Hilfe der Volumenlinien. Von c' ab Expansion im Niederdruckzylinder allein. Entwurf dieser Expansionslinie wie auch der Kompressionslinie (deren Beginn oder Ende anzunehmen ist) von O_1 aus.

Fig. 80 Diagramm für Verbundmaschinen mit Kurbeln unter 90° . Sinuskurven sind gegeneinander entsprechend zu versetzen. In b tritt Hochdruckdampf in den Aufnehmer aus, da zunächst Niederdruckfüllung noch nicht begonnen. Kompressionslinie bc von O_1 aus zu entwerfen. In c Eröffnung des Niederdruckeinlasses (Beginn der Voreinströmung). Bestimmung der Lage

von c durch die Volumenlinien. cd „Linie gemeinsamen Vorganges“ $p = \frac{p_1 v_1}{v}$.

d = Schnittpunkt der von O aus zu zeichnenden Kompressionslinie mit berechneter Linie von c aus. Punkt d' festzustellen durch Volumenlinien. Von d' bis e' Auffüllung des Niederdruckzylinders vom Aufnehmer allein aus. e' muß in gleicher Höhe mit b liegen, da in e' Abschluß vom Aufnehmer erfolgt.

Liegt in Fig. 79 Punkt d , in Fig. 80 Punkt e' höher als die Expansionsendspannung, so läuft das Hochdruckdiagramm in eine Schleife aus; bei tieferer Lage von d bzw. e' findet ein Spannungsabfall statt.

Letzterer wird oft mit Absicht herbeigeführt, da das Hochdruckzylindervolumen verkleinert, sonach die Füllung vergrößert und die mittlere Zylinderwandtemperatur erhöht wird. Vergrößerung der Kompression verursacht ebenfalls Spannungsabfall, da die Kompressionsarbeit durch größere Füllung aufgebracht werden muß. Aufnehmerheizung vergrößert zwar die spezifische Dampfmenge, gleichzeitig steigt aber nach Versuchen von Weighton der Dampfverbrauch für die PS-Stunde.

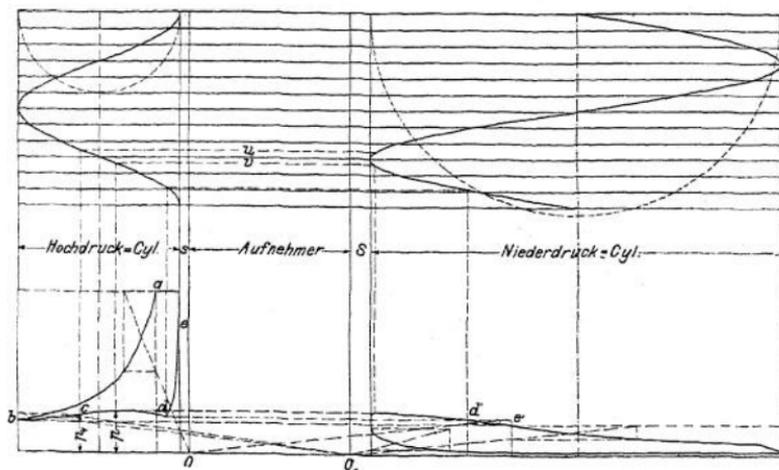


Fig. 80.

Versuche von Barrus ergaben ungefähr den gleichen Dampfverbrauch mit Heizung wie ohne Heizung. Selbst bei Zurückführung des kondensierten Heizdampfes in den Kessel ergab sich keine nennenswerte Ersparnis.

Da die Aufnehmerheizung nur mit konstruktiv unbequemen Mitteln durchzuführen ist, so ist sie zu vermeiden.

Über Zwischenüberhitzung siehe S. 898.

In den meisten Fällen wird der einfacheren Ausführung wegen die Niederdrucksteuerung für konstante Füllung eingerichtet, oder es wird für stärkere Belastungsschwankungen Einstellung der Niederdruckfüllung von Hand vorgesehen.

Fig. 81 zeigt die Veränderung des Aufnehmerdruckes bei konstanter und Fig. 82 bei durch Regulator beeinflusster Füllung des Niederdruckzylinders. Im letzteren Fall bleibt der Aufnehmerdruck annähernd konstant, so daß bei größerer Hochdruckfüllung ein starker Spannungsabfall, bei kleinerer Schleifenbildung stattfindet. Die Verteilung der Arbeiten (A_h und A_n) und der Höchstkolbendrucke (P_h und P_n) wird bei der Regelung gleichmäßiger.

Über die Regelung der Niederdruckfüllung bei Zwischendampfentnahme siehe S. 1013.

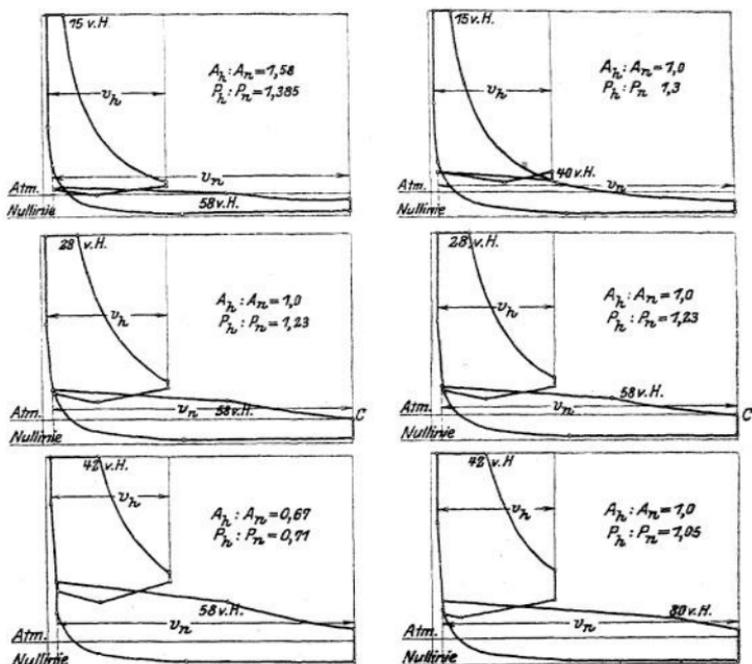


Fig. 81 und 82.

3. Überhitzung¹⁾. Verringerung des Dampfverbrauches: 1. durch Verbesserung des theoretischen Prozesses; 2. durch Verringerung der Niederschlagsverluste im Zylinder. Die Verbesserung des theoretischen Wirkungsgrades geht aus Fig. 83 hervor, in der die kreuzweise schraffierte Fläche den Arbeitsgewinn durch die Überhitzungswärme bedeutet. Die unter dieser schraffierten Fläche liegende Verlustfläche ist im Verhältnis zur ersteren geringer als bei anderen Diagrammstreifen von gleicher Breite.

Von größerer Bedeutung als dieser theoretische Nutzen ist der praktische Gewinn, der durch Verringerung der Eintrittskondensation verursacht wird und der in der Hauptsache auf das Ausbleiben des den Wärmeaustausch begünstigenden Wasserbelages an den Wandungen, sowie auf die geringere Dichte und dadurch verminderte Wärmeleitfähigkeit des überhitzten Dampfes zurückzuführen ist. So stellte Doerfel fest, daß das Temperaturgefälle die Verluste durch Wärmeaustausch weit weniger beeinflußt als die Dampfbeschaffenheit (Feuchtigkeitsgehalt, Druck und Temperatur des Dampfes).

Einen weiteren Gewinn bringt Dampfüberhitzung infolge des vergrößerten spezifischen Volumens. Dieser Gewinn wird jedoch dadurch verringert, daß

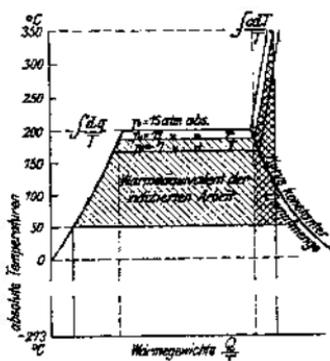


Fig. 83.

¹⁾ O. Berner, Z. Ver. deutsch. Ing. 1905, S. 1061.

infolge der schnelleren Senkung der Expansionslinie die Füllung bei Überhitzung für gleiche Leistung größer sein muß als bei gesättigtem Dampf.

Unter Annahme von Proportionalität zwischen Dampftemperatur und Wärmeverbrauch kann der erzielbare Gewinn an Wärme für je 50° Temperaturerhöhung geschätzt werden zu:

- 8 v. H. bei Einzylinder-auspuffmaschinen,
- 7 v. H. bei Einzylinderkondensationsmaschinen,
- 6,5 v. H. bei Zweizylinderkondensationsmaschinen.

Der größere Gewinn bei Auspuffbetrieb kann schon aus dem Entropiediagramm gefolgert werden, in dem das „Überhitzungsdreieck“ einen um so größeren Betrag der ausnutzbaren Gesamtfläche ausmacht, je höher die untere Temperaturgrenze liegt, je enger die „Temperaturzone“ ist, in der sich der Prozeß abspielt. Doerfel hat durch Versuche an einer Einzylinderkolbenschiebermaschine nachgewiesen, daß bei gleicher Füllung und gleichem Temperaturgefälle der Wärmeaustausch wesentlich größere Wärmemengen bei Auspuffbetrieb als bei Kondensation erfordert, wenigstens wenn mit gesättigtem oder schwach überhitztem Dampf gearbeitet wurde. Die durch die Kondensation bedingte Verlegung der unteren Temperaturgrenze ist infolge der durch die geringere Dampfdichte verursachten Abnahme der Wärmeleitfähigkeit von weit geringerer Bedeutung für die Eintrittskondensation, als meist angenommen wird. Die Höhe der Überhitzung ist allgemein abhängig von der betriebssicheren, mittleren Wandungstemperatur, die etwa bei 200° liegt. Da auch die Dauer der Füllung die Wandungstemperatur erheblich beeinflußt, so sind um so höhere Überhitzungsgrade möglich, je kleiner die Füllung ist, bei Einzylinderkondensationsmaschinen also höher als in den Hochdruckzylindern von Verbundmaschinen.

Der theoretisch vorteilhafte Einfluß weitgetriebener Expansion macht sich im Falle der Überhitzung schon bei kleineren Füllungen bemerkbar, während für gesättigten Dampf der Gewinn praktisch verschwindet. Dementsprechend sind Verbundmaschinen, die auch bei kleineren Leistungen günstig arbeiten sollen, mit großem Zylinderverhältnis (1 : 3 bis 1 : 4) zu bauen. Derartige Maschinen sind reichlich zu bemessen, da bei Überlastung der Nutzen hoher Überhitzung stark abnimmt.

Überhitzung vermindert den Einfluß der Spannung auf den Dampfverbrauch. Spannungserhöhung von 10 auf 13 kg/qcm absolut bedingt bei gesättigtem Dampf einen theoretischen Gewinn von 9 v. H., bei überhitztem nur noch von 2 v. H.

Im wirklichen Betrieb wird jedoch bei gesättigtem Dampf die Wärmersparnis durch die größere Dichtigkeit des hochgespannten Dampfes und den dadurch zunehmenden Wärmeaustausch beträchtlich geringer, so daß hier Überhitzung sehr günstig wirkt. Zwischenüberhitzung verstößt zunächst gegen den Grundsatz, daß Wärme stets bei höchster Temperatur zuzuführen ist. Praktische Erfolge hat sie nur da, wo entweder der Hochdruckzylinder die gesamte Überhitzungswärme nicht zu verarbeiten vermag oder die Aufnehmerdampfüberhitzung durch die Kesselabgase bewirkt werden kann¹⁾ (Wolfsche Lokomobilen).

II. Die Gasmaschinen.

1. Die Theorie.

Jeder Kreislauf kann durch unendlich nahe liegende Adiabaten in Elementarprozesse zerlegt werden, bei denen dQ_1 und dQ_2 , Fig. 84, unendlich klein, die Temperaturen T_1 und T_2 konstant sind, so daß jeder Elementarprozeß als Carnot-Prozeß angesehen werden kann. Dann wird der thermische Wirkungsgrad

$$\eta_{th} = 1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} = 1 - \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{k-1}.$$

¹⁾ Gutermuth-Watzinger. Z. Ver. deutsch. Ing. 1910, S. 1344.

Jedes Wärmeteilchen ist bei möglichst hohem Druck und kleinstmöglichem Volumen zuzuführen, umgekehrt abzuführen. Die Fig. 85, 86 und 87 zeigen die

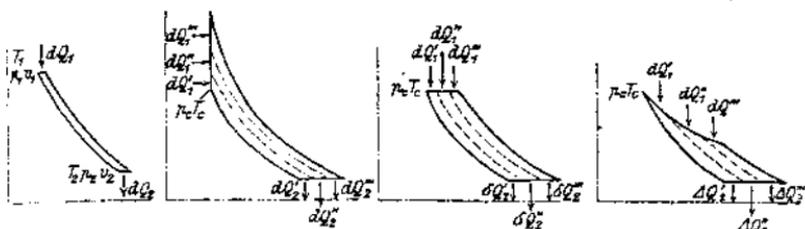


Fig. 84—87.

Zerlegung der mit Verbrennung bei konstantem Volumen (Fig. 85), konstantem Druck (Fig. 86) oder bei konstanter Temperatur (Fig. 87) arbeitenden Prozesse. Maßgebend ist die Kompressionsendspannung, die durch p_c , T_c festgelegt ist.

Der Kreislauf nach Fig. 85 geht in der Gasmaschine vor sich. In dieser ist die Kompressionsspannung p_c durch die Gefahr der Vorzündung des Gemisches bestimmt, während der Verbrennungsdruck größer als p_c sein darf. Kann aber der Kompressionsdruck p_c die höchstzulässige Spannung erreichen, wie dies in der Dieselmachine durch die Kompression der Luft allein ermöglicht wird, so ist die Verbrennung bei konstantem Druck in bezug auf Wirkungsgrad und Gestängeausnutzung die vorteilhafteste.

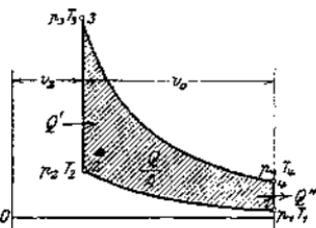


Fig. 88.

Fig. 88 zeigt das Diagramm einer Gasmaschine. Ist $\varepsilon = \frac{v_1}{v_2}$ das Verdichtungsverhältnis, so folgt mit den Bezeichnungen der Fig. 88:

$$\eta_{th} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 1 - \varepsilon^{1-k}$$

Zur gleichen Beziehung gelangt man auf Grund der Arbeitsgleichungen. Die absolute Arbeit des Verbrennungshubes hat die Größe:

$$L_a = \frac{p_3 v_2}{k-1} \left[1 - \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{k-1} \right] = \frac{p_3 v_2}{k-1} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} \right)$$

Unter Vernachlässigung der Ansaug- und Auspuffarbeit ist hiervon abzuziehen die Verdichtungsarbeit:

$$L_c = \frac{p_2 v_2}{k-1} \left[1 - \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{k-1} \right] = \frac{p_2 v_2}{k-1} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} \right)$$

Es ergibt sich:

$$L = L_a - L_c = \frac{(p_3 - p_2) \cdot v_2}{k-1} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} \right)$$

Der Arbeitswert der zugeführten Wärmemenge Q_1 hat die Größe:

$$L_0 = \frac{c_v \cdot v_2}{A \cdot R} \cdot (p_3 - p_2) = \frac{(p_3 - p_2) \cdot v_2}{k-1}$$

$$\eta_{th} = \frac{L}{L_0} = 1 - \varepsilon^{k-1}$$

Der thermische Wirkungsgrad der Gasmaschine ist sonach von dem Verdichtungsverhältnis ε , sowie von $k = \frac{c_p}{c_v}$ abhängig. Mit dem Kompressionsenddruck wächst der Wirkungsgrad. Unter Voraussetzung unveränderlicher, spezifischer Wärme wird der Exponent k nur in geringem Maße vom Gasgehalt der Ladung beeinflusst. Wird hingegen Zunahme der spezifischen Wärme mit steigender Temperatur angenommen, so ändert sich bei Zerlegung des Kreislaufes nach Fig. 89 der Wirkungsgrad dadurch, daß den höher gelegenen Elementarprozessen infolge der höheren Temperatur derselben eine größere Wärmemenge zugeführt werden muß, um die gleiche Druck- und Temperatursteigerung wie bei den tiefer gelegenen Prozessen zu erhalten. Für das mit dem Koksofengas in der Zusammensetzung annähernd übereinstimmende Leuchtgas berechnet Mees eine Verbesserung des thermischen Wirkungsgrades um 11,4 v. H. bei einer Abschwächung des Gemisches von 600 WE auf 312,5 WE pro cbm. Der Berechnung sind die spezifischen Wärmen von Maillard-Lechatelier zugrunde gelegt.

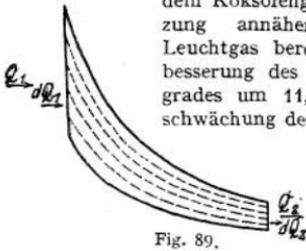


Fig. 89.

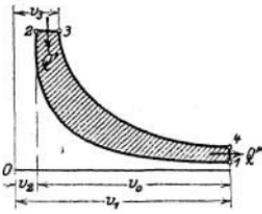


Fig. 90.

In Fig. 90 ist das Diagramm einer Dieselmachine dargestellt. Das Verdichtungsverhältnis $\varepsilon = \frac{v_1}{v_2}$ ist größer als das Ausdehnungsverhältnis $\varepsilon' = \frac{v_1}{v_3}$.

Zugeführte Wärmemenge während der Expansion: $Q_1 = c_p(T_3 - T_2)$ WE.

Abgeführte Wärmemenge während der Expansion: $Q_2 = c_v(T_4 - T_1)$ WE.

Unter Voraussetzung adiabatischer Zustandsänderung ist:

$$T_3 = T_2 \frac{v_3}{v_2} = T_2 \cdot \varepsilon_1 \quad \text{und} \quad T_4 = T_1 \left(\frac{v_3}{v_2} \right)^k = T_1 \cdot \varepsilon_1^k,$$

$$Q_1 = c_p \cdot T_2 (\varepsilon_1 - 1) \quad \text{und} \quad Q_2 = c_v T_1 (\varepsilon_1^k - 1),$$

$$\eta_{th} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{c_v \cdot T_1 (\varepsilon_1^k - 1)}{c_p \cdot T_2 (\varepsilon_1 - 1)}.$$

Mit $\frac{c_p}{c_v} = \frac{1}{k}$ und $\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{\varepsilon^{k-1}}$

folgt
$$\eta_{th} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} \cdot \frac{\varepsilon_1^k - 1}{k(\varepsilon_1 - 1)}.$$

Zu derselben Gleichung gelangt man durch Aufstellung der Wärmearbeiten.

Hiernach ist der thermische Wirkungsgrad nicht nur vom Verdichtungsverhältnis und dem Exponenten k , sondern auch noch von dem Verhältnis $\frac{v_3}{v_2}$ abhängig.

Die indizierte Wärmearbeit. Bedeuten:

- p_i = mittlerer Druck (in kg/qcm),
- v_0 = Kolbenhubvolumen (in cbm),
- C_s = stündlicher Kraftstoffverbrauch in kg oder cbm,
- h = dessen mittlerer Heizwert,
- Q_i = wirkliche, indizierte Wärmearbeit,
- Q_w = wirklicher Wärmearaufwand für jeden Verbrennungshub,

so wird

$$Q_i = \frac{10000 \cdot \dot{p}_i \cdot v_0}{427} = 23,42 \dot{p}_i v_0 \text{ WE,}$$

die entsprechende Wärmearbeit pro Hub:

$$L_i = Q_i \cdot 427 = 10000 \cdot \dot{p}_i v_0 \text{ tulg.}$$

$$Q_w = \frac{C_s \cdot h}{30 n} \text{ bei Viertakt,}$$

$$Q_w = \frac{C_s \cdot h}{60 n} \text{ bei Zweitakt,}$$

$$L_w = \frac{Q_w}{A} = \frac{C_s \cdot h \cdot 427}{30 n} \text{ bei Viertakt (tulg),}$$

$$L_w = \frac{C_s \cdot h \cdot 427}{60 n} \text{ bei Zweitakt.}$$

Indizierter thermischer Wirkungsgrad:

$$\eta_i = \frac{Q_i}{Q_w} = \frac{L_i}{L_w} = \frac{N_i \cdot 75 \cdot 3600}{C_s \cdot h \cdot 427}.$$

Der Gütegrad ausgeführter Maschinen in bezug auf die verlustlose Maschine hat die Größe

$$\eta_g = \frac{\eta_i}{\eta_{th}}.$$

Berechnung der Zylinderabmessungen: Es ist

$$N_i = \frac{O \cdot c \cdot \dot{p}_i}{75}.$$

Unter indizierter Leistung ist der Unterschied zwischen der positiven und der negativen, für Ansaugen und Auspuß aufzubringenden Leistung zu verstehen. Für die Zweitaktmaschine wird dementsprechend

$$N_i = N_{it} - N_l - N_g,$$

worin N_{it} die im Arbeitszylinder indizierte Leistung, N_l und N_g den Arbeitsverbrauch der Ladepumpen für Luft und Gas bedeuten.

Anzahl der PSe:

$$N_g = \eta \cdot N_i;$$

$\eta = 0,8$ bis $0,87$ je nach Größe der Maschine und Art der Taktwirkung.

Wirtschaftlicher Wirkungsgrad $\eta_w = \eta_i \cdot \eta$.

Die zeichnerische Ermittlung des mittleren Druckes nach Art des im Dampfmaschinenbau üblichen Verfahrens ist hier ausgeschlossen, da die Größe des Exponenten für Kompression und Expansion unbekannt ist, das Diagramm sonach nicht aufgezeichnet werden kann. Bonte schlägt folgende Berechnung vor: Minutliche, mechanische Arbeit ist gleich Arbeitswert der chemischen Energie E , multipliziert mit dem wirtschaftlichen Wirkungsgrad η_w , gleich dem minutlich angesaugten Volumen, multipliziert mit $\eta_{vol} =$ räumlichen Wirkungsgrad und Heizwert h :

$$\eta \cdot O \cdot \dot{p}_i \cdot 2 n \cdot s = 427 E \cdot \eta_w = \eta_{vol} \cdot O \cdot 2 n s \cdot h,$$

$$\eta \cdot \dot{p}_i = \frac{h \cdot \eta_{vol} \cdot \eta_w}{23,4}.$$

Werte für η_{vol} : langsamlaufende Maschinen: $\eta_{vol} = 0,88$ bis $0,94$;
schnelllaufende Maschinen $\eta_{vol} = 0,8$ bis $0,85$.

η_w und Heizwert h der Mischung kann folgender Zahlentafel entnommen werden; die Volumina der flüssigen Brennstoffe sind zu vernachlässigen.

Tafel 11. Heizwert, kleinster Luftbedarf und praktische Ausnutzung der motorischen Brennstoffe (nach Güldner).

Spalte Nr.	Die eingeklammerten Gewichtseinheiten in den Spaltenköpfen 1 bis 9 gelten für die flüssigen (und festen) Brennstoffe	1	2		3		4		5		6		7		8		9				
			Unterer Heizwert für 1 cbm (kg) WE	Luftbedarf		Brennstoffverbrauch C für 1 PSe/st. (bezogen auf 735,5 QS und 15°).															
				theoretisch für 1 cbm (kg) cbm	wirklich für 1 cbm (kg) cbm	5 PSe		10 PSe		25 PSe		50 PSe		100 PSe		200 PSe u. mehr					
C cbm (kg)	η_w	C cbm (kg)	η_w	C cbm (kg)	η_w	C cbm (kg)	η_w	C cbm (kg)	η_w	C cbm (kg)	η_w	C cbm (kg)	η_w	C cbm (kg)	η_w	C cbm (kg)	η_w				
I	Leuchtgas	arm gewöhnlich reich bezogen auf Anthrazit! bezogen auf dessen Gas bezogen auf Kokse! bezogen auf deren Gas bezogen auf Braunkohlen-Briketts! bezogen auf deren Gas	4500	5,0	7,5	0,63	0,22	0,58	0,24	0,54	0,26	0,525	0,27	0,5	0,28	0,485	0,29				
			5000	bis	bis	0,57	0,22	0,52	0,24	0,48	0,26	0,47	0,27	0,45	0,28	0,435	0,29				
			5500																		
			6000	6,0	9,0	0,52	0,22	0,48	0,24	0,44	0,26	0,43	0,27	0,42	0,28	0,40	0,29				
II	Kraftgas	bezogen auf Anthrazit! bezogen auf dessen Gas bezogen auf Kokse! bezogen auf deren Gas bezogen auf Braunkohlen-Briketts! bezogen auf deren Gas	7500	—	—	0,475	0,22	0,44	0,24	0,40	0,26	0,39	0,27	0,4	0,28	0,365	0,29				
			1250	0,9 bis 1,1	1,5	—	—	0,58	0,15	0,50	0,17	0,45	0,19	0,40	0,21	0,38	0,22				
			7000	—	—	—	—	2,7	0,19	2,4	0,21	2,2	0,23	2,1	0,24	2,0	0,26				
			1150	0,85 bis 1,0	1,25	—	—	0,65	0,14	0,56	0,16	0,50	0,18	0,45	0,20	0,41	0,22				
III	Hochofengas (Gichtgas)		4800	—	—	—	—	—	—	0,73	0,20	0,63	0,21	0,60	0,22						
			1150	0,9 bis 1,0	1,3	—	—	—	—	2,5	0,22	2,4	0,23	2,3	0,24	2,2	0,25				
IV	Koksofengas		950	0,75	0,9 bis 1,0	—	—	—	—	—	—	—	—	2,8	0,24	2,65	0,25	2,55	0,26		
			4500	5,3	7,0	—	—	—	—	—	—	0,60	0,23	0,55	0,26	0,25	0,27				
V	Petroleum (Verpuffungsmotor)		10500	11,5	16 bis 22	0,50	0,12	0,46	0,13	0,40	0,15	—	—	—	—	—	—	—			
VI	Rohöl (Gleichdruckmotor)		10000	11,0	18 bis 20	0,24	0,26	0,22	0,29	0,20	0,32	0,19	0,33	0,185	0,34	0,185	0,34				
VII	Benzin (Benzol u. dgl.)		11000	11,5	15 bis 17	0,29	0,20	0,26	0,22	0,25	0,23	—	—	—	—	—	—	—			
VIII	Rohspiritus von 90 Vol.-Proz.		5700	6,0	1 bis 12	0,48	0,23	0,45	0,25	0,43	0,26	—	—	—	—	—	—	—			

Mitunter legt man den Abmessungen folgende mittlere Drücke zugrunde:

für Leuchtgas	$p_i = 5,0$ bis $5,5$ kg/qcm
„ Kraftgas	$= 4,75$ kg/qcm
„ Gichtgas	$= 4,5$ „
„ Koksofengas	$= 5,0$ „
„ Benzin	$= 5,0$ „
„ Spiritus	$= 4,0$ „
„ Petroleum	$= 4,0$ „
„ Gleichdruck-Ölmotor	$= 7,0$ „

2. Die Viertaktmaschinen.

a) Regelung. 1. Aussetzerregelung. Bei schwächerer Belastung bleibt das Gasventil geschlossen; Ein- und Auslaßventil werden in normaler Weise gesteuert. Mischungsverhältnis und angesaugte Menge bleiben unverändert, daher günstiger, thermischer Wirkungsgrad. Gang sehr unregelmäßig, daher nur noch bei kleineren Maschinen mitunter zu finden.

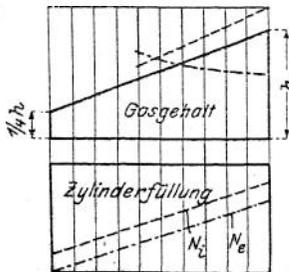


Fig. 91.

2. Qualitäts- oder Gemischregelung. Die Menge des angesaugten Gases wird bei kleiner Belastung verringert und durch Luft ersetzt (Fig. 91). Die Maschine arbeitet sonach mit (annähernd) konstanter Ladungsmenge und konstanter Kompression. Steuerung zeigt häufig die Einrichtung, daß anfangs nur Luft, dann Luft und Gas angesaugt wird, damit an der Zündstelle reicheres, zündfähiges Gemisch lagert. Gemischbildung wird unregelmäßig und gibt zur „Streuung“ der Diagramme Veranlassung, so daß zur gleichbleibenden Leistung verschiedene mittlere Drücke auftreten.

3. Quantitäts- oder Füllungsregelung (Fig. 92). Mischungsverhältnis bleibt unveränderlich, kann sonach günstigsten Verhältnissen angepaßt werden, nur die Ladungsmenge wird entweder durch Drosselklappe oder durch besondere Ausbildung der Einlaßsteuerung geändert. Die Kompression ist veränderlich. Bei kleinen Belastungen treten Unterdrucke von 0,7 Atm. und mehr auf, die das Auslaßventil zu öffnen bestrebt sind.

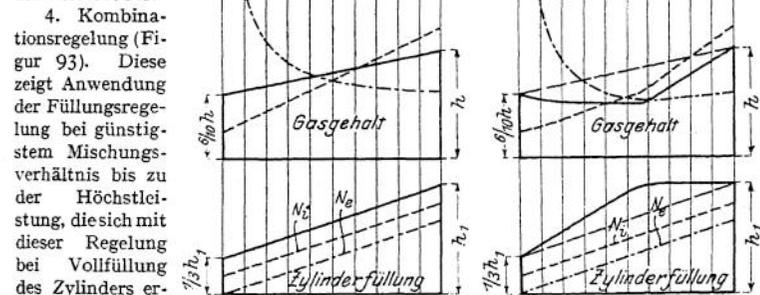


Fig. 92.

Fig. 93.

4. Kombinationsregelung (Fig. 93). Diese zeigt Anwendung der Füllungsregelung bei günstigstem Mischungsverhältnis bis zu der Höchstleistung, die sich mit dieser Regelung bei Vollfüllung des Zylinders ergibt, darüber hinaus Leistungssteigerung durch Einführung größerer Gasmengen nach der Gemischregelung. Ebenso wird bei kleinsten Leistungen zur Sicherung der Zündung das Gemisch wieder angereichert (Verfahren Mees).

Unveränderliche Gemischbildung wird dadurch erschwert, daß für die einzufließenden Mengen von Gas und Luft Einströmquerschnitt und Durchflußgeschwindigkeit maßgebend sind. Nur der Einströmquerschnitt kann vom Regler beeinflusst werden, während die Durchflußgeschwindigkeiten von den unvermeidlichen Druckschwankungen abhängig sind. Für die Geschwindigkeiten im Mischquerschnitt gelten die Gleichungen:

$$c_l = \left| 2g \cdot \frac{\dot{p}_l}{\gamma_l} \right|, \quad c_g = \left| 2g \cdot \frac{\dot{p}_g}{\gamma_g} \right|.$$

Mischungsverhältnis: $m = \frac{f_l \cdot c_l}{f_g \cdot c_g} = \frac{f_l}{f_g} \cdot \sqrt{\frac{\dot{p}_l \cdot \gamma_g}{\dot{p}_g \cdot \gamma_l}}$,

worin die Zeiger l sich auf Luft, g auf Gas beziehen.

Es ergibt sich als Folgerung, daß für unveränderliches Mischungsverhältnis möglichst große Durchflußgeschwindigkeiten im Mischventil zu wählen sind, wenn der Regler die Gemengebildung einigermaßen genau beherrschen soll.

In der „Z. Ver. deutsch. Ing.“ 1913, S. 701, weist Dr.-Ing. J. Magg darauf hin, daß bei Gemischregelung annähernd gleichmäßiges Gemisch nur bei Vollaust und Druckgasbetrieb erreicht werden kann, während bei Halblast und besonders im Leerlauf — wie hier die starke „Diagrammstreuung“ zeigt — eine bedeutende Verschlechterung eintritt. Für Sauggasbetrieb eignet sich die Gemischregelung überhaupt nicht. Die Füllungsregelung ergibt um so gleichmäßigere Gemischbildung, je kleiner die Belastung der Maschine ist. Das Verfahren Mees zeigt sich also auch hiernach als vorteilhaft. Mit sinkender Umlaufzahl bei Leistungsregelung nehmen die Durchflußgeschwindigkeiten im Mischventil ab, so daß von Hand schärfer zu drosseln ist. Der Regler versagt hierbei: Bei kleiner Umlaufzahl strömt bei ungedrosseltem Querschnitt zuviel Gas ein, das nicht die zu seiner Verbrennung erforderliche Luftmenge findet. Die Leistung fällt, und der Regler vermindert weiter die Drosselung, so daß die Maschine in „Gas ersüuft“.

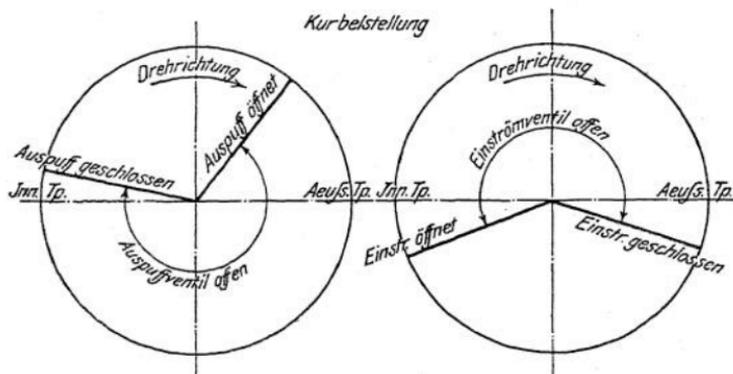


Fig. 94 und 95.

b) Steuerung. Fig. 94 und 95 zeigen die Kurbelstellungen, in denen Eröffnung und Schluß der Ventile stattfinden. Der Einlaßventilschluß nach dem Totpunkt bewirkt mitunter bessere Zylinderfüllung infolge des Ausschwingens der Saugsäule. In der Nähe der inneren Totlage sind beide Ventile gleichzeitig geöffnet, daher mitunter ein Nachsaugen frischen Gemisches durch die ausschwingende Auspuffsäule. Die Verlängerung der Ventilerhebungszeiten ermöglicht bessere Beherrschung der Beschleunigungsverhältnisse.

Als drittes Ventil besitzt jede Gasmaschine ein Gasventil, das die Aufgabe hat, die unter höherem Druck stehende Gasleitung während den auf den Ansaughub folgenden Hüben gegen die Luftleitung abzusperren. Vielfach wird das Gasventil als doppelsitziges Mischventil ausgebildet.

Antrieb der Ventile durch unrunde Scheiben oder Exzenter. Ausbildung der ersteren siehe S. 878. Exzenter arbeiten geräuschloser, doch wird der Exzenterhub nur zu etwa 17 v. H. ausgenutzt. Bei Verwendung von Exzentern findet sich Ventilantrieb durch Schwingdaumen oder Wälzhebel; letztere häufiger.

c) **Zündung.** Man unterscheidet elektrische Abreiß- und Kerzenzündungen, sowie Glührohrzündungen. Bei den ersteren werden zwei Kontakte voneinander entfernt, wodurch ein Unterbrechungsfunkte entsteht, während bei der Kerzenzündung der Funke zwischen zwei um 0,5 bis 1 mm entfernte Elektroden überspringt. Abreißzündungen arbeiten mit geringen Spannungen, belasten aber die Stromquelle stärker als die Kerzenzündung.

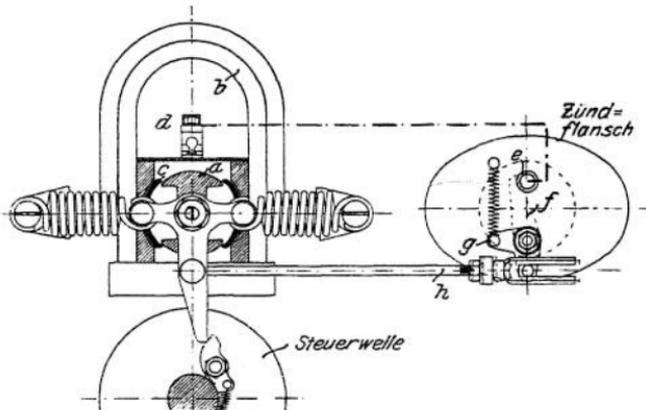


Fig. 96.

Bei Großgasmaschinen werden zwei, mitunter drei Zündvorrichtungen angeordnet. Der Zündzeitpunkt muß verlegbar sein, beim Anlassen ist z. B. Spätzündung einzustellen, ebenso bei langsamem Lauf der Maschine. Durchgehen der Maschine wird durch Ausrücken der Zündung mittels Sicherheitsreglers verhindert.

Fig. 96 zeigt die bei kleineren Maschinen übliche Bosch-Zündung mit Abreißgestänge. Nach Ablenkung des in Mittellage dargestellten Kreuzhebels um ca. 25° gleitet der Daumen ab und in der zwischen Anker *a* und den Polschuhen des Magneten *b* gelagerten Hülse *c* entsteht ein Stromstoß, der beim Durchlaufen der Mittellage am kräftigsten ist. Hierbei stößt Schubstange *h* gegen den Arm von Zündhebel *f* und trennt diesen vom Zündstift *e*. Bei größeren Maschinen mit mehreren Zylindern wird auf der Steuerwelle eine Kontaktvorrichtung angeordnet, die den einer Batterie mittels Vorschaltwiderstandes, einer Gleichstrommaschine oder der Erregermaschine einer Wechselstromdynamo zu entnehmenden Strom für jede Zündstelle einschaltet, wobei nacheinander Schlagvorrichtung und Zündbüchse durchfließen werden (Ausführung Werk Nürnberg der M. A. N.).

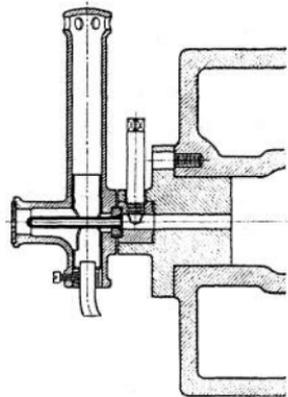


Fig. 97.

Bei der Lodge-Zündung wird in einer kleinen Batterie Strom von 8 bis 10 Volt erzeugt, der durch Leydener Flaschen und Kondensatoren auf hohe Spannung und große Frequenz gebracht wird und so zur Bildung des Zündfunken geeignet ist.

Fig. 97 zeigt die seltener und nur bei Kleingasmaschinen zu findende Glührohrzündung (der Gasmotorenfabrik Deutz), die meist „ungesteuert“ aus-

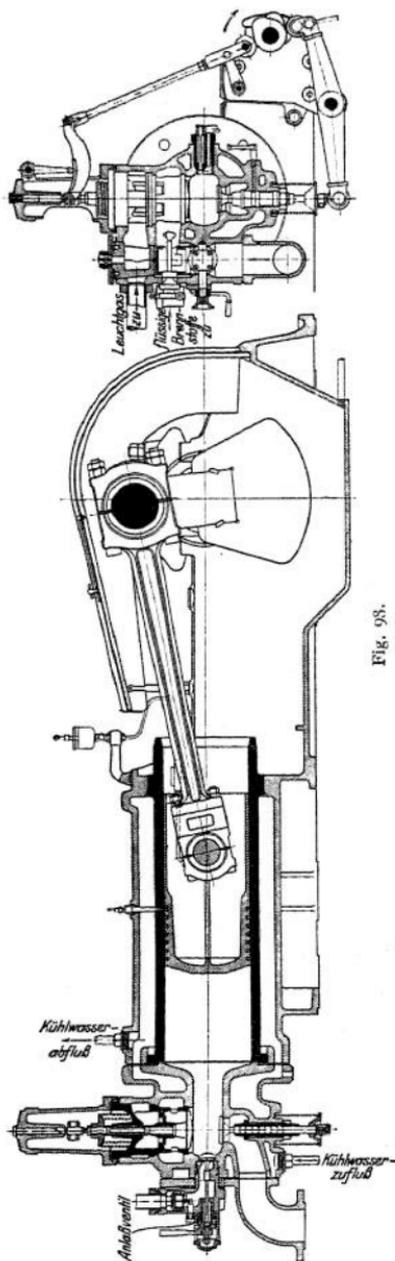


Fig. 98.

geführt wird, d. h. das Innere des Glührohrs steht dauernd in Verbindung. Glührohr meist aus Porzellan, geheizt durch Bunsenbrenner. Verlegung des Zündzeitpunktes durch eine den Querschnitt des Verbindungskanals ändernde Stellschraube.

d) Ausführung von Kleingasmaschinen. Fig. 98 zeigt den allgemeinen Aufbau. Stützung der Welle meist durch zwei Rahmenlager und ein Außenlager. Einsetzung der Laufbuchse in den Rahmen derart, daß sie der Wärmedehnung ungehindert nachgeben kann. Unterbringung der Ventile in einem besonderen „Steuerungskopf“, der zweckmäßig mit besonderem Deckel abzuschließen ist.

Fig. 98, Kleingasmaschine der Gasmotorenfabrik Deutz. Die Einlaßventilspindel trägt gleichzeitig Gasventil. Regelung auf Quantität durch Änderung des Ventilhubes. Die Bauart läßt auch Betrieb mit flüssigen Brennstoffen zu.

Fig. 99, Kleingasmaschine Körting. Gas und Luft werden in einem zweiseitigen Mischventil, das sich während des Saughubes selbsttätig hebt, gemischt. Regelung auf Quantität durch Drosselklappe.

e) Ausführung der Großgasmaschinen, meist doppelwirkend, wobei im Zylinder auf zwei Arbeitshübe zwei Leerhübe folgen. Für größere Leistungen Ausführung als Tandemmaschine, die Eintaktwirkung ergibt, und als Zwillingsandemmaschine mit unter 90° versetzten Kurbeln.

Auch hier findet sich neuerdings meist Quantitätsregelung. Fig. 100 zeigt Einlaßsteuerung des Werkes Nürnberg der M. A. N. Der Regulator verschiebt die Wälzplatte, so daß der Hub des Einlaßventils und des mit ihm verbundenen Luftschiebers und Gasventils geändert wird. Da bei gehobenem Ventil die Wälzplatte nicht verschoben werden kann, so ist in das Reguliergestänge zur Ermöglichung der Regulierbewegung bei festgehaltener Wälzplatte eine Feder

eingeschaltet, die bei geschlossenem Ventil die Wälzplatte nachzieht. Die Anordnung ist so getroffen, daß bei Verringerung der Belastung Menge und Gas-

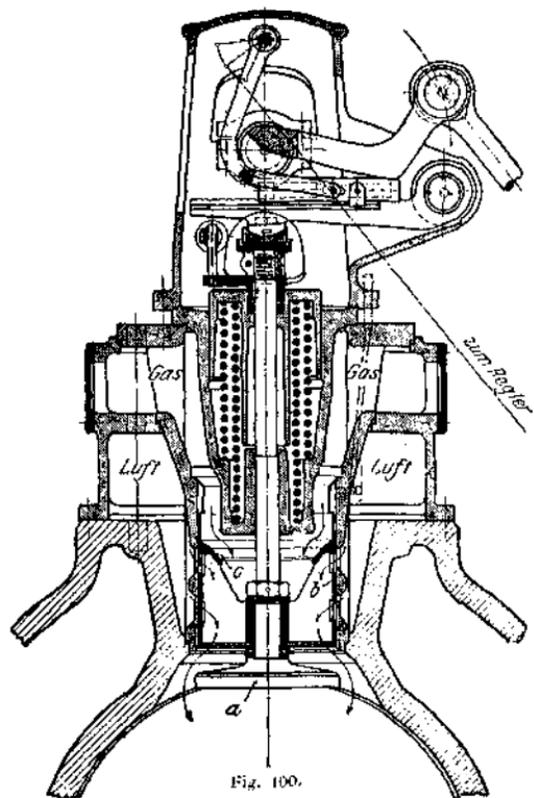


Fig. 100.

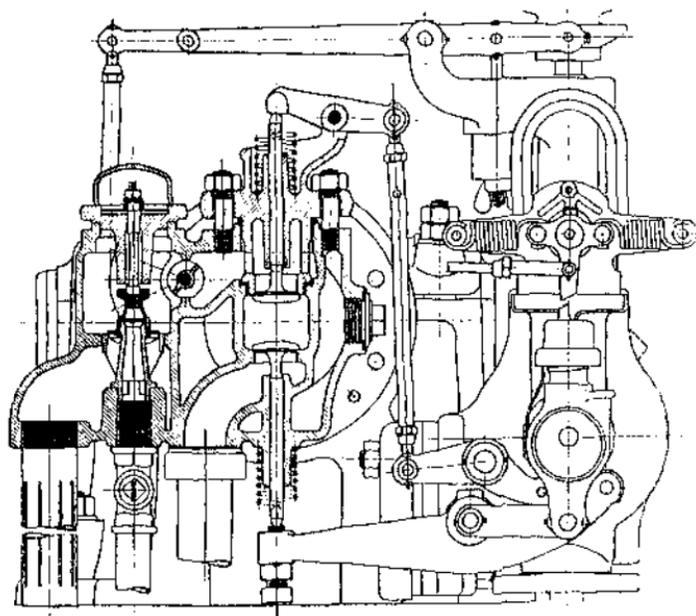


Fig. 99.

gehalt des Gemisches abnehmen. Der Luftschieber *b* öffnet früher und schließt beim Aufsetzen des Gasventils *c* noch nicht ab. Zwecks Änderung der Luftmenge kann die Ventilspindel mit dem Luftschieber von Hand gedreht werden, wodurch die Luftquerschnitte geändert werden.

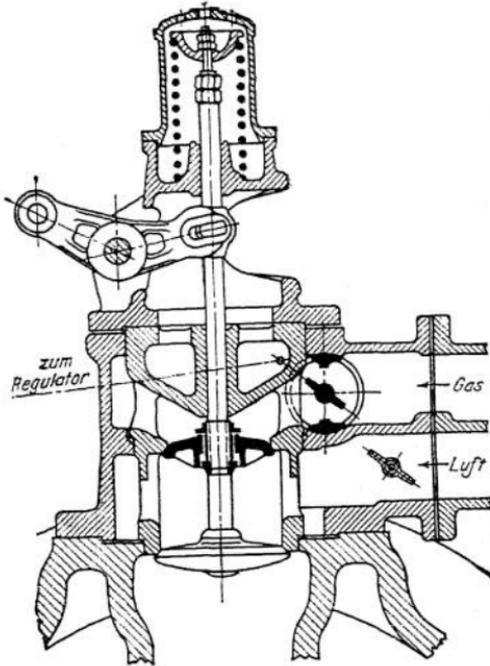


Fig. 101.

Fig. 101 zeigt Regulierung von Ehrhardt & Sehmer. Mit der Gasdrosselklappe wird die Luftdrosselklappe verstellbar, und zwar so, daß bei sinkender Belastung der Luftstrom weniger als der Gasstrom gedrosselt wird. Im Leerlauf herrscht ein Unterdruck von etwa 0,3 Atm.

Leistungssteigerung. Bei dem Verfahren von Ehrhardt & Sehmer werden Luft und Gas getrennt in Turbokompressoren auf etwa 2 m

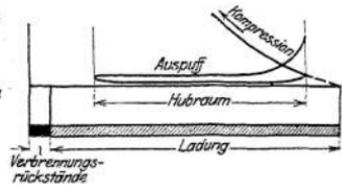


Fig. 101 a.

Wassersäule verdichtet. Die Luft strömt zuerst in den Zylinder, so daß die Verbrennungsrückstände ausgespült werden. Nach Öffnen des mit Überdeckung

versehene Gasventils wird der Zylinder mit Gemisch von höherem als atm. Druck gefüllt, Fig. 101 a. Die Maschine kann um 40 v. H. überlastet werden. Antrieb der Turbokompressoren durch Dampfturbinen, deren Dampf in Auspuffgaskesseln erzeugt wird.

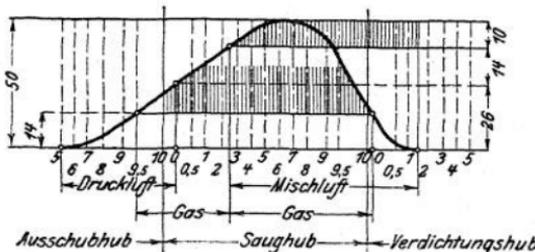


Fig. 101 b. Steuerschema für Hochfötagase von 900 bis 1100 WE und für Generatorgase.

eine besondere Leitung und Steuerung für Druckluft erforderlich werden.

Fig. 101 b zeigt das Hellmannsche Verfahren (Z. Ver. deutsch. Ing. 1914, S. 105). Durch Auspöpfung mittels Druckluft von 2500 mm Druck wird die Leistung um etwa 25 v. H. gesteigert. Nach Schluß des Spölluftschiebers strömt zunächst nur reines Gas in den Zylinder, das sich mit der Spölluft mischt. Nach Öffnen des Mischluftschiebers strömen bis zum Schluß des Saughubes in ähnlicher Weise Gas und Mischluft ein, letztere strömt bis zum Schluß des Einlaßventils nach.

Thyssen & Co. laden dem angesaugten Gemisch Druckluft nach, so daß

3. Die Zweitaktmaschinen.

Maschine Körting, Fig. 102. Luft und Gas werden getrennt in Pumpen verdichtet, die seitlich vom Rahmenbalken liegen und durch Pleurkurbel der Haupt-

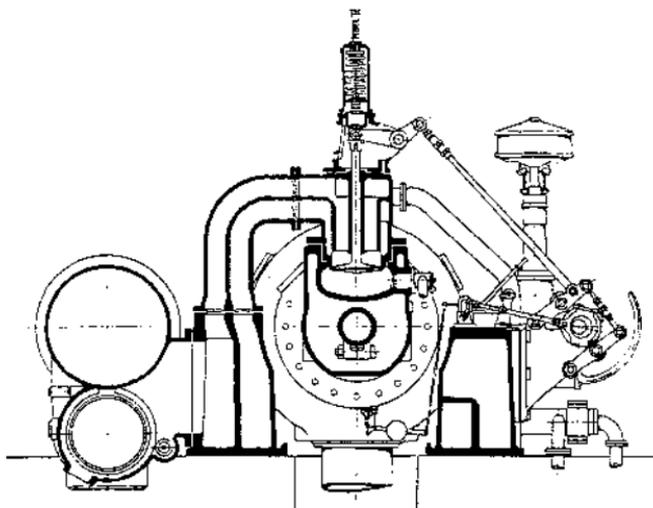


Fig. 102.

achse angetrieben werden. Fig. 103 zeigt die Art der Steuerung. Da der Auslaß nur während eines Kurbelwinkels von etwa 100° vor sich geht, so ist zur Vermeidung sehr großer Querschnitte oder hoher Auspuffgeschwindigkeiten die Anordnung von Auspuffschlitzen erforderlich. Das kurz nach Freilegung dieser öffnende Einlaßventil läßt zuerst Spülluft, dann Luft und Gas gemeinsam eintreten. Der Zeitpunkt des Gemischeintrittes ist von der Reglerstellung abhängig, erfolgt also je nach Belastung früher oder später. Während der Einströmung des Gemisches sind die Auspuffschlitze noch freigelegt. Das Entweichen des Gemisches durch diese wird von einer „Spülluftwand“ zwischen Gemisch und Schlitzen verhindert.

Luft und Gas vereinigen sich erst vor dem Einlaßventil.

Neuere Gas- und Luftpumpen werden in der Weise ausgeführt, daß am Ende des Pumpenhubes durch Überströmung von der Druckseite auf die Saugseite die Gasförderung aufhört, während die Luftpumpe noch weiter fördert. Da das Einlaßventil des Arbeitszylinders erst beim nächsten Hub wieder öffnet, so kann diese Luft in

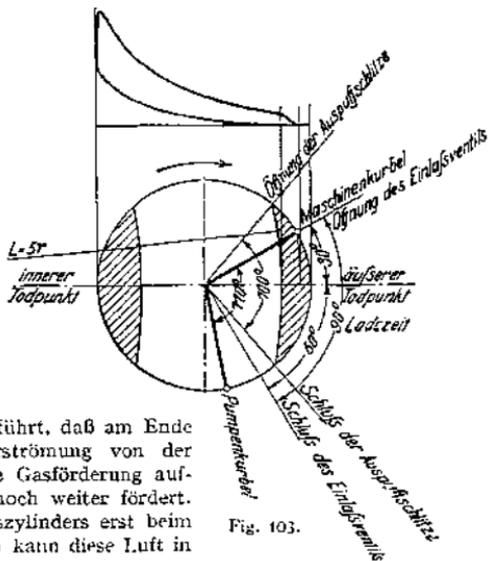


Fig. 103.

Ruhe über dem Einlaßventil eine Schicht bilden, die eine Ausspülung des Zylinders mit Luft (und nicht mit Gemisch) gewährleistet und vorzeitige Entflammungen verhindert, wie sie durch unmittelbare Berührung des Gemisches mit den heißen Auspuffgasen bei Eröffnung des Einlaßventils entstehen können.

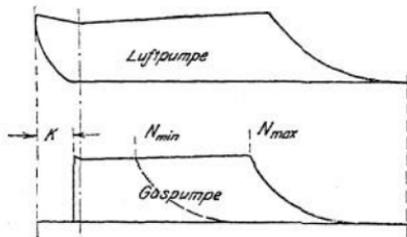


Fig. 104 a. (k = Verschuß der Gaspumpe vor der gleichläufigen Luftpumpe.)

Bei der Gaspumpe von Dubbel wird durch eine der bekannten Dampfmaschinensteuerungen die Verbindung zwischen Saug- und Druckseite stets bei derselben Kurbelstellung, die Aufhebung dieser Verbindung je nach Belastung früher oder später bewirkt. Die Diagramme Fig. 104 a zeigen diese Wirkung (s. Güldner, Gasmaschinen, S. 517).

Fig. 104 b: Diagramm der Ladepumpen von Gebr. Klein-Dahlbruch. Vor Beendigung des Druckhubes strömt Gas durch vom Kolben freigelegte Schlitzte zurück. Rückleitung des angesaugten Gases durch einstellbare Umlaufdrosselklappen während des Druckhubes.

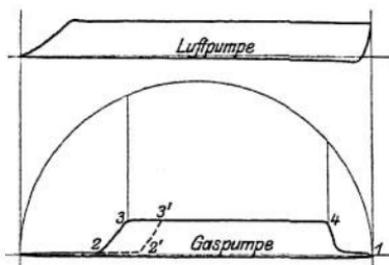


Fig. 104 b.

Der Spüldruck ist so niedrig zu wählen, als mit Rücksicht auf vollständige Austreibung der Abgase möglich ist. Er beträgt gewöhnlich 0,35 bis 0,5 Atm.

Die Einlaßventile werden durch unrunde Scheiben (häufig mit Paarschluß), Wälzhebel oder Schwingdaumen gesteuert. Die wegen der kurzen Eröffnungszeit sehr großen Beschleunigungskräfte legen die obere Grenze der Umlauf-

zahl auf etwa $n = 100$ fest. Als Vorteil der Zweitaktmaschine gegenüber der Viertaktmaschine sind ihr geringerer Raumbedarf, kleinere Gründungskosten, sowie die infolge des zwangsläufigen Ladeverfahrens leicht vorzunehmende Änderung der Umlaufzahl hervorzuheben. Letztere Eigenschaft macht die Zweitaktmaschine hauptsächlich zum Antrieb von Gebläsen geeignet.

4. Einzelheiten der Großgasmaschinen.

Anlassen. Meist durch Druckluft von 10 bis 20 Atm. Bei Mehrzylindermaschinen wird meist nur die Hälfte aller Kolbenseiten mit Druckluftsteuerung ausgeführt. Luftfüllung 20 bis 30 v. H. Entnahme der Luft an höchster Stelle der mit Entwässerung auszuführenden Sammelgefäße, damit sich die Zündvorrichtungen nicht beschlagen.

Gasdynamos für Gleichstrom können durch eine zweite Gleichstromdynamo oder durch eine Akkumulatorenbatterie angelassen werden.

Gasegebläse laufen leer an, wobei Drehmoment 50 bis 60 v. H. des normalen Drehmomentes beträgt. Stahlwerksgebläse bleiben während der Blaspausen in Betrieb, indem der Wind ins Freie ausgeblasen wird.

Zylinder. Während die Wärmespannungen im Betriebe Zugbeanspruchung im äußeren, Druckbeanspruchungen im inneren Mantel verursachen, sind die von den Gußspannungen herrührenden Beanspruchungen entgegengesetzter Art, so daß während des Betriebes ein Ausgleich stattfinden kann. Risse im Außenmantel sind häufig auf die erwähnte Zugbeanspruchung, Risse im Innenmantel auf die in diesem vorhandenen großen Temperaturunterschiede zurückzuführen. Verringerung der Beanspruchungen durch hohe Stirnflanschen, große Krüm-

mungsradien an den Übergangsstellen und möglichste Beschränkung aller die beiden Mäntel starr verbindender Teile. Fig. 105 zeigt den mehrteiligen Zylinder von Ehrhardt & Sehmer. Die durch die Zylinderteilung entstehende Teilfuge wird durch die eingeschrumpfte Laufbuchse und Kupferdichtung gegen Verbrennungsdruck und Kühlwasser abgedichtet. Äußerer Kühlmantel zweiteilig. Am Übergang des Innenzylinders zum Flansch bleibt die wertvolle, rohe Gußhaut sitzen. Fig. 106: Zylinder der Nürnberger Gasmaschine.

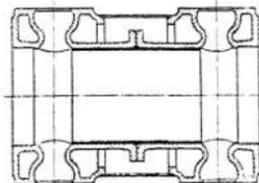


Fig. 105.

Fig. 107, Zweitaktzylinder von Gebr. Klein, Dahlbruch. Die zweiteilige Laufbuchse wird von beiden Seiten in den Mantel eingeschoben. Schließung der Trennungsfuge durch Wärmedehnung. Freie Dehnung der die Einlaßventile aufnehmenden Steuerungsköpfe wird durch Anordnung eines die Stopfbuchse umgebenden Verschlußdeckels ermöglicht.

Ventile. Ausführung von Einlaß- und Auslaßventil als einsitzige Teller-ventile von 8 bis 10 mm Sitzbreite. Mittlere Geschwindigkeit von Gas und Luft am

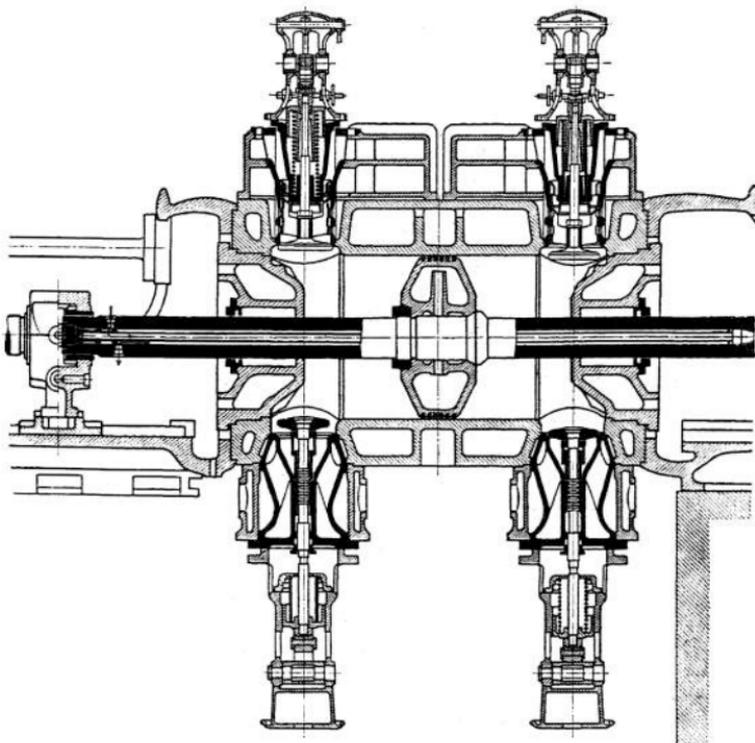


Fig. 106.

Umfang 50 bis 60 (bis 80) m/sek. Herstellung der Ventile aus Stahl in einem Stück mit der Spindel geschmiedet oder Verbindung des gußeisernen Ventils mit Stahlspindel nach Fig. 108 durch Gewinde (und Umnieten). Kühlung der Auslaßventile und besondere Ausbildung dieses Ventils (als Doppelsitzventil) oder

des äußeren Gestänges zwecks Entlastung von dem auf dem Ventilteller im Augenblick der Vorausströmung lastenden Druck werden nicht mehr ausgeführt. Der gekühlte Auspuffeinsatz (aus hartem Gußeisen) ist möglichst als Umdrehungskörper zu gestalten und derart mit Auspuffleitung zu verbinden, daß ohne deren Abnahme Ventil und Einsatz herausgenommen werden können.

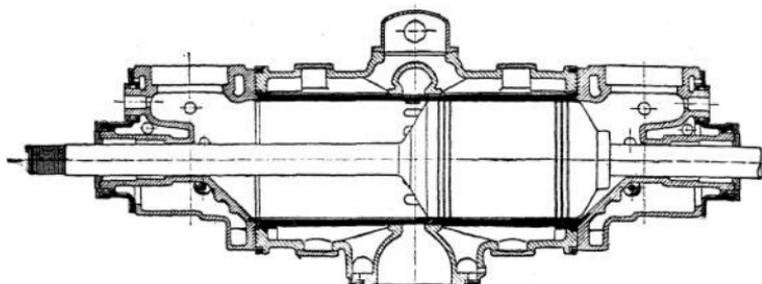


Fig. 107.

Kolben. Aufnahme des Kolbengewichtes durch gebogene oder geknickte, nach Fig. 109 hergestellte Stange.

Fig. 106 zeigt Kühlung der Nürnberger Kolbenstangen. Das Wasser fließt durch ein Einlegerohr dem ersten Kolben einer Tandemmaschine zu und kehrt in dem äußeren Ringraum zwischen Rohr und Stange zurück, der in der zweiten Stange als Hinweg benutzt wird. Diese geschlossene Wasserführung verhindert Mitnahme von Schmieröl.

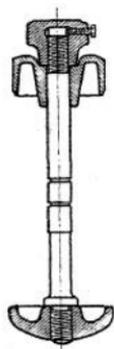
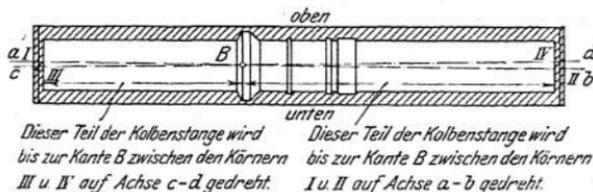


Fig. 108.



Dieser Teil der Kolbenstange wird bis zur Kante B zwischen den Körnern III u IV auf Achse c-d gedreht.

Dieser Teil der Kolbenstange wird bis zur Kante B zwischen den Körnern I u II auf Achse a-b gedreht.

Fig. 109.

Fig. 110, Kolben von Ehrhardt & Sehmer. Umwandlung der beim Gießen entstehenden Zugspannungen der Nabe in Druckspannungen dadurch, daß Nabe aufgeschlitzt, der Kolben unter Kalthaltung erwärmt und in den Spalt ein schließend passender Ring c eingelegt wird. Zur Abdichtung preßt die Mutter den Rotgußring a gegen Rundgummiring b. Die konische Druckfläche der Kolbenmutter entspricht dem Konus auf Kolbenstange, wodurch sich günstige Stoffverteilung im Kolben ergibt.

Kolbenstangenkupplung. Fig. 111, Ausführung von Ehrhardt & Sehmer. Die Muttern a werden zunächst aufgebracht, die Stirnflächen der Stangen gegeneinander gelegt und hierauf die durch Schrauben c zu verbindenden Kupplungshälften b ungelegt. Die nötige Vorspannung wird erzeugt, indem eine der Muttern a in Pfeilrichtung angeschlagen wird, wodurch sich die Flächen m und n fest aufeinander pressen. Vorteile: geringe Baulänge, schnelles Lösen und Verbinden, kleine Gewindefzahl.

Stopfbuchsen. Diese bestehen in der Hauptsache aus der dem Brennraum nächstliegenden Vordichtung und der Hauptdichtung. Erstere hat die höchsten Temperaturen und Verbrennungsrückstände von letzterer

fernzuhalten. Die Vordichtung wird vielfach durch nach innen spannende gußeiserne Liderungsringe, die in Kammerringe gelagert sind, bewirkt. Auch die Liderungsringe der Hauptdichtung dichten durch Federung nach innen ab. Diese Ringe werden entweder als Selbstspanner

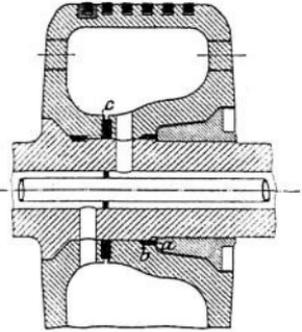


Fig. 110.

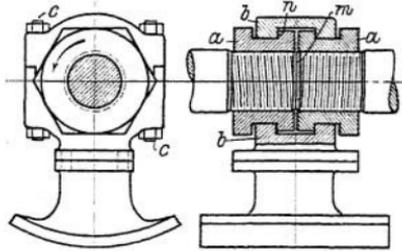


Fig. 111.

oder geteilt ausgeführt und um die Teilstücke selbstspannende Ringe oder Schlauchfedern gelegt. Anordnung der Stopfbuche in einem Gehäuse so, daß mit letzterem sämtliche Ringe herausgezogen werden können.

5. Die Ölmaschinen.

a) Die verschiedenen Ausführungsmöglichkeiten. In Fig. 112 sind nach Kutzbach schematisch die einzelnen Ausführungsarten dargestellt¹⁾.

Mischung des flüssigen Brennstoffes mit der Verbrennungsluft

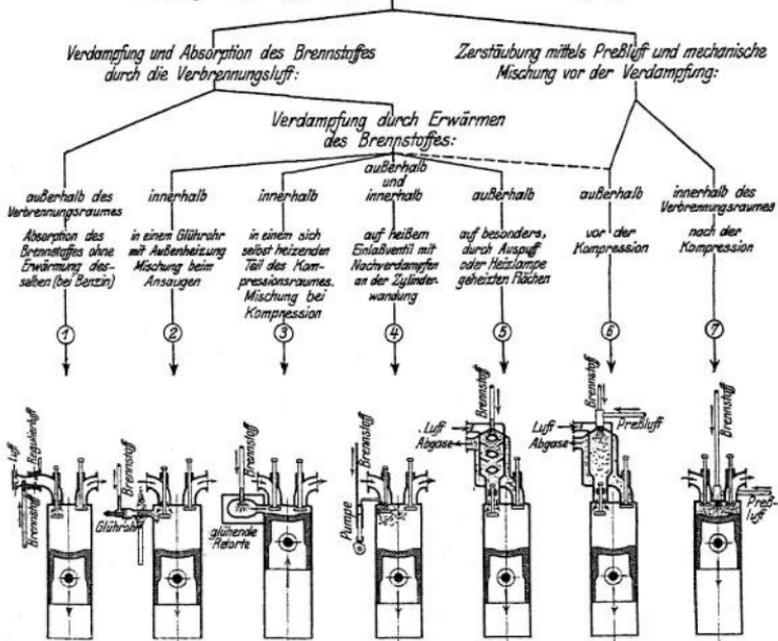


Fig. 112.

¹⁾ Z. Ver. deutsch. Ing. 1907, S. 523.

Ausführung 1. Nur bei Benzinbetrieb gebräuchlich. Die vorgewärmte Luft reißt den in der Vergaserdüse liegenden Brennstoff mit und bildet mit diesem ohne weitere Erwärmung ein zündfähiges Gemisch.

Ausführung 2, wie die folgenden für schwerer flüchtige Brennstoffe bestimmt. Im „Glührohr“ entzündet sich nach der Kompression das Gasluftgemisch. Die Mischung erfolgt beim Ansaugen.

Ausführung 3 ermöglicht bessere Mischung. Während der Kompression tritt ein feiner Luftstrahl in den infolge der Verbrennung von selbst glühenden „Glühkopf“ und mischt sich mit den dort entstandenen Oldämpfen. Die Kompression und die heißen Wänden veranlassen Selbstzündung. (Bauart Hornsby.)

Ausführung 4. Der leichter flüssige Brennstoff wird z. B. auf das heiße Eintrittsventil gespritzt und die entstehenden Dämpfe werden von der angesaugten Luft mitgerissen. Eignet sich für leichtere Öle.

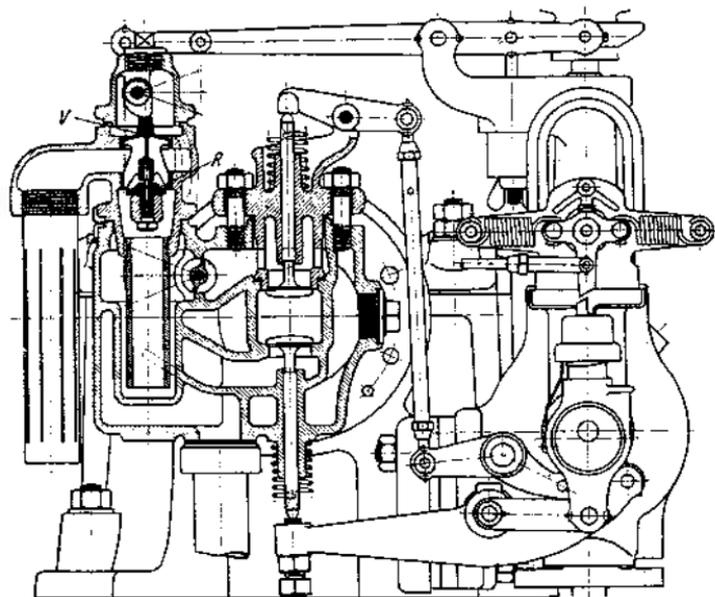


Fig. 113.

Ausführung 5. Das zerstäubte Öl mischt sich in einem geheizten Raum während des Ansaugens mit der Luft. (Petreano, Dürr.)

Ausführung 6. Die heißen Verdampferwände verdampfen die an sie gelangenden Öltröpfchen, um die Entstehung von Rückständen zu verhindern. Wie bei Ausführung 3 wird auch in dieser Anordnung häufig mit Wassereinspritzung zwecks Verminderung der Temperatur gearbeitet. (Priestman, Griffin.)

Ausführung 7 stellt das Dieselverfahren dar. Die Verbrennungsluft wird auf 40 bis 45 Atm. verdichtet, so daß sich der mittels Einblaseluft von etwa 60 Atm. zerstäubte und eingespritzte Brennstoff beim Eintritt in diese hocherhitzte Verbrennungsluft entzündet, die Verbrennung geht bei normaler Belastung meist unter konstantem Druck vor sich.

In der Dieselmachine lassen sich vor allem die schweren Öle verwenden. Die Verwertung sehr schwerer Öle — wie der Teeröle — läßt sich durch zusätzliche Einführung von Zündölen, die die Verbrennung einleiten, erreichen.

b) Ausführungen von Explosionsmaschinen. Fig. 113, Körting-Maschine. Der flüssige Brennstoff tritt nach Erhebung des Zerstäubventils und des mit diesem verbundenen Nadelventils aus und mischt sich am Umfang des Zerstäubers mit der angesaugten Luft. Auf dem Wege zum Zylinder wird das Gemisch in einer außen von den heißen Auspuffgasen bespülten, doppelwandigen Kammer vergast. Regelung durch Verstellung der Drosselklappe und Hubbegrenzung des Zerstäubventils. Anlassen mit Benzin. Nach genügender Erwärmung der Vergaserkammer wird auf den Hauptbrennstoff umgeschaltet. Größere Maschinen werden mit Druckluft angelassen, die in besonderen Kompressoren oder bei Maschinen mittlerer Größe dadurch erzeugt wird, daß unter Verwendung der Maschine selbst als Kompressor bei geschlossener Brennstoffzufuhr das Arbeitsvermögen des Schwungrades als treibende Kraft benutzt und die Druckluft in einem Behälter aufgespeichert wird.

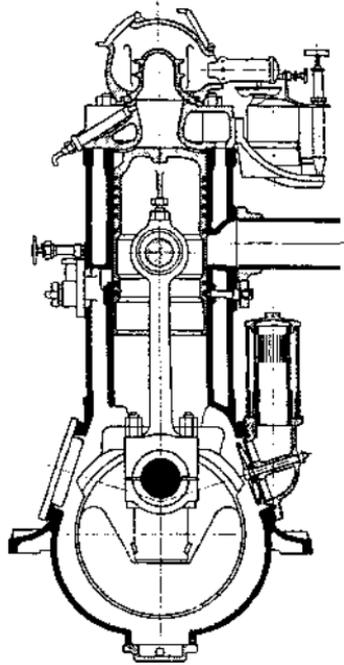


Fig. 114.

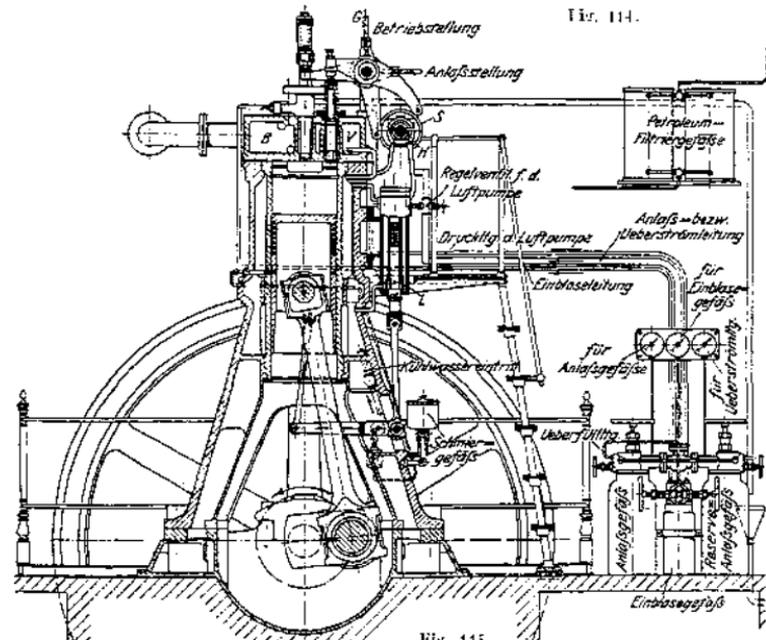


Fig. 115.

Luft in den dicht abgeschlossenen Kurbelkasten, während die Luft im Zylinder verdichtet wird. Kurz vor Erreichen der Totlage wird Brennstoff in die heiße, verdichtete Luft und gegen die erhitzten Wandungen des Glühkopfes gespritzt. Beim Abwärtsgang des Kolbens wird die Luft im Kurbelkasten verdichtet. Gegen Ende des Abwärtshubes öffnet der Kolben zuerst die Auspuffschlitze, dann die Einlaßschlitze zum Eintritt der verdichteten Luft aus dem Kurbelkasten. Vor Inbetriebsetzung wird der Glühkopf mit einer Lampe vorgewärmt. Steuerung der Brennstoffpumpe durch Nocken auf veränderliche Brennstoffmenge.

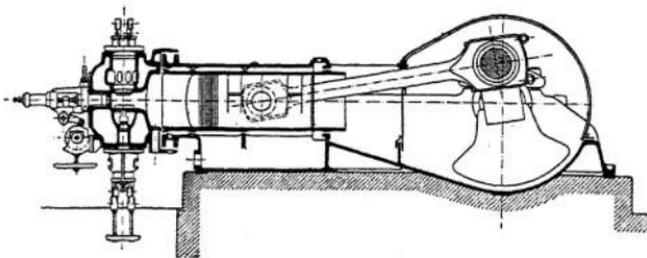


Fig. 116.

c) Ausführungen von Dieselmotoren. Fig. 115 zeigt die Anordnung und Rohrleitungen der gebräuchlichsten Bauart. Der Steuerkopf enthält: Ein- und Auslaßventil, Anlaß- und Brennstoffventil.

Fig. 116, liegende Maschine der M. A. N., Werk Nürnberg¹⁾. Ein- und Auslaßventil senkrecht, Brennstoffventil wagerecht angeordnet und durch eine besondere, quer zur Maschinenachse liegende Welle gesteuert. Um den Brennstoff gleichmäßig um die Nadel zu verteilen, preßt der Druck der Einspritzluft den Brennstoff in den Ringkanal γ (Fig. 122). An den innen mündenden feinen Bohrungen dieses Kanals mischen sich Luft und Brennstoff.

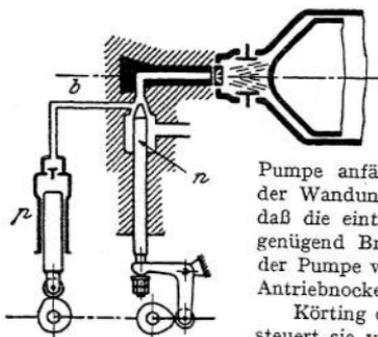


Fig. 117.

Um die Querwelle zu vermeiden, trifft Deutz die in Fig. 117 dargestellte Maßnahme. Vor Kolbentotlage legt Nadel n den Kanal zum Hubraum frei, und die Pumpe beginnt zu fördern. Die Verbrennung wird mit Drucksteigerung eingeleitet, da die

Pumpe anfänglich unter Ausnutzung der Elastizität der Wandungen reichlich Brennstoff fördern muß, so daß die eintretende Luft zur Sicherung der Zündung genügend Brennstoff mit sich führt. Die Förderung der Pumpe wird durch einen entsprechend gestalteten Antriebsnocken des Plungers beeinflusst.

Körting ordnet sämtliche Ventile wagerecht an und steuert sie von der Querwelle aus.

Diesel-Zweitaktmaschinen, Fig. 118 und 119.

Fig. 118 gibt die stehende Zweitaktmaschine von Gebr. Sulzer wieder. S_1 und S_2 sind die für Einführung der Spülluft dienenden Schlitzreihen, diesen gegenüber die Auspuffschlitze A . Die untere Schlitzreihe S_1 wird nur vom Kolben, die obere S_2 durch seitlich angeordnete Ventile gesteuert, die nur mit den expandierten, also abgekühlten Verbrennungsgasen in Berührung kommen. Durch diese Ventilsteuerung wird ver-

¹⁾ Fig. 116, 117, 120, 121, 122 und 123 sind der Abhandlung von Prof. Nägel in der „Z. Ver. deutsch. Ing.“ 1911 entnommen.

tündert, daß beim Abwärtsgang des Kolbens die Auspuffgase durch die obere Schlitzreihe mit höherem Druck in die Spülluftleitung gelangen. Die oberen Schlitzreihen liegen oberhalb der Auspuffschlitzte und dienen besonders zur Einführung zusätzlicher Luft. Vorteile: Die Schlitzöffnungen sind während der Verbrennung abgedeckt. Die Verbrennungsgase können nicht, wie bei Spülventilanordnung im Deckel, bei vorhandener Undichtheit in die Spülluftleitung treten. Große Querschnitte. Einfacher Zylinderdeckel mit nur drei kleinen Ventilen (Brennstoff-, Anlaß- und eventuell Sicherheitsventil).

Ausführung mit Kolbenkühlung und Kreuzkopfführung. Die doppelwirkenden Spülluftpumpen sind mit der dreistufigen Einblaseluftpumpe vereinigt.

Leistungssteigerung läßt sich bei dem Sulzer-Zweitaktmotor nach Fig. 118 in einfachster Weise erreichen, indem durch entsprechende Steuerung der Spülluftventile die Luftzufuhr nach Abschluß

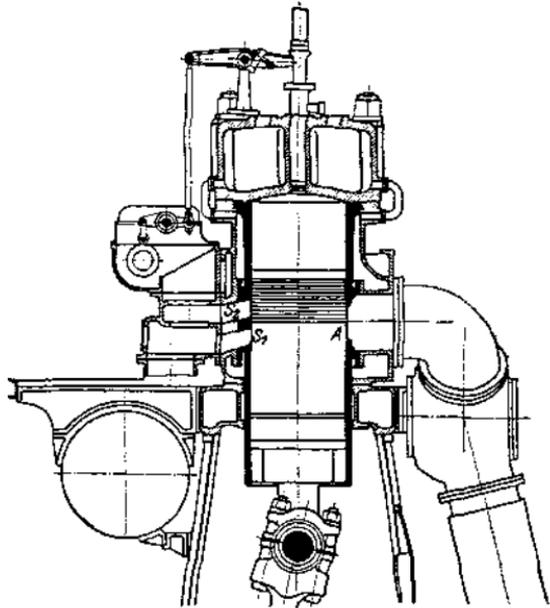


Fig. 118.

der Auslaßschlitze verlängert wird. Junkers drosselt in der Maschine nach Fig. 119 den Auspuff, so daß die Ladepumpen gegen den erhöhten Druck im Zylinder fördern müssen, der mit größerem Ladegewicht aufgefüllt wird.

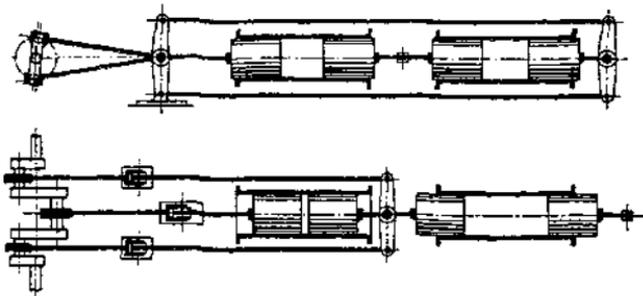


Fig. 119.

Fig. 119, Junkers-Maschine, aus der Oechelhäuser-Gasmaschine entstanden. Von den vier Kolben der mit Eintaktwirkung arbeitenden Zweizylindermaschine werden die beiden inneren und die beiden äußeren miteinander verbunden und arbeiten mittels zweier senkrecht zueinander stehenden Gestängeumführungen auf die dreifach gekröpfte Welle.

Vorteile: Wegfall der Reaktionskräfte im Rahmen, der Massenkräfte (bis auf den durch die Endlichkeit der Pleuelstangenlänge verursachten Betrag), der Stopfbuchsen, sowie der Ein- und Auslaßventile. Zu steuern sind nur Brennstoff- und Anlaßventil. Einfache Gestaltung des Verbrennungsraumes, geringe Wandungsabkühlung.

Fig. 120 zeigt das Schema der Brennstoffverteilung bei „offener Düse“. Die Nadel l steuert nur die Einspritzluftzufuhr und nicht — wie bei der Dieselmachine — Luft und Brennstoff zugleich. Brennstoffpumpe p fördert während des Ansaughubes der Maschine den Brennstoff an die Stelle zwischen Nadel und Düsenplatte, arbeitet also mit geringem Förderdruck. Da nach Öffnung des Kanals durch l anfänglich mehr Brennstoff übergerissen wird, so geht die Drucksteigerung explosionsartig vor sich (Bauart Lietzenmeyer).

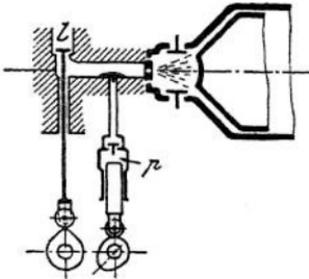


Fig. 120.

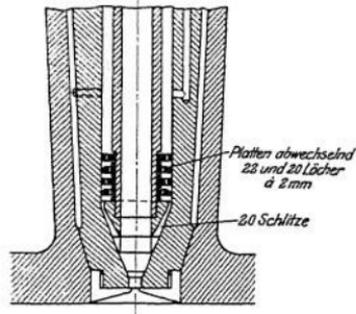


Fig. 121.

Neben dem Lietzenmeyer-Motor ist der Bronsmotor zu erwähnen. Beim Kolbenniedergang werden Luft und Brennstoff angesaugt, der sich in einer mit Lochkranz versehenen und in den Verbrennungsraum hineinragenden Kapsel lagert. In dieser entsteht durch teilweise Verdampfung des Brennstoffes ein zündfähiges Gemisch, das am Ende des Verdichtungshubes (Verdichtungsdruck 36 Atm.) zur Selbstzündung gelangt. Infolge des Explosionsdruckes wird der auf dem Kapselboden lagernde Brennstoff durch den Lochkranz in den Verbrennungsraum geschleudert, in dem der Verbrennungsdruck auf 45 bis 50 Atm. steigt.

In der Bauart der De la Vergne Machine Co., Newyork, wird ein Teil der nur bis auf etwa 20 verdichteten Lufterladung in eine ungekühlte Kammer gepreßt und nimmt hier eine Temperatur an, die zur Entzündung des durch Druckluft in die Kammer eingespritzten Brennstoffes geeignet ist (Nägels, Z. Ver. deutsch. Ing. 1911, S. 1337).

Die Bauarten Trinklerr und Haselwander haben Dauererfolge nicht zu erringen vermocht.

d) Einzelheiten der Dieselmotoren. Anlaßvorrichtung, Fig. 115.

Beim Anlassen der Maschine muß das Brennstoffventil geschlossen bleiben und das Anlaßventil zu Beginn des Expansionshubes geöffnet werden, um die Druckluft aus dem Anlaßgefäß in den Zylinder einströmen zu lassen. In Fig. 115 sitzen die Antriebshebel von Brennstoffventil und Anlaßventil nebeneinander auf einer durch Handhebel G verdrehbaren, exzentrischen Hülse. In der punktierten Anlaßstellung steht die Rolle des Brennstoffventilhebels von

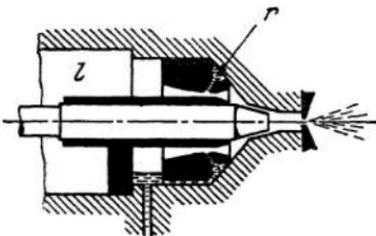


Fig. 122.

ihrer runden Scheibe ab, während die Rolle des Anlaßventilhebels anliegt. Umgekehrt bei Betriebsstellung des Handhebels *G*. Eine Anordnung der M. A. N., Nürnberg, mit Benutzung von Druckluft zur Übertragung der Steuerkräfte siehe Z. Ver. deutsch. Ing. 1911, S. 1328.

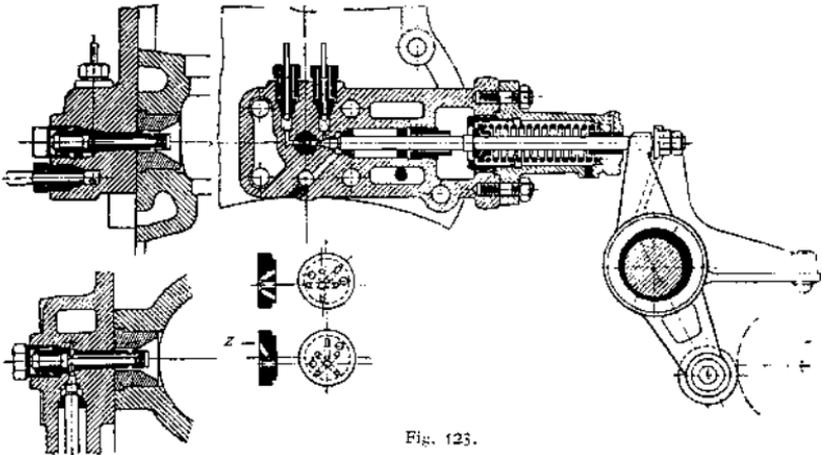


Fig. 123.

Plattenerstäuber, Fig. 121. Das vor dem Einspritzvorgang sich auf den Platten, deren Öffnungen gegeneinander versetzt sind, ansammelnde Öl wird von der Einblaseluft zum größten Teil mitgerissen. Ein kleinerer Teil fließt bis zur nächsten Eröffnung an der Dichtungskante der Nadel herunter und gelangt mit den ersten Luftteilchen in den Verbrennungsraum, dort die Verbrennung einleitend. Stellt der Regler bei geringerer Belastung kleinere Brennstoffmengen ein, so reißt die Einblaseluft diese vollständig mit, bei der nächsten Zündung fehlt die Ölsammlung an unteren Nadelende und die Zündung wird erschwert. Der Maschinist wird deshalb den Druck der Einblaseluft je nach Belastung der Maschine ändern. Vermeidung dieses Ubelstandes durch Einrichtung nach Fig. 122; der Brennstoff wird dem Luftstrom am Ende der Nadel zugeführt. Nach Nägel hat der Plattenerstäuber den Zweck, den Brennstoff zu verteilen, die Zerstäubung erfolgt in der Düse, in der die Einblaseluft ihre größte Geschwindigkeit erreicht und die infolge ihrer Massenträgheit zurückbleibenden Ölteilchen zerreißt.

Fig. 123 gibt den Brennstoffnadel-einsatz der liegenden Deutzer Teerölmaschine wieder. Damit das Gasöl mit den ersten Luftteilchen in den Ver-

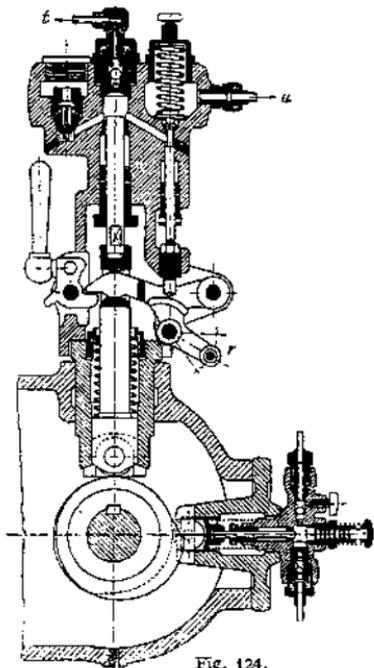


Fig. 124.

brennungsraum tritt, wird es durch einen feinen Kanal z unmittelbar vorne in die Düsenplatte gefördert.

Regulierung. Es wird fast ausschließlich in der Weise geregelt, daß der Regler noch nach Beendigung des Saughubes das Saugventil oder eine Verbindung zwischen Saug- und Druckraum der Pumpe geöffnet hält, so daß angesaugtes Öl zurückfließen kann.

Fig. 124 zeigt die Teeröl- und Zündölpumpe einer liegenden Deutzer Maschine. Der Regler verstellt den Hebel r , dessen Nocken gegen den Stift eines Saug- und Druckraum verbindenden Ventils anschlägt. Bewegung des senkrecht gelagerten Teerölpumpers und des wagerechten Zündölpumpers durch unrunde Scheibe.

Luftpumpe. Diese wird liegend oder stehend, zweistufig oder dreistufig ausgeführt. Bei Anordnung nach Fig. 115 am Rahmen Antrieb durch Kreuzkopf bzw. Kolben durch Übertragungshebel. (Die in Fig. 115 dargestellte Bauart, bei der die Luftpumpe vorverdichtete Luft aus dem Arbeitszylinder übernahm, wird wegen der Unreinheit dieser Luft nicht mehr ausgeführt.) Bei liegender Anordnung Antrieb durch Kurbel auf Hauptwelle oder mittels Schwinge. Bei mehrzylindrigen, schnellaufenden Maschinen erscheint die Luftpumpe als weiterer Zylinder im äußeren Aufbau der Maschine.

Die Niederdruckstufe wird häufig mit Saugschlitzten ausgeführt. Ausrüstung der Pumpe mit Kühlmantel.

6. Angaben für die Berechnung.

Der Berechnung des Kurbeltriebwerkes ist bei Verpuffungsmaschinen ein Höchstdruck von 25 Atm., bei Gleichdruckmaschinen von 35 bis 40 Atm. (bis 50 Atm. bei Teerölmaschinen) zugrunde zu legen.

Hubverhältnis $s : d$ (d = Zylinderdurchmesser).

Maschinenart:	$s : d$
Kleingasmaschinen	1,15—1,6
Großgasmaschinen, Viertakt	1,1 —1,25
„ Zweitakt	1,5 —1,75
Gleichdruckmaschinen	1,3 —1,7

Treibölpumpe. Bei 25 bis 30 v. H. Luftüberschuß benötigt 1 l Treiböl rd. 12 cbm Luft. Da die Einblasepumpe etwa 1 cbm Luft liefert, so hat der Arbeitszylinder 11 cbm anzusaugen, wozu bei einem räumlichen Wirkungsgrad von 0,8 ein Saugvolumen von 14 cbm = 14 000 l erforderlich ist. Sonach ist unter Voraussetzung gleicher Taktzahl das Verhältnis des Pumpenraumes zum Hubraum des Arbeitszylinders 1 : 14 000. Zur Vermeidung unbequem kleiner Abmessungen wird die Pumpe je nach Maschinengröße 2 bis 4 mal so groß genommen und Rücklauf des überschüssig geförderten Öles vorgesehen.

Einblasepumpe. Auf Grund von Erfahrungswerten werden die Abmessungen so gewählt, daß der wirksame, minutliche Hubraum 9 bis 12 l für die Pferdestärke beträgt.

Ladepumpen der Zweitaktmaschinen. Es bedeuten: V_l = Luftpumpenhubraum, V_g = Gaspumpenhubraum, V_h = Hubraum des Kraftkolbens.

Mischungsverhältnis $m = \frac{V_l}{V_g}$. Bei Nichtberücksichtigung der geringen Nachladung nach Schluß der Auspuffschlitze beträgt die pro Hub in den Arbeitszylinder strömende Gemischmenge $V_m = (1 + \varepsilon - \sigma - \lambda) \cdot V_h$, worin εV_h = Kompressionsraum, σV_h = Kolbenfläche mal Schlitzlänge, λV_h = Menge der im Zylinder zurückbleibenden Spülluft, so zu wählen, daß ein zur günstigsten Verbrennung erforderlicher Luftüberschuß β vorhanden ist (durchschnittlich: $\beta = 0,3$ bei armen, = 0,8 bei hochwertigen Gasen). Von diesem Gemisch haben

zu fördern: $\frac{m}{m+1}$ Raumeile die Luftpumpe, $\frac{1}{m+1}$ Raumeile die Gaspumpe.

Es folgt Hubraum der Luftpumpe:

$$V_L = \frac{1}{\eta} \left(\rho \cdot \lambda + \frac{m}{m+1} \cdot \frac{V_m}{V_h} \right) \cdot \frac{p_a \cdot T_h}{p_b \cdot T_a} \cdot V_h,$$

worin $\eta = 0,95 =$ räuml. Wirkungsgrad, ρ (durchschnittlich = 0,3 bei Gicht- und Kraftgas, = 0,5 für Kokssofengas) die beim Ausspülen entwichene Spül- luftmenge, $p_a = p_b + 0,1$ Atm. = Druck im Arbeitszylinder beim Schlitz- abschluß, $p_b =$ äußerer Luftdruck, $T_a = 350$ bis 375° absol. und $T_b = 285$ bis 295° absol. die entsprechenden Temperaturen¹⁾.

Bezeichnet α den schon im einströmenden Gemisch vorhandenen Luftüber- schuß (sonach $m = (1 + \alpha) \cdot l$, wenn l cbm theoretisch zur Verbrennung von 1 cbm Gas erforderlich sind), so folgt:

$$\lambda = \frac{1 - \rho - \sigma}{1 + \frac{1}{\beta - \alpha} \left(1 + \alpha + \frac{1}{l} \right)}$$

($\alpha = 0$ bis 0,1 bei Gichtgas, = 0,1 bis 0,2 bei Koks gas).

Schlitzlänge für Zweitaktmaschinen. Diese wird bei den Körtling- Maschinen nach Fig. 103 so gewählt, daß am Hubende die Schlitze während eines Kurbelwinkels von 100 bis 140° geöffnet bleiben.

Für die Schlitze der Ölmaschinen gibt Dr. O. Föppel (Z. Ver. deutsch. Ing. 1913, S. 1939) folgende Längen für Maschinen nach Fig. 119 an:

$$L_e = 0,4 \left[\frac{D n \left(1 + \frac{\lambda_E}{2} \right)}{\alpha} \right]^{\frac{2}{3}}$$

$$L_a = 0,57 L_e + 1,57 L_e \frac{1 + \lambda_A \frac{100 - L_e}{100}}{1 + \lambda_E \frac{100 - L_e}{100}}$$

Hierin bedeuten: L_e, L_a die Längen der Schlitze für Ein- und Auslaß, $D =$ Zylinderdurchmesser in m, $n =$ Uml./min, λ_E und λ_A das Schubstangenverhältnis der die Ein- und Auslaßschlitze steuernden Kolben, α das Verhältnis der Summe der Kanalbreiten zum Zylinderumfang $D\pi$.

Für den Kolben der Kurbelseite ist λ mit negativem Vorzeichen einzusetzen. Für Maschinen nach Fig. 118 wird $\lambda_E = \lambda_A$; negativ einzusetzen.

Verteilen sich Ein- und Auslaßschlitze zu gleichen Teilen auf den Zylinderumfang, so ist α auf den halben Umfang zu beziehen.

Rohrleitungen s. S. 1054.

7. Die Kraftgaserzeuger.

Bezüglich der Vorgänge während der Entgasung siehe S. 524.

Die zur vollkommenen Reduktion erforderliche Schütthöhe ist von der Art des Brennstoffes abhängig. Nach Joh. Körtling ist z. B. für Koks von 3×2 cm 750 mm, von 3×5 cm 1150 mm, von 5×7 cm 1800 mm Schütthöhe nötig. Für Steinkohle von 1×2 cm genügen 550 mm, während bei größerem Brennstoff, z. B. Förderkohle, Schütthöhen von 1,5 bis 2 m anzuordnen sind. Grobe Stücke und Staub geben Veranlassung zur „Kanalbildungen“, durch welche die Verbrennungsluft in das fertige Gas gelangt und dieses verschlechtert.

¹⁾ Borth, Z. Ver. deutsch. Ing. 1912, S. 1496. Eine einfache Berechnung s. Dubbel, Großgasmaschinen. Berlin 1910. Julius Springer.

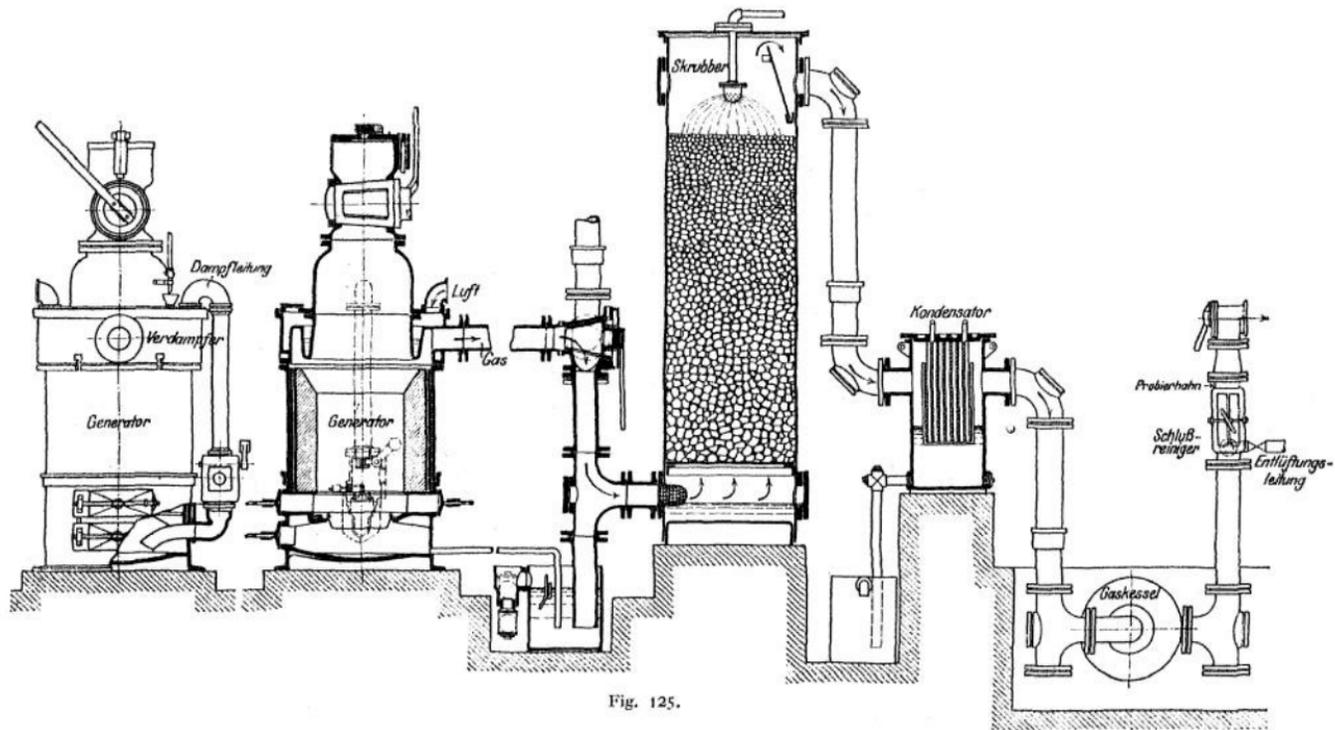


Fig. 125.

Zu hohe Schichtung bituminöser Brennstoffe führt zur verstärkten Ausscheidung von Teer und Ruß.

Der Wasserstoff des sich zersetzenden Wasserdampfes reichert das Gas an, während der frei werdende Sauerstoff die Luftzufuhr und damit den Stickstoffgehalt des Gases verringert.

Nach Versuchen von Dr.-Ing.

K. Neumann beträgt die günstigste Wassermenge für 1 kg Kohle 0,4 kg Wasserdampf, ein Wert, der in der Praxis jedoch überschritten wird. Nach

Job. Körting darf bei Vergasung reinen Kohlenstoffes 1 kg Wasser zu 4,5 cbm kalter Vergasungsluft zugesetzt werden, und da zur Kohlenstoffvergasung ungefähr (für 1 kg) 4,5 cbm Luft nötig sind, so ist die Höchstgrenze des Wasserzusatzes rund 1 kg zu 1 kg Kohlenstoff. Wirkungsgrad der Gaserzeuger 70 bis 75 v. H.

Nach Güldner ist der durchschnittliche Rost- und Schachtquerschnitt für 1 PSe 55 bis 45 qcm bei Anlagen bis 25 PS, 45 bis 35 qcm bei größeren Anlagen. Kleinstückige und wärmearme Brennstoffe verlangen 25 bis 30 qcm Querschnitt pro 1 PSe. Generatorfassungsraum mindestens 3 l bei Anthrazit, 5 l bei Koks- und Braunkohle für 1 PSe. Bei längeren Rohrleitungen ist vor der Maschine ein Gassammler einzubauen.

1. Druckgasanlagen. Der in einem besonderen Dampfkessel erzeugte Dampf saugt auf dem Wege zum Rost mittels Dampfstrahlgebläse die Verbrennungsluft an. Vorteil: Ermöglichung ausgedehnter Reinigungsanlagen. Nachteil: Umständlichkeit des Betriebes, Konzessionspflicht des Dampfkessels.

2. Sauggasanlagen. Die Maschine saugt das

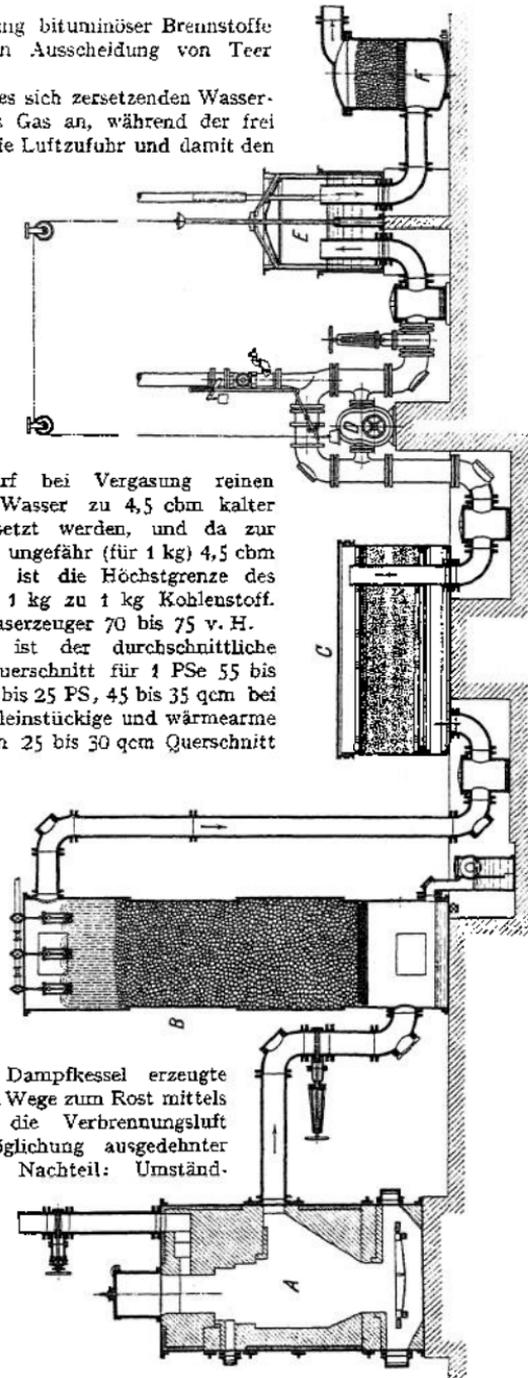


Fig. 126.

Gas selbst an, daher selbsttätige Anpassung der Gaserzeugung an den Bedarf des Betriebes. Die Reinigungsanlagen vergrößern den Saugwiderstand.

Fig. 125. Anlage der Gasmotorenfabrik Deutz. Die angesaugte Luft streicht über den Wasserspiegel des oben am Generator angeordneten Verdampfers und gelangt, mit Wasserdämpfen angereichert, in den Aschenkasten und durch den Rost in die glühende Brennstoffschicht. Das überlaufende Wasser des Verdampfers, dessen Wasserspiegel durch ständigen Zufluß auf konstante Höhe gehalten wird, tritt in den Aschenkasten, wo es verdampft. Im Koksskrubber wird das Gas gereinigt und gekühlt. Anlassen mittels Ventilators. Abstellen durch Drehen des Dreivegeahnes, so daß die Verbindung des Generators mit dem Kamin hergestellt, der Gaszufluß zum Skrubber abgesperrt wird.

3. Anlagen mit vereinigter Saug- und Druckwirkung, Fig. 126, Bauart Körting. Gebläse *D* ist dauernd in Betrieb und führt das aus dem Generator angesaugte Gas den Verbrauchsstellen unter Druck zu. Der Generator ist als sog. „Doppelgenerator“ zur Vergasung bituminöser Brennstoffe ausgeführt. Die Luftzufuhr findet oben und unten statt, so daß sich zwei Brennzonen bilden. Der oben aufgegebenen Brennstoff wird in der oberen Zone verkocht und in der unteren Zone vollständig entgast. Die bei der Verkokung nach abwärts ziehenden Destillationsprodukte enthalten Teerdämpfe, die beim Durchstreichen der oberen Zone in permanente, für den Maschinenbetrieb unschädliche Gase zerlegt werden.

Steigt der Druck in der Druckleitung, so öffnet der Regler *E* die oberhalb des Gebläses sitzende Drosselklappe, so daß das überschüssige Gas aus der Saugleitung in die Druckleitung zurücktritt. Steigt der Gasdruck in außergewöhnlichen Fällen so hoch an, daß dieser Ausgleich nicht genügt, so öffnet sich auch noch die Drosselklappe in dem mit Vorrichtung für Probierflamme versehenen Schornstein. Das Steigerohr des Druckreglers läßt einen Teil der Gase ins Freie entweichen, wenn die Gefahr vorliegt, daß der Gasdruck das Wasser aus dem Regler *E* herausdrückt.

Kiestopf *F* verhindert ein Rückschlagen der Flamme in den Apparat.

Bei Feinkohlengeneratoren wird die sehr niedrige Glutschicht durch das Abschlacken sehr empfindlich gestört. Erleichterung des Abschlackens durch Anordnung von Drehrosten (Kerpely, M. A. N.-Nürnberg u. a.) oder Wanderrosten (Jul. Pintsch) oder auch durch Vereinigung eines Drehrostes mit einem sich ebenfalls drehenden Generator (Z. Ver. deutsch. Ing. 1910, S. 1796).

III. Die Kolbenpumpen.

Je nach der Wirkungsweise sind zu unterscheiden:

1. Einfachwirkende Pumpen.
2. Doppeltwirkende Pumpen.
3. Differentialpumpen.

1. Die verschiedenen Ausführungsarten. Antrieb.

a) Die einfachwirkenden Pumpen.

Fig. 137 zeigt die Ausführung einer Pumpe dieser Art. Beim Vorwärtsgang des Kolbens wird die Flüssigkeitsmenge $O \cdot s$ angesaugt, die beim Rückwärtsgang in die Druckleitung gefördert wird. Sonach Förderung bei jedem Doppelhub $= O \cdot s$. Bei n minutlichen Umläufen beträgt die minutliche Liefermenge:

$$Q_i = n \cdot O \cdot s.$$

Diese theoretische Liefermenge ist mit den Undichtheiten und verspäteten Ventilschluß usw. berücksichtigenden Lieferungsgrad μ zu multiplizieren. Wirkliche Fördermenge

$$Q_e = \mu \cdot Q_i = \mu \cdot n \cdot O \cdot s.$$

$\mu = 96$ bis 99 v. H. bei gut ausgeführten größeren Pumpen,

$\mu = 90$ bis 95 v. H. bei Pumpen mittlerer Größe.

Kraftbedarf der Pumpe. Die Betriebskraft berechnet sich theoretisch aus dem gehobenen Wassergewicht Q und der Förderhöhe H .

$$N = \frac{Q \cdot H}{75} \text{ PS.}$$

Infolge der Kolbenreibung, Wasserreibung und Ventilwiderstände ist jedoch die indizierte Leistung N_i des Pumpenzylinders größer. Ist $\eta =$ mechanischer Wirkungsgrad der Pumpe, so folgt:

$$N_e = \frac{N_i}{\eta}.$$

$\eta = 0,85$ bis $0,95$, je nach Güte der Ausführung.

b) Die doppelwirkenden Pumpen.

Ohne Berücksichtigung der Kolbenstangenquerschnitte sind die Werte für Q_i , Q_e und N_i bei sonst gleichen Verhältnissen doppelt so groß wie bei den einfachwirkenden Pumpen.

c) Die Differentialpumpen.

Ausführungsbeispiel siehe Fig. 138. Es sind zwei wirksame Kolbenflächen vorhanden, und die Pumpe hat doppelte Druckwirkung bei einfacher Saugwirkung. Ist O die große, o die kleine Kolbenfläche, so wird in Fig. 138 auf dem Linksgang rechts die Wassermenge $O \cdot s$ angesaugt, links durch die Ringfläche $(O - o)$ die Wassermenge $(O - o) \cdot s$ verdrängt. Beim Rückgange wird rechts die Wassermenge $O \cdot s$ durch das Druckventil gefördert. Von dieser strömt aber, da der Differentialkolben links den entsprechenden Raum freilegt, der Teil $(O - o) \cdot s$ in den linken vorderen Pumpenraum über.

Soll die angesaugte Wassermenge gleichmäßig auf beide Druckhübe verteilt werden, so muß

$$(O - o) \cdot s = o \cdot s, \quad \text{also} \quad o = \frac{O}{2}, \quad d = D \cdot \sqrt{0,5} = 0,707 D$$

sein.

Bedeutung: $p_s =$ Saugspannung,

$p_d =$ Druckspannung, und sollen die Kolbenkräfte für Hin- und

Rückgang des Kolbens gleich sein, so muß: $o = O \frac{p_s + p_d}{2 \cdot p_d}$ sein.

Kraftbedarf und Liefermenge sind dieselben wie bei der einfachwirkenden Pumpe, wenn Plungerdurchmesser, Hub und Umlaufzahl ebenfalls die gleichen sind.

d) Vergleich der Pumpen.

1. Einfachwirkende Pumpen. Einfache, billige Ausführung, wenig Reibungsverluste, günstiger Lieferungsgrad. Geeignet bis etwa 500 l/min. Infolge der absatzweisen Bewegung des Wassers entstehen in der Leitung starke Druckschwankungen. Ist die Druckhöhe größer als die Saughöhe, so ist der Kraftbedarf beim Druckhub größer als beim Saughub: Schwere Schwungräder, schlechte Ausnutzung des Antriebsgestänges.

2. Doppelwirkende Pumpen. Kraftbedarf und Wasserlieferung gleichmäßiger, jedoch eine Stopfbuchse und zwei Ventile mehr nötig. In derselben Weise wie eine doppelwirkende Pumpe arbeiten zwei einfachwirkende Pumpen mit Kurbelversetzung um 180° .

Vereinigung zweier doppelwirkender Pumpen zu einer Zwillingspumpe mit Kurbelversetzung unter 90° .

Besonders gleichmäßige Wasserlieferung bei Kupplung dreier (meist) einfachwirkender Pumpen mit Kurbelversetzung unter 120° .

3. Differentialpumpen. Wasserbewegung in der Druckleitung ebenso günstig wie bei doppelwirkender Pumpe, in der Saugleitung ungleichmäßig wie bei einfachwirkender Pumpe. Gegenüber der doppelwirkenden Pumpe werden zwar nur 2 Ventile gebraucht, die aber bei gleicher Liefermenge doppelt so groß wie bei ersterer ausfallen müssen, ebenso Kolbenquerschnitt.

e) Antrieb.

1. Handantrieb (Feuerspritzen, Brunnenpumpen, kleine Preßpumpen usw.). Antrieb durch Hebel oder Kurbel. Am Hebel kann ein Arbeiter beim Niederdrücken eine Kraft von 16 kg, beim Aufziehen von 5 kg ausüben. Hebelanschlag 0,8 bis 1 m. Zahl der minutlichen Doppelhübe $n \leq 60$. Bei Handkurbeln ist Kurbelarm 0,4 bis 0,5 m lang. Kurbeldruck 10 kg für einen Arbeiter. $n = 20$ bis 25.

2. Maschinenantrieb durch Dampf-, Gas-, Dieselmotoren, Elektromotoren, Turbinen usw.

2. Saug- und Druckwirkung. Die Windkessel.¹⁾

a) Saugwirkung ohne Windkessel (Fig. 127).

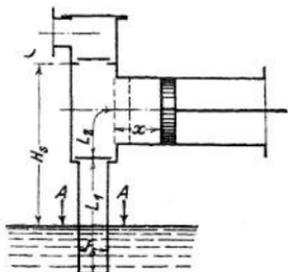


Fig. 127.

Es bedeuten:

A den Atmosphärendruck, in m Wassersäule gemessen,
 c_x die augenblickliche Kolbengeschwindigkeit bei der Kolbenlage x ,
 G_l das Ventilgewicht in der Luft,
 G_w das Ventilgewicht im Wasser,
 p_u und p_o die Drücke unter und über dem Ventilteller,
 f_u die untere Ventillfläche,
 \mathfrak{F} die Federspannung des Ventils,

$L_v = \frac{G_l}{f_u \cdot \gamma}$ die Wassersäule vom Querschnitt f_u (in m), die das Ventilgewicht ersetzt,
 b_v die Ventilbeschleunigung,
 R eine die Reibung im Saugrohr ersetzende Wassersäule,
 c_s die Wassergeschwindigkeit im Saugrohr,
 c_d die Wassergeschwindigkeit im Druckrohr.

Zur Beschleunigung b der bewegten Massen ist der Druck

$$p_a = b \cdot \gamma \left(L_1 \cdot \frac{O}{F_s} + L_2 + x + L_v \cdot \frac{b_v}{b} \right)$$

erforderlich, worin L_2 = Länge des Raumes zwischen Kolbentotlage und Saugventil, dessen Querschnitt = O angenommen. Nun ist

$$p_a = \gamma \cdot \left(A - H_s - \frac{c_s^2}{2g} - H_v - R \right), \quad \text{warin} \quad H_v = \frac{G_w + \mathfrak{F}}{f_u \cdot \gamma} = \text{statische Druckhöhe,}$$

die Eigengewicht und Federbelastung des Ventils entspricht. Es folgt:

$$b = g \cdot \frac{A - H_s - \frac{c_s^2}{2g} - H_v - R}{L_1 \cdot \frac{O}{F_s} + L_2 + x + L_v \cdot \frac{b_v}{b}}$$

Für die Anfangsbeschleunigung im Totpunkt ist $x = 0$, $c_s = 0$, daher auch $R = 0$. Ebenso ändert sich H_v .

Für den Ventilhubbeginn gilt:

$$p_u \cdot f_u = G_w + \mathfrak{F}_0 + p_o f_o, \quad \text{oder:} \quad p_u - p_o = \frac{G_w + \mathfrak{F}_0}{f_u} + p_o \frac{f_o - f_u}{f_u}$$

$$\text{Mit:} \quad \frac{p_u - p_o}{\gamma} = H_v' \quad \text{folgt:} \quad H_v' = \frac{G_w + \mathfrak{F}_0}{f_u \cdot \gamma} + \frac{p_o}{\gamma} \cdot \frac{f_o - f_u}{f_u}$$

Nach A. Dahme (Die Kolbenpumpe, München 1908) kann für Beginn Saughub gesetzt werden (da für den Augenblick der Eröffnung Saugventil und Saugsäule demselben Beschleunigungsgesetz unterliegen): $f_u' \cdot b_{v0} = 0 \cdot b_0$, wenn f_u' die untere wasserbenetzte und in den meisten Fällen mit dem lichten Ventilsitzquerschnitt übereinstimmende Ventilfläche oder deren Projektion bezeichnet.

¹⁾ A. Dahme, Die Kolbenpumpe. München 1908. R. Oldenbourg.

Für die freie Endverzögerung am Hubende folgt mit $H_d = H_d' + H_d''$:

$$b_0 = g \cdot \frac{A + H_d + H_v + \frac{c_d^2}{2g} + R}{L_d \cdot \frac{O}{F_d}}$$

Um $\frac{c_d^2}{2g}$ möglichst klein zu halten, ist der Druckrohrquerschnitt so groß zu wählen, als mit Rücksicht auf die Anlagekosten statthaft ist. Die Verzögerung b_0 muß kleiner als die des Kolbens sein.

d) Bemessung der Windkessel.

Aus der zeichnerischen Darstellung der Wasserbewegung in Fig. 129 geht hervor, daß in Punkt A_2 das Luftvolumen einen Höchstwert, in A_1 einen Mindestwert annimmt. Die zwischen der mittleren Höhe und der Sinuslinie liegende Fläche gibt die aus dem Windkessel abfließende Wassermenge an und hat die Größe $V_{s \max} - V_{s \min} = 0,55 O \cdot s$.

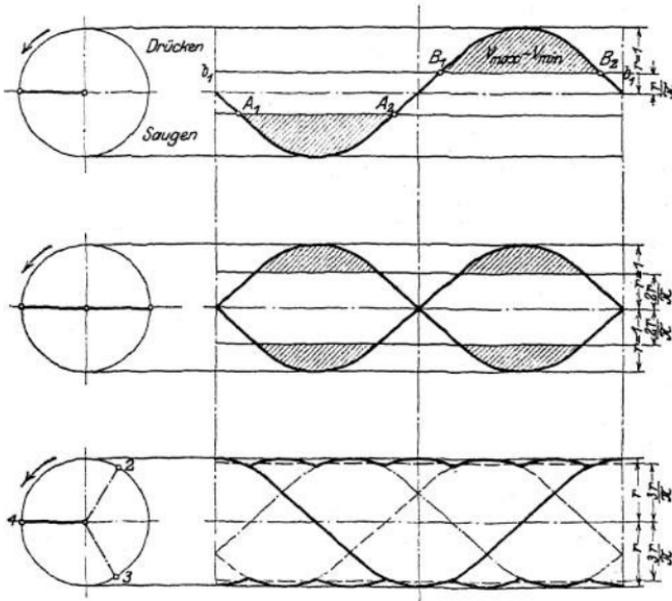


Fig. 129.

Soll dieser Wert nicht mehr als $\frac{1}{m}$ des mittleren Luftvolumens betragen (wobei $\frac{1}{m}$ als Ungleichförmigkeitsgrad des Windkessels bezeichnet werden kann), so muß der Luftinhalt:

$$V_{sm} = m (V_{s \max} - V_{s \min}) = m \cdot 0,55 O s$$

werden.

Unter Annahme isothermischer Zustandsänderung berechnet sich die Druckschwankung aus:

$$\frac{p_{\min}}{p_{\max}} = \frac{V_{s \min}}{V_{s \max}} = \frac{2m - 1}{2m + 1}$$

Für die doppeltwirkende Pumpe wird

$$V_{s \max} - V_{s \min} = 0,21 O s .$$

Für drei unter 120° Kurbelversetzung gekuppelte Pumpen:

$$V_{\max} - V_{\min} = 0,09 \text{ Os.}$$

Bei Druckwindkesseln wird m möglichst groß ($m \approx 100$) gewählt. Da derartige Windkessel als Hauben nicht ausgeführt werden können, so werden sie mitunter neben der Pumpe aufgestellt.

Bei Windkesseln dieser Art genügen die statisch-volumetrischen Ermittlungen nach Fig. 129 nicht mehr, sondern es treten, wie Gramberg nachgewiesen hat, Schwingungserscheinungen auf, die den Windkesseldruck auf das Vielfache der oben angegebenen Werte steigern und zu Zerstörungen Veranlassung geben können. Die unter der Spannung des Windkessels stehende, von diesem bis zur Windhaube an der Pumpe reichende Wassersäule verhält sich wie eine Feder, deren Eigenschwingungszahl mit dem Antriebsimpuls nicht zusammenfallen darf.

Die Eigenschwingungszahl einer Wassersäule von der reduzierten Länge l_0 und dem Querschnitt f_0 , die einerseits unter dem konstanten Druck p_0 , andererseits unter dem Druck einer Luftmasse vom Gleichgewichtsvolumen V_0 steht, findet sich aus:

$$t_0 \approx \frac{1}{5} \sqrt{\frac{l_0 \cdot \bar{V}_0}{f_0 \cdot p_0}}$$

$$l_0 = l + f_0 \cdot \frac{l_1}{f_1} - f_0 \cdot \frac{l_2}{f_2}$$

woru l = Länge der Zwischenleitung, f_0 = Querschnitt der Zwischenleitung. l_1 und l_2 sind die Längen der in Windkessel und Windhaube schwingenden Wassersäulen, f_1 und f_2 deren Querschnitte.

Ist die auf die Sekunde bezogene Impulszahl $= \frac{z}{60}$, so ist für doppeltwirkende oder Differentialpumpen: $z = 2n$, für einfachwirkende Pumpen $z = n$.

Resonanz erster Ordnung tritt auf, wenn

$$\frac{60}{z} = \frac{1}{50} \sqrt{\frac{l_0 \cdot \bar{V}_0}{f_0 \cdot p_0}}$$

Hieraus folgt der „Grenzinhalt“ des Windkessels:

$$V_0 = \left(\frac{3000}{z_{\min}} \right)^2 \cdot \frac{f_0 \cdot p_{0\max}}{l_0}$$

Um Resonanz mit Sicherheit zu vermeiden, empfiehlt sich

$$V_{\min} = 2 \cdot V_0$$

zu wählen. (Z. Ver. deutsch. Ing. 1911, S. 842).

Wie aus der Gleichung für V_0 folgt, muß das Luftvolumen mit abnehmender Umlaufzahl und wachsender Förderhöhe zunehmen.

3. Berechnung der Ventile.¹⁾

1. Annahme: Das Ventil befindet sich in jedem Augenblick in Ruhe auf dem Wasser schwimmend. Es bezeichnen:

- Q den Kolbenquerschnitt in qm ,
- c_v die Kolbengeschwindigkeit in einem bestimmten Augenblick in m/sek ,
- f_v den freien Durchgangsquerschnitt im Ventil in qm ,
- c_v' die Wassergeschwindigkeit im Ventilsitz in m/sek ,
- k den Ventilhub,
- l den Umfang des Ventiltellers,
- c die theoretische Geschwindigkeit im Spalt,
- μ den Ausflußkoeffizienten,
- $\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}$ die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel,
- r den Kurbelradius,
- α den Kurbelwinkel.

¹⁾ Nach Prof. Berg, Stuttgart. Z. Ver. deutsch. Ing. 1904, S. 1095.

Es gelten die Beziehungen:

$$f_w \cdot c_w = O \cdot c_x; \quad c_w = \frac{O \cdot c_x}{f_w} \quad (1)$$

$$\mu \cdot c \cdot l \cdot h = f_w \cdot c_w, \quad (2)$$

oder mit Gl. (1): $\mu \cdot c \cdot l \cdot h = O \cdot c_x$ (Spaltmenge = Kolbenverdrängung). (3)

Bewegungsgesetz des Kolbens für $L = \infty$: $c_x = r \cdot \omega \cdot \sin \alpha$.



Fig. 130.

$$h = \frac{O \cdot r \cdot \omega}{\mu \cdot c \cdot l} \cdot \sin \alpha. \quad (5)$$

(Gleichung für den Ventilhub.)

$$\text{Für } \alpha = 90^\circ: \quad h = \frac{O \cdot r \cdot \omega}{\mu \cdot c \cdot l}.$$

$$\text{Für } \alpha = 0^\circ \text{ und } \alpha = 180^\circ: \quad h = 0.$$

Darstellung der Ventiltbewegung: Sinuslinie, Fig. 130.

Aus Gl. (5) folgt Ventilgeschwindigkeit:

$$v = \frac{dh}{dt} = \frac{O \cdot r \cdot \omega}{\mu \cdot c \cdot l} \cdot \cos \alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d\alpha}{dt} = \omega;$$

$$v = \frac{O \cdot r \cdot \omega^2}{\mu \cdot c \cdot l} \cdot \cos \alpha. \quad (4)$$

(Gleichung für Ventilgeschwindigkeit.)

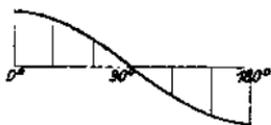


Fig. 131.

Darstellung der Ventilgeschwindigkeit: Kosinuslinie, Fig. 131.

Ventilbeschleunigung:

$$p = \frac{dv}{dt} = -\frac{O \cdot r \cdot \omega^2}{\mu \cdot c \cdot l} \cdot \sin \alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt},$$

$$p = -\frac{O \cdot r \cdot \omega^3}{\mu \cdot c \cdot l} \cdot \sin \alpha. \quad (5)$$

(Gleichung für Geschwindigkeitsänderung.)

Darstellung der Ventilbeschleunigung: Sinuslinie, Fig. 132.

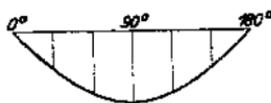


Fig. 132.

2. Annahme: Das Ventil befindet sich in Bewegung.

Bei der Aufwärtsbewegung des Ventils wird unter demselben ein Raum frei von der Größe $f \cdot v$, wenn f = Ventiltellerfläche in qm. Dieser Raum wird von Wasser ausgefüllt, das nicht durch den Spalt tritt. Bei der Ventilabwärtsbewegung wird um $f \cdot v$ mehr durch den Spalt entweichen.

$$\begin{aligned} \mu \cdot c \cdot l \cdot h &= f_w \cdot c_w - f \cdot v \quad \text{bei Aufwärtsbewegung,} \\ \mu \cdot c \cdot l \cdot h &= f_w \cdot c_w + f \cdot v \quad \text{bei Abwärtsbewegung.} \end{aligned} \quad (6)$$

Da $f_w \cdot c_w = O \cdot c_x$, so wird: $\mu \cdot c \cdot l \cdot h = O \cdot c_x - f \cdot v$. (7)

$$h = \frac{O \cdot c_x - f \cdot v}{\mu \cdot c \cdot l} = \frac{1}{\mu \cdot c \cdot l} \cdot (O \cdot c_x - f \cdot v). \quad (8 \text{ und } 8a)$$

Mit μ und c = konst.:

$$v = \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\mu \cdot c \cdot l} \left(O \cdot \frac{dc_x}{dt} - f \cdot \frac{dv}{dt} \right). \quad (9)$$

Da Ventilbeschleunigung $\frac{dv}{dt}$ namentlich gegen Hubende sehr gering ist, so kann der Ausdrück $f \cdot \frac{dv}{dt}$ vernachlässigt werden:

$$v = \frac{O \cdot dc_x}{\mu \cdot c \cdot l \cdot dt}. \quad (10)$$

Durch Einsetzen in Gl. (8a) folgt:

$$h = \frac{1}{\mu \cdot c \cdot l} \left(O \cdot c_x - \frac{f \cdot O \cdot dc_x}{\mu \cdot c \cdot l \cdot dt} \right). \quad (11)$$

Die Gleichung stellt den Ventilhub als Funktion der Kolbengeschwindigkeit dar.

Für $l = \infty$ ist:

$$c_x = r \cdot \omega \cdot \sin \alpha.$$

$$\frac{dc_x}{dt} = r \cdot \omega \cdot \cos \alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt}, \quad \text{folglich:}$$

$$h = \frac{1}{\mu \cdot c \cdot l} \cdot \left(O \cdot r \cdot \omega \cdot \sin \alpha - \frac{O \cdot r \cdot f \cdot \omega^2}{\mu \cdot c \cdot l} \cdot \cos \alpha \right) = \frac{O \cdot r \cdot \omega}{\mu \cdot c \cdot l} \left(\sin \alpha - \frac{f \cdot \omega}{\mu \cdot c \cdot l} \cdot \cos \alpha \right).$$

(12 und 12a)

Aus Gl. (12) folgt durch Multiplikation beider Seiten mit $\mu \cdot c \cdot l$:

$$\mu \cdot c \cdot l \cdot h = O \cdot r \cdot \omega \cdot \sin \alpha - \frac{O \cdot r \cdot \omega^2 \cdot f}{\mu \cdot c \cdot l} \cdot \cos \alpha. \quad (13)$$

In Worten: Spaltmenge gleich Kolbenverdrängung minus Ventilverdrängung. In Fig. 133 sind Spaltwege und Ventilhub zeichnerisch dargestellt. Sinuslinie ABC stellt die Kolbenverdrängung, Kosinuslinie DEF die Ventilverdrängung dar. Die algebraische Ordinatensumme ergibt Linie DGH der Spaltmenge. DGH stellt gleichzeitig den Ventilhub dar, wenn der Maßstab der Figur mit $\mu \cdot c \cdot l$ multipliziert wird [Gl. (12a) des Ventilhubes wird erhalten, wenn Gl. (13) durch $\mu \cdot c \cdot l$ dividiert wird].

Fig. 133 zeigt, daß das Ventil erst nach Kolbenumkehr im Punkte f zu öffnen beginnt und erst nach Kolbenumkehr schließt. Die höchste Erhebung wird bei einem Kurbelwinkel $\alpha > 90^\circ$ erreicht.

Die theoretische Spaltgeschwin-

digkeit hat die Größe $c = \sqrt{2g(p_u - p_o)}$, worin p_u = Wasserpressung unter dem Ventil, p_o = Wasserpressung über dem Ventil.

Ist G_w = Ventilgewicht im Wasser, \bar{x} = Federspannung, $\gamma = 1000$, so folgt:

$$p_u - p_o = \frac{G_w + \bar{x}}{f \cdot \gamma}, \quad c = \sqrt{2g \cdot \frac{G_w + \bar{x}}{f \cdot \gamma}}. \quad (13a)$$

Bezeichnet C die Federkonstante, d. h. den von der Feder für 1 cm Zusammendrückung ausgeübten Druck in kg, y_o = Vorspannung bei geschlossenem Ventil, so folgt weiterhin:

$$\bar{x} = (y_o + h) \cdot C; \quad c = \sqrt{2g \cdot \frac{G_w + (y_o + h) \cdot C}{f \cdot \gamma}}. \quad (13b)$$

Setzt man in Gl. (12a) $\alpha = 180^\circ$, so ergibt sich der Ventilhub im Totpunkt:

$$h_o = \frac{O \cdot r \cdot \omega^2 \cdot f}{(\mu \cdot c \cdot l)^2}.$$

Nun ist für die einfachwirkende Pumpe oder für eine Seite der doppelwirkenden Pumpe $Q = \frac{O \cdot r \cdot \omega}{\pi}$; $O \cdot r \cdot \omega = Q \cdot \pi$.

$$h_o = \frac{Q \cdot \pi \cdot \omega \cdot f}{(\mu \cdot c \cdot l)^2}. \quad (14)$$

Um Ventilschlag mit Sicherheit zu vermeiden, macht Berg auf Grund seiner Versuche die Annahme, daß in Kolbentotlage $h_o = \frac{1}{250} d$ betragen soll. Sonach $\frac{d}{4h_o} = 62,5$, hierfür ist $\mu = 0,80$. (S. Zahlentafel auf folgender Seite.)

Berechnung des Ventildurchmessers. Aus Gl. (14) folgt mit:

$$h_o = 0,004 d, \quad \omega = \frac{\pi \cdot n}{30}, \quad f = \frac{\pi d^2}{4}, \quad \mu = 0,80, \quad l = \pi d:$$

$$0,004 d = \frac{Q \cdot \pi \cdot n}{30 \cdot 4 \cdot 0,8^2 \cdot c_o^2}; \quad c_o^2 \cdot d \cong 10 \cdot Q \cdot n.$$

Nach Wahl von c_o kann sonach d — oder umgekehrt — bestimmt werden.

Für Pumpen mit kleiner Förderhöhe: $c_o = 0,8$ bis 1,2 m/sek.

Für Wasserwerkspumpen mit mittlerer Förderhöhe ($h = 50$ bis 70 m): $c_o = 2$ bis 3 m/sek.

Für Preßpumpen: $c_o = 4$ bis 6 m/sek.

Berechnung der Federbelastung. Aus Gl. (13a) folgt:

$$c_o = \sqrt{2g \cdot \frac{G_w + \bar{x}_o}{f \cdot \gamma}},$$

\tilde{y}_0 = Federspannung beim Ventilhub $h_0 \cong$ Vorspannung: Mit $g = 9,81$, $f = \frac{\pi d^2}{4}$, $\gamma = 1000$ wird: $G_w + \tilde{y}_0 = 40 \cdot c_0^2 \cdot d^2 =$ Ventilbelastung für das aufsitzende Ventil. Da $c_0^2 \cdot d = 10 Q n$, so folgt:

$$G_w + \tilde{y}_0 = 400 \cdot Q \cdot n \cdot d.$$

Bestimmung des größten Ventilhubes. Dieser tritt annähernd für $\alpha = 90^\circ$ auf. Aus Gl. (12a) folgt mit $\alpha = 90^\circ$:

$$h_{\max} = \frac{O r \cdot \omega}{\mu \cdot c \cdot l} = \frac{Q \cdot \pi}{\mu \cdot c \cdot l} = \frac{Q}{\mu \cdot c \cdot d}. \quad (15)$$

Annähernd ist hierin $\mu = 0,53$. Genauer ist der Maximalhub nach Wahl der Feder zu bestimmen. Sind y_0 und C bekannt, so ist der größte Hub probe-

Zahlentafel für den Ausflußkoeffizienten μ .

h mm	μ	$\frac{d}{4h}$ bzw. $\frac{b}{2h}$	h	μ	$\frac{d}{4h}$ bzw. $\frac{b}{2h}$
0,0	0,650	—	6,0	0,532	2,500
0,1	0,710	150,00	6,5	0,523	2,31
0,2	0,780	75,00	7,0	0,515	2,14
0,3	0,845	50,00	7,5	0,507	2,00
0,4	0,890	37,50	8,0	0,500	1,87
0,5	0,911	30,00	8,5	0,493	1,76
0,6	0,913	25,00	9,0	0,485	1,67
0,8	0,902	18,75	9,5	0,477	1,58
1,0	0,870	15,00	10	0,472	1,50
1,5	0,788	10,00	11	0,459	1,36
2,0	0,732	7,50	12	0,445	1,25
2,5	0,690	6,00	13	0,431	1,15
3,0	0,650	5,00	14	0,420	1,07
3,5	0,622	4,28	15	0,407	1,00
4,0	0,599	3,75	16	0,395	0,94
4,5	0,578	3,33	17	0,381	0,88
5,0	0,560	3,00	18	0,370	0,83
5,5	0,545	2,73			

weise durch Rechnung zu ermitteln. Nach Gl. (15) ist $h_{\max} \cdot \mu \cdot c = \frac{Q}{d}$.

Nach Wahl von h wird $\frac{d}{4h}$ und damit aus vorstehender Zahlentafel μ bestimmt.

Die dem Ventilhub h entsprechende Spaltgeschwindigkeit ergibt sich aus Gl. (13b).

Als dann muß $h \cdot \mu \cdot c = \frac{Q}{d}$ sein. Für die Wahl von h_{\max} ist die Umlaufzahl der Pumpe maßgebend. Es muß sein $n \cdot h_{\max} \infty 400$.

$$\begin{array}{ccc} h_{\max} = & 4 & 8 & 10 \text{ mm} \\ \text{für } n = & 100 & 50 & 40 \end{array}$$

Nach Berg läßt sich vorstehende Rechnung auch auf Ringventile mit genügender Genauigkeit übertragen. Die Ergebnisse der Rechnung stimmen mit guten Ausführungen der Praxis überein. Ist $b =$ Breite des Ventilinges, so tritt für Ringventile das Verhältnis $\frac{b}{2h_0}$ an die Stelle von $\frac{d}{4h_0}$ bei Tellerventilen.

Für Tellerventile war im Totpunkt: $h_0 = 0,004 d$; $\frac{d}{4h_0} = 62,5$. Setzt man für Ringventile $\frac{b}{2h_0} = 62,5$, so folgt als Ventilhub im Totpunkt: $h_0 = \frac{b}{125} = 0,008b$, wobei $\mu = 0,80$.

Nach Gl. (14) folgt für Ringventile mit $h_0 = 0,008 b$, $\omega = \frac{\pi n}{30}$,
 $f = \pi \cdot d_m b$, $l = 2\pi d_m$ und $c = c_0$:

$$c_0^2 d_m \approx 5 Q n.$$

Nach Bestimmung der Ringbreite folgt die Ventilbelastung des aufsitzenden Ventils:

$$G_w + \tilde{\gamma}_0 = 800 Q n b.$$

Gl. (15) ergibt mit $l = 2\pi d_m$:

$$h_{\max} = \frac{Q}{2\mu \cdot c \cdot d_m}.$$

Beispiel. Ringventil für einfachwirkende Pumpe; $Q = 251/\text{sek}$, $n = 60$, gewählt $c_0 = 3 \text{ m/sek}$.

Aus Gl. $c_0^2 \cdot d_m = 5 Q n$ folgt: $d_m = \frac{5 \cdot 0,025 \cdot 60}{9} = 0,833 \text{ m}$. Ausgeführt mit 4 Ringen $d_m = 0,840 \text{ m}$. Nach Entwurf wird $b = 0,023 \text{ m}$.

Die Ventilbelastung ist nach der Gl. $G_w + \tilde{\gamma}_0 = 800 Q n b$ zu berechnen:

$$G_w + \tilde{\gamma}_0 = 800 \cdot 0,025 \cdot 0,023 \cdot 60 = 27,6 \text{ kg}.$$

Da Eigengewicht $G_w = 11 \text{ kg}$, folgt $\tilde{\gamma}_0 = 16,6 \text{ kg}$.

Größter Ventilhub $h_{\max} = 9 \text{ mm}$ gewählt, sonach $\frac{b}{2h} = \frac{23}{2 \cdot 9} = 1,28$, wozu nach Tabelle auf S. 932 $\mu = 0,455$ gehört.

c_{\max} ist aus Gl. $h_{\max} = \frac{Q}{2 \cdot \mu \cdot c \cdot d_m}$ zu bestimmen.

$$0,009 = \frac{0,025}{2 \cdot 0,455 \cdot c_{\max} \cdot 0,840}; \quad c_{\max} = 3,720 \text{ m/sek}.$$

Nach Gl. (13a) ist, da $f = 0,0670 \text{ qm} = \pi \cdot d_m \cdot b$:

$$3,720 = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81}{0,0670 \cdot 1000} \cdot (11 + \tilde{\gamma}_{\max})},$$

$$\tilde{\gamma}_{\max} = 31,84 \text{ kg}.$$

Bemessung der Feder so, daß bei $h_{\max} = 9 \text{ mm}$ die Federkraft von 16,60 kg auf 31,81 kg steigt.

$$C = \frac{\tilde{\gamma}_{\max} - \tilde{\gamma}_0}{h_{\max}} = \frac{31,81 - 16,60}{0,9} = 16,90 \text{ kg}.$$

4. Ausführung der Pumpen und Ventile.

Der Pumpenkörper wird nach der Bachschen Formel:

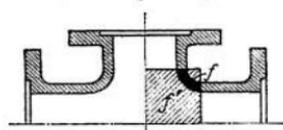


Fig. 134.

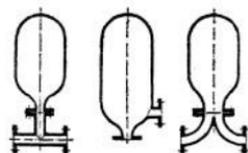


Fig. 135.

$$r_a = r_i \sqrt{\frac{h_z + 0,4 p_i}{h_z - 1,3 p_i}}$$

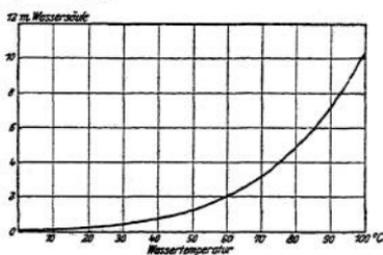


Fig. 136.

berechnet, worin p_i = Überdruck in kg/qcm , r_a = äußerer Radius, r_i = innerer Radius in cm. S. S. 482. Durchdringungsstellen nach Fig. 134 werden in der Weise bestimmt, daß der Querschnitt f durch ein Belastungsfeld von der Fläche f' ersetzt wird. $f' \cdot p = f \cdot h_z$; für Gußeisen $h_z = 150 \text{ kg/qcm}$, für Stahlguß 250

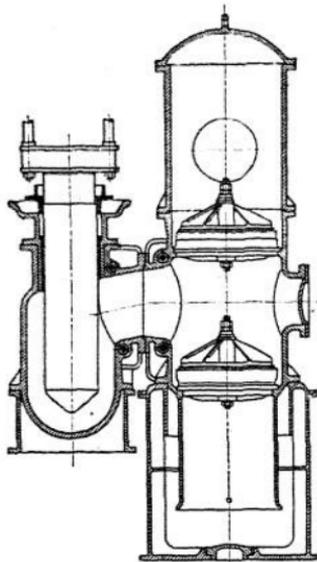


Fig. 137. (Ascherslebener Maschinenbau-A.-G.)

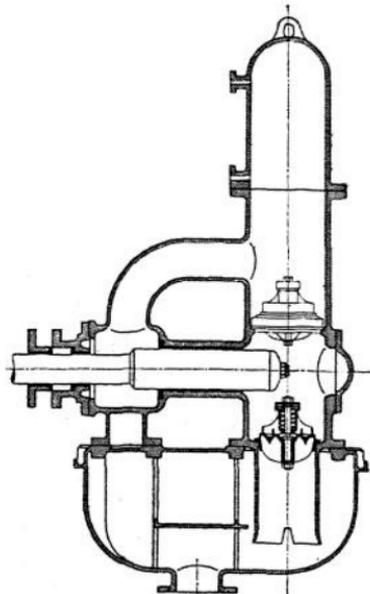


Fig. 138. (A. Borsig, Berlin-Tegel.)

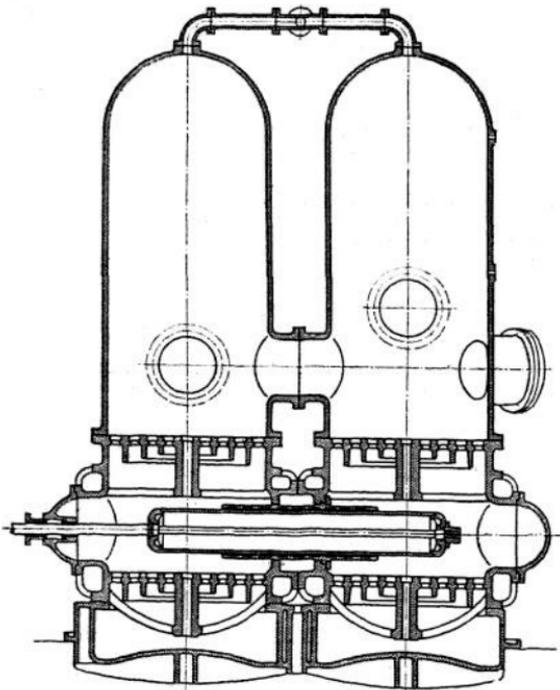


Fig. 139. (Ascherslebener Maschinenbau-A.-G.)

(bis 500) kg/qcm. Häufig Versteifung durch Spannbolzen. Anordnung der Windkessel siehe Fig. 135 a, b, c. Der Einbau nach Figur 135 a ist fast ohne Wirkung. Die Verringerung der Saughöhe bei warmem Wasser gibt Fig. 136 an. Saughöhe bei normaler Temperatur 5,5 bis 6,5 m.

Die Lufträume der Druckwindkessel werden nach Fig. 139 miteinander verbunden, um den Inhalt beider Kessel für jede Seite nutzbar zu machen. Feinteile: Manometer, Wasserstandsglas, Entlüftungshahn. Bei kleineren Pumpen wird der Luftinhalt durch Schnüffelventile, bei großen durch Luftschleusen oder kleine Kompressoren ergänzt. Baustoff: Gußeisen, Stahlguß, Flußeisen.

Die Fig. 137—140 und 149 lassen die Anordnung der Saugwindkessel erkennen, die, aus Gußeisen hergestellt und kräftig verrippt, auf dem Fundament aufliegen und den Pumpenkörper tragen. Hochziehen der Saugwindkessel verkürzt die zu beschleunigende Saugwassersäule. Feinteile: Vakuummeter, Wasserstandsglas, sowie Ventile für Absaugung der Luft.

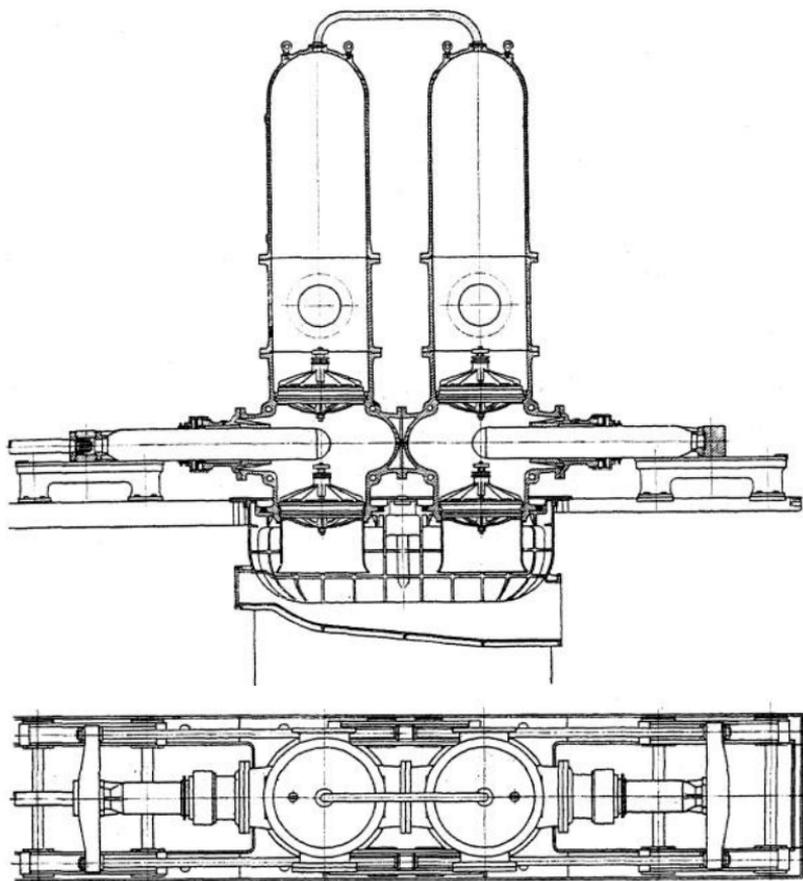


Fig. 140. (Ascherslebener Maschinenbau-A.-G.)

Sinkt der Wasserspiegel infolge Luftzufuhr durch das Saugwasser und durch Undichtheiten, so werden Öffnungen oder Auszackungen im Saugtrichter freigelegt (vgl. Fig. 137, 138), durch die der Plunger den Luftüberschuß absaugt, so daß Abreißen der Saugsäule verhindert wird.

Bei sehr hohen Drucken wird die unzugängliche Stopfbuchse nach Fig. 139 durch Antrieb der Plunger mittels Umführungsstangen nach Fig. 140 vermieden, wodurch ständige Beobachtung beider Stopfbuchsen ermöglicht wird. Lage der Stopfbuchsen in Wasserkästen verhindert Ansaugen von Luft. Der Hubraum ist durch Umlaufventile sowohl mit dem Saug- als mit dem Druckraum zu verbinden, damit bei Antrieb durch Drehstrom oder Gasmaschine ohne Belastung angefahren, außerdem beim Anlassen mit

Wasser aufgefüllt werden kann. Ein meist mit dem Saugkorb vereinigt Fußventil hält den Pumpenraum während Stillstände gefüllt. (Bei Undichtheit des Saug- und Druckventils kann sich der volle Pumpendruck im Saugwindkessel einstellen). Absperrung der Steigleitung gegen den Hubraum und die Druckwindkessel ist für Fälle der Ausbesserung vorzusehen. Entstehung von Luftsäcken ist durch Verlegung der Druckwindkessel an die höchste Stelle des Pumpenraumes zu vermeiden. Ausführungsformen von Ventilen zeigen die Fig. 141—150. Befestigung der Ventilsitzplatten am Pumpenkörper meist durch Druckbolzen nach Fig. 148. Gruppenventile nach Fig. 145 werden in die Platten eingeschraubt, nach Fig. 146 mittels Eisenkittes in die eingegossenen Aussparungen befestigt oder auch eingepreßt, wobei nachheriges Aufschleifen wegen Verziehens der Sitze nötig wird.

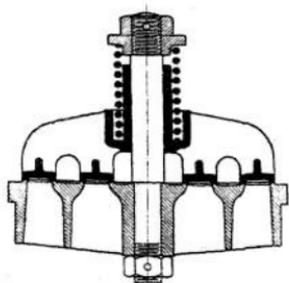


Fig. 141. (Maschinenfabrik Odessa, Oschersleben.)

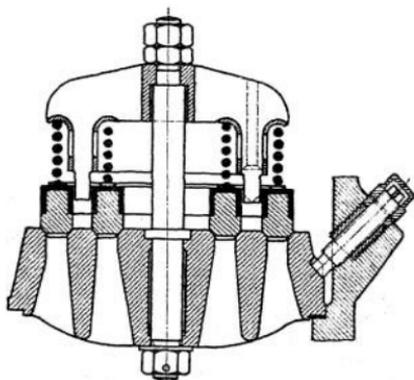


Fig. 142. (A. Borsig, Berlin-Tegel.)

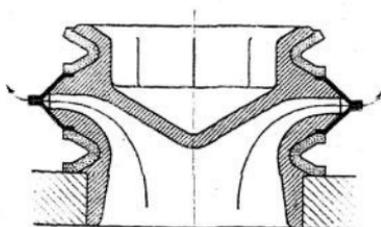


Fig. 143. (Balcke, Frankenthal.)

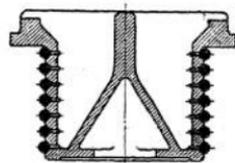


Fig. 144. (Koerting-Hannover.)

Bei Ringventilen mit vielen Ringen sollen diese unabhängig voneinander aufgeschliffen werden können; zweckmäßig ist auch unabhängige Hubbewegung der Einzelringe, von denen jeder mit besonderer Schlußfeder arbeitet, Fig. 142.

Abdichtung der Ventile metallisch oder — bei unreinem Wasser — durch Leder oder Hartgummi. Bei der Fernis-Dichtung, Fig. 147, wird der Belastungsdruck vom Metall aufgenommen, das Leder übernimmt nur die Abdichtung.

Wasserführung durch das Ventil derart, daß dieses kein kippendes Moment erfährt. Baustoff des Ventilsitzes: Bronze, Stahlguß oder Gußeisen. Bei Ausführung in Gußeisen wird häufig besondere Bronze-Sitzplatte aufgeschraubt.

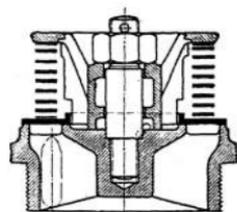


Fig. 145.
(A. Borsig, Berlin-Tegel.)

Der Ventilsitz ist hoch und mit kräftigen Rippen auszuführen, um die Durchbiegung durch die Wasserbelastung möglichst klein zu halten. Abdichtung durch Gummischnur.

Baustoff der Ventile: Bronze oder Rotguß, mit schmalen Sitzflächen, bei unreinem Wasser Hartgummi, mit Rotgußringen armiert.

Baustoff der Federn von Gruppenventilen häufig Kupfer, bei großen Ventilen Stahl oder Messing, mitunter Ausführung als Gummirohreffedern.

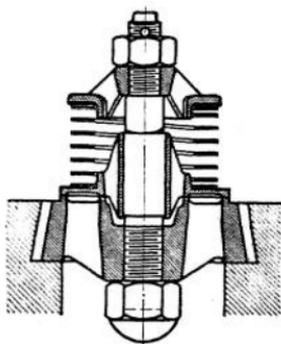


Fig. 146. (Schröder, Z. Ver. deutsch. Ing. 1910, S. 875.)

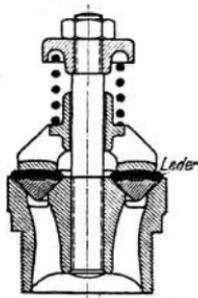


Fig. 147. (Weise & Monski, Halle.)

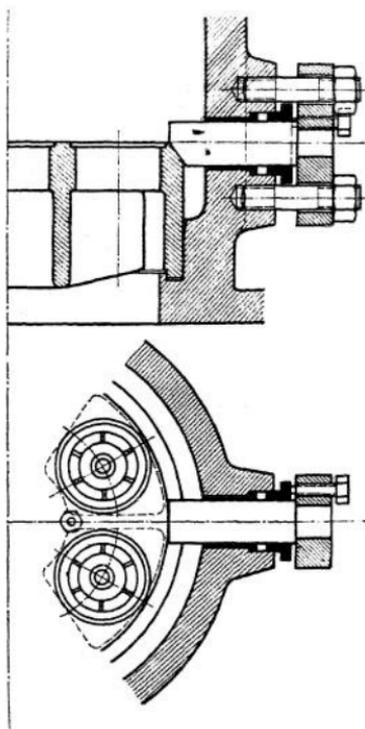


Fig. 148. (Weise & Monski, Halle.)

Gesteuerte Ventile nach Riedler werden nur noch bei Kanalisationspumpen, die mit großem Ventilhub arbeiten, ausgeführt. Das Steuerungsgestänge wird durch Einschaltung steifer Federn elastisch ausgeführt, die bei verhindertem Ventilschluß zusammengedrückt werden. Die Klappen werden vor dem Anhub entlastet, der Schluß erfolgt zwangsläufig.

Fig. 149 und 150, Ausführung von A. Borsig, Berlin-Tegel. Die aus Rotguß hergestellte Klappe und der Steuerdaumen werden zur Vermeidung übermäßiger Abnutzung mit gehärteten Druckstücken ausgeführt. Die Aufschlagfläche des gußeisernen Klappenrahmens besteht ebenfalls aus Rotguß.

Schwungradlose Dampfpumpen (bei Anordnung eines Zylinders: Simplex, bei Anordnung zweier Zylinder: Duplexpumpen genannt). Wird der Kolben durch die Kompression des Auspuffdampfes stillgesetzt, so wird ein Zurückfedern der hin und her gehenden Teile und dadurch ein harter Schlag auf die Pumpenventile verursacht.

Fig. 151 und 152 zeigen die mit Expansionssteuerung ausgerüstete Pumpe der Maschinenfabrik Odessa (in Oschersleben). Die Hubbegrenzung wird bei

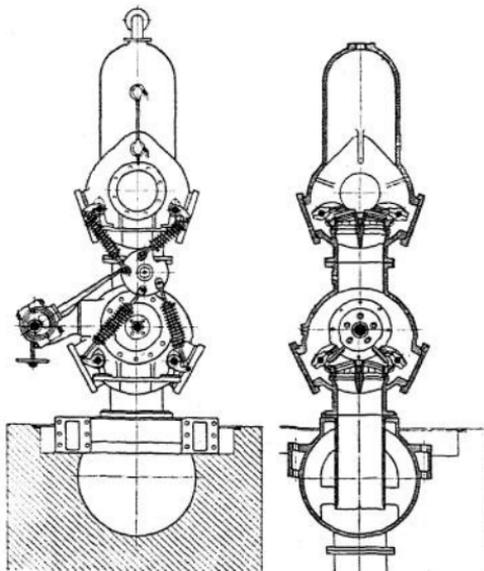


Fig. 149. (A. Borsig, Berlin-Tegel.)

dieser Bauart durch den infolge der Expansion herabgehenden Dampfdruck und außerdem dadurch erhalten, daß der Kolben in der Totlage den Dampfkanal zudeckt, wodurch der im Zylinder befindliche Dampf verdichtet wird.

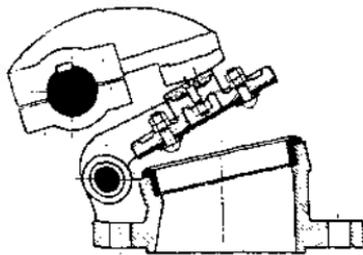


Fig. 150. (A. Borsig.)

Ein durch den Verdichtungsdruck geschlossenes, federbelastetes Rückschlagventil steht mit dem Dampfkanal in Verbindung und öffnet sich unter dem Druck des in letzteren eintretenden Dampfes, so die Kolbenumkehr bewirkend.

Der Arm auf der Kolbenstange nimmt ein im Schieberkasten geführtes Gleitstück mit, in dessen schräge Nut der Grundschieber mit einem Ansatz eingreift.

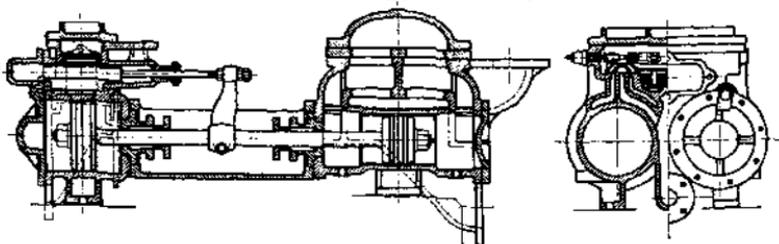


Fig. 151.

Die Längsbewegung des Gleitstückes wird dadurch in eine verkürzte Querbewegung umgewandelt. Zur Erzielung der Hubpause hat der Ansatz in der Nut etwas Spiel. Die von außen einstellbaren Expansionschieber werden durch die Grundschieber der anderen Zylinderseite bewegt, so daß jeder Kolben den Grundschieber des anderen Zylinders und damit den eigenen Expansionschieber steuert. (In Fig. 152 bedeuten: G = Grundschieber, E = Expansionschieber, F = Gleitstück.)

Vorteile: Einfache, billige Anlage; kleines Fundament, geringe Platzbeanspruchung.

Nachteil: Größerer Dampfverbrauch als bei den Schwungradpumpen.

Pumpen größerer Leistung werden durch zwei- und dreistufige Verbundmaschinen angetrieben, womit eine 16 bis 25fache Gesamterweiterung des Dampfes erreicht wird. Ein Druckausgleichwerk, das mit verdichteter Luft arbeitet, nimmt in der ersten Hälfte des Hubes die überschüssige Arbeit auf, um sie in der zweiten Hubhälfte abzugeben.

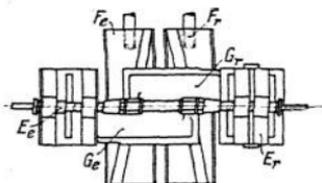


Fig. 152.

Abmessungen kleiner und mittelgroßer Handpumpen.

Liegende doppelwirkende Plungerpumpen mit Innenstopfbuchse (Weise & Monski, Halle).

Förderhöhe. m	40						60					
Plunger-Durchmesser . . mm	115	130	150	170	200	230	100	115	135	160	190	220
Hub "	150	180	220	260	260	300	150	180	220	260	300	350
Umdrehungen in der Minute "	160	150	135	135	135	125	160	140	135	130	125	125
Leistung in der Minute Liter	450	650	950	1425	1980	2800	340	465	760	1200	1900	3000
Saugrohr-Durchmesser . mm	100	125	150	200	225	250	90	100	150	175	225	275
Druckrohr-Durchmesser . "	90	100	125	175	200	225	80	90	125	150	200	250

Förderhöhe. m	100						140					
Plunger-Durchmesser . . mm	85	100	130	160	190	220	65	85	105	130	160	170
Hub "	150	220	300	300	350	350	150	220	260	300	300	350
Umdrehungen in der Minute "	170	150	130	130	125	125	170	150	135	125	120	120
Leistung in der Minute Liter	250	440	940	1400	2200	3000	140	310	530	880	1300	1700
Saugrohr-Durchmesser . mm	80	100	175	200	225	300	70	90	125	150	200	200
Druckrohr-Durchmesser . "	70	90	150	175	175	250	60	80	100	125	175	175

Liegende Differentialpumpe mit Innenstopfbuchse für 20 Atm. (Weise & Monski, Halle).

Plunger-Durchmesser . . . mm	56	62	76	90	100	120	130	142	156	176	198
Hub "	40	44	54	64	70	85	92	100	110	124	140
Umdrehungen in der Minute "	90	120	150	180	220	220	260	300	300	300	300
Leistung in der Minute . . l	200	180	160	150	140	135	130	125	125	125	120
Saugrohr-Durchmesser . . . mm	40	60	100	160	220	310	420	550	680	830	1000
Druckrohr-Durchmesser . . . "	40	50	60	70	80	100	100	125	150	150	175
	30	40	50	60	70	80	80	100	125	125	125

Die folgende Zahlentafel gibt die mit 1 kg Kohle geleisteten kg/m bei verschiedenen Antrieben nach Baurat Rud. Schröder-Hamburg¹⁾ wieder.

¹⁾ Journal für Gasbeleuchtung 1911 (Oldenburg, München).

Erbauer	Art des Antriebes und des Brennstoffes	Pumpe			Leistung cbm/st Förder- höhe	1 kg Brenn- stoff leistet	Bemerkungen
		Durchm.	Hub	n			
Gasmo- toren- fabrik Deutz	Gasmaschine 500 Durchm. 610 Hub, $n = 180$ Braunkohlenbrikettgas	180	425	76	90 cbm 166,5 m	335 000	Heizwert 5000 WE
Körting, Borsig	Gasmaschine 515 Durchm. 775 Hub, $n = 140$ Kokskraftgas	422	700	55	600 cbm 60 m	538 000	Heizwert 6710 WE
Güldner MAN	Gasmaschine 415 Durchm. 610 Hub, $n = 170$ Kraftgas	169	500	75	182 cbm 82 m	362 000 mit Braunkohle, 628 000 mit Anthrazit	Heizwert 5200 bzw. 7850 WE
Deutz	Dieselmotor 420 Durchm. 620 Hub, $n = 160$	145 205	516	75	73,6 cbm 226 m	1 201 600	Rohöl 10 000 WE
MAN Sächs. Masch.	40 PS-Dieselmotor	228	300	160	243 cbm 35 m	1 080 000	Rohöl 10 000 WE
Aschers- leben	Dreifachexpansions- maschine 600/925/1450 Durchm. 1500 Hub Dampf von 14,6 Atm. und 310°		1500	45	2020 cbm 88,5 m	413 590	Heizwert 7260 WE
Thyssen & Co.	Stehende Dreifachexpansionsmaschine 480/800/1200 Durchm. 1000 Hub Dampf von 12 Atm. und 350°	339	1000	45	1343 cbm 63,5 m	502 100	Heizwert 7516 WE

IV. Die Kolbenkompressoren.

1. Ermittlung der Abmessungen und des Kraftbedarfs.¹⁾

Bezeichnen: O die Kolbenfläche abzüglich Kolbenstangenquerschnitt in qm,

s den Hub in m,

D und d die Durchmesser von Kolben und Stange,

Q die verlangte Luftmenge in cbm/sek, bezogen auf 0° und 760 mm Barometer,

λ den Lieferungsgrad, d. h. das Verhältnis der angesaugten Luftmenge zu dem vom Kolben durchlaufenen Raum. $i = 1$ bei

einfachwirkenden, $i = 2$ bei doppeltwirkenden Zylindern, so wird für den Hubraum des Einzylinderkompressors oder des Niederdruckzylinders von Verbundkompressoren:

$$O \cdot s = \frac{60 \cdot Q}{i \cdot \lambda \cdot n},$$

worin

$$\left. \begin{aligned} O &= \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) \text{ bei beiderseitig} \\ O &= \frac{\pi}{4} \left(D^2 - \frac{d^2}{2} \right) \text{ bei einseitig} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{durchgeführter} \\ \text{Kolbenstange.} \end{array}$$

¹⁾ S. auch S. 363.

Der Arbeitsbedarf für die Verdichtung ist am kleinsten bei isothermischer Zustandsänderung. Der zum Vergleich verschiedener Kompressoren am meisten geeignete „isothermische Wirkungsgrad“ gibt das Verhältnis der isothermischen Verdichtungsarbeit zur zugeführten Arbeitsmenge an.

Der mechanische Wirkungsgrad gibt als Maß für die Reibungsverluste das Verhältnis der im Kompressorzylinder indizierten Leistung zu der an die Kompressorwelle abgegebenen Leistung. Bei Dampfkompressoren gibt die in den beiden Zylindern indizierte Arbeit den mechanischen Wirkungsgrad der ganzen Maschinenanlage an.

Der Lieferungsgrad λ berücksichtigt die Verluste durch Undichtheit der Kolben, der Druckventile, der Zwischenkühler usw., sowie die Rückexpansion aus dem schädlichen Raum. Durch letztere wird der räumliche Wirkungsgrad λ_0 bedingt, so daß $\lambda = \alpha \cdot \lambda_0$, worin α die vorher genannten Verluste berücksichtigt. In Fig. 153 ist $\lambda_0 = \frac{S_1}{S}$. Verläuft die Expansion nach einer Polytrope, so wird

$$\lambda_0 = 1 - \left(\frac{S_0}{S} \right) \cdot \left[\frac{v_4}{v_3} - 1 \right],$$

worin v_3 das spezifische Volumen zu Beginn, v_4 das am Ende der Expansion bedeutet. Ist der Saugwiderstand durch lange Rohrleitungen, Einschaltung von Filtern usw.

groß, so erfährt $\lambda_0 = \frac{S_1}{S}$ eine weitere Verkleinerung durch Verringerung der Strecke s_1 . Bei langen Saugleitungen kann die während des ersten Hubteiles erfolgte Beschleunigung der Luftmengen durch Ausschwingen der Luftsäule während der Kolbenverzögerung im zweiten Hubteile zu einer Presungerhöhung im Zylinder führen, so daß $\lambda_0 > 1$ wird. Vgl. S. 1055.

$\alpha = 0,9$ für Kompressoren und Stahlwerksgebläse,

$\lambda = 0,9$ bis $0,95$ für Hochofengebläse.

Mittel zur Erhöhung des räumlichen Wirkungsgrades: Kleinhaltung der schädlichen Räume, Stufenkompression, Druckausgleich.

Die Luftverdichtung kann bei sehr reichlicher Kühlung isothermisch erfolgen, im anderen Fall ist sie adiabatisch, meist polytropisch mit dem Exponenten 1,2 bis 1,3.

Das theoretische Diagramm setzt sich aus der absoluten Compressionsarbeit L_1 , der absoluten Saugarbeit $L_2 = p_1 v_1$ und der absoluten Verschiebungsarbeit $L_3 = p_2 v_2$ zusammen.

Isothermische Verdichtung:

Gesamtarbeit

$$L = L_1 - L_2 + L_3 = p_1 v_1 \cdot 2,303 \log \frac{p_2}{p_1} \quad (\text{mkg/sek}).$$

Abzuleitende Wärmemenge: $Q = A \cdot L$.

Polytropische Verdichtung:

$$L = \frac{n}{n-1} \cdot p_1 \cdot v_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right] \quad (\text{mkg/sek}).$$

Endtemperatur:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

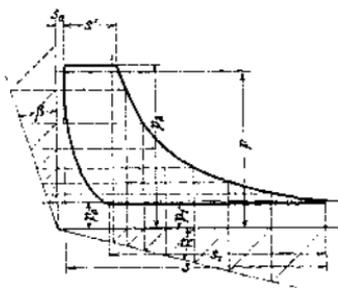


Fig. 153.

Adiabatische Verdichtung ergibt sich, wenn in die vorstehenden Ausdrücke statt n der Exponent $k = 1,41$ gesetzt wird.

Meist wird der Arbeitsbedarf durch Aufzeichnung des Druckdiagramms festgestellt. Hierbei wird die Saugspannung p_1 um 2 bis 3 v. H. niedriger als der atmosphärische Druck p_0 , die Druckspannung p_2 um 3 bis 5 v. H. höher als die Spannung p im Druckraum angenommen. (Polytrope s. S. 132.)

Die Strecken s' und s_1 folgen aus den Beziehungen:

$$\frac{s'}{s} = (1 + m) \cdot \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{n}} - m, \quad \frac{s_1}{s} = 1 + m - m \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}},$$

worin m das Verhältnis des schädlichen Raumes zum Hubraum $O \cdot s$ angibt. Die Rückexpansionslinie des schädlichen Raumes kann als Mariottesche Linie gezeichnet werden, woraus sich s_1 ohne Rechnung ergibt.

Exponent n	1,10	1,15	1,2	1,25	1,3	1,35	1,41
tg α	0,2	0,2	0,2	0,25	0,25	0,25	0,33
tg β'	0,222	0,234	0,245	0,322	0,337	0,352	0,497

Durch Rechnung findet sich der mittlere Druck:

$$p_i = \frac{n - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{n-1}{n}}}{n-1} \cdot \frac{s'}{s} \cdot p_2 - \frac{s_1}{s} \cdot p_1.$$

Bei dem Entwurf der Verbundkompressoren ist in gleicher Weise vorzugehen, wie auf S. 894 für die Verbunddampfmaschinen angegeben. Unter Annahme

eines unendlich großen Aufnehmers wird das nach vorstehenden Angaben entworfene Diagramm in zwei oder mehrere Teile zerlegt, wobei die aus dem vorhergehenden Zylinder austretende Luft durch Kühlung im Aufnehmer auf die Anfangstemperatur herabgekühlt werden kann. Die Verdichtung geht dann im folgenden Zylinder innerhalb derselben Temperaturgrenzen vor sich. Fig. 154 zeigt an einem Verbunddiagramm diese Wirkung. Verdichtung im Niederdruckzylinder nach der Linie AB , durch die Kühlung wird der auf der Isotherme liegende Punkt C Anfangspunkt der Verdichtung CD im Hochdruckzylinder.

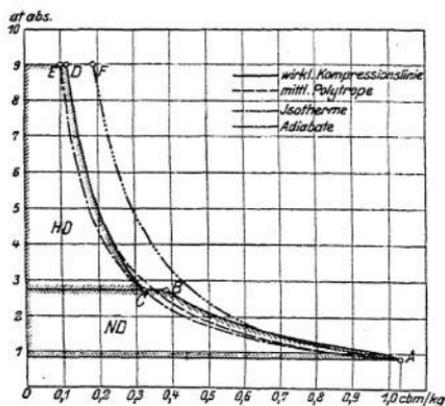


Fig. 154.

Überschläglich findet sich unter Annahme isothermischer Kompression: Wird z. B. die Luft von 1 Atm. absolut auf 7 Atm. absolut zweistufig verdichtet, so wird in der ersten Stufe von 1 auf $\sqrt{7} = 2,64$ Atm. absolut verdichtet, in der zweiten von $\sqrt{7}$ auf 7. Wirkungsgrad derselbe, als ob nur von 1 auf $\sqrt{7}$ verdichtet würde, da die Rückexpansion aus dem schädlichen Raum verringert wird.

Genauere Ermittlung der Verbunddiagramme erfordert Aufzeichnung der Volumenkurven in der Weise nach Fig. 80, S. 896, wodurch auch der Einfluß der endlichen Aufnehmergröße klargelegt wird.

2. Ventile.

Mittlere Geschwindigkeit in den freien Durchgangsquerschnitten f der Ventile:

$u_m = 13$ bis 19 m/sek für die Saugventile,

$u_m = 16$ bis 23 (bis 25) m/sek für die Druckventile ($f \cdot u_m = O \cdot c$).

Ist $h =$ Ventilhub, $l =$ Ventilumfang, $u_s =$ Spaltgeschwindigkeit, so folgt:

$$u_s \cdot l \cdot h = O \cdot c.$$

$u_s = 22$ m/sek für die Saugventile,

$u_s = 25$ m/sek für die Druckventile.

Masse und Hub des Ventils sind möglichst klein zu wählen, um rechtzeitigen Ventilschluß zu erhalten. Hub $h = 10$ bis 13 mm für die Saugventile, 3 bis 6 mm für die Druckventile.

Luftdruck auf ein Ventil: $P = (p - p_1) \cdot f$,
 $f =$ Angriffsfläche in qcm. Es ist:

$$p - p_1 = \frac{u_{\max}^2 \gamma}{2g \varphi^2}; \quad \gamma = \frac{p}{29,4(273 + t)}$$

$\gamma =$ spezifisches Luftgewicht bei dem Drucke p und der Temperatur t ,

$\varphi = 0,96 =$ Geschwindigkeitskoeffizient.

Federkraft $F = f(p - p_1) - G$, $G =$ Ventiltgewicht.

Ventilausführungen siehe Fig. 155—165.

Fig. 155. Neue Hoerbiger-Ventile, Bauart Nürnberg (M. A. N.), namentlich bei Großgebläsen in Gebrauch. Eine besondere Polsterplatte dient als Puffer und vermindert das Geräusch des Ventilspiels. Zwei im Fänger eingesetzte Spiralfedern dienen als weitere Polstermittel.

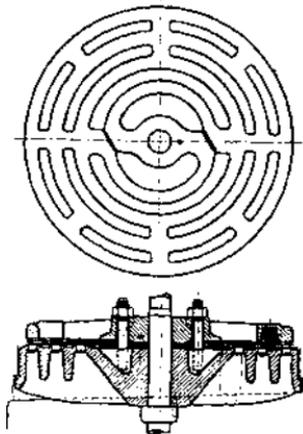


Fig. 155

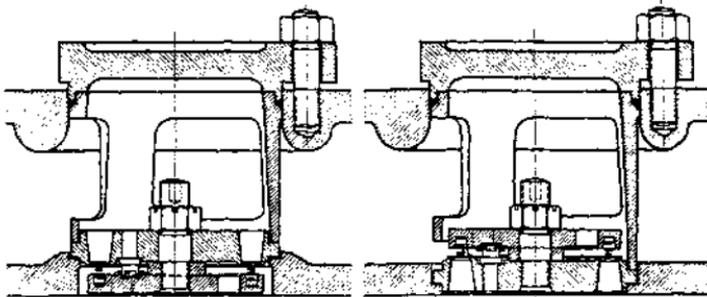


Fig. 156—157.

Fig. 156—158. Ventile von A. Borsig, Berlin-Tegel. Das aus einer Blechplatte von 0,5 bis 2 mm Stärke bestehende Ventil wird durch zwei Arme reibungslos geführt. Fig. 159 zeigt den Einbau in einen Zylinder.

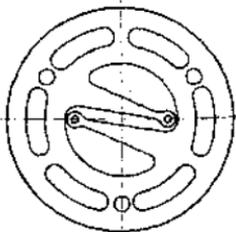


Fig. 158.

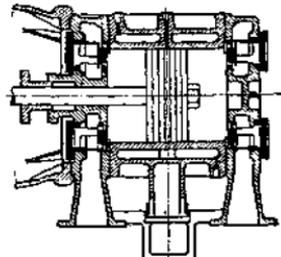


Fig. 159.

Fig. 160—161. Gutermuth-Klappe. Ein Bronze- oder Stahlblech von 1 bis 1,5 mm Stärke wird wie eine Spiralfeder auf einen Dorn aufgewickelt; in einen Längsschlitz des letzteren greift das eine Blechende ein. Damit die Flüssigkeit ohne wesentlichen Richtungswechsel das Ventil durchströmen kann, enden die Kanäle unter einem spitzen Winkel gegen die Sitzfläche. Die Klappen haben sich bei Drucken bis zu 80 Atm. bewährt.

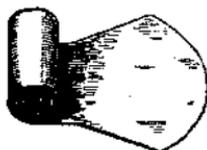


Fig. 160.

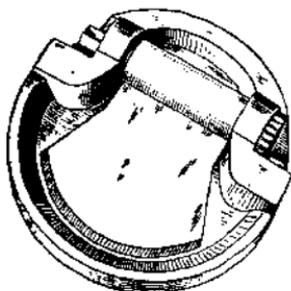
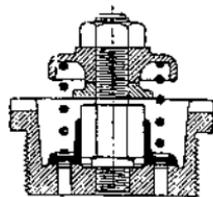
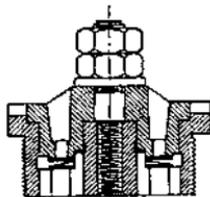


Fig. 161.

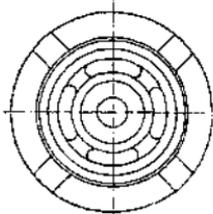
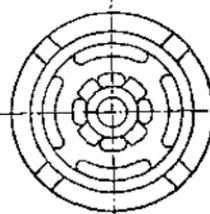


Fig. 162.

Fig. 163.

Fig. 162—163. Bauart Weise & Monski. Siehe Kompressor, Fig. 174. Das Saugventil, Fig. 162, ist als Blechplattenventil ausgebildet, das Druckventil, Fig. 163, wird als Tellerventil eingeführt. Die Ventile werden in die Kompressordeckel eingeschraubt.

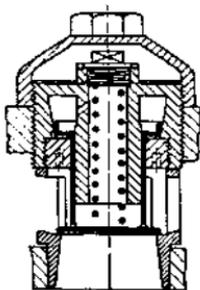


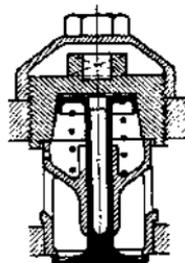
Fig. 164. Bauart Breitfeld, Danek & Co., Prag. Die aus Stahl hergestellten Ventile liegen auf zweiteiligen Bronzesitzen: Ausrüstung mit Luftpuffern.

3. Schiebersteuerungen.

Der Schieber steuert den Beginn und den Schluß des Saugens, sowie den Schluß des Ausschubes. Der Beginn des Ausschubes wird hingegen von einem den Schieberaum vom Druckrohr trennenden, selbsttätigen Ventil abhängig gemacht. Ausführungsbeispiel bei Anwendung auf Luftpumpen siehe Fig. 18, S. 1047.



Fig. 164.



In Fig. 166 ist als weiteres Beispiel der Kompressor von Koester dargestellt. Der Kolben ist auf dem Linksgange. Die Eröffnung des rechten Kanals für das Ansaugen begann im rechten Totpunkt. Die auf der linken Seite verdichtete Luft strömt nach Erreichen des erforderlichen Druckes durch den

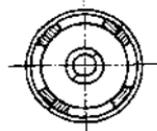


Fig. 165.

Kanal für das Ansaugen begann im rechten Totpunkt. Die auf der linken Seite verdichtete Luft strömt nach Erreichen des erforderlichen Druckes durch den

Kanal C und das Rückschlagventil V in den Druckraum. In der linken Totlage des Kolbens wird der Kanal vom Schieber eben geschlossen, das Rückschlagventil geht auf seinen Sitz zurück, und die Wiedereröffnung des Kanals durch den Schieber beginnt erst nach der Rückexpansion aus dem schädlichen Raum.

Fig. 167 zeigt das Müllersche Diagramm des Schiebers. Das Exzenter eilt der Kurbel um den Winkel δ nach. Der der Expansion aus dem schädlichen Raum entsprechende Kurbelwinkel ist so bemessen, daß vor Beginn des Ansaugens eine kleine Luftleere entsteht, welche die zuströmende Luftmenge stärker beschleunigt. Nach Beginn des Druckhubes bleibt die Verbindung mit dem Saugraum noch wäh-

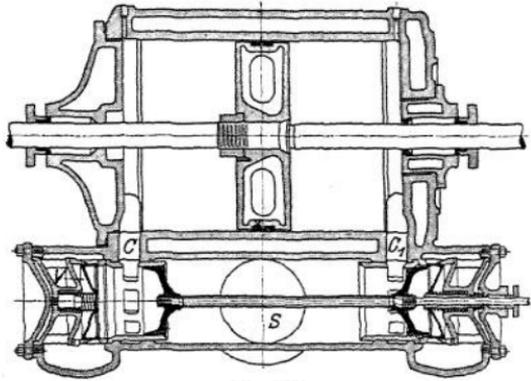


Fig. 166.

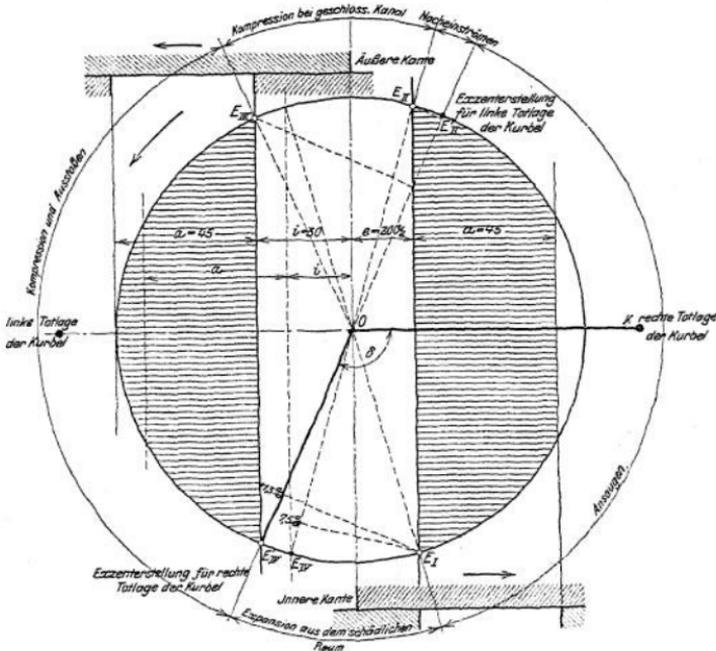


Fig. 167. (Nach Ostertag.)

rend des Winkels $E_{11}OE'_{11}$ bestehen, damit die ausschwingende Saugluftsäule den Zylinder unter höherem Druck auffüllt. Nach Abdeckung der Kanäle wirkt der Raum über den Ventilen als Luftpuffer.

Fig. 168 stellt die Verdrängerwirkung des Schiebers dar. Nach Abschluß des Kanals während der Kompression bewegt sich der Schieber in derselben Richtung noch weiter und fördert die zwischen ihm und Rückschlaglage befindliche Luft durch letzteres in den Druckraum, bis er in die Totlage E_0 gelangt ist. Bei der Bewegungsumkehr dehnt sich die Restluft aus, bis die Verbindung mit dem Zylinder hergestellt wird und der Raum mit verdichteter Luft aufgefüllt wird (0 III Rückexpansion, III V Kompression, V IV Verschiebung, IV 0 Verschiebung aus dem Schiebergehäuse allein). Bei Feststellung des Arbeitsbedarfes ist die Diagrammfläche, Fig. 168, die etwa 2,5 v. H. des Arbeitsdiagramms ausmacht, zur Fläche des letzteren zu addieren.

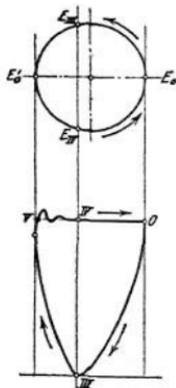


Fig. 168.

Fig. 169 zeigt den Kolbenschieber der M. A. N. Das Ventil sitzt am Schieber und macht dessen Bewegung mit, so daß die Verdrängerarbeit entfällt. Zur Verringerung des Ventileröffnungsdruckes sind die Luftpuffer p der Ventile durch Kanäle mit den Druckkanälen verbunden. (Weitere Steuerung siehe Ostertag, Kompressoren.)

4. Regelung.

Wird bei einzeln arbeitenden Kompressoren die Füllung von Hand eingestellt, so findet bei nur wenig schwankendem Dampfdruck eine „Selbstregelung“ statt, indem die Maschine bei steigendem Luftbedarf schneller läuft. Der Luftdruck nimmt hierbei infolge der vermehrten Drosselung des Frischdampfes in den Einlaßorganen und des vermehrten Luftwiderstandes in den Rohrleitungen etwas ab. Umgekehrt verhält sich die Einzelanlage bei Abnahme des Luftbedarfes. Bei stärkeren Schwankungen des Dampfdruckes regelt der Maschinist meist durch Einstellung einer größeren Füllung und Abdrosselung der überflüssigen Diagrammfläche. In diesen Fällen wirkt der Regler lediglich als Sicherheitsvorrichtung bei Rohrbruch usw.

Wird die Füllung durch einen stark statischen Leistungsregler eingestellt, so wird z. B. beim Sinken des Dampfdruckes der Regulator eine tiefere Lage einnehmen und infolge seines großen Ungleichförmigkeitsgrades eine niedrigere

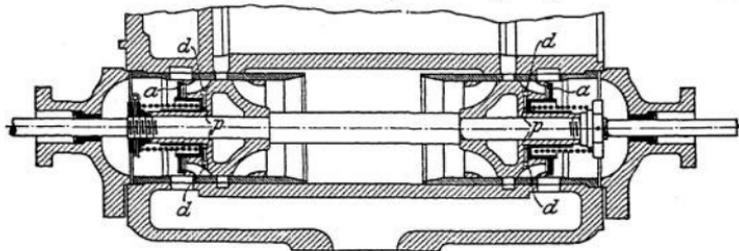


Fig. 169.

Umlaufzahl einstellen, so daß die Druckluftmenge abnimmt, und umgekehrt. Leistungsregler sollen deshalb bei einzeln arbeitenden Kompressoren nicht angebracht werden.

Bei parallel arbeitenden Kompressoren mit Einstellung der Füllung von Hand können Schwankungen von Dampfdruck und Luftbedarf die Arbeitsverteilung auf die Einzelmaschinen ungünstig beeinflussen, so daß ein Kompressor größere Leistung als der andere aufweist. Hier ist die Anwendung von Leistungsreglern angebracht.

a) **Regelung der Leistung durch Änderung der Umlaufzahl.** Bei Dampfmaschinen ist außer der Einstellung von Hand oder durch Leistungsregler noch

die Beeinflussung der Füllung durch den Luftdruck gebräuchlich. Fig. 170, Vorrichtung von G. A. Schütz. Der Luftdruck wirkt auf den Boden B des beweglichen Zylinders Z , der durch Gestänge S , Lenker L und den mit Rolle arbeitenden Winkelhebel R den Ventilhebel H bei zu hohem Druck so verstellt, daß die Füllung und damit die Umlaufzahl kleiner werden. Durch Schraube s wird Unterschreitung der Leerlaufumlaufzahl vermieden. Innerhalb der Unempfindlichkeitsgrenzen der Vorrichtung arbeitet der Kompressor mit Selbstregelung. Der vom Flachregler einstellbare Daumen D verhindert Überschreitung der Höchstumlaufzahl.

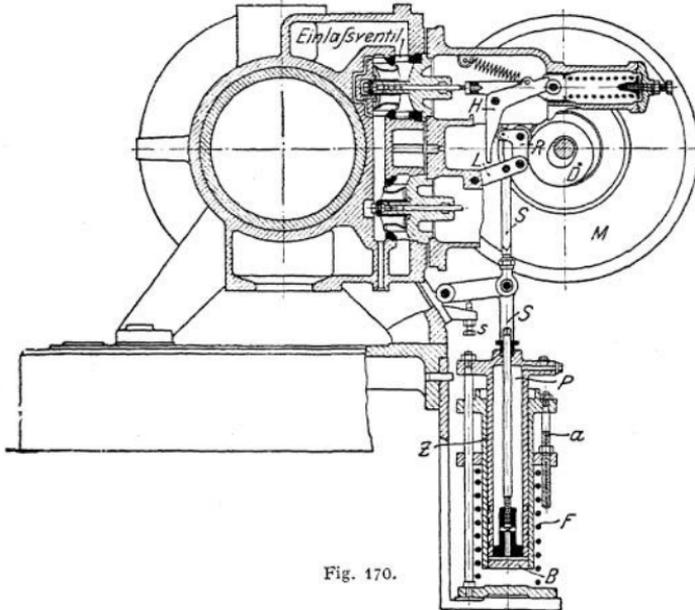


Fig. 170.

b) **Regelung der Liefermenge bei gleichbleibender Umlaufzahl.** Diese Regelung wird namentlich bei Antrieb durch Drehstrommotoren und bei Gasgebläsen für Hochöfen nötig. Drehstrommotoren können ohne starke Verluste keine Änderung der Umlaufzahl vertragen, Hochofengebläse müssen bei ungedänderter Leistung der Gasmaschine häufig mit höherem Druck blasen.

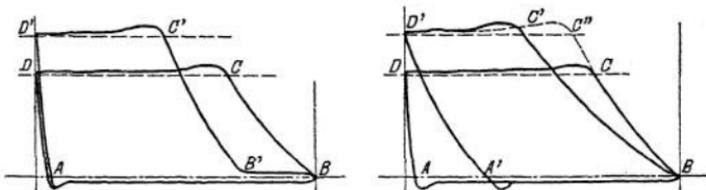


Fig. 171—172.

Die Diagramme nach Fig. 171—172 zeigen die bei Gasgebläsen meist zu findende Arbeitsweise. In Fig. 171 bleibt das Saugventil noch nach Beginn des Druckhubes geöffnet, so daß die Verdichtung nicht in B , sondern erst in B' beginnt. Die Diagramme sind ungefähr flächengleich. Eine Steuerung

grundsätzlich gleicher Art führen Pokorny & Wittekind auch für Verbundkompressoren aus.

Fig. 172 zeigt Vergrößerung des schädlichen Raumes durch Zuschaltung von Deckelräumen. Die Rückexpansionslinie aus dem größeren schädlichen Raum verringert die Liefermenge.

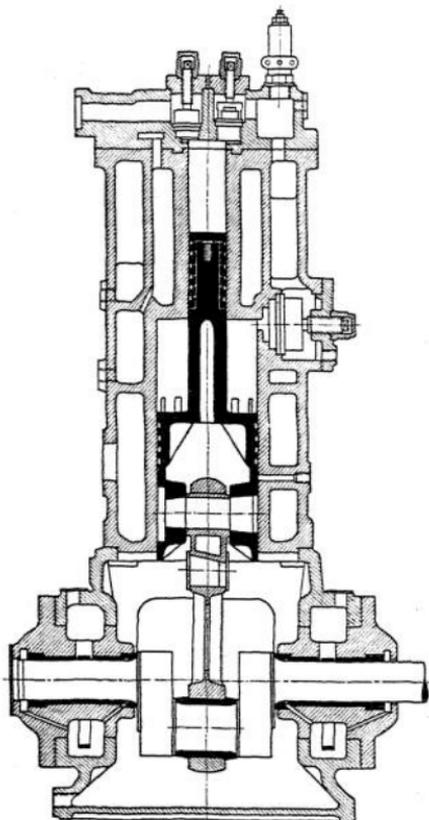


Fig. 173.

Zwischenkühlung durch ein vom Wasser umspültes Röhrenbündel.

Bei Antrieb großer Kompressoren durch Dampfmaschinen werden nach dem Vorbilde von Koester die Luftzylinder mit der Geradföhrung verschraubt, während die Dampfzylinder hinter den Luftzylindern angeordnet sind. Verbindung der Zylinder untereinander durch Laterne oder Zugstangen. Vorteile: Die durch die Wärmedehnung entstehenden Bewegungen werden nicht in senkrechter und wagerechter Richtung gehemmt und Zwängungen in den Kolbenstangenführungen werden vermieden. Bei kleineren Leistungen lassen sich durch diese Anordnung die gleichen Modelle für Riemen- wie für Dampftrieb verwenden. Dampfverbrauch für Kompression von 1 cbm Luft auf 6 Atm.: 0,45 bis 0,5 kg bei Überhitzung und Verbundwirkung.

Verbindung der Gasmaschinen mit den Gebläsen in gleicher Weise wie bei den Dampfmaschinen zentrisch ohne gemeinsame Grundplatte, wodurch Aufstellung erleichtert und Biegemomente vermieden werden. Bei Dampftrieb von Gebläsen mitunter stehende Anordnung, wodurch Raumbeanspruchung

Regelung durch Aussetzer. Bei Erreichen des erforderlichen Druckes werden die Saugventile durch kleine Kolben angehoben, oder die Saugleitung wird abgesperrt.

5. Ausführung und Anordnung der Kompressoren und Gebläse.

Antrieb durch Riemen, Dampfmaschine, Elektromotor, Gasmaschine. Einstufige Ausführung bis etwa 5 Atm., für höhere Drucke zwei- oder mehrstufige Bauart. Bei kleinen Saugleistungen Ausbildung des Verbundkompressors als Einzylindermaschine, dessen Stufenkolben als Kreuzkopf dient. Fig. 173, Bauart Balcke-Frankenthal. Die Zwischenkühlung erfolgt einerseits durch das Mantelkühlwasser, andererseits durch die Außenluft, indem ein zweiter Ringraum um den Zylinder gelegt ist, den die Luft beim Übergang von Hochdruck- zur Niederdruckstufe durchströmt. In der ersten Stufe wird durch Schlitze angesaugt. Umlaufzahl bis $n = 400$ in der Minute.

Fig. 174, Kompressor Weise & Monski. Beide Zylinder bilden mit den Kreuzkopfföhrungen ein Gußstück, ebenso die beiden Zylinderdeckel mit den Ventilkasten.

kleiner und besseres Arbeiten der Kolben infolge Wegfalls der Kolbenstangendurchbiegung erreicht wird. Nachteile: Erschwerte Zugänglichkeit und Übersicht. Starke Lagerbelastung infolge des Zusammenfallens der Richtungen von Schwungradgewicht und Kolbenkraft.

Die zwei verschiedenen Antriebsarten — durch Kurbelzapfen oder durch hin und her gehende Kolbenstange — sind von erheblichem Einfluß auf die Triebwerkkräfte und die Ruhe des Ganges. Beim Kurbelzapfenantrieb durch

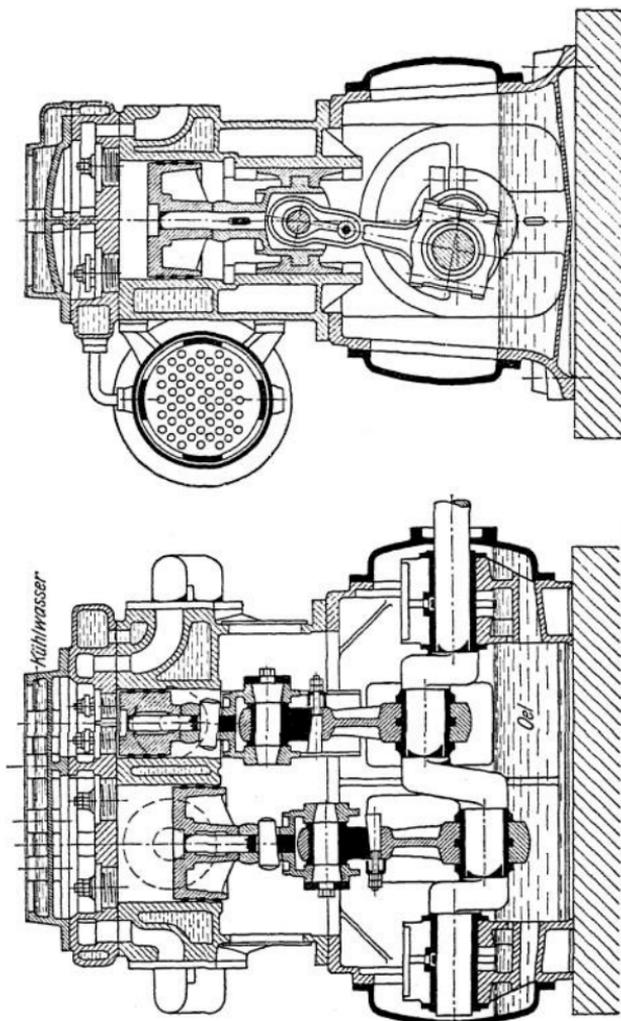


Fig. 17A.

Elektromotoren, Riemen usw. liegen die Druckwechsel in der Nähe des Totpunktes, und die Kurve der Massenkräfte schneidet im Kurbelwegdiagramm die Kurve der Kolbenstangen-Kräftekurve unter verhältnismäßig großem Winkel, so daß leicht Lagerstöße auftreten. Hingegen steht bei unmittelbarem Antrieb durch Dampf- oder Gasmaschine im Totpunkt die Summe von Luft- und Dampf-

druck bzw. Gasdruck zur Verfügung. Der Druckwechsel verläuft sanft, die Kurven von Massenkraft und Antriebskraft schneiden einander in einem um so spitzeren Winkel, je höher die Umlaufzahl ist. Das Triebwerk ist für die Summe von Luft- und Dampfdruck zu berechnen, wird aber in Betrieb um die Massenkraft weniger beansprucht (vgl. Koesler, Z. Ver. deutsch. Ing. 1904, S. 109). Über den elektrischen Antrieb von Kompressoren siehe Z. Ver. deutsch. Ing. 1909, S. 561, Havlicek.

In den folgenden Zahlentafeln sind einige der wichtigsten Abmessungen von Kompressoren und Gebläsen zusammengestellt.

1. Kompressoren (A. Borsig, Berlin-Tegel).

Kompressoren mit Riemenantrieb						Kompressoren mit Dampftrieb								
Einstufige Doppelwirkung				Verbundwirkung mit Differentialkolben				Dampfmaschine		Einstufige Doppelwirkung		Differential-Verbundwirkung		
Hub	Durchm.		Ansaugleistung	Hub	Durchm.		Ansaugleistung	Zyl.-Durchm.	Hub	Zyl.-Durchm.	Ansaugleistung	Zyl.-Durchm.	Ansaugleistung	
mm	mm	„	cbm/min	Hub	Durchm.	„	cbm/min		„					
200	200	220	2,60	100	270/215	300	1,58	225	250	200	250	3,95	350/280	4,4
200	270	220	4,85	100	270/215	400	2,1	225	250	200	290	5,66	270/240	2,46
200	300	220	6,0	130	300/240	280	2,4	275	350	190	300	7,50	450/360	9,75
200	350	220	8,20	130	300/240	350	3,0	275	350	190	340	10,8	325/290	4,75
250	275	200	4,75	150	350/280	250	3,3	350	400	170	350	10,5	500/400	12,5
250	350	200	8,45	150	350/280	320	4,25	330	400	170	400	15,0	400/355	7,4
250	440	200	14,0	180	400/325	230	4,80	400	450	165	410	15,7	550/440	16,2
350	300	190	7,5	180	400/325	300	6,25	400	450	165	470	22,5	450/400	10,0
350	350	190	11,2	200	450/360	220	6,45							
350	410	190	16,2	200	450/360	275	8,1							
400	350	180	11,1	250	500/400	220	9,1							
400	410	180	16,7	250	500/400	260	10,8							
400	500	180	26,0	250	550/440	200	10,9							
500	410	160	16,9	250	550/440	240	13,0							
500	500	160	27,6											
500	575	160	38,2											
600	500	130	24,5											
600	575	130	35,6											
600	650	130	47,5											

Die Kompressoren werden unmittelbar von der durchgehenden Kolbenstange angetrieben.

Kraftverbrauch in PSe pro 1 cbm/min Ansaugleistung.

Enddruck		3	5	6	7	8	10	12	14	16	18	20	22	25	
Einstufiger Kompressor	Dampfkomp.	4,24	5,93	6,64	7,34										
Zweistufiger Kompressor mit Zwischenkühlung	Dampfkomp.		5,35	5,82	6,2	6,63	7,18	7,72	8,26	8,7	9,14	9,52	9,9	10,4	
Zweistufiger Kompressor ohne Zwischenkühlung	Dampfkomp.		5,73	6,36	6,96	7,61									
		6,0 6,53 6,96 7,4						bei Hüb. von 100 bis 150 mm							
		5,85 6,37 6,78 7,25						180		200					
		5,79 6,3 6,71 7,18						250		250					
		6,45 7,05 7,8 8,55						100		200					
Derselbe ohne Zwischenkühlung		6,3 6,97 7,62 8,34						180		200					
		6,2 6,88 7,53 8,24						230		250					

2. Gebläse mit Antrieb durch Körtling-Zweitaktmaschinen (Siegener M. A. G.).

Gebläsezylinder	1800	1900	1200	1750	2000	2250	2550
Hub	1100	1100	1300	1400	1400	1400	1400
Gaszylinder	635	800	790	800	870	870	1100
Angesaugte Windmenge cbm/min	500	500	480	1000	700	600—850	1000
Winddruck	0,36—0,7	0,6—0,85	2,5	0,75—1,5	0,7—1,5	0,4—1,0	0,6—1,0

Die rotierenden Kraft- und Arbeitsmaschinen.

Bearbeitet von H. Dubbel.

1. Aktions- und Reaktionswirkung. In Fig. 1 ströme eine Flüssigkeit an einer kreisförmig gebogenen Schaufel vorbei, die sich mit der Geschwindigkeit u geradlinig fortbewegt. Die mittlere Länge eines unendlich kleinen Flüssigkeitsteilchens beträgt $r \cdot d\beta$, somit seine Masse

$d m = \frac{a \cdot b \cdot r \cdot d\beta \cdot \gamma}{g}$, worin a = Höhe, b = Breite des Strahles, γ = spez. Gewicht. Es ist w_1 = Relativgeschwindigkeit, mit der das Wasser zutritt. Sieht man von Reibungsverlusten usw. ab, so ist $w_1 = w_2$.

Die von dem Flüssigkeitsteilchen ausgeübte Zentrifugalkraft

$$d C = \frac{d m \cdot w_1^2}{r} = \frac{a \cdot b \cdot \gamma}{g} \cdot w_1^2 \cdot d\beta$$

hat in Richtung der Bewegung die Komponente:

$$d X = d C \cdot \sin \beta = \frac{a \cdot b \cdot \gamma}{g} \cdot w_1^2 \cdot \sin \beta \cdot d\beta$$

Es wird

$$X = \frac{a \cdot b \cdot \gamma \cdot w_1^2}{g} \cdot \int_{\beta_1}^{180^\circ - \beta_2} \sin \beta \cdot d\beta = \frac{q \cdot \gamma}{g} \cdot w_1 (\cos \beta_2 + \cos \beta_1),$$

wenn sekundlich durchfließende Menge $a b w_1 = q$ gesetzt wird.

Die auf die Schaufel übertragene Arbeit beträgt:

$$A = X \cdot u = \frac{q \cdot \gamma}{g} \cdot (w_1 \cos \beta_2 + w_2 \cos \beta_2) \cdot u, \quad \text{da} \quad w_1 = w_2.$$

Die Aktionsarbeit nimmt mit der Größe des umspannten Bogens zu.

In Fig. 2 ist ein ebenfalls mit der Geschwindigkeit u geradlinig sich fortbewegendes Reaktionsgefäß dargestellt, dessen Querschnitte, senkrecht zur Relativgeschwindigkeit gemessen, nach dem Austritt hin abnehmen, so daß diese Geschwindigkeit selbst zunehmen muß. In Richtung der Bewegung wächst die Relativgeschwindigkeit von $w_1 \cdot \cos(180^\circ - \beta_1)$ auf $w_2 \cdot \cos \beta_2$, sodaß eine Horizontalkomponente der durch die Beschleunigung auftretenden Reaktion entsteht von der Größe:

$$X = \frac{q \cdot \gamma}{g} \cdot (w_2 \cdot \cos \beta_2 + w_1 \cdot \cos \beta_1).$$

Arbeitsleistung:

$$A = X u = \frac{q \cdot \gamma}{g} \cdot u (w_1 \cos \beta_1 + w_2 \cos \beta_2).$$

Es zeigt sich, daß die Arbeitsgleichungen für Aktions- und Reaktionswirkung gleich sind.

Bei der Aktionswirkung wird der Strahl nur abgelenkt, ohne in der Schaufel eine Beschleunigung zu erfahren ($w_1 \approx w_2$). Bei der Reaktionswirkung ist zur Erzeugung der Beschleunigung ein Überdruck im Schaufelraum notwendig, der demnach ganz ausgefüllt ist. In Fig. 2 wird die auch dort auftretende Aktionswirkung umso geringer, je mehr sich β_1 dem Winkel $(180^\circ - \beta_2)$ nähert, d. h. je kleiner die Ablenkung ist.

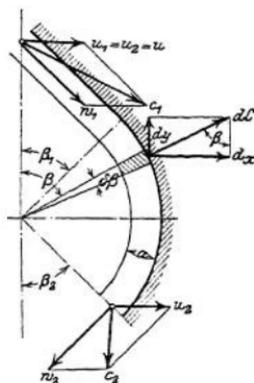


Fig. 1.

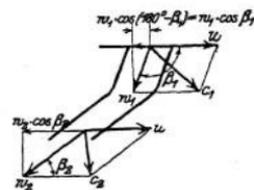


Fig. 2.

2. Die Hauptgleichung der rotierenden Maschinen. Fig. 3 stellt ein rohrförmiges Gefäß vom Querschnitt f dar, das mit den Geschwindigkeiten u_1 und u_2 rotiert. An seinen Enden sind die Drucke p_1 und p_2 vorhanden. Ein unendlich kleines Flüssigkeitsteilchen hat die Masse:

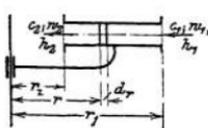


Fig. 3.

$$dm = \frac{f \cdot \gamma}{g} \cdot dr.$$

Zentrifugalkraft:

$$dC = \frac{f \cdot \gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r \cdot dr.$$

$$p_1 - p_2 = \int_{r_2}^{r_1} dC = \frac{f \cdot \gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot \frac{r_1^2 - r_2^2}{2}.$$

Für $f = 1$:
$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2g} \cdot \omega^2 = \frac{u_1^2 - u_2^2}{2g}.$$

Tritt die Flüssigkeit außen mit der Relativgeschwindigkeit w_1 zu, fließt innen infolge Verengung des Rohrquerschnittes mit $w_2 > w_1$ ab, so ist zur Beschleunigung von w_1 auf w_2 die Druckhöhe $\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g}$ erforderlich. Es wird:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{u_1^2 - u_2^2}{2g} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g}.$$

Den Relativgeschwindigkeiten entsprechen am Ein- und Austritt die absoluten Geschwindigkeiten c_1 und c_2 , so daß am Ein- und Austritt die Energiemengen: $\frac{c_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma}$ und $\frac{c_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma}$ vorhanden sind. Ist $A =$ Arbeit pro 1 kg, so folgt:

$$A = \left(\frac{c_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(\frac{c_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} \right) = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2g} + \frac{p_1 - p_2}{\gamma};$$

$$A = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2g} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2g} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g}. \quad (1)$$

Diese Gleichung wird als Hauptgleichung der Turbinen (und in entsprechender Änderung auch der Turbinenpumpen), der Ausdruck $\frac{u_1^2 - u_2^2}{2g} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g}$ als „Spaltdruck“ bezeichnet.

Die an das Laufrad übertragene Arbeit setzt sich zusammen:

1. aus dem Unterschied der lebendigen Kraft $\frac{c_1^2 - c_2^2}{2g}$ an Ein- und Austritt,
2. aus der Änderung der Pressung durch Änderung der Relativgeschwindigkeiten,
3. aus der Änderung der Pressung durch die Zentrifugalkraft.

Aus den Geschwindigkeitsdiagrammen Fig. 4 und 5 folgt:

$$w_1^2 = c_1^2 + u_1^2 - 2c_1 \cdot u_1 \cdot \cos \delta_1,$$

$$w_2^2 = c_2^2 + u_2^2 - 2c_2 \cdot u_2 \cdot \cos \delta_2.$$

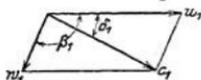


Fig. 4.

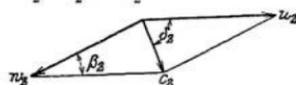


Fig. 5.

Diese Werte in (1) eingesetzt, ergibt mit Berücksichtigung des „hydraulischen“ Wirkungsgrades ε ($H =$ Gefällhöhe, εH die von einem kg an das Laufrad übertragene Arbeit):

$$\varepsilon g \cdot H = c_1 \cdot u_1 \cdot \cos \delta_1 - c_2 \cdot u_2 \cdot \cos \delta_2. \quad (2)$$

In den vielfach vorkommenden Fällen, daß $u_2 \perp c_2$ bzw. $\delta_2 = 90^\circ$, kann das zweite Glied vernachlässigt werden:

$$\varepsilon \cdot g H = c_1 \cdot u_1 \cdot \cos \delta_1. \quad (3)$$

Gl. (2) wird als „vereinfachte Form der Hauptgleichung“ bezeichnet.

In Fig. 4 ist nach dem Sinussatz:

$$\frac{c_1}{u_1} = \frac{\sin(180 - \beta_1)}{\sin(\beta_1 - \delta_1)},$$

$$c_1 = \frac{u_1 \cdot \sin \beta_1}{\sin(\beta_1 - \delta_1)} = u_1 \cdot \frac{1}{\cos \delta_1 - \sin \delta_1 \cdot \cotg \beta_1}.$$

Eingesetzt in Gl. (2) ergibt die dritte Form der Hauptgleichung:

$$u_1 = \sqrt{\varepsilon g H \cdot \left(1 - \frac{\tg \delta_1}{\tg \beta_1}\right)}. \quad (4)$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Umfangsgeschwindigkeit u_1 gesteigert wird, wenn $\beta_1 > 90^\circ$, da dann der Klammerausdruck > 1 wird. Ebenso wächst u_1 mit δ_1 .

I. Die Wasserturbinen.

Man unterscheidet, je nach Wirkung des Wassers: Aktions-, Druck- oder Freistrahlturbinen und Reaktions- oder Überdruckturbinen.

Radialturbinen: wenn das Wasser radial die Turbine durchfließt, sonst: Axialturbinen. „Beaufschlagung“ ist entweder „voll“ oder „partiell“.

a) Berechnung der Aktionsturbinen.

Diese werden als innen partiell beaufschlagte Radialturbinen — Schwamkrug-Turbinen — oder in neuerer Zeit fast ausschließlich als „Pelton-“ oder „Löffelräder“ ausgeführt. Die ganze Gefällhöhe wird in Geschwindigkeit umgewandelt.

$$c_1 = \varphi \cdot \sqrt{2 g H},$$

H = Abstand vom Oberwasserspiegel bis Ende Leitrad,

φ = Durchflußkoeffizient = 0,94 bis 0,98.

Die ideale Schaufelform ist nach Fig. 6 halbkreisförmig mit $u = \frac{c_1}{2}$. In diesem Falle wird auch $w_1 = \frac{c_1}{2} = w_2$, so daß $c_2 = 0$, $\eta = 1$: das ganze Gefälle würde in dieser praktisch nicht ausführbaren Schaufel ausgenutzt.

Man kann mit Annäherung schreiben:

$$c_1 = \sqrt{\varepsilon \cdot 2 g H}; \quad c_1^2 = \varepsilon \cdot 2 g H.$$

In Verbindung mit Gl. (3) wird:

$$c_1 \cdot u_1 \cdot \cos \delta_1 = \frac{c_1^2}{2},$$

$$u_1 \cdot \cos \delta_1 = \frac{c_1}{2}.$$

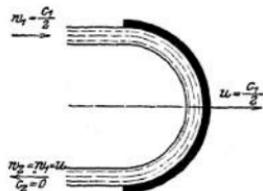


Fig. 6.

Das Eintrittsparallelogramm wird ein Rhombus mit $u_1 = w_1 = \frac{c_1}{2 \cdot \cos \delta_1}$.

Zur Annäherung an die Form, Fig. 6, sollen β_1 und β_2 möglichst klein sein.

Da infolge Umwandlung der ganzen Gefällhöhe in Geschwindigkeit in den nicht ausgefüllten Schaufeln der Aktionsturbinen ein Überdruck nicht vorhanden ist, so wird $w_2 = w_1$, wenn von den Schaufelreibungsverlusten abgesehen wird.

Winkel β_2 folgt aus dem Austrittsdiagramm, in dem $w_2 = w_1$ und u_2 durch u_1 bekannt sind. Da die Höhe $\frac{c_2^2}{2g}$ verloren geht, so wird c_2 durch Annahme eines bestimmten Austrittsverlustes festgelegt.

$$c_2 = \sqrt{2g \cdot 0,03H} \quad \text{bis} \quad \sqrt{2g \cdot 0,06H}.$$

Austrittsquerschnitt der Leitvorrichtung: $F = \frac{Q}{c_1}$. Der Laufraddurchmesser wird durch die Wahl der Umlaufzahl festgelegt:

$$\frac{n \cdot D \cdot \pi}{60} = u_1 = \frac{c_1}{2 \cdot \cos \delta_1}; \quad D = \frac{60 \cdot u_1}{n \pi}.$$

Die Schaufel der Schwamkrug-Turbine wird vielfach in Kreisbogenform ausgeführt. Die Teilung am inneren Radumfang soll kleiner als der Beaufschlagungsbogen des Wasserstrahles sein, wenn nur eine Leitzelle vorhanden ist.

Fig. 7 zeigt die Schaufelung des Pelton-Rades. Für $\beta_1 = 0$ wären am Eintritt die Verhältnisse wie bei Fig. 6. Die starke Abnutzung einer derart scharfen Schneide verhindert ihre Anwendung. Vielfach $\beta_1 = 12$ bis 15° , wodurch der Stoßverlust s verursacht wird.

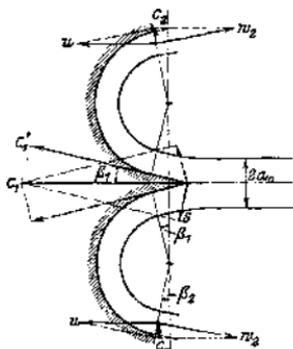


Fig. 7.

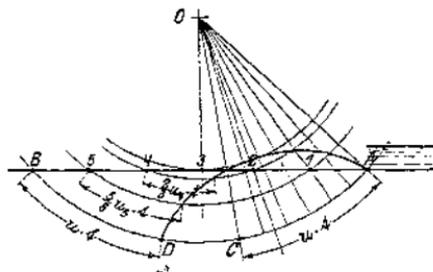


Fig. 8.

Bestimmung der Schaufelteilung nach Kotzur, Fig. 8. Die absolute Bahn des Wasserstrahles wird infolge ihrer kurzen Erstreckung im Rade als geradlinig betrachtet. Es ist Strecke $AB = c_1 \cdot t$. In der Zeit t legt ein Punkt des Umfanges den Weg $u \cdot t = AC$ zurück. Einteilung der Strecke AB und des Bogens AC in eine Anzahl (hier 6) gleicher Teile. Durch Abtragung der Strecke $u \cdot t$ von B ab ergibt sich Punkt D als Endpunkt der Relativbahn. Wird auf den von O aus durch die Teilpunkte 5, 4, 3, 2 und 1 geschlagenen Kreisbögen $\frac{2}{6} u_1 \cdot t$, $\frac{4}{6} u_1 \cdot t$, $\frac{3}{6} u_1 \cdot t$ usw. abgetragen, so ergeben sich die Punkte der Relativbahn AD . Ein die Schaufel zuerst in A treffender Wasserstrahl würde die Schaufel in D gerade noch berühren, falls $AD =$ Schaufelteilung. Um noch Arbeitsabgabe zu erhalten, muß die Schaufelteilung kleiner als AD werden.

b) Ausführung und Einzelheiten der Aktionsturbinen.

Schwamkrug-Turbine Fig. 9. Die Schaufeleintrittsbreite b_1 wird um 10 bis 20 mm bei kleinen, um 20 bis 40 mm bei breiteren Rädern größer als die Breite des eintretenden Strahles genommen, um mit Sicherheit alle Wasserteilchen abzufangen. Nach dem Austritt hin wird die Schaufel häufig auf $b_2 = 2 b_1$ bis $2,5 b_1$ erweitert. Zur Verhinderung ungleicher Kräftewirkungen werden bei mehreren Leitzellen diese gleichmäßig über den ganzen Umfang verteilt. Die Düsenöffnung wird vom Regulator durch Schieber oder Zunge verstell.

Baustoff der Leitzelle: Bronze, bei sehr hohen Gefällen Stahlguß. Die Schaufeln bestehen aus Stahlblech oder werden mit dem Kranz aus einem Stück gegossen. Bei sehr hohen Umfangsgeschwindigkeiten wird der Kranz durch warm aufgezogene Stahlringe, die auch als Schwungmasse dienen können, verstärkt

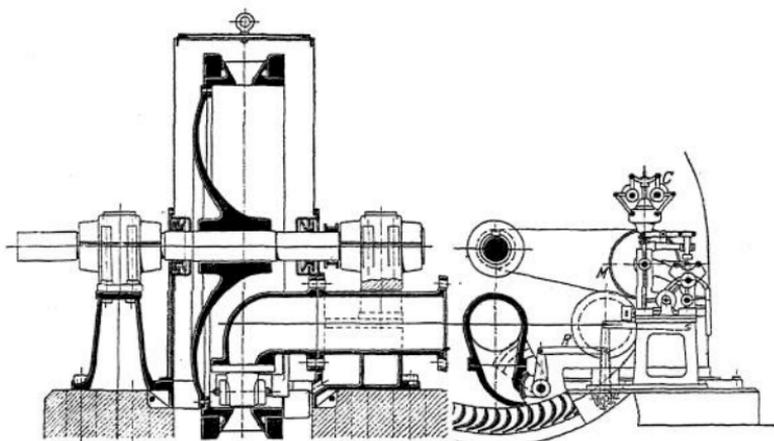


Fig. 9. (Piccard, Pictet & Co., Genf.)

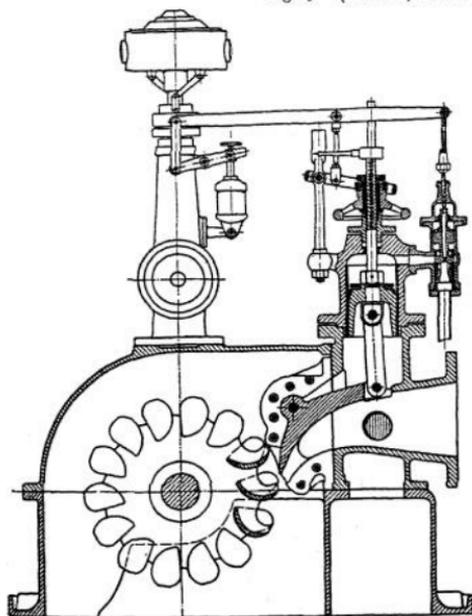


Fig. 10.
(Prager Maschinenbau-A.-G. vorm. Ruston & Co., Prag.)

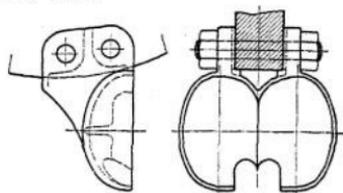


Fig. 11.

Pelton-Rad. Fig. 10. Die Schaufeln werden entweder mit dem Rad aus einem Stück gegossen — Baustoff: Gußeisen, Bronze oder Stahlguß — oder besonders (meist in Bronze) gegossen und mit dem Kranz verbunden, siehe Fig. 11.

Baustoff der Düse: Bronze. Runde Düsen sind, da der Strahl geschlossener ist, den viereckigen vorzuziehen.

Rechteckige Düsen werden vom Regler durch Doppelschieber, runde durch „Nadeln“ verengt. Fig. 12, Ausführung Briegleb, Hansen & Co., Gotha. Die Nadel wird

vom Regler verschoben. Fig. 13, Ausführung Amme, Giesecke & Konegen, Braunschweig. Die Regulierwelle *W* verschiebt mittels Kurbeltriebes den Düsenmantel bei feststehender Nadel (Bauart Gelpke).

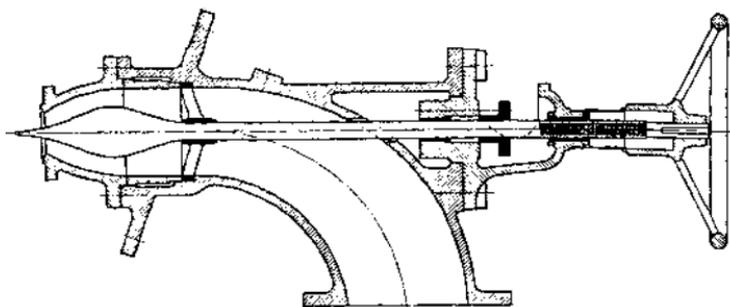


Fig. 12.

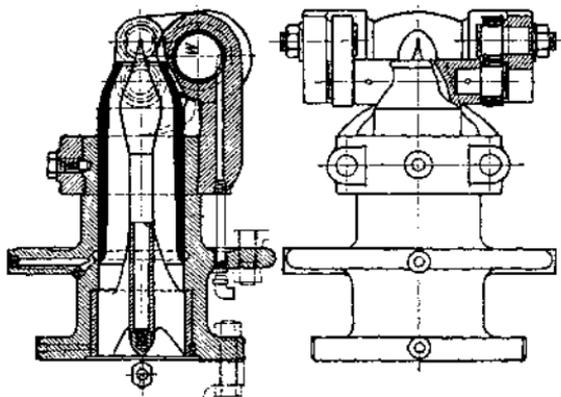


Fig. 13.

Vorteile der Bauart Gelpke: Die Zuleitung der Düsen kann durch ein gerades Rohrstück an den Düsenmantel anschließen. Da Krümmer und Nadelführung fehlen, so werden Wirbelbildungen vermieden, ebenso Flattern der Nadel, da diese fest eingespannt ist. Beim Versagen der Reguliervorrichtung öffnet der Wasserdruck die Düse, so daß gefährliche Wasserschläge nicht auftreten können. Die Düse kann um den Hub der beweglichen Nadel näher an das Rad herangebracht werden.

c) Berechnung und Entwurf der Reaktionsturbinen.

Es ist $c_1 < \sqrt{2gH}$. Der „Spaltdruck“ $h_s = H - \frac{c_1^2}{2g}$ bewirkt in der Laufschaufel eine Vergrößerung der Relativgeschwindigkeit von w_1 auf w_2 .

Ist $\beta_1 = 90^\circ$, so folgt aus Gl. (3): $u_2 = \sqrt{\varepsilon \cdot g H}$. (Bei den Reaktionsturbinen mit $\beta_1 = 90^\circ$ ist also u_2 doppelt so groß wie bei den Aktionsturbinen.)

Bedeutet: a_0, s_0, z_0, t_0 = Schaufelweite, Schaufelstärke, Schaufelzahl und Teilung des Leitrades, a_1, s_1, z, t_1 bzw. a_2, s_2, z_2 dieselben Größen an Ein- und Austritt vom Laufrad, so folgt nach Wahl von a_0, s_0 und t_0 :

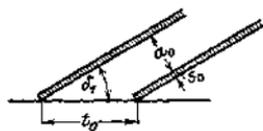


Fig. 13 a.

$$\sin \delta_1 = \frac{a_0 + s_0}{t_0} \quad (\text{Fig. 13 a})$$

Mit u_1, β_1 und δ_1 kann nunmehr das Eintrittsparallelogramm aufgezeichnet werden.

Am Austritt sind bekannt:

$$u_2 = u_1 \cdot \frac{D_2}{D_1}, \quad c_2 = \sqrt{2g \cdot 0,03 h} \quad \text{bis} \quad \sqrt{2g \cdot 0,06 h} \quad (\text{bis} \quad \sqrt{2g \cdot 0,12 h}).$$

Man wählt:

$$c_2 \perp u_2$$

oder

$$w_2 = u_2.$$

Die heute gebräuchliche Bauart der Reaktionsturbine wird mit „Saugrohr“ ausgeführt. Die Turbine liegt hochwasserfrei in einem luftdicht abgeschlossenen, vom ausströmenden Wasser ganz ausgefüllten Rohr 5 bis 6 m über Unterwasserspiegel.

Dieser Höhe entsprechend stellt sich unter dem Laufrad eine Luftleere ein, so daß der Unterschied der Wasserdrucke vor und hinter Laufrad derselbe ist wie bei tiefliegendem Laufrad.

Die Reaktionsturbine wird nach Figur 14 und 15 ausschließlich als „Francis-Turbine“ gebaut. Das Wasser tritt radial ein und axial aus. Bei den „normallaufenden“ Francis-Turbinen ist der Laufraddurchmesser wenig verschieden vom Saugrohrdurchmesser; bei den schnelllaufenden Francis-Turbinen wird unter Vergrößerung des Winkels β_1 der Laufraddurchmesser wesentlich kleiner als der Saugrohrdurchmesser, wodurch die Schaufelform als räumliche Kurve besonders verwickelte Form erhält.

Sowohl die Enden der Leitschaufeln, als auch die der Laufschaufeln werden nach Evolventen gekrümmt, um den austretenden Wasserstrahl richtig und ohne Verengung zu führen. (Hierzu ist eigentlich die logarithmische Spirale er-

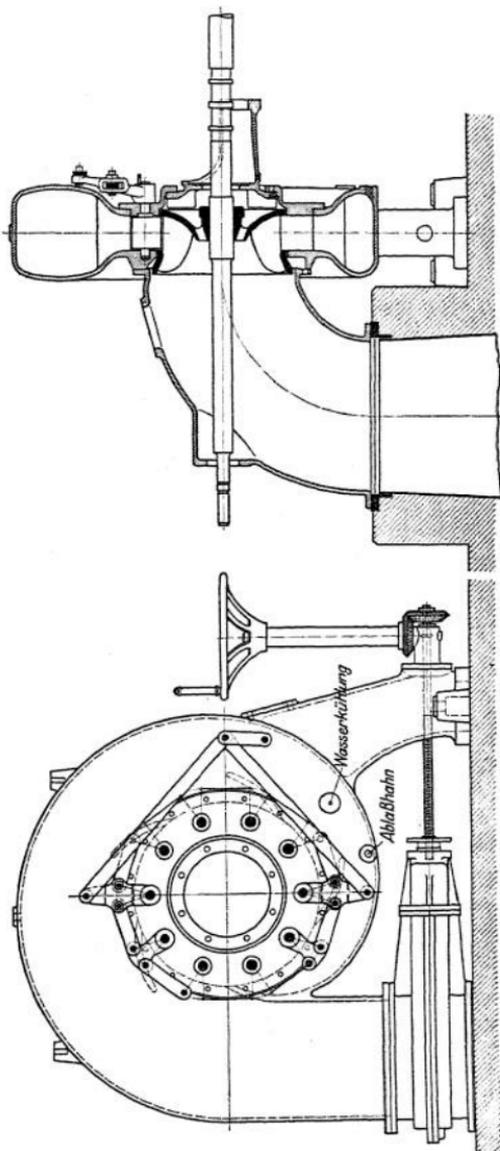


Fig. 14. (Briegleb, Hansen & Co., Gotha.)

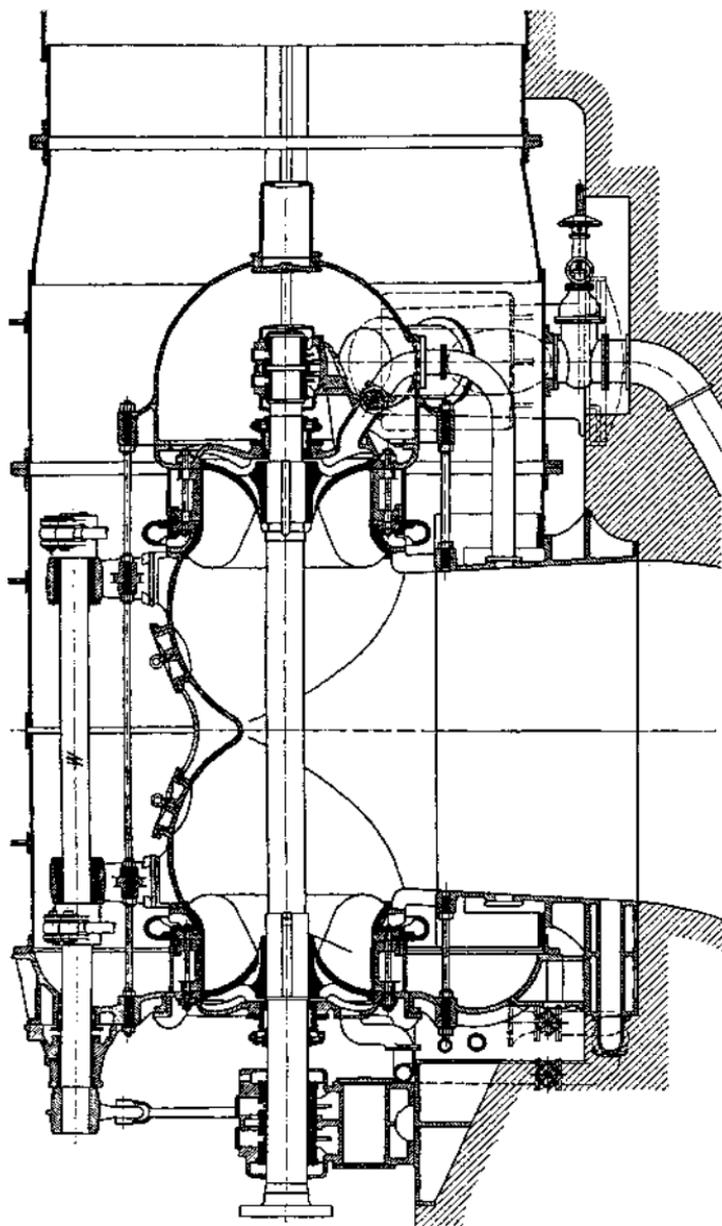


Fig. 15. (Escher, Wyss & Co., Zürich. $H = 33,3$ m, $Q = 37,5$ cbm/sek, $N = 43\,000$ PS, $n = 225$).

förderlich, die jedoch durch die leichter zu verzeichnende und ebenfalls Äquidistanz zeigende Evolvente mit genügender Genauigkeit ersetzt werden kann.) Im folgenden sind die Evolventen ersetzt durch Kreisbögen, deren Mittelpunkt in dem Schnittpunkt zweier Tangenten an den Grundkreis liegt.

Fig. 16 zeigt die Aufzeichnung des Leitrades. Grundkreisdurchmesser $d_0 = \frac{z_0(a_0 + s_0)}{\pi}$. O_1 ist beispielsweise der Mittelpunkt für den die Evolvente ersetzenden Kreisbogen AB .

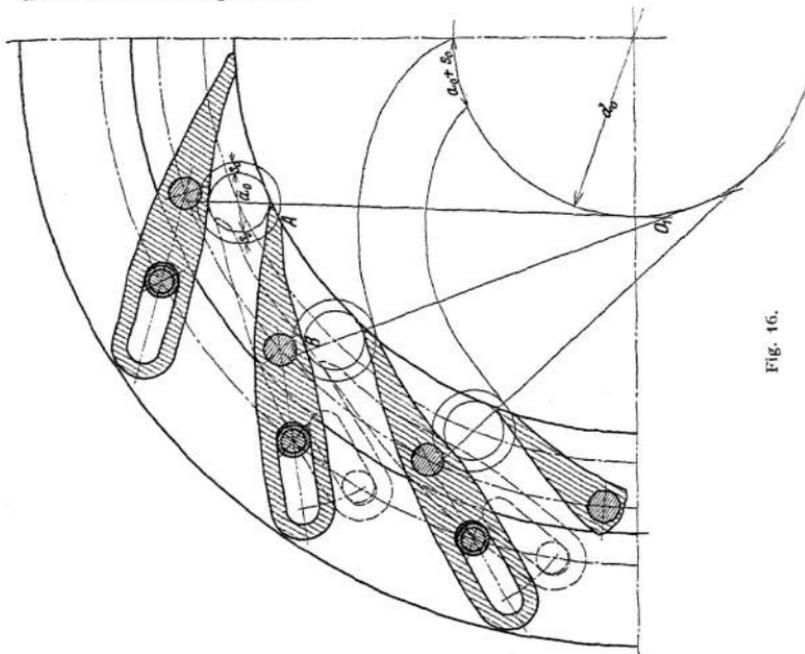


Fig. 16.

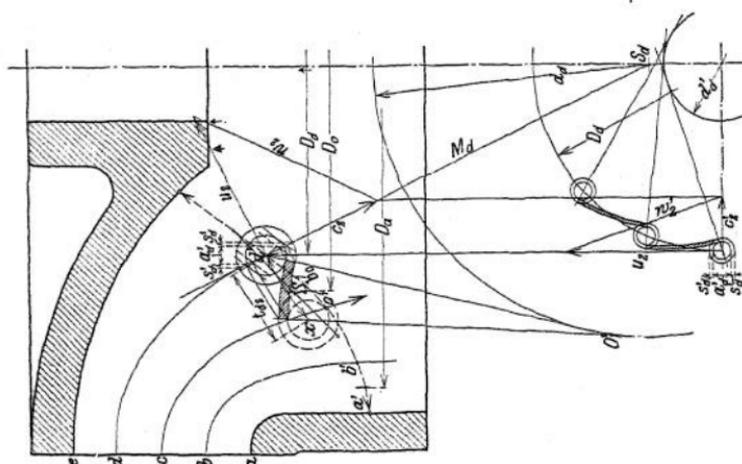
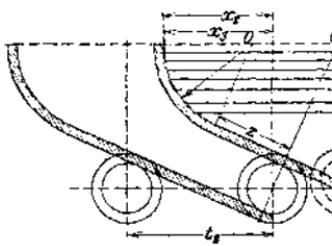


Fig. 17.

Die Austrittsfläche des Laufrades ist die Oberfläche eines Umdrehungskörpers, dessen Erzeugende entweder die Schaufelkante, oder — wie meist — die Verbindungslinie der Lichtweiten ist. Fig. 17. Bei Normalläufern wird als Austrittsbogen häufig ein Kreisbogen oder eine Parabel gewählt. Ist S der Bogenschwer-

punkt, so muß nach Guidin $D_0 \pi \cdot b_0 = F_2 = \frac{Q}{c_2}$ sein. Für den ersten Entwurf werde angenommen, daß die Verengung der Austrittsfläche durch die Schaufelstärke (im Verhältnis $\frac{a_2}{a_2 + s_2}$) 10 v. H. betrage.

$$D_0 \cdot \pi_0 \cdot b_0 = 1,1 F_2 .$$



Die Turbine wird durch „Flutlinien“ in eine Anzahl n von Teilturbinen zerlegt, von denen jede die Wassermenge $\frac{Q}{n}$ schluckt. Dementsprechend ist die Eintrittskante in n gleiche, die Austrittskurve in n ungleiche Teile so zu teilen, daß z. B. $\widehat{a'b'} \cdot D_a \cdot \pi = \frac{1,1 \cdot F_2}{n}$, wor-

in $D_a =$ Schwerpunktskreisdurchmesser des Bogens $a'b'$ ist.

Für die weitere Konstruktion wird entweder $u_2 \perp c_2$ oder $u_2 = w_2$ angenommen. Fig. 18 zeigt die Ermittlung der in den Punkten a', b', c' usw. vorhandenen Größen w_2, β_2, a_2 und t_2 .

$$t_2 \cdot \frac{D_1 \pi}{z} = t_1, \quad \frac{D_3 \pi}{z} = t_{2a},$$

u_1 und u_{2a} werden aufgetragen und durch senkrechte Auftragung der konstanten Geschwindigkeit c_2 (da hier $c_2 \perp u_2$ angenommen) für jeden der Punkte w_2 und β_2 festgestellt. Senkrechte, von den Endpunkten a', b', c' der Teilungsstrecken auf die w_2 -Linien gezogen, ergeben nach der Beziehung $\sin \beta_2 = \frac{a_2 + s_2}{t_2}$ die Werte a_2 und s_2 .

Die Evoluten des Austrittes liegen auf Kegelflächen. In Fig. 19 ist als Beispiel die von der Schichtlinie $d d'$ beschriebene Kegelfläche in die Ebene

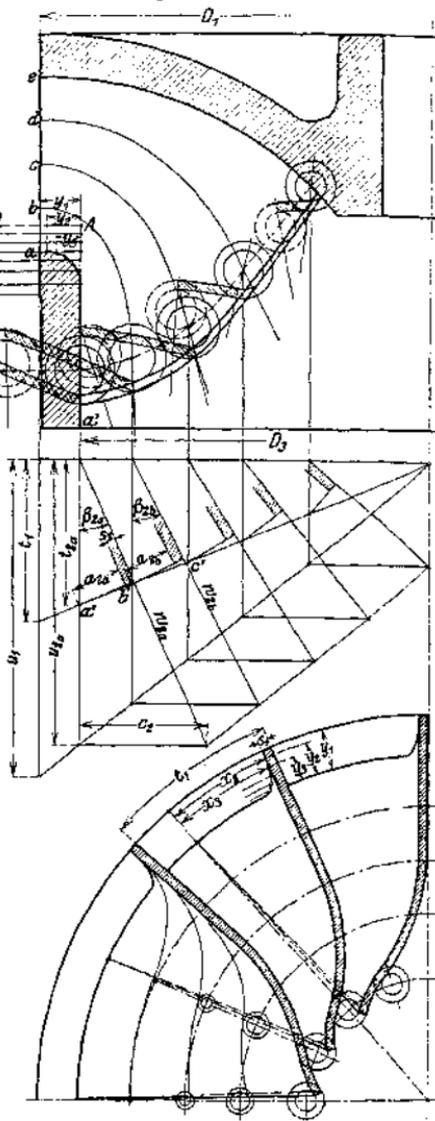


Fig. 18.

abgewickelt. Der Kreissektor $\widehat{a_1 b_1}$, mit der Mantellinie M_d als Radius, hat den Teilumfang $D_{a_1} \cdot \pi = z_2 \cdot t_{a_2}$. Der Grundkreis für die auf diesem abgewickelten Kegelmantel liegenden Evolventen umschließt den gleichen Zentriwinkel und hat den Teilumfang: $d_d \cdot \pi = z_2 (a_{d_2} + s_{d_2})$

$$\frac{d_d}{2} = \frac{z_2 (a_{d_2} + s_{d_2})}{z_2 \cdot t_{d_2}}; \quad \frac{d_d}{2} = M_d \cdot \frac{(a_{d_2} + s_{d_2})}{t_{d_2}}$$

Die Konstruktion ist in Fig. 17 angegeben. Um d' und x , die um den von S_d aus geschlagenen Bogen t_{d_2} voneinander entfernt sind, sind mit a_{d_2} und s_{d_2} konzentrische Kreise geschlagen. O' , nahe dem Umfange des

mit $\frac{d_d}{2}$ um S_d geschlagenen Grundkreises liegend, ist der Mittelpunkt der angenäherten Evolvente. Beim Wieder-aufrollen der Kegelmantel fallen im Aufriß die Evolventen mit den Enden der Flutlinien zusammen.

Fig. 17 zeigt die Ermittlung der Horizontalprojektion der Austrittsevolventen, wobei die zulässige Annahme gemacht werde, daß diese projizierten Evolventen wieder Evolventen seien. Das in d' anschließende Geschwindigkeitsdreieck ist in den Grundriß heruntergelotet, wobei sich hier u_2 in wahrer Größe zeigt. Eine im Grundriß auf w'_2 gefällte Senkrechte ist Tangente an den Grundkreis der Evolventen, dessen Durchmesser $d'_d = \frac{z(a'_{d_2} + s'_{d_2})}{\pi}$ ist, worin a'_{d_2} und s'_{d_2} die Horizontalprojektionen von a_{d_2} und s_{d_2} sind, wie oben in d' angegeben.

Die auf dem Drehkörper $a a'$ liegenden Schaufellinien sind in Fig. 18 wieder gegeben. Diese Schaufellinie ist auf den Zylinder $A a'$ zurückgebogen und dieser Zylinder in die Bildebene abgewickelt. Die Schaufellinien laufen senkrecht zur äußeren Begrenzung aus. Der Mittelpunkt O des an die geraden Evolventen anschließenden Kreisbogens liegt entweder im Schnitt der äußeren Schaufelbegrenzungslinie mit einer im Endpunkt der Evolvente errichteten oder von dieser um eine gewisse Strecke x entfernten Senkrechten. Die Strecken x_2, y_2, x_3 und y_3 deuten die Wiedergabe dieser Schaufellinien im Grundriß an.

In Fig. 17 ist die Aufzeichnung der äußeren Schaufelbegrenzungen im Seitenriß für den Punkt d' dargestellt. Die Endpunkte der Evolvente werden durch Kreisbogen um die Kegelspitze S_d auf die durch d' gelegte Schichtlinie $d d'$ projiziert.

Fig. 18 gibt im Grundriß sämtliche nach Fig. 17 aufgezeichneten Evolventen wieder, die durch Kreisbogen oder sonstige Kurven an das wenigstens während eines kurzen Stückes radial verlaufende, obere Schaufelende anzuschließen sind. Diese derart vervollständigten Kurven stellen dann im Grundriß die im Seitenriß angenommenen Schichtlinien dar.

Um die räumliche Schaufelkurve zu finden, werden in gleichen Abständen Schnittebenen senkrecht zur Turbinenachse gelegt. Die Schnittpunkte dieser Ebenen mit den Schichtlinien im Grundriß (vgl. die Punkte π und o in Fig. 23) werden miteinander verbunden. Nach den entstehenden Kurven, deren stetiger Verlauf die gemachten Annahmen rechtfertigt, begrenzt der Modelltschler die Brettchen von der durch die Entfernung der Schnittebenen bestimmten Stärke.

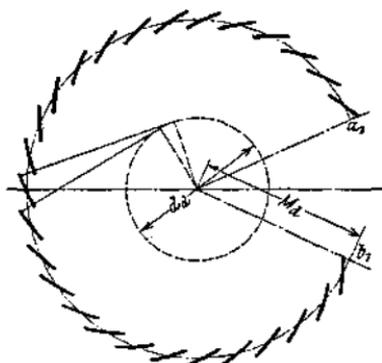


Fig. 19.

Die Ecken der miteinander verbundenen Brettchen werden gebrochen. Das fertige Modell dient zur Herstellung des Schaufelklotzes, der in Gußeisen ausgeführt wird. Die Blechschaufeln werden nach diesem Schaufelklotz gebogen.

In Fig. 18 beginnen im Grundriß sämtliche Schichtlinien in dem die Eintrittskante in der Projektion wiedergebenden Punkt. Hierdurch gelangt man zu starken Krümmungen am Anfang und sackartigen Schaufelformen, die durch zwei Mittel vermieden werden können. Entweder wird die die Mitten der Lichtweiten verbindende Austrittskurve nicht radial, sondern in eine gegen den Radius in einem spitzen Winkel gerichtete Ebene gelegt, oder die Eintrittskante wird nicht senkrecht, sondern schräg vorwärts im Drehsinne angeordnet.

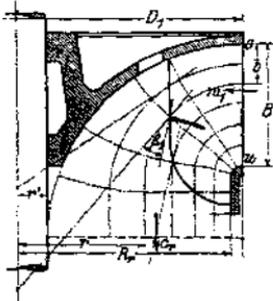


Fig. 20.

Das vorstehend angegebene Verfahren setzt voraus, daß die Austrittsfläche eine Niveaufläche ist, d. h. eine Fläche gleicher Geschwindigkeit. Bei raschlaufenden Turbinen läßt sich die Austrittskurve nicht so legen, daß sie zur Erzeugenden einer Niveaufläche wird. Hier empfiehlt sich das von Baashuus¹⁾ angegebene Verfahren, das namentlich bei vereinfachender Formgebung der Schaufelbegrenzung rasch zum Ziele führt.

Die obere und die untere Schaufelbegrenzung bestehen aus Viertelkreisbögen, von denen der obere die Welle tangiert, Fig. 20. Entsprechend ist anzunehmen, daß auch die übrigen Flutlinien sich aus Viertelkreisbögen und Geraden zusammensetzen. Um jene zu ermitteln, wird die Eintrittshöhe ou in eine Anzahl gleicher Teile zerlegt — und zwar doppelt soviel Teile, als Flutlinien gebraucht werden —, und die entsprechenden Teilpunkte auf dem wagerechten Durchmesser $2R_r$ finden sich aus der Beziehung:

Die Höhe ou in eine Anzahl gleicher Teile zerlegt — und zwar doppelt soviel Teile, als Flutlinien gebraucht werden —, und die entsprechenden Teilpunkte auf dem wagerechten Durchmesser $2R_r$ finden sich aus der Beziehung:

$$\frac{(\pi r^2 - \pi r'^2) \cdot c_r}{(\pi R_r^2 - \pi r'^2) \cdot c_r} = \frac{\pi \cdot D_1 \cdot b \cdot w_r}{\pi \cdot D_1 \cdot B \cdot w_r} \quad (w_r = \text{Radialkomponente von } w_1)$$

oder

$$\frac{r^2 - r'^2}{b} = \frac{R_r^2 - r'^2}{B} = \text{konst.};$$

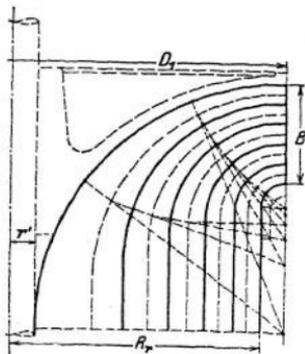


Fig. 21.

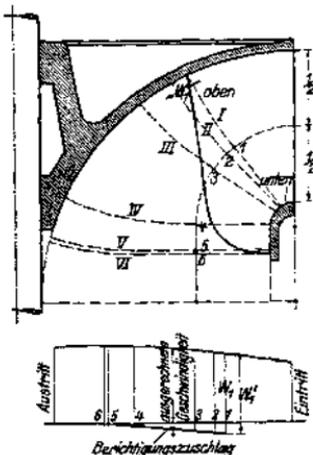


Fig. 22.

hieraus werden für die verschiedenen Eintrittsbreiten b die Radien r berechnet. Durch jeden Punkt, an dem die Flutlinien die Austrittskurven schneiden, müssen

¹⁾ Z. Ver. deutsch. Ing. 1901, S. 1602.

Niveaulflächen gelegt werden, um aus deren Größe die Wassergeschwindigkeit der Flutlinie berechnen zu können. Fig. 21 zeigt die hierzu nötige Konstruktion. In dem betreffenden Schnittpunkt von Flutlinie und Austrittskurve wird auf erstere eine Senkrechte errichtet und mit den Hilfsflutlinien zum Schnitt gebracht, von diesem Schnitt wieder eine Senkrechte auf die benachbarten Hauptflutlinien gefällt usw. Die Flutlinien geben die Richtungen der Wassergeschwindigkeiten an, auf denen die Evolventen zu verzeichnen sind. Aus den Niveaulflächen folgen die Größen der radialen Geschwindigkeitskomponenten W_1 , die mit der Umfangsgeschwindigkeit an der betreffenden Stelle zusammen den Winkel β_2 ergeben, worauf die Konstruktion nach Fig. 23 durchgeführt werden kann. Hierbei ist aber noch die Verengung der Austrittsflächen durch die Schaufelstärken zu berücksichtigen, die für dieselbe Fläche infolge der verschiedenen Winkel verschieden ist. Für Niveaulfläche I z. B. ist oben das Verengungsverhältnis, Fig. 22:

$$\varphi_0 = \frac{a_0}{a_0 + s} \quad \text{und unten} \quad \varphi_u = \frac{a_u}{a_u + s}.$$

Um φ_0 zu berechnen, muß erst β_0 bestimmt werden. ($\sin \beta_0 = \frac{a_0 + s}{t_0}$; t_0 bekannt.) Nun ist angenähert:

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{W_1}{u_0}.$$

Da W_1 jedoch ohne Berücksichtigung der Verengung zunächst zu berechnen und für diese ein Zuschlag von 10 bis 13 v. H. einzuführen ist, so wird β_0 berechnet aus:

$$\operatorname{tg} \beta_0 = 1,1 \frac{W_1}{u_0} \quad \text{bis} \quad 1,13 \frac{W_1}{u_0}.$$

Ebenso β_u zu bestimmen, woraus als Mittelwert der Verengung folgt:

$$\varphi_m = \frac{\varphi_0 + \varphi_u}{2}.$$

Die folgenden Niveaulflächen werden in ganz verschiedener Weise verengt. Niveaulfläche I wird von sämtlichen Schaufeln durchsetzt, während sich in Fläche VI keine einzige Schaufel befindet. Diesem Umstand wird in der Weise Rechnung getragen, daß Bogen $\widehat{I\delta}$ als Abszisse abgewickelt wird. In den Punkten I bis δ werden als Ordinaten die ohne Berücksichtigung der Verengung berechneten Wassergeschwindigkeiten aufgetragen. Wird nun in Punkt I die durch φ_m vergrößerte Geschwindigkeit W'_1 vom oberen Endpunkt von W_1 nach unten abgetragen und der Endpunkt dieser abgetragenen Strecke mit Punkt δ verbunden, so geben die derart verlängerten Ordinaten die ungefähre Größe der wirklich auftretenden Geschwindigkeiten.

Fig. 23 zeigt die Anwendung des Verfahrens auf eine sog. „Herkulesturbine“, bei der als Niveaulfläche außer Zylinder und Kreisringfläche eine Kugelzone auftritt. Die Oberfläche dieser ist ebenfalls in eine Anzahl gleicher Teile wie die übrigen Niveaulflächen zu zerlegen, was hier einfach durch Zerlegung der Höhe in n Teile geschieht. Die Schaufelaustrittskante wird in Grund- und Aufriß nach Gutdünken eingetragen.

In Fig. 23 sind Eintrittsfläche AA , Kreisfläche BB und Kugelfläche CC in 20 gleiche Teile geteilt, wodurch die Hauptflutlinien I bis II gegeben sind. Durch die Schnittpunkte der Flutlinien und der Austrittskurve werden Niveaulflächen gelegt (für Flutlinie II z. B. Fläche DD , für Flutlinie $I0$: Fläche BB , für δ : Fläche CC). Aus diesen werden wieder die Wassergeschwindigkeitskomponenten $W_1 = \frac{Q}{F}$ berechnet, die mit der Umfangsgeschwindigkeit zusammen den Austrittswinkel β_2 ergeben. (S. in Fig. 23 das umgeklappte Geschwindigkeitsdreieck und dessen Horizontalprojektion.) Hierauf Aufzeichnung der Evolventen, deren Punkte a, b, c, d, e in Grundriß und Aufriß gelotet und

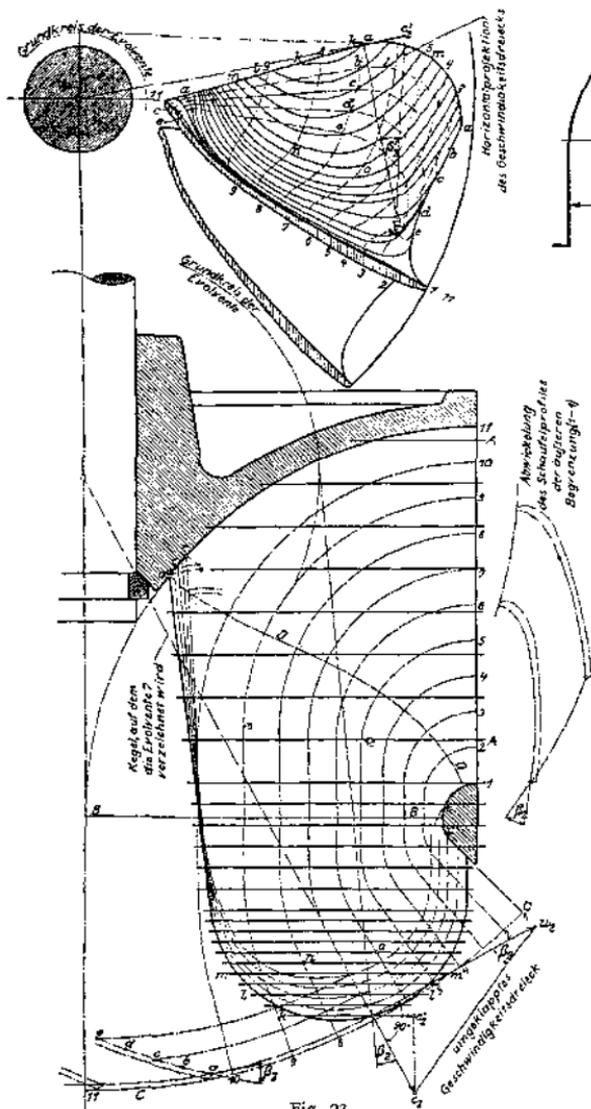


Fig. 23.

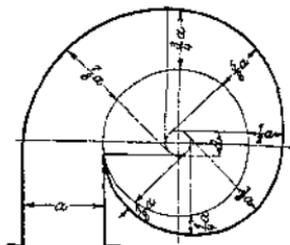


Fig. 24.

miteinander durch stetige Kurven aa , bb , cc verbunden werden. Zerlegung der Eintrittshöhe AA durch Schnittebenen, die eine Reihe von Schnittpunkten mit den Kurven aa , bb , ... und den Flutlinien ergeben. (Z. B. n und o .) Projektion dieser Schnittpunkte in den Grundriß. Die Verbindungslinien dieser Punkte geben die Schnittkurven kk , ll , mm , nach denen die Schaufelklötze hergestellt werden.

Fig. 24 zeigt die Aufzeichnung der die „geschlossenen“ Turbinen, Fig. 14, umgebenden Spiralgehäuse, in denen das Wasser mit gleichbleibender Geschwindigkeit und deshalb in veränderlichen Querschnitten dem Leitrad zugeführt

wird; dementsprechend Gestaltung nach einer Evolvente. Es ist vom rechteckigen Austrittsquerschnitt $f = a \cdot b = \frac{Q}{c}$ auszugehen, worin $c = 0,8$ bis $1,2 \sqrt{H}$, $b = 0,75$ bis $0,6 a$. Der Grundkreisdurchmesser d der Evolvente folgt aus $d \pi = a$.

Bei rundem Querschnitt müssen die Durchflußflächen entsprechende Größe haben.

d) Regulierung, Anordnung und Einzelheiten der Francis-Turbinen.

Die Francis-Turbinen werden stets voll beaufschlagt. Bei Regelung durch Abdecken der Leitschaufeln würden die Inhalte der unter die abgedeckten Leitschaufeln gelangenden und im Saugrohrwasser arbeitenden Laufschaufeln zuerst verzögert und späterhin, wenn sie unter die offenen Leitschaufeln gelangen, wieder beschleunigt, wodurch Verluste infolge Wirbelung usw. entstehen.

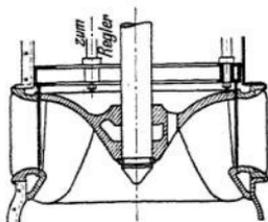


Fig. 25.

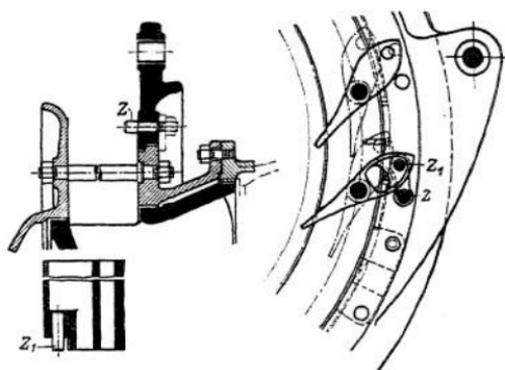


Fig. 26.

Regelung durch Spaltschieber nach Fig. 25 ist nur da angebracht, wo infolge annähernd konstanter Belastung der schlechte Wirkungsgrad dieser Regelung sich nicht äußern kann und Einfachheit der Anlage Hauptbedingung ist.

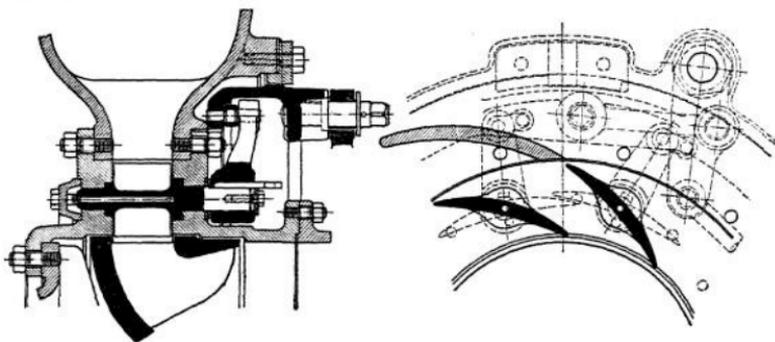


Fig. 27.

Fast allgemein wird durch Finksche Drehschaufelung nach Fig. 14, 26 und 27 reguliert. Der Regulator verdreht einen Ring, der durch Lenker mit den drehbar gelagerten Leitschaufeln verbunden ist. Eine einfachere Ausführung

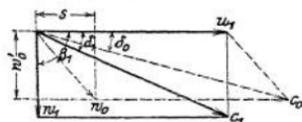


Fig. 28.

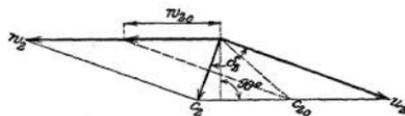


Fig. 29.

zeigt Fig. 16. Die neuen Diagramme sind in Fig. 28 und 29 wiedergegeben. Da bei verringerter Wassermenge auch w_2 abnimmt, so sinkt der für das Durchpressen des Wassers durch die Laufschaufeln erforderliche Spaltzdruck, und es entfällt auf die Erzeugung von c_1 ein größerer Teil des Gefälles. c_1 nimmt

zu. Die Veränderung von Größe und Richtung von c_1 verursacht Stoßverluste am Eintritt, da w_1 dem ersten Schaufelelement nicht mehr parallel ist. Die Geschwindigkeitshöhe $\frac{s^2}{2g}$ geht verloren. Am Austritt nehmen Größe von w_2 , sowie Größe und Richtung von c_2 andere Werte an. Der Austrittsverlust $\frac{c_2^2}{2g}$ erreicht seinen Kleinstwert, wenn $c_2 \perp w_2$.



Fig. 30.

Fig. 30 zeigt die Zodel-Regulierung, bei der Zuleitungswinkel δ_1 unverändert bleibt. Leitschaukelanfänge sind angegossen, Leitschaukelspitzen sind in einem Ring vereinigt, der vom Regulator gedreht wird. Blechstreifen, mit den angegossenen Leitschaukelanfängen fest verbunden, dienen zur Führung des Wasserstrahls.

Die liegende Anordnung der Turbine ist immer vorzuziehen. Die Lagerung der Turbine und auch des Dynamoankers ist hierbei zuverlässiger als in schwer belasteten Spurzapfen, die Kraftabnahme mittels Riemens, Seiles oder Dynamo gestaltet sich einfacher. Stehende Wellen sind nur da auszuführen, wo bei kleinen Gefällen das Triebwerk hochwasserfrei aufgestellt werden soll oder wegen vorhandener Transmission Zahnradantrieb nicht zu umgehen ist.

Im allgemeinen muß für liegende Wellen die Gefällhöhe mindestens gleich doppeltem Leitradurchmesser sein, da anderenfalls die Unterbringung der Turbine Schwierigkeiten macht. Eine Ausnahme machen die von Escher, Wyss & Co.

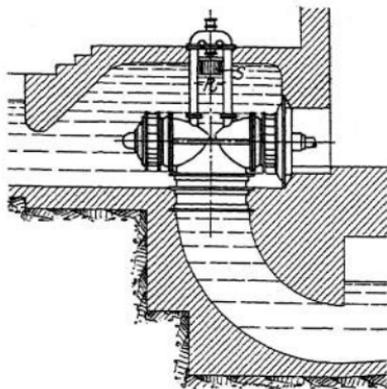


Fig. 31.

in Zürich hergestellten Anlagen mit Heber nach Fig. 31, die sogar Lagerung der Turbine über Oberwasserspiegel gestatten. Das Wasser wird durch Heber über das Leitrad hochgezogen. Beim Sinken des Wasserspiegels öffnet der Schwimmer S die nach unten gerichtete Mündung des mit dem Saugrohr verbundenen Doppelrohres R , und die Luft wird abgesaugt, bis die Wasserkammer wieder bis zur Scheitelwölbung angefüllt ist.

Statt oder mit dieser Einrichtung kann auch eine Ejektorwirkung durch Wasser, das vom Ober- zum Untergraben strömt, ausgeübt werden. Für Turbinenlagen über Oberwasserspiegel saugt dieser Strahlapparat das Oberwasser für das erste Anlaufen hoch.

Für kleine Gefälle von 10 bis 16 m werden die Francis-Turbinen im offenen Schacht mit offener Zuleitung aufgestellt: „Offene Turbinen“. Bequeme Zugänglichkeit. Für größere Gefälle werden „geschlossene Turbinen“ ausgeführt, Fig. 14 und 15. Die Turbine wird in Spiralgehäusen oder konzentrischen Kesseln (Kesselturbinen) mit Rohrleitung untergebracht.

Da bei Verkleinerung des Winkels β_1 unter 90° der Wirkungsgrad abnimmt, so sind bei Umlaufzählen, die kleiner sein sollen, als dem Gefälle entspricht,

mehrere Einzelturbinen hintereinanderschalten, so daß jede von derselben Wassermenge durchströmt wird („Verbundturbine“) Fig. 32. Zehrt jede Turbine den z ten Teil des Gefälles auf, so wird $n_p = \frac{n}{\sqrt{z}}$, wenn die Laufraddurchmesser der Verbundturbine mit der sonst auszuführenden Einzelturbine übereinstimmen.

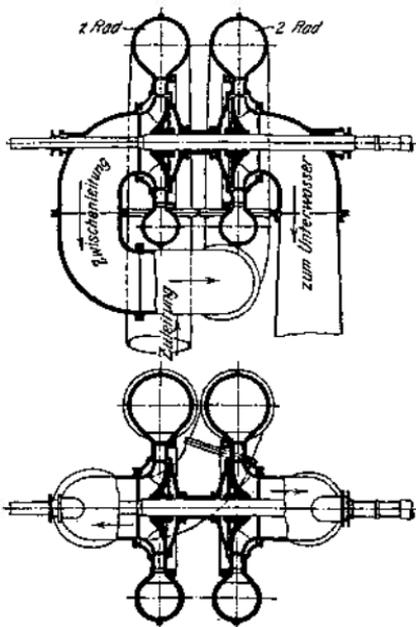


Fig. 32.

Erhöhung der Umlaufzahl wird durch Parallelschaltung erreicht, so daß jede Turbine mit ganzem Gefälle, aber geteilter Wassermenge arbeitet. Fig. 15. Die Laufrad-Eintrittsdurchmesser werden entsprechend kleiner. Ist z = Anzahl der Teilturbinen, so wird

$$n_p = n \sqrt{z},$$

n = Umlaufzahl der Einzelturbine.

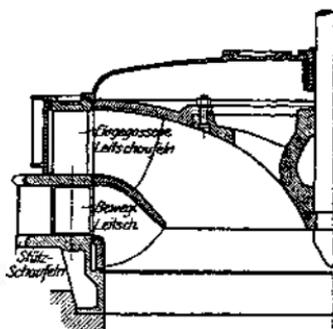


Fig. 33.

Sowohl bei hintereinander- als parallelgeschalteten Turbinen ergibt sich bequemer Ausgleich der Axialschübe.

Für kleinere, von Hochwasser beeinflusste Gefälle werden mitunter stehende Doppelturbinen gewählt, von denen die obere das Hochwasser verwertet. Im normalen Betrieb läuft das Hochwasserlaufrad nicht mit und ist dann sorgfältig gegen Wassereintritt zu schützen. Meist wird für genannten Fall die Turbine als „Etagenturbine“ nach Fig. 33 ausgebildet. Da der Saugrohrdurchmesser für die nur bei Hochwasser auftretende Wassermenge zu bemessen ist, so wird der Eintrittsdurchmesser groß, und damit die Umlaufzahl klein.

Fig. 34 zeigt eine stehende Zwillingsturbine mit ungewöhnlicher, durch örtliche Verhältnisse bedingter Saugrobranordnung.

Die Leitschaufeln werden meist aus Gußeisen, für hohe Gefälle auch aus Bronze hergestellt. Ausführung in Stahlguß empfiehlt sich, wenn die Drehbolzen aus einem Stück mit den Schaufeln bestehen. Die Öffnungsweite der Dreh-schaufeln soll außen durch eine Skala kenntlich gemacht werden. Der Regulierung der Finkschen Schaufeln ist an zwei gegenüberliegenden Punkten zu fassen, damit nur ein reines Kräftepaar unter Vermeidung jeder einseitigen Kraft zur Wirkung gelangt.

Ausführungen von Drehschaufeln siehe Fig. 26 und 27,

Die auf Grund der Schaufelklotzform zu gestaltenden Blechschaufeln des Laufrades werden entweder über einer Matrize gehämmert oder hydraulisch

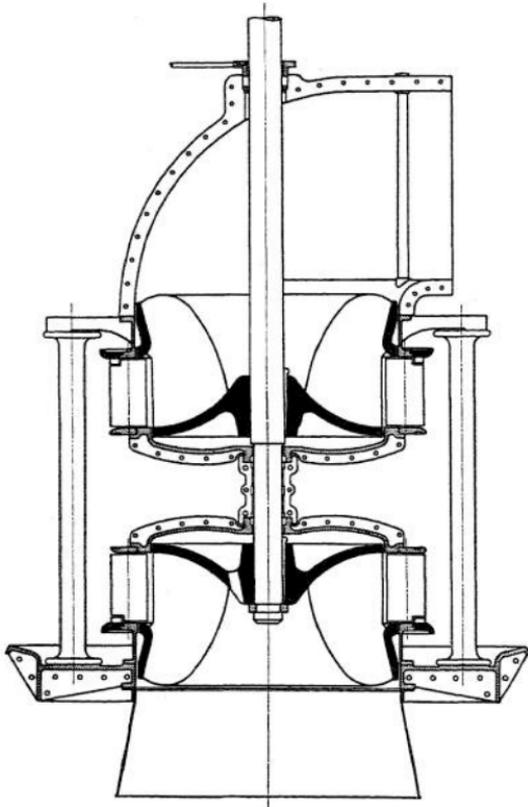


Fig. 34.

gepreßt. Die Blechkanten, die um 15 bis 20 mm eingegossen werden, sind schwalbenschwanzförmig auszustanzen.

Hat das Spiralgehäuse rechteckigen Querschnitt, so wird es entweder in Gußeisen oder in Blech hergestellt, während runde Querschnitte in Gußeisen oder Stahlguß ausgeführt werden. Mit Rücksicht auf die Biegungsbeanspruchungen der flachen Seitenwände rechteckiger Querschnitte wird bei Gefällen > 25 m der runde Querschnitt vorgezogen. Für größere Gefälle und Gehäuse sind die Seitenwände durch die Leitschaufelbolzen oder durch besondere, mit den Seitenwänden zusammengegebene Stützschaufeln (4 bis 6 bis 8 Stück) zu versteifen, die in der anzunehmenden Wasserlaufichtung und mit scharfen Kanten vorn und hinten anzuordnen sind, Fig. 27.

Die Saugrohre, Fig. 35—37, bestehen aus Beton oder Blech; im ersteren Fall wird das Saugrohr zur

Fundamentierung der Turbine benutzt, während Blechrohre hängend anzuordnen sind. Gekrümmte Saugrohre ermöglichen die Nutzbarmachung der

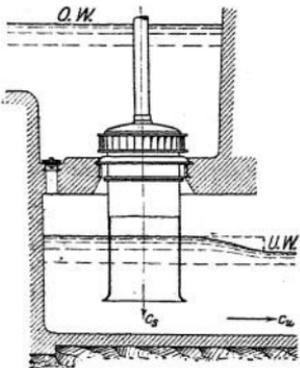


Fig. 35.

Saugrohrgeschwindigkeit c_s für die Bildung der Untergrabengeschwindigkeit c_u , so daß das Gefälle vergrößert wird. In den „erweiterten“ Saugrohren nimmt der Querschnitt nach dem Ausfluß hin zu, dementsprechend die Geschwindigkeit von c_s auf c_u ab. Ersparnis der Gefällhöhe $\frac{c_s^2 - c_u^2}{2g}$.

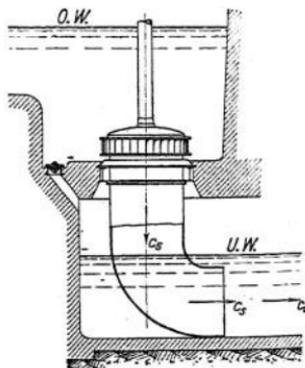


Fig. 36.

Zur Verhinderung des Abreißens bei jedem Barometerstand soll die größte Saughöhe 5 bis 6 m nicht überschreiten. Zur Vermeidung von Wirbeln glatte Ausführung ohne Nieten, Fugen usw. Abdichtung der aus dem Gehäuse führenden liegenden Turbinenwelle durch Stopfbuchse.

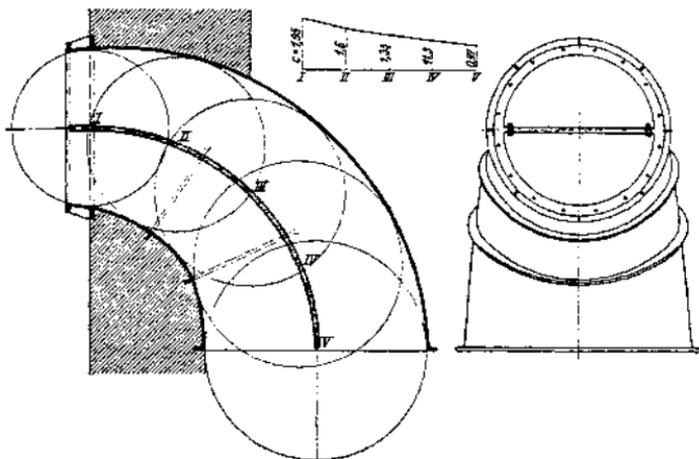


Fig. 37. (Amme, Giesecke & Konegen, Braunschweig.)

Der Axialdruck kann durch Öffnungen im Laufrad oder durch Umföhrungsrohre, die Deckelraum und Saugrohr miteinander verbinden, teilweise beseitigt werden, so daß für liegende Turbinen Ausführung der Ringschmierlager mit Stützflächen meist genügt. Ausguß der Lagerschalen mit Weißmetall. Bei starken Beanspruchungen wird Kühlung des Öles erforderlich.

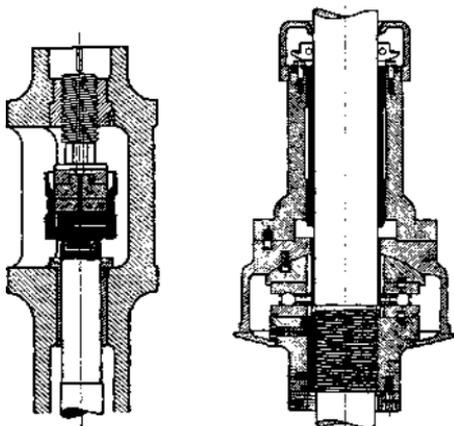


Fig. 38.

Fig. 39. (Briegleb, Hansen & Co., Gotha.)

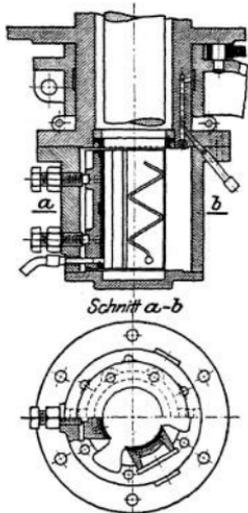


Fig. 40. (Briegleb, Hansen & Co., Gotha.)

Die Unterstützung stehender Wellen durch Pockholzklotze unter Wasser ist nur noch bei kleineren und billigen Turbinen mitunter zu finden. Fig. 38 zeigt den bequem zugänglichen, aber teuren Fontaineschen Oberwasserzapfen.

In der oberen Laterne der gußeisernen Hohlwelle ist das Spurlager untergebracht. Das ganze Gewicht der Turbine wird durch die von der Hohlwelle umschlossene Tragstange auf das Fundament übertragen.

Da für die großen Drehmomente neuerer Turbinen gußeiserne Hohlwellen nicht mehr am Platze sind, so wird der Oberwasserzapfen nur noch selten ausgeführt und meist durch Ringzapfen mit massiver Welle ersetzt.

Die Lager werden als Kugellager, Fig. 39, oder mit Spurlinsen aus Rotguß, Stahl oder feinkörnigem Grauguß ausgeführt. Kugelform der Linsen ist als Mittel gegen unrichtige Lage der Linse anzusehen.

Axiale Einstellung ist nach Fig. 39 durch Gewinde zu ermöglichen. Bei sehr großen Ausführungen werden die Lager mit Preßölentlastung ausgeführt, d. h. das Gewicht wird durch Drucköl aufgenommen, das zwischen die Spurlinsen gepreßt wird.

Fig. 40 zeigt die Ausführung eines Halslagers; zur Erleichterung der Einstellung und Wärmeabfuhr sind die Schalen in Segmentform ausgeführt. Die Zahl der Halslager ist möglichst zu beschränken, freie Achsenlänge ist bis zu 5 m möglich.

Um bei plötzlichen Entlastungen der Turbine gefährliche Druckstöße in der Rohrleitung zu verhindern, ist diese mit einem möglichst masselosen Sicherheitsventil oder besser mit einem „Nebenauslaß“ auszuführen. Bei Abschluß der Leitvorrichtung wird der Nebenauslaß vom Regler geöffnet, so daß bei zunächst unverändertem Wasserzufluß das überschüssige Wasser abfließen kann. Nach einiger Zeit schließt der Regler den Nebenauslaß langsam wieder ab, so daß Wasserverluste vermieden werden.

e) Die spezifischen Größen.

Es seien: A eine vorhandene Turbine, X und Y je eine Turbine gleicher Art wie A , nur mit den Gefällen H_x und $H_y = 1$. S ist eine Turbine mit dem Gefälle $H_1 = 1$ und der Leistung $N_s = 1$. Sämtliche Turbinen sind geometrisch ähnlich gebaut. Die auf die verschiedenen Turbinen sich beziehenden Zeiger sind α , x , y und s .

Nach den Hauptgleichungen sind die Geschwindigkeiten der \sqrt{H} proportional. Es folgt:

$$u_a : u_x = \sqrt{H_a} : \sqrt{H_x} ; \quad u_x = u_a \cdot \sqrt{\frac{H_x}{H_a}}$$

Ebenso:

$$n_x = n_a \sqrt{\frac{H_x}{H_a}}$$

Bei gleichen Querschnitten sind die Wassermengen den Geschwindigkeiten proportional:

$$Q_x = Q_a \sqrt{\frac{H_x}{H_a}}$$

Für $H_x = 1 = H_y$ wird:

$$n_y = \frac{n_a}{\sqrt{H_a}} ; \quad Q_y = \frac{Q_a}{\sqrt{H_a}}$$

Die Anzahl der PSe folgt allgemein aus:

$$N_a = \frac{1000 Q_a \cdot H_a \cdot \eta}{75}$$

$$N_x = \frac{1000 Q_x \cdot H_x \cdot \eta}{75}$$

$$\frac{N_x}{N_a} = \frac{Q_x \cdot H_x}{Q_a \cdot H_a} ; \quad N_x = N_a \sqrt{\frac{H_x}{H_a}} \cdot \frac{H_x}{H_a}$$

$$\text{Für } H_s = 1 \quad N_y = N_a \frac{1}{\sqrt{H_s^3}}$$

Für Turbine S mit $H_s = 1$ und $N = 1$ wird:

$$Q_s = \frac{N \cdot 75}{1000 H_s \cdot \eta} = \frac{75}{1000 \cdot \eta} \text{ cbm sek.}$$

Infolge der vorausgesetzten, geometrischen Ähnlichkeit der Turbinen S und Y werden sich die Durchmesser der Saugrohranfänge wie die Quadratwurzeln aus den Wassermengen verhalten.

$$D_s = D_y \cdot \sqrt{\frac{Q_s}{Q_y}} = D_y \cdot \sqrt{\frac{75}{1000 \cdot \eta} \cdot \frac{1}{Q_y}}$$

Für die Eintrittsdurchmesser D'_s und D'_y am äußeren Laufradumfang gilt:

$$D'_s : D'_y = D_s : D_y.$$

Für die Umlauffzahlen folgt dann:

$$n_s = n_y \cdot \frac{D'_y}{D'_s} = n_y \cdot \sqrt{\frac{1000 \cdot \eta \cdot Q_y}{75}}$$

Mit Benutzung der früheren Gleichungen wird schließlich:

$$n_s = n_a \sqrt{\frac{1000 \cdot \eta}{75} \cdot \frac{Q_a}{H_a \sqrt{H_a}}} = n_a \sqrt{\frac{1000 \cdot \eta \cdot Q_a H_a}{75 H_a^3 \sqrt{H_a}}} = \frac{n_a}{H_a} \sqrt{\frac{N_a}{\sqrt{H_a}}}$$

n_s wird als „spezifische Drehzahl“ des betreffenden Turbinentyps bezeichnet, da alle Turbinen geometrisch ähnlicher Gestalt denselben Wert für n_s aufweisen.

Nach Prof. Camerer ist:

- für Tangentialräder: n_s bis 30.
 für Francis-Turbinen: $n_s = 40$ bis 100 bei Langsamläufern,
 $n_s = 100$ bis 200 bei Normalläufern,
 $n_s = 200$ bis 300 bei Schnelläufern.

Bei Mehrfachturbinen wächst nach S. 967 n_s mit der Quadratwurzel aus der Laufradzahl.

Soll beispielsweise ein Gefälle $H = 9$ m bei $Q = 60$ cbm/sek mit $n = 150$ ausgenutzt werden, so würde

$$n_s = \frac{n_a}{H_a} \sqrt{\frac{N_a}{\sqrt{H_a}}} = \frac{150}{10} \sqrt{\frac{N_a}{\sqrt{9}}} = 8,67 \cdot \sqrt{N_a}.$$

Bei Verwertung in Einheiten von 400 PS wurde $n_s = 8,67 \sqrt{400} = 173$, was in Normalläufern erreicht werden könnte. In 800-PS-Einheiten würde $n_s = 245$. Es wären Schnellläufer zu wählen. Die Ausnutzung des Gefälles in einer einzigen Turbine von 5400 PS würde auf $n_s = 8,67 \sqrt{5400} = 637$ führen. Hierbei wäre selbst bei Anordnung von 4 Rädern auf einer Welle immer noch

$$n_s = \frac{637}{2} = 318,5.$$

f) Anwendungsgebiet der Aktions- und Reaktions-Turbinen.

Da die Aktionsturbinen durch Einzeldüsen teilweise beaufschlagt werden, so sind sie für die Verwertung kleiner Wassermengen, die bei den vollbeaufschlagten Reaktionsturbinen auf zu kleine Abmessungen führen würden, geeignet. Zur Vermeidung von Störungen in der Strömung dürfen die nicht ausgefüllten Aktionsschaufeln nicht ins Unterwasser tauchen, dementsprechend müssen die Aktionsturbinen mit „Freihang“, d. h. hochwasserfrei über Unterwasserspiegel

aufgestellt werden. Hieraus folgt ihre Eignung für hohe Gefälle, bei denen der Freihang in *v. H.* des Gefalles einen kleineren Verlust ausmacht.

Die Francis-Turbine ist infolge Anordnung des Saugrohrs unempfindlich gegen Schwankungen des Unterwasserspiegels. Sie kann in einfacher Ausführung noch für Gefälle > 150 m Verwendung finden, doch wird ihr Anwendungsgebiet durch die hohen spezifischen Umlaufzahlen begrenzt.

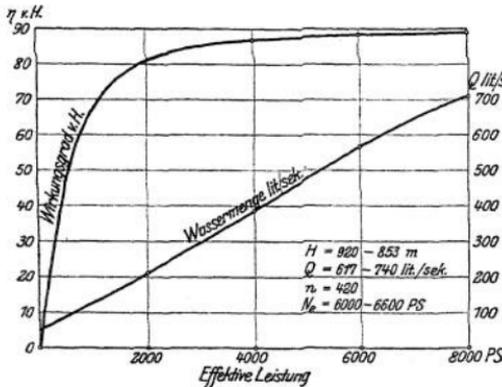


Fig. 41. (Freistrahlturbine Adamello, ausgeführt von Escher, Wyss & Co., Zürich.)

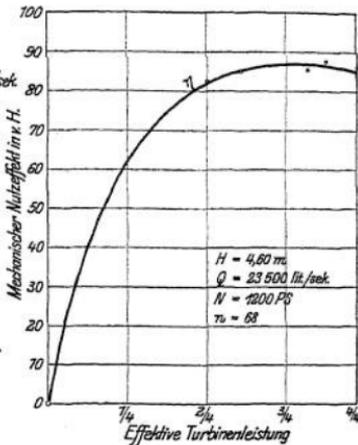


Fig. 42. (Vierfach-Francis-Turbine Rheinfelden, ausgeführt von Escher, Wyss & Co., Zürich.)

Bei hohen Gefällen geben niedrige spezifische Umlaufzahlen infolge des kleinen Spalt-druckes und der großen Wassergeschwindigkeiten Veranlassung zu Wirbelbildungen und Anfressungen. Für $n_s < 50$ sind nach Versuchen von Reichel und Wagenbach (Z. Ver. deutsch. Ing. 1913, S. 441 f.) entweder Verbund-Francis-Turbinen oder Strahl-turbinen mit mehreren, ein oder zwei Laufräder beaufschlagenden Düsen zu wählen. Nach denselben Versuchen kann die spezifische Umlaufzahl der Becherturbinen mit einem Strahl bis auf $n_s = 35$ gesteigert werden.

Fig. 41 und 42 zeigen Wirkungsgradkurven, auf Grund von Versuchen ermittelt.

g) Angaben für den Entwurf.

1. Aktionsturbinen¹⁾.

D = Raddurchmesser (in m eingesetzt und über Eintrittskante gemessen).

	Löffelturbinen.	Peltonturbinen.
Düsendurchmesser <i>d</i> in mm	$d = 100 D - 10 D^2 + 5 \text{ mm}$	$d = 100 D - 10 D^2 + 5 \text{ mm}$
Radiale Schaufelhöhe <i>h</i> in mm	$h = 150 D - 30 D^2 + 5 \text{ mm}$	$h = 200 D - 40 D^2 + 5 \text{ mm}$
Achbiale Schaufelweite <i>b</i> in mm	$b = 250 D - 20 D^2 + 30 \text{ mm}$	$b = 300 D - 25 D^2 + 20 \text{ mm}$
Gehäusebreite <i>B</i>	$B = 3b$	$B = 3b$
Teilung <i>t</i>	$t = 0,40 \text{ bis } 0,45 \frac{d}{\sin \delta_1}$	Teilung <i>t</i> s. S.

Kegelwinkel der Düse am Austritt = 60 bis 80°. Halber Schneidenwinkel $\beta_1 = 7 \text{ bis } 16^\circ$ (s. Fig. 7). Austrittswinkel $\beta_2 = 5 \text{ bis } 8^\circ$.

¹⁾ Geipke, Turbinen und Turbinenanlagen. Berlin 1906, Julius Springer.

2. Francis-Turbinen. (Normalflüher).

$$\text{Laufradbreite am Eintritt: } b_1 = \frac{Q}{\pi D_1 \cdot c_{1r}} \cdot \frac{a_1 + s_1}{a_1} ;$$

c_{1r} = Radialkomponente von c_1 .

$$\text{Saugrohrquerschnitt: } \frac{D_3^2 \pi}{4} = F_3 = F_2 = \frac{Q}{c_{2r}} \cdot \frac{a_2 + s_2}{a_2} \text{ (vgl. S. 960).}$$

Äußerer Laufraddurchmesser $D_1 = D_0 + (50 \text{ bis } 150 \text{ mm})$. D_1 richtet sich nach der gegebenen Umfangsgeschwindigkeit und der gewünschten Umlaufzahl.

Schaufelzahl des Laufrades: $z_1 \approx c_1 \cdot \sqrt{D} + 1$, D als Mittel zwischen Eintritts- und Austrittsdurchmesser D_1 und D_0 .

Schaufelzahl des Leitrades:

$$z_0 \approx (2 \text{ bis } 2,5) \cdot c_{1r} \cdot \sqrt{D} \text{ für feste Schaufeln,}$$

$$z_0 \approx (1,5 \text{ bis } 2 \text{ bis } 2,5) \cdot c_{1r} \cdot \sqrt{D} \text{ für Drehschaufeln¹⁾.}$$

(Mitunter wird gewählt: Leitschaufelteilung $t_0 = \frac{D_1}{10} + 90 \text{ mm.}$)

Lichtweite des Leitradaustrittes $a_0 = 50 \text{ bis } 135 \text{ mm}$ je nach Turbinengröße. Zur Vermeidung von Verstopfungen soll lichte Austrittsweite des Laufrades $a_2 \geq 30 \text{ bis } 50 \text{ mm}$ an den engsten Stellen betragen.

Zuleitungswinkel $\delta_1 = 20 \text{ bis } 30^\circ$, für Drehschaufelregelung empfiehlt sich $\delta_2 = 100 \text{ bis } 115^\circ$.

$$\text{Spaltweite zwischen Leit- und Laufrad} = \frac{D_1}{800} .$$

II. Die Zentrifugalpumpen.

a) Hauptgleichung. Bedeutung der Schaufelwinkel.

Während bei der Arbeit leistenden Turbine Gefälle in Geschwindigkeit umgewandelt wird, ist bei der Arbeit verzehrenden Zentrifugalpumpe Geschwindigkeit in Druck umzusetzen. Die Flüssigkeit tritt am inneren Umfang ein, am äußeren Umfang aus.

Es wird:

$$\eta_h \cdot H_n = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} .$$

Der Ausdruck $\frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g}$ wird als Spaltdruck oder „statische“ Druckhöhe im Gegensatz zur „dynamischen“ Druckhöhe $\frac{c_2^2 - c_1^2}{2g}$ bezeichnet.

Mit dem die Verluste berücksichtigenden Faktor η_h ist die geforderte Druckhöhe H_n zu multiplizieren. $\frac{1}{\eta_h} = \varepsilon =$ hydraulischer Nutzeffekt. $\eta =$ Gesamtwirkungsgrad. Durch Einsetzung der aus den Geschwindigkeitsdiagrammen nach dem Kosinussatz sich ergebenden Werte für w_1^2 und w_2^2 folgt:

$$\eta_h \cdot g \cdot H_n = c_2 \cdot u_2 \cdot \cos \delta_2 - c_1 \cdot u_1 \cdot \cos \delta_1 .$$

Ist $u_1 \perp c_1$, also $\delta_1 = 90^\circ$, so wird: $\eta_h \cdot g \cdot H_n = c_2 \cdot u_2 \cdot \cos \delta_2$.

(Vgl. die Ableitungen auf S. 952.)

In Fig. 43 sind für die Annahmen, daß c_1 radial gerichtet ist ($\delta_1 = 90^\circ$) und die Radialkomponente c_{2r} der absoluten Austrittsgeschwindigkeit gleich c_1 ist, verschiedene Schaufelformen wiedergegeben.

¹⁾ Thomann, Wasserturbinen. Stuttgart 1908, K. Wittwer.

Form AB stellt die sog. „neutrale Schaufel“ dar, deren Ermittlung Fig. 44 zeigt. $AC =$ absoluter Weg des Wassers. Infolge konstanter Durchflußquerschnitte ist $c_1 = c_2 = c_r = \text{konst.}$ In der Zeit t wird Weg $AC = c_1 \cdot t$ und $CB = u_2 \cdot t$ zurückgelegt, dadurch Bestimmung des Winkels φ . In den Punkten 1, 2 und 3 wird das dort bekannte u'_1, u'_2 und c_r angetragen, wodurch mit w die Schaufelform bestimmt wird. c_2 ist radial gerichtet, $\delta_2 = 90^\circ$. Folglich:

$$\eta_h \cdot g \cdot H_N = c_2 \cdot u_2 \cdot \cos \delta_2 = 0.$$

Die Beschleunigung durch die Umdrehung des Rades dient ausschließlich zur Erhöhung der Relativgeschwindigkeit. Das Wasser verläßt das Rad in demselben Zustande, in dem es eingetreten ist.

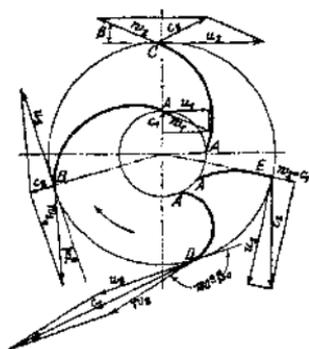


Fig. 43.

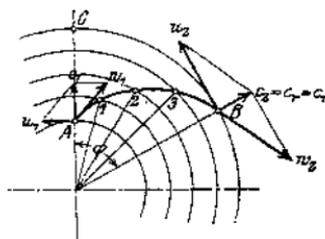


Fig. 44.

Schaufel AE endigt radial. Es ist $c_2 \cdot \cos \delta_2 = u_2$, sonach $\eta_h \cdot H_N = \frac{u^2}{g}$. Zuwachs an Geschwindigkeitshöhe:

$$\frac{c_2^2 - c_1^2}{2g}; \text{ da } c_1 = w_2; \text{ so wird: } \frac{c_2^2 - w_2^2}{2g} = \frac{u^2}{2g} = \frac{\eta_h \cdot H_N}{2}.$$

Die Druckhöhe wird bei der radialen Schaufel zur Hälfte statisch, zur Hälfte dynamisch erzeugt.

Schaufel AC ist um einen Winkel δ gegen den Radumfang geneigt, und es ist w_1 auf w_2 vergrößert worden. Da aber, wie die neutrale Schaufelform zeigt, eine Steigerung der Relativgeschwindigkeit auf w_{20} möglich ist, so muß eine

Zunahme der hydraulischen Pressung um $\bar{h} = \frac{w_{20}^2 - w_2^2}{2g}$ stattgefunden haben.

Wie diese Gleichung zeigt, muß die hydraulische Pressung mit abnehmender Relativgeschwindigkeit w_2 wachsen. w_2 ist am kleinsten bei der radial endigenden Schaufel. Wird die Schaufel mehr nach vorn gekrümmt, so wird w_2 größer, H wächst, die Druckzunahme ist in der Hauptsache dynamischer Art. Schaufel AD ist unter gleichem Winkel β_0 nach vorwärts gekrümmt, wie die neutrale Form AB rückwärts. Es wird:

$$\eta_h \cdot g \cdot H_N = u_2 \cdot c_2 \cos \delta_2, \quad c_2 \cdot \cos \delta_2 = 2 u_2, \quad \text{sonach } \eta_h \cdot g \cdot H_N = 2 u_2^2.$$

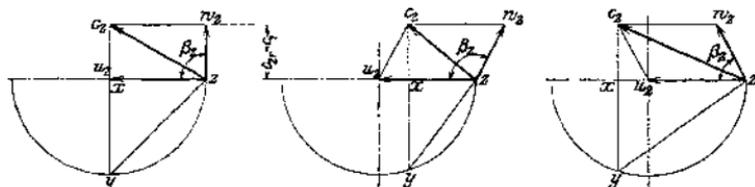


Fig. 45—47.

Nach Fig. 43 ist:

$$\frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} = \frac{c_2^2 \cdot \cos^2 \delta_2}{2g} = \frac{(2u_2)^2}{2g} = \eta_h \cdot H_n.$$

Die ganze Drucksteigerung ist dynamischer Art. Bei Schaufel AD tritt das Wasser ohne jeglichen Überdruck aus dem Rad aus.

Eine übersichtliche Darstellung des Einflusses von Winkel β_2 auf die statische und dynamische Druckerhöhung geben die Fig. 45—47 nach Prof. Grassmann.

$$xy^2 = (2u_2 - c_2 \cdot \cos \delta_2) \cdot c_2 \cdot \cos \delta_2 = 2u_2 \cdot c_2 \cdot \cos \delta_2 - c_2^2 \cdot \cos^2 \delta_2.$$

$$\frac{xy^2}{2g} = \frac{u_2 \cdot c_2 \cdot \cos \delta_2}{g} - \frac{c_2^2 \cdot \cos^2 \delta_2}{2g}.$$

Nun ist:

$$\text{Gesamthöhe} = \frac{u_2 \cdot c_2 \cdot \cos \delta_2}{g} = \eta_h \cdot H_n;$$

$$\frac{c_2^2 \cdot \cos^2 \delta_2}{2g} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} = \text{dynamische Druckhöhe.}$$

$$\frac{xy^2}{2g} = \frac{u_2 \cdot c_2 \cdot \cos \delta_2}{g} - \frac{c_2^2 \cdot \cos^2 \delta_2}{2g}.$$

Statische Druckhöhe = Gesamthöhe - dynamische Druckhöhe

(Da $\frac{u_2 c_2 \cos \delta_2}{g} = \eta_h \cdot H_n = \text{Gesamthöhe}$, $\frac{c_2^2 \cdot \cos^2 \delta_2}{2g} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} = \text{dynamische Druckhöhe}$.)

$$\frac{zy^2}{2g} = \frac{xy^2}{2g} + \left(\frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} \right).$$

Gesamthöhe = statische Druckhöhe + dynamische Druckhöhe.

Es stellen also dar: zy die Gesamthöhe,

xy die statische,

xz die dynamische Druckhöhe.

Die Diagramme zeigen die Verteilung der Druckhöhen für verschiedene Winkel β_2 . Bei gleichbleibender Umfangsgeschwindigkeit u_2 ergibt sich die größte Förderhöhe bei der vorwärts gekrümmten Schaufel nach Fig. 47. Die Zunahme der Druckhöhe ist wesentlich dynamisch, und diese dynamische Druckhöhe ist im Leitrad in statische umzusetzen, wobei jedoch beträchtliche Verluste durch Stoßwirkung, Wirbelbildung usw. entstehen. Meist gelangen deshalb rückwärtsgekrümmte Schaufeln zur Anwendung, bei denen der statische Anteil bedeutender ist; für gleiche Förderhöhen werden jedoch gegenüber der rückwärtsgekrümmten Form größere Umfangsgeschwindigkeiten erforderlich.

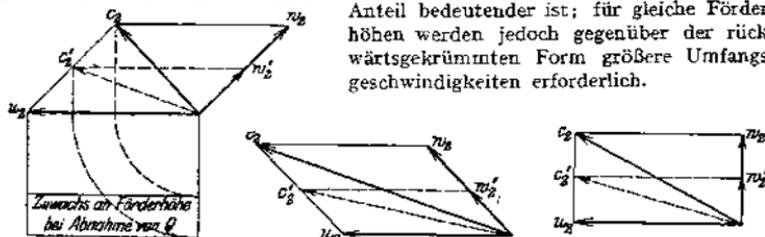


Fig. 48—50.

Die Fig. 48—50 zeigen den Einfluß der Schaufelform auf die Förderhöhe, wenn bei konstanter Umlaufzahl die Fördermenge geändert wird. Bei der rückwärtsgekrümmten Schaufel nimmt mit Abnahme von Q , c_2 und w_2 der Faktor $c_2 \cdot \cos \delta_2$ und dementsprechend die Förderhöhe $u_2 \cdot c_2 \cos \delta = \eta_h \cdot g \cdot H_n$ zu,

umgekehrt bei der vorwärtsgekrümmten Schaufel, während bei der radial endigenden Schaufel H konstant bleibt. Die theoretische Charakteristik gibt Fig. 51 — das sog. Q/H -Diagramm — wieder. Diese Q/H -Kurven werden erheblich beeinflusst durch die in den Schaufelräumen auftretenden und mit dem Quadrat der Geschwindigkeit bzw. von Q wachsenden Reibungswiderständen. Die an ausgeführten Pumpen zur Ermittlung der Charakteristik anzustellenden Versuche ergeben dementsprechend einen parabolartigen Verlauf dieser Kurven. Der hierbei gemessene Wirkungsgrad wird ebenfalls in Abhängigkeit von Q eingetragen.

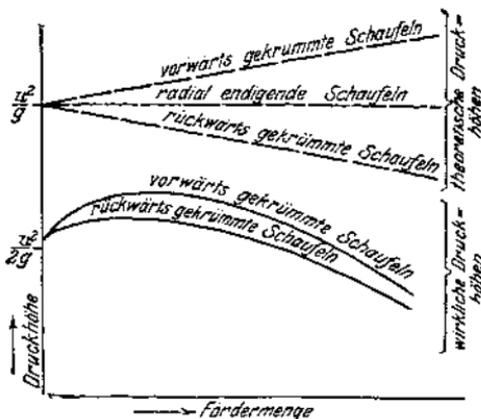


Fig. 51.

Die aus der Hauptgleichung für $Q = 0$ sich ergebende

Druckhöhe $\frac{u_2^2 - u_1^2}{2g}$ wird in Wirklichkeit annähernd $\frac{u_2^2}{2g}$ betragen, wobei angenommen ist, daß das Wasser in der geschlossenen Pumpe auch im innersten Teile rotiert, so daß $u_1 = 0$. Mit der Eröffnung des Drosselschiebers nimmt der Druck bei den vorwärtsgekrümmten Schaufeln schneller zu als bei Rückwärtskrümmung.

b) Geschwindigkeitsdiagramme.

1. Annahme: $\delta_1 = 90^\circ$, c_1 radial gerichtet. Mit Rücksicht auf den Spaltverlust ist die Wassermenge Q zu vergrößern auf $(1 + \alpha) \cdot Q = Q'$, so daß also der Spaltverlust zu $\alpha v H$ ($\alpha \approx 0,05$) der Fördermenge vorausgesetzt wird. Wassergeschwindigkeit im Saugrohr $c_1 = 2$ bis 4 m/sek. Es muß sein:

$$A = h_s + \frac{c_1^2}{2g} + h_1 + R_s,$$

worin $A = 10,333 \text{ m} = \text{Atm. Druck in Wassersäule}$, $R_s = \text{Reibung in Fußventil und Leitung}$, $h_s = \text{Saughöhe}$, $h_1 = \text{Druck beim Eintritt in das Laufrad}$. Ist $D_s = \text{Saugrohrdurchmesser}$, $d_n = \text{Laufradnabdurchmesser}$, so hat die freie Fläche vor dem Laufradeintritt die Größe:

$$F'_1 = (D_s^2 - d_n^2) \cdot \frac{\pi}{4},$$

somit Geschwindigkeit in dieser Fläche:

$$c'_1 = \frac{Q'}{F'_1}.$$

Beim Eintritt in die Schaufeln wird diese Geschwindigkeit infolge der Verengung des Querschnittes plötzlich erhöht auf $c_1 = c'_1 \cdot \frac{a_1 + s_1}{a_1}$.

(Um diesen Übergang möglichst verlustlos zu gestalten, werden die Schaufeln vorne auf einer Länge gleich der doppelten Schaufelstärke zugespitzt.)

Die letzte Gleichung kann auch in der Form $\frac{c_1}{c'_1} = \frac{a_1 + s_1}{a_1}$ geschrieben wer

den, woraus sich die in Fig. 52 dargestellte zeichnerische Ermittlung von c_1 und $a_1 + s_1$ ergibt.

Das rechtwinklige Dreieck abc hat die Seiten $ab = u_1 = u_2 \cdot \frac{D_1}{D_2}$, $bc = c_1'$. cd = angenommener Schaufelstärke s_1 . Durch d wird Parallele zu ac gezogen. Ein um a mit t_1 gezogener Kreis trifft diese Parallele in e . Die Senkrechte von e auf ab trifft ab in f und ac in g . Die Verlängerung von ae schneidet die Verlängerung von bc in h . Dann ist: $gf = a_1$ und $ge = s_1$, $bh = c_1$. Denn es ist

$$\sin \beta_1 = \frac{a_1 + s_1}{t_1} \quad \text{und} \quad \frac{c_1}{c_1'} = \frac{a_1 + s_1}{a_1}.$$

Unbekannt sind jedoch noch u_2 und t_1 .

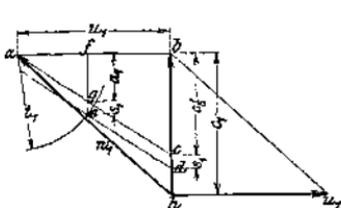


Fig. 52.

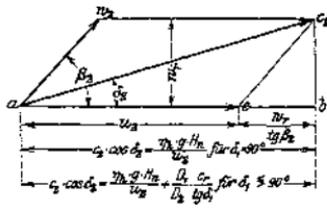


Fig. 53.

Gewählt wird vor Aufzeichnung der Diagramme: D_1 und D_2 ($D_2 = 2$ bis $2,5 D_1$), $\beta_2 = 125$ bis 160° (rückwärtsgekrümmte Schaufeln), Schaufelzahl z , Schaufelstärke s_1 . Daraus folgt:

$$t_1 = \frac{D_1 \cdot \pi}{z}, \quad t_2 = \frac{D_2 \cdot \pi}{z}, \quad \sin \beta_2 = \frac{a_2 + s_2}{t_2},$$

woraus a_2 bestimmt wird. Nach Wahl der Austrittsbreite b_2 berechnet sich die Radialkomponente der Austrittsgeschwindigkeit:

$$w_r = \frac{Q'}{F_2}; \quad F_2 = D_2 \cdot \pi \cdot b_2 \cdot \frac{a_2}{a_2 + s_2}.$$

Nach der Hauptgleichung ist für $\delta_1 = 90^\circ$:

$$\cos \delta_3 = \frac{\eta_h \cdot g \cdot H_n}{u_2 \cdot c_2} = \frac{a \cdot b}{c_2},$$

Fig. 53.

Sonach

$$\frac{\eta_h \cdot g \cdot H_n}{u_2} = a \cdot b.$$

$$u_2 = -\frac{w_r}{2 \operatorname{tg} \beta_2} + \sqrt{\left(\frac{w_r}{2 \operatorname{tg} \beta_2}\right)^2 + \eta_h \cdot g \cdot H_n}.$$

Mit u_2 , β_2 und w_r kann das Austrittsparallelogramm aufgezeichnet werden. 2. Annahme $\delta_1 < 90^\circ$. Die Hochdruckzentrifugalpumpen werden meist mit $\delta_1 < 90^\circ$ ausgeführt. Da die Schaufelreibungsverluste mit dem Quadrat der Relativgeschwindigkeit zunehmen, so ist man bestrebt, Schaufelweite a_1 zu vergrößern, um w_1 klein zu halten. Andererseits treten jedoch am Eintritt Verluste dadurch auf, daß das Wasser nicht mehr radial einströmt. Bezüglich der ersten Verluste ergibt sich ein Mindestwert, wenn $w_1 = c_1$, also $\beta_1 = \delta_1$ ist.

Im Austrittsparallelogramm ist:

$$a \cdot b = c_2 \cdot \cos \delta_2 = u_2 + \frac{w_r}{\operatorname{tg} \beta_2},$$

im Eintrittsparallelogramm:

$$f h = c_1 \cdot \cos \delta_1 = \frac{c_r}{\operatorname{tg} \delta_1}.$$

Fig. 53 und 54.

Werden diese Werte in die Hauptgleichung:

$$u_2 c_2 \cdot \cos \delta_2 - u_1 c_1 \cdot \cos \delta_1 = \eta_h \cdot g \cdot H_n$$

eingesetzt, so folgt:

$$u_2 = \frac{D_1}{D_2} \cdot \frac{c_r}{2 \operatorname{tg} \delta_1} - \frac{w_r}{2 \operatorname{tg} \beta_2} + \sqrt{\left[\frac{D_1}{D_2} \cdot \frac{c_r}{2 \operatorname{tg} \delta_1} - \frac{w_r}{2 \operatorname{tg} \beta_2} \right]^2 + \eta_h \cdot g H_n}.$$

Für $\beta_1 = \delta_1$ folgt:

$$u_2 = - \frac{w_r}{2 \operatorname{tg} \beta_2 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]} + \sqrt{\left[\frac{w_r}{2 \operatorname{tg} \beta_2 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]} \right]^2 + \frac{\eta_h \cdot g H_n}{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2}}.$$

Nach Wahl von D_1 , D_2 , β_2 und b_2 kann mit dem sich ergebenden w_r die Umfangsgeschwindigkeit u_2 berechnet und mit u_2 , β_2 und w_r das Austrittsparallelogramm aufgezeichnet werden.

Mit der radialen Eintrittsgeschwindigkeit

$$c_r' = \frac{Q'}{F'} \quad , \quad t_1 = \frac{D_1 \pi}{z} \quad \text{und} \quad u_1 = u_2 \cdot \frac{D_1}{D_2}$$

ist nach Fig. 55 das Eintrittsparallelogramm bestimmt.

$$a b = \frac{u_1}{2} \quad , \quad b h = c_r.$$

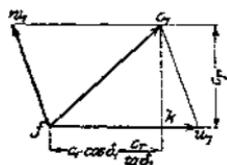


Fig. 54.

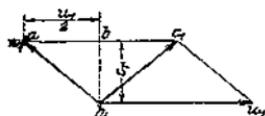


Fig. 55.

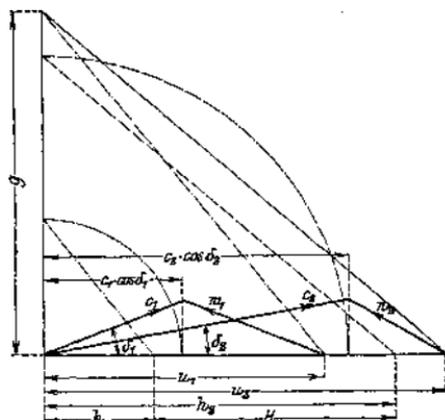


Fig. 56.

Die Konstruktion ist grundsätzlich gleicher Art wie in Fig. 52.

Nach Fig. 56 ist festzustellen, ob die gewählten Verhältnisse der Hauptgleichung entsprechen. (In Fig. 56 verhält sich: $g : u_2 = c_2 \cdot \cos \delta_2 : h_2$, $g : u_1 = c_1 \cdot \cos \delta_1 : h_1$. $h_2 - h_1$ gibt sonach die Förderhöhe an.)

c) Schaufelform.

Diese ist so zu wählen, daß sich die Relativgeschwindigkeit w_1 stetig auf w_2 ändert. Der „mittlere Wasserfaden“ kann als geometrischer Ort der Mittelpunkte

der die Schauelfkurven tangierenden Kreise bestimmt werden. Die Durchtrittsflächen liegen senkrecht zu diesen Wasserfäden, und bei ihrer Ermittlung ist zu beachten, daß im Axialschnitt die Endpunkte der Durchschnitlinien (als Projektionen der Durchtrittsflächen) infolge des Schauelfprofils auf verschiedenen Höhen liegen, so daß sich trapezförmige Querschnitte ergeben.

Einfache, aber schlechte Schauelform nach Fig. 57. An den beliebigen Radius BC wird in B Winkel β_2 , in C Winkel $\beta_1 + \beta_2$ angetragen, dessen Schenkel den inneren Radkreis in N schneidet. Die Verlängerung von BN schneidet in A ein. Eine in der Mitte von AB errichtete Senkrechte schneidet den Schenkel des Winkels β_2 im Mittelpunkt O der Schauelfkurve. Fr. Neumann¹⁾ schlägt vor, Anfang und Ende der Schaukeln zur Vermeidung der Verengung des Wasserstrahles in Evolventen zu krümmen, Fig. 58. (S. S. 957.)

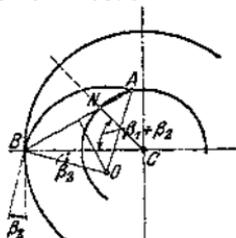


Fig. 57.

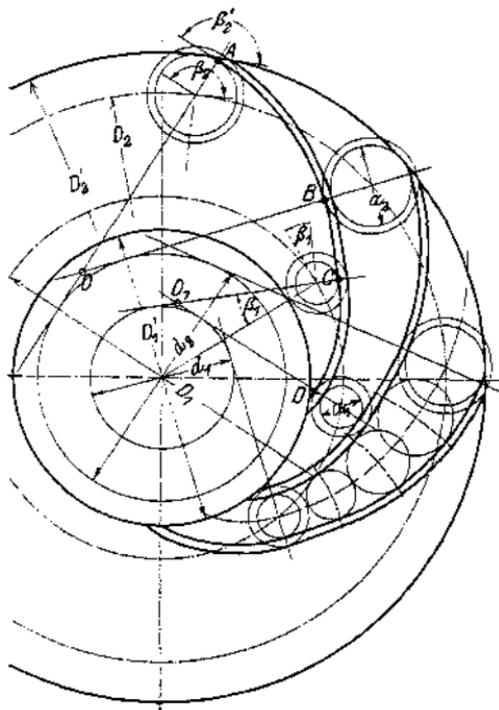


Fig. 58.

Grundkreisdurchmesser der Evolventen für Ein- und Austritt: $d_1 = \frac{z(a_1 + s_1)}{\pi}$ und $d_2 = \frac{z(a_2 + s_2)}{\pi}$. Die Umfangsgeschwindigkeiten u_1 und u_2 beziehen sich auf die durch die Mitten der Lichtweiten gehenden Kreise D_1 und D_2 , die für die Umlaufzahl bestimmend sind. Da das Maß des äußeren Durchmessers D'_2 eine runde Zahl sein soll, so wird dieser und der Winkel β'_2 ($\approx 155^\circ$) gewählt, woraus folgt:

$$D_2 = \sqrt{D_1'^2 + a_2^2 + 2a_2 \cdot D_1' \cdot \cos \beta'_2},$$

$$\left(da \quad \frac{D_2^2}{4} = \frac{D_1'^2}{4} + \frac{a_2^2}{4} - \frac{2 a_2 D_1' \cos(180 - \beta'_2)}{4} \right).$$

D_1 ergibt sich aus der Konstruktion.

Beim Austritt aus dem Laufrad wird infolge der Querschnittserweiterung die unter dem Winkel δ_2 gegen den Umfang gerichtete absolute Austrittsgeschwindigkeit c_2 den kleineren Wert:

$$c'_2 = c_2 \cdot \frac{a_2}{a_2 + s_2}$$

annehmen.

¹⁾ Neumann, Die Zentrifugalpumpen. 2. Aufl. Berlin 1912. Julius Springer.

Nach Wahl der Austrittsbreite b_2 am Laufrad folgt:

$$a_1 + s_1 = \frac{Q}{c_2' \cdot b_2 \cdot z_1}.$$

Hieraus Grundkreisdurchmesser der Evolvente:

$$d_1 = \frac{z_1(a_1 + s_1)}{\pi}.$$

Nach Eintritt in das Leitrad wird:

$$c_1 = c_2' \cdot \frac{a_1 + s_1}{a_1}.$$

Meist $z_1 = z - 1$.

Vom Ende der Evolvente ab ist allmählich durch Vergrößerung der Querschnitte auf die im Spiralgehäuse herrschende Wassergeschwindigkeit herabzugehen.

Das den Leitapparat umgebende Spiralgehäuse wird nach Fig. 24 entworfen.

d) Spaltdruck und Axialschub.

Da zwischen Lauf- und Leitrad ein Spielraum, der „Spalt“ vorhanden sein muß, so wird sich in den Räumen vor und hinter Laufrad der „Spaltdruck“

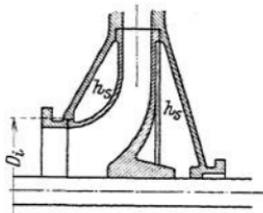


Fig. 59.

$\frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} = 0$. Ist $w_2 > w_1$, ein Fall, der bei stark vorwärtsgekrümmten Schaufeln vorliegt (vgl. Fig. 43), so wird der Ausdruck $\frac{w_1^2 - w_2^2}{2g}$ negativ und unter Umständen $h_s = 0$.

Die zum Ausgleich des Axialschubs dienenden Mittel sind auf S. 984 behandelt.

e) Regelung der geförderten Wassermengen. Verhalten im Betrieb.

Q/H -Diagramm.

Regelung durch Änderung der Umlaufzahl ist wegen der starken Änderung der Förderhöhe nicht zulässig. Die geförderten Wassermengen wachsen annähernd im einfachen Verhältnis der Umlaufzahlen, die Förderhöhen hingegen im Quadrat der Umlaufzahlen, die Leistungen sonach in der dritten Potenz.

Gebräuchlich ist deshalb Abdrosselung des Druckes. Wird in das Q/H -Diagramm außer der erzeugten Druckhöhe die zu überwindende Druckhöhe eingetragen, so ergibt der Schnittpunkt beider Kurven den „Arbeitspunkt“ der Pumpe.

Fig. 60 behandelt Betriebsverhältnisse, bei denen — wie bei Abdrosselung oder großen Reibungswiderständen langer Rohrleitungen — die gesamte manometrische Förderhöhe gegenüber der geometrischen Förderhöhe stark überwiegt¹⁾. Der mehr oder weniger steile Verlauf der strichpunktierten Widerstandsparabeln kennzeichnet die Größe der Abdrosselung oder der Rohrleitungswiderstände

$h_r = \frac{\lambda \cdot l \cdot c^2}{d \cdot 2g}$ für verschiedene Rohrlichtweiten oder Rohrlängen. Q_{\max} ist die

¹⁾ Dr. Hoffmann, Z. Ver. deutsch. Ing. 1909, S. 6.

bei geöffnetem Drosselschieber oder bei kleinstem Rohrwiderstand von der Pumpe geförderte, größte Wassermenge. Die gestrichelten Linien unter und über der Charakteristik geben Schwankungen in der Umlaufzahl (± 2 v. H.) an. Einer Umlaufschwankung von 1 v. H. entspricht eine Änderung der Fördermenge um etwa 2 v. H.

In Fig. 61 ist der namentlich bei Wasserhaltungen auftretende Fall wiedergegeben, daß die geometrische Förderhöhe den weitaus größten Teil der manometrischen Gesamthöhe ausmacht. Die Rohrverluste sind klein, und die Widerstandsparabel verläuft sehr flach. Verhältnismäßig geringe Änderungen von Drehzahl oder Druck verursachen starke Änderung der Fördermenge und des Wirkungsgrades. Berührt die Widerstandsparabel die untere, ver-ringerter Drehzahl entsprechende

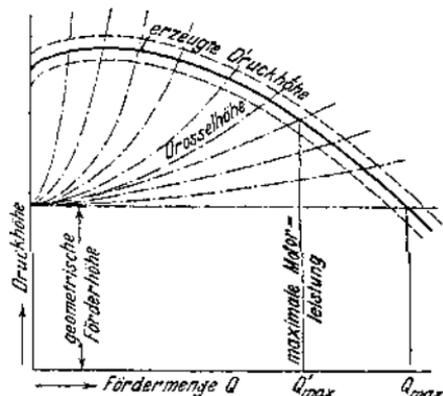


Fig. 60.

Druckkurve im Scheitelpunkt, so fällt die Pumpe ab, d. h. das in der Druckleitung befindliche Rückschlagventil schließt, und die Förderung hört auf. Damit die Pumpe selbst-tätig bei gefüllter Rohrleitung sofort nach Öffnen des Schiebers und ohne Erhöhung der Umlaufzahl anspringen kann, soll der bei geschlossenem Schieber erzeugte Leerlaufdruck größer als das Gewicht der Druckwassersäule sein. Der „Nullpunkt“ oder „Drosselpunkt“ muß sonach höher als der normale Arbeitspunkt liegen, der auf dem absteigenden Ast der Druckkurve liegen soll.

Die in das Diagramm ein-zutragende Kurve des Gesamtwirkungsgrades muß in der Nähe des Arbeitspunktes flach verlaufen, damit die Fördermenge in weiten Grenzen ohne starke Ab-nahme des Wirkungsgrades ge-ändert werden kann. Bei Parallelschaltung zweier Pumpen wird die doppelte Wassermenge annähernd nur dann erreicht, wenn die Widerstandsparabel sehr flach verläuft, also hauptsächlich geometrische Förderhöhe zu überwinden ist. Bei steiler Widerstandsparabel kann sogar der Fall eintreten, daß zwei parallel geschaltete Pumpen weniger fördern als eine einzige.

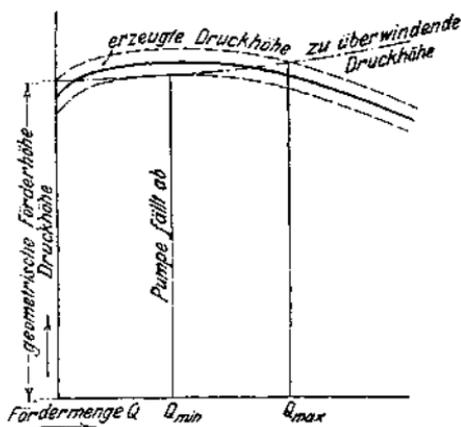


Fig. 61.

Fig. 62 behandelt den Einfluß der Reibungshöhe und die Parallelschaltung zweier Pumpen. ¹⁾ A_0 bezeichnet den dem Maximum der η -Kurve entsprechenden Arbeitspunkt für normale (bestellungsgemäße) Wassermenge Q_0 und Förder-

höhe. Die Rohrleitungswiderstände $h_r = \frac{\lambda \cdot l \cdot c^2}{d \cdot 2g}$ sind für zwei verschiedene

¹⁾ Nach Heidebroek, Z. Ver. deutsch. Ing. 1915, S. 1268.

Rohrlichtweiten $d = 150$ mm und $d = 175$ mm unter Annahme einer Rohrlänge $l = 250$ m ermittelt, woraus sich die eingezeichneten Parabeln bestimmen. Die Nullpunkte dieser Widerstandsparabeln liegen um die für Q_0 berechneten Beträge tiefer als A_0 und geben die statischen Druckhöhen an, die von der Pumpe bei geschlossenem Drosselschieber, also $Q = 0$, ohne Erhöhung der Umlaufzahl erreicht werden müssen. Die H -Kurve zeigt zunächst, daß beim Arbeiten einer Pumpe allein der erreichte Nullpunkt um etwa 30 m höher liegt, als nötig ist.

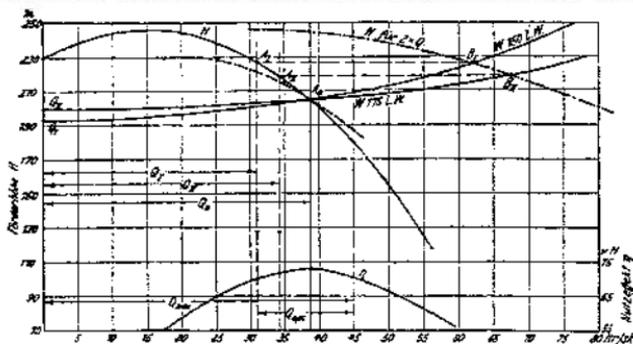


Fig. 62.

Arbeiten zwei Pumpen parallel, so wird die neue H -Kurve (für $2 \cdot Q$) gefunden, indem die Höhen H der ursprünglichen H -Kurve auf die doppelte Wassermenge angegebene Ordinaten übertragen werden. Diese neue H -Kurve der parallel arbeitenden Pumpen schneidet die Widerstandsparabeln in den Punkten B_I und B_{II} . Durch Übertragung werden die Arbeitspunkte A_I und A_2 jeder Einzelpumpe ermittelt, die nunmehr seitlich von der Senkrechten höchsten Wirkungsgrades liegen. Beide Pumpen zusammen fördern also nicht die Wassermenge $2 Q_0$, sondern nur $2 Q_I$ oder $2 Q_{II}$. Je mehr sich Punkt A dem Scheitel der H -Kurve nähert, um so näher liegt die Gefahr des „Überspringens“ vor.

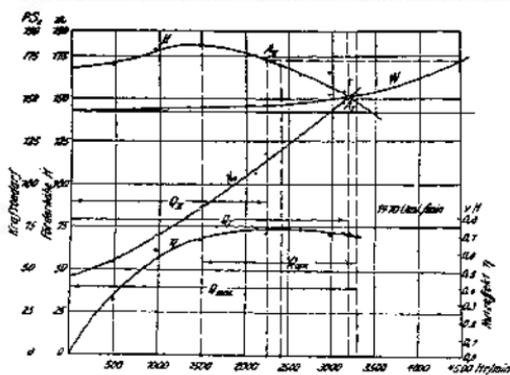


Fig. 63.

Würde die H -Kurve die punktierte Gestalt haben, so würde infolge vorhandener kleiner Verschiedenheiten in der Regel eine der Pumpen in die „turbulente Zone“ geraten, so daß die andere Pumpe allein die volle Leistung übernehmen würde.

Für enge Rohrleitungen sind abfallende H -Kurven nach Fig. 62 empfehlenswert; für dauerndes Arbeiten parallel geschalteter Pumpen sind weite Rohrleitungen auszuführen, um eine erhebliche Steigerung der Reibungswiderstände beim Zuschalten weiterer Pumpen zu verhindern.

Je flacher die Widerstandskurve, umso flacher kann Pumpenkurve sein. Fig. 63 zeigt das Q/H -Diagramm einer Zentrifugalpumpe mit flacher η -Kurve. Der dem günstigsten Wirkungsgrad entsprechende Arbeitspunkt liegt in ungefähr gleicher Höhe mit dem Nullpunkt. Der normale Arbeitspunkt ist A_{II} für parallel geschaltete Pumpen; A_I ist der Arbeitspunkt einer allein mit Über-

lastung fördernden Pumpe. Es ist $Q_I \approx 0,7 (2 \cdot Q_{II})$. Mit $\eta > 70$ v. H. wird eine Förderung von $Q \approx 1500$ bis 3250 , sowie $2 \cdot 1500$ bis $2 \cdot 2200$ l/min erreicht. Der Arbeitspunkt der Einzelpumpe soll jenseits des Arbeitspunktes für halbe Leistung liegen.

Wird die Pumpe durch einen Gleichstrommotor angetrieben, so kann das „Überspringen“ durch eine Hilfswicklung des Motors vermieden werden, dessen Umlaufzahl bei Verringerung der Leistung steigt. Die Pumpe geht infolgedessen wieder auf den ursprünglichen Arbeitspunkt zurück.

Wird beim Anspringen der Nullpunkt nicht erreicht, so ist die Druckleitung mit einem Nebenauslaß auszuführen, der in die Saugleitung mündet. Beim Anlassen mit geschlossenem Drosselschieber wird bei voll erreichter Umlaufzahl der Nebenauslaß langsam geöffnet, so daß die Pumpe mit der Förderung auf die durch Drosselung eingestellte Druckhöhe beginnt. Hierauf wird unter langsamem Schließen des Nebenauslasses der Drosselschieber ebenso geöffnet.

f) Angenäherter Entwurf der Q/H -Kurve.

Bei Strömung eines Strahles gegen eine Platte nach Fig. 64 geht die Normalkomponente v verloren.

In den ausgefüllten Schaufelräumen sind die Relativgeschwindigkeiten den durchfließenden Wassermengen proportional. Für $Q_x = Q \cdot x$ wird $w_{1x} = w_1 \cdot x$, $w_{2x} = w_2 \cdot x$. Die absoluten Geschwindigkeiten sind die Resultierenden aus den Relativ- und Umfangsgeschwindigkeiten, von denen die ersteren bei veränderlicher Fördermenge sich nur nach Größe, nicht nach der durch die Schaufelwinkel festgelegten Richtung ändern.

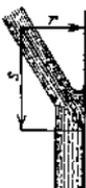


Fig. 64.



Fig. 65.

$c_{1x} \cdot \cos \delta_{1x}$ wird durch Loten des Endpunktes von w_{1x} auf u_1 gefunden, Fig. 65.

$c_{2x} \cdot \cos \delta_2$ wird unter Berücksichtigung der durch Fig. 64 dargestellten Verhältnisse ermittelt, indem der Endpunkt der Geschwindigkeit (c_{2x}) auf Geschwindigkeit c_2 gelotet wird, deren Richtung durch das erste Leitschaufelelement bestimmt ist. Durch Loten des so gefundenen Punktes auf u_2 ist $c_{2x} \cdot \cos \delta_2$ bestimmt¹⁾. Nach Fig. 56 können die Förderhöhen $H = u_2 \cdot c_{2x} \cdot \cos \delta - u_1 \cdot c_{1x} \cdot \cos \delta_1$ für wechselnde Werte von Q ermittelt werden.

Für die Nutzförderhöhe gilt:

$$H_n = \epsilon \cdot H = H - k, \quad \left(\epsilon = \frac{1}{\eta_k} \right),$$

worin k = Widerstandshöhe. Für $x = 0$ wird $k = 0$, für $x = 1$ wird $k = H - H_n = H(1 - \epsilon)$. k kann angenähert durch eine Parabel nach Fig. 66 wiedergegeben werden, da die Widerstände mit dem Quadrat von x zunehmen.

Der Gesamtwirkungsgrad η ist das Produkt aus dem hydraulischen Wirkungsgrad $\epsilon = \frac{H_n}{H}$, der aus dem Diagramm er-

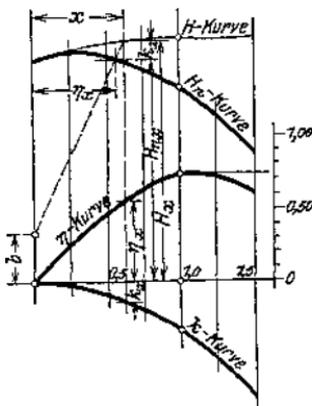


Fig. 66.

¹⁾ Nach Oesterreicher, Z. Ver. deutsch. Ing. 1913, S. 1143.

mittelt werden kann, und dem mechanischen Wirkungsgrad η_m , der durchschnittlich 6 v. H. bei $x = 1$ beträgt und hauptsächlich die konstanten Verluste durch Lager- und Stopfbuchsenreibung berücksichtigt. (Sonach ist $\eta_m = 0,94$ für $x = 1$, $= 0,88$ für $x = 0,5$ usw.) Aus ϵ und η_m ist η zu bestimmen und für die verschiedenen Werte von x ebenfalls einzutragen.

g) Ausführungen und Einzelheiten.

Je nach der Förderhöhe werden Niederdruck-, Mitteldruck- und Hochdruck-Zentrifugalpumpen, diese in ein- und mehrstufiger Ausführung, unterschieden.

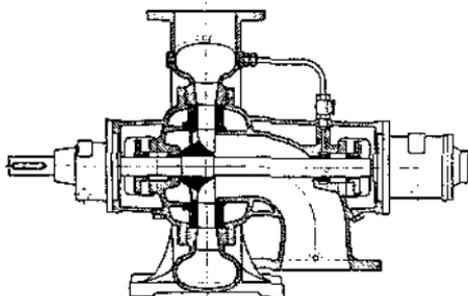


Fig. 67. (Balcke-Frankenthal.)

Niederdruckpumpen mit einseitigem und doppelseitigem Einlauf siehe Fig. 67 bis 69. Umsetzung von Geschwindigkeit in Druck im „Diffusor“, der meist als spiralförmiges Gehäuse ausgeführt wird. In Fig. 68 und 69 heben sich die Axialschübe gegenseitig auf. Doppelseitiger Einlauf erschwert jedoch die Zugänglichkeit der Laufräder. Die Entlastung der Pumpe, Fig. 67, stimmt grundsätzlich

überein mit der in Fig. 73 dargestellten von C. H. Jaeger & Co., Leipzig.

Die Fig. 70–72 zeigen mehrstufige Hochdruckpumpen, deren Nutzeffekt größer als der der einstufigen Pumpe ist, da die Verluste in Saugrohr und Leit-

radgehäuse nur in der ersten und letzten Stufe auftreten. Ebenso nimmt der mechanische Wirkungsgrad zu, da die mehrstufige Pumpe nicht mehr Lager und Stopfbuchsen erfordert als die einstufige.

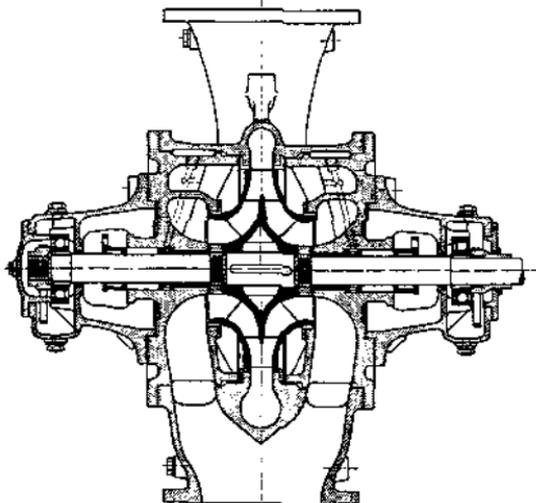


Fig. 68. (Weise & Monski, Halle.)

In Fig. 70 wird der Axial Schub dadurch vermieden, daß das Wasser erst durch die eine Hälfte der Räder nach der Pumpenmitte strömt, von wo es durch äußere Umföhrungskanäle nach dem entgegengesetzten Ende hin strömt und von da wieder nach der Mitte. Hier liegen sonach zwei Stufen mit halbem und ganzem Förderdruck zusammen und sind in geeigneter Weise durch einen Einsatz gegeneinander abzudichten.

Entlastung Jaeger. Fig. 73. Dichtungsringe a sind vor und hinter jedem Rade b angeordnet. Bohrungen c in der Radnabe verbinden die Räume d und e , so daß Druckausgleich stattfindet. Ausgleich des Strömungsdruckes gegen Radnabe b durch entsprechend geformten Entlastungsteller f .

Fig. 74. Entlastung der Maffei-Schwartzkopf-Werke, Berlin. Der Entlastungskolben ist am Druckende der Pumpe hinter dem letzten Laufrad angeordnet. Die Flüssigkeit strömt aus Raum c , in dem voller Pumpendruck herrscht,

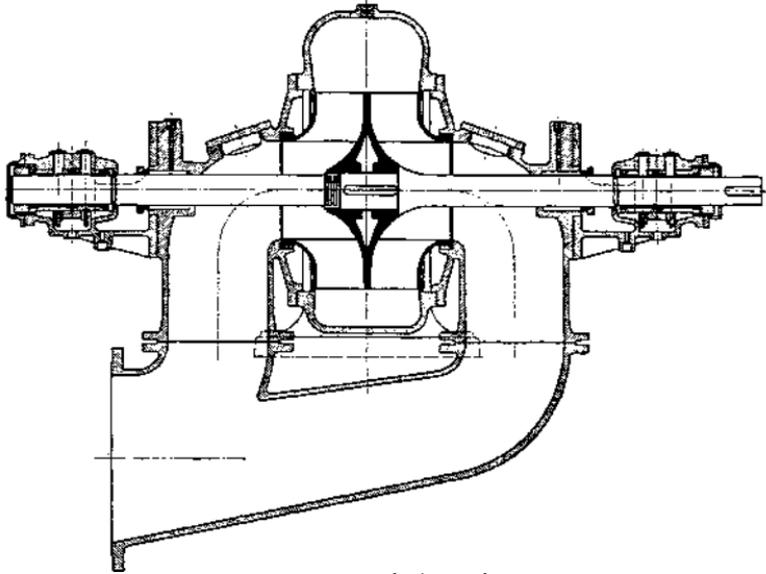


Fig. 69. (A. Borsig, Berlin-Tegel.)

durch Regulierspalt s_r in Raum b und von dort durch den Dichtungsspalt s_d in den mit der Atmosphäre in Verbindung stehenden Raum d . Der auf dem Kolben lastende Druck ist größer als der Axial Schub, wenn in b der volle Pumpendruck herrscht. Infolgedessen bewegen sich beim Ingangsetzen Kolben und

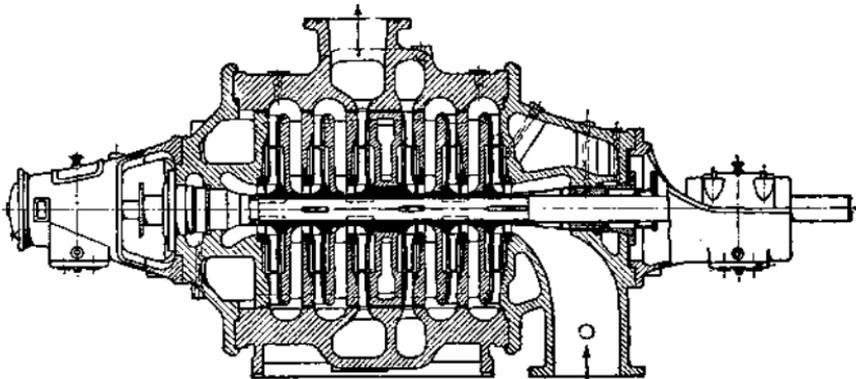


Fig. 70. (Weise & Monski, Halle.)

Regulierscheibe e nach rechts, bis die durch den verengten Regulierspalt s_r verursachte Drosselung der durchströmenden Flüssigkeit in b einen den Axialschub ausgleichenden Flüssigkeitsdruck einstellt. Bei Vergrößerung des Axialschubes wird s_r erweitert, der Druck in b erhöht.

Fig. 75. Entlastung der Sulzerpumpen. Ist der Druck in dem Raume zwischen Einsatz *E* und Entlastungsscheibe *S* zu groß, so bewegt sich *S* nach rechts. Aus dem Ringspalt am äußeren Umfang der Scheibe *S* strömt mehr

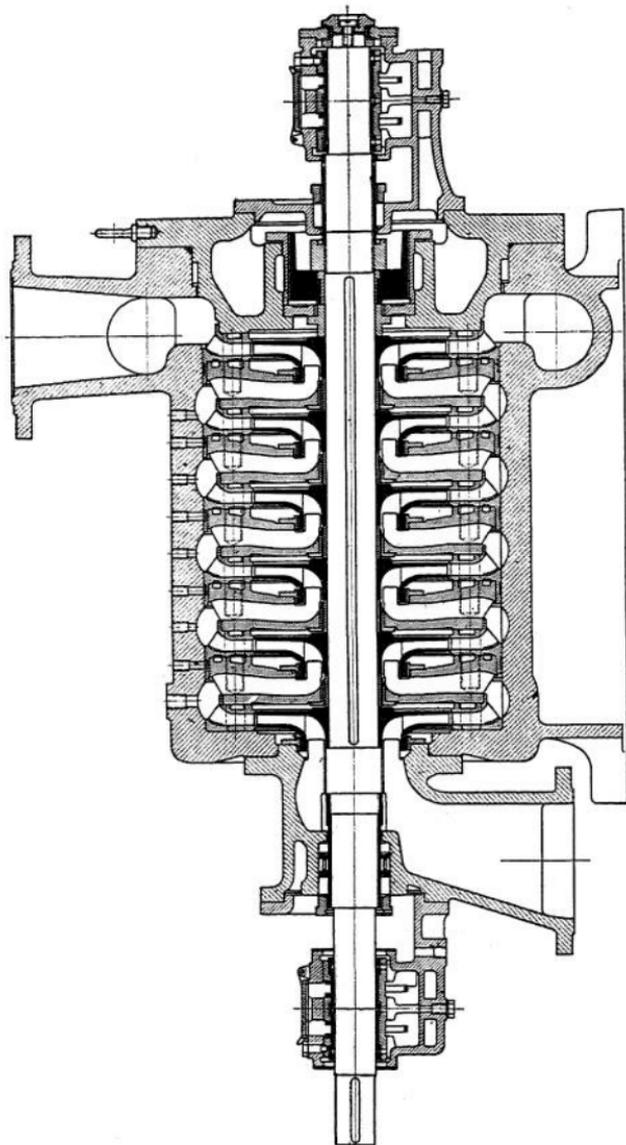


Fig. 74. (Maffei-Schwarzkopff-Werke, Berlin.)

Wasser in die äußere Atmosphäre, als durch den Zuführungskanal zwischen Einsatz *E* und Scheibennabe nachfließen kann. Der Entlastungsdruck sinkt.

Einzelheiten. Baustoff der Laufräder: Bronze oder Gußeisen. Die Stopfbuchsen stehen mit dem Druckraum in Verbindung, so daß sie zum Teil mit

Druckwasser gefüllt und gegen Lufteintritt geschützt sind. Ausführung der Lager als Kugel- oder Ringschmierlager. Sicherung der Wellenlage bei einseitigem Einlauf durch Kugeltütz- oder Kammlager. An höchster Stelle des Pumpen-

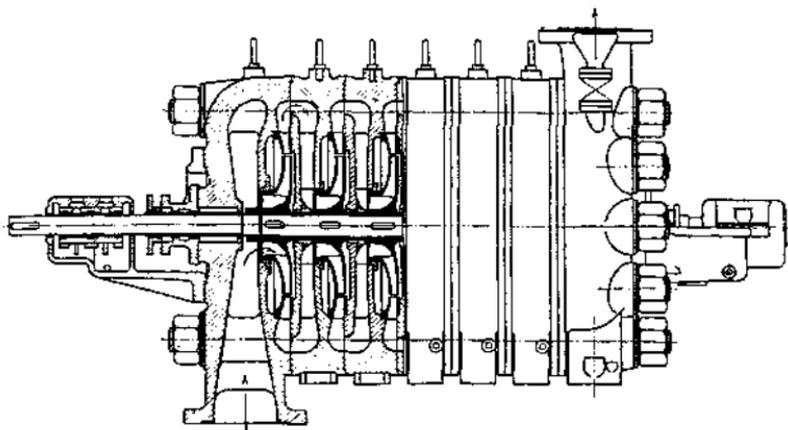


Fig. 72. (C. H. Jaeger & Co., Leipzig.)

raumes sind Entlüftungshahn und Fülltrichter vorzusehen. Bei Schmutzwasserpumpen Ausrüstung mit Mannloch, um Abnahme des Deckels für innere Reinigung zu vermeiden.

Bei sehr hohen Drucken werden die Räder in zwei oder mehr Gehäusen untergebracht, so daß jedes nicht mehr als 6—8 Räder umfaßt. Bei größerer

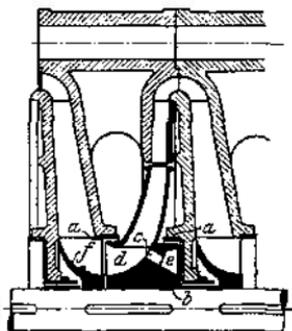


Fig. 73.
(C. H. Jaeger & Co.)

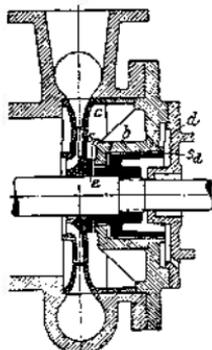


Fig. 74.
(Maffei-Schwartzkopff.)

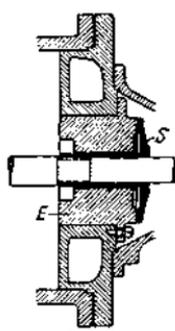


Fig. 75.
(Gebr. Sulzer.)

Radzahl ergeben sich infolge der weiten Lagerentfernung mit Rücksicht auf die kritische Umlaufzahl zu große Wellendurchmesser.

Erzeugte Druckhöhe in jedem Rade etwa $\frac{u^2}{18}$ bei Hochdruckpumpen, $\frac{u^2}{22}$ bei Niederdruckpumpen. Die Umfangsgeschwindigkeit u beträgt maximal 35 bis 40 m/sek, meist etwa 30 m/sek.

Mitteldruck- (Leitrad-) Pumpen (Weise & Mouski, Halle).

Saug- und Druckstutzen	80	100	125	150	175	225	mm	250	275	300	350	400	450	500	min		
	0,5—0,8	0,8—1,1	1,1—1,6	1,6—2,5	2—4	3—8	cbm	4—6	5—7	6—9	8—12	10—15	12—18	15—30	cbm		
Wirkungsgrad	55—60	60—65	60—66	62—69	65—72	67—73	η	67—73	72—74	72—75	72—76	72—76	72—78	72—80	η		
Förderhöhe . . . m =	10	1500	1330	1250	1090	915	775	Förderhöhe m =	25	1140	1060	890	930	825	750	675	"
		1370	1150	1050	925	750	630		30	930	870	770	720	680	600	530	"
	15	1850	1640	1510	1320	1120	950		30	1250	1160	1080	1020	900	810	740	"
		1690	1410	1280	1140	925	760		35	1020	950	840	790	750	650	580	"
	20	2140	1900	1750	1520	1290	1100		35	1350	1260	1170	1110	980	880	800	"
		1950	1630	1480	1310	1060	875		40	1110	1030	910	860	810	710	630	"
	25	—	2120	1980	1710	1440	1230		40	1440	1340	1250	1180	1040	910	850	"
		—	1820	1680	1470	1190	980		45	1180	1100	970	910	860	760	670	"
	30	—	1980	2100	1890	1560	1340		45	1530	1420	1330	1250	1110	1000	910	"
		—	1800	1800	1600	1300	1070		50	1250	1170	1030	970	920	800	710	"
	35	—	—	2100	2000	1700	1460		50	1600	1500	1400	1310	1160	1050	950	"
		—	—	1980	1750	1420	1160		55	1320	1230	1080	1020	970	850	750	"
	40	—	—	2700	2000	1800	1560		55	1600	1570	1470	1380	1230	1100	1000	"
		—	—	2100	1860	1510	1240		60	1380	1280	1130	1070	1010	890	790	"
	45	—	—	—	2000	1800	1600		60	1600	1600	1550	1440	1280	1150	1050	"
		—	—	—	1980	1600	1320		65	1450	1340	1180	1120	1060	930	825	"
	50	—	—	—	—	1800	1600		65	1600	1600	1550	1500	1330	1200	1090	"
		—	—	—	—	1690	1380		70	1500	1400	1230	1160	1100	960	860	"
	—	—	—	—	—	—	70	1600	1600	1550	1500	1380	1240	1130	"		
	—	—	—	—	—	—	80	1560	1450	1280	1210	1140	1000	890	"		
	—	—	—	—	—	—	80	—	1600	1550	1500	1470	1330	1210	"		
	—	—	—	—	—	—	90	—	1550	1370	1290	1220	1070	950	"		
	—	—	—	—	—	—	90	—	—	1550	1500	1500	1410	1280	"		
	—	—	—	—	—	—		—	—	1450	1370	1300	1130	1010	"		

III. Die Dampfturbinen.¹⁾

1. Wirkung der Düse.

Nach S. 375 ist für gesättigten Dampf:

$$c_{\max} = 323 \sqrt{p_1 v_1} \text{ m/sek,}$$

worin p_1 = absoluter Druck in kg/qcm, v_1 = spezifisches Volumen in cbm/kg.

Für überhitzten Dampf:

$$c_{\max} = 333 \sqrt{p_1 v_1},$$

worin $v_1 = \frac{R \cdot T_1}{p_1} - C$ mit $R = 0,0047$, $C = 0,016$. (p in kg/qcm.)

Die Geschwindigkeit c_{\max} tritt bei dem sog. „kritischen Druckverhältnis“ $\frac{p_2}{p_1} = 0,5774$ für gesättigten (0,546 für überhitzten) Dampf auf und beträgt rd. 450 m/sek (bzw. 560 m/sek für überhitzten Dampf), der Schallgeschwindigkeit entsprechend. In zylindrischen Düsen kann auch bei weiterer Verringerung des Gegendruckes p_2 eine größere Geschwindigkeit nicht erreicht werden, da an der Düsenmündung der Druck nicht unter $0,5774 p_1$ fällt.

Wird jedoch die Überströmdüse konisch ausgeführt, so expandiert der Dampf in der Erweiterung auf den Gegendruck, und es wird die Geschwindigkeit

$$c_0 = 91,53 \sqrt{i_1 - i_2}$$

erreicht, worin i_1 und i_2 die Wärmeinhalte des Dampfes zu Beginn und Ende der adiabatischen Expansion darstellen.

Die hiernach zu berechnende Ausströmgeschwindigkeit führt nun unter üblichen Verhältnissen auf Werte von 1000 bis 1100 m/sek, für deren richtige Ausnutzung Umfangsgeschwindigkeiten von etwa 400 m/sek erforderlich wären. Bei zulässigen Beanspruchungen der Turbinenlaufräder durch die Zentrifugalspannungen werden kleine Durchmesser und damit außerordentlich hohe Umlaufzahlen nötig, die selbst für Dynamoantrieb ins Langsame übersetzt werden müssen ($n = 20\,000$ bis $30\,000$ Uml./min bei Lavalturbinen).

Da die Düsen mit einem Erweiterungswinkel $\alpha = 10^\circ$ im Mittel ausgeführt werden, so ist für ihren Entwurf nur die Kenntnis des größten und kleinsten Querschnittes bei gegebenem sekundlichen Dampfgewicht G erforderlich. Es wird:

$$f_{\min} = \frac{G}{199 \sqrt{\frac{p_1}{v_1}}} \text{ für gesättigten Dampf,}$$

$$f_{\min} = \frac{G}{211 \sqrt{\frac{p_1}{v_1}}} \text{ für überhitzten Dampf.}$$

$$f_{\max} = G \cdot \frac{v_2}{c_1}, \text{ worin } v_2 = x u + \sigma, \quad c_1 = 91,53 \sqrt{i_1 - i_2}.$$

Es ist p in Atm. absolut, v in cbm/kg einzusetzen.

2. Elementare Theorie der Dampfturbinen.

Je nach der Wirkungsweise des Dampfes werden Aktions- und Reaktionsturbinen mit einer oder mehreren Druck- oder Geschwindigkeitsstufen, sowie Verbundturbinen mit Vereinigung der Aktions- und Reaktionswirkung unterschieden.

¹⁾ Nach Stodola, Die Dampfturbinen. 4. Aufl. Berlin 1910, Julius Springer.

a) Die Aktionsturbinen.

Die Umsetzung der Spannungsenergie in Strömungsenergie findet nur in den Düsen oder in den Leiträdern statt. Dementsprechend ist ein Druckunterschied nur vor und hinter den Leiträdern vorhanden.

a) Die einstufige Laval-Turbine (Fig. 76).

$$c_1 = \varphi_d \cdot c_0 = \varphi_d \cdot \sqrt{2g L_0}; \quad L_0 = \frac{i_1 - i_2}{A}$$

φ_d berücksichtigt den Düsenverlust.

$$w_0 = \varphi_s \cdot w_1;$$

φ_s berücksichtigt den Schaufelverlust.

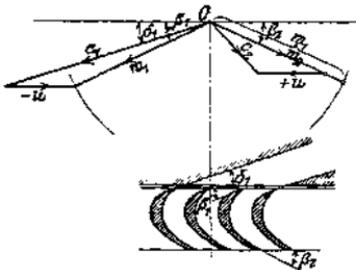


Fig. 76.

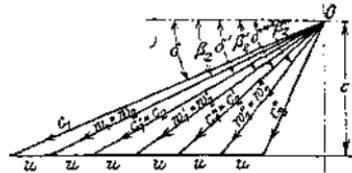


Fig. 77.

Zu den durch φ_d und φ_s bestimmten Verlusten kommt noch der Austrittsverlust $\frac{c_3^2}{2g}$ hinzu.

b) Die einstufige Turbine mit Geschwindigkeitsstufung. Der Dampf wird wie in der Laval-Turbine in der Düse bis auf den Enddruck entspannt. Mit Verkleinerung der Umfangsgeschwindigkeit nimmt nach Fig. 77 die absolute Austrittsgeschwindigkeit zu und wird unter Umständen so groß, daß sie — in einem Leitrad umgelenkt — einem ferneren Laufrad zugeführt werden kann. In Fig. 77 sind die Schaufelwinkel β an Ein- und Austritt jedes Rades gleich angenommen. Ebenso ist der Austrittswinkel δ der Leiträder gleich dem Zuführungswinkel der folgenden Laufräder. Für den kleinsten Wert c , den c_3' annehmen kann, würde

$$u = \frac{c_1 \cdot \cos \delta}{6}$$

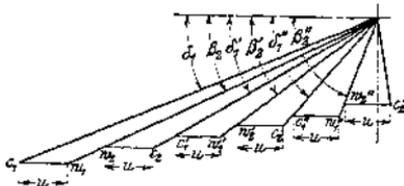


Fig. 78.

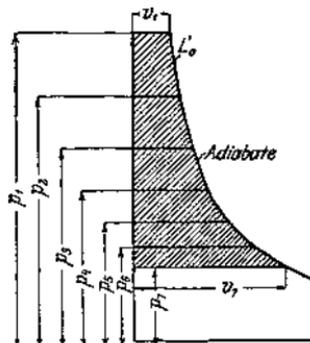


Fig. 79.

In Fig. 78 sind die Verluste in den Leitapparaten und Laufrädern berücksichtigt. Mit der Abnahme der absoluten und relativen Geschwindigkeiten müssen die quer zu diesen gemessenen Querschnitte zunehmen. Vorteil: Sämtliche Räder werden von Dampf mit Endspannung durchströmt. Nachteil: Wesentliche Verluste durch Umlenkung der absoluten Austrittsgeschwindigkeiten.

c) Turbinen mit mehreren Druckstufen. Wird das Dampfdiagramm nach Fig. 79 in z gleiche Flächenstreifen zerlegt, so folgt:

$$c_0' = \sqrt[2]{2g \cdot \frac{L_0}{z}} = \frac{c_0}{\sqrt{z}}$$

Es ergeben also z. B. 4 Stufen halb so große Geschwindigkeiten wie eine Stufe.

„Mehrfache Druckstufung“ ist vorhanden, wenn das Diagramm so geteilt ist, daß $p_2 < 0,5774 p_1$, $p_3 < 0,5774 p_2$ usw. In diesem Fall ist $c > 450$ m/sek, und für die Überströmung des Dampfes von einer Stufe zur anderen sind konische Düsen nötig. Bei „vielfacher Druckstufung“, also weiterer Unterteilung der Diagrammfläche, wird $c < 450$ m/sek, und der Dampf kann durch Querschnitte gleichbleibender Form auf die Laufräder geleitet werden.

In Fig. 80 sind Ergebnisse von Versuchen wiedergegeben, die Dr.-Ing. Christlein mit Düsen (größtes Verhältnis $f:f_m = 6,28$ bei Düse 4, kleinstes Verhältnis $f:f_m$ bei Düse 6) und einem parallelwandigen Leitapparat bei verschiedenen Dampfdrücken und Temperaturen angestellt hat. Abszissen der Kurve sind die aus den bekannten Größen p_1 , t_1 und p_2 sich ergebenden theoretischen Geschwindigkeiten. Ordinaten die Geschwindigkeitskoeffizienten. Die Versuche ergaben, daß nicht nur eine Überschreitung der kritischen Geschwindigkeit in gewöhnlichen Leitapparaten möglich, sondern auch mit einer Verbesserung des Wirkungsgrades der Energieumsetzung verbunden war.

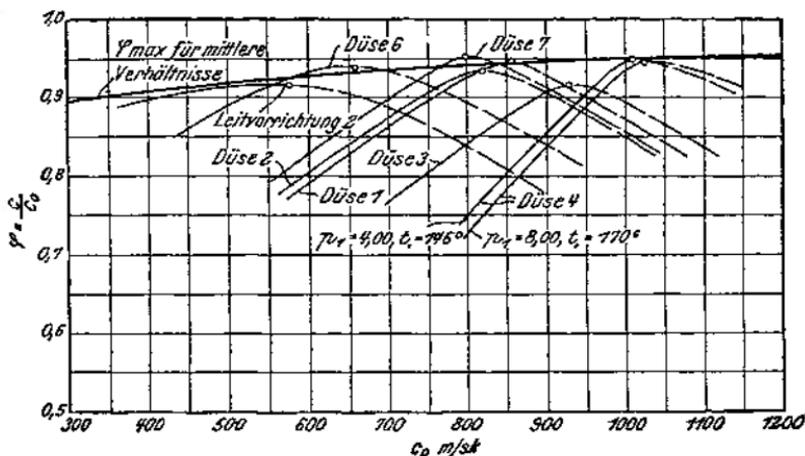


Fig. 80.

Charakteristik $\varphi = f(c_0)$ bei verschiedener Form und Ausführung von Leitvorrichtungen.

Die Kurven in Fig. 80 zeigen, daß für eine gegebene Leitvorrichtung unter bestimmten Umständen ein Mindestwert der Schaufelverluste auftritt, wobei ein geschlossener Strahl mit parallelen Stromfäden ausströmt. Der linke abfallende Ast umfaßt die Versuche bei unvollständiger Expansion, also Gegen-Druck $p_2' > p_2$; der rechte abfallende Ast zeigt die Verluste der „Überexpansion“, also $p_2' < p_2$. Der linke Ast wird hauptsächlich durch größere Reibung infolge der größeren Dampfdichte, der rechte durch Schwingungserscheinungen beeinflusst.

Die durch die Höchstwerte der Einzelkurven gelegte Umhüllende zeigt, daß für das jeweilige Druckverhältnis $p_2:p_1$ richtig bemessene Leitvorrichtungen die Strömungsverluste mit zunehmender Durchflußgeschwindigkeit vermindern. Nach Fig. 80 liegt der günstigste Anwendungsbereich parallelwandiger Leitvorrichtungen bei etwa 600 m/sek. Die Überschreitung der kritischen Geschwindigkeit ist wahrscheinlich auf Loslösen des Strahles von den Wandungen zurückzuführen, so daß an dieser Stelle eine das Erweiterungsverhältnis herbei-

führende Kontraktion vorhanden ist. Unsicherheit herrscht darüber, inwieweit die von Christlein an ruhenden Schaufeln festgestellten Ergebnisse sich auf bewegte Schaufeln übertragen lassen (siehe auch S. 999 und 1005).

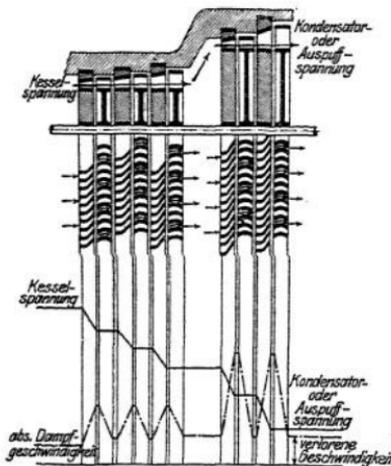


Fig. 81.

Geschwindigkeitsstufen vorgesehen sind. In Deutschland nur für kleinere Einheiten in Anwendung.

b) Die Reaktionsturbine.

Umsetzung der Spannungsenergie in Strömungsenergie nicht nur in den Leiträdern, sondern auch in den Laufrädern. Sonach vor und hinter diesen Druckunterschiede, die Undichtheiten infolge der notwendigen Spielräume zwischen Gehäuse und Laufrädern sowie einen starken durch besondere Entlastungskolben aufzunehmenden Axial Schub verursachen. Die Beaufschlagung kann nicht partiell, sondern muß stets am ganzen Umfang erfolgen. Folge: Ausführung der ersten Laufräder mit kleinem Durchmesser. Entweder hohe Umlaufzahlen oder weitgehende Stufung. Schaufellänge wird günstig im Verhältnis zum Spalt. Oder Ausführung der ersten Laufräder mit größerem Durchmesser. In diesem Fall Ermäßigung der Umlaufzahl bzw. der Stufenzahl, jedoch kleine Schaufellänge im Verhältnis zum Spalt und dadurch zunehmende Undichtheit.

Günstigeres Verhalten der Reaktionsturbinen in den Niederdruckstufen. Hier infolge der großen Volumina große Schaufellängen im Verhältnis zum Spalt. Dabei kleine Druckunterschiede.

Fig. 82 zeigt die Schaufelung und Geschwindigkeitsdiagramme der Reaktionsturbine. Die Querschnitte senkrecht zur Relativgeschwindigkeit nehmen nach dem Austritt hin ab, der Vergrößerung von w_1 auf w_2 entsprechend.

c) Die Verbundturbine.

Die zur Berücksichtigung der Volumenzunahme bei Aktionsturbinen geeignete teilweise Beaufschlagung verursacht Ventilationsverluste, während bei Reaktionsturbinen die volle Beaufschlagung in den ersten Stufen zu den angegebenen Übelständen führt. Zweckmäßig ist deshalb bei beiden Turbinenarten die Vorschaltung eines mehrkränzigen Geschwindigkeitsrades, in dem der Dampf auf ein Volumen von solcher Größe expandiert, daß die nachfolgenden Räder voll beaufschlagt werden können.

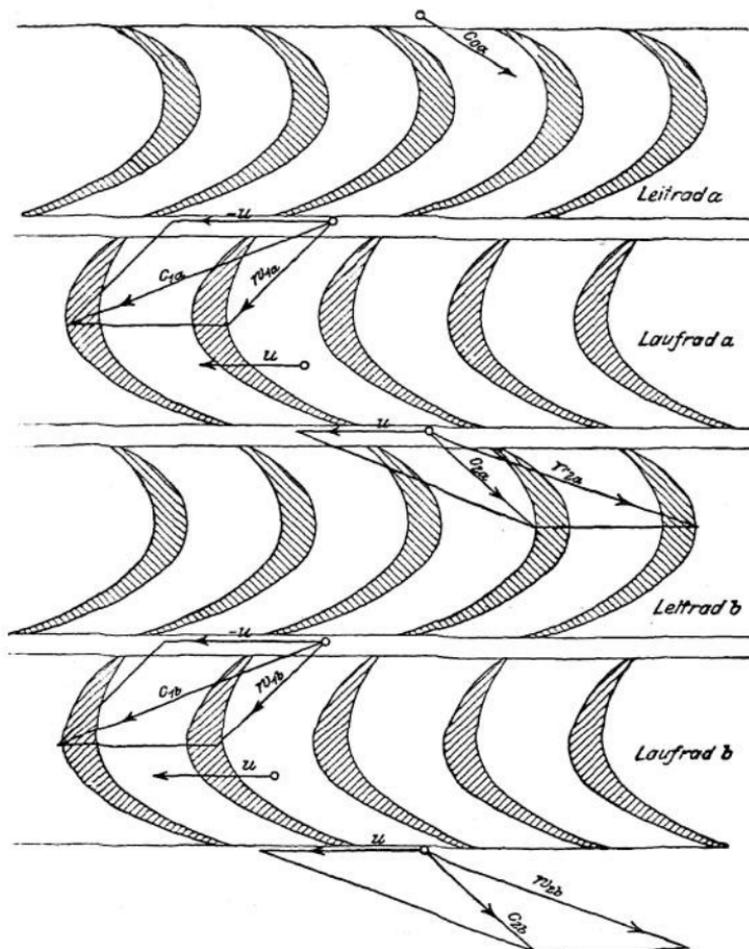


Fig. 82.

3. Wirkungsgrade und Dampfverbrauch.

Die theoretisch größte Leistung, die in einer Turbine ohne Reibung und Austrittsverlust erreicht werden kann, hat die Größe:

$$A \cdot L_0 = i_1 - i_2 = A \cdot \frac{c_0^2}{2g} \quad (\text{in WE}).$$

Am Umfang des Rades leistet der Dampf die Arbeit L_u (N_u in PS). Nach Abzug der Dampfreibungsarbeit (L_r , N_r) der Räder und der im Dampf rotierenden Teile wird die indizierte Dampfarbeit (L_i , N_i) erhalten.

Wird von L_i , N_i die Lagerreibungsarbeit, die Arbeit zum Luftpumpenantrieb, Reglerantrieb, Stopfbuchsenreibung usw. abgezogen, so folgt die effektive Leistung L_e , N_e .

Wirkungsgrade: $L_i = \eta_i \cdot L_0$; $\eta_i =$ indizierter Wirkungsgrad.
 $L_e = \eta_m \cdot L_i$; $\eta_m =$ mechanischer Wirkungsgrad.
 $L_u = \eta_c \cdot L_0$; $\eta_c =$ thermodynamisch, Wirkungsgrad.

$$\eta_i = \frac{\eta_e}{\eta_m}$$

$L_u = \eta_u \cdot L_0$; $\eta_u =$ thermodynamisch, Wirkungsgrad, auf die Leistung am Radumfang bezogen.

$$L_u = \frac{c_0^2}{2g} - Z_1 - Z_2 - Z_3,$$

worin Z_1, Z_2, Z_3 die Verluste in der Düse, im Laufrad und durch die Austrittsgeschwindigkeit angeben. Sonach:

$$L_u = \frac{1}{2g} \cdot (c_1^2 - w_1^2) + (w_2^2 - c_2^2).$$

Aus Fig. 83 ergibt sich nach dem Kosinussatz:

$$w_1^2 = c_1^2 + u^2 - 2u \cdot c_1 \cdot \cos \delta_1$$

oder

$$c_1^2 - w_1^2 + w_1^2 = 2u \cdot c_1 \cdot \cos \delta_1 = 2u \cdot c_{1u}$$

Weiterhin:

$$c_2^2 = w_2^2 + u^2 - 2u \cdot w_2 \cdot \cos \beta_2$$

oder mit:

$$w_2 \cdot \cos \beta_2 = \pm c_2 \cdot \cos \delta_2 + u = \pm c_{2u} + u;$$

$$w_2^2 - c_2^2 - u^2 = \pm 2u \cdot c_{2u},$$

wenn nach Fig. 83 c_{1u} und c_{2u} die in die Richtung von u fallenden Komponenten von c_1 und c_2 sind.

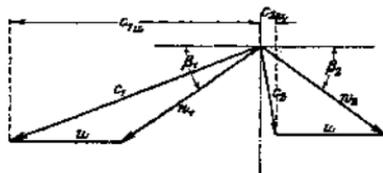


Fig. 83.

Es folgt:

$$L_u = \frac{u}{g} (c_{1u} \pm c_{2u}).$$

$$\eta_u = \frac{2u(c_{1u} \pm c_{2u})}{c_0^2}.$$

Positives Vorzeichen in der Klammer, wenn c_{1u} und c_{2u} wie üblich entgegengerichtet sind ($\delta_2 < 90^\circ$).

Mit $\beta_1 = \beta_2$, $c_2 = \varphi_d \cdot c_0$, $w_2 = \varphi_s \cdot w_1$ wird:

$$w_2 \cdot \cos \beta_2 = \varphi_s \cdot w_1 \cdot \cos \beta_1 = \varphi_s (c_1 \cdot \cos \delta_1 - u)$$

und

$$L_u = \frac{u}{g} (1 + \varphi_d) \cdot (c_1 \cdot \cos \delta_1 - u).$$

Nach Stodola:

$$\varphi_d = 0,92 \text{ bis } 0,975.$$

$$\varphi_s = 0,8 \text{ bis } 0,85.$$

Wird in $\eta_u = \frac{L_u}{L_0}$ eingesetzt: $L_0 = \frac{c_0^2}{2g} = \frac{c_1^2}{\varphi_d^2 \cdot 2g}$ und L_u durch vorstehenden Wert ersetzt, so folgt nach Banki:

$$\eta_u = 2 \varphi_d^2 (1 + \varphi_d) \cdot \left(\cos \delta_1 - \frac{u}{c_1} \right) \cdot \frac{u}{c_1}.$$

Der Wirkungsgrad ist nur vom Verhältnis $\frac{u}{c_1}$ abhängig.

Bleiben c_1 , φ_d , φ_s und δ_1 bei veränderlichem u konstant und wird β_1 stets für stoßfreien Eintritt gewählt, so ändert sich für $\beta_2 = \beta_1$ der Wirkungsgrad η_u mit der Umfangsgeschwindigkeit nach einem parabolischen Gesetz. η_u erreicht den Höchstwert für $\frac{u}{c_1} = \frac{\cos \delta_1}{2}$. $\eta_{u\max} = \frac{\varphi_d^2}{2} (1 + \varphi_s) \cdot \cos^2 \delta_1$.

Für die Geschwindigkeitsstufung wird:

$$\eta_u = \frac{2u}{c_0^2} \cdot (c_{1u} + c_{2u} + c'_{1u} + c'_{2u} + \dots),$$

wobei c_{2u} , c'_{1u} mit negativem Verzeichen einzusetzen sind, wenn sie mit c_{1u} , c'_{2u} gleiche Richtung haben, ein Fall, der mitunter bei der letzten Stufe eintritt.

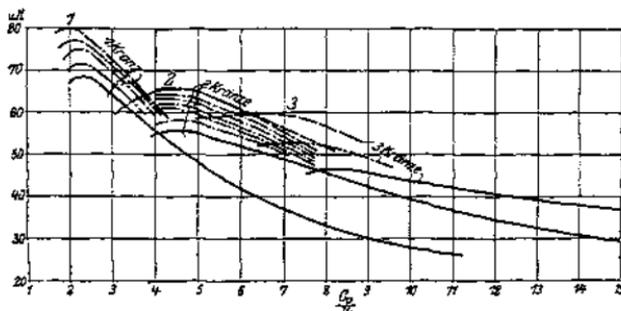


Fig. 84.

In Fig. 84 sind η_u -Kurven für mehrkränzige Räder nach Lasche wiedergegeben. Die Darstellung in Büscheln ergibt sich aus den verschiedenartigen Verhältnissen: Änderung der Dampfgeschwindigkeit, der Düsenformen, der Schaufeln.

Für das einkränzige Rad ist y_u annähernd am größten für $\frac{c_1}{u} = 2$, beim zweikränzigen Rad für $\frac{c_1}{u} = 4$, beim dreikränzigen für $\frac{c_1}{u} = 7$.

Dampfverbrauch. Zur Leistung von 1 Pse/st. ist theoretisch an WE erforderlich:

$$60 \cdot 60 \cdot 75 \cdot A = \frac{270000}{427} = 632,3.$$

Sonach theoretischer Dampfverbrauch:

$$D = \frac{632,3}{i_1 - i_2} \text{ kg/st.}$$

Wirklicher Dampfverbrauch für 1 PSe:

$$D_e = \frac{D}{\eta_e} = \frac{632,3}{\eta_e (i_1 - i_2)} \text{ kg/st.}$$

Sekundliches Dampfgewicht:

$$G = \frac{D_e \cdot N_e}{3600} \text{ kg/sek.}$$

Bezüglich des Dampfverbrauches zeigt die praktische Erfahrung folgendes¹⁾:
1. Das sekundliche Dampfgewicht einer bestimmten Turbine ist dem Anfangsdruck vor der ersten Leitvorrichtung angenähert proportional, tiefe Luftleere vorausgesetzt.

¹⁾ Stodola, Die Dampfturbinen. 4. Aufl., S. 215. Berlin 1910, Julius Springer.

2. Der Leerlauf-Gesamtdampfverbrauch beträgt etwa 10 v. H. des Verbrauches bei Vollast. Der Gesamtdampfverbrauch ändert sich proportional der Belastung. Vgl. die strichpunktierte Linie in Fig. 85.

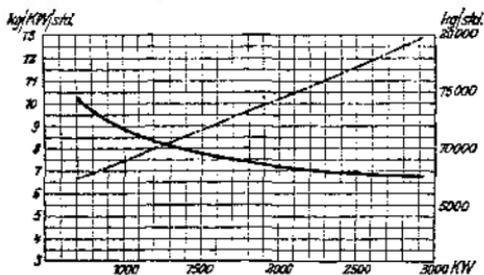


Fig. 85. 2700 WE-Turbogenerator $p = 11$. $T = 295^\circ$. Luftleere = 95,5 v. H. — Verbrauch pro KW-Stunde. ---- Gesamtvverbrauch pro Stunde.

Belastung. Vgl. die strichpunktierte Linie in Fig. 85. Aus dem für zwei Belastungen durch Versuche festgestellten Gesamtdampfverbrauch kann derjenige für die verschiedensten Belastungen annähernd durch gerade Verbindung der zwei Versuchspunkte ermittelt werden.

3. Die Nutzleistung nimmt mit dem Anfangsdruck angenähert linear zu.

Diese Erfahrungsregeln 1 bis 3 gelten nur für unveränderliche Querschnitte, also für Drosselregelung, nicht für Quantitätsregelung.

4. Die Zwischendrücke ändern sich bei tiefer Luftleere in allen Stufen mit Ausnahme der letzten proportional mit dem Anfangsdruck.

Für etwa 5,5 bis 6° C Überhitzung Abnahme des Dampfverbrauches um 1 v. H. Annähernd gleicher Gewinn, wenn in den Grenzen von 10 bis 15 Atm und 300° als mittlerer Wert für die Überhitzung der Druck um 1 Atm. erhöht wird. Für je 0,01 Atm. abs. Druckerniedrigung im Kondensator beträgt Gewinn bei 0,1 Atm. Gegendruck etwa 1,0 v. H., bei 0,04 Atm. Gegendruck etwa 1,5 bis 2 v. H. Erhöhung des Gegendruckes führt Leerlauf der letzten Räder herbei.

a) Die Berechnung der Dampfturbinen.

1. Mittels des Entropiediagramms, Fig. 86. Das zur Verfügung stehende Wärmegefälle soll beispielsweise in 3 Stufen verwertet werden. Die Auf-

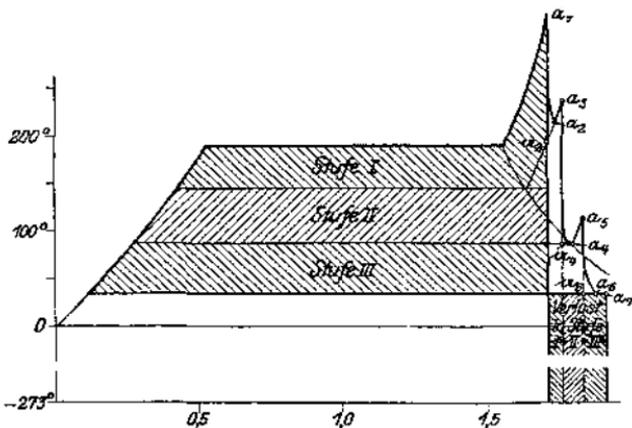


Fig. 86.

zeichnung des Entropiediagramms (Maßstab z. B. 1 mm = 1° C, 300 mm = 1 Entropieeinheit, so daß 300 qmm = 1 WE) nach den in den Dampftabellen S. 370, enthaltenen Werten ergibt das theoretische Wärmegefälle in den schraffierten Flächen, wobei die Ausdehnung des Dampfes reibungslos und adiabatisch

nach der durch den Ausgangspunkt a_1 gelegten Senkrechten anzunehmen ist. Teilung der Fläche in drei gleiche Teile *I*, *II* und *III*. In der Stufe *I* würde der Dampf verlustlos nach der Geraden $a_1 a_2$ expandieren. Bei z. B. 10 v. H. Düsenverlust endigt die Expansion jedoch im Punkte a_2' . Dieser wird auf der durch a_2 gehenden Kurve gleichen Druckes gefunden, indem die unter $a_2' a_2$ liegende bis zur -273° -Linie reichende Fläche gleich $\frac{1}{10}$ der Fläche von Stufe *I* gemacht wird. Die Dampfgeschwindigkeit berechnet sich aus:

$$\frac{A}{2g} \cdot c_1^2 = \frac{0,9 (i_1 - i_2)}{3}.$$

Nach Wahl von u auf Grund der Gleichung auf S. 994 für den Wirkungsgrad η_u , des Winkels δ_1 (zwischen 15 und 25°) kann das Eintrittsparallelogramm entworfen werden, wodurch β_1 und w_1 gefunden werden. Im Austrittsparallelogramm wird $\beta_2 = \beta_1$ und $w_2 = q_2 \cdot w_1$ ($q_2 \approx 0,8$), außerdem ist u bekannt.

Es ist nunmehr der Zustand festzustellen, in dem der Dampf in die Düsen der Stufe *II* tritt. Unter der Annahme, daß die Austrittsgeschwindigkeit der Stufe *I* vollständig verloren geht, ergibt sich der den Zustand des Dampfes hinter Laufrad *I* bezeichnende Punkt $a_{2'}$, der wieder mit Punkt a_2 auf derselben Kurve gleichen Druckes liegt, aus dem Mehrbetrag an Wärme, in die die Verluste umgesetzt worden sind. Dieser Mehrbetrag hat die Größe:

$$\text{infolge der Düsenreibung:} \quad q_d = q_d (i_1 - i_2'),$$

$$\text{infolge der Schaufelreibung:} \quad q_r = \frac{A}{2g} (w_1^2 - w_2^2),$$

$$\text{infolge Umsetzung von } c_2: \quad q_a = \frac{A}{2g} \cdot c_2^2,$$

$$\text{infolge von Radreibung und Ventilation: } q_r$$

zusammen Q_r' .

Nach Stodola ist:

$$q_r = \frac{75 (\beta_1 \cdot d^2 + \varepsilon \cdot \beta_2 \cdot d \cdot l^{1,5}) \cdot u^2 \cdot \gamma}{427 \cdot G \cdot 10^6}.$$

Hierin bedeuten:

d den mittleren Schaufelkranzdurchmesser in m,

l die Schaufellänge in cm,

u die mittlere Umfangsgeschwindigkeit in m/sek.

γ das spez. Gewicht der Luft in kg/cbm,

ε das Verhältnis des unbeaufschlagten Bogens zum ganzen Radumfang.

$$\beta_1 = 1,46, \quad \beta_2 = 0,83.$$

Zur Berücksichtigung des größeren Verlustes infolge der teilweisen Beaufschlagung macht Stodola die Annahme, daß von der Auslaßenergie der r -te Teil verloren gehen soll (S. Stodola, 4. Aufl., S. 165).

Ist \mathfrak{X} die zu a_2 , T die zu a_2 gehörige Temperatur, so wird:

$$Q_r' = c_p (T - \mathfrak{X}).$$

Die zweite und dritte Stufe werden in gleicher Weise berechnet, wobei jedoch zu beachten ist, daß z. B. a_4 innerhalb des Sättigungsgebietes liegt.

Bedeutet: \mathfrak{X}_4 die Temperatur in a_4 , r die Verdampfungswärme, x die spezifische Dampfmenge, so ergibt sich die spezifische Dampfmenge x' im Punkt a_4 aus:

$$q_d = (x' - x) \cdot r.$$

Die zu a_4 gehörige Temperatur T_4 folgt aus:

$$Q_r = (1 - x) r + c_p (T_4 - \mathfrak{X}_4).$$

Zur Berechnung von c_1 dienen sonach in Stufe *II* und *III* die durch die Verluste in den vorhergehenden Stufen vergrößerten Flächen. Es zeigt sich, daß die Summe der theoretischen Teilgefälle größer ist als das ursprüngliche, adiabatische Gesamtgefälle, ebenso wird der indizierte Wirkungsgrad der ganzen Turbine infolge des Rückgewinnes an Wärme größer als der Wirkungsgrad für die Einzelstufen.

Für die Bestimmung der Düsenquerschnitte sind die aus Druck, Temperatur und Feuchtigkeitsgehalt zu berechnenden Dampfvolumina der Punkte a_3 , a_4 und a_5 maßgebend.

Sonach wird für die im Überhitzungsgebiet liegenden Punkte a_3 und a_4 :

$$v = \frac{R \cdot T}{p} - C$$

für Punkt a_5 $v = x u + v$ (siehe S. 368).

Sonach engster Düsenquerschnitt:

$$f_{\min} = \frac{G}{211 \sqrt{\frac{p}{v}}}$$

größter Querschnitt:

$$f_{\max} = G \cdot \frac{v}{c_1}$$

Der endgültige Wärmeverlust wird von der Rechteckfläche dargestellt, deren Breite gleich der durch die Verluste hervorgerufenen Entropievermehrung ist und deren Höhe von der Kondensatorsspannung p_k bis zur Linie der absoluten Temperatur reicht.

2. Mittels der Mollierschen I-S-Tafel. Da die WE nicht als Flächen sondern als Strecken auftreten, so wird die Behandlung bedeutend einfacher. Als zweckmäßig ergibt sich, jeder Stufe als Wärmerückgewinn einen bestimmten Prozentsatz φ des Gesamtgefälles $i_0 - i_3$ zuzuschlagen (Fig. 87).

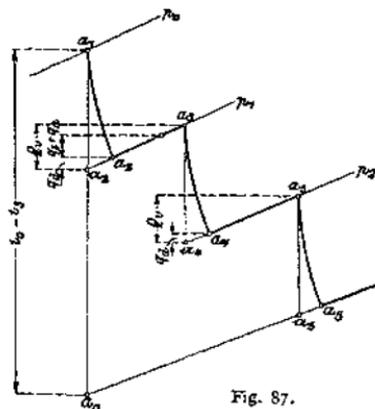


Fig. 87.

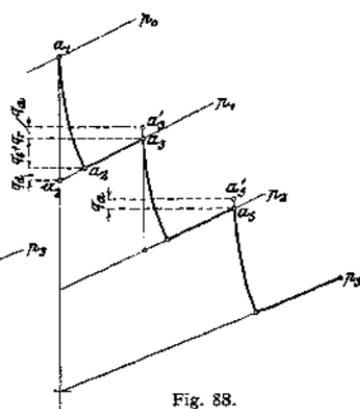


Fig. 88.

Es folgt für das Einzelgefälle:

$$h = \frac{1}{A} \cdot \frac{(1 + \varphi) \cdot (i_0 - i_3)}{n}, \quad n = \text{Stufenzahl.}$$

$$c_1 = \sqrt{2g \cdot h}$$

a_1 ist Anfangspunkt, so daß $a_1 a_0$ verlustloser Dampfarbeit zwischen den Druckgrenzen p_3 und p_0 entspricht. In Stufe *I* geht infolge der Verluste die

Expansion nach der Linie $a_1 a_2 a_3$ vor sich (vgl. Entropiediagramm nach Fig. 86 mit gleichen Bezeichnungen). Lage a_2 ist durch den Düsenverlust q_d festgelegt. Der Querschnitt der Leitvorrichtung wird nach dem hier (und in den entsprechenden Punkten a_4 und a_5) vorhandenen spezifischen Dampfvolumen bestimmt. Nach Antragen der Verluste $q_d + q_a$ folgt die Lage des Punktes a_3 , wenn q_r vernachlässigt wird.

Wird angenommen, daß die Austrittsgeschwindigkeit ganz oder teilweise in der folgenden Stufe verwertet wird, so ist nach Fig. 88 zu verfahren. Von a_2 aus werden $q_d + q_a + q_r$ aufgetragen, wodurch Punkt a_3 bestimmt ist. Hierauf Antragen von q_a .

Ist c'_1 die Axialkomponente der absoluten Eintrittsgeschwindigkeit, f_a der Axialdurchgangsquerschnitt des Rades ($f_a = \varphi' \cdot \pi \cdot d_m \cdot l$, wobei $d_m =$ mittlerer Schaufelkranzdurchmesser, $l =$ Schaufelhöhe, φ' die Verengung durch die Schaufelstärke berücksichtigt), so folgt: $f_a = \frac{G \cdot v}{c'_1}$. $\varphi' \approx 0,9$.

Einfachere Ermittlung des auf der Isobare p_1 liegenden Punktes a_2 : Nach Wahl von u folgt durch Multiplikation des Gefälles $a_1 a_2$ mit η_n die senkrechte Entfernung zwischen a_1 und a_2 .

b) Konstruktive Angaben. Nach Josse (Zeitschr. der Schiffbautechn. Ges. 1912) werden neuere Turbinen mit den folgenden Stufenzahlen ausgeführt:

Leistung in PS	"	Stufenzahl	mittl. Gefälle pro Stufe (WE)	mittlere theoretische Ausfließgeschwindigkeit
bis 3 000	3000	8 (bis 10)	27,5 (bis 22)	480 (bis 430)
1500 „ 7 500	1500	12	18,4	393
5000 „ 10 000	1000	16	13,8	340
7500 „ 18 000	750	20	11,0	303

Hierbei ist das meist zu findende Gesamtgefälle von rd. 220 WE, entsprechend 13 Atm. abs., $T = 300^\circ$, Luftleere = 95 v. H. angenommen.

Turbinen mit vorgeschaltetem Curtistrad arbeiten mit 750 bis 800 m/sek in der Curtisstufe, mit 350 bis 400 msek in den folgenden Stufen. Die Bestrebungen gehen unverkennbar nach Verringerung der Stufenzahl bei Erhöhung der Dampfgeschwindigkeit in parallelwandigen Leitapparaten.

Auf Grund der Christleinschen Versuche empfiehlt Josse Ausführung der Turbinen mit $c = 500$ bis 700 m/sek beim Austritt aus Leitvorrichtung und mit 6 bis 8 Stufen je nach Verwertung der Austrittsgeschwindigkeit aus vorhergehenden Stufen. Hierbei liegt u in den Grenzen von 200 bis 220 m/sek. Die Schaufellänge wird auf die Hälfte verkleinert, die Luftleere besser ausgenutzt.

Neueste Ausführungen zeigen je nach den Druckverhältnissen 5 bis 7 Stufen mit Dampfgeschwindigkeiten von 450 bis 650 m/sek, womit Gütegrade von rd. 75 v. H. erreicht wurden.

Nach Briling ergibt sich günstigste Schaufelform, wenn Strahlstärke gleich halbem mittleren Krümmungsradius r . Günstigste Teilung $t = \frac{r}{2 \sin \beta}$, wenn $\beta_1 = \beta_2$. Für $\beta = 30^\circ$ folgt: $t = r$ (Versuche von Ban ki führten auf $t = 1,3 r$, solche von Stodola auf $t = 0,7 r$).

Schaufelbreite $b = 10$ bis 15 mm bei kurzen Schaufeln; für lange Schaufeln $b = 25$ bis 35 mm.

Da weniger dichter Dampf eher zu Wirbelverlusten Veranlassung gibt, so schlägt Lösl auch aus diesem Grunde in den Niederdruckstufen Schaufeln von größerer Breite, also sanfterer Krümmung vor. Größte Schaufellänge $\approx \frac{1}{7}$ Rad-durchmesser.

Axiale Leitradbreite: 35 bis 50 mm und mehr. Axialer Spielraum zwischen Leit- und Lauftrad: 3 bis 6 mm an der Dampfeintrittsseite, bis 10 mm an der

Austrittsseite. Radialer Spielraum zwischen Laufrädern und Gehäuse: 4 bis 7 mm, weniger (bis herunter zu 0,5 mm) in den ersten Stufen von Überdruckturbinen.

Umfangsgeschwindigkeit $u = 120$ bis 160 (bis 200 m/sek). $\delta_1 = 15$ bis 25°. Häufig wird $\beta_1 = \beta_2 = 30$ bis 35°. In den letzten Stufen werden mitunter die Winkel δ auf 35 bis 40° vergrößert, um dadurch die Axialkomponenten der Geschwindigkeiten zu vergrößern und mit kleineren Querschnitten auszukommen (siehe auch S. 992). Innerhalb eines Rades sollen sich Ein- und Austrittsquerschnitt wie die zugehörigen Axialkomponenten von Ein- und Austrittsgeschwindigkeit verhalten.

Über die Bestimmung der kritischen Umlaufzahl der Welle und Berechnung der Turbinenscheiben siehe S. 245 und 488.

4. Gesamtanordnung und Einzelheiten.

Fig. 89. Zweistufige A.-E.-G.-Turbine mit zwei Geschwindigkeitsstufen in jeder Druckstufe.

Fig. 90. Zoelly-Turbine. Vielstufige Aktionsturbine von Escher, Wyss & Co., Zürich. Bei normalen Dampfverhältnissen liegt die Stufenzahl zwischen 7 für die kleinsten Ausführungen mit $n = 3000$

und 16 für die größten Ausführungen mit $n = 1000$.

Fig. 91. M.-A.-N.-Turbine. Zoelly-Turbine mit vorgeschaltetem Geschwindigkeitsrad, in dem bis auf etwa 2 Atm. expandiert wird.

Fig. 92. Brown-Boveri-Turbine.

Reaktionsturbine, ebenfalls mit Geschwindigkeitsrad. Anordnung der Reaktionsbeschauelung auf der Trommel. Ausgleich des Axialschubes durch zwei mit Labyrinthdichtung versehene

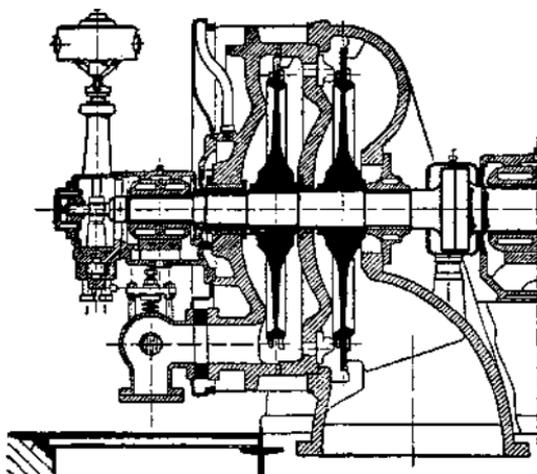


Fig. 89.

Entlastungskolben. Der am Dampfeintritt angeordnete Entlastungskolben nimmt den Schub des mit kleinerem Durchmesser ausgeführten Trommelteiles auf, während der Entlastungskolben am Abdampfende den Schub des größeren Trommelteiles dadurch ausgleicht, daß infolge Anordnung von Verbindungskanälen seine Kreisringfläche vom Dampf vor diesem größeren Trommelteile belastet wird.

Radialdampfturbinen: Elektraturbine und Eyermann-Turbine.

Fig. 93. Melms-Pfenninger-Turbine. Die Reaktionstrommel trägt vorne ein Geschwindigkeitsrad. Entlastung wird herbeigeführt durch den Unterschied in den Durchmessern der Reaktionstrommel und des mit dem Geschwindigkeitsrad aus einem Stück bestehenden Labyrinthkolbens, der die Abdichtung des Druckes im Aktionsteil gegen den im Abdampfstutzen bewirkt.

Gehäuse. Baustoff: Gußeisen. Die Form soll sich mit Rücksicht auf Gußspannungen und Wärmedehnungen dem einfachen Zylinder möglichst nähern. Ausgüßen des Gehäuses zur Vermeidung der Gußspannungen und des Verziebens im Betriebe vielfach gebräuchlich. Teilung in wagerechter Ebene, um den Ober-

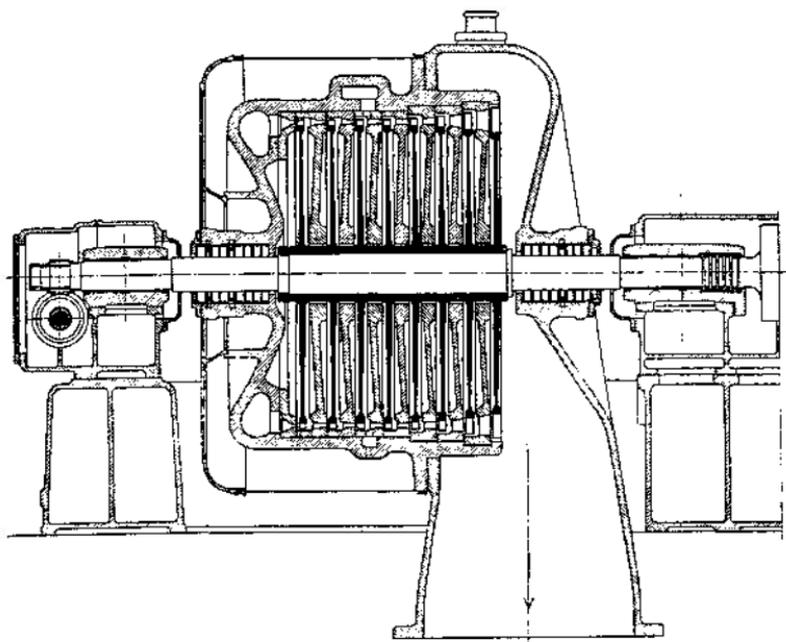


Fig. 90.

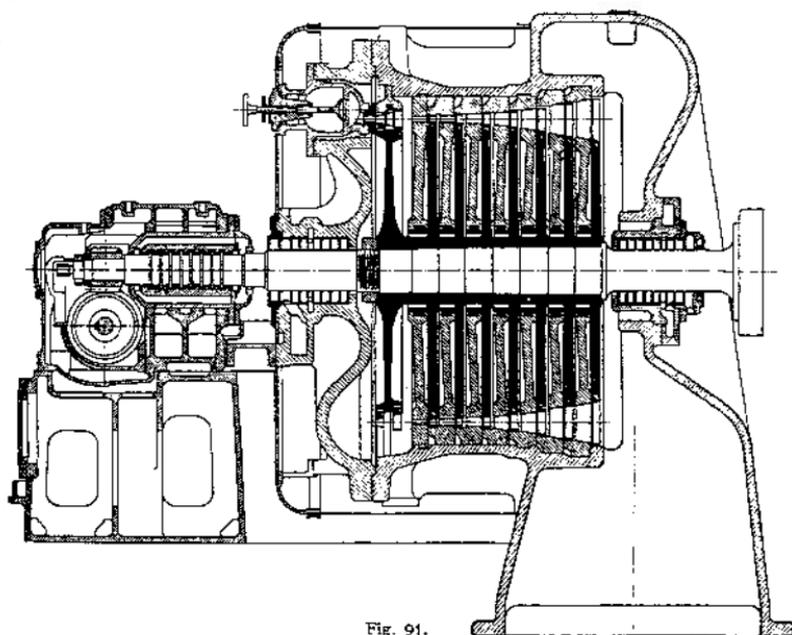


Fig. 91.

teil mit den an ihm befestigten Leitradhälften leicht abziehen zu können. Festlegung des Gehäuses am Abdampfende, um Verschiebung des Kondensatorrohres durch Wärmedehnungen zu vermeiden. Lager am Abdampfende mit Gehäuse aus einem Stück bestehend, und Zentrierung des vorderen, in Gleitschienen verschiebbaren Lagers am Deckel oder Aufstellung der Lager unabhängig vom Gehäuse direkt auf der Grundplatte. Unterstützung des Gehäuses in wagerechter Mittelebene, damit sich Höhenlage nicht ändert. Zum Einhalten der Schaufel-spiele Anordnung eines Kammlagers erforderlich.

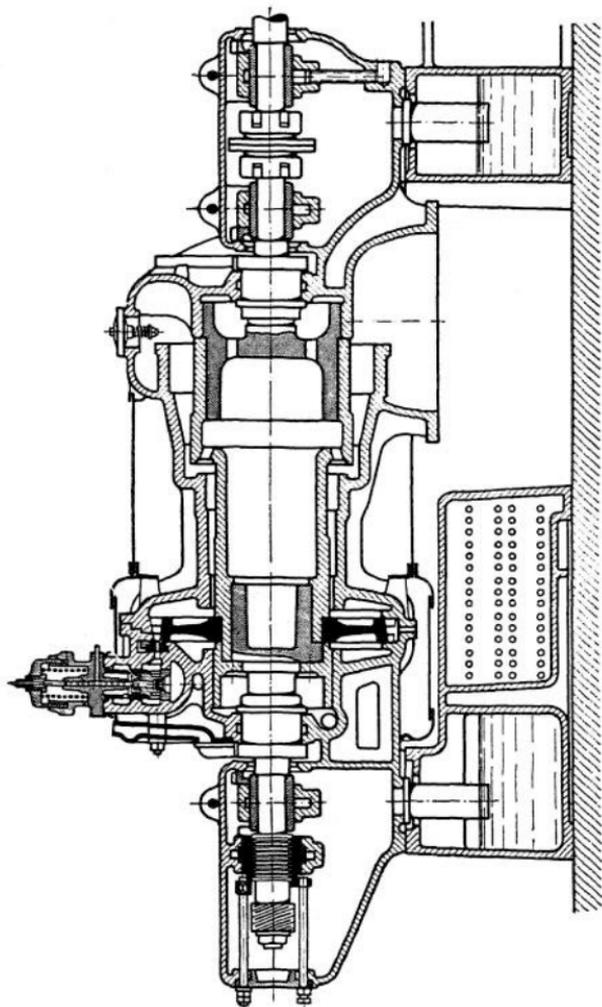


Fig. 92.

Welle. Baustoff: Siemens-Martin-Stahl, seltener Nickelstahl, Beseitigung von Spannungen durch Ausglühen. Ausführung entweder „starr“ oder „biegsam“, je nachdem Betriebsumlaufzahl unter oder über der kritischen Zahl liegt. (Letztere abhängig von der linear mit der Belastung und in dritter Potenz mit der Lager-

entfernung zunehmenden Durchbiegung.) Beim Anlassen biegsamer Wellen treten beim Durchgang durch die kritische Umlaufzahl Erschütterungen auf, die oft kaum merkbar, mitunter aber die Leitradbuchsen ausschleifen. Mit Rücksicht auf unvorhergesehene Überschreitungen der Umlaufzahl und Ungenauigkeiten der Rechnung soll die Umlaufzahl etwa um 25 bis 30 v. H. ihres Wertes unter der kritischen liegen.

Düsen. Baustoff: Hochwertiger Nickelstahl. Vereinigung der aus dem Vollen gefrästen oder durch einzeln eingesetzte Wände gebildeten Düsen in Düsenkästen aus Stahlguß. Anordnung zusammenhängend und nicht gleichmäßig über den Umfang verteilt, damit das wiederholte Auffüllen und Leeren der Schaufelkanäle und die damit verbundenen Wirbelverluste vermieden werden. Querschnitt kreisrund oder rechteckig.

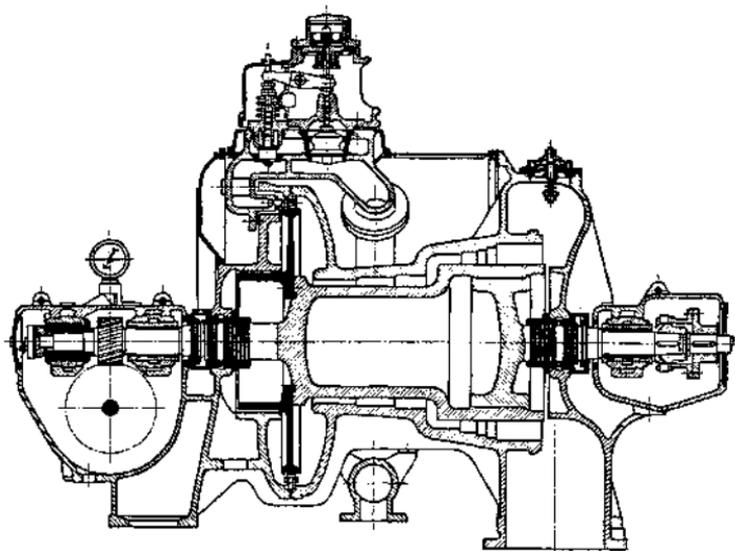


Fig. 93.

Leiträder. Zweiteilig, obere Hälfte mit Gehäusedeckel verbunden. Bei den ersten teilweise beaufschlagten Leiträdern mit kleiner Schaufelhöhe werden die Schaufelbleche aus Nickelstahl in schräge Schlitze eines Ringes eingesetzt, der mit der Scheibe verschraubt wird. Begrenzung der Leitkanäle nach außen hin ebenfalls durch besonderen Ring. Bei Vollbeaufschlagung werden die Nickelstahlschaufeln in die Scheidewände eingegossen. Abdichtung an der Welle entweder durch Kupferingsegmente, die in schwalbenschwanzförmige Nuten der Leitradnaben eingestemmt werden, oder durch Eintreiben zugeschräfter Kupferinge in besondere Buchsen.

Laufäder. Baustoff: Siemens-Martin-Stahl. Schaufelmaterial: Nickelstahl. (Die A. E. G. verwendet in der ersten Stufe Nickelstahl, in den folgenden Stufen mit Vollbeaufschlagung und dementsprechend kleinen Schaufellängen Messing. Die langen Schaufeln der letzten Stufen werden zur Erzielung genügender Festigkeit aus zäher Bronze hergestellt.) Anordnung von Bohrungen in den Scheiben, um bei plötzlich auftretenden Belastungsänderungen Druckausgleich herbeizuführen und Axialschübe zu verhindern. Der Kranz enthält eine \perp -förmige Nut, in welche die Schaufeln mit entsprechend gestaltetem Fuß von der Seite durch eine mit Spezialschloß zu sichernde Aussparung eingebracht werden. Der Abstand

der Schaufeln voneinander ist durch ebenfalls \perp -förmige Abstandstücke festgelegt. Die Schaufeln werden entweder aus dem Vollen gefräst oder gestanzt und gepreßt. Längere Schaufeln erhalten zweckmäßig nach außen hin abnehmenden Querschnitt, um Belastung des Schaufelfußes durch Fliehkraft zu verringern. Abschluß der Kanäle nach außen hin durch Bandstücke, die mit Schaufelenden vernietet werden. Fig. 94 zeigt Ausführung von Escher, Wyss & Co.

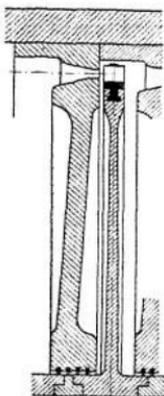


Fig. 94.

Befestigung der Laufräder auf der mit Absätzen versehenen Welle durch Aufpressen mittels hydraulischen Druckes und Sicherung durch zwei Federn oder Aufbringen der Räder auf besondere Paßringe, um Feststoen zu vermeiden, und Kraftübertragung durch eingelegte Keile.

Stopfbuchsen. Abdichtung meist durch dreiteilige, graphithaltige und selbstschmierende Kohlenringe, die in besonderen Kammerringen untergebracht sind und von umgelegten Schlauchfedern gegen die Welle gepreßt werden. Mitunter auch Labyrinthdichtung. Auf der Oberfläche von Stahlgußbuchsen, welche auf der Welle befestigt sind, wird eine große Anzahl scharf zugespitzter Ringe herausgedreht, in deren Zwischenräume gleichartig ausgearbeitete Ringe hineinragen, die sich an der Innenseite mehrteiliger am Turbinendeckel befestigter Buchsen befinden. Eindringen der Luft an der Abdampfseite wird durch Sperrdampf verhindert. Fig. 95 und 95 a.

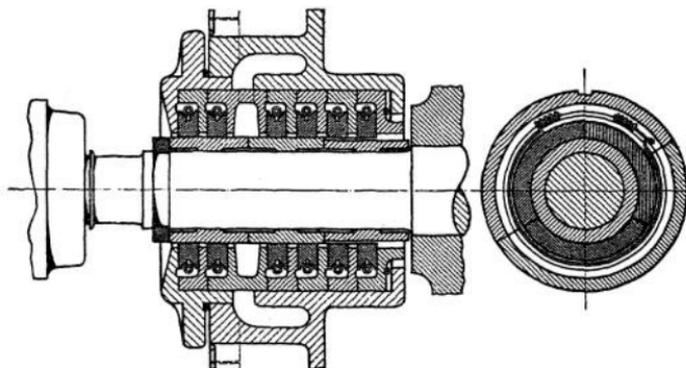


Fig. 95. (Bauart Oerlikon).

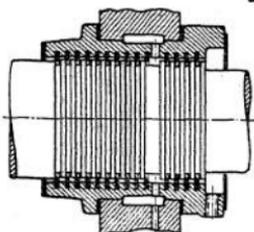


Fig. 95 a.

Bauart Melms-Pfenniger.

Regelung. Diese würde in vorteilhafter Weise durch gleichzeitige Änderung sämtlicher Leitradquerschnitte erfolgen, was jedoch sehr verwickelte Ausführung veranlassen würde. Meist findet sich: Drosselregulierung und bei Düsenanordnung in der ersten Stufe: Quantitätsregelung. Der wirtschaftliche Unterschied zwischen beiden ergibt sich aus Fig. 96. Eine Verminderung des Dampfverbrauches findet stets bei derjenigen Belastung statt, bei der der Regler einen Teil einer mit Drosselung arbeitenden Düsengruppe ausschaltet, so daß die übrigbleibenden Düsen mit Frischdampf arbeiten, der erst bei weiterer Entlastung gedrosselt wird. An einer bestimmten Belastungsstelle werden dann wieder weitere Düsen ausgeschaltet. Bauliche Aus-

führung dieser Maßnahme durch die A.-E.-G. zeigt Fig. 97. Der Regler dreht eine Welle mit Nocken, die so gestaltet sind, daß nacheinander die zu den einzelnen Düsengruppen führenden Ventile geöffnet oder geschlossen werden. Regelung stets indirekt nach S. 1034.

Die Kurven in Fig. 80 sind auch für die Beurteilung der Regelung von Bedeutung. Die größere Unempfindlichkeit der parallelwandigen Leitvorrichtungen gegen Änderung des Druckgefälles (Drosselung) gelangt in dem flacheren Verlauf der Scheitelkrümmung gegenüber dem spitzen Knie der Düsenkurven zum Ausdruck. Die einfache Drosselung ist also bei gewöhnlichen Leitapparaten durchaus am Platz.

Versuche von Prof. Baer ergaben: Bei reiner Füllungsregelung — also gleichbleibendem Gesamtgefälle — nimmt bei sinkender Belastung das Wärmegefälle der ersten Stufe zu, das der letzten Stufe ab, während in den mittleren Stufen innerhalb weiter Grenzen das Wärmegefälle unveränderlich bleibt. Es zeigten sich folgende Verhältnisse:

Leistung	Wärmegefälle (WE) in Stufe I	Theoretische Dampfgeschwindigkeit
$\frac{1}{1}$	65	737
$\frac{3}{4}$	84	840
$\frac{1}{2}$	101	920
$\frac{1}{4}$	120	1000

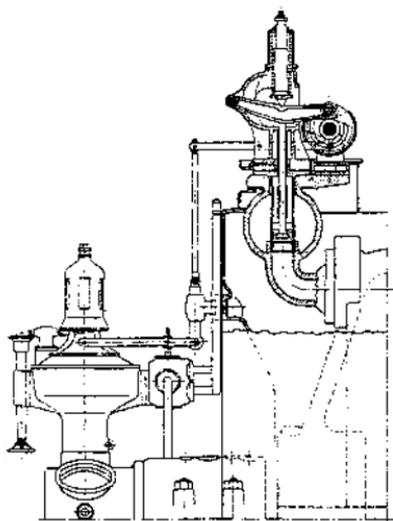


Fig. 97.

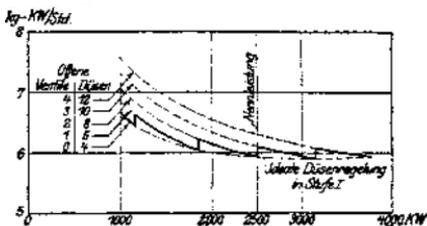
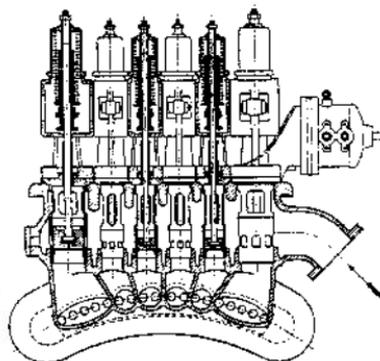


Fig. 96.



Bei Drosselregelung bleibt das Wärmegefälle in den einzelnen Stufen fast konstant. Die Verringerung des Gesamtgefälles kommt fast ganz auf die letzte Stufe und erstreckt sich von hier aus ganz allmählich nach den Hochdruckstufen hin. Die Leistungskonzentration ist sonach geringer als bei Füllungsregelung (Z. Ver. deutsch. Ing. 1909, S. 1056).

Ein besonderer Sicherheitsregler verhindert die Überschreitung einer bestimmten Höchsterlaufzahl bei Versagen des Hauptreglers durch Schnellschluß einer Absperrvorrichtung in der Dampfzuleitung.

Ölpumpe. Meist als Zahnradpumpe ausgeführt, die mit zwei Druckstufen für Lagerschmierung (0,5 bis 1,5 kg/qcm) und Servomotor (3 bis 5 kg/qcm) arbeitet.

Kühlung des vom Ölsammler kommenden Öles in besonderen Kühlern, deren ausziehbares Rohrsystem vom Kühlwasser durchflossen wird. Anordnung des Ölbehälters in der Grundplatte. Mitunter wird Vorrichtung getroffen, daß Verminderung des Oldruckes elektrisches Klingelwerk betätigt.

IV. Die Turbokompressoren.

a) **Arbeitsweise.** In der Arbeitsweise grundsätzlich mit den Zentrifugalpumpen übereinstimmend, weichen die Turbokompressoren von diesen insofern ab, als die Dichte der Luft mit dem Druck wächst und die in jeder Stufe erreichte Druckzunahme relativ gleichbleibend ist, konstante Temperatur vorausgesetzt. Erzielt jedes Rad das m fache des Druckes in der vorhergehenden Stufe, so hat bei n Rädern die gesamte Druckhöhe die Größe m^n . Die auf S. 977—978 wiedergegebenen Diagramme gelten auch hier, nur ist beim Turbokompressor ein „Abfallen“ ausgeschlossen, solange er allein auf das Druckluftnetz arbeitet, da er in diesem Fall keinen größeren Druck als den von ihm erzeugten zu überwinden hat. Abfallen tritt hingegen ein, wenn der Turbokompressor einem für die Luft-erzeugung allein genügenden Kolbenkompressor zugeschaltet oder die angesaugte Luftmenge bei demselben Enddruck unter einen gewissen Mindestbetrag sinkt.

Je nach dem Enddruck liegt diese untere Grenze bei etwa $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{2}$ der Normalleistung. Hierbei schlägt die Druckluft in geräuschvollen Schwingungen gegen den Saugraum durch, wodurch ein axiales Schleudern der Welle verursacht wird. Sinkt deshalb im Druckluftnetz der Verbrauch unter einen bestimmten Betrag, so ist ein Notauslaß zu öffnen, durch den ein Teil der verdichteten Luft in die Atmosphäre entweicht. Für diese Mindestleistung ist also dieselbe Arbeitsmenge wie für Normalleistung aufzuwenden.

Die durch die Verdichtung und Reibung verursachte Temperaturzunahme ist am stärksten in den ersten Laufrädern, während in den letzten Stufen infolge

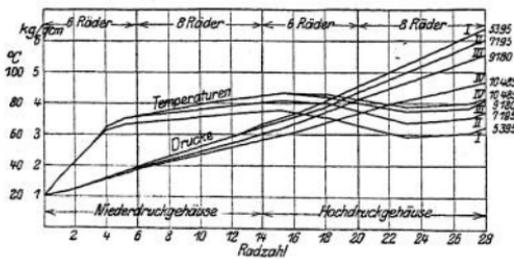


Fig. 98.

der größeren Dichte der Luft und des stärkeren Temperaturunterschiedes zwischen dieser und dem Kühlwasser die Temperatur wieder sinkt. Fig. 98 gibt Ergebnisse von Versuchen an einem zweigehäusigen Kompressor mit 28 Laufrädern wieder. Die Temperatur erreicht ihren Höchstwert in Stufe 15. Der letzte Diffusor war nicht gekühlt, um durch Temperaturerhöhung ein Einfrieren der mit Druckluft betriebenen Maschinen zu verhindern. Bei den A.-E.-G.-Turbokompressoren zeigt sich, daß der Exponent n der polytropischen Zustandsänderung am Anfang etwa 1,5 bis 1,6 beträgt, während am Ende der Verdichtung unter Umständen $n < 1$ ist. Endtemperatur bei 6 bis 8 Atm. Überdruck etwa 75°C oder weniger, je nach Kühlwassertemperatur.

Entsprechend dem Enddruck wird die Anordnung von 1 bis etwa 30 Rädern erforderlich, von denen bis zu 15 auf einer Welle in demselben Gehäuse laufen. Durch Einbau von Röhrenkühlern, deren Rohrsystem bei der Überströmung von einem zum anderen Gehäuse von der Luft durchströmt wird, kann die Endtemperatur wesentlich verringert werden.

Der Kühlwasserbedarf der A.-E.-G.-Kompressoren beträgt etwa 0,75 cbm/min bei 1000 PS, 1,5 cbm/min bei 2000 PS, 3 cbm/min bei 4000 PS, eine Eintrittstemperatur des Kühlwassers von 20° vorausgesetzt.

Damit der Austrittsquerschnitt am Radumfang und damit die Radbreite nicht zu klein wird, werden die Laufräder kleiner Kompressoren klein genommen und ihre Umlaufzahl erhöht, um die Stufenzahl durch die Vergrößerung der Umfangsgeschwindigkeit zu verringern. Dementsprechend sollen Kompressoren von z. B. folgenden Leistungen: 4000 cbm/st. auf 5 bis 6 Atm. Überdruck, 3000 cbm/st. auf 4 Atm., 1000 cbm/st. auf 1,5 Atm. mit Umlaufzahlen $n = 4200$ bis 5000 arbeiten. Antrieb durch Drehstrommotoren ($n = 3000$ bei 50 Perioden) ist sonach bei diesen Leistungen ausgeschlossen.

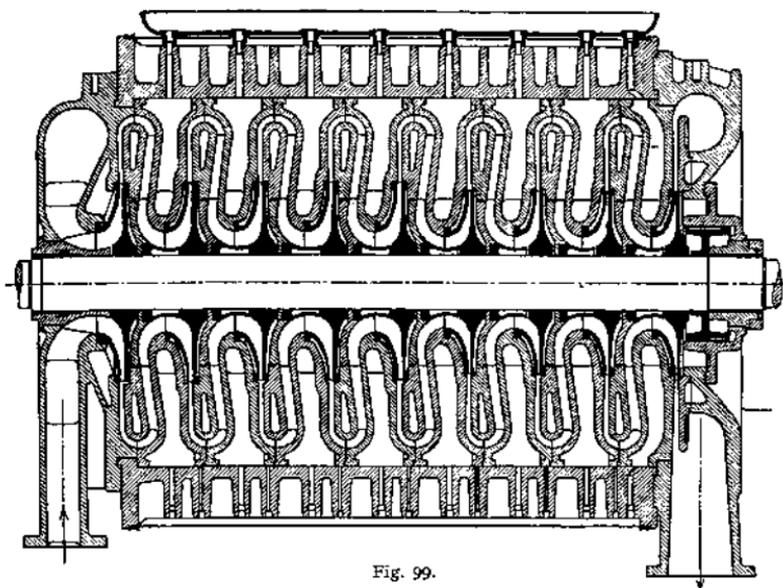


Fig. 99.

Die A. E. G. führt große und größte Einheiten, die Luftmengen von 20 000 bis 40 000 cbm/st. auf 5 bis 8 Atm. Überdruck verdichten, normal mit $n = 3000$, bei geringerem Druck und besonders großen Luftmengen mit $n = 1500$ aus. Für Kompressoren von etwa 8000 bis 20000 cbm stündlicher Saugleistung wird $n = 3800$. Kleinere Leistungen wie vorstehend angegeben.

Antrieb durch Dampfturbinen (vielfach Abdampfturbinen) oder Drehstrommotor. Dampfturbinen bieten infolge der Beweglichkeit ihrer Umlaufzahl größere Regulierfähigkeit bezüglich Enddruck und Luftmenge.

b) Ausführungen und Einzelheiten. A.-E.-G.-Kompressor,

Fig. 99. Die hohlen vom Kühlwasser durchflossenen Leitvor-

richtungen, Fig. 100, sind mit doppelten Leitschaufeln versehen. Anordnung von Labyrinthdichtungen an jeder Seite eines Rades. Ausgleich des Axialschubes durch einen am Umfang mit Labyrinth abdichtenden Kolben, der auf der

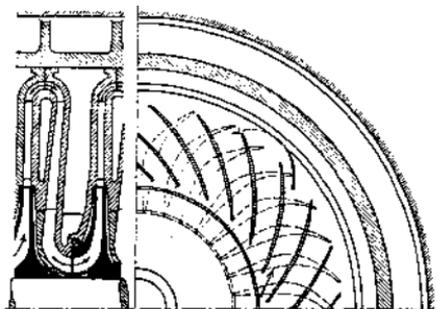


Fig. 100.

Welle jedes Gehäuses hinter dem letzten Laufrad aufgekeilt ist und dessen eine Seite unmittelbar mit dem Austritt des letzten Laufrades, dessen andere Seite durch eine Rohrleitung mit dem Saugraum verbunden ist. Zur weiteren Sicherung der Welle ist ein Kammlager vorgesehen.

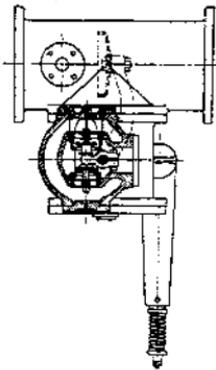


Fig. 101.

Zusammensetzung der Laufräder durch je zwei Nickelstahlradscheiben, an denen die schmiedeeisernen Schaufeln angenietet sind. Umfangsgeschwindigkeit bei $n = 3000$ rd. 160 m/sek.

Ausführung des Notauslasses nach Fig. 101. Sinkt der Druckluftbedarf, so nimmt der Druck der strömenden Luft auf einen im Druckrohr beweglich angeordneten Ventilteller ab und eine an diesem als Gegenkraft angebrachte Feder verschiebt einen Kolbenschieber, der je nach Stellung eine Verbindung des Druckraumes mit der Atmosphäre herstellt oder abschließt.

Konstanthaltung des Druckes durch Drosseln der Saug- oder Druckleitung oder durch Änderung der Umlaufzahl der antreibenden Dampfturbine, indem ein unter Einfluß des Luftdruckes stehender, am Regulatorhebel angreifender Kolben den Regler be- oder entlastet.

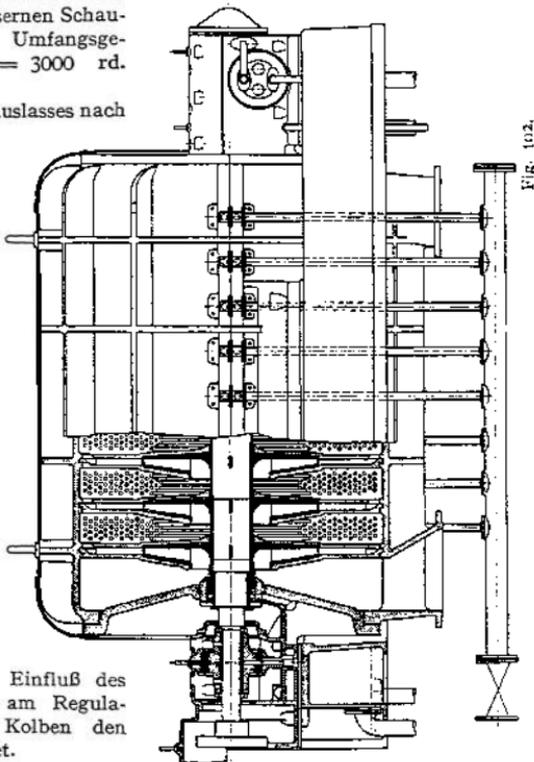
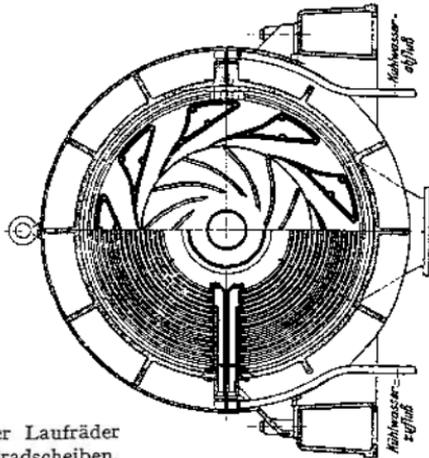


Fig. 102.

Fig. 102, Kompressor von C. H. Jaeger & Co., Leipzig. Abdichtung der einzelnen Stufen gegeneinander im Gehäuse durch Labyrinth. Ausrüstung der Gehäusestopfbuchsen mit Kohlenringen. Ausgleich des Axialschubes durch hydraulische Vorrichtung. Eine zweite Vorrichtung dieser Art oder je nach den Verhältnissen ein Kammlager dient zur Sicherung des Räderabstandes. Die Kühlkörper bestehen aus halbkreisförmig gebogenen Messingrohren, deren Enden in Wasserkammern eingewalzt sind. Die Kühlerhälften sind am Ober- bzw. Unterteil des Gehäuses leicht herausnehmbar befestigt. Versuche ergaben Zunahme der Lufttemperatur um 28° bei voller Belastung und Kühlwasserverbrauch von 285 l/min bei einem Kompressor von 8000 cbm stündlicher Saugleistung und 6 Atm. Luftüberdruck.

c) Angenäherte Berechnung der Turbokompressoren. Da im Gegensatz zu den Vorgängen in der Dampfturbine die physikalischen Eigenschaften der im Turbokompressor zu verdichtenden Arbeitsmittel sich nicht ändern, so kann hier vom p - v -Diagramm, statt vom Entropiediagramm, ausgegangen werden.

Im p - v -Diagramm ist die Gestalt der wirklichen Verdichtungslinie, zwischen Isotherme und Adiabate liegend, schätzungsweise einzutragen, wobei aus schon angegebenen Gründen im späteren Verlauf eine Näherung an die Isotherme anzunehmen ist. Siehe z. B.

Fig. 103. Zwischenkühlung ist nach Fig. 154, S. 942, zu berücksichtigen.

Das Diagramm ist in so viele gleiche Flächen einzuteilen, als der Kompressor Radgruppen erhalten soll. Innerhalb jeder dieser Radgruppen kann das spezifische Volumen als konstant angenommen werden. Sein Wert wird entweder auf Grund geschätzter Temperatur berechnet oder durch Vergleich mit V — dem spezifischen Volumen bei atmosphärischer Spannung — erhalten.

Nach Wahl von Umlaufzahl und Umfangsgeschwindigkeit ($u = 130$ bis 200 m/sek) ist der Raddurchmesser festgelegt, dessen Mindestgröße dadurch bestimmt ist, daß die Luft in dem Ringraum zwischen Nabe und innerem Schaufelkreisdurchmesser keine Geschwindigkeit annehmen soll, die wesentlich größer als c_1 ist.

Mit $u_1, u_2, \beta_1, \beta_2$ können die Geschwindigkeitsdiagramme entworfen werden, wenn zunächst die vereinfachende Voraussetzung senkrechten Eintrittes, also $\delta_1 = 90^\circ$ gemacht wird. Da die Druckhöhe hauptsächlich statischer Art ist, so werden die Schaufeln mit $\beta_2 = 90^\circ + 20^\circ$ bis $90^\circ + 40^\circ$ und dabei vielfach geradlinig, ausgeführt. Der Zoelly-Kompressor arbeitet mit radial gerichteten Schaufeln.

Die auf S. 973 gegebenen Gleichungen für H geben die erzeugte Druckhöhe unabhängig von der Art des Arbeitsmittels (Wasser, Gas) in m der betreffenden Flüssigkeits- oder Gassäule an. Soll der erzeugte Druck in kg/qm oder mm Wassersäule angegeben werden, so wird:

$$H_p = H \cdot \gamma = \frac{H}{v}. \quad (\text{S. S. 346.})$$

Für Luft: $\gamma = 1,2$ kg/cbm; $v = 0,83$ cbm/kg.

Die Antriebsleistung kann wie folgt bestimmt werden. Für einen Kolbenkompressor gilt:

Theoretische Leistung: $N_{th} = \frac{10000 \cdot \dot{Q} \cdot c \cdot p_i}{75}$ und bei $\eta = 0,74 =$

Gesamtwirkungsgrad:
Effektive Leistung: $N_e = \frac{10000 \cdot \dot{Q} \cdot c \cdot p_i}{75 \cdot 0,74}$.

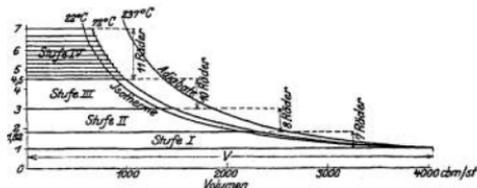


Fig. 103.

Diese Gleichungen gelten auch für den Turbokompressor, wenn $\bar{p}_i =$ mittlerer Druck des zugrunde gelegten Diagramms (ohne schädlichen Raum und Rückexpansion). O_c ist das sekundlich angesaugte Volumen $= \frac{V_{st}}{3600}$. Letzterer Wert eingesetzt, ergibt:

$$N_e = \frac{10000 \cdot V_{st} \cdot \bar{p}_i}{3600 \cdot 75 \cdot 0,74} \approx \frac{V_{st} \cdot \bar{p}_i}{20}$$

$V_{st} =$ stündliches Ansaugvolumen.

Pumpen und Kompressoren verschiedener Bauart.

1. Pulsometer. Der durch Kugeln oder Klappen selbsttätig gesteuerte Dampf tritt abwechselnd in zwei Kammern und drückt deren Inhalt durch die Druckventile in die Steigleitung. Die hierauf erfolgende Kondensation des Dampfes, unterstützt durch besondere Einspritzung kalten Wassers, verursacht die Entstehung eines luftleeren Raumes und Einströmung des Wassers durch die Saugventile. Saughöhe bis zu 8 m. Druckhöhe bis zu 50 m, größere Druckhöhen erfordern sonach Hintereinanderschaltung mehrerer Apparate. Das einzuführende Dampfvolumen beträgt das Zwei- bis Dreifache der zu fördernden Wassermenge. 1 kg Dampf leistet in gehobenem Wasser 4000 bis 5000 m/kg (in Einzelfällen bis zu 7000 m/kg).

2. Injektoren werden hauptsächlich zur Kesselspeisung benutzt, wobei die Dampfwärme in das Speisewasser übergeht. Der durch eine Düse strömende Dampf reißt das der Düsenmündung zufließende Wasser infolge seiner lebendigen Kraft in die sich verengende „Mischdüse“, worauf das Gemisch in der sich anschließenden „Fangdüse“ seine Geschwindigkeit in Druck umsetzt. Die Saugwirkung des Injektors ist um so stärker, je vollständiger die Kondensation des Dampfes ist. Zwischen Misch- und Fangdüse ist der „Schlabberaum“ angeordnet, in dem sich anfänglich nicht mitgerissenes Wasser sammelt und durch das „Schlabberventil“ nach außen abfließt.

Saugende Injektoren sind mit Regulierspindel auszuführen, damit bei der Inbetriebsetzung durch einen feinen Dampfstrahl zunächst nur der Wasserzutriffsraum luftleer gemacht wird, bis durch Einstellung eines kräftigeren Strahles die Wasserförderung beginnt. „Restarting“-Injektoren setzen sich selbsttätig in Betrieb, wenn die Ursache der Außerbetriebsetzung (Eintritt von Luft in das Saugrohr, Wassermangel usw.) beseitigt ist. „Abdampfinjektoren“ ermöglichen bei Zuströmung kalten Wassers, das auf 70 bis 90° erwärmt werden kann, Speisung gegen 6 Atm. Druck.

In den Universal- oder Doppelinjektoren, zuerst von Gebr. Körting gebaut, wirkt der Dampf zweimal auf das Wasser. Körtingsche Doppelinjektoren fördern kaltes Wasser bei Saughöhen von . . . 5 bis 9 10 bis 11 12 bis 13 Atm. heißes Wasser bei 2 m Saughöhe von . 60° 57° 54° gegen absolute Kesseldrucke von . . . 5 bis 9 10 bis 11 12 bis 13 Atm.

3. Mammutpumpen (gebaut von A. Borsig, Berlin-Tegel). Die Steigleitung endet unten in einem Fußstück, in das durch ein besonderes Luftrohr verdichtete Luft so eingeführt wird, daß sie dem Förder- oder Steigrohr am ganzen Umfange zuströmen kann. Die Luft löst sich in Luftkolben auf und das von diesen durchsetzte Wasser strömt im Steigrohr aufwärts. Die antreibende Kraft ist sonach die Wassersäule außerhalb der Steigleitung, so daß die Eintauchtiefe in der Regel das 1- bis 1½-fache der Förderhöhe betragen muß. Infolge der Luftexpansion sinkt die Wassertemperatur um einen kleinen Betrag (etwa 1—1,5° C). Die eingeführte Luft verursacht eine Enteisung des Wassers.

Es wird erforderlich:

für 1 l Wasser 2 bis 3 l Luft von atm. Druck für Förderhöhen von 5 bis 15 m,

für 1 l Wasser 4 bis 5 l Luft von atm. Druck für Förderhöhen > 60 m.

Versuche ergaben einen günstigsten Wirkungsgrad von 45. v. H. zwischen indizierter Kompressorleistung und gehobenem Wasser.

4. Humphrey-Gaspumpe, Fig. 104¹⁾. Der Kolben des senkrechten Gaszylinders wird durch die Wasseroberfläche gebildet. Wird beim Druck p_2 und Volumen V_0 gezündet, so geht infolge der Trägheit der Wassersäule die Verbrennung bei annähernd konstantem Volumen vor sich. Ist nach der Expansion das Volumen V_1 und ein Druck < 1 Atm. erreicht, so öffnen Auslaßventil A und Saugventile S . Das einströmende Wasser folgt nicht nur der noch über V_1 hinausschwingenden Wassersäule, sondern füllt auch noch (nach dem Gesetz der kommunizierenden Röhren) den Zylinder bis V_2 auf. Die Saugventile S schließen und die Verbrennungsgase werden ausgetrieben, bis in V_3 das Auslaßventil A schließt. Der Rest der Verbrennungsgase wird durch die weiter steigende Wassersäule auf V_4 und p_4 verdichtet. Die infolge der Rückexpansion dieser verdichteten Gase zurückschwingende Wassersäule saugt durch das Einlaßventil E frisches Gemisch an, bis die Wassersäule in V_2 zur Ruhe gelangt. Hierauf wieder Aufsteigen des Wasserspiegels, Verdichtung von V_2 auf V_0 und Zündung.

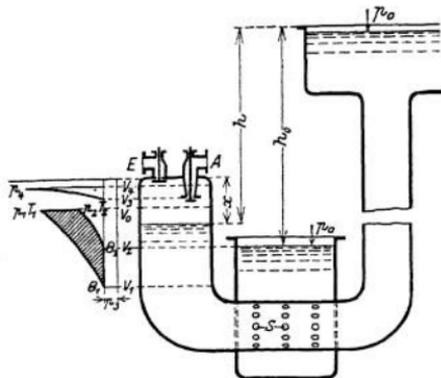


Fig. 104.

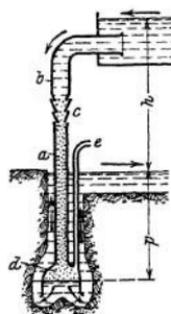


Fig. 105.

In dem den Viertaktprozeß wiedergebenden Indikatorgramm wird die Arbeitsfläche von den zwei Adiabaten mit den absoluten Temperaturen T_1 , Ω_1 und T_2 , Ω_2 begrenzt. Die Druckkurve V_3V_4 ist für den Arbeitsvorgang ohne Bedeutung, da sie in annähernd gleicher Weise vor- und rückwärts durchlaufen wird.

5. Hydraulischer Kompressor, Fig. 105²⁾. Das unter dem Gefälledruck h stehende Wasser saugt freifallend bei c Luft an, die sich in dem Luftabscheider d vom Wasser trennt und durch die Steigleitung e unter dem Druck p zum Verwendungsort geführt wird.

Der Luftdruck ist unabhängig von der Wasserdruckhöhe und wird nur von der Länge des Fallrohres unterhalb des Unterwasserspiegels bestimmt.

Ein Gemisch von 1 l Wasser auf 5 l Luft ergibt einen auf die Isotherme bezogenen Wirkungsgrad von 60 bis 70 v. H.

¹⁾ Lorenz, Z. V. deutsch. Ing. 1911, S. 1852.

²⁾ Bernstein, Z. V. deutsch. Ing. 1910, S. 1903.

Abwärmeverwertung.

Bearbeitet von H. Dubbel.

1. Abdampfverwertung. Die Dampfmaschine wandelt etwa 10 bis 12 v. H., in besten Ausführungen 15 v. H. der zugeführten Gesamtwärme in Arbeit um. Die im Abdampf enthaltene in die Atmosphäre oder den Kondensator geleitete Wärme beträgt rd. 60 v. H. und kann zu Koch- und Heizzwecken verwertet werden. Die wirtschaftlich günstigsten Verhältnisse liegen dann vor, wenn der gesamte Auspuffdampf bei wenig veränderlichem Heizdampfbedarf und annähernd gleichbleibender Maschinenleistung verwertet werden kann. Ist die Heizdampfmenge kleiner als die Abdampfmenge, die der erforderlichen Maschinenleistung entspricht, so kommen Anlagen nach Beck und Mennig-Picard, mit Kolbendampfmaschinen oder Dampfturbinen ausgeführt, in Betracht.

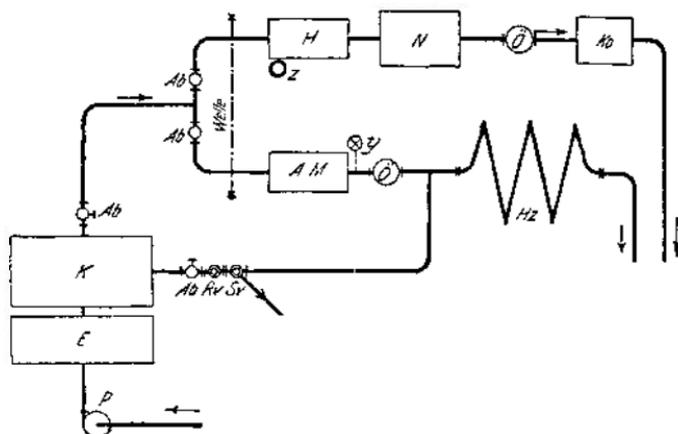


Fig. 1.

Anlagen nach Beck mit Gegendruckmaschine. Schema: Fig. 1. *H* = Hochdruckzylinder, *N* = Niederdruckzylinder, *O* = Olabscheider, *Ko* = Kondensator, *AM* = Einzylindermaschine, *y* = Druckregler, *HZ* = Heiz- oder Kochanlage, *Ab* = Absperrventil, *Rv* = Reduzierventil, *Sv* = Sicherheitsventil, *K* = Dampfkessel, *E* = Rauchgasvorwärmer, *P* = Pumpe. Die Verbundmaschine arbeitet in üblicher Weise mit Auspuff in den Kondensator. In die irgendwie mit der Verbundmaschine gekuppelte und ohne Geschwindigkeitsregler arbeitende Einzylindermaschine gelangt nur die dem Heizdampfbedarf entsprechende Dampfmenge, indem durch den Regler *y*, der sich in der Heizleitung hinter der Maschine befindet, die Steuerung der Gegendruckmaschine so eingestellt wird, daß der Heizdampfdruck, der Kolben des Druckreglers wird gegen die Federkraft gehoben und stellt kleinere Füllung ein, umgekehrt bei sinkendem Druck. Die Belastungsschwankungen werden von der Verbundmaschine ausgeglichen. Ein Sicherheitsregler verhindert Durchgehen der Gegendruckmaschine im Falle völliger Entlastung; ein Reduzierventil führt selbsttätig den Heizvorrichtungen gedrosselten Frischdampf zu, wenn der Heizdampfbedarf die von der Gegendruckmaschine lieferbare Abdampfmenge übersteigt und infolgedessen der Heizdampfdruck eine Mindestgrenze unterscheidet.

Fig. 2 gibt die Hauptergebnisse von Versuchen wieder, die Eberle über die Zunahme des Dampfverbrauches mit steigendem Druck bei gesättigtem und überhitztem Dampf von 8, 10, 12 und 14 Atm. und Gegendrücken von 1,0, 1,5, 2,0, 2,5, 3 und 4 Atm. absolut angestellt hat. Bei Betrieb mit Überhitzung war der Dampf am Austritt mäßig überhitzt. Überhitzung 260 bis 275°. Der Gütegrad stieg auf 92 v. H.

Die mit größerem Dampfverbrauch arbeitenden „Gegendruckturbinen“ haben den Vorteil, daß das ölfreie Kondensat bei Vorhandensein genügend weichen Wassers für Fabrikationszwecke gebraucht werden kann, wenn der Oberflächenkondensator als Warmwasserheizung benutzt wird.

Anlage mit „Vakuumheizung“. Anlagekosten hoch bei bester Dampfausnutzung. Fig. 3 zeigt Schema einer Anlage von Franz Wagner, Krimmitschau.

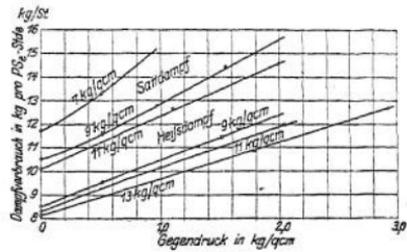


Fig. 2.

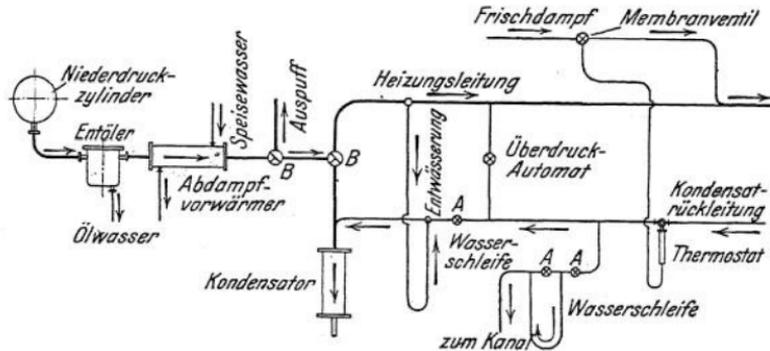


Fig. 3.

Der Abdampf strömt durch Entöler und Vorwärmer entweder zur Heizanlage oder unmittelbar zum Kondensator. Von den Heizkörpern führt eine Rückleitung von kleinerem Durchmesser Dampf, Luft und das Kondenswasser der Heizung zur Luftpumpe. Gibt die Maschine mehr Dampf ab, als die Heizung benötigt, so wird zur Vermeidung einer Steigerung des Kolbengendruckes der Dampfüberschuß durch einen Vakuumregler unmittelbar in den Kondensator geleitet. Genügt der Abdampf nicht, so wird durch einen in die Rückleitung eingesetzten Thermostaten ein Frischdampf einlaßventil geöffnet, ohne daß der Heizdruck eine gewisse Höhe überschreitet. Anheizen durch Frischdampf.

Nach Versuchen des Bayerischen Revisionsvereins betrug die Temperatur in der Heizung etwa 50° bei einer Luftleere im Kondensator von 65,0 cm. Der Vakuumregler öffnete bei 0,095 Atm. Druckunterschied zwischen Heiz- und Rückleitung, so daß ein Teil des Abdampfes hierbei direkt zum Kondensator gelangte. Druckverbrauch der Heizung je nach Belastung höchstens 7 cm (stündl. Leistung 780 000 WE). Bei angeschlossener Heizung stieg die Luftleere im Kondensator um 5,6 cm. Die Luftleere in den Zylindern blieb dagegen gleich.

2. Zwischendampfentnahme. Anlage Mennig-Picard, Fig. 4. Der dem Aufnehmer zu entnehmende Heizdampf expandiert im Hochdruckzylinder einer Verbundmaschine auf den Heizdampfdruck. Der überschüssige Dampf verrichtet Arbeit im Niederdruckzylinder, Fig. 5. Braucht die Heizung weniger Dampf oder wird infolge größerer Belastung die Hochdruckfüllung vergrößert, so stellt

der unter dem Aufnehmerdruck stehende Druckregler größere Niederdruckfüllung ein. Die vermehrte Niederdruckarbeit verursacht Steigen des den Hochdruckzylinder beeinflussenden Geschwindigkeitsreglers und dementsprechend Verkleinerung der Hochdruckfüllung, bis sich die Maschine dem neuen Beharrungszustand anpaßt.

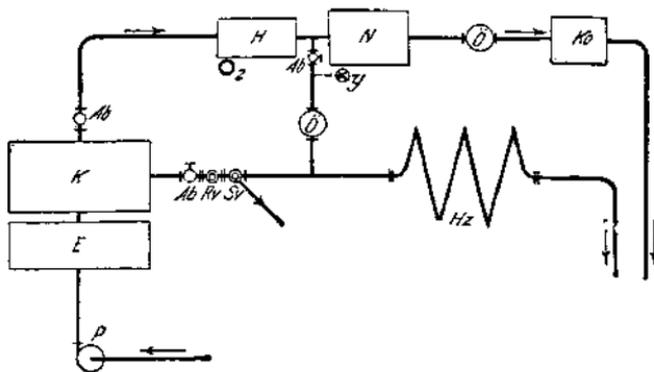


Fig. 4.

Ausführung der Sächsischen Maschinenfabrik, Chemnitz: Die Hochdrucksteuerung wird durch einen Druckregler, die Niederdrucksteuerung durch einen Geschwindigkeitsregler verstellt.

Fig. 6 stellt den Zusammenhang zwischen Gesamtdampfverbrauch, Füllung, Zylinderleistung und Dampfverbrauch einer 300-PS-Tandemaschine, die mit 12,5 Atm. absolut und 300° Überhitzung arbeitet, dar. Ist das Zylinderverhältnis (das bei starker Heizedampfentnahme mitunter gleich 1,2 bis 1,5 ist) für die Verbundwirkung nicht zu ungünstig, so arbeitet bei fehlender Zwischendampfentnahme die Anlage annähernd wie eine normale Verbundmaschine. Bei stärkster Dampfentnahme arbeitet die Hochdruckseite allein wie eine Gegendruckmaschine. Fig. 7 zeigt den Nutzen einer derartigen Anlage. In Wirklichkeit wird die Niederdruckfüllung nicht auf Null, sondern auf einen der Leerlaufarbeit entsprechenden Betrag eingestellt.

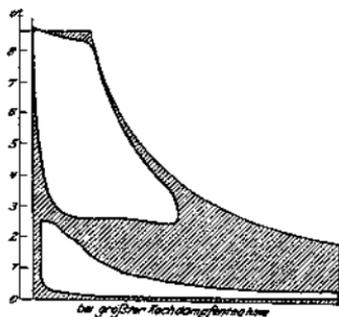


Fig. 5.

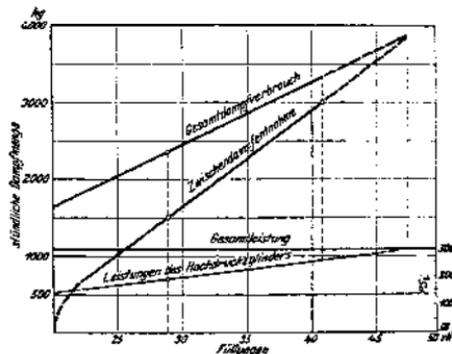


Fig. 6.

Die „Anzapfturbinen“ arbeiten in gleicher Weise; das Gehäuse wird durch eine Scheidewand in einen durch den Geschwindigkeitsregler beeinflussten Hochdruckteil und einen, durch den Druckregler beeinflussten Niederdruckteil (oder

umgekehrt, wie bei der Ausführung der Sächsischen Maschinenfabrik) zerlegt.

Die Bemessung der Zylinder hängt von der Art des Betriebes ab: konstante Kraftlieferung bei veränderlichem Heizdampfbedarf, konstanter Heizdampfbedarf bei veränderlicher Kraftlieferung oder Veränderlichkeit beider. Ist die von der gegebenen, größten Heizdampfmenge im Hochdruckteil bei leerlaufendem Niederdruckteil verrichtete Arbeit kleiner als die verlangte, so ist der Fehlbetrag durch Einführung gedrosselten Frischdampfes in den Aufnehmer zu ersetzen.

Versuche von Eberle ergaben folgendes (Z. Ver. deutsch. Ing. 1907, S. 2070):

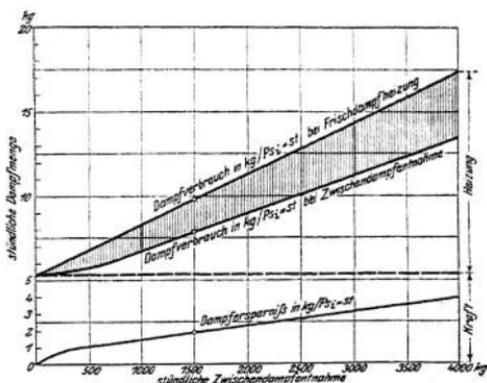


Fig. 7.

Dampfdruck Atm. absolut		Indizierte Hochdruck- zylinder PSi	Leistung Nieder- druck- zylinder PSi	Von der Maschine verbrauchte Wärmemenge $W_z = W_2 - W_3$ in WE pro Psi	Wärmeverbrauch ohne Zwischen- dampfentnahme in WE pro Psi	Wärmersparnis durch die Zwischendampf- entnahme in v. H.
vor der Ma- schin	im Auf- nehmer					
10,1	2,12	36,0	9,5	1915	3690	48
10,1	2,55	32,7	12,4	2320		37
12,1	2,69	52,5	12,3	1760	3505	50
12,1	3,53	45,9	17,7	2230		36,5
12,1	2,65	33,3	12,7	2230	3620	38,5
12,1	3,64	26,6	18,6	2960		18
14,1	1,90	47,3	39,3	3600	3600	—
14,1	3,97	63,7	21,6	1973		45
14,1	4,04	43,1	21,5	2505		27

Dampf von 270° Temperatur; Niederdruckmantel geheizt. W_2 = Wärmemenge, für 1 Psi zugeführt, W_3 die mit dem Zwischendampf entzogene Wärmemenge. Das Zylinderverhältnis war ungünstig.

3. Maschinen von Sonnleithner und Missong. Die Sonnleithner-Maschine entläßt durch zwei getrennte Auspuffleitungen den Dampf der einen Zylinderseite in den Kondensator, den der anderen in die Heizung. Die Steuerung der Heizseite wird durch einen Druckregler, die der Kondensationseite durch einen Geschwindigkeitsregler eingestellt, und zwar derart, daß nach Einstellung der Nullfüllung auf der Kondensationseite der steigende Geschwindigkeitsregler auch die Heizfüllung verkleinern muß. Die ungleichen Füllungen machen schwere Schwungräder erforderlich.

Die Missong-Dampfmaschine ist eine einzylindrige Verbundmaschine, deren eine Zylinderseite als Hochdruckmaschine, die andere als Niederdruckmaschine arbeitet.

Bei geringem Heizdampfverbrauch ist das Zylinderverhältnis 1 : 1 für Verbundwirkung ungeeignet. In diesem Falle wird das wirksame Hochdruckvolumen durch Steigerung der Kompression verkleinert, wobei der Voreintritt entsprechend früher gelegt wird. Also gewissermaßen Anpassung des Zylinderverhältnisses an Heizdampfbedarf. Der die Hochdrucksteuerung beeinflussende Druckregler verstellt sonach Kompression und Voreintritt, die mit wachsender Kompression abnehmende Füllung und außerdem den Vorastritt zur Vermeidung der Schleifenbildung.

Der Geschwindigkeitsregler verstellt die Niederdruckfüllung. Sinkt der Heizdampfbedarf, so stellt der Druckregler größere Kompression und kleinere Hochdruckfüllung, der Geschwindigkeitsregler größere Niederdruckfüllung ein, hierdurch Deckung des Leistungsausfalles. Dem abnehmenden Aufnehmerdruck entsprechend wirken beide Regler in gleichem Sinne. Nimmt Belastung ab, so wird kleinere Niederdruckfüllung durch den Geschwindigkeitsregler eingestellt. Erhöhung des Aufnehmerdruckes. Der Druckregler vergrößert Kompression und verringert Hochdruckfüllung, so daß weniger Dampf Zutritt. Durchgehen wird verhindert, indem der Geschwindigkeitsregler nach Verkleinerung der Niederdruckfüllung auf annähernd Null auch Hochdruckfüllung verringert (Pfleiderer, Z. Ver. deutsch. Ing. 1913).

Wird die Heizdampfentnahme für längere Zeit unterbrochen, so wird durch Änderung der Regulierung die Maschine in eine normale Einzylindermaschine verwandelt.

4. Abdampfturbinen. Der Abdampf von Förder-, Walzenzugmaschinen, Dampfhämmern usw. wird unter Zwischenschaltung von Abdampfspeichern, die ausgleichend wirken, Niederdruckturbinen zugeführt. Reine Abdampfturbinen sind gegenüber den im nachfolgenden behandelten Zweidruckturbinen nur da am Platz, wo die Abdampfmenge regelmäßig und Betrieb der Turbine ohne gedrosselten Frischdampf möglich ist.

Die Zahlentafel gibt Dampfverbrauchsahlen für die nutzbare PS-Stunde wieder.

Abdampfsammler Rateau, Fig. 8. Die Verteilungsröhren sind mit einer großen Anzahl von Öffnungen versehen, durch die der Dampf bei normalem Betrieb in feinen Strahlen in das Wasser übergeführt

wird. Um die Wassermenge dem Dampf zugänglich zu machen und den Eigenwiderstand auf ein möglichst geringes Maß herunterzudrücken, ist der Speicher durch eine wagerechte Scheidewand in zwei gleiche Hälften zerlegt. (Eigenwiderstand $< 0,03$ Atm.). Niveaugler halten die Wasserstände beider Räume auf gleiche Höhe. Durch senkrechte Rohre werden die Dampfdrucke gleichgehalten.

Ist die zugeführte Dampfmenge größer als die abgehende, so steigt der Druck im Sammler, und das Wasser kann eine dem größeren Druck entsprechende höhere Temperatur annehmen; ein Teil des Dampfüberschusses wird niedergeschlagen. Sinkt der Sammlerdruck, so verdampft das Wasser. Die mit der Größe des Sammlers abnehmenden Druckschwankungen bewegen sich meist in den Grenzen von 0,1 bis 0,3 Atm. Ein Rückschlagventil zwischen Speicher und dem diesem meist vorgeschalteten Sammler schließt selbsttätig den Speicher von der Abdampfleitung ab, wenn bei längeren Stillständen im Speicher eine Luftleere durch Kondensation des Dampfes entsteht. Ein Spannungsregler läßt bei Unterschreitung eines bestimmten Mindestdruckes gedrosselten Frischdampf zu.

Abdampfspeicher Harlé - Balcke sammeln den Dampf in einer Gasometerglocke, die in einem mit Wasser gefüllten Ringbehälter schwimmt. Fig. 9. Das Sperrwasser, das eine Temperatur von 85 bis 98° annimmt, wird durch eine Olschicht auf der Oberfläche gegen Wärmeverluste geschützt. Der vom Glockengewicht abhängige Speicherdruck beträgt im allgemeinen nur 1,03 bis 1,04 Atm. absolut. Erreicht die Glocke ihren höchsten Stand, so wird durch einen Anschlag ein Sicherheitsventil geöffnet, und der überschüssige Dampf entweicht. Sinkt die Glocke, so strömt durch ein Einlaßventil dem Speicher so viel Dampf zu, als zum Ersatz der Niederschlagsverluste nötig ist. Die Glocke wird hierbei an einer bestimmten Stelle in der Schwebe gehalten, bis erneut Dampfmenge zufließen. Beim Abstellen der Anlage geht die Glocke in die tiefste Lage und öffnet ein Lufteinlaßventil, um mit Sicherheit jeden Unterdruck zu vermeiden.

Konden- satordruck	Eintrittsdruck Atm. absolut		
	2	1	0,5
0,08	9,3	12	16,5
0,13	10,7	14,4	21,5
0,18	12	16,5	28

Bei unregelmäßiger Dampffuhr empfiehlt sich Aufstellung von Zweidruckturbinen, deren Hochdruckstufe bei nicht genügender Abdampfmenge durch Frischdampf beaufschlagt wird. Bei ausbleibendem Abdampf arbeitet die Tur-

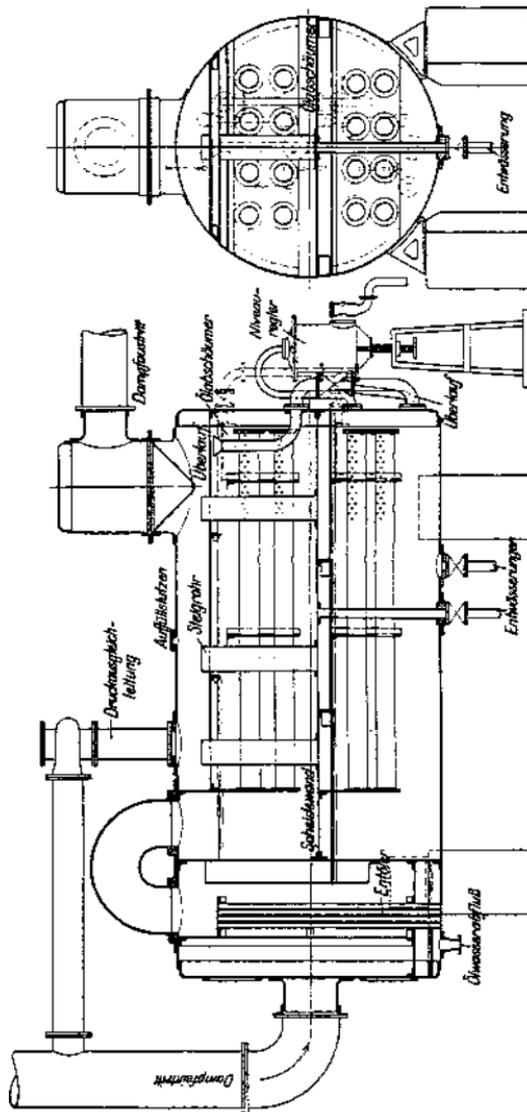


Fig. 8. (Batcke-Bochum.)

bine als reine Hochdruckturbine. Die Zweidruckturbinen bezwecken nicht die Vermeidung der Abdampfspeicher, sondern verhindern die Zufuhr gedrosselten Frischdampfes bei nicht genügender Abdampfmenge. Fig. 10 zeigt das Verhalten einer derartigen Turbine.

Das Diagramm bezieht sich auf eine A. E. G.-Turbine (Frischdampf: 12 Atm, 325°; Abdampf: 1,1 Atm., satt; Luftleere 95 v. H. $n = 3000$). Die Eigenschaften der Turbine lassen sich mit großer Annäherung wie folgt ermitteln: In den einer bestimmten Abdampfungszufuhr (von z. B. 10 000 und 12 000 kg in Fig. 10) entsprechenden Punkten der Abszissen werden Senkrechte errichtet und zum Schnitt mit der gestrichelten Geraden für „Maximale Leistung bei Frischdampfzufuhr = 0“ gebracht. Parallele, durch diese Schnittpunkte zur Geraden für „Abdampfzufuhr = 0“ gezogen, geben die Verhältnisse für gemischten Betrieb an.

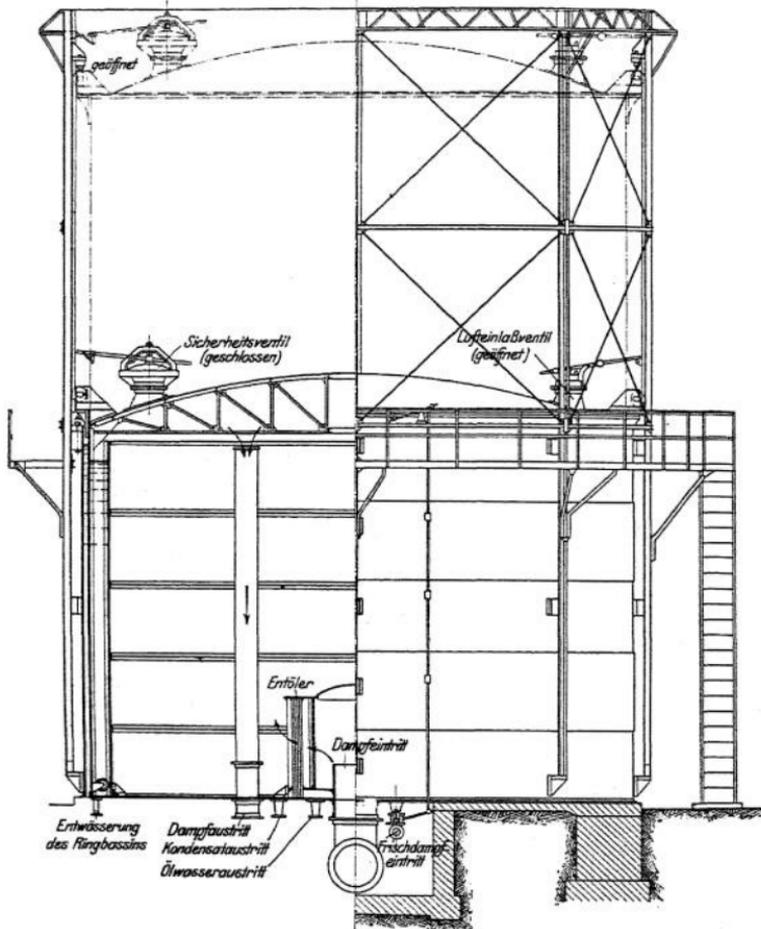


Fig. 9.

In Fig. 11 ist schematisch die Regelung einer M.-A.-N.-Zweidruckturbine dargestellt. Der Druckregler *G* wirkt unmittelbar auf das Abdampfventil *E* und mittelbar durch ein vom Fliehkraftregler *A* beeinflusstes Gestänge auch auf das Frischdampfventil *D*. Bei genügender Abdampfmenge hält der Dampfdruck im Abdampfspeicher der Feder des Druckreglers *G* das Gleichgewicht. Sinkt der Abdampfspeicherdruck, so dreht sich der dreiarmige Hebel im Sinne des Uhrzeigers und schließt das Abdampfventil, wobei gleichzeitig und ohne Beein-

flussung des Fliehkraftreglers das Frischdampfventil geöffnet wird. Umgekehrt ist der Vorgang bei steigendem Sammlerdruck, so daß in dieser Weise Zu- und Abschaltung des Frischdampfventils unabhängig von der Regelung der Umlaufzahl erfolgt. Steigt z. B. letztere infolge einer Entlastung, so schließt der Fliehkraftregler zunächst das Frischdampfventil, wobei der Druckregler das Abdampfventil festhält, bis das Frischdampfventil ganz geschlossen ist.

Fig. 12 zeigt schematisch die Oerlikon-Dampfturbine.

Da die Abdampfmenge zur Erzielung der gleichen Leistung wie bei Frischdampf ungefähr doppelt so groß sein muß, infolge des etwa halb so großen Wärmegefälles, so ist der Niederdruckteil für den Frischdampf in den Querschnitten zu reichlich bemessen. Die Turbine arbeitet bei Frischdampfbetrieb mit verringertem Wirkungsgrad. Diesem Uebelstand begegnet Oerlikon dadurch, daß der Frischdampf in einer getrennten, entsprechend bemessenen Abteilung des Niederdruckteils zur Wirkung kommt. Beim Betrieb mit Frischdampf wird der Hochdruckteil und vom Niederdruckteil die Abteilung N_1 beaufschlagt, beide Teile sind sonach hintereinandergeschaltet. Beim Betrieb mit Abdampf hingegen wird dieser in den parallel geschalteten Teilen N_1 und N_2 ausgenutzt.

Pokorny & Wittekind unterteilen die Abdampfturbine in zwei auf derselben Welle angeordnete Radgruppen, so daß bei Frischdampfbetrieb nur eine Radgruppe an die Frischdampfturbine angeschlossen wird und die vor dieser Abdampfradgruppe herrschende Dampfspannung der Spannung für gleiche Belastung bei Abdampfbetrieb gleich oder nahezu gleich ist.

Bei den Zweidruckturbinen stellt sich eine weitere Betriebsschwierigkeit ein, wenn — wie häufig — die größte Frischdampfleistung größer als die größte Abdampfleistung gewählt wird¹⁾. Soll die mit

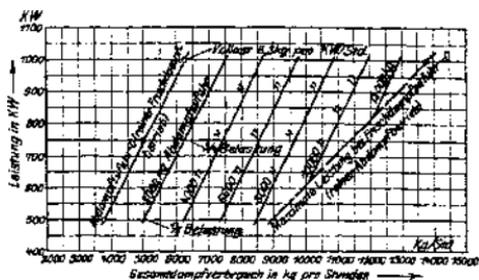


Fig. 10.

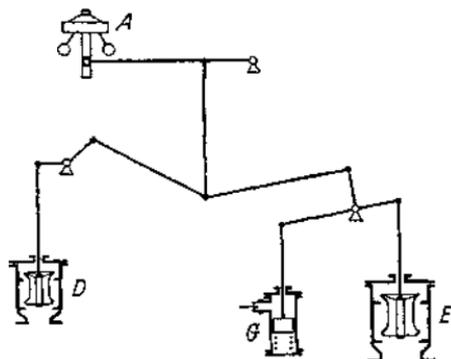


Fig. 11.

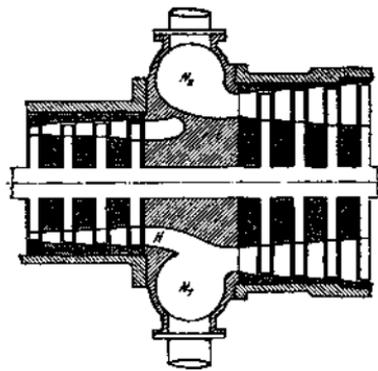


Fig. 12.

¹⁾ Dr.-Ing. K. Roeder, Stahl und Eisen 1913, S. 1646.

Frischdampf zu erreichende Höchstleistung z. B. 1500 PS bei 7500 kg/st Dampfverbrauch, die bei 10 000 kg/st Abdampfverbrauch zu erreichende Höchstleistung 1000 PS betragen, so wird sich vor dem Leitrad der Abdampfturbine annähernd ein Druck von 1 Atm. abs. einstellen, während hier bei Frischdampfbetrieb ein Druck von ungefähr 0,75 Atm. abs. herrschen wird. Wird während der größten Frischdampfleitung Abdampf zuströmen, so steigt der Druck vor dem ersten Leitrad der Abdampftradgruppe, der Regler — so eingerichtet, daß in erster Linie Abdampf verwertet werden soll — verringert die Frischdampfzufuhr und schließt diese ganz ab, wenn die Abdampfmenge 10 000 kg beträgt. Die Leistung ist auf 1000 PS gesunken.

Hiergegen können verschiedene Mittel zur Anwendung gelangen: 1. Bei Höchstleistung wird auf die Verwertung des Abdampfes verzichtet. Ausführbar bei Anlagen mit Wärmespeichern. 2. Die Abdampftradgruppe ist so zu bemessen, daß sie bei Höchstleistung und Zuströmung des gesamten Abdampfes die ganze Dampfmenge zu verarbeiten vermag. Nachteil, wie vorhin erwähnt: Bei ausschließlichem Abdampfbetrieb sind die Niederdruckquerschnitte zu groß. Der Druck vor dem Abdampfleitrad beträgt bei größter Abdampfmenge z. B. nur 0,8 Atm. Das Regelventil drosselt den Druck von 1 Atm. auf 0,8 Atm. herab. 3. Es wird vor dem ersten Abdampfleitrad eine Drucksteigerung zugelassen, die eine Erhöhung des Gegendruckes in den an den Abdampfteil angeschlossenen Maschinen bedeutet. 4. Ein Teil des Abdampfes wird nach Art der Überlastungsventile in eine Radgruppe mit größeren Querschnitten eingeführt.

5. Abwärmeverwertung bei Großgasmaschinen. Die Abwärmeverwerter nach Bauart Nürnberg der M. A. N. werden als stehende oder ausziehbare liegende Röhrenkessel ausgeführt. Die Röhren werden von den Auspuffgasen durchströmt. Die stehende Anordnung wird für Heißwassererzeugung, die liegende Ausführung für Dampferzeugung bis zu einem Überdruck von 12 Atm. wegen der günstigeren Verdampfungsoberfläche bevorzugt. Die Auspuffleitungen werden bei Aufstellung von Abwärmeverwertern, die so nahe wie möglich an die Maschine herangerückt werden müssen, sorgfältig isoliert, arbeiten ohne Wassereinspritzung und ihre Ausdehnung ist durch entsprechende Konstruktionen, wie Stopfbuchsen, aufzunehmen. Je nach der Temperatur der Abgase sind pro SPe-Stunde 400 bis 600 WE zu gewinnen.

6. Abwärmeverwertung für Dieselmotoren. (Hottinger, Z. Ver. deutsch. Ing. 1911 und 1912). Sollen möglichst große Warmwassermengen von etwa 50° erhalten werden, so wird das Kühlwasser unmittelbar verwendet und mit den Auspuffgasen werden weitere Kaltwassermengen erwärmt. Soll jedoch die Warmwassertemperatur höher sein, so wird das Kühlwasser, das gewöhnlich mit 50 bis 60° austritt, mittels der Abgase nachgewärmt. Aus dem Kühlwasser sind für 1 PSe/st. etwa 500 WE zu gewinnen, doch kann dieser Wert bei abnehmender Belastung auf 700 WE und mehr steigen. In den Abgasen stehen etwa 400 WE-PSe/st. zur Verfügung, so daß insgesamt mit 900 WE-PSe/st. bei Normalbelastung der Maschine gerechnet werden kann.

Schmiedeeiserne Heizflächen sind zu vermeiden, da diese bei schwefelhaltigem Brennöl rasch zerstört werden. Als Baustoff für die Heizflächen ist säurebeständiges Gußeisen zu verwenden. Sind Abgasverwerter und Motor parallel geschaltet, so ist eine gußeiserne Heizfläche von 0,2 qm/PSe reichlich, wobei 1 qm mit 2000 bis 3000 WE/st. beansprucht wird. Bei Hintereinanderschaltung, also Nachwärmung des gebrauchten Kühlwassers, ist infolge des geringeren Temperaturunterschiedes zwischen Wasser und Gasen die Heizfläche etwas reichlicher zu wählen. Die angegebenen Ziffern setzen Gegenstromwirkung von Wasser und Gasen voraus. Günstig für großen Wärmedurchgang sind große Wasser- und Gasgeschwindigkeiten bei langen Wegen.

Erwähnenswert ist die Wirkung Sulzerscher Abwärmeverwerter als das Auspuffgeräusch verhindernde Auspufftöpfe.

Schwunräder und Regulatoren.

Bearbeitet von H. Dubbel.

I. Schwungradberechnung.

I. Die Wirkungen der Massen.

a) Unendliche Pleuelstangenlänge (Fall der Kurbelschleife).

Nach S. 703 ist:

Beschleunigung b der Kurbelschleife gleich Horizontalkomponente der

Zentripetalbeschleunigung $\frac{\omega^2}{R}$, $b_u = \frac{\omega^2}{R} \cdot \cos \alpha$.

Die Darstellung der Beschleunigung ist für $L = \infty$ eine Gerade.

Beschleunigungskraft: $K_u = \frac{G}{g} \cdot \frac{\omega^2}{R} \cdot \cos \alpha$; G = Gewicht der

hin und her gehenden Massen.

Auf 1 qcm der Kolbenfläche F entfällt:

$$K_u = \frac{G}{g} \cdot \frac{\omega^2}{R \cdot F} \cdot \cos \alpha.$$

Für die Totlagen ist:

$$k_u = \frac{G}{g} \cdot \frac{\omega^2}{R \cdot F}$$

= Zentrifugalkraft der im Kurbelzapfen vereinigt gedachten Gewichte G .

Werte für $\frac{G}{F}$ nach Radinger: Kolbenhub $s \leq 0,7$ m: $\frac{G}{F} = 0,28$ kg,

$$s \geq 0,7$$
 m: $\frac{G}{F \cdot s} = 0,4$ kg.

Die Gestängegewichte der Niederdruckseiten von Verbundmaschinen sind denen der Hochdruckseiten bis auf das Kolbengewicht gleich. In Ausdruck $\frac{G}{F}$ ist Niederdruck-Kolbenfläche einzusetzen.

b) Endliche Pleuelstangenlänge. (S. S. 703.)

Beschleunigung:

$$b_e = \frac{\omega^2}{R} \cdot \left(\cos \alpha \pm \frac{R}{L} \cdot \cos 2 \alpha \right).$$

Beschleunigungskraft:

$$K_e = \frac{G \omega^2}{g \cdot R \cdot F} \cdot \left(\cos \alpha \pm \frac{R}{L} \cdot \cos 2 \alpha \right).$$
 Für Totlage wird:

$$k_e = \frac{G \omega^2}{G \cdot R \cdot F} \left(1 \pm \frac{R}{L} \right) = k_u \cdot \left(1 \pm \frac{R}{L} \right).$$

Darstellung der Beschleunigungen und Beschleunigungskräfte ergibt für endliche Pleuelstangenlänge eine parabelförmige Kurve, deren Aufzeichnung durch Tabelle erleichtert wird. Fig. 1.

$$\text{Werte von } \left(\cos \alpha \pm \frac{R}{L} \cdot \cos 2 \alpha \right) \text{ für } \frac{R}{L} = \frac{1}{5} :$$

→ Hingang. Ordinate	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1,2	0,92	0,64	0,38	0,126	-0,09	-0,3	-0,465	-0,613	-0,717	-0,8
← Rückgang. Ordinate	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

2. Das Tangentialdruckdiagramm. Fig. 2b, Diagramm der Horizontaldrucke auf Kolben. Abzug der Vorderdampfspannungen p_v von den fördernden Hinterdampfspannungen p_A . Berücksichtigung der im ersten Hubteile abzuziehenden, im zweiten Hubteile zu addierenden Beschleunigungskräfte. Fig. 2c stellt die Horizontalkräfte P auf den Kurbelzapfen dar. Aus diesen folgt Tangentialdruck

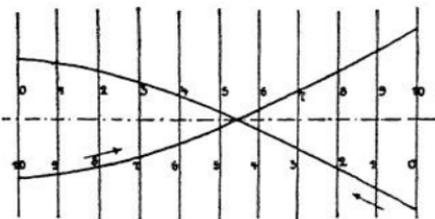


Fig. 1.

$$T = P \cdot \sin \alpha \quad \text{für } L = \infty,$$

$$T = P \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta}$$

für endliche Pleuelstangenlänge. β = Neigungswinkel der Pleuelstange.

Zeichnerische Ermittlung von P nach Fig. 2d (für $L = \infty$) und Fig. 2c für endliche Länge (S. S. 702).

Auftragung der so erhaltenen Tangentialkräfte über abgewinkelten Kurbelkreis von der Länge $s\pi$. Fig. 3. Inhalt des Tangentialdruckdiagramms gibt die am Kurbelzapfen geleistete Arbeit wieder und hat gleiche Größe wie das Dampfdruckdiagramm, von dem ausgegangen wurde. Bei Abnahme der Kraft durch Riemen, Seil oder Zahnrad hat im Beharrungszustand Tangentialkraft konstante Größe; Darstellung des Widerstandsdiagramms durch Rechteck von gleichem Inhalt wie

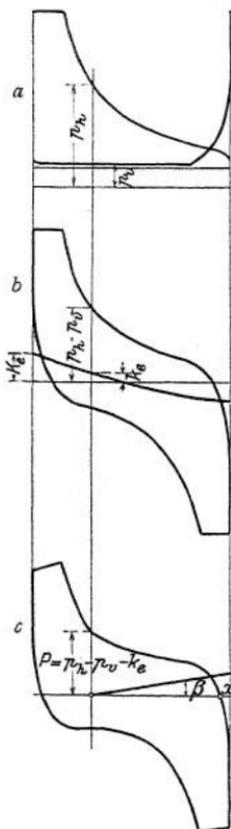
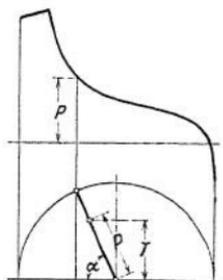
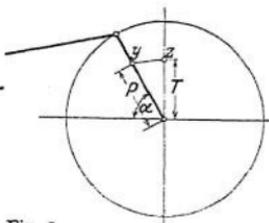


Fig. 2.



d



Tangentialdruckdiagramm. Höhe des Rechteckes gleich mittlerem Widerstand. In a größte, in b kleinste Umfangsgeschwindigkeit ω_{\max} und ω_{\min} .

Maßgebend für Schwungradgewicht ist die größte auf das Schwungrad zu übertragende oder von ihm zu entnehmende Arbeit, dargestellt durch die größte der über- oder unterschließenden Flächen, deren Arbeitsmaßstab durch Druckmaßstab und Vergleich der Länge $s\pi$ im Diagramm mit wirklichem Kurbelkreisumfang gegeben ist.

$$A = M \cdot \frac{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2}{2},$$

M = Schwungradmasse.

Es ist annähernd:

$$\frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2} = \omega \quad \text{und} \quad \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega} = \delta, \quad \text{folglich} \quad A = M \omega^2 \cdot \delta.$$

δ = Ungleichförmigkeitsgrad = Verhältnis größter Geschwindigkeitsschwankung zur mittleren Geschwindigkeit.

Mittlere Werte von δ :

Antrieb von Pumpen und Schneidewerken	$\delta = 1 : 25$
.. .. Webstühlen und Papiermaschinen	$\delta = 1 : 40$
.. .. Werkstättentriebwerken	$\delta = 1 : 35$
.. .. Mahlmühlen	$\delta = 1 : 50$
.. .. Spinnmaschinen für niedrige Garnnummern	$\delta = 1 : 60$
.. .. Spinnmaschinen für hohe Garnnummern	$\delta = 1 : 100$
.. .. Dynamos für Lichtbetrieb	$\delta = 1 : 150$ (bis 1:300).

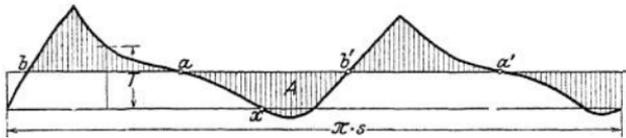


Fig. 3.

Mit Annäherung kann das Schwungradgewicht ohne Aufzeichnung des Tangentialdruckdiagramms berechnet werden aus der Formel:

$$G = \frac{C}{\delta} \cdot \frac{N}{n v^2},$$

worin: N = Anzahl der PSe, v = Schwerpunktgeschwindigkeit des Schwungradkranzes in msek.

Es ist $C = 7000$ für Einzylindermaschinen und Tandemverbundmaschinen, $C = 2500$ bis 4000 für Verbundmaschinen mit versetzten Kurbeln.

Wird angenommen, daß Einfluß der Arme $\frac{1}{8}$ des Ringgewichtes ersetzt, so wird letzteres:

$$G_r = 0,75 G.$$

Bezeichnen: F = Schwungringquerschnitt in cm^2 ,

R = Schwerpunktabstand des Ringquerschnittes von Drehachse in m,

γ = (7,25 für Gußeisen) = spez. Gewicht, so folgt:

$$\frac{F \cdot 2 R \cdot \pi \gamma}{10} = G_r; \quad F = 0,22 \cdot \frac{G_r}{R}.$$

Die Elektriker schreiben meist das „Schwungmoment“ GD^2 vor. (S. 258.) Obige Formel für G kann auf folgende Form gebracht werden:

$$GD^2 = \frac{C}{\delta} \cdot \frac{N}{n^3},$$

worin für Einkurbelmaschinen: $C = 2,3 \cdot 10^6$,

für Verbundmaschinen mit versetzten Kurbeln $C = 0,85 \div 1,3 \cdot 10^6$.

3. Schwungradberechnung bei Gasmaschinen. (Nach Güldner.)

Ist A_a die absolute Arbeit eines Viertaktes in m/kg,

W die Arbeit des Widerstandes eines Viertaktes in m/kg, so folgt der Arbeitsüberschuß $A = A_a - \frac{W}{4}$.

Die negative Arbeit des Ansaugens und Ausstoßens der Ladung wird wegen ihrer geringen Größe vernachlässigt. Fig. 4 gibt die Drehkraftkurve des Arbeitshubes wieder.

Arbeit A_a wird durch Fläche $abcd e$ dargestellt.

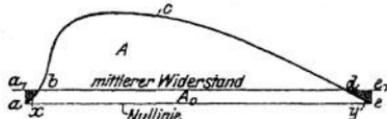


Fig. 4.

Der Streifen A_0 ist nur um die beiden kleinen Dreiecke x und y kleiner als das $\frac{W}{4}$ darstellende Rechteck $a a_1 e_1 e$.

Unter Vernachlässigung der Dreiecke $a a_1 b$ und $d e e_1$ ist $A = A_n - A_0$ die das Schwungradgewicht bestimmende Überschußfläche.

Ist $p_i =$ mittlerer, indizierter Spannung, der Nutzleistung $A_i = (A_n - A_0)$ entsprechend, $A_c =$ Kompressionsarbeit.

$p_c =$ mittlerer, indizierter Spannung des Verdichtungshubes,

$$q = \frac{p_c}{p_i},$$

$p_w =$ mittlerer Tangentialkraft des Widerstandes, so folgt:

$$A_n = A_i \left(1 + \frac{p_c}{p_i}\right) = A_i(1 + q); \quad A_i = p_i \cdot 0,2r; \quad W = p_w \cdot 0,4r\pi.$$

Es ist $A_i = W$, sonach die Überschußarbeit $A = (1 + q) \cdot W = 0,25 W = (0,75 + q) \cdot W = (0,75 + q) \cdot p_w \cdot 0,4r\pi$ m/kg. Mit $Pr = 716,2 \frac{N}{n}$

$$G = \frac{(0,75 + q) \cdot 88290 N_i}{\delta \cdot v^2 \cdot n}.$$

Diese Gleichungen gelten nur für die Viertaktmaschine. Bei Zweitaktmaschinen rückt die Linie $a_1 e_1$ entsprechend höher, und es können die Dreiecke x und y nicht mehr vernachlässigt werden. Für alle Fälle eignet sich die Gleichung:

Schwungradkranzgewicht $G = \frac{C \cdot N_i}{\delta \cdot D^2 \cdot n^2}$, $D =$ Schwungringdurchmesser.

Mit $q = 0,35$ und $\beta =$ Kurbelbahn zwischen je zwei Zündungen ergeben sich folgende Erfahrungswerte für C :

	Viertakt: einfachwirkend	$\beta = 720^\circ$	$C = 40 \cdot 10^6$.
		doppeltwirkend	$\beta = 540$ und 180° $C = 25 \cdot 10^6$.
2 Zylinder:	einfachwirkend ¹⁾	$\beta = 360^\circ$	$C = 17 \cdot 10^6$.
	doppeltwirkend ²⁾	$\beta = 180^\circ$	$C = 3,3 \cdot 10^6$.
4 Zylinder:	doppeltwirkend ²⁾	$\beta = 90^\circ$	$C = 1,4 \cdot 10^6$.
Zweitakt: 1 Zylinder:	einfachwirkend	$\beta = 360^\circ$	$C = 16 \cdot 10^6$.
	doppeltwirkend	$\beta = 180^\circ$	$C = 2,4 \cdot 10^6$.
2 Zylinder:	einfachwirkend ¹⁾	$\beta = 180^\circ$	$C = 2,52 \cdot 10^6$.
	doppeltwirkend ¹⁾	$\beta = 90^\circ$	$C = 1,25 \cdot 10^6$.

4. Berücksichtigung der Resonanz bei Wechselstrommaschinen. Bei der Bestimmung des Schwungmomentes für Antriebsmaschinen parallel zu schaltender Wechselstromdynamis ist Resonanz zwischen der Antriebsschwingung und der Eigenschwingung der parallel

Kritische Werte des Schwungmomentes für 1 PSe
(für Dynamomaschinen mit Frequenz 50 und einem Kurzschlußstrom gleich dem 3,75fachen Wert des normalen Wattstromes).

Umlaufzahl $n =$	300	250	214	188	166	150	125	107	94	83	75
Polpaarzahl $p =$	10	12	14	16	18	20	24	28	32	36	40

1. Resonanz mit Schwingungen von der Dauer einer ganzen Umdrehung.

$\frac{G D^2_{krit}}{N}$	3,33	6,92	12,9	21,6	35,5	53,2	111	206	344	568	853
--------------------------	------	------	------	------	------	------	-----	-----	-----	-----	-----

2. Resonanz mit Schwingungen von der Dauer einer halben Umdrehung.

$\frac{G D^2_{krit}}{N}$	0,83	1,73	3,2	5,4	8,9	13,3	27,7	51,5	86	142	213
--------------------------	------	------	-----	-----	-----	------	------	------	----	-----	-----

3. Resonanz mit Schwingungen von der Dauer einer doppelten Umdrehung (Viertakt).

$\frac{G D^2_{krit}}{N}$	13,3	27,7	51,6	86,4	142	213	444	824	1380	2270	3410
--------------------------	------	------	------	------	-----	-----	-----	-----	------	------	------

1) Kurbelversetzung $\alpha = 0^\circ$. 2) Tandemanordnung. 3) $\alpha = 90^\circ$. 4) $\alpha = 180^\circ$.

geschalteten Dynamomaschine zu vermeiden. Nach Rosenberg ist der kritische Wert des Schwungmomentes: $GD_{\text{krit}}^2 = 710 \gamma \cdot \eta \cdot \rho \cdot \frac{\rho^2}{\pi} \cdot N_e$. Hierin bedeuten:

- γ = Verhältnis des Kurzschlußstromes zum normalen Wattstrom,
 $\eta = (92 \div 96 \text{ v. H.})$ = Wirkungsgrad der Dynamo,
 ρ = Polpaarzahl,
 ϕ = Dauer eines Antriebszyklus.

Bei völlig gleichartigen Diagrammen für Vor- und Rückwärtsgang des Kolbens wäre z. B. ϕ = Dauer einer Umdrehung bei einer Zweitaktmaschine, ϕ = Dauer einer halben Umdrehung bei einer Dampfmaschine, ϕ = Dauer zweier Umdrehungen bei einer Viertaktmaschine. Da die Diagramme jedoch selten vollständig übereinstimmen, so kann z. B. das Tangentialdruckdiagramm einer Einzylinderdampfmaschine ersetzt werden durch ein Tangentialdruckdiagramm, dessen Antriebszyklusdauer eine halbe Umdrehung beträgt, und ein darübergelegertes mit Antriebszyklusdauer gleich einer ganzen Umdrehung. (Vgl. S. 94.) Auch diese überlagerte Welle kann zur Resonanz mit den elektrischen Schwingungen führen. Bei Maschinen, die bei jeder Kurbelstellung parallel geschaltet werden sollen, ist das Schwungmoment größer als sein kritischer Wert zu wählen. Soll nur bei Kurbelsynchronismus parallel geschaltet werden, so ist das Schwungmoment gleich oder kleiner als der kritische Wert zu nehmen.

Der Ungleichförmigkeitsgrad ist insofern von Bedeutung, als durch ihn Regulatorschwingungen entstehen können, die einen periodischen Wechsel im Antriebsimpuls verursachen.

5. Widerstand unmittelbar an der Kolbenstange. Wirkt der Widerstand unmittelbar an der Kolbenstange, wie dies häufig bei Pumpen und Gebläsen zutrifft, so sind nach Fig. 5 beide Überdruckdiagramme über derselben Grundlinie zu verzeichnen, nachdem die Ordinaten des Widerstandsdiagramms durch Multiplikation mit dem Zylinderverhältnis auf den Dampfzylinder zurückgeführt und durch Multiplikation mit dem Wert $\frac{N_i}{N_e}$ vergrößert worden sind.

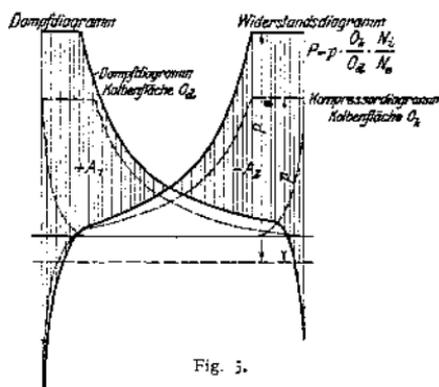


Fig. 5.

6. Ruhe des Ganges. Über die durch den Druckwechsel an Kreuzkopf- und Kurbelzapfen auftretenden Stöße hat Dr.-Ing. Hans Polster ausgezeichnete Untersuchungen angestellt, bei denen Höchstwert der Stoßkraft und Zeitpunkt des Stoßes experimentell festgestellt wurden. Hauptergebnisse der Untersuchungen:

1. Die Lage des Druckwechsels kann nicht als Kriterium für die Härte und Gefährlichkeit der Stöße gelten. Die Stöße im Totpunkt sind ebenso weich wie die in Hurbmitte.

2. Der „sekundäre Druckanstieg“ p_0 ist direkt proportional der Umlaufzahl. Ein weiterer Einfluss der Umlaufzahl auf die Stoßstärke P besteht nicht.

3. Stoßstärke P ist bei einer gegebenen Maschine nur eine Funktion von p_0 , der Größe des Spieles zwischen Lager und (Kurbel, sowie Kreuzkopf-) Zapfen und der Schmierung. Für kleine Werte von p_0 ist P praktisch überhaupt nicht vorhanden, steigt dann erst langsam, solange die Öl-schicht nicht übermäßig weggequetscht wird, dann schneller, um schließlich linear mit $\sqrt{p_0}$ anzusteigen. Mit wachsendem Spiel vergrößert sich zunächst die Schlagstärke, um dann je nach Art des Druckwechsels und der Schmierung wieder abzunehmen oder wenigstens im Wachstum nachzulassen, weil mit dem größeren Spiel auch bessere Ölzufuhr eintritt. Darüber hinaus findet wieder starke Steigerung der Schlagstärke statt. Von wesentlichem Einfluß auf die Stoßstärke ist die Schmierung. Schlechte Schmierung bedingt harte Stöße. Es ist nur ein geringer Öldruck nötig, um die Schläge ganz wesentlich zu mildern. Großer Öldruck verbessert zwar die Verhältnisse noch mehr, aber nicht in gleichem Maße, wie der Ölverbrauch wächst.

Ist t_0 der Zeitpunkt, in dem sich als Folge des Druckwechsels der Kreuzkopf vom Zapfen trennt, t_1 der Zeitpunkt, in dem der Kreuzkopf in der anderen Schale auf den Zapfen trifft, und wird die „wirkliche Überdruckkurve“ (mit Berücksichtigung auch der Kolben- und Stopfbuchsenreibung aus p_h , p_0 und k_e wie in Fig. 2c ermittelt, nur auf die Zeitachse bezogen) zwischen t_0 und t_1 als geradlinig angesehen, so ist p_0 durch $\tan \alpha$ des Winkels α dieser Geraden mit der Zeitachse bestimmt.

II. Die Regulierung.

I. Die Regulatoren.

Je nach Art und Ausführung der Regulatoren unterscheidet man:

1. Gewichts- oder Federregulatoren, je nachdem die Gegenkraft der Zentrifugalkraft durch Gewichte oder Federn gebildet wird.

2. Kegel- und Flachregler, letztere auch Achsen- oder Exzenterregler genannt. Die Schwunggewichte der Kegelregler schlagen in einer Ebene parallel zur Regulatorachse aus, während die der Flachregler sich in einer Ebene senkrecht zur Achse bewegen.

3. Fliehkraft- und Beharrungsregler. Die zur Verstellung der Steuerung erforderliche Kraft rührt bei ersteren nur von der Fliehkraft, bei letzteren von dieser und von der Trägheitswirkung umlaufender Massen her.

4. Geschwindigkeits- und Leistungsregler. Letztere ermöglichen bei gleichbleibender Arbeit während eines Maschinenhubes die Änderung der Leistung durch Vergrößerung oder Verringerung der Umlaufzahl.

5. Direkt und indirekt wirkende Regler. Die indirekt wirkenden Regler schalten für die Verstellung der Steuerung eine Hilfskraft ein.

Jeder Regulator muß stabil sein, d. h. fortschreitende Entfernung der Schwunggewichte von der Reglerachse muß zunehmender Geschwindigkeit entsprechen. Die unbrauchbare „labile“ Anordnung ergibt sich, wenn z. B. infolge Hebelarmverhältnisse das Moment der Gegenkraft mit fortschreitender Entfernung der Schwungmassen abnimmt, so daß für größeren Ausschlag die Geschwindigkeit für den Fall des Gleichgewichtes kleiner sein muß als bei geringerem Ausschlag.

Ändern sich Moment der Zentrifugalkraft und das der Gegenkraft stets in genau derselben Weise, so ist der Regler „astatisch“, d. h. er ist bei jeder Stellung im Gleichgewicht, aber nur für eine und dieselbe Umlaufzahl.

Statisch sind Regler, bei denen jeder höheren Muffenlage eine größere Geschwindigkeit entspricht. Pseudo-astatisch sind Regler, die sich dem astatischen Zustand nähern, bzw. solche statische Regler, die mit kleinem Ungleichförmigkeitsgrad arbeiten.

Ungleichförmigkeitsgrad eines Reglers ist das Verhältnis des Unterschiedes zwischen der Umlaufzahl n_2 in höchster und Umlaufzahl n_1 in tiefster Muffenlage zur mittleren Umlaufzahl:

$$\delta = \frac{n_2 - n_1}{n}$$

Hierbei ist der Regulator ohne Verbindung mit dem Stellzeug zu denken. δ ist eine vom Konstrukteur schon im Entwurf bestimmte Größe.

Unempfindlichkeitsgrad ist das Verhältnis desjenigen Betrages ΔC der Zentrifugalkraft C , um den letztere zu- oder abnehmen muß, zu C selbst, um den Gesamt Widerstand P der Verstellung zu überwinden.

$$\varepsilon = \frac{\Delta C}{C}$$

Diejenige Kraft, die nach unten wirkend der Zentrifugalkraft das Gleichgewicht hält und am ruhenden Regler durch Auswägen des Muffendruckes leicht praktisch bestimmt werden kann, wird als Energie E bezeichnet.

Aus: $\Delta C : P = C : E$ folgt:

$$\frac{P}{E} = \frac{\Delta C}{C} = \varepsilon$$

Der Gesamt widerstand P der Verstellung setzt sich zusammen aus dem schädlichen Betrage R zur Überwindung der Eigenreibung des Regulators

und aus der nützlichen Verstellkraft W , die zur Verstellung der Steuerung dient.

$$P = R + W; \quad \varepsilon = \frac{W + R}{E}.$$

Entsprechend setzt sich gesamter Unempfindlichkeitsgrad ε zusammen aus:

$$\varepsilon_r = \frac{R}{E} \quad \text{und} \quad \varepsilon_w = \frac{W}{E}.$$

In Prospekten ist die mittlere Verstellkraft für 2 v. H. Geschwindigkeitsänderung (nach oben und nach unten, insgesamt also $\varepsilon = 4$ v. H.) ohne Berücksichtigung der Eigenreibung angegeben, so daß ε um diese größer wird. Es ist:

$$\varepsilon = \varepsilon_w + \varepsilon_r = \frac{W}{E} + \frac{R}{E} = \frac{W}{E} + \varepsilon_r, \quad \text{somit} \quad E = \frac{W}{\varepsilon - \varepsilon_r}.$$

(Ist z. B. $\varepsilon_r = 1$ v. H. und soll für $\varepsilon = 4$ v. H. der Regler 10 kg Verstellkraft aufbringen, so ist die erforderliche Energie:

$$E = \frac{10}{0,04 - 0,01} = 300 \text{ kg.})$$

Gesamtungleichförmigkeitsgrad $\delta_g = \delta + \varepsilon$.

Wird Ungleichförmigkeitsgrad δ zu klein gewählt, so führt der Regler bei Änderung des Beharrungszustandes langdauernde Schwingungen aus, während bei großem δ der Gesamtungleichförmigkeitsgrad zu groß wird.

Es soll nach Tolle sein:

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{s_r}{g T^2}}.$$

Hierin bedeuten:

s_r = reduzierter Muffenhub in cm,

$g = 981$ cm,

T = Zeit, welche die Maschine beim leeren Anlaufen mit größter Füllung bis zum Erreichen der normalen Umlaufzahl braucht. Ist

L = Maximalleistung der Maschine,

M = Schwungringmasse,

v = Schwungringgeschwindigkeit, so wird:

$$T = \frac{M v^2}{75 L}.$$

Es ist: $s_r = \frac{\text{Summe aller Gewichte mal den Quadraten ihrer Wege}}{\text{Arbeitsvermögen des Regulators}}$.

Bei den Gewichtsreglern hat der reduzierte Hub ungefähr die Größe des wirklichen Hubes s ; bei Federregulatoren ist s_r bedeutend kleiner. (Z. B. $s_r = \frac{1}{15} s$ bei Jahns-Reglern, $s_r = \frac{1}{13,5} s$ bis $\frac{1}{15} s$ bei Tolle-Reglern.)

Der Unempfindlichkeitsgrad ist nicht kleiner zu nehmen als der Ungleichförmigkeitsgrad der Maschine, der in der Hauptsache von der Schwungringmasse abhängt. Ist $\varepsilon < \delta_g$, so kann infolge der schwankenden Winkelgeschwindigkeit bei jedem Hub eine Verstellung des Stellzeuges eintreten. Dieses „Tanzen“, für die Regulierung nicht ungünstig, bewirkt schnellen Verschleiß.

Die C -Kurven. Nach Tolle Auftragung der in den verschiedenen Muffenstellungen auftretenden Zentrifugalkräfte als Ordinaten, der zugehörigen Wege der Schwungmassen als Abszissen. Die sich ergebende C -Kurve oder „Charakteristik“ läßt die Eigenschaften des Regulators fast vollständig ersehen. Für beliebige Entfernung x der Schwunggewichte folgt:

$$C = m x \omega^2 = \frac{G}{g} \cdot \omega^2 \cdot x; \quad \omega = \sqrt{\frac{C \cdot g}{x \cdot G}}; \quad n = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{C}{x} \cdot \frac{g}{G}}.$$

Nach Fig. 6a ist $\operatorname{tg} \varphi = \frac{C}{x}$, sonach:

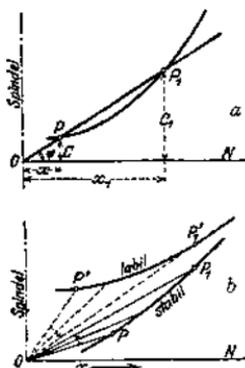


Fig. 6.

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{G} \cdot \operatorname{tg} \varphi}; \quad n = k \sqrt{\operatorname{tg} \varphi}, \quad k = \text{konst.}$$

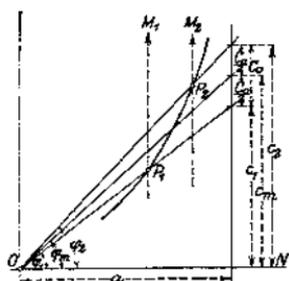


Fig. 7.

Für $\operatorname{tg} \varphi = \text{konst.}$ ist $n = \text{konst.}$, d. h. die C-Kurve eine durch 0 gehende Gerade, die astatistische Regelung darstellend. Hat Winkel φ für zwei Punkte P_1 und P_2 , wie in Figur 6a, dieselbe Größe, so ist für die betreffenden Muffenstellungen die Umlaufzahl dieselbe. C-Kurven ausgeführter Regler sollen sich der astatischen

Geraden nähern. Wächst φ mit x : statische Regelung. Umgekehrt: labil. Fig. 6b. Es folgt weiterhin, Fig. 7.

$$\delta = \frac{c_0}{2c_m}$$

Arbeitsvermögen $A = \int E \cdot ds$ wird durch Fläche unter $P_1 P_2$ dargestellt. Bei Untersuchung oder Entwurf eines Reglers sind getrennt aufzuzeichnen: die Kurven C_1, C_2 und C_3 , derjenigen Zentrifugalkräfte, die den Schwunngewichten G , der Hülsenbelastung Q und der Federkraft F das Gleichgewicht halten.

3. Berechnung und Untersuchung der Kegelregler. Größe der Eigenreibung e_r werde in Fig. 7a wie folgt bestimmt.

Dreht sich Hängestange III um $d\alpha$, so entspricht dem eine Winkeländerung der Stange $II III$ um $d\beta$, bezogen auf Pol \mathcal{P} . Sonach Drehung von Zapfen II in seinem Lager um $(d\alpha + d\beta)$. Bezeichnen: d_1, d_2, d_3 die Durchmesser der Zapfen I, II und III , Z die Zapfendrucke, $\mu = 0,1$ = Zapfenreibungskoeffizient, so entsteht durch Drehung von $I II$ die Zapfenreibungsarbeit

$$\frac{\mu}{2} \cdot d\alpha (Z_1 \cdot d_1 + Z_2 \cdot d_2).$$

Die dieser Reibungsarbeit entsprechende Kraft kann durch eine in Richtung von III wirkende Kraft R_1 ersetzt werden, die mit Bezug auf Zapfen I am Hebelarm p_1 angreift und bei einer Drehung um $d\alpha$ die Arbeit $R_1 \cdot p_1 \cdot d\alpha$ leistet:

$$R_1 p_1 \cdot d\alpha = \frac{\mu}{2} \cdot d\alpha (Z_1 d_1 + Z_2 \cdot d_2).$$

$$R_1 = \frac{\mu}{2 \cdot p_1} \cdot (Z_1 d_1 + Z_2 \cdot d_2).$$

In gleicher Weise findet sich für die Drehung der Stange $II III$ um \mathcal{P} :

$$R_2 = \frac{\mu}{2 p_2} \cdot (Z_2 \cdot d_2 + Z_3 \cdot d_3).$$

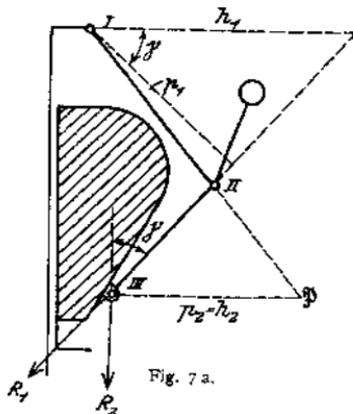


Fig. 7a.

Wird R_1 im Punkt III in eine wagerechte und eine senkrechte Komponente zerlegt, so ergibt sich durch Addition der letzteren zu R_2 der gesamte, auf die Muffe reduzierte Reibungswiderstand R .

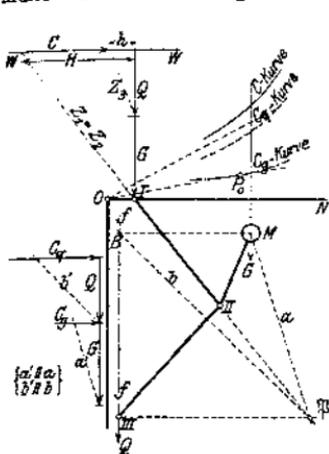


Fig. 8.

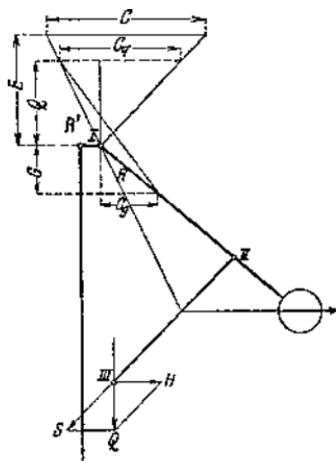


Fig. 9.

Die senkrechte Komponente von R_1 hat die Größe:

$$R_1' = R_1 \cdot \cos \gamma = \frac{H}{2} \frac{Z_1 \cdot d_1 + Z_2 \cdot d_2}{h_1}, \quad \text{da} \quad h_1 = \frac{P_1}{\cos \gamma}.$$

$$\varepsilon_r = \frac{R_2 + R_1'}{E} = \frac{R}{E}.$$

In den Fig. 8 und 9 ist die Ermittlung der C_g und C_g -Kurven, sowie der Zapfendrucke Z_1 , Z_2 , Z_2 durchgeführt. Fig. 8 behandelt den in Fig. 7 a schematisch dargestellten Proellischen Regulator mit „umgekehrter“ Aufhängung.

C_g und G , sowie C_g und Q sind nur dann im Gleichgewicht, wenn ihre jeweilige Resultierende durch den augenblicklichen Drehpunkt β geht. Werden in den Endpunkten der Strecken Q und G Parallele b' und a' zu den Verbindungslinien b und a gezogen, so werden auf den Wagerechten die Strecken C_g und C_g abgeschnitten.

Da die Führung ff des Zapfens III nur eine wagerechte Reaktion leisten kann, so wird Gesamtgewicht $Q + G$ durch Zapfen I aufgenommen. Sonach ist $Q + G$ Vertikalkomponente des Zapfendruckes $Z_1 = Z_2$, dessen Horizontalkomponente mit H bezeichnet ist. Auf Zapfen III wirken: Gewicht Q und Horizontalschub $h = H - C$. Z_3 ist somit die Resultierende aus h und Q .

Fig. 9 zeigt die Ermittlung derselben, oben genannten Größen für einen Regulator mit „direkter“ Aufhängung.

Zwischen G und C_g besteht Gleichgewicht, wenn die Resultierende R durch Zapfen I geht. Die Richtungen des Armes $I II$ schneiden auf der im Abstände G von I gelegten Wagerechten die Größen C_g ab.

Die als Komponente von Q auftretende Spannung S ist am Arm $I II$ mit C_g im Gleichgewicht, wenn Resultierende R' durch I geht. Auf der im Abstände Q von I gezogenen Wagerechten schneiden die Richtung von R' und eine durch I gelegte Parallele zu $II III$ den Wert C_g ab. Fig. 9 zeigt weiterhin Ermittlung der Energie E , da $C_g : Q = C : E$. Zapfendruck für II und III beträgt S . Zapfendruck von I gleich der Mittelkraft von R' und R , dargestellt durch die Verbindungslinie der Endpunkte von R und R' .

In Fig. 10 ist die Ermittlung von C_q , C_g und C_f für den Regulator nach Fig. 16 durchgeführt.

Besonders einfach wird die Berechnung für den in Fig. 15 wiedergegebenen Hartung-Regler bei Ausführung des Winkelhebels mit rechtem Winkel. Es folgt nach Fig 11:

$$C_q = \frac{b}{a} \cdot Q = \text{konst.}, \quad C_g = -G \cdot \text{tg} \alpha.$$

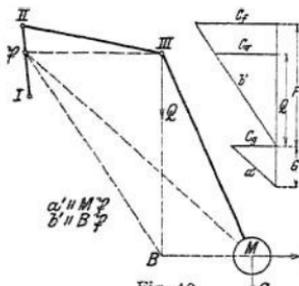


Fig. 10.

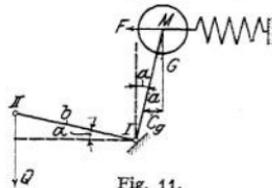


Fig. 11.

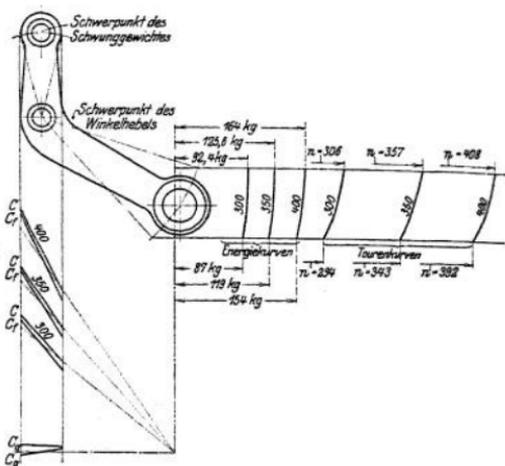


Fig. 12.

Für $\alpha = 0^\circ$ wird Zapfen M durch G , I durch $Q + G$, II durch Q belastet. Es ist:

$$\epsilon_r = \frac{R}{E} = \frac{\mu}{2} \cdot \frac{Q \cdot d + (Q + G) d + G \cdot d}{El},$$

worin l = Armlänge III .

In Fig. 12 sind die Kurven für Winkelhebel mit stumpfem Winkel dargestellt. Die C_g -Kurve wird nunmehr annähernd astatisch.

4. Änderung der Umlaufzahl: durch Änderung der Schwunggewichte oder der Hülsenbelastung, bzw. der Federspannung.

$$E = a \cdot C = a \cdot m r \omega^2.$$

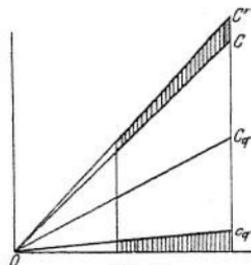


Fig. 13.

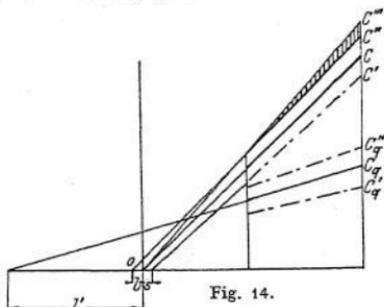


Fig. 14.

Die Energie ändert sich im quadratischen Verhältnis zur Umlaufzahl.

In Fig. 13 zeigt C -Kurve und C_q -Kurve astatischen Verlauf. Die Vergrößerung der Hülsenbelastung bzw. die Anspannung der Feder verursachen Steige-

zung der Zentrifugalkräfte auf $C_q + c_q$ und von C auf C' . Die neuen C -Kurven zeigen die gleiche Lage wie vorhin; der Ungleichförmigkeitsgrad hat sich nicht geändert.

In Fig. 14 ist die C -Kurve wieder astatisch, die C_q -Kurve labil. Vermehrung der Hülsenbelastung ergibt labile C'' -Kurve, Verminderung statische C' -Kurve.

Änderung der Federspannung nur zulässig bei Federregulatoren mit astatischer C_q -Kurve. Wird in Fig. 14 die C'' -Kurve jedoch in Lage C''' gebracht, so ist Regelung brauchbar. Einrichtung der Hülsenbelastung also derart, daß mit steigender Muffe die senkrecht schraffierten Zentrifugalkräfte auftreten.

1. Anbringung sog. Federwagen, die an Hülse angeschlossen werden. Starke Zunahme der Eigenreibung infolge der hinzukommenden Zapfenbelastung.

2. Längenänderung der Feder. Dem Spannen der Feder entspricht Hinzufügung einer konstanten Kraft, so daß die C -Kurve labil wird. Letztere erhält ihre richtige Lage wieder durch Verkürzung der Feder beim Einschrauben in den Federteller. Die Kräfte zum Zusammendrücken der Feder nehmen zu und die verursachte statische Wirkung gleicht sich mit der Labilität der C -Kurve aus.

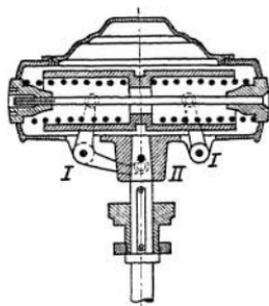


Fig. 15.

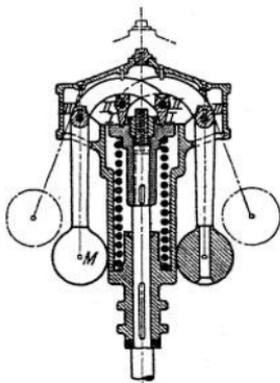


Fig. 16. (R. Trenck, Erfurt.)

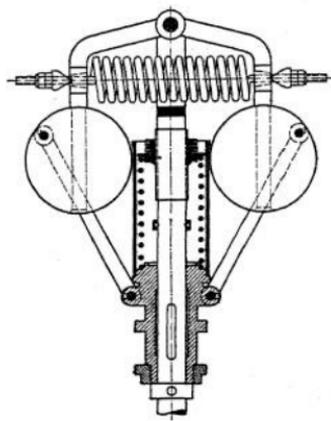


Fig. 17.

Bei Reglern mit astatischer C_q -Kurve kann ohne weiteres Umlaufzahl durch Hinzufügung einer konstanten Belastung geändert werden. Beim Tolle-Regulator, Fig. 17, wird die konstante Belastung ohne Gewichte durch Spannen der senkrechten Feder eingestellt. Das statische Verhalten dieser wird durch labile Wirkung der wagerechten Feder ausgeglichen. Spannen der Querfeder verändert den Ungleichförmigkeitsgrad, die eintretende Änderung der Umlaufzahl wird durch Spannen der Längsfeder beseitigt. Anziehen der Längsfeder allein vergrößert Energie und Umlaufzahl ohne Beeinflussung des Ungleichförmigkeitsgrades.

2. Die Flachregler.

Vgl. S. 868. Ausführungen siehe Fig. 18—20. Fig. 20 zeigt Bauart des Lentz-Reglers. Flachfeder B ist an einem Ende mit dem aufgekeilten Gehäuse D , am

anderen Ende mit Trägheitsring *C* verbunden, an dem die Schwunggewichte *A* angreifen. Bei Geschwindigkeitszunahme bleibt Ring *C* zurück, die Pendel

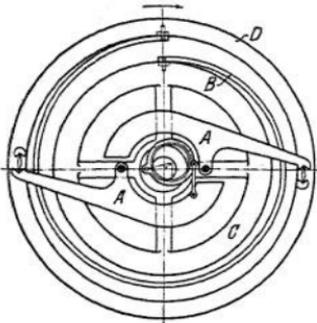


Fig. 18.

nach außen drängend und die neue Füllung einstellend. Verstellung der Umlaufzahl durch Abdecken eines Teiles der Feder *B*, indem ein durch besonderes Getriebe während des Ganges verstellbarer Hebel mit zwei Rollen auf Feder gleitet. Das Exzenter wird geradlinig auf einem Stein verschoben. Fig. 19 zeigt Doerfel-Regler. Die Federn hängen an kleinen Exzentern, die durch Schneckenräder zwecks Änderung der Umlaufzahl verstellbar werden. Die die Schneckenräder für Exzenterverstellung tragende Welle wird durch federndes Reibrad verdreht, wenn dieses an einem von Hand eingestellten Hebel mit entsprechenden Reibflächen streift. Wird Lösung der Regulatorschaltung vom Maschinen

wegungsrichtung um, und die Feder wird entspannt.

Auch bei diesen Reglern ist Beharrungswirkung vorhanden, wenn der Schwerpunkt des vorausseilenden Pendels außerhalb des Halbkreises liegt, der über der Verbindungslinie von Wellenmitte und Aufhängepunkt des Pendels als Durchmesser geschlagen wird. Der Regler arbeitet mit „Drehexzenter“.

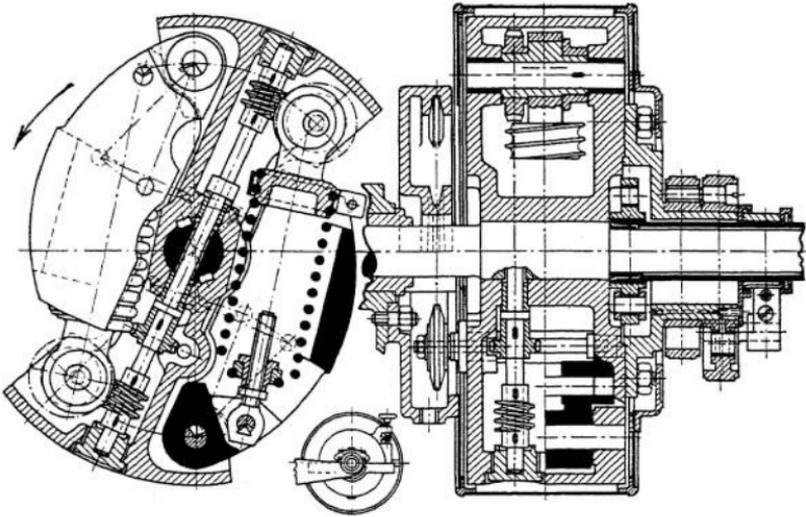


Fig. 19.

Fig. 20. Proell-Regler. Die am Gehäuse aufgehängten Zugfedern sind an Bolzen *P* befestigt, deren Rollen auf geradlinigen Bahnen *c* am Umfange der Pendel laufen. Mittelpunkt *M* der von den Bolzen *P* beschriebenen Kreisbögen kann durch Winkelhebel *w*₁, Stange *s* und Winkelhebel *w*₂, dessen anderer Schenkel in einem Schlitz der Welle liegt und von Hand verstellbar werden kann, verlegt werden. Rollenbewegung auf Bahn *c* während des Pendelausschlags nur gering, da die Kreisbogen aus *M* und *B* nahezu zusammenfallen. Wird *M*

nach B hin bewegt, so wird Federmoment verkleinert und Umlaufzahl sinkt. Ungleichförmigkeitsgrad bleibt fast konstant.

Bei den Flachreglern würde (wie bei den Kegelreglern) Nachspannen der Federn allein den Ungleichförmigkeitsgrad verringern, stärkere Änderungen der Federkraft würden somit Labilität herbeiführen. Es ist demnach neben der Beeinflussung der Federkraft entweder der Angriffspunkt (Fig. 20) oder der feste Drehpunkt (Fig. 19) der Federn zu verlegen.

In Fig. 21 ist Bestimmung der Flachregler nach Tolle durchgeführt.

\mathfrak{M} = Moment der Fliehkraft C in bezug auf Zapfen I :

$$C \cdot h_1 = M \cdot \omega^2 \cdot r \cdot h_1.$$

Nun ist $r \cdot h_1 = a \cdot x =$ doppeltem Inhalt des Dreiecks ASJ . Sonach:

$$\mathfrak{M} = M \cdot \omega^2 \cdot a \cdot x.$$

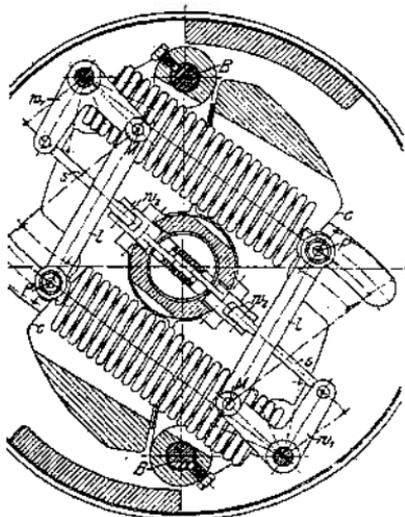


Fig. 20.

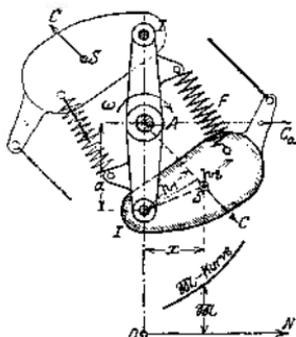


Fig. 21.

Durch Auftragung der Werte \mathfrak{M} auf den durch S gelegten Senkrechten ergibt sich die \mathfrak{M} -Kurve, die für Flachregler dasselbe bedeutet wie die C -Kurve bei Kegelreglern. Aus dieser Gleichung für \mathfrak{M} folgt, daß bei unveränderter \mathfrak{M} -Kurve die Umlaufzahl entweder durch Änderung der Gewichte oder der Entfernung a geändert werden kann. Verlegung des Wellenmittels übt hier dieselbe Wirkung aus wie die Verlegung der Spindel bei den Muffenreglern: der Ungleichförmigkeitsgrad wird ein anderer, gleichzeitig wird jedoch auch — im Gegensatz zur C -Kurve der Muffenregler — der Verlauf der \mathfrak{M} -Kurve beeinflußt, die gekrümmter oder flacher wird.

Der Inhalt der unter der \mathfrak{M} -Kurve liegenden Fläche gibt nicht das Arbeitsvermögen des Reglers an. Eine auch in dieser Hinsicht der C -Kurve der Muffenregler entsprechende Kurve wird nach Fig. 22 erhalten, indem die im Schwerpunkt S angreifend gedachten, der Federkraft das Gleichgewicht haltenden Fliehkräfte als Ordinaten zu den Entfernungen r als Abszissen aufgetragen werden.

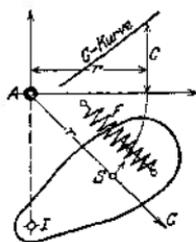


Fig. 22.

3. Die Leistungsregler.

Pumpen, Kompressoren usw. arbeiten mit gleichbleibender Füllung; der Regulator nimmt stets dieselbe Lage ein, wenn Dampfdruck und Verdichtungsdruck unverändert bleiben. Wird z. B. durch Änderung der Länge der Stellzeug

und Steuerhebel verbindenden Zugstange der Schieber auf kleinere Füllung eingestellt, so läuft die Maschine langsamer, der Regler sinkt und stellt bei tieferer Lage die frühere Beharrungsfüllung wieder ein. Der tieferen Regulatorlage entsprechend läuft die Maschine langsamer. Die Umlaufzahl wird um so stärker verändert, je statischer der Regler. Statische Regler sind jedoch bei plötzlicher Entlastung der Maschine durch Rohrbruch z. B. gefährlich, da ihrer höchsten Lage zu große Umlaufzahl entspricht. Vermeidung des „Durchgehens“ durch besondere Ausklinkvorrichtungen, die vor Erreichen höchster Lage der Regulatormuffe in Tätigkeit gesetzt werden oder durch astatischen Sicherheitshub nach Stumpfs. Dementsprechend zerfällt der reichliche Hub des Stumpfschen Leistungsreglers in einen stark statischen, zur Leistungsregelung verwandten, unteren Teil und einen astatischen oberen Teil. Regeln für den Stumpfschen Regulator:

1. Das Übersetzungsverhältnis zwischen Maschine und Regler ist so zu wählen, daß höchste vorkommende Betriebsumlaufzahl der höchsten Umlaufzahl des statischen Hubteiles entspricht.

2. Das Übersetzungsverhältnis zwischen Regulatorhub und dem die Füllung verstellenden Steuerteil muß dem pseudo-astatischen Hubteil die Abstimmung von der größten Betriebsfüllung auf Leerlauf füllung ermöglichen.

Der Tollesche Leistungsregler wird im Gegensatz zu den Geschwindigkeitsreglern mit stark statischer C_g -Kurve ausgeführt. Umlaufzahl und Muffendruck wachsen proportional mit dem Hube. Eigenreibung = 1,2 v. H.

Der Weißsche Leistungsregler hat Gewichtsbelastung und ist ebenfalls stark statisch. Die Eigenreibung beträgt je nach Lage der Muffe 16 bis 40 v. H.

Selbsttätige Verminderung der Umlaufzahl z. B. bei Kompressoren wegen zu großen Luftdruckes im Sammelbehälter durch Verlegung des Drehpunktes des Regulatorhebels, so daß Muffenlage ohne Verstellung der Steuerung geändert wird. Drehpunkt wird durch einen vom Luftdruck gegen Feder als Gegenkraft verschobenen Kolben verlegt.

Über Flachregler mit weitgehender Verstellung der Umlaufzahl s. Z. Ver. deutsch. Ing. 1913, S. 1287.

4. Die indirekt wirkenden Regler.

Diese gelangen bei sehr großen durch direkte Regler nicht zu beherrschenden Regulierungswiderständen zur Verwendung und verstellen durch Einschaltung einer Hilfskraft. Fig. 23 zeigt schematisch eine derartige Vorrichtung.

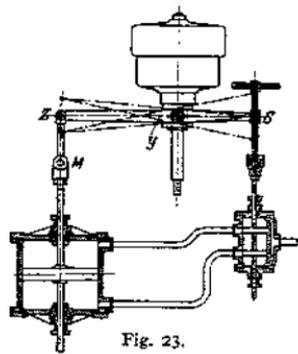


Fig. 23.

Steigt z. B. der Regler, so dient Z als Festpunkt, Gelenk S und Steuerschieber werden gehoben. Hierdurch bewegen sich Kolben, sowie M und Z so lange aufwärts, bis der Steuerschieber wieder in seine Schlußlage abwärts bewegt wird, wobei y als Festpunkt dient.

Ein Maß für die Güte der Einrichtung gibt die Schlußzeit, d. h. die Zeit, die bei plötzlicher Ent- oder Belastung um Hilfsmaschinenkolben gebraucht wird, um seinen ganzen Hubweg zurückzulegen. Eine untere Grenze findet die Schlußzeit in der Weite der Kanäle der Hilfsmaschine und in den Stoßwirkungen, die bei Wasserturbinen bei plötzlicher Abstimmung des Wasserzuflusses auftreten.

Die Regelung wird durch eine große nur mit teuren Schwunghmassen zu erkaufenden Anlaufzeit oder durch einen großen Ungleichförmigkeitsgrad δ des Reglers verbessert. Letzterer führt jedoch zu starken Schwankungen in der Umlaufzahl, die der Maschinist durch Einstellung von Hand beseitigen kann. Steht die Reglermuffe hoch, wie eingangs angenommen wurde, so kann der Maschinist

die Umlaufzahl erniedrigen, indem er die Steuerstange mit dem Handrad verkürzt. Dadurch wird der Steuerschieber noch höher gezogen, die Füllung wird vom aufwärts gehenden Hilfsmaschinenkolben weiter verringert, der Regulator sinkt, bis *Z* wieder die der Beharrungsfüllung entsprechende Lage erlangt hat. Mit dieser läuft jetzt die Maschine bei tiefer stehender Reglermuffe, also niedriger Umlaufzahl, weiter. Es soll z. B. der Muffen-Mittellage eine Kolbenstellung entsprechen, die um $\frac{3}{4}$ des Hubes vom unteren Totpunkt entfernt ist. Wird jetzt die Maschine plötzlich ganz entlastet, so geht die Reglermuffe um den halben Muffenhub nach oben hin. Diesem Muffenweg entspricht halber Kolbenhub, der Kolben bleibt weit unter seiner oberen Totlage, und die Maschine geht durch. Umgekehrt bleibt sie stehen.

Dieser Übelstand wird bei den sog. Isodromreglern mit nachgiebiger Rückführung vermieden. Isodromregler arbeiten bei jeder Belastung mit gleichbleibender Umlaufzahl, die bei Entlastung sogar kleiner als bei Vollast gewählt werden kann. Fig. 24 zeigt die Einrichtung. Die Kolbenstange ist mit einem Bremszylinder, dessen Kolben mit Gelenk *Z* verbunden. Dieses wird durch eine in der gezeichneten Mittellage ungespannte Zug- und Druckfeder stets in die Mittellage zurückgebracht. Ändert durch Be- oder Entlastung der Hilfsmaschinenkolben seine Lage, so werden sich zunächst Bremskolben und Bremszylinder wie aus einem Stück bestehend bewegen. Bei weiterer Spannung der Feder überwindet diese den Öldruck im Bremszylinder und drängt z. B. bei steigendem Hilfsmaschinenkolben den Bremskolben zurück, bis *Z* wieder die gezeichnete Lage einnimmt. *S* muß ebenfalls die gezeichnete Lage einnehmen, so daß der Regulatorhebel *ZYS* wagrecht liegen, die Umlaufzahl stets dieselbe sein muß. Das Gestänge des Hilfsmaschinenkolbens ist infolge der anderen Lage des Bremskolbens im Zylinder verkürzt worden.

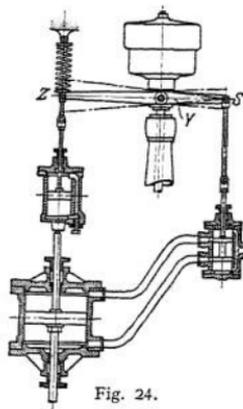


Fig. 24.

Die Kondensation.

Bearbeitet von H. Dubbel.

Durch den Auspuff in einen luftleeren Raum wird der Gegendruck vor dem Kolben bei gewöhnlichen Verhältnissen um rund 1 Atm. erniedrigt, und das Diagramm entsprechend vergrößert. Praktischer Gewinn infolge der Zunahme der Eintrittsverluste geringer, doch (nach den auf S. 898 erwähnten Doerfelschen Versuchen) nicht in dem Maße, als untere Temperatur sinkt.

Für die Beurteilung der Verhältnisse ist das Daltonsche Gesetz maßgebend: Die Sättigungskapazität eines Raumes für den Dampf einer beliebigen Flüssigkeit ist unabhängig von dem Vorhandensein eines anderen in dem Raume befindlichen Gases. Gesamtdruck im Raume gleich Summe der Einzeldrücke (S. 376).

Ist p_0 = Kondensatordruck, d = Druck des anwesenden Dampfes, l = Luftdruck, so folgt:

$$p_0 = l + d.$$

Der Kondensatorraum ist stets mit Dampf gefüllt, der aus dem Kondensat entsteht und dessen Druck durch die Kondensattemperatur festgelegt ist. Die Verringerung des Dampfdruckes findet ihre Grenze durch die erforderliche Zunahme der Kühlwassermenge und damit der Pumpenarbeit. Niedriger Kondensatordruck führt zu einer größeren Kühlwassermenge und damit zu einer größeren Pumpenarbeit.

saturdruck ist in der Hauptsache durch Verminderung der durch Undichtigkeiten und mit dem Kühlwasser eindringenden Luft und durch gute Abführung der Luft aus dem Kondensator zu erreichen.

1. **Mischkondensation.** Ausführung in Parallel- und Gegenstrom. Kühlwassermenge n in kg für 1 kg Dampf folgt aus:

$$\lambda - t_a = n(t_a - t_e),$$

worin bedeuten: λ = Gesamtwärme des auspuffenden Dampfes. Infolge Abkühlung in Rohrleitung beträgt ungefähr $\lambda = 600$ WE.

t_e = Eintrittstemperatur des Kühlwassers,

t_a = Austrittstemperatur des Kühlwassers,

$t_e \cong 10^\circ - 15^\circ$ bei Brunnenwasser,

$t_e \cong 20^\circ$ bei Wasser aus Teichen,

$t_e = 25$ bis 35° bei Rückkühlung.

Im Mittel: $n = 25$ bis 30 kg.

Fig. 1 zeigt Gegenstrom-Kondensator nach Weiß und Druckverteilung in demselben. Die an dem Kühl-

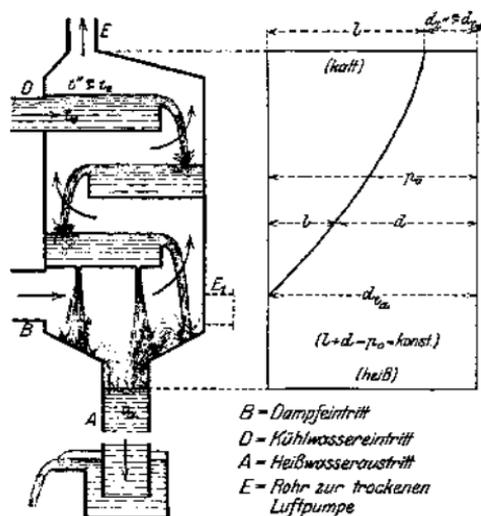


Fig. 1.

2. **Oberflächenkondensation.** a) Geschlossene Kondensatoren. Das Wasser strömt durch, der Dampf um die Rohre. Die den Dampf führenden Scheidewände sind entweder radial oder parallel angeordnet. Im ersten Fall saugt die trockene Luftpumpe an höchster, kältester Stelle beim Kühlwasser-eintritt ab, Fig. 2, im zweiten Fall wird nach Fig. 3 das Kondensat im tiefsten Punkt, die Luft in der Mitte der unteren Abteilung abgesaugt. Am Dampfeintritt ist zur Ermöglichung der Entfaltung des Dampfstromes größerer Zwischenraum im Rohrsystem vorzusehen. Zweckmäßig ist Anordnung durchlöcherter Schutzbleche gegen Dampfstoßwirkungen und größerer Wandstärken der Rohre am Dampfeintritt. Enge Rohre zeigen 16—22 mm Lichtweite bei etwa 0,85 mm Wandstärke, weite Rohre 25—32 mm l. W. mit im Mittel 1,45 mm Wandstärke. Rohrlänge = 100 bis 130 mal Rohrweite. Rohrteilung $d + 9$ bis $d + 15$ mm.

Bei größeren Längen sind die Rohre durch Scheidewände zu unterstützen. Versteifung der Rohrwände durch Anker oder eingeschraubte Kühlrohre.

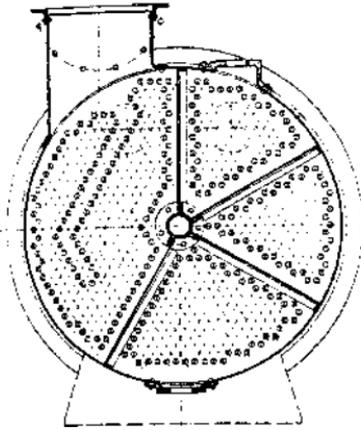


Fig. 2.

Abdichtung der Rohre in den Rohrwänden durch Einwalzen, mittels Stopfbuchsen, durch Gummiringe, die durch den atmosphärischen Druck angepreßt werden oder durch aufquellende Holzringe. Fig. 4.

Zerstörung der Kondensatorrohre nach O. Lasche (Z. Ver. deutsch. Ing. 1911, S. 1202) durch zu hartes Rohmaterial, ungeeignete Kühlwässer und elektrische Einwirkungen. Bei saurem Grubenwasser und ammoniakhaltigem Wasser beginnt Mulmigwerden des Materials von der Wasserseite aus, und zwar werden häufig die vom warmen Wasser durchzogenen Rohre stärker angegriffen. Hilfsmittel: Neutralisierung der Beimengungen. In Seewasserkondensatoren treten galvanische Ströme auf. Zur Verhinderung der dadurch verursachten Anfressungen werden Zink- und Aluminium-

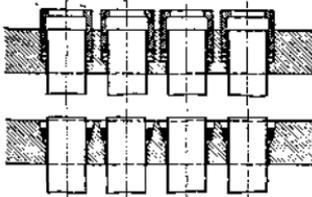


Fig. 4.

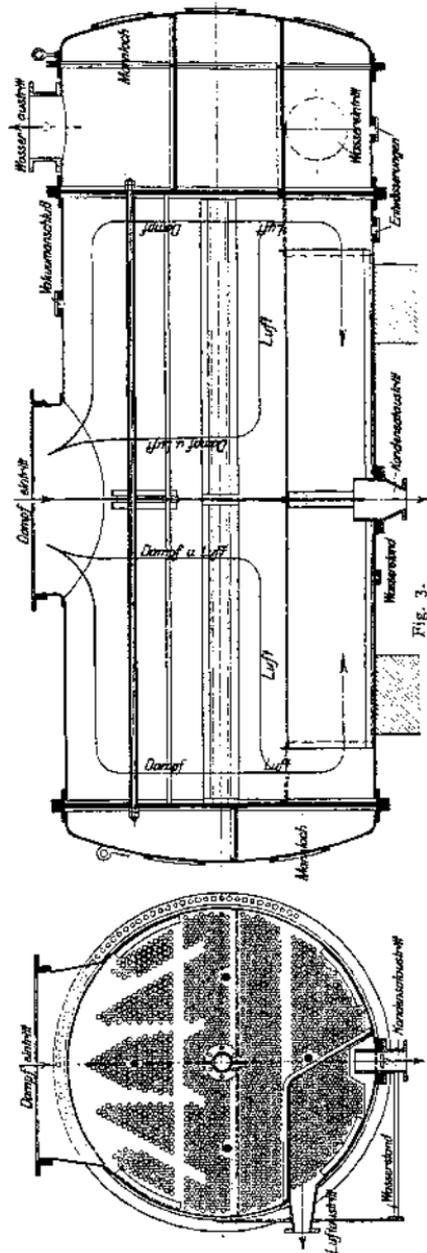


Fig. 3.

schutzplatten angeordnet, wobei die Zinkplatte als elektropositiver Teil eines galvanischen Elementes beim Auftreten galvanischer Ströme zerstört wird.

Bei dem Entwurf ist zu beachten: Die Temperatur der Luft an der Absaugstelle muß kleiner als die der Kondensatorspannung entsprechende Sättigungstemperatur sein, da sonst überhaupt kein Teildruck der Luft vorhanden wäre. Aufgabe des Kondensators ist sonach, nicht nur dem Dampf, sondern auch der Luft Wärmemengen zu entziehen.

Der Wärmedurchgangskoeffizient für Dampf ist durch Versuche von Josse, Weighton, Ser festgestellt worden:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}, \text{ worin } \alpha_1 = \text{Übergangszahl von Dampf und Wandung}$$

$$\alpha_2 = \text{Übergangszahl von Wasser und Wandung}$$

$$\lambda = \text{Wärmeleitzahl durch die Wandung}$$

$$\delta = \text{Wandstärke in m, } c = \text{Wassergeschwindigkeit (S. 356).}$$

$$\text{Für Messing } \lambda = 90, \text{ für 1 mm Wandstärke } (\delta = 0,001) \frac{\delta}{\lambda} = \frac{1}{90\,000}.$$

$$\alpha_2 = 4500 \sqrt{c}; \quad \alpha_1 = 19\,000.$$

Wird c von 0,5 m/sek auf 1,2 m/sek erhöht, so steigt k von 2640 auf 4530. α_1 ändert sich mit der Dampfgeschwindigkeit, was aber k nur ganz unerheblich beeinflusst.

Für die Luftkühlung ist in der Gleichung für $\frac{1}{k}$ der Wert α_1 für die Größe von k maßgebend. α_2 und damit die Wassergeschwindigkeit beeinflussen k nur sehr wenig. (Nach Josse ist $\alpha_1 = 1$ bis 5 bei verdünnter Luft, sonach k sehr klein.)

Hieraus ergibt sich: Stagnierende Luftmengen sind im Kondensator möglichst zu vermeiden, da die von ihnen umgebenen Rohre für die Kühlwirkung praktisch ausgeschaltet sind. In dem hauptsächlich der Luftkühlung dienenden Teile des Kondensators verursachen große Wassergeschwindigkeiten nur unnötige Reibungsverluste. In dem dampfkühlenden Teile ist jedoch Anwendung hoher Wassergeschwindigkeit mit Rücksicht auf die starke Vergrößerung des Wärmedurchganges von Vorteil.

Da die Rohre des Kondensators überall von einem Dampf-Luftgemisch bespült werden, dessen Zusammensetzung unbekannt und außerdem für verschiedene Teile des Kondensators ganz verschieden ist, so ist der Wärmedurchgang stark veränderlich, wie Josse gezeigt hat. Eine Vorausberechnung des Kondensators auf physikalischer Grundlage ist sonach nicht möglich.

Josse ordnet in den Rohren sog. Wirbelstreifen an, so daß auch der Kern des Kühlwassers zur Kühlung herangezogen wird. Der von den meisten Firmen mit $k = 1500$ bis 1800 eingesetzte Wärmedurchgangskoeffizient kann dadurch auf 2500 bis 3000 WE. gesteigert werden. Balcke empfiehlt reichliche Bemessung, da das zum Kondensationsbetrieb für Landturbinen dienende Kühlwasser meist in ungenügender Menge und in schlechter Beschaffenheit zur Verfügung steht, und das Auftreten von Ablagerungen sich in kleinen Kondensatoren schneller und stärker bemerkbar macht als in großen.

Josse u. a. setzen die Kondensattemperatur durch „Unterkühlung“ herunter, d. h. das flüssige Kondensat wird stärker unterkühlt und nachher mit der abziehenden Luft gemischt. Die Unterkühlung erfolgt an den vom kältesten Wasser im Gegenstrom bespülten Kühlflächen.

b) Offene Kondensatoren. Entweder in Wasserbehältern liegend oder als stehende Kesselkondensatoren angeordnet. Im letzteren Fall fließt das Wasser durch die eine Hälfte der Rohre nach unten, durch die andere nach oben, oder nur von unten nach oben.

c) Berieselungskondensatoren. Das Kühlwasser rieselt über Rohrschlangen oder Kühlplatten und entzieht dem Dampf Wärme sowohl durch direkte Abkühlung als auch durch Verdunstung. Infolge der kräftigen Verdunstungswirkung nur etwa $\frac{2}{3}$ der Kühlwassermenge gegenüber den Kondensatoren unter a und b erforderlich.

d) Kondensatoren mit Luftkühlung. Fig. 5. (Bauart Balcke). Der Dampf durchströmt Rippenrohre, an denen die durch Ventilatoren angesaugte und zu den Verwendungsstellen gedrückte Luft vorbeistreich, wobei sie getrocknet und auf 35 bis 45° C erwärmt wird. Praktisch erreichbare Luftleere im Kondensator rund 85 v. H.

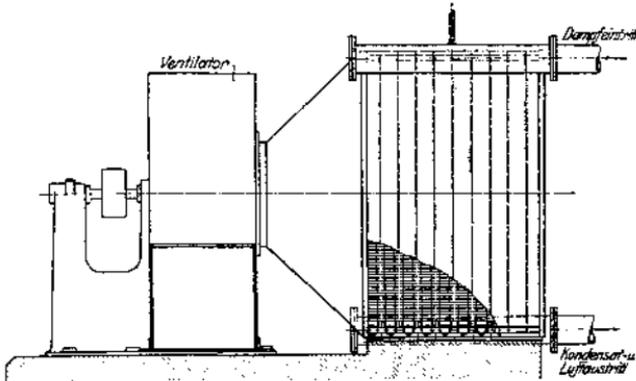


Fig. 5.

3. Strahlkondensatoren. Dampf und Kühlwasser mischen sich in einem luftleeren Räume, aus dem das Gemisch durch die Strömungsenergie des Dampfes selbst hinausgeschafft wird. Der Dampf tritt durch düsenartige Öffnungen in das vom Kühlwasser in geschlossenem Strahl durchströmte Rohr ein, das sich am Austrittsende erweitert, so daß hier die Geschwindigkeit in Spannung umgesetzt wird. Ausführung der Wasserstrahlkondensatoren nach Körting mit verschiebbarer Aufnahmedüse, so daß auch bei kleinem Dampfverbrauch durch Verdeckung vieler Düsenöffnungen große Dampfgeschwindigkeit erreicht wird. Verbindung der Aufnahmedüse mit Stellzeug des Regulators. Saughöhe höchstens 3 m.

Neuere Ausführungen setzen Wasserstrahlwirkung voraus.

Kreiseltkondensatoren mit Strahlwirkung. Ausführung Westinghouse-Leblanc-Balcke. Fig. 6.

Im Kondensationsraume entsteht durch Eintritt eines Wasserstrahls Luftleere, der Kondensat und Luft mitreißt. Beim Eintritt in den sich kegelig verengenden Kanal wird eine hohe Geschwindigkeit erzeugt, die sich in dem erweiternden Teile am Austritt in Druck umsetzt. Beim Anlassen Einführung von Dampf durch Hilfsdampfleitung, bis Luftleere entsteht.

Fig. 7 zeigt Mischkondensation von Balcke. Das Wasser fließt aus Ringraum durch Düsen in die größere Düse von ringförmigen Querschnitt, wobei durch die entstehende Saugwirkung Dampf und Luft mitgerissen werden.

Josse-Gensecke¹⁾ leiten durch den Wasserstrahlapparat das gesamte Kühlwasser, womit bei mäßigen Strömungsgeschwindigkeiten (20 bis 30 m/sek) der Vorteil großer Querschnitte, die sich nicht verstopfen können, erreicht wird. Der Apparat wird in die Druckleitung der Pumpe oder in die Kühlwasserleitung hinter dem Kondensator eingeschaltet, oder in den Kondensator selbst hineingelegt. In diesem Falle wird eines der Kühlwasserrohre als Düse ausgebildet, und Strömungsverluste beim Absaugen der Luft fallen fort.

Für vorübergehende Entfernung sehr großer Luftmengen wird neben dem Wasserstrahlapparat ein Dampfstrahlapparat benutzt, damit ersterer nicht

¹⁾ Josse, Mitteilungen aus dem Maschinen-Laboratorium. München 1913, R. Oldenbourg.

dauernd mit Höchstleistung zu arbeiten braucht. Fig. 8 zeigt schematisch diese Einrichtung. Der von der Hauptturbine mit ungefähr atm. Pressung abgezapfte Dampf oder der Abdampf einer Hilfsturbine fördert die aus dem Kondensator abgesaugte Luft vorkomprimiert in einen Wärmeaustauschapparat, aus dem die Luft durch den Kühlwasserstrom in die Atmosphäre abgeführt wird, während der Dampf durch das Kondensat kondensiert wird, so daß seine Abwärme zur Vorwärmung des Speisewassers benutzt wird.

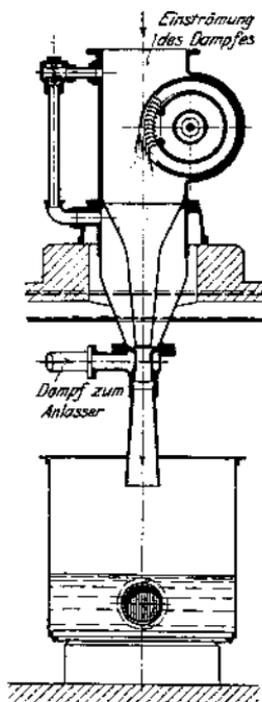


Fig. 6.

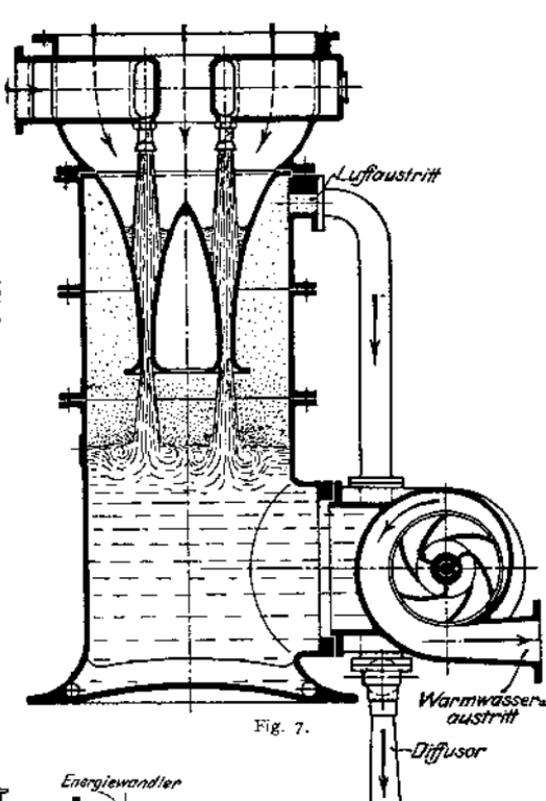


Fig. 7.

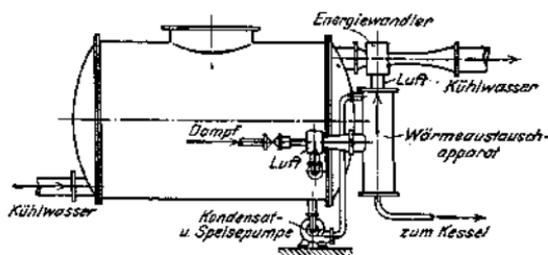


Fig. 8.

Theorie der Strahlkondensatoren und Kreiselpkondensatoren nach Stodola. Ist $G = \text{sek. Gesamtgewicht von Dampf, Luft und Kühlwasser}$, $h = \text{Gefälle im Kondensator}$, $c_1 = \text{Geschwindigkeit beim Eintritt in die Düse}$, $c_2 = \text{die Geschwindigkeit am Austritt}$, so ist die Abnahme der lebendigen Kraft zuzüglich Arbeit der Schwere

$$E = \frac{G}{g} \cdot \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + G \cdot h = A_1 + A_2 + G \cdot R'.$$

Die ihr entsprechende Arbeit schafft zunächst die sekundliche Wassermenge $(n + 1)$ gegen den atmosphärischen Druck p_a ins Freie:

$$A_1 = (n + 1) \cdot (p_a - p_0) \cdot v' \quad p_0 = \text{Kondensatordruck.}$$

Weiterhin wird das Luftvolumen v' und der in diesem enthaltene Wasserdampf von p_0 auf p_a isothermisch verdichtet:

$$A_2 = - \int_{p_0}^{p_a} v' \cdot d p \cdot G_e \quad (G_e = \text{sek. Luftgewicht}).$$

Setzt man $v' \cdot l = (p_0 - d) \cdot v' = R \cdot T_2 = \text{konst.}$, worin $d =$ Dampfdruck für die Wasser-
austrittstemperatur T_2 bedeutet, so wird

$$A_2 = G \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln \frac{p_a - d}{p_0 - d}.$$

$G R'$ = Verlust durch Reibung und Wirbelung. Für 1 kg Dampf folgt schließlich:

$$G \cdot \left(h + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2g} \right) = (n + 1) (p_a - p_0) + G_e R T_2 \cdot \ln \frac{p_a - d}{p_0 - d} + G \cdot R',$$

woraus c_2 berechnet werden kann.

Nach der Stetigkeitsgleichung muß sein: $n + 1 + G_e \cdot v' = f \cdot c$, woraus Querschnitt f zu bestimmen ist.

Das Schleuderrad der Westinghouse-Leblanc-Turbinenpumpe ist wie eine radial beaufschlagte Aktionsturbine zu berechnen.

Reibungshöhe $H = \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g}$. Die Aufzeichnung der Geschwindigkeitsdiagramme ergibt die absolute Austrittsgeschwindigkeit c_2 und die Ausflußenergie $\frac{c_2^2}{2g}$.

4. Die Luftpumpen.

„Nasse“ Luftpumpen fördern aus dem Kondensator das Luft- und Dampfgemisch, sowie das Kondensat und mitunter auch das Kühlwasser. „Trockene“ Luftpumpen fördern nur das Luft- und Dampfgemisch.

a) Die nassen Luftpumpen. Sekundl. Fördervolumen für 1 kg Dampf bei Förderung auch der Kühlwassermenge:

$$V_e = n + 1 + v.$$

(vgl. S. 1036).

$$V_e = \eta \cdot O \cdot c \quad \text{bei doppelwirkenden Pumpen,}$$

$$= 2 \cdot \eta \cdot O \cdot c \quad \text{bei einfachwirkenden Pumpen.}$$

$\eta =$ Lieferungsgrad = 0,75 bis 0,85.

Auf 1 kg Dampf werden in Kolbendampfmaschinen 2 bis 3 ltr Luft von atm. Spannung gerechnet, die sich im Kondensator nach dem Daltonschen Gesetz auf die Spannung $l = p_0 - d$ ausdehnt, sodaß pro 1 kg Dampf:

$$v = \frac{2 \text{ bis } 3}{p_0 - d} \text{ ltr.}$$

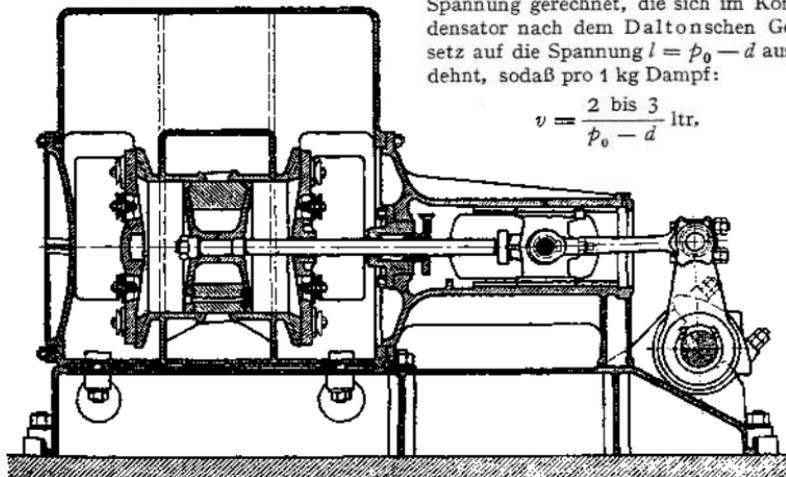


Fig. 9.

wobei die geringe Temperaturerhöhung eindringender Luft unberücksichtigt bleibt.

Nach Stodola kann die Luftmenge bei Dampfturbinen auf 3 bis 5 kg in der Stunde für je 1000 KW Leistung geschätzt werden. (Versuche von Josse an einer 300 KW-Parsonsturbine ergaben 0,25 kg/st. Luft auf 3000 kg/st. Dampf.)

Vielfach wird das stündl. Pumpenvolumen V_e' gleich dem 120fachen der niederzuschlagenden Dampfmenge gewählt. Ist D = stündl. Dampfmenge in kg, so folgt:

$$V_e' = \frac{D}{n} \quad \text{bei doppelwirkenden (da } 2n \cdot 60 \cdot V_e' = 120 D),$$

$$V_e' = 2 \frac{D}{n} \quad \text{bei einfachwirkenden Luftpumpen.}$$

Für die nur Kondensat fördernden Luftpumpen der Oberflächenkondensation genügt ein Hubvolumen gleich dem 45fachen der stündlichen Dampfmenge.

Mittel zur Erhöhung des räumlichen Wirkungsgrades: Verbundwirkung. Überströmung und Ausfüllung des schädlichen Raumes mit Kondensat.

Bei den nassen Luftpumpen wird der Saugwiderstand durch Anordnung von Schlitzten (nach Edwards) statt Saugventilen wirksam verringert.

In den Fig. 9—13 sind Ausführungen stehender und liegender Luftpumpen wiedergegeben. Bauart Fig. 9 ist auch zum unmittelbaren Antrieb durch die verlängerte Dampfkolbenstange geeignet. Fig. 10 zeigt die Doerffelsche Verbundpumpe; der Raum über dem Kolben ist mit einem Luftsack ausgefüllt. Der Inhalt dieses Luftsacks dehnt sich beim Abwärtsgang des Kolbens aus, die Spannung über dem Kolben nimmt beträchtlich

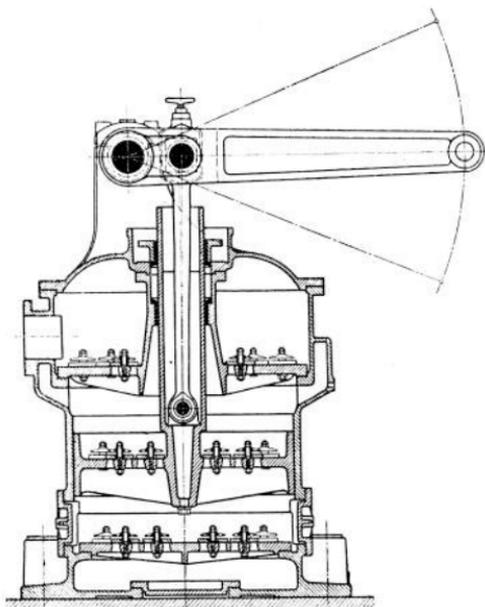


Fig. 10.

ab, und die Kolbenventile öffnen früher. Der Enddruck unter dem Kolben wird dadurch verringert, und die Expansion aus dem schädlichen Raum ist nur geringfügig. Die Ausführungen nach Fig. 9, 11 bis 13 arbeiten mit Saugschlitzten.

Fig. 13 zeigt die Brown-Kuhn-Pumpe. Beim Abwärtsgang des Kolbens steigt der äußere Wasserspiegel, das Wasser fließt durch die Schlitzte in den Innenraum, um bei Aufwärtsgang durch die Druckventile ausgestoßen zu werden. In der tiefsten Stellung nach Fig. 14a muß zwischen oberer Gehäusewand und äußerem Wasserspiegel ein gewisser Spielraum s_1 bleiben. Um mit Sicherheit eine Rückströmung des im Hohlraum des Kolbens befindlichen Wassers durch die Schlitzte in den äußeren Pumpenraum zu verhindern, muß beim Abschluß der Schlitzte durch den aufwärtsgehenden Kolben $y_2 < s_1$ sein (siehe 13 und 14 c.), d. h. der Wasserspiegel muß um einen bestimmten Betrag vom oberen Kolbenrand abstehen.

Die Berechnung der Schlitzpumpe bezweckt in der Hauptsache die Feststellung der Zeit und der Druckhöhe beim Abfließen des Wassers durch die Schlitz nach dem Verdrängerraum. Die Bewegung des äußeren Wasserspiegels gegenüber dem oberen Kolbenrand ist festzustellen¹⁾.

Es bezeichnen :

F_1 bis F_3 die zu den D rech messern D_1 bis D_3 gehörigen Querschnitte,

V den Luftinhalt des Raumes zwischen den Ventilplatten und dem mit Wasser ausgefüllten Kolben bei dessen oberer Totlage,

W die pro Hubfortzuschaffende Wassermenge,

L die pro Hubfortzuschaffende Luft- und Dampfmenge,

s die Entfernung von Oberkante der Schlitz bis zur höchsten Stellung des Kolbenrandes.

Gibt der Kolben aus oberer Totlage um y abwärts, so wird Volumen Fy verdrängt und im äußeren Pumpenraume steigt das Wasser um y_1 .

$$y_1 (F_2 - F_4) = y \cdot F :$$

$$y_1 = \frac{F}{F_2 - F_4} \cdot y .$$

Für $y_{\max} = 2r$ wird

$$y_{1\max} = \frac{F}{F_2 - F_4} \cdot 2r .$$

Wird e_1 (Fig. 11a) gewählt, so ist die tiefste Lage $e_1 + y_{1\max}$ des äußeren Wasserspiegels und damit die Lage M_1 und M_2 der die Bewegung des äußeren Wasserspiegels wiedergebenden Sinuskurve M_1, M_2, M_3 bekannt, deren höchster Punkt M_2 dadurch gegeben ist, daß er um $e = e_1 - e_2$ tiefer liegt als die höchste Stellung des Kolbenrandes; e_2 folgt aus der Aufzeichnung.

Verzeichnung der Sinuskurve M_1, M_2, M_3 mit dem Radius

$$r_1 = \frac{F}{F_2 - F_4} \cdot r .$$

Bewegung des inneren Wasserspiegels. Bei der Abwärtsbewegung des Kolbens um y wird der Pumpenraum um Fy vergrößert. Es wird

$$F \cdot y = V + (F - F_4) \cdot y + (F_2 - F_3) \cdot z ; \quad z = \frac{F_2 \cdot y - V}{F_2 - F_3} .$$

Beim Aufwärtsgang des Kolbens ist das Luftvolumen V um den Betrag der eingeströmten Wassermenge W kleiner: $Fy - W = V + (F - F_4) \cdot y + (F_2 - F_3) \cdot z$.

$$z = \frac{F_2 \cdot y - V - W}{F_2 - F_3} .$$

Das Wasser reicht bis zu den Ventilen, wenn $F \cdot y = W$, also $y = \frac{W}{F}$ ist, womit die zum Beginn des Wasserdurchganges gehörige Kurbellage berechnet werden kann.

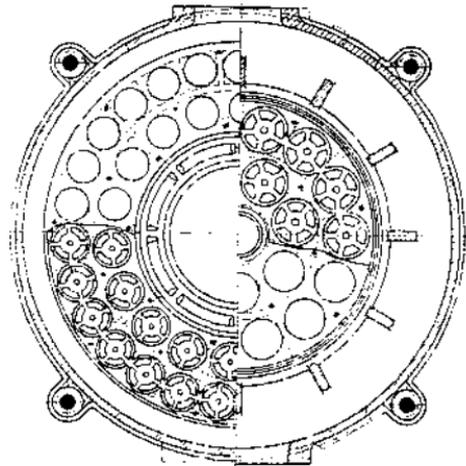
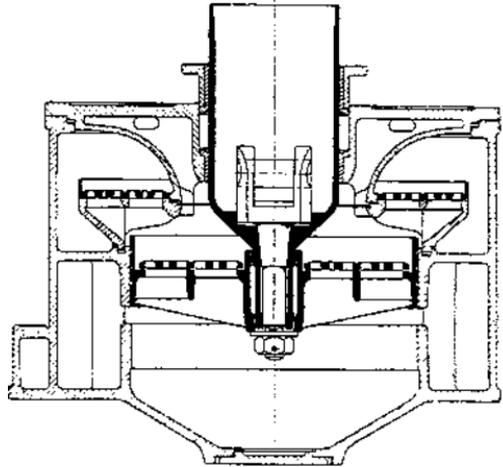


Fig. 11.

¹⁾ Nach Prof. Berg - Stuttgart, Z. Ver. deutsch. Ing. 1899 S. 92.

Gang der Berechnung. Bedeuten

i = Anzahl der Ventile,

f = freier Ventildurchgangsquerschnitt im Sitz,

c_m = mittlere Wassergeschwindigkeit,

T = Zeit des Wasserdurchganges,

$$\text{so wird } f = \frac{W}{i \cdot c_m \cdot T}.$$

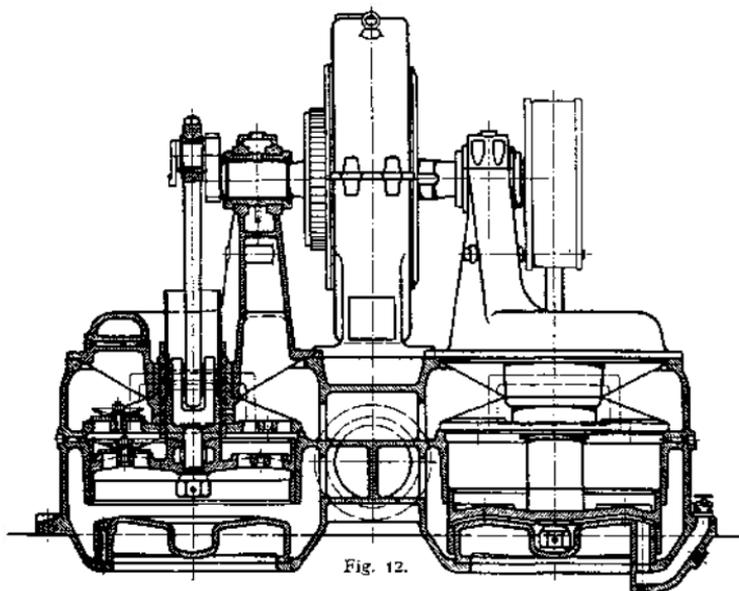


Fig. 12.

Damit ist der Ventilkreisdurchmesser D_1 gegeben, und es kann Kolbendurchmesser D gewählt werden. Es folgt s aus $F s = W + L$; $s = \frac{W + L}{F}$.

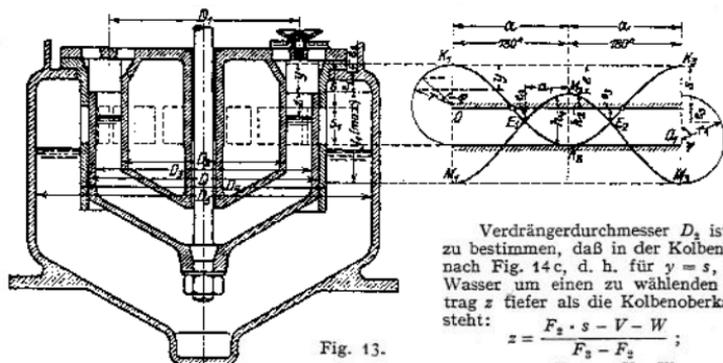


Fig. 13.

Verdrängerdurchmesser D_2 ist so zu bestimmen, daß in der Kolbenlage nach Fig. 14c, d. h. für $y = s$, das Wasser um einen zu wählenden Betrag z tiefer als die Kolbenoberkante steht:

$$z = \frac{F_2 \cdot s - V - W}{F_3 - F_2};$$

$$F_2 = \frac{F_3 \cdot z + V + W}{s + z}.$$

Schlitzhöhe s_1 ist anzunehmen, dann ist Kolbenhub $2r = s + s_1$, womit Kurve K_1, K_2, K_3 aufgezeichnet werden kann. Von Kurve M_1, M_2, M_3 ist Lage des Punktes M_2 bekannt, der um $e = e_1 + e_2$ tiefer liegt als Kolbenkante in oberer Totlage. Punkte E_1 und E_2 dieser Kurve müssen um den anzunehmenden Betrag e_2 tiefer als Schlitzoberkante liegen, damit vor und

nach Einstromung des Wassers die Luft übertreten kann. Radius r_1 so zu bestimmen, daß Sinuskurve durch M_2 , E_1 und E_2 geht:

$$r_1 = \frac{e_2 + s - e}{1 - \cos \psi}, \quad \psi = \frac{\alpha_1}{a} \cdot 180^\circ.$$

Gehäusedurchmesser D_3 folgt aus

$$r_1 = \frac{F}{F_3 - F_4} \cdot r; \quad F_3 = F \cdot \frac{r}{r_1} + F_4.$$

Einteilung der Einströmdauer von E_1 bis E_2 in kleine Zeitabschnitte t , während deren Dauer die Druckhöhen annähernd konstant sind.

$$w = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g \cdot (h_1^{\frac{3}{2}} - h_2^{\frac{3}{2}})} \cdot b \cdot t.$$

$\mu = 0,6$ = Ausflußkoeffizient, h_1 und h_2 folgen aus dem Diagramm Fig. 13. b = Breite aller Schlitze. Es muß sein $\Sigma w = W$. Trifft diese Beziehung nicht zu, so ist zu ändern.

Wassergeschwindigkeit c in den Ventilen. Aus $y = \frac{W}{F}$ folgt Kurbellage bei Beginn des Wasseraustrittes. Die zugehörige Kolbengeschwindigkeit hat die Größe (Fig. 13): $u = v \cdot \sin \varphi$, worin v = Kurbelzapfengeschwindigkeit.

$$i \cdot f \cdot c = F \cdot u; \quad c = \frac{F \cdot u}{i \cdot f}.$$

Fig. 12 zeigt die Tosische Verbund-Luftpumpe. Das Kondensat tritt durch einen durch Stege nicht verengten Ringraum zu. Fig. 15 zeigt die nur Luft und Kondensat fördernde Jossesse Pumpe. In der oberen Totlage fließen Kondensat und ein Teil der Luft in den Raum unterhalb des Kolbens. Beim Kolbenniedergang wird der Rest der Luft oben angesaugt. Kurz vor unterer Kolbentotlage legt der Kolben einen Umföhrungskanal frei, Wasser strömt von unten nach oben, dort den schädlichen Raum ausfüllend. Geringe Rückenexpansion der Luft aus dem schädlichen Raum.

Fig. 16 stellt den Luftzylinder der Oddie-Simplex-Luftpumpe, gebaut von der Maschinenfabrik Oddie in Oschersleben dar. Außer den üblichen Ventilen a , b , c sind noch besondere Hilfssaugeventile d vorgesehen, die ohne jede Federbelastung arbeiten. Das Saugrohr föhrt Dampf, Luft und Wasser in den Raum unter den Kolben, dagegen nur Dampf und Luft durch d über den Kolben. Durch Ventil d wird um so mehr angesaugt, je niedriger der Kondensatordruck ist, je später sich die auf etwa 0,3 Atm. eingestellten Ventile b öföfen. Während bei den gewöhnlichen Dreiventilpumpen der Wirkungsgrad infolge der Rückenexpansion aus dem schädlichen Raum mit abnehmender Luftleere sinkt, wird hier durch die Absaugung auf der oberen Kolbenseite der Wirkungsgrad annähernd konstant gehalten.

Diagramm dieser Pumpe Fig. 17. S_1 stellt die Saugperiode während des Aufwärtshubes, S_2 die während des Abwärtshubes dar.

In den nassen Luftpumpen erfolgt die Kompression isothermisch, da die Kompressionswärme der Luft sofort vom Wasser aufgenommen wird, ohne daß sich dessen Temperatur merklich erhöht. Der Druck des gleichzeitig im Luftpumpenzylinder anwesenden Wassers bleibt infolgedessen konstant, und es ist um die Luft zu komprimieren, da sich der Dampf der Kompression entsprechend niederschlägt. Sind Luft vom Teildruck l , Dampf vom Teildruck d zu verdichten, so braucht sonach die Luft nur von l auf $p - d$ gebracht zu werden, was für V cbm die Arbeit erfordert:

$$L = l \cdot V \cdot \ln \frac{p - d}{l}.$$

b) Die trockenen Luftpumpen. Da diese selbst bei sehr kleinen schädlichen Räumen infolge des großen Kompressionsverhältnisses nur mit geringem, räumlichen Wirkungsgrad arbeiten können, so werden sie fast ausschließlich mit Überströmung ausgeföhrt, womit jedoch ein Arbeitsverlust verbunden ist.

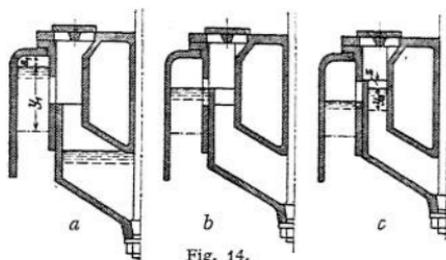


Fig. 14.

In der Nähe der Kolbentotlage werden beide Zylinderseiten durch einen Kanalschieber miteinander verbunden, und die hochgespannte Luft im schädlichen Raum strömt auf die Saugseite, dort den Anfangsdruck der Kompression erhöhend. Fig. 18 zeigt die Ausführung eines derartigen Schiebers. Die angesaugte Luft tritt durch den mittleren Kanal zu und wird durch die mit Druckventilen ausgeführten Durchlaßkanäle des Schiebers in den Schieberkasten ausgestoßen.

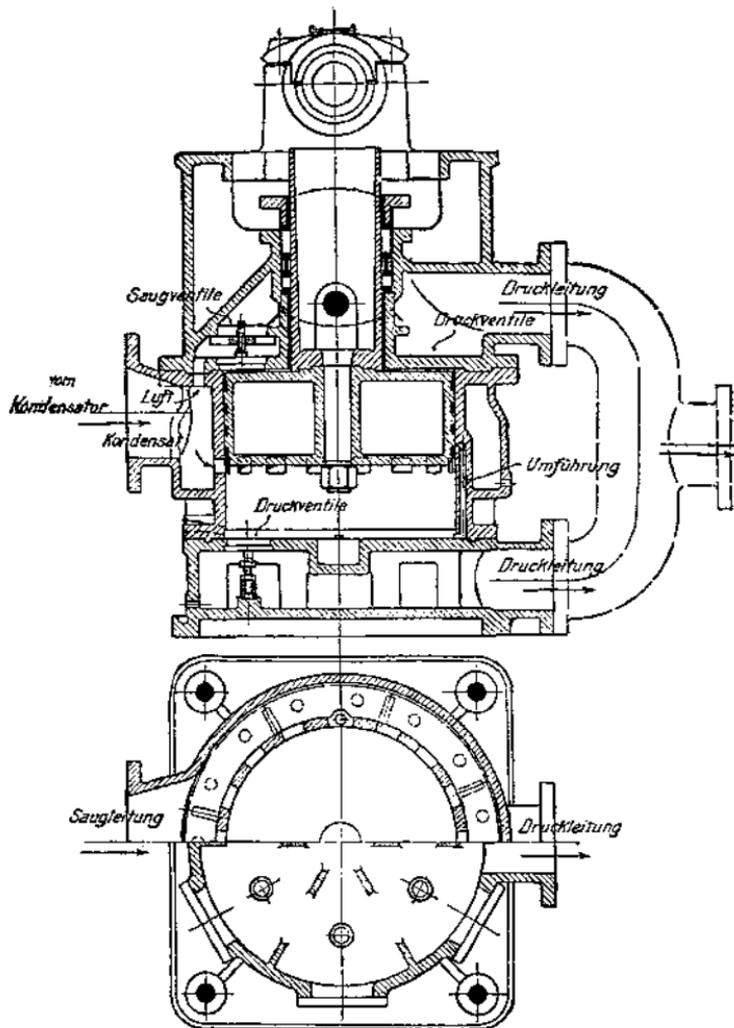


Fig. 15.

Nach K. Schmidt ist der theoretische Wirkungsgrad von der Saugspannung wie folgt abhängig.

Saugspannung:	0,02	0,03	0,05	0,1
Wirkungsgrad:	0,87	0,91	0,935	0,955.

c) Ausführung und Antrieb der Luftpumpen. Bei stoßendem Gang empfiehlt sich Anordnung von Schnüffelventilen. Die von diesen angesaugte Luft wird vor Eröffnung der Druckventile verdichtet, wodurch der Gang stoßfrei wird.

Der räumliche Wirkungsgrad wird verschlechtert. Beispiele entsprechender Diagramme siehe Fig. 19 und 20. In Fig. 19 ist der schädliche Raum besonders klein, infolgedessen plötzliches Anprallen des Wassers gegen die Druckklappen.

In Fig. 20 Änderung dieses Zustandes durch Öffnen der Schnüffelventile.

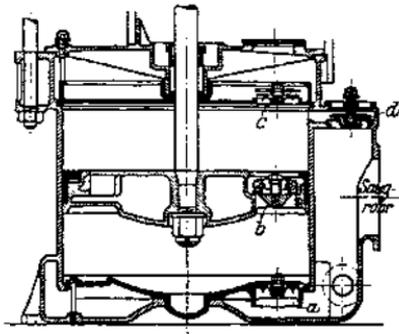


Fig. 16.

Baustoff der Ventillklappen: Gummi, besser Dermatine. Bedeuten:

O = Kolbenfläche der Luftpumpe,

c = mittlerer Kolbengeschwindigkeit,

f = engster Durchtritts-Querschnitt der Ventile,

v = zulässiger Geschwindigkeit in diesen,

μ = Kontraktionskoeffizient, so folgt:

$$\mu \cdot v \cdot f = O \cdot c.$$

Die Größe $\mu \cdot v$ ist abhängig von der Wasserfüllung, d. h. dem Verhältnis zwischen pro Hub beförderter Wassermenge und dem Hubraum der Pumpe:

Nach Prof. Grassmann ist für:

Füllung:	0,5	0,4	0,3	0,25	0,2	0,15	0,1	0,02
$\mu \cdot v$:	1,3	1,33	1,45	1,5	1,62	1,82	2,17	4,65

Für Dreiventilpumpen kann die Geschwindigkeit in den Kolben- und Saugventilen um 50 v. H. größer genommen werden, bei Schlitzpumpen sind Geschwindigkeiten von

$\mu \cdot v = 2,5$ m/sek wegen der guten Mischung von Wasser und Luft zulässig.

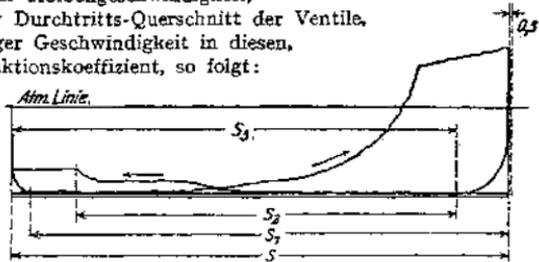


Fig. 17.

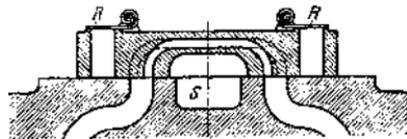


Fig. 18.

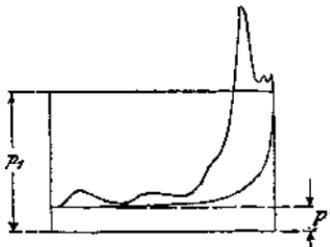


Fig. 19.

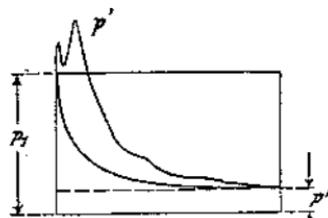


Fig. 20.

Wasserfüllung bei Mischkondensation: meist 0,25, bei trockenen Luftpumpen meist 0,02. Damit ist die Größe der Kolbengeschwindigkeit für stehende Pumpen mit Ventilen im Kolben bestimmt. Ist z. B. freie Ventilfläche = $\frac{1}{3}$ Kolbenfläche, so steigt mittlere Wassergeschwindigkeit auf das 3fache der Kolbengeschwindigkeit.

Anfangsbeschleunigung bei stehenden Pumpen kleiner als Erdbeschleunigung g , damit sich Wasser und Kolben nicht trennen.

Antrieb am einfachsten durch verlängerte Dampfkolbenstange bei Aufstellung der Luftpumpe über Maschinenhausflur. Hierbei muß Leitung zum Saugraum mit Steigung ausgeführt werden, wodurch Leitungsquerschnitt durch Wasser-Ansammlungen verengt wird. Größte Kolbengeschwindigkeit 2 bis 2,5 m/sek.

Besser Anordnung unter Maschinenhausflur. Geringere Saughöhe, fallende Dampfleitung unter Verringerung der Kolbengeschwindigkeit bei Antrieb mit Übersetzung von Kolbenstange, Kreuzkopf oder — wie meist üblich — vom Kurbelzapfen aus.

5. Abdampfleitung. Weiß macht Bemessung der Abdampfleitung abhängig vom Volumen des sekundlich durchströmenden Dampfes. Ist V = spez. Volumen des Dampfes bezogen auf Druck im Abdampfrohre, D = minutlicher Dampfverbrauch, so wird:

$$v \cdot \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{V \cdot D}{60} \quad \text{und mit} \quad V = \frac{1}{\gamma} :$$

$$d^2 = \frac{D}{47 \cdot \gamma \cdot v} \quad \text{Mit } v = 143 \sqrt{d} :$$

$$d^{\frac{5}{2}} = \frac{D}{6720 \cdot \gamma} ; \quad \gamma = 0,13 \text{ im Mittel:} \quad d^{\frac{5}{2}} = \frac{D}{873} .$$

Für lange Leitungen wird d nach dieser Formel bestimmt und sodann gesetzt:

$$d_e = \left(1 + \frac{l}{600}\right) \cdot d \quad (l = \text{Leitungslänge}).$$

Bei Turbinen wird der Überströmungsquerschnitt möglichst groß gewählt, der Kondensator nahe an die Turbine herangerückt, um Spannungsabfall auf den geringsten Betrag zu beschränken.

Ausrüstung der Abdampfleitung mit Sicherheitsventil, das bei steigendem Druck selbsttätig auf Auspuff umschaltet. Wechselventil, das bei Ausbesserungen, Verwendung des Dampfes zu Heizzwecken usw. Umstellung des Betriebes auf Auspuff gestattet, Schwimmervorrichtung, um Aufsteigen des Wassers in den Zylinder zu verhüten.

6. Entölung. Namentlich bei Oberflächenkondensation angebracht, um warmes Kondensat zur Kesselspeisung zu benutzen. Abscheidung des Öles:

1. Durch Abstehen in großen Gefäßen.
2. Durch Zusatz von Tonerde-Hydrat, Schwerspat usw., die im Wasser Flocken bilden, an die sich das Öl setzt.
3. Durch Filtration. Führung des Kondensates durch Schichten von Sand, Sägemehl, Koks usw.
4. Durch Richtungs- und Geschwindigkeitsänderung des Kondensates. Fig. 21.

7. Rückkühlung. In Anwendung bei geringen Kühlwassermengen. Das Kühlwasser macht einen Kreislauf, indem ihm die im Kondensator aufgenommene Wärmemenge immer wieder entzogen wird. Kühlung des Wassers durch „Rückkühlanlagen“, in denen Wasser und Luft in möglichst innige Berührung gebracht und erstere Wärme durch Verdunstung entzogen wird.

Zur Rückkühlung werden verwendet:

a) Kühlteiche. Anlage einfach. Wasserdichte Ausführung des Bodens. Kühlwirkung im Sommer gering. 1 PS/st. erfordert ungefähr 3 qm Grundfläche.

b) Streudüsen nach Koerting. Ein im Innern der Düse angebrachter Schraubengang gibt dem Wasser eine drehende Bewegung, so daß Zerstäubung durch die Fliehkraft eintritt. Aufstellung der Düsen über Behältern, in denen sich das zerstäubte Wasser sammelt. Entfernung der Düsen voneinander mindestens 1,5 m. Wasserdruck vor den Düsen ungefähr 1 Atm. Grundfläche für eine Düse von 10 mm Durchmesser 6 qm, für 18 mm Durchmesser 9 qm. Pumpenarbeit = 1,5 bis 2 v. H. der Maschinenarbeit.

c) Gradierwerke. In mehreren Stockwerken sind Reiser, Latten usw. angebracht, auf die das Wasser aus Kühltrögen fein verteilt herunterrieselt. Wasserstaub und Dunst für Nachbarschaft belästigend. Nach Weiß ist: $F = \frac{1}{4} V$, worin F = Ansichtsfläche, V = minutliche Luftmenge in cbm, um die verlangte Anzahl kg Wasser zu kühlen.

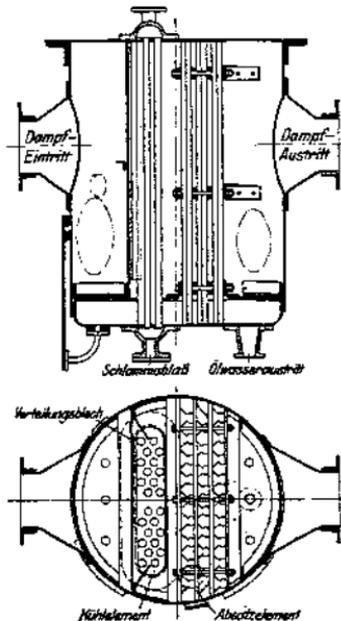


Fig. 21 (Balcke).

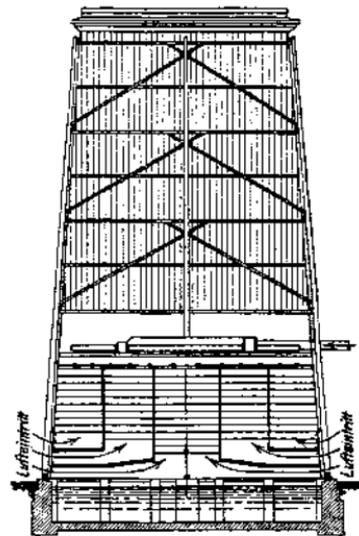


Fig. 22.

d) Kaminkühler. Fig. 22. Diese stellen die am häufigsten zu findende Rückkühlanlage dar. Ausführung in Holz, Mauerwerk, Beton oder Eisen. Nach Weiß ist $F = \frac{1}{4} V$, worin F = Grundfläche des Kühlers. Wasserkühlvorrichtung in etwa $\frac{1}{4}$ der Höhe eingebaut, aus Trögen, Rieselrinnen und Rieselböden bestehend. Bei sehr beschränktem Raum Unterstützung der Kamin-Wirkung durch Ventilatoren, wobei Kraftbedarf jedoch groß wird. (4,5 bis 6 v. H. der Maschinenleistung für Wasserhebung und Ventilator zusammen.)

Die größte Luftmenge steigt unmittelbar in der Nähe der Wandungen auf, während der Luftzug in Mitte Kühler sehr schwach ist. Je größer der Umfang im Verhältnis zum Querschnitt, desto besser Luftzufuhr und Kühlung, sonach sind Kühler mit schmalem, langem Grundriß günstig, besitzen jedoch zu geringe Standfestigkeit. Balcke-Bochum zerlegt deshalb den quadratischen Kühler in einzelne Zellen, von denen jede besondere Luftzuführung erhält. Fig. 23 zeigt in den Diagrammen die Verbesserung durch Zellenkühlung gegenüber dem gewöhnlichen Kaminkühler. Auch in den Zellen ist die Kühlung außen am stärksten bei erheblicher Abnahme in der Mitte.

e) Theorie der Rückkühler. Bedeuten:

L das für die Zeiteinheit durch den Kühler streichende Luftgewicht,

t_e und t_a die Eintritts- und Austritts-Temperatur der Luft,

v_e und v_a die zugehörigen spez. Luftvolumina $\left(v_e = \frac{R \cdot T_e}{p}\right)$,

λ_e und α_e die Sättigungsgrade des Gemisches,

λ_a und α_a die Gesamtwärme des in diesem enthaltenen Dampfes,

γ_e und γ_a die Gewichte für 1 cbm Dampf,

so ist die dem Kühlwasser im Kühler in der Zeiteinheit entzogene Wärmemenge:

$$W = L [c_p \cdot (t_a - t_e) + \alpha_a \lambda_a \gamma_a v_a - \alpha_e \lambda_e \gamma_e v_e],$$

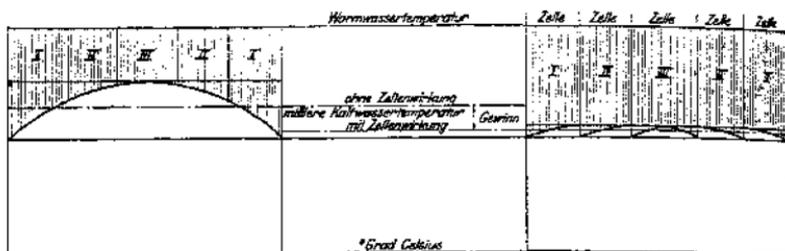


Fig. 23.

da nach dem Daltonschen Gesetz das Volumen v , von 1 kg Luft gleichzeitig vom Dampf erfüllt ist.

Die Verdunstung wird sonach wesentlich durch den Feuchtigkeitsgehalt der Luft beeinflusst. Mit wachsender Feuchtigkeit nimmt die Aufnahmefähigkeit der Luft für Wasserdünste ab.

Das physikalisch mögliche, tiefste Wärmeniveau, die „Kühlgrenze“, ist die von einem feuchten Thermometer angegebene, niedrigste Temperatur. (Träufeln von Wasser auf die einem Luftzuge ausgesetzten Leinwand-Umhüllung der Quecksilberkugel eines Thermometers, wodurch infolge der Verdunstung die Temperatur niedriger als die Lufttemperatur wird.)

Sind z. B. stündlich 10 000 kg Dampf zu kondensieren, so sind (bei $\lambda = 600$) 6 000 000 WE durch das Kühlwasser aufzunehmen und bei vierzigfacher Kühlwassermenge sind stündlich 400 cbm in Umlauf zu setzen. Die Breite der „Kühlzone“ ist dadurch mit $\frac{6\,000\,000}{40\,000} = 15^\circ\text{C}$ festgelegt. Diese

Kühlzone soll möglichst tief liegen. Während ein schlechter Kühler vielleicht zwischen 60 und 45° arbeitet, zeigt ein guter Kühler 40 und 25°. In Fig. 24 gibt die r -Linie die bei den angegebenen Temperaturen möglichen Kühlgrenzen an, im Abstand von 15° darüber liegt entsprechend die Linie $a\ b$ der tiefsten Warmwassertemperaturen. Der Abstand h der wirklich ermittelten Linien gibt ein Maß für den Gütegrad des Kühlers.

Nimmt die Belastung der Maschine ab, sinkt z. B. der Dampfverbrauch auf 8000 kg stündlich, so ist bei gleichbleibender Umlaufmenge $\frac{4\,800\,000}{40\,000} = 12^\circ$ die Breite der Kühlzone, deren Höhe jedoch unverändert bleibt.

Nimmt die Belastung der Maschine ab, sinkt z. B. der Dampfverbrauch auf 8000 kg stündlich, so ist bei gleichbleibender Umlaufmenge $\frac{4\,800\,000}{40\,000} = 12^\circ$ die Breite der Kühlzone, deren Höhe jedoch unverändert bleibt.

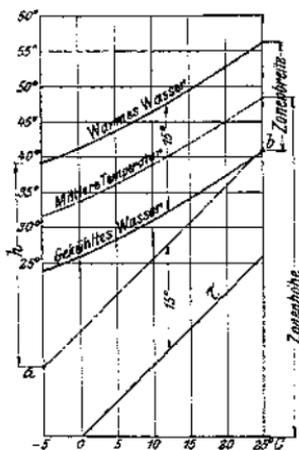


Fig. 24.

Wird jedoch in Anpassung an den neuen Beharrungszustand die Kühlwassermenge geändert, so daß wieder 40 l auf 1 kg Dampfentfallen, so stellt sich wieder die frühere Zonenbreite von 15° wieder ein; ihre Höhe ist jedoch kleiner geworden.

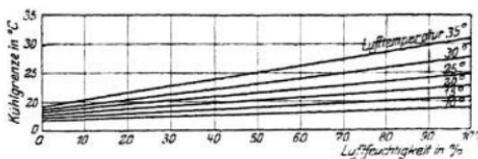


Fig. 25.

Fig. 25 zeigt den Zusammenhang zwischen Luftfeuchtigkeit, Lufttemperatur und Kühlgrenze für eine Abkühlung von 40 auf 20°.

Rohrleitungen.

Bearbeitet von H. Dubbel.

1. Dampfleitungen.

Der Dampf strömt den Kolbenmaschinen absatzweise zu; die mittlere Dampfgeschwindigkeit u wird auf das sek/Hubvolumen bezogen. Es folgt der Rohrquerschnitt:

$$f = \frac{0 \cdot c}{u}.$$

Für gesättigten Dampf wird $u = 25$ bis 30 m/sek,

für überhitzten Dampf $u = 40$ bis 55 m/sek.

Diese Werte können größer gewählt werden, wenn vor dem Zylinder in die Rohrleitung ein die Füllungsstöße mildernd und als Wasserabscheider dienender Ausgleichbehälter eingeschaltet wird.

Die Abdampfleitungen der Auspuffmaschinen werden mit $u = 25$ bis 30 m/sek berechnet. Bezüglich der Leitungen von Kondensationsmaschinen siehe S. 1048.

Für die Bemessung der Überströmleitung vom Hoch- zum Niederdruckzylinder ist im Mittel $u = 35$ m/sek, bezogen auf das sek/Niederdruckhubvolumen, einzusetzen.

Ist G das von der Dampfturbine sek. verbrauchte Dampfgewicht, v das zum Frischdampfdruck gehörige, spez. Volumen, so wird infolge der stetigen Strömung in der Turbinenleitung: $f = \frac{G \cdot v}{u}$.

Man wählt: für Satttdampf: $u = 25$ m/sek; für überhitzten Dampf: $u = 25$ m/sek bei kleinen Turbinen, $u = 30$ bis 35 m/sek bei mittelgroßen Turbinen, $u = 35$ bis 40 m/sek bei großen Turbinen.

Diese Werte gelten für die Leitung an der Maschine, also zwischen Wasserabscheider und Regelorgan. Für die Leitung vom Kessel zum Wasserabscheider werden um 5 bis 10 m/sek höhere Geschwindigkeiten zugelassen¹⁾.

Bei Leitungen von größerer Länge ist zu beachten, daß der Wärmeverlust mit dem Leitungsdurchmesser zunimmt, während der Spannungsabfall abnimmt, so daß vermittelt werden muß.

Nach Gutermuth hat der Druckverlust die Größe (in kg/qcm):

$$z = \beta \cdot \gamma \cdot \frac{l}{d} \cdot u^2$$

¹⁾ Nach dem Bericht von Prof. Dr. Klingenberg (Z. Ver. deutsch. Ing. 1911, S. 2128) über das Märkische Elektrizitätswerk hat die A. E. G. in diesem eine höchste Dampfgeschwindigkeit von 80 m/sek zugelassen. Das von derselben Firma erbaute Transvaal-Kraftwerk zeigt 70 m/sek Dampfgeschwindigkeit bei vollem, 50 m/sek bei normalem Betrieb.

Hierin bedeutet:

- γ das spez. Dampfgewicht,
 l die Leitungslänge in m,
 d den Leitungsdurchmesser in m,
 β den Leitungswiderstand.

Nach Versuchen von Eberle¹⁾ ist $\beta = \frac{10,5}{10^8}$. Der Widerstand eines Ventils kommt dem Verlust in 17 m, der eines Krümmers dem Verlust in 12 m gerader Rohrleitung gleich. Wärmeverlust in der nackten Leitung:

$$Q_n = F \cdot k \left(t_d - \frac{x}{2} - t_a \right) = G_s \cdot c_{pm} \cdot x$$

- F = Leitungsfläche in qm,
 x = Temperaturverlust in der Leitung,
 t_d = Dampftemperatur am Anfang der Leitung,
 t_a = Lufttemperatur,
 G_s = stündl. Dampfmenge,
 k = Ziffer des Wärmeüberganges zwischen Dampf und Luft,
 c_{pm} = mittl. spez. Wärme für das Temperaturgebiet t_d bis t_n , wenn t_n = Dampftemperatur am Ende der Leitung.
 x ist zunächst zu wählen, worauf c_{pm} zu bestimmen und k aus folgender Zahlentafel zu entnehmen ist.

Der Wärmeverlust eines Ventils ist dem von 1 m Leitung gleichzusetzen.

Wärmeverlust in der umhüllten Leitung (für 1 qm Oberfläche der nackten Leitung):

$$Q_i = \frac{t_d - \frac{x}{2} - t_a}{\frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{k'} \cdot \frac{d_2}{d_3} + \frac{d_1}{2\lambda} \cdot \ln\left(\frac{d_3}{d_2}\right)} = c_{pm} \cdot G_s \cdot x$$

- α_1 = 150 = Übergangsziffer vom Dampf zur Rohrwand,
 k' = Übergangsziffer von der Umhüllung zur Luft,
 λ = Wärmeleitfähigkeit der Umhüllung,
 d_1 = innerer Rohrdurchmesser in m,
 d_2 = äußerer Rohrdurchmesser in m,
 d_3 = äußerer Durchmesser der Umhüllung in m.

Zahlentafel der Werte k , λ und k' .

Dampf-temperatur	k für nackte Leitung	λ der umhüllten Leitung	k' der umhüllten Leitung
100	11,8	0,089	5,7
125	12,4	0,094	5,7
150	13,2	0,100	5,8
175	14,0	0,104	5,9
200	14,8	0,113	6,2
225	15,7	0,117	6,4
250	16,5	0,122	6,6
275	17,5	0,130	6,9
300	18,5	0,136	7,1
325	19,5	0,140	7,3
350	20,5	0,146	7,5
375	21,7	0,152	7,8
400	23,0	0,158	8,1

Ist Q_n der Wärmeverlust der nackten Leitung, Q_i der Wärmeverlust derselben, aber (auch an Flanschen und Ventilen) vollständig umhüllten Leitung, so berechnet sich die Wärmesparnis durch die Umhüllung zu:

$$\eta = \frac{Q_n - Q_i}{Q_n}$$

Ist die sonst umhüllte Leitung an den Flanschen und Ventilen frei und verursacht deren Nichtisolierung den Verlust Q_n' , so entsteht für den vorliegend gedachten Fall ein Mehrverlust von der Größe $\eta \cdot Q_n'$ und der Gesamtverlust der umhüllten Leitung mit nackten Flanschen und Ventilen beträgt $Q_i + \eta \cdot Q_n' = G_s \cdot x \cdot c_{pm}$, woraus x berechnet werden kann.

Anordnung der Rohrleitung. Zweckmäßig mit Gefälle nach Maschine hin. Bei Gefälle nach dem Kessel stört die Strömung des Dampfes den Wasserabfluß, und der Dampf steht dauernd mit der Wasseroberfläche in Berührung.

¹⁾ Z. Ver. deutsch. Ing. 1908, S. 481 u. f.

Absperrventil am Kessel und an Maschine; vor dem Zylinder ist ein durch Querschnittserweiterung oder durch Zentrifugalkraft wirkender Wasserabscheider anzurorden, um bei der Inbetriebsetzung auch von Heißdampfmaschinen das während der Betriebspause durch Niederschlag entstandene Wasser abzuleiten. Heißdampf kondensiert erst dann, wenn die Wandungtemperatur die Sättigungstemperatur unterschreitet, doch zeigen auch sorgfältig isolierte Heißdampfleitungen durch Abscheider abzuleitende Wassermengen von 0,3 bis 0,5 v. H., die vielleicht aus dem Dampfraum des Kessels durch den Überhitzer mitgerissen wurden.

Bezüglich der Ausführung der Leitung siehe S. 730.

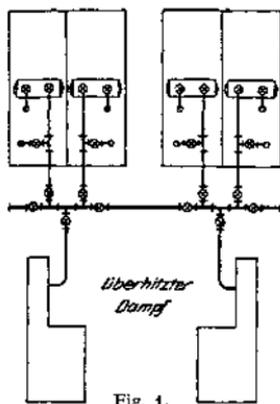


Fig. 1.

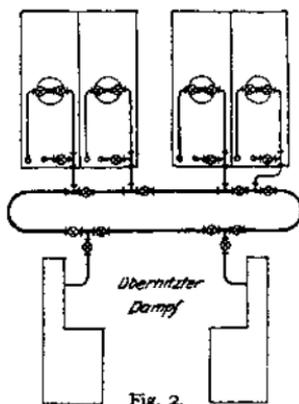


Fig. 2.

Bei Speisung mehrerer Maschinen von mehreren Kesseln ist die Leitung so anzuordnen, daß

1. der Dampf jedes Kessels jeder beliebigen Dampfmaschine zugeführt werden kann,
2. Ausschaltung schadhafter Stellen ohne Störung des Gesamtbetriebes möglich wird.

Diese Bedingungen werden durch Anordnungen nach Fig. 1 bis 3 erfüllt. Fig. 1. Einfache Sammelleitung. Fig. 2. Ringleitung. Fig. 3. Doppelte Sammelleitung¹⁾.

In Fig. 2 bewegen sich in der Längsrichtung der Ringleitung größere Dampfmen gen als in Fig. 1, daher größere Querschnitte und Abkühlungsverluste. Die einfache Sammelleitung hat hingegen den Nachteil, daß bei Schadhafwerden einer Stelle die Maschinen- und Kesselanlage in zwei nicht mehr durch die Leitung verbundene Hälften getrennt wird.

In Fig. 2 kann durch die in die Ringleitung eingeschalteten Ventile jede schadhafte Stelle abgeschlossen werden. Anlagen nach Fig. 3 verbilligen sich, da in die doppelte Sammelleitung keine Ventile eingebaut werden.

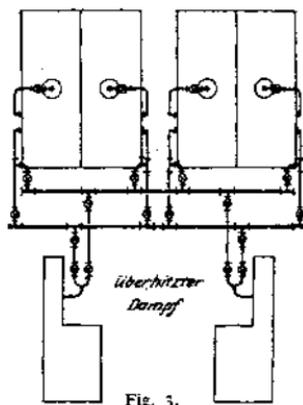


Fig. 3.

2. Luftleitungen für Kompressoren.

Die Rohranschlüsse der Kompressoren werden für folgende Geschwindigkeit (u_1 für Ansaugen, u_2 für Fortdrücken), bezogen auf das sek. Hubvolumen $O \cdot c$, berechnet:

¹⁾ Stahl, Z. Ver. deutsch. Ing. 1903, S. 4171.

für kleine Kompressoren:	$u_s = 12$ m/sek,
	$u_d = 20$ „
für mittelgroße Kompressoren:	$u_s = 16$ „
	$u_d = 25$ „
für sehr große Kompressoren:	$u_s = 20$ „
	$u_d = 30$ „
für sehr große Gebläsemaschinen:	$u_s = 20$ „
	$u_d = 25$ bis 30 m/sek.

Die Saugleitungen der Turbokompressoren werden mit $u_s = 18$ bis 23 m/sek, bezogen auf das maximale sek. Ansaugevolumen, berechnet. Die Druckleitungen erhalten bei den üblichen Drücken einen Querschnitt, der 15 bis 20 v. H. (annähernd dem Kompressionsverhältnis entsprechend) desjenigen der Saugleitung beträgt.

Bei Leitungen von großer Länge ist wieder der Druckverlust z zu berücksichtigen.

$$z = \beta \cdot \gamma \cdot \frac{l}{d} \cdot u^2.$$

Hierin ist nach Fritzsche¹⁾:

$$\beta = \frac{0,0602}{d^{0,269} \cdot (\gamma \cdot u)^{0,148}}, \quad d \text{ in mm.}$$

3. Leitungen der Gasmaschinen.

a) Kleingasmaschinen. Ist der Anteil der Luft am angesaugten Volumen groß, wie bei Ölmaschinen, so wählt man $u = 15$ bis 20 m/sek für kürzere, $u = 10$ m/sek Luftgeschwindigkeit für längere Leitungen (> 10 m). Ist hingegen der Anteil des Brennstoffes am Saugvolumen groß, wie bei armen Gasen, so kann mit dem doppelten u gerechnet werden. Häufig wird hierbei der Gasleitungsquerschnitt gleich Luftleitungsquerschnitt gewählt. Bei Sauggasanlagen ist die mögliche Verengung der Gasleitung durch Staub und Teer zu berücksichtigen. Geschwindigkeit in der Auspuffleitung: $u = 16$ bis 20 m/sek. Sämtliche Werte beziehen sich auf das sek. Hubvolumen.

Saugtöpfe in der Luftleitung wirken als Schalldämpfer und halten Wasser, Verunreinigungen usw. zurück (Saugtopfinhalt meist = 5 bis 6fachem Hubvolumen). In der Auspuffleitung sind Auspufftöpfe (Inhalt = 6- bis 8fachem Hubvolumen) anzuordnen, die ebenfalls als Schalldämpfer wirken. Die starke Längenausdehnung der Auspuffleitung ist bei deren Lagerung zu beachten. Die Kraftgasleitung ist nach Güldner mit Neigung zur Maschine hin zu verlegen. Entwässerung vor der Maschine durch geräumige Gassammler, die gleichzeitig als Dämpfungsmittel gegen Schwingungen wirken.

b) Großgasmaschinen. Es empfehlen sich folgende Mittelwerte:

20 m/sek in der Luftsaugleitung, 35 bis 37 m/sek in der Gaszuleitung bei Einschaltung eines größeren Ausgleichskessels und einem Gasdruck von 50 bis 100 mm Wassersäule. 23 m/sek in der Auspuffleitung.

Bei den Zweitaktmaschinen beträgt die Geschwindigkeit in der Auspuffleitung 10 bis 15 m/sek; die Zuleitungen der Ladepumpen werden mit 20 m/sek für Luft und 30 m/sek für Gas berechnet. Sämtliche Werte beziehen sich auf das sek. Hubvolumen des Arbeitszylinders, bzw. der Ladepumpen.

Ausführung der Gaszuleitungen mit Reinigungsklappen, die gleichzeitig als Sicherheitsventile auszubilden sind. Dämpfung der Schwingungen durch Gaskessel oder Drosselvorrichtungen vor der Maschine.

Auspuffleitungen von den Ventilen sollen tangential in die Hauptleitung einmünden. Da bei doppeltwirkenden Viertaktmaschinen zwei Auspuffhübe aufeinanderfolgen, also bei Vorausströmung Auspuffgase von hohem Druck auf die andere Kolbenseite gelangen können, so sind die Rohrleitungen mit Gaskesseln, oder getrennt, oder mit Düsen anzuordnen, welche die Abgase der anderen

¹⁾ Z. Ver. deutsch. Ing. 1908 S. 81.

Seite herausaugen. Häufig Einspritzung von Wasser in die Rohrleitung zur Verkleinerung des Gasvolumens und des Auspuffgeräusches. Ausgleich der Druckstöße durch Wasserverdrängung nach Dorfs.

Druckschwankungen in der Saugrohrleitung von Kompressoren und Gasmaschinen können eine günstige Wirkung ausüben, indem sie durch Drucksteigerung am Ende des Saughubes den räumlichen Wirkungsgrad erhöhen. Bei Gasmaschinen kann aber auch die Gefahr unrichtiger, vom Regler nicht mehr beherrschter Gemischbildung eintreten. Derartige Schwankungen sind nach Untersuchungen von Sommerfeld-Debye, die durch Versuche von Voissel¹⁾ bestätigt wurden, als Longitudinalschwingungen aufzufassen. Es besteht die Beziehung:

$$m \cdot \frac{n}{60} = (2k + 1) \cdot \frac{a}{4l},$$

worin l = Saugrohrlänge, n = kritischer Umlaufzahl, k = Null oder eine beliebige, ganze Zahl ist, m = Periodenzahl der vorherrschenden Einzelwelle für eine Kurbeldrehung, a = Schallgeschwindigkeit.

Es ist $m = 1, 2, 4, 6, 8 \dots$ beim einfachwirkenden Kompressor,
 $m = 2, 4, 6, 8 \dots$ „ doppeltwirkenden Kompressor,
 $m = 1, 2, 3, 4, 5 \dots$ „ einfachwirkenden Viertaktmotor,
 $m = 1, 3, 4, 5 \dots$ „ doppeltwirkenden Viertaktmotor.

4. Wasserleitungen für Pumpen.

Für Pumpen ohne Windkessel ist der Leitungsquerschnitt $f = \frac{0 \cdot c}{u}$, für Pumpen mit Windkessel wird $f = \frac{Q}{u}$, worin Q = sek. Wassermenge.

Durchschnittlich $u_s = 0,8$ bis 1 m/sek, bei kleiner Saughöhe und kurzer Leitung kann u_s größer gewählt werden. $u_d = 1,0$ bis $2,0$ m, bei größeren Druckhöhen mehr.

Niederdruckzentrifugalpumpen $u_s = 2$ bis $2,5$ m/sek, $u_d = 2,5$ bis 3 m/sek.

Hochdruckzentrifugalpumpen $u_s = 2$ bis $2,5$ m/sek, $u_d = 3$ bis $3,5$ (bis 4) m/sek. (Zahlentafel S. 1056 gibt Geschwindigkeiten an.)

Für lange Leitungen ist nach Weisbach die Widerstandshöhe in m Wassersäule:

$$h = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{u^2}{2g},$$

worin nach H. Lang für die bei Pumpen vorkommenden Geschwindigkeiten für λ gesetzt werden kann:

$$\lambda = a + \frac{b}{\sqrt{u \cdot d}}.$$

Für glatte Leitungen ist: $a = 0,020$, $b = 0,0018$ (l , d , u in m).

Besondere Leitungswiderstände.

Kniestück nach Fig. 4 mit kreisförmigem Querschnitt.

$$\text{Reibungshöhe } h = \zeta \cdot \frac{u^2}{2g}, \text{ worin } \zeta = \sin^2 \frac{\delta}{2} + 2 \cdot \sin^4 \frac{\delta}{2}.$$

Es entspricht $\delta = 20^\circ \quad 40^\circ \quad 60^\circ \quad 80^\circ \quad 90^\circ$

0,046 0,139 0,364 0,740 0,984



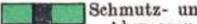
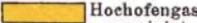
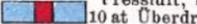
Fig. 4.



Fig. 5.

Kniestück nach Fig. 5; für $r \geq d$ wird $\zeta = 0,131 + 0,163 \left(\frac{d}{r}\right)^{3,5}$.

¹⁾ Z. Ver. deutsch. Ing. 1912, S. 720.

Einheitsfarben zur Kennzeichnung von Rohrleitungen in industriellen Betrieben		
Grundfarben	Bezeichnung der Einzelleitungen.	
Wasser	 Nutzwasser	 Salzwasser (Gefrieranlagen usw.)
	 Schmutz- und Abwasser	 Warmwasser
	 Presswasser	 Spülversatz
Gas	 Hochofengas, gereinigt	 Leuchtgas und Koksofengas
	 Hochofengas, roh	 Wassergas
	 Generatorgas	 Ölgas und Azetylgas
Luft	 Gebläseluft usw.	 Pressluft über 10 at Überdruck
	 Pressluft, bis 10 at Überdruck	 Heissluft
Dampf	 Dampf, bis 2 at Überdruck (Heizdampf)	 Dampf, überhitzt
	 Dampf, über 2 at Überdruck	 Abdampf, bis 2 at Überdr. u. Kondensationswasser
Säure	 Säure	 Säure, konzentriert
Lauge	 Lauge	 Lauge konzentriert
Öl	 Öl	 Teeröl
Teer	 Teer	
Vakuum	 Vakuum	

Für ($d : r$) = 0,4 0,6 0,8 1,0 1,2 1,4 1,6 1,8 2,0
 wird $\zeta = 0,138$ 0,158 0,206 0,294 0,440 0,661 0,977 1,408 1,979

Angenäherte Werte werden durch die nachfolgenden Zahlentafeln nach A. Borsig, Berlin-Tegel, erhalten.

Beispiel: Es sei die Gesamtwiderstandshöhe einer Kreislpumpe zu bestimmen, die minutlich 3450 l Wasser durch eine Leitung von 27 m Länge 2,2 m hoch ansaugen und auf 12,5 m fördern soll; die Leitung besitzt außer einem Saugkorb mit Rückschlagklappe, einem Wasserschleber und einem Rückschlagventil in der Druckleitung noch vier normale rechtwinklige Krümmen.

Geometrische Förderhöhe: $H = 2,2 + 12,5 = 14,7$ m.

Nach der Zahlentafel entspricht der Wassermenge eine Geschwindigkeit von 2,40 m/sek. Hierbei ist die Geschwindigkeitshöhe $h_v = 0,294$ und die Rohrwiderstandshöhe $h_r = 3,50$ m für 100 m Leitungslänge.

$$\begin{aligned} \text{Gesamtwiderstandshöhe } h_z' &= h_v' + h_w' = 0,27 h_r + h_c(4 \cdot h_2 + 1 \cdot h_3 + 1 \cdot h_4 + 1 \cdot h_5) \\ &= 0,27 \cdot 3,5 + 0,294(4 \cdot 0,162 + 0,09 + 5,6 + 6,0) = 4,6 \text{ m.} \end{aligned}$$

Mithin manometrische Förderhöhe: $H = H + h_c + h_z' = 14,70 + 0,294 + 4,6 = 19,60$ m.

Tafel der Wassermengen Q und des Druckhöhenverbrauches in Rohrleitungen.

c in m in der Sekunde	$h_c = \frac{c^2}{2g}$ in m W. S.	Q Liter in der Minute h_r m	Innerer Rohrdurchmesser in mm										
			40	50	60	70	80	90	100	125	150	175	200
0,50	0,013	Q	37,7	58,9	84,8	115,5	150,8	190,9	235,6	368,1	530,1	721,6	942,5
		h_r	0,855	0,708	0,590	0,506	0,443	0,394	0,354	0,283	0,236	0,203	0,177
0,60	0,018	Q	45,2	70,7	101,8	138,6	181	229	282,7	441,8	636,2	865,9	1131
		h_r	1,222	0,977	0,814	0,698	0,611	0,542	0,489	0,391	0,326	0,279	0,244
0,70	0,025	Q	52,8	82,3	118,7	161,6	211,1	267,2	329,9	515,4	742,2	1010	1320
		h_r	1,606	1,285	1,071	0,918	0,803	0,713	0,643	0,514	0,428	0,367	0,321
0,80	0,033	Q	60,3	94,2	135,7	184,7	241,3	305,4	377	589	844,2	1155	1508
		h_r	2,038	1,630	1,359	1,165	1,019	0,906	0,815	0,652	0,543	0,466	0,408
0,90	0,041	Q	67,9	106	152,7	207,8	271,4	343,5	424,1	662,7	954,3	1299	1697
		h_r	2,517	2,013	1,678	1,438	1,258	1,119	1,007	0,803	0,671	0,576	0,503
1,00	0,051	Q	75,4	117,8	169,7	230,9	301,6	381,7	471,2	736,3	1060	1443	1885
		h_r	3,042	2,433	2,028	1,738	1,521	1,354	1,217	0,973	0,811	0,696	0,608
1,25	0,080	Q	94,2	147,3	212,1	288,6	377	477,2	589,4	920,4	1325	1804	2356
		h_r	4,553	3,643	3,036	2,602	2,277	2,027	1,824	1,457	1,214	1,042	0,911
1,50	0,115	Q	113,1	176,7	254,5	346,3	452,4	572,6	706,9	1105	1590	2163	2827
		h_r	6,345	5,076	4,230	3,625	3,172	2,816	2,538	2,030	1,692	1,448	1,269
1,75	0,156	Q	131,9	206,2	296,9	404,1	527,8	668	824,7	1289	1856	2526	3299
		h_r	8,413	6,731	5,609	4,808	4,207	3,747	3,365	2,592	2,244	1,927	1,683
2,0	0,204	Q	150,8	235,6	339,9	461,8	603,2	763,4	942,5	1473	2121	2886	3770
		h_r	10,750	8,599	7,166	6,143	5,375	4,780	4,300	3,440	2,867	2,458	2,150
2,5	0,319	Q	188,5	294,5	424,1	577,3	754	954,3	1178	1841	2651	3608	4712
		h_r	16,240	12,990	10,830	9,279	8,119	7,221	6,495	5,116	4,330	3,714	3,248
3,0	0,459	Q	226,2	353,4	508,9	692,7	904,8	1145	1414	2209	3181	4330	5655
		h_r	22,720	18,180	15,150	12,980	11,360	10,140	9,089	7,271	6,059	5,217	4,545

Koeffizienten k für den Druckhöhenverbrauch $h_w = k \cdot h_c$ in normalen Rohrkümmern und Absperrorganen.

Normale Rohr- krümmen	135°	k_1	0,067	0,068	0,069	0,070	0,071	0,073	0,074	0,076	0,078	0,081	0,084
	90°	k_2	0,135	0,136	0,138	0,140	0,142	0,145	0,148	0,152	0,156	0,162	0,166
Norm. Rohrschieber offen		k_3	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,09	0,09	0,09	0,09	0,08
Normale Saugklappe		k_4	12,0	10,0	9,0	8,5	8,0	7,5	7,0	6,5	6,0	5,6	5,2
Normales Rück- schlagventil		k_5	22,0	18,0	15,0	12,0	10,0	9,0	8,0	7,0	6,5	6,0	5,5

Tafel der Wassermengen Q und des Druckhöhenverbrauches in Rohrleitungen.

c in m in der Sekunde	c_s $= \frac{2g}{\pi \cdot \text{in}^2 \cdot \text{s}}$	Q Liter in der Min. h_r in	Innerer Rohrdurchmesser in mm												
			225	250	275	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750
0,50	0,013	Q	1193	1473	1782	2121	2886	3770	4773	5891	7128	8482	9955	11546	13254
		h_r	0,157	0,142	0,129	0,118	0,101	0,089	0,079	0,071	0,064	0,059	0,055	0,051	0,047
0,60	0,018	Q	1431	1767	2138	2545	3464	4524	5726	7069	8553	10179	11946	13855	15904
		h_r	0,217	0,195	0,178	0,163	0,140	0,122	0,109	0,098	0,089	0,081	0,075	0,070	0,065
0,70	0,025	Q	1670	2062	2495	2969	4041	5278	6680	8247	9979	11875	13937	16164	18555
		h_r	0,279	0,257	0,233	0,214	0,183	0,161	0,143	0,129	0,117	0,107	0,099	0,092	0,086
0,80	0,033	Q	1909	2356	2851	3393	4618	6032	7634	9425	11404	13572	15928	18473	21206
		h_r	0,363	0,326	0,297	0,272	0,233	0,204	0,181	0,163	0,148	0,136	0,126	0,117	0,109
0,90	0,041	Q	2147	2651	3207	3817	5195	6783	8588	10603	12829	15268	17919	20782	23856
		h_r	0,448	0,403	0,366	0,335	0,287	0,252	0,224	0,201	0,183	0,168	0,155	0,144	0,134
1,00	0,051	Q	2386	2945	3564	4241	5773	7540	9543	11781	14255	16965	19910	23091	26507
		h_r	0,542	0,487	0,443	0,406	0,348	0,304	0,271	0,243	0,222	0,203	0,187	0,174	0,162
1,25	0,080	Q	2982	3682	4456	5302	7216	9425	11928	14726	17819	21206	24887	28864	33134
		h_r	0,811	0,729	0,663	0,607	0,521	0,455	0,403	0,364	0,332	0,304	0,281	0,260	0,243
1,50	0,115	Q	3579	4418	5346	6362	8659	11310	14314	17671	21382	25447	29865	34636	39761
		h_r	1,127	1,015	0,922	0,846	0,724	0,635	0,563	0,508	0,461	0,423	0,390	0,363	0,338
1,75	0,156	Q	4175	5154	6237	7422	10102	13195	16700	20617	24946	29688	34842	40410	46388
		h_r	1,499	1,346	1,226	1,122	0,963	0,841	0,749	0,673	0,613	0,561	0,519	0,481	0,450
2,00	0,204	Q	4771	5891	7128	8482	11545	15080	19085	23562	28510	33929	39820	46182	53014
		h_r	1,912	1,720	1,565	1,433	1,230	1,075	0,956	0,860	0,782	0,717	0,662	0,614	0,574
2,50	0,349	Q	5964	7363	8909	10603	14432	18850	23856	29452	35637	42411	49775	57728	66268
		h_r	2,889	2,598	2,363	2,165	1,857	1,624	1,444	1,299	1,182	1,083	1,000	0,928	0,867
3,00	0,459	Q	7157	8836	10691	12723	17318	22620	28628	35343	42765	50894	59730	69272	79521
		h_r	4,058	3,636	3,319	3,030	2,608	2,272	2,029	1,818	1,660	1,515	1,405	1,298	1,217

Koeffizienten k für den Druckhöhenverbrauch $h_{00} = k \cdot h_c$ in normalen Rohrkrümmern und Absperrorganen.

Normale Rohrkrümmern	135°	k_1	0,087	0,091	0,094	0,097	0,100	0,103	0,106	0,109	0,112	0,115	0,118	0,120	0,122
	90°	k_2	0,174	0,182	0,188	0,194	0,200	0,206	0,212	0,218	0,224	0,230	0,236	0,240	0,244
Norm. Rohrschieber offen		k_3	0,08	0,08	0,08	0,07	0,07	0,06	0,06	0,05	0,05	0,05	0,04	0,04	0,04
Norm. Saugklappe		k_4	4,8	4,4	4,0	3,7	3,4	3,1	2,8	2,5	2,25	2,0	1,8	1,6	1,5
Normales Rückschlagventil		k_5	5,0	4,5	4,0	3,5	3,0	2,5	2,0	1,5	1,3	1,1	1,0	1,0	1,0

Literatur.

- A. Dahme, Die Kolbenpumpe. München 1908, R. Oldenbourg.
- H. Dubbel, Entwerfen und Berechnen der Dampfmaschinen. 3. Aufl. Berlin 1910, Julius Springer.
- H. Dubbel, Großgasmaschinen. Ihre Theorie, Wirkungsweise und Bauart. Berlin 1910, Julius Springer.
- H. Dubbel, Die Steuerungen der Dampfmaschinen. Berlin 1913, Julius Springer.
- R. Grassmann, Anleitung zur Berechnung einer Dampfmaschine. 3. Aufl. Karlsruhe 1912, C. F. Müller.
- V. Geipke, Turbinen und Turbinenanlagen. Berlin 1906, Julius Springer.
- H. Güdner, Das Entwerfen und Berechnen der Verbrennungsmaschinen und Kraftgasanlagen. 3. Aufl. Berlin 1913, Julius Springer.
- K. Hartmann und J. O. Knoke, Die Pumpen. Berechnung und Ausführung der für die Förderung von Flüssigkeiten gebräuchlichen Maschinen. 3. Aufl. Berlin 1906, Julius Springer.
- Mitteilungen aus dem Maschinen-Laboratorium der Kgl. Technischen Hochschule zu Berlin. Herausgegeben von E. Josse, Professor und Vorsteher des Maschinenlaboratoriums. V. Heft: Über Kondensation, insbesondere für Dampfturbinen. Versuche über die Wärmeübertragung von Dampf an Kühlwasser. Kesselfeuerungsversuche mit Teeröl. München. R. Oldenbourg.
- A. Nägel, Die neuere Entwicklung der ortsfesten Ölmaschine. Berlin 1913, Julius Springer.
- F. Neumann, Die Zentrifugalpumpen, mit besonderer Berücksichtigung der Schaufelschnitte. 2. Aufl. Berlin 1912, Julius Springer.

- P. Ostertag, Theorie und Konstruktion der Kolben- und Turbo-Kompressoren. Berlin 1911, Julius Springer.
- A. Pfarr, Die Turbinen für Wasserkraftbetrieb. Ihre Theorie und Konstruktion. 2. Aufl. Berlin 1912, Julius Springer.
- A. Pohlhausen, Die Dampfmaschinen. Bd. I: Kolbendampfmaschinen. Bd. II: Dampfturbinen. 3. Aufl. Mittweida 1910. Polytechn. Buchh. (R. Schulze).
- L. Quantz, Wasserkraftmaschinen. 2. Aufl. Berlin 1911, Julius Springer.
- K. Schmidt, Die Berechnung der Luftpumpen für Oberflächenkondensationen unter besonderer Berücksichtigung der Turbinekondensationen. Berlin 1909, Julius Springer.
- A. Stodola, Die Dampfturbinen. 4. Aufl. Berlin 1910, Julius Springer.
- R. Thomann, Die Wasserturbinen, ihre Berechnung und Konstruktion. Stuttgart 1908, K. Wittwer.
- M. Tolle, Die Regelung der Kraftmaschinen. 2. Aufl. Berlin 1909, Julius Springer.
- F. J. Weiß, Kondensation. 2. Aufl. Berlin 1910, Julius Springer.
- S. Ziehn, Hydraulische Turbinen. Berechnung, Konstruktion und Anlage. 2. Aufl. Strelitz 1912, Polyt. Verlag Hittenkofer.
-

Hebemaschinen.

Bearbeitet von Dipl.-Ing. R. Hänchen.

Literatur.

Andrée, Statik des Kranbaues. 2. Aufl. München 1913. R. Oldenbourg. — Bessel, Hebemaschinen. 2. Aufl. Berlin 1911. Julius Springer. — Bethmann, Aufzüge. Braunschweig 1913. Vieweg & Sohn. — Bethmann, Hebezeuge. 2. Aufl. Braunschweig 1908. Vieweg & Sohn. — Böttcher, Krane. München 1906. R. Oldenbourg. — Ernst, Hebezeuge, 3 Bde. 4. Aufl. Berlin 1903. Julius Springer. — Handbuch der Ing.-Wiss. IV. Bd. 1 u. 3. Leipzig 1908. W. Engelmann. — v. Hanfistengel, Förderung von Massengütern. 2. Aufl. Berlin 1913. Julius Springer. — Hintz, Handb. d. Aufzugstechnik. Berlin 1903. A. Seydel. — Mischenfelder, Kran- und Transportanlagen. Berlin 1912. Julius Springer. — Pickersgill, Lasthebemaschinen. Stuttgart 1905. K. Wittwer. — Wettich, Hebezeuge. Hannover 1907. M. Jänecke. — Z. Ver. deutsch. Ing. — Fördertechnik. — Dingl. Polyt. Journal.

A. Einzelteile der Hebemaschinen.

I. Die Huborgane, deren Rollen und Trommeln.

Mechanische Verhältnisse der Rollen und Rollenzüge s. Mechanik, S. 307.

1. Ketten.

a) Gliederketten werden für kleinere und mittlere Tragfähigkeiten (bis etwa 5 t) bei beschränkter Hubgeschwindigkeit verwendet.

Nachteile: Empfindlichkeit gegen Stöße und Überlastungen, sowie plötzliches Eintreten des Bruches.

Fig. 1 zeigt die Form der im Kranbau allgemein üblichen kurzgliedrigen (englischen) Kette. d = Ketteneisenstärke, l = Teilung oder innere Baulänge, b = Baubreite der Kette = $2,4 d$.



Fig. 1.

Die langgliedrige (deutsche) Kette ist leichter und billiger. Sie findet für Befestigungszwecke, sowie bei Kettenbahnen u. dgl. Verwendung. Die sog. Stegkette, bei der jedes Glied zur Versteifung mit einem eingeschweißten Steg versehen ist, besitzt eine um etwa 12 bis 20% höhere Bruchbelastung als die gewöhnliche Gliederkette. Als Ankerkette allgemein gebräuchlich.

Baustoff der Gliederketten: Weiches, zähes Schweißisen von $K_1 = 3500$ bis 3600 kg/qcm und 12 bis 20% Dehnung. Herstellung durch Schweißen aus Rundeisen. Bei dünnen Ketten liegt die Schweißstelle am Kopfende, bei dicken an der Seite. Zugfestigkeit an der Schweißstelle um etwa 10% geringer.

Ketten von größerer Stärke werden auch aus Flußeisen gewalzt¹⁾.

Kalibrierte Ketten werden durch Schlagen im Gesenk kalibriert und poliert, während unkalibrierte Ketten roh bleiben. Die Kalibrierung ist erforderlich, damit die Kette genau gleiche Glieder hat, was bei verzahnten Kettenrädern wegen des genaueren Einpassens in das jeweilige Kettenbett Bedingung ist.

Verwendung nur für Geschwindigkeiten bis $v = \infty 0,1 \text{ m/sek}$, hauptsächlich jedoch für Hebezeuge mit Antrieb von Hand, wie Flaschenzüge u. dgl.

¹⁾ Borsigwerk, Oberschlesien.

Bewegt sich eine Kette um eine Rolle oder Trommel, so entsteht, da sich ein Kettenglied um das andere dreht, an der Berührungsstelle eine Reibung, die sog. Kettenreibung¹⁾. Infolge der Kettenreibung tritt am Scheitel der Glieder ein Verschleiß ein, der schließlich zum Bruch der Kette führt. Im Betrieb befindliche Ketten sind daher regelmäßig (mit einer Mischung von konsistentem Fett und Graphit) zu schmieren.

Da die Festigkeit der Ketten von der Güte der Schweißstelle abhängt, so werden dieselben auf der Prüfungsmaschine einer Probelastung gleich der 2,125-fachen Nutzlast unterworfen.

Die Probelastung wird mit der ganzen Kette oder bei langen Ketten mit je 25 m bzw. 27,4 m langen Enden vorgenommen; die Bruchbelastung mit drei Gliedern.

Ist eine in Betrieb befindliche Kette gebrochen und ist eine Ersatzkette nicht zur Stelle, so wird entweder ein neues Glied eingeschweißt, oder man bedient sich provisorisch eines sog. Notgliedes oder Kettenschlosses.

Berechnung. Die Kette wird auf Zug und Biegung beansprucht. Letztere wird vernachlässigt und die Kette auf Zug in den beiden parallelen Schenkeln des Gliedes berechnet. Der Biegungsbeanspruchung des Kettengliedes trägt man dadurch Rechnung, daß man die zulässige Zugbeanspruchung verhältnismäßig niedrig hält.

Bedeutet Q die höchst zulässige Belastung der Kette und k_2 die zulässige Zugbeanspruchung in kg/cm^2 , so ergibt sich die Kettenstärke d in cm aus der Gleichung:

$$Q = 2 \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \cdot k_2 \dots \text{kg.}$$

Nach v. Bach kann gesetzt werden:

$$Q = 1000 d^2 \text{ für wenig angestrenzte Ketten bei } k_2 = 637 \text{ kg}/\text{cm}^2$$

$$\approx 800 d^2 \text{ „ häufig benutzte „ „ } k_2 = 510 \text{ „}$$

$$\approx 500 d^2 \text{ „ Dampfwinden-Ketten „ } k_2 = 318 \text{ „}$$

Tab. 1. Kurzgliedrige Kranketten von Carl Schlieper, Grünei. W.

Eisenstärke d mm	Höchste zulässige Belastung Q kg	Probelastung Q_1 kg	Ungefähres Gewicht g kg/lfdm	Eisenstärke d mm	Höchste zulässige Belastung Q kg	Probelastung Q_1 kg	Ungefähres Gewicht g kg/lfdm
5	250	531	0,58	23	5290	11241	13,00
6	360	765	0,81	24	5760	12240	14,50
6 $\frac{1}{2}$	423	898	0,95	25	6250	13281	15,00
7	490	1041	1,10	26	6760	14991	16,00
8	640	1360	1,60	28	7840	16660	19,00
9	810	1721	1,85	30	9000	18125	22,00
10	1000	2125	2,25	33	10890	23141	25,00
11	1210	2595	3,00	36	12960	27540	30,00
12	1440	3060	3,50	40	16000	34000	36,00
13	1690	3591	4,00	42	17640	39690	40,00
14	1960	4165	4,50	45	20250	43031	48,00
15	2250	4781	5,00	48	23040	48960	52,00
16	2560	5440	6,00	51	26010	55271	58,00
18	3240	6885	7,00	54	29160	61965	64,00
20	4000	8500	9,50	57	32490	69041	72,00
22	4240	10285	11,00	60	36000	76500	81,00

In vorstehender Tabelle beträgt für d in cm und $k_2 = 637$ die zulässige Belastung $Q = 1000 d^2$, die Probelastung $Q_1 = 2125 d^2$ und die Bruchbelastung $Q_2 = 4500 d^2$, Gewicht $f. d. lfdm g = 2,25 d^2$.

¹⁾ Siehe Lindner, Maschinen-Elemente.

Kalibrierte Ketten sind, um unzulässige Formänderungen zu vermeiden, nur mit $\frac{3}{4}$ der vorstehend angegebenen Werte zu belasten.

Da mit zunehmender Kettenisenstärke die Schweißstelle unsicherer wird, so zieht man für größere Tragfähigkeiten, auch ihrer geringeren Kettenreibung wegen, die Gallsche Kette als Huborgan vor, trotzdem diese bei gleicher Belastung ein höheres Eigengewicht und einen höheren Beschaffungspreis hat.

Unverzahnte Kettenrollen (Fig. 2 bis 4). Baustoff: Gußeisen, seltener Stahlguß. Das in der Regel unbearbeitete Kranzprofil wird der Kette entsprechend hergestellt und meist mit Bordrändern zur Erzielung einer besseren Führung versehen. Für unruhig laufende Ketten bedient man sich des Querschnittes Figur 4. Halbmesser der Rille

$r = \frac{b}{2}$. Durchmesser der Kettenrollen:

$$\begin{aligned} D &\geq 20 d && \text{bei Antrieb von Hand,} \\ &\geq 25 \text{ bis } 30 d && \text{bei motorischem Antrieb.} \end{aligned}$$

Wirkungsgrad einer Kettenrolle einschließlich Lagerreibung $\eta = \infty 0,95$.

Verzahnte Kettenrollen für Lastketten (Kettennüsse) bieten — im Gegensatz zu den Kettentrommeln — einen kleinen Lasthebelarm und damit kleinere Übersetzung, geringere Betriebskraft und gedrängte Bauart des Hebezeuges. Nachteil der Kettennüsse: Großer Verschleiß infolge der starken Reibung zwischen kalibrierter Kette und Nuß.

Übliche Ausführung der Kettennuß nach Fig. 5. Baustoff: Gußeisen, Hartguß und Stahlguß.

Kleinstmögliche Zähnezahzahl = 4. (Hierbei leidet die Kette der scharfen Abbiegungen wegen.) Gebräuchliche kleinste Zähnezahzahl $z_{\min} = 5$ (besser mehr).

Bedeutungen (Fig. 5) d = Kettenisenstärke in cm, l = Teilung der Kette in cm, z = Zähnezahzahl, so beträgt der Teilkreisdurchmesser:

$$D = \sqrt{\left(\frac{l}{\sin \frac{90^\circ}{z}}\right)^2 + \left(\frac{d}{\cos \frac{90^\circ}{z}}\right)^2} \dots \text{cm.}$$

Der Einfluß des zweiten Gliedes unter der Wurzel ist verhältnismäßig gering. Daher kann für $z \geq 6$ und $d \leq 1,6$ cm ohne erheblichen Fehler gesetzt werden:

$$D = \frac{l}{\sin \frac{90^\circ}{z}} \dots \text{cm.}$$

Letztere Gleichung dient besonders zur Berechnung des Teilkreisdurchmessers der Haspelräder (s. S. 1080).

Wirkungsgrad der Kettennuß einschließlich Lagerreibung $\eta = \infty 0,93$.

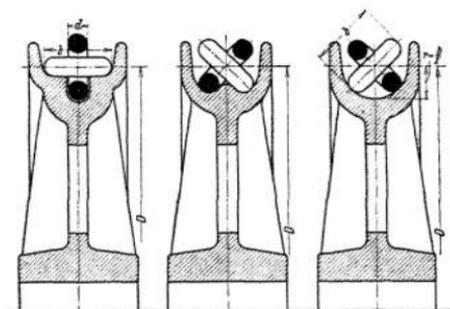


Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

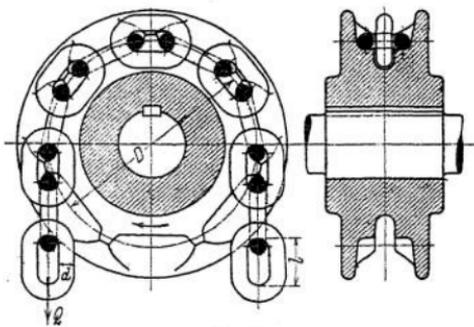


Fig. 5.

Tab. 2. Kalibrierte Gliederketten und verzahnte Kettenräder von Schlösser & Feibusch, G. m. b. H., Düsseldorf.

Eisenstärke der kalibr. Kette d	Teilung der Kette l	Zähnezahl z	Teilkreisdurchmesser D	Eisenstärke der kalibr. Kette d	Teilung der Kette l	Zähnezahl z	Teilkreisdurchmesser D	Eisenstärke der kalibr. Kette d	Teilung der Kette l	Zähnezahl z	Teilkreisdurchmesser D
mm	mm		mm	mm	mm		mm	mm	mm		mm
5	18,5	6	72	8	22,5	12	172	12	36	5	115
		7	83			13	186			6	137
		8	94			17	244			7	161
		10	118			18	258			8	184
		18	212			20	286			9	207
		20	234			22	314			10	230
		24	283			27	386			11	253
		31	364			28	397			12	275
		36	420			32	456			13	299
						43	614			14	322
6	20	6	76	9,5	31	52	740	14	42,5	15	344
		11	138			60	850			20	458
		13	166			5	100			21	480
		14	178			6	120			22	500
		16	204			7	140			24	552
		20	254			8	160			32	714
		22	280			10	198			37	836
		28	357			12	238			58	1331
		38	484			16	318			6	162
		43	548			17	338			8	214
50	636	18	360	10	268						
7	22,5	5	72	11	30	20	388	18	54	12	320
		6	85			21	411			14	374
		7	100			22	436			15	404
		8	115			27	534			32	850
		10	140			30	592			5	154
		11	157			40	778			6	184
		12	172			5	97			7	215
		13	186			6	114			16	48
		18	286			7	134			19	275
		24	343			8	153			11	338
27	386	10	192	12	362						
32	456	11	214	6	492						
34	487	12	223	5	175						
43	614	14	264	6	207						
52	740	15	286	7	242						
60	850	20	382	8	276						
66	944	21	401	9	310						
77	1001	22	422	10	322						
8	22,5	5	73	11	30	24	456	20	62,5	14	479
		6	86			30	575			5	200
		7	100			36	680			6	240
		8	114			77	1450			7	280
		10	143							8	320
		11	157							9	360
						20	800				

Die stark umrahmten Kettenradabmessungen finden für Hasepdräder Anwendung.

Um ein sicheres Arbeiten der Kette zu erreichen, ist an der Nuß ein Spannungsbogen von mindestens $\alpha = 180^\circ$ erforderlich. Zur Erlangung desselben ist meist eine besondere Leitrolle erforderlich (Fig. 93, S. 1109). Damit ein Herausspringen der Kette vermieden wird, ist ein Führungsbügel anzuordnen, oder das ganze Getriebe wird in einem besonderen, geteilten Gehäuse (Fig. 6) untergebracht. Ein Abstreifer verhindert ein Hängenbleiben der Kette im Bette der Nuß. Das lose Kettenende kann in einem geeigneten ausgebildeten Kasten aufgefangen werden.

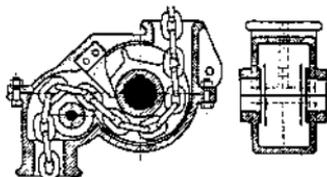


Fig. 6.

Kettentrommeln. Baustoff: Gußeisen, für sehr angestrengten Betrieb auch Stahlguß.

Trommeldurchmesser $D \cong 20 d$ bei Antrieb von Hand,
 $\cong 25$ bis $30 d$ bei motorischem Antrieb.

Für untergeordnete Zwecke wird der Trommelmantel glatt und mit Bordrand ausgeführt. Die Trommel kann alsdann auch für Seile als Huborgan benutzt werden. Fig. 7 zeigt die meist gebräuchliche Form der Kettentrommel. Der Mantel ist hierbei mit eingegossenen schraubenförmigen Nuten versehen. Die Zahl der Gänge ist durch den Hub bedingt, wobei jedoch zur Entlastung der Endbefestigung der Kette (Fig. 8) nach Ablauf des Hubes noch mindestens 1 bis 2 Windungen verbleiben müssen. Fig. 9 gibt die Ausbildung des Trommelprofils für unruhig laufende Ketten.

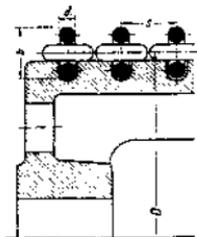


Fig. 7.

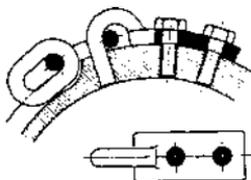


Fig. 8.

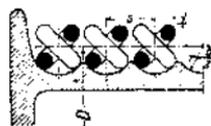


Fig. 9.

Die Steigung s der schraubenförmigen Nuten der Trommel ist durch einen Spielraum von 2 bis 3 mm zwischen den einzelnen Kettenwindungen bedingt. Die Mantelstärke ist in Rücksicht auf die Herstellung zu bemessen und an der schwächsten Stelle — je nach der Kettenstärke — mindestens 12 bis 25 mm zu nehmen. Die Stirnwände sind entsprechend ihrer Belastung kräftig zu halten.

Wirkungsgrad der Kettentrommel einschließlich Lagerreibung $\eta = \infty 0,96$.

Die Trommel kann auf ihrer Welle aufgekeilt sein, oder, mit dem Trommelrad verschraubt, lose auf derselben laufen. Berechnung der Trommelwelle s. S. 1073.

b) Die Gallsche (Gelenk- oder Laschen-)Kette (Fig. 10) ist besonders als schwere Krankette geeignet, wird jedoch auch für mittlere und kleinere Lasten vielfach benutzt. Empfehlenswert nur in geschlossenen, staubfreien Räumen und für Hubgeschwindigkeiten bis $v = \infty 0,5$ m/sek.

Der Baustoff für die Laschen und Bolzen ist meist Siemens-Martin-Stahl. Die Laschen können gerade oder geschweifte Form (Fig. 10) erhalten. Bolzen und Laschen werden unter Einhaltung der

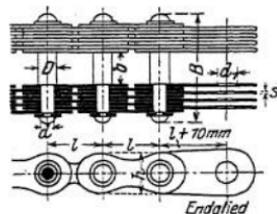


Fig. 10.

erforderlichen Beweglichkeit vernietet oder versplintet. Ketten, die versplintet sind, gestatten eine Auswechslung schadhafte gewordener Laschen.

Berechnung der Gallschen Kette siehe K. Keller, Triebwerke, München 1905.

Bei der Gallschen Kette ist besonders darauf zu achten, daß sie außerhalb ihrer Führungsebene nicht beweglich ist und geringe Beanspruchungen senkrecht zur Führungsebene für die Kette schädlich sind. Daher als Huborgan für schnellfahrende Laufkrane nicht zu verwenden. Der Hauptvorteil der Gallschen Kette besteht darin, daß sie, infolge der leichten Beweglichkeit von Bolzen und Laschen, Kettenräder mit geringer Zähnezahl und kleinem Kettenrad-durchmesser gestattet, so daß sich ein entsprechend geringes Lastmoment ergibt. Da ferner die Gelenkreibung der Gallschen Kette erheblich geringer ist als die Reibung einer in bezug auf Tragfähigkeit gleichwertigen Gliederkette, so bietet sie letzterer gegenüber eine Kraftersparnis im Betriebe. Nachteile der Gallschen Kette sind die bereits genannte Unbeweglichkeit außerhalb ihrer Führungsebene, ihr großes Gewicht und ihr höherer Beschaffungspreis der Gliederkette gegenüber.

Tab. 3. Gallsche Gelenkketten von Zobel, Neubert & Co., Schmalkalden (Thür.).

Zulässige Belastung Q kg	Teilung od. Bau-länge l mm	Bolzen			Platten-zahl z	Platten-stück s mm	Platten-breite k mm	Größte Breite der Kette B mm	Durch-messer d. Schluß-bolzens d_1 mm	Unge-fährtes Gewicht g kg/lfdm	Bemer-kungen
		d mm	δ mm	d_1 mm							
100	15	5	12	4	2	1,5	12	23	6	0,7	Unter-legscheiben vernietet
250	20	7,5	15	6	2	2	15	28	9	1	
500	25	10	18	8	2	3	18	38	12	2	
750	30	11	20	9	4	2	20	45	13	2,7	
1000	35	12	22	10	4	2	27	50	15	3,8	
1500	40	14	25	12	4	2,5	30	60	18	5	
2000	45	17	30	14	4	3	35	67	21	7,1	
3000	50	22	35	17,5	6	3	38	90	26	11,1	
4000	55	24	40	21	6	4	40	110	32	16,5	
5000	60	26	45	23	6	4	46	118	34	19	
6000	65	28	45	24	6	4	53	125	36	24	
7500	70	32	50	28	8	4,5	53	150	40	31,5	
10000	80	34	60	30	8	4,5	65	165	45	34	
12500	85	35	65	31	8	5	70	180	47	44,8	
15000	90	38	70	34	8	5,5	75	195	50	51,1	
17500	100	40	75	36	8	6	80	208	54	58,1	
20000	110	43	80	38	8	6	85	215	56	74,4	
25000	120	45	90	40	8	6,5	100	235	60	83,3	
30000	130	50	100	45	8	7	106	255	65	100	

Kettenräder. Baustoff: Gußeisen oder Stahlguß. Sie werden entweder auf der Welle aufgekeilt (Fig. 11) oder laufen lose auf derselben. Für kleinere Zähnezahlen ($z_{\min} = 7$ bis 8) und kleineren Teilkreisdurchmesser vielfach aus einem Stück mit der Welle geschmiedet (Fig. 12). Beim Lauf der Kette über das Kettenrad legen sich die Kettenbolzen in entsprechend ausgebildete Zahnücken auf. Die Zahnform selbst verläuft oberhalb des Teilkreises, um ein Aus- und Einschwingen der Kettenbolzen zu ermöglichen, nach einem Kreisbogen, $r = l - \frac{d}{2}$.

Der Durchmesser des Teilkreises (Fig. 11) beträgt bei z Zähnen

$$D = \frac{l}{\sin \frac{180^\circ}{z}}$$

Die Teilung selbst ist — im Gegensatz zur Teilung bei Zahnrädern — als Sehnenteilung aufzutragen.

Lose Rollen und Leitrollen für Gallsche Ketten werden auch ohne Zähne

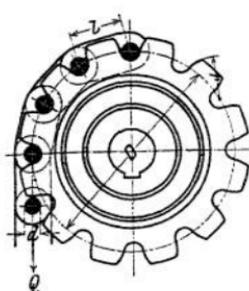


Fig. 11.

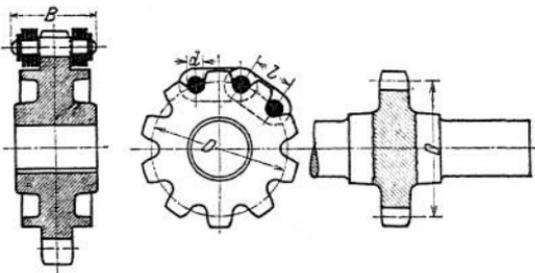


Fig. 12.

ausgeführt und erhalten glatte, zylindrische Kränze, auf die sich die Kettenbolzen aufliegen.

Um ein Herausspringen der Kette aus dem Rad zu vermeiden, ist die Anordnung eines Schutzbügels empfehlenswert.

Wirkungsgrad der Gallschen Kettenräder einschließlich Lagerreibung $\eta = \sim 0,96$.

2. Seile.

Die im Hebezeugbau zur Verwendung gelangenden Seile sind Hanf- oder Drahtseile, und zwar meist von rundem Querschnitt. Bei den Seilen ist besonders zu beachten, daß sie bei ihrer Führung über Rollen und Trommeln nicht nach entgegengesetzten Richtungen gebogen werden. Ist dies jedoch unumgänglich, dann ist in Rücksicht auf die entgegengesetzten Beanspruchungen ein entsprechend stärkeres Seil zu verwenden.

a) Hanfseile. Die Hanfseile werden meist als sog. Anschlagseile benutzt. Sie werden alsdann ein- oder mehrmals um die Last geschlungen und am Haken eingehängt. Den Anschlagketten gegenüber bieten die Hanfseile den Vorteil, daß sie scharfe, z. B. durch Bearbeitung entstandene Kanten der Last nicht beschädigen. Andererseits gefährden derartige scharfe Kanten die Anschlagseile und sind dieselben daher nur niedrig zu beanspruchen ($k_z = 80$ bis 100 kg/cm^2), auch sind sie einer öfteren Revision zu unterziehen.

Als Huborgan finden die Hanfseile nur noch für untergeordnete Zwecke Verwendung (gewöhnliche Flaschenzüge, Bauwinden, Handaufzüge u. dgl.). Für motorisch betriebene Hebezeuge kommen sie nicht in Betracht.

Seildurchmesser $d = \sim 13$ bis 52 mm .

Rohstoff: Bad. Schleißhanf, Russ. Reinhanf und Manilahanf.

Um die Seile gegen Witterungseinflüsse zu schützen, werden sie mit Carbolinum getränkt oder geteert. Geteerte Seile besitzen jedoch eine geringere Tragfähigkeit als ungeteerte.

Die Hanfseile (Querschnitt meist rund) sind aus 3 oder 4 Litzen gewickelt. Man unterscheidet bezüglich der Herstellung lose und fest geschlagene Seile.

Hanfseilrollen. Baustoff: Gußeisen. Rollendurchmesser (bei Antrieb von Hand) $D = 7$ bis $10 d$; bei $k_z = 80$ bis 100 kg/cm^2 .

Die Rillen der Seilrollen sind dem Seildurchmesser entsprechend derart auszdrehen, daß das Seil sich ohne Klemmung hineinlegt. Wirkungsgrad $\eta = \sim 0,95$.

Hanfseiltrommeln. Baustoff: Gußeisen. Durchmesser wie bei den Hanfseilrollen.

Tab. 4. Runde Hanfseile von Felten & Guilleaume, Köln a./Rh.¹⁾

Seil- durch- messer <i>d</i> m/m	Ungeteert				Geteert			
	Bad. Schleißhanf		Russ. Reinhanf		Bad. Schleißhanf		Russ. Reinhanf	
	Gewicht kg/lfdm.	Arbeitslast Q kg	Gewicht kg/lfdm.	Arbeitslast Q kg	Gewicht kg/lfdm.	Arbeitslast Q kg	Gewicht kg/lfdm.	Arbeitslast Q kg
16	0,21	230	0,20	200	0,23	200	0,22	176
20	0,31	350	0,30	314	0,34	314	0,33	275
23	0,39	470	0,38	416	0,43	416	0,42	363
26	0,51	600	0,50	531	0,58	531	0,56	464
29	0,67	740	0,65	660	0,75	660	0,72	578
33	0,80	960	0,78	855	0,90	855	0,87	748
36	0,96	1145	0,93	1017	1,07	1017	1,04	890
39	1,15	1340	1,10	1194	1,28	1194	1,25	1044
46	1,50	1870	1,45	1661	1,70	1661	1,65	1453
52	1,95	2390	1,90	2122	2,20	2122	2,15	1857

Die Trommeln erhalten glatten Umfang. Trommelbreite hängt von der Länge des abzuwickelnden Seiles ab. Zur Schonung der Endbefestigung sollen nach Ablauf des Seiles noch mindestens 1 oder 2 Windungen verbleiben. Die Endbefestigung des Seiles geschieht mittels am Bordrand angeschraubten oder eingegossenen Bügels. Höhe des Bordrandes etwa 2 bis 4 *d*.

b) **Drahtseile**²⁾ finden im Hebezeugbau ihrer hohen Festigkeit und leichten Biegsamkeit wegen allgemeine Anwendung. Den Ketten gegenüber bieten sie bei gleichem nutzbaren Querschnitt höhere Tragfähigkeit, auch sind sie im Anschaffungspreis niedriger als die Ketten. Im Betrieb arbeiten die Drahtseile sicher und vollkommen geräuschlos, was sie insbesondere für schnellaufende, elektrisch betriebene Hebezeugen unentbehrlich macht. Ferner bieten sie den Vorteil einer leichten Überwachung im Betriebe. Während bei der Kette schadhafte Stellen schwer zu erkennen sind und der Bruch plötzlich eintritt, wird das Drahtseil lange vor seinem Bruch durch Reißen von Einzeldrähten stachelig und kann alsdann, wenn erforderlich, ausgewechselt werden.

Die im Hebezeugbau vorkommenden Drahtseile haben meist runden, seltener quadratischen oder flachen Querschnitt. Sie bestehen aus dünnen Stahldrähten (Elementar- oder Einzeldrähten), die gruppenweise zu einer Litze vereinigt, sich in bestimmter Anordnung um eine Hanfseele legen. Je nach Form des Kerndrahtes der Litze unterscheidet man rundlitzige (Fig. 13) und flachlitzige Drahtseile (Fig. 14). Letztere haben in den Rippen der

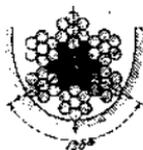


Fig. 13.

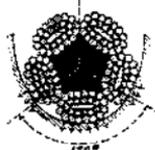


Fig. 14.

Rollen und Trommeln eine größere Auflagefläche, sind daher geringerer Abnutzung unterworfen und werden meist als Förderseile verwendet.

Die patentverschlossenen Seile der Firma Felten & Guilleaume, Mülheim a. Rh., werden infolge des besonderen Querschnittes ihrer Einzeldrähte nicht stachelig. Sie sind von glatter Oberfläche, wenig rostempfindlich, besitzen jedoch ihrer stärkeren Einzeldrähte wegen geringe Biegsamkeit. Anwendung als Tragselle bei Hängebahnen u. dgl.

Der Baustoff der Drahtseile ist meist Tiegel-Gußstahl mit $K_2 = 12\,000$ bis $18\,000\text{ kg/cm}^2$ und $E = \infty 2\,150\,000\text{ kg/cm}^2$. Die auf der Zerreißmaschine

¹⁾ Die zulässige Belastung (Arbeitslast) *Q* entspricht einem Achtel der Bruchbelastung.

²⁾ Näheres s. Hrabak, Drahtseile.

ermittelte Bruchbelastung eines Teiles ist etwa 10% geringer als die rechnerisch gefundene und in den Tabellen verzeichnete.

Sog. Patentflugstahldraht besitzt eine höhere Festigkeit als Gußstahldraht, ist jedoch im Preise um etwa 25% teurer.

Berechnung. Sie erfolgt in der Regel für die statische Belastung des Seiles. Letzteres erfährt beim Anlauf noch eine Mehrbelastung durch den Massenwiderstand, der bei großen Massen und kurz bemessener Anlaufzeit zu berücksichtigen ist. Außer der reinen Zugbeanspruchung erleidet das Seil durch seine Führung über Rollen und Trommeln noch eine Biegebungsbeanspruchung, die von der Stärke des Einzeldrahtes und dem Rollen- bzw. Trommeldurchmesser abhängt.

Bedeutet S den Seilzug in kg, δ die Einzeldrahtstärke in cm, i die Zahl der Einzeldrähte, so ist die gesamte Zugbeanspruchung des Seiles nach Bach:

$$\frac{S}{i \cdot \delta^2 \frac{\pi}{4}} + \beta \cdot E \cdot \frac{\delta}{D} \leq k_z \dots \text{kg/cm}^2.$$

In dieser Gleichung stellt das erste Glied die reine Zugbeanspruchung, das zweite die aus der Biegung resultierende Zugbeanspruchung dar. β ist ein Berichtigungsfaktor, den Bach für Biegung im gleichen Sinne zu $\frac{1}{4}$ bis $\frac{3}{8}$ angibt. Der letztere Wert dürfte für Hebezeuge, wo es sich meist um kleine Rollen- und Trommeldurchmesser und dünne Einzeldrähte handelt, zu hoch sein und soll daher mit dem Werte $\beta = \frac{1}{4}$ gerechnet werden¹⁾.

Damit geht obige Gleichung über in:

$$\frac{\text{Seilzug}}{\text{ges. Querschnitt}} + \left(\frac{1}{4} \cdot 2150000\right) \cdot \frac{\text{Drahtstärke}}{\text{Rollen-Durchm.}} \leq k_z \dots \text{kg/cm}^2.$$

Da die Biegebungsbeanspruchung eines Seiles auch von der Geschwindigkeit abhängt, so sind für schnelllaufende Hebezeuge große Rollen- und Trommeldurchmesser anzustreben. Andererseits kann das Seil an einer sog. Ausgleichrolle, wo es sich in fast ruhendem Zustande befindet, wesentlich höher belastet werden, d. h. der Durchmesser der Ausgleichrolle kann verhältnismäßig klein genommen werden.

Die Größe der zulässigen Beanspruchung hängt von dem angenommenen Sicherheitswerte ab. Derselbe beträgt für Lastenförderung bei Antrieb von Hand $\mathcal{S} = 5$ bis 6, bei motorischem Antrieb $\mathcal{S} = 6$ bis 8; für Personenförderung $\mathcal{S} = 10$. Hiermit ergibt sich für Lastenförderung $k_z \leq 2000$ bis 3000 kg/cm²; für Personenförderung ≤ 1200 bis 1800 kg/cm².

Um bei Windenkonstruktionen einen ungefähren Anhalt für die Wahl des Seildurchmessers zu haben, kann man sich folgender Werte bedienen. Bei Winden bis

5 t Tragkraft, Seildurchmesser $d = 10$ bis 15 mm		
5 bis 15 t	„	10 „ 20 „
15 „ 30 t	„	20 „ 25 „
30 „ 60 t	„	25 „ 30 „

Hiermit kann die erforderliche Anzahl der tragenden Seile des Rollenzuges (Gebräuchliche Seilzüge s. S. 1125) gewählt und die Seilstärke endgültig festgelegt werden.

Seilgehänge dienen dazu, die Drahtseile mit anderen Konstruktionsteilen in Verbindung zu bringen.

¹⁾ Nach Blasius (Z. Ver. deutsch. Ing. 1914, S. 663) wird der kleinste Rollen- bzw. Trommeldurchmesser dadurch erhalten, daß die Zugspannung k_z zu $\frac{1}{2}$ auf den reinen Zug und zu $\frac{3}{8}$ auf die Biegebungsbeanspruchung verteilt wird.

Tab. 5. Kran-Drahtseile der A.-G. für Seilindustrie vorm. Ferdinand Wolff, Mannheim.

Baustoff: Patent-Tiegelgußstahl. Bruchfestigkeit: ca. 150—160 kg/mm².

Seil- durch- messer <i>d</i> mm	Zahl der Einzeldrähte $i=144^1)$				Zahl der Einzeldrähte $i=180^2)$			
	Gesamt- Bruch- festigkeit	Draht- stärke δ	Trommel- durchm. <i>D</i>	Gewicht <i>g</i>	Gesamt- Bruch- festigkeit	Draht- stärke δ	Trommel- durchm. <i>D</i>	Gewicht <i>g</i>
	kg	mm	mm	kg/lfdm.	kg	mm	mm	kg/lfdm.
8	3 500	0,45	180	0,22	3 400	0,40	160	0,20
10	5 300	0,55	220	0,35	4 400	0,45	180	0,35
12	7 300	0,65	260	0,50	6 600	0,55	220	0,45
14	11 200	0,80	320	0,70	9 100	0,65	260	0,65
16	14 200	0,90	380	0,90	12 200	0,75	300	0,85
18	17 500	1,00	450	1,15	15 800	0,85	340	1,05
20	21 100	1,10	525	1,40	19 800	0,95	400	1,30
22	24 400	1,20	600	1,70	23 500	1,05	475	1,55
24	30 900	1,35	675	2,00	28 000	1,15	550	1,85
26	35 700	1,45	740	2,35	33 300	1,25	625	2,20
28	40 800	1,55	800	2,75	38 700	1,35	675	2,55
30	46 200	1,65	925	3,15	41 500	1,40	725	2,90
32	54 800	1,80	1 050	3,60	47 800	1,50	775	3,30
34	61 200	1,90	1 125	4,00	54 300	1,60	860	3,70
36	67 800	2,00	1 250	4,50	61 300	1,70	975	4,20
38	74 700	2,10	1 300	5,00	68 500	1,80	1 050	4,65
40	82 000	2,20	1 350	5,60	76 500	1,90	1 125	5,20

Baustoff: Patent-Pflugstahl. Bruchfestigkeit: ca. 180—200 kg/mm².

8	4 900	0,45	0,29	200	0,25	4 300	0,38	180	0,25
9	6 100	0,50	0,33	220	0,30	5 300	0,40	190	0,30
10	7 200	0,55	0,36	240	0,40	6 700	0,45	200	0,40
11	8 600	0,60	0,40	260	0,45	8 400	0,50	220	0,45
12	10 200	0,65	0,45	290	0,50	10 200	0,55	240	0,50
13	11 800	0,70	0,48	320	0,60	11 700	0,60	260	0,60
14	15 400	0,80	0,52	350	0,70	13 700	0,65	290	0,70
15	17 400	0,85	0,55	380	0,80	15 900	0,70	310	0,80
16	19 800	0,90	0,60	420	0,95	18 400	0,75	330	0,95
17	21 800	0,95	0,62	460	1,05	21 000	0,80	350	1,05
18	25 000	1,00	0,65	500	1,20	23 900	0,85	380	1,20
19	25 400	1,05	0,70	530	1,30	27 000	0,90	410	1,30
20	28 100	1,10	0,75	575	1,45	30 100	0,95	440	1,45
21	30 000	1,15	0,77	620	1,60	33 300	1,00	480	1,60
22	33 200	1,20	0,80	660	1,80	34 600	1,05	520	1,80
23	35 900	1,25	0,85	700	1,95	37 900	1,10	560	1,95
24	42 200	1,35	0,90	740	2,10	41 500	1,15	600	2,10
26	48 600	1,45	0,95	810	2,45	49 000	1,25	690	2,45
28	52 200	1,55	1,05	900	2,85	57 200	1,35	750	2,85
30	61 000	1,65	1,10	1 000	3,30	61 400	1,40	800	3,30
32	74 300	1,80	1,20	1 150	3,70	70 800	1,50	860	3,70
34	82 500	1,90	1,25	1 250	4,20	80 300	1,60	950	4,20
36	92 200	2,00	1,35	1 375	4,70	90 800	1,70	1 070	4,70
38	101 300	2,10	1,40	1 430	5,20	101 000	1,80	1 160	5,20
40	111 900	2,20	1,50	1 500	5,85	113 000	1,90	1 240	5,85

1) Spezial-Biegsam. 2) Extra-Spezial-Biegsam.

Am gebräuchlichsten ist die Seilkausche (Fig. 15 und 16). Baustoff: Flußeisen oder Gußeisen. Das Seil wird in Schleifenform um die dem Seildurchmesser entsprechend geformte Kausche gelegt und auf eine Länge von 200 bis 500 mm durch Umwickeln mit Draht fest verbunden, mitunter auch verlötet.

Drahtseilrollen. Baustoff: Gußeisen.

Der Rollendurchmesser hängt von der Einzeldrahtstärke δ und der zulässigen Gesamtbeanspruchung k_2 des Seiles ab. Für Handantrieb kann er etwa zu $D = \infty 400 \delta$, für motorischen Antrieb je nach Umständen zu $D = \infty 500 \delta$ bis 1000δ genommen werden.

Bei Benutzung der Tab. 5 und 6 kann der Rollendurchmesser, nachdem das Seil seiner Belastung entsprechend gewählt, entnommen werden.

Die Umfangsrille der Drahtseilrollen (Fig. 17) ist derart auszubilden, daß sich das Seil ohne Klemmung hineinlegt. Zu diesem Zwecke wird der Halbmesser r des Rollenbettes etwas größer genommen als der Halbmesser des Seiles.

Wirkungsgrad der Drahtseilrollen $\eta = 0,95 \text{ bis } 0,96$.

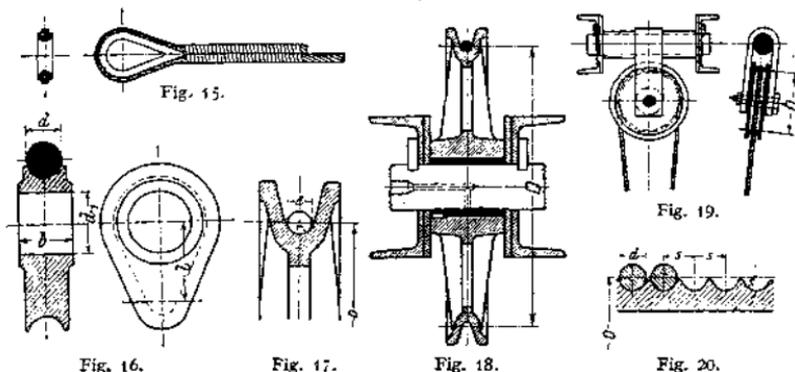


Fig. 18 zeigt z. B. die übliche Ausführung der Auslegerrolle eines elektrisch betriebenen Drehkranes. Die Rolle ist mit einer Büchse aus Phosphorbronze versehen und läuft lose auf der festgestellten Achse (Achshalter siehe Tab. 1073). Um ein Herauspringen des Seiles aus der Rolle zu vermeiden, ist am Auslegerkopf ein Schutzbügel anzuordnen.

Die Ausgleichrollen von elektrisch betriebenen Winden (Gebräuchliche Seilzüge siehe S. 1125), bei denen das Seil ruhend aufgehängt ist, erhalten möglichst kleine Rollendurchmesser (entsprechend k_2 bis 4000 kg/cm^2). Es empfiehlt sich, diese Rollen, wie Fig. 19 zeigt, pendelnd aufzuhängen, damit sie sich nach der jeweiligen Lage des Rollenzuges einstellen können.

Drahtseiltrommeln. Baustoff: Gußeisen, seltener Stahlguß.

Der Trommeldurchmesser ist gleich dem Drahtseilrollendurchmesser und kann nach erfolgter Wahl des Seiles den Tabellen entnommen werden. Für untergeordnete Zwecke (Bau- und Kabelwinden u. dgl.) wird der Trommelumfang glatt und mit Bordscheibe, für andere Hebezeuge, insbesondere motorisch angetriebene, mit schraubenförmigen Windungen (Fig. 20) versehen. Der Halbmesser des Rillenprofils ist etwas größer zu nehmen als der Halbmesser des Seiles. Steigerung $s = d + (2 \text{ bis } 3) \text{ mm}$. Breite der Trommel richtet sich nach der Länge des aufzuwickelnden Seiles. Nach vollem Ablauf des Seiles müssen noch 1 bis 2 Seil-

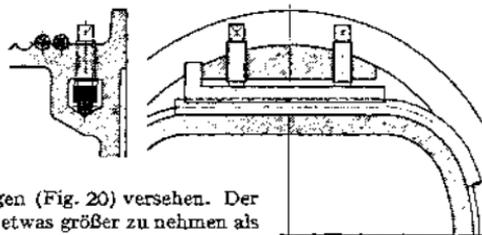


Fig. 21.

Tab. 6. Aufzug-Drahtseile der A.-G. für Seil-Industrie vorm. Ferdinand Wolff, Mannheim.

a) Baustoff: Patent-Tiegelstahl. (Sonderqualität.)

b) Baustoff: Patent-Pflugstahl.

Seil- durch- messer mm	Bauart A				Bauart B				Seil- durch- messer mm	Bauart E				Bauart F			
	Gesamt- Bruch- festigkeit kg	Draht- stärke δ mm	Trommel- durchm. D mm	Gewicht g kg/lfdm.	Gesamt- Bruch- festigkeit kg	Draht- stärke δ mm	Trommel- durchm. D mm	Gewicht g kg/lfdm.		Gesamt- Bruch- festigkeit kg	Draht- stärke δ mm	Trommel- durchm. D mm	Gewicht g kg/lfdm.	Gesamt- Bruch- festigkeit kg	Draht- stärke δ mm	Trommel- durchm. D mm	Gewicht g kg/lfdm.
8	3 900	0,55	220	0,27	3 500	0,45	180	0,28	8	5 000	0,55	240	0,27	4 550	0,45	200	0,28
10	5 200	0,65	260	0,40	5 300	0,55	220	0,40	10	6 750	0,65	280	0,40	6 900	0,55	240	0,40
12	8 100	0,80	320	0,55	7 500	0,65	260	0,60	12	10 500	0,80	340	0,55	9 750	0,65	280	0,60
14	11 600	0,95	380	0,75	10 400	0,80	320	0,80	14	15 100	0,95	400	0,75	13 500	0,80	330	0,80
16	14 100	1,05	440	1,05	13 600	0,90	360	1,05	16	18 300	1,05	470	1,05	17 700	0,90	380	1,05
18	18 300	1,20	500	1,35	16 900	1,00	420	1,35	18	23 800	1,20	550	1,35	21 900	1,00	440	1,35
20	21 600	1,30	580	1,65	20 400	1,10	500	1,65	20	28 100	1,30	630	1,65	26 500	1,10	500	1,65
22	26 800	1,45	660	2,00	24 200	1,20	590	2,00	22	34 800	1,45	690	2,00	31 400	1,20	550	2,00
24	32 400	1,60	750	2,30	31 100	1,35	675	2,35	24	42 100	1,60	800	2,30	40 400	1,35	630	2,35
26	37 000	1,70	850	2,70	35 400	1,45	740	2,75	26	48 100	1,70	900	2,70	46 000	1,45	700	2,75
28	43 700	1,85	900	3,20	40 300	1,55	825	3,20	28	57 000	1,85	1 000	3,20	52 400	1,55	775	3,20
30	50 000	2,00	1 000	3,60	45 600	1,65	925	3,65	30	65 000	2,00	1 100	3,60	59 300	1,65	850	3,65
32	56 400	2,10	1 050	4,00	54 400	1,80	1 025	4,20	32	73 200	2,10	1 200	4,00	70 700	1,80	950	4,20
34	62 100	2,20	1 100	4,50	60 700	1,90	1 125	4,70	34	80 700	2,20	1 300	4,50	78 900	1,90	1 050	4,70
36	73 500	2,40	1 200	5,10	67 100	2,00	1 250	5,25	36	95 500	2,40	1 400	5,10	87 200	2,00	1 100	5,25
38	80 200	2,50	1 250	5,70	74 000	2,10	1 300	5,80	38	104 200	2,50	1 500	5,70	96 200	2,10	1 200	5,80
40	86 700	2,60	1 300	6,40	81 400	2,20	1 350	6,50	40	112 700	2,60	1 600	6,40	105 800	2,20	1 300	6,50
Bauart C				Bauart D				Bauart G				Bauart H					
8	3 150	0,38	150	0,24	3 750	0,38	170	0,27	8	4 050	0,38	170	0,24	4 800	0,38	180	0,27
10	4 900	0,45	170	0,35	5 800	0,45	190	0,40	10	6 350	0,45	190	0,35	7 500	0,45	200	0,40
12	7 000	0,55	200	0,50	8 400	0,55	220	0,60	12	9 100	0,55	220	0,50	10 900	0,55	230	0,60
14	9 500	0,65	240	0,70	10 400	0,65	260	0,80	14	12 300	0,65	250	0,70	14 700	0,65	270	0,80
16	12 400	0,75	280	0,95	14 800	0,75	300	1,05	16	16 100	0,75	290	0,95	19 300	0,75	320	1,05
18	15 900	0,85	320	1,20	19 000	0,85	350	1,35	18	20 600	0,85	340	1,20	24 700	0,85	370	1,35
20	19 500	0,95	380	1,45	23 400	0,95	390	1,70	20	24 300	0,95	380	1,45	29 100	0,95	400	1,70
22	23 400	1,05	450	1,80	28 000	1,05	480	2,10	22	30 400	1,05	460	1,80	36 400	1,05	480	2,10
24	27 800	1,15	520	2,10	33 600	1,15	550	2,45	24	36 100	1,15	530	2,10	43 300	1,15	560	2,45
26	32 600	1,25	600	2,45	39 100	1,25	630	2,95	26	42 300	1,25	580	2,45	50 700	1,25	640	2,90
28	37 900	1,35	650	2,85	45 500	1,35	680	3,40	28	49 200	1,35	650	2,85	59 000	1,35	700	3,40
30	43 800	1,40	700	3,30	52 500	1,40	730	3,80	30	56 900	1,40	720	3,30	68 100	1,40	750	3,80
32	49 800	1,50	750	3,70	59 700	1,50	780	4,20	32	64 700	1,50	780	3,70	77 600	1,50	800	4,20
34	56 200	1,60	825	4,20	67 400	1,60	850	4,80	34	73 000	1,60	850	4,20	87 600	1,60	870	4,80
36	62 800	1,70	925	4,70	75 300	1,70	950	5,40	36	81 600	1,70	925	4,70	97 900	1,70	950	5,40
38	69 600	1,80	975	5,20	83 500	1,80	1 000	6,00	38	90 400	1,80	1 025	5,20	108 400	1,80	1 050	6,00
40	77 000	1,90	1 050	5,80	92 400	1,90	1 080	6,80	40	100 100	1,90	1 100	5,80	120 000	1,90	1 150	6,80

windungen zum Schutze der Endbefestigung des Seiles (Fig. 21) verbleiben. Zulässige Ablenkung des Seiles aus der Mittellage $\leq \frac{1}{50}$, bzw. kleinste Achsenentfernung zwischen Trommel und Rollen etwa gleich 25- bis 30fache Trommelbreite. Wirkungsgrad der Drahtseiltrommeln $\eta = \infty, 0,95$.

Fig. 22 zeigt die Ausführung einer Drahtseiltrommel für eine elektrisch betriebene Laufwinde (Seilzug s. Fig. 112, S. 1125). Die Trommel wickelt in 2 Seilsträngen auf und ist daher mit Rechts- und Linksgewinde versehen.

Sie ist entweder auf der Welle aufgekeilt oder läuft lose auf der festgestellten Welle. Trommeln für größere Arbeitgeschwindigkeiten erhalten in den Nabenbohrungen Buchsen aus Phosphorbronze. Die Verbindung von Trommel und Trommelrad geschieht durch Verschrauben (Fig. 22). Bei älteren Ausführungen ist das Trommelrad auf einem Ansatz der Trommel warm aufgezogen und durch einen Rundkeil gesichert.

Reibungs-(Frikions-)Trommeln (Fig. 23) finden bei Aufzügen und Förderhaspeln Verwendung. Zwei gleiche Trommeln mit eingedrehten Rillen liegen

so nebeneinander, daß ein Seil beide Trommeln mehrmals umschlingt. Die Arbeitsweise der Reibungstrommeln ist die gleiche wie die einer einfachen Windentrommel mit gleichgroßem wirksam umspannten Bogen. Verhältnis der auf- und ablaufenden Span-

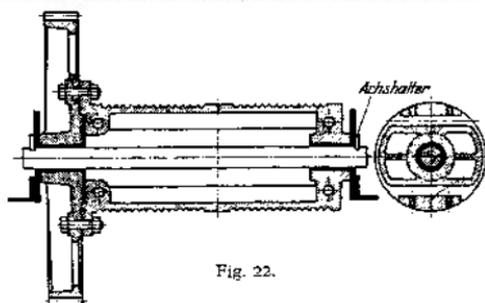


Fig. 22.

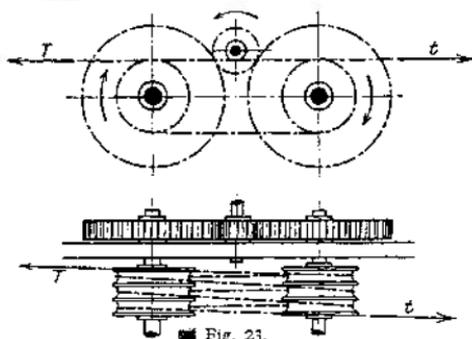


Fig. 23.

nungen $\frac{T}{t} = e^{\mu\alpha}$; μ = Reibungszahl zwischen Trommel und Seil gleich 0,13 für Drahtseil auf Gußeisen, α = gesamt Umspannungsbogen.

Spilltrommeln. Sie sind ein wesentlicher Teil der Spillwinden und dienen zum Einholen langer Seile. Die Trommel ist meist stehend angeordnet (Fig. 24).

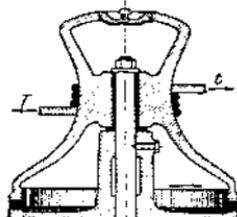


Fig. 24.

Ein am ablaufenden Seilende von Hand ausgeübter Zug t erzeugt nach obiger Gleichung infolge der Reibung am Trommelumfang im auflaufenden Seilende einen Zug

$$T = t \cdot e^{\mu\alpha}.$$

Das Umsetzungsverhältnis k berechnet sich zu¹⁾ $\frac{T}{t} = k^u$ für u -fache Umschlingung,

$$\alpha = 2\pi u \quad \text{und} \quad k = e^{2\pi\mu} = 535,5^{\mu},$$

wobei folgende Reibungszahlen in Betracht kommen:

$\mu = 0,10$	$0,17$	$0,22$	$0,26$	$0,31$	$0,37$	$0,43$	$0,48$
$k = 2$	3	4	5	7	10	15	20

Beisp. $\mu = 0,26$; $k = 5$; $u = 3$ fache Umschlingung, $\frac{T}{t} = 5^3 = 125$ kg.

Mit $t = 8$ kg wird also ein Seilzug $T = 1000$ kg erzeugt.

3. Rollenachsen und Trommelwellen.

a) Rollenachsen. Baustoff: Flußstahl. Berechnung auf Biegung und zulässige

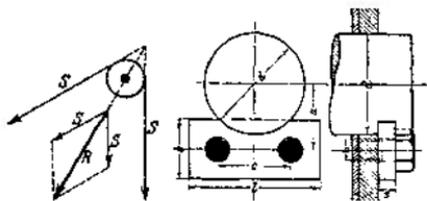


Fig. 25.

Fig. 26.

Flächenpressung. Belastung durch die Mittelkraft R (Fig. 25). Bei festgestellter Achse (Fig. 26) und lose laufender Rolle (z. B. Fig. 18) zulässige Beanspruchung $k_p = 600$ bis 800 kg/cm². Zulässige Flächenpressung p zwischen Achse und Schild (Flußstahl auf Flußseil) bis 1000 kg/cm². Meist Anordnung eines Verstärkungsbleches.

¹⁾ Lindner, Maschinenelemente.

Tab. 7. Abmessungen der Achshalter (mm) (Fig. 26).

d	a	s	b	l	c	Δ
40	30	10	35	80	45	$1/2''$
45	35	10	40	90	50	"
50		12	40	90	50	"
55	40	12	40	95	55	"
60		12	40	95	55	$5/8''$
65	45	12	45	100	60	"
70	50	14	45	100	60	"
75		14	45	100	60	"
80	55	14	45	100	60	"
85	60	16	45	110	65	"
90		16	50	110	65	$3/4''$
100	65	16	50	120	70	"

Ist die Rolle auf der drehbaren Welle aufgekeilt, so wird zulässige Beanspruchung nur $k_b = 400 \sim 500 \text{ kg/cm}^2$.

Zulässige Flächenpressung zwischen Achse und Rollennabe bzw. Zapfen und Lagerschale: Bei Schmierung mit konsistentem Fett, Relativgeschwindigkeit der Lagerfläche unter 0,25 m/sek, Baustoff: Flußstahl auf Gußeisen bzw. Phosphorbronze.

Achsendurchmesser unter 100 mm $p = 30$ bis 80 kg/cm^2

Achsendurchmesser von 100 bis 200 mm $= 75$ bis 120 kg/cm^2 .

Bei höheren Relativgeschwindigkeiten sind diese Werte je nach Art der Schmierung niedriger zu nehmen.

b) Trommelwellen. Baustoff: Flußstahl. $k_b = 600$ bis 800 kg/cm^2 . Ist die Trommelwelle mittels Achshalter festgestellt und läuft die Trommel lose auf der Welle, so erfolgt die Berechnung nur auf Biegung. Flächenpressung zwischen Welle und Trommelnabe wie unter Rollachsen.

Bei aufgekeilter Trommel ist die Welle wegen der hinzutretenden drehenden Beanspruchung auf zusammengesetzte Festigkeit zu berechnen. Bei abgesetzter Welle sind die Zapfen auf Biegung zu berechnen, auch haben sie den obigen Werten für Flächenpressung, die bei Handantrieb höher genommen werden können, zu genügen.

Näheres über Wellenberechnung s. Maschinenteile, S. 600.

II. Lasthaken.

Baustoff: Zähes Schmiedeeisen (Feinkorneisen), meist Flußeisen, seltener Stahlguß.

Der Form nach unterscheidet man offene und geschlossene Haken (Lastbügel).

a) Einfache Haken (Fig. 27). Hauptsächlich für kleinere und mittlere Tragfähigkeiten (bis etwa 25 t) bei Hubgeschwindigkeiten bis etwa 0,25 m/sek.

Die Maulweite w richtet sich nach der Größe der Nutzlast bzw. dem Durchmesser der Anschlagseile. Die Bauhöhe h_1 ist möglichst niedrig zu halten. Der Haken selbst wird drehbar in dem Querstück (Traverse) gelagert.

Für Haken mittlerer und höherer Tragkraft wird zur Verringerung der Reibung ein einstellbares Kugelspurlager angeordnet. Tabelle der Kugelspurlager s. S. 1078.

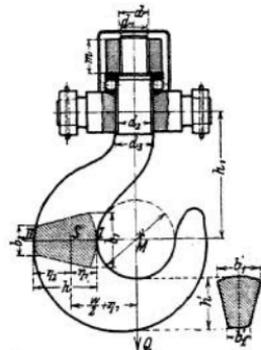


Fig. 27.

Der Hakenschaft muß mit Spielraum in der Bohrung des Querstückes sitzen und unterhalb desselben durch Vergrößern des Durchmessers gegen Abheben gesichert sein.

Haken kleinerer Tragfähigkeit werden gepreßt, solche von größerer Tragfähigkeit geschmiedet.

Berechnung. Der Schaft wird im Kernquerschnitt des Gewindes auf Zug berechnet.

$$Q = \frac{d_1^2 \pi}{4} \cdot k_z \dots \text{kg.}$$

$k_z = 300$ bis 800 kg/cm^2 für Haken kleinerer bzw. größerer Tragfähigkeit, in Mittel $k_z = 500 \text{ kg/cm}^2$.

Das Gewinde ist auf Flächenpressung zu untersuchen. Bedeutet z die Anzahl Gänge auf die Mutterhöhe m , so ist

$$p = \frac{Q}{(d^2 - d_1^2) \frac{\pi}{4} \cdot z} \dots \text{kg/cm}^2.$$

Zulässige Flächenpressung (Flußeisen auf Flußeisen) $p = 100$ bis 200 , im Mittel 150 kg/cm^2 .

Sämtliche Hakenquerschnitte vom Schaft bis zum Hakenmaul sind auf Zug und Biegung beansprucht. Daher Berechnung des gekrümmten Hakenteils auf zusammengesetzte Festigkeit.

Gefährlicher Querschnitt bei I—II: Querschnitt für kleinere Haken, die untergeordneten Zwecken dienen, kreisförmig, für größere elliptisch, allgemein jedoch angenäherte Trapezform üblich.

Bei der einfachen Hakenberechnung wird der Haken als gerader, einseitig belasteter Stab betrachtet. Hierfür gelten mit Bezug auf Fig. 27 die Gleichungen:

$$\text{Größte Zugbeanspruchung (bei I)} \quad k_z = \frac{Q}{f} + \frac{Q \cdot \left(\frac{w}{2} + \eta_1 \right)}{W_1} \dots \text{kg/cm}^2,$$

$$\text{Größte Druckbeanspruchung (bei II)} \quad k = - \frac{Q}{f} + \frac{Q \cdot \left(\frac{w}{2} + \eta_1 \right)}{W_2} \dots \text{kg/cm}^2.$$

Unter Vernachlässigung der zur Schonung der Anschlagseile erforderlichen Abrundungen wird für den Trapezquerschnitt (Fig. 28):

$$\text{Querschnittsfläche} \quad f = h \cdot \frac{b_1 + b_2}{2} \dots \text{cm}^2;$$

$$\text{Trägheitsmoment} \quad J = \frac{h^3}{36} \cdot \frac{(b_1 + b_2)^2 + 2 b_1 b_2}{b_1 + b_2} \dots \text{cm}^4;$$

$$\text{Faserabstände} \quad \eta_1 = \frac{h}{3} \cdot \frac{b_1 + 2 b_2}{b_1 + b_2} \dots \text{cm};$$

$$\eta_2 = \frac{h}{3} \cdot \frac{2 b_1 + b_2}{b_1 + b_2} \dots \text{cm};$$

$$\text{Widerstandsmomente} \quad W_1 = \frac{J}{\eta_1}; \quad W_2 = \frac{J}{\eta_2} \dots \text{cm}^3.$$

Um den Baustoff möglichst auszunutzen, setzt man, was jedoch nicht unbedingt erforderlich, $k_z = k$. Die Höhe h des gefährlichen Querschnittes ist anzunehmen. Das Verhältnis $\frac{b_1}{b_2}$ kann zu 2 bis 3,5 gesetzt werden.

Zulässige Beanspruchung k_z bzw. $k = 500$ bis 800 kg/cm², für kleinere bzw. größere Tragfähigkeiten. Etwas genauer kann die Spannung k_z bzw. k ermittelt werden, wenn man den Querschnitt als zusammengesetzten Querschnitt (aus zwei Kreisabschnitten und einem Trapez) betrachtet.

Die genauere Hakenberechnung nach Bach betrachtet den Haken, der Tatsache entsprechend, als gekrümmten Stab. Die allgemeine Gleichung für den gekrümmten Stab (s. Festigkeitslehre) ergibt alsdann unter Einführung von

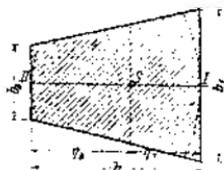


Fig. 28.

$$P = Q; \quad r = \frac{w}{2} + \eta_1;$$

$$\eta_{\max} = -\eta_1 \quad \text{bzw.} \quad \eta_{\max} = +\eta_2; \quad M_b = -Q \cdot \left(\frac{w}{2} + \eta_1 \right);$$

für die

$$\text{größte Zugbeanspruchung (bei I)} \quad k_z = \frac{Q}{f} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\eta_1}{w} \dots \text{kg/cm}^2;$$

$$\text{größte Druckbeanspruchung (bei II)} \quad k = -\frac{Q}{f} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\eta_2}{\frac{w}{2} + \eta_1 + \eta_2} \text{kg/cm}^2.$$

Für den Trapezquerschnitt kann gesetzt werden:

$$\varepsilon = -1 \cdot \frac{2r}{(b_1 + b_2) \cdot h} \cdot \left[\left\{ b_2 + \frac{b_1 - b_2}{h} \cdot (\eta_2 + r) \right\} \ln \frac{r + \eta_2}{r - \eta_1} - (b_1 - b_2) \right].$$

Die zulässige Zugbeanspruchung k_z (bzw. k) kann bei der Bachschen Berechnung höher zugelassen werden, und zwar für vorzügl. Schweiß- bzw. Flußeisen $k_z = 800 \sim 1300$ kg/cm² (für Haken von etwa 1 t Tragfähigkeit ab).

Statt der umständlichen Berechnung des Wertes ε bedient man sich am besten der zeichnerischen Ermittlung nach Tolle¹⁾.

Mit Bezug auf Fig. 29 wird:

$$\varepsilon = \frac{1}{f} \cdot \sum_{\eta=\eta_1}^{\eta=-\eta_2} \frac{\Delta f \cdot \eta}{r + \eta} = \frac{f'' - f'}{f};$$

die Flächen f' und f'' ergeben sich dadurch, daß die Flächenteilchen Δf im Verhältnis

$$\frac{\eta}{r + \eta}$$

verkleinert werden.

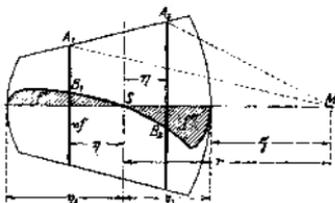


Fig. 29.

Konstruktion: $SB_1 \parallel A_1M$ bzw. $SB_2 \parallel A_2M$. Durch genügend zahlreiches Wiederholen dieser Konstruktion ergibt sich die in der Figur gekennzeichnete Querschnittsform, deren Flächeninhalt am einfachsten mit dem Planimeter ermittelt wird.

Die genaue Hakeaberechnung ergibt um etwa 40% höhere Beanspruchungen für k_z bzw. k als die einfache.

Tabelle der einfachen Haken s. S. 1076.

Haken mit Abweiser. Um zu vermeiden, daß sich bei Verladekränen die Hakenspitze beim Hochziehen des Hakens an Schiffsluken u. dgl. verfängt, versieht man den Haken mit einem Abweiser (Fig. 34, S. 1078).

¹⁾ S. S. 472 ff.

Sicherheitshaken. Bei höheren Hubgeschwindigkeiten werden die Haken zum Schutze gegen Herauspringen der Last mit einem Karabinerverschluß ausgerüstet.

Tab. 8. Einfache Haken (Fig. 27).

Tragkraft Q	Maulweite w	Gewinde			Mutterhöhe m	Schaft mm			Querschnitt I—II			Senkrechter Querschnitt		
		d Zoll	d mm	d_1 mm		d_0 1)	d_1	d_2	h	b_1	b_2	h'	b_1'	b_2'
1	70	1	25,4	21,33	35	35	37	42	50	40	18	38	35	20
2,5	80	1 1/2	38,1	32,7	40	40	42	47	70	55	25	60	50	30
5	100	1 3/4	44,4	37,9	55	55	57	65	95	80	30	75	60	32
7,5	110	2	50,8	43,6	65	65	68	75	115	95	40	95	75	42
10	120	2 1/4	57,1	49,0	75	75	78	85	130	110	45	110	90	48
12,5	140	2 1/2	63,5	55,4	80	80	83	90	145	125	48	125	105	53
15	150	2 3/4	68,8	60,5	85	85	88	95	160	140	54	140	110	58
20	160	3 1/4	82,5	72,6	90	90	94	104	170	150	58	150	120	63
25	190	3 1/2	88,9	79	110	100	104	114	190	165	64	165	135	72
30	205	3 3/4	95,2	84,4	130	105	109	120	205	180	70	180	145	77
50	250	4 3/4	120,6	108,4	150	145	149	160	255	230	88	225	190	95

b) Doppelhaken (Fig. 30). Anwendung bei Werkstätten-, Gießereikranen u. dgl. für mittlere und größere Lasten (etwa von 10 t ab). Baustoff: wie für einfache Haken.

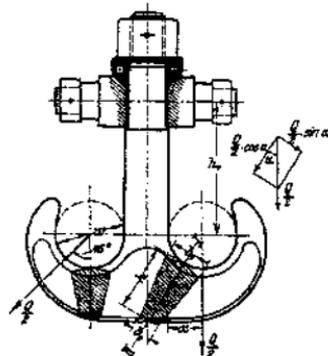


Fig. 30.

Die Berechnung des Schaftes ist die gleiche wie beim einfachen Haken. Für den gekrümmten Teil kann angenommen werden, daß jedes Hakenmaul die Hälfte der senkrecht gerichteten Last aufnimmt. Unter dieser Annahme liegt der gefährliche Querschnitt bei I—II. Die Zerlegung von $\frac{Q}{2}$ ergibt eine Normalkraft $\frac{Q}{2} \cdot \sin \alpha$ und eine in der Ebene wirkende Schubkraft $\frac{Q}{2} \cdot \cos \alpha$, die bei der Berechnung vernachlässigt wird.

Mit einem Biegemoment

$$M_b = \frac{Q}{2} \cdot x$$

ergeben sich für einfache Hakenberechnung die Beanspruchungen:

$$\text{Größte Zugspannung (bei I)} \quad h_z = \frac{\frac{Q}{2} \cdot \sin \alpha}{f} + \frac{\frac{Q}{2} \cdot x}{W_1} \dots \text{kg/cm}^2;$$

$$\text{größte Druckspannung (bei II)} \quad h = -\frac{\frac{Q}{2} \cdot \sin \alpha}{f} + \frac{\frac{Q}{2} \cdot x}{W_2} \dots \text{kg/cm}^2.$$

Querschnitt mitunter elliptisch. Meist jedoch wie beim einfachen Haken trapezförmig. Querschnittsfunktionen für den Trapezquerschnitt s. S. 1074. Zulässige Beanspruchungen S. 1075.

1) Bohrung der oberen Kugellagerplatte.

Wird die halbe Last, wie dies vielfach geschieht, schräg angreifend (unter 45°) angenommen, so sind weitere Querschnitte (Fig. 30) rechnerisch zu prüfen.

Tab. 9. Doppelhaken (Fig. 30).

Tragkraft Q	Maulweite w	Gewinde			Mutterhöhe m	Schaft mm			Querschnitt I-II			Senkrechter Querschnitt		
		d	d	d_1		d_0	d_2	d_3	h	b_1	b_2	h'	b_1'	b_2'
t	mm	Zoll	mm	mm	mm	¹⁾								
10	110	$2\frac{1}{2}$	63,5	55,4	75	70	73	80	116	90	35	90	80	35
12,5	120	$2\frac{1}{2}$	63,5	55,4	75	70	73	80	131	90	40	105	85	40
15	130	$2\frac{3}{4}$	69,8	60,5	80	75	78	85	143	100	40	115	90	40
20	150	$3\frac{1}{4}$	82,5	72,6	95	90	94	104	158	110	45	120	105	45
25	160	$3\frac{3}{4}$	95,2	84,4	110	100	104	114	180	125	45	140	115	45
30	180	4	101,6	90,7	115	105	109	120	194	135	50	150	125	50
40	200	$4\frac{1}{2}$	114,3	103	130	120	124	135	218	145	50	170	130	50
50	220	5	127	—	145	130	134	146	244	165	60	190	145	60
60	240	$5\frac{1}{2}$	140	—	160	145	150	168	268	180	70	210	160	70
80	270	$6\frac{1}{2}$	165	—	190	170	175	190	306	210	80	240	180	80
100	300	$7\frac{1}{2}$	190,5	—	210	195	200	220	345	235	95	270	205	95

c) Lastbügel (Osen) finden für schwere Lasten Verwendung. Sie haben den Nachteil, daß die Anschlagseile (bzw. Ketten) statt eingelegt durchgezogen werden müssen.

Baustoff wie für Haken.

Fig. 31 zeigt einen aus einem Stück geschmiedeten Lastbügel (für Tragfähigkeiten bis etwa 25 t). Berechnung der statischen Unbestimmtheit wegen nur angenähert durchführbar. Da ferner der vollkommenen Zusammenschweißung von

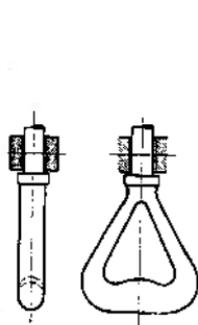


Fig. 31.

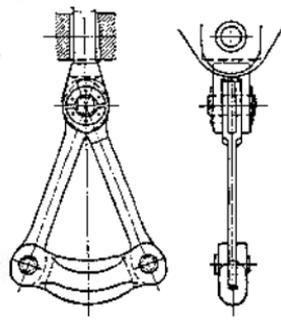


Fig. 32.

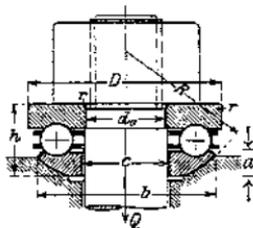


Fig. 33.

Schaft und Schenkel große Unsicherheit anhaftet, führt man den Lastbügel nach Fig. 32 mit drei Gelenken aus. In diesem Falle läßt sich eine genaue Festigkeitsberechnung durchführen.

Der meist mit elliptischem Querschnitt ausgeführte Tragbalken kann als frei aufliegender, in der Mitte belasteter Träger berechnet werden. Die Schenkel werden auf Zug beansprucht; ihre Augen sind am gefährlichen Querschnitt auf Biegung zu untersuchen. Desgleichen sind die Bolzen auf Biegung zu berechnen und auf zulässigen Flächenruck zu prüfen.

¹⁾ Bohrung der oberen Kugellagerplatte.

Tab. 10. Kugelspurlager der Maschinenfabrik „Rheinland“ A.-G. Düsseldorf (Fig. 33).

Tragfähigkeit Q	Abmessungen in mm							Kugel \varnothing	Tragfähigkeit Q	Abmessungen in mm							Kugel \varnothing
	d_0	c	D	b	h	a	R			t	d_0	c	D	b	h	a	
3,7	30	32	65	63	24	7	45	$\frac{7}{16}$	30	105	109	185	178	63	12	145	$1\frac{1}{8}$
4,8	35	38	75	72	28	7	55	$1\frac{1}{2}$	34	110	114	190	182	66	13	150	$1\frac{3}{8}$
5,2	40	43	80	78	29	7,5	60	$1\frac{1}{2}$	37,5	115	119	200	192	69	14	155	$1\frac{3}{8}$
6,6	45	48	90	87	31	9	65	$1\frac{9}{16}$	40	120	125	210	202	71	15,5	160	$1\frac{3}{4}$
8,1	50	53	100	97	34	9	75	$1\frac{5}{8}$	41,5	125	130	215	207	74	16	165	$1\frac{5}{8}$
10	55	58	105	102	37	9	80	$1\frac{11}{16}$	44	130	135	220	212	75	16,5	170	$1\frac{5}{8}$
10,6	60	63	110	107	38	9	85	$1\frac{11}{16}$	45,5	135	140	225	217	78	15	180	$1\frac{3}{4}$
12,5	65	68	120	116	42	10	90	$1\frac{3}{4}$	48,5	140	145	230	222	79	15,5	185	$1\frac{3}{4}$
14,5	70	73	130	123	45	9	100	$1\frac{13}{16}$	53	145	150	235	228	80	15,5	190	$1\frac{7}{8}$
15,8	75	78	135	128	46	9	105	$1\frac{13}{16}$	56	150	155	250	242	81	17	205	$1\frac{7}{8}$
17	80	83	140	132	49	9	110	$1\frac{7}{8}$	61	160	165	250	250	86	19	210	$1\frac{7}{8}$
18,4	85	88	145	138	49	9,5	115	$1\frac{7}{8}$	65	170	175	275	267	88	18	225	$1\frac{1}{2}$
21	90	93	155	148	52	9,5	120	$1\frac{15}{16}$	66,5	180	185	280	272	90	17,5	230	$1\frac{5}{8}$
24	95	98	165	158	55	10	130	$1\frac{1}{2}$	70	190	195	290	282	92	19	240	$1\frac{5}{8}$
27	100	104	175	168	60	12	135	$1\frac{1}{2}$	76	200	205	300	292	95	17,5	250	$1\frac{5}{8}$

$r = 2$ für sämtliche Spurlager.

III. Verbindung des Hakens mit dem Huborgan.

a) **Hakengeschirre.** Um bei kleineren Tragfähigkeiten (des geringen Haken- gewichtes wegen) eine genügende Geschwindigkeit zum selbsttätigen Senken des leeren Hakens zu erhalten, ist meist ein besonderes Belastungsgewicht an der Verbindung von Haken und Huborgan erforderlich. Fig. 34.

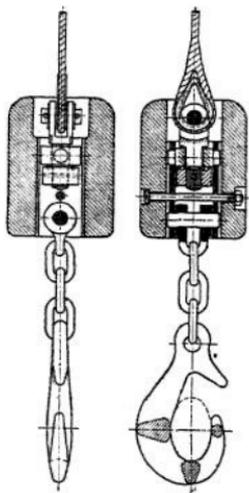


Fig. 34.

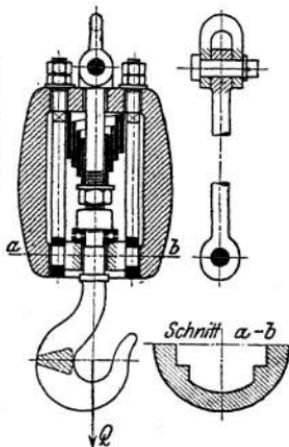


Fig. 35.

besonderes Belastungsgewicht an der Verbindung von Haken und Huborgan erforderlich. Fig. 34.

Elastische Hakengeschirre haben den Zweck, die bei schnellarbeitenden Hebezeugen beim Anheben auftretenden Stöße von Huborgan und Triebwerk fernzuhalten. Sie sind nur dann angebracht, wenn als Huborgan Ketten verwendet werden. Bei Drahtseilen, die im Gegensatz zu Ketten selbst genügend elastisch sind, ist eine

federnde Aufhängung nicht erforderlich.

Fig. 35 zeigt ein derartiges elastisches Hakengeschirr, wie es vielfach zur Anwendung gelangt. Als elastisches Zwischenmittel dient eine Evolutenfeder.

Zwischen den federnden, gewichtbelasteten Bügel und den Lashaken wird meist eine etwa 1 m lange Kette eingeschaltet, die eine besondere Beweglichkeit, wie sie z. B. beim Bedienen enger Schiffsluken erforderlich ist, ermöglicht.

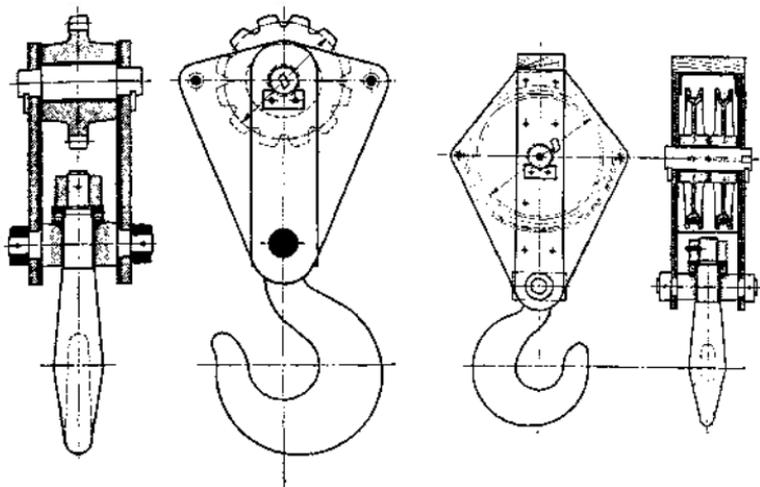


Fig. 36.

Fig. 37.

b) Kranflaschen. Kranflaschen für Gliederketten kommen bei von Hand angetriebenen Drehkränen, Laufwinden, Flaschenzügen u. dgl. vor. Um bei

letzteren ein Auspringen der Kette zu vermeiden, wird zweckmäßig ein in die Flasche eingebauter Führungsbügel vorgesehen.

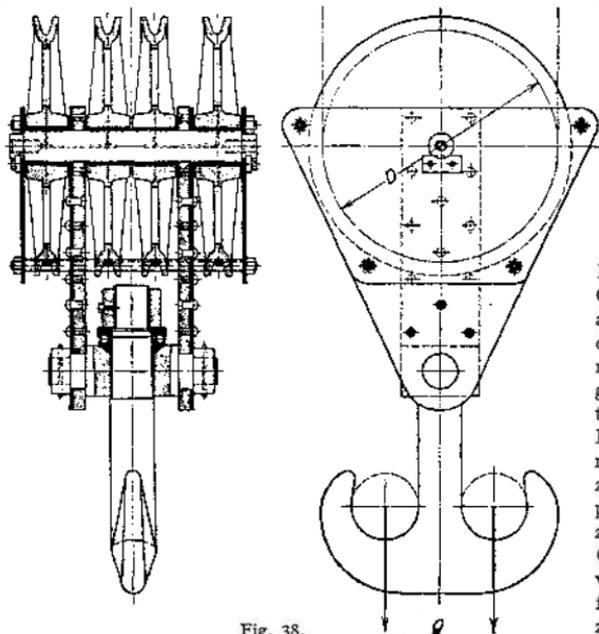


Fig. 38.

Fig. 36 gibt eine Kranflasche für Gallsche Kette als Huborgan wieder. Der Kettenradbolzen ist für gleichmäßig verteilte Belastung auf Biegung unter Berücksichtigung der zulässigen Flächenpressung (s.S.1073) zu berechnen. Das Querstück (Traverse) ist gleichfalls auf Biegung zu rechnen und als

Träger auf 2 Stützen mit der Einzellast in der Mitte zu betrachten. Eine etwaige Schwächung durch ein eingebautes Kugelspurlager ist zu berücksichtigen.

Fig. 37 stellt eine Kranflasche mit zwei Rollen für Drahtseil als Huborgan dar. Diese Flaschen finden bei elektrisch betriebenen Laufwinden (bis etwa 25 t Tragfähigkeit) ausgedehnte Anwendung. Die Last hängt hierbei an 4 Seilsträngen. In Rücksicht auf die höhere Geschwindigkeit werden die Rollen in der Regel mit Büchsen aus Phosphorbronze versehen. Zugehöriger Rollenzug s. Fig. 112, S. 1125.

Fig. 38 zeigt eine solche Flasche für 4 Rollen (Last hängt an 8 Seilsträngen), wie sie für elektrisch betriebene Laufwinden höherer Tragfähigkeit angewendet wird. Rollenzüge s. S. 1126.

IV. Handkurbeln und Haspelräder

dienen als Antriebsorgane für von Hand betriebene Winden, Krane u. dgl.

a) **Handkurbeln** (Fig. 39). Halbmesser der Kurbel $a = 300$ bis 400 mm. Kurbeldruck eines Arbeiters $K = 10$ bis 15 kg, vorübergehend bis 20 kg. Kurbelgeschwindigkeit $c = 0,5$ bis 1 m/sek.

Höhe der Kurbelwelle über Fußboden ≈ 1000 mm. Drehbarer Griff aus Holz oder Gasrohr. Grifflänge für 1 Mann bzw. 2 Mann $l = 300$ (500) mm.

Zwei Kurbeln auf einer Welle sind um 90° , besser 120° zu versetzen. Die vielfach gebräuchliche Versetzung um 180° ist nicht empfehlenswert.

Für die normale Kurbel Fig. 39 gelten die nicht eingeklammerten Maße für einmännige, die eingeklammerten für zweimännige Kurbeln. Baustoff des Kurbelarmes Flußeisen, vielfach auch Gußeisen.

Gewichtsausgleich der Kurbel kann durch ein auf der Verlängerung des Armes angebrachtes Gegengewicht geschehen. Verstellbare Kurbeln gestatten ein Verändern des Kurbelarmes, was mitunter zum Heben verschieden großer Lasten erwünscht ist.

Durchmesser der Kurbelwellen nach Ernst:

$$\begin{aligned} \text{Für fest gelagerte Kurbelwellen} & \left\{ \begin{array}{l} d = 30 \text{ mm bei Kurbeln für 1 Mann,} \\ \quad = 40 \text{ mm bei Kurbeln für 2 Mann;} \end{array} \right. \\ \text{für verschiebbare Kurbelwellen} & \left\{ \begin{array}{l} d = 37 \text{ mm bei Kurbeln für 1 Mann,} \\ \quad = 45 \text{ mm bei Kurbeln für 2 Mann.} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Sicherheitskurbeln s. S. 1091.

b) **Haspelräder** finden bei hochgelegenen Winden, Kränen u. dgl. Anwendung. Sie werden mittels endloser Kette ($d = 5$ bis 10 mm) vom Fußboden aus bedient. Gebräuchlicher Durchmesser des Rades bei Winden und Kränen $D = 250 \sim 800$ mm. (Im Aufzugsbau werden auch Haspelräder größeren Durchmessers verwendet.)

Zug an der Haspelkette je nach Hub 10 bis 30 kg pro Mann, vorübergehend 40 kg und mehr.

Ausführung der Haspelräder für kleinere Durchmesser (etwa bis 500 mm) in Gußeisen nach Art der Kettennüsse (s. S. 1061). Zur Berechnung des Teilkreisdurchmessers ist der großen Zähnezah und der geringen Ketteneisenstärke wegen die vereinfachte Gleichung S. 1061 anzuwenden. Größere Haspelräder werden zweckmäßig in Schmiedeeisen mit gußeisener Nabe ausgeführt.

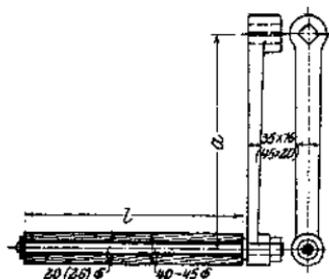


Fig. 39.

Um ein Herausspringen der Kette zu vermeiden, sind Kettenführungen vorzusehen.

Das tiefste Ende der Haspelkette soll etwa 30 bis 40 cm vom Fußboden entfernt sein.

V. Sperrwerke

haben den Zweck, die Last bei Aufhören der Antriebskraft in der jeweiligen Höhenlage festzuhalten. Sie sind Sicherheitsvorrichtungen und müssen daher selbsttätig wirken.

Bedeutet M das auf die Sperradwelle reduzierte Lastmoment und $2 R_1$ den Teilkreisdurchmesser des Sperrades, so ist die Umfangskraft $P = \frac{M}{R_1}$.

Zur Erzielung eines sicheren Eingriffes sind die Klinken durch Gewichte oder Federn zu belasten.

1. Zahn- oder Klinkengesperre.

Fig. 40 zeigt ein Zahngesperre mit äußerem Eingriff. Das Festhalten des Sperrades und damit der Last kann entweder durch eine Sperrklinke oder einen Sperrhaken (Fig. 93, S. 1109) geschehen. Baustoff des Sperrades: Gußeisen, Stahl-

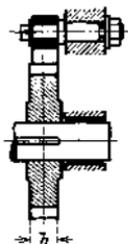


Fig. 40.

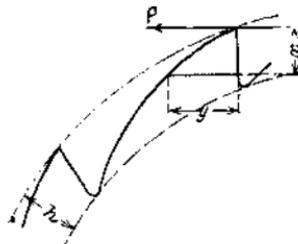


Fig. 41.

guß, mitunter Schmiedeeisen (bei den Drucklagerbremsen der Flaschenzüge auch Phosphorbronze). Gebräuchliche Zähnezahl $z = 8$ bis 12, mitunter auch bis 20.

$\psi = \frac{b}{t} = 1$ bis 2. Zahnhöhe etwa 10 bis 20 mm. Zähne nicht radial, sondern tangential an einen Kreis mit dem Halbmesser $0,3 R_1$. Günstigster Eingriffsort der Klinke: Berührungspunkt der Tangente vom Klinkendrehpunkt an den Teilkreis.

Die Sperradzähne sind im Entwurf aufzuzeichnen und auf Biegung zu berechnen. Mit Bezug auf Fig. 41 ist nach Ernst:

$$M_b = P \cdot x = W \cdot k_b = \frac{b y^3}{6} \cdot k_b;$$

$$k_b = \frac{6 P \cdot x}{b y^3}.$$

Der Berechnung ist derjenige Querschnitt zugrunde zu legen, der für $\frac{x}{y^3}$ bzw. k_b den größten Wert ergibt.

Zulässige Biegebungsbeanspruchung in Rücksicht auf Stöße:

Gußeisen $k_b \leq 200$ bis 300 kg/cm²; Flußeisen $k_b \leq 400$ bis 500 kg/cm².

Die Teilung ist als Vielfaches von π anzugeben. Durchmesser

$$D_1 = 2 R_1 = z \cdot \frac{t}{\pi}.$$

Bei großen Durchmessern wird P klein, dagegen wird die Umfangsgeschwindigkeit groß, was bei eintretenden Stößen, die mit dem Quadrat der Umfangsgeschwindigkeit wachsen, zu beachten ist. Sperrklinke bzw. Haken (Baustoff: Flußeisen) sind auf exzentrischen Druck bzw. Zug zu rechnen. Der Klinkenbolzen wird auf Biegung berechnet. Baustoff: Flußstahl; $k_b = 500$ bis 800 kg/cm^2 .

Zahngesperre mit innerer Verzahnung finden bei Sperradbremsten (s. S. 1090), wo sie eine gedrungene Bauart ermöglichen, Anwendung. Der Eingriffspunkt ergibt sich nach Fig. 42. Durch den Winkel $\gamma = 60^\circ$ ist die tangentielle Richtung der Zähne festgelegt.

Zur Vermeidung des klappernden Geräusches der Klinken, insbesondere bei motorischem Antrieb, sind gesteuerte Klinken (Fig. 43) anzuordnen. Bei

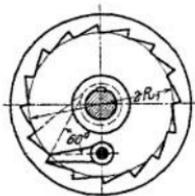


Fig. 42.

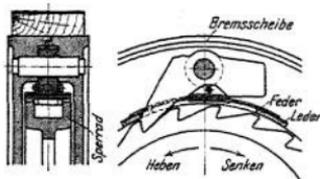


Fig. 43.

diesen bewirkt ein Reibzeug das Ausrücken der Klinken beim Aufwinden der Last, sowie das Einrücken bei Drehung im Senksinne.

Die Klinken der Sperradbremsten für elektrisch betriebene Hubwerke werden, um ein Ausheben durch die Fliehkraft zu verhindern, ausbalanciert.

Aus Sicherheitsgründen Anordnung zweier (um $\frac{1}{2} t$) oder dreier (um $\frac{1}{3} t$ versetzter) Klinken.

2. Reibungs- oder Klemmgesperre.

Den ungesteuerten Zahngesperren gegenüber bieten sie den Vorteil geräuschlosen Ganges. Klemmgesperre mit äußerem Eingriff finden ihres unsicheren Eingriffes wegen wenig Verwendung.

Klemmgesperre mit innerem Eingriff erhalten stets keilnutenförmigen Eingriff der Reibflächen (Fig. 44).

Sie sind in ihrer Wirkung zuverlässig und werden daher vielfach bei Sperradbremsten angewendet.

Keilwinkel $2\alpha = 45^\circ$ bis 50° ; $\mu = 0,1$; der Winkel β kann zwischen 10° und 30° gewählt werden, im Mittel $\beta = 20^\circ$. Zur Vermeidung einseitiger Wirkung Anordnung zweier im Durchmesser gegenüber liegender Klinken. Die fliegend angeordnete, glockenförmige Sperradscheibe ist der starken Radialdrücke wegen kräftig zu halten.

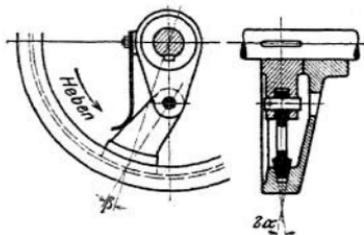


Fig. 44.

ordnete, glockenförmige Sperradscheibe ist der starken Radialdrücke wegen kräftig zu halten.

VI. Bremsen.

Man unterscheidet Hubwerks-, Fahrwerks- und Drehwerksbremsen.

Zweck der Hubwerksbremsen ist, die Last vor und nach dem Senken bzw. Heben festzuhalten, und die sinkende Last bei Beendigung der Senkbewegung zu verzögern, sowie die Senkgeschwindigkeit innerhalb der zulässigen Grenzen zu halten.

Als Halte- bzw. Verzögerungsbremse dient stets eine mechanische Bremse, während die Regelung der Senkgeschwindigkeit auch auf elektrischem Wege erfolgen kann (s. S. 1121).

Die Fahrwerksbremsen haben ein genaues Anhalten der fahrenden Katze oder des in Bewegung befindlichen Kranes zu bewirken.

Den Drehwerksbremsen fällt die gleiche Aufgabe für den in kreisförmiger Bewegung befindlichen Ausleger der Drehkrane zu.

Die Wahl sowie die Bemessung der anzuordnenden Bremse hängt von der Art des Betriebes der betreffenden Hebemachine, sowie von der Antriebsart ab. Bei motorischem Antrieb erfordern die Bremsen infolge der höheren Arbeitsleistung reichlichere Abmessungen als bei Handantrieb.

Die Erzeugung der Bremskraft erfolgt entweder durch Druck von Hand durch ein Gewicht, durch Federbelastung oder durch die Last selbst (Lastdruckbremsen).

Das Lüften der gewichtbelasteten Bremsen geschieht entweder von Hand, durch Fußtritt, mittels Seilzugs oder elektromagnetisch.

Zur Erlangung möglichst kleiner Brems Scheibendurchmesser setzt man die Bremse auf eine schnellaufende Vorgelegewelle. Bei elektrisch betriebenen Hebezeugen ordnet man sie in der Regel auf der elastischen Kupplung der Motorwelle an. In letzterem Falle ist der axialen Bewegung des Motorankers Rechnung zu tragen.

Die Berechnung der Hubwerksbremsen geschieht für das Lastmoment, bei motorischem Antrieb für die volle Motorleistung. Da die Bremse ferner die lebendige Kraft der in Bewegung befindlichen Massen innerhalb einer bestimmten Haltezeit vernichten, bzw. in Wärme umsetzen muß, so ist mitunter bei hohen Arbeitsgeschwindigkeiten und großen, schnell drehenden Massen eine weitergehende Berechnung erforderlich.

Auch bei den Fahrwerks- und Drehwerksbremsen sind die zu verzögernden Massen, insbesondere diejenige des Motorankers, je nach Umständen in Betracht zu ziehen.

Im folgenden bedeuten allgemein:

$M = P \cdot R_2$ das abzubremsende Lastmoment, bezogen auf die Bremswelle,
 $R_2 =$ Halbmesser der Brems Scheibe,

$P = \frac{M}{R_2}$ die Umfangskraft an der Brems Scheibe in kg,

μ die Reibungszahl zwischen Brems Scheibe und bremsendem Organ,

K die erforderliche Bremskraft, bzw.

G das zur Erzeugung derselben nötige Gewicht,

f' die Größe der Bremsfläche,

p die Flächenpressung in kg pro cm^2 Bremsfläche,

$v = \frac{2R_2\pi \cdot n}{60}$ die Gleitgeschwindigkeit in m/sek, wenn n die Drehzahl der Bremswelle und

$p \cdot v$ einen in Rücksicht auf Abnutzung des bremsenden Organes und genügende Wärmeabführung beschränkten Erfahrungswert.

Nach Art der Beschaffenheit des bremsenden Organes unterscheidet man: Backen- oder Klotzbremsen, Kegembremsen, Bandbremsen und Lamellenbremsen.

1. Backen-(Klotz-)Bremsen.

a) Die **einfache Backenbremse** (Fig. 45 und 46) kommt, da sie die Welle einseitig auf Biegung beansprucht, nur für kleinere Bremsmomente (Wellendurchmesser $d \leq 40$ mm) in Betracht.

Je nach Lage des Hebelrehpunktes und Richtung des Drehsinnes der Brems Scheibe ist die erforderliche Bremskraft bzw. das erforderliche Bremsgewicht verschieden.

Unter Vernachlässigung der Zapfenreibung und bei zylindrischen Reibflächen ergibt sich:

1. Drehpunkt des Bremshebels liegt um den Betrag c außerhalb der Tangente (Fig. 45).

$$K \text{ bzw. } G = \frac{N b \pm N \mu c}{l} = P \cdot \frac{b}{l} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \pm \frac{c}{b} \right).$$

Oberes Zeichen für Rechts-, unteres für Linksdrehung.

Stärke der Bremskraft im Vergleich zu Bauart 3 größer, dagegen kein Abkröpfen des Hebels b erforderlich. Für $\frac{c}{b} = \frac{1}{\mu}$ wird bei Linksdrehung K bzw. $G = 0$; Bremse wirkt selbsttätig.

2. Drehpunkt liegt in der Tangente (Fig. 46). $c = 0$.

$$K \text{ bzw. } G = N \cdot \frac{b}{l} = P \cdot \frac{b}{l \cdot \mu}.$$

Umfangsreibung ohne Einfluß auf die Bremskraft, daher Bremskraft für beide Drehrichtungen gleich.

3. Drehpunkt liegt innerhalb der Tangente. c negativ (Fig. 45).

$$K \text{ bzw. } G = \frac{N b \mp N \mu c}{l} = P \cdot \frac{b}{l} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \mp \frac{c}{b} \right).$$

Oberes Zeichen für Rechts-, unteres für Linksdrehung.

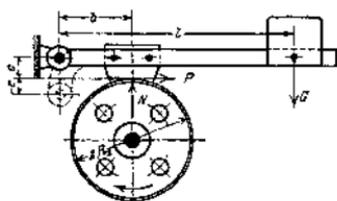


Fig. 45.

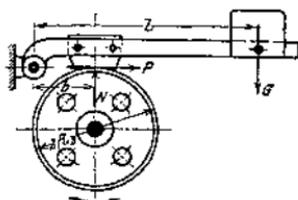


Fig. 46.

Bremskraft kleiner als bei Bauart 1, dagegen Abkröpfen des Hebels b erforderlich.

Für $\frac{c}{b} = \frac{1}{\mu}$ wird bei Rechtsdrehung K bzw. $G = 0$; Bremse wirkt selbsttätig.

Das Verhältnis $\frac{b}{l}$ ist praktisch bis $\frac{1}{2}$ ausführbar.

Als Reibungszahl zwischen Bremsbacke und Scheibe kann gesetzt werden: Gußeisen auf Gußeisen $\mu = 0,15$ bis $0,20$, Leder oder Holz auf Gußeisen $\mu = \infty, 0,3$.

Eine Erhöhung der Reibungszahl und damit eine Erhöhung der Bremswirkung wird durch keilförmiges Profil der Bremsbacken erzielt. Bedeutet α den halben Keilwinkel, so ist für die Reibungszahl μ bei zylindrischem Klotzprofil

$$\mu_1 = \frac{\mu}{\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha}$$

zu setzen, wobei die Größe $\mu \cdot \cos \alpha$ in der Regel vernachlässigt werden kann. Der Wert α wird, um ein Festklebmen der Bremsbacke zu vermeiden, zweckmäßig zu 45° angenommen.

Der Lüftweg der zylindrischen Bremsbacke soll, senkrecht zur Bremsfläche gemessen, mindestens $\frac{1}{2}$ bis 1 mm betragen. Am Bremsgewicht gemessen, ergibt sich für 1 mm Lüftung ein entsprechender Hub $h = 1 \text{ mm} \cdot \frac{l}{b}$, bei keilnutenförmiger Bremsbacke $h = 1 \text{ mm} \cdot \frac{l}{b} \cdot \frac{1}{\sin \alpha}$.

b) Die **doppelte Backenbremse** bietet der einfachen Backenbremse gegenüber eine Entlastung der Welle und findet daher zum Abbremsen größerer Kräfte Verwendung. Sie ist besonders dann angebracht, wenn die Bremse, wie z. B. bei Fahr- und Drehwerken, bei Aufzugs- und Fördermaschinen in beiden Drehrichtungen wirken soll und ein genaues Abheben des bremsenden Organs Bedingung ist.

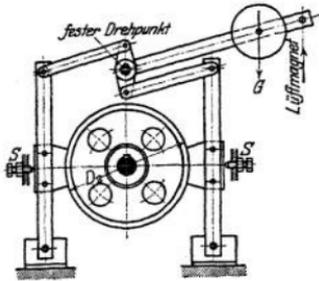


Fig. 47.

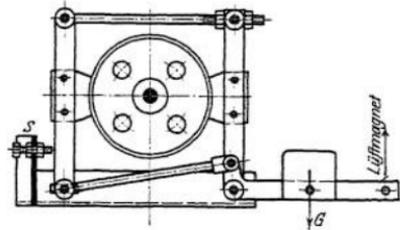


Fig. 48.

Gebräuchliche Hebelanordnungen zeigen die Fig. 47 bis 50. Zur Erzielung eines gleichmäßigen Lüftens beider Bremsbacken sind Stellschrauben *S* vorzusehen.

Für elektrisch betriebene Hebezeuge wird die doppelte Backenbremse durch ein Gewicht belastet und elektromagnetisch gelüftet. Letzteres geschieht je nach Stromart durch einen Elektromagnet oder einen Bremslüftmotor¹⁾. Fig. 50 zeigt eine zu einem elektrisch betriebenen Aufzug gehörige doppelte Backenbremse²⁾. Das Lüften geschieht durch einen Bremsmotor für einphasigen Wechselstrom.

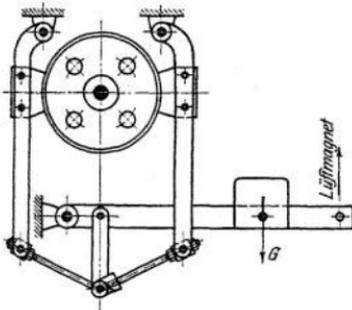


Fig. 49.

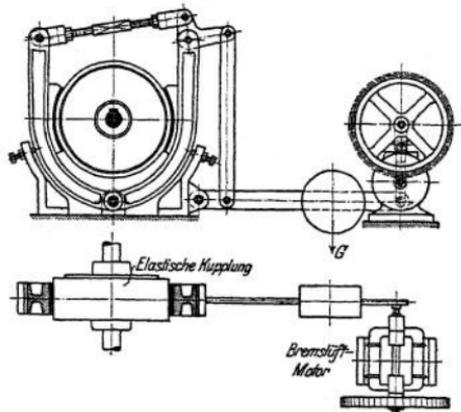


Fig. 50.

Für die Berechnung der Bremse kann angenommen werden, daß jede Backe annähernd die Hälfte der Umfangskraft abbremst. Die Größe des Bremsgewichtes ist durch die Hebelübersetzung und das bremsende Organ bedingt. Gebräuchliche Werte für die Reibungszahl s. S. 1084.

Wird die Bremskraft durch eine Feder erzeugt, so ist dieselbe, um ein Verringern der Bremskraft bei Abnutzung der Bremsbacken zu vermeiden, nur niedrig zu beanspruchen.

¹⁾ S. Elektrische Ausrüstung der Krane.

²⁾ Gebr. Weißmüller, Frankfurt a. M.

Die Backenbremsen sind zum Regeln der Senkgeschwindigkeit nicht geeignet, da sie sich der kleinen Bremsfläche wegen zu stark erwärmen. Bei Verwendung als Halte- bzw. Verzögerungsbremse sollte in Rücksicht auf Erwärmung der Bremscheibe und Abnutzung der Bremsbacken der Erfahrungswert $p \cdot \sigma = 20$ nicht überschritten werden.

2. Kegeltremsen

entsprechen in ihrer Bauart den Kegelkupplungen (s. Maschinenteile) und sind im Hebezeugbau von untergeordneter Bedeutung. Als selbständige Bremse wird die Kegeltremse kaum benutzt. Dagegen Verwendung als Teil bei Drucklagerbremsen (s. S. 1105) und Sicherheitskurbeln.

3. Bandbremsen.

Sie bieten den Backenbremsen gegenüber eine große Reibfläche und sind angebracht, wenn die Bremse nur in einer Drehrichtung beansprucht wird. Als bremsendes Organ dient ein um die Bremscheibe gelegtes, meist mit Holz oder Leder gefüttertes Stahlband.

Bezeichnen allgemein (Fig. 51 und 56 bis 58):

$P = \frac{M}{R_2}$ die abzubremsende Umfangskraft,

T die Spannung im auflaufenden Bandende,

t die Spannung im ablaufenden Bandende,

dann gelten die Beziehungen:

$$T = t \cdot e^{\mu \alpha}; \quad T - t = P; \quad t = \frac{P}{e^{\mu \alpha} - 1}; \quad T = \frac{P \cdot e^{\mu \alpha}}{e^{\mu \alpha} - 1}.$$

$e = 2,718$ = Grundzahl der natürlichen Logarithmen,

μ die Reibungszahl zwischen Bremsband und Scheibe,
 α den vom Bremsband umspannten Bogen, ausgedrückt als Vielfaches des ganzen Scheibenwinkels 2π ($= 360^\circ$).

a) **Einfache Bandbremse** (Fig. 51). Auf den Bremshebel wirkt nur die Kraft t ein, während die Spannung T ohne Einfluß auf die Bremskraft ist.

$$K \text{ bzw. } G = t \cdot \frac{b}{l} = P \cdot \frac{b}{l} \cdot \frac{1}{e^{\mu \alpha} - 1}.$$

Für entgegengesetzten Drehsinn vertauschen sich die Spannungen T und t , und ist daher die Bremswirkung $e^{\mu \alpha}$ mal größer.

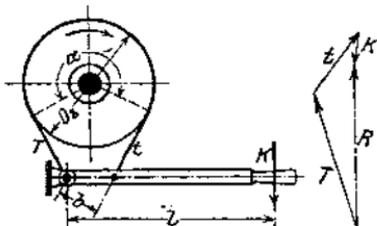


Fig. 51.

Das Verhältnis $\frac{b}{l}$ kann bis zu $\frac{1}{8}$ ausgeführt werden.

Bei Hubwerken mit Handantrieb erhält die Bremse die in Fig. 51 gegebene bauliche Ausführung, wobei als bremsendes Organ ein einfaches Stahlband dienen kann ($\mu = 0,15$ bis $0,2$). Zur Erzielung einer kräftigeren Bremswirkung, insbesondere bei motorisch betriebenen Hebezeugen, wird das Band mit Holz, Leder oder Ferrodo-Fiber gefüttert.

Für Holz oder Leder auf Gußeisen $\mu = 0,3$.

Der Wert $e^{\mu \alpha}$ hängt, nachdem der Baustoff gewählt, von dem Umspannungsbogen α ab und kann nebenstehender zeichnerischen Darstellung (Fig. 52) ent-

nommen werden. Für den häufig vorkommenden Umspannungsbogen $\alpha = 0,75 \cdot 2\pi$ ($\alpha = 270^\circ$) und holzgefüttertes Bremsband ergibt sich $e^{\mu \alpha} = \infty 4$.

Wird das Bremsband in mehreren Windungen um die Scheibe gelegt, so wird entsprechend der Windungszahl die Umfangsreibung und damit die Bremswirkung gesteigert.

Die erforderliche Lüftung des Bremsbandes soll, radial gemessen, mindestens 1 mm betragen. Am Gewicht G gemessen, ergibt sich alsdann ein Hub $h = 1 \text{ mm} \cdot \pi \cdot \frac{l}{b}$. Der Durchmesser der Bremscheibe ist durch den zur Ver-

fügung stehenden Raum bedingt und richtet sich bei motorischem Antrieb, um zu starke Erwärmung zu vermeiden, nach der Drehzahl der Bremswelle.

Die Berechnung des Bremsbandes erfolgt auf Zug mit der Spannung T unter Berücksichtigung der Nietschwächung. Baustoff: Stahl, $k_2 = 600 \sim 800 \text{ kg/cm}^2$. Übliche Breite des Bremsbandes b bis 80 mm; Stärke $\delta = 1\frac{1}{2}$ bis 3 mm.

Die Verbindung des Bremsbandes mit Leder oder Ferrodo-Fiber geschieht durch Kupfernieten, des Bremsbandes mit den hölzernen Futterklötzen durch Holzschrauben.

Für den Anschluß des Bremsbandes an die Bolzen ist zu beachten, daß die Zugkraft stets durch Mitte Bolzen gehen muß. Die Endbefestigung des Bremsbandes geschieht entweder durch Kloben aus Schmiedeisen oder Temperguß (Fig. 53 und 56) oder durch eine Band-schleife (Fig. 54, 60 und 61). In Rücksicht auf die Abnutzung des Bremsbandfutters wird die Verbindung von Bremsband und Kloben meist nachstellbar ausgeführt (Fig. 53 und 54).

Die Nieten zwischen Bremsband und Kloben sind auf Abscherung und, da sie kalt geschlagen werden und kein genügender Reibungsschluß vorhanden, auf Biegung zu berechnen. Die Bolzen der Bremsen werden auf Biegung beansprucht. Die Beanspruchung des festen Bolzens durch die Mittelkraft R kann zeichnerisch (Fig. 51 und 56) ermittelt werden.

Baustoff: Flußstahl $k_b = 400$ bis 600 kg/cm^2 (in Rücksicht auf Stöße).

Bandbremsen für elektrisch betriebene Hebezeuge erhalten ein Belastungsgewicht, das während der Hub- (oder Fahr-) Bewegung durch einen Bremsmagneten, bei Drehstrom und Einphasenstrom durch einen Bremsmotor gelüftet wird.

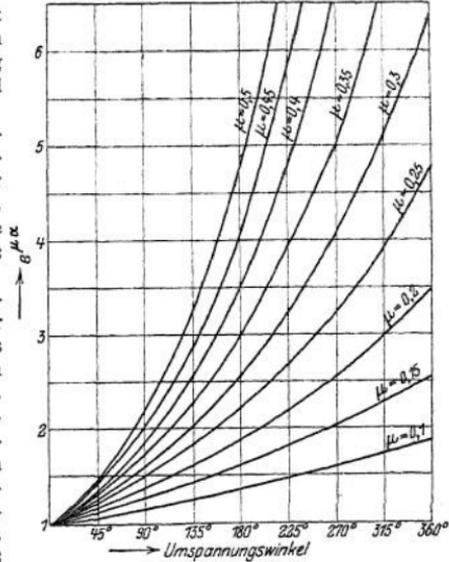


Fig. 52.

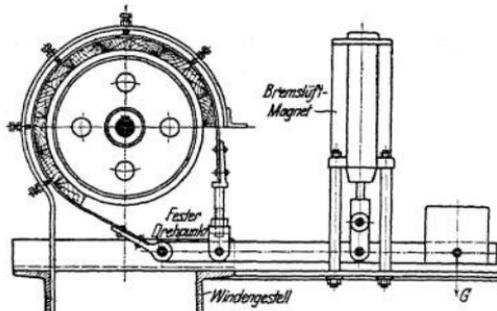


Fig. 53.

Fig. 53 zeigt z. B. die Ausführung der Haltebremse zum Hubwerk eines elektrisch betriebenen Laufkranes. Die Bremse ist auf der elastischen Kupplung zwischen Motor und Triebwerk angeordnet und wird durch einen Bremsmagneten mit ziehender Wirkung gelüftet.

Fig. 54 gibt eine durch einen Kniehebel-Bremsmagnet bediente Hubwerksbremse wieder.

Zur Erzielung einer gleichmäßigen Lüftung auf dem ganzen umspannten Bogen ist ein Flacheisenbügel mit einer entsprechenden Zahl Stellschrauben (S) anzuordnen.

Die bei den Bandbremsen auftretende einseitige Belastung der Bremswelle läßt sich durch eine Verbindung von Backen- und Bandbremse vermeiden.

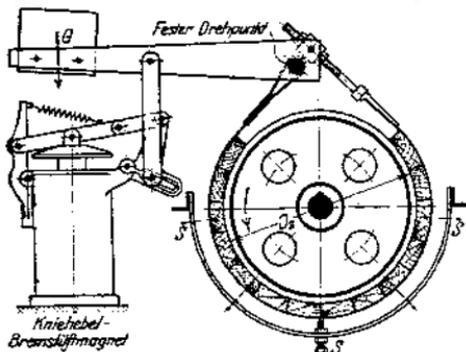


Fig. 54.

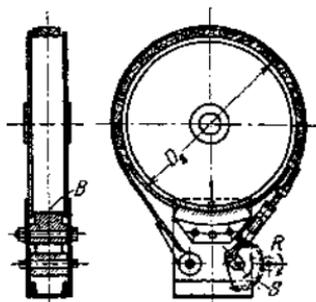


Fig. 55.

Fig. 55 zeigt eine derartige von der Firma Carl Flohr, Berlin, ausgeführte Bremse. Bei dieser sind die beiden Bandenden an einer senkrecht geführten Backe befestigt. Durch Drehung des Ritzels *R* und damit des Zahnradabschnittes *S* wird die Bremsbacke gehoben und gegen die Scheibe gepreßt. Neben einer Entlastung der Bremswelle wird hierdurch eine wesentliche Erhöhung der Bremskraft erreicht.

b) Die Differentialbremse (Fig. 56) ermöglicht eine wesentliche Verkleinerung

der Bremskraft, da die Spannung *T* im Sinne der Bremskraft wirkt. Unter Benutzung der Beziehungen S. 1086 ergibt sich für die eingezeichnete Drehrichtung die erforderliche Bremskraft zu

$$K \text{ bzw. } G = \frac{t \cdot b_2 - T b_1}{l} \\ = \frac{P}{l} \cdot \frac{(b_2 - b_1 \cdot e^{\mu \alpha})}{e^{\mu \alpha} - 1}$$

Bei entgegengesetztem Drehsinn vertauschen sich die Spannungen *T* und *t*, und es ergibt sich eine um $e^{\mu \alpha}$ größere Bremskraft.

Für praktische Ausführungen empfiehlt es sich,

$b_2 > b_1 \cdot e^{\mu \alpha}$ ($b_2 = 2,5, b_1$ bis $3 b_1$) zu halten; für $b_2 \leq b_1 \cdot e^{\mu \alpha}$ wirkt die Bremse selbstsperrend.

Die Differentialbremse findet Anwendung für Windwerke mit Handantrieb; für motorischen Antrieb wird sie der geringen Lüftung, sowie ihrer stoßweisen Wirkung wegen nicht gerne verwendet.

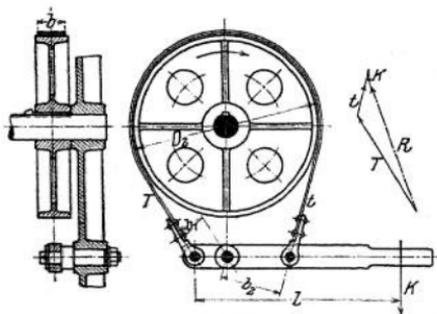


Fig. 56.

c) **Bandbremsen für wechselnde Drehrichtung** (Summenbremsen) (Fig. 57 und 58) kommen als Bremsen für Fahrwerke in Betracht, besitzen jedoch den Nachteil,

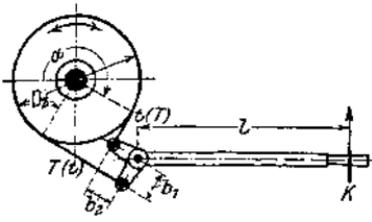


Fig. 57.

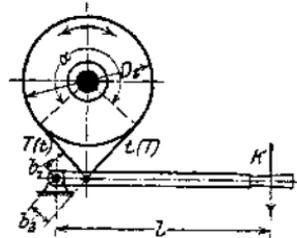


Fig. 58.

daß sie ein etwa 6 mal so großes Bremsgewicht erfordern wie die einfache Bandbremse. Man gibt daher der wesentlich günstigeren, doppelten Backenbremse den Vorzug.

Die erforderliche Bremskraft der Summenbremse ergibt sich für $b_1 = b_2 = b$ für beide Drehrichtungen zu

$$K \text{ bzw. } G = (T + t) \cdot \frac{b}{l} = P \cdot \frac{b}{l} \cdot \frac{e^{\mu\alpha} + 1}{e^{\mu\alpha} - 1}.$$

Für die Berechnung und Ausführung der Differentialbremse und der Summenbremse gelten die für die einfache Bandbremse gemachten Ausführungen.

4. Lamellenbremsen

finden in Verbindung mit Sperrwerken als Senksperrbremsen Verwendung.

Mehrere während des Bremsens feststehende bzw. umlaufende, sauber bearbeitete Scheiben werden axial gegeneinandergepreßt und so ein Reibungswiderstand erzeugt.

Bedeutet mit Bezug auf Fig. 59 i die Anzahl der reibenden (ringförmigen) Flächen, N den Anpressungsdruck und μ die Reibungszahl zwischen den festen und umlaufenden Scheiben, so ergibt sich — im mittleren Halbmesser der reibenden Flächen gemessen — die Reibung

$$R = i \cdot N \mu.$$

(Für $i = 1$ bzw. 2: Einfache Scheibenbremse.)

Baustoff der Bremsscheiben: Meist Stahl auf Phosphorbronze.

Werden statt glatter Bremsflächen keilförmige angeordnet, so sind diese unter leichtem Druck einzuschleifen.

Da die Bremse die Arbeit der sinkenden Last zu vernichten bzw. in Wärme umzusetzen hat, so ist zur schnelleren Ableitung der letzteren reichliche Bemessung, sowie Schmierung (zweckmäßig Ölbad) erforderlich.

Bei Benutzung der Bremse als Halte- bzw. Verzögerungsbremse kann eine Flächenpressung bis $p = 5 \text{ kg/cm}^2$ bei einer Gleitgeschwindigkeit $v = 10 \text{ m/sek.}$ zugelassen werden. Dient die Bremse als Regelungsbremse, so soll — bei Schmierung mittels Ölbad — der Erfahrungswert $p \cdot v = 25$ bis 30 in Rücksicht auf genügende Wärmeabführung nicht überschritten werden.

5. Sperrad-(Lüftungs-)Bremsen

stellen eine Vereinigung von Sperrwerk und Bremse dar. Fig. 60 zeigt eine gewöhnliche Sperradbremse, wie sie bei von Hand betriebenen Winden

zur Verwendung gelangt. Die Bremsscheibe sitzt lose auf der Welle, und ist durch ein Belastungsgewicht gestellt. Die Klinken sind an der Bremsscheibe drehbar befestigt, während das Sperrrad auf der Bremswelle aufkeilt ist. Bei

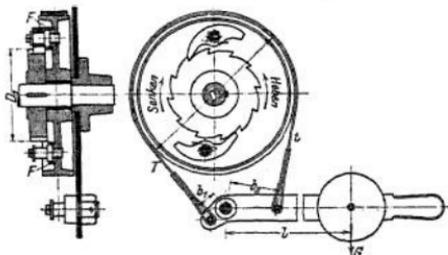


Fig. 60.

Bewegung im Hubsinne gleiten die Zähne des Sperrades unter den durch Spiralfedern *F* in Eingriff gehaltenen Klinken fort. Bei Aufhören der Antriebskraft findet entgegengesetzte Drehung statt. Sperrrad und Bremse werden gekuppelt, und die Last ist gestellt. Soll gesenkt werden, so wird der gewichtbelastete Hebel gelüftet, und Sperrrad und Bremse können sich im Senksinne drehen.

Zur Vermeidung des klappernen Geräusches werden die Sperrradbremsen entweder mit gesteuerten Klinken oder mit Reibungsklinken ausgestattet.

Bei der in Fig. 61 dargestellten geräuschlosen Sperrradbremse¹⁾ ist die auf der Welle lose laufende Bremsscheibe *S* mit Innenverzahnung versehen. Die Drehpunkte der Sperrklinken *K* sind an den Enden eines auf der Welle aufgekeilten doppelarmigen Hebels *H* angeordnet. Während des Hebens ist die Bremse

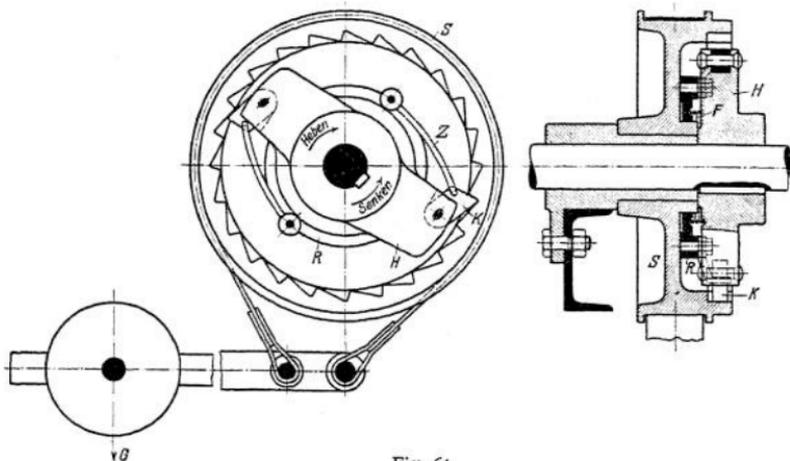


Fig. 61.

durch ein Gewicht *G* angezogen und damit die Bremsscheibe festgehalten. Ein durch Federkraft gegen die Bremsscheibe gepreßter Reibungsring *R* bewirkt mittels der Zugstangen *Z* bei Drehung im Hubsinne das Ausrücken der Klinken. Hört die Antriebskraft auf, dann findet Drehung im Senksinne statt, die Klinken werden durch das Reibzeug eingerückt, und die Last ist gestellt. Senken der Last geschieht durch Lüften des Bremshebels.

Die Sperrradbremsen werden auch bei motorisch betriebenen Hebezeugen als Halte- bzw. Verzögerungsbremsen benutzt. Hierbei kann die Bremse durch ein mit dem Steuerapparat gekuppeltes Gestänge oder von Hand gelüftet werden.

Das meist innen verzahnte Sperrwerk ist mit 2 oder 3 Klinken ausgerüstet, die durch einen Reibungswiderstand nach Art von Fig. 43 gesteuert werden.

¹⁾ Gebr. Weißmüller, Frankfurt a./M.

Fig. 62 zeigt eine Lüftungsbremse mit Reibungsklemmgesperre. Letzteres hat inneren, keilnutenförmigen Eingriff. Die Drehpunkte der federbelasteten Klinken sind an den Enden eines doppelarmigen, auf der Welle aufgekeilten Hebels angeordnet.

Die lose laufende, fliegend angeordnete Bremscheibe wird wie in Fig. 61 durch ein Belastungsgewicht festgehalten. Beim Heben gleiten die Klinken in der Keilnut der festgestellten Scheibe fort. Hört die Antriebskraft auf, dann findet Drehung im Senksinne statt, die Klemmwirkung tritt ein und die Last ist gestellt. Senken der Last, sowie Regeln der Senkgeschwindigkeit erfolgen durch Lüften der Bremse.

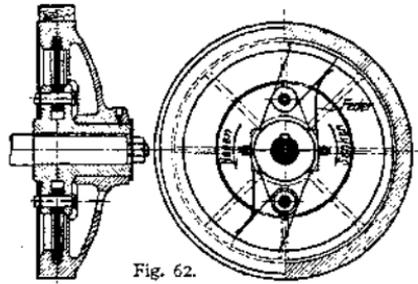


Fig. 62.

6. Sicherheitskurbeln.

Bei Winden mit Antrieb von Hand würden die herumschlagenden Kurbeln während des Lastsenkens die Bedienungsmannschaft gefährden. Man ordnet daher die Kurbelwelle ausrückbar an, oder bedient sich der Sicherheitskurbeln.

Bei der in Fig. 63 dargestellten Sicherheitskurbel ist die Kurbel zugleich Bremshebel. Die Bremscheibe *B* ist auf der Welle aufgekeilt, während das Sperrad *R* lose auf einem Ansatz der Scheibe läuft. Der Spreizring *S*, der federnd in die Scheibe eingesetzt wird, ist mit einem Ende an dem Sperrrad, mit dem anderen an dem Bremshebel bzw. der Kurbel befestigt. Während des Hebens werden Kurbel, Bremscheibe und Sperrad miteinander gekuppelt und letzteres gleitet unter der am Windengestell drehbar befestigten Sperrklinke fort. Bei Loslassen der Kurbel genügt die Reibung des federnden Ringes, um die Last mittels der Sperrklinke zu stellen. Soll gesenkt werden, so wird die Kurbel um den Lüftungsweg rückwärts gedreht und der Reibungsschluß aufgehoben. Das Senken geschieht wie bei einer gewöhnlichen Sperradbremse. Die Sicherheitskurbeln sind nur für Windwerke mit größerem Hub, über etwa 5 m, zu empfehlen. In diesem Falle ist jedoch der elektrische Antrieb, besonders bei öfterer Benutzung der Winde, wirtschaftlicher, seine Anwendung daher naheliegender.

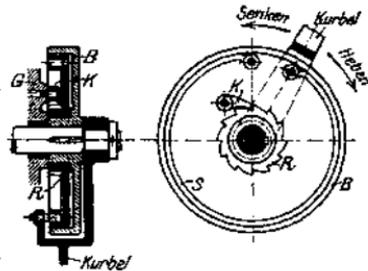


Fig. 63.

Um die Senkgeschwindigkeit der Last innerhalb der zulässigen Grenzen zu halten, werden die Sicherheitskurbeln vielfach mit Fliehkraftbremsen angeordnet.

7. Fliehkraft-(Schleuder-)Bremsen.

Sie werden von der niedergehenden Last betätigt und ermöglichen eine selbsttätige Regelung der Senkgeschwindigkeit. Bei Aufzügen dienen sie als Sicherheitsvorrichtung gegen Bruch des Tragorgans (Fallbremsen, s. Aufzüge).

Die Beckersche Fliehkraft-(Geschwindigkeits-)Brems (Fig. 64) ist eine Backenbremse mit innerem Angriff der Bremsklötze. Letztere haben ihre Drehpunkte an der auf der Welle aufgekeilten Scheibe *S*, drehen sich mit dieser und bewegen sich daher unter dem Einfluß der Fliehkraft nach außen. Beim

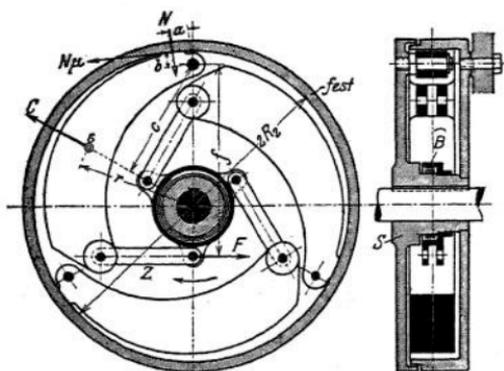


Fig. 64.

Laufaufwinden bzw. bei zulässigen Senkgeschwindigkeiten hält eine in der Büchse *B* angeordnete Spiralfeder mittels der Zugstange *Z* der Fliehkraft *C* das Gleichgewicht. Wird die zulässige Senkgeschwindigkeit überschritten, so überwiegt die Fliehkraft die Federwirkung, die Bremsklötze legen sich gegen die feste Bremsscheibe und erzeugen einen Reibungswiderstand, der den Niedergang der Last verzögert.

Auf einen Bremsklotz wirken 4 Momente ein: das im Sinne des Uhrzeigers wir-

kende Fliehkraftmoment, sowie die entgegengesetzt wirkenden Momente der Rückzugfeder, des Normaldruckes *N* und des von letzterem erzeugten Reibungswiderstandes $N \cdot \mu$.

Bedeutet in bezug auf Fig. 64 *P* die Umfangskraft der Bremse, *F* die Kraft der Rückzugfeder, *f* deren Hebelarm, *G* das Gewicht eines Bremsklotzes in kg und $g = 9,81 \text{ m/sek.}^2$ die Fallbeschleunigung, so ergibt sich für den Drehpunkt des Klotzes die Momentengleichung:

$$C \cdot c - N \cdot a - N\mu \cdot b - F \cdot f = 0;$$

mit

$$v = \frac{2r\pi n}{60}, \quad C = \frac{Mv^2}{r} = \frac{G}{g} \cdot \frac{4r\pi^2 \cdot n^2}{3600} = \frac{G}{g} \cdot \frac{r\pi^2 \cdot n^2}{900},$$

und

$$N\mu \cong \frac{P}{3}, \quad \text{wird das Gewicht eines Klotzes:}$$

$$G \cong \frac{900}{r \cdot n^2} \cdot \left[\frac{P}{3} \left(\frac{a}{\mu \cdot c} + \frac{b}{c} \right) + F \cdot \frac{f}{c} \right] \dots \text{ kg.}$$

Die Fliehkraft steigt mit dem Quadrat der Entfernung, während das Federmoment unveränderlich ist. Die Kraft der Rückzugfeder kann zu 15 bis 25 kg angenommen werden, für einen Klotz zu 5 bis 8,4 kg.

Eine Erhöhung der Bremswirkung kann durch Anordnung keilnutenförmiger Bremsfläche erreicht werden.

Ein wesentlicher Nachteil der Fliehkraftbremse ist, daß kleine Lasten, besonders der leere Haken, langsamer gesenkt werden als große, während das Umgekehrte erwünscht ist. Infolge ihrer geringen Reibflächen kann die Bremse nur eine kleine Reibungsleistung aufnehmen, und ihre Anwendung ist daher der starken Erwärmung wegen auf Winden mit Antrieb von Hand beschränkt.

Da die Fliehkraftbremse lediglich eine Geschwindigkeitsbremse ist, so ist stets eine gewöhnliche Bremse als Haltebremse vorzusehen.

Elektrisch gesteuerte Fliehkraftbremse. Bei dieser werden die Nachteile der gewöhnlichen Fliehkraftbremse dadurch vermieden, daß die Klötze nicht unmittelbar bremsen, sondern den Hebel einer gewichtbelasteten Band- oder Backenbremse betätigen und in ihrer Wirkung durch einen Elektromagneten

beeinflusst werden. Die Bremse ist daher für große Leistungen brauchbar, auch können verschiedene Geschwindigkeitsstufen eingestellt und kleine Lasten schneller als große gesenkt werden.

Fig. 65 gibt die Darstellung der elektrisch gesteuerten Beckerschen Fliehkraftbremse in Verbindung mit einer Halte- bzw. Verzögerungsbremse¹⁾. Das Gehäuse *g* des Fliehkraftreglers ist auf der Welle lose drehbar und als Bremscheibe für eine Bandbremse ausgebildet. Durch eine Zugstange *Z* ist das Gehäuse mit dem Bremshebel *h* gelenkig verbunden. Schlagen die Fliehklotze *K* aus, so wird ein Reibungswiderstand an der Bremscheibe erzeugt, der dieselbe dreht und den gewichtbelasteten Bremshebel lüftet. (Die am Bremshebel angreifende Feder dient, wenn kein Lüftmagnet angeordnet ist, zum Ausgleich des Bremshebelgewichtes.) Die Regelung der Senkgeschwindigkeit geschieht durch zwei Elektromagnete *E*, deren Erregung vermittels eines Vorschaltwiderstandes vom Führerstand aus eingestellt wird, wodurch sich die Wirkung der Fliehklotze mehr oder weniger abschwächen läßt. Das Festhalten der Last kann durch eine besondere, elektromagnetisch gelüftete Haltebremse geschehen, oder die Fliehkraftbremse wird gleichzeitig als Haltebremse (Fig. 65) ausgebildet, wobei der Nebenschlußmagnet *M* das Bremsgewicht *G* anhebt. Beim Senken suchen Gewicht und Regler die Bremse anzuziehen, während der Magnet sie lüften will. Beim Heben suchen Magnet und Regler die Bremse zu lüften, während das Gewicht sie anziehen will. Wird der Magnet ausgeschaltet, so werden auch die Reglerpulen stromlos, die Fliehklotze wirken und das Bremsgewicht wird losgelassen. Durch das gemeinsame Wirken des Bremsgewichtes und des Reglers wird der leere Haken sofort gestellt.

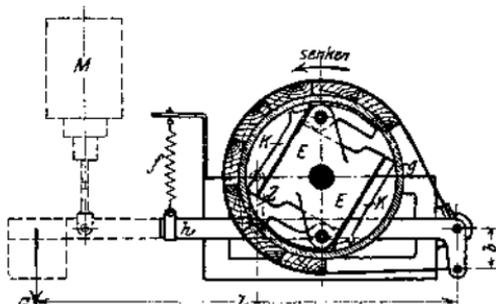


Fig. 65.

Der elektrisch gesteuerte Fliehkraftregler ist in jeder Hinsicht betriebssicher, für jede Bremsleistung verwendbar und ermöglicht eine Regelung der Senkgeschwindigkeit in den weitesten Grenzen.

8. Lastdruckbremsen.

Hierher gehören zunächst die bei den Schraubenhebezeugen verwendeten Drucklagerbremsen. Der durch den Rückdruck der Last in der Schneckenwelle hervorgerufene Axialdruck erzeugt einen Bremswiderstand, der der Last verhältnismäßig ist. Beim Senken der Last muß der Bremswiderstand durch die Antriebskraft überwunden werden. Näheres über Drucklagerbremsen s. Flaschenzüge S. 1105.

Bei Stirnräderwinden wird der zum Bremsen erforderliche Axialdruck künstlich entweder durch ein Gewinde oder durch Schrägstellung der Stirnradzähne erzeugt.

Senksperrbremsen finden noch teilweise bei elektrisch betriebenen Winden, insbesondere bei Laufkranen, Verwendung und haben den Zweck, die Geschwindigkeit der sinkenden Last selbsttätig zu regeln. Das Regeln der Senkgeschwindigkeit geschieht durch Verminderung des Bremswiderstandes und zwar derart, daß der Rücktrieb der Last die Bremse lüftet. Hierdurch wird die Last

¹⁾ E. Becker, *Fördertechnik* 1910, S. 97.

Kammerer, *Versuche an elektrisch gesteuerten Fliehkraftbremsen*. Z. Ver. deutsch. Ing. 1912, S. 1925.

kurze Zeit freigegeben, sucht der Motorwelle voranzueilen und bewirkt wieder ein Schließen der Bremskupplung. Dieser Vorgang wiederholt sich während der ganzen Senkperiode, und die Bremsen werden daher als „Senksperrbremsen mit Lüftspiel“ bezeichnet.

Fig. 66 zeigt die von der Firma F. Piechatzek für elektrische betriebene Laufkrane ohne Senkbremsschaltung verwendete Lamellen-Senksperrbremse (Lamellenbremsen s. S. 1089).

Die Arbeitsweise der Bremse ist folgende: Beim Heben der Last wird die Bremswelle im Sinne des Pfeiles gedreht. Das auf dem Bremskörper B_1 befestigte Ritzel wird von der Last zurückgehalten, der Bremskörper somit nach links geschraubt. Es erfolgt vermittels des Lamellensystems L Kupplung der Bremskörper B_1 und B_2 , wobei der Axial Schub durch den Bund a aufgenommen wird.

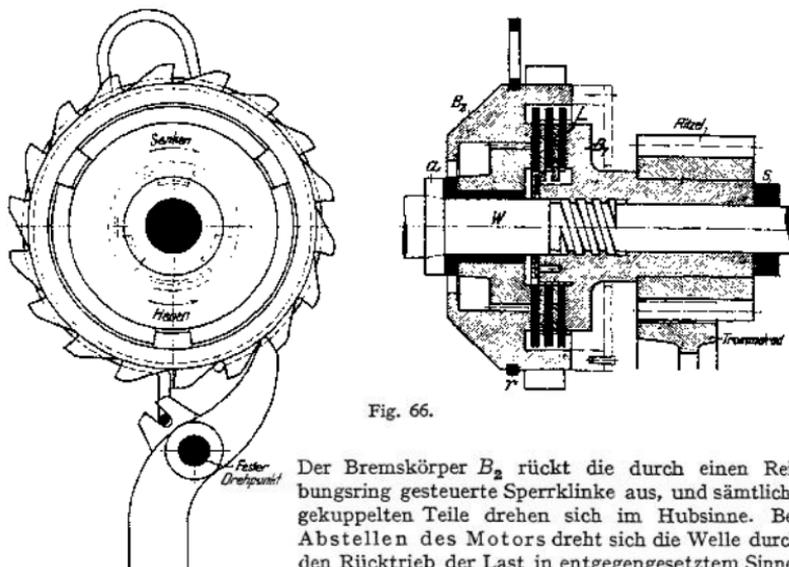


Fig. 66.

Der Bremskörper B_2 rückt die durch einen Reibring gesteuerte Sperrklinke aus, und sämtliche gekuppelten Teile drehen sich im Hubsinne. Bei Abstellen des Motors dreht sich die Welle durch den Rücktrieb der Last in entgegengesetztem Sinne, die Sperrklinke wird eingerückt, wobei die in Betracht kommenden Teile gekuppelt bleiben und die Last gestellt ist. Läuft der Motor im Senksinne, so wird der Bremskörper B_1 durch Rechtsschrauben um einen kleinen Betrag gelüftet und legt sich gegen den Stellung s . Will nun das Ritzel unter dem Einfluß der sinkenden Luft voreilen, so erfolgt wieder Kupplung der Bremskörper und des Lamellensystems, und die Last steht wieder unter der Wirkung der Bremse. Der im Senksinne laufende Motor hat lediglich die Bremse zu lüften. Die Senkgeschwindigkeit ist also von der Drehzahl des Motors abhängig.

Die Bremse ist zum Schutze gegen Staub u. dgl. vollkommen geschlossen und erfordert reichliche Schmierung der reibenden Teile, insbesondere des Gewindes.

Der Stromverbrauch zum Senken der Last soll höchstens 30 bis 60% desjenigen zum Heben betragen.

Die Lamellenzahl ist daher so anzunehmen, daß während des Senkens nicht unnötig viel Arbeit verbraucht, und die Last gerade noch freischwebend gehalten wird.

Neben der Senksperrbremse ist stets eine elektromagnetisch betätigte Haltebremse anzuordnen.

Weitere Bauarten von Lamellen-Senksperrbremsen siehe Ernst, Z. Ver. deutsch. Ing. 1901, S. 1081; Pickersgill, Lasthebemaschinen; Ders., Dingl. Polyt. Journ. 1907, S. 83; Bergmann, Dingl. Polyt. Journ. 1911, S. 193.

Die Anwendung der mechanischen Senksperrbremsen ist gegenwärtig eine beschränkte, da die meisten elektrisch betriebenen Hebezeuge mit elektrischer Senkbremsung ausgerüstet werden, wodurch eine genaue Regelung der Geschwindigkeit der sinkenden Last auf einfache Weise ermöglicht wird.

Druckluftbremsen s. Z. Ver. deutsch. Ing. 1906, S. 2011 und 2097.
Elektrische Bremsung s. S. 1120.

VII. Laufräder.

Baustoff: Für kleine und mittlere von Hand betriebene Krane Gußeisen, sonst Hartguß oder Stahlguß. Die Schienen sind entweder Flacheisen-schienen, Sonderprofil (Fig. 134) oder gewöhnliche Eisenbahnschienen. Mitunter laufen die Räder auch unmittelbar auf dem Flansche eines I-Trägers.

Bedeutet mit Bezug auf Fig. 68 D den Laufraddurchmesser, b die wirksame Laufradbreite, R_{\max} den größten auftretenden Rad-druck und k die zulässige Pressung zwischen Rad und Schiene, so besteht die Beziehung:

$$R_{\max} = D \cdot b \cdot k \dots \text{kg.}$$

Der größte Raddruck R_{\max} , für den das Laufrad bemessen wird, ist aus der ungünstigsten Belastungsweise zu ermitteln. Der Laufraddurchmesser ist der jeweiligen Konstruktion entsprechend zu wählen, wobei jedoch große Laufraddurchmesser, die kleine Fahrwiderstände ergeben, anzustreben sind.

Der Beanspruchungskoeffizient k , der für höhere Fahrgeschwindigkeiten, der größeren Abnutzung wegen, entsprechend geringer anzunehmen ist, kann gesetzt werden:

Gußeisen auf Flußstahlschiene	$k = 20 \sim 30$,
Hartguß auf Flußstahlschiene	$= 30 \sim 60$,
Stahlguß auf Flußstahlschiene	$= 40 \sim 70$.

Für geradlinige Fahrbewegung erhalten die Laufräder den aus Fig. 67 und 68 ersichtlichen Kranzquerschnitt mit doppeltem Spurkranz.

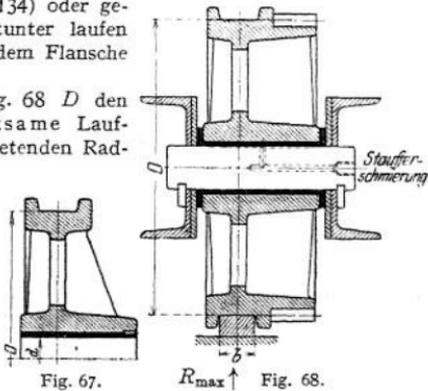
Das Rad selbst wird meist als Scheibenrad ausgebildet und mit Versteifungsrippen versehen.

Laufräder, die auf dem untern Flansche eines I-Trägers laufen, erhalten nur einen Spurkranz und sind etwas ballig zu drehen.

Die Laufräder der Kreisbahn eines Drehkranes erhalten entweder zylindrische (schwach ballige) oder konische Form. Der bei der letzteren auftretende Axialschub ist auf entsprechende Laufflächen zu übertragen.

Die Laufräder können auf der zugehörigen Achse aufgekeilt sein oder lose auf derselben laufen. In letzterem Falle werden sie mit Rotguß oder Phosphorbronze ausgebucht.

Fig. 68 zeigt den Einbau eines Laufrades (mit angegossenem Zahnkranz) in den Kopfträger eines Laufkranes.



Tab. 11. Normale Kranla fräder von Friedr. Krupp A. G., Grusonwerk, Magdeburg-Buckau. Baustoff: Hartguß.

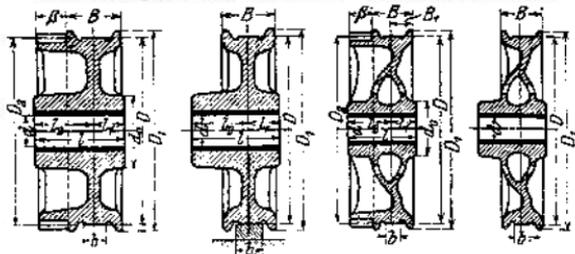


Fig. 71.

Fig. 72.

Fig. 73.

Fig. 74.

a) Ausführung nach Fig. 71 und 72.

Laufрад Durchm. D mm	Größter Rad-druck kg	Abmessungen in mm											Ge-wicht ¹⁾ kg	
		b	B	D_1	d	d_0	l	l_1	l_2	z	$\frac{z}{\pi}$	D_2		β
250	3000	35	85	280	50	100	135	45	90	42	6	252	45	$\frac{98}{35}$
300	4000	45	95	330	55	115	150	50	100	43	7	301	50	$\frac{40}{50}$
350	5000	45	95	380	60	130	155	50	105	50	7	350	55	$\frac{90}{65}$
400	7000	45	110	430	65	140	175	57,5	117,5	50	8	400	60	$\frac{82}{100}$
400	7000	55	110	430	65	140	175	57,5	117,5	50	8	400	60	$\frac{78}{100}$
450	8000	45	110	485	70	145	180	57,5	122,5	50	9	450	65	$\frac{98}{130}$
450	8000	55	110	485	70	145	180	57,5	122,5	50	9	450	65	$\frac{90}{125}$

b) Ausführung nach Fig. 73 und 74.

Lauf-rad Durchm. D mm	Größter zulässige Rad-druck kg	Abmessungen in mm											Ge-wicht ¹⁾ kg			
		b	B	B_1	D_1	d	d_0	l	l_1	l_2	z	$\frac{z}{\pi}$		D_2	β	
450	7000	35	100/95		50	485	70	145	165	52,5	112,5	50	9	450	65	$\frac{78}{110}$
500	9000	55	120		60	540	75	150	195	62,5	132,5	50	10	500	70	$\frac{115}{145}$
500	8500	40	105	52,5		540	75	150	180	55	125	50	10	500	70	$\frac{102}{140}$
550	10000	55	120		60	590	80	160	200	62,5	137,5	50	11	550	75	$\frac{132}{182}$
500	9500	70	135	67,5		540	75	150	210	70	140	50	10	500	70	$\frac{125}{154}$
550	9000	40	105	52,5		590	80	160	185	55	130	50	11	550	75	$\frac{120}{165}$
550	11000	75	140		70	590	80	160	220	72,5	147,5	50	11	550	75	$\frac{150}{195}$
550	11000	65	140		70	590	80	160	220	72,5	147,5	50	11	550	75	$\frac{153}{198}$
600	11000	55	130/125		65	640	85	170	210	67,5	142,5	50	12	600	80	$\frac{160}{210}$
600	11000	45	120/115		60	640	85	170	200	62,5	137,5	50	12	600	80	$\frac{155}{205}$
600	12000	65	140/135		70	640	85	170	220	72,5	147,5	50	12	600	80	$\frac{175}{220}$
650	13500	55	130		65	690	90	175	215	67,5	147,5	54	12	648	80	$\frac{185}{245}$
650	13500	65	140/135		70	690	90	175	220	72,5	147,5	54	12	648	80	$\frac{190}{246}$
700	14500	45	125	62,5		750	95	180	215	65	150	54	13	702	85	$\frac{210}{290}$
700	15000	55	135	67,5		750	95	180	225	70	155	54	13	702	85	$\frac{216}{296}$
700	15000	65	145/140	72,5		750	95	180	230	75	155	54	13	702	85	$\frac{224}{298}$
700	17000	95	175/170	87,5		750	95	180	260	90	170	54	13	702	85	$\frac{258}{328}$
750	17000	55	135	67,5		800	100	185	225	70	155	58	13	754	85	$\frac{248}{328}$
750	17000	65	155/145	77,5		800	100	185	235	80	155	58	13	754	85	$\frac{256}{330}$
750	17500	75	165/155	82,5		800	100	185	245	85	160	58	13	754	85	$\frac{266}{340}$
750	18000	95	185/175	92,5		800	100	185	265	95	170	58	13	754	85	$\frac{296}{370}$
800	20000	75	170/160	85		850	105	200	255	87,5	167,5	58	14	812	90	$\frac{338}{440}$
800	22000	95	190/180	95		850	105	200	275	97,5	177,5	58	14	812	90	$\frac{375}{512}$
850	22500	75	170/160	85		900	110	205	255	87,5	167,5	60	14	840	90	$\frac{350}{486}$
900	25000	75	170/160	85		950	120	220	265	87,5	177,5	65	14	910	100	$\frac{410}{575}$
900	25000	60	170/160	85		950	120	220	265	87,5	177,5	65	14	910	100	$\frac{422}{587}$
900	27000	95	190/180	95		950	120	220	285	97,5	187,5	65	14	910	100	$\frac{455}{618}$
950	30000	95	195/185	97,5		1000	125	225	290	100	190	68	14	952	100	$\frac{500}{694}$
1000	35000	95	195/185	97,5		1050	130	240	290	100	190	72	14	1008	100	$\frac{578}{775}$
1000	35000	70	195/185	97,5		1050	130	240	290	100	190	72	14	1008	100	$\frac{593}{790}$
1100	40000	115	215/205	107,5		1150	140	250	310	110	200	72	15	1080	100	$\frac{670}{868}$

Breite der Laufschiene = $b + 5$ mm.¹⁾ Ohne bzw. mit angegossemem Zahnkranz.

Fig. 69 gibt ein Laufrad mit angeschraubtem Zahnkranz wieder. Die Verbindungsschrauben zwischen Radkörper und Zahnkranz sind mit Rücksicht auf das wechselnde Drehmoment als Paßschrauben auszuführen.

Fig. 70 zeigt ein Laufrad mit aufgekeiltem Zahnrad.

Besonders zu beachten ist, daß sämtliche, gemeinsam angetriebenen Laufräder eines Fahrwerks auf genau gleichen Durchmesser zu drehen (bei Hartguß zu schleifen) sind.

Sind zur Aufnahme eines größeren Raddruckes zwei oder vier Laufräder erforderlich, so werden dieselben in einem gemeinsamen, einstellbaren Radgestell (Balancier) gelagert.

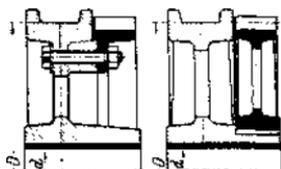


Fig. 69.

Fig. 70.

B. Aufhängung der Last.

Lastbaken s. Einzelteile der Hebe­maschinen S. 1073.

I. Kranwagen

werden zwischen Last und Kranhaken eingeschaltet und ermöglichen ein schnelles und bequemes Wägen schwerer Gegenstände, deren Transport zu einer besonderen Wage nicht angängig. Sie sind meist nach Art der Brückenwagen gebaut und müssen, da sie die nutzbare Hubhöhe verringern, möglichst gedrängter Bauart sein. Die Kranwagen werden in verschiedenen Größen für Tragfähigkeit von 1 bis 50 t und mehr hergestellt. Je nach Tragfähigkeit werden sie mit einfachen Haken, Doppelhaken oder Lastbügel ausgerüstet¹⁾.

II. Fördergefäße

dienen zum Verladen von Massengütern wie Kohle, Erz u. dgl. Gewicht der Kohle (geschüttet) $\approx 750 \text{ kg/m}^3$, des Erzes $\approx 3000 \text{ kg/m}^3$. Die Beschickung erfolgt bei den Kippkübeln und Klappgefäßen von Hand mittels Schaufel, die Entleerung auf mechanischem Wege. Bei den Greifern geschieht das Aufnehmen des Fördergutes und das Entleeren des Gefäßes selbsttätig.

a) Kippkübel (Fig. 75) sind dann empfehlenswert, wenn das Fördergut stets in gleicher Höhe — etwa in Schüttrümpfe — abgegeben wird. Bei dem gefüllten Kübel liegt der Schwerpunkt S so, daß durch Auslösen des Riegels R ein Kippen und damit ein selbsttätiges Entleeren des Kübels erfolgt. Infolge der entsprechenden Lage des Schwerpunktes S_0 kehrt der leere Kübel von selbst wieder in seine ursprüngliche Lage zurück.

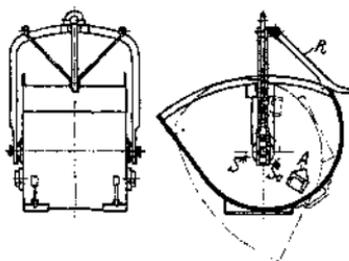


Fig. 75.

b) Klappgefäße. Bei dem in Fig. 76 dargestellten Fördergefäß mit aufklappbarem Boden²⁾ kann die Entleerung in jeder Höhenlage erfolgen. Sie geschieht durch das Eigengewicht des Fördergutes unter Nachlassen des Entleerungsseiles oder Auslösen eines Riegels.

¹⁾ S. auch Z. Ver. deutsch. Ing. 1912, S. 1956.

²⁾ Zobel & Neubert, Schmalkalden.

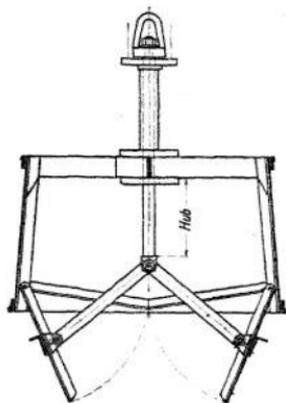


Fig. 76.

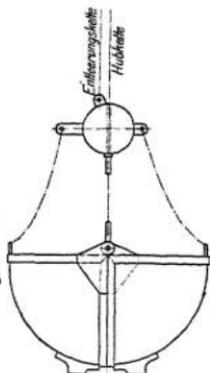


Fig. 77.

Fig. 77 zeigt ein aufklappbares, halbzyklindrisches Fördergefäß. Bei diesem greift das Hubseil mittels eines Querstückes und zweier Ketten an den Drehpunkten der viertelkreisförmigen Gefäßhälften an. Letztere bleiben unter dem Einfluß ihres Eigengewichtes geschlossen. Das Öffnen des Gefäßes geschieht durch Anziehen des gewichtbelasteten Entleerungsseiles und zweier an diesem und den Gefäßhälften angreifender Ketten. Bedienung vom Führerstande aus.

Klappgefäße dieser Bauart finden sowohl für Kohle, als auch für Erz Verwendung. Sie sind möglichst flach zu bauen, um zu vermeiden, daß schweres Fördergut beim Einschaufeln unnötig hochgehoben wird. Rauminhalt der Klappgefäße meist 1 bis 2 m³. Die Klappgefäße sind durch die Greifer verdrängt worden. Nur für großstückiges Erz³⁾ und einige Kohlensorten sind sie noch mehr oder weniger unentbehrlich.

c) **Selbstgreifer** dienen in Häfen und auf Lagerplätzen zum Verladen von Massengütern wie Kohle, Erz, Getreide, Sand u. dgl. Auch für Baggerzwecke finden sie vielfach Verwendung. Der große Vorteil des Greiferbetriebes besteht darin, daß die Entladekosten bedeutend ermäßigt werden. Für flotten Betrieb läßt sich beim Verladen von Kohle eine Höchstleistung von 40 bis 50 t/Std., bei Anwendung von sehr großen Greifern eine solche bis 90 t/Std. erreichen. Rauminhalt der Greifergefäße 0,6 bis 1,5 m³ (nur für Feinkohle) und 1,5 bis 6 m³. Das Eigengewicht eines Greifers kann etwa gleich seiner Tragfähigkeit an Kohle gesetzt werden.

Als Tragorgan bediente man sich früher der Kette, gegenwärtig jedoch meist des Drahtseiles. Kraftübersetzungsmittel: Differentialtrommel, meist Flaschenzug. Bei Benutzung des letzteren ist das Schließorgan, soweit es im Greifer arbeitet, eine Kette. Neuere Greiferausführungen, die mit großer Geschwindigkeit arbeiten, sind vollständig mit Drahtseil ausgerüstet. Man unterscheidet: Einseilgreifer ohne und Zweiseilgreifer mit besonderem Entleerungsseil.

Bei den Einseilgreifern geschieht das Schließen und Heben des Greifers durch ein gewöhnliches Windwerk. Zum Entleeren ist in der höchsten Stellung ein Anschlag vorgesehen, der ein Gesperre entriegelt und so das Öffnen des Greifers unter dem Einfluß des Eigengewichtes der Schaufeln und des Fördergutes veranlaßt.

Dem Vorteil eines einfachen Windwerks stehen folgende Nachteile gegenüber: Das Öffnen ist nur in bestimmter Höhenlage möglich. Einseilgreifer arbeiten langsamer als Zweiseilgreifer. Auch sind sie schwerer und teurer als diese. Das größere Gewicht bedingt ferner beim Heben einen entsprechend größeren Stromverbrauch.

Während die Einseilgreifer nur noch selten und in besonderen Fällen zur Verwendung gelangen, bedient man sich allgemein der Zweiseilgreifer. Sie können in jeder Höhenlage des Greifers entleert werden. Zur Bedienung ist ein besonderes, der Arbeitsweise des Greifers entsprechendes Windwerk erforderlich. Greiferwindwerk s. S. 1133.

³⁾ Fördergefäß für 8 t Fassungsvermögen siehe Michenfelder, Krane und Transportanlagen S. 13. Berlin 1912, Julius Springer.

Die in Deutschland üblichen Bauarten besitzen meist viertelkreisförmige Schaufeln, die mittels eines Faktorenflaschenzuges geschlossen werden. Übersetzung für Kohlengreifer $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{6}$, für Greifer zum Fördern von Getreide $\frac{1}{2}$. Die einzelnen Bauarten unterscheiden sich im wesentlichen durch die Lage der Schalendrehpunkte und die Lage des Angriffspunktes der schließenden Seile. Schließweg und Verlauf der Schließkraft sind daher bei den einzelnen Systemen verschieden.

Fig. 78 gibt die schematische Darstellung des Selbstgreifers von J. Jäger in Duisburg. Er besteht im wesentlichen aus zwei trapezförmigen Rahmen R , die durch ein \perp -Querstück Q_1 miteinander verbunden und durch ein Flacheisenkreuz versteift sind. Dieser Doppelrahmen ist an den beiden Entleerungsketten aufgehängt. An seinen beiden unteren Ecken sind die Drehpunkte der mit Stahlchneiden versehenen Schaufeln angeordnet.

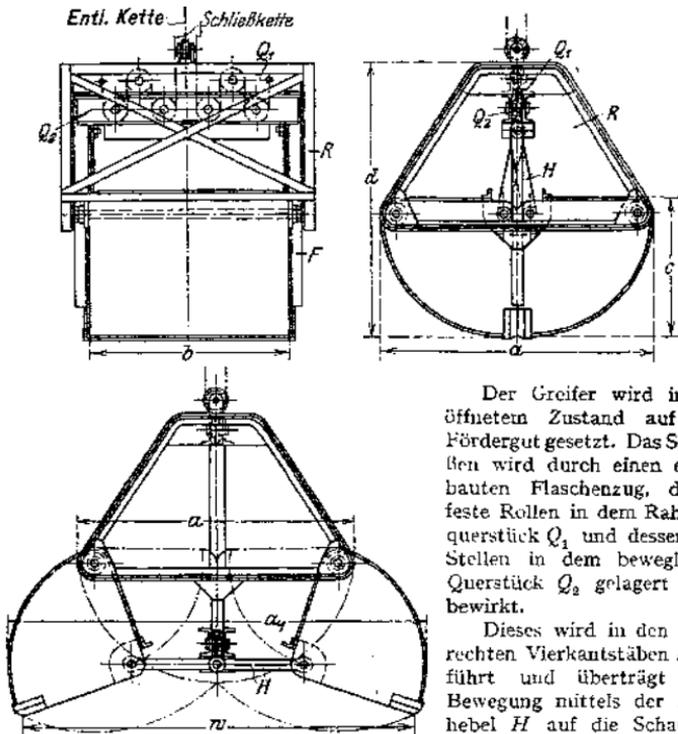


Fig. 78.

Der Greifer wird in geöffnetem Zustand auf das Fördergut gesetzt. Das Schließen wird durch einen eingebauten Flaschenzug, dessen feste Rollen in dem Rahmenquerstück Q_1 und dessen lose Stellen in dem beweglichen Querstück Q_2 gelagert sind, bewirkt.

Dieses wird in den senkrechten Vierkantstäben F geführt und überträgt seine Bewegung mittels der Kniehebel H auf die Schaufeln. Dem Anziehen der Schließkette entspricht eine Bewe-

gung des Querstückes Q_2 nach oben, wobei die Kniehebel die Schaufeln drehen und den Greifer schließen.

Das Öffnen geschieht unter dem Einfluß des Eigengewichtes der Schalen, des beweglichen Querstückes und des Fördergutes unter Nachlassen der Schließkette und Festhalten der Entleerungskette. Die Kniehebel nehmen bei voller Öffnung des Greifers horizontale Lage an. Die strichpunktierten Linien geben die Schließkurve des Greifers ohne Berücksichtigung seines Eigengewichtes. Zeichnerische Ermittlung der Schließkraft siehe Andrieu, Statik des Kranbaues, II. Aufl., S. 309.

Tab. 12. Selbstgreifer für grobe Kohle von J. Jäger, Duisburg.

Inhalt m^3	Abmessungen in mm						Hub zum Öffnen bzw. Schließen mm	Gewicht kg
	a	b	c	d	a_1	w		
$\frac{3}{4}$	1420	950	710	1450	2150	2000	3000	1300
1	1570	1100	785	1600	2400	2250	3300	1400
1.5	1740	1250	870	1750	2650	2500	4800	1600
2	1890	1400	945	1900	2900	2750	5200	1800
2.5	2010	1550	1005	2050	3100	2950	5400	2100
3	2110	1650	1055	2200	3300	3150	5600	2400
3.5	2230	1750	1115	2200	3500	3350	5600	2800
4	2340	1850	1170	2300	3700	3350	5800	3200
4.5	2460	1900	1230	2400	3900	3750	6000	3700
5	2580	1950	1290	2500	4100	3950	6200	4200
5.5	2700	2000	1350	2600	4300	4150	6400	4800
6	2820	2050	1410	2700	4500	4350	6600	5400

Die folgende Fig. 79 zeigt den Selbstgreifer Bauart Laudi für Erz und ähnliche Fördergüter. Inhalt 4 bis 5 m^3 .

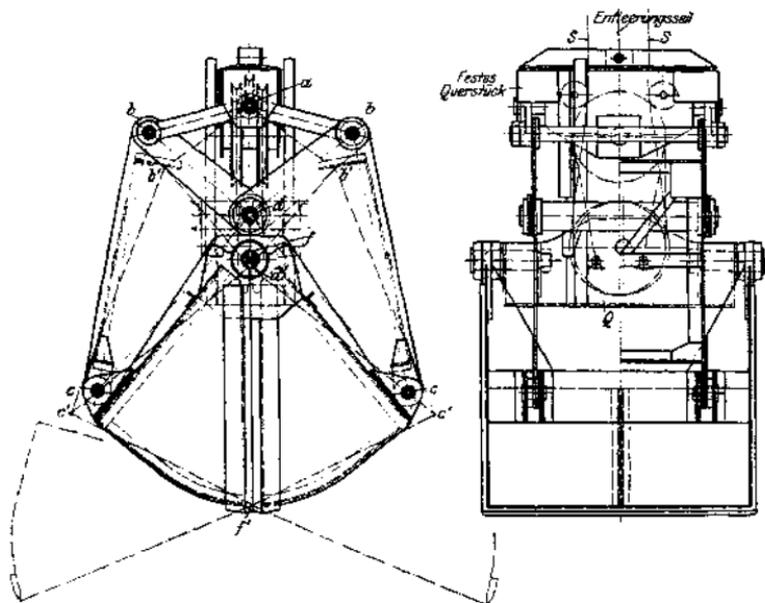


Fig. 79.

Arbeitsweise des Greifers: Nachdem der Greifer in geöffnetem Zustande auf das Fördergut gesetzt, werden die Seile S des Schließflaschenzuges angezogen und bewirken das Schließen des Greifers. Hierbei bewegt sich das Querstück Q mit den losen Rollen nach oben, und der Schaufeldrehpunkt wandert von f' nach f , wobei das Kniehebelsystem aus der Lage $a'b'd'$ in die Lage abd übergeht. Die beiden seitlichen Dreieckshebel, welche bei c an den Schaufeln angreifen, bewegen sich von $b'c'd'$ nach bcd .

Das Öffnen des Greifers geschieht durch Festhalten des Entleerungsseiles und Nachlassen der Schließseile S unter dem Einfluß des Eigengewichtes der beweglichen Greiferteile und des Fördergutes.

Der Greifer Bauart Laudi besitzt eine große Greifweite und infolge der kräftigen Wirkung des Kniehebelsystems eine große Schließkraft, die zu Ende des Schließweges am größten ist. Da der Kniehebel beim Öffnen des Greifers eine günstige Kraftwirkung nach abwärts gibt, so ist das Anbringen eines Gewichtes an dem beweglichen Querstück überflüssig.

Zeichnerische Ermittlung der Schließkraft siehe Andréé, Statik des Kranbaues. 2. Aufl. S. 310.

Selbstgreifer Bauart Palm (Fig. 80). Er besteht im wesentlichen aus dem Rahmen R , an dem die Drehpunkte a der Greiferschaufeln A angeordnet sind. Das in den senkrechten Führungen F bewegliche Querstück B trägt die losen Rollen r des Schließflaschenzuges, während die festen Rollen r_0 desselben in dem Rahmen R gelagert sind. Als Schließorgan des Zwillingsrollenzuges dienen Drahtseile, deren Enden bei b an dem festen Querstück befestigt sind. Je eine Gallsche Kette k geht von dem Querstück B über eine Kettenrolle K und greift bei c an den Greiferschaufeln an.

Arbeitsweise: Das Öffnen des Greifers geschieht durch Anziehen der Entleerungsseile unter Nachlassen der Schließseile. Die Entleerungsseile ziehen vermittels eines Querstückes und der bei d angreifenden vier Entleerungsketten E die Greiferschaufeln auseinander. Hierbei bewegt sich das Querstück B nach abwärts und nimmt die der größten Greiferöffnung entsprechende tiefste Lage an.

Beim Schließen des Greifers werden die Schließseile angezogen, während die Entleerungsseile nachgelassen werden. Durch das Anziehen der Schließseile wird das Querstück B nach oben bewegt und der Greifer mittels der am Rahmen und bei

C an den Schaufeln angreifenden Gallschen Ketten geschlossen. Ist der Schließvorgang beendet, so wird bei weiterem Aufwickeln der Hub- und Schließseile der Greifer gehoben.

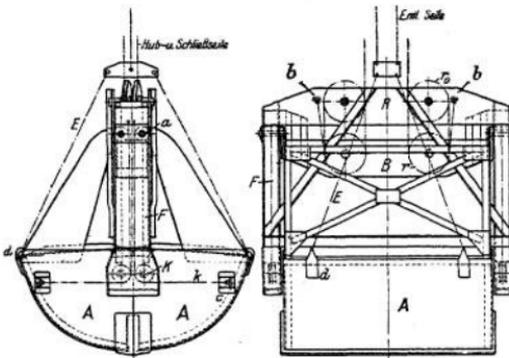


Fig. 80.

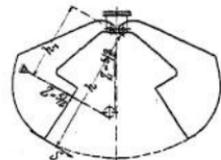


Fig. 81.

Das Verhältnis der Schließkraft und der Kraft am Rollenzug läßt sich beim Palm-Greifer auf einfache Weise ermitteln.

Besitzt der Rollenzug eine Übersetzung von $1 : 5$, so wirkt an jeder Greiferschaufel (Fig. 81) eine Zugkraft $= \frac{5}{2} \cdot Z$, wenn Z die Zugkraft der Hub- und Schließseile bedeutet. Die Schließkraft S ergibt sich alsdann aus der Gleichung

$$S \cdot h = \frac{5}{2} \cdot Z \cdot h_1 \text{ zu } S = \frac{5}{2} \cdot Z \cdot \frac{h_1}{h}.$$

Der Greifer Bauart Palm besitzt infolge der am unteren Schaufelende bei C angreifenden Gallschen Ketten unveränderliche Schließkraft. Die hohe Lage der Drehpunkte der Greiferschaufeln, deren Schließkurve ohne Berücksichtigung des

Eigengewichtes ein Kreisbogen ist, ermöglicht konstantes Schöpfen, ohne daß unter den Greiferschalen Fördergut liegen bleibt.

Weiteres über Greifer siehe: v. Hanfstengel, Förderung der Massengüter II. Bd., Dingt. Polyt. Journ. 1903, 1907 Nr. 10 u. 11, Z. Ver. deutsch. Ing. 09 S. 768, desgl. 1910, S. 579, desgl. 1912, S. 617, Kammerer, Versuche mit Selbstgreifern.

Greiferwinden s. S. 1133.

III. Lasthebemagnete

finden ausgedehnte Verwendung zum Heben und Befördern von Roheisen, Schrott, Blechen, Trägern u. dgl. Auch Fallwerkskrane werden statt mit mechanisch auslösbarer Fallbirne mit einem der Form der Birne entsprechenden Magneten ausgerüstet.

Für Körper mit ebener Oberfläche (Blöcke u. dgl.), sowie für Schrott und Masseln bedient man sich des in Fig. 82 dargestellten Magneten mit festen Polen und runder Form. Das Magnet hängt mittels dreier Ketten an dem Lasthaken und wird auf das zu hebende Eisenstück gesetzt. Durch Einschalten des Kontrollers erhält die Wicklung Strom, der im Magneten und Eisenstück den

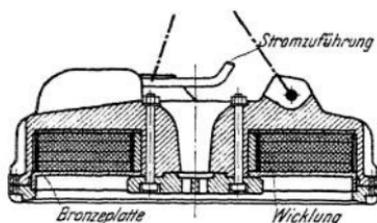


Fig. 82.

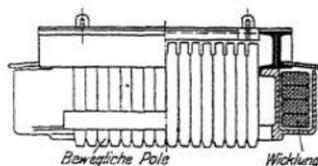


Fig. 83.

zum Heben erforderlichen Magnetismus erzeugt. Gegen mechanische Verletzungen ist die Wicklung durch eine kräftige Bronzeplatte geschützt. Stromzuführung zum Magneten erfolgt durch ein bewegliches Kabel. Die Stromzuführungsstelle selbst ist gegen Feuchtigkeit empfindlich und daher ist für dieselbe besondere Sorgfalt erforderlich.

Zum Fördern von Eisenstücken mit unregelmäßiger Form, sowie sich durchbiegender Bleche verwendet man Magnete mit beweglichen Polen (Fig. 83)¹⁾. Diese beweglichen Pole sind in einem schmiedeeisernen Joch gemeinsam aufgehängt und stellen sich, infolge ihrer senkrechten Beweglichkeit, der Form des zu fassenden Körpers entsprechend ein.

Fig. 84 zeigt die Verteilung der Kraftlinien eines Magneten mit beweglichen Polen.

Handelt es sich um das Befördern von Profileisen, langen Blechen u. dgl., so werden zwei oder mehrere Magnete an einem Querstück aufgehängt (Fig. 86). Letzteres hängt entweder am Kranhaken oder an einem besonderen Gerüst, das in senkrechten Führungen vom Hubwerk auf und ab bewegt wird.

Die Tragfähigkeit eines Magneten hängt von der Größe des Magnetisierungs-

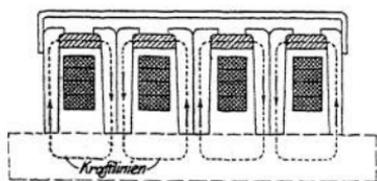


Fig. 84.

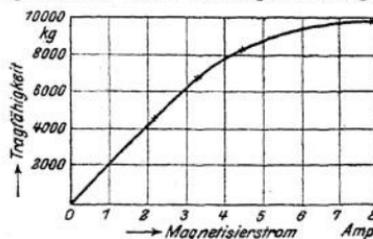


Fig. 85.

¹⁾ Dub, Z. Ver. deutsch. Ing. 1909, S. 84.

stromes ab. Fig. 85 zeigt z. B. die Tragfähigkeit eines Magneten für 2000 kg Nutzlast in Abhängigkeit vom Magnetisierungsstrom. Betriebsspannung 110 Volt. Die Abreißkraft von 10 t tritt bei einem Strom von 8 Amp. auf. Die hierbei vorhandene 5fache Sicherheit dürfte für die meisten Betriebe hinreichend sein.

Ungünstig beeinflußt wird die Tragfähigkeit eines Magneten durch die Temperatur des zu befördernden Eisens. Diesbezügliche Versuche haben ergeben, daß bei 400° noch eine genügende Durchlässigkeit für die magnetischen Kraftlinien vorhanden ist. Darüber ist die Wirkung des Magneten eine äußerst unsichere; bei 700° ist das Eisen nicht mehr magnetisierbar. Für den Transport warmer Eisenteile haben sich Magnete mit Wasserkühlung bewährt.

Ferner setzt der Mangengehalt des Eisens den Kraftlinien einen Widerstand entgegen. Beispielsweise sind Masseln mit über 7% Mangengehalt überhaupt nicht mehr transportfähig.

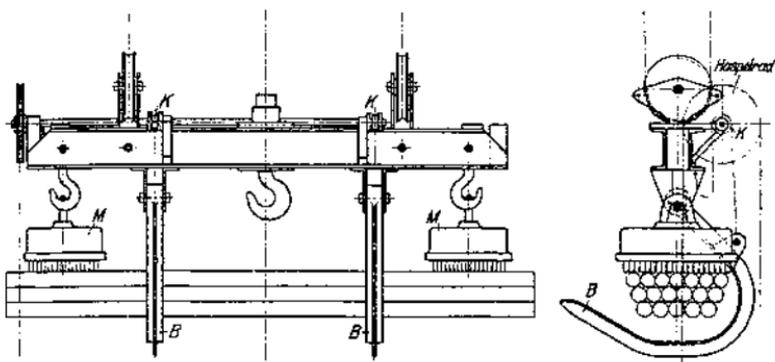


Fig. 85.

Ein Hauptnachteil der Lastmagnete ist der, daß bei plötzlicher Stromunterbrechung durch Kurzschluß u. dgl. die Last losgelassen wird und abstürzt. Durch Anordnung eines Reservedrahtes, der die Wicklung bei eintretendem Kurzschluß speist, kann eine gewisse Sicherheit gegen Abstürzen erreicht werden.

Mechanische Sicherheitsvorrichtungen, die nach Anheben die Last greiferartig umfassen und ein Abstürzen bei Stromunterbrechung verhüten, haben sich in verschiedenen Ausführungen bewährt.

Fig. 86 zeigt eine von Hand bediente Sicherheitsvorrichtung für zwei an einem Querstück aufgehängte Magnete. Bei eintretender Stromunterbrechung nehmen die in Sicherheitsstellung befindlichen Bügel B das Fördergut auf. Vor Niedersetzen oder Anheben der Last werden die Bügel durch die an ihrem hinteren Ende angreifenden Ketten und die Kettennüsse K mittels eines Haspelrades hochgezogen.

In Fig. 87 ist ein Lastmagnet mit mechanischer

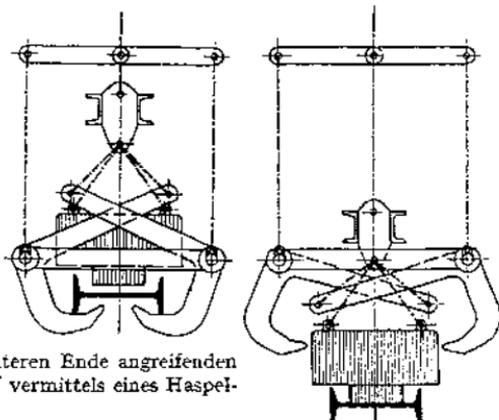


Fig. 87.

Sicherheitsvorrichtung zum Transport von Stabeisen dargestellt. Das Öffnen der Zange erfolgt mit dem Senken des Magneten, das Schließen durch Hochziehen desselben.

Weitere mechanische Schutzvorrichtungen für Lasthebemagnete siehe Michenfelder, Krane und Transportanlagen.

IV. Zangen

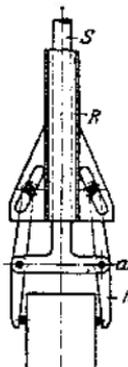


Fig. 88.

werden hauptsächlich in Hüttenwerken als Greiforgane zum Transport von Stahlblöcken benutzt. S. auch S. 1190, Sonderkrane für Hüttenwerke.

In Rücksicht auf die strahlende Wärme geschieht die Bedienung der Zange vom Führerstande aus. Die Vorrichtung zum Bedienen der Zange ist so eingerichtet, daß die Zange geöffnet und geschlossen, sowie je nach Bedarf gedreht und gehoben werden kann. Um ein Pendeln derselben zu vermeiden, ist die Aufhängung an einer starren Führung erforderlich.

Die in Fig. 88 dargestellte Zange besteht aus zwei doppelarmigen Hebeln H , deren Drehpunkte a sich an der Stange S befinden. Am unteren Ende der Hebel H sind auswechselbare Könerspitzen angebracht, am oberen Ende Rollen, die sich in den Schlitten der am Rohre R angebrachten Blechschilder bewegen. Durch Hochziehen des Rohres R schließt sich die Zange unter der Einwirkung des Blockgewichtes. Durch Senken des Rohres und Festhalten der Stange S wird die Zange geöffnet.

C. Flaschenzüge.

Flaschenzüge sind „Hebewerkzeuge“ zum Heben kleinerer und mittlerer Lasten bei beschränktem Hub. Antrieb meist von Hand.

a) **Gewöhnliche Flaschenzüge.** Da sie keine Vorrichtung zum Festhalten der schwebenden Last besitzen, sind sie von untergeordneter Bedeutung. Als Rollenzug findet der Faktorenrollenzug (s. Mechanik) Verwendung. Huborgan: Hanf- oder Drahtseil.

b) **Der Differentialflaschenzug** von Weston ist veraltet. Er besitzt einen sehr geringen Wirkungsgrad ($\eta = \infty 0,30$), auch sind Kette und Kettenräder einem sehr starken Verschleiß unterworfen.

c) **Schraubenflaschenzüge mit Drucklagerbremse** sind ein vollwertiges und betriebssicheres Hebewerkzeug. Da sie in verschiedenen Größen in Massenfertigung hergestellt werden, so ist auch ihr Beschaffungspreis ein verhältnismäßig niedriger.

Tragkraft: 0,5 bis 10 t; Hub 3 bis 6 m.

Wirkungsgrad in eingelaufenem Zustande $\eta = \infty 0,55$ bis 0,65.

Huborgan: Kalibrierte Kette, über 5 t Tragfähigkeit Gallsche Kette.

Als Übersetzung dient ein doppelgängiges Schneckengetriebe (Steigung $\alpha = \infty 20^\circ$).

Der unter dem Einfluß der Last an der Schneckenwelle erzeugte Axialdruck betätigt die Drucklagerbremse.

Bei dem in Fig. 89 dargestellten Schraubenflaschenzug von Becker beruht die Bremswirkung auf Kegeleibung.

Beim Heben wird der Vollkegel der Bremswelle mit dem als Sperrad ausgebildeten Hohlkegel unter dem Einfluß der Last gekuppelt. Der Axialdruck wird durch eine Druckschraube aufgenommen, während das mit der Welle gekuppelte Sperrad unter der federbelasteten Klinke fortgleitet. Hört die Antriebskraft auf, dann dreht das auf der Lastwelle sitzende Schneckenrad die

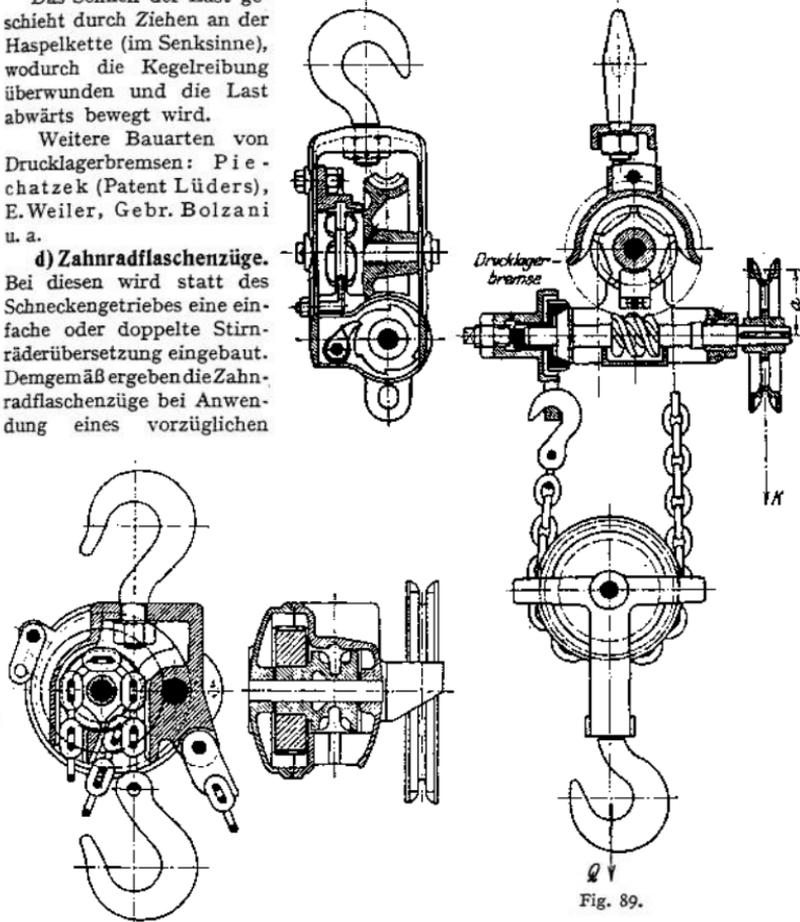
Schneckenwelle in entgegengesetztem Sinne. Der Sperrradhohlkegel legt sich gegen die Klinke, und die Last ist gestellt.

Das Senken der Last geschieht durch Ziehen an der Haspelkette (im Senksinne), wodurch die Kegelreibung überwunden und die Last abwärts bewegt wird.

Weitere Bauarten von Drucklagerbremsen: Piechatzek (Patent Lüders), E. Weiler, Gebr. Bolzani u. a.

d) Zahnradflaschenzüge.

Bei diesen wird statt des Schneckengetriebes eine einfache oder doppelte Stirnräderübersetzung eingebaut. Demgemäß ergeben die Zahnradflaschenzüge bei Anwendung eines vorzüglichen



Materials und mit genau bearbeiteten Zähnen einen höheren Wirkungsgrad als die vorgenannten Schraubenflaschenzüge. $\eta = 0,80$ bis $0,90$. Andererseits ist jedoch ihr Beschaffungspreis ein wesentlich höherer.

Als Bremse wird gleichfalls eine Drucklagerbremse benutzt. Da jedoch der beim Schneckengetriebe vorhandene Axialdruck fehlt, so kann derselbe künstlich durch schräge Stellung der Stirnradzähne oder ein flachgängiges Gewinde erzeugt werden.

Bei dem in Fig. 90 dargestellten Zahnradflaschenzug (F. Piechatzek) ist als Drucklagerbremse eine Lamellenbremse angeordnet. Erzeu-

Fig. 90.

gung des axialen Druckes durch Schrägstellung der Zähne. Die Zahnräder sind aus Chromnickelstahl hergestellt und zum Schutze gegen Staub eingekapselt.

In neuerer Zeit werden die Stirnradflaschenzüge vielfach mit elektrischem Antrieb ausgerüstet. Der angebaute Steuerapparat erhält Seilsteuerung und wird vom Fußboden aus bedient.

Bei den Flaschenzügen ist wie bei allen Hebewerkzeugen gedrängte Bauart und geringes Gewicht Hauptbedingung. Für die verschiedenen Teile werden daher höhere Beanspruchungen als üblich zugelassen, auch ist die Verwendung hochwertiger Baustoffe empfehlenswert.

D. Winden.

I. Unmittelbar wirkende Winden

besitzen kein Huborgan (Seil oder Kette) und dienen zum Heben von Lasten auf geringe Förderhöhen. Sie werden hauptsächlich zu Montagezwecken u. dgl. benutzt und lassen sich mit den Flaschenzügen unter dem Ausdruck „Hebewerkzeuge“ zusammenfassen. Im Hinblick auf leichten Transport ist geringes Gewicht erforderlich, woraus sich wie bei den Flaschenzügen gedrängte Bauart und hohe Beanspruchung der Baustoffe ergibt. Antrieb meist von Hand, mitunter auch hydraulisch oder elektrisch.

a) Zahnstangenwinden¹⁾. Verwendung zu Montagezwecken in Hüttenwerken, Kesselfabriken, Werften u. dgl., sowie zur Ausrüstung von Lokomotiven und Eisenbahnwagen.

Tragkraft 2 bis 20 t. Hub 0,3 bis 0,5 m.

Der Antrieb erfolgt mittels Kurbel und je nach Tragfähigkeit durch ein oder zwei Stirnrädervorgelege, die auf ein Zahnstangengetriebe arbeiten. Die Last selbst stützt sich entweder unmittelbar auf den drehbaren Kopf der Zahnstange oder auf eine an der Zahnstange angebrachte Pratte. Statt der Stirnrädervorgelege kann auch ein Schneckengetriebe eingebaut werden.

Kurbelarm $a = 250$ bis 300 mm. Kurbeldruck K bis 35 kg. Kleinste Zähnezahl bei Stirnrädergetrieben (Übersetzung meist $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{7}$) $Z_{\min} = 4$.

Hierbei werden die Zähne unmittelbar in die Welle eingefräst und gehärtet. Hohe zulässige Beanspruchung der Zähne: Flußstahl $k_b = 3000$ bis 3500 kg/cm². Spezifische Pressung in den Lagern p bis 400 kg/cm².

Gehäuse meist aus gepreßtem Stahlblech. Festhalten der Last geschieht durch ein Zahngesperre. Zur Vermeidung von Unglücksfällen durch die herum-schlagenden Kurbeln werden mitunter Bremsvorrichtungen, Sicherheitskurbeln u. dgl. angeordnet. Wirkungsgrad der Zahnstangenwinden $\eta = 0,4$ bis $0,6$.

b) Schraubenwinden. Verwendungsbereich wie bei den Zahnstangenwinden.

Tragkraft 2 bis 20 t. Hub 0,25 bis 0,4 m.

Heben der Last geschieht durch eine Schraubenspindel mit flach- oder trapezförmigem Gewindequerschnitt. Die in Phosphor-Bronze hergestellte Mutter ist fest im Gehäuse gelagert. Antrieb der Spindel entweder durch Handhebel oder Ratsche. Antrieb der Spindelmutter des geringeren Wirkungsgrades wegen nur in besonderen Fällen. Gehäuse: Gußeisen, Stahlguß oder gepreßtes Stahlblech.

Fig. 91 zeigt eine sog. Schrauben-Schlittenwinde, bei der durch Anbringen einer weiteren wagerechten Spindel eine Verschiebung der Last in genanntem Sinne ermöglicht wird.

Die Spindel der Schraubenwinde muß selbsthemmend sein und erhält daher eingängiges Gewinde. Steigungswinkel $\alpha = 4$ bis 5° ; Reibungswinkel $\rho = 6^\circ$.

Wirkungsgrad $\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \rho)}$. Je nach Gewindesteigung $\eta = 0,25$ bis $0,35$.

¹⁾ Bau und Berechnung siehe Bethmann, Hebezeuge.

Mit einem mittleren Gewindehalbmesser r_m und einem Hebelarm a ist die zum Heben bzw. Senken erforderliche Antriebskraft P ohne Berücksichtigung der Spurreibung:

$$P = Q \cdot \frac{r_m}{a} \cdot \operatorname{tg}(\alpha \pm \rho) \dots \text{kg.}$$

Berechnung der Spindel erfolgt auf zusammengesetzte Festigkeit (Druck und Verdrehung). Zulässige Beanspruchung bei Flußstahl $k = 900$; $k_d = 600 \text{ kg/cm}^2$. Zulässige Flächenpressung zwischen Spindel und Mutter $p \leq 100 \text{ kg/cm}^2$ (Flußstahl auf Phosphorbronze).

Lokomotivhebeböcke¹⁾ dienen zum Heben schwerer Lasten, wie Lokomotiven, Wagen u. dgl. Die Schraubenspindel ist in einem Ständer drehbar gelagert und wird mittels Handkurbeln und zweier Rädervorgelege angetrieben. Zum Heben einer Lokomotive werden vier Hebeböcke benutzt, von denen je zwei durch einen Querträger miteinander verbunden

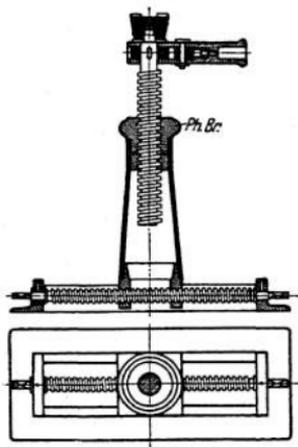


Fig. 91.

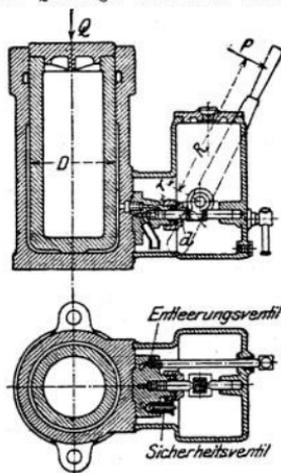


Fig. 92.

sind. Letztere stützen sich mit ihrem Ende auf die in der Ständerführung auf- und abbewegbare Spindelmutter. Auf jede Spindel trifft $\frac{1}{4}$ der Gesamtlast. Tragfähigkeit bis $4 \times 15000 = 60000 \text{ kg}$.

Zum schnelleren Heben der Last Antrieb der Hebeböcke durch einen fahrbaren Elektromotor, dessen Leistung etwa 5 bis 7 PS beträgt²⁾.

Statt der Hebeböcke werden in neuerer Zeit in den Eisenbahnwerkstätten Lokomotivlaufkrane (s. S. 1149) angewendet.

c) **Druckwasser-Hebeböcke**, sog. Daumenkräfte (Fig. 92), finden für höhere Tragkraft, 20 bis 300 t, Verwendung. Hub je nach Tragfähigkeit 0,155 bis 0,35 m.

Vorteile: Wirtschaftliches Arbeiten, da der erforderliche Druck von der Größe der Last abhängig ist. Den mechanischen Winden gegenüber bieten die Druckwasserhebeböcke beliebig große Übersetzung zwischen Kraft und Last bei kleinstem Raumbedarf.

Wirkungsweise nach Art der hydraulischen Presse. Druckerzeugung durch eine mittels Handhebel angetriebene einfach wirkende Pumpe.

Bedeutung (Fig. 92) D den Durchmesser des Arbeitskolbens, d den Plungerdurchmesser, r und R die Hebelarme des Antriebshebels und η den Wirkungsgrad, so beträgt das Verhältnis zwischen Antriebskraft und Nutzlast

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{r}{R} \cdot \left(\frac{d}{D}\right)^2; \quad \eta = \infty, 0,75.$$

¹⁾ Siehe Pickersgill, Lasthebemaschinen. Stuttgart 1905. K. Wittwer.

²⁾ Z. Ver. deutsch. Ing. 1900, S. 230.

Zylinder und Stempel werden zweckmäßig aus Stahlguß hergestellt. Abdichtung durch Ledermanschette. Ausführung der Pumpenteile in Deltametall, des Gehäuses, das gleichzeitig als Wasserbehälter dient, aus Gußeisen.

Zum Schutze gegen Gefrieren ist dem Druckwasser Glyzerin beizugeben.

Verwendung der Druckwasser-Hebeböcke zum Heben schwerer Lasten im Brückenbau und Schiffsbau, sowie zum Heben und Transportieren von Gebäuden u. dgl.

II. Mittelbar wirkende Winden (Räderwinden)

dienen zum Heben von Lasten auf größere Förderhöhen. Die Last hängt entweder unmittelbar mittels Haken am Huborgan oder bei mittlerer und größerer Tragfähigkeit an der Unterflasche eines Rollenzuges.

Der **Gesamtwirkungsgrad** einer Räderwinde ist gleich dem Produkt der Wirkungsgrade der einzelnen Getriebe.

$$\eta = \eta_0 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \dots$$

Er hängt von dem gewählten Huborgan, der Zahl und Art der Vorgelege, sowie der Güte der Ausführung ab.

Einschließlich Lagerreibung beträgt der Wirkungsgrad einer

Drahtseiltrommel	$\eta_0 = \infty 0,95,$
Kettentrommel	$= \infty 0,96,$
eines Kettenrades	$= \infty 0,93 \text{ bis } 0,95.$

Wirkungsgrad der Rollenzüge siehe Mechanik.

Der Wirkungsgrad der Zahnradervorgelege hängt von der Art des Getriebes, der Verzahnung, den verwendeten Baustoffen und der Güte der Lagerung ab.

Für Stirnrädervorgelege kann einschließlich Lagerreibung gesetzt werden:

Stirnräder mit rohen (gegossenen) Zähnen $\eta_1, \eta_2 \dots = 0,91 \text{ bis } 0,93,$ im Mittel 0,92;

Stirnräder mit genau bearbeiteten Zähnen $\eta_1, \eta_2 \dots = \infty 0,95.$

Bei Anwendung von Kegelrädern können die gleichen Werte veranschlagt werden.

Wirkungsgrad der Schneckengetriebe siehe Maschinenteile.

Der Wirkungsgrad einer Winde ist beim Entwurf rechnerisch zu ermitteln bzw. abzuschätzen.

Hängt die Last unmittelbar an der Trommel, so können für Stirnräderwinden folgende angenäherte Gesamtwirkungsgrade gesetzt werden:

Ein Vorgelege $\eta = \infty 0,85 \text{ bis } 0,88;$

zwei „ $= \infty 0,78 \text{ „ } 0,82;$

drei „ $= \infty 0,72 \text{ „ } 0,76.$

Vorstehende Werte gelten für Drahtseile und Ketten mit Trommel. Für Kette und Kettennuß sind dieselben um 2% zu niedrigen.

Bei Anwendung eines Rollenzuges ist dessen Wirkungsgrad zu berücksichtigen.

Wirkungsgrad eines Windwerks mit Selbsthemmung (Selbstsperrung) $\eta < 0,50.$

1. Antrieb von Hand.

Als Antriebsorgan dient entweder die Handkurbel oder bei größerer Entfernung vom Fußboden das Haspelrad mit Kette.

Übersetzungsverhältnis zwischen Kurbel bzw. Haspelrad und Trommel:

$$\varphi = \eta \cdot \frac{\text{Kraftmoment}}{\text{Lastmoment}} = \eta \cdot \frac{K \cdot a}{Q \cdot R}.$$

Das Lastmoment hängt von dem gewählten Huborgan und dem Halbmesser der Trommel oder des verzahnten Kettenrades ab. Kalibrierte Kette und Nuß, Gallsche Kette und Kettenrad ergeben kleinere, Ketten- und Drahtseiltrommel größere Lastmomente. Die Größe des Kraftmomentes (Kurbeldruck \times Kurbelhalbmesser) richtet sich nach der Tragfähigkeit sowie den Betriebsverhältnissen der Winde.

Kurbeldruck für 1 Arbeiter $K = 15$, vorübergehend 20 kg; Kurbelarm $a = 300$ bis 400 mm.

Der errechnete Wert des Übersetzungsverhältnisses ist entweder auf- oder abzurunden und in gebräuchliche Übersetzungsgrößen zu zerlegen, z. B. bei Stirnrädervorgelegen

$$\eta = \frac{1}{14} = \frac{1}{15} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}; \quad \eta = \frac{1}{30} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}; \quad \frac{1}{100} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}$$

eines Schneckenvorgeleges $\frac{1}{100} = \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{4}$.

Die im Hebezeugbau meist vorkommenden Stirnräderübersetzungen sind 1 : 2 bis 1 : 7. Als größter Wert einer Einzelübersetzung kann 1 : 8 (unter Umständen 1 : 10) gesetzt werden.

Kleinste Zähnezahl $z = 10$ bis 15, meist = 12. Verhältnis von Zahnbreite zur Teilung $\frac{b}{t} = 2$; (Krafräder). Zahnbeanspruchungsziffer: Gußeisen $c = 18$ bis 25, Stahlguß $c = 35$ bis 60.

Die von den verschiedenen Firmen hergestellten Handwinden haben meist 1, 2 oder 3 Stirnrädervorgelege. Bei größeren Übersetzungen ordnet man einen Rollenzug an und läßt die Last an der losen Rolle angreifen.

Zum schnelleren Heben kleinerer Lasten wird ein umschaltbares Räder-vorgelege vorgesehen.

Schneckenvorgelege bieten eine große Übersetzung, haben jedoch, besonders bei eingängiger (selbsthemmender) Schnecke, einen ungünstigeren Wirkungsgrad. Ein weiterer Nachteil der Schneckenwinden ist der, daß das Senken der Last zwangsläufig durch Zurückdrehen der Kurbel erfolgen muß, was namentlich bei größeren Hubhöhen einen erheblichen Zeitverlust bedeutet.

Die Geschwindigkeit der Last bei Handantrieb beträgt:

$$v = \frac{\eta \cdot K \cdot c}{Q} \text{ m/sek.},$$

wobei K den Kurbeldruck (oder Zug am Haspelrad) und c die zugehörige Geschwindigkeit bedeuten. Bei Kurbelantrieb kann je nach den Betriebsverhältnissen eine mittlere Geschwindigkeit $c = \infty 0,5$ bis 0,8 m/sek. angenommen werden.

Ausführung der Winden mit Antrieb von Hand.

a) Feststehende Winden gelangen als Bockwinden, Wandwinden, Säulenwinden u. dgl., sowie als Kran- und Aufzugswinden zur Verwendung. Huborgan: Kette oder Drahtseil. Bei der baulichen Ausführung der Winden ist den Bremsen besondere Beachtung zu schenken, auch sind beim Senken der Last herumschlagende Kurbeln zu vermeiden, was sich durch Anordnung ausdrückbarer Kurbelwellen oder sog. Sicherheitskurbeln ermöglichen läßt.

Winden von geringer Tragkraft und für untergeordnete Betriebsverhältnisse werden zuweilen ohne Bremse, jedoch mit Sperrad ausgeführt. Fig. 93 zeigt eine derartige, für Bauzwecke dienende Winde. Tragkraft: $Q = 500$ kg; Huborgan: Kalibrierte Kette.

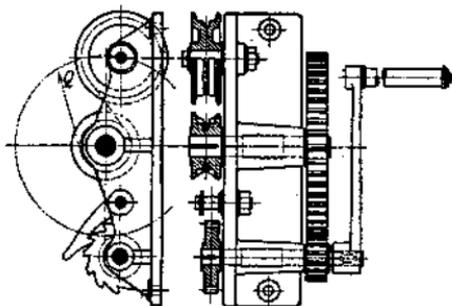


Fig. 93.

Sonst erhalten die Winden mit Handantrieb durchweg Sperrrad und Bremse (meist Bandbremse), sowohl in getrennter, als auch in kombinierter Anordnung (Lösungs- oder Sperrabremsen).

Winden mit größerem Hub rüstet man zur selbsttätigen Regelung der Senkgeschwindigkeit mit Fliehkraftbremsen aus. Auch Drucklagerbremsen gelangen bei Handwinden zur Anwendung.

Die Schilde der Winden werden entweder aus Gußeisen oder aus Flußeisen mit eingesetzten Gußlagern hergestellt. In neuerer Zeit werden meist flußeisernerne Schilde vorgezogen, da sie leichter und vor allem billiger und bequemer herzustellen sind.

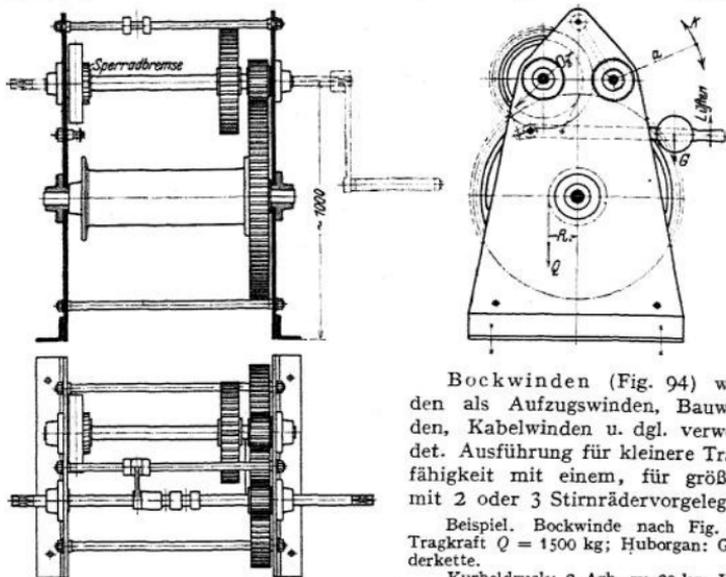


Fig. 94.

Bockwinden (Fig. 94) werden als Aufzugswinden, Bauwinden, Kabelwinden u. dgl. verwendet. Ausführung für kleinere Tragfähigkeit mit einem, für größere mit 2 oder 3 Stirnrädervorgelegen.

Beispiel. Bockwinde nach Fig. 94. Tragkraft $Q = 1500$ kg; Huborgan: Gliederkette.

Kurbeldruck: 2 Arb. zu 20 kg; Kurbelhalbmesser $a = 350$ mm. Wirkungsgrad $\eta = \infty, 0,78$ ang.

Doppeltes Stirnrädervorgelege. Ausrückbare Kurbelwelle.
Kettenstärke $d = 13$ mm; theoretischer Trommeldurchmesser $D = 260$ mm.

$$\text{Übersetzung } \varphi = \eta \frac{\text{Kraftmoment}}{\text{Lastmoment}} = 0,78 \frac{2 \cdot 20 \cdot 35}{1500 \cdot 13} = \infty \frac{1}{18} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}$$

Erstes Vorgelege $z = \frac{13}{36}$; $t = 10 \pi$; $D = \frac{130}{360}$;

Trommelvorgelege $z = \frac{13}{25}$; $t = 10 \pi$; $D = \frac{130}{250}$;

Zahnbreite beider Vorgelege $b = 75$ mm.

Teilung beider Vorgelege gemeinsam, da das auf der Kurbelwelle sitzende Ritzel sowohl auf das Zahnrad der mittleren Welle, als auch (bei kleineren Lasten) unmittelbar auf das Trommelrad arbeitet.

Bremse: Beckersche Sperrbremse. Sperrrad $z = 14$; $t = 12 \pi$; $D_1 = 160$ mm;

Ausführung der Bremse ($D_2 = 300$ bzw. 350 mm) als einfache Bandbremse (Bremsband mit Leder armiert) oder als Differentialbremse. Stärke des Bremsbandes $\delta = 1,5$ mm; Breite desselben $\beta = 50$ mm.

Durchmesser der ausrückbaren Kurbelwelle 32 mm, der mittleren Vorgelegewelle 50 mm, der Trommelwelle (Trommelrad mit Trommel verschraubt) 70 mm.

Wand- oder Konsolwinden werden meist für kleinere Tragkraft gebaut und finden in Magazinen, Warenhäusern, Schlachthöfen, sowie für Bauzwecke u. dgl. Verwendung. Ausführung meist mit Stirnrädervorgelegen (Fig. 95), mitunter auch mit Schneckengetriebe. In letzterem Falle selbsthemmende Schnecke (schlechter Wirkungsgrad) oder doppelgängige Schnecke und Drucklagerbremse. Vorteil der Schneckenwinden: Gedrängte Bauart und geringes Gewicht. Nachteil: Langsames Arbeiten wegen zwangsläufigem Senken der Last.

Handwinden für Bergwerkszwecke (Grubenkabel) haben den bergpolizeilichen Vorschriften zu genügen und sind beispielsweise mit doppelten Bremsen und Sperrädern auszurüsten.

b) Fahrbare Winden. Jede mit einem Fahrwerk ausgerüstete Winde äußert beim Fahren einen Widerstand, der auf die rollende Reibung der Laufräder und die gleitende Reibung in den Lagern zurückzuführen ist. Denkt man sich diesen Widerstand, den Fahrwiderstand, auf den Umfang der Laufräder reduziert, so ist das Produkt aus dem Fahrwiderstand W_r und dem Halbmesser des Laufrades R das Moment des Fahrwiderstandes.

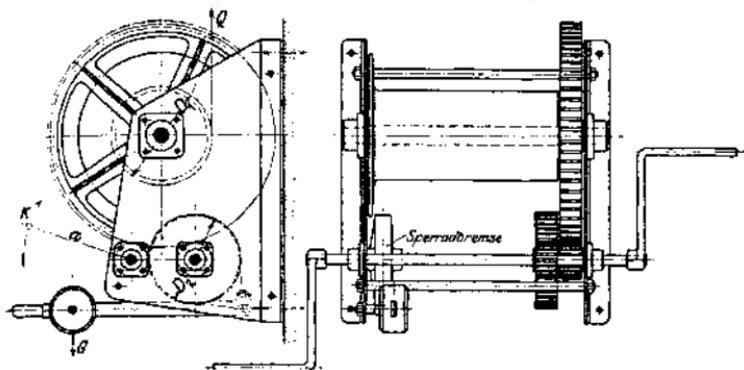


Fig. 95.

Mit Bezug auf Fig. 96 ist das Fahrwiderstandsmoment:

$$M_r = W_r \cdot R = (Q + G_1) \cdot \left(f + \mu \cdot \frac{d}{2} \right) \dots \text{kgcm.}$$

Hierin bedeuten G_1 das Eigengewicht der Winde in kg, $\mu = \infty 0,1$ die Reibungszahl, $f = \infty 0,1$ cm den Hebelarm der rollenden Reibung. Die Größe des Fahrwiderstandes hängt vom Durchmesser des Laufrades und von der Güte der Lagerung ab. In der Regel gibt man noch, um die Spurradsreibung zu berücksichtigen, einen Zuschlag von etwa 50%.

Mit Berücksichtigung dieses Zuschlages, des Wirkungsgrades der Vorgelege und Annahme eines Kraftmomentes ($K \cdot a$) ergibt sich bei Handantrieb die Übersetzung des Fahrwerks zu

$$\varphi = \frac{\eta \cdot K \cdot a}{M_r}.$$

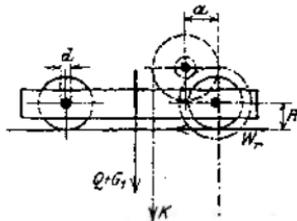


Fig. 96.

Je nach Größe dieser Übersetzung sind ein oder mehrere (meist Stirnräder-) Vorgelege erforderlich.

Bei Winden, die auf Fußbodenebene fahrbar oder von der Bühne eines Kranes aus betätigt werden, bedient man sich der Kurbel als Antriebsorgan.

Für Winden mit größerer Entfernung vom Fußboden oder für Krane ohne Bühne kommt das Haspelrad mit Kette zur Anwendung.

Zur Berechnung der Fahrwerke für Krane mit Handantrieb ist vorstehende Gleichung anzuwenden, nur ist für das Windengewicht G_1 das Gesamtgewicht des Kranes G zu setzen.

Laufkatzen werden für geringere Tragfähigkeit (etwa bis 1000 kg) ohne, für größere mit mechanischem Vorschub versehen. Sie erhalten meist einen Bügel zum Einhängen eines Flaschenzuges und können zum Fahren auf einem

oder zwei I-Trägern eingerichtet werden. Fig. 97 stellt eine auf dem Unterflansch eines I-Trägers fahrbare Laufkatze mit mechanischem Vorschub dar.

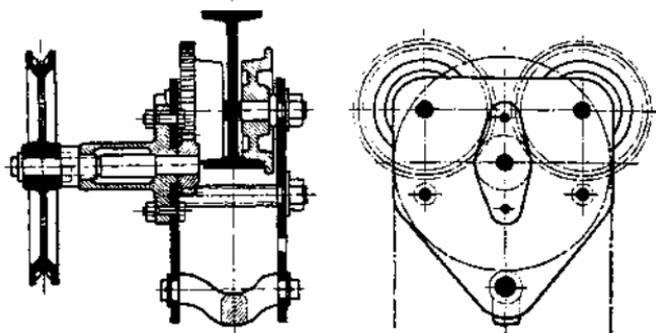


Fig. 97.

Die Laufkatzen werden auch mit eingebautem Schrauben- oder Stirnräderhubwerk hergestellt.

Laufwinden werden fast allgemein mit Haspelradantrieb ausgestattet und finden für Laufkrane, Bockkrane u. dgl. ausgedehnte Anwendung.

Je nach Ausführung des Hubwerks unterscheidet man Schneckenwinden und Stirnradwinden.

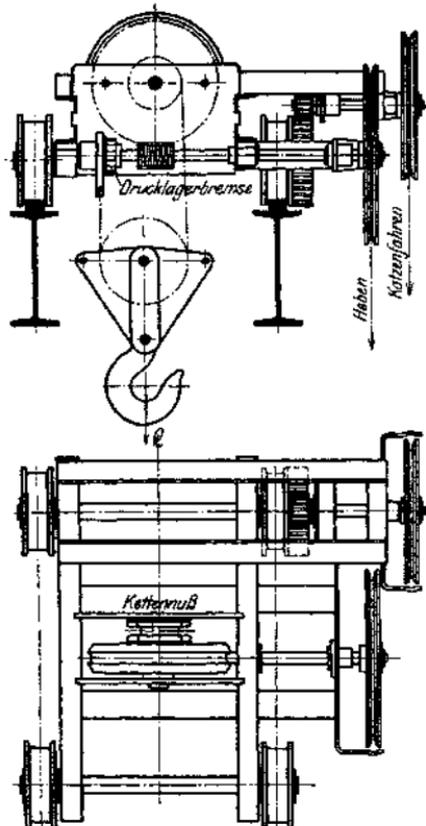


Fig. 98.

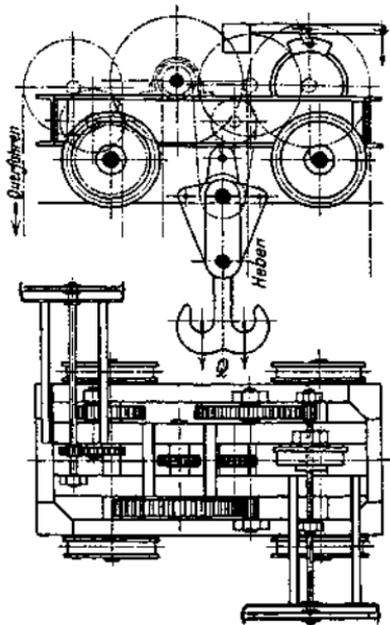


Fig. 99.

Bei den Schneckenwinden entspricht die Ausführung des Hubwerks den auf S. 1105 beschriebenen Schraubenflaschenzügen mit Drucklagerbremse. Huborgan: Gliederkette, bei größerer Tragkraft Gallsche Kette.

Fig. 98 zeigt z. B. eine Schneckenlaufwinde mit Drucklagerbremse (E. d. Weiler, Berlin). Ausführung für Tragfähigkeiten bis 10 000 kg. Zum Einstellen zweier Fahrgeschwindigkeiten kann das Fahrwerk mit einem umschaltbaren Vorgelege versehen werden, das mittels Kettenzug vom Fußboden aus bedient wird.

Stirnradlaufwinden (Fig. 99) haben einen günstigeren Wirkungsgrad als Schneckenwinden. Auch gestatten sie ein schnelleres Heben und Senken der Last. Huborgan: Gliederkette, Gallsche Kette oder Drahtseil. Als Bremse wird meist eine gewichtbelastete Backenbremse (bei größerer Tragfähigkeit Bandbremse) eingebaut, die durch Kettenzug gelüftet wird. Zur Regelung der Senkgeschwindigkeit werden die Winden mit Fliehkraftbremse (s. S. 1091) ausgerüstet. Für das sichere Arbeiten der Fliehkraftbremse ist jedoch eine genügende Belastung, etwa 10 bis 15% der Tragfähigkeit, erforderlich.

2. Motorischer Antrieb.

Handelt es sich um öfter benutzte Hebezeuge, insbesondere um größere Geschwindigkeiten, so stattet man die Winden mit motorischem Antrieb aus. Beim motorischen Antrieb ist die Abnutzung der der Reibung ausgesetzten Maschinenteile infolge der höheren Geschwindigkeiten eine wesentlich größere als bei Handantrieb. Die Getriebe sind daher stärker zu bemessen, d. h. die zulässigen Beanspruchungen sind niedriger zu halten und geringere Flächenpressungen zuzulassen. Die Zahnräder sind nicht nur auf Festigkeit, sondern auch auf Abnutzung zu berechnen.

Während beim Antrieb von Hand infolge der geringen Geschwindigkeit die Wirkung der Massen vernachlässigt werden kann, sind beim motorischen Antrieb die Massenwiderstände zu berücksichtigen. Sie erfordern beim Anlauf einen erhöhten Arbeitsaufwand, den der Motor während dieser Periode zu leisten hat. Diese überschüssige Arbeit muß während des Auslaufes durch die Bremse in einer bestimmten Haltezeit vernichtet bzw. in Wärme umgesetzt werden. Die gleiche Aufgabe fällt der Senkbremse zu, die die Geschwindigkeit der sinkenden Lasten zu regeln hat.

a) Weniger gebräuchliche Antriebsarten.

Der **Transmissionsantrieb** kommt nur noch für Werkstätten u. dgl., wo bereits eine Transmission vorhanden, zum Antrieb von Speicher- und Aufzugswinden in Betracht.

Die Kraftübertragung erfolgt durch Riemen mittels Fest- und Losscheibe.

Breite des Lederriemens bis $b = 150$ mm. Beanspruchung pro cm Riemenbreite bis $p = \infty 7$ kg. Größte zulässige Riemengeschwindigkeit $v = \infty 10$ m/sek. Umsteuerung des offenen bzw. gekreuzten Riemens durch Kurventrommel oder Kurvenscheibe. Näheres über Riemetrieb siehe Maschinenteile.

Ermittlung des Kraftbedarfes zum Heben s. S. 1124. Größte übertragbare Leistung $N = \infty 10$ PS. Speichenwinden werden der bequemen Handhabung wegen vielfach mit Reibungs- (Keilnuten-) Rädern ausgestattet. Größte zulässige Umfangsgeschwindigkeit der Keilnutenräder etwa 4 m/sek. Ausführung meist mit 4 Rillen bei 25 kg Umfangskraft pro Rille. Daher größte Leistung: $\frac{4 \cdot 25 \cdot 4}{75} = \infty 5$ PS. Hubgeschwindigkeit bis 2,5 m/min.

Der Transmissionsantrieb ist im allgemeinen unwirtschaftlich und wird daher wenig mehr angewendet. Verdrängt durch den elektrischen Antrieb.

Dampftrieb. Die Dampfführung von einer zentralen Dampfanlage aus bedingt lange Rohrleitungen, womit erhebliche Kondensationsverluste ver-

bunden sind. Daher Anwendung im Kranbau nur in besonderen Fällen, z. B. bei Schwimmkranen u. dgl.

Dampfkrane mit eigenem Dampfkessel sind teilweise noch als fahrbare Dampfkrane in Fabrikhöfen u. dgl. zu finden. Sie dienen hierbei zu gleicher Zeit als Rangierkrane zum Verfahren von Eisenbahnwagen, werden jedoch in letzter Zeit durch elektrisch betriebene Lokomotivkrane ersetzt.

Dampfmaschine. Sie wird, um in jeder Kurbelstellung umlaufen zu können, als Zwillingsmaschine mit 90° Kurbelversetzung ausgeführt. Einströmungsdruck $p_1 = 4$ bis 8 kg/cm^2 . Der Füllungsgrad wird des Anlaufes wegen groß genommen. Kleinste Füllung $= \infty 0,75$.

Bemessung des Dampfzylinders erfolgt für den Anlauf bei ungünstigster Kurbelstellung. Der Kraftbedarf der Winde kann nach S. 1124 ermittelt werden. Drehzahl $n = 100 \infty 200$.

Auf rationelle Dampfausnutzung (Kondensation) wird im Interesse der einfachen Handhabung verzichtet. Geringes Gewicht, einfache Bauart und Übersichtlichkeit Hauptbedingung.

Das Senken der Last kann durch Abkuppeln der Trommelwelle erfolgen. Festhalten der Last und Regeln der Senkgeschwindigkeit meist durch eine als Sperrbremse mit Fußtritt bediente Bandbremse.

Bei gleichbleibender Drehrichtung Umsteuerung mittels Wendetriebsen.

Für Schiffswinden und größere Dampfwinden Umsteuerung durch Kulissensteuerung nach Stephenson, Allan usw.

Berechnung der Heiz- und Rostfläche, sowie Konstruktion der Dampfkessel s. unter Dampfkessel.

Antrieb durch Verbrennungsmotoren. Anwendung bei transportablen Hebezeugen wie Baukranen und dgl., sowie in besonderen Fällen, wenn elektrische Energie nicht vorhanden.

Verbrennungsmotoren laufen nicht unter Belastung an, daher Verbindung von Motor und Windwerk durch ausrückbare Kupplungen oder Riementrieb mit Fest- und Losscheibe. Es gelten daher die für den Transmissionsantrieb S. 1113 gemachten Ausführungen. An den Motor zu stellende Anforderungen: Geringer Raumbedarf, niedriges Gewicht und erschütterungsfreier Gang. Regelung der Drehzahl des Motors innerhalb enger Grenzen durch Verstellung der Zündung. Verbrennungsmotoren sind stets betriebsbereit und erfordern während der Ruhepausen keinen Brennstoff. Nachteile sind die Bedingung des unbelasteten Anlaufens und die dadurch erforderliche Trennung von Motor und Windwerk, sowie das schwankende Drehmoment, das nur durch schwere Schwungräder ausgeglichen werden kann.

Antrieb durch Druckluft. Diese Antriebsart kommt nur dann zur Anwendung, wenn eine Druckluftzentrale vorhanden. Druckluftbezeuge sind meist unmittelbar wirkend und erfordern große Bauhöhe. Das Hubwerk besteht im Wesentlichen aus dem Zylinder, dem Kolben, an dessen Stange der Lasthaken hängt und dem Steuerhahn, der durch Kettenzug bedient wird. Der Zylinderraum unter dem Kolben steht mit der Druckluftleitung in Verbindung, während der obere Raum zum Steuern benutzt wird. Zum genauen Festhalten der Last wird der Luftzylinder meist mit einem Ölbremiszylinder versehen.

Druckluftbezeuge arbeiten stoßfrei, besitzen jedoch den Nachteil, der Undichtheiten wegen die Last nicht lange schwebend halten zu können. Luftdruck bis ca. 6 kg/cm^2 , Tragfähigkeit ca. 200 bis 15000 kg. Hubgeschwindigkeit $v = 3$ bis 12 m/min . Da die Luft durch einen beweglichen Schlauch zugeführt wird, so sind Druckluftbezeuge nur für kurze Strecken fahrbar.

Sie finden in amerikanischen Betrieben vielfache Anwendung. In Deutschland wird allgemein der wirtschaftlich günstigere, elektrische Antrieb vorgezogen.

Der Druckwasser-(hydraulische)Antrieb findet noch Anwendung bei Druckwasserhebeböcken (s. S. 1107), ferner bei Aufzügen (s. S. 1201), Hüttenwerkskränen u. dgl., wenn bereits eine Druckwasserzentrale vorhanden ist. Im übrigen ist er ebenfalls durch den günstigeren elektrischen Antrieb fast vollkommen verdrängt.

Die Druckerzeugung kann durch einen Hochbehälter erfolgen (Betriebsdruck etwa 1 bis 2 Atm.). Hierbei sind infolge des geringen Wasserdruckes weite und teure Rohrleitungen erforderlich. Ferner Druckerzeugung durch Windkessel (Betriebsdruck bis 10 Atm.), meist jedoch durch einen Akkumulator (Kraftsammler). Bei diesem arbeitet die Preßpumpe in einen Zylinder mit gewichtbelastetem Kolben. Betriebsdruck 25 bis 75 Atm., in der Regel 50 Atm. Zur Bemessung der Rohrleitungen kann eine Wassergeschwindigkeit $v = 1$ bis 2 m/sek. zugelassen werden.

Arbeitsweise. Bei den unmittelbar wirkenden Hebezeugen wird die Last direkt durch den Druckwasserkolben gehoben. Der Lastweg ist gleich dem Kraftweg. Unmittelbar wirkende Druckwasseraufzüge s. S. 1201. Bei den mittelbar wirkenden Hebezeugen legt der Kolben nur einen Teil des Lastweges zurück und ist daher eine Übersetzung erforderlich. Diese kann durch ein Zahnstangengetriebe oder einen Rollenzug bewirkt werden. Der Wirkungsgrad des letzteren ist gering und nimmt mit zunehmender Rollenzahl ab. Der Wirkungsgrad eines hydraulischen Hebezeuges ist das Verhältnis der Nutzarbeit zur aufgewendeten Arbeit. Bedeuten Q die Nutzlast, H deren Weg (Hub), F den Kolbenquerschnitt, p den Betriebsdruck und s den Kolbenweg, so ist

$$\eta = \frac{Q \cdot H}{F \cdot p \cdot s}.$$

Der Wert η ist durch die Größe der Arbeitsverluste bestimmt. Diese setzen sich zusammen aus den Widerständen der Leitung zwischen Kraftsammler und Steuerorgan, dem Widerstand beim Durchströmen des letzteren, der Stopfbüchsenreibung, dem Widerstand in der Übersetzung zwischen Kolben und Last und dem Gewicht der zu hebenden toten Massen. Infolge der Widerstände ist der im Zylinder wirksame und in Rechnung zu setzende Druck p_1 wesentlich geringer als der Betriebsdruck.

Der Druckwasserkolben wird bei Pressungen bis 10 Atm. als Scheibenkolben, bei größeren Pressungen als Plungerkolben ausgebildet. Die Wandstärke des Zylinders kann nach S. 482 berechnet werden. Zulässige Zugbeanspruchung Gußeisen $k_z \leq 300$; Stahlguß $k_z \leq 600$ kg/cm². Die Dichtung des Scheibenkolbens, sowie des Plungerkolbens an der Stopfbüchse geschieht durch Ledermanschetten.

Als Steuerorgane dienen Ventile, meist jedoch Kolbenschieber, mit Ledermanschetten abgedichtet. Für Pressungen über 10 Atm. Flachschieber aus Phosphorbronze. Zulässige Ventilgeschwindigkeit $v_v \leq 20$ m/sek.

Vorteile des Druckwasserantriebes: Wasserverbrauch nur beim Lastheben, Einfachheit der Steuerung, Regelung der Geschwindigkeit durch letztere, geräuschloser Betrieb, Wegfall von Bremsen u. dgl. Nachteile: Gleich hoher Wasserverbrauch bei großen und kleinen Lasten, daher unwirtschaftliches Arbeiten, Verringern der Senkgeschwindigkeit bei abnehmender Last und leichtes Versagen bei Frosteintritt.

b) Elektrischer Antrieb.

Die Hauptvorteile des elektrischen Antriebes bestehen in der Zentralisierung der Krafterzeugung, der einfachen Kraftzuleitung, der Betriebssicherheit und einfachen Regelung. Da sich der Stromverbrauch der jeweiligen Arbeitsleistung anpaßt und während des Stillstandes keinerlei Leerlaufarbeit geleistet wird, so ist der elektrische Antrieb den übrigen motorischen Antriebsarten auch in wirtschaftlicher Hinsicht bedeutend überlegen. Infolge dieser großen Vorzüge

hat der elektrische Antrieb die übrigen Antriebsarten auf dem Gebiete des Hebezeugbaues fast vollkommen verdrängt.

Stromarten: Gleichstrom von 110, 220, 440 und 500 Volt; Drehstrom (meist 50 Perioden/sek.) und einphasiger Wechselstrom.

Der Betrieb ist bei Drehstrom ebenso einwandfrei wie bei Gleichstrom. Im allgemeinen wird man dem Gleichstrom der Eigenschaften der Motoren, der Möglichkeit der Aufspeicherung des Stromes in Akkumulatoren, sowie der billigeren Zuleitung wegen den Vorzug geben. Sind die Hebezeuge dagegen in einem ausgedehnten Gebiet verstreut, so ist die Anwendung von Drehstrom mit hoher Spannung empfehlenswert. Einphasenstrom ist in letzter Zeit zu größerer Bedeutung gelangt. Für eine Umformung desselben in Gleichstrom oder Drehstrom kommen nur wirtschaftliche, aber nicht betriebstechnische Gründe in Betracht. Ein Vorteil des Einphasenstromes ist die einfache Steuerung der Motoren infolge Wegfalls der Controller.

Elektromotoren für unterbrochenen Betrieb.

Der Betrieb der Motoren im Hebezeugbau ist ein unterbrochener oder intermittierender, d. h. der Motor arbeitet verhältnismäßig kurze Zeit und hat alsdann eine mehr oder minder große Ruhepause. Die Elektrizitätsfirmen tragen dieser Betriebsart dadurch Rechnung, daß sie besondere Motoren für Hebezeuge bauen. Diese Kranmotoren müssen zur Beschleunigung der Massen ein entsprechend großes Anzugsmoment entwickeln, auch müssen sie schnell umsteuerbar (reversierbar), leicht regelbar, sowie betriebssicher sein. Ferner wird von den Kranmotoren geringes Gewicht bei kleinem Raumbedarf, sowie hohe Widerstandsfähigkeit verlangt.

a) Eigenschaften der Motoren im Betriebe.

α) Gleichstrommotoren. Regelung der Geschwindigkeit geschieht durch Vorschalten von Widerständen, Änderung des Drehsinns durch Umkehr der Stromrichtung im Anker.

Der Hauptstrom- oder Reihenschlußmotor bietet bei mäßiger Stromaufnahme ein großes Anzugsmoment, das etwa gleich dem 3fachen Drehmomente bei Stundenleistung¹⁾ ist. Eine wichtige Eigenschaft des Hauptstrommotors ist seine Eigenregelung. Diese äußert sich dadurch, daß der Motor beim Heben leichter Lasten (z. B. des leeren Hakens) von selbst schneller läuft als beim Heben der größten Nutzlast. Der Unterschied zwischen der Geschwindigkeit beim Heben des leeren oder schwach belasteten Hakens und bei Vollast beträgt etwa das Doppelte (Fig. 100) und ergibt daher eine wesentliche Zeiterparnis.

Bei starker Überlastung zeigt der Hauptstrommotor funkenfreien Gang, auch ist er unempfindlich gegen Spannungsabfall. Ein Hauptnachteil ist seine Neigung, bei starker Entlastung seine Drehzahl zu steigern und durchzugehen. Meist genügt jedoch der Reibungswiderstand der Vorgelege oder eines Schneckengetriebes, um ein Durchgehen zu verhindern. Langsam laufende Motoren können bis herab zu 10% des normalen Drehmomentes ohne Gefahr des Durchgehens entlastet werden. Sicherheitsvorrichtungen gegen Überschreiten der zulässigen Drehzahl s. S. 1197.

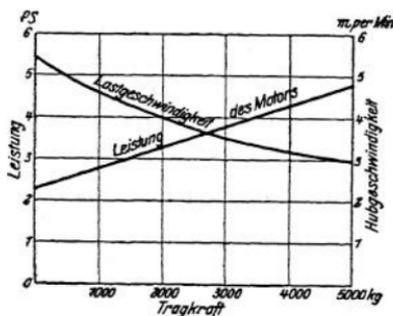


Fig. 100.

¹⁾ Normalien des V. d. E. für Bewertung und Prüfung elektrischer Maschinen und Transformatoren. Ausgabe 1913, Berlin, Julius Springer.

Infolge seines großen Anzugsmomentes und seiner Anpassung der Drehzahl an die jeweilige Belastung ist der Hauptstrommotor für den Hebezeugbau der gebene Motor, und sind daher etwa 90% aller Kranmotoren mit Hauptstromwicklung ausgerüstet.

Der Nebenschlußmotor besitzt ein geringes Anzugsmoment dem Hauptstrommotor gegenüber, auch hat er keine Eigenregelung, da seine Drehzahl bei allen Belastungen (auch bei negativer) fast konstant ist. Ein Nachteil des Nebenschlußmotors ist der erforderliche hohe Anlaufstrom bei Überlastung, sowie seine Neigung zur Funkenbildung.

Ein Durchgehen ist bei ihm vollständig ausgeschlossen, weshalb er da angebracht ist, wo eine vollständige Entlastung oder negative Belastung auftritt. Der Nebenschlußmotor hat ferner die Eigenschaft, beim Lastsenken als Generator zu arbeiten und nutzbaren Strom ins Netz zurückzugeben.

Infolge seines Verhaltens findet der Nebenschlußmotor zum Antrieb von Fördermaschinen, Aufzügen, Verladebrücken, Spills u. dgl. Verwendung. Regelbare Nebenschlußmotoren (durch Feldschwächung) werden im Kranbau selten benutzt.

Compound- (Verbund-) Motoren besitzen Hauptstrom- und Nebenschlußwicklung. Im Kranbau spielen sie eine untergeordnete Rolle, finden jedoch bei Fördermaschinen, Aufzügen und Elektrohängebahnen Anwendung.

β) Drehstrommotoren. Umkehrung des Drehsinnes geschieht durch Vertauschen zweier Zuleitungen.

Der Drehstrommotor ist in seinem Verhalten ähnlich wie der Nebenschlußmotor. Seine Drehzahl zwischen Vollast und Leerlauf ist fast konstant.

Bei geringem Spannungsabfall in der Zuleitung entwickelt er ein Anzugsmoment gleich dem 2,5- bis 2,8fachen Stundenleistungsmoment.

Der Drehstrommotor bietet infolge der Einfachheit seiner Bauart hohe Betriebssicherheit. Ein Durchgehen bei plötzlicher Entlastung bis auf Null ist vollständig ausgeschlossen. Beim Senken der Last arbeitet er wie der Nebenschlußmotor als Generator und gibt nutzbaren Strom ins Netz zurück.

Die Drehstrommotoren besitzen höhere Drehzahl als die in der Leistung gleichwertigen Gleichstrommotoren. Sie bauen daher kleiner und sind im Beschaffungspreis niedriger.

Die größeren Drehstrommotoren werden mit Schleifringanker, die kleineren mit Kurzschlußanker ausgerüstet. Letztere bieten den Vorteil, daß sie beim Anlassen keinen Anlaufwiderstandes bedürfen, dagegen erfordern sie einen hohen (etwa 4fachen) Anlaufstrom.

Bei Motoren mit Schleifringanker tritt eine selbsttätige Änderung der Drehzahl in Abhängigkeit von der Last nur dann auf, wenn ein Anlaufwiderstand eingeschaltet ist.

Bezüglich der Anwendung der Drehstrommotoren ist zu beachten, daß sie der unveränderlichen Drehzahl wegen für höhere Arbeitsgeschwindigkeiten zu wählen sind als die Gleichstrommotoren. Da bei größeren Tragfähigkeiten kleine Lasten zu langsam gehoben werden, so sieht man bei Drehstrom meist noch ein Hilfshubwerk zum schnelleren Heben kleiner Lasten vor.

γ) Motoren für Einphasenstrom finden in neuerer Zeit bei Laufkranen, Hafenkranen, Aufzügen u. dgl. mehrfache Anwendung.

Der Einphasen-Kommutatormotor entwickelt ein Anzugsmoment gleich dem 2,5fachen Drehmomente bei Stundenleistung. In der Änderung der Drehzahl in Abhängigkeit von der Last entspricht er in seinem Verhalten dem Hauptstrommotor.

Steuerung entweder durch Bürstenverschiebung oder wie bei den anderen Motoren mit Hilfe von Steuerapparaten und Widerständen.

Reihenschlußmotoren werden durch Stufentransformatoren gesteuert.

b) Wahl der Motoren. Leistung. Berechnung der Leistung der Hubmotoren s. S. 1124, der Fahrmotoren s. S. 1128.

In Rücksicht auf die zulässigen Erwärmungsgrenzen sind die Motoren reichlich zu wählen.

Je nach Leistungsfähigkeit unterscheidet man Motoren mit 30-, 45-, 60- und 90-Minuten-Leistung.

30-Minuten-Leistung ist diejenige Leistung, die der Motor bei gleichmäßiger Belastung 30 Minuten lang abzugeben vermag, ohne die zulässige Temperatur zu übersteigen. Motoren mit 30-Minuten-Leistung kommen nur für schwache Betriebe, d. h. für Hebezeuge, die selten in Tätigkeit treten, in Betracht.

45-Minuten-Leistung (Kranleistung) ist zu wählen, wenn die größte Last, für die das Hebezeug bestimmt ist, nur selten auftritt und die Ruhepausen wesentlich größer als die Arbeitszeiten sind. Nach der 45-Minuten-Leistung wird die große Mehrzahl der Motoren für Werkstättenkrane und Hafenkrane für Stückgüter bemessen.

60-Minuten-Leistung (Stundenleistung)¹⁾ kommt für Hebemaschinen in Betracht, die dauernd Massengüter zu fördern haben. Auch die Motoren der meisten Hüttenwerkskrane werden für Stundenleistung gewählt.

Für 90-Minuten-Leistung sind die Motoren besonders stark beanspruchter Hebezeuge, sowie solcher, die strahlender Wärme ausgesetzt sind, zu bemessen.

Nachstehende Tabelle gibt einen Anhalt für die Bemessung der Kranmotoren bei verschiedenen Betriebsverhältnissen.

Tab. 13.

30-Minutenleistung:	Krane in Kraftwerken, Drehscheiben, Spills, Schiebepöhlen, Fahrwerke von Verladebrücken und Portalkranen, die selten verfahren werden
45-Minutenleistung:	Hafenkrane für Stückgüter, Werkstatt-, Gießerei- und Werftkrane
60-Minutenleistung:	Hafenkrane für Massengüter, Hebezeuge mit Selbstgreifern, die meisten Hüttenkrane
90-Minutenleistung:	Stripperkrane, Gießkrane, Hebetische, Koksandrückmaschinen

Bei Wahl der Motoren sind, wenn irgend zugänglich, normale Motoren der elektrotechnischen Fabriken zu verwenden. Hierdurch werden die Motoren infolge der Massenfabrikation billiger, auch kann die Typenzahl wesentlich eingeschränkt werden.

Die folgende Zusammenstellung²⁾ gibt die Motorleistungen der Hub- und Fahrwerke für Krane verschiedener Größe. Sie läßt erkennen, daß alle Bewegungsarten der modernen elektrisch betriebenen Krane ohne zu großen Sprung in der Motorleistung mit 4 oder 5 Typen ausführbar sind.

Tab. 14.

Motorleistung PS	Verwendungsgebiet
5	Katzenfahrwerke kleinerer Krane, Drehwerke, Kippwerke von Chargiermaschinen, Stripperkranen usw.
12	Katzenfahrwerke größerer Krane, Kranfahrwerke kleinerer Krane
25	Hubwerke kleinerer Krane, Kranfahrwerke mittlerer Krane
45	Hubwerke mittlerer Krane, Kranfahrwerke größerer Krane
75—80	Hub- und Kranfahrwerke von Kranen größerer Tragkraft bzw. solcher mit sehr großen Arbeitsgeschwindigkeiten

¹⁾ Normalien des V. d. E. für Bewertung und Prüfung elektrischer Maschinen und Transformatoren. Ausgabe 1913. Berlin. Julius Springer.

²⁾ Michenfelder, Kran- und Transportanlagen. Berlin 1912. Julius Springer.

Drehzahl. Sie richtet sich nach den Betriebsverhältnissen des Hebezeuges. Für Motoren, die oft umgesteuert werden und bei denen genaues Anhalten Bedingung, ist eine niedrige Drehzahl zu wählen. Besondere Rücksicht bei Wahl der Drehzahl ist auch auf die Steigerung der Geschwindigkeit bei Entlastung der Motoren zu nehmen.

Für Fahr- und Drehwerke, wo der Motor stets genügend belastet, wählt man bei nicht zu großer Fahrgeschwindigkeit und wenn schnelles Anfahren und genaues Halten nicht Bedingung, schnelllaufende Motoren (Drehzahl n bis 1500): z. B. Katzenfahrwerke für Krane mit kleinerer Fahrgeschwindigkeit, Fahrwerke selten verfahrens Portalkrane und Verladebrücken, Katzen- und Kranfahrwerke für Werkstätten und Montagekrane. Wird schnelles Umsteuern und genaues Halten verlangt, so sind langsam laufende Motoren ($n = 500$ bis 700) zu wählen; z. B. Laufkatzen mit hoher Fahrgeschwindigkeit, Stripperkrane u. dgl.

Bei Wahl der Motordrehzahl für Hubwerke ist Rücksicht auf etwaiges Durchgehen des Motors sowie auf Steuerfähigkeit zu nehmen. Ist das Hubwerk mit selbsthemmender Schnecke oder mit Lastdruckbremse ausgerüstet, so ist ein Durchgehen ausgeschlossen, daher Motoren mit hoher Drehzahl ($n = 1500$)

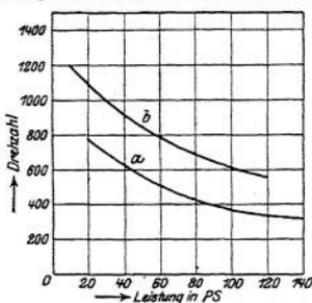


Fig. 101.

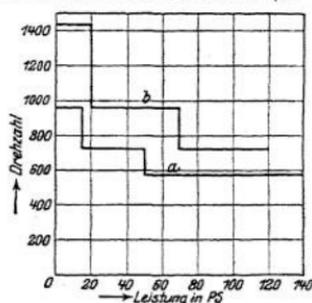


Fig. 102.

zulässig. Ist selbsthemmende Schnecke oder Lastdruckbremse nicht vorhanden und besitzt das Triebwerk hohen Wirkungsgrad, so sind langsam laufende Motoren ($n = 500$ bis 700) zu wählen. Soll das Senken der Last mit einem Vielfachen der Hubgeschwindigkeit vor sich gehen, so ist bei Wahl der Drehzahl hierauf besondere Rücksicht zu nehmen, bzw. ein Motor zu wählen, der für diese Senkgeschwindigkeit gebaut ist.

Fig. 101 u. 102 geben einen Anhalt für die Wahl der Motordrehzahl in Abhängigkeit von der Leistung. Fig. 101 gilt für Gleichstrom- und Einphasenstrom-, Fig. 102 für Drehstrommotoren; Schaulinien a für langsam laufende, b für schnell laufende Motoren.

c) Mechanische Ausführung der Motoren.

Die Motoren werden in normaler Ausführung mit Füßen für stehende und hängende Anordnung ausgeführt.

Eine Teilung des Gehäuses ist zweckmäßig, da sie das Motorinnere für Untersuchungen leicht zugänglich macht.

Sogenannte Flanschmotoren werden für Gleich- und Wechselstrom ausgeführt und dienen besonders als Antriebsmotoren für kleinere elektrisch betriebene Laufwinden, sowie für elektrisch betriebene Flaschenzüge.

Zum Anbau an ein Schneckengetriebe werden sie auch mit Zentrierleiste ausgeführt.

Motoren mit senkrechter Drehachse werden selten, hauptsächlich zum Antrieb von Spills (ohne Schneckenantrieb) verwendet.

Offene Motoren dürfen weder Staub noch Feuchtigkeit ausgesetzt sein und kommen nur für geschlossene Räume, Werkstätten und Maschinenhäuser für Drehkrane usw. in Betracht.

Gekapselte Motoren für Krane, die im Freien oder in staubigen Räumen arbeiten. Bei Aufstellung im Freien ist jedoch außerdem eine Verschalung des ganzen Triebwerkes vorzusehen.

Ventiliert gekapselte Motoren sind gegen mechanische Verletzungen, aber nicht gegen Staub und Feuchtigkeit geschützt.

Die Stromzuführung zu den Motoren geschieht durch Anschlußklemmen, die auf einem besonderen, durch eine Kapsel geschützten Klemmbrett, montiert sind.

3. Steuerung der Motoren.

Die Kranmotoren werden — von besonderen Fällen abgesehen — durch Schaltwalzen oder Controller gesteuert (s. S. 1192).

Den Steuerapparaten fällt die Aufgabe zu, den Motor anzulassen, seine Drehzahl zu regeln und umzusteuern. Durch geeignete Schaltungen wird es ermöglicht, mittels des Motors zu bremsen (elektrische Bremsung).

Entsprechend den Bewegungen im Kranbau unterscheidet man Schaltungen für Fahr- und Drehwerke und Schaltungen für Hubwerke. Im folgenden sind diese Schaltungen durch Schaulinien gekennzeichnet, bei denen die Abszisse den Schaltweg des Steuerapparates und die Ordinate das entsprechende Motordrehmoment darstellt¹⁾.

a) Schaltungen für Fahr- und Drehwerke.

Die Bewegung ist nach beiden Richtungen dieselbe, Steuerung daher symmetrisch.

Einfache Umkehrung (ohne Nachlaufbremsung), Fig. 103. Sowohl bei Gleichstrom als auch bei Drehstrom anwendbar. Bei größeren bewegten Massen und Fahrgeschwindigkeiten über etwa 0,4 m/sek. ist, um genaues Halten zu erzielen, eine elektromagnetisch betätigte Haltebremse anzuordnen.

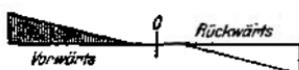


Fig. 103.



Fig. 104.

Bremsen mit Gegenstrom ist bei Gleichstrom der auftretenden Stromstöße wegen zu vermeiden. Bei Drehstrom Bremsen mit Gegenstrom nur im Notfalle.

Anwendung der einfachen Umkehrung besonders bei Katzen- und Kranfahrwerken.

Umkehrung mit Nachlaufbremsung (Anker kurzschlußbremsung), Fig. 104. Nur bei Gleichstrom möglich. Bei Bremsstellung wird der laufende Motor vom Netz abgeschaltet und über einen Widerstand kurzgeschlossen, so daß er als Generator arbeitet. Hierbei wird die in den bewegten Massen aufgespeicherte Arbeit in elektrische Energie umgesetzt und in den Widerständen vernichtet. Die Bremswirkung selbst kann durch Ändern des vor den Anker geschalteten Widerstandes verstärkt und abgeschwächt werden.

Da die Bremswirkung mit sinkender Geschwindigkeit abnimmt, so ist bei Fahr- und Drehwerken, bei denen genaues Halten Bedingung, eine besondere durch Fußtritt oder elektromagnetisch betätigte Haltebremse anzuordnen. Letztere kann auch dazu dienen, den Kran gegen Winddruck zu sichern.

Für größere Fahrgeschwindigkeiten (etwa über 1 m/sek.) reicht die Kurzschlußbremsung nicht mehr aus und ist alsdann eine mechanische Halte- bzw. Verzögerungsbremse zu Hilfe zu nehmen.

Bei einphasigem Wechselstrom und Anwendung eines Repulsionsmotors kann die Steuerung mit Controller und Widerstand oder durch Bürsten-

¹⁾ S. S. W., Elektrische Kranausrüstungen. Berlin 1913. Julius Springer.

verstellung erfolgen. Die Steuerung mittels Bürstenverstellung ermöglicht eine besonders feinstufige Regelung zwischen Stillstand und voller Geschwindigkeit. Sie ist außerordentlich wirtschaftlich und infolge Wegfall der Controller und Widerstände einfach. Sie ist, wenn die Bürstenbrücke unmittelbar vom Kranführer bedient werden kann, allen anderen Regelungsarten vorzuziehen.

Die Steuerung der Reihenschlußmotoren geschieht durch Stufentransformatoren.

b) Schaltungen für Hubwerke.

α) Gleichstromschaltungen. Einfache Umkehrung (Fig. 103) nur bei Hubwerken mit selbsthemmender Schnecke oder bei Senken mit Lastdruckbremse.

Die erforderliche Haltebremse wird bei Vereinigung von Hubwerk und Führerstand als mechanische (Hand- oder Fußtritt-)Bremse ausgebildet. Bei Trennung von Hubwerk und Führerstand Betätigung der Haltebremse durch Lüftmagnet.

Umkehrung mit Nachlaufbremse (Fig. 104) nur in besonderen Fällen.

An Stelle der symmetrischen Schaltungen finden nachstehende **Senkbremsschaltungen** ihrer Betriebssicherheit und feinstufigen Regelung wegen allgemeine Anwendung.

Senkbremsschaltung mit starker Fremderregung (Fig. 105).

Der Motor wird während des Bremsvorganges über einen Widerstand geschlossen und bei gelüfteten Bremsmagneten von der sinkenden Last als Generator angetrieben. Die hierbei erzeugte elektrische Energie wird in den Widerständen in Wärme umgesetzt. Nach einer den S. S. W. geschützten Schaltung wird die Feldwicklung in der ersten Senkbremstellung unter Vorschalten des Anlaßwiderstandes unmittelbar an das Netz gelegt, wobei der Motor kräftiger erregt wird, als er sich bei Hintereinanderschaltung von Anker, Feld und Widerstand selbst erregen würde. Die Senkgeschwindigkeit der Last wird durch Ändern des vorgeschalteten Widerstandes geregelt. Sie ist um so größer, je mehr Widerstand in den Motorstromkreis geschaltet wird.

Da kleinere Lasten oder der leere Haken das Hubwerk mit dem Motor nicht mehr durchziehen, so sind hinter den Senkbremstellungen noch zwei Senkkraftstellungen vorgesehen, bei denen der Motor im Senksinne Strom erhält.

Die Senkbremsschaltung mit starker Fremderregung ermöglicht ein stoßfreies Bewegen der Last und ist bei Montage- und insbesondere bei Gießereikranen, wo es sich vielfach um Heben und Senken um wenige Millimeter handelt, besonders geeignet.

Das Festhalten der Last in beliebiger Stellung, sowie das Abbremsen des Nachlaufes beim Heben, geschieht durch eine doppelwirkende Haltebremse, die sowohl beim Heben als auch beim Senken elektromagnetisch gelüftet wird.

Fig. 106 gibt die Regelkurven der Senkbremsschaltung mit starker Fremderregung. Jede Kurve entspricht einer bestimmten Schaltstellung und zeigt die Abhängigkeit der Drehzahl vom jeweiligen Drehmoment.

Senkbremsschaltung mit schwacher Fremderregung (Fig. 105).

Sie unterscheidet sich von der vorgehenden Schaltung dadurch, daß das Feld in der ersten Senkstellung nicht unter Vorschaltung des Anlaßwiderstandes,



Fig. 105.

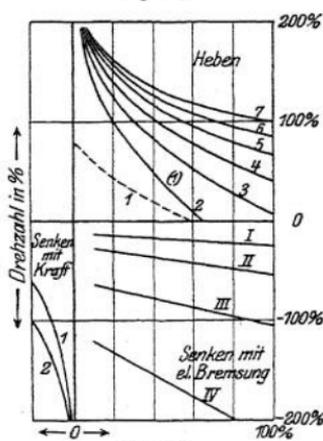


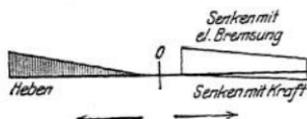
Fig. 106.

sondern unter Vorschaltung des Nebenschlußbremsmagneten an das Netz gelegt wird.

Die Senkbremsschaltung mit schwacher Fremderregung ist angebracht, wenn es sich um schnelles Arbeiten ohne feinere Regelung, wie bei Sonderkränen für Hüttenwerke, bei Bedienung durch Universalkontroller (s. S. 1193), oder Kontroller mit Seilbedienung handelt. Sie gelangt daher für Hubwerke von elektrisch betriebenen Flaschenzügen, Laufkatzen u. dgl. zur Verwendung.

Sicherheits-Senkschaltung (Fig. 107).

Bei dieser arbeitet der Motor beim Senken wie eine Nebenschlußmaschine, und zwar in ein und derselben Schaltstellung bei kleineren Lasten als Motor, bei großen Lasten als ein von der sinkenden Last angetriebener Generator. Die Hauptstromwicklung liegt alsdann bei allen Senkstellungen in Reihe mit dem Anlaßwiderstand am Netz, während der Ankerstrom parallel zum Feld von einer Stelle des Widerstandes abzweigt ist.



Bei der Sicherheitssenkschaltung erhöht sich die Erregung selbsttätig, wenn der von der Last durchgezogene Motor als Generator arbeitet, wodurch die sinkende Last kräftig gebremst wird und sich die Drehzahl nur wenig steigert. Eine Zunahme des Drehmomentes an der Motorwelle von 0 bis auf 100% entspricht z. B. eine Änderung der Drehzahl beim Senken von 75 auf 120%.

Die Sicherheits-Senkschaltung schließt ein Durchgehen der Last ohne besondere Hilfsmittel vollkommen aus und ist für Krane, die besonders hoch beansprucht sind, oder wertvolles Gut zu fördern haben, geeignet.

Bei Hafenkranen und Laufkatzen mit angebaute Führerstand kann die Last durch eine einseitig wirkende mechanische Senksperrbremse, die durch den Kontrollerhebel bedient wird, gesenkt werden (s. S. 1172).

β) Drehstromschaltungen. Einfache Umkehrung wie bei Gleichstrom (Fig. 103).

Sind keine selbstsperrenden Schnecken und Lastdruckbremsen vorhanden, so kann die einfache Umkehrung bei klein bemessenen Regelwiderständen auch als Sicherheits-Senkschaltung verwendet werden. Der im Senksinne geschaltete Drehstrommotor wird alsdann von einer genügend großen Last mit einer bestimmten übersynchronen Geschwindigkeit durchgezogen, wobei er als Generator auf das Netz arbeitet und bremsend wirkt. Seine Geschwindigkeit ist um so größer, je größer die Last ist und je mehr Widerstand in den Läuferkreis geschaltet wird. Der Regelbereich liegt zwischen der synchronen Geschwindigkeit und der zulässigen Höchstgeschwindigkeit. Zum Festhalten der Last, sowie zum Abbremsen des Nachlaufes ist eine doppelwirkende, elektromagnetisch gelüftete Haltbremse anzuordnen, die sowohl beim Heben, als auch beim Senken gelüftet wird.

Die Sicherheitsschaltung für Drehstrom ist angebracht, wenn eine genaue Regelung der Senkgeschwindigkeit nicht erforderlich ist. Sie kommt daher bei Hafenkranen mit großen Hubhöhen oder bei rasch arbeitenden Laufkatzen mit Fernsteuerung, wo das Anbringen von Hand betätigter Manöverbremsen Schwierigkeiten macht, zur Anwendung.

Gegenstrom-Senkbremsung (Fig. 105, S. 1121). Der Motor wird auch beim Senken im Hubsinne geschaltet, und zwar mit so großem Widerstand im Läuferstromkreis, daß sein Drehmoment die Last nicht heben kann, der Motor daher von letzterer entgegengesetzt dem Drehsinn des Feldes durchgezogen wird. Das hierbei vom Motor entwickelte Gegenmoment ist so bemessen, daß auch schwere Lasten auf den ersten Schaltstellungen in der Schwebelage gehalten und langsam gesenkt werden können. Da bei diesen Schaltstellungen kleine Lasten infolge des vom Motor entwickelten zu großen Dreh-

wird. Im Gegensatz zur Regelung durch Widerstände ist die Drehzahl nicht von der Last, sondern allein von der Spannung der Steuerdynamo abhängig. Jeder Schaltstellung des Nebenschlußreglers der Steuerdynamo entspricht bei allen Belastungen eine ganz bestimmte Drehzahl des Arbeitsmotors.

Auslegen des Steuerhebels D nach vorwärts bewirkt Zunahme der Drehzahl in dem einen Sinn, Auslegen nach rückwärts Zunahme derselben in entgegen-gesetztem Sinne. Zurückziehen des Steuerhebels bewirkt sofortige Abnahme der Drehzahl (Bremsen). Da der Arbeitsmotor jeder Bewegung des Steuerhebels genau folgt, so ist eine feinstufige Einstellung der Geschwindigkeit in den weitesten Grenzen ermöglicht.

Die Leonard-Steuerung wird bei Gießerei-Laufkränen¹⁾, Geschützkranen, Schwimmkränen, Waggonkippern u. dgl., insbesondere jedoch bei Fördermaschinen angewendet.

c) Berechnung und Ausführung der elektrisch betriebenen Winden.

Dieselben sind entweder feststehend als Speicherwinden, Aufzugswinden, Grubenkabel, Spillwinden u. dgl. oder sie sind fahrbar als Motorlaufwinden oder elektrisch betriebene Laufwinden für Krane verschiedener Art.

Je nach dem Zweck, dem die Winden dienen, sind sie entweder mit elektrischem Antrieb für das Hub- und Fahrwerk versehen, oder letzteres erhält bei kurzer Fahrbahn und seltenerer Benutzung Handantrieb.

1. Hubwerk. Als Huborgan bedient man sich allgemein des Drahtseiles. Bei größerer Tragkraft und geringerer Hubgeschwindigkeit (etwa bis 0,5 m/sek.), sowie für besondere Zwecke, Schmiedekrane u. dgl. findet auch die Gallsche Kette Verwendung.

Die Hubgeschwindigkeit richtet sich nach der Tragfähigkeit und den Betriebserfordernissen.

Eine Änderung der Hubgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Last bietet bei Gleichstrom der Hauptstrommotor, da er leichtere Lasten, besonders den leeren Haken, schneller hebt als schwere. (Eigenregelung.) Bei Drehstrombetrieb ordnet man, um leichtere Lasten schneller zu heben, umschaltbare Rädervorgelege an, die durch eine Klauenkuppelung aus- und eingerückt werden. Verhältnis der großen zur kleinen Hubgeschwindigkeit aus baulichen Gründen nicht größer als 2,5 : 1.

Eine feinstufige Änderung der Hubgeschwindigkeit innerhalb der weitesten Grenzen wird durch den Doppelantrieb der M.-A.-N. (S. 1131) sowie durch Anwendung der Leonard-Schaltung (S. 1123) ermöglicht.

Bei gegebener Hubgeschwindigkeit ist die zum Heben der Last erforderliche Motorleistung

$$N_1 = \frac{Q \cdot v_1}{75 \cdot \eta} \dots \text{PS.}$$

In dieser Gleichung ist Q in kg und die Hubgeschwindigkeit, die meist in m/min. angegeben wird, in m/sek. einzusetzen. Der Wirkungsgrad η ist der Konstruktion entsprechend schätzungsweise zu errechnen.

Wirkungsgrad eines reinen Stirnräderwindwerkes: $\eta = \infty$ 0,65 bis 0,7, eines Windwerkes mit Schnecken- und Stirnradvorgelege: $\eta = 0,55$ bis 0,60.

Nach Berechnung der erforderlichen Leistung wird der Motor in Rücksicht auf zulässige Erwärmung und zweckentsprechende Drehzahl der Motorenliste entnommen. Wahl der Motoren s. S. 1117.

Da vorstehende Gleichung nur für den Beharrungszustand gilt, so ist während der Anlaufperiode zur Beschleunigung der Massen ein erhöhter Arbeitsaufwand

¹⁾ Aumund. Z. Ver. deutsch. Ing. 1910, S. 1216.

erforderlich, und der Motor muß daher ein genügendes Anzugsmoment entwickeln. Die Anlaufzeit t_a kann zu 2 bis 4 Sek. angenommen werden.

Für Hauptstrommotoren ist die Zeit-Geschwindigkeits-Kurve eine Parabel (Fig. 111).

$$\text{Anfangsbeschleunigung } p_a = \operatorname{tg} \alpha = \frac{2v}{t_a}$$

Die Verbindung des Motors mit dem Triebwerk erfolgt bei Schneckenantrieb stets durch elastische Kupplungen (s. Maschinenteile). Bei Stirnräderwinden wird das Ritzel, besonders bei kleineren Leistungen auch unmittelbar auf dem Wellenstumpf des Motors angeordnet. Im allgemeinen ist jedoch bei höheren Motorleistungen der Einbau einer elastischen Kupplung aus Montage- und Betriebsgründen zu empfehlen.

Übersetzung. Die zwischen Last und Motor erforderliche Übersetzung richtet sich nach der Hubgeschwindigkeit und Drehzahl des Motors.

Bei kleineren Tragfähigkeiten kann die Last unmittelbar an der Trommel hängen.

Für größere Tragfähigkeiten sind zwischen Haken und Trommel besondere Rollenzüge anzuordnen. Um ein Wandern der Last längs der Trommel zu vermeiden, werden diese Rollenzüge als Zwillingssrollenzüge ausgebildet. Die Zahl der tragenden Seile ist durch die Größe der Nutzlast bedingt.

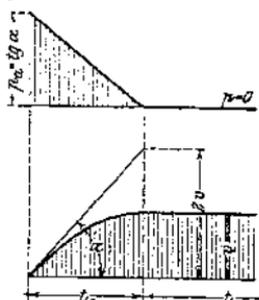


Fig. 111.

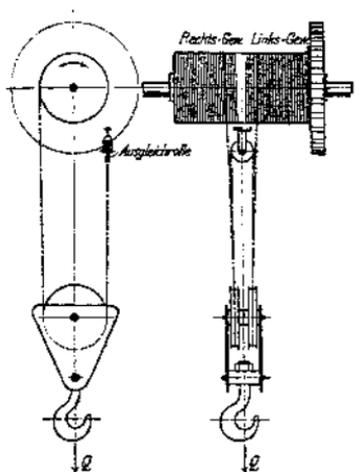


Fig. 112.

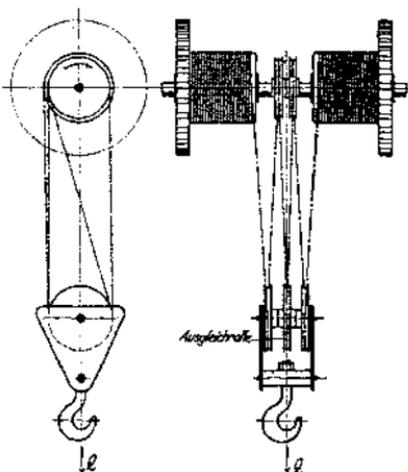


Fig. 113.

Anwendung des Seilzuges Fig. 112 für Tragfähigkeiten bis etwa 25 t. Last hängt an 4 Seilsträngen; Übersetzung $\varphi_0 = \frac{1}{2}$. Seilgeschwindigkeit an der Trommel $= 2 v_1$.

Seilzug nach Fig. 113 für Tragfähigkeiten bis etwa 60 t. Last hängt an 6 Seilsträngen; Übersetzung $\varphi_0 = \frac{1}{2}$; Seilgeschwindigkeit an der Trommel $= 3 v_1$.

Für Tragfähigkeiten über 60 t Anwendung der Rollenzüge Fig. 114 und 115. Last hängt an 8 Seilsträngen; Übersetzung $\varphi_0 = \frac{1}{2}$; Seilgeschwindigkeit an der Trommel $= 4 v_1$.

Bei Anwendung der Rollenzüge Fig. 112 und 115 ist die Ausgleichrolle nach Art von Fig. 19, S. 1069 pendelnd aufzuhängen.

Die zwischen Motor und Trommel erforderliche Übersetzung ist:

$$q = \frac{\text{Drehzahl der Trommel}}{\text{Drehzahl des Motors}}$$

Als Übersetzungsorgane bedient man sich entweder eines oder mehrerer Stirnrädervorgelege, oder man ordnet ein Schneckengetriebe als Motorvorgelege und 1 oder 2 Stirnrädervorgelege an. Bei Speicherwinden u. dgl. verwendet man auch Reibungs-(Keilnuten)Räder.

Reine Stirnräderwinden haben einen günstigeren Wirkungsgrad, erfordern jedoch langsam laufende und damit teure Motoren.

Bei Berechnung der Zahnräder ist zwischen schnelllaufenden (Arbeitsrädern) und langsam laufenden (Krafrädern) zu unterscheiden. Für die Berechnung der ersteren ist neben der Festigkeit auch die Abnutzung maßgebend. Die Zahn-

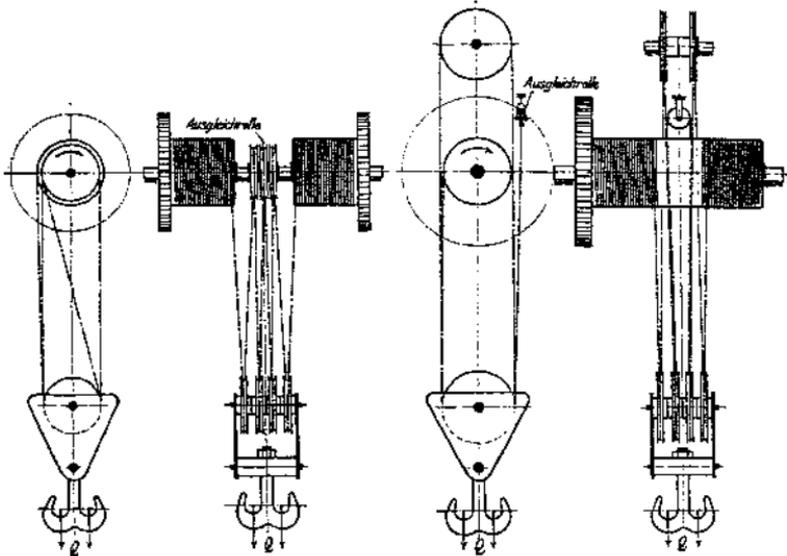


Fig. 114.

Fig. 115.

beanspruchungszahlen sind daher der Umfangsgeschwindigkeit der Räder entsprechend zu wählen. S. Zahnräder S. 655. Sämtliche Räder erhalten zweckmäßig gefräste Zähne.

Motorvorgelege: $\frac{b}{z} = 3$ bis 4. Baustoff: Siemens-Martin Stahl auf Gußeisen oder Stahlguß. $c = 10$ bis 20 für Gußeisen. $c = 15$ bis 40 für Stahlguß.

Ist geräuschloser Gang Bedingung, so wird das Motorritzel aus Rohhaut hergestellt $c = 8$ bis 12. Das Gegenrad wird zur Vermeidung des klingenden Geräusches zweckmäßig als Scheibenrad ausgebildet und mit Kieselguhr ausgefüllt (Fig. 116).

Trommelvorgelege: $\frac{b}{z} = 2$ bis 3. Baustoff je nach Beanspruchung Gußeisen $c = 18$ bis 30, oder Stahlguß $c = 30$ bis 60.

Trommel und Trommelrad werden zweckmäßig miteinander verschraubt und laufen mit Phosphorbronze ausgebuchst lose auf der festgestellten Welle (Fig. 22, S. 1072).

Winden mit Schneckengetriebe als Motorvorgelege bauen gedrängter. Auch gestatten Schneckengetriebe hohe Motordrehzahlen und damit billigere Motoren. Bei Leerlauf des Motors bietet die Reibung des Schneckengetriebes eine noch genügende Belastung, so daß ein Durchgehen des Motors nahezu ausgeschlossen ist. Schnecke meist 2gängig aus gehärtetem Stahl. Schneckenrad bei kleinerem Durchm. aus Phosphorbronze, bei größerem aus Gußeisen mit Phosphorbronze-Kranz. Schneckenwelle zur Aufnahme des axialen Druckes mit doppeltem Kugelspurlager ausgerüstet. Gleitlager aus Phosphorbronze mit Ringschmierung. Das Ganze in geschlossenem Gehäuse und im Ölbad laufend.

$$\frac{b}{t} = 1,5 \text{ bis } 2; c = 30 \text{ bis } 80.$$

Bremsen. Elektrisch betriebene Winden erfordern eine Halte- bzw. Verzögerungsbremse und eine Senkbremse.

Die Haltebremse hat die Last vor und nach dem Senken zu halten und die in Bewegung befindlichen Massen während der Haltezeit zu verzögern. Sie ist stets eine mechanische Bremse. Ausführung als gewichtbelastete, elektromagnetisch gelüftete Band- oder Backenbremse (s. S. 1085 u. 1087).

Die Senkbremse hat die Geschwindigkeit der sinkenden Last zu regeln. Sie kann eine mechanische Bremse (Lastdruckbremse) sein und bei genügender Bemessung auch als Haltebremse dienen. Die Lastdruckbremsen (Senksperrbremsen) arbeiten unwirtschaftlich, da sie beim Senken erhebliche Arbeit verbrauchen. Sie sind nur noch von untergeordneter Bedeutung, da in neuerer Zeit allgemein die elektrische Senkbremsung angewendet wird.

Elektrische Bremsung s. Steuerung der Kranmotoren S. 1121.

2. Winden- oder Querfahrwerk. Die Geschwindigkeit v_2 für das Windenfahren richtet sich nach der Größe der zu bewegenden Last und nach der Spannweite des Kranes. Für größere Spannweiten sind höhere Querfahrtschwindigkeiten zu wählen.

Der Windenfahrmotor arbeitet entweder mittels Stirnrädervorgelegen oder Schneckengetriebe und Stirnrädervorgelege auf je zwei Laufräder der Winde. Für Bemessung der Laufräder¹⁾ ist der größte Raddruck der Winde maßgebend. Derselbe beträgt, wenn sich die Last auf alle 4 Laufräder annähernd gleichmäßig verteilt, $P = \frac{Q + G_1}{4}$, wenn G_1 das Gewicht der Winde bedeutet.

Der Fahrwiderstand ergibt sich, am Laufrad gemessen (Fig. 117), für den Beharrungszustand zu

$$W_r = \frac{Q + G_1}{R} \cdot \left(f + \mu \cdot \frac{d}{2} \right) \dots \text{kg.}$$

R = Halbmesser des Laufrades in cm,

f = $\infty 0,1$ cm = Hebelarm der rollenden Reibung,

μ = $\infty 0,1$ = Zahl der gleitenden Reibung,

d = Achsendurchmesser des Laufrades in cm.

Auf den aus der Gleichung ermittelten Wert empfiehlt sich zur Berücksichtigung der Spurkranz- und Nabenstirnreibung ein entsprechender Zuschlag. Zur überschläglichen Berechnung des Fahrwiderstandes kann bei doppelt gelagerten Laufrädern 20 bis 25 kg für 1 t, bei fliegend gelagerten Laufrädern 30 kg für 1 t Fahrgewicht gesetzt werden.

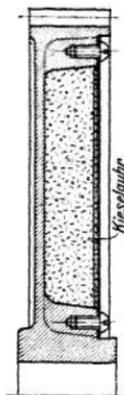


Fig. 116.

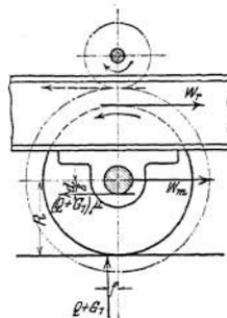


Fig. 117.

¹⁾ Laufräder s. S. 1095.

Die Leistung des Fahrmotors beträgt während des Beharrungszustandes der Bewegung

$$N_2 = \frac{W_r \cdot v_2}{75 \cdot \eta} \dots \text{PS.}$$

v_2 ist in m/sek. einzusetzen. $\eta = \infty 0,65$ bis $0,70$ bei Anwendung von Stirnräder-vorgelegen, $\eta = \infty 0,55$ bis $0,60$ bei Anwendung von Schnecken- und Stirnradvorgelegen.

Wahl der Motoren s. S. 1117.

Während der Anlaufperiode ist zur Beschleunigung der Massen ein erhöhter Arbeitsaufwand erforderlich, zu dessen Bewältigung der Motor ein entsprechendes Anzugsmoment entwickeln muß. Anlaufkurve der Hauptstrommotoren s. S. 1125. Anlaufzeit $t_a = 2$ bis 4 sek.

Die Wellen der Winden sind auf zusammengesetzte Festigkeit (Biegung und Verdrehung) zu rechnen. S. Maschinenteile.

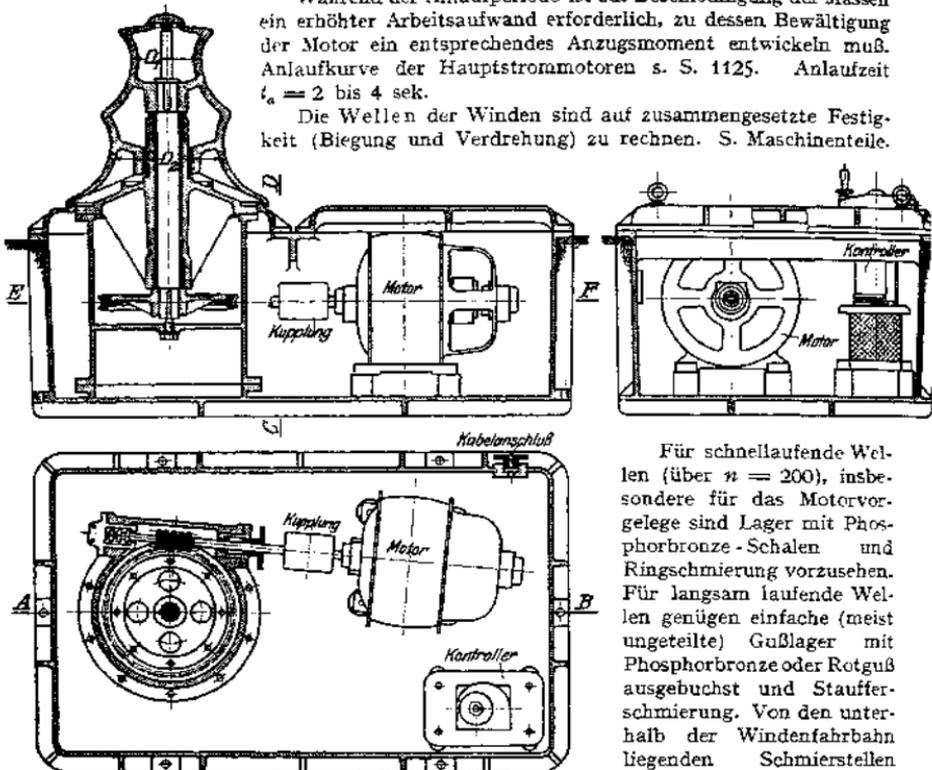


Fig. 118.

Für schnelllaufende Wellen (über $n = 200$), insbesondere für das Motorvorgelege sind Lager mit Phosphorbronze-Schalen und Ringschmierung vorzusehen. Für langsam laufende Wellen genügen einfache (meist ungeteilte) Gußlager mit Phosphorbronze oder Rotguß ausgebuchst und Staufferschmierung. Von den unterhalb der Windenfahrbahn liegenden Schmierstellen (z. B. der Trommelwelle) sind Schmierrohre nach oben

zu führen, um ein Schmieren von der Kranbühne aus zu ermöglichen.

Das Windengestell wurde früher in Gußeisen oder Stahlguß hergestellt. In neuerer Zeit baut man es bei Kraanwinden fast ausschließlich aus Walzeisen. Rahmen und Querverbindungen werden entweder aus C-Eisen hergestellt oder bei höheren Tragfähigkeiten aus Stehblechträgern gebildet und mittels Knotenblechen und Eckwinkeln miteinander vernietet. Die Trommel hängt an zwei kräftigen mit L-Eisen versteiften Blechschilden. Um den durch die Welle hervorgerufenen spezifischen Flächendruck in angemessenen Grenzen zu halten, sind Verstärkungsbleche vorzusehen.

Der Motor wurde früher auf einen gußeisernen Untersatz gestellt, während derselbe gegenwärtig gleichfalls in Profileisen gehalten wird.

Statt besonderer, gußeiserner Solplatten werden gehobelte, schmiedeeiserne Platten für die Befestigung der Lager auf dem Windengestell angeordnet.

Im allgemeinen ist für die Winde gedrängte und übersichtliche Bauart, sowie leichte Zugänglichkeit und bequeme Auswechselbarkeit der einzelnen Teile Hauptbedingung.

Winden, die im Freien laufen, sind zum Schutze gegen Witterungseinflüsse mit einer Holz- oder Blechverschalung zu versehen.

3. Ausführungen. a) Feststehende Winden. Je nach Verwendungszweck als Speicherwinden (meist Friktionswinden), Aufzugswinden (s. unter Aufzüge), Grubenkabel, Kranwinden, Rangier- und Spillwinden.

Elektrisch betriebene Spille (Fig. 118). Verwendung im Eisenbahnbetrieb, in Fabrikhöfen, sowie bei Schleusen- und Hafenanlagen zum Verschieben der Wagen, Drehen von Drehscheiben und Verholen von Schiffen auf kürzere Entfernungen.

Vergrößerung des Arbeitsbereiches der Spille durch Anordnung von Leit- oder Ablenkrollen.

Zur Betätigung des Spills wird das Seil mehrmals um den Spilkopf (Spilltrommel) geschlungen und dieser durch Einschalten des Motors in Drehung versetzt. Infolge der mehrmaligen Windungen des Seiles kann durch einen Zug von Hand f am ablaufenden Ende ein entsprechender T am ablaufenden Seilende ausgeübt werden. S. auch S. 1072.

Die Spille werden in verschiedenen Größen für $T = 300$ bis 5000 kg Seilzug gebaut. Bei ebener Bahn, Krümmungen von großem Halbmesser und gut verlegtem Gleis Zugkraft etwa 10 kg für 1 t Zuggewicht. Zuggeschwindigkeit, am Spilkopf gemessen, je nach Größe des Seilzuges $v = 0,2$ bis $1,0$ m/sek. Durch Anordnung eines abgestuften Spilkopfes können zwei Geschwindigkeiten bei entsprechender Zugkraft ausgeübt werden. Baustoff des Spilkopfes: Gußeisen oder Hartguß.

Motor. Bei Gleichstrom Anwendung eines Nebenschluß- oder Hauptstrommotors. Ersterer ist jedoch seines geringen Anzugsmomentes, sowie der bei häufigem Einschalten auftretenden Induktionserscheinungen wegen weniger geeignet. Letzterer bietet dagegen großes Anzugsmoment und bewegt leichtere Lasten mit höherer Geschwindigkeit. Eine Gefahr des Durchgehens ist bei Motoren mittlerer Drehzahl und Anwendung eines Schneckenvorgeleges so gut wie ausgeschlossen. Trotz des vollkommen geschlossenen Gehäuses gekapselte Motoren empfehlenswert. Umkehr der Drehrichtung des Motors ist nicht erforderlich, da sich eine Änderung des Drehsinnes durch Rechts- oder Linksumlegen des Zugseiles ermöglichen läßt. Ebenso ist eine Bremsvorrichtung unnötig, da das Seil vom Spilkopf abgeworfen und so die Last vom Spill getrennt werden kann.

Der meist in Gußeisen hergestellte Spillkasten, in dem Motor, Triebwerk, Anlasser und Widerstand untergebracht sind, muß zum Schutze gegen Staub und Nässe gut abgedichtet, auch muß er zur Vornahme von Untersuchungen bequem zu öffnen sein.

Fig. 118 zeigt ein elektrisch betriebenes Spill der Maschinenfabrik Esslingen für 700 bzw. 1100 kg Zugkraft und $0,9$ bzw. $0,55$ m/sek Seilgeschwindigkeit. Stromart: Gleichstrom 240 V. Motor: $N = 10$ PS; $n = 1100$. Als Übersetzung dient ein Schneckengetriebe, dessen Axialdruck in der Schneckenwelle durch ein Kammlager aufgenommen wird.

Die Betätigung des Anlassers der Spille erfolgt entweder durch Steckschlüssel oder durch Fußtrittschalter.

b) Fahrbare Winden. Für beschränkten Arbeitsbereich als Kranwinden für Laufkrane, Bockkrane, Konsolkrane u. dgl.

Steuerung der Motoren (s. S. 1120) erfolgt durch die im Führerkorb des Kranes aufgestellten Controller. In besonderen Fällen werden die Controller auch an der Winde oder der Kranbrücke angebaut und vom Flur aus mittels Seilzug bedient.

Ausführungsbeispiel: Elektr. betr. Laufwinde von 6 t Tragkraft und 6 m Hub (Fig. 119¹⁾). Huborgan: Drahtseil. Geschwindigkeiten: Heben $u_1 = 6$ m/min; Katzenfahren $v_2 = 25$ m/Min. Drehzahlen und Motorleistungen $N_1 = 12$ PS; $n_1 = 960$; $N_2 = 3$ PS; $n_2 = 1440$. Übersetzung zwischen Haken und Trommel durch einen Zwillingsrollenzug mit 4 Seilsträngen (Fig. 112, S. 1125). Zur Erlangung einer möglichst hohen Hakenstellung ist die Trommel hochgelegt. Sowohl Hub-, wie Fahrwerk sind, wie meist üblich, mit Schneckengetriebe als erste Übersetzung ausgerüstet.

¹⁾ M. A. G. Neusser Eisenwerk, Düsseldorf-Heerdt.

Haltebremse: Gewichtbelastete, elektromagnetisch gelüftete Bandbremse. Senkbremsschaltung. Das Ausschalten des Hubmotors in der höchsten Hakenstellung wird durch einen Grenzschalter bewirkt, dessen Spindel *S* durch eine Gallsche Kette *K* von einer Vorgelegewelle des Hubwerks angetrieben wird. Die Wandermutter der Spindel legt einen dem Hub proportionalen Weg zurück und unterbricht in ihrer Endstellung den Strom. (S. Elektr. Ausrüstung der Krane.)

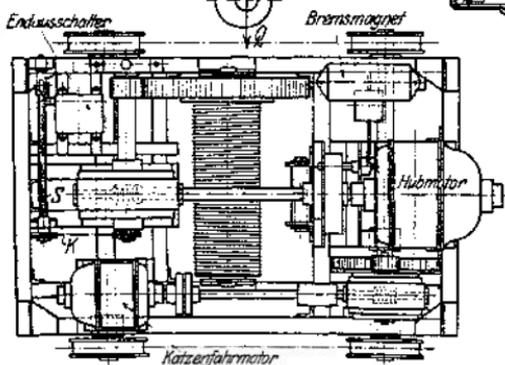
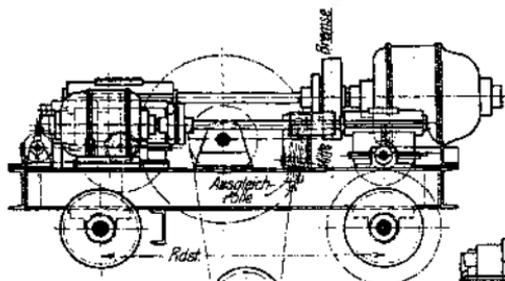


Fig. 119.

Kranwinden, die selten mit der größten Tragkraft beansprucht werden, erhalten zweckmäßig ein Hilfs-hubwerk, das für kleinere Lasten bei entsprechend größerer Geschwindigkeit bestimmt ist.

Ausführungsbeispiel: Elektr. betr. Laufwinde von $Q = 25$ bzw. $10t$ Tragkraft und $H = 14$ m Hub (Fig. 120)¹⁾. Geschwindigkeiten: Heben $v_1 = 3$ bzw. $7,5$ m/min. Katzenfahren $v_2 = 20$ m/min. Stromart: Gleichstrom 300 Volt. Leistungen und Drehzahlen der Motoren: Heben (für beide Hubwerke) $N_1 = 25$ PS; $n_1 = 550$; Katzenfahren: $N_2 = 6,4$ PS; $n_2 = 570$. Huborgan: Drahtseil. Zwillingenrollenzug mit 4-facher Seilaufhängung (Fig. 112). Die Haltebremsen beider Hubwerke sind auf der elastischen Motorkupplung angeordnet. Durchmesser 350 mm. Hubarbeit der Bremsmagnete 250 kg/cm. Durchmesser der Laufräder 400 mm. Radstand 1800 mm. Mitteneinführung der Schienen 2000 mm. Durchmesser der Haltebremse des Fahrwerks 250 mm.

¹⁾ M. A. G. vorm. Breitfeld, Daněk & Co., Prag.

Zum schnelleren Heben leichterer Lasten (insbesondere bei Drehstrom) kann das Hubwerk nach Art der in Fig. 129, S. 1136 dargestellten Laufkranwinde mit umschaltbarem Rädervorgelege ausgerüstet werden.

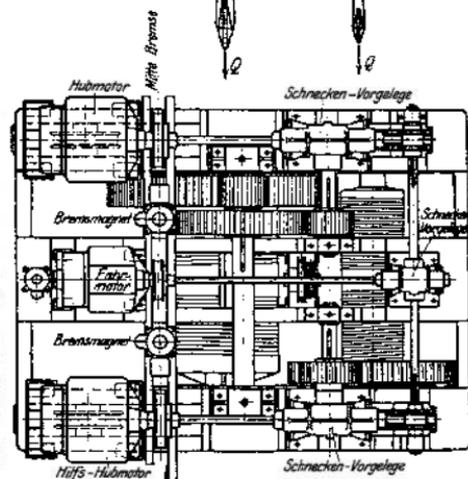
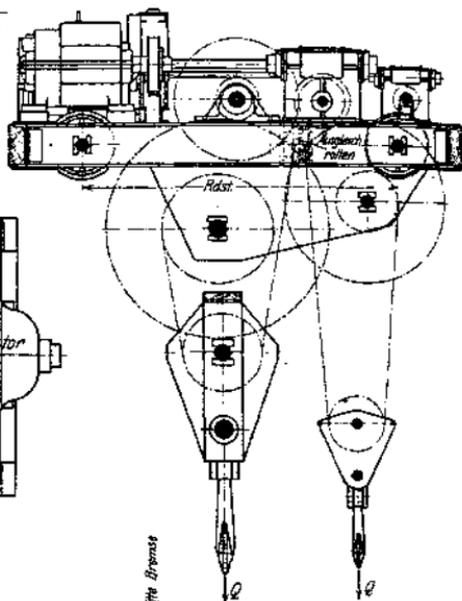


Fig. 120.

Beim Arbeiten in Formereien, Montierhallen u. dgl. wo ein langsames Bewegen der Last erforderlich, genügt die Änderung der Hubgeschwindigkeit durch den Kontroller nicht mehr. Eine weitergehende Abstufung der Hubgeschwindigkeit wird jedoch auf elektrischem Wege durch die Leonard-Schaltung oder auf mechanischem Wege durch den Doppelantrieb der M. A. N. (Fig. 121) erreicht.

Bei diesem arbeiten zwei Motoren *I* und *II* wechselweise einzeln oder beide gleichzeitig mittels eines Umlaufgetriebes auf die Trommel. Durch diese Anordnung wird die Arbeitsgeschwindigkeit in zwei Hauptstufen zerlegt, deren weitere feinere Abstufungen durch die Kontrollerschaltung bewirkt werden. Einmal arbeitet der Motor *I* auf das Schneckengetriebe S_1 und mittels des konischen Rades R_1 und des Umlaufgetriebes auf die Welle W . Von letzterer

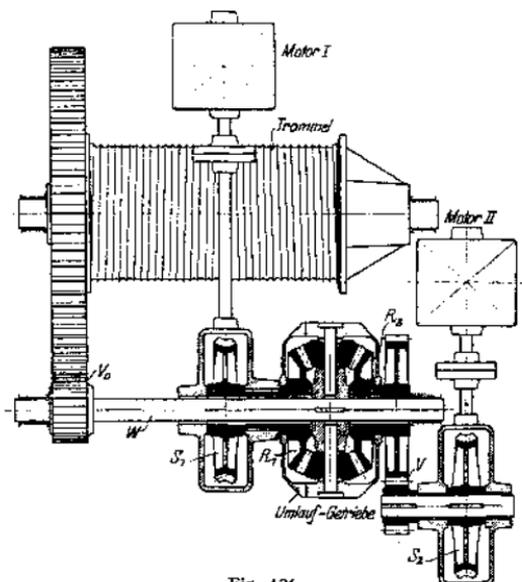


Fig. 121.

wird die Bewegung durch das Stirnrädervorgelege V_0 auf die Trommel übertragen. Das andere Mal arbeitet der Motor *II* auf das Schneckengetriebe S_2 , mittels des Stirnrädervorgeleges V auf das konische Rad R_2 und durch das Umlaufgetriebe und die Welle W auf das Trommelvorgelege.

Beide Motoren können auch in entgegengesetztem Sinne laufen, wodurch die Hubgeschwindigkeit in den weitesten Grenzen eingestellt werden kann. Durch den M. A. N.-Antrieb kommen umschaltbare Rädervorgelege in Wegfall, auch wird die Anwendung eines Hilfshubwerkes zum Heben kleinerer Lasten entbehrlich.

Motorlaufkatzen ermöglichen in Verbindung mit einer entsprechend ausgebildeten, mit Weichen und Drehscheiben ausgerüsteten Laufbahn einen unbeschränkten Arbeitsbereich.

Als Obergurt-Laufkatzen ausgeführt hängen sie mittels eines einseitig ausgebildeten Armes an der Fahrbahn. Sie erfordern große Bauhöhe und sind daher für Innenräume wenig geeignet.

Tragfähigkeit 500 bis 2500 kg. Hohe Fahrgeschwindigkeit bei geringem Fahrwiderstand.

Fig. 122 zeigt eine Obergurtlaufkatze für eine Elektrohängebahn. Das Fördergefäß hängt, um ein Pendeln zu vermeiden, an 2 Seilsträngen, die sich auf fliegend angeordneten Trommeln aufwickeln. Beide Räder des Laufwagens sind durch Stirnräder angetrieben. Größer bauende Katzen erhalten in Rücksicht auf das Befahren von Kurven drehbare Radgestelle.

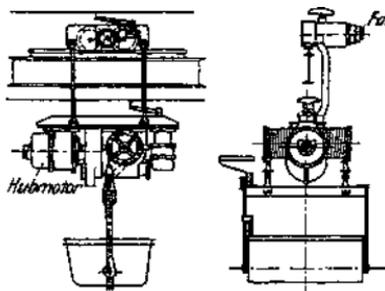
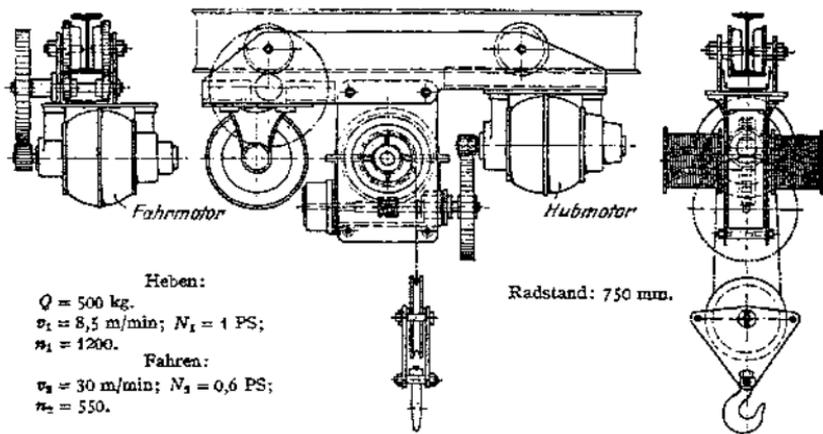


Fig. 122.

Untergurt-Laufkatzen (Fig. 123) bewegen sich auf dem Untergurt einer aus I-Eisen hergestellten Laufbahn und finden ihrer geringen Bauhöhe wegen allgemeine Verwendung. Für kleinere Tragfähigkeiten Aufhängung der Last an zwei Seilen und fliegend angeordneten Trommeln (Fig. 123)¹⁾. Bei höherer Tragfähigkeit Anordnung eines Zwillingssrollenzuges (Fig. 124).

Die Laufräder erhalten bei wagrechter Achse schwach balligen Kranz, bei schräggestellter Achse zylindrischen Kranz. Zum Befahren von Kurven von kleinem Krümmungshalbmesser sind drehbare Radgestelle vorzusehen.



Heben:

 $Q = 500 \text{ kg.}$ $v_1 = 8,5 \text{ m/min; } N_1 = 1 \text{ PS;}$ $n_1 = 1200.$

Fahren:

 $v_2 = 30 \text{ m/min; } N_2 = 0,6 \text{ PS;}$ $n_2 = 550.$

Radstand: 750 mm.

Fig. 123.

Die Aufstellung der Steuerapparate richtet sich nach den Betriebsverhältnissen.

Bedienung der Controller durch Seilzug vom Flur aus, wenn der vom Führer zu begehende Weg ohne Hindernisse. Größte zulässige Fahrgeschwindigkeit 1 m/sek.

Handelt es sich um lebhaften Betrieb und läuft auf der Fahrbahn nur eine Katze, dann Anbau eines Führerkorbes, in dem die Controller aufgestellt werden.

Fig. 124 zeigt eine Motorlaufwinde mit angebautem Führerstand von Gebr. Bolzani, Berlin. Tragfähigkeit 5000 kg.

Geschwindigkeiten: Heben $v_1 = 4,65 \text{ m/min}$; Katzenfahren $v_2 = 60 \text{ m/min}$. Leistungen und Drehzahlen der Motoren: $N_1 = 9,4 \text{ PS; } n_1 = 1260$; $N_2 = 4,3 \text{ PS; } n_2 = 1000$. Haltebremse: Doppelte Backenbremse. Elektr. Senkbremse. Laufraddurchmesser 220 mm; Radstand 1250 mm.

¹⁾ F. Piechatzek, Berlin.

Bei Fernsteuerung sind die Controller an einer beliebigen Stelle der Fahrbahn angeordnet. Übertragung durch mehrfache Kontaktleitungen.

c) Greiferwinden sind dem Betriebe der Zweiseilgreifer (s. S. 1099) entsprechend mit zwei Trommeln ausgerüstet.

Die Bauart der Greiferwinden ist verschieden. Beide Trommeln können sich entweder unabhängig voneinander bewegen, oder die Mitnahme der Entleerungstrommel erfolgt zwangsläufig.

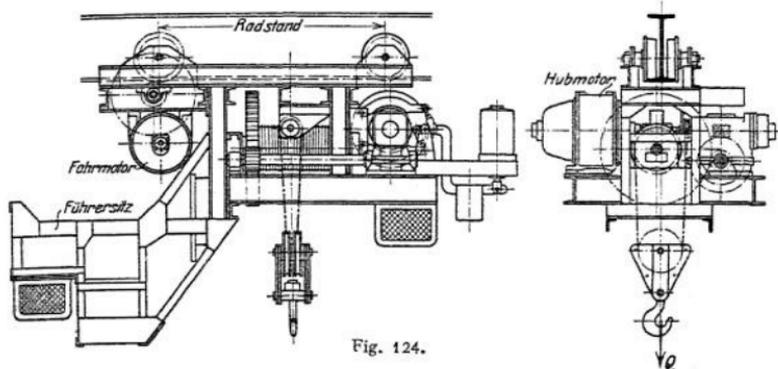


Fig. 124.

Im ersteren Falle laufen beide Trommeln lose auf ihrer Welle und werden dem Arbeitsvorgang des Greifers entsprechend miteinander gekuppelt oder die eine bewegt sich, während die andere durch die Bremse festgehalten wird. Der Nachteil dieser Bauart ist ihre umständliche Bedienung, die durch zwangsläufige Mitnahme des Entleerungsseiles vereinfacht werden kann.

Fig. 125¹⁾ zeigt eine Greiferwinde mit zwangsläufiger Mitnahme der Entleerungstrommel für einen Greifer Bauart Jäger. Der Motor arbeitet mittels

doppeltten Stirnrädervorgeleges auf die Hub- und Schließstrommel T_1 . Diese ist mit der Entleerungstrommel T_2 durch die Stirnräder R_1 und R_2 verbunden. Das Rad R_2 sitzt mit Gewinde auf der Welle, wird axial verschoben und nimmt bei Anschlag an die Entleerungstrommel diese mit.

Der Greifer wird in geöffnetem Zustande auf das Fördergut gesetzt. Dreht sich der Motor im Hubsinne, so schließt die Trommel T_1 den Greifer, während das Stirnrad R_2 verschoben und mit der Trommel T_2 gekuppelt wird. Da zwischen Hub- und Entleerungstrommel eine Übersetzung 1:1 angeordnet, so wird das Entleerungsseil mit der gleichen Geschwindigkeit aufgewickelt und der Greifer gehoben. In Entladehöhe wird der Motor abgestellt und die Bremse B_1 angezogen. Beim Öffnen des Greifers wird die Entleerungstrommel T_2 durch die Bremse B_2 festgehalten, das Rad R_2 schraubt sich von der Trommel ab und bleibt mit dem Rade R_1 der Schließstrommel im Eingriff. Das Entleerungsseil wird festgehalten,

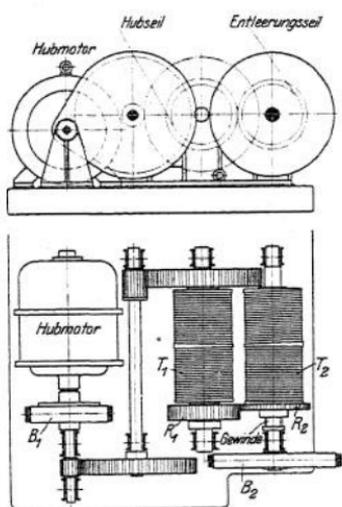


Fig. 125.

¹⁾ Zu einem Portalkran der Firma Gebr. Weißmüller, Frankfurt a. M. gehörig.

während das Schließseil nachgelassen wird und der Greifer sich unter dem Einfluß des Gewichtes seiner beweglichen Teile öffnet. Während des Senkens wird die Bremse B_1 , die gleichzeitig als Senkbremse dient, gelüftet, und Hub- und Entleerungsseile wickeln sich mit gleicher Geschwindigkeit ab.

Weiteres über Greiferwinden siehe: v. Hanifstengel, Förderung von Massengütern, II. Bd., Laufkatze mit Greiferbetrieb s. Z. Ver. deutsch. Ing. 1912, S. 2006.

E. Krane.

I. Laufkrane.

Laufkrane finden allgemeine Verwendung in Fabriken, Gießereien, Hüttenwerken und Maschinenhäusern, sowie im Freien auf Werk- und Lagerplätzen.

Der Arbeitsbereich des Laufkranes ist ein Rechteck. Sein Hauptvorteil ist der, daß er fast keine Grundfläche beansprucht.

Antriebsarten. Für selten benutzte Krane Antrieb von Hand, sonst ausschließlich elektrischer Antrieb. Werden 1 oder 2 Kranbewegungen selten ausgeübt, dann gemischter Antrieb, z. B. Heben elektrisch, Katzen und Kranfahren von Hand.

Der Laufkran (Fig. 126, 128 u. 129) besteht im wesentlichen aus der fahrbaren

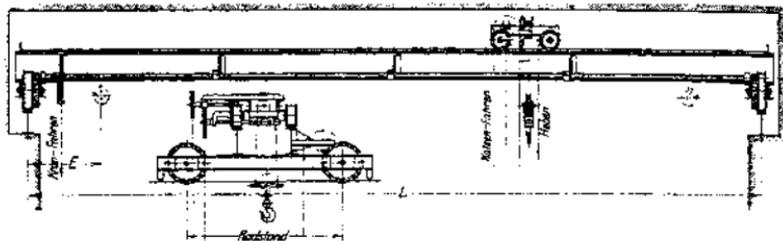


Fig. 126.

Winde (Laufkatze) und der Kranbrücke oder dem Kranwagen. Daher im allgemeinen drei Bewegungen: Heben (bzw. Senken), Katzen- oder Querfahren und Kran- oder Längsfahren. Von diesen können bei elektrischem Antrieb zwei zu gleicher Zeit bequem ausgeübt werden. Ferner versieht man die Laufkrane meist mit einer Bühne, damit alle wichtigen Teile des Kranes leicht zugänglich sind.

a) **Laufkrane mit Antrieb von Hand.** Hier unterscheidet man: Krane mit Antrieb von „oben“ (mittels Kurbel) und Krane mit Antrieb von „unten“ (mittels Kette und Haspelrad).

1. Handantrieb von „oben“. Diese Krane sind da angebracht, wo ein durchgehender freier Gang am Fußboden nicht vorhanden oder das Arbeitsfeld des Kranes Stellen enthält, durch welche die Bedienungsmannschaft gefährdet ist. Auch als Baukrane finden dieselben Verwendung.

Die Kranbrücke erhält auf beiden Seiten eine (meist mit Holz) abgedeckte Bühne, von der aus die drei Kranbewegungen durch Handkurbeln erzeugt werden. Für das Kranfahrwerk ist ein besonderer Kurbelbock anzubringen, von dem aus die Bewegung mittels Rädervorgelegen auf die angetriebenen Laufräder übertragen wird.

2. Handantrieb von „unten“. (Fig. 126.) Diese Antriebsart für Handlaufkrane, bei der die Kranbewegungen durch Kette und Haspelrad vom Fußboden aus erhalten werden, ist die allgemein gebräuchliche. Als Winde gelangt entweder eine Schneckenwinde (Fig. 98) oder eine Stirnräderwinde (Fig. 99) zur Verwendung.

Als Kranhauptträger wird je nach Spannweite und Belastung ein einfacher I-Träger mit aufgeschraubter oder aufgenieteter Schiene, ein Stahlblechträger oder ein Fachwerkträger vorgesehen. Für größere Tragfähigkeiten und Spannweiten sind entsprechende seitliche Versteifungen oder zugleich diesem Zwecke dienende Bühnen anzuordnen. Näheres über Kranträger s. S. 1139.

Laufkrane mit Handantrieb von „unten“ finden in Betrieben Verwendung, in denen die Benutzung des Kranes eine verhältnismäßig geringe ist, der elektrische Antrieb daher nicht in Betracht kommt, z. B. als Montagekrane in Maschinenhäusern, elektrischen Zentralen u. dgl.

b) Laufkrane mit Transmissionsantrieb

findet man nur noch vereinzelt im Betriebe. Der Antrieb der Transmissions-Laufkrane geschieht entweder durch eine quadratische Längswelle oder einen Seiltrieb. Die drei Kranbewegungen werden vermittels Wendegetrieben von einer in ständiger Drehung befindlichen Querwelle entnommen.

Fig. 127 zeigt ein Wendegetriebe mit Schubkeilkupplung. Das Kuppeln der lose auf der Welle sitzenden Kegelräder geschieht durch einen geschlitzten Ring *R*, der durch einen Keil *K* auseinandergespreizt wird.

Der Hauptnachteil der Transmissions-Laufkrane besteht in der Leerlaufarbeit der ständig bewegten Transmission. Hieraus ergibt sich ein großer Verschleiß und schlechter wirtschaftlicher Wirkungsgrad. Man hat daher den Transmissionsantrieb gänzlich verlassen und ist zu dem in jeder Hinsicht vorteilhafteren elektrischen Antrieb übergegangen.

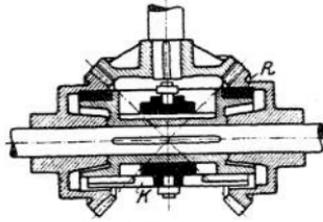


Fig. 127.

c) Laufkrane mit elektrischem Antrieb. Elektrischer Antrieb s. S. 1115.

Die rein elektrisch betriebenen Krane lassen sich einteilen in Einmotorenkrane und Mehrmotorenkrane.

Die Einmotorenkrane sind aus den Transmissionslaufkranen hervorgegangen. Der Elektromotor treibt eine Hauptwelle an, von der aus die drei Kranbewegungen mittels Wendegetrieben dem jeweiligen Sinne gemäß entnommen werden.

Da der Motor bei ausgerichteten Wendegetrieben, wenn keine Kranbewegung ausgeübt wird, nahezu entlastet ist, so ist bei Gleichstrom ein Nebenschlußmotor anzuordnen.

Ein Nachteil des Einmotorenkranes ist sein Stromverbrauch bei Leerlauf. Ferner ist der Wirkungsgrad des Kranes sehr veränderlich, da der Motor für die größte Leistung bemessen sein muß und meist verschiedenen Belastungen unterworfen ist.

Der Einmotorenkran hat sich im allgemeinen bewährt, doch steht er hinsichtlich der Leistungsfähigkeit und Manövrierfähigkeit weit hinter dem Mehrmotorenkran zurück. Trotz der höheren Anschaffungskosten werden daher gegenwärtig fast ausschließlich

Mehrmotorenkrane

gebaut.

Die elektrisch betriebenen Laufkrane sind von den Kranbauunternehmen normalisiert und weichen hinsichtlich der Arbeitsgeschwindigkeiten, der Bauart und des gesamten Krangewichtes wenig mehr voneinander ab.

Bei Entwurf eines neuen Fabrikgebäudes ist es empfehlenswert, auf das lichte Durchgangsprofil der Laufkrane, sowie sonstige wichtige Maße Rücksicht zu nehmen. Hierdurch werden Abweichungen von der normalen Bauart und damit teure und weniger schnell-lieferbare Laufkrane vermieden.

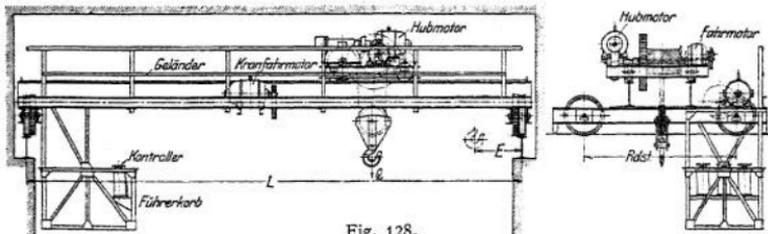


Fig. 128.

Dreimotorenkrane. Bei diesen ist für jede Kranbewegung ein besonderer umsteuerbarer Motor vorgesehen. Der Hubmotor und der Querfuhrmotor sind auf der Laufwinde, der Kranfuhrmotor auf Mitte Kranbrücke angeordnet.

Ausführungsbeispiele. 1) Fig. 128 (Paul Weyermann, Berlin) zeigt einen elektrisch betriebenen Laufkran kleinerer Tragfähigkeit und Spannweite. Hauptträger: I-Träger mit aufgeschraubter Flacheisenschiene. Kranbühne nur auf Seite des Fuhrwerksantriebes. Tragkraft $Q = 5$ t; Spannweite $L = 10$ m; Radstand 1800 mm; Anfahrmäß $E = 750$ (775) mm.

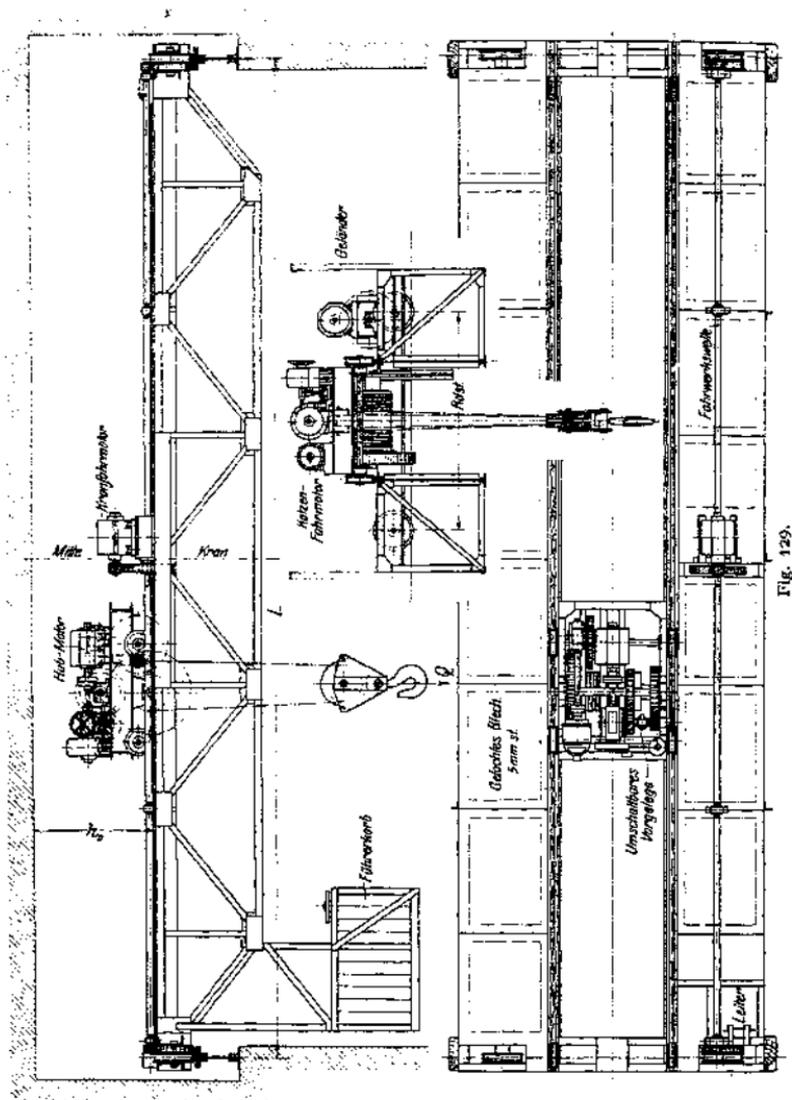


Fig. 129.

2) Elektrisch betriebener Laufkran der Maschinenbau-A.-G. Neusser Eisenwerk, Düsseldorf (Fig. 129).

Tragkraft $Q = 15$ t; Spannweite $L = 12$ m. Geschwindigkeiten: Heben $v_1 = 2$ bzw. 5 m/min (umschaltbares Vorgelege); Katzenfahren $v_2 = 30$ m/min; Kranfahren $v_3 = 60$ m/min. Stromart: Gleichstrom 220 Volt. Leistungen und Drehzahlen der Motoren: Heben $N_1 = 10$ PS; $n_1 = 900$; Katzenfahren $N_2 = 2,5$ PS; $n_2 = 950$; Kranfahren $N_3 = 10$ PS; $n_3 = 900$. Drahtseil $d = 18$ mm; 22 600 kg Bruchbelastung. Haltebremse des Hubwerks: $D = 250$ mm; Hubarbeit des Bremsmagneten = 150 kgcm. Hauptträger: Fachwerkträger; Schiene: Sonderprofil.

Tabelle normaler elektrisch betriebener Laufkrane s. S. 1146.

1. Berechnung und Ausführung der elektrisch betriebenen Laufkrane.

Eigenschaften und Steuerung der Kranmotoren s. S. 1116.

α) **Fahrbare Winde**, Bau und Berechnung s. S. 1124. Zum schnelleren Heben kleinerer Lasten, insbesondere bei Drehstrom, Ausrüstung der Winde mit einem besonderen Hilfshubwerk (Viermotorenkran) oder Anordnung zweier Laufkatzen auf einem Kran. Die eine für schwere und langsam zu hebende, die andere für leichte und schnell zu hebende Lasten (Fünfmotorenkran).

Ist feinstufige Regelung der Hubgeschwindigkeit innerhalb weiterer Grenzen, insbesondere langsames Aufsetzen der Last um wenige Millimeter — wie z. B. in Gießereien — Bedingung, dann empfiehlt sich die Anwendung des M. A. N.-Doppelantriebes (S. 1131) oder der Leonard-Schaltung (S. 1123).

β) **Kranfahrwerk**. Die Kran- oder Längsfahrgeschwindigkeit v_3 in m/min ist der Tragfähigkeit und Größe des Kranes entsprechend zu wählen. Gebräuchliche Werte für Krane mittlerer Spannweite s. Tabelle 14, S. 1147.

Als Übersetzung zwischen Motor und Laufrädern bedient man sich bei Krane mittlerer Größe zweier (mitunter dreier) Stirnrädervorgelege. Vielfach macht man auch von dem Schneckengetriebe als Motorvorgelege Gebrauch. Anordnung eines normalen Fahrwerksantriebes s. Fig. 129.

Für die Bemessung der Kranlaufräder ist der größte Raddruck maßgebend.

Dieser tritt auf, wenn sich die vollbelastete Winde am äußersten Ende ihrer Fahrbahn befindet (Fig. 159). Größte Raddrücke normaler Laufkrane für Tragfähigkeiten von 3 bis 50 t und Spannweiten von 10, 15 und 20 m, s. Fig. 130.

Bei Herstellung der Kranlaufräder ist darauf zu achten, daß sämtliche angetriebenen Laufräder eines Kranfahrwerks auf genau gleichen Durchmesser zu drehen, bei Hartguß zu schleifen sind.

Laufräder siehe Einzelteile der Hebesmaschinen S. 1095.

Fahrwiderstand. Fallen die senkrechten Mittelebenen der Laufräder des fahrenden Kranes mit den Mittelebenen der Fahrbahnschienen zusammen, dann beträgt der Fahrwiderstand (Fig. 117 S. 1127).

$$(1) \quad W_r = \frac{Q + G}{R} \cdot \left(f + \mu \cdot \frac{d}{2} \right) \dots \text{kg.}$$

G = gesamtes Krangewicht; f = Hebelarm der rollenden Reibung $\approx 0,1 \text{ cm}$; μ = Reibungszahl zwischen Laufrad und Achse $\approx 0,1$.

Bei eintretender Schrägstellung des fahrenden Kranes treten hierzu noch Teilfahrwiderstände aus Quergleitung, Spurkranzreibung und Nabenstirnreibung. Zur Berücksichtigung derselben wird vielfach ein Zuschlag von 50 bis 100% auf den nach obiger Gleichung berechneten Wert des Fahrwiderstandes gemacht. Eine eingehende Untersuchung des Fahrwiderstandes bei schräg fahrendem Kran ist von Pape in Dingl. Polyt. Journ. 1910, S. 147 durchgeführt. Beträgt der Spielraum der mit doppeltem Spurkranz versehenen Laufräder auf der einen Seite $b - b_1 = 4$ bis 10 mm, auf der anderen Seite das Doppelte, so kann bei einem Radstand $l = 2200$ bis 3800 mm mit einer mittleren Schrägstellung

$$\text{tg } \alpha = \frac{b - b_1}{l} = \approx \frac{1}{200} \text{ gerechnet werden.}$$

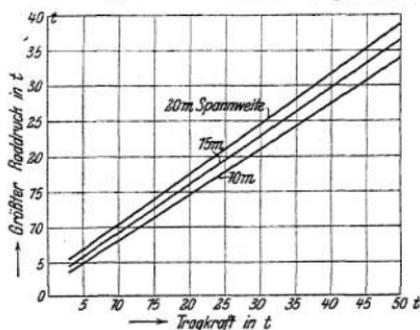


Fig. 130.

(2) Teilfahrwiderstand durch Quergleiten:

$$W_g = \frac{Q + G}{R} \cdot \mu_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha;$$

μ_1 = Reibungszahl zwischen Rad und Schiene = $\infty 0,17$. Fahrwiderstand aus Quergleiten etwa 3% des gesamten Fahrwiderstandes.

(3) Desgleichen durch Spurkranzreibung: $W_s = \frac{Q + G}{R} \cdot \mu_1^2 \cdot h$;

μ_1 wie unter (2); $h = \infty 5$ cm = Hebelarm der Spurkranzreibung.

(4) Desgleichen durch Nabenstirnreibung: $W_n = 1,5 \frac{Q + G}{R} \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot r_m$,

μ_1 wie unter (2); $\mu_2 = \infty 0,1$ = Reibungszahl der Nabenstirn; r_m = mittlerer Halbmesser der Nabenstirn (Fig. 160, S. 1146).

Gesamter (mittlerer) Fahrwiderstand:

$$W = \frac{Q + G}{R} \cdot \left(f + \mu \frac{d}{2} + \mu_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha + \mu_1^2 \cdot h + 1,5 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot r_m \right) \dots \text{kg.}$$

Mittlere Motorleistung während des Beharrungszustandes unter Berücksichtigung des Schrägfahrens:

$$N_3 = \frac{W \cdot v_3}{75 \cdot \eta} \dots \text{PS.}$$

v_3 in m/sek. $\eta = 0,65$ bis $0,70$ bei Stirnräderantrieb; $0,55$ bis $0,60$ bei Anwendung von Schnecken- und Stirnradvorgelegen.

Für überschlägliche Berechnung der Motorleistung kann der Fahrwiderstand zu 25 bis 35 kg pro t zu bewegendes Gewicht angenommen werden.

Der Höchstwert des Fahrwiderstandes W_{\max} tritt nur selten auf und zwar bei vollbelastetem Kran und ungünstigster Katzenstellung. Er hängt von der Betriebsart des Kranes und der Länge der Fahrbahn ab.

Zu vorstehendem Reibungs-Fahrwiderstand kommt während des Anlaufes noch der Massenfahrwiderstand. Der Motor muß während dieser Periode die Massen beschleunigen und daher ein entsprechendes Anzugsmoment entwickeln. Für Hauptstrommotoren verläuft die Zeit-Geschw.-Kurve (Fig. 111, S. 1125) parabolisch.

Anfangsbeschleunigung $p_a = \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 v_3}{t_a} \text{ m/sek}^2$, Anlaufzeit $t_a = 3$ bis 6 Sek.

Der Fahrmotor ist auf Kranmitte anzuordnen, damit die Verdrehung der Welle auf beiden Seiten annähernd gleich groß wird. Die Fahrwerkswelle erleidet ihre ungünstigste Beanspruchung, wenn die Katze auf Anfahrmaß steht (Fig. 159, S. 1146). Es kann alsdann angenommen werden, daß das Motordrehmoment zu $\frac{3}{4}$ durch das Wellenteil der stark belasteten und zu $\frac{1}{4}$ durch das Wellenteil der anderen Seite übertragen wird. Berechnung der Fahrwerkswelle auf zusammengesetzte Festigkeit.

Als Lager an den Zahnradern sind bei höherer Drehzahl Ringschmierlager mit Rotgußschalen vorzusehen. Die Zwischenlager erhalten zweckmäßige Kugelbewegung.

Um kleinere Unterschiede in der Spannweite ausgleichen zu können, empfiehlt es sich, an jeder Seite der Laufräder mehrere Distanzscheiben (etwa 5 mm stark) einzulegen (Fig. 68, S. 1095). Hierdurch lassen sich Unterschiede von etwa ± 20 mm ausgleichen.

Das Abbremsen der lebendigen Kraft des fahrenden Kranes geschieht bei Gleichstrom durch Anker-Kurzschlußbremsung (s. S. 1120). Für genaues Anhalten ist eine besondere Haltebremse, die durch Fußtritt oder elektromagne-

Steuerapparate, Bremslüftmagnete, Sicherheitsvorrichtungen und Stromzuführung siehe Elektrische Ausrüstung der Krane.

tisch betätigt wird, einzubauen. Bei Drehstrom ist stets eine mechanische Bremse vorzusehen.

γ) Kranbrücke. Sie besteht im wesentlichen aus den beiden Hauptträgern, den Seitenträgern und den Kopfträgern. Die Katzenfahrbahn ist bei den meisten Laufkranen auf dem Obergurt der Hauptträger angeordnet. Nur in besonderen Fällen, wenn die örtlichen Verhältnisse es erfordern, wird die Katzenfahrbahn in das Innere der Kranbrücke verlegt und am Untergurt der Hauptträger befestigt.

Krane mittlerer und höherer Tragfähigkeit (Fig. 129) erhalten an jeder Kranseite noch eine Laufbühne, die zugleich als Versteifung für Kräfte in der Fahrtrichtung des Kranes dient. Der Fahrwerksantrieb wird meist auf einer der beiden Laufbühnen, wo er leicht zugänglich, angeordnet. Haupt- und Seitenträger werden durch Quer- oder Diagonalverbände miteinander verbunden. Der obere Querverband trägt den Belag der Laufbühne. Als Belag wurde früher Bohlenbelag oder Riffelblech benutzt. Gegenwärtig wird meist gelochtes Blech von etwa 5 mm Stärke verwendet, das bei geringem Eigengewicht den Vorteil bietet, daß es die Helligkeit des Raumes nur wenig beeinträchtigt.

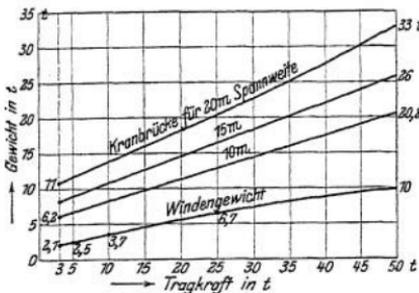


Fig. 131.

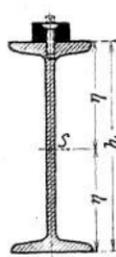


Fig. 132.



Fig. 133.

Um ein Ecken des Kranes, besonders bei größerer Spannweite und Fahr- geschwindigkeit, zu vermeiden, ist ein genügender Radstand (etwa $\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{4}$ der Spannweite) erforderlich.

Berechnung der Kranbrücke. Hierfür ist das Gesamtgewicht des Kranes schätzungsweise anzunehmen und auf Winde, Kranfahrwerk, Haupt-, Seiten- und Kopfträger, Belag, Querverbände usw. zu verteilen.

Gewichte der Winden und Kranbrücken für Laufkrane mittlerer Spannweite s. Fig. 131.

Hauptträger. Beanspruchung in senkrechtem Sinne durch Eigen- gewicht, Windengewicht und Nutzlast; in wagerechtem Sinne durch den Massendruck.

Je nach Tragfähigkeit und Spannweite Ausbildung des Hauptträgers als Vollwandträger (für Spannweiten bis etwa 16 m) oder als Fachwerkträger (für Spannweiten über 16 m).

Bei Kranen geringerer Tragfähigkeit und Spannweite genügt als Haupt- träger ein einfacher I-Träger mit aufgeschraubter Flacheisenschiene (Fig. 132). In diesem Falle ist die Schiene für die Tragfähigkeit des Trägers nicht in Rechnung zu ziehen. Statt der Flacheisenschiene bedient man sich auch des Sonder- profils Fig. 134, das auf den I-Trägern aufgenietet (Fig. 133) als Festigkeits- element zu betrachten ist.

Für Krane höherer Tragfähigkeit werden die Hauptträger als Stehblech- träger ausgebildet. Der Träger wird entweder als Parallelträger oder dem Ver-

lauf der Momente entsprechend mit gebogenem Untergurt ausgeführt. Meist zieht man jedoch in Rücksicht auf billigere Herstellung die Trägerform Fig. 141 vor.

Tab. 15. Laufkranschiene (Sonderprofil) (Fig. 134).

Abmessungen und Gewicht/lfdm.

Profil Nr.	mm											Gewicht $\frac{g}{kg/lfdm}$
	h	b	c	d	s	r	b_1	b_0	e	f	g	
1	55	45	20	23,5	24	3	125	54	8	11	14,5	22,5
2	65	55	25	28,5	31	4	150	66	9	12,5	17,5	32,2
3	75	65	30	34	38	5	175	78	10	14	20	43,8
4	85	75	35	39,5	45	6	200	90	11	15,5	22	57

Querschnittsfunktionen und größte Raddrücke.

Profil Nr.	Quer- schnitt F cm ²	Schwer- punkt- Ab- stand η mm	Trägheits- momente		Widerstands- momente		Größter Raddruck in kg ¹⁾ bei $k =$			Lauf- rad- Durch- messer D mm
			J_x cm ⁴	J_y cm ⁴	W_x cm ³	W_y cm ³	50	60	70	
1	28,7	22,7	94,05	182,4	29,12	29,18	6240	7800	9360	400
2	41,01	26,8	180,4	352,6	47,2	47	11280	14100	16920	600
3	55,8	30,6	328,6	646,12	74	73,8	17600	22000	26400	800
4	72,6	35,2	523,4	988,7	105,1	98,87	25200	31500	37800	1000

Vollwandträger. Berechnung erfolgt auf Biegung. In senkrechtem Sinne Beanspruchung des Trägers durch sein Eigengewicht + $\frac{1}{2}$ (Fahrwerk, Belag und Querverband) als ständige Last und die vollbelastete Katze als Verkehrslast.

Bedeutet L die Spannweite des Kranes (Fig. 135), G_1 das Eigengewicht des Hauptträgers (gleichmäßig verteilt betrachtet), g_1 das Eigengewicht für den lfd. m, so ergibt sich in Mitte Kran ein größtes Eigengewichtsmoment von

$$M_1 = \frac{g_1 L^2}{8} = \frac{G_1 \cdot L}{8}.$$

Verlauf des Momentes parabolisch (Fig. 131). Der auf Mitte Kranbrücke aufgestellte Kranfahrmotor belastet den Hauptträger zur Hälfte. Als Einzelast betrachtet ruft er ein größtes Moment $M_2 = \frac{G_2 \cdot L}{4}$ hervor. (Fig. 132.)

Verkehrsast. Bedeutet G_1 das Gewicht der Winde, so beträgt der größte Raddruck bei annähernd gleicher Verteilung der Belastung auf alle 4 Räder:

$$P = \frac{Q + G_1}{4}.$$

Der Verlauf der Momente der wandernden Lasten $P-P$ kann nach S. 337 ermittelt werden. Das größte Moment tritt, wenn b der Rad-

¹⁾ $R_{\max} = D \cdot (b - 2r) \cdot k \dots kg.$

stand der Winde, im Abstände $\frac{b}{4}$ von der Mitte auf und hat den Wert

$$M'_{\max} = \frac{P}{2L} \cdot \left(L - \frac{b}{2}\right)^2.$$

Die Momentenkurven sind Parabeln von der Länge $L - \frac{b}{2}$ (Fig. 133).

Die Momente aus Eigenlast und Verkehrslast werden addiert und ergeben ein größtes Gesamtmoment M_{\max} (Fig. 134).

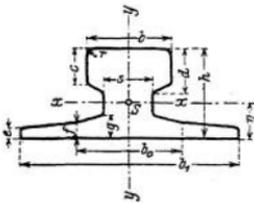


Fig. 134.

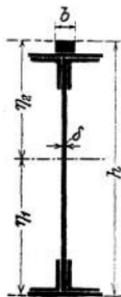


Fig. 140.

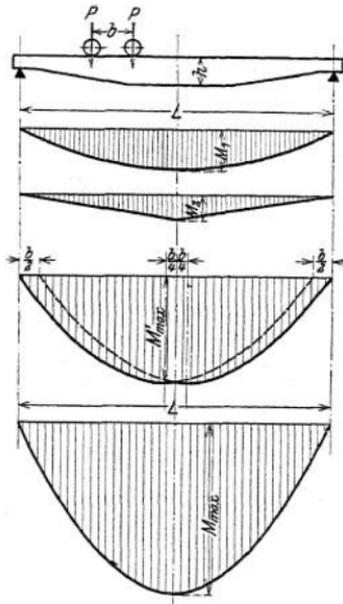


Fig. 135-139.

Unter Annahme einer zulässigen Biegebungsbeanspruchung

$k_b = 900$ bis 1200 kg/cm^2 . . für Krane mit Handbetrieb,
 = 700 „ 900 „ . . . „ „ „ elektrischem Antrieb

können mit Bezug auf Fig. 140 die erforderlichen Widerstandsmomente $W_1 = \frac{J}{\eta_1}$;
 $W_2 = \frac{J}{\eta_2}$ ermittelt und damit die Trägerquerschnitte bemessen werden.

Für symmetrische Träger wird $\eta_1 = \eta_2 = \eta$ und $W = \frac{J}{\eta}$. Die Trägerhöhe kann schätzungsweise zu $h = \frac{1}{12}$ bis $\frac{1}{10} L$, die Dicke des Stehbleches zu $\delta = 8$ bis 13 mm angenommen werden.

Bei Vollwandträgern ist eine Prüfung auf Durchbiegung vielfach unerläßlich. Ermittlung der Durchbiegung entweder zeichnerisch oder rechnerisch. Ermittlung kann annähernd geschehen, wenn man die halbe Nutzlast und das halbe Windungsgewicht als Einzellast in der Mitte des Hauptträgers wirkend annimmt.

Um ein seitliches Ausbiegen des Stehbleches zu vermeiden, ist der Träger in bestimmten Abständen durch senkrechte Winkeleisen zu versteifen (Fig. 141).

Auch sind die Stöße des Stahbleches rechnerisch zu prüfen, ob sie der an der betreffenden Stelle auftretenden Beanspruchung genügen und die erforderliche Anzahl Niete vorhanden ist.

Zulässige Beanspruchung der Niete $k_2 = 600$ bis 800 kg/cm².

In horizontalem Sinne wird der Hauptträger durch den Massendruck beansprucht. Dieser erreicht seinen höchsten Wert, wenn die angetriebenen Kranlaufräder plötzlich abgebremsen werden. Der Kran gleitet dann noch ein Stück, und die Verzögerung der gleitenden Kranbrücke muß gleich derjenigen der belasteten Winde sein¹⁾. Bedeuten G_1 das Gewicht der fahrbaren Winde und G das der Kranbrücke, dann ist

$$\frac{Q + G_1 + G}{g} \cdot \mu \alpha = \frac{Q + G_1 + G}{2} \cdot \mu \quad \text{Verzögerung } \mu \alpha = \mu \cdot \frac{g}{2}.$$



Fig. 141.

Die an der ungünstigsten Stelle stehende, vollbelastete Winde ergibt alsdann einen Massendruck

$$P_m = \frac{Q + G_1}{g} \cdot \mu \alpha = (Q + G_1) \cdot \frac{\mu}{2}.$$

Mit $\mu = \infty 0,2$ wird

$$P_m = \frac{1}{10} \cdot (Q + G_1) \dots \text{kg.}$$

Der Massendruck verteilt sich annähernd gleichmäßig auf die vier Laufräder der Winde, die sich mit ihren Spurkränzen gegen die Hauptträger legt.

Das größte horizontale Biegemoment tritt im Abstände $\frac{b}{4}$ von der Mitte auf und hat den Wert $M_{\max} = \frac{P}{2L} \cdot \left(L - \frac{b}{2}\right)^2$. b = Radstand der Winde,

$$P = \frac{1}{10} \cdot \frac{Q + G_1}{4}.$$

Dieses Moment wird von dem Hauptträger, dem Belag und dem Seitenträger aufgenommen. Der sich damit ergebende Spannungswert ist bei Prüfung der zulässigen Biegebeanspruchung zu berücksichtigen.

Fachwerkträger. Ausbildung des Trägers als Parallelträger oder im Anschluß an die theoretische Form mit gebogenem Untergurt. Mit Rücksicht auf billigere Herstellung wird meist dem System Fig. 142 der Vorzug gegeben. Gezogene Diagonalen machen den Träger schwer, bieten zu wenig Steifigkeit, auch erscheint der Träger zu voll. Daher stets Systeme mit abwechselnd steigenden und fallenden Diagonalen. Handelt es sich um Krane mit großer Spannweite, so sind hierdurch große Feldweiten bedingt. Diese ergeben infolge der Biegebeanspruchung durch die Radrücke der fahrbaren Winde einen starken und schweren Obergurt. Daher Anwendung des unterteilten Systems Fig. 146.

Die Höhe des Fachwerkträgers kann zu $h = \frac{1}{12}$ bis $\frac{1}{10}$ der Spannweite angenommen werden. Bei Bemessung der Feldweite ist aus baulichen Gründen

¹⁾ André, Statik des Kranbaues. 2. Aufl. München 1913. R. Oldenbourg.

eine gerade Felderzahl anzunehmen. Auch gibt man den Endfeldern mitunter eine größere Feldweite als den mittleren.

Berechnung. Die Ermittlung der Spannkkräfte im Hauptträger kann rechnerisch nach Ritter oder zeichnerisch mit Hilfe von Kräfteplänen oder Einflußlinien geschehen.

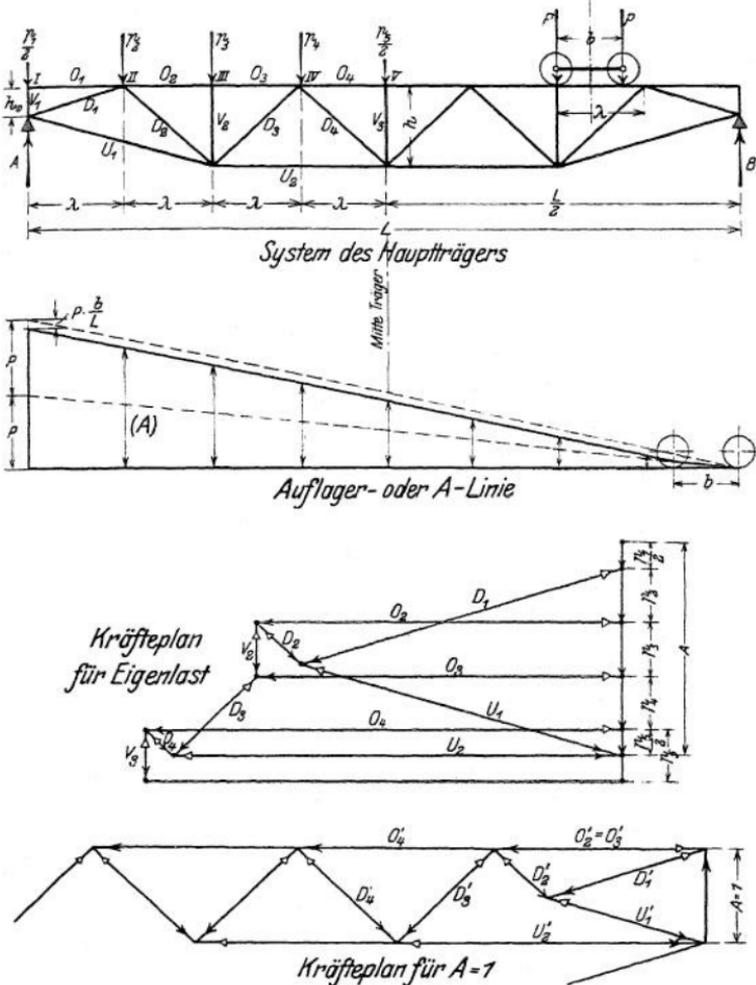


Fig. 142 bis 145.

Belastung in senkrechtem Sinne. (Fig. 142.) Das Eigengewicht des Trägers $+ \frac{1}{2}$ (Fahrwerk, Belag und Querverband) ist auf die einzelnen Knotenpunkte zu verteilen. Mit den Knotenpunktslasten $\frac{p_1}{2}, p_2, \dots$ können alsdann die im System unter dem Einfluß des Eigengewichts auftretenden Spannkkräfte

mit Hilfe eines Cremonaplanes (Fig. 144) gefunden werden. V_1 und O_1 sind spannungslos.

Zur Ermittlung der Spannkraften aus der Verkehrslast kann man sich des Kräfteplanes für den Zustand $A = 1$ (Fig. 145) und der Einflußlinie für die Querkraft (Auflager- oder A -Linie) Fig. 143 bedienen.

Man denke sich den Träger (Fig. 142) bei B eingespannt und in A durch die Kraft von $1\ t$ nach aufwärts belastet. Unter der Belastung $A = 1$ wird z. B. im Stabe D_3 eine Spannung D_3' hervorgerufen. Bringt man nun in A statt $1\ t$ die in der betreffenden Stellung der Katze hervorgerufene Auflagerkraft (A) an, so ist die derselben entsprechende Spannung $D_3 = D_3' \cdot (A)$.

Die Stellung der Katze, für die jeder Stab seine größte Spannung erleidet, ist bekannt. So z. B. wird der Stab U_2 am stärksten beansprucht, wenn die Katze mit ihrer Mitte über dem Knoten IV steht. Die Diagonalen D_3 und D_4 erhalten alsdann ihre größte Druckbeanspruchung. Die größte Zugbeanspruchung der Diagonalen D_4 z. B. tritt auf, wenn die Katze mit ihrer Mitte über dem Knoten V steht.

Im Kräfteplan $A = 1$ fallen die Senkrechten V_1 , V_2 und V_3 fort. Die größte Belastung einer Senkrechten wird erhalten, wenn die Katze mit einem Rad über derselben steht, Fig. 142.

$$V_2 = V_3 = P + P \cdot \frac{\lambda - b}{\lambda}.$$

Die größten Gurtspannungen können auch mit Hilfe der Momentenlinie ermittelt werden.

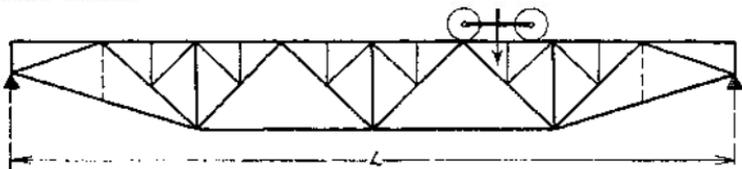


Fig. 146.

Die gefundenen Stabspannungen aus Eigenlast und Verkehrslast sind zu summieren und die erforderlichen Querschnitte können alsdann unter Berücksichtigung der Nietschwächung bestimmt werden.

Gedrückte Stäbe sind auf Knickung zu rechnen und zwar für Flußeisen und $\sigma = 5$ nach der Formel $J = 2,33 P_1 \cdot l^2$, worin P in t und die Knicklänge l (= Systemlänge) in m einzusetzen ist.

Die Ermittlung der Spannungen in einem Träger mit unterteiltem System (Fig. 146) erfolgt am einfachsten mit Hilfe von Einflußlinien¹⁾.

Der Obergurt wird ferner durch die Raddrücke der fahrenden Katze auf Biegung beansprucht. Er ist ein Träger auf mehreren Stützen (kontinuierlicher Träger) und durch die Raddrücke als wandernde Einzellasten belastet. Das Biegemoment kann hinreichend genau zu $M_b = \frac{P \cdot \lambda}{6}$ berechnet werden.

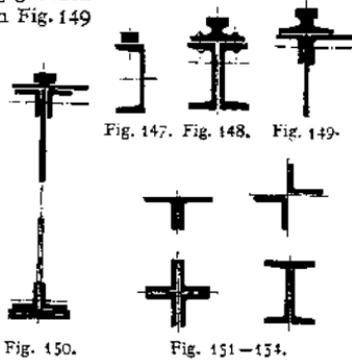
Die sich hieraus ergebende Biegebungsbeanspruchung, die Beanspruchung aus Eigenlast und Verkehrslast, sowie diejenige aus der Belastung des Trägers in horizontalem Sinne sind zu addieren.

Als Höchstwert für die Gesamtspannung des Obergurts, sowie der übrigen Stäbe, kann zugelassen werden

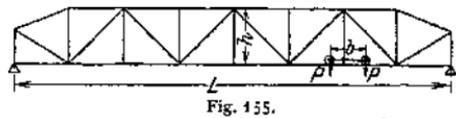
$$\begin{array}{l} k \text{ bzw. } k_2 = 900 \text{ bis } 1200 \text{ kg/cm}^2 \text{ für Krane mit Handbetrieb,} \\ k \text{ ,, } k_2 = 750 \text{ ,, } 1000 \text{ ,, ,, ,, ,, elektrischem Antrieb.} \end{array}$$

¹⁾ Siehe André, Statik des Kranbaues.

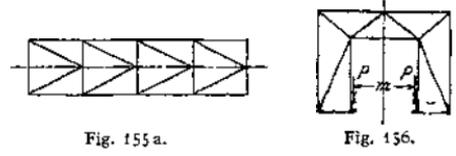
Als Querschnitt des Obergurtes genügen bei Kranen kleinerer Tragfähigkeit und Spannweite die in Fig. 147 u. 148 gegebenen Profile. Für größere Krane hat sich der in Fig. 149 u. 150 dargestellte T-Querschnitt bewährt. Kastenquerschnitt nur für ganz schwere Krane. Als Schiene kann entweder eine Flacheisenschiene, die mit der oberen Gurtplatte vernietet wird, oder das Sonderprofil S. 1141 verwendet werden. Der bei „oben“ laufender Katze auf reinen Zug beanspruchte Untergurt kann je nach Belastung aus ein oder zwei Winkel-eisen gebildet und mit einer oder mehreren Gurtplatten ausgerüstet werden (Fig. 150). Die Füllungsstäbe müssen knicksicher sein. Profile meist Winkel- oder [-Eisen (Fig. 151 bis 154), T-Eisen sind wenig gebräuchlich.



Bei den Kranen mit „innen“ laufender Katze ist die Fahrbahn der Letzteren am Untergurt der Hauptträger angebracht. (Fig. 155 u. 156.) Nachteile dieser Bauart sind die geringe Zugänglichkeit der Winde, sowie der konstruktiv umständlichere Bau des Gerüsts¹⁾.



Seitenträger. Er ist durch sein Eigengewicht, den halben Belag, Querverband, Fahrwerksantrieb, den Kran-fahrer und teilweise durch den Führerkorb beansprucht. Sein System kann gleich dem des Hauptträgers genommen werden. In den beiden mittleren Feldern ist am Obergurt in Rück-sicht auf Erschütterungen durch den Motor ein genügend hohes Flacheisen als Versteifung anzubringen. (Fig. 129.)



Die Kopfträger sind unter Vernachlässigung ihres Eigengewichtes auf Biegung zu berechnen. Die Belastung an der Verbindungsstelle mit dem Haupt-träger (Fig. 157) ergibt sich aus der ständigen Last zu $\frac{1}{2}$ Hauptträgergewicht + $\frac{1}{4}$ Belag (Querverband und Fahrwerk). Die größte Beanspruchung aus der Verkehrslast wird erhalten, wenn sich die Katze in ihrer äußersten Stellung, im Anfahrmaß e befindet (Fig. 159).

Mit dem so erhaltenen größten Raddruck R bestimmt sich das biegende Moment (Fig. 158) zu $M = R \cdot a = R \cdot \frac{l - l_1}{2}$.

Dieses Moment verteilt sich auf die beiden Trägerhälften (Fig. 160) im Ver-hältnis $\frac{w_2}{w}$ bzw. $\frac{w_1}{w}$. Die Berechnung des Trägers erfolgt mit dem größten Be-trag $M \cdot \frac{w_2}{w}$. Zweckmäßiges Profil des Kopfträgers [-Eisen oder formähnlicher Blechquerschnitt. Zulässige Biegebungsbeanspruchung $k_b = 600$ bis 800 kg/cm². Die Kopfträger werden aus Transportrücksichten meist in der Mitte geteilt und an Ort und Stelle mittels Laschen verschraubt. Der Stoß muß das volle Moment aufnehmen können.

Zur Sicherheit gegen Eintreten von Achsbrüchen sind Radbruchstützen vorzusehen. Ferner sind an den Enden der Kopfträger Prellklötze anzubringen.

¹⁾ Laufkran mit innen fahrender Katze von 75 bzw. 15 t Tragfähigkeit und 28 m Spannweite, s. Z. Ver. deutsch. Ing. 1913. S. 1200.

Führerkorb (Fig. 161). Er wird entweder seitlich an der Kranbrücke oder bei Spannweiten über etwa 20 m an der fahrbaren Winde angebaut.

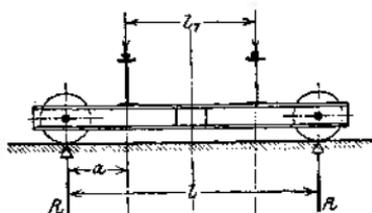


Fig. 157.



Fig. 158.

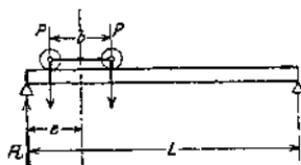


Fig. 159.

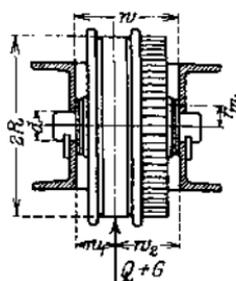


Fig. 160.

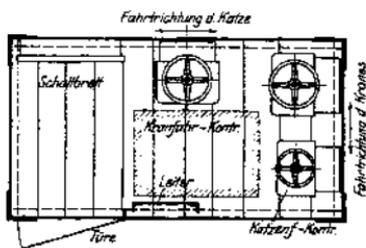


Fig. 161.

Der Führerkorb muß leicht und gefahrlos betretbar sein. Auch muß er eine gute Übersichtlichkeit des Arbeitsfeldes bieten. Seine Grundfläche beträgt etwa 1,75 bis 2 m². Er enthält die Steuerapparate, das Schaltbrett, sowie eine Leiter zum Besteigen der Kranbühne.

Tab. 14. Elektrisch betriebene Laufkrane der Düsseldorfer Maschinenbau-A. G. vorm. J. Losenhausen, Düsseldorf.

Tragkraft Q	Geschwindigkeits- u. Motorleistungen der Winde				Gewicht der Winde G_1 kg	Maße für das Durchgangsprofil des Kranes in mm (Fig. 66)						
	Heben		Katz.-Fahren			a	b	c	d	e_1	e_2	f
	v_1 m/Min.	N_1 PS	v_2 m/Min.	N_2 PS								
3	6,2	6,8	32	1,1	2100	1500	180	2000	500	800	750	460
5	4	6,8	30	1,7	2400	1600	190	2000	500	850	800	485
7,5	4	10	32	2,3	3000	1675	210	2000	500	900	850	485
10	3,75	12,5	25	2,3	3700	1700	225	2000	500	900	850	500
15	3,3	17	21	2,5	4600	1950	240	2000	500	950	950	530
20	2,4	17	14	2,5	5600	2050	250	2000	500	1000	950	600
25	2	17	18	4,4	6600	2150	260	2000	600	1000	950	650
30	2,2	24	17	5,8	7500	2200	280	2000	600	1000	950	650
40	1,6	24	13	6,6	8500	2500	290	2000	600	1300	1300	750
50	1,7	36	13	10	10000	2750	340	2000	600	1300	1300	850

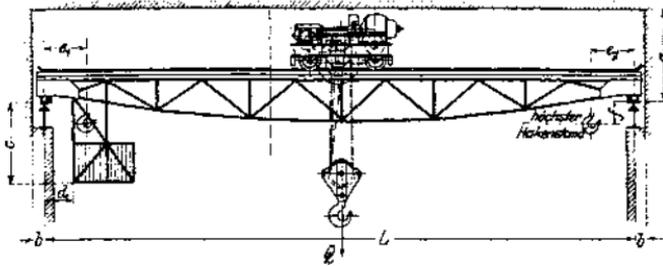


Fig. 162.

Tabelle 14. (Fortsetzung.)

Tragkraft Q	Spannweite L	Kranfahren			Größter Radstand	Größter Raddruck	Gesamt-Kranneigewicht G	Tragkraft Q	Spannweite L	Kranfahren			Größter Radstand	Größter Raddruck	Gesamt-Kranneigewicht G
		Ge- schw. v_1 in Min.	Mot.- Leist. N_2 PS	Rad- stand mm						Ge- schw. v_1 in Min.	Mot.- Leist. N_2 PS	Rad- stand mm			
3	8	100	6,8	2200	3 400	7 700	20	8	70	17	2200	14 000	14 800		
	10	95	6,8	2400	3 600	8 200		10	65	17	2400	14 600	16 200		
	12	90	6,8	2600	3 900	9 000		12	60	17	2600	15 200	17 800		
	15	80	6,8	2800	4 600	10 300		15	55	17	2800	15 800	20 000		
	18	75	6,8	2900	5 100	11 800		18	50	17	3000	16 400	22 500		
	20	70	6,8	3000	5 400	13 500	20	45	17	3100	17 200	25 000			
5	8	85	8	2200	4 500	8 000	25	8	65	17	2200	17 000	15 500		
	10	85	8	2400	4 900	8 600		10	60	17	2400	17 750	17 000		
	12	80	8	2600	5 300	9 600		12	55	17	2600	18 400	20 000		
	15	80	8	2800	5 700	11 500		15	50	17	2800	19 200	23 200		
	18	75	8	2900	6 400	13 500		18	50	17	3000	20 250	26 800		
	20	75	8	3000	6 800	15 500	20	45	17	3100	21 000	30 500			
7.5	8	80	8	2200	6 300	8 700	30	8	55	17	2300	20 750	18 000		
	10	75	8	2400	6 700	9 400		10	55	17	2400	21 150	20 000		
	12	80	10	2600	7 000	10 600		12	50	17	2600	21 900	22 500		
	15	75	10	2800	7 500	12 800		15	50	17	2800	22 850	26 000		
	18	75	12,5	2900	8 200	15 100		18	45	17	3000	23 750	29 600		
	20	70	12,5	3000	8 700	17 400	20	40	17	3200	24 500	33 200			
10	8	80	12,5	2200	7 800	10 200	40	8	60	24	2400	27 000	22 000		
	10	75	12,5	2400	8 200	11 500		10	55	24	2600	27 700	24 000		
	12	70	12,5	2600	8 700	13 000		12	55	24	2800	28 500	26 400		
	15	65	12,5	2800	9 200	15 000		15	50	24	3000	29 200	29 000		
	18	60	12,5	2900	9 700	17 100		18	50	24	3200	30 500	33 800		
	20	50	12,5	3000	10 400	19 300	20	45	24	3300	31 750	39 000			
15	8	80	17	2200	10 900	11 800	50	8	50	24	2400	33 500	29 000		
	10	75	17	2400	11 300	13 000		10	45	24	2600	34 500	30 500		
	12	70	17	2600	11 700	14 500		12	45	24	2800	35 300	32 500		
	15	65	17	2800	12 400	17 200		15	40	24	3000	36 100	36 000		
	18	60	17	3000	13 100	19 100		18	40	24	3200	36 800	39 500		
	20	55	17	3100	13 700	21 300	20	35	24	3300	37 500	43 000			

Sind die Drähte der Längs- oder Querschleifleitung an der Führerkorbseite angeordnet, so ist, um ein Berühren derselben auszuschließen, eine Vergitterung anzubringen.

Krane kleinerer Tragfähigkeit mit nicht zu hohen Fahrgeschwindigkeiten werden auch ohne Führerkorb gebaut. Die Controller sind dann an der Winde oder Kranbrücke angebracht und werden von unten mittels Zugseilen bedient.

An jeder Bühne der Laufkrane ist, um Unglücksfällen vorzubeugen, ein Geländer anzubringen. Mitunter wird auch ein solches auf der Kran-Innenseite vorgesehen.

Bei Kranen, die im Freien arbeiten, ist über der Winde und dem Fahrwerksantrieb eine Blechverschaltung anzubringen. Der Führerkorb erhält meist Holzverkleidung, doch sind in Rücksicht auf Übersichtlichkeit des Arbeitsfeldes aufklappbare Fenster vorzusehen.

2. Ausleger-Laufkrane.

α) Laufkrane mit verschiebbarem Ausleger gestatten infolge der Verschiebbarkeit des Auslegers in Richtung der Windenfahrbahn eine Bestreichen des benachbarten Schiffes und bieten somit eine Vergrößerung des Arbeitsbereiches des Laufkranes.

Fig. 163 zeigt die Darstellung eines derartigen Kranes von 10 t Tragfähigkeit und 18 m Spannweite¹⁾. Arbeitsgeschwindigkeiten: Heben 13 m/min, Fahren der Laufkatze 35 m/min, Fahren des Auslegerwagens 35 m/min, Kranfahren 60 m/min.

Der Ausleger ist an der fahrbaren Winde angebaut. Als Übersetzung zwischen Hubtrommel T_1 und der Last dient ein Zwillingssrollenzug nach Art von Fig. 145. Das Verfahren der auf dem Untergut des Auslegers fahrbaren Laufkatze geschieht durch die Trommel T_2 mittels geschlossenen Seilzuges, dessen Enden an der Laufkatze befestigt sind. Das Winden- und Kranfahren geht wie bei einem normalen Laufkran vor sich.

β) Laufkrane mit drehbarem Ausleger.

Gegenüber den Kranen mit verschiebbarem Ausleger zeigen die Laufkrane mit drehbarem Ausleger eine größere Beweglichkeit, auch ermöglichen sie ein bequemeres und leichteres Einstellen des Auslegers in die jeweilige Lastlage, wobei jeder Ort des befahrenen Raumes erreichbar ist.

Fig. 164 stellt einen elektrisch betriebenen Laufdrehkran der M. A. N. von 30 t Tragfähigkeit, 13,2 m Spannweite und 4,0 m Ausladung dar. Arbeitsgeschwindigkeiten: Heben bei 30 bzw. 15 t 5 bzw. 9 m/min., Auslegerfahren 15 m/min, Drehen um 360° 45 Sek., Kranfahren 50 m/min.

Das Hubwerk ist auf dem Hinterteil des drehbaren Auslegers angeordnet und dient zu gleicher Zeit als Gegengewicht. Das Einstellen der beiden Hubgeschwindigkeiten geschieht durch ein umschaltbares Rädervorgelege.

Der obere Teil der Säule des drehbaren Auslegers ist als Drehscheibe ausgebildet. Letztere trägt den Motor, der mittels dreier Stirnrädervorgelege die beiden in Richtung des drehbaren Auslegers befindlichen Laufräder antreibt. Letztere haben konische Lauffläche, und daher ist die runde Fahr-

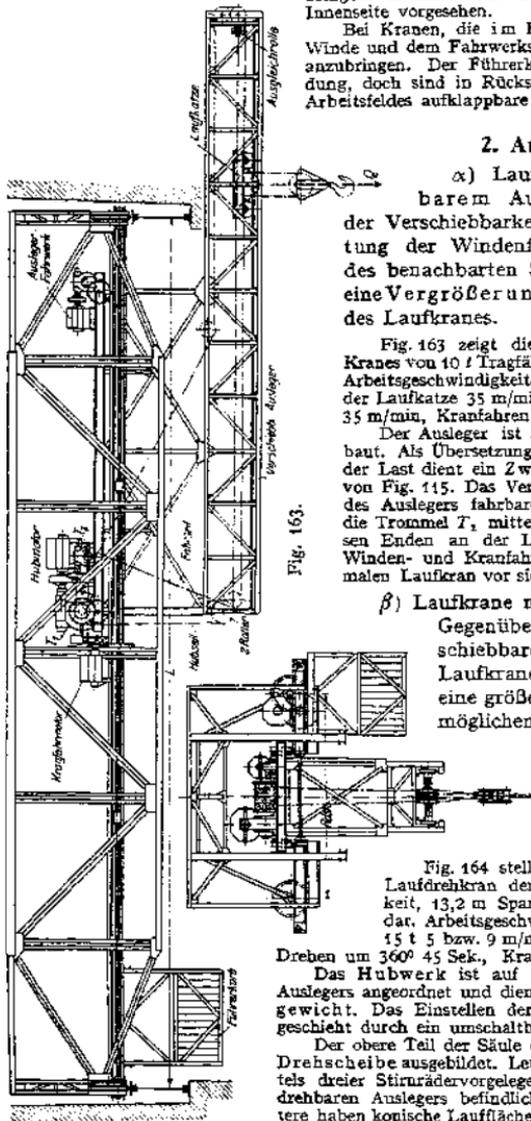


Fig. 163.

β)

¹⁾ M. A. N.

bahn der Drehscheibe entsprechend ausgebildet. Die für die Drehbewegung des Auslegers erforderliche Zentrierung geschieht durch Druckrollen, die sich gegen die senkrechte Innenfläche der kreisförmigen Fahrbahn legen.

Um das Drehwerk gegen übermäßige Beanspruchung — durch Anstoßen des Auslegers an den Säulen der Hallenkonstruktionen u. dgl. — zu schützen, empfiehlt es sich, im Schneckengetriebe des Drehwerks eine Rutschkupplung anzuordnen.

Das Kranfahrwerk und die Trägerkonstruktion weisen den gewöhnlichen Laufkranen gegenüber keinerlei Besonderheiten auf.

Ein Nachteil der Auslegerlaufkrane ist, daß infolge des hinzutretenden Auslegerkranmomentes $Q \times A$ die Raddrücke der Kranbrücke wesentlich höher ausfallen als bei normalen Laufkranen gleicher Tragfähigkeit und Spannweite.

Die größte Belastung der Laufräder beim Laufdrehkran ergibt sich, wenn der voll belastete Ausleger in seiner äußersten Stellung unter einem Laufrad der Kranbrücke steht.

3. Lokomotivhebekrane

dienen in Eisenbahnwerkstätten als Ersatz für die langsam arbeitenden Lokomotivhebeböcke. Das Heben und Transportieren der Lokomotiven kann auf zwei Arten erfolgen.

Bei dem meistgebräuchlichen System wird die Lokomotive mittels der Schiebebühne auf den Querstand gefahren. Über den Querständen befindet sich der mit zwei Laufkatzen ausgerüstete elektrisch betriebene Laufkran. Das Hubwerk jeder Winde ist mit zwei Rollenzügen oder Gallschen Ketten versehen, die durch ein Querstück miteinander verbunden sind. Die Lokomotive wird mittels der beiden Querstücke an den beiden Ecken des Rahmens angehoben. Tragfähigkeit der Lokomotivlaufkrane 50 bis 80 t.

Bei dem sog. amerikanischen System entfällt die Schiebebühne. Die Lokomotive wird auf einem mittleren, in Längsrichtung der Halle verlegten Gleis (Zufahrtsgleis)

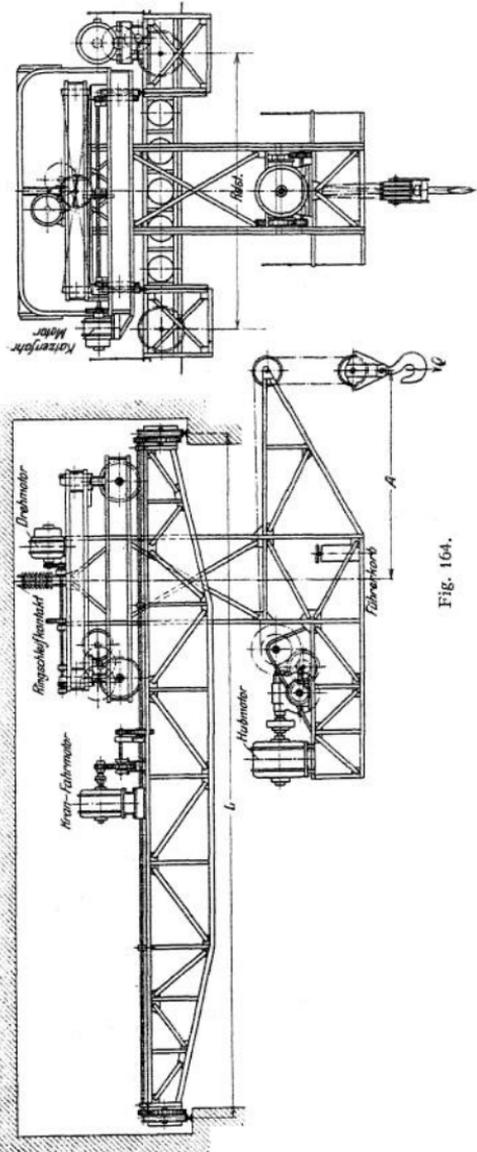


Fig. 164.

angefahren und mittels zweier Laufkrane auf die hierzu parallel liegenden Standgleise abgesetzt.

d) Kranfahrbahn.

Sie ist bereits bei Entwurf des Gebäudes zu berücksichtigen. Lagerung der Kranfahrbahn entweder auf Vorsprüngen des Mauerwerks oder auf eisernen Stützen, die an die Gebäudekonstruktion angeschlossen sind (Fig. 165). Je nach Stützweite, Ausbildung der Fahrbahn als Vollwand- oder Fachwerkträger. Ist die Kranfahrbahn im Freien, so ist auf Winddruck Rücksicht zu nehmen. Zur Aufnahme der bei plötzlichem Bremsen des Kranes in Richtung der Fahrbahn auftretenden Kräfte sind die Stützen entsprechend auszubilden, oder man ordnet zwischen zwei Stützen ein Spannkreuz an. Bei langen Fahrbahnen Berücksichtigung der Längenänderung unter dem Einfluß des Temperaturwechsels.

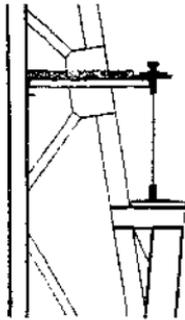


Fig. 165.

Berechnung der Kranfahrbahn siehe Andréé. Statik d. Kranb. Größte Raddrücke von Laufkranen mittlerer Spannweite s. Fig. 130, Radstände normaler Laufkrane s. Tab. 14, S. 1147.

II. Bockkrane.

I. Feststehende Bockkrane dienen hauptsächlich auf Eisenbahnstationen als sog. Überladekrane. Das bockartige Krangerüst überspannt alsdann

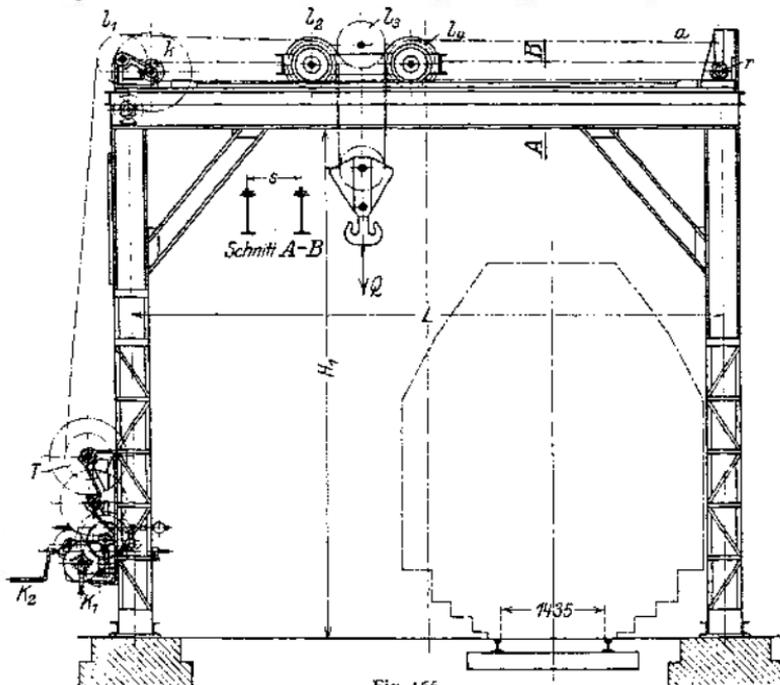


Fig. 166.

ein oder zwei Gleise und ermöglicht den Umschlag der Güter von den Eisenbahnwagen in die Fuhrwerke. Tragfähigkeit 5 bis 20 t. Antrieb meist von Hand.

Krane mit Antrieb von „oben“ (mittels Kurbeln) sind mit einer Laufbühne für die Bedienungsmannschaft auszurüsten. Mehr gebräuchlich ist der Antrieb von „unten“ durch Haspelrad und Kette oder durch Kurbeln.

Fig. 166 und 166a zeigen einen feststehenden Bockkran mit Handantrieb von 25 t Tragkraft, 7,4 m Spannweite und 7 m lichter Höhe¹⁾.

Huborgan: Drahtseil. Die Last hängt an 4 Seilsträngen, daher Belastung des Seiles $\approx Q/4 = 6250$ kg. Gewählt ist ein Drahtseil für 37000 kg Bruchbelastung; Seildurchmesser 25 mm; Stärke des Einzeldrahtes 1,2 mm; Zahl der Einzeldrähte = 222; Trommel- bzw. Rollendurchmesser = 625 mm.

Der Seilzug des Hubwerks geht von der Trommel T über die Leitrollen l_1 und l_2 zur ersten losen Rolle der Kranflasche, von da über die (schräggestellte) Leitrolle l_3 zur zweiten losen Rolle, alsdann über die Leitrolle l_4 und ist bei a am Krangerüste befestigt. Der Antrieb für das Hubwerk geschieht durch die Kurbeln K_1 . Als Übersetzung dienen drei bzw. vier Stirnrädervorgelege, von denen das hinter der Kurbel zum schnellen Heben leichter Lasten umschaltbar angeordnet. Das Aus- und Einrücken geschieht durch eine mittels Handrad betätigte Spindel S . Die Bremse ist auf der Vorgelegewelle W angeordnet und als Sperrad-(Lösungs-)Bremse ausgebildet. Um die Senkgeschwindigkeit innerhalb der zulässigen Grenzen zu halten ist auf der Kurbelwelle eine Fliehkraftbremse vorgesehen.

Das Verfahren der Katze geschieht durch einen doppelten Kettenzug. Die Ketten desselben sind am Windenstell befestigt, gehen über die Kettennüsse k zu den Kettenrollen r und sind dann wieder am Windenstell befestigt. Der Antrieb der Kettennüsse erfolgt durch die Kurbeln K_2 . Diese arbeiten mittels eines konischen Getriebes auf eine senkrechte Welle und durch ein weiteres konisches Getriebe und ein Stirnrädergetriebe auf die Kettennußwelle.

Als Katzenfahrbahn dienen zwei I-Träger mit aufgenieteter Kranschiene (Sonderprofil S. 1140). Stützen und Fahrbahn sind durch kräftige L-Eisen miteinander versteift.

2. Fahrbare Bockkrane (Fig. 167) finden im Freien zur Bedienung größerer Lagerplätze Verwendung. Sie bieten den Vorteil, daß sie — im Gegensatz zu den Laufkränen — keine hochliegende Fahrbahn erfordern, deren Herstellung für größere Strecken erhebliche Kosten verursacht.

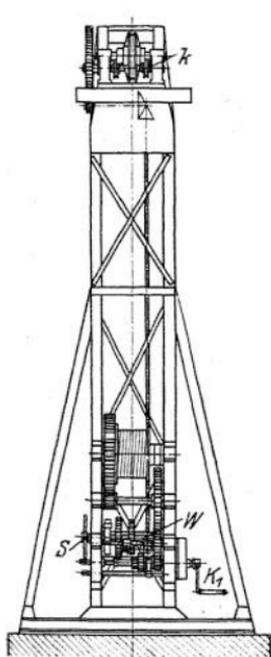


Fig. 166a.

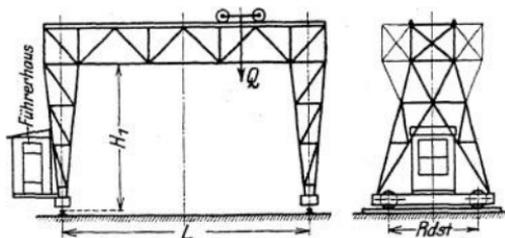


Fig. 167.

Krane, die selten benutzt werden, erhalten Antrieb von Hand (Kette und Haspelrad), sonst allgemein elektrischen Antrieb.

Elektrisch betriebene, fahrbare Bockkrane werden wie die Laufkrane als Dreimotorenkrane ausgebildet.

Als Winde dient dann eine normale Laufkranwinde. Zum schnelleren Heben leichterer Lasten kann die Winde mit Hilfshubwerk (s. Fig. 120, S. 1130) ausgerüstet werden, oder man ordnet auf dem Kran zwei Winden von verschiedener Tragkraft und Hubgeschwindigkeit an.

Das Kranfahrwerk gleicht im wesentlichen dem der Laufkrane, nur sind zum Antrieb der Laufräder noch zwei stehende Wellen mit den zugehörigen Kegelrädergetrieben erforderlich. Art

¹⁾ Maschinenbau-A.-G. vorm. Beck & Henkel, Kassel.

der Ausführung s. Fig. 216. Der Axialdruck der (mitunter schräg angeordneten) stehenden Wellen kann zur Verringerung der Reibung durch Kugelpurlager aufgenommen werden.

Der für die Bemessung der Laufräder maßgebende größte Raddruck tritt auf, wenn die vollbelastete Winde über der Stütze steht. Kommt auf ein Laufrad ein größerer Raddruck als etwa 20 t, so sind statt vier acht Laufräder anzuordnen, von denen je zwei in einem gemeinsamen, einstellbaren Radgestell untergebracht werden.

Werden diese vier Radgestelle um 90° drehbar vorgesehen und die erforderlichen Gleise verlegt, so kann der Kran nach Verstellung der Radgestelle eine Strecke senkrecht zu seiner ursprünglichen Fahrtrichtung befahren, wodurch der Arbeitsbereich beliebig vergrößert werden kann. Über Berechnung des Kranfahrwerkes s. S. 1137 unter Laufkrane. Tabelle der Kranlaufräder s. S. 1096.

Soll der im Freien laufende Kran noch gegen Wind von bestimmter Stärke fahren, so empfiehlt sich ein umschaltbares Motorvorgelege zum Einstellen einer geringeren Fahrgeschwindigkeit.

Winde, Fahrwerksantrieb u. dgl. sind zum Schutze gegen Witterungseinflüsse zu verschalen, auch ist die Anwendung gekapselter Motoren gegeben.

Das Krangerüste wird für kleinere Spannweiten vollwandig, für größere als Fachwerk ausgebildet. Für oben laufende Katze Ausführung des Fachwerks nach Art von Fig. 167.

Die Berechnung des bockartigen Gerüsts ist statisch unbestimmt. Näheres siehe unter Festigkeitslehre und André, Statik d. Kranbaues. Außer der senkrechten Belastung durch Eigengewicht und die fahrende vollbelastete Katze sind in wagerechtem Sinne der größte Winddruck, sowie auftretende Bremskräfte in Rechnung zu ziehen.

Für angenäherte Berechnung kann das Oberteil gesondert betrachtet werden. Hinsichtlich Berechnung und Ausführung der Hauptträger s. unter Laufkrane S. 1139.

Jede Stütze erhält ihre größte Belastung, wenn sich die Katze in ihrer Endstellung bzw. unmittelbar über die Stütze befindet. Da die Stützen bei plötzlichem Abstoppen der fahrenden Winde erhebliche wagerechte Beanspruchungen erfahren, so sind sie entsprechend auszubilden und zu bemessen. Zulässige Beanspruchungen und Knicksicherheit der Fachwerkstäbe s. S. 1144.

Fährt der Kran an einem Gebäude entlang, so kann die eine Schiene auf einem Vorsprung des Gebäudes verlegt werden. Das Gerüst erhält alsdann die Form eines Winkels (Halbportals). Derartige einhüftige Bockkrane bilden den Übergang zwischen Laufkran und Bockkran.

Ist das Arbeitsfeld, das der Kran zu bedienen hat, verhältnismäßig breit, so versieht man das Krangerüst, um keine zu große Stützweite zu erhalten, mit Auslegern (Fig. 168). Die Winde läuft alsdann auf dem Untergurt der Hauptträger, und die Stütze muß in Rücksicht auf das Durchfahren der Winde nach Art von Fig. 169 ausgebildet werden.

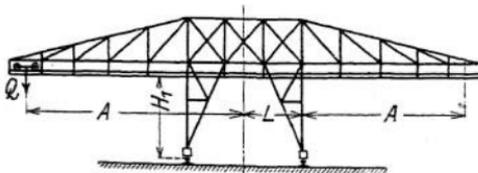


Fig. 168.

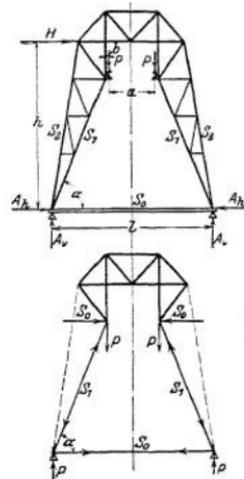


Fig. 169 und 170.

Das System der Stütze ist statisch unbestimmt. Für eine hinreichend genaue Berechnung kann die statische Unbestimmtheit durch Fortlassen der Stäbe S_2 behoben werden¹⁾. Bedeutet P — P die senkrechte Belastung der Stütze, so ergeben sich mit Bezug auf Fig. 170 die Spannkkräfte der Stäbe zu: $S_1 = -\frac{P}{\sin \alpha}$ und $S_0 = +\frac{P}{\operatorname{tg} \alpha}$. Die Spannung S_0 wirkt auch zugleich oben an den Gelenken und ist für die Berechnung des Rahmens zu berücksichtigen.

Für die Belastung durch die wagerechte Kraft H_0 aus Winddruck oder Schrägzug der Last kann angenommen werden, daß sie sich zur Hälfte auf jeden Stützenfuß überträgt. Die fortgelassenen Stäbe S_2 sind kräftig zu halten, da sie an der Aufnahme der Seitenkraft S_0 wesentlich teilnehmen.

Bockkrane größerer Spannweite werden mit Rücksicht auf die Formänderung des Gerüsts durch Belastung und Temperatureinfluß zweckmäßig mit Pendelstütze ausgerüstet. S. auch S. 1155, Hochbahnkrane.

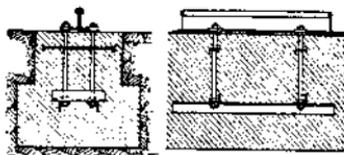


Fig. 171.

Unter besonderen Umständen erhalten die Bockkrane auch kreisförmige Fahrbahn (Z. Ver. deutsch. Ing. 1908, S. 1517).

Verlegung der Fahrbahnschienen und Ausbildung des Fundamentes kann für mittlere Verhältnisse nach Art von Fig. 171 erfolgen.

III. Hochbahnkrane.

1. Verladebrücken

(Hochbahnkrane mit starrem Gerüste) zur Bedienung von Lagerplätzen, sowie zum Umschlag von Gütern jeder Art zwischen Schiff und Lagerplatz.

Die Verladebrücken gleichen in ihrer Bauart den Bockkranen und sind je nach Verwendungszweck feststehend oder fahrbar. Die Spannweite richtet sich nach dem zu bestreichenden Arbeitsfeld. Kleine Spannweiten, wenn Güterumschlag nur zwischen Schiff und Eisenbahnwagen erforderlich. Größte Spannweite $L = 80$ bis 100 m.

Die Verladebrücken bieten gute Ausnutzung des Lagerplatzes, da selbst nur geringe Bodenfläche beanspruchend. Antrieb fast ausschließlich elektrisch.

Zum Verladen von Massengütern, wie Kohle, Erz u. dgl., werden sie mit Kippkübeln, Fördergefäßen, meist jedoch mit Selbstgreifern ausgerüstet. Nutzlast bei Greiferbetrieb 2 bis 5 t bei einer Tragfähigkeit des Windwerks von 5 bis 10 t. Hohe Arbeitsgeschwindigkeiten: Heben 15 bis 60 m/min; Querfahren 60 bis 300 m/min, Längsfahren bis 60 m/min. Leistungsfähigkeit von Verladebrücken mit Greiferbetrieb 150 bis 200 t/st, größte Leistung etwa 400 t/st.

a) Anordnung der Laufkatze. α . Seillaufkatzen. Winden- und Katzenfahrwerk sind an geeigneter Stelle am Krangerüst fest angeordnet. Hub- und Fahrbewegung werden durch Seilzüge vom Triebwerk auf die Katze übertragen. Nachteile: Starke Seilabnutzung, daher geringe Betriebssicherheit. Da der Führerstand nicht an der Winde angebaut ist, geringe Übersichtlichkeit des Arbeitsfeldes. Dagegen geringer Massenwiderstand beim Anlauf infolge des kleinen Eigengewichts der Laufkatze.

Seilführungen. Für kürzere Förderwege Anordnung einer schrägen Bahn, Fig. 172²⁾. Vorteil: Einfachheit und Eignung für große Leistungen, sowohl bei Kübel-, als auch bei Ein- oder Zweiseilgreiferbetrieb. Seilführung parallel der Katzenfahrbahn. Da die Seitenkraft der Last in Richtung der Katzenfahrbahn ebenso groß bzw. größer als der Zug am Hubseil ist, so läuft

¹⁾ Andrée, Statik des Kranbaues.

²⁾ Z. Ver. deutsch. Ing. 1908, S. 1757.

die Katze die Fahrbahn selbsttätig hinab und wird an gewünschter Stelle durch einen Anschlag (Stop) festgehalten.

Bei weiterem Nachlassen bewegt sich die lose Rolle mit der Last im Senksinne. Ist der Greifer beim Aufwärtsgang in seiner höchsten Stelle angelangt, so stößt der Bügel der losen Rolle gegen die Katze, und die Aufwärtsbewegung der letzteren geht mit doppelter Geschwindigkeit vor sich.

Zur Änderung des Arbeitsplatzes ist der Anschlag (Stop) verstellbar angeordnet. Er wird durch ein Gegengewicht, das sich auf einer besonderen Laufbahn bewegt, ausgeglichen. Die Trommeln der Anschlagkatze und des Gegengewichtes sind auf gemeinsamer Welle angeordnet. Soll die Anschlagkatze bewegt werden, so ist die auf der Welle sitzende Bremse zu lüften. Senken des Anschlages geschieht bei gelüfteter Bremse durch die abwärtsgehende Katze.

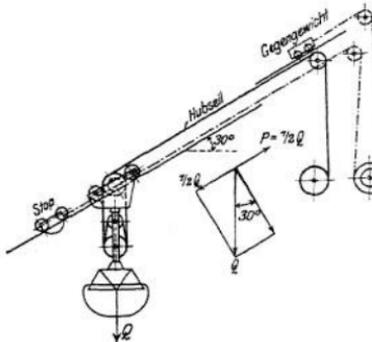


Fig. 172.

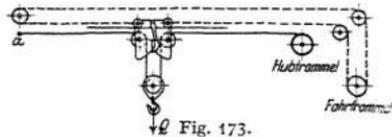


Fig. 173.

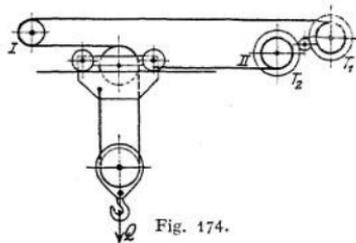


Fig. 174.

Für längere Förderwege wird die Fahrbahn wagerecht oder mit geringer Neigung angeordnet. Fig. 173 zeigt die Anordnung, wie sie bei Kübelbetrieb verwendet wird. Das Hubseil ist bei α an der Katzenfahrbahn befestigt und geht über die lose Rolle zur Hubtrommel. Das Fahrseil bildet einen geschlossenen Seilzug, der von der ersten Fahrtrommel zur Katze und von da über zwei Leitrollen zur zweiten Fahrtrommel geht.

Vor Verschieben der Katze hängt sich die Kranflasche in der höchsten Stellung an einen am Windengestell angebrachten Haken selbsttätig ein. Hierdurch Entlastung des Hubseiles während der Fahrbewegung und daher geringe Abnutzung. Beim Senken wird das Hubseil etwas angezogen, wodurch der Haken ausgelöst wird.

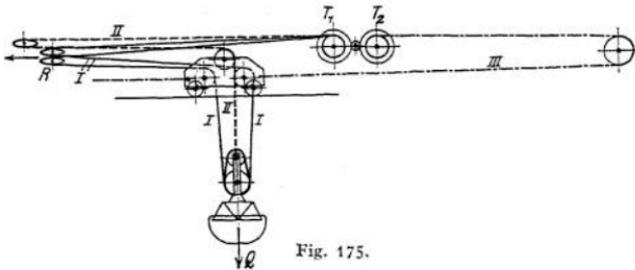


Fig. 175.

Für Greiferbetrieb findet die Seilführung Fig. 174 Anwendung. Das Hubseil (I) ist an der Katze befestigt und geht über die lose Rolle und zwei Leitrollen zur Trommel T_1 . Seil II ist gleichfalls an der Katze befestigt und geht unmittelbar zur Trommel T_2 . Es ist dem gleichen Zug ausgesetzt wie Seil I . Beim Heben wird nur die Trommel T_1 bewegt. Beim Katzenfahren drehen sich beide Trommeln mit gleicher Geschwindigkeit dem jeweiligen Fahrinn entsprechend. Hierbei wird das eine Seil um den gleichen Betrag verkürzt, um den das andere verlängert wird.

Fig. 175 zeigt eine ähnliche Seilführung für einen Zweiseilgreiferkran. Das zweisträngige Hubseil I und das Entleerungseil II laufen beide auf der Trommel T_1 auf. Letztere ist mit der Trommel T_2 des Seiles III durch Zahnräder und Reibungskupplungen verbunden.

Beim Fahren entspricht einem Verkürzen des Seiles III ein Verlängern der Seilzüge I und II und umgekehrt. Das Öffnen und Schließen des Greifers geschieht durch eine besondere Greiferwinde, die, von einem Motor angetrieben, mit Schraubenspindel die Leitrollen R des Seilzuges I verschiebt.

Fig. 176 gibt die Anordnung eines Bleichertschen Entladekranes mit Seillaufkatze in Verbindung mit einer Drahtseilbahn. Der Ausleger ist in Rücksicht auf die Schiffsmasten aufklappbar angeordnet. Er ist an zwei mit Gelenken versehenen Stangen, die beim Hochziehen einknicken, aufgehängt. Hochziehen des Auslegers durch ein besonderes Windwerk. Zweckmäßiger wird Ausleger mittels zweier Lenker zurückgezogen¹⁾.

β. Gewöhnliche Zweimotorenwinde für Fernsteuerung, meist jedoch mit angebautem Führerstand. Vorteil: Keine Seilabnutzung, daher große Betriebssicherheit. Bei angebautem Führerstand gute Übersichtlichkeit des Arbeitsvorganges. Nachteile: Infolge der hohen Quersfahrgeschwindigkeit große Motoren mit unverhältnismäßig hohem Stromverbrauch. Großes Eigengewicht der Katze im Verhältnis zur Nutzlast. Die Bewegungsfähigkeit wird durch große Massenwiderstände beeinträchtigt. Hubwerk bei Stückgutförderung mit einfacher loser Rolle (Last an zwei Seilsträngen), bei höherer Tragkraft Zwillingssrollenzug. Der hohen Arbeitsgeschwindigkeiten wegen langsamlaufende Motoren. Übersetzung ein oder zwei Stirnrädergetriebe. Haltebremse: Gewichtbelastete, elektromagnetisch gelüftete Band- oder doppelte Backenbremse. Elektrische Senkbremse.

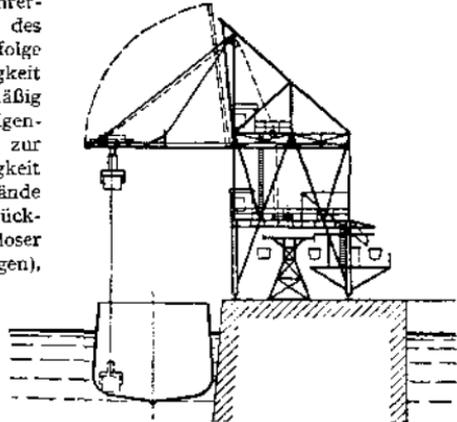


Fig. 176.

Das Quersfahrwerk erhält die übliche Ausführung. Ankerkurzschluß-Bremmung und elektromagnetisch gelüftete Haltebremse.

Weiteres siehe Bau und Berechnung der elektrisch betriebenen Winden. Motorlaufwinde mit angebautem Führerstand für Greiferbetrieb von $Q = 2,3 \text{ t s}$. Z. Ver. deutsch. Ing. 1910, S. 759.

Sicherheitsvorrichtungen: Grenzscharter für Hub- und Fahrwerk. Anordnung elastischer Prellböcke oder schiefer Ebenen mit Gleitstücken an der Winde.

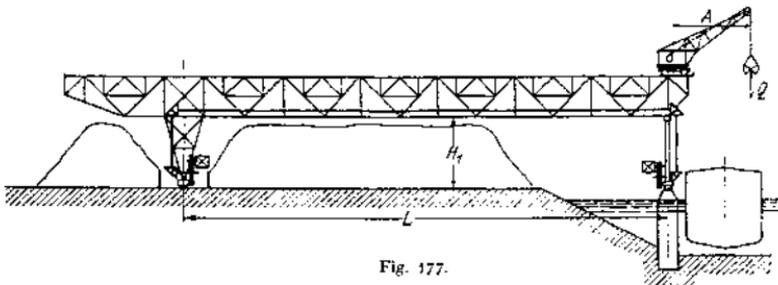


Fig. 177.

γ. Anordnung eines normalen Drehkranes auf der Brücke (Fig. 177) oder Ausrüstung der Katze mit drehbarem Ausleger (Fig. 178). Infolge Vergrößerung des Arbeitsbereiches der Winde braucht die Kranbrücke weniger verfahren zu werden. Ferner kann ein wasserseitig erforderlicher Kragarm an der Brücke kürzer gehalten werden oder ganz entfallen. Vor- und Nachteile wie unter β, jedoch noch höheres Eigengewicht der fahrbaren Winde.

¹⁾ Z. Ver. deutsch. Ing. 1908, S. 1759.

Bei oben laufendem Drehkran wird die Last seitlich von der Brücke gehoben und gesenkt.

Laufkatzen mit drehbarem Ausleger erfordern große Spannweite sowie größere Höhe der Brücke bei gleicher Stapelhöhe des Fördergutes.

Die in Fig. 178¹⁾ dargestellte Verladebrücke mit Drehlaufkatze besitzt eine Tragkraft von $Q = 5,5$ t; Spannweite $L = 40$ m; Ausladung $A = 34,5$ m; Ausladung des drehbaren Auslegers der Katze $a = 3$ m; lichte Höhe der Kranbrücke = 15 m. Der Ausleger kann hochgezogen werden und wird zur Entlastung des Triebwerks in senkrechter Stellung verriegelt.

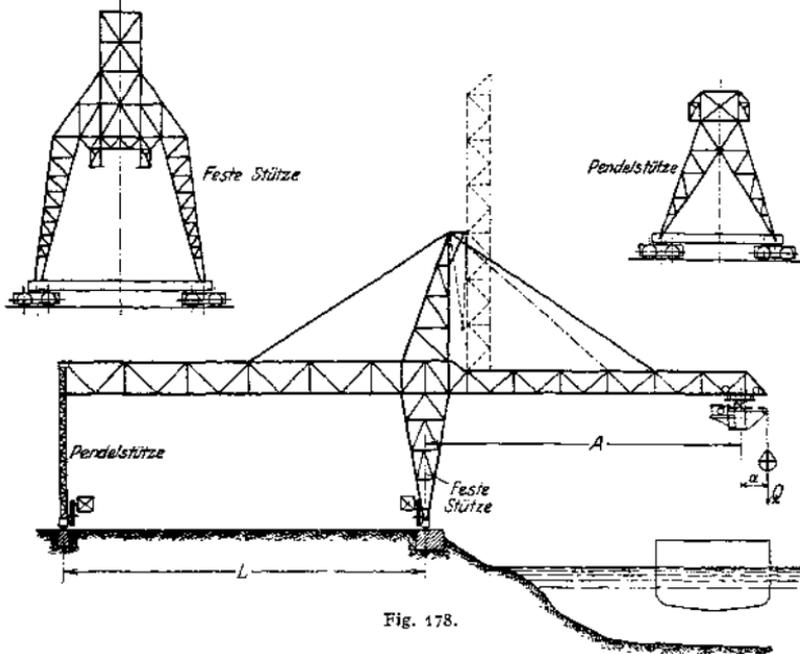


Fig. 178.

Für die Wahl der Anordnungen unter α bis γ sind die örtlichen und Betriebsverhältnisse maßgebend.

b) **Kranbrücke.** Besteht im wesentlichen aus den beiden Fahrbahnträgern, dem Querverband zwischen beiden und den Stützen, an deren unterem Ende die Radgestelle angeordnet sind.

Für kleinere Spannweiten Ausbildung des Gerüsts vollwandig²⁾, sonst allgemein Fachwerk.

Bei Anordnung eines Drehkranes Brücke mit oben liegender Fahrbahn (Fig. 177) seitliches Heben und Senken der Last. Die Bauart mit obenliegender Fahrbahn ermöglicht eine gute Versteifung der beiden Laufbahnträger (Fig. 179), was besonders bei großen Spannweiten von wesentlicher Bedeutung. Ein Nachteil ist die hinzutretende, exzentrische Beanspruchung der Träger infolge des Kranmomentes des Drehkranes. Wegen der Biegebungsbeanspruchung des Obergurtes durch die Raddrücke des Rollkranes unterteiltes Fachwerkssystem (Fig. 177).

Wird die Brücke von einer Laufkatze befahren, so wird die Fahrbahn im Innern der beiden Hauptträger angeordnet. Sie kann entweder am Untergurt des Hauptträgers oder an den Vertikalen desselben befestigt werden. Im ersteren

¹⁾ Z. Ver. deutsch. Ing. 1913, S. 645.

²⁾ Ausführung siehe Z. Ver. deutsch. Ing. 1913, S. 1277.

Falle Ausbildung des Systems nach Fig. 178 oder als unterteiltes System. In Rücksicht auf die Kräfte in Richtung der Brückenfahrbahn Querschnitt des Gerüsts nach Fig. 180.

Ist die Fahrbahn nach Fig. 181 unten am Hauptträger aufgehängt, so ist eine gleich gute, wagerechte Versteifung der Hauptträger wie bei obenliegenden der Fahrbahn möglich, jedoch erfordert diese Ausführung eine größere Bauhöhe der Brücke.

Damit jeder Punkt des zu löschenden Schiffes von dem Kranhaken oder Fördergefäß bestrichen werden kann, erhält die Brücke vielfach einen über die Kaikante hinausragenden Ausleger. Um eine Behinderung des Schiffverkehrs zu vermeiden, wird der Ausleger meist aufklappbar angeordnet (Fig. 178). Mitunter auch Anordnung eines in Richtung der Katzenfahrbahn aus- und ein-fahrbaren Auslegers.

Die Stützen sind, um Kräfte in der Fahrtrichtung der Katze aufnehmen zu können, mit den Hauptträgern zweckentsprechend zu verbinden. Brücken mit größerer Spannweite erhalten zum Ausgleich der Systemänderungen unter dem Einfluß der Belastung und des Temperaturwechsels je eine feste und eine Pendelstütze (Fig. 177 und 178).

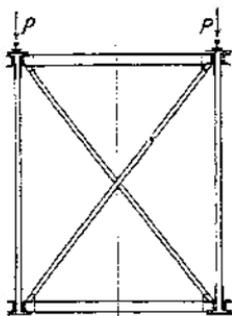


Fig. 179.

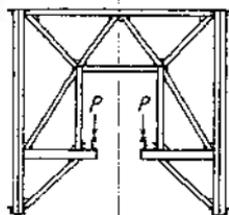


Fig. 180.

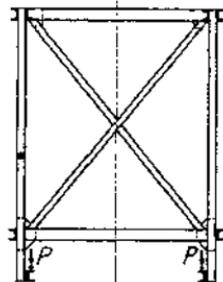


Fig. 181.

c) **Kranfahrwerk.** Damit der Kran nicht eckt, ist beim Verfahren der Brücke gleiche Fahrgeschwindigkeit beider Stützen auch bei einseitig stehender Katze Bedingung. Die hierbei auftretenden, verschieden großen Fahrwiderstände sind entsprechend auszugleichen.

Bei Brücken mit kleinerer Spannweite Aufstellung des Motors auf Brückenmitte nach Art von Fig. 216, S. 1182. Übertragung der Bewegung von der wagerechten Fahrwerkswelle mittels Kegelräderngetrieben und senkrecht oder schräg angeordneten Wellen auf die Laufräder.

Für größere Spannweiten Antrieb jeder Stütze durch einen besonderen Motor. Gebräuchlich sind nachfolgende Anordnungen¹⁾:

α) Jede Stütze wird durch einen Nebenschlußmotor angetrieben. Einfaches Fahrwerk. Im Vergleich zur Anordnung β geringerer Gesamtfahrwiderstand. Unterschied der Teilfahrwiderstände wird durch die Eisenkonstruktion ausgeglichen. Letztere wird durch ein Biegemoment, bestehend aus dem halben Unterschied der Teilfahrwiderstände und der Spannweite, beansprucht.

β) Antrieb jeder Stütze durch einen Hauptstrommotor und Verbindung der beiden Fahrwerke durch eine wagerechte Welle (Fig. 177). Durch diese werden die verschieden großen Teilfahrwiderstände ausgeglichen. Nachteil:

¹⁾ Kammerer, Eisenkonstruktionen der neueren Laufkrane und Brückenkrane (Zeitschr. f. Fördertechnik 1910).

Großer Gesamtfahrwiderstand infolge der hinzutretenden Getriebe und Lager. Andererseits wird jedoch die Eisenkonstruktion entlastet.

7) Unterschied der Fahrwiderstände kann auch nach Fig. 182 durch gelenkige Stützen ausgeglichen werden, die eine größte Schrägstellung der Brücke (etwa 8° bis 10°) zulassen. Die eine Stütze wird drehchemelartig ausgebildet und muß zur Aufnahme von Kräften in Richtung der Katzenfahrbahn genügende Spurweite erhalten. Die andere Stütze muß sowohl in Richtung der Katzen- wie der Kranfahrbahn gelenkig sein. Antrieb jeder Stütze durch einen Nebenschlußmotor.

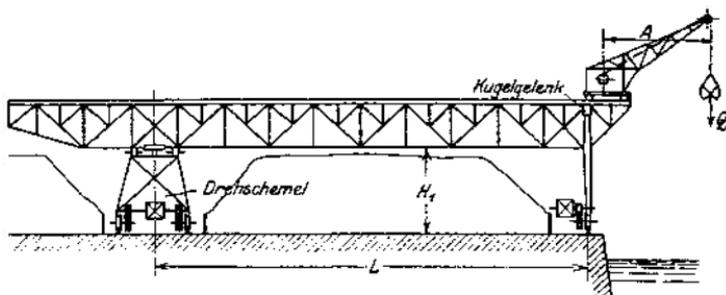


Fig. 182.

Um ein Überschreiten der höchst zulässigen Schrägstellung der Brücke zu vermeiden, sind Grenzscharter anzuordnen, die den Strom unterbrechen und die Motoren stillsetzen. Schaltung hierbei derart, daß beim Wiedereinschalten die voreilende Stütze nur nach rückwärts, die nacheilende nur nach vorwärts gesteuert werden kann. Einschalten der Motoren in gleicher Bewegungsrichtung ist nur möglich, wenn sich die beiden Brückenstützen in Parallelstellung befinden.

Bei Anordnung gelenkiger Stützen ist die Eisenkonstruktion vollkommen entlastet, da der Unterschied der beiderseitigen Fahrwiderstände auf dieselbe nicht einwirkt.

Die großen Eigengewichte der Verladebrücken bedingen große Stützendrücke. Da in Rücksicht auf Fundament und bauliche Ausführung zu hohe Radrücke unzulässig, so sind mehrere Laufräder anzuordnen, von den zwei oder vier in je einem einstellbaren Radgestell zu lagern sind.

Um ein Fahren der Brücke bei Windrücken von 25 bis 100 kg/m^2 noch zu ermöglichen, sind trotz der verhältnismäßig geringen Kranfahrgeschwindigkeit große Motoren erforderlich.

Jedes Stützenfahrwerk erhält eine Haltebremse, die als gewichtbelastete, elektromagnetisch gelüftete Bandbremse ausgebildet wird. Die Haltebremse kann zu gleicher Zeit zur Sicherung des stillstehenden Kranes gegen auftretende Windkräfte dienen. Ferner ist jede Brücke mit Schienenzangen auszurüsten. Wird der Kran außer Betrieb gesetzt, so ist er in die Endstellung der Fahrbahn zu bringen und zu verriegeln.

Verladebrücken werden vielfach mit Drahtseilbahnen in Verbindung gebracht (Fig. 176). Das Fördergut wird vom Greifer in einen Schüttrumpf entladen und gelangt von da in die Gefäße der Hängebahnwagen.

Ausführungen siehe Z. Ver. deutsch. Ing. 1909, S. 1120; desgl. 1910, S. 487, 797 und 799; 1911, S. 898, 1055, 1118, 1545, 2122; 1912, S. 871 und 1913, S. 645, 575, 1277, 1477 und 1930.

2. Seilbahnkrane.

Für Spannweiten über $L = 80$ bis 100 m wird die starre Laufbahn durch ein Drahtseil ersetzt. Derartige Seilbahnkrane sind besonders zweckmäßig für

vorübergehende Benutzung, wie beim Ausheben von Kanälen u. dgl. Sie können sowohl feststehend als auch fahrbar sein. Ausbildung mit turmartigen oder federnden Stützen. Das Windwerk zum Heben und Querfahren ist in der Regel an einer der beiden Stützen angeordnet.

Ausführungen s. Z. Ver. deutsch. Ing. 1909, S. 374; 1910, S. 2214; 1912, S. 232 und 1913, S. 117.

IV. Konsolkrane

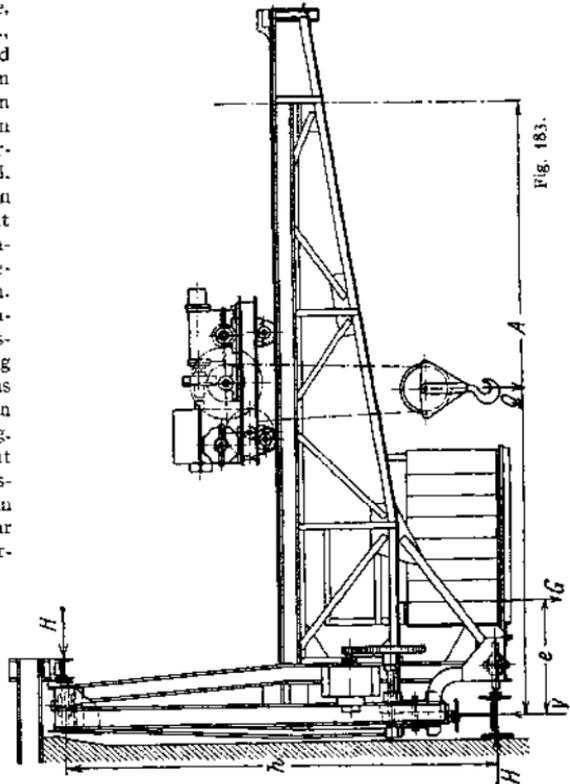
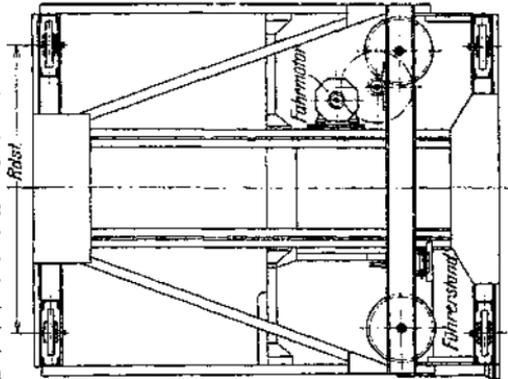
sind fahrbare Auslegerkrane und besitzen den Vorteil der Laufkrane, fast keine Grundfläche zu beanspruchen. Antrieb stets elektrisch.

a) Krane mit festem Ausleger und veränderlicher Ausladung (Fig. 183). Anwendung in Maschinenfabriken und besonders in Gießereien zur Unterstützung der Laufkrane. Letztere dienen alsdann zum Befördern schwerer Stücke, wie der Gießpfanne u. dgl., während die an der Wand laufenden Konsolkrane ein Ersatz für die bisher in Gießereien gebräuchlichen Drehkrane mit veränderlicher Ausladung sind. Diesen gegenüber bieten sie wegen ihrer senkrecht zueinanderstehenden Hakenbewegungen ein leichteres und genaueres Arbeiten.

Ein Nachteil der Konsolkrane ist die verhältnismäßig große Durchbiegung des Kragarmes, sowie das stoßartige Zurückfedern bei plötzlicher Entlastung.

Das Kranmoment ($Q \times A = \text{Nutzlast} \times \text{Ausladung}$) wird durch ein wagerechtes Kräftepaar auf die Fahrbahn übertragen. Daher erhebliche Beanspruchung der Gebäudekonstruktion durch die wagerechten Raddrücke.

Als Winde kann eine normale, elektrisch betriebene Laufkranwinde verwendet werden.



Krangerüste. Ausbildung meist als Fachwerk mit oberer oder innerer Katzenfahrbahn.

Bedeutung (Fig. 183) G_1 das Gewicht der Katze, G dasjenige des Kranes, e den Schwerpunktsabstand des letzteren von der senkrechten Fahrbahn und h den Abstand der wagerechten Druckrollen, so ergeben sich die äußeren Kräfte aus Eigengewicht und wandernder Last zu:

$$V = Q + G_1 + G \quad \text{und} \quad H = \frac{(Q + G_1) \cdot A + G \cdot e}{h}.$$

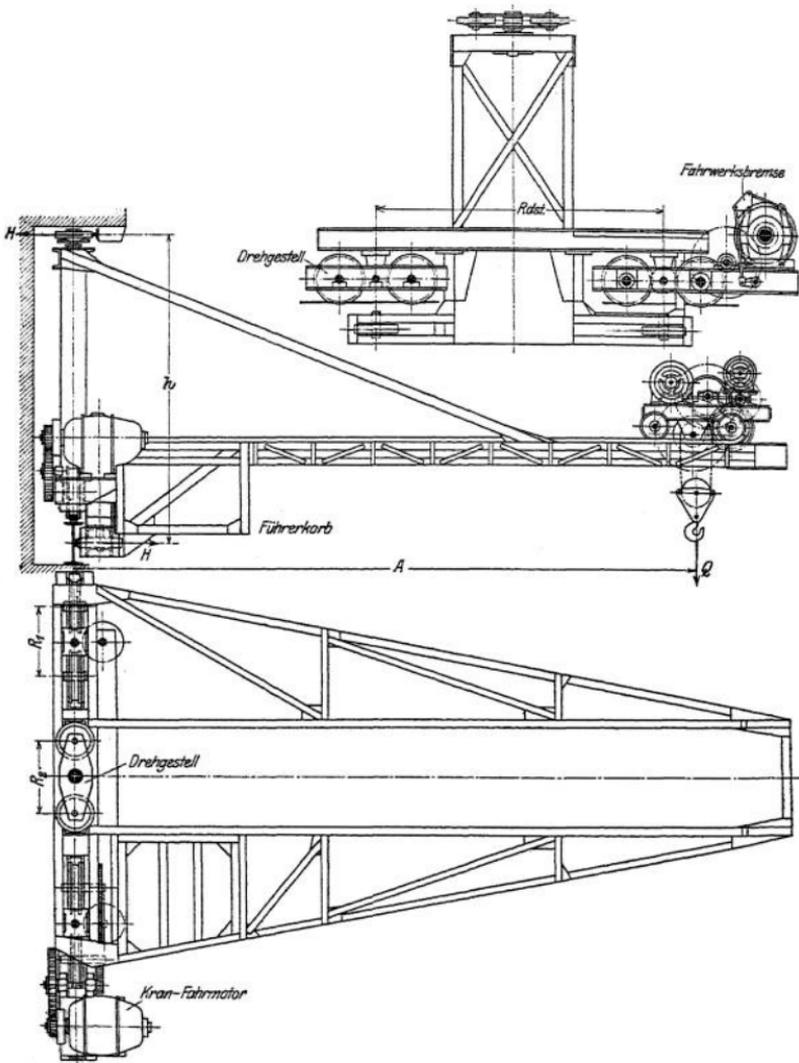


Fig. 184.

Zur Ermittlung der Spannkraften im Ausleger ist die Katze in die ungünstigste Laststellung (größte Ausladung) zu bringen¹⁾. Über zusätzliche Biegungsbeanspruchung des Obergurts durch die Raddrücke der fahrenden Katze s. unter Laufkrane, S. 1144.

Der Wandträger überträgt die senkrechte Kraft V und das Moment aus Eigengewicht und wandernder Last auf die Fahrbahn und ist daher dieser Beanspruchung gemäß zu berechnen.

Über Bemessung der Stabquerschnitte, zulässige Beanspruchungen usw. s. unter Laufkrane S. 1145.

Bei äußerster Stellung der Katze und plötzlichem Abbremsen des fahrenden Kranes treten in dem Krangerüst erhebliche Beanspruchungen durch den Massendruck auf. Dieser wirkt in Richtung der Kranfahrbahn und wird durch die Hauptträger, die Seitenträger und den Querverband zwischen beiden aufgenommen. Der Massendruck kann ähnlich wie bei den Laufkranen rechnerisch annähernd ermittelt werden und ist bei Berechnung der Kranbrücke zu berücksichtigen.

Kranfahrwerk. Der Fahrwiderstand der Konsolkrane ist ebenso wie der der Zweiradkrane (S. 1185) infolge der hinzutretenden wagerechten Kräfte ziemlich hoch. Fahrwiderstand s. unter Laufkrane, S. 1137. Übersetzung meist zwei oder drei Stirnrädervorgelege.

Die Laufrollen zur Übertragung der wagerechten Kräfte erhalten keine Spurkränze und sind schwach ballig zu drehen.

Soll der Kran Kurven befahren, so sind drehbare Radgestelle anzuordnen.

Ist genaues Anhalten des fahrenden Kranes Bedingung, dann ist das Fahrwerk mit einer Haltebremse auszurüsten.

Der Führerkorb enthält die Steuerapparate und wird unterhalb des Auslegers seitlich am Gerüste angebaut.

Ausführungen: 1. Elektrisch betriebener Konsolkran von $Q = 5$ t Tragkraft und $A = 5,8$ m Ausladung. Gebaut von Carl Flohr, Berlin (Fig. 183).

Geschwindigkeiten: Heben $v_1 = 8$ m; Windenfahren $v_2 = 10$ m und Kranfahren $v_3 = 120$ m/min; Motorleistungen $N_1 = 17$, $N_2 = 1$ und $N_3 = 4,5$ PS. Bedienung der Fahrwerksbremse durch Fußtritt.

2. Der in Fig. 184 dargestellte Konsolkran von $1,5$ t Tragfähigkeit und 5 m Ausladung ist zum Befahren von Kurven für 8 m kleinsten Krümmungshalbmesser gebaut (A.-G. Lauchhammer).

Geschwindigkeiten: Heben $v_1 = 10$ bzw. 12 m, Windenfahren $v_2 = 20$ m; Kranfahren $v_3 = 120$ m/min. Zugehörige Motorleistungen und Drehzahlen

$$\begin{aligned} N_1 &= 4,5; & N_2 &= 0,8; & N_3 &= 15 \text{ PS;} \\ n_1 &= 935; & n_2 &= 950; & n_3 &= 960. \end{aligned}$$

Sowohl das Winden- als auch das Kranfahrwerk sind in Rücksicht auf genaues Anhalten mit Bremsen ausgerüstet.

Die als doppelte Backenbremse ausgebildete Kranfahrwerksbremse wird vom Führerkorb aus von Hand bedient.

Der Ausleger besitzt Dreieckform. Seine Fahrbahn ist als Stehblechträger ausgebildet und wegen der Beanspruchung durch den Massendruck nach beiden Seiten hin gut versteift. Die Aufnahme der senkrechten Kräfte aus Eigengewicht und Nutzlast geschieht durch vier Laufräder, von denen je zwei des Kurvenfahrens wegen zu einem Drehgestell vereinigt sind. Die unteren wagerechten Kräfte werden mittels zweier Druckrollen auf die Fahrbahn übertragen, die oberen durch ein zweirädriges Drehgestell.

b) Krane mit schwenkbarem Ausleger (Fig. 185). Ausladung unveränderlich. Schwenkbereich 180° .

Derartige Konsolkrane bieten den Vorteil, daß man mit dem schwenkbaren Ausleger überall hingelangen und allen im Wege stehenden Hindernissen leicht ausweichen kann. Wird der schmale Ausleger bei Nichtbenutzung des Kranes nach der Seite geschwenkt, so wird auch das Arbeitsfeld des im gleichen Schiff befindlichen Laufkranes nicht beeinträchtigt.

Bei dem in Fig. 185 dargestellten Konsolkran mit schwenkbarem Ausleger²⁾ (Tragfähigkeit 5 t, Hubhöhe $H = 12$ m, Ausladung $A_0 = 8$ m; Schwenkgeschwin-

¹⁾ Zeichnerische Ermittlung der Spannkraften eines Konsolkranes siehe Tochtermann, Fachwerke mit außerhalb der Knoten angreifenden Kräften. (Zeitschr. f. gew. Unterr. 1914, S. 45.)

²⁾ Z. Ver. deutsch. Ing. 1913, S. 2044.

digkeit 90 m/min, Kranfahrgeschwindigkeit 75 m/min) zeigen Hub- und Drehwerk die übliche Ausführung. Beim Fahrwerk sind die Laufräder und die wagerechten Druckrollen mit Kugellagern ausgerüstet. Steht der Ausleger parallel zur Fahrtrichtung, so sucht sich das hintere Rad von der Laufbahn abzuheben, und der Reibungswiderstand ist alsdann zum Fortbewegen des Kranes ungenügend. Daher Antrieb beider Laufräder durch eine gemeinsame Welle.

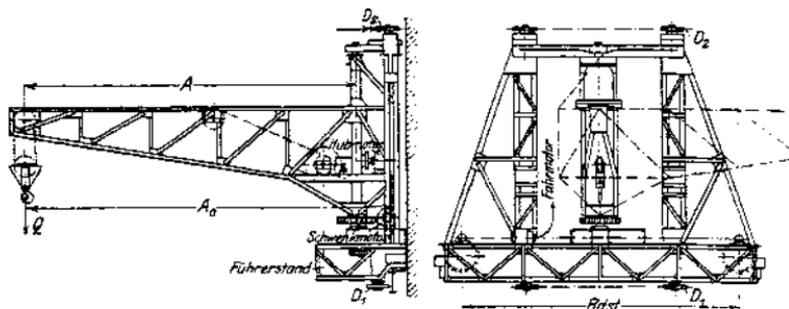


Fig. 185.

Weiteres über Konsolkrane s. St. u. E. 1912, S. 1825—1830; Z. Ver. deutsch. Ing. 1913, S. 1199 und 2004.

V. Drehkrane.

Drehkrane sind Krane, deren Ausleger um eine senkrechte Achse drehbar ist¹⁾.

Bei den Drehkranen mit unveränderlicher Ausladung kann die Last nur auf dem Umfange eines der Ausladung entsprechenden Kreises abgesetzt werden. Drehkrane mit veränderlicher Ausladung gestatten das Aufheben und Absetzen der Last auf einer Kreisringfläche, deren Halbmesser der größten und kleinsten Ausladung entsprechen.

Je nach Art der Aufnahme des Kranmomentes ($Q \times A = \text{Nutzlast} \times \text{Ausladung}$) unterscheidet man: Drehkrane mit fester oder beweglicher Säule und Drehscheibenkrane.

Antriebsarten: Für selten benutzte Krane Antrieb von Hand (besonders für kleinere Krane, Wanddrehkrane, Säulenkrane u. dgl.). Sonst fast ausschließlich elektrischer Antrieb. Einmotorenkrane sind veraltet, daher allgemein für jede Kranbewegung ein besonderer Motor. Dampfdrehkrane werden als feststehende Krane nicht mehr gebaut. Als fahrbare Krane dienen sie meist zu gleicher Zeit Verschiebungszwecken, werden jedoch in neuerer Zeit mehr und mehr durch elektrisch betriebene Lokomotivkrane ersetzt.

Über Dampftrieb s. auch S. 1113.

Der Drehkran findet hauptsächlich für Betrieb im Freien auf Fabrikhöfen, Lagerplätzen u. dgl. Verwendung.

In Hafenanlagen dient er zum Umschlag der Güter zwischen Schiff und Eisenbahnwagen bzw. Lagerplatz oder -schuppen.

Für Verladung von Massengütern, wie Kohle, Erz, Getreide u. dgl., werden die Drehkrane mit Kippkübeln, Fördergefäßen oder Selbstgreifern ausgerüstet.

Feststehende Drehkrane besitzen einen geringen Arbeitsbereich und kommen daher im Hafenbetriebe nur in Betracht, wenn sie selten benutzt werden oder

¹⁾ Krane, deren Ausleger um eine wagerechte Achse beweglich (Wippkrane), findet man auf Hafenplätzen als Masten- oder Scheerenkrane für großen Lasthub und hohe Tragfähigkeit. Auch Verladebrücken erhalten an der Kalseite einen um eine wagerechte Achse einstellbaren Ausleger.

die Anlage einer längeren Fundamentstrecke Schwierigkeiten und Kosten verursacht.

Beides trifft auf die sogenannten **Schwerlastkrane** zu, die auf Schiffswerften zum Verladen besonders schwerer Teile (Kessel, Maschinen u. dgl.) dienen und daher meist als feststehende Drehkrane ausgeführt werden.

Fahrbare Drehkrane als Rollkrane und Velozipedkrane oder auf erhöhtem Gerüste angeordnet als Voll- und Halbportalkrane.

1. Feststehende Drehkrane.

a) Säulendrehkrane.

α) Bei den **Drehkranen mit beweglicher Säule** bilden Ausleger und Säule ein starres System. Aufnahme des Kranmomentes durch ein oberes und unteres Säulenlager. Letzteres zur Aufnahme der senkrechten Kräfte als Spurlager ausgebildet.

Wanddrehkrane (Fig. 186). Verwendung bei Güterschuppen, Ladebühnen und hochgelegenen Speichern. Antrieb von Hand, seltener elektrisch. Das untere Hals- und Spurlager ist auf dem Fußboden oder einem Mauervorsprung, das obere Halslager an der Wand angeordnet. Meist geringe Tragfähigkeit und kleine Ausladung. Kranmoment $Q \times A$ bis 5 tm. Schwenkbereich etwa 180° .

Hubwerk. Huborgan: Gliederkette oder Drahtseil. Übersetzung ein oder zwei Stirnrädervorgelege. Bremse: Sperradbremse; bei größerer Hubhöhe Anordnung einer Fliehkraftbremse zum Regeln der Senkgeschwindigkeit.

Schwenkwerk. Des geringen Schwenkwiderstandes wegen meist nicht erforderlich. Schwenkwiderstand s. S. 1168.

Kranerüst. Ausleger entweder einfache Dreieckform oder System nach Art von Fig. 186. Belastung durch Eigengewicht und Nutzlast. Senkrechte Auflagerkraft $V = Q + G$, wobei G das Gewicht des drehbaren Teils. Aufnahme des Kranmomentes durch das Kräftepaar $H \cdot h = Q \cdot A + G \cdot e$; Belastung des oberen Lagers durch die wagerechte Kraft $H_0 = H \cdot \frac{h}{h + h_0}$.

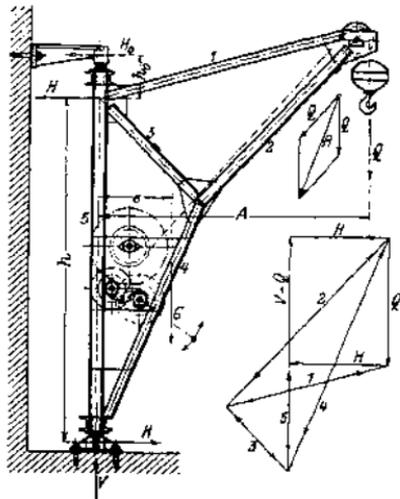


Fig. 186 und 187.

Ermittlung der äußeren Kräfte und der Spannkkräfte entweder rechnerisch oder zeichnerisch. Siehe auch Statik S. 314.

Fig. 187 zeigt den Kräfteverlauf des Auslegers unter dem Einfluß der Nutzlast. Durch den Seilzug S (hier gleich Q) erfahren jedoch die in Betracht kommenden Stäbe eine Mehrbelastung. Daher genauere Ermittlung der Spannkkräfte mit der Mittelkraft R als Belastung des Auslegers.

Der obere Säulenquerschnitt ist durch das Biegemoment $H_0 \cdot h_0$ und die senkrechte Komponente der Kraft I auf Zug beansprucht. Beanspruchung des unteren Teils der Säule auf Zug und durch die wagerechte Komponente des Seilzuges auf Biegung. Daher Berechnung der Säule auf zusammengesetzte Festigkeit.

Stab 1 wird auf reinen Zug beansprucht. Entlastung durch den Seilzug ist nicht zu berücksichtigen.

Zulässige Beanspruchung der Stabquerschnitte und Sicherheit gegen Ausknicken s. S. 1145.

Gießereidrehkrane (Fig. 188). Veränderliche Ausladung durch wagerechte Anordnung der Zugstrebe und Ausbildung derselben als Katzenfahrbahn. Übliche Tragfähigkeiten 5 t, 7,5 und 10 t. Schwenkbereich bei Anordnung des oberen Lagers an der Wand 180° , bei Anordnung desselben an der Decke 360° . In letzterem Falle kann Ausgleich der halben Nutzlast durch ein am hinteren Ende des Auslegers angebrachtes Gegengewicht erfolgen.

Antrieb meist von Hand, mitunter auch elektrisch.

Das Hubwerk ist am unteren Teile der Säule angebaut. Huborgan: Kette oder Drahtseil. Der Seil- bzw. Kettenzug ist aus der Figur ersichtlich. Bei dem dargestellten Kran ist zum Einstellen zweier Lastgeschwindigkeiten ein umschaltbares, durch eine Klauenkuppelung betätigtes Rädervorgelege angeordnet. Bremse: gewöhnliche Sperrradbremse. Um die Senkgeschwindigkeit innerhalb der zulässigen Grenzen zu halten, kann eine Fliehkraftbremse vorgesehen werden. Zur Vermeidung von Unglücksfällen durch die beim Lastsenken herumschlagenden Kurbeln Kurbelwelle ausrückbar oder Anordnung von Sicherheitskurbeln.

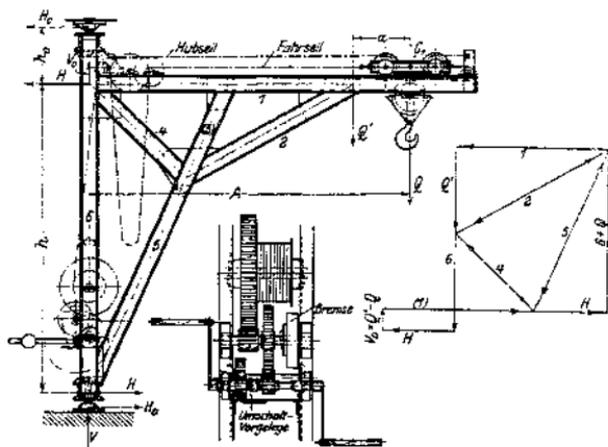


Fig. 183 und 189.

Quer- oder Katzenfahrwerk. Antrieb durch Kette und Haspelrad. Letzteres arbeitet mittels eines oder zweier Stirnrädergetriebe auf eine Kettenuß, die den geschlossenen Kettenzug, dem jeweiligen Sinn entsprechend, bewegt und das Querfahren der Katze bewirkt.

Bei geringem Widerstand erfolgt das Schwenken des Auslegers durch Ziehen einer am Auslegerkopf befestigten Handkette. Bei größerem Schwenkwiderstand Anordnung eines besonderen Schwenkwerkes. Berechnung des Schwenkwiderstandes s. S. 1168.

Kranerüst. Zur Ermittlung der äußeren Kräfte und der Spannkraften ist die Katze in die Stellung der größten Ausladung zu bringen. Belastung des Systems durch das Eigengewicht G des Kranes und die der Nutzlast Q und dem

Katzen-gewicht G_1 entsprechende Kraft $Q' = (Q + G_1) \cdot \frac{A}{A - a}$. Senkrechte Auf-

lagerkraft $V = Q + G_1 + G$. Aufnahme des Kranmomentes und des Momentes aus dem Eigengewicht des Kranes durch das wagerechte Kräftepaar $H \cdot h = (Q + G_1) \cdot A + G \cdot e$, wobei e den Schwerpunktsabstand des drehbaren Teils von der Säulenmitte bedeutet. Belastung des oberen Lagers durch die wagerechte Kraft:

$$H_0 = H \cdot \frac{h}{h + h_0}$$

Zur Behebung der statischen Unbestimmtheit des Systems ist der Stab (3) fortzulassen.

Fig. 189 zeigt den Verlauf der Spannkkräfte unter dem Einfluß der Nutzlast. Bei Berücksichtigung des Eigengewichtes Verteilung desselben auf die verschiedenen Knotenpunkte und Entwurf eines besonderen Kräfteplans. Wird der Seilzug in Betracht gezogen, so erfahren die einzelnen Stäbe eine Mehrbelastung, während die horizontale Zugstrebe entlastet wird.

Für die Bemessung der Säule ist die ungünstigste Belastung maßgebend. Beanspruchung auf Zug bzw. Druck und Biegung. Biegendes Moment $M = H_0 h_0$.

Die Fahrbahnträger sind gleichfalls auf Zug und Biegung beansprucht. Größtes Biegemoment meist bei Q' : $M_b = (Q + G_1) \cdot a$. Daher Berechnung der Säule und der Fahrbahnträger auf zusammengesetzte Festigkeit.

Zulässige Beanspruchung der Stabquerschnitte und Sicherheit gegen Ausknicken s. S. 1145.

Lagerung der drehbaren Auslegersäule kann auch in einem freistehenden Gerüst erfolgen.

Derartige Krane besitzen meist große Ausladung und hohe Tragfähigkeit (Schwerlastkrane) und dienen auf Werften u. dgl. zur Schiffsausrüstung. Zum Heben mittlerer und kleinerer Lasten Anordnung eines oder zweier Hilfs-hubwerke.

Fig. 190 gibt die schematische Darstellung eines Drehkranes mit freistehendem Gerüst, bei dem der drehbare Ausleger Hammerform besitzt. Tragkraft $Q = 20$ t; $A = 21$ m; Hub 34,5 m. Teilweiser Ausgleich des Kranmomentes durch ein am hinteren Ende angebrachtes Gegengewicht. Zur Veränderung der Ausladung ist die Winde auf dem Ausleger fahrbar angeordnet¹⁾.

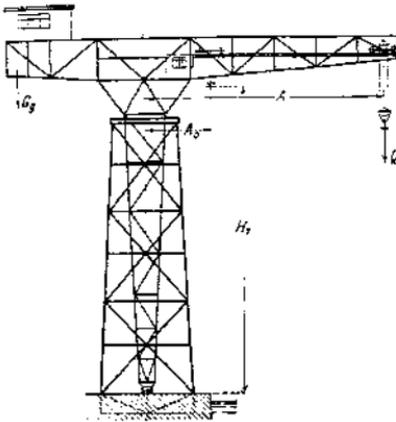


Fig. 190.

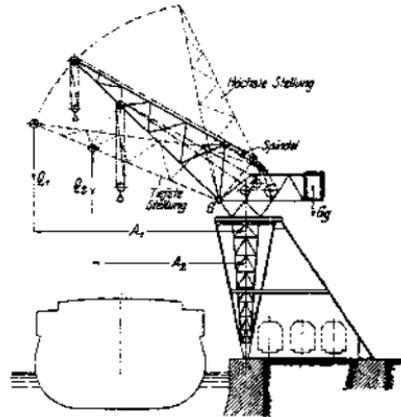


Fig. 191.

Fig. 191 zeigt einen Kran, bei dem die Säule des hammerförmigen Auslegers in einem dreibeinigen Gerüste gelagert ist. Die Veränderung der Ausladung wird durch Wippen des Auslegers bewirkt (Hammerwippkran).

Derrik-Krane (Fig. 192) besitzen gleichfalls eine drehbare Säule, an deren unterem Ende das Gelenk für den wippbaren Ausleger angeordnet ist. Das untere Säulenlager ist als Hals- und Spurlager ausgebildet. Die Aufnahme der oberen wagerechten Kraft der Säule geschieht durch zwei am Fußboden verankerte Streben.

Schwenkbereich 180° bis 270° .

¹⁾ M. A. N.

Veränderung der Ausladung durch einen Rollenzug, dessen Seilspannung mit der Ausladung veränderlich. In Rücksicht auf konstantes Drehmoment an der Trommel erhält diese entsprechend der Abnahme der Seilspannung konoidische Form.

Der größte Seilzug ergibt sich bei der größten Ausladung (Fig. 192) zu:

$$S = \infty \frac{1}{i \cdot h} \cdot (Q \cdot A + G \cdot e - S_0 \cdot f),$$

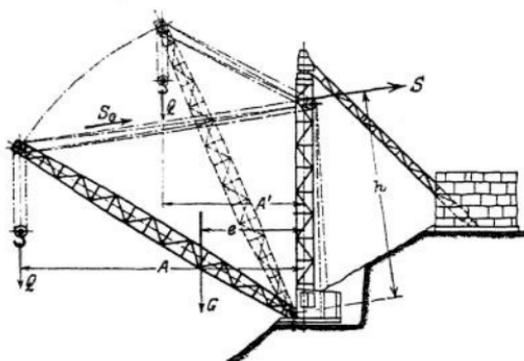


Fig. 192.

wobei i die Zahl der Seilstränge des Rollenzuges, S_0 die Spannung im Hubseil und $f = \infty h$ deren Abstand vom Auslegerdrehpunkt.

Ein Nachteil der Derrick-Krane ist die starke Seilabnutzung und die sich hieraus ergebende Betriebsunsicherheit. Vorteilhaft ist, daß der Ausleger leicht gehalten werden kann, da er keiner Biegungsbeanspruchung ausgesetzt — nur knicksicher zu sein braucht.

Antrieb bei seltener Benutzung von Hand; sonst allgemein elektrisch.

Die Derrickkrane werden auf Werften und Lagerplätzen zur Verladung schwerer Stücke, sowie zu Montagezwecken verwendet und sind in Deutschland weniger, in England dagegen mehr verbreitet.

Der in Fig. 192 (Z. Ver. deutsch. Ing. 1913, S. 993) dargestellte Derrickkran besitzt eine Tragkraft $Q = 20$ t. Kleinste Ausladung $A' = 10$ m, größte $A = 20$ m; Hubhöhe 30 m; Schwenkwinkel 230° .

Weitere Ausführung siehe Z. Ver. deutsch. Ing. 1906, S. 1462.

β) **Drehkrane mit fester Säule** finden als freistehende Drehkrane (Fig. 193) in Fabriken und Häfen, als Kohlenladekrane auf Bahnhöfen u. dgl. Verwendung.

Bei Kranen kleinerer und mittlerer Tragkraft Aufnahme des Kranmomentes durch eine geschmiedete Siemens-Martin-Stahl-Säule. Krane höherer Tragfähigkeit erhalten eine Fachwerksäule.

Hubwerk. Anordnung an den Kranschilden, bei Handantrieb auch auf der Druckstrebe des Auslegers. Huborgan: Drahtseil, bei seltener benutzten Kranen und Handantrieb auch Gliederkette.

Hubwerk für Antrieb von Hand s. S. 1108.

Fig. 193¹⁾ zeigt einen freistehenden Drehkran für Handbetrieb. Huborgan: Gliederkette. Tragfähigkeit 10 t, Ausladung 4,5 m, Höhe über Fußboden 5,7 m. Das Hubwerk ist mit drei Stirnrädervorgelegen ausgerüstet, von denen das erste Vorgelege zum schnelleren Heben und Senken leichter Lasten umschaltbar. Als Bremse dient eine gewöhnliche, gewichtbelastete Sperrbremse.

Bei elektrischem Antrieb Übersetzung zwischen Motor und Trommel durch ein oder mehrere Stirnrädervorgelege. Zum Einstellen zweier Hubgeschwindigkeiten kann ein Vorgelege umschaltbar vorgesehen werden. Haltebremse: Gewichtbelastete Bandbremse, die durch einen Bremsmagnet gelüftet wird. Regeln der Senkgeschwindigkeit durch Lüften des Bremshebels von Hand (s. auch S. 1172) oder Anordnung von Senkbremsschaltung.

Kransäule (Fig. 194). Beanspruchung auf Biegung durch das wagerechte Kräftepaar $H \cdot h = Q \cdot A + G \cdot e$ (gefährlicher Querschnitt an der Nabe),

¹⁾ Briegleb, Hansen & Co., Gotha.

verse), das die Spurplatte und die Halslagerbüchse enthält, wird entweder als Schmiedestück ausgeführt (Fig. 195) oder aus 2 [-Eisen mit eingestanztem Hals- und Spurlager gebildet. Berechnung des Querstückes auf Biegung. Unteres Lager für leichte Krane als Halslager, sonst Rollenlager. Bemessung für die wagerechte Kraft H . Zahl der Rollen 2 bis 4. Beanspruchung einer vorderen Rolle durch die Kraft $N = \frac{H}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$, Rollendurch-

messer $d_2 = 2$ bis $3 d_3$. Die Rollen sind schwach ballig zu drehen. Berechnung des feststehenden Rollenbolzens auf Biegung und zulässige Flächenpressung.

Die beiden hinteren Rollen kommen nur bei plötzlicher Entlastung des Auslegers bzw. bei Vorhandensein eines Gegengewichtes zur Anlage.

Gesamtreibungsmoment bezogen auf Mitte Säule (Fig. 194):

$$M_r = W_r \cdot R = H \cdot \mu \cdot r_1 + V \cdot \mu \frac{r_1}{2} + \frac{2 N f}{r_2} (r_2 + r_1) + 2 N \mu \frac{r_3}{r_2} r_4 \cdot \text{kgcm}^1).$$

Reibungszahl $\mu = \infty 0,1$; Hebelarm der rollenden Reibung $f = \infty 0,1$ cm.

Dieses Reibungsmoment läßt sich durch Anwendung von Kugellagern bedeutend verringern.

Fig. 196 zeigt z. B. eine Ausführung der Säulenlager, bei der das untere Lager als Kugellager ausgebildet und sowohl den wagerechten Druck H als auch die senkrechte Kraft V aufnimmt. Das obere Lager ist ein einfaches Halslager mit Phosphorbronze-Büchse.

Fig. 197 gibt die Lagerung des drehbaren Teils eines elektrisch betriebenen Kohlenladekranes von Carl Flohr, Berlin. Tragfähigkeit 1000 und 1500 kg.

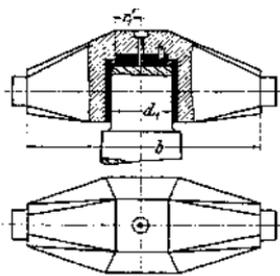


Fig. 195.

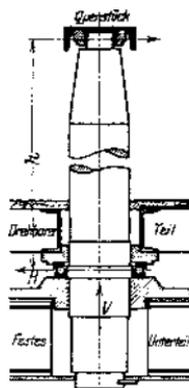


Fig. 196.

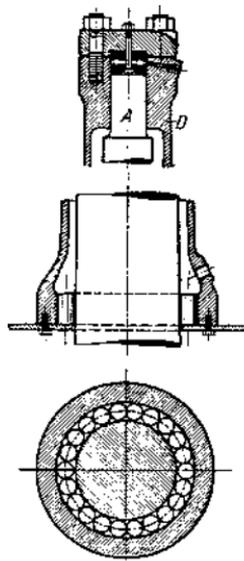


Fig. 197.

Die Säule A ist in der üblichen Weise (meist konisch) in die Fundamentplatte eingesetzt. Der drehbare Teil besteht aus einer gußeisernen, um die Säule drehbaren Hülse D , an der das Hubwerk angebaut und Zug- und Druckstrebe angeschlossen sind.

Das untere Lager des drehbaren Teils ist als Rollenlager ausgebildet, das obere zur Aufnahme der senkrechten Kräfte als Kugellager. Letzteres kann nach Lösen der Deckelschrauben ohne Herausfallen der Kugeln entfernt werden. Die Hülse setzt sich alsdann auf den Ansatz des Spurzapiens, so daß keine Abstützung derselben erforderlich ist. Bei Anziehen der Schrauben nimmt die Hülse wieder ihre ursprüngliche Lage ein.

Krane mit geringem Drehwiderstand können ohne Drehwerk ausgeführt werden.

Bei Antrieb des Drehwerks von Hand ergibt sich mit einem Kraftmoment $K \cdot a$ und einem Wirkungsgrad η die erforderliche Übersetzung zu $q = \frac{\eta \cdot K \cdot a}{M_r}$.

¹⁾ Siehe auch Z. Ver. deutsch. Ing. 1914, S. 38 und 358.

Bauliche Ausführung nach Art von Fig. 193. Höhe der Kurbelwelle vom Standorte des Arbeiters aus 1000 mm.

Bedeutet für motorischen Antrieb v die Drehgeschwindigkeit in m/sek,

$W_r = \frac{M_r}{A}$ den Drehwiderstand — beide am Auslegerkopf gemessen, so ergibt

sich unter Annahme eines entsprechenden Wirkungsgrades die Motorleistung für den Beharrungszustand zu $N = \frac{W_r \cdot v}{75 \cdot \eta} \dots$ PS.

Zu diesem Reibungsdrehwiderstand tritt während der Anlaufperiode noch der Massenwiderstand $W_m = M \cdot p$ hinzu. Hierbei bedeutet M die Masse der Nutzlast (einschließlich Kranflasche oder Greifergefäß) plus den auf den Auslegerkopf reduzierten Massen des drehbaren Teiles.

Für Hauptstrommotoren, die parabelförmigen Anlauf besitzen, Anfangsbeschleunigung $p_a = \text{tg } \alpha = \frac{v}{t_a}$ (s. S. 1125). Anlaufzeit $t_a = 4$ bis 6 Sek.

Über Bemessung des Motors und Wahl der Drehzahl s. Elektrischer Antrieb S. 1117.

Erforderliche Übersetzung des Drehwerks: $q = \frac{\text{Drehzahl des Auslegers}}{\text{Drehzahl des Motors}}$.

Das Drehwerk wird entweder an den Kranschilden angebaut oder meist auf der Plattform des drehbaren Teils aufgestellt. Der Motor arbeitet mittels elastischer Kupplung auf ein wagerechtes Schneckengetriebe und durch ein auf der Schneckenradwelle sitzendes Ritzel auf einen festen Zahnkranz.

Ist genaues Anhalten des Auslegers verlangt, so ist eine Drehwerksbremse vorzusehen, die auf der elastischen Kupplung des Motors angeordnet und mittels Fußtritts bedient wird.

Über bauliche Ausführung des Drehwerks s. auch S. 1174.

Ausleger. Ausbildung entweder als Vollwandträger, meist jedoch des geringeren Eigengewichtes wegen als Fachwerk.

Der vollwandige Ausleger erhält entweder offenen oder geschlossenen Kastenquerschnitt. Der untere Teil des Auslegers bis zum Drucklager (Fig. 198) ist durch das wagerechte Kräftepaar $H \cdot h = Q \cdot A + G \cdot e$ auf Biegung beansprucht. Ist das Drucklager unten angeordnet, dann tritt noch eine Beanspruchung durch die senkrechte Kraft $V = Q + G$ hinzu. Alsdann Berechnung auf zusammengesetzte Festigkeit.

Die Ermittlung der Querschnittsabmessungen für den gekrümmten Auslegerteil geschieht nach der für gekrümmte Stäbe geltenden Gleichung (s. Festigkeitslehre S. 471). In dem Querschnitt $q - q$ kurz über Beginn der Krümmung ist die für P zu setzende Normalkraft $N = \infty Q + G$. Sie ist im Gegensatz zur Hakenberechnung negativ einzusetzen, da sie den Querschnitt drückend beansprucht. Das biegende Moment ist positiv einzuführen, da es eine Vergrößerung der Hakenkrümmung zu bewirken sucht. Die noch auftretende Schubkraftkomponente S kann vernachlässigt werden.

In den Querschnitten des oben an die Krümmung anschließenden geraden Auslegerteils treten Biegungs-, Druck- und Schubspannungen auf. Bedeutet für den Querschnitt $q_1 - q_1$ G_1 das Eigengewicht des rechts vom Schnitt liegenden Auslegerteils, e_1 dessen Abstand, so kann man, ohne den Gleichgewichtszustand zu ändern, im Schwerpunkt die gleich und entgegengesetzt gerichteten Kräfte $Q + G_1$ anbringen. $Q + G_1$ zerlegt sich in eine Normalkraft N_1 senkrecht zum Querschnitt und eine Schubkraft S_1 parallel zum Querschnitt. Auf den Querschnitt einwirkendes biegendes Moment $M_b = Q \cdot a + G_1 \cdot e_1$. Nach Annahme der Querschnittsabmessungen ergeben sich die Spannungen pro qcm aus Biegung, Druck und Schub, und die resultierende Spannung kann nach der Gleichung S. 467 ermittelt werden, wobei $\alpha_s = 1$ gesetzt werden kann.

Die zulässige Beanspruchung des Baustoffes ist abhängig von der Art des Antriebes, der Ausladung und der Größe der zugelassenen Durchbiegung.

Zulässige Biegungsbeanspruchung $k_b \leq 600$ bis 750 kg/cm². Blechstärke $\delta = 8$ bis 12 mm.

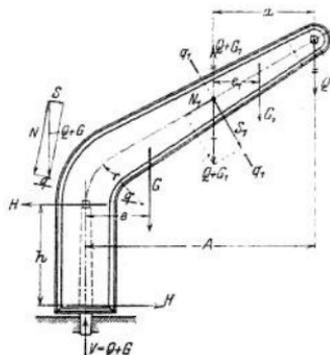


Fig. 198.

Für kleinere und mittlere Tragfähigkeiten wird der Ausleger in der Regel als einfaches Dreiecksfachwerk ausgeführt. Ermittlung der Stabkräfte im Auslechensystem rechnerisch oder zeichnerisch.

Fig. 200 zeigt den Verlauf der äußeren Kräfte und der Spannkraften eines einfachen Auslegers unter dem Einfluß der Nutzlast und des Gegengewichtes. Bei Berücksichtigung des Eigengewichtes des drehbaren Teils ist letzteres auf die verschiedenen Knotenpunkte zu verteilen und ein entsprechender Kräfteplan aufzustellen. Unter dem Einfluß des Seilzuges erfährt die Druckstrebe eine Mehrbelastung, während die Zugstrebe entlastet wird. Die Entlastung wird jedoch aus Sicherheitsgründen nicht berücksichtigt.

Bei motorischem Antrieb des Drehwerkes, insbesondere bei größerer Drehgeschwindigkeit, tritt noch der Massenwiderstand W_m als wagerechte Belastung auf. Er ist durch die Druckstrebe und deren Querverband aufzunehmen.

Ausbildung der Druckstrebe für Krane geringerer Tragkraft (z. B. Kohlenladekrane der Eisenbahnverwaltung) als genietetes oder geschweißtes Rohr. Sonst allgemein aus zwei \square -Eisen mit entsprechendem Verband. Die Zugstrebe kann rechteckigen, Kreis- oder \perp -Querschnitt erhalten.

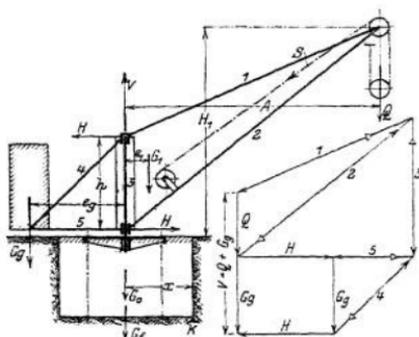


Fig. 199 und 200.

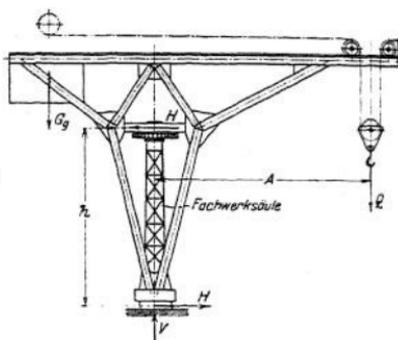


Fig. 201.

Zulässige Zug- bzw. Druckbeanspruchung k_z bzw. k = 500 bis 750 kg/cm². Knicksicherheit der Druckstrebe $\varnothing = 5$ bis 7.

Die Kranschilde werden aus \square -Eisen oder Blech gebildet und sind wegen des anzubauenden Hubwerkes reichlich zu bemessen.

Erhält der drehbare Teil eine Plattform, so wird sie in \square -Eisen gehalten und mit Riffelblech oder Bohlen abgedeckt.

Soll der Kran veränderliche Ausladung erhalten, so wird die Zugstrebe des Auslegers wagerecht gelegt und als Fahrbahn für eine Laufkatze ausgebildet (Fig. 201).

Veränderung der Ausladung kann auch mit Hilfe von Spindeln, die in die Zugstreben eingebaut sind (s. S. 1176) oder durch einen Rollenzug erfolgen.

Fig. 202 zeigt einen Schwerlastkran neuerer Ausführung¹⁾. Die feststehende Säule hat pyramidenförmige Gestalt und besitzt an ihrem Kopfe ein Kegelrollenlager zur Aufnahme der senkrechten Kräfte. Der untere Teil des hammerförmigen Auslegers ist glockenförmig ausgebildet und überträgt seine wagerechte Kraft mittels eines Rollenkranzes auf die Säule. Der Kran wird von einem Drehkran von 5 und 20 t Tragfähigkeit und zwei Laufkatzen von 50 t und 250 t Tragfähigkeit befahren.

Bei einer neueren ähnlichen Ausführung ist der Ausleger noch um eine wagerechte Achse einstellbar angeordnet. (Z. Ver. deutsch. Ing. 1912, S. 808.)

Fundament. Die Fundamentplatte für die freistehende Säule wird

¹⁾ Z. Ver. deutsch. Ing. 1913, S. 830.

entweder aus Gußeisen hergestellt oder aus Walzeisen zusammengenietet. Berechnung der meist sternförmigen Platte auf Biegung. Die zugehörigen Ankerschrauben sind mit $k_z = 600 \text{ kg/cm}^2$ auf Zug zu rechnen.

Für die Standfestigkeit des Kranes ist ein bestimmtes Fundamentgewicht G_f erforderlich. Bedeuten G_0 (Fig. 199) das Gewicht von Säule und Fundamentplatte, G_1 das Gewicht des drehbaren Teiles und G_2 das Gegengewicht, so kann das Fundamentgewicht für K als Kippkante aus folgender Gleichung ermittelt werden:

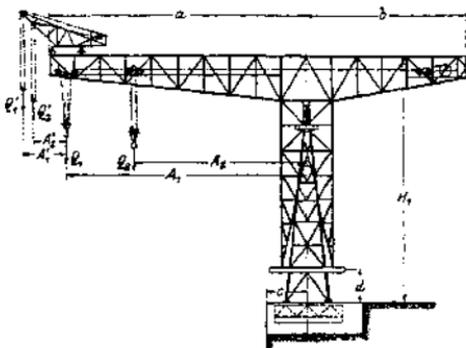


Fig. 202.

$$(G_f + G_0) \cdot x - Q \cdot (A - x) + G_1 \cdot (x - e_1) + G_2 \cdot (x + e_2) = 0.$$

Ist G_f hieraus berechnet, so ist das auszuführende Fundamentgewicht aus Sicherheitsgründen mindestens zwei bis dreimal so schwer zu halten.

Einheitsgewicht für Mauerwerk etwa 1600 kg/m^3 .

b) **Drehscheibenkrane.** Aufnahme des Kranmomentes nur durch senkrechte Kräfte, daher stets Anordnung eines Gegengewichtes.

Drehkrane mit Säulendrehscheibe bieten keine baulichen Vorteile, werden daher nicht mehr ausgeführt.

Für kleinere und mittlere Tragfähigkeiten Ausführung als Rollendrehscheibe, Fig. 205, S. 1173; für höhere Tragfähigkeiten als Walzendrehscheibe.

Die Drehscheibenkrane bieten bei leichter und billiger Bauart genügenden Raum zur Unterbringung des Hub- und Drehwerks, die auf dem hinteren Teile der Plattform angeordnet, das Kranmoment mit ausgleichen helfen. Nachteile sind die Verringerung der nutzbaren Ausladung und der erhebliche Schwenkwiderstand.

Antrieb stets elektrisch, nur für selten auszuführende Bewegungen (z. B. Kranfahren) von Hand.

Die Drehscheibenkrane finden ihre Hauptanwendung im Hafenbetrieb und dienen sowohl zum Umschlag von Stückgut, als auch von Massengütern, wie Kohle, Erz, Getreide u. dgl.

Bei Verladung von Stückgütern Tragfähigkeit 1 bis 5 t, in der Regel 2 bis 3 t. Für Massengüter Ausrüstung der Krane mit Fördergefäßen (Kippkübel, Klappgefäße u. dgl., meist jedoch mit Selbstgreifern s. S. 1099). Tragfähigkeit einschließlich Gefäß 4 bis 15 t.

Hubhöhe 10 bis 15 m. Ausladung bei Flußschiffen $A = 6$ bis 8 m, bei Seeschiffen 9 bis 15 m. Geschwindigkeiten bei Verladung von Stückgut: Heben $v_1 = 0,4$ bis $0,75 \text{ m/sek}$ (je nach Tragkraft). Drehen $v_2 = 1,75$ bis 2 m/sek . Bei Greiferbetrieb (mit 2 m^3 Gefäßinhalt): Heben $v_1 = 0,75$ bis 1 m/sek ; Drehen $v_2 = 2$ bis 3 m/sek .

Ausführung der Hafenkrane entweder feststehend oder fahrbar. Feststehende Drehkrane haben den Nachteil eines beschränkten Arbeitsbereiches und ist daher öfteres Verholen des Schiffes erforderlich. Dagegen geringere Anlagekosten den fahrbaren Drehkranen gegenüber. Verwendung der feststehenden Drehkrane im Hafenbetrieb nur bei seltener Benutzung oder wenn die Anlage einer längeren Fundamentsstrecke Schwierigkeiten und hohe Kosten verursacht.

Fahrbare Drehkrane als Rollkrane, Voll- und Halbportalkrane s. S. 1178.

Hubwerk. Huborgan der hohen Arbeitsgeschwindigkeiten wegen ausschließlich Drahtseil. Bei kleineren Tragfähigkeiten hängt die Last mittels gewichtbelasteten Hakens unmittelbar an dem über die Auslegerrolle geführten Seil. Krane höherer Tragfähigkeit werden mit loser Rolle ausgerüstet.

Verbindung zwischen Motor und Triebwerk durch eine elastische Kupplung.

Bei Wahl eines Motors mit mittlerer Drehzahl: Übersetzung doppeltes Stirnrädergetriebe.

Krane mit der meist vorkommenden Normallast von 2 bis 3 t und Hubgeschwindigkeit von 0,6 bis 0,8 m/sek erhalten zweckmäßig Antrieb durch einen langsam laufenden Motor ($n = 200$ bis 300), sowie einfaches Stirnrädervorgelege als Übersetzung (Fig. 203)¹⁾. Vorteil: Bei gut gefrästen Zähnen hoher mechanischer Wirkungsgrad des Hubwerkes (etwa 0,85 bis Vollast).

Übersetzung 1 : 8 bis 1 : 10 (und 1 : 15). Das Antriebsritzel wird aus Flußstahl hergestellt, seine Zähne aus dem Vollen geschritten und gehärtet. Lagerung des Vorgeleges in geschlossenem, ölgefülltem Gehäuse. Berechnung der Leistung des Hubmotors s. S. 1124.

Die Hubwerksbremse wird meist als gewichtbelastete, elektromagnetisch gelüftete Bandbremse ausgeführt und auf dem Umfang der elastischen Kupplung angeordnet.

Senken und Regeln der Senkgeschwindigkeit geschieht durch Lüften der Bremse mittels Handhebels. Während des Senkens läuft der Motor leer mit.

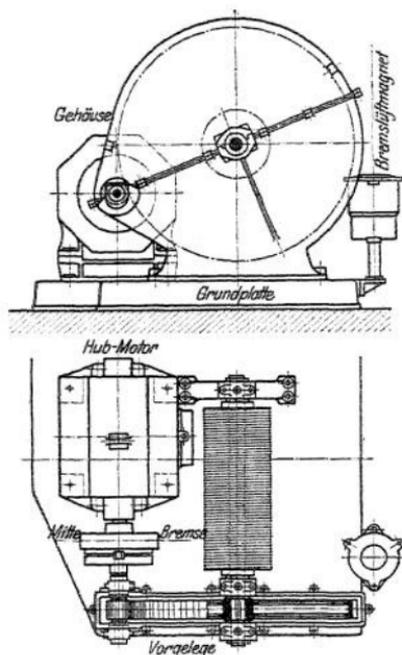


Fig. 203.

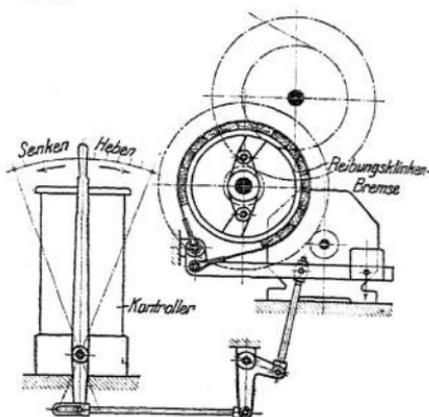


Fig. 204.

Die Firma Nagel & Kämp, Hamburg, benutzt als Hubwerksbremse eine Sperrbremse mit Reibungsklinken (Fig. 62, S. 1091).

Fig. 204 zeigt die schematische Anordnung des Einbaues dieser Bremse für Hafenkrane. Der Steuerhebel des Hubkontrollers wird hierbei zu gleicher Zeit zum Lüften der Bremse benutzt. Soll gehoben werden, so wird der Steuerhebel nach rechts ausgelegt und damit der Motor eingeschaltet. Die Bremswelle dreht sich alsdann im Hubsinne, wobei das Klinkensystem in der festgehaltenen Bremsscheibe fortgleitet. Wird der Hebel in die Mittelstellung gebracht oder tritt Stromunterbrechung ein, so nimmt die Bremswelle infolge des Rückdruckes der Last entgegengesetzten Drehsinn an, die Klinken greifen ein, und die Last ist gestellt. Soll gesenkt werden, so wird der Steuerhebel nach links ausgelegt und die Bremse gelüftet. Die Senkgeschwindigkeit kann hierbei durch Einstellen der Lüftung beliebig geregelt werden. Zum schnelleren Senken des leeren Hakens kann in der äußersten (linken) Lage des Steuerhebels Strom im Senksinne gegeben werden.

Statt der Regelung der Senkgeschwindigkeit von Hand wird von einigen Firmen Senkbremsschaltung im Hubkontrolller angeordnet.

Drehkrane, die mit Selbstgreifern ausgerüstet sind, erhalten ein der Arbeitsweise des Greifers entsprechendes besonderes Windwerk. S. auch S. 1133.

¹⁾ Maschinenfabrik J. von Petrávič, Wien.

Das Hubwerk kann an den Streben des Auslegerfußes angebaut werden, meist wird es jedoch mit dem Drehwerk auf einer gemeinsamen gußeisernen Grundplatte angeordnet.

Drehscheibe. Das Kranmoment wird durch senkrechte Kräfte auf das Unterteil übertragen.

Zur Wahrung der Standfestigkeit muß die Mittelkraft V der auf den drehbaren Teil einwirkenden, senkrechten Kräfte sowohl bei vollbelastetem, als auch bei unbelastetem Krane innerhalb der Stützkante $K - K$ fallen. Daher Anbringung eines Gegengewichtes Bedingung.

Bedeutet (Fig. 205) Q die Nutzlast, $G_1, G_2 \dots$ die Eigengewichte des drehbaren Teiles, G_g das Gegengewicht und $A, e_1, e_2 \dots e_g$, deren Abstände vom Drehzapfenmittel, so ergibt sich der Abstand der Mittelkraft V für den belasteten Kran zu

$$e = \frac{Q \cdot A + G_1 \cdot A + G_2 \cdot e_2 + \dots - G_g \cdot e_g}{Q + G_1 + G_2 + \dots + G_g}$$

und für den unbelasteten Kran zu

$$e_0 = - \frac{G_1 \cdot A + G_2 \cdot e_2 + \dots - G_g \cdot e_g}{G_1 + G_2 + \dots + G_g}$$

Das Gegengewichtsmoment muß der Bedingung e bzw. $e_0 < e_r$ genügen. Daher kleinster Wert (bei belastetem Krane) $\dots G_g \cdot (e_g + e_r)$; größter Wert (bei unbelastetem Krane) $\dots G_g \cdot (e_g - e_r)$.

G_g und e_g können innerhalb dieses Zwischenraumes angenommen werden.

Fällt die Mittelkraft bei belasteten und bei unbelasteten Kran genau in die Stützkante und bedeutet $G = G_1 + G_2 + \dots$ das Eigengewicht des drehbaren Teils, so ergibt sich der kleinste zulässige Wert des Gegengewichtes zu

$$\min G_g = \frac{Q \cdot (A - e_r)}{2 e_r} - G$$

Zur Unterstützung des Gegengewichtsmomentes empfiehlt es sich, das Hub- und Drehwerk — beide auf eine kräftige Grundplatte gesetzt — möglichst weit hinten anzuordnen.

Ausbildung der Drehscheibe. Für die meist übliche Anordnung mit vier Laufrollen ($Q \times A \leq 50$ tm) ergeben sich mit Bezug auf Fig. 205 die Raddrücke

$$\text{je einer vorderen Rolle zu } V_r = \frac{V}{2} \cdot \frac{e_r + e}{2 e_r};$$

$$\text{je einer hinteren Rolle zu } V'_r = \frac{V}{2} \cdot \frac{e_r - e}{2 e_r}.$$

Die Laufrollen erhalten entweder schwachballige oder konische Form. In letzterem Falle tritt noch ein wagerechter Schub auf, der durch das Radgestell aufzunehmen ist.

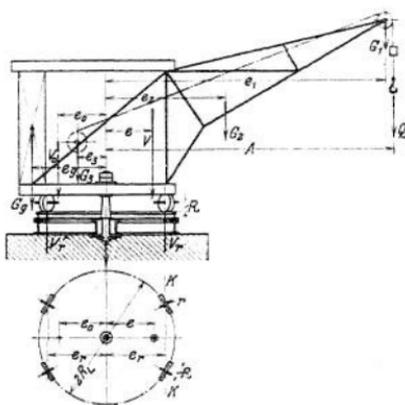


Fig. 205.

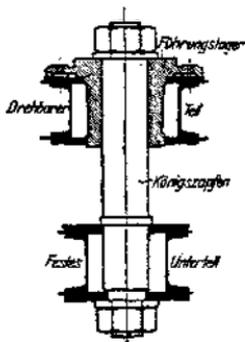


Fig. 206.

Der Königszapfen (Fig. 206) dient lediglich zur zentrischen Führung der Drehscheibe. Bei Überlastung des Krans wird er auf Zug beansprucht.

Ergibt sich für den Raddruck ein zu hoher Wert, so wird er unterteilt und werden alsdann zwei Räder in einem einstellbaren Radgestell angeordnet (Fig. 212).

Für Krane großer Tragfähigkeit geschieht die Übertragung der senkrechten Kräfte auf das Unterteil durch eine Anzahl Walzen, die in einem Kranz gemeinsam gelagert sind. Die Walzendrehscheibe bietet eine gleichmäßige Verteilung des senkrechten Druckes auf das Unterteil. Die Ermittlung desselben ist statisch unbestimmt. Da die Zapfenreibung entfällt, so ist der Reibungsdrehwiderstand geringer als bei der Rollendrehscheibe.

Drehwerk (Fig. 207)¹⁾. Der Motor arbeitet mittels elastischer Kuppelung auf ein wagerechtes Schneckengetriebe. Am unteren Ende der Schneckenwelle sitzt ein Stahlritzel, das in einen auf dem Unterteil befestigten Zahnkranz eingreift. Verzahnung entweder Evolventen- oder Triebstockverzahnung. Siehe auch Maschinenteile.

Der Reibungsdrehwiderstand beträgt, am Auslegerkopf gemessen (Fig. 205),

$$W_r = \frac{V \cdot R_L}{A \cdot R} \cdot (f + \mu \cdot r) \dots \text{kg.}$$

V = Nutzlast + Gewicht des drehbaren Teils + Gegengewicht,

f = Hebelarm der rollenden Reibung = $\infty 0,4$ cm,

μ = Reibungszahl der gleitenden Reibung = $\infty 0,1$.

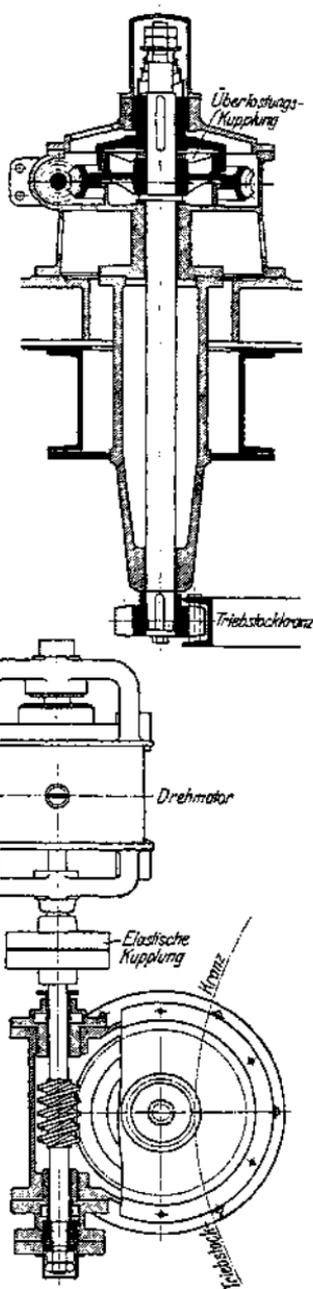


Fig. 207.

¹⁾ Gehr. Weißmüller, Frankfurt a. M.

Nach Berechnung des Drehwiderstandes kann die erforderliche Motorleistung nach S. 1169 berechnet und der Motor gewählt werden. Wahl der Motoren siehe S. 1117.

Die Größe der Übersetzung des Drehwerks ist durch das Verhältnis der Drehzahlen des Auslegers und des Motors bestimmt.

Das Schneckengetriebe ist meist zweigängig. Baustoffe und Beanspruchungen siehe unter Maschinenteile.

Fig. 208 zeigt eine perspektivische Darstellung des geteilten wagerechten Schneckengehäuses.

Um Stöße infolge Anschlagen des Auslegers u. dgl. von Motor und Triebwerk fernzuhalten, ist der Einbau einer Rutsch- (Überlastungs-) Kuppelung empfehlenswert (Fig. 207).

Die Drehwerksbremse wird auf der Motorwelle angeordnet und kann eine elektromagnetisch gelüftete Band- oder Backenbremse sein. Wird die Bremse durch Fußtritt bedient, dann ist sie so einzurichten, daß durch Umliegen eines Gewichtes ein unbeabsichtigtes Drehen des Auslegers durch Wind u. dgl. vermieden wird.

Hub- und Drehwerk werden meist auf einer gemeinsamen, gußeisernen Grundplatte angeordnet.

Ausleger. In Rücksicht auf möglichst geringes Eigengewicht als Fachwerk auszuführen.

Die Form des Auslegers selbst ist durch die örtlichen Verhältnisse bedingt und daher äußerst verschieden. In Rücksicht auf sperrige Lasten gibt man ihm meist geknickte Gestalt (Fig. 205 und 212).

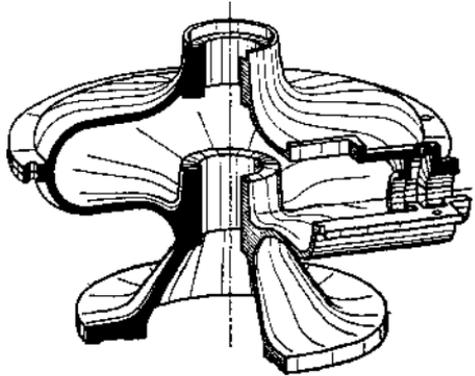


Fig. 208.

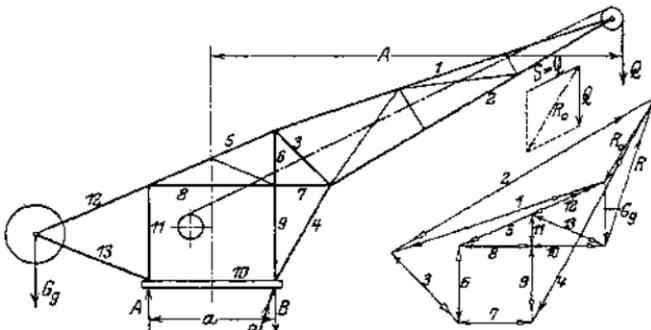


Fig. 209 und 210.

Da die Dreieckform am Auslegerfuß bauliche Nachteile aufweist, so ist man in neuerer Zeit zum Viereck (Fig. 209) und Fünfeck als Grundfigur übergegangen. Der Hauptvorteil dieser Auslegerform ist der freie Bedienungsraum bei geringster Breite des Auslegerfußes¹⁾.

¹⁾ Z. f. Elektr. u. Masch. 1913, S. 235.

Belastung des Auslegers durch Nutzlast und Eigengewicht. Ermittlung der Spannkraft rechnerisch oder zeichnerisch nach Cremona.

Fig. 210 gibt den Kräfteplan eines Auslegers unter dem Einfluß der Nutzlast und des Seilzuges. Letzterer ist, wenn die Last unmittelbar am Hubsell hängt, gleich der Nutzlast. Ist eine lose Rolle angeordnet, dann ist $S = \frac{Q}{2}$.

Belastung an der Auslegerspitze durch die Mittelkraft R_0 aus Nutzlast und Seilzug, am hinteren Ende des Auslegers durch das Gegengewicht G_0 . Ist das rechte Gerüstlager fest, das linke beweglich gedacht, dann sind Richtung und Größe der bei B angreifenden Reaktion R durch den Schnittpunkt der Richtungen von R_0 und G_0 , sowie die Größe der letzteren festgelegt.

Bei unbelastetem Kran wirkt nur das Gegengewicht, das eine aufwärts wirkende senkrechte Reaktion A und eine abwärts wirkende B erzeugt.

Der Verlauf der Spannkraft mit der Mittelkraft R_0 , dem Gegengewicht G_0 und der Reaktion als äußere Kräfte ist aus der Figur ersichtlich.

Bei Ermittlung der Spannkraft des Auslegers ist ferner der in Betracht kommende größte Winddruck in Rechnung zu ziehen, wobei die Windfläche schätzungsweise anzunehmen ist.

Der Ausleger erfährt während des Anlaufes der Drehbewegung noch eine wagerechte Beanspruchung durch den Massenwiderstand der Last und seines Eigengewichtes. Daher entsprechender Verband in der Ebene der Druckstrebe.

Bemessung der Stabquerschnitte für eine zulässige Beanspruchung $k = k_z = 600$ bis 1000 kg/cm². Gedrückte Stäbe sind nach der Knickformel $J = 2,33 \cdot P_1 \cdot J^2$ (fünffache Sicherheit) zu berechnen.

Veränderung der Ausladung kann durch Verstellen des Auslegers mittels Rollenzug oder durch Spindelverstellung geschehen (Fig. 211). Baustoff der Spindel Flußstahl, der Mutter Phosphorbronze.

Der größte Spindelzug Z tritt bei vollbelastetem Kran und größter Ausladung auf und beträgt

$$Z = \frac{1}{i \cdot b} \cdot \left[Q \cdot \left(A - \frac{a}{2} \right) + G \cdot \left(e - \frac{a}{2} \right) \right].$$

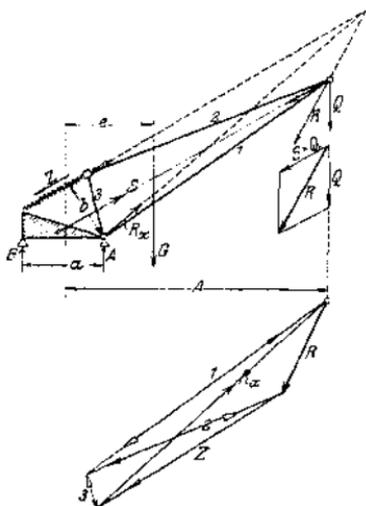


Fig. 211.

Krane geringerer Tragfähigkeit erhalten nur eine Spindel ($i = 1$), solche höherer Tragfähigkeit zwei Spindeln ($i = 2$). In ersterem Falle ergibt sich für den Auslegerquerschnitt dreieckige, in letzterem viereckige Form.

Fig. 211 gibt die zeichnerische Ermittlung des Spindelzuges, der Reaktion R_x am Auslegerfuß und der Spannkraft des durch die Nutzlast und den Seilzug belasteten Auslegers. Die Richtung von R_x ist durch den Schnittpunkt der Richtungen der Kräfte R und Z festgelegt.

Der Antrieb der Spindeln geschieht entweder von Hand mittels Haspelrad und Kette, bei elektrischem Antrieb durch den Hubmotor oder einen besonderen Motor. Übersetzung durch Kegelräder unter Vorschalten eine Stirn- oder Schneckengetriebes.

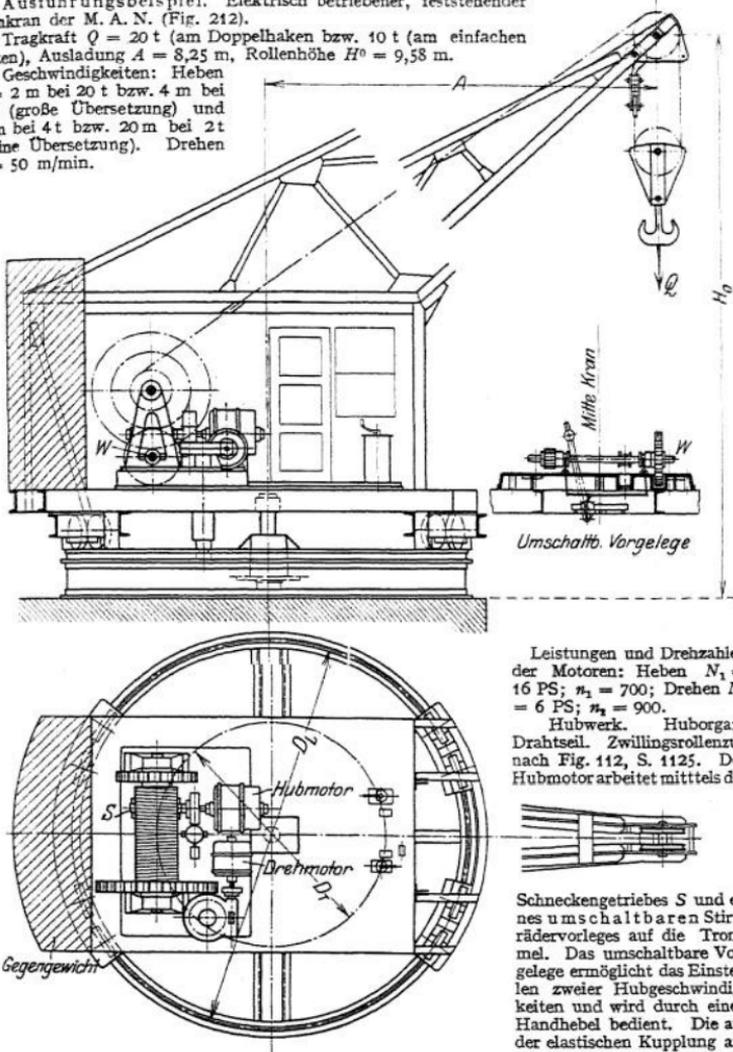
Die Spindelverstellung des Auslegers bietet neben größerer Dauerhaftigkeit und Betriebssicherheit eine ruhige Lage des Auslegers gegenüber der Verstellung durch Rollenzug.

Um ein Herausspringen des Seiles zu vermeiden, ist über der Auslegerrolle zur Schmierung durch eine am Ausleger angebrachte Leiter zugänglich sein.

Ausführungsbeispiel. Elektrisch betriebener, feststehender Drehkran der M. A. N. (Fig. 212).

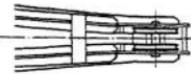
Tragkraft $Q = 20$ t (am Doppelhaken bzw. 10 t (am einfachen Haken), Ausladung $A = 8,25$ m, Rollenhöhe $H^0 = 9,58$ m.

Geschwindigkeiten: Heben $v_1 = 2$ m bei 20 t bzw. 4 m bei 10 t (große Übersetzung) und 10 m bei 4 t bzw. 20 m bei 2 t (kleine Übersetzung). Drehen $v_2 = 50$ m/min.



Leistungen und Drehzahlen der Motoren: Heben $N_1 = 16$ PS; $n_1 = 700$; Drehen $N_2 = 6$ PS; $n_2 = 900$.

Hubwerk. Huborgan. Drahtseil. Zwillingenrollenzug nach Fig. 112, S. 1125. Der Hubmotor arbeitet mittels des



Schneckengetriebes S und eines umschaltbaren Stirnrädervorgeleges auf die Trommel. Das umschaltbare Vorgelege ermöglicht das Einstellen zweier Hubgeschwindigkeiten und wird durch einen Handhebel bedient. Die auf der elastischen Kupplung angeordnete Haltebremse ist als gewichtbelastete, elektromagnetisch gelüftete Bandbremse ausgebildet. Elektrische Senkbremse.

Drehwerk. Durchmesser der kreisförmigen Laufbahn $D_L = 5000$ mm, der Laufräder 450 mm. Als Übersetzung zwischen dem Drehmotor und dem feststehenden Zahnkranz ($D_1 = 2850$ mm) dient ein wagerechtes Schneckengetriebe, auf dessen Schneckenradwelle das mit dem Zahnkranz in Eingriff befindliche Stahlritzel sitzt. Drehwerksbremse: Doppelte, durch Fußtritt bediente Backenbremse.

Der Ausleger zeigt am Fuß als Grundfigur ein Viereck, wodurch eine geringste Breite des Auslegers ohne Beeinträchtigung des Maschinenraumes ermöglicht wird.

Weitere Ausführungen: Z. Ver. deutsch. Ing. 1914, S. 4120, Hubwerk mit Greiferbetrieb für einen Drehkran von 5 t Tragfähigkeit. S. 1122, Hub- und Drehwerk zu einem elektrisch betriebenen fahrbaren Drehkran.

Fig. 212.

2. Fahrbare Drehkrane

bieten den feststehenden Drehkranen gegenüber einen größeren Arbeitsbereich.

a) Krane mit doppelspurigem Unterwagen (Rollkrane). Fig. 212a und 213, finden in Fabriken, auf Lagerplätzen, sowie im Eisenbahn- und Hafenbetrieb ausgedehnte Verwendung. Krane, die selten benutzt werden, erhalten Antrieb von Hand, viel benutzte Krane, insbesondere Hafenkran, elektrischen Antrieb.

Fahrbare Dampfdrehkrane (Dampftrieb s. S. 1113) erhalten meist stehenden Kessel, der zum teilweisen Ausgleich des Kranmomentes auf dem hinteren Teil der drehbaren Plattform anzuordnen ist. Dampfkranen haben den Vorzug der Unabhängigkeit und großer Beweglichkeit. Verwendung in Einzelausführung für Normalspur als Rangierkrane bei weitverzweigter Gleisanlage. Ein Hauptnachteil der Dampfkranen ist ihr unwirtschaftliches Arbeiten, auch stellen sie an den Kranführer, der gleichzeitig den Kessel zu bedienen und die Maschinen zu warten hat, erhöhte Anforderungen.

Für kleinere Kranmomente (bis etwa 12 t/m) Ausführung meist mit feststehender, seltener mit drehbarer Säule. Zur Aufnahme größerer Kranmomente, insbesondere bei Hafenkranen, bedient man sich allgemein der Drehscheibenbauart. Hubwerk, Drehwerk und Ausleger siehe „Feststehende Drehkrane“.

Kranwagen und Fahrwerk. Da der fahrbare Kran sowohl in belastetem als auch in unbelastetem Zustande mit genügender Sicherheit standfest sein muß, so ist bei gegebenem Lastmoment und richtig bemessenem Gegengewicht ein bestimmter Radstand sowie eine Mindestspurweite erforderlich.

Für Krane kleinerer Tragfähigkeit genügt vielfach Normalspur (1435 mm). Hafenkranen von 2 bis 3 t Tragfähigkeit und Ausladung bis 12 m erhalten eine Spurweite von etwa 2500 mm, Krane höherer Tragfähigkeit eine solche von 3000 mm und mehr. Nachstehende Tabelle gibt die zulässigen Kranmomente von Hafenkranen für Spurweiten von 1000 bis 2000 mm.

Spurweite des Gleises in mm	$s = 1000$	1200	1400	1600	1800	2000
Größtes Kranmoment in tm	12	16	20	25	30	35

Durch Anbringen entsprechend großer Gegengewichte können diese Kranmomente beträchtlich höher genommen werden. Es ergeben sich jedoch dann sehr hohe Raddrücke und damit unverhältnismäßig teure Fundamente.

Über Standfestigkeit drehbarer Drehkrane s. S. 1180.

Der Kranwagen wird meist in Walzeisen ausgeführt und erhält Bohlen- oder Riffelblechbelag.

Für untergeordnete Zwecke und bei seltenem Verfahren erhält das Kranfahrwerk Handantrieb durch Kurbel oder Schalthebel. Bei öfterem Verholen, insbesondere auf größere Strecken, ist elektrischer Antrieb vorzusehen. Die Laufräder werden in Hartguß oder Stahlguß ausgeführt. Tabelle der Hartgußlaufräder von Friedr. Krupp, Grusonwerk s. S. 1096.

Ergibt sich ein größter Raddruck von über 20 t, so sind statt 4 Laufräder 8 anzuordnen, von denen je 2 in einem gemeinsamen, einstellbaren Radgestell gelagert werden. Bei größeren Fahrgeschwindigkeiten sind die Achsen federnd zu lagern, bei kleineren Fahrgeschwindigkeiten ist starre Lagerung hinreichend.

Bedeutet V die Mittelkraft des drehbaren Teils des Kranes (Fig. 214), G_x das Gewicht des Unterwagens, R den Halbmesser des Laufrades in cm, f den Hebelarm der rollenden Reibung $= \infty 0,1$ cm und μ die Zahl der gleitenden Reibung $= \infty 0,1$, so ergibt sich der Fahrwiderstand für den Beharrungszustand zu

$$W_r = \frac{V + G_x}{R} \cdot \left(f + \mu \cdot \frac{d}{2} \right) \dots \text{kg.}$$

Leistung des Fahrmotors: $N = \frac{W_r \cdot v}{75 \cdot \eta} \dots \text{PS}$, wobei $v =$ Kranfahrgeschwindigkeit in m/sek, $\eta =$ Wirkungsgrad des Triebwerkes.

Übersetzung des Fahrwerks: $\varphi = \frac{\text{Drehzahl des Laufrades}}{\text{Drehzahl des Motors}}$.

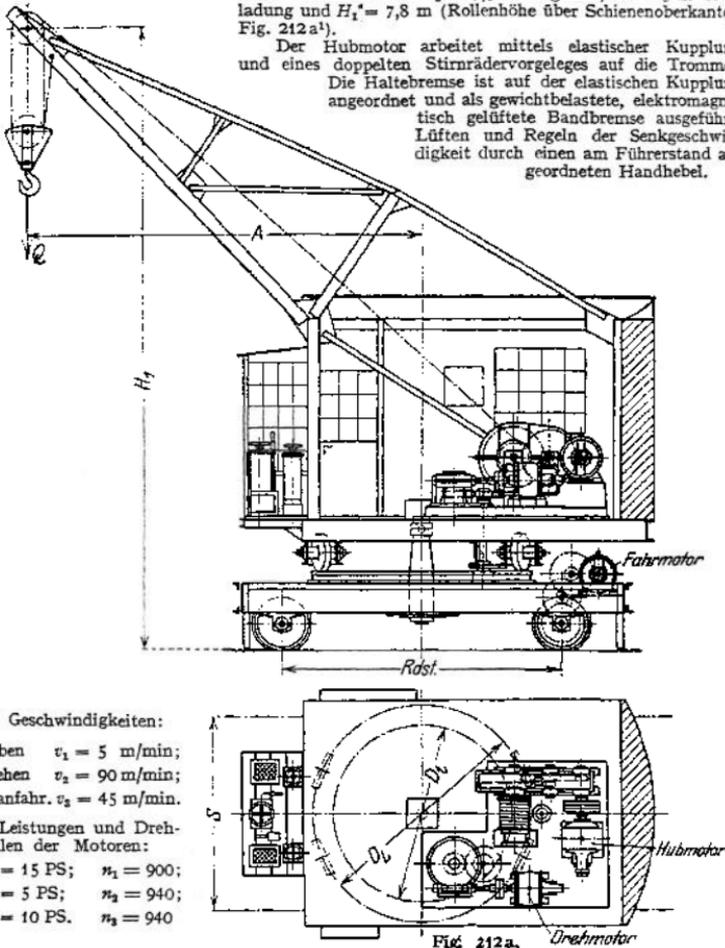
Als Übersetzung wird meist ein doppeltes oder dreifaches Stirnrädervorgelege angeordnet.

Bei Hafenkranen, die nicht zu oft verfahren werden, wird vielfach der Hubmotor als Fahrmotor benutzt, was sich durch zeitweise Kupplung mit dem Fahrwerk leicht ermöglichen läßt. Diese Ausführung ist billig und viel gebräuchlich, ein gleichzeitiges Heben und Kranfahren ist jedoch ausgeschlossen.

Ist ein Verfahren des Kranes nach jedem Kranspiel Bedingung, dann erhält das Fahrwerk wie üblich einen besonderen Motor,

Ausführungsbeispiel. Elektrisch betriebener, fahrbarer Drehkran von $Q = 7,5$ t Tragkraft, $A = 5$ m Ausladung und $H_1 = 7,8$ m (Rollenhöhe über Schienenoberkante). Fig. 212 a¹⁾.

Der Hubmotor arbeitet mittels elastischer Kupplung und eines doppelten Stirnrädervorgeleges auf die Trommel. Die Haltebremse ist auf der elastischen Kupplung angeordnet und als gewichtbelastete, elektromagnetisch gelüftete Bandbremse ausgeführt. Lüften und Regeln der Senkgeschwindigkeit durch einen am Führerstand angeordneten Handhebel.



Geschwindigkeiten:

Heben $v_1 = 5$ m/min;

Drehen $v_2 = 90$ m/min;

Kranfahr. $v_3 = 45$ m/min.

Leistungen und Drehzahlen der Motoren:

$N_1 = 15$ PS; $n_1 = 900$;

$N_2 = 5$ PS; $n_2 = 940$;

$N_3 = 10$ PS. $n_3 = 940$

Drehwerk: Durchmesser der kreisförmigen Laufbahn 2800 mm, der Laufrollen 500 mm. Der Drehmotor arbeitet mittels elastischer Kupplung, eines horizontalen Schneckengetriebes, eines Stirnrädergetriebes und eines Stahlritzels auf dem am Unterteil befestigten Zahnkranz. (Verzahnung: Innere Triebstockverzahnung, Durchmesser des Triebstockkranzes 2300 mm.)

Drehwerksbremse (auf der elastischen Kupplung angeordnet): Doppelte Backenbremse, durch Fußtritt vom Führerstand aus bedient.

Kranfahrwerk: Mittenentfernung der Laufschielen: 2500 mm. Radstand: 3650 mm. Durchmesser der Laufräder 700 mm. Übersetzung: Dreifaches Stirnrädervorgelege zwischen Motor und Laufrad.

Elektrisch betriebener fahrbarer Drehkran mit Greiferbetrieb und veränderlicher Ausladung siehe Z. Ver. deutsch. Ing. 1910, S. 760.

¹⁾ Maschinenbau-A.-G. vorm. Beck & Henkel, Kassel.

Fahrbare Drehkrane, die im Eisenbahnbetrieb verwendet werden, erhalten kein Fahrwerk, müssen jedoch mit Zughaken, Puffer u. dgl., den Normalien entsprechend, ausgerüstet werden. Der Ausleger ist bei Einstellung des Kranes in den Zug in Fahrtrichtung zu stellen und zu verriegeln. Bei neueren Ausführungen wird der Ausleger, damit er nicht über den Unterwagen hinausragt, und ein besonderer Schutzwagen nicht erforderlich wird, einziehbar oder zusammenklappbar ausgeführt.

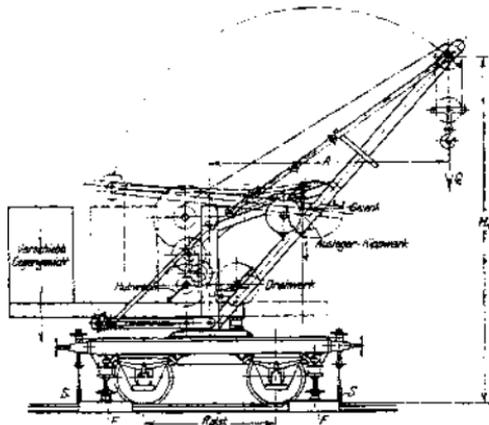


Fig. 213.

Fig. 213 zeigt einen fahrbaren Waggondrehkran mit umklappbarem Ausleger (Mohr & Federhaff, Mannheim). Tragkraft $Q = 7,5$ t; Ausladung $A = 4,5$ m; Normalspurweite, Radstand = 2500 mm. Antrieb des Hub- und Drehwerks durch Kurbeln, des Einziehwerks des Auslegers durch Kette und Haspelrad. Das Gegengewicht ist wagrecht verschiebbar.

Weitere Ausführung siehe Z. Ver. deutsch. Ing. 1910, S. 1695.

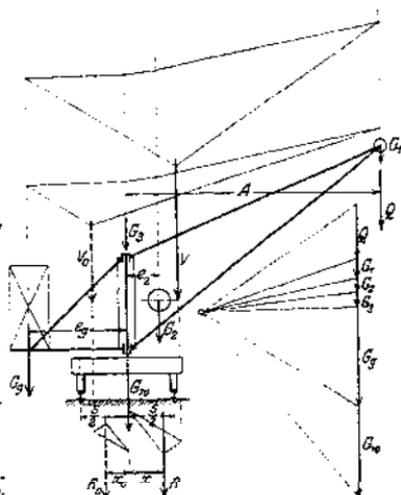


Fig. 214.

Standfestigkeit. Damit der fahrbare Kran standfest ist, muß die Mittelkraft aller senkrechten Kräfte sowohl bei belastetem, als auch bei unbelastetem Krane innerhalb der Stützfläche fallen, Fig. 214. Als Mittel zur Erreichung der Standfestigkeit dient ein festes, mitunter auch bewegliches Gegengewicht. Die Ermittlung der Abstände x bzw. x_0 der Mittelkraft R bei belastetem, bzw. R_0 bei unbelastetem Krane kann sowohl rechnerisch als auch zeichnerisch erfolgen.

Für die Standfestigkeit des belasteten Kranes gilt mit Bezug auf Fig. 214 allgemein die Bedingung:

$$x = \frac{Q \cdot A + G_1 \cdot A + G_2 \cdot e_2 + \dots - G_9 \cdot e_9}{Q + G_1 + G_2 + \dots + G_9 + G_{10}} \leq \frac{s}{2}.$$

Hiermit ergibt sich ein kleinster Wert für das Moment des Gegengewichts — bezogen auf die vordere Kippkante — zu $G_9 \cdot \left(e_9 + \frac{s}{2} \right)$.

Damit der unbelastete Kran standfest ist, gilt entsprechend:

$$x_0 = \frac{G_9 \cdot e_9 + \dots - G_1 \cdot A - G_2 \cdot e_2 \dots}{G_1 + G_2 + \dots + G_9 - G_{10}} \leq \frac{s}{2}.$$

In Bezug auf die hintere Kippkante ergibt sich hieraus ein größter Wert für das Gegengewichtsmoment zu: $G_9 \cdot \left(e_9 - \frac{s}{2} \right)$. Damit kann e_9 angenommen und G_9 berechnet werden. Ist der Radstand kleiner als die Spurweite s , so ist der Ausleger in Richtung der Fahrbahn zu stellen und die Untersuchung auf Standfestigkeit entsprechend durchzuführen.

Damit der Kran mit hinreichender Sicherheit standfest ist, ist es üblich, für Krane bis etwa 3 t Tragfähigkeit eine Kipplast $= 2Q$, für Krane über 3 t Tragfähigkeit eine solche $= 1,5Q$ zugrunde zu legen.

Als Mittel zur Unterstützung der Standfestigkeit werden mitunter 4 Stützsrauben am Unterwagen angeordnet (Fig. 213). Das gleiche kann auch durch Anbringung von Schienenzangen, die nur bei Überlastung beansprucht, erreicht werden.

b) Fahrbare Drehkrane auf erhöhtem Gerüste.

Da der fahrbare Drehkran (Rollkran) bei dem Umschlagverkehr zwischen Schiff und Speicher bzw. Eisenbahnwagen zu viel Grundfläche beansprucht, so bedient man sich zweckmäßig der Portalkrane.

α) Portalkrane.

Der Portalkran überspannt ein oder mehrere Eisenbahngleise, die zur Abkürzung des Ladeweges möglichst nahe an der Kaimauer angeordnet werden. Die dem Normalprofil entsprechende lichte Höhe des Portals soll von Schienenoberkante aus gemessen, mindestens 4,8 m, die lichte Weite in der Breite etwa 4 m für jedes Gleis betragen. Übliche Tragfähigkeit der Portalkrane $Q = 1,5$ bis 5 t (meist 2,5 t), Ausladung $A = 8$ bis 15, Geschwindigkeiten:

Heben $v_1 = 0,4$ bis 0,75 m/sek;
Drehen $v_2 \approx 1,75$ m/sek;
Kranfahren (wenn elektrisch) $v_3 = 0,2$ bis 0,3 m/sek.

Hubwerk, Drehwerk und Ansteger s. unter Drehscheibenkrane.

Je nach der Örtlichkeit und den Betriebsverhältnissen werden die Portalkrane als Vollportal- oder Halbportalkrane ausgeführt.

Vollportalkrane werden seltener feststehend angeordnet. Meist sind sie fahrbar und laufen auf zwei auf Bodenhöhe verlegten Schienen (Fig. 215).

Das Kranfahrwerk wird bei seltenem Verfahren und auf kurze Strecken von Hand bedient. Hierbei ist eine mechanische Verbindung der Antriebe beider Portalseiten als schädlich zu vermeiden.

Bei öfterem Verfahren, insbesondere auf längere Strecken, wird elektrischer Antrieb angeordnet, wobei der Motor in der Mitte des Portals aufgestellt wird.

Fig. 216¹⁾ zeigt die allgemeine Ausführung eines derartigen Fahrwerks für einen Portalkran von 2,5 t Tragkraft und 8,5 m Spannweite. Das Fahrwerk zeigt die Besonderheit, daß die landseitigen Laufräder in Rücksicht auf Kreuzung der

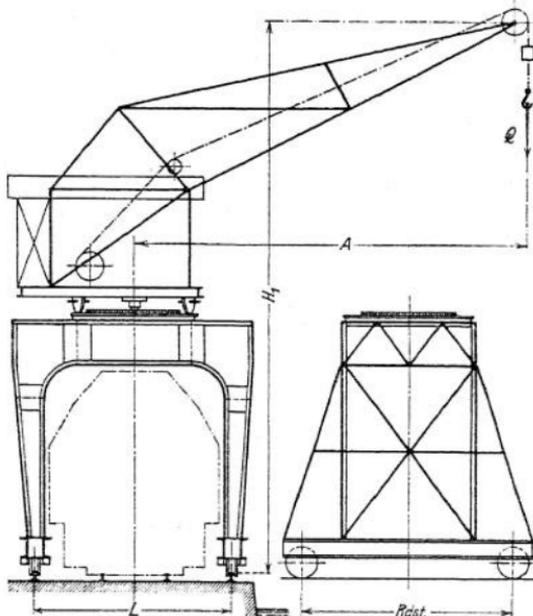


Fig. 215.

¹⁾ Z. Ver. deutsch. Ing. 1911, S. 288.

Kranschiene mit einem Eisenbahngleise ohne Spurkranz ausgeführt sind. Sie sind schwachballig gedreht. Als Kranschiene dient ein I-Träger. Die Führung des Kranes in Fahrtrichtung wird durch die kräftig gehaltenen Spurkränze der wasserseitigen Stütze bewirkt.

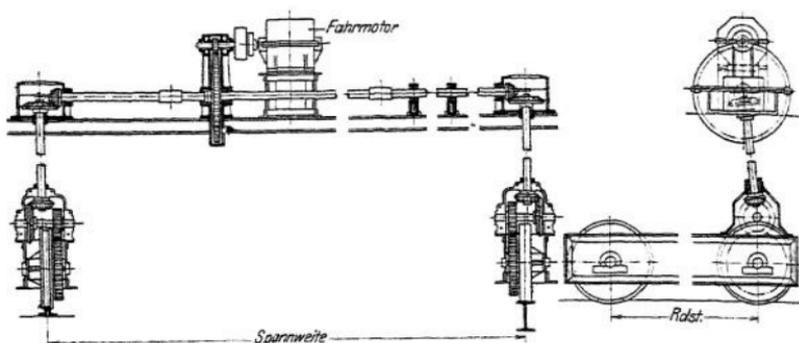


Fig. 216.

Ist die Größe der Kranfahrgeschwindigkeit bei weniger öfterem Verholen von geringer Bedeutung, so wählt man den Fahrmotor zweckmäßig gleich dem Drehmotor. In diesem Falle kann der Drehkontroller bei Anbringung eines Umschalters am Schaltbrett auch als Kranfahrkontroller benutzt werden.

Das Portal wird meist nach Art von Fig. 215 aus zwei Vollwandträgern hergestellt. Die Berechnung des Portals ist statisch unbestimmt und wird bezüglich derselben auf S. 457 verwiesen. Für eine angenäherte Berechnung können jedoch Träger und Stützen gesondert betrachtet werden. Letztere werden zweckmäßig bis zu den Schienen durchgeführt (Spielraum 10 bis 20 mm) und dienen so als Radbruchstützen.

Ein kräftiger Querverband zwischen beiden Portalträgern ist Hauptbedingung.

Bei Ausbildung der Portale als Fachwerk (Fig. 217) hat man den Vorteil einer kleineren Windfläche, sowie eines geringeren Eigengewichtes.

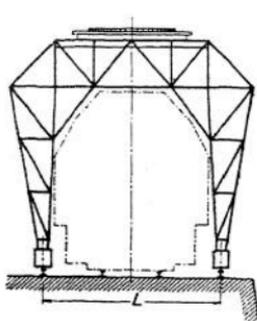


Fig. 217.

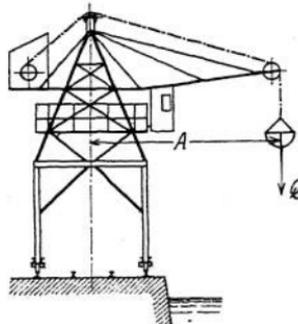


Fig. 218.

Von großer Wichtigkeit ist die Standfestigkeit der Krane, die in verschiedenen Stellungen des Auslegers, insbesondere in Rücksicht auf Winddruck, zu prüfen ist.

Um ein Fortbewegen des Kranes durch auftretenden Wind zu verhindern, ist eine elektromagnetisch betätigte Haltebremse anzuordnen. Bei Außerbetriebsetzung

des Kranes ist derselbe in seiner Endstellung zu verriegeln oder durch Schienenzangen zu sichern.

An Stelle der üblichen Portalkrane mit normalem Drehscheibenkran führt die Firma Carl Flohr, Berlin, besondere Portalturmdrehkrane (Fig. 218) aus. Bei diesen erhält der obere Teil des Portals einen pyramidenförmigen Aufsatz, auf dem der drehbare Ausleger angeordnet ist.

Hub- und Drehwerk sind am hinteren Teile des Auslegers aufgestellt und dienen zum teilweisen Ausgleich des Kranmomentes. Letzteres wird nach Art der Drehkrane mit feststehender Säule auf das Pyramidengerüst übertragen, wobei die untere Horizontalkraft des drehbaren Auslegers mittels eines Rollenkranzes auf einen entsprechend ausgebildeten Ring des Gerüsts übertragen wird.

Die Anordnung des Führerkorbes an der vorderen Seite des Auslegers bietet eine gute Übersichtlichkeit des Arbeitsfeldes.

Die Portalturmdrehkrane Bauart Flohr sind infolge des turmartigen Gerüsts für große Tragfähigkeit und Ausladung sowie große Hubhöhen geeignet, was im Hafenbetrieb von wesentlicher Bedeutung.

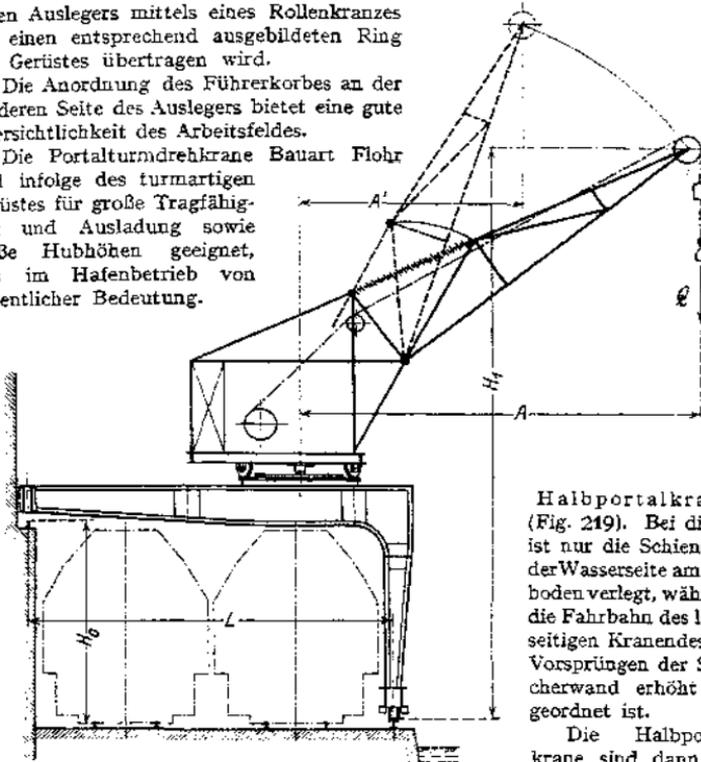


Fig. 219.

Halbportalkrane (Fig. 219). Bei diesen ist nur die Schiene an der Wasserseite am Kai-boden verlegt, während die Fahrbahn des landseitigen Kranendes auf Vorsprüngen der Speicherwand erhöht angeordnet ist.

Die Halbportalkrane sind dann angebracht, wenn der Verladeschuppen in großer Entfernung parallel mit der Uferkante verläuft. Hierdurch

nicht zu großer Entfernung parallel mit der Uferkante verläuft. Hierdurch ist eine noch bessere Raumausnutzung gegeben als bei den Vollportalkranen. Letztere dagegen besitzen, da sie nicht von der Länge des Gebäudes abhängig, den Vorteil größerer Beweglichkeit.

Die bauliche Ausführung der Halbportalkrane ist die gleiche, wie die der Vollportalkrane. Das Halbportal selbst wird entweder als Vollwandträger (Fig. 219) oder als Fachwerk (Fig. 220) ausgebildet.

Ausführungen von Voll- und Halbportalkranen s. Michenfelder, Kran- und Transportanlagen, Z. Ver. deutsch. Ing. 1910.

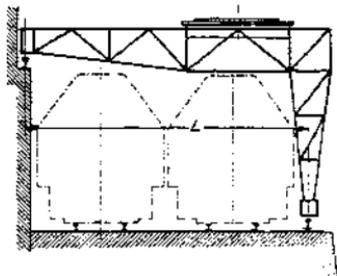


Fig. 220.

Im allgemeinen ist der Führerstand der Hafenkrane auf der drehbaren Plattform angeordnet. Der Führer, der seinen Standort auf der vorderen Auslegerseite hat, kann daher die Bewegung der Last stets verfolgen, auch hat er das Hub- und Drehwerk vor Augen. Nur bei Kranen

von größerer Tragfähigkeit werden Führerstand und Maschinenhaus getrennt. Das Führerhaus ist in Rücksicht auf Witterungseinflüsse mit einer dichten Holzverschalung zu umkleiden, und zum Übersehen des ganzen Arbeitsbereiches des Krans mit großen Fenstern auszustatten.

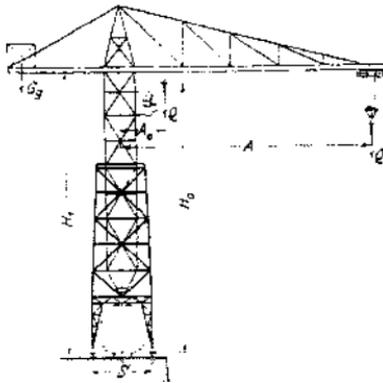


Fig. 221.

β) Fahrbare Turmdrehkrane (Fig. 221 und 222) finden Verwendung für Hochbauzwecke, insbesondere jedoch auf Schiffswerften zur Ausrüstung der Hellinganlagen.

Als Kranwagen dient zur Erzielung eines möglichst großen Hubfeldes ein turmartiges Gerüst, dessen unterer Teil als Portal ausgebildet ist. Spurweite je nach Tragfähigkeit und Ausladung 4 bis 6 m.

Veränderung der Ausladung durch Anordnung einer oder mehrerer Laufkatzen deren wagerechte Fahrbahn mehrmals an der Auslegerspitze aufgehängt ist. Teilweiser Ausgleich des Kranmomentes durch ein am hinteren Ende des Auslegers angebrachtes Gegengewicht.

Aufnahme des Kranmomentes entweder durch eine drehbare oder feste Säule, mitunter auch Ausbildung als Drehscheibenkran.

Fig. 221 zeigt einen Turmdrehkran mit drehbarer Säule (M. A. N.).

Nutzlast $Q = 4$ bzw. 6 t; größte Ausladung $A = 24$ m; kleinste Ausladung $A_0 = 4,5$ m; Hubhöhe $H_0 = 26$ m; Spurweite $S = 5,85$ m. Geschwindigkeiten: Heben $v_1 = 16$ m/min; Katzenfahren $v_2 = 20$ m/min; Drehen $v_3 = 120$ m/min; Kranfahren $v_4 = 60$ m/min.

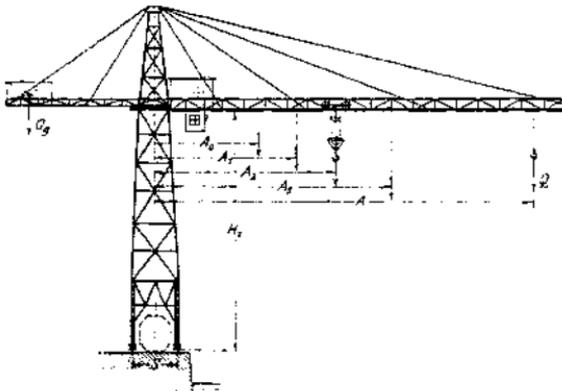


Fig. 222.

Ausführung mit feststehender Säule nach Fig. 222 (M. A. N.):

Nutzlast je nach Stellung der Katze. $Q = 5$ t bei $A = 48$ m; 12 t bei $A_1 = 30$ m; 20 t bei $A_2 = 23$ m; 30 t bei $A_3 = 18$ m und 40 t bei $A_0 = 13,3$ m; $H_1 = 30$ m; $S = 6$ m.

Um kleines Gewicht der Laufkatze und damit geringere zu beschleunigende Massen zu erhalten, wird das Windwerk fest angeordnet. Übertragung der Hub- und Katzenfahrbewegung durch Seilzüge. Bei Anordnung des Windwerks am hinteren Teile des Auslegers kann das Gegengewicht kleiner gehalten werden.

Zur sicheren Wahrung der Standfestigkeit der Krane sind entsprechende Gegengewichte an den Füßen des Turmgerüsts vorzusehen.

Ein Vorzug der Turmdrehkrane ist ihre unbegrenzte Beweglichkeit. Nachteile: Das hohe Eigengewicht, das in keinem Verhältnis zur Nutzlast steht, der in Rücksicht auf Standfestigkeit erforderliche große Platzbedarf und die teure Fundamentstrecke.

Über Berechnung der Krangerüste s. André, Statik des Kranbaues.

c) Drehkrane mit einspurigem Unterwagen. Veloziped- oder Zweiradkrane.
(Fig. 223 und 224.)

Velozipedkrane beanspruchen — im Gegensatz zu den gewöhnlichen fahrbaren Drehkranen — ihrer einfachen Spur wegen wenig Bodenfläche und gelangen deshalb in niedrigen Fabrikräumen, wo keine Laufkrane vorhanden und nur ein schmaler Gang zur Verfügung steht, zur Anwendung.

Antrieb entweder von Hand oder elektrisch. Je nach Art der Benutzung ist auch gemischter Antrieb (z. B. Heben und Kranfahren elektrisch, Drehen von Hand) vorteilhaft.

Die Velozipedkrane erfordern eine Standsicherheit nur in der Fahrtrichtung. Senkrecht hierzu ist die Standfestigkeit durch die oberen, und wenn nötig, unteren Druckrollen gewährleistet. Erstere laufen zwischen zwei entsprechend ausgebildeten Leitschienen. Letztere legen sich gegen die am Boden gelagerte Schiene.

Hub- und Drehwerk zeigen in ihrer Bauart mit den gewöhnlichen Drehkranen volle Übereinstimmung.

Das Kranmoment wird, wie bei den freistehenden Drehkranen, auf die feststehende, geschmiedete Siemens-Martin-Stahl-Säule übertragen.

Ein teilweiser Ausgleich des Kranmomentes wird durch ein Gegengewicht bewirkt, das zweckmäßig für die halbe Nutzlast bemessen wird. Verringerung des Gegengewichts durch Anordnung des Hubwerks am hinteren Teile des Auslegers (Fig. 224).

Die Säule wird außer auf Biegung auf Druck durch die senkrechte Mittelkraft $V = Q + G + G_g$ beansprucht, wobei G das Gewicht des drehbaren Teils und G_g das Gegengewicht bedeutet.

Die wagerechten Kräfte an der Säule ergeben sich, wenn der Ausleger in Fahrtrichtung steht (Fig. 224), aus der Beziehung:

$$H \cdot h = V \cdot e = Q \cdot A + G \cdot j - G_g \cdot e_g; \quad \text{zu} \quad H = \frac{V \cdot e}{h}.$$

Steht der Ausleger senkrecht zur Fahrtrichtung, so werden die wagerechten Raddrucke

$$H_0 = H_u = \frac{V \cdot e}{h_u + h + h_0}.$$

Für die wagerechte Beanspruchung der Säule ergeben sich alsdann die Kräfte:

$$H_1 = H_u \cdot \frac{h_u}{h}; \quad H_2 = H_1 + H_u.$$

Ausbildung der Säule und Lagerung des drehbaren Teils s. S. 1167. Verringerung des Drehwiderstandes durch Einbau von Kugellagern.

Fahrwerk. Der Fahrwiderstand ist infolge der hinzutretenden wagerechten Kräfte wesentlich höher als bei den zweispurigen fahrbaren Drehkranen. Als Übersetzung kann eine ein- oder mehrfache Stirnräderübersetzung vorgesehen werden. Ist bei elektrischem Antrieb genaues Anhalten Bedingung, so ist eine Fahrwerksbremse anzuordnen.

Der Ausleger wird entweder als Vollwandträger nach Art von Fig. 223¹⁾ oder des geringeren Eigengewichtes wegen als Fachwerkträger nach Fig. 224 ausgebildet.

¹⁾ Maschinenbau-A.-G. vorm. Beck & Henkel, Kassel.

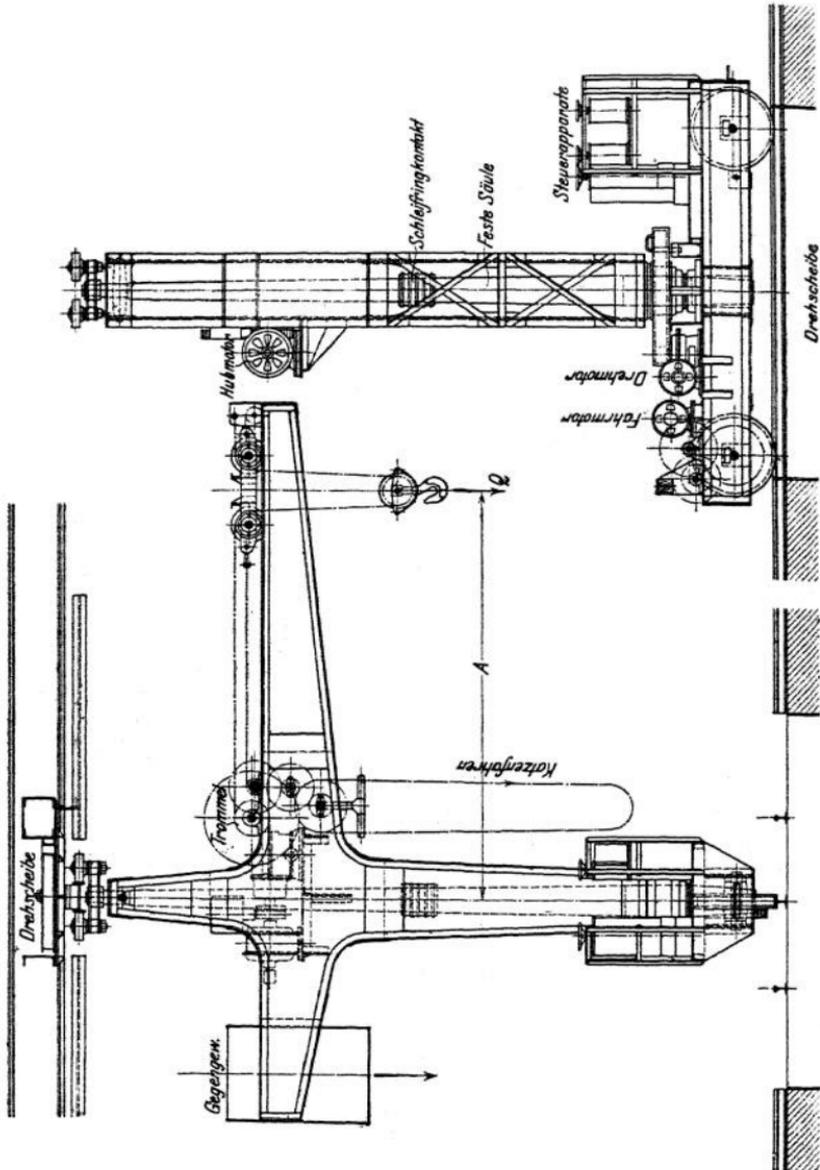


Fig. 223.

Bei dem in Fig. 223 dargestellten Velozipedkran ist die Fahrbahn mit einer Drehscheibe ausgerüstet, auf die der Kran gefahren und um 90° gedreht wird.

Er kann dann senkrecht zu seiner ursprünglichen Spur weiterfahren, wodurch sein Arbeitsbereich bedeutend vergrößert wird.

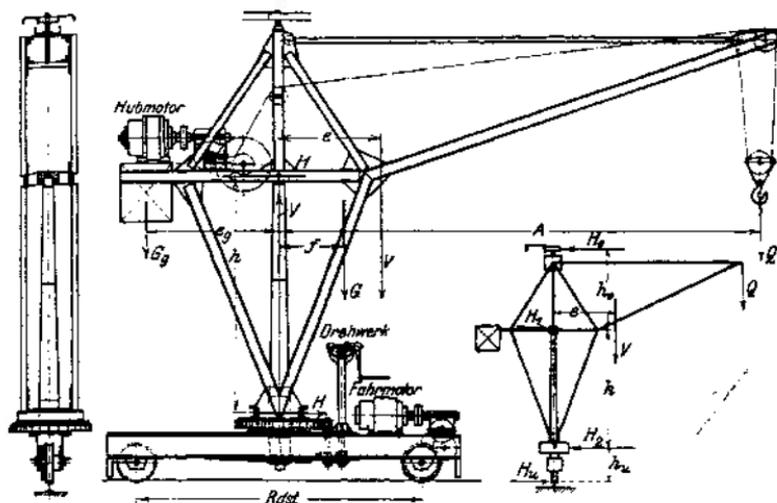


Fig. 224.

VI. Schwimmkrane¹⁾

finden zur Ausrüstung der Seeschiffe als Schwerlastkrane bis 250 t Tragfähigkeit Verwendung. In neuerer Zeit bei geringerer Tragfähigkeit auch zur Verladung von Massengütern (z. B. Schiffsbekohlung u. dgl.). Der Arbeitsbereich der Schwimmkrane ist ein unbegrenzter. Sie erhalten entweder Dampftrieb oder eigene elektrische Zentrale mit Dampftrieb zur Speisung der Kranmotoren. Schwimmkrane, die mit eigener Kraft fahren (Geschwindigkeit 1,5 ∼ 2,5 m/sek), sind mit mehreren Schiffsschrauben ausgerüstet.

Fig. 225 gibt die schematische Darstellung eines Schwimmkranes neuerer Bauart. Während die älteren Ausführungen meist nur wippbaren Ausleger hatten, ist hier ein volles Schwenken desselben möglich. Das Kranmoment und die senkrechten Kräfte werden durch ein auf dem

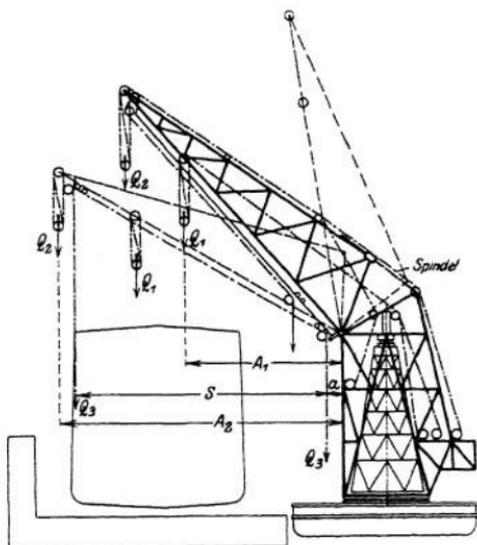


Fig. 225.

¹⁾ Siehe auch Fördertechn. 1913, S. 112 und Z. Ver. deutsch. Ing. 1904, S. 987; desgl. 1911, S. 750.

Schwimmkasten befestigtes, pyramidenförmiges Gerüst aufgenommen. Über dieses Gerüst ist eine entsprechend ausgebildete Haube gestülpt, an deren oberen Ende der mittels Spindeln wippbare Auslager angebracht ist. Gegenwärtig führt man die Spindeln nicht mehr schräg aus, sondern ordnet sie senkrecht an der Rückseite des Traggerüstes in Lenkern an.

Der in Fig. 225 dargestellte Schwimmkran ist für eine größte Last $Q_1 = 100$ t bei $A_1 = 18,4$ m und $Q_2 = 20$ t bei einer größten Ausladung von $A_2 = 32,6$ m gebaut. Außerdem ist auf dem Untergurt des Auslegers eine fahrbare Laufkatze von $Q_3 = 5$ t Tragkraft angeordnet, deren wagerechter Katzenweg $S = 29,1$ m beträgt.

Die für den Schwimmkasten zulässige größte Neigung beträgt bei Vollast etwa 5° bis 6° . Um letztere innerhalb dieser Grenze zu halten, ist ein Gegengewicht erforderlich, das entweder fahrbar (mit motorischem Antrieb) angebracht, oder es wird ein Tank am hinteren Ende der Schwimmkästen vorgesehen, das, der jeweiligen Belastung entsprechend, vollgepumpt wird.

VII. Sonderkrane für Hütten-, Stahl- und Walzwerke.

Die meisten Sonderkrane für obengenannte Werke zeigen die typische Form des Laufkranes und besitzen daher den Vorteil desselben, keine Grundfläche zu beanspruchen.

Antriebsart: Früher Dampf- oder Druckwasserantrieb, gegenwärtig fast ausschließlich elektrischer Antrieb. Dieser bietet im Gegensatz zu ersteren Antriebsarten bequeme Kraftzuleitung, hohe Manövrierfähigkeit und wirtschaftlich günstige Arbeitsweise.

Der Betrieb der Sonderkrane für Hüttenwerke ist infolge der meist 24stündigen Arbeitszeit ein äußerst angestrebter. Die Lasten bewegen sich in der Regel an der oberen Grenze der Tragfähigkeit, auch ist infolge der hohen Geschwindigkeiten und kurzen Arbeitswege eine exakte Steuerung Hauptbedingung.

In Rücksicht auf den angestrebten Betrieb und die Vermeidung von Betriebsstörungen sind sämtliche Maschinenteile reichlich zu bemessen, auch ist die Anwendung hochwertiger Baustoffe erforderlich. Zwischen Motor und Triebwerk sind, um Stöße und Brüche fernzuhalten, Überlastungs- (Rutsch-) Kupplungen anzuordnen. Sämtliche Getriebe müssen übersichtlich und leicht zugänglich, einzelne Teile, die starkem Verschleiß oder leicht Brüchen ausgesetzt sind, bequem auswechselbar sein. Empfindliche Maschinenteile sowie die Bedienungsmannschaften sind gegen strahlende Hitze zu schützen. Die Grenzstellungen sind durch Endausschalter, Puffer u. dgl. zu sichern.

Für die Krangerüste sind der angestrebten Betriebsart entsprechend niedrigere Beanspruchungen zuzulassen als bei gewöhnlichen Kranbetrieben.

a) **Gießkrane.** Während in Thomaswerken meist Gießwagen zum Fördern des flüssigen Gutes benutzt werden, bedient man sich in Martinwerken der Gießkrane beim Abstich und Beschicken der Öfen. Auch in größeren Gießereien erfolgt der Transport sowie das Kippen der Gießpfanne mehr und mehr durch Gießkrane.

Als Huborgan kommt das Drahtseil, seltener die Gallsche Kette zur Verwendung.

Das Kippen der Gießpfanne geschieht entweder durch ein auf der Hauptwinde angeordnetes Hilfshebwerk (Fig. 226), oder eine besondere Winde, die auf der oberen Bahn oder auf dem Untergurt der parallelen Hauptträger der Kranbrücke fahrbar ist (Fig. 227).

Gießkrane ohne starre Führung (Fig. 226) haben den Nachteil, daß die Pfanne bei höheren Fahrgeschwindigkeiten pendelt.

Bei den Gießkranen mit starrer Führung (Fig. 227) wird dieser Nachteil vermieden. Die Pfanne ist in einem Querstück aufgehängt, das in einem an der Winde angebauten Gestell in senkrechter Richtung geführt ist.

Da das Huborgan starkem Verschleiß unterworfen ist, werden vielfach Aufsatzriegel angeordnet, die das die Pfanne tragende Querstück in jeder Höhenlage abstützen. Auf diese Weise wird die schwebende Last festgestellt und eine erhöhte Sicherheit gegen Bruch des Tragorganes erzielt.

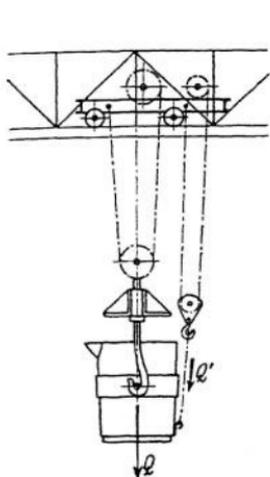


Fig. 226.

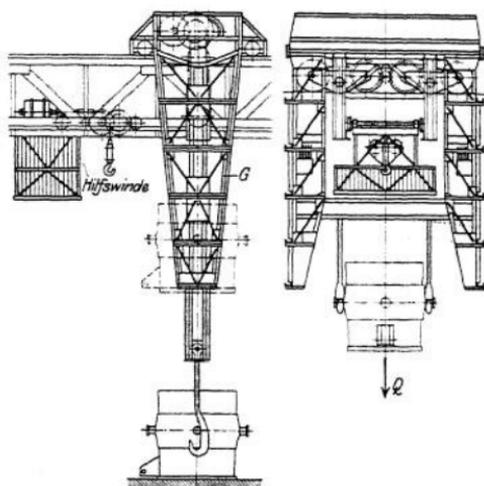


Fig. 227.

Ausführung der Gießkrane mit starrer Führung auch mit drehbarer Pfanne (Schenck & Liebe-Harkort).

Ist das Führungsgestell zwischen den Hauptträgern der Kranbrücke angeordnet, so kann das Kippen der Pfanne nur von einer Seite aus erfolgen. Liegt die Führung außerhalb der Kranbrücke (Fig. 227) und läuft die Winde auf dem Untergurt des Hauptträgers, so ist ein Kippen nach beiden Seiten unmöglich.

S. auch St. u. E. 1902, S. 17 u. f.; 1906, S. 928 u. f.; 1907, Nr. 28 und Z. Ver. deutsch. Ing. 1900, S. 414 u. f.; 1907, S. 47 u. f.; Dingl. Polyt. Journal 1907, Heft Nr. 46, 49 und 50.

b) Beschickmaschinen, Muldenchargierkrane (Fig. 228) dienen zur mechanischen Beschickung der Siemens-Martin-Öfen. Der Beschickarm faßt die mit Schrot gefüllte Mulde mittels eines an ihm angebrachten Kopfes und führt die durch Verriegelung festgehaltene Mulde in den Ofen, wo dieselbe durch Drehen des Armes entleert wird. Letzterer ist an einer Säule befestigt, die, in einem an der Winde aufgehängten Gerüst geführt, senkrecht verschiebbar ist. Durch drehbare Anordnung dieser Säule wird der Arbeitsbereich des Beschickkranes wesentlich vergrößert.

Vielfach wird der Beschickarm schräg gestellt, oder er erhält eine schwingende Bewegung (Fig. 228). An seinem hinteren Ende trägt er eine geräumige Plattform, auf der das Triebwerk, die Steuerapparate und der Führerstand angeordnet sind.

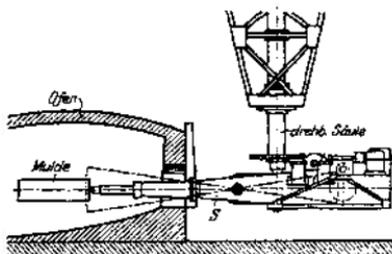


Fig. 228.

Bewegungen und Geschwindigkeiten: Kranfahren (60 bis 90 m/min), Heben (∞ 5 bis 6 m), Katzenfahren (∞ 20 bis 40 m), Drehen (2 bis 4 mal pro Min.), Muldenkippen (12 bis 16 mal pro Min.).

Die Beschickmaschinen werden meist für ein Mulden-Fassungsvermögen von 1000 bis 3000 kg gebaut. Vielfach werden sie noch mit einer normalen Hilfswinde ausgerüstet.

Die Fahrbahn für die Beschickmaschinen war früher vor der Ofenbatterie angeordnet. Da hierbei die Betriebssicherheit nur geringe Längsfahrtgeschwindigkeiten zuließ, so ging man, um den Raum vor den Ofen frei zu halten, dazu über, die Fahrbahn hoch zu legen und die Maschine als Laufkran auszubilden.

S. auch St. u. E. 1904, S. 1105 u. f.; 1906, S. 998 bis 1000; Z. Ver. deutsch. Ing. 1906, S. 1729; 1907, S. 491 und Michenfelder, Krane und Transportanlagen.

c) **Blockeinsetzkrane** (Fig. 229) gleichen in ihrer Bauart und Arbeitsweise den Beschickmaschinen und dienen zum Einsetzen der Blöcke, Brammen, Ingots usw. in die Wärmöfen.

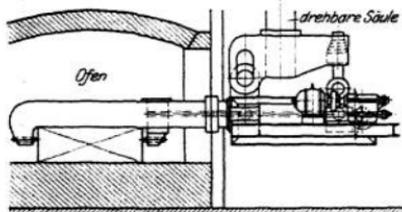


Fig. 229.

fahren. Drehen und Spindelvorschub (∞ 1,8 m/sek).

S. auch St. u. E. 1903, S. 1068 u. f.; 1904, S. 1044 u. f.; 1906, S. 1004 u. f.; 1907, Nr. 28; 1908, Nr. 29 bis 32 und Z. Ver. deutsch. Ing. 1908, S. 1461.

Blockeindrückmaschinen dienen zum Einsetzen schwerer Blöcke in die Rollöfen. Der Block wird durch einen normalen Laufkran auf die Maschine gesetzt und von dieser in den Ofen gedrückt. Das Herausholen aus dem Ofen erfolgt durch eine wagerechte Greifzange.

S. auch St. u. E. 1906, S. 1119.

d) **Tiefenkrane** (Blockzangenkrane für Tiefofen) bewirken das Einsetzen der Blöcke in die Wärmöfen, sowie das Herausnehmen und Befördern derselben zur Walzenstraße.

Dem Ofensystem entsprechend ist das Greiforgan senkrecht aufgehängt. Es ist als Kniehebelzange nach Art von Fig. 88, S. 1104 und Fig. 230 ausgebildet und hat seine Drehpunkte an einem senkrecht verschiebbaren Stempel, der in einem an der Winde aufgehängten quadratischen Gerüst (wie bei Fig. 230) geführt ist.

Zum Fassen langer und glatter Blöcke ist die Zange mit zwei Körnerspitzen ausgerüstet.

Für unregelmäßige Körper, Blockenden u. dgl. wird die Zange schaufelförmig ausgestaltet.

Krane mit niedriger Bauhöhe und großem Zangenhub erhalten ein teleskopartiges Führungsgerüst, das beim Heben und Senken des Zangenstempels sich selbsttätig einstellt.

Stripperkrane (Fig. 230) entsprechen in ihrer Bauart den Tiefenkränen, nur sind sie zum Ausstoßen der gegossenen Stahlblöcke aus den Kokillen mit einer senkrecht beweglichen Spindel ausgerüstet. Diese ist in dem Zangenstempel *S* zentrisch geführt

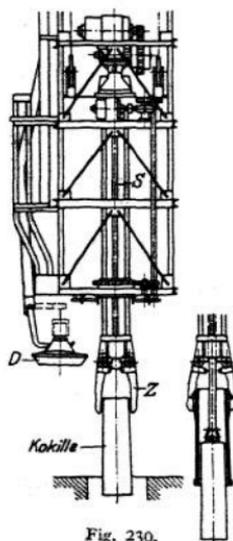


Fig. 230.

und wird durch einen Elektromotor und entsprechende Vorgelege angetrieben. Während die Zange *Z* (Fig. 230) die Kokille festhält, drückt der Daumen der Spindel den Block heftaus. Der Kran dient natürlich ebenso wie ein Tiefofenkran zum Heben und Fortschaffen der Blöcke.

Vielfach werden die Tiefofen- und Stripperkrane mit einer mechanischen Deckelabhebevorrichtung (Fig. 230) ausgerüstet, die den Deckel *D* des Ofens abhebt und nach Einsetzen oder Entfernen des Blockes wieder aufsetzt.

S. auch St. u. E. 1904, S. 1174 und Michenfelder, Krane und Transportanlagen.

e) **Muldenverladekrane** bewirken das Aufnehmen der gefüllten Mulden, sowie das Absetzen derselben auf den vor den Martinöfen stehenden Muldenbänken, von wo aus sie von der Beschickmaschine abgeholt werden.

In der Regel befördert der Kran drei Mulden. Er fährt mit den geöffneten Greiferbügel (Fig. 231) über dieselben. Die Bügel werden dann senkrecht gestellt und die Mulden angehoben.

Fig. 231 zeigt die Muldentransportvorrichtung einer elektrisch betriebenen Unterflanschlaufkatze der Demag (Z. Ver. deutsch. Ing. 1906, S. 496). Die Steuerung der Bügel *B* geschieht hier von Hand von dem an der Winde angebauten Führerstande aus.

Die Laufkatze selbst ist in Rücksicht auf Kurvenbefahren mit drehbaren Radgestellen ausgerüstet.

Über Muldenverladekrane s. auch St. u. E. 1904, S. 1100, Fig. 11; 1906, S. 998 und 999, Fig. 10 und 11, und Z. Ver. deutsch. Ing. 1908, S. 1461, Michenfelder, Kranbauarten für Sonderzwecke.

f) **Pratzenkrane** (Fig. 232) dienen zur Verladung von Stabeisen, Trägern, Schienen, Rohren u. dgl. An einem wagerechten Balken sind mehrere verstellbare oder verschiebbare Pratzen angeordnet. Der Balken ist entweder an den Seilen des Hubwerkes oder bei größeren Geschwindigkeiten an einem drehbaren Stempel nach Art von Fig. 232 starr aufgehängt. Er wird mittels Seilzug um eine horizontale Achse so gedreht, daß seine Pratzen unter die Stäbe greifen und dieselben aufnehmen oder absetzen können. Pratzenkrane ohne Drehbewegung des Stempels gestatten nur eine parallele Fortbewegung des Fördergutes.

S. auch Z. Ver. deutsch. Ing. 1905, Nr. 6; 1908, Nr. 38 und Dingl. Polyt. Journal 1908, Nr. 20.

Sowohl die Muldenverlade- als auch die Pratzenkrane sind meist mit Lasthebemagneten (s. S. 1102) ausgerüstet. Erstere zum Schrottransport, letztere zur Trägerverladung.

g) **Magnetkrane** zum Fördern langer und schwerer Stücke (Träger u. dgl.) werden mit mehreren Magneten in bestimmten Abständen nebeneinander ausgerüstet (Fig. 86, S. 1103). Um bei Stromunterbrechung ein Herabfallen des

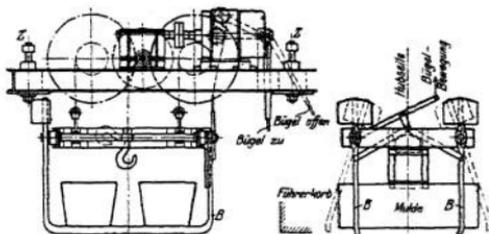


Fig. 231.

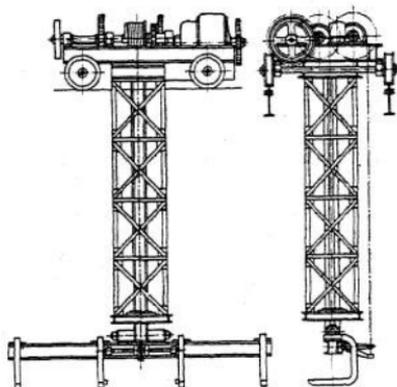


Fig. 232.

Fördergutes zu vermeiden, werden die Magnetkrane mit Sicherheitsvorrichtungen ausgerüstet (s. S. 1103).

Über Magnetkrane s. auch St. u. E. 1906, S. 401; 1909, Nr. 33; 1912, S. 733; Dingl. Polyt. Journal 1908, S. 321 u. f.; 1909, S. 297; Z. Ver. deutsch. Ing. 1909, S. 81; 1910, S. 1042; 1911, S. 800; E. T. Z. 1909, Nr. 22 und 23 und 1910, Nr. 12.

VIII. Elektrische Ausrüstung der Krane.

a) Motoren. Eigenschaften, Wahl, Ausführung und Steuerung der Motoren s. S. 1116.

b) Steuerapparate dienen zum Anlassen sowie zur Regelung der Drehzahl der Motoren. Der erforderliche Anlaßwiderstand wird bei Gleichstrom in den Ankerstromkreis, bei Drehstrom in den Stromkreis des Läufers gelegt.

Die im Kranbau verwendeten Steuerapparate sind in der Regel Kontrollier (Schaltwalzen), und gleichen in ihrer Bauart den Straßenbahnkontrollern. Ihre Bemessung geschieht in Rücksicht auf den an den Kontaktstellen auftretenden Verschleiß, der von dem daselbst auftretenden Funken, der Größe der Spannung und der Motorleistung abhängt.

Die Steuerapparate sind, um Betriebsstörungen zu vermeiden, reichlich und der jeweiligen Betriebsart entsprechend zu bemessen.

Ihre Aufstellung erfolgt in Rücksicht auf bequeme Handhabung, leichte Austauschbarkeit abgenutzter Teile und Übersichtlichkeit des Arbeitsfeldes. Die zugehörigen Widerstände können entweder am Controller angebaut oder an sonstiger Stelle angeordnet werden.

Der Antrieb der Controller kann mittels Handrad, Kurbel, Hebel, oder bei Bedienung vom Flur aus durch einen Kettenzug geschehen.

Umschalter. Ist eine Regelung der Drehzahl oder vorsichtiges Anfahren und Absetzen der Last nicht erforderlich, so können bei geringer Motorleistung statt der Controller einfache Umschalter angewendet werden, z. B. bei Kleinbezeugen (Laufkatzen, Flaschenzügen u. dgl.) mit Motorleistungen bis ≈ 5 PS.

Bei Leistungen über 0,5 PS bei Gleichstrom und über 2 PS bei Drehstrom ist des auftretenden Stromstoßes wegen ein Vorschaltwiderstand im Ankerstromkreis vorzusehen.

Die Controller gestatten infolge ihrer großen Zahl von Schaltstellungen ein stoßfreies Anfahren und Stillsetzen, sowie eine weitgehende Regelung der Drehzahl des Motors.

Als Steuerwalzen für leichte Betriebe finden sie bei Kleinbezeugen (Flaschenzügen, Laufkatzen, kleinen Kranen u. dgl.) bei Leistungen bis 3 PS Verwendung.

Die am meisten angewendeten normalen Steuerwalzen werden für Motorleistungen von $5 \approx 70$ PS gebaut.

I. Controller für Gleichstrom. Gleichstromcontroller sind der auftretenden Funkenbildungen wegen mit einem Blasmagneten ausgerüstet, der ein magnetisches Feld erzeugt, dessen Kraftlinien sich über den Kontaktstellen schließen und durch ihre dynamische Wirkung den Funken ausblasen.

Das Umsteuern erfolgt durch Umkehr der Stromrichtung im Anker.

Die Umsteuercontroller ohne Bremsschaltung (s. Fig. 103, S. 1120) finden als Fahr- und Drehcontroller, sowie als Controller für Hubwerke mit selbsthemmender Schnecke oder Lastdruckbremse Anwendung. Abstoppen der Bewegung durch mechanische oder elektromagnetisch betätigte Haltebremse.

Umsteuercontroller mit Nachlaufbremsung oder Ankerkurzschlußbremsung (s. Fig. 104, S. 1120) gestatten eine Bremsung nach beiden Fahrrichtungen. Anwendung bei Fahr- und Drehwerken.

Controller mit Senkbremsschaltung bieten eine Regelung der Senkgeschwindigkeit auf elektrischem Wege und machen die betriebsunsicheren Lastdruckbremsen überflüssig. Je nach der Betriebsart der Winde erhält der Controller Senkbremsschaltung ohne Fremderregung und mit Nebenschlußmagnet, oder starke bzw. schwache Fremderregung (s. S. 1121).

Ist das Hubwerk besonders hoch beansprucht und ist wertvolles Gut zu fördern, so ist die Sicherheitsschaltung S. 1122 empfehlenswert.

2. Kontroller für Drehstrommotoren. Das Umsteuern erfolgt durch Vertauschen zweier Klemmen am Ständer. Durch Einschalten von Widerständen in den Ankerstromkreis wird die Schlüpfung erhöht und die Drehzahl des Motors verringert.

Normale Umsteuerkontroller bei Fahr- und Drehwerken, sowie Hubwerken mit selbsthemmender Schnecke oder Senken mittels Lastdruckbremse. Sind selbsthemmende Schnecke oder Lastdruckbremse nicht vorhanden, so kann auch Sicherheitssenkenschaltung angeordnet werden.

Kontroller mit Gegenstrombremsung (s. S. 1122) ermöglichen eine weitgehende Regelung der Senkgeschwindigkeit.

Über Steuerung der Einphasenstrommotoren s. Steuerung der Motoren S. 1120.

Kontroller für zwei Motoren. Die normalen Kontroller ohne Bremschaltung können zum Steuern zweier Motoren eingerichtet werden.

Werden 2 Gleichstrommotoren hintereinander geschaltet und miteinander gekuppelt, so wirken sie wie ein Motor mit doppelter Spannung. Sind die Motoren parallel geschaltet und zum Schalten jedes Motors besondere Kontaktfinger angeordnet, so ist eine Kupplung nicht notwendig.

Bei Drehstrom sind 2 Kontroller anzuordnen, die durch einen gemeinsamen Steuerhebel betätigt werden. Anordnung eines Kontrollers, wenn beide Motoren gemeinsame Welle haben und beide Läufer in gleicher Phase aufgebracht sind.

Die Bedienung der Kontroller mittels wagerecht angeordneten Handrades (oder seltener einer Kurbel) ist die meist gebräuchliche. Sie ist billig und schont die Steuerapparate und damit auch die Motoren. Der Kranführer beherrscht hierbei vollständig die Steuerwalze und fühlt jede einzelne Regelleistung des Rades.

Bei Antrieb der Steuerwalze mittels Handhebel kann die Steuerung symmetrisch angeordnet werden. Für Hubwerke erhält der Steuerhebel in seiner Nullage wagerechte Stellung, wobei einer Auf- und Abwärtsbewegung des Steuerhebels eine Lastbewegung im Hub- oder Senksinne entspricht. Bei Fahrkontrollern erhält der Hebel senkrechte Nullstellung, und die Bewegung der Katze oder des Krans entspricht der Ausschlagbewegung des Hebels.

Die Universalsteuerung ermöglicht die Bedienung zweier Kontroller durch einen Handhebel (Fig. 233 und 234¹⁾), wobei jede Steuerwalze für sich oder beide gleichzeitig in beliebiger Richtung gesteuert werden. Die Universalsteuerung ist bei schnellarbeitenden Kranen empfehlenswert. Auch bei Drehkränen, wo die mechanische Bremse von der elektrischen Steuerung unabhängig ist, ist der Universalantrieb für Hub- und Drehbewegung zweckmäßig, da der Führer mit der einen Hand die Kontroller und mit der andern die Bremse bedienen kann.

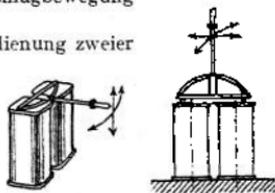


Fig. 233.

Fig. 234.

Seitliche Steuerhebel werden angeordnet, wenn der Steuerhebel zu gleicher Zeit die mechanische Bremse zu bedienen hat (Anwendung bei Haspeln, insbesondere jedoch bei Hafenkränen zur Steuerung des Hubmotors. S. Fig. 204, S. 1172).

Seilsteuerung. Die Kontroller sind an der Winde oder Kranbrücke angebracht und werden von „unten“ mittels Seil- oder Kettenzug bedient. Damit der Führer der fahrenden Katze bzw. dem Kran folgen kann, darf die Fahrgeschwindigkeit nicht größer als 1 m/sek sein. Die Seilsteuerung wird nur unter besonderen Umständen, und zwar für Motoren bis höchstens 20 PS, angewendet.

Steuerapparate mit Kohlekontakten finden bei ständigem forciertem Betrieb (Hüttenwerkskränen u. dgl.) Verwendung. Sie sind nicht dem starken Verschleiß wie die Kontroller mit Metallkontakten ausgesetzt und daher betriebssicherer. Andererseits erfordern sie bei gleicher Motorleistung größere Abmessungen und sind daher teurer als normale Steuerwalzen.

Bei der Schützensteuerung bedient der Führer eine kleine Schaltwalze (Meisterwalze), die mittels schwacher Erregerströme die Kontakte des Steuerapparates elektromagnetisch

¹⁾ S. S. W.

betätigt. Die Schützensteuerung findet Anwendung bei großen Motorleistungen, wenn die Bedienung von Hand nicht mehr ausreicht, oft umgesteuert wird und mehrere Apparate durch einen Führer gleichzeitig bedient werden. Da die unmittelbare Bedienung der Steuerwalzen betriebsicherer ist, so wird die Schützensteuerung nur im Notfalle angewendet.

c) **Bremsmagnete** bewirken das Lüften der gewichtbelasteten Bremsen der elektrisch betriebenen Krane. Der Magnet erhält bei Anlassen des Motors Strom und lüftet die Bremse durch Anheben des Gewichtes. Bei Abstellen des Motors oder bei Stromunterbrechung läßt der Magnet das Gewicht los und die Bremse wird angezogen.

1. Bremsmagnete für Gleichstrom.

Je nach Art der Schaltung unterscheidet man: Hauptstrommagnete und Nebenschlußmagnete.

Der **Hauptstrommagnet** liegt unmittelbar im Ankerstromkreis und erfordert daher keine besondere Zuleitung. Ein Hauptnachteil des Hauptstrommagneten ist der von ihm verursachte Spannungsabfall, auch ist er allen Schwankungen des Motorstromes unterworfen. Für Hubwerke wird er der geringen Stromaufnahme beim Anfahren wegen nur unter besonderen Umständen und mit besonderer Wicklung angeordnet. Bei Senkbremsschaltung ist seine Anwendung ausgeschlossen.

Der **Nebenschluß-Bremsmagnet** liegt parallel zum Ankerstromkreis. Seine Stromstärke und damit das Lüften der Bremse sind vom Motorstrom unabhängig. Der Nebenschlußmagnet findet allgemeine Anwendung, bei Senkbremsschaltung ist dieselbe Bedingung.

Die Größe des Bremsmagneten wird in kg/cm Hubarbeit angegeben. Bei Bemessung des Bremsgewichtes ist das Gewicht des Magnetankers, da es nutzbar wirkt, zu berücksichtigen. Nachstehende Tabelle¹⁾ gibt einen Anhaltspunkt für die Wahl der Bremsmagnete in Abhängigkeit von der Motorleistung.

1/2 bis 2 PS	...	30 ∞ 50 kg/cm.	16 bis 25 "	...	150 ∞ 200 kg cm,		
3 "	8 "	...	60 ∞ 80 "	26 "	40 "	...	250 ∞ 400 "
9 "	15 "	...	80 ∞ 120 "				

Hinsichtlich ihrer Bauart unterscheidet man Zugmagnete (Fig. 235) und Stoßmagnete. Letztere werden seltener angewendet.

Um einen Bremsstoß bei Loslassen des Gewichtes zu vermeiden, erhalten die Magnete Luftdämpfung. Diese wird auch bei Aufwärtsgang des Kernes angeordnet, um ein geräuschvolles Anschlagen des letzteren an der Hubbegrenzung zu vermeiden.

Tab. 16. Nebenschluß-Bremsmagnete der A. E. G. (Fig. 236.)

Für normalen Betrieb (Einschaltdauer 25% der Spieldauer)²⁾.

Größe	Zugkraft ³⁾ kg	Hub mm	Anker- gew. kg	Abmessungen in mm														
				a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	
				II	16	50	10	210	188	230	278	110	60	24	416	46	129	160
III	46	50	18	252	228	270	320	130	80	25	475	62	161	180	22	16	14	
IV	86	50	30								508							
V	93	80	35	282	266	300	350	150	100	25	568	55	166	193	22	16	17	
VI	95	100	48	320	306	350	410	180	120	28	660	69	196	211	24	19	17	
VII	130	150	66	366	340	400	470	220	150	40	855	80	230	235	30	25	25	

Für Zugkräfte von 9 bzw. 43 kg und einem Hub von 30 bzw. 40 mm kommen die Größen o und I a in Betracht.

Magnete mit konischem Kern (Fig. 236) ergeben einen großen Hub und eine gleichmäßigere Verteilung der Zugkraft während desselben. Der Knie-

¹⁾ Starkstromtechnik, 2. Aufl., 1912.

²⁾ Für schwere Betriebe (Einschaltdauer 40% der Spieldauer) ist die Zugkraft entsprechend geringer.

³⁾ Einschließlich Heben des Ankergewichtes.

hebelbremsmagnet (Fig. 54, S. 1088) bietet den gleichen Vorteil, auch ist die Anordnung eines Dämpfkolbens bei demselben unnötig.

Für angestrenzte Betriebe und Motoren mit 60 bzw. 90 Minuten-Leistung wird der Nebenschlußmagnet

mit Sparschalter (Fig. 237) ausgerüstet. Der Sparschalter S öffnet sich nach erfolgtem Anziehen selbsttätig und schaltet damit einen vorher kurzgeschlossenen Widerstand vor die Magnetspule, wodurch der Stromverbrauch während der folgenden Zeit der Einschaltung vermindert wird. Magnete mit Sparschalter finden für Fahrwerke mit langer Fahrtdauer, Verladebrücken u. dgl. Verwendung.

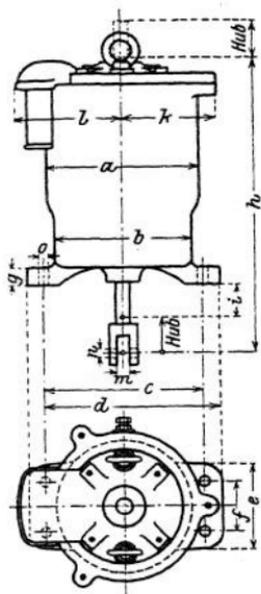


Fig. 235.

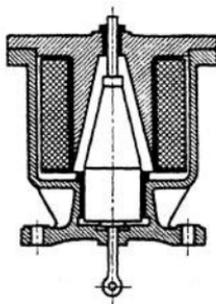


Fig. 236.

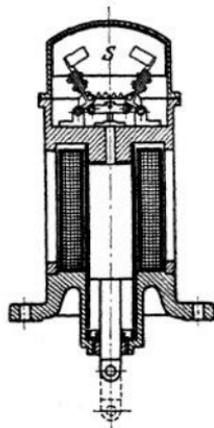


Fig. 237.

2. Bremsmagnete für Drehstrom liegen stets parallel zum Motorstromkreis. Die Stromaufnahme eines Drehstrom-Zugmagneten ist im Augenblick des Anhebens sehr groß und nimmt bei angezogenem Anker auf einen geringen Betrag ab. Infolge dieser Eigenschaft ist seine Anwendung besonders da angebracht, wo er längere Zeit eingeschaltet wird. Drehstrom-Zugmagnete haben einen schlechten Leistungsfaktor, ihre Erwärmung steigt mit der Zahl der Hübe. Sie werden wie die Gleichstrommagneten mit Dämpfkolben ausgeführt.

Bremslüftmotoren (Figur 238) werden bei Drehstrom an Stelle der Zugmagnete verwendet, da sie einen günstigen Stromverbrauch aufweisen und beim Einschalten keinen Spannungsabfall verursachen. Der Bremslüftmotor ist ein kleiner, asynchroner Drehstrommotor mit Kurzschlußanker. Beim Einschalten macht der Anker einige Umdrehungen, die durch ein Zahnradvorgelege und eine Kurbel auf den Hub übersetzt werden. Als

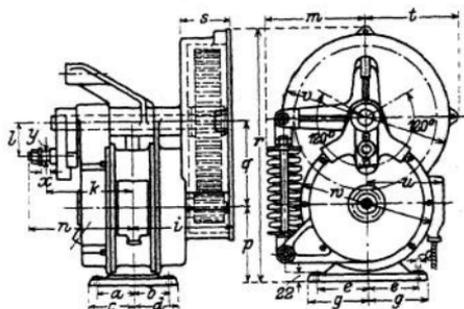


Fig. 238.

Hubbegrenzung dient eine Pufferfeder, auch ist, um ein Pendeln der Kurbel in der Mittelstellung zu vermeiden, eine mechanische Dämpfung angeordnet.

Tab. 17. Bremslüftmotoren für Drehstrom der Siemens-Schuckert-Werke (Fig. 239).

Größe	Hubarbeit kgcm		Zugkraft × Hub bei 45-Minuten- Leistung des Motors	Abmessungen in mm							
	bei 45-Minuten-Leistung des Motors	bei Dauerleistung		a	b	c	d	e	g	i	k
K 256 I	150	60	27 × 5,5 bis 13,5 × 11	80	80	97	97	83	100	170	133
„ II	250	80	42 × 6 „ 20 × 12,5	80	80	100	100	120	140	200	163
K 266 II	500	270	83 × 6 „ 40 × 12,5	80	200	100	225	120	140	355	160
„ III	750	500	125 × 6 „ 60 × 12,5	87	222	107	250	120	140	375	170
„ IV	1500	800	200 × 7,5 „ 90 × 16,5	81	238	112	268	140	165	415	190

Größe	Abmessungen in mm													
	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y
K 256 I	30/75	180	170	12	125	145	430	95	160	150	280	210	14	18
„ II	40/85	200	200	15	150	166	500	105	180	175	320	260	16	18
K 266 II	40/85	200	195	15	150	166	500	105	180	175	320	260	16	18
„ III	40/85	210	205	15	165	166	510	105	180	175	320	275	16	18
„ IV	50/110	240	235	17	180	230	650	125	240	195	450	320	20	20

Bremsmagnete für Einphasenstrom gleichen in ihrer Bauart und Wirkungsweise denen für Drehstrom. Für kleinere Leistungen werden sie als Zugmagnete, für größere als Bremslüftmotoren gebaut.

d) Sicherheitsvorrichtungen. 1. Gegen Überschreiten der Endstellungen. Bei Fahrwerken mit geringer Geschwindigkeit genügen, besonders der Führer selbst mitfährt, einfache Puffer. Für Fahrwerke mit größerer Fahrgeschwindigkeit und Hubwerke zur Begrenzung der höchsten Laststellung sind Endausschalter anzuhängen.

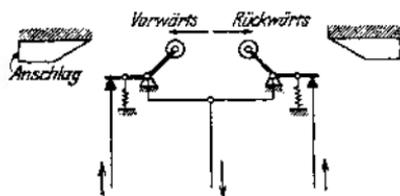


Fig. 239.

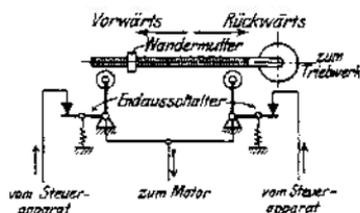


Fig. 240.

Bei der einfachen Endausschaltung ist ein ein- oder zweipoliger Endausschalter angeordnet. Die Betätigung desselben geschieht mittels eines in der Endstellung angeordneten Lineals (Fig. 239), auf welches die Kurbel des Endausschalters auflieft und den Strom unterbricht. Beim Zurückfahren bewirkt eine Feder das Wiedereinschalten.

Die Größe des erforderlichen Nachlaufweges hängt von der Geschwindigkeit und der Bremswirkung ab. Verwendung bei Fahrwerken. Bei Hubwerken nur zur Begrenzung der höchsten Hakenstellung.

Endausschaltung mit Umgehungsschaltung ermöglicht außer dem Zurückfahren ein Weiterfahren in derselben Richtung. Anwendung für Fahrwerke, bei denen die Endstellung häufig befahren wird, sowie für Hubwerke zur Begrenzung der höchsten Hakenstellung.

Während für Fahrwerke der Endausschalter in der Regel durch Kurbel und Lineal betätigt wird, bedient man sich bei Hubwerken meist der Spindelendauschalter (Fig. 240). Die Wandermutter einer vom Hubwerk ange-

triebenen Spindel legt einen dem Hub proportionalen Weg zurück, bewirkt in der Endstellung das Umstellen der Kurbel des Ausschalters und damit die Unterbrechung des Stromes. Die in Fig. 119, S. 1130 dargestellte 6-t-Winde ist mit Spindelendausschaltung ausgerüstet.

Die Stufenendausschaltung verhindert auf einer Strecke vor dem Endausschalter das Überschreiten einer bestimmten Geschwindigkeit.

2. Gegen Überschreiten der zulässigen Geschwindigkeit. Sie kommen bei Senkbremsschaltung (Gleichstrom), Sicherheitssenkochaltung und Gegenstrombremung (Drehstrom) nicht in Betracht, da diese ein Überschreiten der zulässigen Senkgeschwindigkeit ohnehin ausschließen.

Fliehkraft- (Schleuder-) Klingeln werden auf der Hubmotorwelle angeordnet und auf die höchst zulässige Drehzahl eingestellt. Wird letztere überschritten, so ertönt das Läutewerk und veranlaßt den Führer zum Umstellen des Kontrollers. Ist die Klingel nicht mit Sicherheit hörbar, so wird sie im Führerstand angeordnet und durch einen Hilfsstrom betätigt, der durch einen auf der Motorwelle angebrachten

Fliehkraftschalter geschlossen wird. Wird letzterer in den Stromkreis des Bremslüftmagneten gelegt, so wird die Bremse bei Überschreiten der zulässigen Geschwindigkeit betätigt und die Geschwindigkeit selbsttätig verringert. Ist die Drehzahl auf ihren normalen Wert gefallen, so schließt der Fliehkraftschalter den Strom des Bremsmagneten wieder, worauf die Bremse gelüftet wird. Die Haltebremse erhält dabei ein zweites Gewicht und einen zweiten Bremsmagneten. Beide werden so geschaltet, daß bei betriebsmäßigem Lüften der Haltebremse beide Magnete in Tätigkeit treten, während bei Überschreiten der höchsten Drehzahl nur der eine ausgeschaltet wird.

Sicherheitsschalter bewirken bei Überschreiten der höchstzulässigen Drehzahl ein Abschalten des Motors vom Netz und ein Einfallen der Haltebremse. Der Sicherheitsschalter wird neben dem Triebwerk angeordnet und von letzterem (meist vom Motor) angetrieben. War der Schalter betätigt, so muß er wieder von Hand zurückgestellt werden.

3. Zur Begrenzung der Stromstärke. Schmelzsicherungen für leichten Betrieb. Bei öfterem und raschem Einschalten und Überlastung des Motors (z. B. bei Hafen- und Hüttenwerkskränen) sind statt der Schmelzsicherungen Maximalausschalter anzuordnen. Letzterer unterbricht den Motorstromkreis sofort, während die Sicherung zum Durchschmelzen eine gewisse Zeit benötigt.

e) **Schaldbrett.** Es wird in der Regel im Führerstande angebracht und ist, um den freien Ausblick nach allen Seiten nicht zu behindern, so klein als möglich zu halten. Auf dem Schaldbrett werden der Hauptschalter, die Sicherungen und die zur Beleuchtung erforderlichen Teile, mitunter auch Strom- und Spannungsmesser untergebracht.

f) **Stromzuführung.** Die ortsfesten Krane erhalten ihren Strom entweder durch Freileitung oder Kabel zugeführt. Bei den feststehenden Drehkränen und Spills im Hafenbetrieb Zuführung des Stromes durch unterirdisches Kabel.

Krane mit geringer Fahrbewegung erhalten den Strom mittels eines beweglichen Kabels von Anschlußdosen aus zugeführt (z. B. fahrbare Dreh- und Portalkrane im Hafenbetrieb).

Ortsbewegliche Krane werden meist mit blanken Schleifleitungen ausgerüstet.

Man unterscheidet (z. B. bei einem Laufkran) zwischen der Längsschleifleitung, die dem Kran den Strom zuführt, und der Querschleifleitung, von der aus die auf der Winde angeordneten Motoren, Bremsmagnete u. dgl. ihren Strom entnehmen. Die Längsschleifleitung ist meist an der Wand eines Gebäudes oder an besonderen Masten angeordnet. Bei Gleich- und Einphasenstrom sind zwei, bei Drehstrom drei Leitungsdrähte erforderlich.

Die Zahl der Leitungsdrähte für die Querschleifleitung ist durch die auf der fahrbaren Winde befindlichen Stromverbraucher bedingt.

Der Querschnitt der Leitungsdrähte richtet sich nach der Stromstärke. In Rücksicht auf Festigkeit und Abnutzung sollten jedoch keine Leitungsdrähte unter 6 mm \varnothing verwendet werden. Baustoff der Leitungen: Hartgezogener Kupferdraht.

Die Schleifkontakte können je nach den örtlichen Verhältnissen nach Art von Fig. 241 auf dem Stromabnehmerarm übereinander oder nach Fig. 241 a nebeneinander angeordnet werden. Die Schleifleitungen selbst sind zur Vermeidung des Durchhängens der Leitung in Abständen von 8 bis 10 m durch Gabel- oder Hakenösen abzustützen.

Für Krane mit größerer Fahrgeschwindigkeit werden meist Rollenstromabnehmer (Fig. 242) bevorzugt.

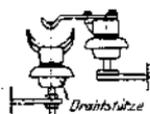


Fig. 241.

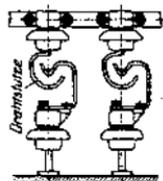


Fig. 241 a.

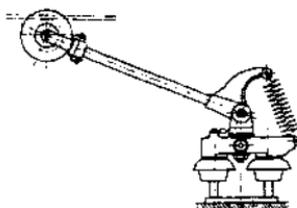


Fig. 242.

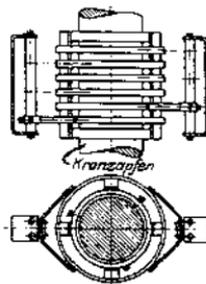


Fig. 243.

Die blanken Schleifleitungen sind, soweit sie im Bereiche der Bedienungsmannschaft des Kranes liegen, durch Eisengitter u. dgl. gegen Berührung zu sichern.

Die Stromabnahme bei den Drehkränen geschieht durch Ringschleifkontakte (Fig. 243). Bei diesen sind mehrere isolierte Schleifringe auf dem festen Kranzapfen übereinander angeordnet, von denen der drehbare Teil seinen Strom durch Bürsten oder Kontaktklötze, die sich federnd gegen die Ringe legen, entnimmt.

Die Stromzuführung zu den Motoren, Bremsmagneten u. dgl. geschieht auf der Winde oder dem Kran durch Panzerkabel. Dieses schmiegt sich leicht an die Konstruktionsteile an, isoliert gut und sichert gegen mechanische Beschädigungen.

F. Aufzüge.

Der Bau derselben hat für Preußen gemäß der „Polizeiverordnung über die Einrichtung und den Betrieb von Aufzügen (Fahrstühlen)“¹⁾ zu erfolgen.

Für die übrigen Bundesstaaten gelten zurzeit noch besondere Vorschriften, die von der für Preußen maßgebenden Verordnung mehr oder weniger abweichen.

Der preußischen Polizeiverordnung sind alle Aufzugseinrichtungen unterworfen, deren Fahrkörbe, Kammern oder Plattformen zwischen festen Führungen bewegt werden, sofern ihre Hubhöhe 2 m nicht übersteigt. Ausgenommen hiervon sind Aufzüge in den der Bergbehörde unterstellten Betrieben, Versenkvorrichtungen in Theatern, Paternosterwerke für Lasten und Schiffshebwerke.

Einteilung der Aufzüge.

1. Personenaufzüge und 2. Lastenaufzüge. Zu ersteren gehören auch die Lastenaufzüge mit Führerbegleitung.

¹⁾ Erläutert von H. Jäger. Berlin 1910. Carl Heymanns Verlag.

Je nach der Art des Antriebes kann man unterscheiden: Handaufzüge, Transmissionsaufzüge, Druckwasser-(hydraulische) Aufzüge und elektrische Aufzüge.

Andere Antriebsarten, wie z. B. Dampfantrieb, kommen für den eigentlichen Aufzugsbau nicht in Betracht. Fördermaschinen, Schrägaufzüge, Gichtaufzüge u. dgl. fallen nicht in diesen Rahmen, und hierfür wird auf die entsprechenden Sonderwerke verwiesen.

Bei **Wahl der Betriebskraft** sind Verwendungszweck des Aufzuges, örtliche Verhältnisse, Tragfähigkeit, sowie Anlage- und Betriebskosten ausschlaggebend.

I. Handaufzüge

erfordern nur geringe Anschaffungskosten und kommen zum Heben von Lasten bis etwa 500 kg, und zwar nur bei geringer Förderhöhe und seltener Benutzung, in Betracht.

Bei kleineren Aufzügen von etwa 25 kg Tragfähigkeit, für Speisen, Akten u. dgl., ist bei öfterer Benutzung, insbesondere bei größerem Hub, der elektrische Antrieb unbedingt vorzuziehen.

Wirkungsgrad eines Handaufzugs im Durchschnitt: $\eta = \infty 0,50$.

Durchschnittliche Arbeitsleistung eines Mannes: 8 bis 10 mkg/sek.

Als Huborgan kommt das Drahtseil, mitunter auch das Hanfseil in Betracht.

Für Aufzüge bis etwa 250 kg ein Tragsseil. Bei höherer Tragfähigkeit sind zur Erzielung der an den Lastseilscheiben erforderlichen Umfangsreibung zwei Seile erforderlich. Beide werden zweckmäßig zu einem Rollenzuge vereinigt, wobei die Ausgleichsrolle das Gegengewicht trägt.

Der Antrieb kann je nach den örtlichen Verhältnissen durch Haspelrad (Fig. 244) oder durch Kurbel erfolgen.

Zugkraft am Haspelseil bei kleiner Förderhöhe und mittlerer Geschwindigkeit $\infty 15$ bis 20 kg, bei großer Hubhöhe und größerer Haspelgeschwindigkeit $\infty 10$ kg.

Kurbelantrieb kommt nur für geringe Förderhöhen (etwa vom Keller zum Erdgeschoß) in Betracht. Der Hauptnachteil des Kurbelantriebes ist der, daß die Bedienung des Aufzuges nur von einer Stelle aus erfolgen kann.

Kurbel- und Haspelradantrieb s. auch Einzelteile der Hebesmaschinen, S. 1080.

Als Übersetzung des Windwerks dienen meist ein oder zwei Stirnrädervorgelege. Mitunter ordnet man zum schnelleren Heben kleinerer Lasten umschaltbare Vorgelege an.

Die Bremsvorrichtung kann in einer geräuschlosen Sperrrad- oder Lösungsbremse bestehen, die durch Ziehen an einem Seil betätigt wird (Fig. 244). Um die Senkgeschwindigkeit innerhalb der zulässigen Grenzen zu halten, kann nebenbei eine Geschwindigkeits-(Fliehkraft-)Bremse angeordnet werden.

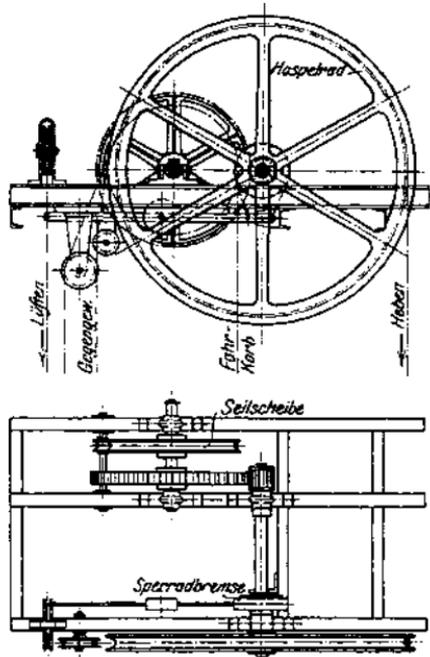


Fig. 244.

Das Gewicht des Fahrkorbes wird durch ein Gegengewicht ausgeglichen, das so zu bemessen ist, daß der Fahrkorb bei Lüften der Bremse noch selbsttätig herabgeht.

Für die Sicherheitsvorrichtungen gelten die diesbezüglichen Polizeivorschriften.

II. Transmissions-Aufzüge

sind dann angebracht, wenn bereits eine Transmission vorhanden und von der Anwendung des elektrischen Antriebes abgesehen werden soll.

Sie werden fast ausschließlich zur Förderung von Lasten, unter Umständen mit Führerbegleitung, selten jedoch für Personenbeförderung benutzt. Die wesentlichen Nachteile der Transmissionsaufzüge sind die Leerlaufarbeit während des Stillstandes des Aufzuges, der starke Riemenverschleiß, sowie die höheren Betriebskosten dem elektrischen Antrieb gegenüber.

Die Tragfähigkeit der Transmissionsaufzüge beträgt im allgemeinen für Geschäftshäuser und Fabrikbetriebe 250 bis 1500 kg. In selteneren Fällen kommen auch höhere Tragfähigkeiten in Betracht.

Geschwindigkeit für Lastenförderung bei selbsttätigem Anhalten $v = 0,1$ bis $0,3$ m/sek, bei Bedienung durch einen Führer mehr.

Wirkungsgrad des Aufzuges $\eta = \infty 0,30$ bis $0,40$.

Huborgan ausschließlich Drahtseil.

Der Antrieb erfolgt stets durch offenen und gekreuzten Riemen, von denen einer den Aufgang, der andere den Niedergang betätigt.

Die Aufstellung der Aufzugsmaschine richtet sich nach der Örtlichkeit und kann sowohl stehend als auch hängend erfolgen.

Als Übersetzung dient in der Regel ein ein- oder zweigängiges Schneckengetriebe, seltener eine mehrfache Stirnräderübersetzung.

Die Bremse sitzt auf der Schneckenwelle und ist durch ein Gewicht belastet. Sie wird gelüftet, wenn der Riemenausrücker auf Fahrtstellung kommt.

Die Steuerung geschieht, je nachdem Führerbegleitung vorhanden oder nicht, durch ein innerhalb oder außerhalb des Schachtes befindliches Steuerseil oder Gestänge. Dieses verdreht die Steuerscheibe dem jeweiligen Sinne gemäß und betätigt so die Riemenführung¹⁾.

Die Endausschaltung in der höchsten und tiefsten Stellung des Fahrkorbes kann durch am Steuergestänge angebrachte Schellen oder Knaggen erfolgen. An der Winde selbst ist eine weitere Sicherheitsvorrichtung gegen Überschreiten der Grenzstellungen vorzusehen.

Über Fangvorrichtungen s. S. 1217, Schlaffseil-Ausrückung S. 1222.

Bei Aufzügen mit Führerbegleitung muß das im Innern des Fahrkorbes befindliche Steuergerüst derart von den Türverschlüssen abhängig sein, daß die Steuerung nicht betätigt werden kann, wenn eine Tür offen steht. Auch müssen die Türen so lange verriegelt sein, bis der Fahrkorb genau in das jeweilige Stockwerk eingefahren ist.

Ferner ist an jedem Aufzug ein Zeigerapparat anzuordnen, der durch ein kleines Drahtseil bewegt wird und die jeweilige Stellung des Fahrkorbes an allen Schachtzugängen anzeigt.

Transmissionsaufzüge, welche durch einen ständig laufenden Elektromotor (mit Zwischenvorgelege) angetrieben werden, bezeichnet man auch als indirekt elektrische, welche Bezeichnung jedoch nicht als charakteristisch anzusehen ist.

III. Druckwasser-(hydraulische) Aufzüge.

Das Druckwasser kann einer vorhandenen Wasserleitung entnommen werden, und zwar unter Anwendung eines Druckwindkessels oder eines hochgestellten Behälters. Bei öfterer Benutzung der Aufzüge besondere Druckerzeugung mittels (elektrisch betriebener) Pumpen und Anordnung eines oberen und unteren Behälters, sowie eines Druckwindkessels (Pressung 3 bis 8 max 10 Atm.) oder eines gewichtbelasteten Kraftsammlers (Akkumulators) mit einem Betriebsdruck von 25 bis 75, im Mittel 50 Atm.

¹⁾ Riemenumsteuerungen siehe Bethmann, Aufzüge, S. 266, Braunschweig 1913.

1. Unmittelbar wirkende Druckwasser-Aufzüge (Fig. 245).

Sie bestehen im wesentlichen aus einem in die Erde versenkten, gußeisernen Zylinder, in dem sich unter dem Einfluß des Druckwassers ein Kolben bewegt, der an seinem oberen Ende die Fahrbahn trägt.

Übliche Förderhöhe bis etwa 6 m. Fahrgeschwindigkeit $v = \infty 0,3$ bis $0,5$ m/sek. Wirkungsgrad $\eta = \infty 0,60$ bis $0,70$.

Bedeutet Q die Nutzlast, G das Eigengewicht von Fahrkorb und Kolben, G_g das Gegengewicht, W_r den gesamten Reibungswiderstand, P_b den Beschleunigungsdruck in kg und p den Wasserdruck in kg/cm^2 , so beträgt der erforderliche Kolbendruck

$$P = D^2 \frac{\pi}{4} \cdot p = Q + G - G_g + W_r + P_b \dots \text{kg.}$$

Hieraus Ermittlung des Kolbendurchmessers D .

Die Bedingung für das selbsttätige Senken des unbelasteten Fahrkorbes lautet:

$$G - G_g \geq W_r + D^2 \frac{\pi}{4} \cdot p_0,$$

wenn p_0 den Wasserdruck unter dem sinkenden Kolben bedeutet.

Ausführung des Kolbens bis 3 m Förderhöhe in Gußeisen, darüber hinaus in Schmiedeeisen. Der Kolben wird auf Knickung beansprucht und ist für zehnfache Knicksicherheit zu rechnen. Beanspruchung auf Knickung wird vermieden, wenn der Bodenverschluß fortgelassen wird und das Druckwasser im Innern des Kolbens bis zur Lastplatte steigen kann.

Zwischen Kolben und Lastplatte können Notketten angebracht werden, die bei einem Bruch der Verbindung von Fahrkorb und Kolben als Sicherheitsorgan dienen.

Dichtung zwischen Zylinder und Kolben mittels Ledermanschette.

Die sauber bearbeiteten Führungsschienen können prismatischen oder runden Querschnitt erhalten. Die Führungen am Fahrkorb werden mit Rotguß gefüttert und nachstellbar oder mit Federdruck ausgeführt.

Bei größeren Förderhöhen ist ein veränderliches Gegengewicht erforderlich, das beim Aufgang des Kolbens zunimmt, da der Wasserdruck der abnehmenden Druckhöhe wegen sinkt.

Die Firma Flohr benutzt als veränderliches Gegengewicht einen Stahldrahtgurt, der an einem Ende das unveränderliche Gegengewicht trägt und mit seinem anderen am Fahrkorb angreift. Breite des Stahlgurtes 300 mm. Gewicht desselben in kg/lfdm gleich dem Auftrieb des Kolbens für $\frac{1}{2}$ m Eintauchtiefe. Der Drahtgurt bietet der Anwendung von Ketten (Edoux) gegenüber ruhigen und geräuschlosen Gang. Bei dem Aufzugssystem Cramer ist ein Gegengewicht nicht vorhanden. Der Ausgleich der toten Last und des veränderlichen Auftriebes geschieht durch das Gewicht eines an der Steuerung angeordneten Gegenkolbens¹⁾.

Die Steuerung der unmittelbar wirkenden Druckwasseraufzüge geschieht durch einen federbelasteten Flachschieber oder einen Kolbenschieber, der beim Aufwärtsgang das Druckwasser in den Zylinder eintreten läßt, bei Abwärtsgang dem Wasser den Austritt in die Abflußleitung freigibt und bei Haltstellung des Aufzuges den Ein- und Austrittskanal abschließt. Statt des Schiebers finden auch Ventile als Steuerorgan Verwendung.

Die unmittelbar wirkenden Druckwasseraufzüge bedürfen den Polizeivorschriften gemäß keiner Fangvorrichtung, da ein freies Fallen des Fahrkorbes ausgeschlossen ist. Im Falle des Bruches der Wasserzuleitung muß jedoch eine

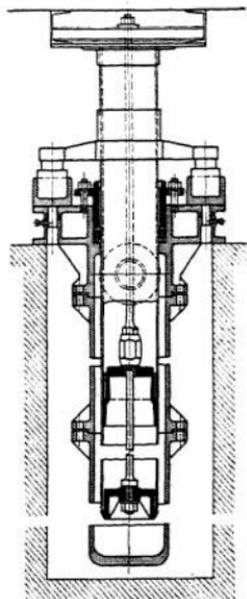


Fig. 245.

¹⁾ Siehe auch Hintz, Aufzugstechnik.

Vorrichtung vorhanden sein, die ein Herabgehen des Fahrkorbes mit größerer Geschwindigkeit als 1,5 m/sek verhindert.

Trotzdem die unmittelbar wirkenden Druckwasseraufzüge ein hohes Maß von Sicherheit gewähren, sind sie durch den wirtschaftlich günstigeren elektrischen Antrieb verdrängt worden.

2. Mittelbar wirkende Druckwasseraufzüge.

Bei diesen legt der Kolben — im Gegensatz zu den unmittelbar wirkenden Aufzügen — nur einen Teil des Förderweges zurück. Zwischen Kraft und Last

ist daher eine entsprechende Übersetzung erforderlich, die durch einen Rollenzug oder ein Zahnstangengetriebe bewirkt werden kann.

Die unmittelbar wirkenden Aufzüge sind für größere Förderhöhen geeignet und haben den Vorzug, daß die hydraulische Maschine unabhängig und an jeder Stelle des Fahrstuhlbereiches aufgestellt werden kann. Geschwindigkeit bis 1,5 m/sek. Wirkungsgrad $\eta = \infty$ 0,55 bis 0,65.

Fig. 246 zeigt eine stehend angeordnete hydraulische Aufzugmaschine mit umgekehrtem Faktorenflaschenzug als Übersetzung¹⁾.

Das Wasser tritt hierbei aus dem auf dem Dachgeschoß befindlichen Behälter in den oberen Raum des Druckzylinders ein. Die eigentliche Druckhöhe ist gleich dem Höhenunterschied des Druckwasserbehälters und der jeweiligen Kolbenstellung, also in der höchsten Stellung des Fahrkorbes am geringsten. Trotzdem wird jedoch die ganze Druckhöhe ausgenutzt, da die zwischen der unteren Kolbenfläche und dem Abfluß vorhandene Wassersäule saugend wirkt. Um ein Abreißen der Saugwassersäule zu vermeiden, darf der Höhenunterschied zwischen dem Abfluß und der höchsten Kolbenstellung nur 10 m betragen.

Für Förderhöhen bis 20 m genügt eine lose Rolle (Übersetzung 1 : 2), für größere Förderhöhen ist der Rollenzug mit entsprechend größerer Übersetzung auszurüsten.

Das Eigengewicht des Fahrkorbes wird durch den Kolben, die Kolbenstangen und das lose Rollensystem so weit ausgeglichen, daß der unbelastete Fahrkorb noch selbsttätig abwärts geht. Ein etwa noch erforderliches Gegengewicht kann in der Gabel der losen Rolle angeordnet werden.

Das Druckwasser tritt stets oberhalb des Kolbens ein, bewegt diesen abwärts und den Fahrstuhl mit einer der Übersetzung entsprechenden größeren Geschwindigkeit aufwärts. Beim Abwärtsgang werden die obere und untere Kolbensseite verbunden, und das Übergewicht des Fahrkorbes zieht den Kolben mit Zubehör hoch. Die Senkgeschwindigkeit wird durch die Steuerung geregelt.

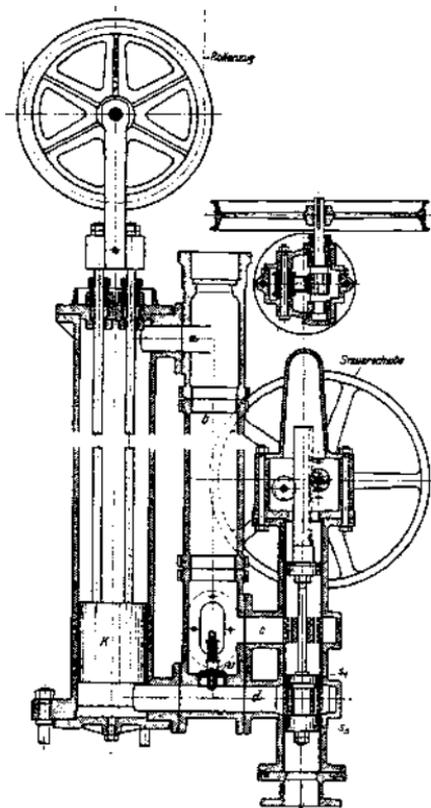


Fig. 246.

¹⁾ Carl Flohr, Berlin.

Die beiden Kolbenstangen werden nur auf Zug beansprucht, können daher entsprechend leicht gehalten werden.

Die Wirkungsweise der Steuerung (Fig. 246) ist folgende: Das als Kolbenschieber ausgebildete Steuerorgan wird durch Drehen der Steuerscheibe mittels eines Zahnstangengetriebes auf- oder abwärts bewegt. Bei der in der Figur gezeichneten Stellung der Steuerscheiben s_1 und s_2 ist der Austrittskanal geschlossen; der Aufzug steht still. Wird der Kolbenschieber aufwärts bewegt, so wird der Wasseraustritt geöffnet, das Druckwasser wirkt, und der Fahrkorb bewegt sich aufwärts. Bewegt man den Kolbenschieber so weit abwärts, daß die Scheibe s_1 , die vorhergehende Lage der Scheibe s_2 einnimmt, so sind der obere und untere Zylinderraum durch a , b , c und d miteinander verbunden. Der Fahrkorb bewegt sich abwärts.

Um Stöße beim Anhalten des Aufzuges von letzterem fernzuhalten, ist ein Rückschlagventil v vorgesehen.

In Fig. 247 ist eine mittelbar wirkende Aufzugsmaschine mit Zahnstangengetriebe als Übersetzung dargestellt.

Der Kolben ist mit zwei in Führungen beweglichen Zahnstangen Z gelenkig verbunden. Letzteresind um die halbe Teilung zueinander versetzt, übertragen daher je die Hälfte der Kolbenkraft. Der Auf- und Abwärtsbewegung des Kolbens bzw. der Zahnstangen entspricht mittels der Zahnräder R eine Drehung der auf der gleichen Welle sitzenden Trommel. Bei Aufwärtsgang des Kolbens wird der Fahrkorb gehoben. Das Senken des letzteren geschieht durch die toten Massen des Fahrkorbes, wobei sich der Kolben abwärts bewegt und das Wasser unter demselben austritt.

Der Wasserzufluß geschieht durch ein Rückschlagventil V .

Als Steuerorgan dient ein Kolbenschieber K , der durch einen Hebel H eingestellt wird. Letzteres geschieht durch ein Gestänge, das durch die Steuerscheibe und das Zahnstangengetriebe z auf und ab bewegt wird.

Das Gewicht des Gestänges ist durch ein an der Steuerwelle angreifendes Gegengewicht G ausgeglichen.

Die auf der Steuerstange befestigten Scheiben s_1 und s_2 bewirken durch Anschlag am Hebel h die Anrückung der Steuerung in den Grenzstellungen des Aufzuges.

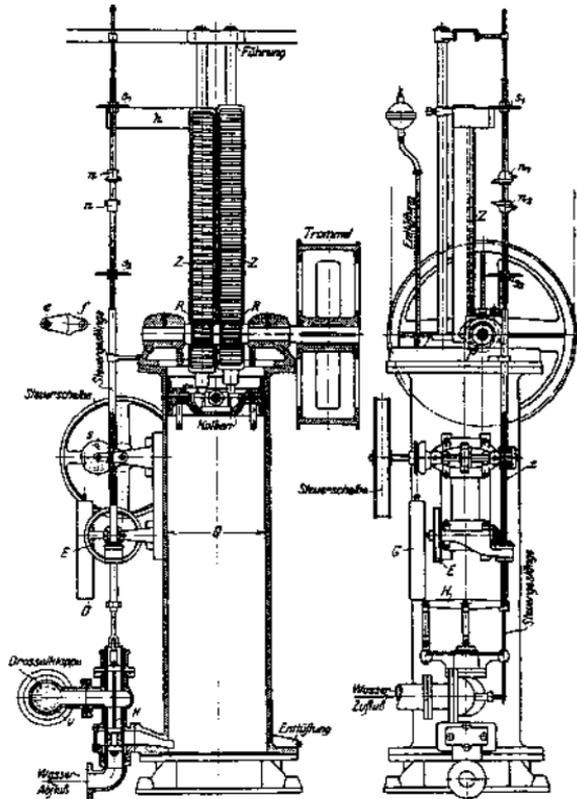


Fig. 247.

Die Einstellung auf das jeweilige Stockwerk geschieht durch die mittels eines Steuerseiles drehbare Einstellscheibe E . Diese dreht mittels eines konischen Getriebes das Steuergestänge und damit die Nocken n so weit, daß sie in die Richtung des Hebels h fallen, an demselben anschlagen und die Ausrückung bewirken. Ein selbsttätiges Umsteuern wird durch die Sperrsegmente e und f vermieden.

IV. Elektrische Aufzüge.¹⁾

Die bereits auf S. 1115 erwähnten Vorzüge des elektrischen Antriebes treffen auch für den Aufzugsbau in vollem Maße zu. Man stattet daher gegenwärtig die Aufzüge, wenn irgend angängig, mit elektrischem Antrieb aus.

Stromarten: Gleichstrom, Drehstrom und einphasiger Wechselstrom.

Die elektrischen Aufzüge sind als reine Lastenaufzüge, solche mit Führerbegleitung und reine Personenaufzüge bei beliebiger Tragfähigkeit und Hubhöhe gleich geeignet.

Als Huborgan bedient man sich fast ausschließlich des Drahtseiles.

1. Lastenaufzüge.

Reine Lastenaufzüge werden für Tragfähigkeiten von 500 bis 1500 kg und mehr gebaut. Das Mitfahren von Personen ist gesetzlich verboten. Fahrgeschwindigkeit je nach Tragfähigkeit $v = \infty 0,1$ bis $0,7$ m/sek.

Als Huborgan ist bei den reinen Lastenaufzügen — im Gegensatz zu den Personenaufzügen — nur ein Tragseil vorgeschrieben. Die neueren gesetzlichen Bestimmungen haben jedoch das Bestreben, auch bei Lastenaufzügen die Anwendung zweier Seile zu fördern.

Für genaues Einstellen des Fahrkorbes, wie dies bei Förderung von Wagen erforderlich wird, ist das Drahtseil seiner Elastizität wegen weniger geeignet. Man benutzt daher bei kleineren Hubhöhen und Geschwindigkeiten bis $\infty 0,3$ m/sek die Gallsche Kette oder bedient sich des Spindeltriebes.

Die Steuerung der Lastenaufzüge liegt außerhalb des Aufzuges. Die Betätigung geschieht bei mechanischer Steuerung durch ein Seil oder Gestänge, das in allen Stockwerken zugänglich sein muß.

Auch ist ein Zeigerapparat vorzusehen, der die jeweilige Stellung des Fahrkorbes angibt.

Als Führung für die Lastenaufzüge sind eiserne Straßen zugelassen.

Über Sicherheitsvorrichtungen s. S. 1217.

Für kleinere Lasten (Akten, Speisen u. dgl.) läßt man bei einer Tragfähigkeit von 25 bis 100 kg eine größte Hubgeschwindigkeit $v = \infty 0,5$ m/sek zu. Hierbei kann ein $\frac{1}{2}$ bis 1 PS-Hauptstrommotor Verwendung finden, der bei kleineren Tragfähigkeiten ohne, bei größeren mit Widerstand angelassen wird. Die Steuerung ist in der Regel eine einfache Druckknopfsteuerung.

Der Aufzug wird in Handhöhe (etwa 700 mm) bedient und ist nicht betretbar.

Vom Einbau einer Fangvorrichtung kann Abstand genommen werden.

Doppelaufzüge sind dann zweckmäßig, wenn nur eine obere und untere Ladestelle vorhanden sind. Bei dieser Aufzugsart gleicht ein Fahrkorb den andern aus. Gegengewichte sind daher nicht erforderlich. Für die Bemessung des Antriebmotors kommt nur die Nutzlast in Betracht.

Lastenaufzüge mit Schraubenspindel finden als Plateaufaufzüge für kleinere Hubhöhen insbesondere auf Bahnhöfen Verwendung. Sie dienen alsdann zum Fördern der Gepäckwagen aus den Kellerräumen zum Bahnsteig. Der Schacht ist meist durch einen mit Scharnieren ausgerüsteten Blechbelag abgedeckt, der durch einen am Fahrkorb angebrachten Stoßbügel geöffnet wird.

Der Motor arbeitet mittels elastischer Kupplung auf ein wagerechtes als Mutter ausgebildetes Schneckenrad aus Phosphorbronze. Letzteres bewegt

¹⁾ S. auch Z. f. Dampf- u. Masch.-Betr. 1914, S. 97: Schiffke, Gesichtspunkte für die Konstr. mod. Aufzüge. S. 102: Ritz, Elektr. Steuerungen an Aufzügen.

die mit der Fahrbühne fest verbundene, stählerne Schraubenspinde auf-, bzw. abwärts. In Rücksicht auf schnellen Gang und guten Wirkungsgrad Spindel steil(drei- oder vier)gängig.

Auf der Motorwelle ist eine gewichtbelastete, elektromagnetisch gelüftete Backenbremse anzuordnen.

Anordnung von Gegengewichten, deren Seile (oder Ketten) unmittelbar an der Fahrbühne angreifen.

An dieser Stelle sind auch die sog. Waggonversenkvorrichtungen zu erwähnen. Bei diesen wird ein Eisenbahnwagen, der be- oder entladen werden soll, auf die Plattform des Aufzuges gefahren und so weit gesenkt, bis die Ladefläche des Wagens mit dem Fußboden bündig wird, wodurch ein bequemes Beladen des Wagens, sowie ein Befahren mit Handkarren ermöglicht wird. Auch hier ist Spindeltrieb des geringen Hubes wegen vorteilhaft.

Lastenaufzüge mit Führerbegleitung sind den gleichen gesetzlichen Bestimmungen unterworfen wie die Personenaufzüge.

Sie sind dann angebracht, wenn viele Stockwerke zu bedienen sind und genaues Einfahren in das jeweilige Stockwerk verlangt wird.

Für Geschwindigkeiten bis 0,7 m/sek werden diese Aufzüge mit Seilsteuerung ausgerüstet. Bei größerer Fahrgeschwindigkeit mechanische oder elektrische Rad- oder Hebelsteuerung. Steuerung der Aufzüge s. S. 1213.

2. Personenaufzüge.

Gewicht einer Person 75 kg; Tragfähigkeit bei 3 bis 20 Personen 225 bis 1500 kg. Fahrgeschwindigkeit $v = 0,5$ bis 1,5 m/sek.

Höhere Fahrgeschwindigkeiten sind nur mit Genehmigung der Behörde zulässig¹⁾.

Kleinsten Flächenraum der Kabine für eine Person 0,25 m².

Die Bedienung der Steuerung geschieht in stark besuchten Hotels, Waren- und Geschäftshäusern durch einen besonderen, geschulten Führer. Bei Aufzügen ohne regeren Verkehr (wie in Privathäusern u. dgl.) wird die Steuerung durch die Fahrgäste selbst bedient (Selbstfahrer). Für Aufzüge ohne Führerbegleitung ist die Geschwindigkeit geringer zu wählen, als für solche mit Führerbegleitung.

Von den Personenaufzügen wird ein sanfter, stoßfreier und

¹⁾ In großen amerikanischen Gebäuden mit vielen Stockwerken sind Geschwindigkeiten von 3 m/sek üblich.

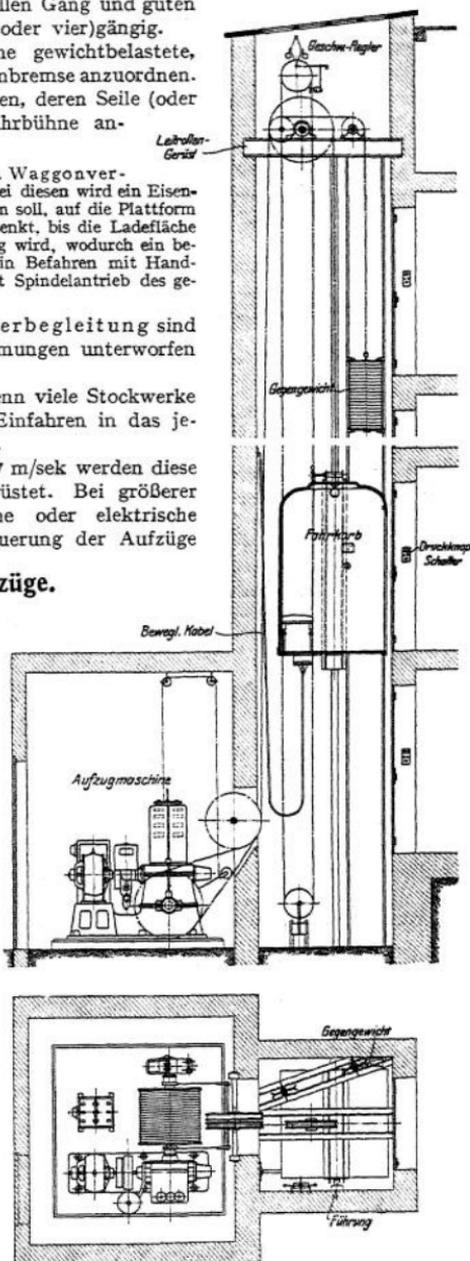


Fig. 248.

geräuschloser Gang, sowie ein genaues Anhalten des Fahrkorbes an der Schachttüre verlangt.

Für Personenaufzüge sind gesetzlich zwei Tragselle vorgeschrieben.

Sicherheitsvorrichtungen s. S. 1217.

Die Anordnung des Aufzuges richtet sich nach den örtlichen Verhältnissen. Bei Neuanlage eines Aufzuges ist in erster Linie auf bequeme Lage der Zugänge Rücksicht zu nehmen.

Für Personenaufzüge kommen folgende Aufstellungsarten in Betracht.

Aufzüge in gemauertem Schacht werden meist in einer Wand des Treppenhauses angeordnet.

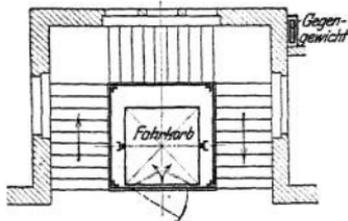


Fig. 249.

Fig. 248 zeigt die normale Ausführung eines elektrisch betriebenen Personenaufzuges mit Druckknopfsteuerung von Carl Flohr, Berlin.

Die große Mehrzahl der Personenaufzüge gelangt jedoch unmittelbar im Treppenhause zur Aufstellung (Fig. 249). Das Gerüst wird im Treppenaue eingebaut und ist, soweit es für Personen zugänglich, mit einem 2 m hohen Drahtgeflecht zu versehen.

In besonderen Fällen, hauptsächlich, wenn der Aufzug nachträglich eingebaut wird, kann er außerhalb des Hauses an der Gebäudewand aufgestellt werden. Das Gerüst ist nach den gesetzlichen Vorschriften in einer Höhe von 2,2 m vom Fußboden aus mit Drahtgeflecht zu verkleiden.

Mitunter werden des fertiggestellten Gebäudes wegen oft abnormale Aufzugskonstruktionen erforderlich, die einen großen Arbeits- und Kostenaufwand bedingen. Es ist daher bei Projektierung eines Gebäudes dringend zu empfehlen, eine Aufzugsfirma zu Rate zu ziehen, damit der für einen normalen Aufzug nötige Schacht richtig angeordnet und die erforderlichen Maße innegehalten werden.

3. Elektrische Aufzugsmaschine, Gegengewicht, Fahrkorb und Schacht.

Die Aufstellung der Aufzugsmaschine erfolgt zweckmäßig im Keller des Gebäudes. Gestatten dies die örtlichen Verhältnisse nicht, dann kann dieselbe auch in irgendeinem Stockwerk oder über dem Schacht auf dem Tragrollengerüst angeordnet werden.

Die Aufzugsmaschine wird in der Regel als Trommelwinde mit Schneckenradübersetzung zwischen Motor und Trommel ausgeführt (Fig. 250).

Bei sehr großem Hub Ausführung mit Treibscheibe und Leitrolle. Alsdann unmittelbarer Antrieb der Treibscheibe durch einen langsam laufenden Motor (übersetzungslose Aufzugsmaschine)¹⁾.

In besonderen Fällen und bei geringem Hub Ausbildung der Aufzugswinde als Spindelmaschine.

Fig. 250 zeigt eine normale Aufzugswinde für einen Personenaufzug mit elektrischer Seilsteuerung (Carl Flohr, Berlin).

Der Motor arbeitet mittels elastischer Kupplung und eines ein- oder zweigängigen Schneckengetriebes auf die Trommelwelle. Ausgeführte Übersetzungen und Wirkungsgrade des Schneckengetriebes s. S. 1210.

Die Bremse ist auf der elastischen Kupplung angeordnet und als doppelte (mit Leder gefütterte) Backenbremse ausgebildet. Sie ist durch Federn belastet und wird mittels einer auf der Steuerwelle sitzenden Keilscheibe gelüftet.

Der Umkehranlasser ist bei Seilsteuerung auf dem Obertheil des Schneckengehäuses angeordnet und wird von der Steuerwelle aus durch eine Gallsche Kette betätigt. Bei Bruch oder unzulässiger Dehnung der Tragorgane wird der Anlasser durch die Seilaustrückung (s. S. 1222) abgestellt. Werden die Endstellungen des Aufzuges überfahren, so bewirkt ein auf der Trommelwelle sitzender Endausschalter (s. S. 1222) das Abstellen des Steuerapparates.

Als zweiter Endausschalter dient ein Grenzscharter, der unmittelbar den Strom unterbricht.

¹⁾ Z. Ver. deutsch. Ing. 1914, S. 253.

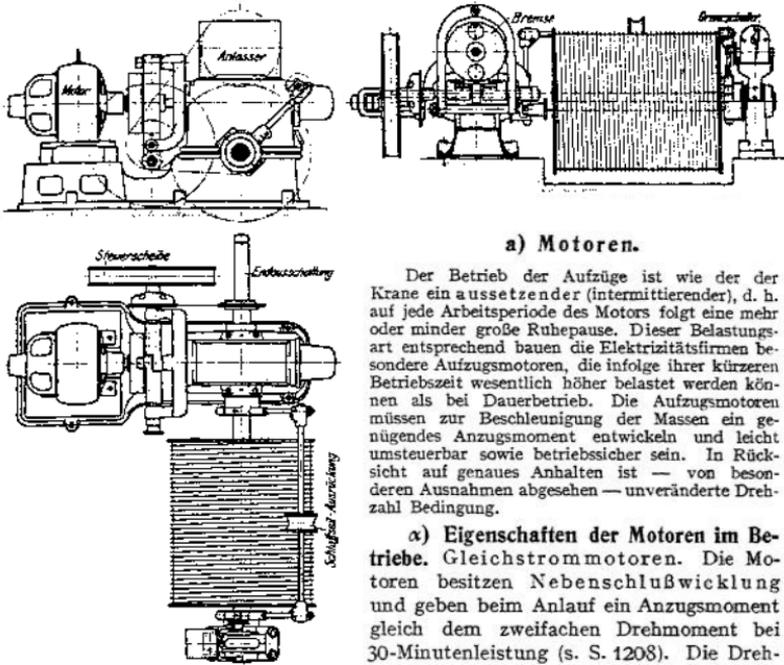


Fig. 250.

der Drehzahl zwischen Vollast und Leerlauf wird um so geringer, je schnellerlaufende Motoren verwendet werden.

Da bei höheren Fahrgeschwindigkeiten ein Abbremsen der in Bewegung befindlichen Massen, sowie ein genaues Anhalten des Aufzuges schwer erreichbar ist, verwendet man bei Geschwindigkeiten über 0,6 m/sek Nebenschlußmotoren mit regelbarer Drehzahl. Die Verminderung der Drehzahl vor dem Anhalten geschieht durch Verstärken des Feldes infolge Verringern des Widerstandes. Die Geschwindigkeit läßt sich um so mehr herabsetzen, je größer die Fahrgeschwindigkeit des Aufzuges ist. Bei Fahrgeschwindigkeiten zwischen 0,6 und 1 m/sek ist die Drehzahl des Motors im Verhältnis 1 : 2, bei Geschwindigkeiten zwischen 1 und 1,5 m/sek im Verhältnis 1 : 3 regelbar. Anzugsmoment etwa gleich dem doppelten Drehmoment der Nennleistung.

Hauptstrommotoren sind trotz ihres hohen Anzugsmomentes für den Aufzugsbau nicht geeignet, da sie ihre Drehzahl der jeweiligen Belastung entsprechend einstellen und bei ungenügender Belastung ein Durchgehen des Motors nicht ganz ausgeschlossen ist. Nur bei kleineren Lastenaufzügen (für Akten, Speisen u. dgl.) werden Hauptstrommotoren für Leistungen bis 1 PS angewendet.

Kompoundmotoren besitzen außer der Nebenschlußwicklung noch eine Hauptstromwicklung, die während des Anlaufes ein entsprechend größeres Anzugsmoment ermöglicht. Verwendung der Compoundmotoren nur in besonderen Fällen, wenn schwere Massen zu beschleunigen sind und auf schnelles Anfahren Wert gelegt wird.

Drehstrommotoren. Das Anzugsmoment beträgt bei voller Klemmenspannung bei Motoren mit Schleifringanker etwa das 2fache, bei solchen mit Kurzschlußanker etwa das $2\frac{1}{2}$ fache des Drehmomentes bei 30-Minutenleistung. Die Drehzahl ist von der Frequenz abhängig und nahezu unveränderlich. Frequenz meist 50 (= 100 Polwechsel) in der Sekunde.

a) Motoren.

Der Betrieb der Aufzüge ist wie der der Krane ein aussetzender (intermittierender), d. h. auf jede Arbeitsperiode des Motors folgt eine mehr oder minder große Ruhepause. Dieser Belastungsart entsprechend bauen die Elektrizitätsfirmen besondere Aufzugsmotoren, die infolge ihrer kürzeren Betriebszeit wesentlich höher belastet werden können als bei Dauerbetrieb. Die Aufzugsmotoren müssen zur Beschleunigung der Massen ein genügendes Anzugsmoment entwickeln und leicht umsteuerbar sowie betriebssicher sein. In Rücksicht auf genaues Anhalten ist — von besonderen Ausnahmen abgesehen — unveränderte Drehzahl Bedingung.

α) Eigenschaften der Motoren im Betriebe. Gleichstrommotoren. Die Motoren besitzen Nebenschlußwicklung und geben beim Anlauf ein Anzugsmoment gleich dem zweifachen Drehmoment bei 30-Minutenleistung (s. S. 1208). Die Drehzahl des Nebenschlußmotors ist nahezu unveränderlich. Der kleine Unterschied in

Einphasenstrommotoren. Der zur Verwendung gelangende Repulsions-Induktionsmotor ist während des Anlaufes als Repulsionsmotor geschaltet und besitzt Hauptstromcharakteristik. Nach erfolgtem Anlauf wird der Motor bei einer etwas unter der synchronen liegenden Drehzahl durch einen Fliehkraft-Kurzschleifer in einen Induktionsmotor verwandelt und besitzt als solcher Nebenschlußcharakteristik, d. h. er arbeitet bei jeder Belastung mit unveränderter Drehzahl. Bei fest angeordneten Bürsten entwickelt der Motor ein Anzugsmoment gleich dem $2\frac{1}{2}$ -fachen, bei verstellbaren Bürsten gleich dem 4fachen des Drehmomentes bei Stundenleistung.

β) **Mechanische Ausführung der Motoren.** Offene Motoren nur für Verwendung in staubfreien Räumen. Mit Rücksicht auf vorübergehend auftretende Feuchtigkeit werden die offenen Motoren mit Schutzisolation (Feuchtschutz) versehen.

Geschlossene Motoren für Aufstellung im Freien und in Räumen, wo Staub, dauernde Feuchtigkeit oder mechanische Verletzungen zu befürchten sind.

γ) **Wahl der Motoren.** Leistung. Werden, wie meist üblich, das Eigengewicht des Fahrkorbes und die halbe Nutzlast ausgeglichen, dann beträgt die Motorleistung für den Beharrungszustand

$$N = \frac{Q \cdot v}{2 \cdot 75 \cdot \eta} \dots \text{PS.}$$

Q = Nutzlast in kg (bei Personenbeförderung 75 kg für eine Person); v = Hubgeschwindigkeit in m/sek; η = $\infty 0,3$ bis $0,4$ = Gesamtwirkungsgrad des Aufzuges.

Mit Rücksicht auf zulässige Erwärmung sind die Motoren reichlich zu wählen.

Je nach Leistungsfähigkeit unterscheidet man Motoren mit 30-, 60-Minuten¹⁾ und Dauerleistung. Die 30-Minutenleistung tritt am häufigsten auf und wird als Aufzugleistung bezeichnet.

Die Bemessung der Motoren erfolgt in Rücksicht auf den Betrieb des Aufzuges und richtet sich nach der Anzahl der täglichen Fahrten. Nachstehende Tabelle gibt einen Anhalt für die Wahl der Motoren hinsichtlich der Leistung.

Tab. 18.

Leistung PS	Zahl der täglichen Fahrten	Betriebszeit Std.	Anwendungsgebiet
30-Minuten-Leistung	bis 200	14	Personenaufzüge in Wohn- und Krankenhäusern, in Geschäftshäusern und Hotels mit mäßigem Verkehr, mäßig beanspruchte Lastenaufzüge in Fabriken usw., Speisen und Aktenaufzüge.
60-Minuten-Leistung	200 bis 400	10 bis 14	Personenaufzüge in Hotels, Bureau- und Geschäftshäusern usw. mit stärkerem Verkehr, stark beanspruchte Lastenaufzüge in Fabriken usw.
Dauerleistung	über 400	10	Personenaufzüge für Massenverkehr in Warenhäusern, Schnellbahnhöfen usw., Lastenaufzüge für Massengüterverkehr in Speichern usw.

Drehzahl. Die bei den meisten Aufzugswinden angewendete Schneckenübersetzung gestattet — im Gegensatz zu den Kranwinden — bei allen Stromarten schneller laufende Motoren. Kleinere Winden erhalten Antriebsmotoren mit einer Drehzahl von $n = 1300$ bis 1400 , solche mittlerer Größe mit einer Drehzahl von 900 bis 1200 . Große Winden mit stielgängigen Schnecken oder Stirnräderübersetzung (z. B. Winden für schwere Lastenaufzüge) werden mit Motoren niedriger Drehzahl $n = 700$ bis 750 ausgerüstet.

¹⁾ Normalien des Ver. deutsch. Elektrotechniker für Bewertung und Prüfung elektrischer Maschinen und Transformatoren, Berlin 1913, Julius Springer.

z) **Gebräuchliche Schaltungen der Motoren.** Einfache Umkehrung für alle Aufzüge mit Fahrgeschwindigkeiten bis 0,6 m/sek. Anwendbar für alle Stromarten. Das Halten wird durch eine gewichtbelastete, elektromagnetisch gelüftete Bremse bewirkt, die so zu bemessen ist, daß der Fahrkorb nicht plötzlich, sondern mit genügendem Auslaufweg gestellt wird.

Umkehrung mit Verzögerung. Für Aufzüge mit Fahrgeschwindigkeiten über 0,6 m/sek. In Rücksicht auf die mechanische Abbremsung wird die Fahrgeschwindigkeit des Aufzuges auf die zulässige Größe von 0,3 bis 0,6 m/sek vermindert. Dies kann bei Gleichstrom durch regelbare Nebenschlußmotoren (s. S. 1207), bei Drehstrom direkt, bei Dreh- und Einphasenstrom durch Leonard-Schaltung erfolgen.

Die Leonard-Schaltung (Schaltbild und Wirkungsweise s. S. 1123) ist angebracht für Aufzüge mit Fahrgeschwindigkeiten über 1,2 m/sek, sowie für solche mit Drehstrom- und Einphasenstrombetrieb, deren Geschwindigkeit über 0,6 m/sek liegt.

Sie ermöglicht eine Regelung der Geschwindigkeit innerhalb weiter Grenzen (bis etwa 1 : 10) und demgemäß ein langsames Einfahren in die Haltstellung. Die bei Aufzügen ohne Leonard-Schaltung vorhandenen Anlaßverluste entfallen bei dieser, da der stark beanspruchte und hoher Abnutzung unterworfenen Anlaßapparat durch den Nebenschlußregler der Steuerdynamo ersetzt wird. Ein Nachteil der Leonard-Schaltung ist, daß die Steuerdynamo ständig laufen muß und daher während des Stillstandes des Aufzuges Energie verbraucht, welcher Verlust durch den Fortfall der Anlaßverluste nicht aufgehoben wird.

b) Huborgan

ausschließlich Drahtseil. Für Lastenaufzüge genügt ein Seil, während für Personenaufzüge und Lastenaufzüge mit Führerbegleitung gesetzlich zwei Tragseile vorgeschrieben sind. Bei Berechnung der Drahtseile (s. auch S. 1067) darf die auf jedes Seil entfallende Gesamtbeanspruchung aus Zug- und Biegungsspannung bei Personenaufzügen nicht mehr als $\frac{1}{6}$, bei Lastenaufzügen nicht mehr als $\frac{1}{5}$ der Bruchbelastung des Seiles betragen.

Tabelle der Aufzugseile s. S. 1070. Gebräuchliche Seilzüge s. S. 1211.

Der Rollen- und Trommeldurchmesser hängt von der Einzeldrahtstärke ab und ist, nachdem das Seil gewählt, durch dessen zulässige Beanspruchung festgelegt. Er beträgt annähernd: Bei Handbetrieb $D \geq 400 \delta$; bei moterischem Antrieb $D \geq 500$ bis 800δ ; bei öfterer Ablenkung des Seiles $D = 600$ bis 1000δ , wenn $\delta =$ Durchmesser des Einzeldrahtes.

Die Trommelwelle ist bei den meisten Ausführungen dreifach gelagert, daher Berechnung derselben als Träger auf drei Stützen. Bedeuten S den gesamten Seilzug, P den Zahndruck des Schneckenrades, so ergibt sich die größte Belastung des mittleren Lagers nach Figur 251, des Lagerbockes nach Fig. 252.

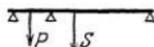


Fig. 251.

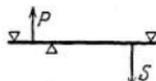


Fig. 252.

c) Übersetzung.

Als Übersetzung bedient man sich fast ausschließlich des Schneckengetriebes. Verbindung des Motors mit der Schneckenwelle meist durch eine elastische Kupplung. Auch starre Kupplungen (Schalenkupplungen) haben sich nach den Erfahrungen der Otis-Elevator-Co. bewährt.

$$\text{Größe der Übersetzung } \varphi = \frac{\text{Drehzahl des Motors}}{\text{Drehzahl der Trommel}} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

$Z_1 =$ Gangzahl der Schnecke, $Z_2 =$ Zähnezahl des Schneckenrades.

Die Schnecke ist meist doppelgängig (seltener dreigängig), bei größerer Übersetzung auch eingängig. Eingängige Schnecken bieten den Vorteil der Selbsthemmung, haben jedoch einen geringeren Wirkungsgrad.

In Rücksicht auf die vorhandenen und in Betracht kommenden Maschinen-Größen ist die Übersetzung festgelegt. Die Größe des Trommeldurchmessers ergibt sich alsdann aus der gegebenen Hubgeschwindigkeit und der Drehzahl des gewählten Motors.

$$\text{Gebräuchliche Übersetzungen der Schneckengetriebe } \varphi = \frac{1}{40} \text{ bis } \frac{1}{120}$$

Baustoff von Schnecke und Schneckenrad: Gehärteter Stahl auf Phosphorbronze.

Berechnung in Rücksicht auf Festigkeit und Abnutzung. Zahnbreite im Bogen des Teilkreises gemessen etwa $b = 3$ bis $3,5 t$.

Zahnbeanspruchungsziffer $c = 30$ bis 50. S. Maschinenteile. S. 655.

Zur Vermeidung einer zu starken Erwärmung und Abnutzung des Getriebes gilt

$$\frac{P \cdot v_1}{x \cdot b \cdot \eta_s} \leq 320.$$

Hierbei bedeutet P die Umfangskraft des Schneckenrades in kg, $v_1 =$ Umfangsgeschwindigkeit der Schnecke in m/sek; $b =$ Zahnbreite in cm im Teilkreis gemessen, $\eta_s =$ Wirkungsgrad des Schneckengetriebes, $x = \sqrt{\frac{Z_2}{10}}$ einen Erfahrungswert für die Zahl der tragenden Zähne, $Z_2 =$ Zahnzahl des Schneckenrades.

Der Wirkungsgrad η_s des Schneckengetriebes beträgt $\eta_s = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varrho)}$, wobei $\alpha =$ Steigungswinkel der Schnecke. Der Reibungswinkel ϱ kann zu $\infty 4^\circ$ angenommen werden.

Nachstehende Tabelle gibt die Übersetzungen und Wirkungsgrade der vorhandenen Schneckengetriebe zu der in Fig. 250 dargestellten elektrisch betriebenen Aufzugsmaschine an.

Tab. 19.

Übersetzung φ	Gangzahl Z_1	Steig.-Winkel in Grad	Wirkungsgrad		Steigung
			Kugellager	Kammlager	
1 : 40	2	18°	0,76	0,61	11,325'' = 35,578 mm
1 : 50	2	14° 30'	0,73	0,58	9,06'' = 28,462 "
1 : 60	2	12° 10'	0,695	0,54	7,55'' = 23,718 "
1 : 80	1	9° 12'	0,64	0,47	5,6625'' = 17,789 "
1 : 100	1	7° 25'	0,58	0,41	4,55'' = 14,231 "
1 : 120	1	6° 10'	0,54	0,375	3,775'' = 11,859 "

Der Schneckendurchmesser ist, um eine geringe Umfangsgeschwindigkeit zu erhalten, möglichst klein zu nehmen.

Die Berechnung der Schneckenwelle erfolgt auf zusammengesetzte Festigkeit (Biegung und Verdrehung). Zur Vermeidung unzulässiger, den Zahneingriff störender Durchbiegungen derselben sind die Lager möglichst nahe an der Schnecke anzuordnen. Eine wesentliche Einschränkung der schädlichen Durchbiegung kann dadurch erlangt werden, daß die Schneckenwelle mit der eingeschnittenen Schnecke auf ihrem ganzen oberen halben Umfang in Weißmetallfutter gelagert wird, während die untere Umfanghaiße für den Zahneingriff frei bleibt (Carl Flohr, Berlin).

Die Aufnahme des Längsdruckes der Schneckenwelle geschieht entweder durch ein doppeltes Kugellager (guter Wirkungsgrad) oder, besonders bei selbsthemmenden Schnecken, durch ein Kammlager mit Weißmetallfutter. Für die Berechnung des Kammlagers ist der Erfahrungswert $p \cdot v \leq 8$ maßgebend. $p =$ spezifischer Druck in kg/cm² Ringfläche des Kammlagers, $v =$ Gleitgeschwindigkeit im mittleren Durchmesser der Ringfläche.

Die Schnecke wird sowohl oberhalb als auch unterhalb des Schneckenrades angeordnet. Jede Anordnung hat jedoch gewisse Vor- und Nachteile.

Das in Gußeisen hergestellte Gehäuse des Schneckengetriebes muß gut abgedichtet und reichlich mit Öl gefüllt sein.

In Rücksicht auf ruhigen Gang der Aufzugsmaschine ist ein Ausbalancieren der Schneckenwelle mit Kupplung, sowie der Trommelwelle mit Trommel und Schneckenrad erforderlich.

Die Bremse ist in der Regel eine doppelte Backenbremse und wird meist auf dem Umfang der elastischen Kupplung angeordnet. Sie wird als Lüftbremse ausgeführt und durch ein Gewicht oder eine Feder belastet. Das Lüften geschieht entweder mechanisch oder elektrisch durch einen Bremsmagnet oder Bremslüftmotor (s. auch S. 1194 Bremsmagnete). Die Bremsbacken sind entweder aus Holz oder sie werden mit Leder gefüttert.

Bedeutet p den Druck zwischen Bremsbacke und Scheibe in kg/cm^2 , v die Umfangsgeschwindigkeit der Bremsscheibe in m/sek , dann sollte in Rücksicht auf zulässige Erwärmung und Abnutzung bei mittleren Verhältnissen der Erfahrungswert $p \cdot v = 20$ nicht überschritten werden. Lüftweg der Bremse (radial gemessen) $\frac{1}{2}$ bis 1 mm .

Fig. 50, S. 1085 zeigt eine zu einem Aufzuge von Gebr. Weißmüller, Frankfurt a. M. gehörige doppelte Backenbremse. Die Bremsbacken sind mit Leder armiert. Das Lüften der Bremse geschieht durch einen Bremsmotor für Einphasenstrom.

d) Gegengewicht.

Zweck desselben ist, das Gewicht des Fahrkorbes und einen größeren Teil der Nutzlast auszugleichen. Hierdurch wird die Antriebskraft bzw. die Motorleistung erheblich kleiner, auch wird die Betriebssicherheit des Aufzuges erhöht, da bei Bruch des Tragseiles das Gegengewicht die Fallgeschwindigkeit des Fahrkorbes bedeutend verringert. Andererseits werden die Anlage- und Betriebskosten infolge des größeren Reibungswiderstandes und der größeren, zu beschleunigenden Massen erhöht.

Die Größe des Gegengewichtes ist durch die Bauart und den Betrieb des Aufzuges bedingt. Ist selbsttätiges Senken des unbelasteten Fahrkorbes verlangt, so muß das Gegengewicht kleiner als das Fahrkorbgewicht sein. Wird der unbelastete Fahrkorb — was meist der Fall — durch Betriebskraft gesenkt und ist gleichmäßige Arbeitsverteilung für den Auf- und Niedergang Bedingung, so wird das Gegengewicht für das Gewicht des Fahrkorbes und die halbe Nutzlast bemessen. $G_g = G + \frac{1}{2} Q$.

Anordnung des Gegengewichtes.

a) Aufzüge ohne Gegengewicht (Fig. 253) nur für geringe Tragfähigkeit und untergeordnete Zwecke. Tragseil und Aufzugsmaschine werden durch das Gewicht des Fahrkorbes und die Nutzlast voll belastet.



Fig. 253.

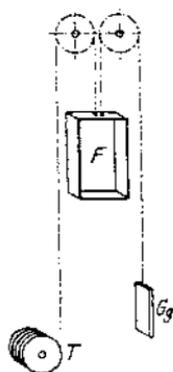


Fig. 254.

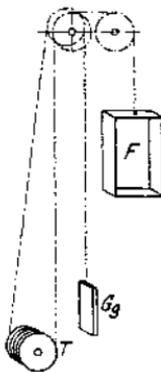


Fig. 255.

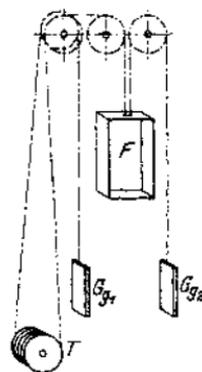


Fig. 256.

β) Am Fahrkorb wirkt ein Gegengewicht, das kleiner als das Gewicht des unbelasteten Fahrkorbes sein muß (Fig. 254). Entlastung des Tragseiles und der Aufzugsmaschine um die Größe des Gegengewichtes.

γ) Das Gegengewicht wirkt an der Trommel der Aufzugsmaschine (Fig. 255) und kann beliebig groß sein. Meist Ausgleich des Fahrkorbgewichtes und der halben Nutzlast. Das Tragseil ist durch das Gewicht des Fahrkorbes und die Nutzlast voll beansprucht, die Aufzugsmaschine durch das Gegengewicht entlastet.

δ) Anordnung zweier Gegengewichte, von denen das eine am Fahrkorb, das andere an der Trommel der Aufzugsmaschine angreift (Fig. 256). Ersteres gleicht einen Teil des Fahrkorbgewichtes aus, letzteres wird meist für die halbe

Nutzlast bemessen. Diese Anordnung ist eine Vereinigung von β und γ und bietet daher Entlastung des Tragorgans und der Aufzugmaschine.

Beide Gegengewichte können auch in einer gemeinsamen Führung untergebracht werden, auch kann ein Gegengewicht angeordnet werden, das sowohl am Fahrkorb als auch an der Trommel angreift.

In Rücksicht auf Vermeidung des Eckens in der Führung, sowie geringen Raumbedarf im Fahrschacht wird das Gegengewicht verhältnismäßig lang und schmal gehalten. Zum Zweck des Einstellens Herstellung des Gegengewichtes aus übereinander geschichteten gußeisernen Platten.

Das Gegengewicht erhält eine Führung aus Profileisen, die zur Vermeidung des Herauspringens oben geschlossen sein muß.

Bei Doppelaufzügen und Paternosteraufzügen entfällt das Gegengewicht.

e) Fahrkorb.

Herstellung des Gestelles in leichter Eisenkonstruktion. Bodenbelag Riffelblech oder Eichen- bzw. Kiefernholz. Die Größe des Fahrkorbes hängt von dem Fördergut ab. Die Grundfläche kann, wenn nicht besonders vorgeschrieben, zu $1,2 \times 1,5$ bis $1,5 \times 1,5$ m bei lichter Höhe von 1,8 bis 2,0 m angenommen werden. Grundfläche für Personenaufzüge mindestens $0,25 \text{ m}^2$ für eine Person. Kleinste Grundfläche $1,2 \times 1,3$ m. Für 3 bis 6 Personen Grundfläche 1 bis 4 m^2 . Geringste zulässige Höhe des Fahrkorbes 2,0 m.

Der Fahrkorb muß an denjenigen Seiten, welche keine Zugangsöffnung enthalten, von dichten Wänden oder mit einem Drahtgitter von höchstens 2 cm Maschenweite umgeben sein. Personenaufzüge erhalten Holzverkleidung.

Die Führung normaler Fahrkörbe, deren Tiefe etwa gleich der Breite ist, geschieht in zwei Führungsschienen. Fahrkörbe für schwere Lastenaufzüge, deren Tiefe größer als das Dreifache der Breite, werden in vier Schienen geführt.

Die Führungsschienen sind im Fahrschacht angebracht. Für Lastenaufzüge bestehen sie aus genau gerichteten \perp , \square oder L-Eisen. Personenaufzüge erhalten Führungsschienen aus imprägniertem Hartholz, die auf kräftigem Profileisen befestigt sind.

Jeder Fahrkorb ist mit je zwei oberen und unteren Führungs(Gleit-)Schuhen ausgerüstet, die bei Lastenaufzügen fest angeordnet werden. Personenaufzüge erhalten zur Erzielung einer elastischen Führung sowie eines sanften, ruhigen Ganges bewegliche, unter Federkraft stehende und seitlich einstellbare Korbführungsschuhe. Eine gute und reichliche Schmierung der Korbführungen ist Hauptbedingung.

f) Fahrschacht.

Der Fahrschacht ist der freie Raum, in dem sich der Fahrkorb auf und ab bewegt. Seine Größe ist durch die Grundfläche des Fahrkorbes bedingt und reichlich zu nehmen.

Die Höhe des Fahrschachtes ist durch die Länge der Fahrbahn gegeben. Bei der höchsten Stellung des Fahrkorbes muß vom Leitrollengerüst noch ein Abstand von mindestens 1 m, bei der tiefsten Stellung ein solcher von 0,5 m vom Schachtboden vorhanden sein.

Der Fahrschacht wird entweder in Mauerwerk gehalten, oder er besteht aus einem stabilen eisernen Gerüste, das mit Drahtgeflecht, Wellblech, Rabitzwänden u. dgl. ummantelt ist.

Unterhalb des Leitrollengerüsts ist der Fahrschacht, um ein Herabfallen von Teilen auf den Fahrkorb zu vermeiden, sicher abzudecken.

Besondere Rücksicht ist bei Bau des Schachtes auf die gesetzlich verlangte Feuersicherheit zu nehmen, auch ist für ausreichende Beleuchtung Sorge zu tragen.

Die Fahrschachttüren können ein- oder zweiflügelig sein, dürfen jedoch nicht in die Fahrbahn des Korbes hineinschlagen.

Türen zu feuersicheren Schächten müssen gleichfalls feuersicher sein.

4. Steuerung der elektrisch betriebenen Aufzüge.

Die Steuerung der Aufzüge besteht aus dem eigentlichen Steuerapparat und der Vorrichtung zum Betätigen desselben.

Der **Steuer- oder Umkehrapparat** hat das Anlassen und Abstellen des Motors, sowie das Ändern der Drehrichtung (Umkehren) desselben zu bewirken.

Umschalter werden für kleinere Motorleistungen (etwa bis 4 PS) verwendet. Zur Herabsetzung des Anlaufstromes wird ein Widerstand in den Ankerstromkreis gelegt, der während des ganzen Betriebes eingeschaltet bleibt. Ausbildung der Umschalter meist als Walzenschalter.

Wendeseibanlasser kommen für Gleichstrommotoren über 2 PS und Drehstrommotoren über 4 PS in Betracht.

Ist für den Aufzug sanftes Anfahren und geringer Anlaufstrom Bedingung, so ist auch bei kleineren Leistungen statt des Umschalters ein Wendeseibanlasser anzuordnen.

Das Einschalten des Motorstromes kann bei den Wendeseibanlassern mechanisch oder elektrisch geschehen. Das allmähliche Anlassen geschieht jedoch selbsttätig und unabhängig von der Belastung.

Bei mechanischer Steuerung wird der Anlasser durch einen Seilzug oder Gestänge ein- bzw. umgeschaltet, während das allmähliche Anlassen unter dem Einfluß eines Gewichtes oder einer Feder erfolgt.

Bei den elektrischen Steuerungen geschieht ersteres elektromagnetisch oder durch einen sog. Schütz, letzteres durch einen Hilfsmotor.

Handelt es sich um Einphasenstrom, so wird das Umkehren und Anlassen des Repulsionsmotors durch Bürstenverstellung bewirkt.

a) Mechanische Steuerungen.

Die **Seilsteuerung** (Fig. 257) kommt nur noch für langsam laufende reine Lastenaufzüge und solche mit Führerbegleitung bei Geschwindigkeiten von 0,3 bis 0,5 m/sek zur Anwendung.

Für erstere wird das Steuerorgan (Seil, Kette oder Gestänge) außerhalb des Aufzuges angeordnet, damit es von allen Haltestellen aus bedient werden kann. Bei Lastenaufzügen mit Führerbegleitung geht der eine Strang des Steuerseiles durch den Fahrkorb.

Durch Ziehen am Steuerseil (auf- oder abwärts) wird die Steuerwelle gedreht, die Haltebremse gelüftet und der Anlasser betätigt. Der Fahrkorb bewegt sich dann entgegengesetzt dem Sinne des am Steuerseil ausgeübten Zuges.

Hub des Steuerseiles nach auf- oder abwärts je 500 bis 1000 mm. Diesem Hub entspricht ein Drehungswinkel der Steuerscheibe — von der Mittelstellung aus — von 90° bis 180° nach beiden Seiten.

Überschreitet der Aufzug seine Grenzstellungen, so erfolgt vermittelt der am Steuerseil angebrachten Knaggen K eine selbsttätige Endausrückung.

Die Handrad- oder Kurbelsteuerung (Fig. 258) gelangt bei

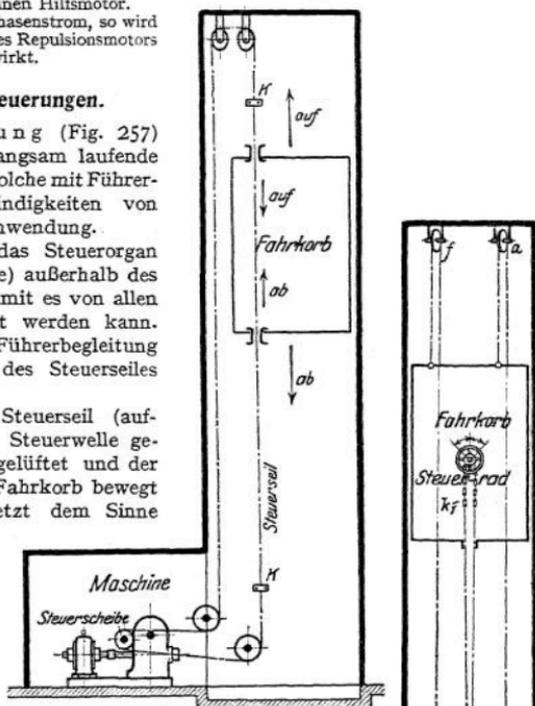


Fig. 257.

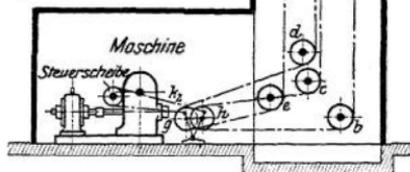


Fig. 258.

schnell fahrenden Personenaufzügen in Waren- und Geschäftshäusern, sowie bei Lastenaufzügen mit Führerbegleitung für Geschwindigkeiten über $v = 0,7 \text{ m/sek}$ zur Anwendung.

Auch bei der Handradsteuerung wird der Anlasser durch Steuerscheibe und Seilzug betätigt. Das Handrad ist in der Kabine angeordnet. Ein mit demselben in Verbindung stehender Zeiger läßt die jeweilige Stellung der Steuerscheibe bzw. des Anlassers erkennen.

Der Seilzug der Steuerung ist von der Bewegung des Aufzuges unabhängig und aus Fig. 258 ersichtlich. a bis f sind festgelagerte Leitrollen, während die Rollen g und h auf schwingenden Hebeln angeordnet sind. Auf der Welle des Handrades ist ein Kettenrad befestigt, welches die Stränge der Gallschen Kette k_1 und damit das Seil auf- und abwärts bewegt, d. h. verkürzt oder verlängert. Da nun die Enden des Seilzuges am Fahrkorb befestigt sind, so entspricht jeder Verkürzung bzw. Verlängerung ein Ausschlag der schwingenden Hebel aus ihrer Mittellage. Die an den Enden der Hebel befestigte Gallsche Kette k_2 betätigt alsdann die Steuerscheibe und damit den Anlasser.

Ein Nachteil dieser Steuerung ist, daß das Steuerseil, da es beim Fahren des Aufzuges mitläuft, starkem Verschleiß unterworfen ist. Auch fehlt dem Führer infolge des umständlichen Seilzuges und der Elastizität des Seiles das Gefühl für die einzelnen Schaltstellungen.

b) Elektrische Steuerungen.

Bei den rein elektrischen Steuerungen wird die Verbindung zwischen den im Fahrkorb oder an den Schachtzugängen angeordneten Steuerorganen und den im Maschinenraum aufgestellten Anlaßapparaten elektrisch bewirkt. Die elektrischen Steuerungen bieten — den mechanischen gegenüber — den Vorteil einer leichten und sicheren Bedienung, einer guten Anpassung an die örtlichen Verhältnisse (z. B. bei versetzten Schachtzugängen), der Bedienungsmöglichkeit durch die Fahrgäste selbst, sowie einer einfachen und billigen Anordnung aller gesetzlich verlangten Sicherheitsvorrichtungen.

1. Die Hebel- oder Kabinensteuerung findet für stark benutzte Personenaufzüge in Hotels, Geschäfts-, Warenhäusern u. dgl. Verwendung.

Der Steuerapparat ist im Fahrkorb angeordnet und durch ein biegsames Kabel mit den im Maschinenraum aufgestellten Anlaßvorrichtungen verbunden. Er ist ein einfacher Umschalter und wird durch einen Hebel oder ein Handrad betätigt.

Zur Bedienung der Steuerung ist ein besonderer, geschulter Führer erforderlich.

Fig. 259 gibt die schematische Darstellung eines Aufzuges mit Hebelsteuerung, wobei der Einfachheit halber nur drei Stockwerke angenommen sind. Es bedeuten:

A — B Anker des Motors, C — D Erregung desselben, S = Steuerhebel, k_1 = bewegliches Kabel, k_2 = festes Klemmbrett (am Schacht), k_3 = bewegliches Klemmbrett (am Fahrkorb), US = Umschalter für die Erregung, m_1 und m_2 die Magnete zur Betätigung desselben, SA = Selbstanlasser, m den Magneten zur Einrückung desselben, M den Bremslüftmagneten, T_k die Türkontakte.

Das Schema zerfällt in zwei Stromkreise, den Arbeits- (Motor-) Stromkreis und den Steuerstromkreis.

Der Steuerstrom geht vom $+$ -Pol über die Türkontakte T_k , die Leitung I des biegsamen Kabels zum Schalthebel S . Ist dieser für „Aufwärtsfahrt“ geschaltet, so geht der Strom vom Hebel S über die Leitung 3 des biegsamen Kabels, die Magnete m_1 , m und M zum $-$ -Pol. Steht der Steuerhebel S auf „abwärts“, so geht der Steuerstrom vom Hebel S über die Leitung 2 des biegsamen Kabels k_3 , die Magnete m_2 , m und M zum $-$ -Pol.

Das Einschalten des Steuerstromes ist nur möglich, wenn sämtliche Türkontakte (T_k) geschlossen sind.

Motorstromkreis: Ist der Magnet m_1 erregt, so wird der Umschalter U auf I — I gestellt. Der Erregerstrom geht dann vom $+$ -Pol über die Erregung des Motors in Richtung C — D zum $-$ -Pol. Bei Erregung des Magneten m_2 wird der Umschalter U auf II — II gestellt und der Erregerstrom geht vom $+$ -Pol über die Erregung in Richtung D — C zum $-$ -Pol. Im ersteren Falle (C — D) läuft der Motor im Hubsinne, im zweiten Falle (D — C) im Senksinne.

Durch die Erregung des Magneten m wird der Anlasser $S.A$ eingeschaltet. Der Ankerstrom geht in beiden Fällen vom $+$ -Pol über $S.A$ und die Ankerklammern $A-B$ zum $-$ -Pol. Der gleichfalls erregte Bremsmagnet M lüftet die Bremse.

Soll der Fahrkorb stillgesetzt werden, so wird der Steuerhebel in die Mittel-(Halt-)Stellung gebracht. Damit wird der Steuerstromkreis unterbrochen, die Magnete m_1 , m_2 und m werden stromlos, der Anlasser geht in seine Nullstellung zurück, und der Motor ist abgestellt. Der gleichfalls stromlos gewordene Lüftmagnet M läßt das Gewicht der Bremse los. Letztere wird angezogen, und der Fahrkorb gestellt.

Die elektrische Hebelsteuerung gelangt in vier Formen zur Anwendung.

a) Für einfache Umkehrung (ohne Verzögerung). Nur für Aufzüge mit Fahrgeschwindigkeiten bis etwa 0,6 m/sek.

β) Für Umkehrung und Verzögerung in einer Stufe. Anwendung für Gleichstromaufzüge mit regelbarem Nebenschlußmotor (s. S. 1207) und Fahrgeschwindigkeiten von 0,6 bis 1,5 m/sek.

γ) Umkehrung und Verzögerung in mehreren Stufen als Schützensteuerung. Nur bei Gleichstrom anwendbar.

δ) Umkehrung und Verzögerung in vielen Stufen (Leonard-Schaltung). Anwendbar bei Gleichstrom, Drehstrom und Einphasenstrom für Geschwindigkeiten über 0,6 m/sek. Leonard-Schaltung s. S. 1123.

2. Die Druckknopfsteuerung findet sowohl für elektrisch betriebene Personenaufzüge als auch für Lastenaufzüge mit und ohne Führerbegleitung Verwendung.

Lastenaufzüge ohne Führerbegleitung, wie Akten- und Speisenaufzüge, erhalten nur äußere Steuerung. Ein an jeder Schachttüre angebrachtes Druckknopffregister ermöglicht das Heranholen des Fahrkorbes nach jeder beliebigen Haltestelle, sowie das Verschicken desselben nach jedem einzelnen Stockwerk.

Akten- und Speisenaufzüge können auch mit Schubkontaktsteuerung ausgerüstet werden. Diese ist eine vereinfachte Druckknopfsteuerung, hat jedoch den Nachteil, daß der Fahrkorb von jedem Stockwerk aus in jedes beliebige höhere Stockwerk fahren kann, das Abwärtsfahren jedoch stets nach dem Erdgeschoß erfolgen muß.

Für Personenaufzüge bietet die Druckknopfsteuerung den Vorteil einer einfachen und sicheren Bedienung. Die Benutzung des Aufzuges kann ohne Führer und durch jede Person ohne besondere Übung geschehen (Selbstfahrer). Daher allgemeine Anwendung in Privatgebäuden und Geschäftshäusern ohne regeren Verkehr.

Aufzüge mit Druckknopfsteuerung erhalten an jeder Schachttüre einen Druckknopf, durch den das Heranholen der Kabine bewirkt wird. Im Innern des Fahr-

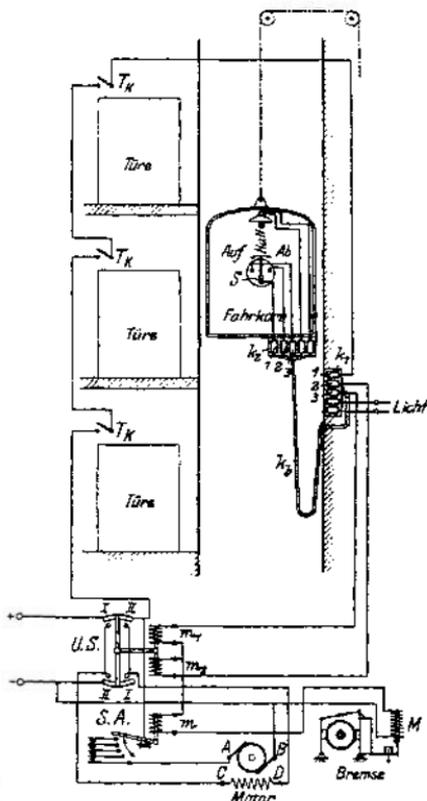


Fig. 259.

korbes ist ein Druckknopfregister angeordnet, das die Fahrbewegung des Aufzuges nach jedem gewünschten Stockwerk ermöglicht.

Hierbei gilt für jedes Stockwerk unabhängig von der verlangten Fahrtrichtung stets derselbe Druckknopf, da die Fahrtrichtung des Korbes selbsttätig durch einen Stockwerksschalter, Kopierapparat u. dgl. eingeleitet wird.

Das Anhalten der Kabine kann entweder durch Kontakte erfolgen, die durch eine an der Kabine angebrachte Gleitbahn ausgerückt werden, oder es ist an der Aufzugsmaschine eine Vorrichtung angebracht, die das Anhalten in dem betreffenden Stockwerk selbsttätig bewirkt.

Die gesetzlich vorgeschriebene Trennung von Innen- und Außensteuerung bei Betreten des Fahrkorbes geschieht durch einen Fußboden- oder Tretkontakt, der zu gleicher Zeit zur Einschaltung der Kabinenbeleuchtung dienen kann.

Fig. 260 zeigt das vereinfachte Schaltungsschema eines elektrisch betriebenen Personenaufzuges mit Druckknopfsteuerung für drei Stockwerke, wobei die Lichtleitung der Einfachheit wegen fortgelassen ist.

Es bedeuten: $A-B$ den Motoranker, $C-D$ die Erregung des Motors, k_b das bewegliche Stromzuführungskabel, k_s das feste Klemmbrett (am Schacht), k_a das bewegliche Klemmbrett

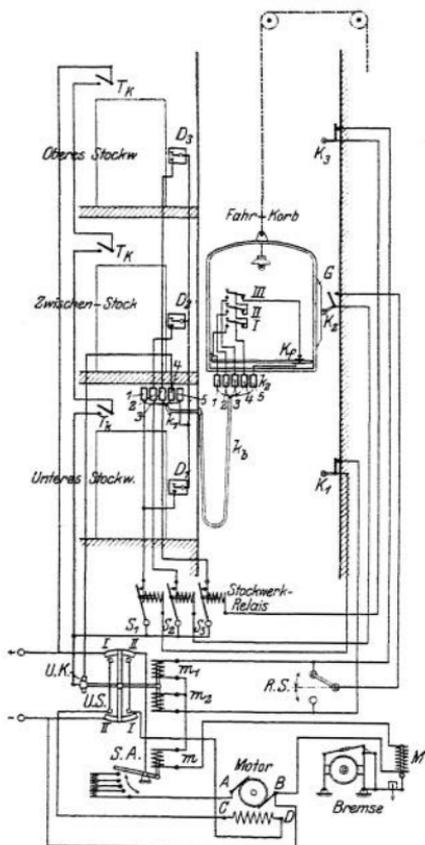


Fig. 260.

(am Fahrkorb), D_1, D_2, D_3 die Druckknöpfe der äußeren Steuerung, $I - II - III$ die Druckknöpfe des Registers im Fahrkorb, S_1, S_2, S_3 die von den Stockwerkrelais einzuschaltenden, elektromagnetisch betätigten Stockwerkkontakte, US den Umschalter für die Erregung, m_1 und m_2 die Magnete zur Betätigung desselben, UK einen Unterbrechungskontakt, SA den Selbstanlasser, m den Magneten zur Beeinflussung desselben, M den Bremslüftmagneten, T_K die Türkontakte, $K_1 - K_2 - K_3$ die Stockwerkkontakte zum Ausschalten der Steuerung, G die Gleitbahn am Fahrkorb zum Ausschalten derselben, RS den Richtungsschalter zum Einstellen der Fahrtrichtung bei Halten des Fahrkorbes im Zwischenstock, K_F den Fußbodenkontakt zum Abschalten der äußeren Steuerung (und Einschalten der Kabinenbeleuchtung).

Das Schema zerfällt in den Arbeits-(Motor-)Stromkreis und die Steuerstromkreise. Der Motorstromkreis ist der gleiche wie bei der elektrischen Hebelsteuerung (s. S. 1215). Der für jedes Stockwerk besondere Steuerstromkreis hat die Einstellung der beabsichtigten Fahrtrichtung, das Einschalten des Motoranlassers, sowie das Abschalten des letzteren bei Eintreffen des Fahrkorbes in dem gewünschten Stockwerk zu bewirken.

Die (drei) Steuerstromkreise gehen vom $+$ -Pol über die geschlossenen Türkontakte T_K , den Unterbrechungskontakt UK , die Kabelleitung 4 , die in Ausschaltstellung befindlichen Druckknöpfe $I - II - III$ der inneren Steuerung, den Fußbodenkontakt K_F und die Kabelleitung 5 zur gemeinsamen Verbindungsleitung $D_1 - D_2 - D_3$. Von hier aus geht der Strom, je nachdem auf die äußeren Druckknöpfe D_1, D_2 oder D_3 , gedrückt wird, zu den Stockwerkrelais S_1, S_2 oder S_3 , dann über die Stockwerkkontakte K_1, K_2 oder K_3 zu den Umschaltmagneten m_1 oder m_2 . Alsdann von diesen mittels gemeinschaftlicher Rückleitung zum Magneten m des Selbstanlassers, zum Bremslüftmagneten M und über die Klemme B zum $-$ -Pol. Der Rich-

tungsschalter RS wird von der Aufzugsmaschine oder dem Fahrkorb derart eingestellt, daß er bei Stellung des Fahrkorbes oberhalb des Zwischenstockes Verbindung mit m_2 , bei Stellung unterhalb des Zwischenstockes Verbindung mit m_1 herstellt.

Sobald einer der drei Steuerstromkreise durch die Druckknöpfe D_1 , D_2 oder D_3 der Außensteuerung geschlossen ist, wird das zugehörige Stockwerkrelais S_1 , S_2 oder S_3 erregt. Hierdurch wird der Relaisanker angezogen, der zugehörige Kontakt geschlossen, und der Steuerstrom geht von der Türkontaktleitung aus unmittelbar zur Relaiswicklung, so daß der Steuerstromkreis auch ohne weiteres Drücken auf die Druckknöpfe D_1 , D_2 oder D_3 geschlossen bleibt.

Die Tätigkeit der durch den Steuerstrom erregten Magnete m_1 , m_2 , m und M ist dieselbe wie bei der Hebelsteuerung (s. S. 1215). Der Fahrstuhl wird also nach dem betreffenden Stockwerk hin in Bewegung gesetzt. Außerdem wird durch die Magnete m_1 bzw. m_2 der Unterbrechungskontakt UK geöffnet, so daß die Stockwerkrelais $S_1 - S_2 - S_3$ durch die äußeren Druckknöpfe keinen neuen Impuls erhalten können.

Ist der Fahrkorb an der gewünschten Haltestelle angekommen, so wird durch die am Fahrkorb angebrachte Gleitbahn G der zugehörige Stockwerkkontakt K_1 , K_2 oder K_3 und damit der Steuerstrom unterbrochen und der Aufzug gestellt.

Durch Betreten des Fahrkorbes wird der Fußbodenkontakt K_f unterbrochen und damit ein Schließen des Steuerstromkreises durch die äußeren Druckknöpfe D_1 , D_2 und D_3 unmöglich gemacht. (§ 15, Abs. II der Polizeiverordnung, Trennung von Innen- und Außensteuerung betr.)

Je nachdem nun der Druckknopf I , II oder III der Innensteuerung gedrückt wird, geht der Steuerstrom vom $+$ -Pol über T_k , UK , die Kabelleitung k , die Kabelleitungen I , 2 oder 3 , die Stockwerkrelais S_1 , S_2 oder S_3 , die Stockwerkkontakte K_1 , K_2 oder K_3 zu dem Magneten m_1 oder m_2 und über m und M zum $-$ -Pol. Sobald die Stockwerkrelais den Anker angezogen und die zugehörigen Kontakte geschlossen haben, bleibt der Steuerstrom auch bei Loslassen der Druckknöpfe I , II oder III geschlossen.

Ist der Fahrkorb in dem gewünschten Stockwerk angekommen, so wird durch die Gleitbahn G der Stockwerkkontakt K_1 , K_2 oder K_3 unterbrochen und der Fahrkorb durch Einfallen der Haltebremse gestellt.

Weiteres über Druckknopfsteuerungen siehe: S. S. W., Techn. Heft 8 II, Steuerungen für Aufzüge unter besonderer Berücksichtigung der Druckknopfsteuerung. Bethmann, Der Aufzugsbau, Braunschweig 1913. Dingl. Polyt. Journal 1911, S. 696. Elektrotechn. Zeitschr. 1903, S. 763.

5. Sicherheitsvorrichtungen.

a) Fangvorrichtungen haben ein Abstürzen des Fahrkorbes bei Bruch oder unzulässiger Dehnung der Trageile zu verhindern.

Eine brauchbare Fangvorrichtung darf nur mit geringem Stoß wirken und soll den Fahrkorb erst allmählich zur Ruhe setzen. Der hierbei der lebendigen Kraft entsprechende Bremsweg (an den Führungsschienen gemessen) darf den gesetzlich zulässigen Höchstwert von 0,25 m nicht überschreiten.

Die Wirkung der Fangvorrichtungen beruht im allgemeinen darauf, daß bei Reißen oder Längen des Tragorgans Exzenter oder Keile ausgelöst werden, die den Fahrkorb an den Führungen festklemmen.

Pendel-, Riegel- und Klemmrollenfangvorrichtungen kommen bei den neueren Aufzügen nicht mehr in Betracht.

Ein Nachteil aller Fangvorrichtungen ist ihre unsichere Wirkung im Augenblicke der Gefahr. Sie ist auf die stete Untätigkeit der Vorrichtung zurückzuführen.

α) Einseitige Fangvorrichtungen kommen nur für reine Lastenaufzüge in Betracht. Sie werden meist durch eine Federkraft betätigt, welche kleiner als das Gewicht des Fahrkorbes sein muß. Die Wirkung dieser Fangvorrichtungen hängt auch von der Lage der Bruchstelle des Seiles ab. Sie ist am ungünstigsten, wenn sich der Förderkorb an der höchsten Stelle befindet und der Seilbruch unten an der Aufzugswinde eintritt, da die Federkraft alsdann das Gewicht des langen Seilendes zu überwinden hat.

Hierdurch wird die Fangwirkung verzögert und erfolgt erst dann, wenn der Fahrkorb eine erhebliche und kritische Fallgeschwindigkeit angenommen hat.

Bei der Exzenterfangvorrichtung (Fig. 261) ist im oberen Querstück des Fahrkorbes eine Welle W drehbar gelagert. Diese trägt an ihren Enden gezahnte Exzenter E , die bei normaler Stellung der Vorrichtung durch den Hebel H vermittels einer am Tragorgan befestigten Kette K außer Eingriff gehalten werden. Der Hebel H hält in dieser Stellung zwei Spiralfedern F derart gespannt, daß bei Reißen des Tragorgans eine Drehung der Welle im Sinne des Pfeiles erfolgt, die Exzenter sich festklemmen und der Fahrkorb gestellt wird.

Die Größe der Exzentrizität e ergibt sich sowohl für Fangvorrichtungen mit einem Exzenter und Widerlager (Fig. 262), als auch für solche mit zwei Exzenter aus den Beziehungen

$$W_1 = N \cdot \mu_1; \quad \frac{e}{r} = \frac{W_1}{N} = \operatorname{tg} \alpha = \mu_1;$$

zu

$$e \leq \mu_1 \cdot r,$$

wobei μ_1 die Reibungsziffer zwischen Exzenter und Führungsschiene bedeutet.

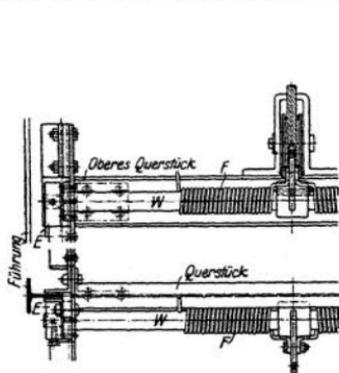


Fig. 261.

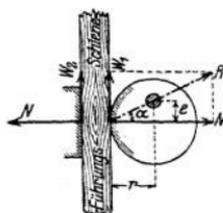
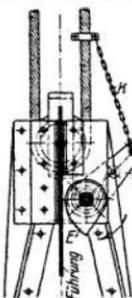


Fig. 262.

Die lebendige Kraft der fallenden Masse des belasteten Fahrkorbes und die auf dem Bremsweg geleistete Arbeit muß bei zwei vorhandenen Führungsschienen durch den doppelten Betrag der Reibungswiderstände aufgezehrt werden.

Bedeutet M die Masse des belasteten Fahrkorbes, W_1 und W_2 die auftretenden Reibungswiderstände, $v = v_0 + \sqrt{2gh}$ die Fallgeschwindigkeit in m/sek (v_0 = Senkgeschwindigkeit, h = Fallhöhe in m) und s den Bremsweg in m, so besteht die Beziehung

$$\frac{Mv^2}{2} + M \cdot g \cdot s \leq 2 \cdot (W_1 + W_2) \cdot s.$$

Mit $W_1 = N \cdot \mu_1$ und $W_2 = N \cdot \mu_2$ ergibt sich der Normaldruck zu

$$N = \frac{M}{2 \cdot (\mu_1 + \mu_2)} \cdot \left(\frac{v^2}{2s} + g \right) \dots \text{kg.}$$

Hierbei kann die Reibungsziffer μ_1 zwischen Exzenter und Führungsschiene zu $\infty, 0,1$ bei ungezähntem, und $\infty, 0,2$ bei gezähntem Exzenter gesetzt werden.

Reibungsziffer des glatten Widerlagers $\mu_2 = \infty, 0,1$.

Die die Exzenterwelle belastende Mittelkraft aus Normaldruck und Reibungswiderstand beträgt $R = \frac{N}{\cos \alpha}$.

Wird statt des Widerlagers ein zweites Exzenter vorgesehen, so wird mit $\mu_1 = \mu_2$ der Normaldruck

$$N = \frac{M}{4\mu_1} \cdot \left(\frac{v^2}{2s} + g \right) \dots \text{kg.}$$

Die Exzenterfangvorrichtungen sind einfach und zuverlässig, jedoch für größere Lasten nicht geeignet.

Fig. 263 gibt die schematische Darstellung einer Keilfangvorrichtung für ein Tragseil.

Das Lastseil hält mittelst des Zugstückes Z die Blattfeder F gespannt. Die beiden Hebel H sind in dem oberen Querstück des Fahrkorbes bei a drehbar gelagert. Das eine Ende der Hebel steht mit dem Zugstück Z , das andere mit den lose aufgehängten Fangkeilen K in Verbindung. Bei Bruch des Seiles zieht die Feder das Zugstück Z abwärts, wobei die Hebel H im Pfeilsinne gedreht werden. Durch diese Drehung werden die Fangkeile auf ihrer schrägen Bahn nach aufwärts bewegt, die Klemmwirkung tritt ein, und der Fahrkorb ist gestellt.

Die Ausführung der Keilfangvorrichtungen geschieht meist mit einem, seltener mit zwei Fangkeilen.

Der Keilwinkel und die am Keil auftretenden Kräfte ergeben sich mit Bezug auf Fig. 264 aus den Beziehungen:

$$N = R \cdot \sin(90^\circ - \alpha - \varrho) = R \cdot \cos(\alpha + \varrho),$$

$$V = N \cdot \mu_1 = R \cdot \cos(90^\circ - \alpha - \varrho) = R \cdot \sin(\alpha + \varrho).$$

Aus
$$\frac{H \mu_1}{\sin(\alpha + \varrho)} = \frac{H}{\cos(\alpha + \varrho)} \quad \text{folgt} \quad \mu_1 = \operatorname{tg}(\alpha + \varrho).$$

Bedeutet ϱ den Reibungswinkel an der schrägen Keilbahn, ϱ_1 denjenigen zwischen Keil und Führungsschiene, so ergibt sich mit $\mu_1 = \operatorname{tg} \varrho_1$ der Keilwinkel aus der Beziehung

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\varrho_1 - \varrho).$$

Mit Rücksicht auf Selbsthemmung muß ϱ_1 größer als ϱ sein, was durch Verzahnung des Keils auf der Seite der Führungsschiene erreicht werden kann.

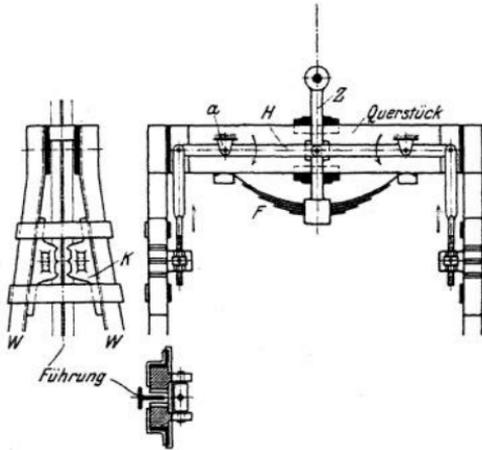


Fig. 263.

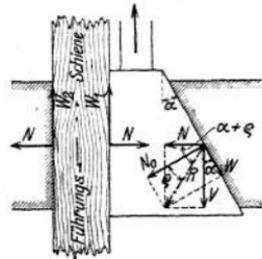


Fig. 264.

Wie bei der Exzenterfangvorrichtung gilt mit den gleichen Bezeichnungen:

$$\frac{M v^2}{2} + M \cdot g \cdot s \leq 2 \cdot (W_1 + W_2) \cdot s.$$

Hiermit ergeben sich die Kräfte:

$$N = \frac{M}{2 \cdot (\mu_1 + \mu_2)} \cdot \left(\frac{v^2}{2s} + g \right);$$

$$R = \frac{N}{\cos(\alpha + \varrho)}; \quad V = N \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varrho); \quad N_0 = R \cdot \cos \varrho; \quad W = R \cdot \sin \varrho.$$

Für Ausführung mit zwei Keilen wird

$$H = \frac{M}{4 \mu_1} \cdot \left(\frac{v^2}{2s} + g \right).$$

β) Zweiseilige Fangvorrichtungen gelangen in erster Linie für Personenaufzüge (und Lastenaufzüge mit Führerbegleitung), bei denen gesetzlich zwei Tragselle vorgeschrieben sind, zur Anwendung. Auch für Lastenaufzüge, die in neuerer Zeit zweiseilig ausgerüstet werden, kommen sie in Betracht.

Als Fangorgane dienen fast ausschließlich Keile, die bei eisernen Führungsstraßen mit groben Zähnen versehen aus gehärtetem Stahl hergestellt werden. Bei Holzstraßen, die für Personenaufzüge vorgeschrieben sind, werden glatte oder messerartige Keile verwendet.

Bei Personenaufzügen steht noch die Fangvorrichtung unter dem Einfluß eines Geschwindigkeitsreglers (s. S. 1221). Sie wird dann nicht nur bei Seilbruch oder unzulässigem Längen des Seiles, sondern auch bei Überschreiten der höchstzulässigen Senkgeschwindigkeit (1,5 m/sek) betätigt.

Fig. 265 zeigt eine zweiseilige Fangvorrichtung von Mohr & Federhaff in Mannheim. Die beiden Trageile greifen an dem doppelarmigen Hebel *A* an, der bei *a* an dem oberen Querstück des Fahrkorbes drehbar gelagert ist. Reißt eines der beiden Seile, so wird der Hebel aus seiner normalen, wagerechten Lage gedreht, der Bolzen *B* drückt den Sperrhebel *S* nach links, wobei die Nase desselben von der Brücke *C* abgleitet. Nachdem nun der Sperrhebel *S* ausgelöst, drehen die Federn *F* die doppelarmigen Hebel *D* mit dem Dreieckshebel *E* nach abwärts, wodurch das bei *b* angreifende Hebelwerk der (nicht gezeichneten) Fangkeile freigegeben und die Fangkeile selbst eingerückt werden.

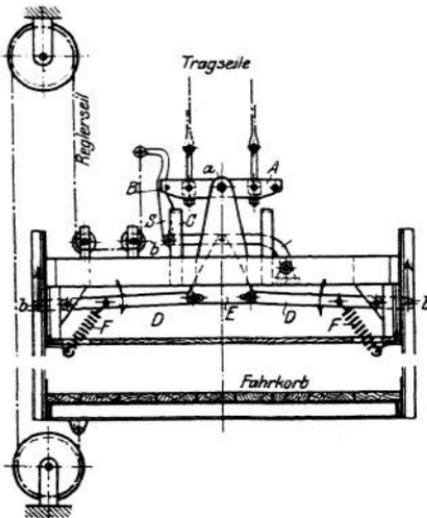


Fig. 265.

ist, daß bei Reißen eines Seiles der Hebel *A* sich auf eine der beiden Brücken *C* legt, wodurch das Hochwinden des Fahrkorbes mit dem anderen Seil unter gleichzeitigem Lösen der Fangkeile ermöglicht wird.

Fig. 266 gibt eine weitere Darstellung der Fangvorrichtung eines Personenaufzuges in Verbindung mit einem Geschwindigkeitsregler (Carl Flohr, Berlin).

Die beiden Trageile sind je $1\frac{1}{2}$ mal in entgegengesetzter Richtung um die Fangtrommel *T* geschlungen und an dieser befestigt.

Reißt oder dehnt sich eines der beiden Seile, so wird die Fangtrommel durch das andere gedreht, und das gleichfalls an der Fangtrommel befestigte Seil *S* wird aufgewickelt. Hierdurch wird der *S*-förmige Hebel *H* gedreht, die Seile *S*₁ und *S*₂ werden nach oben gezogen und die Fangvorrichtung durch Einrücken der Keile *k* betätigt.

Bei zu schneller Abwärtsfahrt hält der Regler das Steuerseil fest und zieht den Reglerhebel *R* nach oben. Hierdurch werden die Welle *W* und unter Vermittlung einer Kurbel *K* der *S*-förmige Hebel *H* gedreht, die Fangkeile durch die Seile *S*₁ und *S*₂ angezogen und der Fahrkorb gestellt.

Ferner ist auf der Reglerwelle *W* ein unter Federwirkung stehender Bügel *B* gelagert, der vermittelt des Kurbelarmes *K* und des Zugstückes *Z* mit dem Winkelhebel *A* in Verbindung steht. Letzterer ist in dem Querstücke des Fahrkorbes bei *a* drehbar gelagert und legt sich mit dem einen Ende gegen eine Nase der Fangtrommel *T*.

Tritt nun Schlaffwerden der Korbseile ein, so gleitet der Winkelhebel *A* infolge Drehung der Fangtrommel von der Nase ab, die Fangfeder wird freigegeben und dreht den Bügel *B* und mittels einer an ihm angebrachten Knagge den *S*-Hebel *H* nach rechts, wodurch die Vorrichtung wiederum betätigt wird.

Weitere Ausführungen von Fangvorrichtungen s. Schiffke, Gesichtspunkte für die Konstruktion moderner Aufzüge, Z. f. Dam- u. Masch.-Betr. 1914, S. 131.

Fangböden können als Ersatz für den Geschwindigkeitsregler dienen. Unter dem Fahrkorb ist ein beweglicher Rahmen wagrecht aufgehängt. Dieser ist mit Tuch bespannt und wird bei zu schnellem Senken des Korbes durch den entstehenden Luftdruck angehoben und betätigt so die Fangvorrichtung.

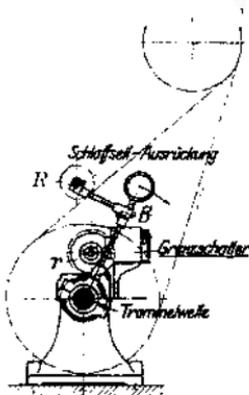


Fig. 267.

b) Hängeseil-(Schlackseil-)Ausrückung. Sie wird an der Aufzugmaschine angebracht und hat bei Bruch oder Schlaffwerden eines Trageseiles die Maschine abzustellen.

Bei der gebräuchlichen Anordnung (Fig. 267) legt sich der auf der Trommelwelle drehbare Bügel *B* mit seiner Rolle *R* gegen den gespannten Seilzug. Tritt ein Reißen oder unzulässiges Längen des Seiles ein, so dreht sich der Bügel unter dem Einflusse eines Gewichtes abwärts und bewirkt durch Unterbrechen des Stromes das Anhalten der Maschine.

c) Grenzschalter (Endausschalter) haben bei Versagen oder verspätetem Wirken der Steuerapparate ein Überschreiten der höchsten und tiefsten Stellung des Fahrkorbes zu verhindern.

Nach § 16 der preußischen Polizeiverordnung für Personenaufzüge und Lastenaufzüge mit Führerbegleitung wird verlangt: „Die Aufzüge sind zum selbsttätigen Anhalten in ihrer Endstellung mit zwei Einrichtungen zu versehen, die unabhängig voneinander in Wirksamkeit treten und gleichzeitig die Übertragung der Betriebskraft aufheben. Eine dieser Vorrichtungen muß unabhängig von der Steuerungsvorrichtung in Tätigkeit treten.“

Die hiernach verlangten, unabhängig voneinander wirkenden Endausschaltungen läßt man zweckmäßig nicht gleichzeitig, sondern nacheinander in Tätigkeit treten.

Die erste Endausschaltung erfolgt betriebsmäßig und ermöglicht ein sofortiges Zurückfahren des Fahrkorbes. Bei der Seilsteuerung ordnet man als erste Endausschalter Knaggen am Steuerseil (Fig. 257) an, die letzteres entsprechend der jeweiligen Fahrtrichtung mitnehmen und den Anlasser abstellen.

Aufzüge mit Hebelsteuerung erhalten für jedes Hubende an der Schachtwand eine Gleitbahn, die den Steuerhebel in seine Haltstellung zurückführt und so den Stromkreis unterbricht. Bei der Druckknopfsteuerung wird das Überfahren der Endhaltstellen entweder durch den Schalter des Kopierapparates oder den Stockwerkschalter verhindert.

Der zweite Endausschalter tritt erst in Tätigkeit, wenn der erste versagt hat. Da er nicht betriebsmäßig betätigt wird, so ist ein Zurückfahren des Fahrkorbes nicht möglich. Der zweite Grenzschalter wird in der Regel an der Aufzugmaschine angeordnet und bei Seilsteuerung als einfache Spindelausrückung

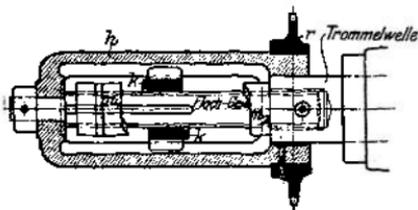


Fig. 268.

(Fig. 268) ausgebildet. Die Spindel selbst ist auf der Verlängerung der Trommelwelle aufgeschraubt. Ihre mit Knaggen *h* versehene Wandermutter (Baustoff: Phosphorbronze) legt einen dem Hub proportionalen Weg zurück. In den Endstellungen legen sich die Knaggen der Wandermutter gegen die Anschläge der auf der Spindel festen Muttern *m*₁ und *m*₂, und die Führungshülse *h* dreht sich mit. Ein auf letzterer befestigtes Kettenrad *r* bringt mittels einer Gallschen Kette den Anlasser auf Haltstellung.

Läßt sich die Spindelausrückung nicht auf der Trommelwelle anbringen, so kann an irgend-einer Stelle des Aufzuges ein durch Hilfsstrom betätigter Spindelschalter angeordnet werden,

der von einer Vorgelegewelle der Maschine durch eine Kette oder dgl. angetrieben wird. Die für die beiden Entstellungen erforderlichen Schalter sind im Hilfsstrom hintereinandergeschaltet und bewirken durch Öffnen desselben das Ausschalten eines im Hauptstrom liegenden Schutzes, der dann den Motorstrom unterbricht.

Ist der Aufzug mit mechanischer Radsteuerung oder elektrischer Steuerung ausgerüstet, so kann ein Momentschalter angeordnet werden, der bei Überschreiten der Grenzstellungen den Strom unterbricht und sofortiges Anhalten des Aufzuges bewirkt.

Fig. 269 gibt die Darstellung eines Grenzschalters, der gleichzeitig auch als Schlafseilausrückung dient¹⁾.

Der Apparat wird an das Lager der Trommelwelle angebaut. Er ist nach Art der Walzenschalter (Kontroller) ausgeführt und mit Momentschaltung versehen. Der Antrieb erfolgt für Grenzschtaltung durch Zahnräder von der Trommelwelle aus unter Zwischenschaltung einer Spindelausrückvorrichtung. Der Weg der Wandermutter m wird proportional dem Hub des Fahrkorbes eingestellt. Der Mitnehmerstift S legt sich in den Endstellungen an die Stifte s_1 bzw. s_2 der festen Muttren m_1 und m_2 an und bewirkt eine Drehung der Mutterführung f und damit der Scheibe S_1 . Letztere löst eine federbelastete Sperrnase aus, wodurch der Ausschalter betätigt und der Strom unterbrochen wird.

Für die Schlafseilausrückung (Fig. 267) erfolgt der Antrieb von dem Schlafseilbügel B aus. Letzterer ist durch ein Seil, das mehrmals um die Rolle r geschlungen, mit dieser verbunden.

Bei Eintreten von Schlafseil bewegt sich der Bügel B unter der Einwirkung eines Gewichtes nach abwärts. Hierdurch wird die Rolle r und mit dieser die Scheibe S_2 gedreht, die federbelastete Sperrklinke ausgelöst und der Strom unterbrochen.

Der Apparat kommt als Schlafseilschalter (ohne Spindelausrückung und Vorgelege) für Aufzüge mit Seilsteuerung und Spindelaufzüge sowohl bei Gleichstrom, als auch bei Drehstrom zur Anwendung.

Nach Anordnung von Fig. 267 wird der Grenzschalter bei Aufzügen mit Radsteuerung, Hebelsteuerung und Druckknopfsteuerung, bei Gleich-, Wechsel- und Drehstrom mit Schlafseilausrückung verwendet.

d) Die **Türenverschlüsse und Steuerungsverriegelungen**²⁾ haben zu bewirken, daß keine Schachttüre geöffnet werden kann, außer wenn der Fahrkorb in richtiger Höhe hinter der Türe steht. Ferner darf der Fahrkorb keine Bewegung ausführen können, solange nicht alle Türen ordnungsgemäß verschlossen sind.

Für kleinere Aufzüge (Aktens- und Speisenaufzüge) enthalten die preussischen Vorschriften keine Bestimmungen. Im Interesse der Betriebssicherheit werden sie jedoch mit den bei den Lastenaufzügen üblichen Türverschlüssen ausgerüstet.

¹⁾ Carl Flohr, Berlin.

²⁾ S. auch Gennerlich, Über Verriegelungseinrichtungen und Ladestellenverschlüsse bei Personen- und Lastenaufzügen. Z. f. Dampf- und Masch.-Betr. 1914, S. 118.

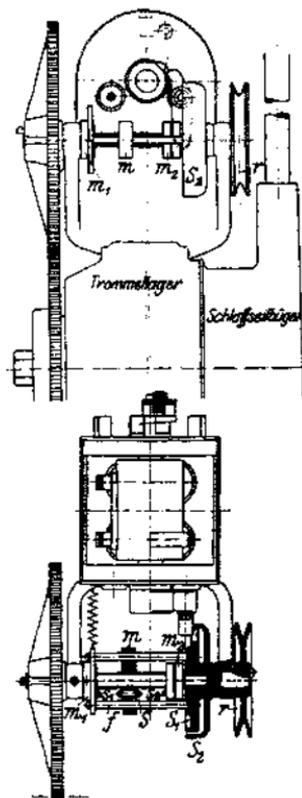


Fig. 269.

Bei Lastenaufzügen ohne Führerbegleitung verlangt § 23 der Polizeiverordnung, daß der Fahrkorb nicht bei geöffneten Türen in Betrieb gesetzt werden kann, und daß sich die Türen nur öffnen lassen, wenn der Fahrkorb an der Ladestelle angekommen ist. Dieser Bedingung wird durch Anordnung einer mechanischen Türverriegelung, die durch eine am Fahrkorb angebrachte Gleitbahn betätigt wird, sowie den Einbau von Tür- bzw. Türschloßkontakten genügt. Der Vorschrift kann auch durch Anordnung einer mechanischen Steuerverriegelung entsprochen werden, die unmittelbar das Steuerseil oder -Gestänge bei offener Tür verriegelt, sowie die geschlossenen Türen unter Verschuß hält.

Für Personenaufzüge und Lastenaufzüge mit Führerbegleitung sind die §§ 14 und 15 der Aufzugsverordnung maßgebend

§ 14 verlangt: „Die Fahrschächttüren müssen durch die Steuerung zwangsweise unter Verschuß gebracht werden und dürfen sich nur öffnen lassen, wenn der Fahrkorb in gleicher Höhe mit ihnen steht und zur Ruhe gebracht ist. Die Einleitung der Bewegung des Fahrkorbes muß so lange behindert sein, als nicht alle Fahrschächttüren fest verschlossen sind.“

Ferner dürfen die Türen während des Vorbeifahrens der Kabine nicht freigegeben werden. Auch muß es unmöglich sein, den Fahrkorb in Tätigkeit zu setzen, solange nicht alle Schächttüren ordnungsgemäß verschlossen und verriegelt sind.

Für Personenaufzüge ohne Führerbegleitung (Selbstfahrer) ist noch eine Türverriegelung mehr als für solche mit Führerbegleitung vorgeschrieben. Auch darf das Türschloß nur mittels besonderen Sicherheitsschlüssels geöffnet werden können.

Die von der Bewegung des Aufzuges abhängigen Türverriegelungen können entweder mechanisch oder elektrisch betätigt werden. Bei den mechanischen Verriegelungen schiebt eine am Fahrkorb angebrachte Gleitbahn die an den Schächttüren angebrachten, durch eine Feder in Verschußstellung gehaltenen Riegel zurück, sobald der Fahrkorb an der Schächttüre angekommen. Ein Nachteil dieser Verriegelung ist das Freigeben der Türe während der Vorbeifahrt des Aufzuges.

Die elektrischen Verriegelungen benutzen den Kern eines Hubmagneten als Riegel. Wird die Steuerung eingeschaltet, so zieht der Magnet den Kern an und bringt die Schächttüre unter Verschuß.

Sollen sämtliche Türen während der Fahrbewegung, also auch während des Vorbeifahrens der Kabine verriegelt sein, so kann die Betätigung sämtlicher Riegel durch ein im Fahrschacht angeordnetes Gestänge geschehen, das von einem gemeinsamen Magneten bewegt wird.

Fig. 270¹⁾ zeigt diese Verriegelung in ausgeschaltetem und eingeschaltetem Zustande. Es bedeuten: *B* Bremsluftmagnet, *V* Verriegelungsmagnet, *K* Hilfskontakt am Verriegelungsmagnet, *G* Riegelgestänge, *R* die durch *G* betätigten Riegel, *r* die durch Gleitbahn am Fahrkorb betätigten Riegel, *T* die Schächttüren.

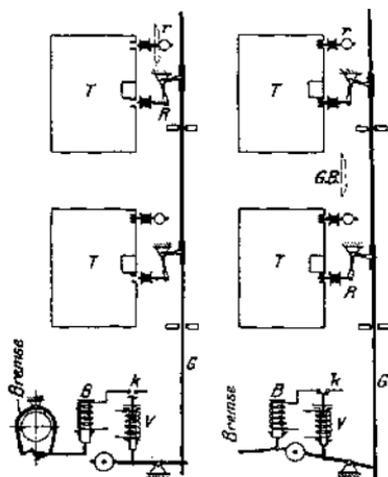


Fig. 270.

Das Verhindern der Bewegung des Fahrkorbes bei geöffneten Schächttüren geschieht auf mechanischem Wege durch die Steuerungsverriegelung, oder elektrisch durch die Türkontakte.

¹⁾ A. E. G.

Über mechanische Steuerungsverriegelungen siehe Hintz, Aufzugstechnik, und Bethmann, Aufzugsbau.

Bei den elektrischen Aufzügen mit mechanischer Steuerung liegen die Türkontakte im Erregerstromkreis des Motors, so daß ein Fahren des Korbes unmöglich, wenn eine der Schachttüren geöffnet.

Für Aufzüge mit elektrischer (Hebel- oder Druckknopf-) Steuerung werden die Türkontakte in den Steuerstromkreis gelegt. Ist also eine der Schachttüren geöffnet, so ist der Türkontakt offen und der Steuerstromkreis unterbrochen. Die in demselben liegenden Steuer- und Anlaßapparate können also nicht betätigt werden.

Versieht man die elektromagnetische Türverriegelung noch mit einem Kontakt und ordnet die Schaltung derart an, daß der Riegemagnet zuerst Strom bekommt, so verriegelt dieser die Schachttüre und stellt zu gleicher Zeit die Verbindung des Stromkreises für den Umschaltmagnet (s. S. 1215) her. Hat nun der Riegemagnet versagt, und ist die Tür nicht ordnungsgemäß verriegelt, so bleibt der Kontakt offen, und die Kabine kann nicht in Gang gesetzt werden.

Die Türkontakte dürfen nicht ohne weiteres zugänglich, auch darf eine Betätigung derselben von Hand nicht möglich sein.

Die vorerwähnten Verriegelungen und Kontakte werden zweckmäßig in einem Türschloß gemeinsam untergebracht, wodurch eine billige Herstellung und bequeme Montage erreicht wird. Das Türschloß kann noch die Schlüsselbetätigung zum Heranholen des Fahrkorbes, den Schalter für die Kabinenbeleuchtung und den Besetztanzeiger enthalten.

e) **Fußbodenkontakt.** Bei Aufzügen mit äußerer und innerer Druckknopfsteuerung ist nach § 15 der gesetzlichen Vorschriften eine Trennung der beiden verlangt. Dieses kann durch den Fußboden- oder Tretkontakt geschehen, der eine Steuerung des Aufzuges durch die an den Schachtzugängen befindlichen Druckknöpfe verhindert, sobald eine Person sich innerhalb des Fahrkorbes befindet. Der Tretkontakt kann gleichzeitig zur Aus- und Einschaltung der Fahrkorbbeleuchtung dienen. Auch wird es durch denselben ermöglicht, den leeren Fahrkorb auch bei geöffneter Kabinentüre herbeizuholen. Ferner läßt sich bei Vorhandensein eines Tretkontaktes die Einrichtung treffen, daß der Fahrkorb, nachdem er verlassen, von selbst nach einer bestimmten Haltestelle, z. B. nach dem Erdgeschoß, zurückkehrt.

Zur weiteren Ausrüstung der Aufzüge gehören:

Hub- und Stockwerksanzeiger. Sie sind bei Aufzügen, deren jeweilige Fahrkorbstellung nicht ersichtlich ist, in jedem Stockwerk anzuordnen.

Ein Läutewerk (bei Führerbegleitung überflüssig) sowie eine Notwinde. Diese kann eine über dem Schacht aufgestellte Handwinde sein, welche bei Bruch des Tragorgans zum Hochziehen des Fahrkorbes dient.

6. Paternosteraufzüge

sind ständig laufende Aufzüge und dienen sowohl für Lasten- als auch für Personenbeförderung. Solche für Lastenbeförderung fallen nicht in den Geltungsbereich der Polizeiverordnung.

Paternosteraufzüge für Personenbeförderung (Fig. 271)¹⁾ sind da angebracht, wo ein starker, dauernder Verkehr zwischen den einzelnen Stockwerken stattfindet. Sie ermöglichen bei ununterbrochener Bewegung der Kabinen ein Ein- und Aussteigen während der Fahrt.

Infolge Wegfalls der Wartezeit sind die Paternosteraufzüge von großer Leistungsfähigkeit (etwa 2500 Personen täglich) und erfordern bei hoher Betriebssicherheit²⁾ und geringem Verschleiß nur niedrige Unterhaltungskosten.

Die Paternosteraufzüge sind mit 10 bis 12 Fahrkörben ausgerüstet, die mittels Bolzen an zwei endlosen Ketten aufgehängt sich an der einen Seite des Fahrstuhls auf-, an der andern abwärts bewegen.

¹⁾ Carl Flohr, Berlin.

²⁾ Laut Unfallstatistik der Hamburger Polizei kommen auf 2 000 000 beförderte Personen nur 4,3 leichte Unfälle.

Zulässige Beanspruchung der Kette gleich $\frac{1}{3}$ der Bruchbelastung.

Jeder Fahrkorb bietet Raum für 1 bis 2 Personen. Bei der geringen Fahr-
geschwindigkeit von $v = \infty 0,25$ m/sek ist ein Anhalten in den einzelnen Stock-
werken unnötig, da die stets offenen Kabinen auch von wenig gewandten Per-
sonen bequem betretbar sind.

Die Aufzugmaschine ist in der Regel
im Keller angeordnet.

Bei der üblichen Ausführung (Fig. 271)
arbeitet der Motor mittels elastischer
Kupplung auf ein Schneckengetriebe und
von da durch ein doppelseitiges Stirn-
rädervorgelege auf die unteren festge-
lagerten Kettenräder.

Die Lager der oberen Kettenräder sind
dagegen verstellbar. Als Bremse dient
eine gewichtbelastete, doppelte Backen-
bremse, die bei Stromunterbrechung ein-
fällt. Der Motor ist für Dauerbetrieb
zu bemessen. Er ist am ungünstigsten
belastet, wenn die aufwärts gehenden
Fahrkörbe beladen und die abwärts gehen-
den leer sind. Sind die abwärts gehenden
Fahrkörbe besetzt und die aufwärts gehen-
den leer, so arbeitet der Motor bei Gleich-
strom und Drehstrom als Generator und
gibt Strom ins Netz zurück.

Das Einschalten des im Maschinenraum auf-
gestellten Anlagers geschieht durch elektrische
Fernsteuerung. Zu diesem Zwecke ist, rneist im
Erdgeschoss, ein Druckknopf angeordnet, der durch
einen Schlüssel bedient wird, um ein Anlassen sei-
tens unberechtigter Personen zu verhindern.

Die Anlaßvorrichtung selbst wird durch den
Bremslüftmagneten betätigt, der durch ein Ge-
stänge mit dem Anlasser gekuppelt ist. Wird der
Stromkreis des Bremsmagneten geschlossen, so
lüftet dieser die Bremse, dreht die Schaltkurbel des
Anlagers und setzt so den Motor in Gang. Damit
der Bremsmagnet während des Betriebes keinen
Strom verbraucht, ist am Anlasser ein Sperrmagnet
angeordnet, der den Strom des Bremsmagneten un-
terbricht. Beim Ausschalten wird der Strom des
Sperrmagneten unterbrochen und der Anlasser frei
gegeben, der dann in seine Nullstellung zurückgeht.

Die Fahrkörbe sind in Holzstraßen geführt
und gehen oben und unten unter Beibehaltung ihrer senk-
rechten Lage aus der einen Schachthälfte in die andere über.

Die Zugänge zu den Kabinen sind stets offen. Sie
werden, um ein verkehrtes Betreten unmöglich zu machen,
an der Decke halbkreisförmig ausgeschnitten.

Kleinste lichte Höhe der Fahrkörbe 2 m, Grundfläche
— 750 × 750 mm bei einer Person, — 1070 × 1060 bei zwei

Personen. Die entsprechenden lichten Schachtmaße betragen etwa 2200 × 1250
bzw. 2800 × 1650 mm. Am Fußboden der Fahrkörbe sowie an den Eintritts-
öffnungen sind bewegliche Klappen anzubringen, welche bei Hervorstrecken
eines Körperteiles betätigt werden und den Aufzug stellen.

Ferner ist eine Vorrichtung (Gestänge oder Druckknöpfe) anzuordnen, da-
mit den Fahrgästen von jeder Stelle aus ein Stillsetzen des Aufzuges ermöglicht
ist. Ein Wiederinbetriebsetzen desselben kann jedoch nur durch den Wärter
geschehen.

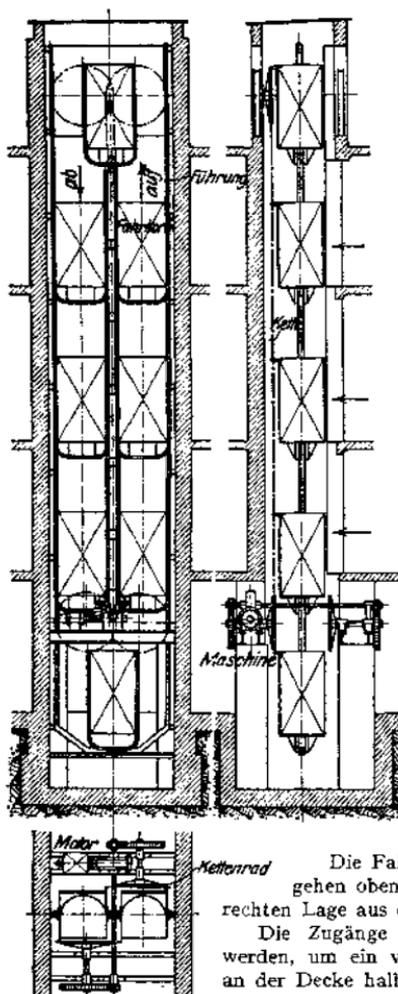


Fig. 271.

Werkzeugmaschinen für spanabhebende Metallbearbeitung.

Bearbeitet von Ingenieur E. Toussaint.

I. Werkzeuge.

A. Ausbildung des Spanes. Werkzeugwinkel. Arbeitswinkel.

Da eine rein mathematische Schneide nicht möglich ist, so tritt stets ein Zusammendrücken der Metallfaser ein, dem schließlich ein Zerreißen derselben folgt¹⁾.

Die theoretischen Ausführungen von Hermann²⁾, in guter Übereinstimmung mit den Versuchen von Thime²⁾ zeigen, daß dieses Zerreißen stets unter einem Winkel η erfolgt (Fig. 1, 2), der nach Hermann

$$\eta = 90^\circ - \frac{\gamma + \varrho + \varrho'}{2}$$

beträgt, wenn $\mu = \operatorname{tg} \varrho$ den Koeffizienten der Reibung zwischen Stahlbrust und zerspantem Material, $\mu' = \operatorname{tg} \varrho'$ den Koeffizienten der inneren Reibung für dieses Material bedeutet.

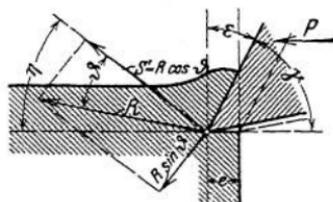


Fig. 1.

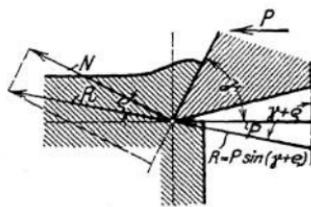


Fig. 2.

Lindner²⁾ setzt $\operatorname{tg} \varrho = 0,2$, $\operatorname{tg} \varrho' = 1$. und erhält:

$$\eta = 62^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

Bei sehr spröden Materialien bilden sich vor der Brust des Werkzeuges einzelne Brocken, bei zähen Stoffen erfolgt das Abscheren des Spanes erst nach starker Zusammenschiebung des Materials, und der an der Werkzeugbrust hochsteigende Spanbrocken hängt mit dem nachfolgenden noch mehr oder minder zusammen, so daß sich oft ein scheinbar ununterbrochener Span bildet. Die innere Zerrissenheit des Spanes wird dadurch verdeckt, daß infolge des Reibungswiderstandes an der Werkzeugbrust³⁾ die nachfolgenden Spanbrocken sich mit den vorher abgespaltenen verschweißen.

¹⁾ Karmarsch-Heeren, Techn. Wörterbuch, bearbeitet von Kick u. Gintl.

²⁾ Z. Ver. deutsch. Ing. 1907, S. 1072.

³⁾ Taylor-Wallich's, Über Dreharbeit und Werkzeugstähle. S. 30. Berlin 1908. Julius Springer.

Der Zerspanungswiderstand drückt die Werkzeugschneide in das Material hinein, bis der Querschnitt des verdrängten Materialstreifens so groß geworden ist, daß der Gegendruck W_2 hinreicht, um weiteres Eindringen zu verhindern (Fig. 3).

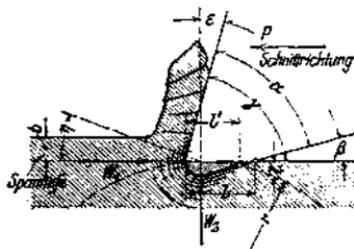


Fig. 3.

Am Werkzeugrückenschnitt muß das zusammengedrückte Material mit der „Schnittgeschwindigkeit v “ gleiten und hierbei darf infolge der Reibungsarbeit nicht mehr Wärme erzeugt werden, als Material und Werkzeug abzuleiten imstande sind.

Die Größe des Vertikaldruckes, dem W_2 Widerstand zu leisten hat, hängt, außer von dem zu zerspannendem Material und der Spanstärke t , ganz besonders von der Größe des „Spanabgangswinkels ϵ “ ab. Dieser Winkel stellt ein Maß dafür dar, um welchen Betrag der Span von seiner Bewegungsrichtung abgelenkt werden muß, um an der Brust des Werkzeuges entlang gleiten zu können (Fig. 4 und 5). Ein negativer Winkel ϵ (Fig. 6) würde das Werkzeug verhindern zu schneiden; es würde quetschen (Wirkung des Schabers).

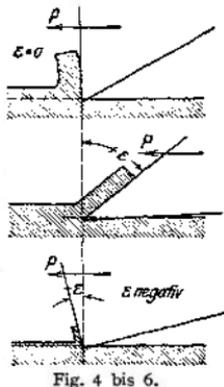


Fig. 4 bis 6.

Die Größe des „Rückenwinkels β “ bestimmt die Länge des Weges, auf dem die Reibungsarbeit und demgemäß die Erwärmung erfolgt. Seine Größe, in Verbindung mit der des Krümmungsradius r der erzeugten Werkstück-Oberfläche, bestimmt außerdem den Querschnitt des vorübergehend verdrängten Materialstreifens, und damit die Größe von W_2 .

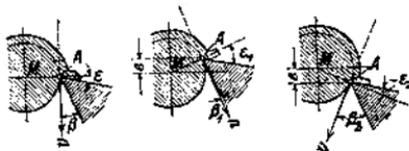


Fig. 7 bis 9.

Der „Schneiden- oder Meißelwinkel α “ hängt in seiner Größe von der Art des zu bearbeitenden Materials ab, und zwar kann eine allgemeine Regel dahin aufgestellt werden, daß für spröde Materialien (Brockenspäne, siehe oben) die größten, und für geschmeidige Materialien (Schälspäne) kleinere Meißelwinkel angebracht sind¹⁾.

Wichtiger als α , der dem Werkzeug eigentümlich ist, sind die „Arbeitswinkel“ β , ϵ , $\gamma = \alpha + \beta$, die von der Lage des Werkzeuges gegenüber dem Werkstück abhängen (Fig. 7 bis 9). Für β gilt als allgemeine Regel, daß β den kleinsten Wert erhält für das Schrappen dünner Zylinder und den größten für das Ausdrehen enger Bohrungen. Winkel $\epsilon = 90^\circ - (\alpha + \beta)$ soll tunlichst groß, d. h. α tunlichst klein gehalten werden.

Der Querschnitt des abgehenden Spanses ist ein Produkt aus der „Spantiefe t “ und der „Schaltung s “, so daß die Leistung der Zerspanung durch

$$L = t \cdot s \cdot K \cdot v \text{ mkg/min}$$

auszudrücken wäre, wenn der Wert K eine Konstante darstellte.

¹⁾ Hartig, Handb. d. mech. Technologie, 1875, S. 299. — Zentralztg. f. Optik u. Mechanik. (Egleston) 1885, S. 62. — Ledebur, Mechan. metallurg. Technologie 1897, S. 409. — Fischer, Werkzeugmaschinen. 2. Aufl. Berlin 1905, Julius Springer. — Taylor-Wallichs, S. 64. Berlin 1908. Julius Springer. — Schlesinger, W. T. 1913, S. 435. — Kruppscher Werkzeugstahl f. Schnellbetrieb, R. Zapp, Düsseldorf.

K ist für das Drehen und Bohren durch zahlreiche Versuche bestimmt worden, und hängt ab von Schaltung und Spantiefe, dann aber auch davon, wie die Zerspanungsarbeit auf die Hauptschneide AB und die Nebenschneide AC (Fig. 11) verteilt wird. Die Versuche von Taylor und die von Streiff¹⁾ und Vogler²⁾ widersprechen sich einigermäßen in bezug auf die Größe des „Anstellwinkels δ_1 “, indes ist als feststehend anzusehen, daß die Hauptschneidarbeit von AB verrichtet wird und daß AC lediglich das stehbleibende Material nachzuschlichten hat. Eine Abrundung beim Übergang der Hauptschneide in die Nebenschneide erscheint immer geraten, damit ein ruhigeres Arbeiten des Werkzeuges eintritt³⁾.

Schließlich ist noch zu beachten der „Überhöhungswinkel δ_2 “, der ein Abgehen des Spanes erleichtert, da durch Schräglegen der Schneide der Span vom Material abgelenkt wird.

B. Schnittgeschwindigkeit, Schaltung.

Die Werkzeugmaschine hat die Aufgabe, Werkstück und Werkzeug den für das Arbeiten nötigen Halt und die zur Spanabnahme erforderlichen Bewegungen zu vermitteln.

Für die Schnittgeschwindigkeit stellen Taylor³⁾ und Friedrich⁴⁾ Formeln auf, doch empfiehlt es sich, vorläufig die in der Tabelle (S. 1232) zusammengestellten Werte für „Schnittgeschwindigkeit v “ und „Schaltung s “ der Berechnung der Werkzeugmaschinen zugrunde zu legen.

C. Spezifischer Schnittdruck. Arbeitswiderstände.

Wie schon erwähnt, ist der spezifische Schnittdruck K keineswegs eine Konstante, sondern hängt von der Größe der Schaltung s ⁴⁾ und auch von der Spanstärke t ab. Die ausgelösten und von den Antriebsorganen der Werkzeugmaschinen zu überwindenden Widerstände sind in nachstehenden Formeln und Tabellen zusammengestellt worden.

1. Hobeln, Stoßen, Drehen.

W_1 (Fig. 10 bis 13) ist der Zerspanungswiderstand, dem eine Kraft P entgegenwirken muß, und zwar muß diese Kraft durch den sog. „Haupt- oder Schnittantrieb“ hergegeben werden. Den Widerstand W'' , den man, nach übereinstimmender Ansicht von Fischer und Taylor, in einer Größe gleich W_1 der Berechnung der Maschine zugrunde legen soll, muß eine Kraft P' überwinden, die der „Schaltantrieb“ zu liefern hat. Nach Taylor ist

$$\begin{aligned} P &= P' = 88 \cdot s^{3/4} \cdot t^{14/15} \text{ kg für weiches Gußeisen,} \\ &= 138 \cdot s^{3/4} \cdot t^{14/15} \text{ kg für hartes „ „ „} \\ &= 200 \cdot s^{3/4} \cdot t^{14/15} \text{ kg für mittelharten Stahl.} \end{aligned}$$

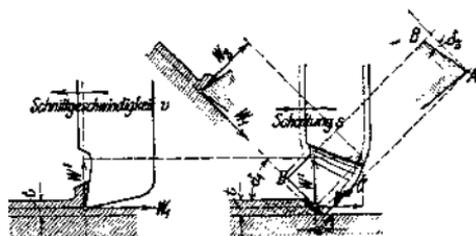


Fig. 10 bis 13.

¹⁾ Streiff, W. T. 1907, S. 793.

²⁾ Vogler, W. T. 1909, S. 538 ff.

³⁾ S. Diagramm von Nicholson, Taylor-Wallichs, S. 60 und die Folgerungen, die Taylor daraus für seine Versuche zieht.

⁴⁾ Friedrich, Z. Ver. deutsch. Ing. 1909, S. 860; 1914, S. 379.

In Fig. 14 sind vorstehende Formeln graphisch, in logarithmisch geteiltem Netz, aufgetragen und zwar stellen die Kurven 1 bis 5 dar:

$$1: 200 \cdot s^{14,15}, \quad 2: 138 \cdot s^{3,4}, \quad 3: 88 \cdot s^{3,4}, \quad 4: t, \quad 5: t^{14,15}.$$

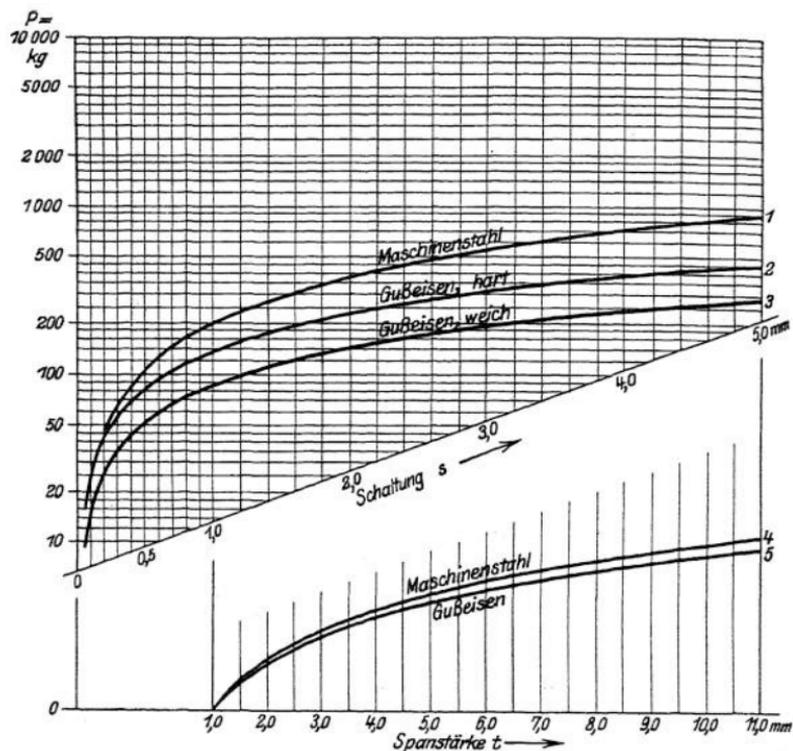


Fig. 14.

Liegt z. B. eine Schaltung $s = 3,4$ mm/Umdr., eine Spanstärke $t = 4,5$ mm, und als Material hartes Gußeisen vor, so hat man die durch (5) bestimmte Ordinate für $t = 4,5$ mm nach oben an die durch (2) bestimmte Ordinate für $s = 3,4$ mm anzusetzen, und liest ab:

$$P = P' \approx 1400 \text{ kg.}$$

Eine genaue logarithmische Rechnung ergibt $P = P' \cdot 1406,5$ kg.

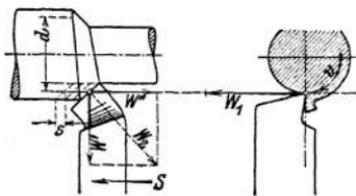


Fig. 15.

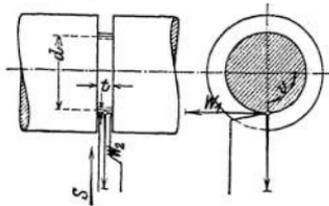


Fig. 16.

Beim Drehen und Abstechen (Fig. 15 und 16) ist $P \cdot d/2$ das vom Hauptantrieb zu liefernde Drehmoment. Beim Abstechen entspricht die Breite des Einstiches der Spantiefe t beim Hobeln und Drehen.

2. Bohren.

Für das Bohren liegen die außerordentlich sorgfältigen Versuche von Codron¹⁾ vor, die den in Fig. 20 und 21 dargestellten Diagrammen zugrunde liegen. In diesen Diagrammen sind die auf Rücken und Brust der Bohrerschneide wirkenden Widerstände $R \cdot s$ und $R_1 \cdot s$ für 1 mm Schneidenlänge in Abhängigkeit von der Bohrerschaltung dargestellt (s. auch Fig. 17 bis 19).

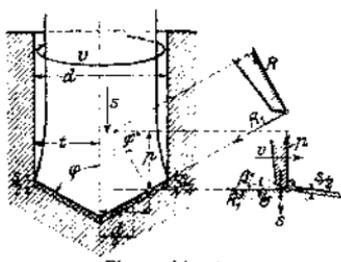


Fig. 17 bis 19.

Die „Vorschubkraft“, die den Eindringungswiderstand in der Längsrichtung des Bohrers überwinden muß, ist

$$P' = W_2 = R \cdot s \frac{d \sin \varphi}{2} \text{ kg.}$$

Sie wird aus dem Diagramm durch Multiplikation des betreffenden Ordinatenwertes mit $d \cdot 0,433 \text{ mm}$ ($\varphi = 60^\circ$) entnommen.

Das hier ebenfalls durch den Hauptantrieb zu liefernde „Drehmoment“, das am Hebelarm $\frac{d}{4}$ die Summe der Zerpannungswiderstände $R_1 \cdot \frac{s \cdot d}{2}$ überwinden muß, ist

$$M = R_1 \cdot s \frac{d^2}{8 \cdot 10} \text{ cmkg.}$$

¹⁾ Codron, Expériences sur le travail des machines-outils p. les métaux, Vol. 2, Paris, Dunod et Pinat, 1906; s. auch Lindner, Z. Ver. deutsch. Ing. 1907, S. 1757.

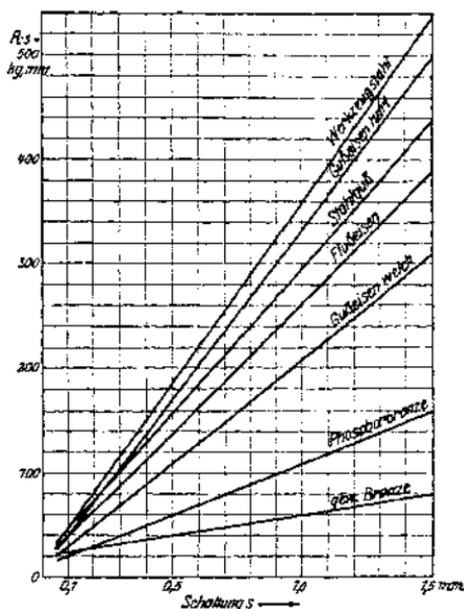


Fig. 20.

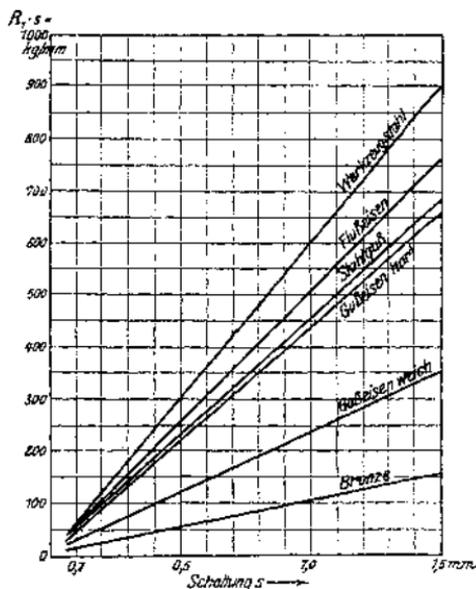


Fig. 21.

Für einen Bohrer von $d = 25$ mm, der mit einer Schaltung $s = 0,4$ mm/Umdr. auf Flußeisen arbeiten soll, ist $R \cdot s = 115$ kg/mm, also: $P' = 115 \cdot 25 \cdot 0,433 = 1250$ kg und $R_1 \cdot s = 210$ kg/mm, also $M = 210 \cdot \frac{25^2}{80} = 1640$ cmkg.

Aus Fig. 17 ist zu ersehen, daß beim Bohren $\frac{d}{2}$ an Stelle der Spantiefe t tritt.

Tafel der Schnittgeschwindigkeiten v (m/min) und Schaltungen s
für 1—3 in mm/Umdr., 4—5 in mm/min, 6 in mm/Hub.

	Gußeisen		Schmiedeeisen		Maschinenstahl		Bronze, Rotguß, Messing	
	v	s	v	s	v	s	v	s
1. Drehen	6—12 ¹⁾ 15—20	0,1—3 0,5—5	10—13 20—30	0,1—3 0,5—5	8—12 15—25	0,1—3 0,5—5	15—20 20—40	0,1—3 0,1—3
2. Abstechen	5—10 15—20	0,05—1,5 0,05—1,5	6—12 15—20	0,02—1,0 0,02—1,0	5—10 12—18	0,02—1,0 0,02—1,0	12—20 —	0,02—1,0 —
3. Bohren	8—12 16—20	0,1—0,5 0,2—2,0	10—15 18—25	0,1—0,5 0,2—1,5	6—10 15—20	0,1—0,5 0,2—1,5	16—20 25—35	0,1—1,0 0,1—1,0
4. Planfräsen	10—15 25—40	15—150 25—250	12—18 30—50	15—150 30—300	10—15 25—40	15—150 25—250	25—40 40—70	25—200 30—300
5. Zahnfräsen	9—12 15—20	15—75 25—90	10—15 16—20	15—50 25—70	8—12 15—18	12—40 20—60	20—40 —	25—100 —
6. Hobeln, Stoßen	5—10 10—15	0,1—7 0,5—11	6—12 10—15	0,1—7 0,5—11	5—10 10—15	0,1—7 0,5—11	10—20 —	0,1—10 —
7. Gewinde-schneiden	$v = 2—5$ m/min						$v = 6—15$ m/min	
8. Schleifen für alle Materialien	Arbeitsstück m/min 10—20 ²⁾	Schleifscheibe m/min 1500—2100	Anstellen der Scheibe mm 0,01—0,15	Schaltung der Scheibe mm/Umdr. $\frac{2}{3}—\frac{1}{1}$ d. Scheibenbreite.				

3. Fräsen.

Für das Fräsen liegen zuverlässige neuzeitliche Versuche nicht vor und es müssen deshalb bis auf weiteres die Formeln von Fischer³⁾ Anwendung finden, die für die hier benutzten Bezeichnungen und Dimensionen umgeändert wurden.

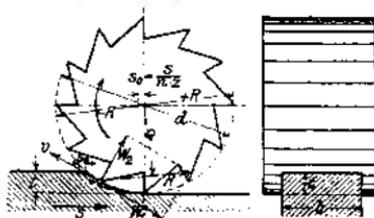


Fig. 22.

Fig. 23.

Bezeichnen in Fig. 22, 23:

- b die Breite des Werkstückes senkrecht zur Fräsefräse in mm,
- t die Höhe der abgenommenen Schicht in mm,
- s die Schaltung in mm/min,
- v die Umfangsgeschwindigkeit des Fräses in m/min,
- z die Zähnezah und
- d den Durchmesser desselben in mm,

¹⁾ Die oberen Zahlenwerte gelten für Kohlenstoffstahl, die unteren für Schnelldrehstahl.

²⁾ Die kleineren Werte für große, die größeren für kleine Durchmesser, für das Schichten ganz geringe Geschwindigkeiten.

³⁾ Fischer, Werkzeugmaschinen, 2. Aufl., Bd. 1, S. 16 ff. Berlin 1905. Julius Springer.

so ist:

Wenn nur ein Zahn arbeitet	Wenn mehrere Zähne gleichzeitig arbeiten
in cmkg: das Drehmoment für die Fräsarbeit	
$M = 3,14 \cdot 10^{-4} \frac{b \cdot s}{Z \cdot v} dK \sqrt{dt - t^2}$	$M = 0,5 \cdot 10^{-4} \frac{b \cdot s}{v} dtK$
in kg: der vom Schaltantrieb zu überwindende Widerstand	
$P' = 6,28 \cdot 10^{-4} \frac{b \cdot s}{Z \cdot v} K \sqrt{dt - t^2}$	$P' = 10^{-4} \frac{b \cdot s}{v} tK$
in kg: der auf die Fräserwelle biegend wirkende Druck	
$R = 8,9 \cdot 10^{-3} \frac{b \cdot s}{Z \cdot v} K \sqrt{dt - t^2}$	$R = 1,4 \cdot 10^{-3} \frac{b \cdot s}{v} tK$

Für K sind vorläufig die Werte aus nachstehender Tabelle¹⁾ einzusetzen:

für Gußeisen	$K = 70-120$ kg/mm ²
„ Schmiedeeisen.	$K = 110-170$ „
„ Stahl	$K = 160-240$ „

Für einen Fräser mit Spiralzähnen vom Durchmesser $d=75$ mm und $s=25$ Zähnen, der, mit einer Schnittgeschwindigkeit $v=12$ m/min und einer Schaltung $s=30$ mm/min auf Schmiedeeisen arbeitend, eine Schicht von $b=80$ mm Breite und $t=3$ mm Höhe abnimmt, ergibt sich, wenn $K=100$ kg/mm² ist, das Drehmoment zu

$$M = 0,5 \cdot 10^{-4} \frac{80 \cdot 30}{12} 75 \cdot 3 \cdot 100 = 225 \text{ cmkg.}$$

4. Schleifen.

Nach der älteren Ansicht²⁾ verbrauchen die Antriebsorgane einer Schleifmaschine so viel Kraft, daß die für das eigentliche Schleifen in Frage kommende dagegen verschwindet. Die neuzeitlichen Versuche von Schlesinger³⁾ und Pockrandt⁴⁾ haben gezeigt, daß dem nicht so ist. Wenn auch noch nicht genau die Gesetze ermittelt worden sind, nach denen der Schleifwiderstand in Abhängigkeit von Spantiefe und Schaltung wächst, so sind doch einige Folgerungen deutlich aus den angestellten Versuchen zu ziehen.

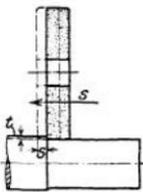


Fig. 24.

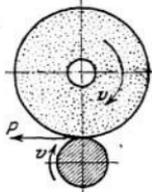


Fig. 25.

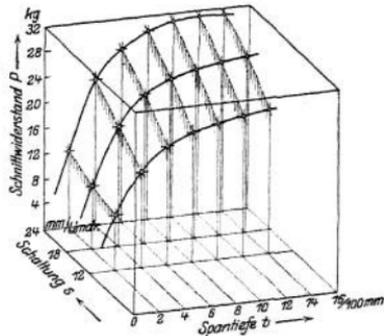


Fig. 26.

Die Tangentialkraft P (Fig. 24, 25) wächst, wie aus dem räumlichen Diagramm Fig. 26³⁾ zu ersehen ist, mit zunehmender Schaltung und Spantiefe, doch nicht proportional denselben; ferner nimmt P ab mit zunehmender Schnittgeschwindigkeit v , die bei den der Fig. 26 zugrunde liegenden Versuchen 1500 m/min bei Bearbeitung von Maschinenstahl betrug.

¹⁾ Fischer, Werkzeugmaschinen, 2. Aufl., Bd. 1, S. 14. Berlin 1905. Julius Springer.

²⁾ Codron, Expériences sur les machines-outils, Paris 1912. „Dans la plupart des meuleuses à rectifier l'énergie absorbée par le meulage est très faible, relativement à celle qu'absorbe la commande des organes.“

³⁾ Schlesinger, Versuche über die Leistung von Schmirgelscheiben. Mitt. über Forschungsarbeiten, Heft 43. 1907.

⁴⁾ Pockrandt, Versuche zur Ermittlung der günstigsten Arbeitsweise der Rundschleifmaschine. Mitt. über Forschungsarbeiten, Heft 105. 1911.

Arbeitsaufwand in mkg/g zerspanten Materials.

Schaltung mm, Umdr.	Material Spantiefe	Schmiedeeisen		Gußeisen	
		$f = 0,02 \text{ mm} \quad t = 0,14 \text{ mm}$	$f = 0,02 \text{ mm} \quad t = 0,14 \text{ mm}$	$f = 0,02 \text{ mm} \quad t = 0,14 \text{ mm}$	$f = 0,02 \text{ mm} \quad t = 0,14 \text{ mm}$
$s = 12 \text{ mm}$	$v = 1500 \text{ m/min}$	1930	635	2180	540
	$v = 2100 \text{ „}$	2070	685	2230	690
$s = 24 \text{ mm}$	$v = 1500 \text{ „}$	—	525	—	350
	$v = 2100 \text{ „}$	—	540	—	480

II. Konstruktionselemente der Werkzeugmaschinen.

A. Antriebsorgane für Schnitt- und Schaltbewegung.

I. Grundlegende Betrachtungen.

a) Wahl der Reihen für Abstufung der Drehzahlen.

Die sehr stark verschiedenen Schnittgeschwindigkeiten, die sich als zweckmäßig für die Bearbeitung der einzelnen Materialien herausgestellt haben, würden an sich schon eine größere Anzahl von Drehzahlen für den Haupt- oder Schnittantrieb erfordern, wenn die Durchmesser von Werkstück und Werkzeug unveränderlich wären. Nun ist dies aber nur bei den Hobel- und Stoßmaschinen der Fall, wo die Werkstücke oder auch die Werkzeugschneiden sich geradlinig, d. h. auf stets gleichen Kreisen mit unendlichem Radius bewegen. Für alle anderen Werkzeugmaschinen liegt eine kreisende Bewegung mit endlichem Radius von Werkstück oder Werkzeugschneide vor. Es ergibt sich die Forderung, für das vorliegende Material, unabhängig vom gegebenen Durchmesser, Innehaltung der nötigen Schnittgeschwindigkeit an der Arbeitsstelle zu gewährleisten. Das zwingt zur Beachtung der Gleichung:

$$n = \frac{v \cdot 1000}{d \cdot \pi},$$

worin n die Drehzahlen in der Minute,

v die Schnittgeschwindigkeit in m/min,

d den Durchmesser von Werkstück oder Werkzeug in mm angibt.

Sondert man $\frac{v \cdot 1000}{\pi} = C$ als Konstante ab, so erkennt man die Form der gleichseitigen Hyperbel

$$n \cdot d = C \text{ (für } v = \text{konst.)}^1.$$

In Fig. 27, 28 ist für die konstant angenommene Schnittgeschwindigkeit $v = 22 \text{ m/min}$ diese Hyperbel zweimal angetragen, und man müßte, um für jeden Durchmesser und dann auch für jede Schnittgeschwindigkeit innerhalb der Grenzen:

$$n_{\min} = \frac{v_{\min} \cdot 1000}{d_{\max} \cdot \pi}$$

und

$$n_{\max} = \frac{v_{\max} \cdot 1000}{d_{\min} \cdot \pi}$$

¹⁾ Adler, Umlaufreihen bei Werkzeugmaschinen. Z. Ver. deutsch. Ing. 1907, S. 1491.

der gestellten Forderung gerecht zu werden, eine ununterbrochene Reihe von Drehzahlen erzeugen können. Ein Mittel, diese Aufgabe zu erfüllen, bieten die Reibgetriebe, von denen in Fig. 39, 40 zwei Beispiele gegeben sind¹⁾.

Im allgemeinen wird dieses Hilfsmittel nur noch bei den Abstechmaschinen (s. Fig. 16) angewendet, wo sich während der Arbeit die Schnittgeschwindigkeit an der Arbeitsstelle ständig verringert, wenn man nicht für eine stetige Änderung der Drehzahl Sorge trägt. Ein anderes Mittel für Änderung der Drehzahlen (mit außerordentlich geringen Sprüngen), wobei praktisch der Forderung $n = \frac{v \cdot 1000}{d \cdot \pi}$ genügend genau Rechnung getragen wird, bietet der Antrieb durch Stufenmotoren, von denen später²⁾ noch gesprochen werden soll.

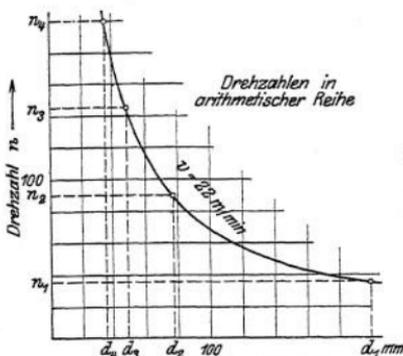


Fig. 27.

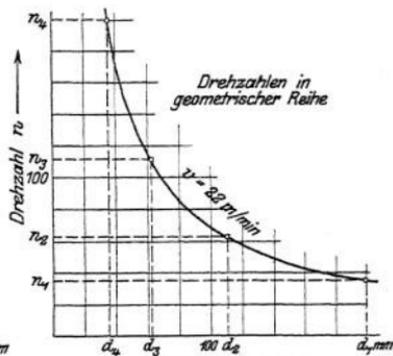


Fig. 28.

Im allgemeinen wird es sich darum handeln, die Drehzahlen in irgendeiner Reihe abzustufen und den Stufensprung möglichst so klein zu halten, daß er praktisch keine allzu große Bedeutung erlangt.

Die allein für den Werkzeugmaschinenbau in Frage kommenden Reihen sind: die arithmetische Reihe, bei der die Differenz δ , und die geometrische oder logarithmische Reihe, bei der der Quotient φ von zwei aufeinanderfolgenden Gliedern konstant bleibt.

Bezeichnung der Reihe	n_1	n_2	n_3	n_4	n_z
arithmetisch	n_1	$n_1 + \delta$	$n_1 + 2\delta$	$n_1 + 3\delta$	$n_1 + (z-1) \cdot \delta$
geometrisch	n_1	$n_1 \cdot \varphi$	$n_1 \cdot \varphi^2$	$n_1 \cdot \varphi^3$	$n_1 \cdot \varphi^{z-1}$

Aus $n_z = n_1 + (z-1) \cdot \delta$ folgt: $\delta = \frac{n_z - n_1}{z-1}$ und $z = \frac{n_z - n_1}{\delta} + 1$,

aus $n_z = n_1 \cdot \varphi^{z-1}$ folgt: $\varphi = \sqrt[z-1]{\frac{n_z}{n_1}}$ und $z = \frac{\log \frac{n_z}{n_1}}{\log \varphi} + 1$.

Unter Annahme von 4 Drehzahlen mit den Grenzwerten $n_1 = 35$, $n_4 = 200$ Umdr./min findet man für beide Reihen und für $v = 22$ m/min:

Reihe	z	δ	φ	n_1	n_2	n_3	n_4
arithmetisch . .	4	55	—	35	90	145	200 Umdr./min
geometrisch . .	4	—	1,79	35	63	112	200 „

¹⁾ Siehe Maschinenteile S. 623, Fig. 149, und S. 675, Fig. 296 bis 298.

²⁾ Siehe S. 1345, elektrischer Einzelantrieb von Werkzeugmaschinen.

Es wurden nun die Drehzahlen auf den Ordinatenachsen je einer der Hyperbelen in Fig. 27, 28 angetragen, und die zugehörigen Durchmesser, für welche v den richtigen Wert annimmt, sind aus nachstehender Tabelle zu entnehmen:

Reihe	d_1	d_2	d_3	d_4
arithmetisch . . .	200	78	48	35 mm
geometrisch . . .	200	112	63	35 „

Der Augenschein lehrt, daß für den Schnittantrieb die Abstufung der Drehzahlen nach geometrischer Reihe vorteilhafter ist, weil sich dann die zugehörigen Durchmesser ebenfalls geometrisch abstufen. Bei Anwendung der arithmetischen Reihe stehen für die Durchmesser unter 80 mm die Drehzahlen unnötig dicht, während für die über 78 mm bis 200 mm nur die Wahl zwischen $n_2 = 90$ oder $n_1 = 35$ Umdr./min übrigbleibt. Die größere Drehzahl ist aber ungeeignet, weil damit für Durchmesser über 78 mm eine Schnittgeschwindigkeit von mehr als 22 m/min (z. B. für einen Drehdurchmesser von 110 mm eine solche von $v = 31$ m/min) entstehen würde.

Um diesen Uebelstand zu vermeiden, ist man gezwungen, bei $d = 110$ mm mit $n_1 = 35$ zu arbeiten, was eine Schnittgeschwindigkeit von $v = 12,1$ m/min, d. h. ein Zurückbleiben hinter der geforderten Größe um 45 v. H. bedeutet.

Bei Anwendung der geometrischen Reihe aber würde man schon bei 112 mm Durchmesser wieder eine neue Drehzahl zur Verfügung haben, also, falls $v_{\max} = 22$ m/min nicht überschritten werden soll, überhaupt nicht auf einen größeren Abfall als 44 v. H. kommen.

Bei Anwendung der arithmetischen Reihe, unter Einhaltung der gleichen Bedingung, würde v für $d = 78$ mm auf 8,6 m/min, also um 61 v. H. der richtigen Schnittgeschwindigkeit, fallen.

Handelt es sich um den Schaltantrieb, so liegen zunächst, weil dann die Durchmesser von Werkstück und Werkzeug ohne Einfluß sind, solange keine Bedenken gegen die arithmetische Reihe vor, wie alle Drehzahlen der

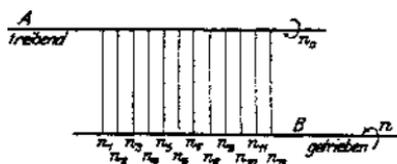


Fig. 29.

eines Sperrrades ausholend, beim Rückgange die schaltende Schraubenwelle um 1, 2, 3, 4 . . . Bruchteile einer ganzen Umdrehung mitnimmt.

Diese Art der Schaltung ist schematisch nach dem Vorgange von Adler in Fig. 29 dargestellt, wo A die treibende, B die getriebene Welle bedeutet, die bei stets gleichbleibender Drehzahl n_0 der Welle A die Drehzahlen n_1, n_2, n_3, \dots annimmt.

b) Gruppensprung, Einfluß desselben.

Will man die Reihe unterteilen, indem man eine Zwischenwelle A' einführt (Fig. 30), die von A aus mit verschiedenen Übersetzungsverhältnissen, also bei gleichbleibender Drehzahl n_0 für A mit den Drehzahlen n_0', n_0'', n_0''' getrieben werden soll, so stellen sich der Beibehaltung der arithmetischen Reihe große Schwierigkeiten entgegen.

In Fig. 31 ist für 12 Drehzahlen mit den Endgliedern $n_1 = 5$ und $n_{12} = 401$ Umdr./min, also für $\delta = 36$ Umdr./min, eine arithmetische Reihe aufge-

tragen, die sich natürlich als Gerade darstellen muß. Soll diese Reihe unterteilt werden, entsprechend Fig. 30, und zwar zunächst unter Beibehaltung der Drehzahlen $n_{12} = 401$ bis $n_8 = 257$ und $n_4 = 113$ Umdr./min, so muß für $n'_0 = 1$

$$n''_0 = \frac{257}{401} = \frac{1}{1,56}, \quad n'''_0 = \frac{113}{401} = \frac{1}{3,55}$$

sein.

	1	2		3		4				
n_1	5	$\delta = 36$	$n'''_0 = 1:3,55$	83	$n'''_0 = 1:1,56^2$	120	$n''_0 = 1$	5	$\delta = 36$	
n_2	41			93		135		15		41
n_3	77			103		150		15		77
n_4	113			113		165		15		113
n_5	149	$n''_0 = 1:1,56$	$\delta = 23$	188	$n''_0 = 1:1,56$	188	$n''_0 = 30:1$	150	$\delta = 1080$	
n_6	185			211		211		23		1 230
n_7	221			234		234		23		2 310
n_8	257			257		257		23		3 390
n_9	293	$n'_0 = 1$	$\delta = 36$	293	$n'_0 = 1$	293	$n'_0 = 30^2:1$	4 500	$\delta = 32400$	
n_{10}	329			329		329		36 900		
n_{11}	365			365		365		69 300		
n_{12}	401			401		401		101 700		

Es entstehen dann, neben der beibehaltenen Gruppe n_9 bis n_{12} , 2 neue Gruppen, für n_5 bis n_8 und n_1 bis n_4 , die, in Spalte 2 eingetragen, zum Schluß recht starke Abweichungen von der ursprünglichen Reihe und, im Diagramm noch besser erkennbar, zwischen n_5 und n_4 einen übergroßen Sprung von 75 Umdr./min zeigen.

Wird der Gruppensprung von $1:1,56$ auch für $n_4:n_8$, also für $n_4:n_{12}$ der Sprung $1:1,56^2$ beibehalten, so entsteht die Reihe mit dem Anfangsglied $n_1 = 120$, die zwar in den Drehzahlen n_1 bis n_4 eine noch größere Abweichung von

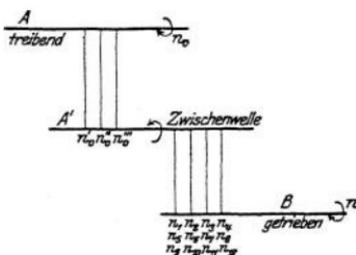


Fig. 30.

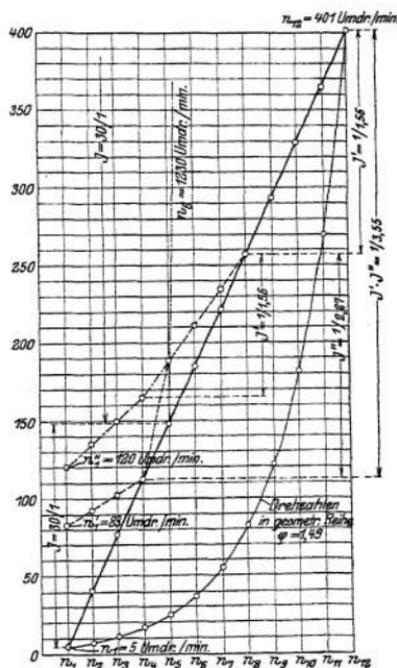


Fig. 31.

der richtigen Reihe, im ganzen aber einen wesentlich gleichmäßigeren Verlauf zeigt, als die Werte der Spalte 2.

Die Gruppensprünge $n'_0 = \frac{1}{1}$, $n''_0 = 1:1,56$, $n'''_0 = 1:1,56^2$

zeigen hier aber schon eine geometrische Reihe, und die gebrochene Linie, durch welche die Reihe im Diagramm dargestellt wird, weist schon eine gewisse Ähnlichkeit auf mit der Kurve der geometrisch abgestuften 12 Drehzahlen mit den gleichen Endgliedern $n_1 = 5$ und $n_{12} = 401$; diese ist zum Vergleich ebenfalls in das Diagramm eingetragen.

Es wird damit deutlich auf die gute Eignung der geometrischen Reihe hingewiesen, die im Nachstehenden, mindestens für unterteilte Reihen, immer angewendet werden soll. Spalte 4 der Tabelle zeigt die Reihe, die entstünde, wenn man den Gruppensprung $n_2:n_1 = 30:1$ beibehalten würde.

In Fig. 32 ist auf logarithmisch geteiltem Koordinatenpapier die geometrische Reihe aus Fig. 31 wiederholt, die sich hier natürlich als Gerade darstellen muß. Die Zwischenglieder der Reihe können mit genügender Genauigkeit aus dem Diagramm entnommen werden und sind in Spalte 1 der Tabelle 4 eingetragen. Spalte 2 enthält die durch Unterteilung in 2 Gruppen mit dem Gruppensprung 1:11 erhaltene Reihe, die, auf ganze Drehzahlen abgerundet, von der richtigen Reihe überhaupt nicht abweicht. Werden drei

Gruppen mit den Sprüngen 1:5 und 1:5², oder vier mit 3:10, 1:11 = 3²:10² und mit 3:110 gebildet, so ist besonders im letzten Fall die Abweichung so unbedeutend, daß sie praktisch gar nicht in Frage kommt.

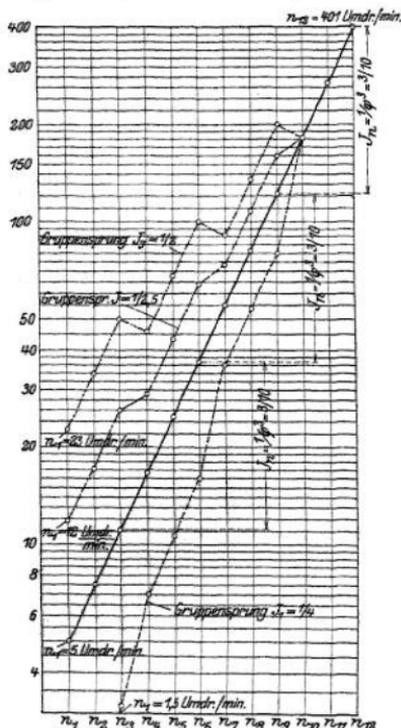


Fig. 32.

Tabelle 4.

	1	2	3	4
n_1	5	5	5	5
n_2	7	7	7	7
n_3	11	11	11	11
n_4	17	17	16	17
n_5	25	25	24	25
n_6	37	37	36	37
n_7	55	55	54	55
n_8	82	82	80	81
n_9	122	122	122	120
n_{10}	182	182	182	182
n_{11}	270	270	270	270
n_{12}	401	401	401	401

Das logarithmische Diagramm der geometrischen Reihe gestattet einen vorzüglichen Überblick darüber, ob bei Auswahl der Abmessungen für die Antriebsorgane die richtigen Gruppensprünge berücksichtigt worden sind. Tabelle 5

zeigt die Anwendung falscher Gruppensprünge, die sich deutlich im Diagramm bemerkbar macht.

Tabelle 5.

	$J = \frac{1}{5}$	$J = \frac{1}{2,5}$	$J = \frac{1}{2}$	
n_1	5	1,5	12	23
n_2	7	2	17	34
n_3	11	3	26	50
n_4	17	7	29	46
n_5	25	11	43	68
n_6	37	16	64	100
n_7	55	36	73	91
n_8	82	54	108	135
n_9	122	80	160	200
n_{10}	182	182	182	182
n_{11}	270	270	270	270
n_{12}	401	401	401	401

Der Gruppensprung muß stets einer vollen Potenz des Quotienten φ der geometrischen Reihe entsprechen, was in nachstehendem Schema deutlich gemacht ist:

1. n_1

$n_2 = n_1 \cdot \varphi$	$n_3 = n_1 \cdot \varphi^2$	$n_4 = n_1 \cdot \varphi^3$	$n_5 = n_1 \cdot \varphi^4$	$n_6 = n_1 \cdot \varphi^5$	$n_7 = n_1 \cdot \varphi^6$	$n_8 = n_1 \cdot \varphi^7$	$n_9 = n_1 \cdot \varphi^8$	$n_{10} = n_1 \cdot \varphi^9$	$n_{11} = n_1 \cdot \varphi^{10}$	$n_{12} = n_1 \cdot \varphi^{11}$
---------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	--------------------------------	-----------------------------------	-----------------------------------

aus:
 $n_{12} = n_1 \cdot \varphi^{11}; \varphi = \sqrt[11]{\frac{n_{12}}{n_1}} = \sqrt[11]{\frac{401}{5}} = 1,49$
 aus
 $J = \frac{n_1}{n_7} = \frac{n_2}{n_8} = \frac{n_3}{n_9} = \frac{n_4}{n_{10}} = \frac{n_5}{n_{11}} = \frac{n_6}{n_{12}}$
 $J = \frac{1}{\varphi^6} = \frac{1}{11}$

2. n_1

$n_2 = n_1 \cdot \varphi$	$n_3 = n_1 \cdot \varphi^2$	$n_4 = n_1 \cdot \varphi^3$	$n_5 = n_1 \cdot \varphi^4$	$n_6 = n_1 \cdot \varphi^5$	$n_7 = n_1 \cdot \varphi^6$	$n_8 = n_1 \cdot \varphi^7$	$n_9 = n_1 \cdot \varphi^8$	$n_{10} = n_1 \cdot \varphi^9$	$n_{11} = n_1 \cdot \varphi^{10}$	$n_{12} = n_1 \cdot \varphi^{11}$
---------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	--------------------------------	-----------------------------------	-----------------------------------

$J_1 = \frac{n_1}{n_5} = \frac{n_2}{n_6} = \frac{n_3}{n_7} = \frac{n_4}{n_8}$
 $J_1 = \frac{1}{\varphi^4} = \frac{1}{4,93} \approx \frac{1}{5}$
 $J_2 = \frac{n_1}{n_9} = \frac{n_2}{n_{10}} = \frac{n_3}{n_{11}} = \frac{n_4}{n_{12}}$
 $J_2 = \frac{1}{\varphi^8} = \frac{1}{24,4} \approx \frac{1}{25}$

3. n_1

$n_2 = n_1 \cdot \varphi$	$n_3 = n_1 \cdot \varphi^2$	$n_4 = n_1 \cdot \varphi^3$	$n_5 = n_1 \cdot \varphi^4$	$n_6 = n_1 \cdot \varphi^5$	$n_7 = n_1 \cdot \varphi^6$	$n_8 = n_1 \cdot \varphi^7$	$n_9 = n_1 \cdot \varphi^8$	$n_{10} = n_1 \cdot \varphi^9$	$n_{11} = n_1 \cdot \varphi^{10}$	$n_{12} = n_1 \cdot \varphi^{11}$
---------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	--------------------------------	-----------------------------------	-----------------------------------

$J_1 = \frac{n_1}{n_2} = \frac{n_2}{n_6} = \frac{n_3}{n_8}$
 $J_1 = \frac{1}{\varphi^5} = \frac{1}{3,31} \approx \frac{3}{10}$
 $J_2 = \frac{n_1}{n_7} = \frac{n_2}{n_8} = \frac{n_3}{n_9}$
 $J_2 = \frac{1}{\varphi^6} = \frac{1}{11}$ (s. oben)
 $J_3 = \frac{n_1}{n_{10}} = \frac{n_2}{n_{11}} = \frac{n_3}{n_{12}}$
 $J_3 = \frac{1}{\varphi^9} = \frac{1}{36,3} \approx \frac{3}{110}$

c) Praktische Bedeutung des Quotienten φ der geometrischen Reihe.

In Fig. 27, 28 wurde $v = \text{konst.}$ angenommen, und die Gleichung $n \cdot d = C$ ergab für $n = f(d)$ eine gleichseitige Hyperbel. Setzt man in die Formel:

$$v = \frac{d \cdot \pi \cdot n}{1000}, \quad \frac{\pi \cdot n}{1000} = C \text{ ein, so erhält man}$$

$$v = d \cdot C.$$

d. h. die Gleichung einer Geraden für $v = f(d)$ bei $n = \text{konst.}$

Liegt nun z. B. für eine Drehbank eine Reihe von 8 Drehzahlen vor mit den Grenzwerten $n_1 = 8, n_8 = 320$ Umdr./Min. und dem Quotienten $\varphi = \sqrt[7]{\frac{320}{8}} = 1,69$, so ist die vollständige Reihe:

$$\begin{array}{ll} n_1 = 8 & n_5 = 66 \\ n_2 = 14 & n_6 = 112 \\ n_3 = 23 & n_7 = 188 \\ n_4 = 39 & n_8 = 320. \end{array}$$

Man ist imstande, 8 Diagramme für $v = f(d)$, nämlich je eines für $n_1 = \text{konst.}, n_2, n_3 \dots n_8 = \text{konst.}$ aufzustellen, die dann natürlich gerade

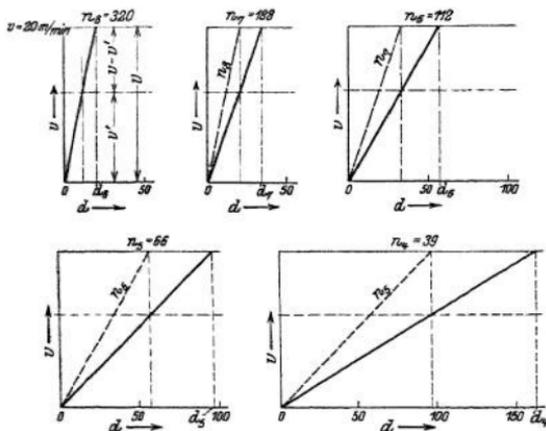


Fig. 33 bis 37.

durchmesser die Schnittgeschwindigkeit auf $v' = v \frac{n_1}{n_8} = \frac{v}{\varphi} = 11,8$ m/min.

Diese neue Drehzahl ist ihrerseits bis zu einem Drehdurchmesser $d_7 = 34$ mm verwendbar und muß von da an durch $n_6 = 112$ Umdr./min ersetzt werden, was abermals einen Schnittgeschwindigkeitsabfall von $v - v' = 20 - 11,8 = 9,2$ m/min ergibt, da $v' = v \frac{n_1}{n_6} = \frac{v}{\varphi}$ ist. In den Fig. 35 bis 37 ist die gleiche Überlegung noch für $n_6 = 112, n_5 = 66$ und $n_4 = 39$ Umdr./min ausgeführt, und schließlich sind in Fig. 38 die Diagramme für die 8 Drehzahlen so übereinandergelagert worden, daß ihre Koordinatenanfangspunkte zusammenfallen.

Man ersieht nun deutlich aus Fig. 38 folgendes:

Der Quotient φ der geometrischen Reihe ist ein Maß für den maximalen Schnittgeschwindigkeitsabfall beim Übergang von einer Drehzahl auf die nächstniedere.

Linien ergeben müssen (in Fig. 33 bis 37 stark ausgezogen). Wird die Forderung aufgestellt, daß $v_{\text{max}} = 20$ m/min nicht überschritten werden soll, so ist $n_2 = 320$ Umdr./min bis zu einem Drehdurchmesser $d_8 = 20$ mm zu verwenden. Größere Durchmesser würden bei der gleichen Drehzahl zu große

Schnittgeschwindigkeiten ergeben, und eine geringere Drehzahl — hier $n_7 = 188$ Umdr./min — ist einzuführen; dadurch sinkt bei 20 mm Dreh-

Der **Schnittgeschwindigkeitsabfall** selbst ist

$$\frac{v - v'}{v} = \frac{\varphi - 1}{\varphi}$$

Für $\varphi = 1,69$ ist also $\frac{v - v'}{v} = \frac{0,69}{1,69} = 0,41$, d. h. beim Übergang von einer Drehzahl auf die nächstniedere fällt die Schnittgeschwindigkeit bei gleichbleibendem Drehdurchmesser um 41%.

Das Diagramm der Fig. 38 hat aber noch eine andere, rein praktische Bedeutung; es dient zum Aufsuchen der passenden Drehzahlen für Bearbeitung der verschiedenen Materialien von gegebenen Durchmessern. Liegt z. B. eine Welle von 150 mm Durchmesser aus Maschinenstahl vor, so ist aus dem Diagramm ohne weiteres zu entnehmen, daß nur die Drehzahl n_3 in Frage kommen kann.

Wird dem Diagramm eine Skizze eingefügt, aus der der Arbeiter die Lage des Riemens oder der Schalthebel für Herstellung der Drehzahl n_3 erkennen kann, so ist er imstande, die für seinen Zweck geeignete Drehzahl einzustellen, ohne daß er ihre zahlenmäßige Größe kennt.

Dieses Diagramm, seiner Form nach „**Sägendiagramm**“ genannt, sollte jeder Werkzeugmaschine beim Verlassen der herstellenden Fabrik mitgegeben werden, weil es die Bedienung der Maschine außerordentlich erleichtert.

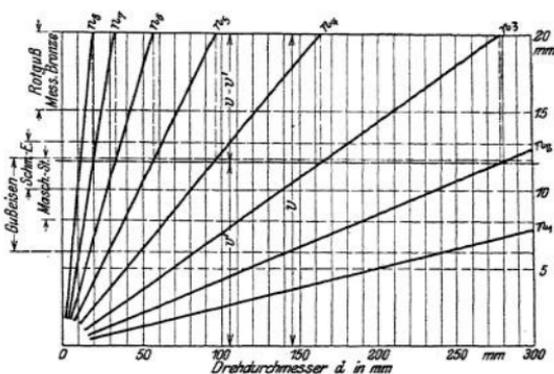


Fig. 38.

2. Mittel zur Herstellung der Umlaufreihen.

a) Reibgetriebe.

Wie schon erwähnt, ist man imstande, durch Reibgetriebe ununterbrochene Reihen aller Drehzahlen zwischen zwei gegebenen Grenzen herzustellen, wobei man allerdings mit der unsicheren Mitnahme der getriebenen durch die treibende Welle rechnen muß.

Fig. 39 zeigt das Reibtellergetriebe, wie es bei Abstechmaschinen (s. Fig. 15) angewendet wird. Eine Rolle mit wagerechter Achse ist verschiebbar angeordnet und treibt den mit senkrechter Achse federnd angebrachten Teller an, oder umgekehrt. Der Durchmesser der kleinen Rolle ist konstant, der wirksame Durchmesser des Tellers ist von einem Maximalwert bis nahezu auf 0 herunter zu verändern. Es wird so also, je nachdem die Rolle oder der Teller das treibende Organ ist, durch Verstellen der Rolle nach innen die Drehzahl der getriebenen Welle verringert oder erhöht.

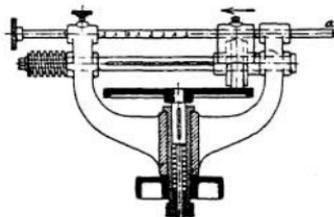


Fig. 39.

Im allgemeinen gibt man heute der Anordnung den Vorzug, bei welcher die **kleine, mit Leder bezogene Scheibe das treibende**, der **Teller das**

getriebene Organ darstellt. Zunächst nämlich ist dann, gleiches in die getriebene Achse zu übertragendes Drehmoment vorausgesetzt, der am anfänglich großen Radius des Tellers zu überwindende Widerstand gering und das Anlaufen der Maschine deshalb erleichtert, und der Widerstand wächst auch nicht beim Fortschreiten der treibenden Rolle nach innen, wird sogar (siehe später) noch etwas geringer.

Bei treibendem Teller ist zu Anfang der Widerstand wegen des kleinen Radius, an dem er angreift, groß und nimmt auch bis zum Schluß nicht wesentlich ab; es kann infolgedessen vorkommen, daß die zu treibende Rolle stehen bleibt, einseitig durch den umlaufenden Teller abgeschliffen und dadurch zur Mitnahme überhaupt untauglich wird. Tritt ein Schleifen bei der ersten Anordnung beim Anlaufen ein, so kann höchstens eine Rinne in den Teller geschliffen werden, was wegen der günstigen Hebelübersetzung zu Anfang überhaupt unwahrscheinlich und dann nie so verhängnisvoll wirken kann, wie das Abschleifen der mit Leder bezogenen Rolle.

Ein anderes Reibgetriebe besteht aus konischen Walzen, die zu zwei oder vier paarweis angeordnet, von einem geschränkten oder offenen endlosen Riemen angetrieben werden. Übersetzungsänderungen bis zum Verhältnis 2 : 5 — bei einem Walzenpaar — oder bis zum Verhältnis 1 : 6,5 — bei zwei Walzenpaaren — können so ausgeführt werden. Die Walzen zeigen einen Durchmesserabfall

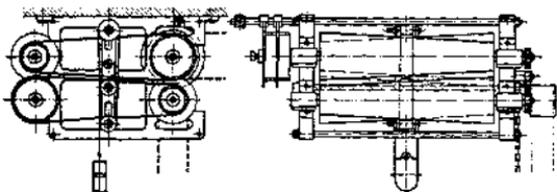


Fig. 40.

von 1 : 10 und leiden an dem Übelstand, daß die Riemen stets geneigt sind, nach dem größeren Durchmesser hin zu laufen, was bei geschränktem Riemen eine starke Beanspruchung der Lagerstellen nach sich zieht und bei offenem Riemen die Anwendung eines Spanngewichtes nötig macht. Fig. 40 zeigt ein solches Reibgetriebe, das Viktoria-Vorgelege der Firma Paul Heuer in Dresden.

b) Stufenscheiben.

α) Riemenlänge.

Der Riemen, meist ohne Spannrolle (s. Fig. 43) angewendet, ist genäht oder geleimt und muß mit wenigstens annähernd gleicher Spannung auf den verschiedenen Stufenpaaren aufliegen.

Es ist die Riemenlänge bei gekreuztem Riemen (Fig. 41, 42):

$$L = 2 [E \sin \alpha + (r + r') \alpha].$$

Da $\cos \alpha = \frac{r' + r}{E}$, so ist die Länge

nur abhängig von der Summe der zueinandergehörigen Scheibendurchmesser.

Es genügt also bei gekreuzten Riemen, die Durchmesser der Riemenscheiben so zu wählen, daß $d' + d = 2(r' + r)$ konstant bleibt.

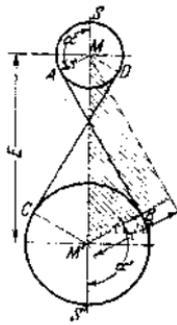


Fig. 41.

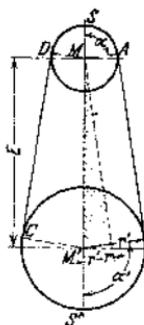


Fig. 42.

Die Riemenlänge bei offenem Riemen ist:

$$L' = 2 [L \cdot \sin \alpha + r \cdot \alpha + r' (\pi - \alpha)] .$$

Da hier $\cos \alpha = \frac{r' - r}{E}$ ist, so müßte man dafür Sorge tragen, daß $(r - r')$ = konst., d. h. daß die zueinandergehörigen Durchmesserpaare der Riemenscheiben um den gleichen Betrag zu oder abnehmen, was natürlich gleichbleibende Riemenlänge ausschließt.

Erst für $\alpha = 90^\circ$ würde $\sin \alpha = 1$,

$$r \cdot \alpha + r' (\pi - \alpha) = (r + r') \alpha$$

und

$$L = 2 [E + (r + r') \alpha] ,$$

d. h. ebenfalls nur abhängig von der konstant gehaltenen Durchmessersumme ($d' + d$).

Zieht man die Elastizität des Riemenmaterials in Betracht, so kann man schon für $\cos \alpha = \frac{1}{20}$, d. h. für $\alpha = 87^\circ$ die Vorbedingungen als gegeben ansehen und demnach, falls

$$\cos \alpha = \frac{r' + r}{E} = \frac{1}{20} ,$$

d. h. falls $E \geq 20 (r' - r)$ oder $10 (d' - d)$ ist, die Bedingung folgendermaßen fassen:

Auch bei offenem Riemen genügt es, die Summe der zueinandergehörigen Durchmesser der beiden Riemenscheiben konstant zu halten, falls die größte auftretende Durchmesserdiffferenz gleich oder kleiner ist als $\frac{1}{10}$ des Achsenabstandes.

β) Wahl der Stufenscheibendurchmesser.

Die Übersetzungsverhältnisse müssen nach einer geometrischen Reihe abgestuft sein, d. h.

$$i_1, i_2 = i_1 \cdot \varphi, \\ i_3 = i_1 \cdot \varphi^2 \dots \dots \dots i_8 = i_1 \cdot \varphi^7 .$$

Trommelvorgelege mit Stufenscheibe (Norton-Schleifmaschine, Fig. 43).

Nur für kleine Sprünge φ brauchbar, da lediglich durch Abänderung der Durchmesser an der getriebenen Scheibe die Änderung des Übersetzungsverhältnisses erzielt wird.

Z. B. $i_8 = 3 \cdot i_1, i_1 = \frac{2}{3}, d_I = 200 \text{ mm}$ angenommen.

$$i_8 = 3 \cdot i_1 = i_1 \cdot \varphi^7, \varphi = \sqrt[7]{3} = 1,17 .$$

$\frac{d_I}{d_1}$	$\frac{d_I}{d_2}$	$\frac{d_I}{d_3}$	$\frac{d_I}{d_4}$	$\frac{d_I}{d_5}$	$\frac{d_I}{d_6}$	$\frac{d_I}{d_7}$	$\frac{d_I}{d_8}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} \varphi$	$\frac{2}{3} \varphi^2$	$\frac{2}{3} \varphi^3$	$\frac{2}{3} \varphi^4$	$\frac{2}{3} \varphi^5$	$\frac{2}{3} \varphi^6$	$\frac{2}{3} \varphi^7$
$\frac{200}{300}$	$\frac{200}{256}$	$\frac{200}{219}$	$\frac{200}{187}$	$\frac{200}{160}$	$\frac{200}{137}$	$\frac{200}{117}$	$\frac{200}{100}$

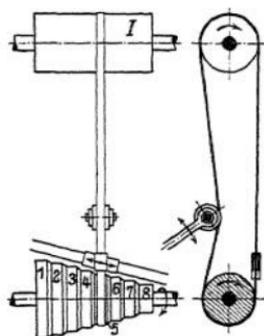


Fig. 43.

Doppelte Stufenscheiben (Fig. 44).

Bedingung: $d_I + d_1 = d_{II} + d_2 = d_{III} + d_3 = d_{IV} + d_4$;

gegeben: $i_1 = \frac{1}{2}$, $d_I = 100$ mm, $\varphi = 1,5$.

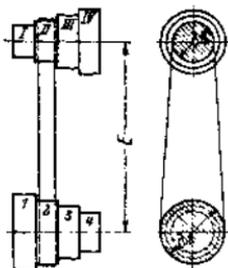


Fig. 44.

$\frac{d_I}{d_1}$	$\frac{d_{II}}{d_2}$	$\frac{d_{III}}{d_3}$	$\frac{d_{IV}}{d_4}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \varphi$	$\frac{1}{2} \cdot \varphi^2$	$\frac{1}{2} \cdot \varphi^3$
100	129	159	189
300	171	141	111

$$d_{II} + d_2 = d_I + d_1 = 300 \text{ mm,}$$

$$\frac{d_{II}}{d_2} = \frac{1,5}{2} = 0,75 \quad d_{II} - d_2 = 0,75,$$

$$d_{IV} - d_2 = d_3 \cdot 1,75 = 300 \text{ mm,}$$

$$d_3 = 171 \text{ mm, } d_{II} = 129 \text{ mm usw.}$$

Vermeidung von Übersetzungen ins Schnelle, (Fig. 45) gegeben:

$d_4 = d_{IV} = 150$ mm, d. h. $i_4 = \frac{1}{1}$; $\varphi = 1,25$;

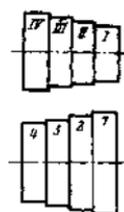


Fig. 45.

$$d_{III} = \frac{d_4 + d_{IV}}{1 + \varphi} = \frac{300}{2,25} = 133 \text{ mm usw.}$$

$\frac{d_I}{d_1}$	$\frac{d_{II}}{d_2}$	$\frac{d_{III}}{d_3}$	$\frac{d_{IV}}{d_4}$
$\frac{1}{\varphi^3}$	$\frac{1}{\varphi^2}$	$\frac{1}{\varphi}$	1
$\frac{102}{198}$	$\frac{117}{183}$	$\frac{133}{167}$	$\frac{150}{150}$

Beide Scheiben haben gleiche Abmessungen der Stufen (Fig. 46), d. h.

$$d_1 = d_{IV}, \quad d_3 = d_{II},$$

$$d_2 = d_{III}, \quad d_4 = d_I.$$

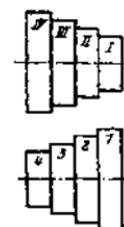


Fig. 46.

Aus $i_1 = \frac{d_I}{d_1} = \frac{d_4}{d_{IV}}$ und $i_4 = i_1 \cdot \varphi^3 = \frac{d_{II}}{d_4}$ folgt

$$\frac{1}{\varphi^3} = \frac{d_4^2}{d_{II}^2}; \quad \frac{d_{IV}}{d_4} = \sqrt{\varphi^3}.$$

$\frac{d_I}{d_1}$	$\frac{d_{II}}{d_2}$	$\frac{d_{III}}{d_3}$	$\frac{d_{IV}}{d_4}$
$\frac{1}{\sqrt{\varphi^3}}$	$\frac{1}{\sqrt{\varphi}}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$

bei 3, 5, 7 Stufen usw. sind die mittleren Durchmesser gleich, bei 4, 6, 8 Stufen usw.

ist das Verhältnis für die beiden mittleren Durchmesserpaare $\frac{1}{\sqrt{\varphi}}$ und $\frac{\sqrt{\varphi}}{1}$. Die

vielfach geübte Praxis, die Durchmesserunterschiede gleichzumachen, d. h. $d_1 - d_3 = d_2 - d_4 = d_3 - d_5$ usw., ergibt nur annähernd geometrische Reihen der Übersetzungsverhältnisse.

c) Unterteilung der Reihen.

a) Riemenscheibenvorgelege.

Diese, meist als Deckenvorgelege, seltener als Wand- oder Fußvorgelege ausgeführt, dienen zur Überleitung des Antriebes in die Werkzeugmaschine, zur Umkehrung der Drehrichtung und zur Unterteilung der Umlaufreihen.

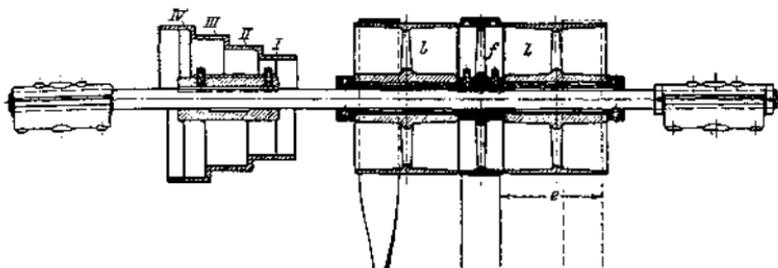


Fig. 47.

Fig. 47 zeigt ein Deckenvorgelege von Heidenreich und Harbeck. Der offene und der gekreuzte Riemen, deren Riemengabeln an gemeinsamer Schiene befestigt sind, müssen stets um den Betrag e seitwärts bewegt werden, und die Leerlaufscheiben müssen doppelt breit sein, damit der eine Riemen erst völlig von der Festscheibe heruntergezogen ist, ebe der andere auf sie aufläuft.

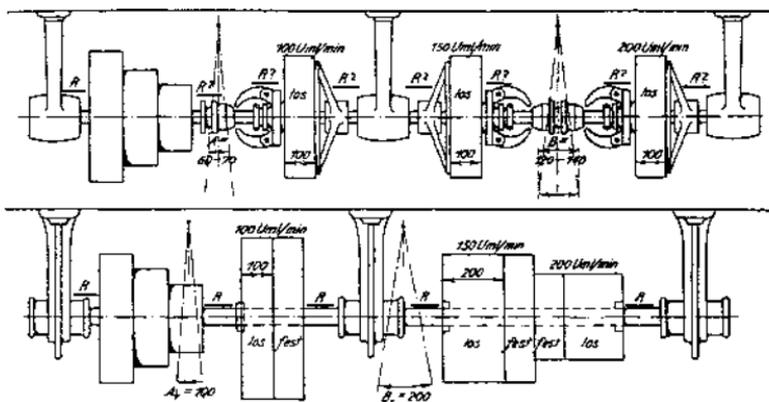


Fig. 48 und 49.

Durch die breiten Leerlaufscheiben wird das Deckenvorgelege sehr lang, und man hat deshalb vielfach die Anordnung getroffen, daß man die auf der Welle loslaufenden Riemenscheiben durch eine Reibkupplung, s. Fig. 50, zur Mitnahme der Welle zwingt. Abgesehen von ihrem hohen Preise haben diese Deckenvorgelege noch eine Reihe anderer Nachteile, die Ruppert folgendermaßen zusammenfaßt (s. hierzu Fig. 48, 49).

„Die Vorteile, welche zur Einführung des Reibkupplungs-Deckenvorgeleges berechtigen, könnten nur folgende sein:

Für den Käufer und Verbraucher:

1. bessere Kraftübertragung;
2. schnellere Erzielung der Bewegung oder des Stillstandes;
3. geringere Reibung beim Leerlauf;
4. geringeres Raumbedürfnis;
5. größere Dauerhaftigkeit des Vorgeleges und der Riemen;

für den Fabrikanten:

6. billigere Herstellung;
7. größere Zuverlässigkeit;

für den Arbeiter:

8. leichtere und bequemere Ein- und Ausrückung;
 9. geringere Wartung (Schmierung, Nachstellung u. a. m.).
- Welche von diesen Vorteilen sind in Wirklichkeit vorhanden?

1. Vorteil bei gleicher Breite, Geschwindigkeit und Spannung der Riemen ausgeschlossen;

Nachteil des Nachlassens der Reibung in der Kupplung vorhanden;

2. geringer Zeitgewinn unter Umständen möglich, siehe weiter unten;

3. Leerlaufreibung gleich groß, wie beim alten Vorgelege, da die Riemenscheibe des neuen Vorgeleges nichts anderes als eine lose Scheibe ist;

4. Raumbedarf eher etwas größer, siehe die maßstäblichen Figuren (Fig. 48, 49);

5. infolge von mehr Teilen im gleichen Verhältnis mehr Abnutzung als beim alten Vorgelege (über die Schonung des Riemens infolge Freilaufes siehe weiter unten);

6. nicht unwesentlich höhere Herstellungskosten des Reibkupplungsvorgeleges;

7. infolge des Einflusses von 1. und 5. geringere Zuverlässigkeit;

8. eher etwas mehr Kraftaufwand als bei der Riemenverschiebung von der festen zur losen Scheibe und umgekehrt, bedingt durch die Erzeugung des nötigen Reibungsdruckes;

9. mit dem Alter des Vorgeleges steigende Wartung und Nachhilfe zur Erhaltung der Reibfähigkeit und Reibstärke¹⁾).

Die Bemerkungen von Ruppert beziehen sich auf die in Fig. 50 im Schnitt

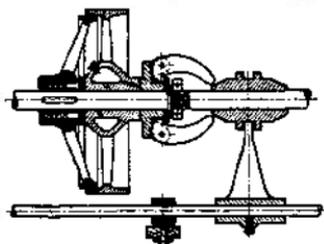


Fig. 50.

wiedergegebene Anordnung der amerikanischen Art des Vorgeleges, an dem als ganz besonders gefährlich die Daumen der Reibkupplung anzusehen sind, die bei etwa abfallendem Riemen diesen fangen und zerreißen.

Fig. 51 zeigt ein Deckenvorgelege für 2 Arbeitsdrehzahlen und beschleunigten Rücklauf, wie sie heute vielfach ausgeführt werden. Die Riemen *a* und *b* werden gleichzeitig, Riemen *c* für sich allein verschoben.

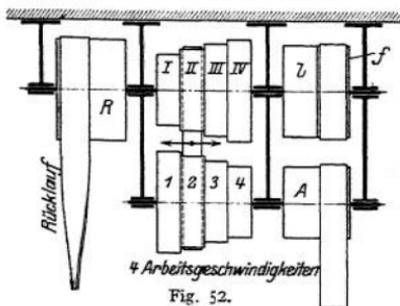
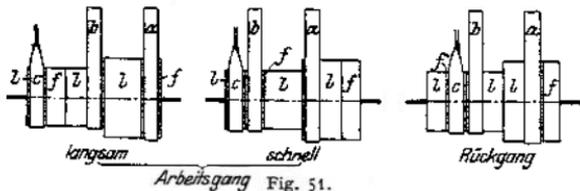


Fig. 52.

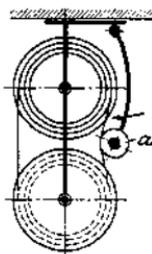


Fig. 53.

¹⁾ Ruppert, Z. Ver. deutsch. Ing. 1904—07.

Fig. 52—53 gibt eine schematische Darstellung des Stufenscheibenvorgeleges für die Gray-Hobelmaschine wieder; wird die Spannrolle a gehoben, so ist der schlaife Riemen leicht von der Arbeitsstelle aus zu verschieben und es stehen schon vom Deckenvorgelege her 4 Geschwindigkeiten für die Schnittbewegung und eine für beschleunigten Rücklauf zur Verfügung.

Fig. 54 zeigt den Riemenleiter der Bamag, der ein Umlegen des Riemens von einem Stufenpaar zum andern vom Arbeitsstande her und ohne Anhalten der Maschine gestattet.

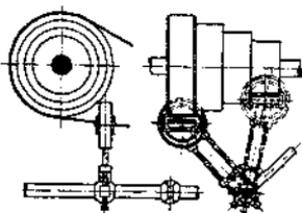


Fig. 54.

β) Rädervorgelege.

Gleichfalls zur Unterteilung der Umlaufreihen dienen Rädervorgelege, die von einem mit der Stufenscheibe fest verbundenen Rade 1 aus über eine oder mehrere Vorgelegewellen den Antrieb auf ein mit der Drehachse festverbundenes Rad leiten, während die Stufenscheibe lose auf der Drehwelle läuft. Durch Ausschwenken oder Verschieben der Vorgelegewelle oder durch Verbindung beider Bewegungen lassen sich die verschiedensten Kombinationen herstellen.

Fig. 55 zeigt ein einfaches Rädervorgelege, durch welches 2 Gruppen von Drehzahlen herzustellen sind, indem einmal von der lose drehbaren Stufenscheibe mit der Übersetzung $J = \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 \cdot Z_4}$ und einmal, durch Schließen der Kuppelung k zwischen der Stufenscheibe und dem auf der Spindel befestigten Rad 4, unmittelbar die Drehspindel angetrieben wird.

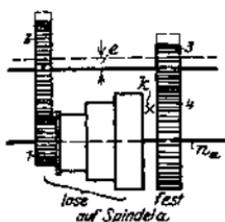


Fig. 55.

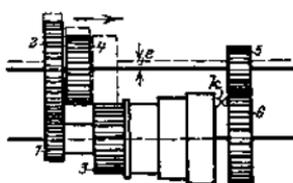


Fig. 56.

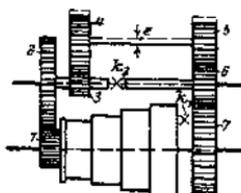


Fig. 57.

Fig. 56 ist ein doppeltes Rädervorgelege, bei dem ebenfalls eine um den Betrag e auszuschwenkende Vorgelegewelle vorgesehen ist, auf der die Räder 2 und 4 verschiebbar angeordnet sind. Es sind so 3 Gruppen möglich:

1. Gruppe: von der Stufenscheibe mit $J_1 = \frac{Z_1 \cdot Z_5}{Z_2 \cdot Z_6}$ zur Drehspindel.

2. Gruppe: von der Stufenscheibe mit $J_2 = \frac{Z_3 \cdot Z_5}{Z_4 \cdot Z_8}$ zur Drehspindel.

3. Gruppe: bei ausgeschwenkter Vorgelegewelle und geschlossener Kuppelung k unmittelbar von der Stufenscheibe auf die Drehspindel.

Ein Übelstand dieser Anordnung, nämlich die ziemlich große Baulänge der Drehspindel, ist bei dem gleichfalls doppelten Rädervorgelege in Fig. 57 durch Einführung einer zweiten Vorgelegewelle vermieden. Die 3 Gruppen kommen hier folgendermaßen zustande:

1. Gruppe: bei offenen Kupplungen k_1 und k_2 von der Stufenscheibe mit $J_1 = \frac{Z_1 \cdot Z_3 \cdot Z_5}{Z_2 \cdot Z_4 \cdot Z_7}$ zur Drehspindel.

2. Gruppe: bei um ε ausgeschwenkter zweiter Vorgelegewelle und geschlossener Kupplung k_2 von der Stufenscheibe mit $J_2 = \frac{Z_1 \cdot Z_6}{Z_2 \cdot Z_7}$ zur Drehspindel.

3. Gruppe: bei ausgeschwenkter zweiter Vorgelegewelle, geöffneter Kupplung k_2 und geschlossener Kupplung k_1 , von der Stufenscheibe unmittelbar zur Drehspindel.

Die stets inne zu haltende Bedingung bei Berechnung der Einzelübersetzungen für die miteinander kämmenden Räderpaare ist, daß die Achsenentfernungen den gleichen Wert ergeben müssen. Da die normale Achsenentfernung $E = \frac{M}{2} (Z_1 + Z_2)$ ist, so erhält man folgende Bedingungsbeziehungen:

Zu Fig. 55:

$$\frac{M}{2} (Z_1 + Z_2) = \frac{M'}{2} (Z_3 + Z_4).$$

Zu Fig. 56:

$$\frac{M}{2} (Z_1 + Z_2) = \frac{M'}{2} (Z_3 + Z_4) = \frac{M''}{2} (Z_5 + Z_6).$$

Zu Fig. 57:

$$\frac{M}{2} (Z_1 + Z_2) = \frac{M''}{2} (Z_6 + Z_7),$$

$$\frac{M'}{2} (Z_3 + Z_4) = \frac{M''}{2} (Z_5 + Z_6).$$

Gewöhnlich liefert dann die Forderung, daß die größten Räder — 4 in Fig. 55, 6 in Fig. 56 und 7 in Fig. 57 — im Außendurchmesser gleich dem der größten Stufe sein sollen, daß also

$$M' (Z_4 + 2) \approx d_1 \text{ (Fig. 55)},$$

$$M'' (Z_6 + 2) \approx d_1 \text{ (Fig. 56)},$$

$$M''' (Z_7 + 2) \approx d_1 \text{ (Fig. 57)},$$

eine weitere Gleichung, in der auch noch die Teilung ($t = M \cdot \pi$) aus dem auftretenden größten Schnittdruck: $P = b \cdot c \cdot t$ ermittelt werden kann. (Vgl. S. 655.)

Außerdem wird man das Rad 1 nicht gern zu klein werden lassen, da es auf der meist hohlen — und deshalb dicken — Spindel sich noch lose drehen soll. Trägt man ferner Sorge, daß das kleinste Rad des Getriebes möglichst nicht weniger als 20, auf keinen Fall aber weniger als 12 Zähne erhält — weil sonst genügende Eingriffsdauer nicht mehr gewährleistet ist — so steht in der Regel eine ausreichende Anzahl von Gleichungen zum Aufsuchen der verschiedenen Unbekannten zur Verfügung.

Eine Anwendung der Ausführungsform Fig. 56 zeigt Fig. 230. Bei anderen Ausführungen, wie Fig. 103 und die Anordnung Fig. 313, läßt man nicht nur die treibende Scheibe, sondern auch das letzte Vorgelegerad lose auf der Welle laufen und sieht eine Kupplung vor, die entweder dieses letzte Rad, oder die treibende Scheibe mit der Welle zu koppeln gestattet, demnach den Antrieb entweder über die Vorgelegewelle oder direkt von der treibenden Scheibe in der Drehspindel zu leiten; die Vorgelegeräder laufen dann leer mit.

d) Umlaufräder¹⁾ (Planeten- und Differentialgetriebe).

Sie werden selten zur Unterteilung der Umlaufreihen, meist als selbständige Mittel zur Umkehr oder ganz erheblichen Verminderung der Drehzahl der getriebenen gegenüber der treibenden Achse angewendet.

¹⁾ Schlesinger, W. T. 1910, S. 269 ff.

Fig. 58 stellt ein Rad 2 dar, das, im Stege s drehbar gelagert, mit dem feststehenden Rad 1 kämmt und mit dem Steg um die Achse von 1 herumgeführt wird.

Dabei macht Rad 2 zwei volle Umdrehungen um seine Achse, wenn die Zähnezahlen von 1 und 2 gleich sind. Wie die Durchmesserpeile in der gezeichneten und in den drei gestrichelt eingetragenen Lagen angeben, würde sich Rad 2 einmal ganz rechtsherumdrehen, wenn man den Steg und Rad 1 um 360° rechtsherum führte.

Wird nun Rad 1, das ja zu Unrecht mitgedreht wurde, wieder in seine Lage, also um 360° linksherum, gedreht, so führt 2 eine neue Drehung von 360° rechtsherum (im Sinne des Uhrzeigers) aus, hätte also, wenn 1 von vornherein unbewegt geblieben wäre, beim Herumführen des Steges um 360° zwei volle Umdrehungen im gleichen Sinne wie der Steg s ausgeführt.

Fig. 59 zeigt die Anordnung für den allgemeinen Fall, d. h. für $r_2 \leq r_1$. Wird der Steg s um den $\sphericalangle \alpha$ nach rechts geführt, so dreht sich 2 um den $\sphericalangle \beta$ gegenüber dem Stege, und ein ursprünglich durch den Mittelpunkt von 1 zeigender Durchmesser von Rad 2 hat sich um

$$\gamma = \alpha + \beta$$

gedreht. Da die den Winkeln α und β entsprechenden Wälzbögen auf den Umfängen der Räder 1 und 2 gleich sind, also:

$\alpha \cdot r_1 = \beta \cdot r_2$, und $\beta = \alpha \frac{r_1}{r_2}$, so ist die Größe der Drehung des Rades 2 gegenüber seiner ursprünglichen Lage:

$$\gamma = \alpha \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right),$$

oder das Übersetzungsverhältnis der Winkeldrehungen von Steg s und Rad 2 gegenüber ihren ursprünglichen Lagen.

$$J = \frac{\gamma}{\alpha} = 1 + \frac{r_1}{r_2},$$

also für den in Fig. 50 gezeichneten Fall, wo $r_1 = r_2$ ist:

$$J = \frac{\gamma}{\alpha} = 1 + 1 = 2,$$

d. h. Rad 2 dreht sich zweimal um die eigene Achse, wenn der Steg einmal herumgeführt wird.

In Fig. 60 ist 1 als innenverzahntes Rad ausgeführt; dann ist β der Außenwinkel in dem schraffierten Dreieck und

$$\gamma = \beta - \alpha.$$

Da die Beziehungen: $\alpha \cdot r_1 = \beta \cdot r_2$ und $\beta = \alpha \frac{r_1}{r_2}$ auch hier bestehen, so ist dann

$$J = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{r_1}{r_2} - 1.$$

Für $r_1 = r_2$ liegt keine Verzahnung, sondern eine Kupplung vor, und Rad 2 kann sich überhaupt nicht drehen, wenn die Forderung aufrechterhalten wird, daß Rad 1 stillstehen soll; $r_1 < r_2$ ist überhaupt nicht denkbar.

Bedeutung für den Antrieb erhalten die Umlaufräder erst, wenn sie rückkehrend sind, d. h. wenn noch 2 oder mehr Räder hinzugefügt werden und für

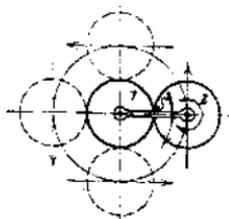


Fig. 58.

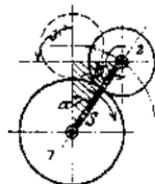


Fig. 59.

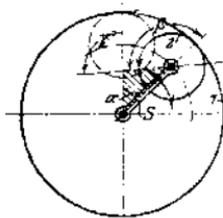


Fig. 60.

das letzte von ihnen die mathematische Achse mit der von 1 zusammenfällt.

Fig. 61 zeigt vier Räder, von denen Rad 2 und 3 miteinander fest verbunden und im Stege s drehbar gelagert sind, 4 dagegen Rad 1 gegenüber lose drehbar ist. Wird Steg s aus der ursprünglich senkrechten Lage um den $\sphericalangle \alpha$ nach rechts geführt, so dreht sich die Kombination 2, 3 um den $\sphericalangle \beta$ gegenüber dem Stege, woraus die Beziehung (wie oben)

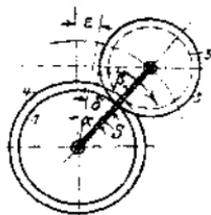


Fig. 61.

$$\beta = \alpha \frac{r_1}{r_2}$$

hergeleitet werden kann. Rad 4 kämmt mit Rad 3, dreht sich also um den gleichen Wälzbogen wie dieses, so daß die Beziehung $\beta \cdot r_3 = \delta \cdot r_4$, oder

$$\beta = \delta \frac{r_4}{r_3}$$

entsteht. Diese beiden Gleichungen für β ergeben $\alpha \frac{r_1}{r_2} = \delta \frac{r_4}{r_3}$ und

$$\delta = \alpha \frac{r_1 \cdot r_3}{r_2 \cdot r_4}$$

Da sich Rad 4 um $\sphericalangle \alpha$ mit dem Stege s vorwärts und um $\sphericalangle \delta$ gegen den Steg rückwärts dreht, so bleibt eine Restdrehung um $\varepsilon = \alpha - \delta$ übrig.

Es ist also $\varepsilon = \alpha \left(1 - \frac{r_1 \cdot r_3}{r_2 \cdot r_4}\right)$ und das Übersetzungsverhältnis:

$$J = \frac{\varepsilon}{\alpha} = 1 - \frac{r_1 \cdot r_3}{r_2 \cdot r_4}$$

Vorstehende Gleichung entsteht, falls man Rad 1 an der Drehung hindert, als Beziehung zwischen den Winkeldrehungen des Rades 4 und des Steges s und ergibt für den in der Fig. 61 dargestellten Fall, wo $r_1 < r_4$, $r_3 < r_2$ ist, einen positiven Wert, d. h. Drehung von Rad 4 und Steg s im gleichen Sinne. Hält man **Rad 4** fest und treibt durch den Steg und die „Planetenräder 2, 3“ das Rad 1 an, so wird

$$J = 1 - \frac{r_2 \cdot r_4}{r_1 \cdot r_3}$$

einen negativen Wert ergeben.

Man hat also in den rückkehrenden Umlaufrädern auch ein Mittel zur Verwandlung einer Schnellverstellung in einer Richtung — Antrieb direkt vom Stege s her — in eine stark verlangsamte Verstellung in entgegengesetzter Richtung — Antrieb vom letzten Rade der Reihe (s. auch Fig. 63 und die Rechnungsbeispiele zur Regel von Swamp).

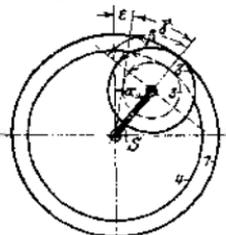


Fig. 62.

In Fig. 62 sind 1 und 4 Räder mit Innenverzahnung, was ein vollständiges Einkapseln der Planetenräder 2, 3 gestattet. Die Übersetzung ist auch in diesem Falle, wenn Rad 1 festgehalten wird:

$$J = 1 - \frac{r_1 \cdot r_3}{r_2 \cdot r_4}$$

Der Amerikaner Swamp¹⁾ gibt ein sehr einfaches Verfahren an, dem die schon oben benutzte Überlegung zugrunde liegt.

Man denke sich zunächst die Räder 2, 3 mit dem Steg s verriegelt, so daß sie auf die Räder 1, 4 wie Kupplungen wirken, dann werden sie bei einer Drehung

¹⁾ S. Schlesinger, W. T. 1910, S. 271.

des Steges s im gleichen Sinne wie dieser mitgenommen, was im Schema dargestellt ist, bezogen auf Fig. 61.

I. Räder gegen Steg verriegelt	s	1	2,3	4
Anzahl der Umdrehungen	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1

Da Rad 1 fest bleiben sollte, wurde es zu Unrecht mitgenommen, muß also bei stehbleibendem Stege — der ja eine Drehung rechtsherum ausführen sollte — einmal linksherum (zurück) gedreht werden. Da die Verriegelung jetzt aufgehoben gedacht wird, werden sich dann die 4 Räder wie ein gewöhnliches Rädervorgelege, gelagert im Stege s , verhalten, und es ergibt sich:

II. Steg fest, Räder drehbar	s	1	2, 3	4
Anzahl der Umdrehungen	0	- 1	$+\frac{r_1}{r_2}$	$-\frac{r_1 \cdot r_3}{r_2 \cdot r_4}$

Durch Zusammenstellung beider Schemata ergibt sich:

Teilbewegung	s	1	2, 3	4
I, $n =$	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
II, $n =$	0	- 1	$+\frac{r_1}{r_2}$	$-\frac{r_1 \cdot r_3}{r_2 \cdot r_4}$
Ergebnis $n =$	+ 1	0	-	$1 - \frac{r_1 \cdot r_3}{r_2 \cdot r_4}$

Das Übersetzungsverhältnis ist also:

$$\frac{n_4}{n_1} = J = 1 - \frac{r_1 \cdot r_3}{r_2 \cdot r_4}.$$

In der Formel kann man bei Anwendung von Zahnrädern die Radien durch die Zähnezahlen ersetzen und erhält:

$$J = 1 - \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 \cdot Z_4}.$$

Als Beispiel ist in Fig. 63 das Planetengetriebe eines Automaten dargestellt; Rad 1 sitzt auf der getriebenen Welle fest, ebenso die eine der Riemenscheiben, während die andere dem Planetenräderpaar 2, 3 zum Stege (S) dient; Rad 4 wird durch eine Sperrklinke, die am Maschinengestell gelagert ist, an der Drehung gehindert. Liegt der Riemen in der vollauszogenen Lage, d. h. auf der Riemenscheibe S auf, so ist ein Umlaufrädergetriebe gegeben, wenn die Sperrklinke im Sperrrad einliegt. Nach der Regel von Swamp er-

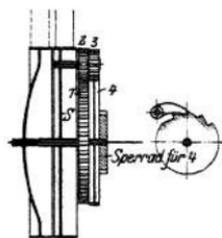


Fig. 63.

Teilbewegung	s	1	2, 3	4
I, $n =$	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
II, $n =$	0	$-\frac{Z_4 \cdot Z_3}{Z_3 \cdot Z_1}$	$+\frac{Z_4}{Z_3}$	- 1
Ergebnis	+ 1	$1 - \frac{Z_4 \cdot Z_3}{Z_3 \cdot Z_1}$	-	0

Das Übersetzungsverhältnis wird

$$J = \frac{n_1}{n_2} = 1 - \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3 \cdot Z_4}.$$

Es wurde nämlich (I) zuerst angenommen, die Sperrklinke hindere Rad 4 nicht an der Drehung, und die ganze Räderanordnung 1, 2, 3, 4 sei mit dem Stege einmal gegen die Sperrklinke hin herumgeführt. Dann wurde (II), der Steg stillstehend gedacht, und Rad 4, das ja eigentlich durch die Sperrklinke an dieser Drehung gehindert wird, um 360° in seine ursprüngliche Lage wieder zurückgeführt.

Werden für die Zahnräder die Zähnezahlen

$$Z_1 = 105, \quad Z_2 = 21, \quad Z_3 = 20 \quad \text{und} \quad Z_4 = 106 \quad \text{eingeführt,}$$

so ist

$$J = \frac{n_1}{n_2} = 1 - \frac{106 \cdot 21}{20 \cdot 105} = 1 - \frac{106}{100} = -\frac{6}{100},$$

d. h. wenn die Riemenscheibe S 100 Umdrehungen in einem Sinne ausgeführt hat, so ist Rad 1 im entgegengesetzten Sinne nur 6 mal umgelaufen. Wird jetzt der Riemen auf die feste Scheibe geschoben und die Sperrklinke ausgehoben — meist wird dann gleichzeitig S gebremst — so ist ein gewöhnliches Rädervorgelege mit leerlaufendem letzten Rad 4 gegeben, und die Welle dreht sich ebenso schnell wie die Riemenscheibe und im gleichen Sinne wie diese.

Vertauscht man die Räderpaare 1, 2 und 3, 4 gegeneinander, so daß Rad 4 fest auf der Welle, Rad 1 lose ist und nur zeitweilig durch die Sperrklinke gefest wird, so ergibt sich nach Swamp:

Teilbewegung	s	1	2, 3	4
I, $n =$	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
II, $n =$	0	- 1	$+\frac{Z_1}{Z_2}$	$-\frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 \cdot Z_4}$
Ergebnis	+ 1	0	-	$1 - \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 \cdot Z_4}$

und

$$J = \frac{n_1}{n_2} = 1 - \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 \cdot Z_4},$$

was nach Einsetzen der oben gegebenen Zähnezahlen zu dem Übersetzungsverhältnis führt:

$$J = \frac{n_1}{n_2} = 1 - \frac{105 \cdot 20}{21 \cdot 106} = 1 - \frac{100}{106} = +\frac{6}{106},$$

d. h. bei eingelegter Sperrklinke läuft die Achse 6 mal herum, wenn die Riemenscheibe 106 Umdrehungen macht, und zwar ist der Drehsinn der gleiche.

Ist die zuerst betrachtete Einrichtung geeignet, einen Schlitten in einer Richtung langsam vorgehen und dann in entgegengesetzter Richtung schnell zurücklaufen zu lassen, so kann man die zweite Anordnung benutzen, um z. B. bei Hobelarbeiten an Gußstücken, die mehrere kurze, zu bearbeitende Flächen in größeren Abständen aufweisen, schnell über die Zwischenräume hinwegzukommen.

Auch mit Kegelrädern lassen sich derartige Umlaufrädergetriebe ausrüsten, sie heißen dann meist Differentialgetriebe und werden auch im Werkzeugmaschinenbau verwendet¹⁾.

¹⁾ Schlesiinger, W. T. 1910, S. 391 ff.

e) Reine Räderkästen.¹⁾ α) Beispiele von Ausführungsarten.

Räderkästen können zur Herstellung einer geometrischen Grundreihe oder auch zur Erzeugung von Gruppensprüngen Anwendung finden; man kann ihnen also zur Unterteilung Vorgelege wie in Fig. 55 bis 57 usw. vor- oder nachschalten, sie untereinander oder auch mit Räderkästen anderer Art beliebig zusammenstellen.

Fig. 64 zeigt das Nortongetriebe, das zuerst für das Gewindeschneiden auf der Hendey-Norton-Bank als Ersatz für die austauschbaren Wechselräder angewendet wurde. Auf die Leitspindel sind 10 Räder fest aufgebracht; das Rad I erhält von der Drehspindel der Bank her seinen Antrieb und überträgt die Drehung auf die Räder 1 bis 10 der Leitspindel durch ein Zwischenrad I'.

Die Räder I und I' sind auf der treibenden, genuteten Welle in einer Schwinge gelagert, deren Ein- und Feststellung aus Fig. 65 zu erkennen ist.

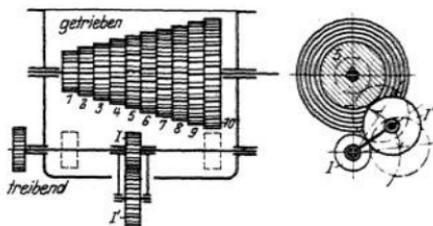


Fig. 64.

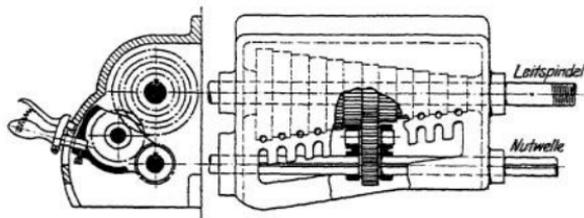


Fig. 65.

Beispiel: Entwurf eines Räderkastens für Whitworth-Gewinde vom Durchmesser $d_{\min} = 3/16''$ bis zu $d_{\max} = 1''$. Die zugehörigen Steigungen sind:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{1''}{8}$	$\frac{1''}{9}$	$\frac{1''}{10}$	$\frac{1''}{11}$	$\frac{1''}{12}$	$\frac{1''}{14}$	$\frac{1''}{16}$	$\frac{1''}{18}$	$\frac{1''}{20}$	$\frac{1''}{24}$

Im Räderkasten kommt es natürlich nur auf das richtige Verhältnis der Übersetzungen, nicht auf die Drehzahlen der getriebenen Welle selbst an — denn diese kann man dann jederzeit durch vor Rad I geschaltete Räder, entsprechend der Steigung der Leitspindel, erzwingen.

Das erste Übersetzungsverhältnis $\frac{Z_I}{Z_1}$ sei $\alpha = \frac{1}{I}$ und auf die treibende Welle komme ein Rad I mit 24 Zähnen. Dann ergibt sich nachstehendes Schema (siehe auch Fig. 43):

Räder	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Übers.-Verh.	α	$\alpha \frac{8}{9}$	$\alpha \frac{8}{10}$	$\alpha \frac{8}{11}$	$\alpha \frac{8}{12}$	$\alpha \frac{8}{14}$	$\alpha \frac{8}{16}$	$\alpha \frac{8}{18}$	$\alpha \frac{8}{20}$	$\alpha \frac{8}{24}$
Zähnezahlen	$\frac{24}{24}$	$\frac{24}{27}$	$\frac{24}{30}$	$\frac{24}{33}$	$\frac{24}{36}$	$\frac{24}{42}$	$\frac{24}{48}$	$\frac{24}{54}$	$\frac{24}{60}$	$\frac{24}{72}$
Sprung $\varphi =$	1,12	1,11	1,10	1,09	1,17	1,14	1,12	1,11	1,20	

¹⁾ S. hierzu Ruppert, Aufg. u. Fortschr. d. deutschen Werkzeugmaschinen. Berlin 1907. Julius Springer; Hülle, Schnellstahl und Schnellbetrieb, Berlin 1909. Julius Springer, und die Ausstellungsberichte: Fischer, Paris 1900, Düsseldorf 1902, Schlesinger, Lüttich 1905, Z. Ver. deutsch. Ing.; Adler, Brüssel 1910, Schlesinger, Brüssel 1910, W. T.

Das Zwischenrad I' hat beliebige Größe, doch muß der Achsenabstand von der Stufenrädlerwelle bis zur Nutwelle so bemessen werden, daß I' in den beiden Grenzlagen mit Rad 1 und zum Schluß mit Rad 10 zum Eingriff kommt.

Der Sprung φ der Reihe ist nicht konstant, sie ist also keine geometrische Reihe; auch arithmetisch ist die Reihe nicht, denn die Differenzen δ sind nicht konstant. Bemerkenswert ist die Kleinheit der Sprünge φ , die auch kaum größer werden dürfen, da schon jetzt Rad 10 dreimal so groß wird wie Rad 1, weil im vorliegenden Falle — wie bei der Norton-Stufenscheibe in Fig. 43 — die ganze Übersetzungsänderung durch die eine Gruppe der Stufenräder hervorgerufen wird.

Das Norton-Getriebe wird deshalb kaum für den Schnittantrieb, sondern nur für das Gewindeschneiden oder den Schaltantrieb verwendet.

Ebenfalls nur für den Schaltantrieb, für diesen aber gut geeignet, ist das in Fig. 66 dargestellte Bickford-Getriebe. Es zeigt 2 kongruente Gruppen von untereinander fest verbundenen Stufenrädern, die, jede für sich auf einer Welle lose drehbar, mit den Gruppenübersetzungen

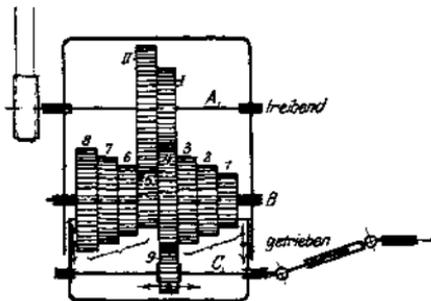


Fig. 66.

$J_1 = \frac{Z_I}{Z_4}$ und $J_2 = \frac{Z_{II}}{Z_5}$ auf verschiedene Drehzahlen gebracht werden. Die Zähnezahlen der Räder 1 bis 8 sind so gewählt, daß die Umfangsgeschwindigkeiten in den Teilkreisen nach einer geometrischen Reihe abgestuft sind. Rad 9, in zwei zueinander senkrechten Richtungen verstellbar, nimmt demnach 8 verschiedene, ebenso abgestufte Umfangsgeschwindigkeiten und Drehzahlen an.

Gewöhnlich wird diesem Getriebe, das bei der Fräsmaschine der Cincinnati-Fräsmaschinen-Gesellschaft Anwendung findet, noch ein Vorgelege vorgeschaltet, so daß 2 große Gruppen von je 8 Drehzahlen für die getriebene Kreuzgelenkwelle C entstehen. Die seitliche Verschiebung von Rad 9 auf Nutwelle C' erfolgt durch eine Gabel, die durch Zahnstange und Trieb betätigt wird, und der Eingriff in je eines der Räder 1 bis 8 wird durch Schraube und Mutter bewirkt, die den Kastenteil, in dem Welle C' gelagert ist, vor- und rückwärts bewegen.

Achse des Triebes und Achse der Schraube liegen parallel untereinander, so daß die auf ihnen sitzenden Schaltkurbeln übersichtlich angeordnet werden können.

Beispiel: Für den Tischantrieb einer Fräsmaschine soll ein Räderkasten mit 16 Drehzahlen, ergebend die Tischvorschübe von $12 \div 450$ mm/min., entworfen werden. $s_1 = 12$, $s_{16} = 450$ werden auf logarithmisch geteiltem Koordinatenpapier (vgl. Fig. 32) angetragen. Die 4 Gruppen der Drehzahlen umfassen:

- | | | |
|------------|--|-------------------|
| 1. Gruppe: | $s_1 \div s_4 : J_1 = \frac{Z_I}{Z_4}$ | } mit Vorgelege. |
| 2. „ | $s_8 \div s_8 : J_2 = \frac{Z_{II}}{Z_5}$ | |
| 3. „ | $s_9 \div s_{12} : J_1 = \frac{Z_I}{Z_4}$ | } ohne Vorgelege. |
| 4. „ | $s_8 \div s_{16} : J_2 = \frac{Z_{II}}{Z_5}$ | |

Der Sprung von s_1 auf s_8 ergibt $\frac{J_1}{J_2} = \frac{Z_I \cdot Z_5}{Z_4 \cdot Z_{II}} = \frac{1}{\varphi^4}$, aus dem Koordinatenpapier

(s. Fig. 32) entnimmt man $s_8 = 32$, mithin ist $\varphi^4 = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$ der kleine Gruppensprung $\frac{J_2}{J_1}$.

Ebenso entnimmt man $s_8 = 84 = s_1 \cdot \varphi^8$, mithin

$$\varphi^8 = \frac{84}{12} = 7 \text{ der Vorgelegesprung.}$$

Endlich ist, da $s_2 = 15,3$ dem Diagramm entnommen werden kann,

$$\varphi = \frac{s_2}{s_1} = \frac{15,3}{12} = 1,274 \text{ der Sprung der Reihe.}$$

Eine genaue logarithmische Rechnung ergibt $\varphi = 1,2733$. Für das Vorgelege ergeben sich die Zähnezahlen aus nachstehender Überlegung:

$$J = \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 \cdot Z_4} = \frac{1}{7} = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 7},$$

wel man annähernd die Übersetzungen in beide Räderpaare gleich verteilen wird. Mithin wird $J = \frac{20 \cdot 24}{60 \cdot 56}$ der Bedingung genügen, wenn die Teilung für beide Räderpaare, was hier gewöhnlich geschieht, gleich groß gewählt wird.

Die Achsenentfernung $E = \frac{M}{2} (Z_1 + Z_2) = \frac{M}{2} (Z_3 + Z_4)$ ist für beide Räderpaare gleich.

Bedenkt man nun, daß für den Räderkasten:

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_5 \\ Z_2 &= Z_1 \cdot \varphi = Z_6 = Z_5 \cdot \varphi \\ Z_3 &= Z_1 \cdot \varphi^2 = Z_7 = Z_5 \cdot \varphi^3 \\ Z_4 &= Z_1 \cdot \varphi^3 = Z_8 = Z_5 \cdot \varphi^4 \end{aligned}$$

sein muß, so erhält man, da $\varphi = 1,274$; $\varphi^2 = 1,65$; $\varphi^3 = 2,11$, z. B. $\frac{Z_4}{Z_1} = \frac{34}{6}$,

ferner:

$$\begin{aligned} Z_5 &= Z_6 = 16 \cdot 1,274 = 20 \\ Z_3 &= Z_7 = 16 \cdot 1,65 = 26 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_5 = 16 \\ Z_2 &= Z_6 = 20 \\ Z_3 &= Z_7 = 26 \\ Z_4 &= Z_8 = 34 \end{aligned}$$

Außerdem ist (siehe oben) $\frac{Z_I \cdot Z_3}{Z_{II} \cdot Z_2} = \frac{1}{\varphi^4}$, d. h. $\frac{Z_{II}}{Z_I} = \frac{8 \cdot 16}{3 \cdot 34} = 1,26$, d. h. $Z_{II} = Z_I \cdot 1,26$

ferner muß sein:

$$Z_{II} - Z_I = Z_4 - Z_3 = 18.$$

und, nach Einsetzen des Wertes für Z_{II} :

$$Z_I \cdot 0,26 = 18, \quad Z_I = 69 \quad \text{und} \quad Z_{II} = 69 + 18 = 87.$$

		Mit Rädervorgelege				ohne Rädervorgelege			
$J_I = \frac{Z_I}{Z_A}$	$s_1 = 12$	12	12	12	$s_9 = 84$	84	82,920	84	
	$s_2 = 15$	15,0	15,280	15,3	$s_{10} = 105$	105	105,58	106	
	$s_3 = 20$	19,5	19,456	19,8	$s_{11} = 136$	136,4	134,44	134	
	$s_4 = 25$	24,75	24,773	25	$s_{12} = 173$	173	171,18	172	
$J_{II} = \frac{Z_{II}}{Z_{B3}}$	$s_5 = 32$	31,9	31,544	32	$s_{13} = 223$	223,3	217,97	219	
	$s_6 = 40$	39,9	40,166	40,5	$s_{14} = 279$	279	277,55	279	
	$s_7 = 52$	51,9	51,143	51,5	$s_{15} = 363$	363	353,00	350	
	$s_8 = 66$	65,8	65,112	65	$s_{16} = 461$	461	450,00	450	

Die in vorstehender Tabelle fettgedruckten Zahlen geben die aus den Zähnezahlen der Räder errechneten Vorschübe auf ganze mm/min abgerundet an. Von den drei nachstehenden Spalten enthält die erste die genauen — nicht abgerundeten — Vorschübe aus den Drehzahlen, die zweite Spalte enthält die logarithmisch genau errechneten Glieder der geometrischen Reihe mit dem Sprung $\varphi = 1,2733$, und die letzte Spalte zeigt die aus dem logarithmischen Koordinatenpapier entnommenen Werte.

Die Abweichungen, vielleicht mit Ausnahme von s_{16} und s_{15} , sind so gering, daß sie praktisch gar keine Rolle spielen; auch die logarithmische Rechnung kann man gut entbehren, wenn das Koordinatenpapier zur Verfügung steht.

Fig. 67 zeigt ein Ziehkeilgetriebe, bei welchem auf einer der Wellen die Stufenräder festsitzen, während sie auf der anderen lose und einzeln frei dreh-

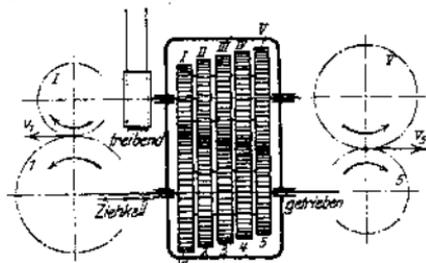


Fig. 67.

bar sind. Mit ihrer Welle werden die losen Räder durch den Ziehkeil verbunden, d. h. durch einen von außen her einstellbaren Keil, der nur je eines der Räder mit der Welle kuppelt. Die Ziehkeilrädern werden genau so wie die doppelten Stufenscheiben berechnet (s. S. 1244), d. h. es wird ein Schema aufgestellt, in dem nur an Stelle der Scheibendurchmesser die Zahnzahlen erscheinen.

Wie dort die Summe der Stufendurchmesser, so muß hier die Summe der Zahnzahlen — bei gleicher Zahnteilung für die einzelnen Räderpaare — konstant sein.

Beispiel: Die Räderysysteme sollen gleich sein, d. h.

$$\begin{aligned} Z_I &= Z_5 \\ Z_{II} &= Z_4 \\ Z_{III} &= Z_3 \\ Z_{IV} &= Z_2 \\ Z_V &= Z_1 \end{aligned}$$

ferner soll $\varphi = 1,45$ sein.

Z_I	Z_{II}	Z_{III}	Z_{IV}	Z_V
Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
1	1	1	φ	φ^2
φ^2	φ	1	1	1
20	25	31	37	42
42	37	31	25	20

$$\varphi^2 = 2,1.$$

Es ist, weil ein Übersetzungsverhältnis 1:1 vorkommt, darauf zu achten, daß die Summe $Z_I + Z_1 = Z_V + Z_5$, denn bei diesen wird die Rechnung beginnen, durch 2 teilbar sei. Z_2 ist = $Z_{II} \cdot \varphi$, d. h. $Z_{II} + Z_2 = Z_{II}(1 + \varphi) = Z_I + Z_1$ und

$$Z_{II} = \frac{62}{1 + \varphi} = \frac{62}{2,45} = 25,3;$$

mithin wird $Z_{II} = Z_4 = 25$, $Z^2 = Z_{IV} = 62 - 25 = 37$ gewählt.

Bei Ziehkeilgetrieben ist noch darauf zu achten, daß die getriebene — nicht die treibende — Welle den Ziehkeil erhält. Trifft man nämlich die Anordnung so, daß die treibende Welle mit dem festen Räderysystem ausgerüstet ist, so wird die höchste in den Teilkreisen überhaupt auftretende Umfangsgeschwindigkeit in unserem Beispiel:

$$v_5 = \frac{Z_V \cdot t \cdot n}{1000} \text{ m/min}$$

sein, wenn t die Teilung der Zahnräder in mm und n die Drehzahl der treibenden Welle bedeutet.

Wird dagegen der Ziehkeil in die treibende Welle verlegt und ist Rad V mit dieser Welle gekuppelt, so tritt in den Teilkreisen der Räder V und 5 ebenfalls $v_5 = \frac{Z_V \cdot t \cdot n}{1000}$, dagegen in den Teilkreisen der Räder I und 1 die erheblich größere Geschwindigkeit $v_1' = v_5 \cdot \varphi^2$ auf; da Rad 1 mit $2 \div 5$ auf einer Welle festsetzt, deshalb die gleiche Drehzahl hat wie diese, so ist seine Teilkreisgeschwindigkeit $\frac{Z_1}{Z_5} = \varphi^2$ mal so groß wie von Rad 5.

Fig. 68 stellt das Ruppert-Getriebe dar, bei dem mit 6 Rädern 4 Drehzahlen erzielt werden können.

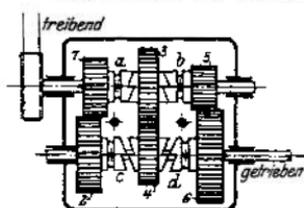


Fig. 68.

Schaltung 2. Kupplungen a und b geschlossen, c und d offen.

axiales Verschieben in und außer Eingriff gebracht; der Kasten selbst soll bei der Maschine mitbesprochen werden.

b) Vor- und Nachteile der Räderkästen.

Die Vorzüge der Räderkästen gegenüber den Stufenscheibenantrieben sind im wesentlichen folgende¹⁾:

1. Größere Kräfte, oder besser gesagt, größere Leistungen, können in die Werkzeugmaschinen hineingeleitet werden.

2. Bei richtiger Anordnung der Kupplungen und Bedienungshebel kann Zeit gespart werden, da das Übergehen von einer Drehzahl auf die andere leicht zu bewerkstelligen ist.

Der erstgenannte Vorteil spielt besonders eine Rolle bei Schruppdrehbänken, da es bei Anwendung von Räderkästen möglich wird, durch richtige Wahl der Übersetzungen der ersten treibenden Scheibe eine große Umfangsgeschwindigkeit und außerdem auch noch eine ziemlich große Breite zu geben. Bei Anwendung von Stufenscheiben verbietet sich die große Breite der Stufen von selbst, weil dies schon bei Anordnung von 3, sicher aber bei 4 oder gar 5 Stufen zu ganz unzulässig langen Wellen führen würde.

Beispiel: Es liege eine Schruppdrehbank von 250 mm Spitzenhöhe vor, die gestalten soll, Maschinenstahl mit $v = 15$ m/min (s. Tabelle S. 1232) zu bearbeiten. Die größte Spantiefe sei $l = 10$ mm, die größte für Maschinenstahl verwendete Schaltung sei $s = 2,0$ mm/Umdr.

Aus dem Diagramm Fig. 16 ist dann eine Umfangskraft $P = 3800$ kg zu entnehmen. Setzt man für die Bank mit Stufenscheibe ein: $\eta = 0,7$, für die mit Einscheibenantrieb $\eta = 0,65$, so erhält man als Motorleistung

$$N = \frac{P \cdot v}{75 \cdot 60 \cdot \eta} \text{ PS,}$$

und somit für die Stufenscheibenbank $N_1 = \frac{3800 \cdot 15}{75 \cdot 60 \cdot 0,7} = 18,1$ PS,

für die Einscheibenbank $N_2 = \frac{3800 \cdot 15}{75 \cdot 60 \cdot 0,65} = 19,5$ PS.

Die Bank soll in beiden Fällen mit 8 Drehzahlen von $n_1 = 8$ bis $n_8 = 320$, entsprechend dem Diagramm in Fig. 38 ausgerüstet sein, was mit $\varphi = \sqrt[7]{\frac{320}{8}} = 1,69$ ergibt;

$n_1 = 8$	$n_2 = 14$	$n_3 = 23$	$n_4 = 39$	mit Vorgelege: $J = \frac{1}{\varphi^4}$
$n_5 = 66$	$n_6 = 112$	$n_7 = 188$	$n_8 = 320$	

Der Drehdurchmesser für die gedachte Höchstleistung sei in beiden Fällen $d_{\max} = 300$ mm, mithin ist bei $v = 15$ m/min nach Diagramm Fig. 38 $n_2 = 14$ Umdr./min anzuwenden.

1. Die Stufenscheibenbank habe zwei gleiche Stufenscheiben nach Fig. 46, die größte Stufe habe 350 mm.

$\frac{d_I}{d_1}$	$\frac{d_{II}}{d_2}$	$\frac{d_{III}}{d_3}$	$\frac{d_{VI}}{d_4}$	Für
$\frac{1}{\sqrt[7]{\varphi^3}}$	$\frac{1}{\sqrt[7]{\varphi}}$	$\frac{\sqrt[7]{\varphi}}{1}$	$\frac{\sqrt[7]{\varphi^3}}{1}$	ist $\varphi = 1,69$
160	222	288	350	$\sqrt[7]{\varphi} = 1,3$
350	288	222	160	$\sqrt[7]{\varphi^3} = 2,19$

Für die Stufenscheibe, deren Stufen eine Breite von 110 mm, für einen Riemen von 100 mm Breite, erhalten sollen, kommt natürlich nicht die Drehzahl n_2 , sondern $n_6 = n_2 \cdot \varphi^4$ in Frage. Die Riemengeschwindigkeit ist

$$v = \frac{d_2 \cdot \pi \cdot n_6}{1000 \cdot 60} = \frac{288 \cdot 3,14 \cdot 112}{1000 \cdot 60} = 1,69 \text{ m/sek.}$$

es ist also $P = \frac{n \cdot 75}{v} = \frac{18,1 \cdot 75}{1,69} = 800$ kg und für 100 mm = 10 cm Riemenbreite die zu

übertragende Kraft $p = \frac{P}{b} = \frac{800}{10} = 80$ kg/cm Riemenbreite, ein Wert, der unter den vor-

¹⁾ L. Loewe & Co., Stufenscheibe oder Räderkasten.

Figur $A_1D_1C_1B_1E_1F_1$ entsteht, und daß ferner der Schaltantrieb so mit dem Hauptantrieb gekuppelt wird, daß die Schaltung sich auf dem Wege h_1 vollzieht.

Außerdem wird von dem Betriebe verlangt werden müssen, daß der leere Rückgang mit möglichst hoher Geschwindigkeit v_r , einem Vielfachen der Arbeitsgeschwindigkeit v_a , erfolgt.

b) Kurbelgetriebe.

Diese Getriebearten sind ohne besondere Zwischenglieder geeignet, eine Drehbewegung in eine gleitende zu verwandeln.

a) Die einfache **Kurbel mit Schubstange**, der Kurbeltrieb¹⁾, ist bereits an anderer Stelle behandelt und das Geschwindigkeitsdiagramm — die Geschwindigkeiten über den Wegstrecken — graphisch entwickelt worden.

Für den Hauptantrieb von Werkzeugmaschinen kann er schon deshalb nicht in Frage kommen, weil ein beschleunigter Rücklauf nicht vorhanden ist, wohl aber für den Schaltantrieb, wo er in Fällen ruckweiser Schaltung viel verwendet wird.

β) Die **schwingende Kurbelschleife** (Fig. 73) benutzt, meist unter Fortlassung der Schubstange, nur einen Teil des Kurbelzapfenkreises, nämlich nur den Bogen A_1A_2 , der ohnehin dem geringsten Geschwindigkeitsunterschied entspricht und erzielt, da die Umfangsgeschwindigkeit v_1 des Punktes A jetzt nicht konstant bleibt, für A eine wagerechte Geschwindigkeitskomponente c , deren Verlauf (Fig. 74) den Anforderungen des Diagrammes in Fig. 72 ziemlich genau entspricht. Zur Entwicklung des Diagrammes in Fig. 74 dient Fig. 76, aus der sich ergibt:

$$c = v_1 \frac{FB}{AB}; \quad v_1 = v_2 \frac{AB}{CB}; \quad v_2 = v \frac{CE}{r},$$

also:

$$c = \frac{v}{r} \frac{CE \cdot AB \cdot FB}{CB \cdot AB} = \omega \frac{CE \cdot FB}{CB}.$$

Fig. 73.

Verbindet man C mit F , und zieht man durch E — Fußpunkt des Lotes von D mit AB — die Gerade $EG \parallel CF$, so ist: $y = FG = \frac{CE \cdot FB}{CB}$ und deshalb, für $\omega = 1$.

Gleitgeschwindigkeit des Schlittens: $c = y$ (für $\omega = 1$).

Da die Fußpunkte der Lote von D auf die verschiedenen Lagen des Schwinghebels AB auf einem Kreise mit BD , d. h. der Exzentrizität e , als Durchmesser liegen, so hat man also nur für eine beliebige Lage des Schwinghebels AB den Schnittpunkt C von AB mit dem Kurbelkreise, und den Punkt F zu verbinden, in welchem die Wagerechte durch A die Zentrale BD schneidet. Eine Parallele zu CF , durch den Schnittpunkt E des Hebels AB mit dem Exzentrizitätskreise, bestimmt auf der Zentralen den Punkt G so, daß $FG = y$ ist. Die maximale Arbeits- und die maximale Rücklaufgeschwindigkeit werden (s. Fig. 76) gefunden zu:

$$v_a = \omega \cdot r \frac{R}{e + r} \quad \text{und} \quad v_r = \omega \cdot r \frac{R}{e - r},$$

$$\left[\text{für } \omega = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{a1} = \frac{r R}{e + r} \\ v_{r1} = r \cdot \frac{R}{e - r} \end{array} \right. \right].$$

¹⁾ S. Maschinenteile, S. 700 ff.

Während des Arbeitsganges durchläuft der Kurbelzapfen C den Weg von C_1 nach $C_2 = 2\alpha$ (Fig. 73) und während des Rücklaufes den Weg von C_2 nach $C_1 = 2\beta$; die mittleren Geschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie die aufgewendeten Zeiten, d. h.

$$m = \frac{v_r}{v_a} = \frac{t_a}{t_r} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Da ferner

$$\frac{\text{Hub}}{2 \times \text{Schwinghebel}} = \frac{h}{2R} = \cos\beta = \frac{r}{e}$$

und $\alpha + \beta = 180^\circ$ ist, so kann man sich über die Getriebeabmessungen und Geschwindigkeitsverhältnisse genau unterrichten.

Beispiel (Fig. 74—76). Gegeben: $m = 2$, $h = 600$ mm, $v_m = 10$ m/min, Kurbelradius $r = 160$ mm.

$$\frac{\alpha}{\beta} = 2, \quad \alpha = 120^\circ, \quad \beta = 60^\circ, \quad \cos\beta = 0,5;$$

$$R = \frac{h}{2 \cos\beta} = \frac{600}{2 \cdot 0,5} = 600 \text{ mm};$$

$$e = \frac{r}{\cos\beta} = \frac{160}{0,5} = 320 \text{ mm}.$$

Die Zeit für eine ganze Umdrehung der Kurbel r ist — bei n Umdrehungen/Minute — $t = \frac{1}{n}$ min; davon entfällt auf den Arbeitsgang:

$$t_a = \frac{\alpha}{180^\circ \cdot n} = \frac{m}{(m+1) \cdot n} = \frac{2}{3 \cdot n} \text{ min}.$$

$$\text{Da } \omega = \frac{v}{r} = \frac{2r - r \cdot n}{r}, \quad \text{so ist } n = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\left(\text{die Dimension von } \omega \text{ und von } n \text{ ist: } \frac{1}{\text{min}}\right)$$

und v_m (für den Arbeitsgang) = $\frac{h}{t_a \cdot 1000}$ $\left(\frac{h \text{ in mm}}{v \text{ in m/min}, t_a \text{ in min}}\right)$,
also $v_m = \frac{h \cdot 3 \pi}{2 \cdot 1000} = \frac{h \cdot 3 \omega}{4 \pi \cdot 1000}$ m/min

und endlich $\left[\text{für } v_m = 10 \text{ m/min}, \frac{h}{k} = 600 \text{ mm}\right] \omega = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 3,14}{600 \cdot 3} = 69,75 \frac{1}{\text{min}}$,

demnach $n = \frac{\omega}{2\pi} = 11,1 \text{ Umdr./min.}$

Ferner sind die maximalen Werte (s. Fig. 76)

$$\text{für } \begin{cases} v_a = \omega \cdot r \frac{R}{e+r} = 69,75 \cdot 160 \cdot \frac{600}{320+160} \cdot \frac{1}{1000} = 13,95 \text{ m/min} \\ v_r = \omega \cdot r \frac{R}{e-r} = 69,75 \cdot 160 \cdot \frac{600}{320-160} = 41,9 \text{ m/min.} \end{cases}$$

Nachteile der schwingenden Kurbelschleife¹⁾. 1. Wird der Hub verringert, was aus konstruktiven Gründen nur durch Verkürzung der Kurbel r erfolgen kann, so wächst $\cos\beta = \frac{r}{e}$.

Die Rücklaufbeschleunigung $m = \frac{v_r}{v_a} = \frac{\alpha}{\beta}$ — ein kennzeichnender Vorteil dieser Antriebsart — wird immer kleiner.

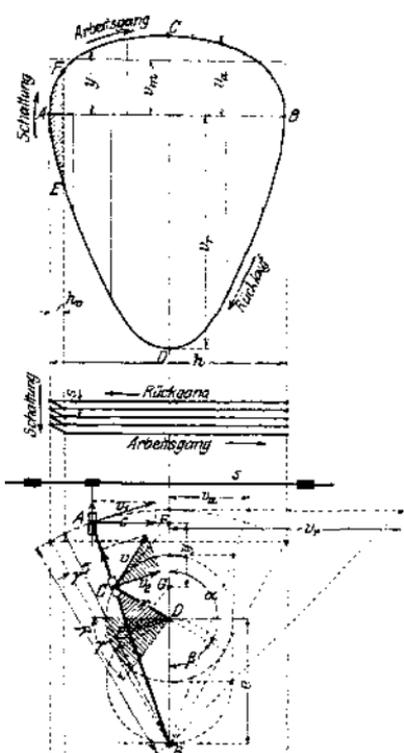


Fig. 74 bis 76.

¹⁾ Ruppert, Aufgaben und Fortschritte, S. 96/97. Berlin 1907. Julius Springer.

Sinkt z. B. im oben durchgeführten Falle h' auf 100 mm, so wird

$$\frac{r}{e} = \frac{h'}{2R} = \frac{100}{2 \cdot 600} = \cos \beta = 0,0833,$$

$$\text{mithin } \begin{cases} \beta = 85^{\circ} 43' \\ \alpha = 94^{\circ} 47' \end{cases} \quad \text{und} \quad m = \frac{\alpha}{\beta} = 1,11.$$

2. Weil der verkleinerte Hub bei Anwendung der gleichen Drehzahl die gleiche Zeit erfordert wie der ursprüngliche, so sinkt die Schnittgeschwindigkeit ganz erheblich; im obigen Beispiel, weil

$$\begin{aligned} r &= e \cdot \cos \beta = 320 \cdot 0,0833 = 26,67 \text{ mm,} \\ \text{auf } \begin{cases} v_a = 69,75 - 26,67 \cdot \frac{600}{320 + 26,67} \cdot \frac{1}{1000} = 3,22 \text{ m/min,} \\ v_r = 69,75 - 26,67 \cdot \frac{600}{320 - 26,67} \cdot \frac{1}{1000} = 3,8 \text{ m/min.} \end{cases} \end{aligned}$$

Die mittlere Schnittgeschwindigkeit sinkt ebenfalls entsprechend, weil

$$\text{auf } i_a = \frac{m}{(m+1) \cdot \pi} = \frac{1,11}{2,11 \cdot 11,1}$$

$$v_m = \frac{h'}{i_a \cdot 1000} = \frac{100 \cdot 21,1}{1000} = 2,11 \text{ m/min.}$$

Soll v_m wieder auf 10 m/min gesteigert werden, so muß also eine neue Drehzahl

$$n' = \frac{11,1 \cdot 10}{2,11} = 53 \text{ Umdr./min}$$

eingeführt werden.

Gleichzeitige Ausführung der Schaltung ist hier, wie auch bei den anderen Kurbeltrieben, leicht zu bewirken, weil dem kleinen Schaltwege $2 \times h_0$ (Fig. 75) (zum Schluß des Rücklaufes und zu Beginn des Arbeitsganges) ein ziemlich großer Schaltwinkel γ (Fig. 76) entspricht. Wie diese Teildrehung des Kurbelarmes r der Schaltung dienstbar gemacht werden kann, soll weiter unten ausgeführt werden.

Eine Ausführungsform der schwingenden Kurbelschleife mit Schubstange, dort sogar in Verbindung mit exzentrisch angetriebenem Kurbelzapfen, ist bei der Senkrechtstoßmaschine von Schieß (Fig. 297) angewendet; das Diagramm wird dadurch um eine Wenigkeit unsymmetrisch (s. auch Fig. 78), zeigt aber sonst die Form der Fig. 74. Ausführungen ohne Schubstange — oder mit unendlich langer Schubstange — zeigen die Fig. 275, 276 und 292.

*) Die **umlaufende (exzentrische) Kurbelschleife**, Fig. 77 (s. hierzu auch Fig. 277) zeigt einen Kurbelarm R , der eine volle Umdrehung ausführt, allerdings mit dem Unterschied gegenüber der gewöhnlichen Kurbel mit Schubstange, daß ihm eine zweite, exzentrisch gelagerte Kurbel vom Radius r vorgeordnet ist, deren Stein in einer Führung der Hauptkurbel gleitet. Durch die exzentrische Anordnung der treibenden Kurbel wird erreicht, daß für den Arbeitsgang, d. h. für den Weg des Kurbelzapfens von D_1 nach D_2 , eine größere Zeit gebraucht wird, als für den Rücklauf — Weg des Kurbelzapfens von D_2 nach D_1 . Es findet also auch hier eine Rücklaufbeschleunigung statt im Verhältnis:

$$m = \frac{v_r}{v_a} = \frac{t_a}{t_r} = \frac{\alpha}{\beta},$$

ferner ist auch hier

$$\cos \beta = \frac{e}{r}.$$

Doch ist der Hub, weil bei dieser Ausführung eine Verkürzung des Kurbelarms R möglich wird, stets $h = 2R$, mithin das Übersetzungsverhältnis m hier nicht abhängig vom Hub, was einen unbestreitbaren Vorteil bedeutet. Daß trotzdem im allgemeinen die schwingende Kurbelschleife vorgezogen wird, hat seinen Grund in der Möglichkeit bequemeren Einbaues —

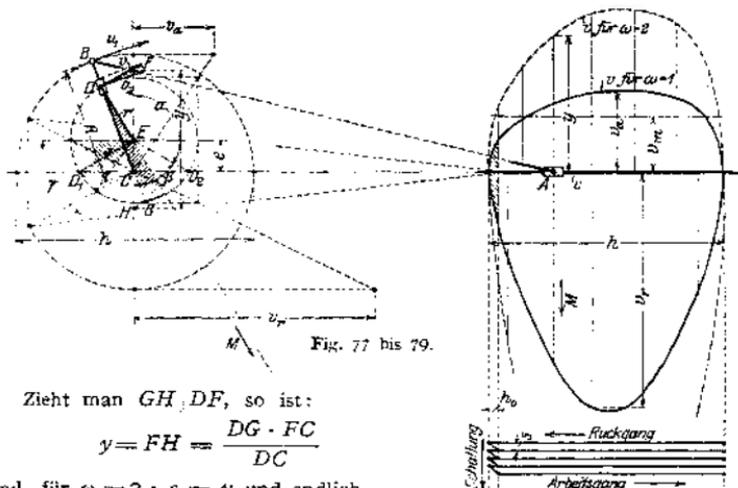
unter dem Schlitten — und im Fortfall der Schubstange, durch die eine sperrige Konstruktion entsteht.

Die Entwicklung des Geschwindigkeitsdiagramms (Fig. 78) folgt aus Fig. 77, unter Benutzung eines Momentenpols M :

$$c = v_1 \frac{AM}{BM} = v_1 \frac{FC}{BC}; \quad v_1 = v_2 \frac{BC}{DC}; \quad v_2 = v \frac{DG}{2r}$$

also

$$c = \frac{v}{2r} \frac{DG \cdot BC \cdot FC}{DC \cdot BC} = \frac{\omega}{2} \cdot \frac{DG \cdot FC}{DC}$$



Zieht man GH , DF , so ist:

$$y = FH = \frac{DG \cdot FC}{DC}$$

und, für $\omega = 2$: $c = y$ und endlich

$$\text{Gleitgeschwindigkeit des Schlittens } S : c = \frac{y}{2} \text{ (für } \omega = 1 \text{).}$$

Der exzentrische Antrieb des Kurbelarmes ist aus Fig. 295, die übrige Anordnung, wie oben erwähnt, aus Fig. 277 zu erkennen.

Anordnung mehrerer Drehzahlen für die verschiedenen Hübe ist auch für diese Ausführung nötig, stellt aber, wie unten nachgewiesen werden soll, nicht einen besonders großen Nachteil dar.

Die Schaltung kann auch hier (Fig. 79) ohne Schwierigkeiten abgeleitet werden.

In Fig. 80 ist die Kombination einer schwingenden Kurbelschleife mit vorgelagerter, umlaufender und exzentrisch angetriebener Kurbel dargestellt und in Fig. 81 das entsprechende Geschwindigkeitsdiagramm wiedergegeben.

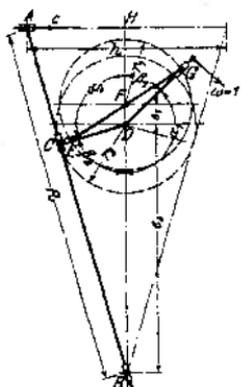


Fig. 80.

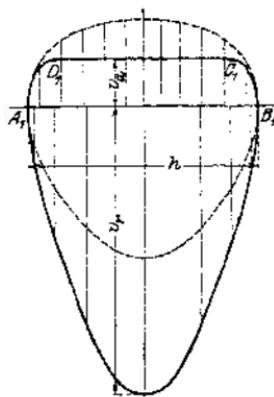


Fig. 81.

Das entsprechende Geschwindigkeitsdiagramm wiedergegeben.

Die gestrichelt eingetragene Kurve zeigt das Geschwindigkeitsdiagramm für den Fall, daß Kurbelzapfen *C* (Fig. 80) gleichförmige Winkelgeschwindigkeit ω hätte. Bei der vorliegenden Anordnung hat aber nicht Punkt *C*, sondern Punkt *G* (*C* gegenüber exzentrisch gelagert) gleichförmige Winkelgeschwindigkeit und die Veränderung von ω für den treibenden Kurbelzapfen *C* bewirkt den Geschwindigkeitsverlauf nach der voll ausgezogenen Kurve. Ihre gute Übereinstimmung — wenigstens was den Verlauf von v_s betrifft — mit dem Idealogramm Fig. 72 ist ohne weiteres zu erkennen. Eine Verkleinerung des Hubes beeinflusst ebenfalls, und zwar ungünstig, die Rücklaufbeschleunigung m , doch nicht annähernd in dem Maße, wie bei der allgemein üblichen Ausführung.

c) Schraube und Mutter.

Fig. 82 zeigt einen Schlitten, der durch Schraube und Mutter bewegt wird. Angenommen wurde, daß die Mutter zum Zwecke der Nachstellung eine Teilung in der Längsachse erhalten hat und infolge von Nachstellung der unteren Mutterhälfte senkrecht zur Achse ein Verlegen der Mutterachse und Verbiegen der Schraubenspindel stattfindet. Wird der Schlitten von links nach rechts beansprucht, so erfolgt eine Knickbelastung der Schraube, der sie besonders dann nicht gewachsen sein wird, wenn vorher schon eine Verbiegung auftrat.



Fig. 82.

Fig. 82 lehrt also

1. Die Schraubenspindel ist stets so zu lagern, daß sie außer den unvermeidlichen verdrehenden Kräften nur noch Zugkräfte aufzunehmen gezwungen ist.

2. Die Teilung der Schraubenmutter behufs Nachstellung hat stets so zu erfolgen, daß durch Nachstellung keine Änderung der Achsenlage eintritt.

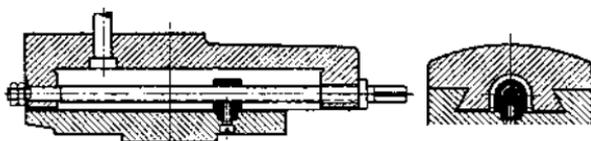


Fig. 83.

Fig. 83 zeigt das Beispiel einer richtigen Lagerung der Schraubenspindel, Fig. 84/85 und 86 bis 88 zwei Ausführungen der Mutter, durch

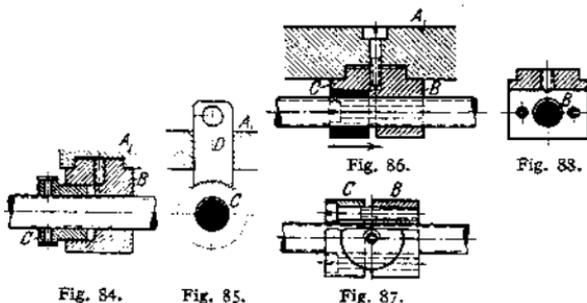


Fig. 84.

Fig. 85.

Fig. 87.

welche die richtige Achsenlage auch beim Nachstellen gewahrt bleibt. Wenn der Druck auf den Schlitten im allgemeinen nur in einer Richtung erfolgt, ist die Mutter so zu teilen, wie Fig. 89 zeigt, damit die eigentliche Mutter *B* und nicht der nachstellbare Teil *C*

oder die Stellschrauben die Beanspruchung auszuhalten haben. Wechselt die Druckrichtung, so sind in den Teilen *B* und *C* gleichviel Gewindengänge vorzusehen und die Stellschrauben so zu bemessen, daß sie den Druck

aufzunehmen vermögen. Kann, wie meist bei der Leitspindelmutter (siehe später), ein gleichzeitiges Verstellen beider Mutterhälften erfolgen, so gibt eine Teilung der Mutter in axialer Richtung zu Bedenken keinen Anlaß mehr.

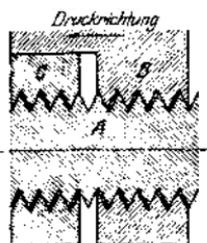


Fig. 89.

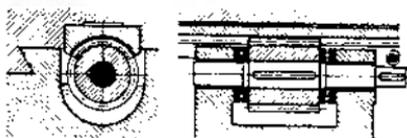


Fig 90 und 91.

Fig. 90, 91 zeigen die Langmutter mit kurzer Schraube (Schnecke). Meist ist die Mutter ungeteilt, weil genügend große Anlageflächen zwischen Mutter und Schraube geschaffen werden können. Die gedrungene Schnecke kann im Ölbad laufen, und der Axialdruck kann durch Kugellager gut aufgenommen werden. Eine gewisse Unbequemlichkeit bietet der Antrieb, da auf der Schneckenwelle nur ein kleines Antriebsrad untergebracht werden kann, dessen Durchmesser höchstens gleich dem Kerndurchmesser der Schnecke sein darf. Die Schnecke wird meist aus Stahl, die Langmutter aus Rotguß oder Phosphorbronze hergestellt.

Liegt die Ausführung Fig. 82 bis 88 vor, so ist zu bedenken, daß die Mutter nicht aus zu weichem Material — Gußeisen und auch Stahl sind sehr geeignet —, jedenfalls nicht aus Messing oder Rotguß hergestellt werden darf.

Die unvermeidlichen, scharfkantigen Staubteilchen setzen sich in dem weichen Material der Mutter fest und kehren ihre scharfen, schneidenden Kanten der Schraube zu, die sie abschleifen¹⁾. Da die Schraube hauptsächlich an einer Stelle benutzt werden wird, so muß die Abnutzung dann an dieser Stelle erfolgen, die Mutter hier schlottern und an anderen Stellen der Schraube zu fest gehen. Besteht die Mutter aus dem härteren Material, so erfolgt das Festsetzen der schleifenden Staubteilchen in der Schraube, die kurze Mutter wird auf ihrer ganzen Länge ausgeschliffen — ein Übelstand, dem man zunächst durch Nachstellen, schließlich durch Erneuern der kurzen Mutter begegnen kann, während die lange, teure Schraube erhalten bleibt.

Bei Anwendung der Langmutter liegen diese Bedenken natürlich nicht vor, es findet auch ein besserer Schutz gegen Staubfall statt.

d) Zahnrad und Zahnstange,

heute nur noch in Evolventenverzahnung ausgeführt, sind mit Rücksicht auf den bei kleinen Zähnezahlen auftretenden Unterschnitt — der bei dem meist üblichen Konstruktionswinkel von 75° schon bei weniger als 30 Zähnen des Triebes, bei 70° bei weniger als 17 Zähnen auftritt — auszuführen. Man muß also entweder das Trieb mit 30 Zähnen oder mehr — bei Tischhobelmaschinen mit 40 und 50 und oft noch mehr — Zähnen ausführen, oder in irgendeiner der in dem Kapitel Maschinenelemente aufgeführten Arten von der Normalform abweichen.

Fig. 92 zeigt einen Trieb mit 12 Zähnen, Mod. = 3 mm, das so weit aus der Zahnstange herausgehoben ist, daß die Kopfbahn der Stange gerade

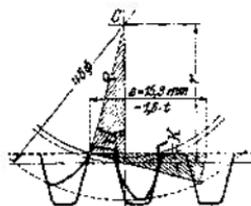


Fig. 92.

¹⁾ Es ist bekannt, daß weiche Schleifscheiben, auf die loser Schmirgel aufgebracht wird, wesentlich schärfer angreifen als harte Scheiben.

durch den Punkt hindurchgeht, in dem die Konstruktionslinie den Grundkreis berührt. Natürlich ist der Kopfkreisdurchmesser dann nicht mehr $d_k = (Z+2)M$, d. h. $d_k = 14 \cdot 3 = 42$, sondern größer, im vorliegenden Falle 46 mm groß. Oft ist man gezwungen, zu diesem Hilfsmittel oder, unter Beibehaltung normaler Lage der Teillinie, zur Ausbildung der Zahnstangenköpfe nach einer Zykloide zu greifen, wenn Raumangel oder — wie beim Vorschub der Bohrspindel an der Bohrmaschine — ein sonst zu stark anwachsendes Drehmoment am Trieb zur Vorsicht mahnen. Das Beispiel zeigt, wie groß bei dieser geringen Zahnzahl die Eingriffsdauer (1,6 t) noch gehalten werden kann.

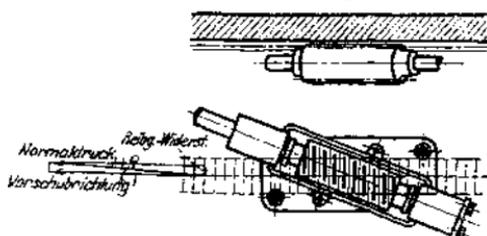


Fig. 93 und 94.

e) Schnecke und Zahnstange.

Fig. 93, 94 zeigen den Antrieb der Sellers-Tischhobelmaschine, der eine Kombination aus den Getriebearten unter c und d, gewissermaßen den Eingriff von zwei Zahnstangen ineinander zeigt.

Die Zahnstange — gestrichelt angedeutet — liegt über der Schnecke, die um

ihren Steigungswinkel + Reibungswinkel schräg gegen die Zahnstangenrichtung angeordnet worden ist. Von dem auf die Zahnstangenzähne wirkenden Normaldruck N kommt nämlich nur die eine Komponente als Vorschubkraft in Frage, die andere,

$$W = N \cdot \operatorname{tg} \varrho = N \cdot \mu,$$

wird in Reibungswärme und Abnutzung umgesetzt.

4. Kupplungs- und Schalteinrichtungen.

a) Kupplungen für dauernde Mitnahme

dienen zur Übertragung der Drehbewegung von einer Welle auf die andere unter Vermittlung von Kreuzgelenken (Cardanisches Gelenk).

Eine mittlere, ausziehbare Welle II ist mit zwei in einer Ebene stehenden Bügeln ausgerüstet, in denen Schrauben sitzen, die in Bohrungen von 2 Kugeln greifen. Jede dieser Kugeln enthält noch eine zweite, zur ersten rechtwinklige Bohrung, in welche treibende, in gleichen Bügeln der Wellen I und III gelagerte Schrauben eingreifen.

Soll die getriebene Welle III ständig die gleiche Winkelgeschwindigkeit haben wie Welle I , so müssen die Wellen parallel gelagert sein. Für die Größe der Drehwinkel von Welle II besteht die Beziehung:

$$\operatorname{tg} \alpha_{II} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_I}{\cos \delta_1},$$

wenn α_I , α_{II} die in den gleichen Zeiten von den Wellen I und II durchlaufenen Drehwinkel und δ_1 den Winkel zwischen den beiden Wellenrichtungen angeben.

Stehen die Bügel der Welle II in einer Ebene, so ist $\operatorname{tg} \alpha_{III} = \operatorname{tg} \alpha_{II} \cdot \cos \delta_2$, mithin, wenn $\delta_1 = \delta_2$ ist, d. h. die Wellen I und III parallel sind:

$$\operatorname{tg} \alpha_{III} = \operatorname{tg} \alpha_{II} \cdot \cos \delta_2 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_I \cdot \cos \delta_2}{\cos \delta_2} = \operatorname{tg} \alpha_I,$$

d. h. in diesem Falle (Fig. 95) sind die Winkelgeschwindigkeiten: $\omega_{III} = \omega_I$.

Im Diagramm Fig. 97 sind die Unterschiede zwischen α_{II} und α_I für α_I von 0 bis 360° graphisch aufgetragen; man sieht, daß im ersten Quadranten Welle *II* der Welle *I* voraneilt, daß nach einer Vierteldrehung der Unterschied ausgeglichen ist, daß im zweiten Quadranten *II* hinter *I* zurückbleibt und sich das Spiel von 180° bis 360° wiederholt. Bei richtiger Anordnung der Bügel an Welle *II* gleicht sich der Fehler für Welle *III* wieder aus, so daß stets

$$\alpha_{III} - \alpha_I = 0$$

oder

$$\omega_{III} = \omega_I.$$

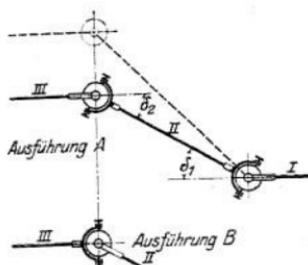


Fig. 95 und 96.

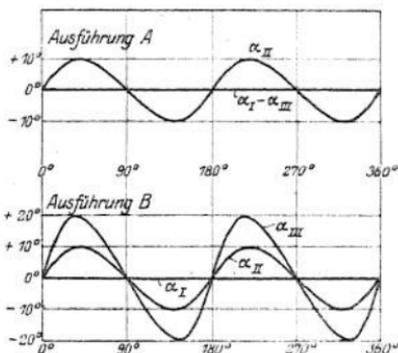


Fig. 97 und 98.

Werden dagegen (Fig. 96) die Bügel der Wellen *II* um 90° gegeneinander versetzt, so besteht die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \alpha_{III} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{II}}{\cos \delta_2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_I}{\cos \delta_1 \cdot \cos \delta_2}$$

und für $\delta_1 = \delta_2 = \delta$:

$$\operatorname{tg} \alpha_{III} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_I}{\cos^2 \delta}.$$

In Fig. 98 ist der Einfluß der falschen Anordnung und die Steigerung des Fehlers der Welle *II*, beim Übergang auf Welle *III*, zu erkennen.

Für $\delta = 45^\circ$, also $\cos \delta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\cos^2 \delta = \frac{1}{2}$ ist dann:

$$\operatorname{tg} \alpha_{III} = 2 \operatorname{tg} \alpha_I,$$

was ein Maximum des Fehlers bei $\alpha_I \approx 30^\circ$ (nämlich $\alpha_{III} = 49^\circ 24'$) ergibt. Da die Kugelgelenke — nach Angabe der herstellenden Firmen — bis zu einem Winkel $\delta = 40^\circ$ benutzt werden dürfen, so ist also der in den Diagrammen dargestellte Wert nicht als übertrieben anzusehen.

Fig. 99 stellt die Bügel und Fig. 100 in Ansicht und Schnitt die zweiteilige Kugel eines modernen Kugelgelenks der Firma Ludw. Löwe dar.

Die ausziehbare Welle muß natürlich mit Nut und Langfeder versehen sein.

b) Ausrückbare Kupplungen.

a) Zahnkranz Kupplungen, wie solche in Fig. 64 und 66 radial wirkend, in Fig. 350, 351 axial wirkend dargestellt sind, müssen als sehr gut angesehen werden, wenn genügend Platz vorhanden ist und, wenigstens für axiales Einschieben, die Zahnlücken seitlich ausgerundet sind.

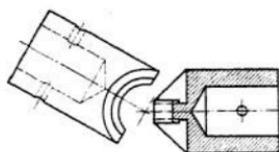


Fig. 99.

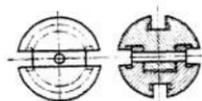


Fig. 100.

β) **Klauenkupplungen.** Fig. 101, 102 zeigen eine Kupplungsklaue, die auf die eine Welle verschiebbar aufgedrückt, die andere Welle zur Drehung zwingt. Zur Erleichterung der Herstellung sei darauf hingewiesen, daß bei ungerader Anzahl der Kupplungszähne jedesmal zwei Zahnflanken auf einmal — die Fräswerge sind einschrafft — bearbeitet werden können, was bei gerader Anzahl der Kupplungszähne unmöglich ist. Andere Anordnung der Kupplungszähne zeigen die Fig. 68, 103¹⁾.

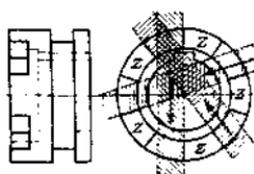


Fig. 101.



Fig. 102.

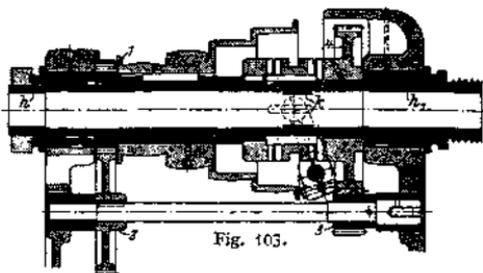


Fig. 103.

Ähnlich den Klauenkupplungen wirken die Stiftkupplungen, von denen die Fig. 104, 105 Ausführungsbeispiele darstellen. Besonders einfach und billig ist die in Fig. 104 dargestellte Kupplung der Firma L. Löwe.

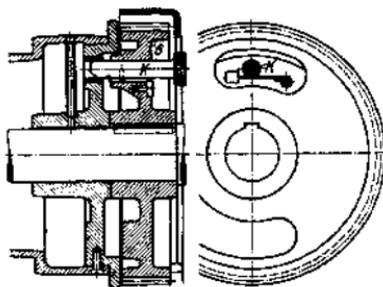


Fig. 104.

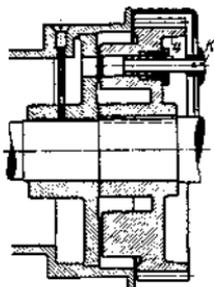


Fig. 105.

Eine Sicherheitskupplung, die bei Überanstrengung sich selbst löst, da die Reibung in den schräg gefrästen Kupplungszähnen und der Federdruck überwunden werden, zeigt Fig. 106.

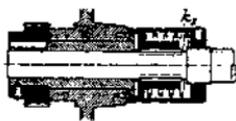


Fig. 106.

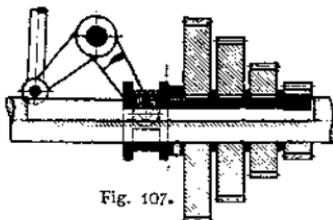


Fig. 107.

γ) **Ziehkeilkupplungen** dienen dazu, je eins von verschiedenen, lose auf der Welle laufenden Rädern mit dieser zu verbinden. Eine der einfachsten Ausführungen zeigt der Ziehkeil der Wandererwerke, Fig. 107. Allen Ziehkeilanordnungen, wie solche z. B. auch noch in den Fig. 232 und 348 dargestellt sind, haftet der Mangel an, daß eine starke Schwächung der Welle unvermeidlich ist; auf der

¹⁾ Siehe hierzu Maschinenteile, Kupplungen, S. 618.

anderen Seite benötigen die Ziehkeile keinen oder nur wenig Platz zwischen den Rädern, was eine geringe Baulänge gestattet¹⁾.

δ) **Reibkupplungen.** Bei diesen Kupplungen wird entweder eine konische — oder doppelkonische — Scheibe, die meist die getriebene Welle durch Feder und Nut mitnimmt, in das eine oder in das andere Antriebsorgan hineingezogen, und so die Drehzahl oder die Drehrichtung — oder beide — der getriebenen Welle verändert, oder es wird ein geschlitzter Mitnehmer mit zylindrischem Mantel aufgespreizt und in einem Hohlzylinder auf der getriebenen Welle saugend angepreßt.

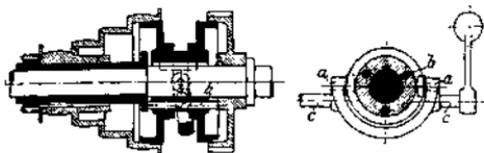


Fig. 108.

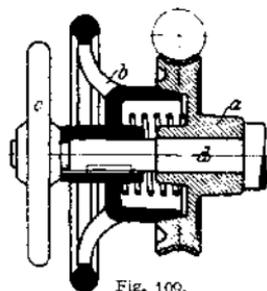


Fig. 109.

Kupplungen der ersten Art sind entweder reine Reibkupplungen, wie Fig. 254 oder Figur 108, oder Reibkupplungen mit Sicherung, wie in Fig. 109, wo durch einen Wörtel *c* das mit konischem Ansatz versehene Handrad *b* durch Reibung das Schneckenrad *a* mitnimmt; oder wie in Fig. 110, wo die Muffe *m* die Sichel *s* mitnimmt und diese mit einer Nase die Doppelkupplung *k*₁, *k*₂ in dem einen oder anderen Sinne vorschleift; die Muffe hindert auch gleichzeitig ein Lösen der Kupplung.

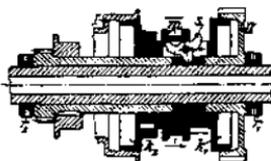


Fig. 110.

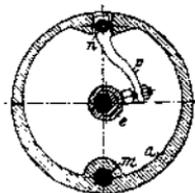


Fig. 111.

Kupplungen der zweiten Art sind die Spreizkupplungen, von denen Fig. 111 eine der einfachsten Ausführungen darstellt, sie sind bei der Böhlinger Drehbank

S. 1302 und bei der Löwe-Bohrmaschine S. 1326 angewendet und werden dort näher beschrieben. Alle Reibkupplungen bieten den Vorteil, daß sie ohne Anhalten der Maschine aus- und eingerückt werden können und daß der Stoß beim Einrücken gemildert wird. Allerdings sind sie in bezug auf sichere und dauernde Mitnahme nicht immer zuverlässig; vielfach werden sie deshalb nachstellbar angeordnet (s. S. 1245 und 1246).

ε) **Betätigung der Kupplungen.** Von diesen Einrichtungen zeigen Fig. 230 und 112 eine Bauart zum Ein- und Ausschwenken der Vorgelegewelle, Fig. 343 eine solche zum gleichzeitigen Ausschwenken dieser Welle und zur Betätigung des Mitnahmestiftes für unmittelbare Mitnahme.

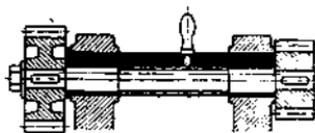


Fig. 112.

Verstellung der Kupplungsklauen zeigen Fig. 103, 108, 313, 322, 348, 349, Verstellung des Ziehkeils die Fig. 106, 232.

Diese Getriebeteile werden vielfach schon als Normalien hergestellt und sind am besten den Sonderkatalogen der entsprechenden Firmen zu entnehmen.

¹⁾ Siehe Ruppert, Fortschritte und Erfahrungen, S. 164/165; Löwe, Stufenscheibe oder Räderkasten?

c) Gesperre.

a) **Ruhende Gesperre** dienen nur zur Unterbrechung einer Bewegung und unterscheiden sich in ihrem Anwendungsgebiet und auch in ihrer konstruktiven Durchbildung nicht von den z. B. an den Hebezeugen üblichen Anordnungen. Natürlich liegen hier stets Präzisionsgesperre vor mit sauber bearbeiteten Rädern, und die Forderung, daß der Druck des Sperrades auf die Klinke genau durch den Drehpunkt der Klinke gehe, muß hier ganz scharf beachtet werden.



Fig. 113.



Fig. 114.



Fig. 115.

Die für Lösung der Klinke zur Verfügung stehenden Kräfte sind im Werkzeugmaschinenbau meist so klein, daß ein zusätzliches Moment, das die Klinke in die Zahnücke des Sperrades hineinziehe, nicht überwunden werden könnte; daß dieses zusätzliche Moment nie einen solchen Drehsinn der Klinke erzeugen darf, daß diese aus der Lücke herausgedrückt wird, ist selbstverständlich. Zur Verminderung der Reibung ist auf richtige Anordnung der Sicherungsfeder genau zu achten. In Fig. 113 wird längs eines Weges, der durch den Halbmesserunterschied der beiden gestrichelten Kreisbögen um den Mittelpunkt der Klinke gegeben ist, zwischen Klinke und Feder Reibungsarbeit geleistet; Fig. 114 und 115 zeigen Federanordnungen, die diesen Weg zu Null machen. Fig. 116 zeigt eine umlegbare Klinke, eine Anordnung, die häufig angebracht wird, wenn die Bewegungshemmung von Hand ausgeschaltet werden soll. Fig. 117 zeigt ein sog. stummes Gesperre; solange Drehung im Sinne des Uhrzeigers vorliegt, wird das Sperrrad durch die Klinke an der Drehung gehindert, kehrt der Drehsinn um, so hebt der mit Reibung auf der Achse des Rades sitzende Draht die Sperrklinke aus und hält sie so lange hoch, bis sich der Drehsinn des Rades wieder ändert.



Fig. 116.

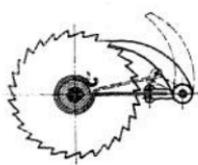


Fig. 117.

Auf diese Art wird das lästige Klappern der leeren Sperrklinke verhindert. Bei Drehung im ersten Sinne wirkt gleichzeitig der Draht als Sicherungsfeder für die Klinke.

β) **Laufende Gesperre**¹⁾. Wird die Sperrklinke an einem umlaufenden Arm befestigt und zwingt sie ein Zahnrad, an der Drehung des Armes zeitweilig teilzunehmen, so ist damit eine Einrichtung entstanden, die für Schaltung im Werkzeugmaschinenbau von höchster Bedeutung ist. Fig. 118 zeigt die Vereinigung eines laufenden mit einem ruhenden Gesperre; die am sich drehenden Arme drehbar befestigte Klinke nimmt das Sperrrad mit, solange sich der Arm in der Pfeilrichtung bewegt, kehrt der Arm um, so hebt sich die laufende Klinke aus, und die ruhende Klinke hindert die Rückdrehung.

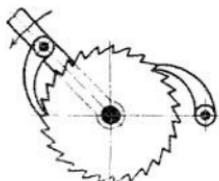


Fig. 118.

Fig. 119, 120 zeigen die Ausführung eines laufenden Gesperres, wie es vielfach an Wagerichtstoßmaschinen verwendet wird. Ein Bügel *A*, der lose um die Achse des Sperrades — also konzentrisch zu dessen Teilkreis — schwingen muß, wird von der Schubstange *S* mitgenommen. In *A* führt sich ein Kolben mit Knopf *B*, der durch eine Feder gegen das Sperrrad gedrückt

¹⁾ Siehe Fischer, W. T. 1908, S. 61 ff., „Über Schaltwerke“.

wird und an seiner Stirnfläche als Sperrzahn ausgebildet ist. Das Schartenrad C wird (Fig. 119) mitgenommen, wenn A im Sinne des Pfeiles I schwingt, der Sperrzahn gleitet aber über die Zähne des Sperrades hinweg, wenn die Schwingung in der Richtung 2 erfolgt. Ein Stift a , der in eine der Rasten b_1 oder b_3 am Bügel A einfällt, sichert die Lage des Sperrzahnes gegenüber dem Sperrrad C so, daß bei Einlegen des Stiftes a in b_1 Mitnahme im Sinne I , bei Einlegen in b_3 Mitnahme im Sinne II , und bei Einlegen in b_2 überhaupt keine Mitnahme erfolgt. Sperrrad C sitzt fest auf Achse D , die also, je nach der Größe des Schwingbogens von A , um ein oder mehrere Zähne des Sperrades C in dem einen oder anderen Sinne mitgenommen werden kann. Fig. 121 zeigt ein Schartenrad mit gelenkig angeordneter Doppelklinke, die also auch in dem einen oder im anderen Sinne, je nach ihrer Lage, mitnehmen kann: statt des Schartenrades liegt hier oft ein gewöhnliches Zahnrad vor, das dann gleich für weiteren Antrieb benutzt werden kann.

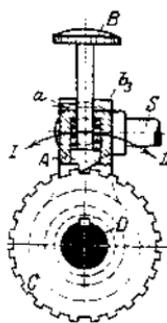


Fig. 119.

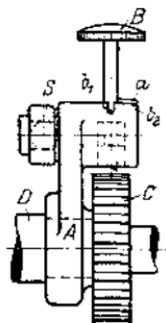


Fig. 120.

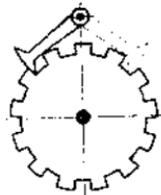


Fig. 121.

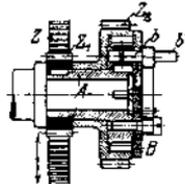
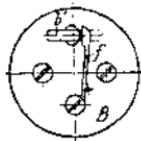


Fig. 122 bis 124.

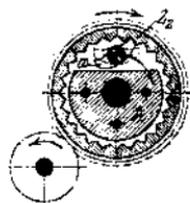


Fig. 122 bis 124 zeigen die Schaltdose von Gray, bei welcher der ganze Schaltmechanismus, gegen Staub und Beschädigung geschützt, im Innern einer Dose eingebaut ist. Die Sperrklinke a — in Fig. 124 im Eingriff, in Fig. 122 und 123 außer Eingriff gezeichnet, gestrichelt in Fig. 124 — ist durch Drehung der Achse b in 3 Lagen zu bringen. Je nachdem sie entweder in der Lage nach Fig. 124 oder entgegengesetzt liegt, nimmt sie in dem einen oder anderen Sinne mit. Gesichert wird die Klinke in ihrer Lage dadurch, daß ein verdickter Teil der Achse b mit einer Kante in eine Rast der Feder f (Fig. 122) einspringt, oder mit einer seiner beiden Flächen gegen den flachen Teil der Feder f anliegt. Achse b ist in der Hülse A und ihrem Deckel B gelagert, die, durch Zahnstange Z und Zahnrad Z_1 mitgenommen, b zur Umdrehung zwingen; je nach Lage der Sperrklinke, von außen kenntlich an der Lage des flachen Griffes der Achse b , wird beim Auf- oder Niedergang der Zahnstange Z das Rad Z_1 mitgenommen.

Ein Reibgesperre ist in Fig. 125 und 126 dargestellt (s. Hobelmaschine von Böhringer, Fig. 285). Eine im Sinne des Pfeiles umlaufende Scheibe u nimmt den Kranz v durch Reibung so lange mit, bis der Hebel w an den linken Anschlag anstößt, die Spannung der Feder überwindend den Kranz v

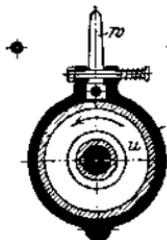


Fig. 125.

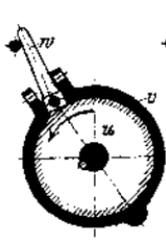


Fig. 126.

aufspreizt und so die Reibung aufhebt. Erst bei Rückdrehung von u nimmt die Reibung den Kranz v von neuem mit, bis sich, beim Anstoßen von w an den rechten Anschlag, dort das Spiel wiederholt. Werden die Anschlagstifte auf einem Stellbogen angeordnet, so läßt sich natürlich auch hier der Winkel des Ausschlags und damit die Größe der durch Kranz v und die ihm nachgeordneten Teile hervorzubringenden Schaltung einstellen.

Ein laufendes Gesperre für ununterbrochene Schaltung ist in Fig. 127 dargestellt. Bei Hingang des

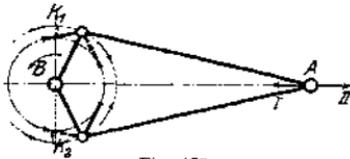


Fig. 127.

gleicher Bewegung von A , Mitnahme in umgekehrter Richtung.

7) **Betätigung der Gesperre.** Die Einleitung der Bewegung für die laufenden oder Schaltgesperre erfolgt in der Regel von einer Welle her, die sich um einen mehr oder minder großen Winkelbetrag dreht, der meist 180° nicht überschreitet, es sei denn, daß die Schaltung, wie oben beschrieben, von einer sich ständig drehenden Welle durch ein Reibgesperre abgeleitet wird. In den oben genannten Fällen und auch dann, wenn der Antrieb von einer Welle her erfolgt, die sich während eines Arbeitsganges mehr als einmal, und zwar stets

in der gleichen Richtung umdreht (s. Fig. 285), stellt der Kurbeltrieb die beliebteste Art der Antriebsmechanismen dar; auf seine Vorzüge für diesen Zweck besonders hinzuweisen erscheint nötig.

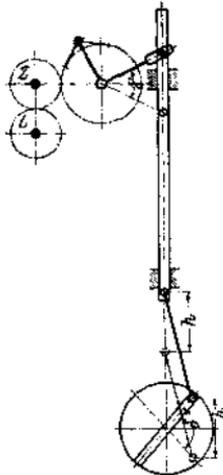


Fig. 128.

Das Sperrrad und die ihm nachgeordneten Getriebeteile stellen ruhende Massen vor, die durch die Sperrklinke beschleunigt werden sollen. Es wird also nötig sein, die Bewegung der Sperrklinke so zu regeln, daß sie, mit einer ganz geringen Eigengeschwindigkeit auftretend, das Sperrrad, entsprechend ihrer wachsenden Geschwindigkeit, nach und nach beschleunigt. Hierzu ist der Kurbeltrieb ganz besonders geeignet, der in der Nähe beider Nullagen der Schubstange eine geringe Geschwindigkeit übermitteln, so daß die Klinke mit kleiner Anfangsgeschwindigkeit das Gesperre zum Mitlaufen zwingt. Bei der meist verwendeten Anordnung, die in Fig. 128 wiedergegeben ist — s. hierzu auch Fig. 288 —, wird nun allerdings meist der mittlere Teil des Kurbelweges allein benutzt, um der Schaltstange die Bewegung zu erteilen, und es liegt deshalb die Gefahr vor, daß die Klinke gleich zu Anfang eine ziemlich große, dann allerdings annähernd gleichmäßige Geschwindigkeit annimmt. Es müssen also die der Antriebskurbel vorgeordneten Getriebeteile so beschaffen sein, daß sie vorläufig gleiten, bis allmählich die Massenwiderstände im Schaltantrieb überwunden sind.

Besonders muß darauf geachtet werden, daß gleich zu Anfang die Sperrklinke fest gegen die Sperrzähne des Rades anliegt, weil sonst, wegen der dann sicher schon ziemlich großen Geschwindigkeit der Klinke, beim Auftreffen ein nicht unbedeutender Stoß auftritt.

Aus diesem Grunde muß auch die in Fig. 129 dargestellte, vielfach übliche Einrichtung bedenklich erscheinen, weil bei Beschränkung

des Wirkungskreisbogens der Sperrklinke, wenigstens wenn dadurch der erste, mit geringerer Geschwindigkeit zurückgelegte Wegteil fortfällt, diese gleich mit großer Anfangsgeschwindigkeit auf die Sperrzähne auftrifft. Es ist nämlich eine Scheibe b vorgesehen, welche die Sperrklinke aushebt, wenn sie beim Ausheben zum Hube (in der Figur also bei Drehung nach dem gestrichelten Pfeil) mit dem an ihr befindlichen Stift auf den kurvenförmig ausgebildeten Teil von b auftrifft; beim Zurückgehen fällt dann die Klinke erst später — und zwar mit voller Geschwindigkeit — in die Sperrzähne ein.

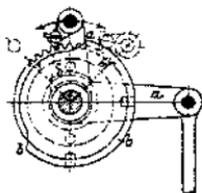


Fig. 129.

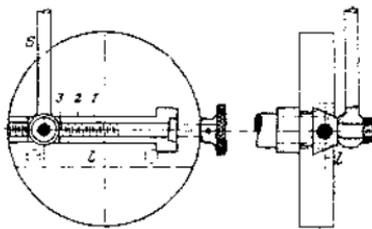


Fig. 130.

Besser wäre es, den letzten Teil des Klinkenweges zu beschneiden, obgleich wegen des Druckes zwischen Klinke und Sperrzahn dann einem Ausheben größere Widerstände entgegenstehen. Befriedigender und auch wohl einfacher ist die in Fig. 130 dargestellte Anordnung, den Weg h (Fig. 128) durch Verkleinern des Hebelarmes einzustellen, besonders wenn eine Stellschraube dem Arbeiter gestattet, die Klinke so zu regeln, daß sie bei Beginn des Schaltubes gegen die Brust des Sperrzahnes anliegt; eine Teilung kann, wenn richtig benutzt, zur Grobeinstellung der Zahl der mitzunehmenden Zähne dienen.

Eine besonders feinfühligte Schalteinrichtung erhält man bei Benutzung einer Kurvenscheibe, die entweder als einfache Nockenscheibe oder als Scheibe mit einer Kurvennut (Fig. 132) ausgebildet werden kann; im ersten Falle muß natürlich eine Feder für Rückzug des Kurbelarmes sorgen.

In Fig. 131 ist die Konstruktion der Nockenscheibe gegeben. Die Rolle a , — s. auch Fig. 132 — mit dem Drehpunkt in C , soll sich um den Winkel δ drehen, während die Kurvenscheibe sich um den Winkel γ dreht; die Anfangslage der Rolle ist a_1 . Da die Bewegung langsam eingeleitet und auch gegen Ende des Hubes $a_1 a$ hin verlangsamt werden soll, so ist der Bogen $a_1 a$ in ungleiche Teile geteilt worden, die der Deutlichkeit wegen auf einem Hilfsbogen außerhalb der Kurve angetragen, und mit 1 bis 16 bezeichnet worden sind (bei den Punkten $2, 8, 10$ und 16 sind die Zahlen fortgelassen, weil sie sonst zu dicht ständen). Die Punkte 1 bis 16 , auf den Bogen $a_1 a$ bezogen, stellen dann die verschiedenen Lagen von a vor. Man denke sich nun, nicht die Kurvenscheibe drehe sich um M und der Schwingungsmittelpunkt C stände fest, sondern

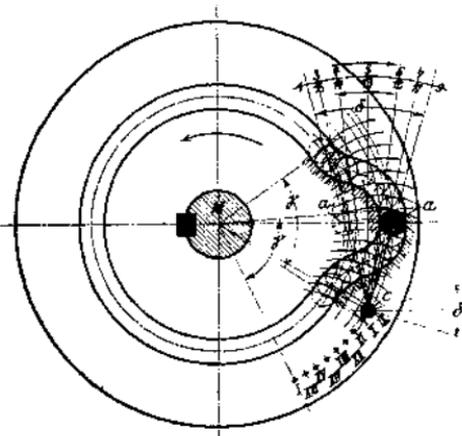


Fig. 131.

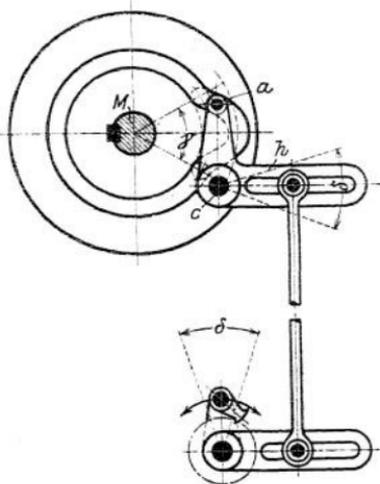


Fig. 132.

entspricht dem in Fig. 76 und 77 eingetragenem und ist nur hier, ebenso wie der Hub $a_1 a$, der Deutlichkeit halber übertrieben groß gezeichnet.

d) Einrichtungen für genaue Wegbegrenzung.

α) Theoretische Grundlagen¹⁾. In dem mit der Geschwindigkeit v gleitenden Schlitten einer Werkzeugmaschine ist das Arbeitsvermögen

$$E_k = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{G \cdot v^2}{2g}$$

enthalten; soll er durch Reibung allein auf dem Wege h_0 zur Ruhe kommen, so muß die Reibungsarbeit $A_r = G \cdot \mu \cdot h_0$ gleich dem Arbeitsvermögen sein, also

$$G \cdot \mu \cdot h_0 = \frac{G \cdot v^2}{2 \cdot g}.$$

Setzt man ein $\mu = 0,051$ und $g = 9,81$ m/sek, so ist $2g \cdot \mu = 1$ und

$$h_0 = \frac{v^2}{2 \cdot g \cdot \mu} = v^2,$$

d. h. bei $v = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0,9 & 0,8 & 0,7 & 0,6 & 0,5 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0,05 & 0,01 \text{ m/sek} \\ \hline \text{ist } h_0 = & 1 & 0,81 & 0,64 & 0,49 & 0,36 & 0,25 & 0,16 & 0,09 & 0,04 & 0,01 & 0,0025 & 0,0001 \text{ m} \\ \hline \end{array}$

Bei der angenommenen Reibungsziffer und einer Schnittgeschwindigkeit von 0,2 m/sek = 12 m/min. wie sie heute häufig vorkommt, würde also der Schlitten nach einem Überwege von 40 mm stillstehen, wenn der Antrieb ausgeschaltet würde und keine anderen Kräfte, als die Massenwirkung des Schlittens selbst, in Frage kämen. Wie aber weiter unten — bei Besprechung der Hobel- und Stoßmaschinen — näher begründet werden soll, spielt die in den umlaufenden Getriebeteilen aufgespeicherte Arbeit eine wesentlich größere Rolle, und die schnelllaufenden Antriebscheiben, deren Arbeitsvermögen $\frac{J\omega^2}{2}$ ist, würden den

die Scheibe stände fest, und der Punkt C bewege sich um M mit MC als Radius; und zwar je um den Winkel $\frac{\gamma}{2}$ links und rechts herum. Dann werden Kreise um M, durch die Punkte 1 bis 16 auf Bogen $a_1 a$, geometrische Orte der gesuchten Kurvenpunkte sein, und die zugehörige Gruppe von geometrischen Orten werden Kreise mit Ca als Radius um die Lagen I bis XVI des Punktes C darstellen.

Die tatsächlich auszuarbeitende Kurve erhält man, wenn man um die so gefundenen Kurvenpunkte Kreise mit dem Halbmesser der Rolle a schlägt. Die Kurve würde symmetrisch werden, wenn $a_1 a$ eine Gerade wäre; hier ist sie unsymmetrisch. Kommt nur Schaltung in einer Richtung vor, was aber selten ist, so kann man die Kurve, die den Hebel h (Fig. 132) zurückdrückt, weniger sorgfältig ausbilden. Der Winkel γ

¹⁾ Siehe Fischer, Wendegetriebe, Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1898, S. 517 ff.; Genaue Wegbegrenzung, W. T. 1908, S. 345.

Tisch um einen viel größeren Betrag h_0 vorwärts schieben. Noch erheblicher ist das Gleitbestreben des Tisches, wenn er am Ende des schnellen Rücklaufes angelangt und in den Getriebeteilen, entsprechend der zwei- bis vierfachen Rücklaufgeschwindigkeit, das vier- bis sechzehnfache Arbeitsvermögen vorhanden ist.

Führt der Schlitten nur die Schaltbewegung aus, wie bei Drehbänken, Fräsmaschinen und den anderen Werkzeugmaschinen mit kreisender Hauptbewegung, so ist die Geschwindigkeit so klein, die Drehzahl der umlaufenden Antriebsteile so gering, daß, gleiche Reibungsziffer angenommen, der Überweg h_0 eine Größe ist, die nicht mehr in Frage kommen kann. Weil hier meist unmittelbar vor dem Schlittenantrieb die Entkupplung eintreten kann, so handelt es sich tatsächlich nur um das Arbeitsvermögen $\frac{mv^2}{2}$, das durch Schlittenreibung zu verrichten

ist. Nimmt man z. B. einen Schaltvorschub von 360 mm/min für eine Fräsmaschine an, sicher eine der größten Schaltungen, deren eine moderne Fräsmaschine überhaupt fähig ist, so würde der Überweg h_0 , da

$$v = 360 \text{ mm/min.} = \frac{360}{1000 \cdot 60} = 0,006 \text{ mm/min}$$

ist:

$$h_0 = v^2 = 0,000036 \text{ m} = 0,036 \text{ mm}$$

betragen.

Da eine Betrachtung der Einrichtungen für genaue Wegbegrenzung an Hobel- und Stoßmaschinen demnach viel umfassender sein wird, so soll sie nachstehend als Grundlage für die gesamten Einrichtungen benutzt werden.

β) Genaue Wegbegrenzung an Werkzeugmaschinen mit geradliniger Schnittbewegung. In der Regel wird vom Schlitten aus eine Steuerwelle betätigt, die bestimmt ist, das Wendegetriebe, bei älteren Ausführungen auch das Schaltgetriebe, in Tätigkeit zu setzen; bei neueren Ausführungen ist für das Schaltgetriebe eine besondere Kraftquelle vorgesehen, die durch die Steuerwelle, unmittelbar oder mittelbar, ausgelöst wird.

In Fig. 133 ist eine einfache Umsteuerungseinrichtung dargestellt; ein Anschlag A_1 schlägt gegen den Knaggen K_1 des „Stiefelknechtes“ und bringt bei Vollendung des Überweges h_0 (siehe oben) die senkrecht zur Bewegungsrichtung des Schlittens angeordnete Steuerwelle zum Umfallen. Die Steuerwelle dreht sich um den Winkel γ , es wird also hier eine ähnliche Teildrehung ausgelöst, wie sie schon oben (Fig. 74—79) besprochen wurde. Der Tisch kehrt um — siehe unten, Wendegetriebe — und nach Vollendung des Rücklaufes schlägt A_2 gegen den Knaggen K_2 , wodurch die Steuerwelle um den gleichen Weg zurückgedreht wird. Anschlag A_1 ist gekröpft und kann deshalb auch bei senkrecht aufgerichtetem Knaggen K_2 zurücklaufen, ohne die Steuerwelle sofort wieder umzulegen.

Nach Vollendung des schnellen Rücklaufes schlägt der Tisch erstens mit größerer Gewalt gegen den entsprechenden Knaggen der Steuerwelle; dann aber ist auch der Überweg h_0 in diesem Falle größer. Diese beiden Umstände haben dazu geführt, daß bei tiefer gelegter Achse der Steuerwelle der eine Steuerknaggen K_1 für Wegbegrenzung nach Vollendung des Rücklaufes länger ausgeführt wird als der andere (Fig. 134). So ist bei verschiedenen langem Steuerweg der Anschläge A der Steuerwinkel γ der gleiche. Fig. 134 zeigt außerdem noch eine sog. Umfallsteuerung der Firma Brune. Der Steuerhebel ist mit einem schweren Gewicht und Handhebel ausgerüstet, und sein Schwerpunkt liegt erheblich über dem Drehpunkt; dadurch wird erreicht, daß auf dem Wege h_0

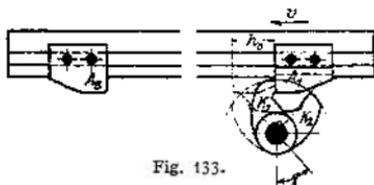


Fig. 133.

des Steueranschlages A_1 der Hebel gedreht wird, bis sein Schwerpunkt senkrecht über dem Unterstützungspunkte liegt; der dann in der gleichen Drehrichtung umfallende Hebel beschleunigt die Umsteuerungsbewegung, die vorher langsam eingeleitet wurde.

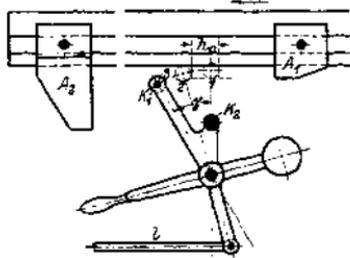


Fig. 134.

Ein Stoß wird auch bei dieser Einrichtung nicht vermieden. Doch wird das Wendegetriebe, zu dessen Betätigung die Schubstange l dient, plötzlich gesteuert, und der Tisch läuft mit denkbar geringem Überwege h_0 zurück. Statt des Gewichtes benutzt man wohl auch eine Feder, die gespannt wird, und deren Spannkraft die Steuerwelle allmählich beschleunigt und schließlich zum Umfallen bringt. Die Wegbegrenzung ist dann meist nicht so genau

einstellbar, doch ist der Vorteil der, daß der Stoß vermieden wird, weil die Spannung der Feder allmählich zunimmt, während das zu überwindende Drehmoment — im Falle der Anwendung eines Gewichtes — gerade zu Anfang am größten ist.

Natürlich kann man auch die Steuerwelle senkrecht anordnen, nicht wagerecht wie in Fig. 133/134, und man findet diese Ausführung auch häufig.

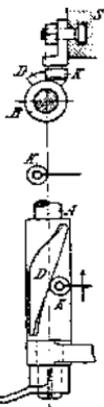


Fig. 135.

Zwangsläufig stoßfreie Wegbegrenzung erreicht man unter Anwendung einer Steuerwalze nach Fig. 135, deren Achse parallel zur Hobebrichtung angeordnet ist. Zur Umsteuerung dienen hier zwei Rollen, die gegen schraubenförmige Bahnen anlaufen und so die Steuerwelle zur Drehung zwingen. Die Steuerflächen haben auch in diesem Falle verschiedene Länge und der Stoß wird völlig vermieden, da man die Ausbildung der Schraubenflächen völlig in der Hand hat; andererseits wird natürlich der Überweg h_0 stets groß ausfallen. Weitere Ausführungarten s. Figur 285.

y) Genaue Wegbegrenzung bei Schaltbewegungen. In diesem Falle liegen Stöße nie vor, andererseits steht nur ein kleiner Überweg zur Verfügung, so daß Wegbegrenzungseinrichtungen der besprochenen Art nicht in Frage kommen können. Bei Handschaltung genügt eine Anschlagsschraube, wie sie die Bohrmaschine von Hasse & Wrede (Fig. 304) aufweist, deren Grob- und Feinstellung aus der Zeichnung zu ersehen ist.

Fig. 136 stellt die Schaltwegbegrenzung an der Wanderer-Fräsmaschine (Fig. 343) dar, wo ein Anschlag n einen Bolzen niederdrückt, in dessen Aussparung der Zapfen eines Bundes auf der Steuerwelle ragt. Bei Drehung des Bundes wird eine Sperrfeder aus ihrer Rast gedrückt und springt, wenn sie über die Trennungskante zur Nachbarrast hinweggehoben ist, plötzlich in diese ein. Dadurch wird die Steuerwelle ruckweise um einen Betrag gedreht, der genügt, die Mitnehmerklau eines Kegelradwendegetriebes (siehe unten) umzulegen. Fig. 136 entspricht dem Schnitt AB an Fig. 343.

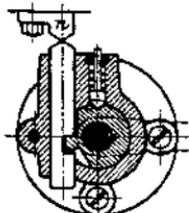


Fig. 136.

Automatische Wegbegrenzungen an Bohrmaschinen werden meist durch Feinstellschrauben betätigt, welche eine Kupplung auslösen, wenn die Stellschraube einen Zwischenhebel um ein entsprechendes Maß vorgerückt hat. Ähnlich

wirkt auch die Wegbegrenzungseinrichtung für den Support der Hendey-Norton-Drehbank in Fig. 137, wo die Kupplungsklau K dadurch ausgelöst wird, daß

die Bettplatte b gegen den Bund d stößt, der auf der Steuerstange c verstellbar angeordnet ist; Stange c dreht den zweiarmligen Hebel, der K aus dem Eingriff zieht.

¶ Eine dem gleichen Zwecke dienende Einrichtung zeigt der Support von Heidenreich & Harbeck in Fig. 240—242; hier wird durch Auflaufen einer Nase c (an einem verstellbarem Bunde b) auf eine Schraubenfläche die Steuerstange a gedreht, setzt ein Kegelräderpaar 9, 10 in Teildrehung, und bewirkt durch Bewegung des einarmigen Hebels e und des zweiarmligen j ebenfalls eine Auslösung der Kupplungsklaue k .

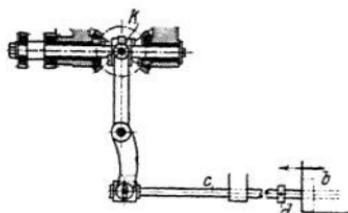


Fig. 137.

c) Wendegetriebe

haben den Zweck, die Bewegungsrichtung zu ändern und werden meist in Verbindung mit umlaufenden Wellen benutzt; die einzigen unmittelbaren Wendegetriebe für geradlinige Bewegung sind die oben besprochenen Kurbelgetriebe.

α) **Reine Zahnradwendegetriebe** werden meist durch Einschwenken zweier verschiedenen Räder in das trei-

bende ausgeführt; das eine der eingeschwenkten Räder gibt direkt, das andere über ein Zwischenrad die Bewegung an das getriebene weiter. Fig. 138 zeigt eine sehr gebräuchliche Einrichtung, der indessen zwei erhebliche Mängel anhaften. Erstens muß ein großer Weg — größer als zweimal Zahnkopfhöhe — zurückgelegt werden, ehe die kämmenden Räder außer Eingriff kommen, zweitens ist bei der gezeichneten Stellung ein Moment $P \cdot l$

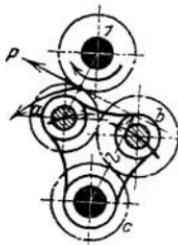


Fig. 138.

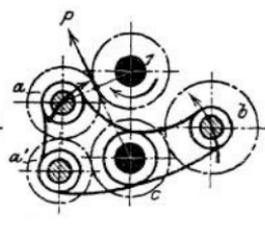


Fig. 139.

bestrebt, das Rad a aus dem Eingriff mit dem treibenden Rade 1 zu drücken. Bei einer Ausführung nach Fig. 139 genügt ein Schaltweg = zweimal Zahnkopfhöhe, um den Eingriff zu unterbrechen und, da der Hebelarm, an dem die Umfangskraft P angreift, durch den Drehpunkt der Räderschwinge hindurchgeht, so ist die Größe des oben erwähnten Momentes = Null. Durch Hinzufügen eines einzigen Rades (a') ist diese wesentlich bessere Anordnung¹⁾ gelungen, die außerdem noch gestattet, das getriebene Rad c dem treibenden Rade 1 bedeutend näherzubringen, als dies nach Fig. 138 möglich ist.

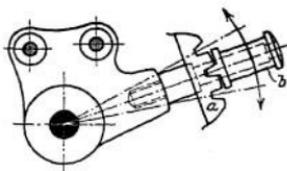


Fig. 140.

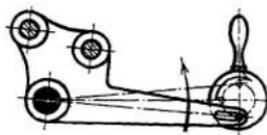


Fig. 141.

Ausführungen der Schaltschwinge sind in Fig. 140 und 141 wiedergegeben. Bei der Ausführung nach Fig. 140 schwingt der Einstellhebel zwischen zwei Leisten a , die mit Rasten, entsprechend den drei Lagen der Schwinge, versehen sind; Knopf b wird mit seiner Nase in die Rasten der Leisten a durch eine Feder

¹⁾ Ruppert, Aufgaben und Fortschritte.

gezogen. In Fig. 141 dreht sich eine Scheibe mit Stellstift, der in einem Schlitz des Schwingenhebels gleitet, um 180° herum, und hier sind die beiden Eingriffslagen gegen selbständiges Lösen besser geschützt, als bei der Ausführung nach Fig. 140. Unbequem ist die Drehung um 90° , für die häufig der Raum fehlt. Bei Anordnung der Räder nach Fig. 139 ist die Ausführung der Schwinge nach Fig. 140 unbedenklich. Ähnliche Ausbildung der Schwinge findet sich in den Darstellungen der Fig. 228, 230, 244.

Auch mit Kegelrädern sind Wendegetriebe ausführbar, wenn man zwei Zahnräder von gleicher oder verschiedener Größe — ähnlich wie in Fig. 142 — mit einem dritten, treibenden oder getriebenen, zusammenstellt, indem man die beiden ersten auf einer längsverschieblichen Hülse anordnet, die von der treibenden Welle mitgenommen wird; je nach der Lage der Hülse treibt dann nur je eins der beiden ersten Räder.

Eine Umsteuerung und gleichzeitige Größenänderung der Drehbewegung erzielt man durch ein Stirnrad, das abwechselnd mit einem von zwei Rädern auf derselben Welle kämmt, wenn das eine dieser beiden letzten Räder mit Außen-, das andere mit Innenverzahnung versehen ist.

β) Umsteuerungen durch Kupplungen. Fig. 142 zeigt das Wendegetriebe von Sellars, welches gleichzeitig eine Größenänderung für die Drehzahl des getriebenen

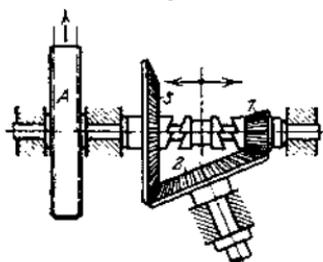


Fig. 142.

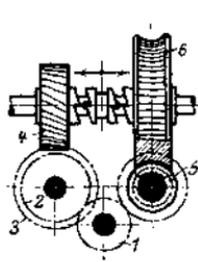


Fig. 143.

Rades 2 hervorbringt (s. auch Fig. 93, 94).

Fig. 143 zeigt, gleichfalls unter Anwendung einer Klauenkupplung, wie von einer ständig gleichlaufenden Welle 1, einmal über Schraubenräder und einmal über Schnecke und Schneckenrad, je nach Lage der Kupplungsklaue die getriebene Welle schnell im einen und langsam im anderen Sinne angetrieben werden kann. Rüstet man die Schnecke und das treibende Schraubenrad 3 beide mit rechter oder beide mit linker Steigung aus, so bleibt nur noch die Geschwindigkeitsänderung bestehen.

Eine Reibungskupplung, die ebenfalls die getriebene Achse zwingt, in zwei verschiedenen Richtungen und mit verschiedenen Drehzahlen umzulaufen, ist in Fig. 254 dargestellt und dort beschrieben.

γ) Riemenwendegetriebe, meist nur an Hobel- und Stoßmaschinen angewendet, müssen, damit übermäßiger Riemenverschleiß vermieden wird, sehr sorgfältig ausgeführt werden. In Fig. 51 ist ein Deckenvorgelege für Umsteuerung der Drehrichtung dargestellt, das für Hobel- und Stoßmaschinen nicht gut verwendbar ist, weil z. B. bei Anwendung von zwei Arbeits- und einer Rücklaufgeschwindigkeit die Breiten- summe der Riemenscheiben zu groß würde.

Fig. 286 zeigt die Riemenumsteuerung von Böh-

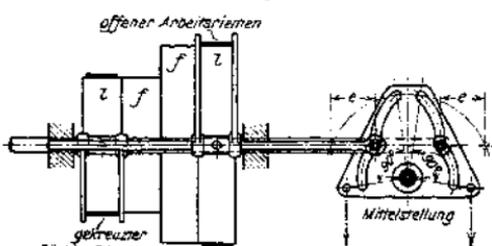


Fig. 144.

ringer, bei der ein Schieber mit entsprechend ausgearbeiteten Nuten die Riemenleiter vermittelt Rollen steuert, die in den Nuten gleiten. Bei Ausbildung

der Steuernuten müssen entsprechende Überlegungen angestellt werden, wie sie zu Fig. 131 ausgeführt wurden; um Stöße zu vermeiden, muß man nämlich beim Umsteuern die Riemenleiter allmählich beschleunigen und sie zum Schluß langsam in die Endlage bringen.

Die Riemenleiter selbst sind entweder schwingend angeordnet, wie bei der oben angezogenen Ausföhrung, oder sie verschieben sich parallel zu der Riemen-scheibenachse, wie in Fig. 144. Die Steuereinrichtung kann entweder ein flacher Schieber sein, wie in Fig. 286, oder eine Walze oder auch, wie in Fig. 144, eine Scheibe, die mit entsprechenden Nuten ausgestattet ist.

B. Führungen zur Fortleitung der erzeugten Bewegung.

1. Grundlegende Betrachtungen.

a) Zulässige Belastung.

Nach Fischer¹⁾ können glasharte Stahlflächen, die sehr langsam aufeinandergleiten, bis zu 20 kg/qmm Druck aufnehmen. Im Bau kleiner Werkzeugmaschinen — Mechanikerdrehbänke und kleine Bohrmaschinen — wird von dieser Eigenschaft Gebrauch gemacht bei Ausbildung der Lager von Drehspindeln, die dann ohne Nachstellvorrichtungen hergestellt werden. Sonst wird im Werkzeugmaschinenbau selten glasharter Stahl für Welle und Lager verwendet. Nach den Versuchen von Nidecker²⁾ kann man nachstehende Werte zulassen:

Material	Zulässiger Druck	
	gefettet	ungefettet
Gußeisen auf Gußeisen	0,8 kg/qmm	0,4 kg/qmm
Gehärteter Stahl auf Gußeisen	0,4	—
Schmiedeeisen auf Gußeisen	0,08	—
Bronze auf Gußeisen	0,12	—
Phosphorbronze auf Gußeisen	0,2	—
Weißmetall auf Gußeisen	0,12	—
Weißmetall auf Schmiedeeisen	0,08	—
Hartholz auf Gußeisen	0,18	0,13
Bronze auf Schmiedeeisen	0,05	—
Phosphorbronze auf Schmiedeeisen	0,09	—
Hartholz auf Schmiedeeisen	0,09	—

Wachsende Gleitgeschwindigkeit v läßt die höchsten Drücke zu, solange die im Lager erzeugte Wärme gut abgeführt werden kann.

Man stelle sich die Oberflächen der Materialien im Querschnitt von Wellenlinien begrenzt vor, mit mehr oder minder großer Länge und Tiefe der Wellen — vielleicht nur gehärteten Stahl geradlinig begrenzt. Dann ist zu verstehen, warum gleiche Materialien, besonders wenn sie weich (tiefe Wellen) sind, beim Gleiten leicht anfressen, während verschiedene, deren Erhöhungen und Vertiefungen nicht ineinander passen, weniger diese Neigung zeigen. Es wird auch verständlich, warum harter Stahl auf hartem Stahl gut trägt, da, theoretisch, alle Flächenpunkte zur Anlage kommen, und dann zum Einhaken kein Anlaß vorliegt. Daß Gußeisen, das als Material für Muttern schon früher erwähnt wurde und als Lagermetall noch lange nicht nach Verdienst gewürdigt wird, so gute Werte zeigt, liegt vielleicht daran, daß der stets vorhandene Graphit als Schmiermittel dient, und so trockene Reibung eigentlich überhaupt nie vorliegt.

¹⁾ Fischer, Werkz., Maschinen Bd. I, S. 49.

²⁾ Zeitschr. f. Werkz. u. M. 1902, S. 413.

Bei Lagermetallen scheint die gute Tragfähigkeit darin zu bestehen, daß, besonders wenn schnelle Abkühlung den Entmischungsprozeß (Kristallisation) unterbunden hat, kleine harte Kristallkörner, in einer elastisch nachgiebigen Masse gelagert, vorliegen, und so harte Oberfläche (eine Art Hartgußkruste) und ein schmiegsamer Stoff vorhanden ist, der die eine Gleitbahn sich gut der andern anpassen läßt.

b) Einfluß der Schmierung.

Bringt man Schmierflüssigkeit zwischen die reibenden Flächen, so wird (s. Fig. 145) bei genügender Menge derselben ein Schwimmen der Flächen aufeinander eintreten, wozu bei hartem Stahl (Fig. 145a) für beide Flächen schon geringe Mengen des Schmierstoffes ausreichen. Die Flüssigkeitsschicht muß so dick sein (Fig. 145d), daß auch bei erhöhtem Druck ein Anstoßen der Zacken der einen Fläche an die der anderen ausgeschlossen ist.



Fig. 145.

Jede Unterbrechung der Flächen, z. B. durch Schmierruten, muß wenigstens an den tragenden Lagerstellen soweit wie möglich vermieden werden. Man soll Schmierruten stets als ein, leider oft unvermeidliches, Übel ansehen, und sie, zur Zuführung und Verteilung des Schmierstoffes, nur an den Stellen geringsten Druckes zulassen; man soll auch durch Ausbildung der Form der Führung dafür sorgen, daß das Schmiermittel von selbst den Stellen höchsten Druckes zuströmt.

c) Querschnitt der Führungen.

Bei den Führungen liegen stets Umschluß-Elementenpaare vor, die „zwangsläufig“ (geschlossene Führungen) oder „kraftschlüssig“ (offene Führungen), nur Längsbewegungen oder nur Drehbewegungen um eine Achse gestatten. Es werden also für die erstgenannten Führungen Prismen und ihre Abarten, für die anderen Zylinder, Kegel oder Zusammenstellungen aus ihnen zu verwenden sein; im ersten Falle wird eine völlige Übereinstimmung aller Querschnitte senkrecht zur Bewegungsrichtung nötig sein, im anderen Falle kreisförmige Gestalt der Querschnitte senkrecht zur Drehachse genügen.

d) Länge der Gleitflächen in der Bewegungsrichtung.

Ist bei kreisender Bewegung der Gleitflächen selbstverständlich, daß die Länge der kreisförmigen Begrenzung für den vollen und für den hohlen Querschnitt — abgesehen von der dazwischen gebrachten Ölschicht — gleichlang sein muß, so wird diese Bedingung für geradlinige Gleitbewegung aus nachstehender Betrachtung ebenfalls gefolgert werden müssen.

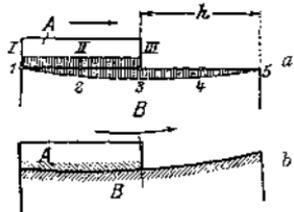


Fig. 146.

Fig. 146. Der bewegliche Teil *A* ist kürzer als der feststehende *B*; Punkte *I* bis *III* tragen immer, ebenso Punkt *3*; *I* und *5* nur in den Grenzlagen, während *2* und *4* nach Vollendung des halben Hubes entlastet werden. Der Druck und damit die Abnutzung wird sich demnach entsprechend den schraffierten Flächen verteilen und beide Flächen, weil auch *A* sich anpassend abschleifen muß, die Form in Fig. 146b annehmen.

Fig. 147a. Teil *A* ist länger als *B*. Die Punkte *I* bis *3* tragen ständig, ebenso Punkt *III*, *I* und *V* tragen nur in den Grenzlagen, *II* und *IV* nur während des halben Hubes, die Folge wird eine Ausbildung der Gleitflächen nach Fig. 147b

sein. Stellt Fig. 146 Tisch und Gestell einer Tischhobelmaschine, Fig. 147 Stößelschlitten und Gestell einer Wagereichtstoßmaschine dar, so ist zu verstehen, daß im ersten Falle hohle Flächen, im zweiten erhabene Flächen beim Hobeln entstehen, wenn die Gleitführungen ausgelaufen sind.

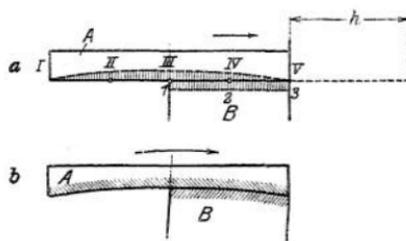


Fig. 147.

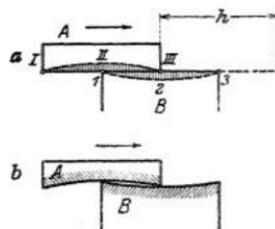


Fig. 148.

Fig. 148a zeigt gleiche Längen für beide Gleitflächen. Die Punkte 3 und III tragen während des ganzen, I und I, 5 und V nur während des halben und 2, II sowie 4, IV nur während dreier Viertel des Hubes. Beide Flächen müßten demnach hohl werden, wie in Fig. 148b dargestellt ist, doch da sie sich anpassend abschleifen müssen, so werden sie sich stets gegenseitig ausgleichen und deshalb eben bleiben.

Es muß demnach auch für geradlinige Gleitführungen die Forderung gleicher Länge der Gleitbahnen aufgestellt werden; ist es aus irgendwelchen Gründen nicht möglich, diese Forderung zu erfüllen, so muß durch rechtzeitige Nacharbeit ein Überhandnehmen des Fehlers verhindert werden.

e) Anforderungen an eine gute Führung.

Aus den Absätzen a bis d folgt, daß man an eine Führung folgende Anforderungen zu stellen hat:

a) Es müssen alle auftretenden Kräfte und Drehmomente so aufgenommen werden, daß unter ihrer Einwirkung die Form und Oberflächengestalt der gleitenden Flächen keine wesentliche Einbuße erleidet und deren gegenseitige Lage nicht oder wenigstens nicht unzulässig stark gestört wird.

β) Gute Beschaffenheit der Oberflächen und Schmierung müssen dafür sorgen, daß die Reibungswiderstände zwischen den gleitenden Teilen keine erheblichen Werte annehmen; man soll also möglichst die Reibung fester Körper durch die Flüssigkeitsreibung (s. Fig. 145d) ersetzen.

γ) Schmiermittel sollen reichlich und auf eine Weise zugeführt werden, daß sie schon vor der Stelle stärksten Druckes die gleitenden Flächen voll benetzen; die geschmierten Flächen sind besonders vor Staub zu schützen.

δ) Wegen der unvermeidlichen Abnutzung (s. unter a) ist Nachstellung der Führungen vorzusehen, deren Betätigung aber die gegenseitige Lage der Gleitflächen nicht störend abändern darf.

e) Vorstehende Bedingungen gelten besonders für „Gleitführungen“, d. h. für solche, die unter dem Arbeitsdruck gleiten; für „Richtführungen“, die nur die gegenseitige Lage zweier Teile zu sichern haben, genügt in der Regel die Beachtung des Punktes unter a.

2. Ausgestaltung der Führungen für gerade Wege.

a) Querschnitt.

Der Querschnitt soll möglichst einfach, d. h. bequem in der Werkstatt herstellbar sein, und die Anzahl der tragenden Flächen möglichst kleingehalten werden, da ihre Bearbeitung (Schaben) teuer ist; auch soll, da eine gefräste Fläche sich schlecht schaben läßt, bei Ausgestaltung des Querschnittes berücksichtigt werden, ob er gut durch Hobeln herzustellen ist¹⁾.

¹⁾ S. Schlesinger, Hobeln und Fräsen. Z. Ver. deutsch. Ing. 1904, S. 1377.

Querschnitte nach Fig. 149 und 151 zeigen eine einzige tragende Hauptfläche, wenn P den auftretenden Druck bezeichnet; doch wird, wenn das Hohlprisma, wie in Fig. 149, beweglich, das volle Prisma feststehend angeordnet ist, unter dem Arbeitsdruck die Führung locker, was bei der Umkehrung in Fig. 150 nicht auftritt, wo sogar der Arbeitsdruck ein genaueres Passen der Führung bewirkt; allerdings müssen dann zwei tragende Flächen sauber bearbeitet werden. Sehr gut ausführbar ist die Nachstellung in Fig. 150, da sie durch eine Fläche bewirkt werden kann, während in Fig. 149 und 151 je zwei Flächen nachstellbar sein müssen.

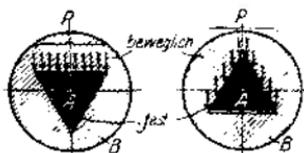


Fig. 149 und 150.



Fig. 152.

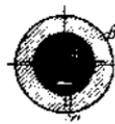


Fig. 153.

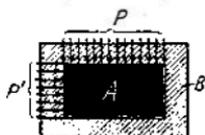


Fig. 151.

Tritt bei den Ausführungen nach Fig. 149 und 150 seitliche Druckbeanspruchung (s. Fig. 154) zu der senkrechten hinzu, so ist erkennbar, daß ein Hochsteigen der Gleitflächen in Ebenen senkrecht zur Gleitrichtung nicht ausgeschlossen ist; Ausführungen nach Fig. 151 zeigen diesen Übelstand nicht. Bei den Hobelmaschinen wird diesem Umstand besonders Rechnung getragen werden müssen. Fig. 152 zeigt einen Querschnitt, der entschieden zu verwerfen ist; es lag das Bestreben vor, besondere Flächen für Aufnahme senkrecht und wagerecht wirkender Kräfte zu schaffen und doch die einfache Nachstellbarkeit der Fig. 150 beizubehalten. Ganz abgesehen von der Schwierigkeit, so viele tragenden Flächen genau herzustellen, ist auch nicht anzunehmen, daß sich alle Flächen unter Druck so abnutzen, daß die ursprünglichen Winkel gewahrt bleiben.

Eine zylindrische Führung wie Fig. 153, bei der durch eine Nut und Feder Drehungen um die Achse verhindert werden müssen, kann wohl als Richtführung — wie bei der Reitstockpinnole —, nie aber als unter Druck arbeitende Gleitführung benutzt werden, da infolge der Abnutzung der Hohlzylinder einen größeren, der Vollzylinder einen kleineren Radius annimmt, das „Passen“ also aufhört. Treten zu den Druckkräften Drehmomente um die Bewegungsrichtung als Achse hinzu, so müssen die Prismenquerschnitte vergrößert werden; in solchen Fällen läßt man Teile der Prismen fort, wie in Fig. 154 bis 156 gezeigt ist; ebenfalls entbehrlich sind die mittleren Teile der Tragflächen, weil den Drehmomenten die weit von der Mitte liegenden Teile, wegen ihrer größeren Hebelarme, besser widerstehen können. Besonders günstig — weil sehr große Hebelarme vorliegen — ist die Ausführung nach Fig. 155, wo übrigens nur die Flächen a und b gepaßt werden, die anderen Flächen freiliegen. Bei Ausführung nach Fig. 154 verhindert man Beschädigungen der wagerechten, nach oben gekehrten Flächenstreifen a durch teleskopartig angeordnete Blechschutzplatten (s. hierzu Fig. 345).

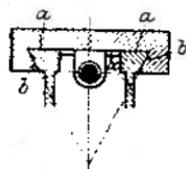


Fig. 154.

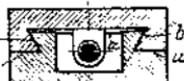


Fig. 155.

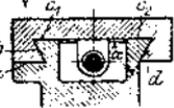


Fig. 156.

Tritt an einer Stelle ein besonders starker Druck P auf, so wird häufig eine Ausführung nach Fig. 156 gewählt, die aber durchaus zu verwerfen ist, zunächst weil

zu viele Gleitflächen vorhanden sind, die alle geschabt werden müssen; außerdem verursacht die verschieden große Abnutzung — da die Flächenstreifen a , c_1 , d belastet, b und c_2 entlastet werden — bald ein Schiefziehen der Führung.

b) Schmierung, Ölnuten.

Die Schmiernuten müssen an den Flächen, die nach unten zeigen, so angeordnet werden, wie Fig. 157 zeigt, damit sie nicht zu Staubfängern werden; ihre Form muß eigentlich nach Sinuslinien gestaltet werden, damit die Ölteilchen, die links und rechts zur Umkehr gezwungen werden, diese mit möglichst geringem Stoß vollziehen können. Ein Anbringen der Schmiernuten in beiden Gleitflächen ist verfehlt, da dann von den Kanten der Schmiernuten, deren Querschnitt übrigens stets kleiner als ein Halbkreis sein muß, die Ölteilchen zerrissen werden.

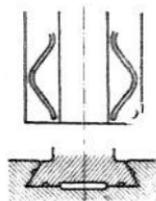


Fig. 157.

c) Nachstellung der Führungen.

a) Feststellungseinrichtungen.

Handelt es sich nur um Feststellung der gleitenden Teile gegeneinander, so genügen in vielen Fällen Stellschrauben und ähnliche Sicherungen. Einige

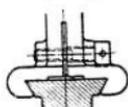


Fig. 158.

besonders im Werkzeugmaschinenbau vorkommenden Ausführungen sind in den Fig. 158 bis 162 dargestellt; es sei aber besonders darauf hingewiesen, daß sie nur in Verbindung mit Richtführungen, nie bei Gleitführungen angebracht werden dürfen. Fig. 158 zeigt eine Prismenklemmung untergeordneter

Art, die natürlich nur Berechtigung hat, wenn beide Prismen ganz sauber gepaßt sind, die Nachstellung also nur eine unwesentliche Veränderung des Winkels am Hohlprisma bewirkt. Besser ist die Ausführung nach Fig. 159, wo eine Stelleiste in Verbindung mit Knebelmutter Verwendung findet. Es ist darauf zu achten, daß das Hohlprisma entlang der Richtung ab abgenommen werden kann, ohne daß die durch Entfernung der Leiste freigewordene Ecke bei Bewegung in der Parallelrichtung cd anstößt. Eine Zylinderklemmung nach Fig. 160, wie sie noch manchmal vorkommt, sollte ganz vermieden werden, weil ein Abdrücken des Vollzylinders von seiner Anlagefläche erfolgt; entschieden ist in solchem Falle eine Klemmung nach Fig. 161 (s. auch Fig. 224) vorzuziehen. Die Pinnolenklemmung von Sellers (Fig. 162)

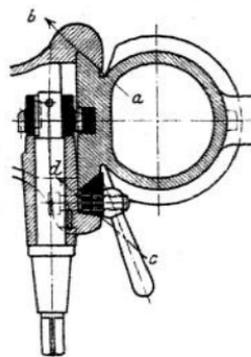


Fig. 159.



Fig. 160.

hat den Nachteil, daß sie beim Anziehen die Pinnole in Richtung der Achse bewegt, so die Reibstockspitze lockert und die Pinnolenschraube stark

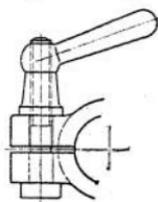


Fig. 161.

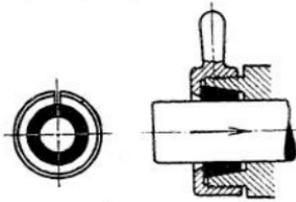


Fig. 162.

auf Knickung beansprucht. Eine Ausführung nach Fig. 357, wobei die Pin-

nole selbst mit Klümmerschlitzen versehen ist und ebenfalls die Achse bei der Klemmung nicht verstellt wird, weist den erwähnten Nachteil nicht auf.

β) Ausgleichung der Abnutzung.

Meist wird diese durch Stelleisten bewirkt, von denen Fig. 163 bis 168 die gebräuchlichsten Ausführungen darstellen. Fig. 163 zeigt eine ziemlich umständliche Nachstellung der Führung, zu deren Bewirkung eine ganze Anzahl von Schrauben gelöst und wieder festgezogen werden muß. Da das Festziehen der einen Schraubengruppe die Nachstellbarkeit der anderen einschränkt, so wird zum Schluß meist Anlage an den Flächen b überhaupt nicht, an den eigentlichen Führungsflächen a nur unvollkommen stattfinden. Bei Ausgestaltung nach Fig. 164 wird die Leiste an den Führungsflächen a entlanggleiten, wenn die Stellschrauben angezogen werden, dagegen an den Flächen b und c außer Berührung kommen oder sich unter dem Stellschraubendruck festklemmen.

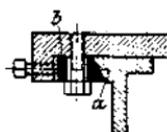


Fig. 163.

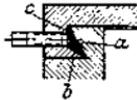


Fig. 164.

Eine Spitze an der Stellschraube und entsprechende Einbohrung soll eine Verschiebung der Stelleiste in der Bewegungsrichtung verhindern, schafft aber den Nachteil einer Schwächung und infolgedessen Verbiegung der Leiste an den Angriffstellen der Schrauben; laufen die Spitzen an den Schrauben nicht genau, so bewegen sie die Stelleiste beim Nachziehen hin und her, was das Gefühl beim Nachstellen beeinträchtigt.

Fig. 165 und 166 zeigen eine sehr gute Stelleistenausführung; Verschiebung in der Längsrichtung hindern die Stifte s_1 und s_2 . Lockerwerden bei der Nachstellung ist ausgeschlossen, weil die Flächenpaare b und c in Berührung bleiben, und die Stellschrauben, die jetzt lediglich der Nachstellung dienen, erfordern keine Einbohrungen der Leiste. Besonders gute Nachstellung, wegen Anlage der Gleitflächen in voller Länge, gestattet eine Ausführung nach Fig. 167 und 168, wo die Leiste auch in der Längsrichtung keilförmig ausgebildet ist; selbst bei grobem Gewinde der Stellschraube, die durch zwei Muttern eingestellt und festgestellt werden kann, ist die Nachstellung äußerst feinfühlig.

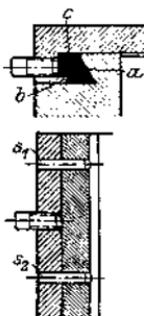


Fig. 165 u. 166.

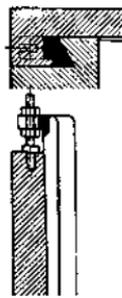


Fig. 167 u. 168.

3. Ausgestaltung der Führungen für kreisförmige Wege.¹⁾

a) Gestalt der Führungen.

Diese Führungen sind unter Lager²⁾ genau besprochen und die dort gegebenen Regeln sollen hier nur dahin ergänzt werden, daß es sich im Werkzeugmaschinenbau um die höchsten Anforderungen an die Genauigkeit und demnach um Zulassung geringer Drücke handelt. Man soll auch³⁾ im allgemeinen von einem Lager nicht gleichzeitige Aufnahme von Drücken in Richtung der Achse und senkrecht zu ihr verlangen und deshalb, wenn zwei Lager vorliegen, dem einen die erste und dem anderen die zweite Gruppe von Kräften zur Aufnahme überweisen.

¹⁾ Siehe hierzu W. T. 1908, S. 417 ff., S. 481 ff.; 1911, S. 25 ff.

²⁾ S. Maschinenteile S. 634 ff.

³⁾ Fischer, Werkz.-M. I, S. 77/78.

b) Aufnahme von Kräften senkrecht zur Achse.

Fig. 169 stellt ein einfaches, zylindrisches Lager dar, wie es die Schwanzlager der Drehbänke vielfach aufweisen, Fig. 170 zeigt eine geschlitzte, außen koni-

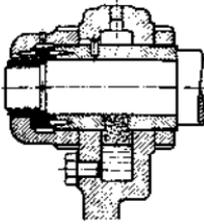


Fig. 169.

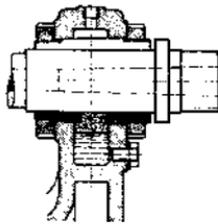


Fig. 170.

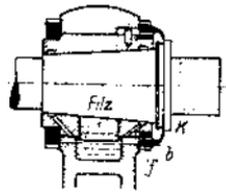


Fig. 171.

sche, innen zylindrische Büchse, Fig. 171 eine konische Spindel in längsverstellbarer, außen zylindrischer Lagerbüchse; auf die Nachstellbarkeit wird nachher noch eingegangen.

c) Aufnahme von Kräften in Richtung der Achse.

Die einfachste Ausführung gestattet die Spurdrukschraube, die, in einem Bügel, einer Traverse oder einer am Lager befestigten Büchse verstellbar gelagert, gegen die Endfläche der umlaufenden Spindel drückt. Vielfach ist die Spindel durchbohrt und enthält einen Druckputzen, der entfernt werden kann — während der die Schraube tragende Bügel beiseite geklappt wird —, so daß man Werkstücke durch die hohle Spindel hindurchstecken kann. Auf alle Fälle muß der feststehende Teil nach einer Ebene senkrecht zur Umdrehungsachse ausgebildet werden, während der umlaufende entweder ebenfalls als Ebene oder als Kugelhäube gestaltet wird. Nur bei Kugellagern (s. diese) sind andere Ausführungen denkbar. Fig. 169 zeigt ebenfalls eine Aufnahmevorrichtung für den Enddruck, bei welcher die Spindelbohrung freibleibt.

d) Schmierung und Ölnuten.

Ist P in Fig. 172 der Druck senkrecht zur Achse, so wird diese im Quadranten III am stärksten gegen die Wandung der feststehenden Führung gedrückt, während I völlig entlastet ist. In III muß also eine möglichst glatte Lagerschale vorliegen und dort darf keine Schmierhaut vorhanden sein, weil die Olhaut an deren Kanten zerreißen würde. Es muß also in I die Ölnot — und zwar immer im feststehenden Teil der Führung, nie im umlaufenden — angebracht werden. Steht die Welle fest, während die Hülse umläuft, so muß die Ölnot nach Fig. 173 hergestellt werden.



Fig. 172.



Fig. 173.

Fig. 174 bis 177 stellen die Ausführung von Ölnuten nach dem Vorschlage der Ossag-Gesellschaft dar, und zwar Fig. 174 und 175 für Drehrichtung in einem Sinne, Fig. 176 und 177 für wechselnde Drehrichtung. A ist die obere, B die untere Lagerschale und Druck P ist in der eingezeichneten Art angenommen; die Längsnut n hat in der Mitte ein Ölzuführungsloch, nimmt das Öl auf und verteilt es schnell über die Länge der Lagerschale. Weil Spielraum zwischen Welle und Lagerschale vorhanden ist, kann das Öl in die schrägen Nuten gelangen und so wieder

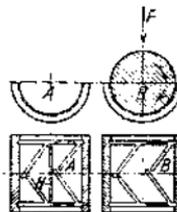


Fig. 174 und 175.

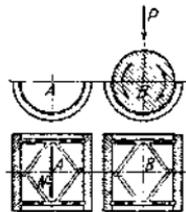


Fig. 176 und 177.

nach innen geführt werden; das weggepreßte — verbrauchte — Öl gelangt in die seitlich angeordneten umlaufenden Nuten und kann von da abgelassen werden. Schädlich sind bei beiden Ausführungsarten die Ölnuten in den unteren Lager-schalen, unnötig sind in Fig. 174 die im Sinne der Pfeile vor der Ölverteilungsnut angeordneten Schrägnuten.

Fig. 169 bis 171 zeigen eine Ölzuführung von unten, was bei Drehbänken durchaus möglich ist, da der Hauptdruck (s. später) schräg nach hinten gerichtet ist; aus einer die Lagerbüchse ringförmig umgebenden Ölkammer steigt durch ein Polster aus lockerem Filz und einen Schlitz das Öl an die Spindel und wird von ihr, durch die Drehung, zwischen den Führungsflächen verteilt. Fig. 171 zeigt ein Lager für schnellaufende Wellen. Das fortgepreßte Öl gelangt in die Seitennuten, von wo es in die Ölkammer zurückfließt um, durch das Filzpolster filtriert, wieder an die Welle zu gelangen. Ein Teil des Öles wird, der Zentrifugalkraft folgend, am größten Wellendurchmesser aus dem Lager austretend, durch die Kante am Spritzring abgeschleudert werden. So bildet das Öl zwischen Wellenbund und Innenfläche der vorderen Lagermutter einen Ölschleier. Dieser Schleier verhindert Staubteilchen, in das Lager zu dringen, sie werden mit dem Öl in den unteren Teil der Mutterhöhle fließen, und von da durch eine Anzahl feiner Bohrungen b in den Ölraum zurücklaufen; das Filzfilter sorgt dafür, daß die Staubteilchen nicht an die Welle gelangen.

e) Nachstellung der Führungen.

Bei geteilten Lagerbüchsen (s. Fig. 103) erfolgt eine Nachstellung durch Festziehen des beweglichen Konus auf dem Schwanzende der Drehspindel, eine Nachstellung, die deshalb nicht als einwandfrei angesehen werden kann, weil der Axialdruck, je nach seiner Richtung, die eine der beiden Führungen festpreßt, während er die andere lockert.

Sehr beliebt, und für leichte und mittlere Maschinen durchaus zu billigen, ist die Ausführung der Nachstellung nach Fig. 170; sie wird durch eine geschlitzte Lagerschale, die außer dem durchgehenden Schlitz oben noch zwei nicht durchgehende Schlitz unter 120° und einen Ölzuführungsschlitz unten hat, ausgeführt. Außen ist die Lagerbüchse konisch, innen zylindrisch und wird durch eine Mutter mit Flachgewinde nach-, durch eine zweite festgezogen. Für schwere Bänke ist die Ausführung nicht empfehlenswert; da nämlich beim Nachziehen die konische Außengestalt der Büchse verloren geht, so liegt sie nur noch in Flächenstreifen an, deshalb nicht mehr sicher, und die Lager brummen.

Die Ausführung nach Fig. 171 vermeidet diesen Fehler, vorausgesetzt, daß die außen zylindrische Lagerbüchse in den Lagerkörper mit der Reibahle sehr gut eingepaßt ist; Nachstellung erfolgt durch Verstellen der Büchse in der Längsachse.

C. Einrichtungen zum Aufbringen der Werkzeuge.

Fig. 178 zeigt eine leicht zu handhabende Einrichtung zum Aufspannen des Stahles bei leichten Hobel- und Dreharbeiten; ein unten zylindrisch begrenzter Keil a liegt in einer Aussparung der Unterlegscheibe b und soll dazu dienen, die richtige Höhenstellung der Schneide zu bewirken. Wegen der vielen Übergangsstellen liegt schlechte Wärmeabfuhr und außerdem geringe Sicherung gegen unbeabsichtigte Verstellung beim Arbeiten vor, was die Einrichtung für schwere Schnitte ungeeignet macht.

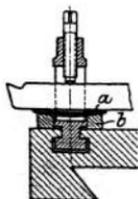


Fig. 178.

Für schwere Hobelarbeiten dienen Stahlhalter wie in Fig. 179 wiedergegeben, die, wie der vorher besprochene, in T-Nuten der Supportschlittens verstellbar sind. Für leichte Dreharbeiten ist eine Spannklaue nach Fig. 180 in Gebrauch, die indessen nur

empfohlen werden kann, wenn die kugelförmige Unterlegscheibe jeden Zwang zwischen Spannschraube und Klaue verhindert. Da die Ausgleichschraube a sich nicht schwer in ihrer Mutter drehen darf, weil sonst eine feinfühlige Höhenstellung von Hand unmöglich ist, muß eine Mutter m angebracht werden, die aus den früher angeführten Gründen (s. Fig. 89) oberhalb der Klaue aufgebracht werden muß. Eine wackelnde Ausgleichschraube gestattet nie ein zuverlässiges Festspannen des Werkzeuges.

Für schwere Schnitte bietet Fig. 182 eine gute Spannvorrichtung; die Klaue A wird, entsprechend dem gewünschten Anstellwinkel δ_1 (s. Fig. 11), festgezogen, der Drehstuhl gegen die Fläche a gepreßt und dann die Schrauben s_1 s_2 angezogen. Da die Klaue A auf den Bolzen B genau paßt — was natürlich Bedingung ist —, wird dem Stahl durch Klaue und Bolzen ein Halt gegenüber dem Schaltdruck W'' gegeben. Wegen der Größe der Flächenanlage — zwei Flächen am Stahl und eine große Berührungsfläche zwischen Klaue und Supportschlitten — ist für gute Wärmeabfuhr Sorge getragen.

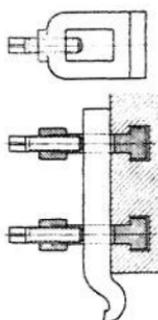


Fig. 179.

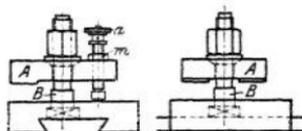


Fig. 180 und 181.

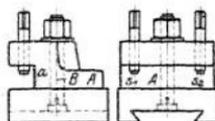


Fig. 182 und 183.

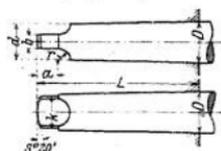


Fig. 184.

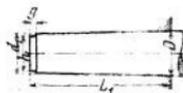


Fig. 185.

Hat das Werkzeug kreisende Hauptbewegung, so wird die Arbeitsspindel mit einem Hohlkonus ausgerüstet, in welchem die Werkzeuge mit ihrem Vollkonus befestigt werden. Fig. 184 zeigt eine Ausführungsform des Vollkonus mit Mitnahmesicherung, Fig. 185 zeigt die Sicherung nicht. Nachstehend sind die Tabellen für den Morse- und für den metrischen Konus gegeben¹⁾.

Morse-Konusse (s. Fig. 184).

Morse-Konus Nr.	D mm	L mm	d mm	a mm	b mm	r mm	h mm	Konizität auf 100 mm
1	12,05	60,5	9,03	8	5,1	5	8,4	5
2	17,75	73	14,09	9,5	6,3	6,5	13,4	5,017
3	23,8	90,5	19,26	11	7,9	7	18,5	5,017
4	31,25	114,5	25,31	13	11,9	8	24,5	5,191
5	44,4	146	36,74	16	15,9	9,5	35,7	5,25
6	63,35	203	52,76	22	19	12,5	50,8	5,216

¹ Nach Ludw. Loewe & Co.

Metrische Konusse (s. Fig. 183).

Konizität 1 : 20.

Metrischer Konus Nr.	D mm	L mm	L ₁ mm	d mm	d ₁ mm	a mm	b mm	r mm	k mm	g mm	h mm
1	12	60	52	9	9,4	8	5	2,2	8,5	3,5	7
2	18	80	69	14	14,55	10	6,5	4	13	4	11
3	24	100	87	19	19,65	12	8	5,8	18	4	15
4	32	120	106	26	26,7	14	11	7,85	24,5	5	22
5	40	140	124	33	33,8	16	14	9,9	31,5	6	28
6	50	160	142	42	42,9	18	17	12,95	40	8	36
7	60	180	160	51	52	20	20	16	49	9	44
8	70	200	178	60	61,1	22	23	19,05	57	10	52
9	80	220	196	69	70,2	24	26	22,1	66	11	60
10	90	240	214	78	79,3	26	29	25,2	74	12	69
11	100	260	232	87	88,4	28	32	28,2	82	13	78

Die Tabelle zeigt, daß der metrische Konus 1 in die Bohrung für den Morsekonus 1 passen wird, während die Morsekonusse 2 bis 4 für diesen Zweck aufgerieben werden können. Es empfiehlt sich also, die Maschinenspindeln auf alle Fälle mit Morsekonus 1 bis 4 zu versehen, der auf metrischen Konus aufgerieben werden kann, während das Umgekehrte unmöglich ist. Für stärkere Werkzeuge kann man im Zweifel sein, welcher Konus zu benutzen sei und wird dann vielleicht überhaupt zum metrischen Konus greifen.

Als Konus zum Befestigen der Drehbankspitzen ist der Morsekonus, ebenso wie der metrische, sehr geeignet.

III. Aufbau der Werkzeugmaschinen.

A. Drehbänke.

1. Auftretende Kräfte, Aufnahme derselben.

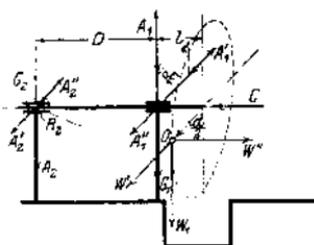


Fig. 186.

Fig. 186 stellt die schematische Skizze einer Kopf- oder Planbank dar, bei welcher im Punkte O die Schnittwiderstände auftreten.

$$W_1, W' = W_2 \cdot \cos \delta_1 = W_1 \cos \delta_1$$

$$\text{und } W'' = W_2 \sin \delta_1 = W_1 \sin \delta_1$$

sind (s. Fig. 10 bis 13). Außerdem wirkt noch das Gewicht von Planscheibe und Werkstück und gibt mit den aus W_1 , W' und W'' hergeleiteten Werten Auflagerreaktionen R_1 und R_2 in Kopf- und Schwanzlager des Spindelkastens, deren Größen:

$$R_1 = \sqrt{(A_1' - A_1'')^2 + (A_1 - G_1)^2} \quad \text{am Kopflager,}$$

$$R_2 = \sqrt{(A_2' - A_2'')^2 + (A_2 - G_2)^2} \quad \text{am Schwanzlager,}$$

für den ungünstigsten Fall aus nachstehenden Formeln ermittelt werden müssen:

$$A_1 = W_1 \frac{D+l}{D}; \quad A_2 = W_1 \frac{l}{D};$$

$$A_1' = W' \frac{D+l}{D} = W_1 \cos \delta_1 \frac{D+l}{D}; \quad A_2' = W' \frac{l}{D} = W_1 \cos \delta_1 \frac{l}{D};$$

$$A_1'' = A_2'' = W'' \frac{d}{2D} = W_1 \sin \delta_1 \frac{d}{2D}.$$

Außerdem wird die Spindel, was auch zu ermitteln ist, auf Biegung beansprucht und dann noch mit der Kraft

$$C = W'' = W_1 \sin \delta_1$$

in axialer Richtung gedrückt.

Liegt, wie in Fig. 187 skizziert, eine Spitzendrehbank vor, so kommt die Beanspruchung des Schwanzlagers, das gewissermaßen durch die Reitstockspitze ersetzt wird, kaum in Betracht, und man hat zunächst für die Spitze in der Drehspindel und für die Reitstockspitze:

$$R_1 = \sqrt{(A'_1 + A''_1)^2 + (A_1 - G_1)^2} \quad \text{an der Spitze in der Drehspindel,}$$

$$R_2 = \sqrt{(A'_2 - A''_2)^2 + (A_2 - G_2)^2} \quad \text{an der Reitstockspitze.}$$

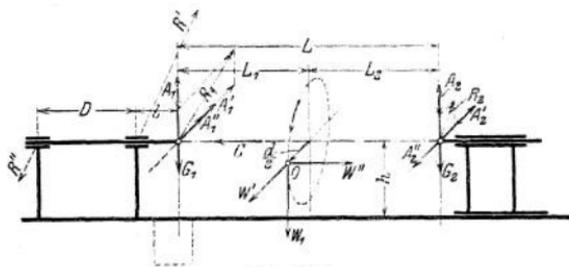


Fig. 187.

Die Kräfte sind für den ungünstigsten Fall zu ermitteln aus den Formeln:

$$A_1 = W_1 \frac{L_2}{L}; \quad A_2 = W_1 \frac{L_1}{L};$$

$$A'_1 = W' \cdot \frac{L_2}{L} = W_1 \cos \delta_1 \frac{L_2}{L_1}; \quad A'_2 = W' \cdot \frac{L_1}{L} = W_1 \cos \delta_1 \frac{L_1}{L};$$

$$A''_1 = A''_2 = W'' \frac{d}{2L} = W_1 \sin \delta_1 \frac{d}{2L}.$$

Außerdem wird die Spindel mit der Kraft

$$C = W'' = W_1 \sin \delta_1 \quad (\text{wie oben})$$

in axialer Richtung gedrückt.

Die eigentlichen Lagerbeanspruchungen ergeben sich zu

$$R' = R_1 \frac{D+l}{D} = \frac{D+l}{D} \sqrt{(A'_1 + A''_1)^2 + (A_1 - G_1)^2} \quad \text{am Kopflager,}$$

$$R'' = R_2 \frac{l}{D} = \frac{l}{D} \sqrt{(A'_2 - A''_2)^2 + (A_2 - G_2)^2} \quad \text{am Schwanzlager,}$$

in der gleichen Ebene, in der R_1 wirkt; aus diesen Kräften sind auch die Biegungsbeanspruchungen für die Spindel zu ermitteln, wenn nicht (s. später) neue Kräfte hinzukommen.

Analog sind die Momente zu errechnen, die unter Vermittlung des Supports versuchen, das Bett in senkrechter Ebene nach unten, in wagerechter Ebene nach vorn durchzubiegen, es mit dem Biegemoment $W'' \cdot h$ zu verbiegen und mit dem Drehmoment

$$M = W_1 \cdot \frac{d}{2} + W' \cdot h = W_1 \left(\frac{d}{2} + h \cos \delta_1 \right)$$

zu verdrehen.

Weniger wichtig sind die Betrachtungen für den Reitstock, an dessen Spitze die Resultierende R_3 ohnehin recht klein wird, und der außerdem keine unter Arbeitsdruck bewegten Teile besitzt¹⁾.

2. Teile der Drehbank.

a) Das Drehbankbett.

Das Bett der Drehbank ist als Träger auf zwei Stützen mit Last zwischen den Stützen zu betrachten. Getragen wird es von 2 Paar, bei größerer Länge auch von 3 Paar Füßen, von denen jedes Paar durch einen Kasten ersetzt werden kann, der gleichzeitig als Schrank zum Aufbewahren von Zubehörteilen und Werkzeugen ausgeführt wird.

Die Ausbildung leichter Bänke zeigt Fig. 229, wo 4 Füße das kastenförmige Bett mit durchweg gleichem Querschnitt tragen. Die Ausführung schwerer Betten zeigt Fig. 188, gleichzeitig ein Bett mit Kröpfung (s. auch Fig. 186) für Stücke mit großem Durchmesser.

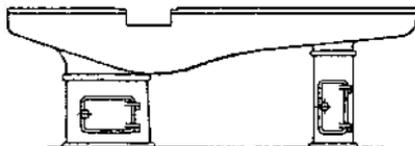


Fig. 188.

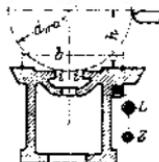


Fig. 189.

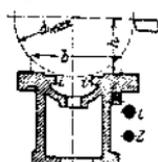


Fig. 190.

Der Querschnitt der Betten ist ausführlicher zu besprechen; er hat sich aus zwei hochkantig aufgestellten, durch Querstege verbundenen Brettern allmählich zur heutigen Form entwickelt. Fig. 189 zeigt das alte deutsche Bett, das beim Auftreten der Arbeitsdrücke zu Klemmungen Veranlassung gibt, da unter dem Sticheldruck der Support von seinen Führungen (s. auch Fig. 149) abgedrückt wird und dann unter Zug des Antriebsorganes und Widerstand des Materials zum Ecken Luft bekommt.

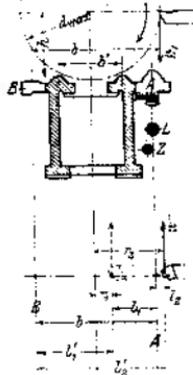


Fig. 191 und 192.

Fig. 190 zeigt eine Form, der das Prisma mit rechteckigem Querschnitt zugrunde liegt (Fig. 151) und die wegen der breiten Tragflächen bei schweren Werkzeugmaschinen jetzt wieder sehr in Aufnahme kommt. Bei etwa auftretendem Ecken klemmt es sich nicht so fest wie ein Bett nach Fig. 189. Die dem Arbeiter zugewendete Seite trägt die Lager für Leit- und Zugspindel (s. später) und teils zu deren Schutz, teils weil sie den Hauptsticheldruck aufzunehmen hat, ist die vordere Gleitbahn wesentlich breiter als die hintere gehalten. Das sogenannte amerikanische Bett weist den Übelstand des Eckens nicht in dem Maße auf wie Fig. 189. Der Arbeitsdruck lockert hier nicht die Führung, sondern drückt sie fester (Fig. 150). Es hat sich nach und nach zu einer Form entwickelt, wie sie Fig. 191 und 192 darstellen, wo eine besondere Richtung für Spindelkasten und Reitstock vorgesehen ist, der lediglich die Sicherung der Lage der Drehachse zugewiesen ist, während das vordere Prisma — nicht über die ganze Länge des Bettes, sondern nur bis an den Spindelkasten heran durchgeführt — die eigentliche Supportführung darstellt, und die hinten angeordnete Fläche nur als Auflage und mit ihrer unteren Fläche als

¹⁾ Fischer, Werkzeugmaschinen. 2. Aufl. Bd. 1, S. 292 ff.

Anlage dient für eine Stelleiste, die das Aufkippen des Supports verhindern soll. In Fig. 192 sieht man, daß das von W'' ausgelöste Moment $W'' \cdot l$ zwischen den Grenzwerten

$$l_{\max} = + \left(r_{\max} - \frac{b}{2} \right) \quad \text{und} \quad l_{\min} = - \frac{b}{2}$$

schwankt, wenn A die den Halt gebende Hauptführung ist. Würde man B zur Hauptführung machen — durch Ausbildung nach der Form von A —, so würden die Grenzwerte sein:

$$l'_{\max} = + \left(r_{\max} + \frac{b}{2} \right) \quad \text{und} \quad l'_{\min} = + \frac{b}{2}$$

Anordnung der den Zug vermittelnden Zahnstange sowie der Leitspindel unmittelbar unter der Hauptführung und lange Ausbildung dieser Führung selbst am Support wird immer nötig sein.

Fig. 193 zeigt das Drehbankbett von Schuler in Göppingen mit einer besonders breit ausgeführten Auflage A und einer Hilfsführung B . Der senkrechte Stahldruck W_1 wird gut von der breiten Fläche an A aufgenommen und die Führung B mit der Fläche B_1 angedrückt. Der Schaltwiderstand W'' — die Figur ist um 90° geklappt als Seitenriß zu denken — und der an der Zahnstange angreifende Schaltzug W_2 erzeugen einen Druck, der Führung A zur Anlage bringen und B zwar in B_1 lösen, dafür aber in B_2 festziehen würde; infolge des obenerwähnten Druckes vom Stichel her wird also auch diese Führung genügend fest liegen. Als Richtführung für Spindel und Reitstock dienen das Prisma C und die Fläche D .

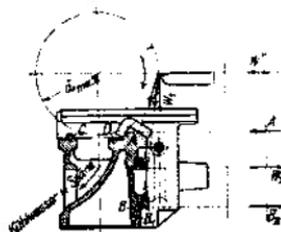


Fig. 193.

b) Die Drehbankspindel.¹⁾

Die Lagerbeanspruchungen wurden für die Drehspindeln bereits auf S. 1285 zu den Fig. 169 bis 171 besprochen, die zulässigen Drucke sind nach der Tabelle auf S. 1279 zu bestimmen. Noch zu behandeln sind die Drehmomente, die durch den am halben Drehdurchmesser angreifenden Zerspanungswiderstand ausgelöst werden. Da schwerere Schnitte immer mit Vorgelegen (s. Fig. 55 bis 57, 103, 108, 110) bewältigt werden, so soll die Durchführung dieser Überlegung nur unter Voraussetzung von Vorgelegen vorgenommen werden.

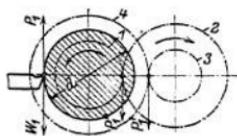


Fig. 194.

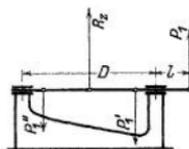


Fig. 195.

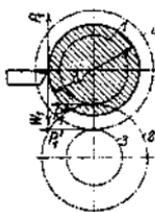


Fig. 196.



Fig. 197 und 198.

Fig. 194 zeigt die Spindel in der gewöhnlichen Ausführung mit hinten liegendem Vorgelege, Fig. 195 die auf die Spindel wirkenden Kräfte, zusätzlich des Riemenzuges R_2 , und man erkennt, daß eine verhältnismäßig geringe Belastung für die Lager entsteht, wenn man sie mit der Verteilung der Kräfte in Fig. 196 bis 198 vergleicht. Liegt das Vorgelege unten, so addieren sich geometrisch die in den

¹⁾ S. hierzu Nickel, Theor. Fragen im Werkzeugmaschinenbau. W. T. 1911. S. 17 ff.

verschiedenen Ebenen wirkenden Kräfte P_1 , P'_1 und P''_1 , so daß eine wesentlich größere Beanspruchung der Drehspindel auf Biegung eintritt. Bei sehr schweren Bänken wird deshalb die Stufenscheibe oft von der Drehspindel herunter auf eine besondere Welle verlegt, wie in Fig. 199 und 200 gezeigt ist¹⁾.

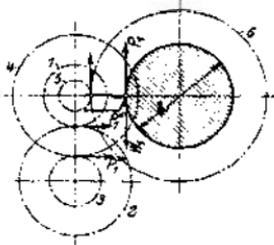


Fig. 199 und 200.

Wird bei schweren Kopfbänken eine Innenverzahnung unmittelbar an der Planscheibe angebracht, so werden, wie in Fig. 201 ersichtlich ist, der Zerspanungswiderstand und der Zahndruck nahezu an der gleichen Stelle wirken und sich hier aufheben, fast ohne die Spindel zu belasten. Es kommt in diesem Fall dann nur die allerdings nicht unbeträchtliche Beanspruchung durch Werkstück- und Planscheibengewicht in Frage, wenn die Stufenscheibe seitlich liegt.

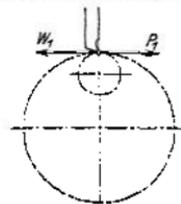


Fig. 201.

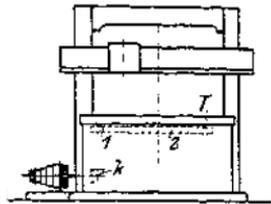
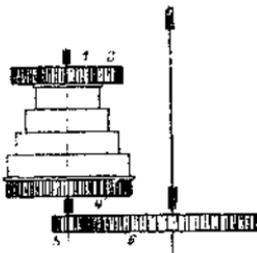


Fig. 202.

Bei der Vertikaldrehbank (Fig. 202) werden das Gewicht von Planscheibe und Werkstück und der senkrechte Arbeitsdruck durch eine unmittelbar unter der Planscheibe liegende Spurrinne aufgenommen, die häufig auch so angeordnet ist, daß sie den in wagerechter Ebene auftretenden Arbeitsdrücken Widerstand leisten kann. Auf alle Fälle genügt es hier, das obere Lager kräftig auszubilden²⁾.

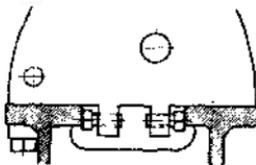


Fig. 203.

Formen der Spindelkästen sind in Fig. 103 und 228 gezeigt, für Räder-Spindelkasten ist ein gutes Beispiel der Spindelkasten von Böhringer, Fig. 233 bis 237. Eine Anordnung zum Ausrichten des Spindelkastens zeigt Fig. 203.

c) Einrichtung zum Gewindeschneiden.

α) Wechselradsätze.

Dreht sich die Drehspindel ein mal herum und hat sich gleichzeitig der Support Sp um den Betrag s (Fig. 204, 205) nach links verschoben, so hat ein im Support eingespannter Drehstahl auf dem zylindrischen Werkstück w eine Schraubenslinie von der Steigung s erzeugt. Die Bewegung des Supports um den Betrag s ist durch die Leitspindel bewirkt worden, die ihn bei einer Umdrehung um den Betrag S vorschoben, also die Anzahl von n_L Umdrehungen, bei einer Umdrehung der Drehspindel, ausführen mußte, um die Bewegung

$$s = S \cdot n_L$$

¹⁾ S. hierzu auch Hülle, Z. Ver. deutsch. Ing. 1914, S. 1473 ff.

²⁾ S. Fischer, Werkzeugmaschinen, Bd. I. S. 353 ff.

hervorzubringen. Wird die Bewegung von der Drehspindel auf die Leitspindel durch die Wechsellräder Z_1 bis Z_L übertragen und ist $Z = Z'$, so ist, da n für die Drehspindel = 1 ist:

$$n_L = \frac{s}{S} = 1 \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 \cdot Z_L}$$

Von Z auf Z' wird der Antrieb durch ein Wendegetriebe (Fig. 138 bis 141) ohne Änderung der Drehzahl übertragen.

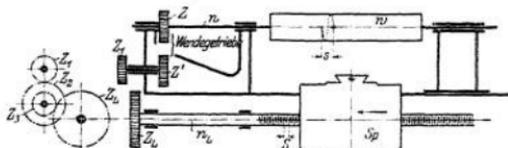


Fig. 204 und 205.

An Wechsellrädern finden sich folgende 3 Sätze¹⁾.

1. Satz. Je ein Rad mit

24, 32, 36, 40, 44, 48, 51, 56, 64, 72, 80, 80, 88, 96, 104, 112, 127 Zähnen
= 17 Rädern.

2. Satz. 9 Räder mit 17 bis 25 Zähnen, je um 1 Zahn springend

15 „ „ 25 „ 100 „ „ „ 5 Zähne „

3 „ von 100 „ 130 „ „ „ 10 „ „

1 Rad mit 127 Zähnen = 28 Rädern.

3. Satz. Je ein Rad mit 20, 20, 25 bis 136 Zähnen, je um 5 Zähne springend und 1 Rad mit 127 Zähnen = 29 Rädern,

außerdem findet sich vielfach noch je ein Rad mit 12 und eins mit 97 Zähnen,

β) Zollgewinde auf Zollspindel oder metrische Gewinde auf metrischer Spindel zu schneiden.

Da die Steigung für das zu schneidende und für das Leitspindelgewinde im gleichen Maß gemessen sind, so heben sich in der Formel $\frac{s}{S}$ die Bezeichnungen fort und es entsteht der dimensionslose Quotient:

$$\frac{Z_1 \cdot Z_3 \cdot \dots}{Z_2 \cdot \dots \cdot Z_L} = \frac{s}{S}$$

Auf einer Bank mit Leitspindel von $\frac{1}{4}$ '' Steigung und Rädersatz 1 ist zu schneiden:

1. Beispiel. Gewinde nach Whitworth: $d = \frac{1}{4}$ '' , $s = \frac{1}{16}$ ''.

$$\frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 \cdot Z_L} = \frac{4}{10} = \frac{4 \cdot 6}{6 \cdot 10} = \frac{24 \cdot 48}{36 \cdot 80}, \text{ d. h. } Z_1 = 24, Z_2 = 36, Z_3 = 48, Z_L = 80 \text{ Zähne.}$$

2. Beispiel. Gewinde nach Whitworth: $d = \frac{1}{8}$ '' , $s = \frac{1}{40}$ '' (wegen der hohen Übersetzung sollen 3 Räderpaare Verwendung finden).

$$\frac{Z_1 \cdot Z_3 \cdot Z_5}{Z_2 \cdot Z_4 \cdot Z_L} = \frac{4}{40} = \frac{4 \cdot 9 \cdot 18}{9 \cdot 18 \cdot 40} = \frac{32 \cdot 24 \cdot 36}{72 \cdot 48 \cdot 80}$$

d. h. $Z_1 = 24, Z_2 = 48, Z_3 = 32, Z_4 = 72, Z_5 = 36, Z_L = 80$ Zähne.

γ) Metrische Gewinde auf Zollspindel, oder umgekehrt, zu schneiden.

Ist eine der beiden Steigungen in Zoll, die andere in Millimetern gegeben, so müssen sie erst mit Hilfe der Reduktionszahl $25,4 = \frac{127}{5}$ gleichnamig gemacht werden. Es ist dann

¹⁾ Adler, Umlaufzahlenreihen bei Werkzeugmaschinen. Z. Ver. deutsch. Ing. 1907, S. 1491 ff.

für metrische Gewinde auf Zollspindel:

$$\frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 \cdot Z_L} = \frac{s \cdot 5}{S \cdot 127}$$

und für Zollgewinde auf metrischer Leitspindel:

$$\frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_4 \cdot Z_L} = \frac{s \cdot 127}{S \cdot 5}$$

3. Beispiel. S. J. Gewinde: $d = 8$ mm, $s = 1,25$ mm unter Verwendung von Satz 2

$$\frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3 \cdot Z_L} = \frac{1,25 \cdot 5 \cdot 4}{127} = \frac{25 \cdot 50}{50 \cdot 127} = \frac{20 \cdot 50}{40 \cdot 127}$$

d. h. $Z_1 = 20$, $Z_2 = 40$, $Z_3 = 50$, $Z_4 = 127$ Zähne.

4. Beispiel. Gegeben eine metrische Leitspindel von 6 mm Steigung, zu schneiden ein Gewinde nach Whitworth: $d = 1,4''$, $s = 1,27''$:

$$\frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3 \cdot Z_L} = \frac{127}{20 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1 \cdot 127}{5 \cdot 120}$$

Da die Übersetzung $\frac{1}{6}$ durch ein Räderpaar nicht gut hervorzubringen ist, so muß man 3 Räderpaare nehmen, während man für die gleiche Schraube nach Beispiel 1 mit 4 Rädern auskam.

$$\frac{Z_1 \cdot Z_3 \cdot Z_5}{Z_2 \cdot Z_4 \cdot Z_6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 127}{2 \cdot 5 \cdot 120} = \frac{20 \cdot 30 \cdot 127}{40 \cdot 75 \cdot 120}, \quad \text{d. h. :}$$

$Z_1 = 20$, $Z_2 = 40$, $Z_3 = 30$, $Z_4 = 75$, $Z_5 = 127$, $Z_6 = 120$ Zähne.

Man muß durch ein etwa gleichgroßes Rad den Einfluß des 127er Rades aufheben, da Übersetzungen ins Schnelle unbeliebt sind; das ergibt außer den vielen auch noch sehr große Räder, für die selten Platz genug vorhanden ist.

Daraus erklärt sich, daß man Leitspindeln mit Zollgewinde vorzieht, falls nicht ausschließlich metrische Gewinde zu schneiden sind.

δ) Schneiden von Gewinden mit hoher Steigung.

Sind die Steigungen der zu schneidenden Gewinde sehr hoch, vielleicht gleich dem Vielfachen eines Zolles, so wird der Bruch $\frac{s}{S}$ ein unechter und

$\frac{Z_1 \cdot Z_2 \dots}{Z_3 \dots Z_L}$ ergäbe eine Übersetzung ins Schnelle. In diesem Falle leitet man

den Antrieb der Leitspindel nicht von einem auf der Drehspindel festen, sondern von einem Rade her, das an der Stufenscheibe festsetzt, sich also

$\frac{s}{J}$ mal so schnell dreht wie die Drehspindel.

Praktisch ist dann die Steigung der Leitspindel gleich $\frac{S}{J}$ und:

$$\frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3 \cdot Z_L} = \frac{s \cdot J \cdot 5}{S \cdot 127}$$

wenn die Steigung der Schraube in Millimetern, die der Leitspindel in Zoll gegeben ist.

5. Beispiel. Gegeben $S = 1,4''$, $J = 1''$, $s = 35$ mm und Rädersatz 3:

$$\frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3 \cdot Z_L} = \frac{35 \cdot 4 \cdot 5}{8 \cdot 127} = \frac{5 \cdot 35 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 127} = \frac{25 \cdot 105}{30 \cdot 107}$$

d. h. $Z_1 = 25$, $Z_2 = 30$, $Z_3 = 105$, $Z_4 = 107$ Zähne.

ε) Schneiden von Modulschnecken.

Sind die Gewindesteigungen im Maße $M \pi$ mm und die Leitspindel in Zoll gegeben, so muß man setzen, da $1 \cdot \pi$ mm $\approx 3,14$ mm, $M \cdot \pi$ mm $\approx M \cdot 3,14$ mm und $1'' = 25,4$ mm ist:

$$\frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 \cdot Z_L} = \frac{s}{S} = \frac{M \cdot 3,14}{S \cdot 25,4}, \quad \text{und, da } \frac{3,14}{25,4} \approx \frac{12}{97},$$

$$\frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 \cdot Z_L} = \frac{g \cdot M \cdot 12}{S \cdot 97} \quad \text{für kleine Teilungen } M\pi,$$

$$\frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 \cdot Z_L} = \frac{g \cdot M \cdot 12 \cdot J}{S \cdot 97} \quad \text{für große Teilungen } M\pi.$$

(*g* bezeichnet die Gangzahl, mit der man $M\pi$ multiplizieren muß, um die richtige Steigung zu erhalten.)

6. Beispiel. Gegeben $S = 1/4''$, $J = 1/8$ und eine 3gängige Schnecke von Modul $M = 4$ mm, verwendet wird Satz 1.

$$\frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 \cdot Z_4} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 4}{8 \cdot 97} = \frac{3 \cdot 24 \cdot 4}{4 \cdot 97} = \frac{24 \cdot 96}{32 \cdot 97}, \quad \text{d. h. } Z_1 = 24, Z_2 = 32, Z_3 = 96, Z_4 = 97 \text{ Zähne.}$$

§) Aufbringen der Wechselräder.

Zum Aufbringen der Wechselräder auf die Drehbank bedient man sich der Scheren, deren eine in Fig. 206 dargestellt ist. Das treibende Rad ist *a* (Z_1 in Fig. 204, 205), es greift in ein Rad *b*, das, mit Rad *c* auf die gleiche Hülse aufgefädert, sich mit dieser lose um einen Bolzen dreht, der im Schlitz *N* der Schere verstellbar ist und ein Einschieben von *c* in *d* und Sichern in dieser Lage gestattet. Durch Schwenken der Schere um die Leitspindelachse wird *b* in Eingriff mit *a* gebracht und die Schere durch einen Bolzen am Drehbankbett in dieser Lage festgehalten.

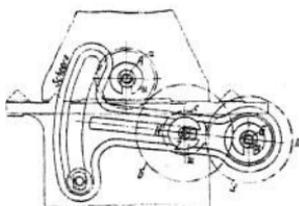


Fig. 206.

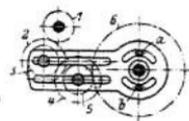


Fig. 207.

Zum Aufbringen von 6 Rädern dient eine Schere nach Fig. 207, mit zwei Stellschlitz für die Räderpaare 2, 3 und 4, 5. Die Befestigung am Bett durch die zwei Bolzen *a* und *b* kann nicht ebenso befriedigen wie die Ausführung nach Fig. 206.

d) Der Support.

Sein Oberschlitten hat den Werkzeughalter zu tragen und wird meist nach Fig. 243 ausgebildet. Die Schraubenspindel, über deren Lagerung und Mutter schon auf S. 1264 gesprochen wurde, liegt bei dieser Anordnung frei und ist Beschädigungen und Verbiegungen leicht ausgesetzt. Besser ist deshalb eine Lagerung nach Fig. 83. Bei dieser Anordnung steht die Mutter fest, und die Schraube, durch den gleitenden Schlitten geschützt, macht die Längsbewegung, die ebenso groß sein kann, wie bei der anderen Führung. Der Obersupport ist drehbar auf dem unteren angeordnet, und die Drehung muß nach Graden, in besonderen Fällen — Drehen von Kegelrädern, Gewindebohrer-Vorschneidern und Winkelfräsern — sogar noch feiner einzustellen sein. Ein Zeiger muß hier auf alle Fälle vermieden werden, weil er sich verbiegen kann; es muß sich auf dem festen Teil vielmehr auch ein Indexstrich befinden, und auf dem drehbaren muß eine Teilung um je 90° nach links und rechts vom Nullpunkt angeordnet sein.

Die Stellschrauben zum Befestigen des drehbaren Teiles müssen sorgfältig so angeordnet werden, daß sie bei jeder Stellung des Obersupportes gut zu lösen und festzuziehen sind (s. hierzu auch Fig. 243 bis 244). Den Querschlitten, der sich senkrecht zum Bett bewegt, unterzubringen, macht keine Schwierigkeit, wenn (s. Fig. 240) die Spitzenhöhe groß genug ist, um ein völliges Freistehen des Führungsprismas zu gestatten. Ist aber die Spitzenhöhe gering, wie in Fig. 210

und 243, so sinken die zu schabenden Flächen ein und sind mit dem Schaber schwer zu erreichen, wie Fig. 208 zeigt. In diesem Falle empfiehlt es sich, die Führung auch hier umzukehren und, nach Fig. 209, die Mutter fest und die

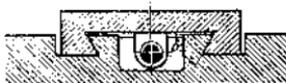


Fig. 208.

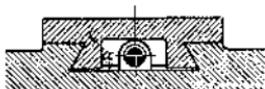


Fig. 209.

Schraube mit dem Schlitten beweglich zu gestalten. Man erreicht dadurch den gleichen Vorteil, wie für den Oberschlitten und muß nur bei Anordnung der Mutter eine gewisse Schwierigkeit überwinden, weil die Bewegungseinleitung in die Spindel bei Selbstgang (s. später) stets in derselben Stelle erfolgen muß; man kann sich helfen, indem man die Mutter drehbar mit dem getriebenen Rade (*13* in Fig. 243) verbindet und die Schraube stillstehen läßt. Die Grundplatte des Supportes muß, wie Fig. 212 zeigt, nach Form eines *H* ausgebildet sein; häufig macht man die vordere Führung *A*, die Hauptführung (s. oben), länger als *B*, daß sie neuerdings meist auch breiter gehalten wird als *B* wurde schon zu Fig. 191

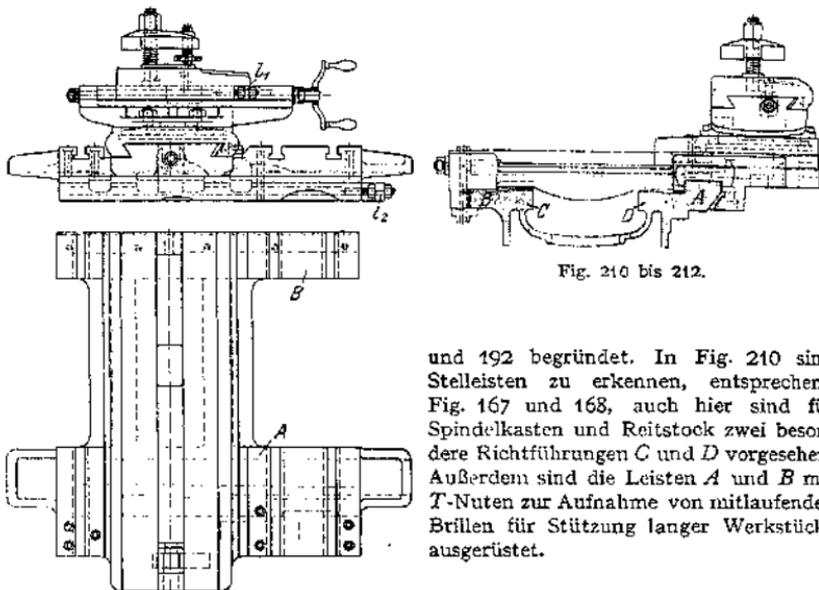


Fig. 210 bis 212.

und 192 begründet. In Fig. 210 sind Stelleisten zu erkennen, entsprechend Fig. 167 und 168, auch hier sind für Spindelkasten und Reitstock zwei besondere Richtführungen *C* und *D* vorgesehen. Außerdem sind die Leisten *A* und *B* mit *T*-Nuten zur Aufnahme von mitlaufenden Brillen für Stützung langer Werkstücke ausgerüstet.

e) Die Bettplatte.

Sie ist bestimmt, die Einrichtungen anzunehmen, welche die Schaltung beim Gewindeschneiden, sowie für Längs- und Planzug beim Drehen zu bewerkstelligen haben.

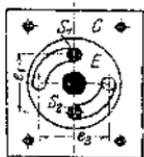


Fig. 213.

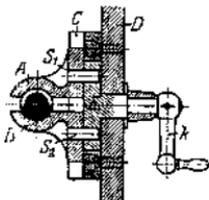


Fig. 214.

Das Mutterschloß, das in Fig. 213 und 214 dargestellt ist und auch an den Fig. 240, 241 und 243, 245 erkannt werden kann, wird durch eine Kurbel *K*, die vor der Bettplatte liegt, geöffnet und geschlossen. Die Mutterhälften *A* und *B* gleiten in einer

Schlittenführung *C*, die gegen die Bettplatte *D* geschraubt ist und der Platte *E* als Lager dient, die zwei Kurvenschlitzte in *E* nehmen die Stifte s_1 und s_2 auf und zwingen sie, je nach Lage von h , die Backen zu schließen — Stifte in Entfernung e_1 — oder zu öffnen — Stifte in Entfernung e_2 . Ähnlich ist die Einrichtung in Fig. 240, während Reinecker (Fig. 243, 245) durch ein Trieb *t* und zwei Zahnstangen (s. Beschreibung) die Backen öffnet und schließt. Lorenz (Ettlingen) verwendet eine Schraube, die, senkrecht zur Bettplatte angeordnet, die Mutterbacken bewegt. Zum Drehen wird heute im allgemeinen die Leitspindel nicht mehr verwendet, sondern eine besondere Zugspindel angeordnet.

Fig. 215 und 216 zeigen eine Bettplatte mit Schraubenräderantrieb; s_1 , ebenso wie s_2 und die übrigen Räder an der Bettplatte gelagert, wird durch die genutete Zugspindel in jeder Stellung des Supportes gedreht und versetzt, je nach Lage der Kupplung *K*, die Stirnräder *Z* oder *Z'* in Umdrehung; bei Mittelstellung von *K* ist der Selbstgang ausgeschaltet. *Z* treibt über 1, 2, 3, 4, 5 und 6 den Längszug an, weil sich Z_6 in der feststehenden Zahnstange wälzt und den Support mitzieht. *Z'* dreht über I, II, III die Schraubenspindel des Quersupportes und betätigt so den Planzug.

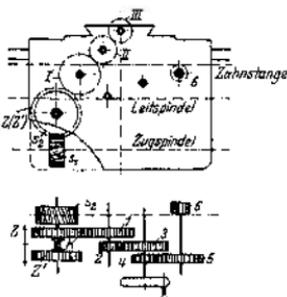


Fig. 215 und 216.

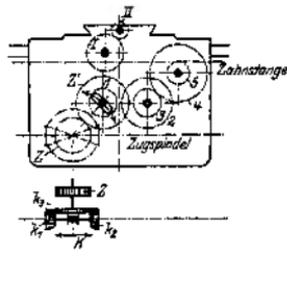


Fig. 217 und 218.

Fig. 217 und 218 zeigen eine andere Anordnung, den Antrieb durch Kegelräder, der den Vorteil bietet, daß man durch Kuppeln von k_1 oder k_2 mit der Zugspindel — durch Verstellen der Klaupe *K* — das große Kegelrad k_3 zwingen kann, sich rechts oder links, oder — bei Mittellage von *K* — gar nicht zu drehen. Mit k_3 festverbunden ist Rad *Z*, mit welchem das große Schwingenrad *Z'* dauernd kämmt. Je nach Lage der Schwinge kann man dann von *Z'* über 1, 2, 3, 4, 5 und die Zahnstange am Bett den Längszug, oder über I, II und die Schraube am Quersupport den Planzug betätigen. Die Einrichtung ist besonders beliebt für reine Zugspindelbänke, die, weil die Leitspindel fehlt, dann am Spindelkasten keine Wendevorrichtung benötigen. Der Arbeiter kann mit einem Handgriff den Support stillsetzen, ihn vor- oder rückwärts laufen lassen, mit einem zweiten Handgriff abwechselnd den Plan- oder Längszug bedienen; alle Bedienungshebel befinden sich an der Bettplatte, sind also dem Arbeiter bequem zur Hand.

Der Antrieb mit Schnecke und Schneckenrad — s. Ausführungen von Reinecker und Heidenreich & Harbeck — gestattet sehr feine Vorschübe, wegen der hohen Übersetzung ins Langsame beim Schneckentrieb; die von Amerika übernommene Einrichtung der Fig. 240, 241 mit genuteter Leitspindel, die dann gleichzeitig als Zugspindel dient, kann als unbedenklich nicht angesehen werden. Erstens ziehen sich Wellen durch das Nuten immer krumm, was für die Leitspindel besonders bedenklich ist, und zweitens ist es nicht gut, die Leitspindel den beim Schruppen auftretenden, starken Verdrehungsbeanspruchungen auszusetzen.

Sicherungen an der Bettplatte sind unbedingt nötig, besonders damit nicht Leitspindel und Zugspindel gleichzeitig arbeiten können. Bei der Ausführung nach Fig. 240 bis 242 sind Sicherungen fortgelassen, eine Art der Sicherung ist in Fig. 243 dargestellt und wird dort besprochen, andere Arten zeigen die Fig. 219

bis 222. Jede der Einrichtungen sperrt durch Ausdrehungen stets die eine Scheibe so, daß sie keine Bewegung machen, bzw. ihr Schaltorgan nicht betätigen kann, solange das andere Schaltorgan eingerückt ist.

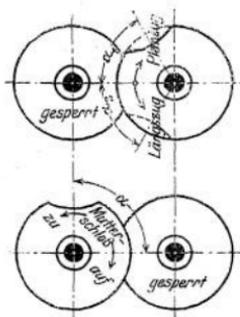


Fig. 219 und 220.

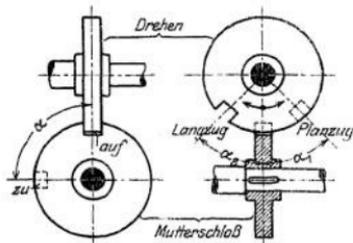


Fig. 221 und 222.

f) Der Reitstock.

Die Reitstockspitze, für leichte und mittlere Arbeiten mit einem Spitzenwinkel von 60° , für schwere Arbeiten auch wohl mit stumpferem Winkel versehen, ist mit einem schlanken Konus (Morse- oder metrischen Konus Fig. 184, 185) in der Pinnole befestigt und wird mit dieser — ohne Eigendrehung — vorwärts bewegt. Es liegt hier im allgemeinen eine der früher (Fig. 153) besprochenen zylindrischen Richtführungen vor, die durch eine besondere Einrichtung an eigenmächtiger Drehung gehindert werden müssen. Von derartigen Drehsicherungen ist in Fig. 223 als Beispiel eine einfache abgeflachte Schraube dargestellt,

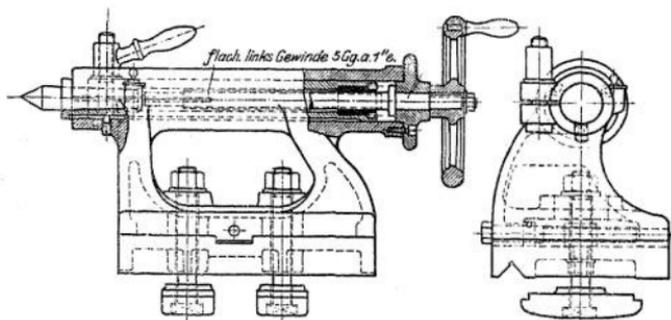


Fig. 223.

Fig. 224.

Reitstock von Gebr. Böhlinger, Göppingen.

die in eine Nut an der Pinnole greift; besser und sicherer wirkt ein Zapfenkeil (Fig. 225), der breitere Anlagflächen aufweist. Einrichtungen zum Festklemmen der Pinnole sind auf S. 1283 besprochen worden an Hand der Fig. 160 bis 162, Fig. 223 und 224 weisen eine geschlitzte Hülse, entsprechend Fig. 161, auf. Der Knebel zum Festziehen ist bei dieser letzten Anordnung billiger, da er nicht im Gesenk, also nicht durch teure Schmiedearbeit hergestellt werden muß, wie der in Fig. 223 und 224; er besteht nämlich hier aus einem einfachen Kugelknebel mit untergesetzter Hülse, also aus zwei Drehteilen, die billig auf der Revolverbank herzustellen sind.

Früher wurde vielfach das hintere Ende der Pinnole als Schraube, das Handrad als Mutter ausgebildet, was Beschädigungen des Gewindes zuließ, weil es bei zurückgezogener Pinnole weit aus seiner Mutter herausragt und so auch den Arbeiter hinderte. Heute legt man meist die Schraube nach innen, was eine kurze Bauart und eine geschützte Schraube ergibt. In Fig. 223 ist die Schraubenspindel in einer besonderen Kappe gelagert, die auf den Reitstockkörper aufgesetzt ist. Fig. 226 zeigt eine billigere Ausführung, die bei

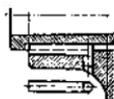


Fig. 225.

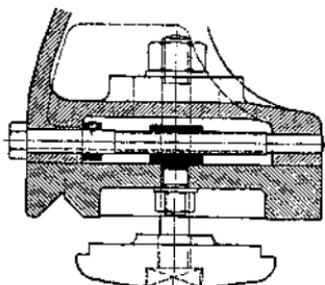


Fig. 227.

Anwendung der Bohrstange zur Herstellung der Pinnolenführung einwandfrei sein kann. Vielfach wird, aus der Überlegung heraus, daß die Pinnolenführung

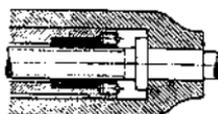


Fig. 226.

als genau passender Hohlzylinder ausgeführt werden muß, die Ausführung nach Fig. 223 vorgezogen, weil dann ein Ausreiben mit der Reibahle leichter zu bewerkstelligen ist. Fig. 227 zeigt, ebenso wie Fig. 224, die Festklemmung des Reitstockes auf dem Bettprisma und außerdem noch die Querverstellung, die zum Drehen schlanker Konusse das Reitstockoberteil mit der Spitze seitlich herauszuschieben gestattet.

3. Ausgeführte Konstruktionen.

a) Leit- und Zugspindeldrehbank von Ludw. Loewe & Co., Berlin.

Eine 3stufige Riemenscheibe treibt (Fig. 228)

$$1. \text{ über d. Vorgelege } \frac{Z_1 \cdot Z_5}{Z_2 \cdot Z_6} = 1/10 (J_1)$$

$$2. \text{ über d. Vorgelege } \frac{Z_3 \cdot Z_6}{Z_4 \cdot Z_6} = 1/3 (J_2)$$

3. nach Kupplung mit der Drehwelle unmittelbar die Drehspindel I an. Da das Deckenvorgelege 2 Drehzahlen hat:

$$n_{d_1} = 315 \text{ Umdr./min,}$$

$$n_{d_2} = 470 \text{ Umdr./min,}$$

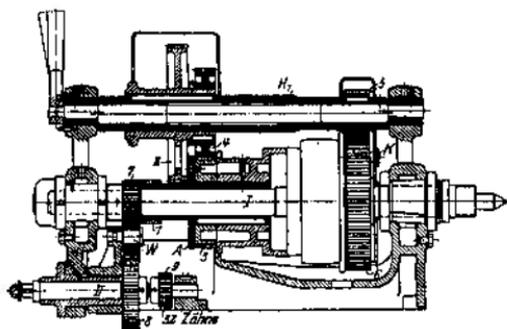


Fig. 228.

so erhält man 18 verschiedene Drehzahlen, deren zweite Gruppe allerdings nur für den beschleunigten Rücklauf in Frage kommt. Auf einer ausschwenkbaren Welle sitzt die Hülse H_1 , welche das feste Rad 5 und die seitlich verschiebbaren Räder 2 und 4 trägt. Eine Scheibe A gestattet die seitliche Verschiebung erst, nachdem die Hülse ausgeschwenkt ist: es wird so ein seitliches Aufeinanderschlagen der Räder 2 und 4 verhütet. Von dem auf der Welle I festen Rade 7 wird über ein Wendegetriebe W Rad 8 angetrieben, und dessen Welle II kann entweder von einem links befindlichen Zapfen her über Wechselräder die Welle III, Fig. 232, oder über die Räder 9, 10, 11 die Hülse H_2 antreiben. Rad 11 ist als Kupplungsklaue ausgebildet und auf Hülse H_2 so verschiebbar, daß es durch die Klaue K_1 Hülse H_2 mit Welle III kuppeln kann.

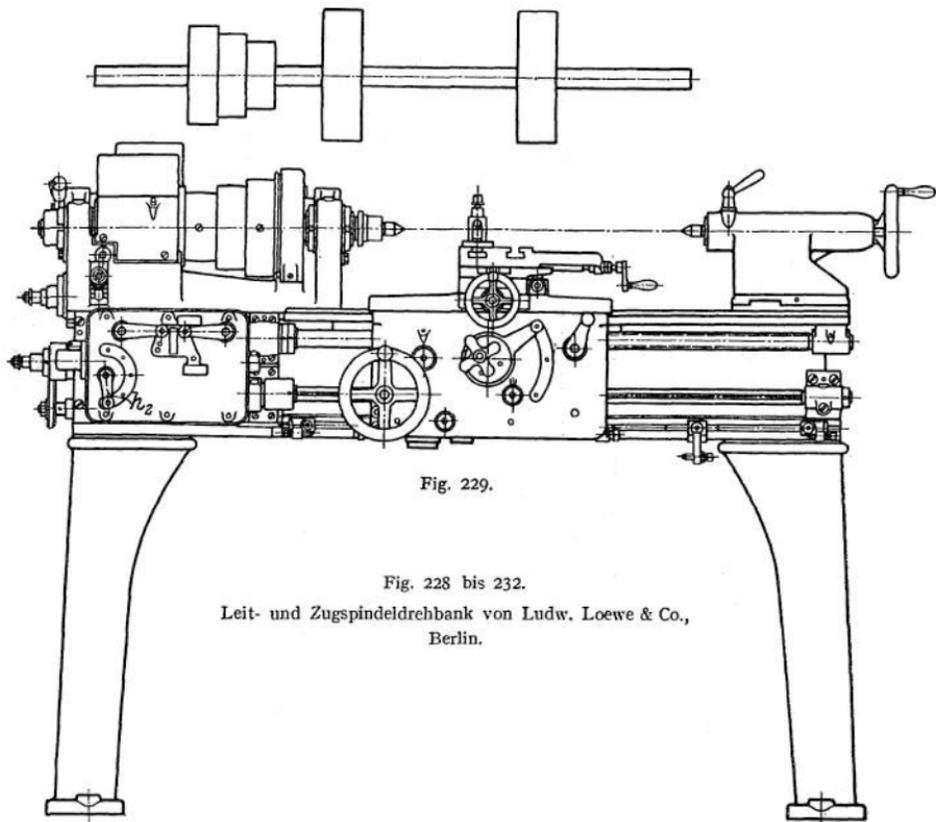
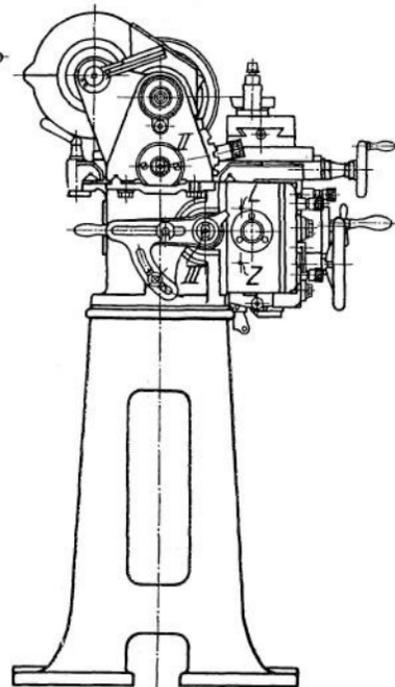


Fig. 228 bis 232.
Leit- und Zugspindeldrehbank von Ludw. Loewe & Co.,
Berlin.



Von II aus kann man also entweder Hülse H_2 im festen Übersetzungsverhältnis $\frac{Z_9}{Z_{11}}$ (10 ist Zwischenrad), oder über Wechselräder in beliebigem Verhältnis antreiben.

Von H_2 aus ist Welle IV mit Hilfe des Ziehkeilgetriebes mit 5 Drehzahlen anzutreiben, und schließlich kann Rad 12 — verschiebbar aufgefедert auf der Ziehkeilwelle — sowohl die Leitspindel, als auch die Zugspindel zum Umlaufen zwingen.

Die Klauenkupplung mit Rad 11 und die doppelte Zahnkranzkupplung durch Rad 12 können durch die in Fig. 231 sichtbaren Hebel h_1 und h_2 betätigt werden. Man kann so mit h_1 den Antrieb direkt oder über aufsteckbare Wechselräder einleiten, oder auch ihn stillstellen, mit h_2 Leit- oder Zugspindel mit dem Räderkasten koppeln.

Hebel h_2 bedient das Ziehkeilgetriebe, indem er ein Zahnrad z schaltet, das die Ziehkeilwelle an einer rotierenden Zahnstange hin und her bewegt.

Die Lagerungen der Spindel, die Stiftkupplung K und die Sicherheitskupplung K_s sind in den Fig. 104, 105, 106, 169 bis 171 dargestellt und dort besprochen worden.

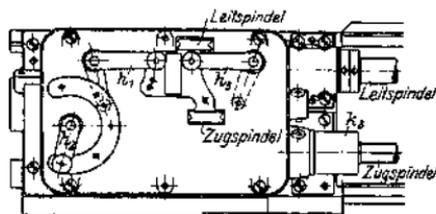


Fig. 231.

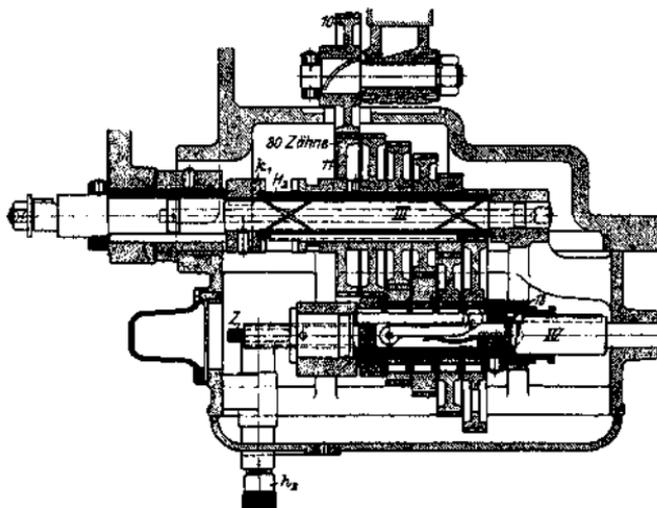


Fig. 232.

b) Räderkasten von Gebr. Böhlinger, Göppingen.

Welle I (Fig. 234) wird von der Riemenscheibe mitgenommen und erteilt Welle II über die Räder 1, 2 oder 3, 4 zwei Drehzahlen n_a und n_b , je nachdem die Muffe m_1 die Kupplungen A_1 oder A_2 einrückt (s. Fig. 236, 238 und 239). Von II aus kann die auf Welle III lose Hülse über die Räder 2, 3 oder 4, 6 angetrieben werden, sodaß 4 Drehzahlen entstehen:

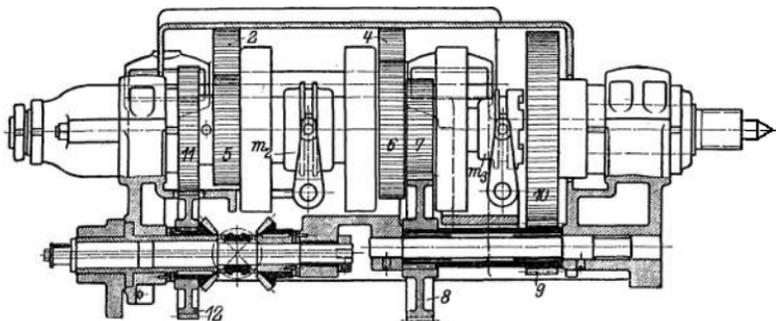


Fig. 233.

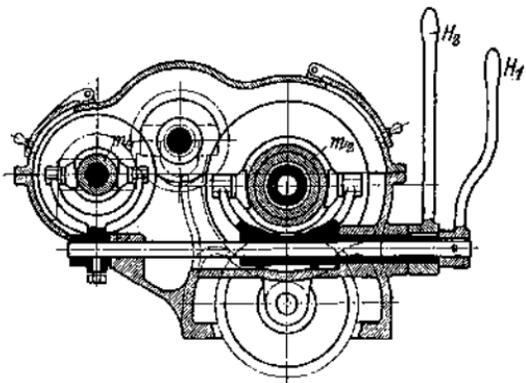


Fig. 235.

$$\begin{aligned}
 n_1 = n_2 \frac{Z_3}{Z_5} = n_I \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 \cdot Z_5}, & \quad n_3 = n_2 \frac{Z_2}{Z_5} = n_I \frac{Z_2 \cdot Z_2}{Z_4 \cdot Z_5}; \\
 n_2 = n_3 \frac{Z_4}{Z_6} = n_I \frac{Z_1 \cdot Z_4}{Z_2 \cdot Z_6}, & \quad n_4 = n_3 \frac{Z_4}{Z_6} = n_I \frac{Z_3 \cdot Z_4}{Z_1 \cdot Z_6},
 \end{aligned}$$

je nachdem die Muffe m_2 die Kupplungen k_2 oder k_1 betätigt. Von der Hülse aus kann entweder über die Räder 7, 8, 9, 10, Fig. 233, oder direkt, je nach Lage der Kupplungsmuffe m_2 die Drehspindel angetrieben werden.

Die Ausbildung der eigenartigen Spreizkupplung zeigen Fig. 238 und 239. Durch Verschieben der Muffe werden die Hebel k, k' (Fig. 239) gedreht, und ihre abgeflachten Zapfen spreizen bei dieser Drehung den federnden Mitnehmer auf, so daß er sich saugend gegen die Hülse T legt. Fig. 235 bis 237 zeigen Einzelteile, von denen besonders eigenartig die Anordnung der Hebelachsen für H_1 und H_2 ineinander ist.

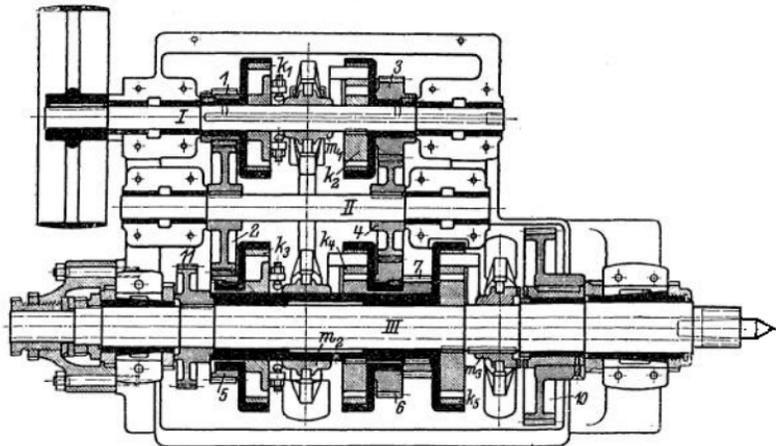


Fig. 234.

Fig. 233 bis 239.

Räderkasten von Gebr. Böhlinger, Göppingen.

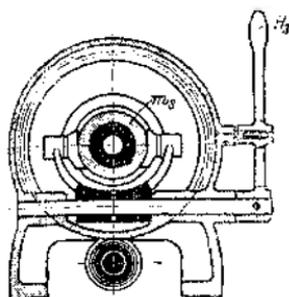


Fig. 236.

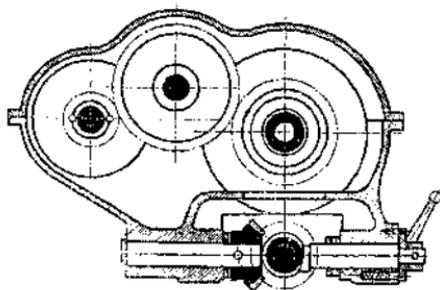


Fig. 237.

Fig. 233 bis 239.
Räderkasten von Gebr.
Böhringer, Göppingen.

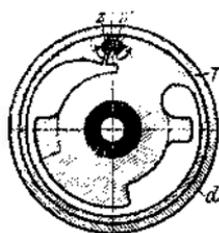


Fig. 238.

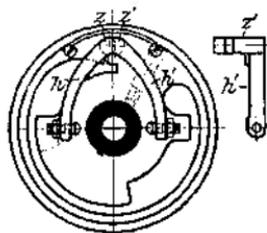


Fig. 239.

c) Leit- und Zugspindelsupport von Heidenreich & Harbeck, Hamburg.

Die in Fig. 242 dargestellte Wegbegrenzung und das zugehörige Wendegerieße sind bereits auf S. 1276 beschrieben worden. Die Bettplatte weist getrennte Antriebe für Längs- und Planzug (Figg. 240 und 241), beide durch Schnecke und Schneckenrad, auf der genuteten Leitspindel auf. Sicherungen gegen gleichzeitiges Einrücken von Leit- und Zugspindel sind nicht angeordnet (s. Bemerkungen S. 1297).

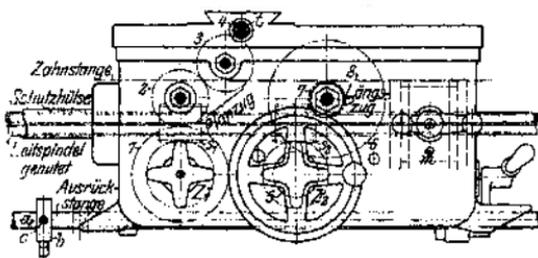


Fig. 240.

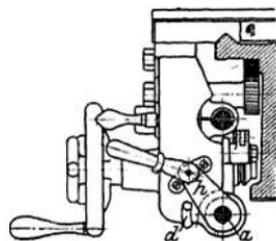


Fig. 241.

Fig. 240 bis 242.
Leit- und Zugspindel-
support von Heiden-
reich & Harbeck,
Hamburg.

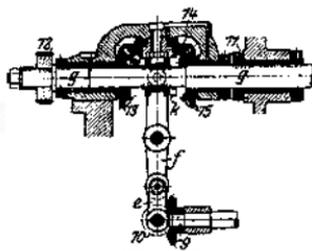


Fig. 242.

d) Leit- und Zugspindel-
support von E. J. Reinecker,
Chemnitz.

Die Backen der Leitspindel-
mutter tragen zwei Zahn-
stangen, die durch ein Trieb t
mit Hilfe des Hebels h_1 (Fig. 243
und 245) betätigt werden. Die
Zugspindel wirkt über das
Wendegetriebe 1 bis 3 auf Rad 4
(Fig. 244 und 245) und von da
über die Kegelräder 5, 6, 7, das
Schneckengetriebe 8, 9 (Fig. 245
und 246) und das Trieb 10 auf
die Bettzahnstange und be-
tätigt so den Längszug. Rad 11,
mit Kegelrad 6 fest verbunden,
wirkt (Fig. 243, 245 und 247)
über das Schwenkrad 12 auf
Rad 13, das die Supportquer-
spindel zur Umdrehung zwingt.

Der Hebel h_1 bewegt beim
Schließen der Leitspindel-
mutter eine Stange nach rechts,
die das Einrücken des Hebels h_2
und damit der Fallschnecke 8
solange hindert, wie die Mutter
geschlossen ist; den Längszug
einzurücken ist dann aber un-
möglich.

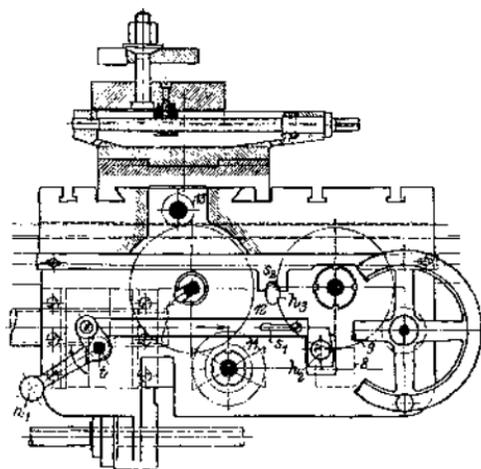


Fig. 243.

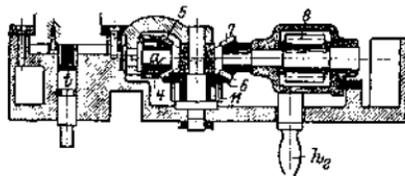


Fig. 245.

Fig. 243 bis 247.

Leit- und Zugspindel-support von J. E. Reinecker, Chemnitz.

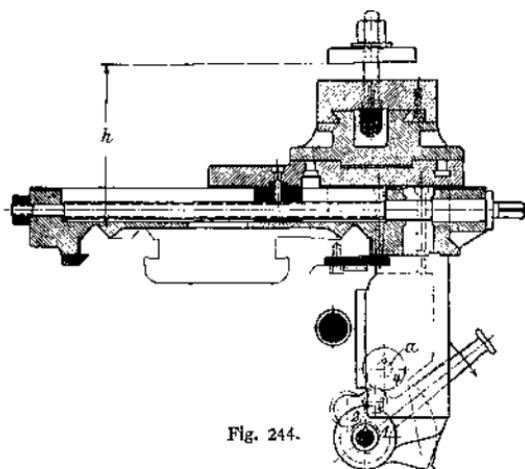


Fig. 244.

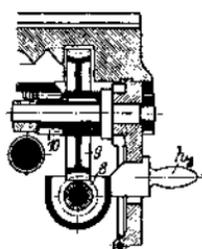


Fig. 246.

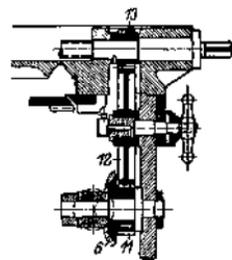


Fig. 247.

B. Hobel- und Stoßmaschinen.

I. Aufnahme der Arbeitsdrücke. 1) 2)

a) Tischhobelmaschine.

Im allgemeinen führt der Tisch *T* (Fig. 248, 249) die Haupt- oder Schnittbewegung, der Support *D* auf dem Querbalken *C* die Schaltbewegung aus, und *C* bewirkt durch Verschieben längs der Seitenständer *B*, die am Kastengestell *A* festgeschraubt sind, die Einstellung der Spantiefe *t*. (S. auch Fig. 10 bis 13.)

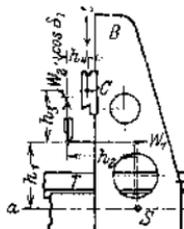


Fig. 248.

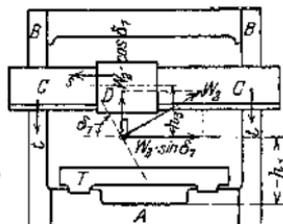


Fig. 249.

Der Schnittantrieb hat den Spandruck W_1 aufzunehmen; die Schraubenspindel im Querbalken *C* wird durch $W'' = W_2 \cdot \sin \delta_1$

(s. oben) beansprucht, und die Schraubenspindeln in den Seitenständern (s. auch Fig. 290 und 291) müssen, allerdings entlastet dadurch, daß unter dem Arbeitsdruck *C* auf *BB* festgeklemmt ist, den senkrechten Druck $W' = W_2 \cdot \cos \delta_1 = W_1 \cdot \cos \delta_1$ aufnehmen.

Die Tischführungen haben auch $W' = W_1 \cdot \cos \delta_1$ aufzunehmen und können unter Umständen durch ein Kippmoment, durch $W_2 \cdot \sin \delta_1$ ausgelöst, aufgekippt und auch zum Entgleisen gebracht werden (s. auch Fig. 271, 272).

Der Support *D* wird durch ein Moment $W_2 \cdot \sin \delta_1 \cdot h_2$ (Fig. 249) gedreht und belastet oder entlastet dadurch einen Teil seiner Führungsflächen. Außerdem wird er (Fig. 248) mit $W_2 \cdot \cos \delta_1 \cdot h_4$ senkrecht zum Balkenquerschnitt gekippt.

Der Querbalken *C* belastet seine Führungen am linken und rechten Seitenständer je mit $W_2 \cdot \sin \delta_1$, wird durch die Kräfte W_1 und $W_2 \cdot \cos \delta_1$ gebogen und mit dem Moment $M = W_1 \cdot h_3 - W_2 \cdot \cos \delta_1 \cdot h_4$ senkrecht zum Querschnitt verdreht.

Die Seitenständer *B* werden (Fig. 248), mit

$$\frac{W_1 \cdot h_1}{2} + \frac{W_2 \cdot \cos \delta_1 \cdot h_3}{2}$$

im günstigen und mit

$$\frac{W_2 \cdot \sin \delta_1 \cdot h_1}{2}$$

im ungünstigen Querschnitt, auf Biegung beansprucht, und müssen Abmessungen haben, die nur unwesentliches Ausweichen unter diesem Druck gestatten.

b) Wagerecht- und Senkrechtstoßmaschinen.

Die Fig. 250 und 251 zeigen die Verteilung der Drucke an der Wagerechtstoßmaschine (Feil- oder Shapingmaschine), bei welcher der Stößelschlitten *S* mit dem Werkzeug die Schnittbewegung, der Tisch *T* auf dem Querschlitzen *A* die Schaltbewegung und *A* auf einer Führung an *K* das Heben des Werkstückes besorgt, während die Spanstellung durch Bewegung des Schlittens *B* gegenüber *C* erfolgt. Die Drücke auf die Bewegungsorgane verteilen sich so, wie bei der Tischhobelmaschine besprochen wurde. Der Stößelschlitten *S* wird, je nach der Entfernung h_1 des Werkzeuges vom Kastenständer, mit einem Moment $W' \cdot h_1$

1) Fischer, Werkzeugmaschinen, I. S. 273.

2) Schlesinger, Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1910. S. 232.

— $W \cdot h_2$ (Fig. 250) in seiner Längsführung gekippt. Da, je länger h_1 wird, um so mehr das Gewicht des Schlittens dem Aufkippen entgegenwirkt, so wird das Kippmoment selten bedenklich groß werden. Unangenehm ist das verdrehende Moment $W_2 \cdot q$, in seiner Ebene parallel zum Querschnitt des Schlittens (Fig. 251), weil es bei unrichtig gewähltem Querschnitt (s. unten) ein Schiefstellen des Schlittens bewirken kann.

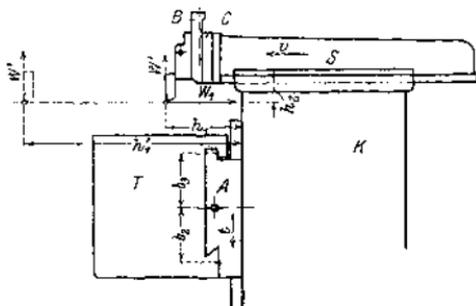


Fig. 250.

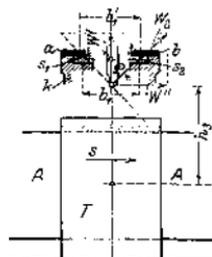


Fig. 251.

Der Tisch T hat das Moment $W' \cdot h_1$ (Fig. 250) und $W'' \cdot h_3$ auf seine Führungen am Querbalken A zu übertragen.

Der Querbalken A wird mit den gleichen Momenten belastet.

An den Senkrechtstoßmaschinen (s. Fig. 285 bis 218 und 299) liegen die Verhältnisse analog und sollen deshalb nicht besonders behandelt werden.

2. Wirkung der Massenkräfte.

Ganz besondere Beachtung verlangen die Massendrucke, die infolge des in den bewegten Massen aufgespeicherten Arbeitsvermögens

$$E_k = \frac{m v^2}{2}$$

für die geradlinig bewegten, und

$$E_k = \frac{J \cdot \omega^2}{2}$$

für die umlaufenden Massen beim Umsteuern auftreten.

Wie erheblich diese Massenkräfte die Arbeitsleistung des Antriebsmotors beeinflussen, zeigt Fig. 252, ein Diagramm, das an einer großen Tischhobelmaschine der Firma Hartmann in Chemnitz durch Herm. Fischer¹⁾ genommen wurde. Das Diagramm ist in der Pfeilrichtung zu lesen, und es bezeichnet a die Zeit zum Um-

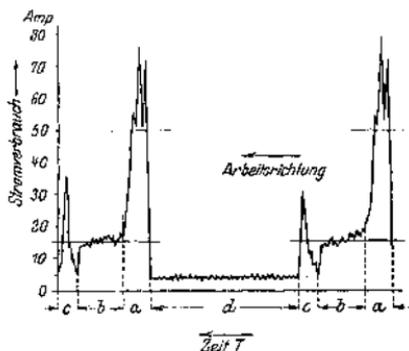


Fig. 252.

steuern von der geringen Arbeitsgeschwindigkeit v_a auf die hier dreifach beschleunigte, schnelle Rücklaufgeschwindigkeit v_r ; b bedeutet die Zeit für den schnellen Rücklauf, c das Umsteuern auf die Arbeitsgeschwindigkeit und d die eigentliche, allein nutzbringend verwendete Arbeitszeit. Die fein ausgezogenen Wagerechten sollen die mittleren den Abschnitten a bis d entsprechenden

¹⁾ Fischer, Kehrgetriebe, Z. d. Ver. deutsch. Ing. 1904. S. 308.

Antriebsleistungen bezeichnen, die sich annähernd für \bar{a} auf 4,5 Amp., für a aber auf 50 Amp. belaufen; die Zacken an den Teilen a rühren von Schwingungen des Meßinstruments her.

Schon Uhlich¹⁾ hat auf diese ungleichmäßigen Anforderungen an den Hobelmaschinenantrieb hingewiesen, sucht aber die Ursache fälschlich in dem im Tische der Maschine aufgespeicherten Arbeitsvermögen, während Streiff²⁾ darauf hinweist, daß es nicht die allerdings große, aber langsam bewegte Masse des Tisches, sondern die wesentlich kleineren, dafür aber sehr schnell umlaufenden Massen der ersten Getriebeteile sind, welche die gekennzeichnete Wirkung hervorbringen.

Schlesinger³⁾ hat eine schwere Tishobelmaschine der Niles-Werkzeugmaschinenfabrik zu Oberschöneweide untersucht und durchgerechnet; in der nachstehenden Tabelle sind die Werte übersichtlich zusammengestellt.

Die Hobelmaschine hat:

- | | |
|--|----------------------|
| 1. einen Durchgang von | 2500 mm, |
| 2. eine Nutzhobellänge | $l = 5000$ mm |
| 3. eine Arbeitsgeschwindigkeit | $v_a = 9,504$ m/min, |
| 4. eine Rücklaufgeschwindigkeit | $v_r = 17,37$ m/min, |
| 5. einen Antriebsriemen von der Breite | $b = 130$ mm |
| 6. ein Tischgewicht mit Zahnstange | $G = 13060$ kg. |

Zwischen Riemenscheibenwelle und Stirnrädergetriebe ist ein Schneckenantrieb von der Übersetzung $I = \frac{1}{15}$ geschaltet, so daß der Antriebsriemen die außerordentliche Geschwindigkeit von 900 m/min = 15 m/sek erhält, während der Rücklaufriemen sogar mit 1182 m/min = 19,7 m/sek läuft.

Man kann aus der Zusammenstellung erkennen, daß der schwere Tisch von 13060 kg nur ein Arbeitsvermögen von 16,7 mkg verkörpert, während der verhältnismäßig leichten Riemscheibe C, auf der beim Arbeitsgang — auf diesen beziehen sich alle Zahlen — der Rücklaufriemen liegt und die nur 950 kg wiegt, ein Arbeitsvermögen von 1032 mkg innewohnt.

Vergleicht man die Wirkung der gleitenden und der umlaufenden Massen in

Arbeitsvermögen	Tisch	$\frac{16,7 \cdot 950}{13060 \cdot 1032} = \frac{1}{850}$
kg Gewicht,	so erhält man:	Riemscheibe C

Für eine Zahnstangenstoßmaschine (Shapingmaschine) der Firma Ludw. Loewe u. Co. (Fig. 253—257) wurde in der Übungwerkstatt der Beuthschule zu Berlin eine entsprechende Berechnung vorgenommen, deren Ergebnisse nachstehend wiedergegeben sind.

1) Zeitschrift für Werkz.-Masch. u. Werkz.
 2) ebenda.
 3) Schlesinger, Z. d. V. d. I. 1910, S. 229.



Fig. 256.

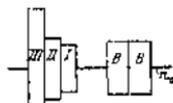


Fig. 255.

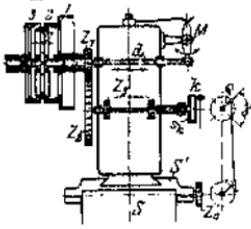


Fig. 254.

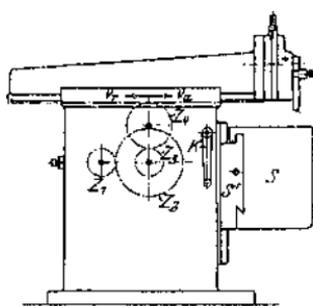


Fig. 253.



Fig. 257.

Tafel 1.

Gegenstand	Zeichen	Äußerer Durchmesser bzw. Teilkreis-Dmr. mm	Breite mm	Modul	Zähnezahl	Gewicht kg	Zeichenwiederholung	Uml./min sekundl. Winkelgeschw. ω	Bewegungsenergie $\frac{J \omega^2}{2}$ f. d. Arbeitsgang mkg
lose Riemenscheibe	A	1300	140	—	—	124	A	$n_1 = 219,5$	694
lose Riemenscheibe	C	950	165	—	—	106	C	$\omega_1 = 23$	1032
schnied. Dopptriemenscheibe	B	1300/950	140/140	—	—	85	B		470
Schnecke	D	110	—	—	4 gängig	48	D		2
Welle	I	70	—	—	—	39	I		0,6
Schneckenrad	E	800	140	13,3	60	285	E	$n_3 = 14,6$	4,2
Zahnrad	F	414	220	18	23	206	F	$\omega_3 = 1,53$	4,8
Welle	II	140	—	—	—	430	II		0,2
Zahnrad	G	720	220	18	40	342	G	$n_5 = 8,43$	
Zahnrad	H	360	305	20	18	200	H	$\omega_5 = 0,88$	
Welle	III	160	—	—	—	226	III		
Zahnrad	J	840	305	20	42	587	J	$n_4 = 3,64$	0,6
Welle	IV	160	—	—	—	260	IV	$\omega_4 = 0,378$	
Zahnstange mit Tisch	K	—	305	20	∞	13 060	K	$v_6 = 0,158$	16,7
									500,6
									(ohne A und C)

Tafel 2.

Gegenstand	Gewicht kg	Drehzahl/Minute		n_r	Trägheitsmoment $J = \text{mkg} \cdot \text{sec}^2$	Arbeitsvermögen		E_r
		n_{a1}	n_{a2}			E_{a1}	E_{a2}	
Reihscheibe C	5,500	125,4	186,6	365,0	$114 \cdot 10^{-4}$	0,98	2,18	8,32
Hohlwelle mit Rad 1.	2,900					0,00458	0,0102	0,0389
Schaltwelle d.	0,900				$0,533 \cdot 10^{-4}$	0,00017	0,00038	0,00144
Rad 2.	3,200	27,6	41,0	80,3	$0,0198 \cdot 10^{-4}$	0,01065	0,0237	0,0902
Räder 3,3 mit Welle	3,600					0,000441	0,000974	0,00374
Welle 4	1,400	9,52	14,8	27,8	$25,58 \cdot 10^{-4}$	0,000569	0,0000137	0,0000485
Räder 4,4	4,100					0,000662	0,0016	0,00565
Stößelschlitzen	50,3	$v_{a1} = 4,42 \text{ m/min}$	$v_{a2} = 6,56 \text{ m/min}$	$v_r = 12,84 \text{ m/min}$	$1,1147 \cdot 10^{-4}$	0,0136	0,036	0,117
					$13,332 \cdot 10^{-4}$			
					$m = 5,13 \frac{\text{kg} \cdot \text{sek}^2}{\text{m}}$			

Die Stoßmaschine hat

- | | |
|--|------------------------|
| 1. eine größte Werkstückhöhe von | 360 mm, |
| 2. eine größte Hobellänge | $h = 450$ mm, |
| 3. je eine Arbeitsgeschwindigkeit | $v_{a_1} = 4,4$ m/min, |
| | $v_a = 6,6$ m/min |
| 4. eine Rücklaufgeschwindigkeit | $v_r = 13$ m/min, |
| 5. einen Antriebsriemen von der Breite | $b = 45$ mm, |
| 6. ein Stößelschlittengewicht von | $G = 50,3$ kg. |

Der Antrieb erfolgt durch 2 Zahnräder Z_4 (siehe Fig. 253) auf die Zahnstangen des Stößelschlittens und wird durch eine doppeltkonische Reibscheibe C (Fig. 254) von zwei entgegengesetzt und verschieden schnell umlaufenden Riemenscheiben 1 oder 2, und 3 abgeleitet.

Ein Vergleich der beim Umsteuern von der Arbeits- auf die Rücklaufgeschwindigkeit aufzuwendenden Arbeitsvermögen zeigt

Bei Umsteuerung von	Aufzuwendendes Arbeitsvermögen	
	am Reibrad C	am Stößelschlitten
v_{a_1} auf v_r	$0,98 + 8,32 = 9,3$ mkg	$0,0136 + 0,117 = 0,1308$ mkg
v_{a_2} auf v_r	$2,08 + 8,32 = 10,5$ mkg	$0,036 + 0,117 s_1 = 0,153$ mkg

d. h. ein Verhältnis von $\infty 70$, wenn man das Arbeitsvermögen vergleicht.

Wenn das Verhältnis in $\frac{\text{Arbeitsvermögen}}{\text{kg Gewicht}}$ ausgedrückt wird, so ergeben sich:

$$\frac{\text{Stößelschlitten}}{\text{Reibscheibe } C} = \frac{0,0136 \cdot 5,5}{50,3 \cdot 0,98} = \frac{1}{660}$$

für die kleine Arbeitsgeschwindigkeit und entsprechende Werte für die andere Arbeits- und die Rücklaufgeschwindigkeit.

Es zeigt sich also, daß man die geringsten Stöße bei der Umsteuerung der bewegten Massen erwarten darf, wenn man die Umsteuerungskupplung möglichst nahe an den letzten gleitenden Teil verlegt.

Am besten wirken in dieser Beziehung die Kurbelgetriebe (S. 1260) und unter diesen, wie schon früher erwähnt, besonders die schwingende Kurbelschleife, weil ihre umlaufenden Teile die Drehrichtung nicht ändern, und — vollständig zwangläufig — nur die letzten, langsam bewegten Massen gesteuert werden.

Leider lassen sich diese Antriebsarten bei langen Hobelwegen, wie sie bei Tischhobelmaschinen vorliegen, nicht gut verwenden, und sie sind deshalb auf die Wagerecht- und die Senkrechtstoßmaschine beschränkt, bei denen sie auch ausgedehnte Anwendung finden (s. Fig. 292 bis 294 und 297 bis 299).

Im übrigen muß man sich, wenn nicht eine besondere Massenausgleichvorrichtung vorliegt wie die von Hartmann in Chemnitz¹⁾, darauf beschränken, durch lange Überwege (s. S. 1276) den Stoß zu mildern oder umsteuerbare Hobelmaschinenmotoren (s. Kapitel IV) benutzen.

3. Teile der Hobel- und Stoßmaschinen.

a) Die Tischgestelle und Ständer.

α) Die Gestelle. Bei den Tischhobelmaschinen sind die Gestelle als Kästen von annähernd quadratischem Querschnitt ausgebildet, (oft ohne Füße auf dem Fundament aufliegend und nur bei leichten Maschinen auf Füßen montiert), immer so gut zu versteifen, daß Verbiegungen nicht wohl auftreten können.

Die Gestelle der Wagerechtstoßmaschine haben geringe Kräfte aufzunehmen, und sind nur, weil sie hochkantig aufgerichteten Kästen gleichen, gegen Erzitterungen gesichert durchzubilden, da solche der Genauig-

¹⁾ Fischer, Z. Ver. Deutsch. Ing. 1914, S. 309.

keit der Arbeit Abbruch tun können. Die Kastenform der Gestelle in Fig. 253, 254 und Fig. 292, 293, 373 erfüllt alle zu stellenden Forderungen.

Für die Gestelle der Senkrechtstoßmaschinen hat sich die Hakenform eingeführt und gut bewährt, wie sie in Fig. 297, 298 einteilig, in Fig. 295 zweiteilig ausgebildet dargestellt ist. Wegen der häufig großen Ausladung der Hakenkröpfung ist der gefährliche Querschnitt sorgfältig durchzubilden.

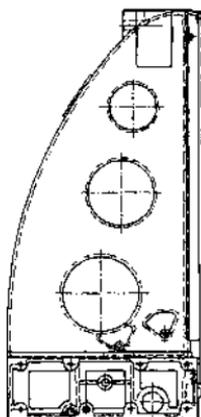


Fig. 258.

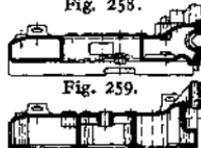


Fig. 259.

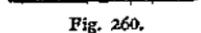


Fig. 260.

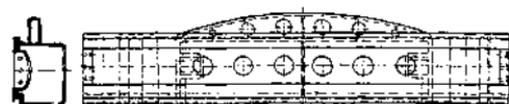


Fig. 262.

Fig. 261.



Fig. 263.

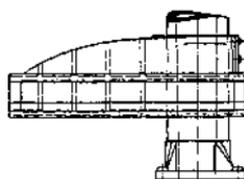


Fig. 264.

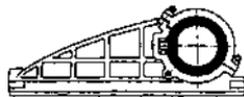


Fig. 265.

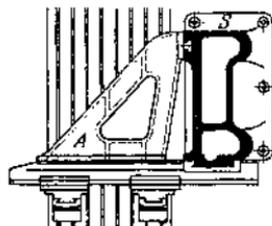


Fig. 266.

β) **Ständer und Querbalken.** Die Ständer zur Aufnahme der Querbalken, die ihrerseits den Support aufnehmen, spielen nur bei den Tischohbelmaschinen eine große Rolle, wie schon zu Fig. 248/249 ausgeführt wurde. Fig. 258 zeigt einen Ständer von der oben besprochenen Tischohbelmaschine der Niles-Werke, von dem zwei Querschnitte in Fig. 259 und 260 wiedergegeben sind. Fig. 261 bis 263 zeigen den zugehörigen Querbalken, der gegen die oben besprochenen Biegebbeanspruchungen in beiden Richtungen gut versteift ist.

Ständer von Einständerohbelmaschinen zeigen die Fig. 264 bis 266. Fig. 264/265 stellt den bekannten kreisförmigen Ständerquerschnitt dar, den die Firma Billeter & Klunz in Aschersleben ausführt, er läßt die starke Versteifung des Auslegers (er trägt auch die Supportführung) erkennen, die ihn befähigt, die erwähnten biegenden Momente aufzunehmen. Eine Verdrehung des Auslegers auf der runden Säule wird durch eine kräftige Nase verhindert, und Schrauben gestatten, den Ausleger nach Erreichung der richtigen Höhenlage festzuklammern.

Wesentlich andere Wege bei der Ausbildung des Einseithobelmaschinenständers geht die Firma Hessenmüller in Ludwigshafen a. Rh. Fig. 266 gibt den eigenartigen Ständerquerschnitt wieder, der eine breite Schlittenführung zum Verstellen des Auslegers und eine Hilfsklemmung für den dreieckigen Versteifungsrahmen aufweist. Die Abbildung zeigt zwei Supporte, die auf dem Querschlitten verschiebbar sind. Nach Angabe des Herstellers beträgt die Abbiegung des Auslegers bei stärkster Beanspruchung an der äußersten Tischkante nicht mehr als 0,03 mm.

b) Schlittenführungen.

α) Geschlossene Führungen. Den Querschnitt der Schlittenführung für die Schaltbewegung an Tischhobel- und Wagerechtstoßmaschinen zeigt Fig. 267. Kennzeichnend ist die verschiedene Ausbildung der oberen und der unteren Führungsleiste, die auch aus den Fig. 248, 250, 253, 279 und 262 zu erkennen ist; die eigentümliche Beanspruchungsart (siehe Fig. 248 und 250) zwingt zu dieser Form, die schwer herzustellen ist und an der die Schabarbeit besonders sorgfältig ausgeführt werden muß. Dies mag der Grund sein, warum in Fig. 279 von dieser Form abgewichen worden ist.

Der Querschnitt nach Fig. 268 für die Stoßführung an Wagerechtstoßmaschinen wird immer noch ausgeführt; er ist entschieden zu verwerfen, denn bei Auftreten des drehenden Momentes $W_2 \cdot \rho$ in Fig. 251 muß ein Schiefziehen der Führung stattfinden, weil der Schlitten (siehe auch Fig. 149, 150) an der einen schrägen Fläche entlanggleitet, während er sich auf der anderen Seite gegen die Fläche seitlich verschiebt. Bei einer Ausführung nach Fig. 269, wie sie auch die Maschine von Heinemann in Fig. 293 erkennen läßt, entfällt dieser Nachteil; jedenfalls müssen die Stelleisen (a und b in Fig. 251), die das Aufkippen verhindern sollen, genügend kräftig und auch ihre Befestigungsschrauben stark genug sein, weil diese auch noch den Druck W' (Fig. 250) aufnehmen müssen.

β) Offene Führungen. Bei diesen Führungen, von denen Fig. 270 und 271 die sogenannte deutsche Führung mit ebenen Gleitbahnen darstellen, während Fig. 272 und 283 den amerikanischen Querschnitt, die „Schweinsrückenführung“ zeigen, tritt eine Gefahr auf, die bei geschlossenen Führungen — die übrigens bei Tischführungen auch Verwendung finden — nicht zu befürchten ist. Die mit offenen Führungen versehenen Hobelmaschinentische können nämlich „aufkippen“ und „entgleisen“.

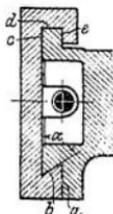


Fig. 267.

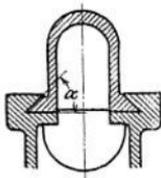


Fig. 268.

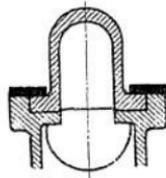


Fig. 269.

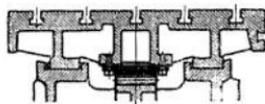


Fig. 270.

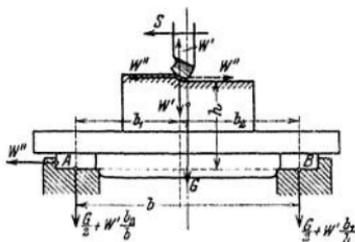


Fig. 271.

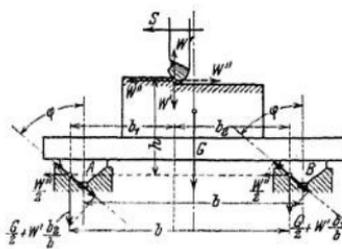


Fig. 272.

Bei der deutschen Führung wird ein Aufkippen¹⁾ in der nach Fig. 271 dargestellten Lage eintreten, wenn

$$W'' \cdot h > G \cdot \frac{b}{2} + W' \cdot b_1$$

¹⁾ Fischer, Werkzeug-Maschinen I. S. 70.

wird; eine Gefahr, die allerdings erst bei hohen Werkstücken bedrohlich werden kann, immerhin aber berücksichtigt werden muß. Die linke Anlagefläche der Führung *A* — bei Schaltung nach entgegengesetzter Richtung die rechte der Führung *B* — hat den Schaltdruck aufzunehmen, dessen Wirkung durch den Reibungswiderstand $(G + W) \cdot \mu$ nur wenig gemildert wird. Der Reibungskoeffizient ist nach Versuchen von Schlesinger¹⁾ für \surd förmige Tischführungen nur $\mu = 0,025$ zu setzen. Bei den amerikanischen Tischführungen tritt noch die Gefahr des Entgleisens hinzu, wie an Hand der Fig. 272 zu erkennen ist.

An den linken Seiten jeder Führung wirkt wagerecht der Druck $\frac{W''}{2}$ und senkrecht

$$\text{bei } A: \frac{G}{2} + \frac{W'b_2}{b}, \quad \text{bei } B: \frac{G}{2} + \frac{W'b_1}{b}.$$

Weil bei dem sich schnell bewegendem Tisch die Reibungswiderstände nicht ins Gewicht fallen, da fast ein Schwimmen des Tisches auf der Ölhaut stattfindet, so kommen nur die in die Gleitflächen fallenden Komponenten dieser Drücke in Frage. Das Entgleisen wird also nur verhütet, wenn

$$2 \cdot \frac{W''}{2} \sin \varphi < \left[\left(\frac{G}{2} + \frac{W'b_2}{b} \right) \cos \varphi + \left(\frac{G}{2} + \frac{W'b_1}{b} \right) \cos \varphi \right],$$

oder wenn

$$W'' \operatorname{tg} \varphi > G + W''.$$

Es muß also der halbe Winkel der Gleitführung so bemessen werden, daß

$$\operatorname{tg} \varphi < \frac{G + W''}{W''}.$$

Setzt man $W' = W''$, was für $\delta_1 = 45^\circ$ (Fig. 10—13) zutrifft, so würde demnach ein Winkel

$$\varphi = 45^\circ, \quad 2\varphi = 90^\circ$$

zuverlässig sein, weil dann sicher

$$\operatorname{tg} \varphi < \frac{G}{W''} + 1$$

ist; stumpfere Winkel φ aber dürften bei geringen Gewichten *G* von Tisch und Werkstück bedenklich sein.

Daß natürlich die Führungen breit genug sein müssen, um die Drucke $G + W'$ aufnehmen zu können, und daß ein Aufkippen bei der „amerikanischen“ Führung ebensogut auftreten kann wie bei der „deutschen“, ist selbstverständlich.

Auf Schmierung der Tischführungen muß besondere Sorgfalt verwendet werden; die Fig. 273 und 274 zeigen je eine Ausführung derselben für die flache und für die Schweinsrückführung.

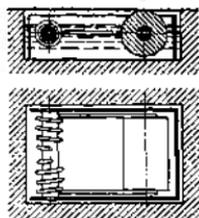


Fig. 273.

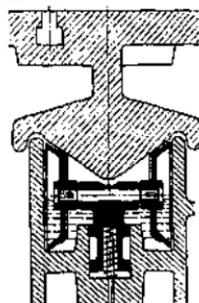


Fig. 274.

c) Der Schnittantrieb.

Dieser wird bei Tischhobelmaschinen entweder durch Stirnräder in der Art ausgeführt, wie ihn die Fig. 283 bis 286 erkennen lassen, oder nach der sogenannten „Sellers-Anordnung“, die zu den Fig. 93, 94 und 142 wiedergegeben und dort besprochen wurde.

¹⁾ Z. d. V. D. I. 1910. S. 228.

Bei Wagerechtstoßmaschinen wählt man entweder ebenfalls Stirnräderantrieb, wie in Fig. 253 bis 257, oder die schon mehrfach erwähnten Schwing-
schleifen, von denen Fig. 275, 276, 80, und die Maschine in Fig. 292 bis 294
gute Ausführungsbeispiele wiedergeben, oder die umlaufende Kurbelschleife
nach Fig. 277. Diese ist für kurze Hübe — es handelt sich hier um die Kegelrad-
hobelmaschine von Bilgram — deshalb angenehm, weil die Rücklaufbeschleunigung
unabhängig von der Hublänge ist (s. S. 1262), was bei den Schwing-
schleifen (S. 1261) nicht ohne weiteres der Fall ist.

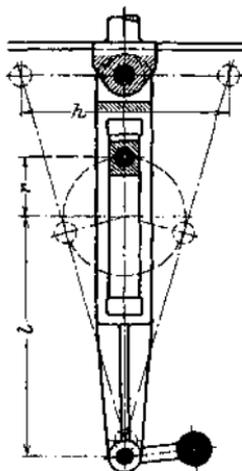


Fig. 275.

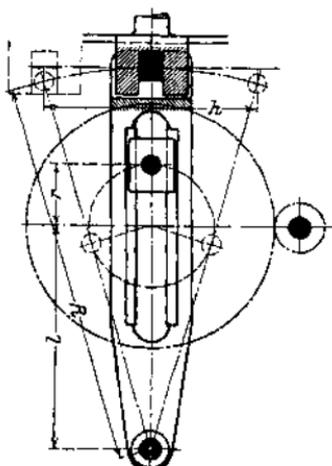


Fig. 276.

Die Fig. 275, 276 und 292 zeigen verschiedene Wege, die der Konstrukteur
gegangen ist, um die wegen Fortfalls der Schubstange eintretende Veränderung
der wirksamen Schwinghebellängen R
(Fig. 276) auszugleichen.

Der früher (S. 1261) erwähnte Ubel-
stand, nämlich die durch Verkleine-
rung des Hubes veränderte Rücklauf-
beschleunigung m , wird zu Unrecht
den Schwingeschleifen allein zur Last
gelegt; selbst die Zahnstangenmaschi-
ne (Fig. 253 bis 257) zeigt, wie wiederholte Versuche in der Werkstatt
der Beuthschule zu Berlin ergaben,
diesen Nachteil um so mehr, je kürzer der Hub wird. Der Stößelschlitten
wird nämlich schon umgesteuert, ehe er seine volle Rücklaufgeschwindigkeit
erlangt hat, und der Riemen rutscht infolgedessen fortwährend auf der Antrieb-
scheibe. Bei Senkrechtstoßmaschinen kommt in der Regel der Zahnstangen-
antrieb nicht in Frage; sie werden entweder durch schwingende Kurbel-
schleife, wie bei der Maschine von Schieß, die in Fig. 297 bis 300 dargestellt
ist und dort besprochen wird, oder durch Schraubenspindel, wie bei der
Maschine von Droop & Rein, (s. Fig. 295 und Beschreibung) angetrieben.

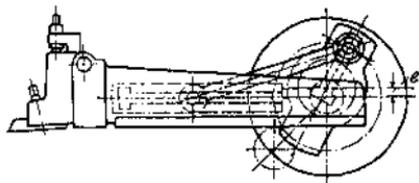


Fig. 277.

d) Hubeinstellung und Umkehr der Bewegungsrichtung.

Bei Tischhobelmaschinen und Senkrechtstoßmaschinen, wenn
sie nicht durch Kurbeltriebe bewegt werden, erfolgt die Hubeinstellung

und die Umkehr durch verstellbare Anschläge, wie auf S. 1275, 1276 und 1278, 1279 ausgeführt wurde. Eine interessante Abänderung zeigt die Maschine von Droop & Rein, Fig. 295. Werden Wagerechtstoßmaschinen mit Zahnstangenantrieb ausgerüstet, so erfolgt die Hubeinstellung meist durch einstellbare Anschläge — d_1, d_2 in Fig. 257 —, die einen Hebel M mit auf gleicher

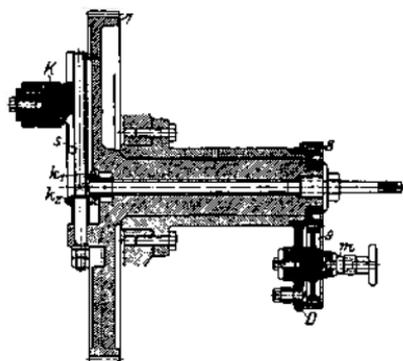


Fig. 278.

ist erkennbar, wie man diese Verstellung über ein Kegelhädergetriebe und eine Schraubenspindel von außen her vornehmen kann.

e) Der Schaltantrieb.

Die Schaltung einer Tischhobelmaschine ist schon in Fig. 128 gezeigt und wird zu den Fig. 284 bis 291 noch besprochen werden, ebenso wird dort die Stichelklappe noch erklärt; die allgemeinen Anforderungen an eine Schalteinrichtung sind schon auf den S. 1259 bis 1263 erläutert worden.

An der Wagerechtstoßmaschine mit Zahnstangenantrieb (Fig. 254) erfolgt die Schaltung von einer Reibkupplung aus, die unter Zwischenfügung von Lederscheiben gegen den Bund s_k auf der Welle β gezogen wird. Die Dose k wird mitgenommen, bis sie gegen einen Anschlagstift schlägt, und sie bleibt dann stehen, bis die mitnehmende Welle umkehrt und sie um $\gamma = 90^\circ$ zurückdreht; den Ausschlag um den γ begrenzt hier

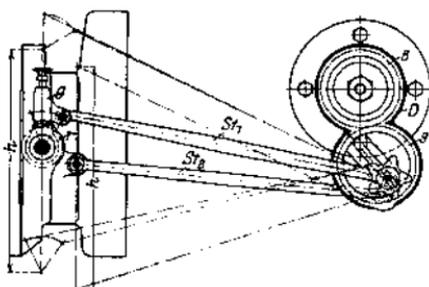


Fig. 279.

eine Einrichtung, die einen vollen Hub der Maschine zur Schaltung benutzt, zeigt Fig. 279. Auf keinen Fall darf die Schaltung während des Arbeitsganges geschehen, weil sonst die sehr empfindliche Sperrklinke unter dem Druck W''' (Fig. 10 bis 13) arbeiten würde. läßt man während des Arbeitsganges die Klinke ausholen und während des leeren Rückganges schalten, so tritt leicht ein Klemmen des Stichels gegen das stehengebliebene Material ein.

ein zweiter Stift. Die Dose k trägt auf ihrer Stirnseite einen verstellbaren Kurbelzapfen, der je nach der eingestellten Länge q die Sperrklinke des Rades Z_0 , und damit das Rad selbst und die Tischspindel schaltet. Eine andere Art der Schaltung, bei der ebenfalls eine Welle, diesmal die Hauptwelle selbst sich um einen Winkelbetrag γ dreht und dadurch die Schaltung bewirkt, ist bereits in den Fig. 131 und 132 wiedergegeben worden.

Wichtig ist auch die Stichelklappe, die ein Ausklappen des Stichels beim Rückgang gestatten soll und in den Fig. 253, 288 und 289 zu erkennen ist. Die Achse, um die der Stichel klappen soll, ist schräg zur Werkstückoberfläche zu verstellen, wie aus den Fig. 280 bis 282 zu erkennen ist. Hat der Stichel (Fig. 280) seine Hobelarbeit mit der Geschwindigkeit v_a vollendet, so kehrt die Maschine um, und das mit v_r zurücklaufende Material nimmt durch Reibung — bei schwereren Maschinen auch zwangsläufig, wie zu Fig. 287 bis 289 erklärt — den Stichel in der Pfeilrichtung mit. Wird das Werkzeug in senkrechter oder auch in schräger Richtung geschaltet, so würde es beim Rücklauf durch das stehengebliebene, hinter seinem Rücken aufquellende Material (Fig. 3) seitlich gedrückt werden, wenn es (Fig. 289) um eine wagerechte Achse schwingen würde. Legt man die Achse schräg (Fig. 282), so entfernt sich beim Ausklappen das Werkzeug vom Werkstück, und das Drängen ist vermieden.

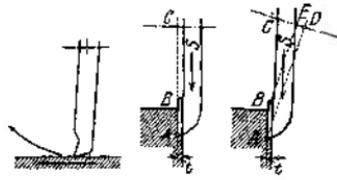


Fig. 280. Fig. 281. Fig. 282.

4. Ausgeführte Konstruktionen.

a) Tischhobelmachine von Gebr. Böhlinger, Göppingen.

Die Maschine ist mit amerikanischer Bettführung ausgerüstet, wird aber auch mit deutscher Führung (Fig. 270) geliefert. Fig. 283 und 284 zeigen die Maschine im Querschnitt und in der Ansicht von oben. Der Arbeitsantrieb, aus Fig. 284 zu erkennen, erfolgt von einer doppelbreiten Antriebscheibe her, der zwei Leerlaufscheiben für die mit verschiedenen Geschwindigkeiten laufenden Arbeitsriemen nebengeordnet sind. Für den Rücklaufriemen ist je eine einfache breite Fest- und Losscheibe (s. auch Fig. 283 und 286) vorgesehen. Der Antrieb wird über die Zahnräder $I, 2, 3, 4, 5$ und 6 auf die Zahnstange am Tisch übertragen und bewirkt zwei verschiedenen schnelle Arbeits- und eine beschleunigte Rücklaufbewegung.

Die Umsteuerung (Fig. 285) erfolgt, von den Tischknaggen k_1, k_2 aus, auf die umklappbaren Anschläge a_1, a_2 am Stiefelknecht s , der durch eine Schubstange b den Doppelhebel h_2 betätigt. h_2 verschiebt mit einer Schubstange den Schieber m (s. auch Fig. 283, 286), der durch seine Schlitze die Rollen r_1, r_2 oder r_3, r_4 so bewegt, daß die um die Drehpunkte t_1, t_2, t_3 schwingenden Riemenlenker n_1, n_2, n_3 auf die entsprechende Fest- oder Losscheibe verschoben werden. Natürlich darf nur eine der Rollen, r_1 oder r_2 , aufgesteckt sein; der Riemenleiter ohne Rolle wird dann durch einen entsprechenden Stellstift (t_1 oder t_2) am Gestell festgehalten. Die Schlitze sind, wie auf S. 1278 besprochen, so angeordnet, daß der neue Riemen erst auf die breite Festscheibe übergeleitet wird, wenn der andere auf seiner Losscheibe angelangt ist. Durch Hebel h_1 kann man den Stiefelknecht s so steuern, daß alle Riemenleiter über den Losscheiben stehen — wie in Fig. 285 und 286 angegeben; dann steht die Maschine still, und der Arbeiter kann das Werkstück untersuchen.

Die Schaltung erfolgt von der Welle V aus (Fig. 284), die über die Räder 7 und 8 von III her angetrieben wird. Auf V sitzt die Scheibe u — s. hierzu auch Fig. 125, 126 —, die sich also ständig umdreht und, wie auf S. 1271 beschrieben wurde, den Spreizhebel w (Fig. 125, 126, 284 und 285) zwingt, die Kupplung zwischen u und der Schaltscheibe s_1 zu lösen, wenn er gegen einen der beiden Anschlagstifte am Maschinengestell schlägt. s_1 beschreibt also den mehrfach erwähnten Schaltwinkel γ und schiebt mit einer Schubstange die Zahnstange Z um einen durch die verstellbare Kurbel S , zu bestimmenden Betrag auf und nieder. Die Zahnstange Z — in Fig. 287 von vorn gesehen, in Fig. 288 als strichpunktierte Gerade angedeutet — treibt über die Räder $I, 2, II$ oder $I, 2, III$ — das Zahnrad II sitzt auf der anderen Seite des Querbalkens und auf der oben liegenden Schraubenspindel fest — die eine oder die andere der Schaltspindeln an. Über $I, 2, 3$, eine Nutwelle I (Fig. 289), über die Kegelräderpaare $4, 5$ und $6, 7$ wird die Schraubenspindel s gedreht, und die Mutter m mit dem Schlitten d auf dessen Grundplatte auf und nieder bewegt. Da c auf b um die Achse der Kegelräder $5, 6$ herumgedreht werden kann, so ist der Antrieb der Schraubenspindel unabhängig von dem Winkel, unter dem die Schaltung des Schlittens d erfolgt.

Auf den Wellen II und III sitzt je eine Schaltdose (s. Fig. 122 bis 124), die gestattet, die Wellen II oder III beim Auf- oder Niedergang der Zahnstange Z zu drehen oder sie stillzustellen. Kegelrad 4 ist durch Drehen des Zapfens i (Fig. 287 und 289) in und aus dem Eingriff mit Kegelrad 5 zu bringen, und so ist die Winkelschaltung von d auf c ein- oder auszuschalten.

Auf Schlitten d ist drehbar, und durch Mutterschrauben und zentrischen Schlitz festzustellen, der Träger e für die Stichelklappe f angeordnet, und so die Achse der Stichelklappe (s. Fig. 280 bis 282) schräg zu stellen.

Von I aus kann die Welle h (Fig. 287, 288) zu Beginn des Rücklaufes und bei Niedergang der Zahnstange Z , d. h. bei Beginn des Arbeitsganges, um einen gewissen Winkel gedreht und so,

mit Hilfe der Kette *k*, die Welle *g* ruckweise bewegt werden. Die senkrechte Welle *g* trägt unten einen kurzen Hebel, der die Stichelklappe bei Beginn des Rücklaufes zwangsläufig anhebt und sie zu Beginn des Arbeitsganges wieder fallen läßt.

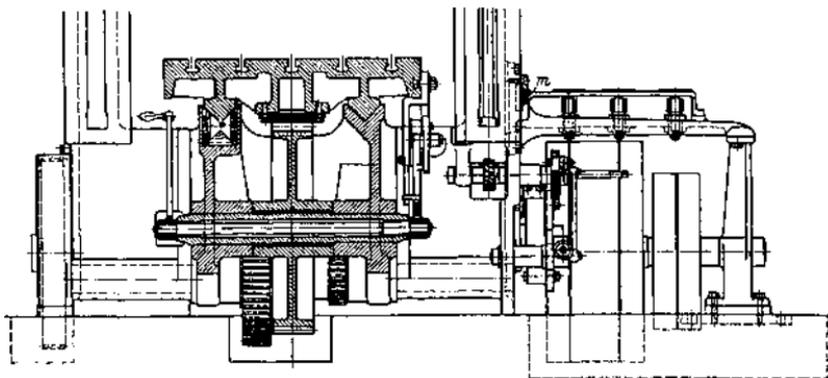


Fig. 283.

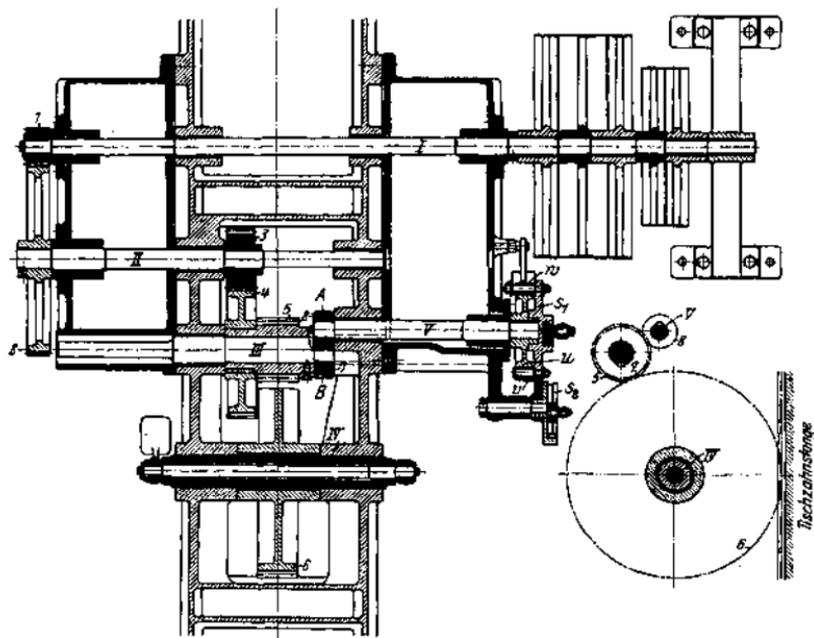


Fig. 284.

An den Maschinenständern sind Seitensupporte angeordnet, die ebenfalls von *s*₁ her geschaltet werden können; diese Schaltung wirkt über die zweite, einstellbare, mit Hilfe von Zahnradsegmenten angetriebene Kurbelscheibe *s*₂ und eine Schubstange auf eine Sperrklinke; von da wird über ein Stirnräder- und ein Schraubenträgerpaar die in Fig. 285 und 286 erkennbare, senkrechte Schraubenspindel zur ruckweisen Schaltung der Seitensupporte betätigt.

In Fig. 290 und 291 ist die Bewegungseinrichtung für den Querbalken zu erkennen, die vom Deckenvorgelege aus über die Riemenscheibe R und ein Vorgelege auf die Kegelradwelle K wirkt und von da die senkrechten Schrauben betätigt. Die Schraubenspindeln ruhen mit Bunden auf Kugellagern; ein Hebel h dient zum Ein- und Ausrücken der Bewegung.

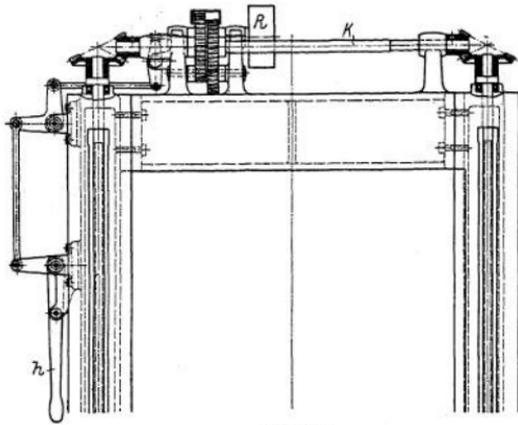


Fig. 290.

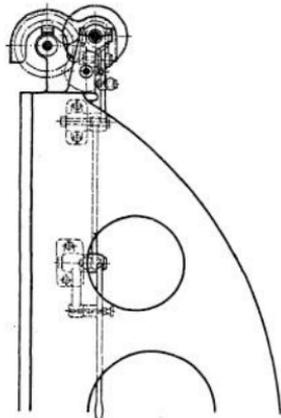


Fig. 291.

b) Die Wagerechtstoßmaschine von Gebr. Heinemann, St. Georgen.

Fig. 292 zeigt den Schwinghebel, der, oben gabelförmig ausgebildet (s. auch Fig. 293) mit einem Zapfen an einen Stellklotz angelenkt ist, welcher gestattet, den Stoßelschlitzen gegenüber dem Schwinghebelangriffspunkt zu verstellen; zur Einstellung dient eine Schraubenspindel, zur Festklemmung ein Knebel — in der Zeichnung fortgelassen.

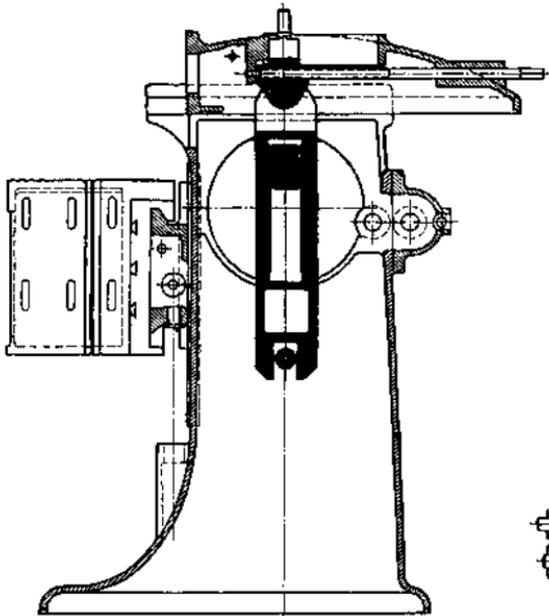


Fig. 292.

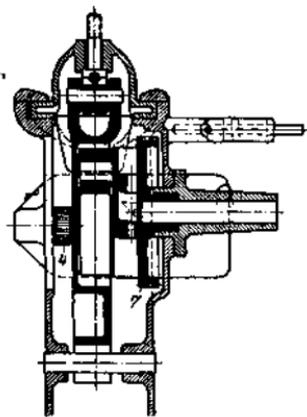


Fig. 293.

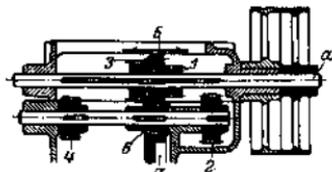


Fig. 294.

Fig. 292 bis 294. Wagerechtstoßmaschine von Gebr. Heinemann, St. Georgen.

Der Schwinghebel kann sich gegenüber seinem Drehpunkt verschieben, was infolge Fehlens einer Schubstange nötig wird, und er erhält seinen Antrieb über die Riemenscheibe (Fig. 294), die Räder 1, 2 oder 3, 4 oder 5, 6, über eine Zwischenwelle und von da über die Räder 6, 7 auf den Kurbelzapfen, dessen Hub von außen her einstellbar ist, wie Fig. 278 besser zeigt.

c) Senkrechtstoßmaschine von Droop & Rein, Bielefeld.

Diese Maschine (Fig. 295) erhält ihren Antrieb durch eine Schraubenspindel, die von der Riemenscheibe R_1 her, über die Kegelräder 1, 2 und die Stirnräder 3, 4, den Stößelschlitzen langsam herunter, und, nach Verschiebung des Riemens auf R_2 , schnell wieder zurückbewegt.

Die Riemenverschiebung kann von Hand mit dem Hebel h erfolgen, geschieht aber auch selbsttätig, wenn einer der Knaggen k oder k' auf Scheibe a gegen h stößt. Hebel h legt sich gegen 2 Anschläge — in der Zeichnung fortgelassen —, so daß dieser Hebel sich also nur um einen bestimmten Winkel drehen kann.

Hebel h fällt mit einer federnden Nase (Fig. 296) in ein Zahnkranzsegment δ' , das zwischen Scheibe a und einem Zahnrad δ schwer beweglich geklemmt ist. Rad δ wird über die Schraubnräder 5, 6 und ein Stirnrad 7 angetrieben und dreht sich so langsam, daß es selbst bei vollem Stößelhub nicht Zeit für eine volle Umdrehung gehabt hat. Durch Feststellen von h gegenüber δ' in verschiedenen Lagen kann man bewirken, daß die Knaggen k , k' zu verschiedenen Zeiten auf h auftreffen, den Riemen verschieben und die Umkehr einleiten, worauf sich Zahnrad δ wieder zurückdreht.

Von δ aus wird Scheibe b angetrieben, die mit dem einstellbaren Kurbelzapfen c , einer Schubstange, dem Kegeldrättrabe g , 10 und einem Sperrrade w die dreifache Schaltung des Supportes (s. oben) bewirkt.

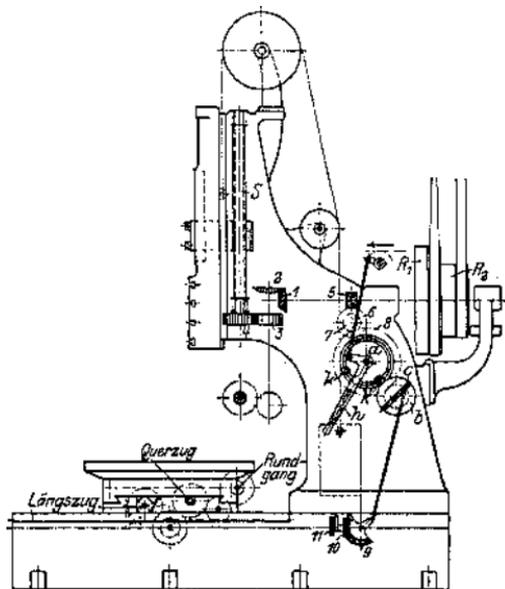


Fig. 295.

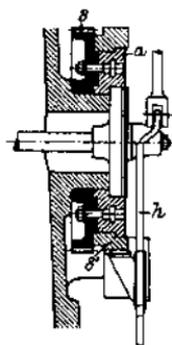


Fig. 296.

Fig. 295 und 296.
Senkrechtstoßmaschine von
Droop & Rein, Bielefeld.

d) Die Senkrechtstoßmaschine von Ernst Schieß, Düsseldorf.

Fig. 297 zeigt den Schnitt durch das hakenförmig ausgebildete Kastengestell, in dem die Antriebswelle mit Stufenscheibe gelagert ist; ein Schwungrad soll helfen, die Massendrücke auszugleichen, die hier nicht unbeträchtlich sind, weil der Stößelschlitzen und sein schweres Gegengewicht beschleunigt und verzögert werden müssen. Von der Antriebswelle aus wird über ein Stirnräderpaar und einen Kurbelzapfen der exzentrisch gelagerte Mitnehmer A (Fig. 297, 299) angetrieben; in diesem ist verstellbar ein zweiter Kurbelzapfen gelagert, der den Schwinghebel, und über eine Schubstange den Stößelschlitten, betätigt. Durch die abgeänderte Winkelgeschwindigkeit, die die exzentrische Lagerung des Kurbelzapfens dem Mitnehmer erteilt, entsteht ein Geschwindigkeitsdiagramm, das sich dem idealen in Fig. 72 noch mehr nähert, als das der einfachen schwingenden Kurbelschleife in Fig. 74.

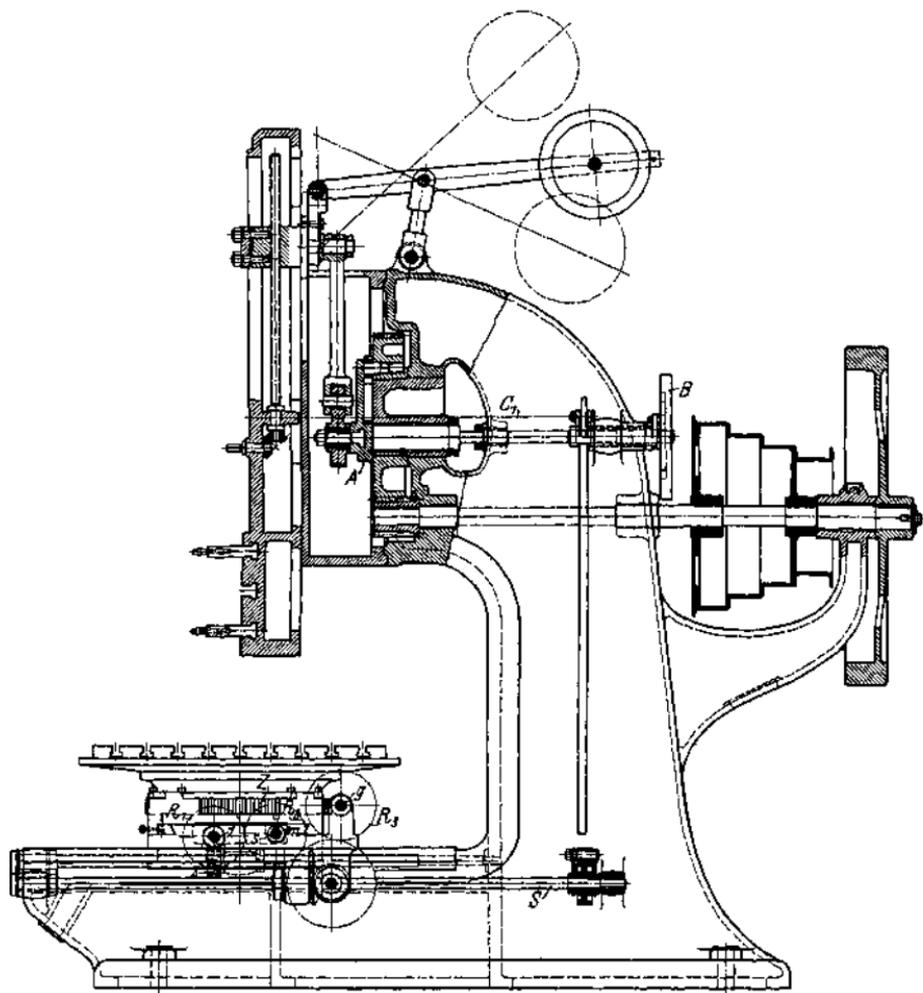


Fig. 297.

Die Welle von *A* ist nach hinten verlängert und trägt eine Scheibe mit Schaltnut (Fig. 298), wie in Fig. 131, 132 beschrieben wurde; die Sperrklinke schaltet eine Nutwelle *S* (Fig. 297) und von dieser aus über ein Kegelhäderpaar — bei jeder Stellung des Supportes — die Räder *R*₁, *R*₂ und *R*₃, deren jedes (Fig. 298, 300) durch eine Kupplungsklaue mit seiner Achse verbunden werden und so diese zur Umdrehung zwingen kann.

*R*₁ schaltet über ein Schraubenräderpaar *1, 2* und eine Schraubenspindel den Support parallel zur Richtung der Antriebswelle, *R*₂ wirkt unmittelbar auf eine Schraubenspindel *s* (Fig. 300) und schaltet quer zur Maschine, *R*₃ endlich bewegt eine Nutwelle, diese trägt eine Schnecke *g*, die durch einen Zahnkranz den Support rund schaltet.

Fig. 297 bis 300.

Senkrechtstoßmaschine von Ernst Schieß, Düsseldorf.

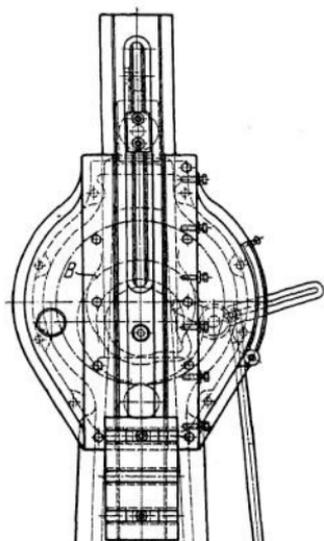


Fig. 298.

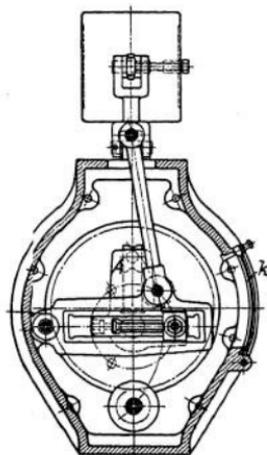
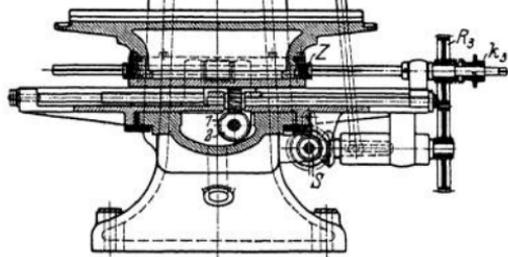


Fig. 299.

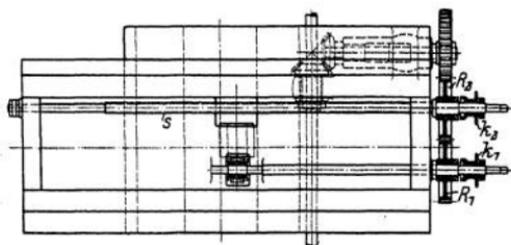


Fig. 300.

C. Bohrmaschinen.

1. Aufnahme der Arbeitsdrücke.

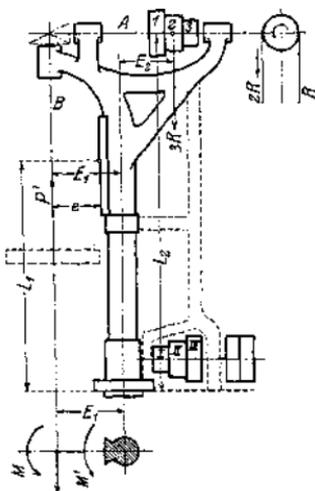


Fig. 301.

$$P = \frac{M \cdot 10}{d/2} \frac{\text{cm/kg}}{\text{cm}} = \frac{R_1 \cdot s \cdot d \cdot 2 \cdot 10}{d} \text{ kg}$$

(s. Fig. 17 bis 19) ist, werden Tisch und Lagerbock gegeneinander verdreht.

2. Teile der Bohrmaschine.

a) Die Maschinengestelle.

Eine für leichte Bohrarbeiten sehr geeignete Form stellt Fig. 302 dar, eine Schnellbohrmaschine von Hasse & Wrede in Berlin. Die Form ist die eines Hakens, die bei allen Vertikalbohrmaschinen auftritt, der Querschnitt rund.

Ebenfalls rund, aber wesentlich starrer ist die in Fig. 301 dargestellte Säulenform, die, was nicht unbedenklich erscheint, bis zu Bohrerdurchmessern von 30 mm Anwendung findet; selbst eine Versteifung der Säule — gestrichelt eingezeichnet — macht nur in geringem Maße widerstandsfähiger. Diese Form sollte nur bis zu Durchmessern der Bohrer von ≈ 25 mm und für geringe Schaltvorschübe benutzt werden; es sei denn, man baut die Maschine so schwer wie z. B. die Elsässische Maschinenbauanstalt Grafenstadt¹⁾. Man soll nicht vergessen, daß eine Bohrmaschine schon unsaubere Arbeit liefert, wenn der Ständer sich um geringe Beträge durchbiegt, da der Bohrer dann leicht verläuft. Belieb ist die Säulenform wegen der bequemen Bedienung des Fußvorgeleges. Für schwere Bohrarbeiten allein geeignet erscheint die Kastenform, Fig. 317, die, ebenfalls nach einem Haken sehr ähnlich der in Fig. 297 dargestellten Stoßmaschine ausgebildet, allen Anforderungen an Festigkeit bei Biegungs- und Verdrehungsbeanspruchungen gewachsen ist. Auch die Kastenform in Fig. 349 — Vertikalfräsmaschine von J. E. Reinecker, Chemnitz — wird für schwere Bohrarbeiten mit Vorteil angewendet.

Einen wesentlich anderen Aufbau zeigen die Radial- oder Kranbohrmaschinen (Fig. 320, 321), die entweder ebenfalls mit einem Kasten- oder mit einem

¹⁾ Fischer, Die Werkzeugmaschinen auf der Weltausstellung Paris 1900. Fig. 195—205.

Säulenständer, ähnlich dem der auf S. 1310 besprochenen Einseithobelmaschinen ausgerüstet sind. Fig. 303 zeigt eine solche Säulenform. Der Auslegerarm ist auf einer senkrechten Säule in der Höhe verschiebbar gelagert und läßt sich mit dieser Säule herumschwenken. Die Säule selbst ruht auf konischen Rollen und ist durch einen Klemmring mit dem Untersatz zu verbinden. Die Ausführung stammt von Hessenmüller, Ludwigshafen, und ist einwandfrei, wenn die senkrechte Gleitführung sauber nachstellbar eingerichtet ist. Der Arbeitsbereich ist bei dieser Ausführung größer als bei der nach Fig. 320, während die dort gewählte Kastenform, wenn sie nicht zu schlank ausgeführt wird, Verbiegungen wohl noch besser widerstehen kann, als die Säule nach Fig. 303.

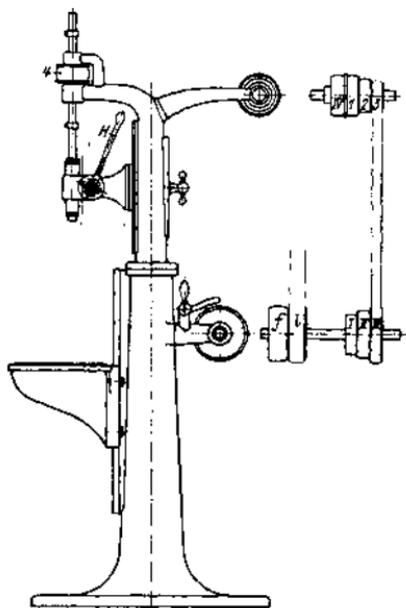


Fig. 302.

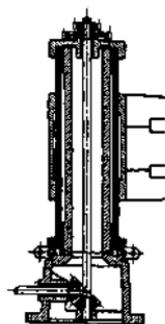


Fig. 303.

Die Wagerechtbohrmaschinen (s. Fig. 324) bieten ähnliche Verhältnisse wie die Drehbänke und sollen deshalb hier außer Betracht bleiben.

b) Die Spindellagerungen.

Mit alleiniger Ausnahme der Wagerechtbohrmaschinen, die auch in dieser Beziehung den Drehbänken nahezu gleich gebildet sind (siehe hierzu Fig. 324 und Beschreibung), weisen alle Bohrmaschinen heute zwei voneinander getrennte Teile der Spindellagerung auf. Zur Einleitung der Schnittbewegung ist die Bohrspindel, als ausziehbare Welle gestaltet, in einem Antriebsorgan gelagert, das entweder (Fig. 304 u. 317) eine einfache Riemenrolle, oder (Fig. 306, 307) ein Kegelrad (Fig. 306, 307), oder schließlich (Fig. 321) auch ein Stirnrad sein kann, dessen lange Hülse als Lager dient.

Die Verdrehung dieser meist ziemlich schlank gehaltenen Spindelverlängerung S (Fig. 307) soll nicht größer werden als

$$\psi = 0,05 \text{ mm/m Länge.}$$

Der Spurdruk wird jetzt immer durch Kugellager aufgenommen, wie aus Fig. 304, 305 zu erkennen ist, während die Führungshülse selbst — aus Guß-

eisen oder auch aus Maschinenstahl gefertigt — einfache, zylindrische, nicht nachstellbare Lager enthält. Nur bei ganz schweren Bohrmaschinen bildet man die Spindel nach Art der Drehspindeln mit nachstellbaren Lagern aus, oder wenn, wie bei der Wagerechtbohrmaschine Fig. 324 und auch Fig. 103, die eigentliche Bohrspindel als Bohrstange ausgeführt und in der umlaufenden Spindel verschiebbar angeordnet ist.

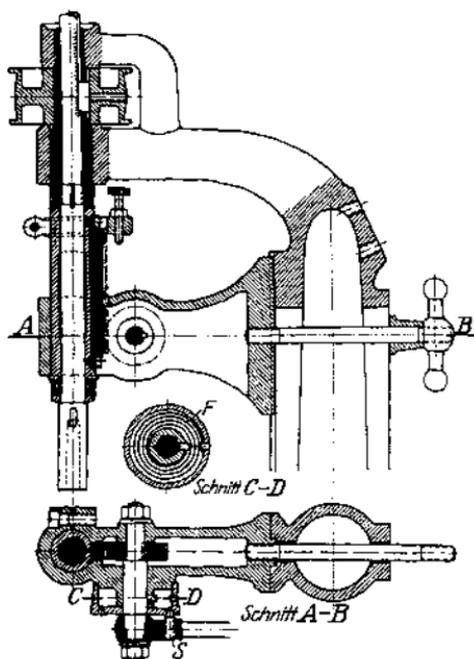


Fig. 304 und 305.

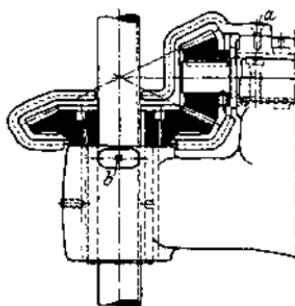


Fig. 306.

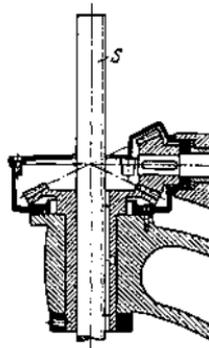


Fig. 307.

Die Laufstellen sollen glashart sein, was in Verbindung mit Gußeisen als Lagerbüchse die schon früher besprochenen guten Reibungsverhältnisse ergibt. Die untere der beiden zylindrischen Lagerstellen soll man etwas weiter ausführen, als die obere, um ein leichteres Einbringen der Spindel in die Hülse zu ermöglichen. Die Hülse selbst soll auch innen ganz und gar bearbeitet sein, damit nicht rohe Gußhaut vorhanden ist; der dieser immer noch anhaftende Formsand bildet eine Gefahr für die Lagerstellen. Damit kein Zwängen auftritt, soll man die Spindel zwischen den Lagerstellen dünner arbeiten; man hat dann auch nur an den eigentlichen Lagerstellen Schleifarbeit zu leisten.

c) Verbindung der Spindel mit dem Gestell.

Die ältere Art der Ausführung, bei der der Lagerbock die Spindel zwangsläufig führt, ihr also keine Längsverschiebung gestattet, während der Bock selbst, mit Zahnstange und Trieb verstellbar, die Schaltbewegung ausführt, ist heute fast verschwunden, und mit Recht, denn der am Hebelarm δ (Fig. 301) angreifende Schalldruck mußte, bei dem in der Schlittenführung notwendigen Spiel, zum Schiefstellen des Bohrers führen.

Man versieht deshalb jetzt den Lagerbock nur mit einer Richtführung (Fig. 304 und 159), die unter dem Arbeitsdruck nicht bewegt wird; der Hebelarm e ist dann praktisch gleich Null.

d) Schaltbewegung der Bohrspindel.

Die gewöhnliche Art des Schaltantriebes ist die durch Zahnstange und Trieb bewirkte. Sie gestattet, unter Ausschaltung aller oder einiger der dem Trieb vorgeordneten Getriebeteile, ein schnelles Anstellen von Hand — durch Trieb und Zahnstange unmittelbar —, ein langsames Verstellen von Hand — über Schnecke g_2 (Fig. 377) und Schneckenrad und, nach Kupplung sämtlicher Getriebeteile, selbsttätigen Vorschub in mehreren Abstufungen.

Zahnstange und Trieb haben den sehr hohen Schaltdruck (s. auch S. 1230) aufzunehmen und müssen deshalb genügend breit, sicher gelagert, und aus bestem Material hergestellt werden. Damit das Drehmoment nicht zu groß wird und die vorgeordneten Getriebe nicht zu stark belastet, muß man geringe Zähnezahlen für das Trieb wählen, was ein Abweichen von der Normalform der Verzahnung nötig macht, wie schon zu Fig. 92 entwickelt wurde. Auf der Achse des Triebes, und mit diesem durch eine Klauenkupplung zu verbinden, sitzt ein Schneckenrad s , dessen häufig im Ölbad laufende Schnecke g_2 entweder mit einem Handrade oder mit dem Kegelrade k_2 gekuppelt werden kann; die Kupplung ist in Fig. 109 wiedergegeben. Die Welle des Kegelrades k_2 wird entweder über Stufenscheiben und Schraubenräder oder, wie in Fig. 377 dargestellt, über ein Schneckengetriebe und einen Räderkasten angetrieben. Um die übrigen Getriebeteile zu entlasten, muß man Sorge tragen, daß das Schneckengetriebe g_3/S_2 (Fig. 377) selbsthemmend ist, d. h. man muß den Steigungswinkel der Schnecke g_2 kleiner als den Reibungswinkel halten.

Bei Befestigung der Zahnstange an der Führungshülse der Bohrspindel wird vielfach ein Fehler begangen, indem die Zahnstange in eine Nut (Fig. 308) eingelegt und in dieser mit Schrauben befestigt wird. Da die Schrauben Querkräfte nicht aufnehmen können, so wird eine Längsverschiebung der Zahnstange nur durch ihr Anliegen an den Enden der Nut verhindert werden können, und die Zahnstange auf Knickung beansprucht werden. Führt man die Nut nach Fig. 309/310 über die ganze Länge der Hülse durch — was auch billiger wird, da man mehrere Hülsen nebeneinander mit Scheibenfräsern nuten kann, während man bei Ausführung nach Fig. 308 einen Langlochfräser benutzen muß — und hängt die Zahnstange oben an Stellstiften auf, so wird sie auf Zug beansprucht. Die Schrauben haben in diesem Falle nur ein Abfallen der Zahnstange zu verhüten.

Das Gewicht der Bohrspindel wird bei kleineren Ausführungen (Fig. 304) durch eine Spiralfeder, bei größeren durch ein Gegengewicht ausgeglichen, zu dessen Aufnahme sich der hohle Ständer gut eignet. Gewichtsaufnahme nicht nur der Bohrspindel sondern auch des Führungsbockes ist in Fig. 317 dargestellt und wird dort beschrieben.

Über Hubbegrenzung wurde schon auf S. 1276 gesprochen, eine einfache Ausführung ist in Fig. 304 dargestellt.

e) Schnittantrieb.

Der Haupt- oder Schnittantrieb bietet gegenüber den Drehbänken keine neuen Gesichtspunkte; ein Rädervorgelege für diesen Zweck ist in Fig. 313, 314 wiedergegeben und im Zusammenhang beschrieben.

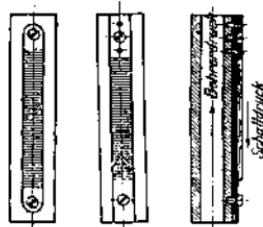


Fig. 308. Fig. 309. Fig. 310.

f) Der Bohrtisch

entspricht dem Reitstock der Drehbank und ist dementsprechend entweder auf einer Schlittenführung (Fig. 302) von Hand oder mit Zahnstange und Trieb an der runden Säule (Fig. 301) in der Höhe verstellbar, doch sind die Führungen, wenigstens bei einigermaßen großen Bohrleistungen, nur als Richtführungen auszubilden, also unter Arbeitsdruck festzuklemmen.

g) Die Grundplatte

wird vielfach mit Spannuten versehen, die ein Festspannen großer Werkstücke und ihre Bearbeitung bei seitwärts ausgeschwenktem Tisch gestatten.

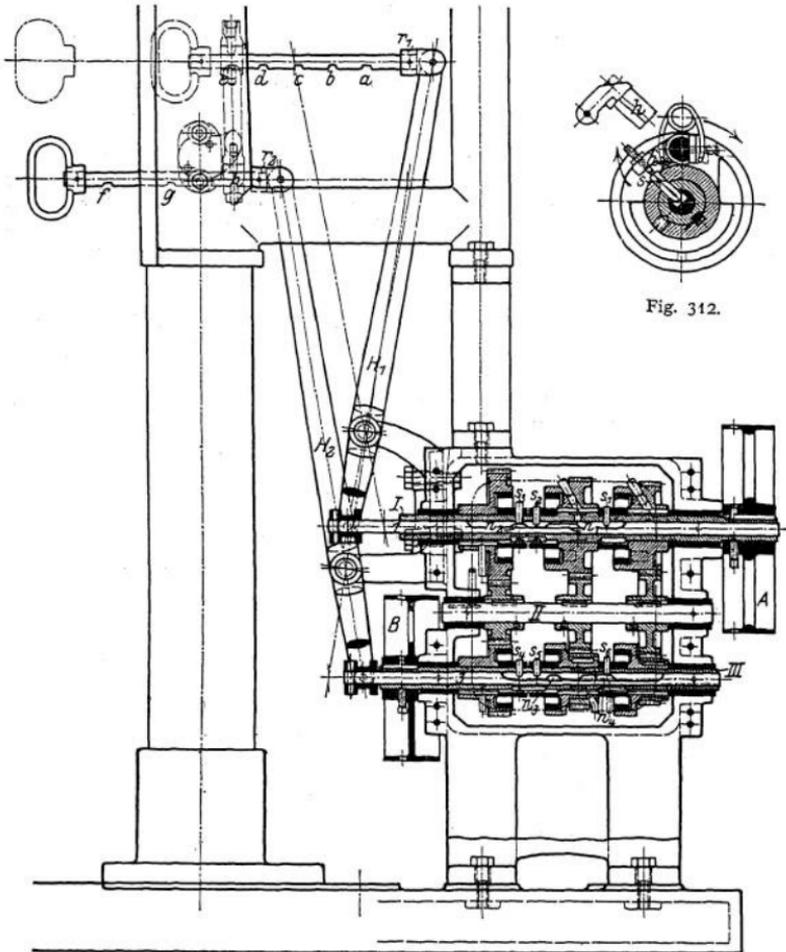


Fig. 311.

Fig. 311 bis 316.

Senkrechtbohrmaschine für Einscheibenantrieb von Ludw. Loewe & Co. Berlin.

3. Ausgeführte Konstruktionen.

a) Kleine Schnellbohrmaschine von Carl Hasse & Wrede, Berlin.

Fig. 302 zeigt den Aufbau der kleinen Maschine, bei welcher der Antrieb der Bohrspindel von einem am Säulenfuß angebrachten Vorgelege mit Fest- und Losscheibe über die Riemenscheiben *II/1*, *II/2* *III/3*, und Scheibe *IV* durch halbgeschränkten Riemen auf die Rolle *4* übertragen wird. Rolle *4* zwingt eine im Auslegerarm gelagerte Büchse und, durch sie hindurch, die genutete Bohrspindel zur Umdrehung. Die Bohrspindel ist (s. S. 1323) in einer Hülse gelagert, die durch Zahnstange und Trieb von Hand mit dem Hebel *H* (Fig. 302) auf und nieder bewegt wird.

Das Gewicht von Bohrspindel und Lagerhülse wird durch eine in einer Kapsel eingebaute Spiralfeder *F* (Fig. 304, 305) aufgenommen. Die Spannung von *F* ist verschieden, je nach der von den 6 Anbohrungen der Kapsel, in welcher gerade der Stift *S* des Handhebels fest sitzt. Auf der Achse des Triebes sitzt der Hebel nur mit Reibung fest, so daß er bei Überanstrengung das Trieb freigibt.

b) Senkrechtbohrmaschine für Einscheibenantrieb von Ludw. Loewe & Co., Berlin.

Scheibe *A* treibt Welle *I* mit den lose auf ihr drehbaren drei Zahnrädern an, die mit drei anderen ebenfalls lose und auf Welle *III* laufenden, über die Zwischenräder auf Welle *II* kämmen (Fig. 314). Die Zahnräder sind mit den Wellen *I* und *III* durch eine in Fig. 312 dargestellte Spreizkupplung zu kuppeln. Durch Hebel *H*₁, *H*₂ sind die Schaltwellen *I* und *3* zu steuern; sie heben durch Nasen je einen der Stifte *s*₁ bis *s*₆ an (siehe auch Fig. 312) und bewirken dadurch eine Drehung des Spreizhebels *h*, der den auf der Hülse *I* oder *II* fest sitzenden Mitnehmer gegen die Ausdrehungen an den Zahnrädern preßt.

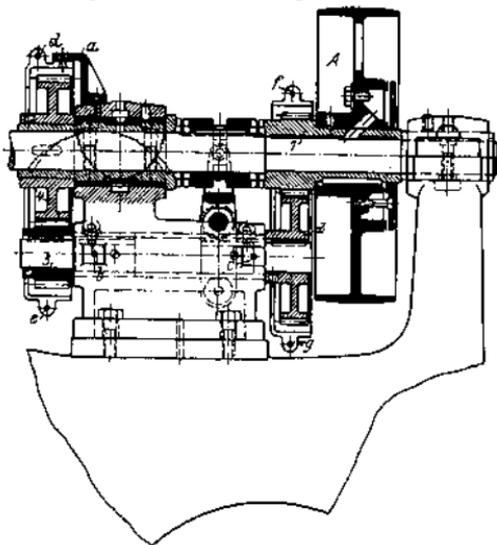


Fig. 313.

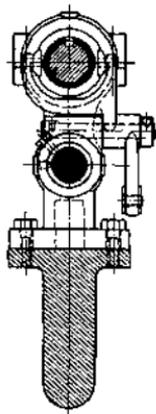


Fig. 314.

Je nach Lage des Hebels *H*₁ wird die Zwischenwelle *II* mit drei verschiedenen Drehzahlen angetrieben und von ihr aus Welle *III* ebenfalls mit drei verschiedenen Übersetzungen, was also neun annähernd in logarithmischer Reihe angeordnete Drehzahlen für die Scheibe *B* ergibt. Der dem Hebel *H*₂ angelenkte Riegel *r*₁ hat fünf Rasten, von denen *a*, *c* und *e* den Schaltstellungen der Welle *I* entsprechen, während beim Einklinken von *r*₁ in *b* und *d* keine Mitnahme der Welle *I* erfolgt; in diesen Ruhelagen wird die Kupplung der Welle *III* hergestellt.

Fig. 313/314 zeigen das zugehörige Rädervorgelege für den Hauptantrieb. Riemenscheibe *A* sitzt auf dem Trieb *I* fest, das die Vorgelegewelle mit den Rädern *2*, *3* antreibt; Rad *3* treibt *4*, das auf der Hauptspindel lose umläuft. Eine auf dieser Spindel verschiebbar aufgefederter zweiseitige Kupplungsklaue, deren gabelförmig ausgebildeter Steuerungsarm in Fig. 314 zu erkennen ist, gestattet abwechselnd die Welle mit Rad *4* und mit Rad *1* zu kuppeln, sie also mit Vorgelege langsam oder ohne Vorgelege schnell umzutreiben. Zum Schutz der Räder sind Hauben angeordnet, von denen das eine Paar, bei *d* und *e* durch Schrauben verbunden, an dem Böckchen *a* und an zwei Flächen *b* vor und hinter dem Gestell festgeschraubt wird; das andere Paar von Schutzhauben ist bei *f* und *g* miteinander und bei *e* mit dem Gestell verschraubt.

Der Bohrspindeltrieb und die Eindekung der Kegelräder wurde schon in Fig. 306, 307 gezeigt, ebenso die Befestigung des Lagerbockes für die Bohrspindel in Fig. 159. Fig. 315 zeigt den Antrieb der Schaltspindel, die ein Schneckenrad trägt, das von einer auf der Hauptspindel befestigten Schnecke angetrieben wird.

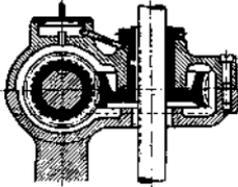


Fig. 315.

Fig. 316 zeigt die Kupplung des Zahnstangentriebes, die durch eine auf der Triebachse *IV* aufgedrehte, längerverschiebbliche Kupplungshülse *K'* geschieht. Soll die Bohrspindel schnell von Hand angestellt werden, so ergreift der Arbeiter einen der Hebel *C, D*, die mit *IV* gelenkig verbunden sind und bringt ihn in die gestrichelt gezeichnete Lage, wobei die Hülse *K'* aus dem Eingriff gezogen und damit das Schneckenrad entkuppelt wird.

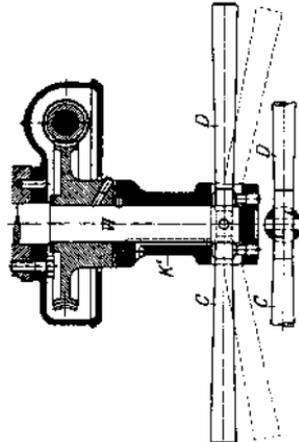


Fig. 316.

c) Schwere Senkrechtbohrmaschine von Droop & Rein, Bielefeld.

Fig. 317 zeigt die Gesamtansicht der Maschine, deren Bohrspindel von der Stufenscheibe *A* über *B* und *C* angetrieben wird; *C* ist mit je einem der beiden Räder *2* oder *I* des Vorgeleges 1, 2, 3, 4 zu kuppeln, die Bohrspindel kann also mit acht verschiedenen Drehzahlen umlaufen.

Der Schaltvorschub geschieht von einer mit *B* verbundenen Riemenrolle *B'* aus über einen endlosen Riemen und ein Schneckengetriebe g_1/S_1 . Die Welle der Schnecke S_1 (s. auch Fig. 318)

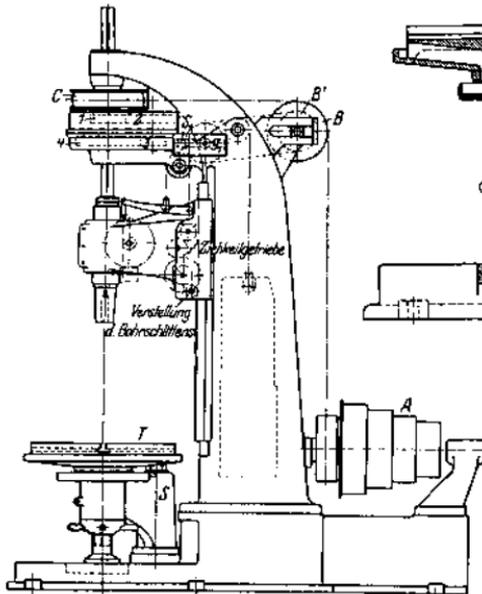


Fig. 317.

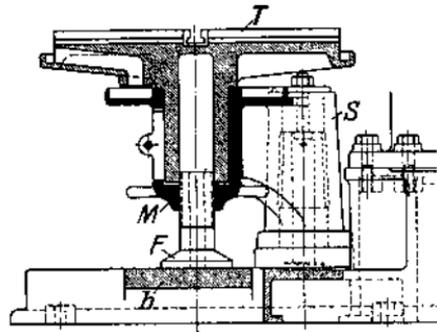


Fig. 319.

Fig. 317 bis 319.
Schwere Senkrechtbohrmaschine
von Droop & Rein, Bielefeld.

treibt ein Ziehkeilgetriebe für vier Übersetzungen an, dem ein Vorgelege für 2 Geschwindigkeiten — linke Seite des Maschinenständers — angefügt ist. Von der letzten Welle dieses Vorgeleges her wird über ein zweites Kegelradgetriebe und dann in üblicher Art über Schnecke, Schneckenrad, Trieb und Zahnstange der Vorschub der Bohrspindel bewirkt, der also achtfach abgestuft ist. Das erste Rad des Vorgeleges zeigt eine interessante Verbindung einer Zahnkranz- und einer Klauenkupplung.

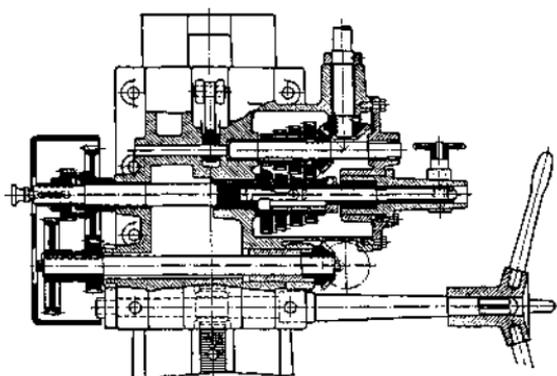


Fig. 318.

Der für schwere Arbeiten eingerichtete Tisch *T* (Fig. 319) ist in einem um eine Säule *S* schwenkbaren Arme gelagert und durch eine Schraube mit Fuß *F*, durch Mutter *M* gesichert, zu unterstützen. *F* ruht auf einer Brücke *b*, die herausnehmbar ist; nach ihrer Entfernung und nach Ausschwenken des Tisches können, zwischen den Schenkeln des hufeisenförmig ausgebildeten Fußes hindurch, in der Grube befindliche Werkstücke gebohrt werden.

d) Radialbohrmaschine von Ludw. Loewe & Co., Berlin.

Fig. 320 zeigt die Zusammenstellungszeichnung. Eine vierfache Stufenscheibe treibt über ein Kegelradwendegetriebe *I* und eine senkrechte Welle das Stirnrad *1* an, welches über die Räder *2*, *3*, die Nutwelle *A* und dann über die Kegelräder *4*, *5* die ebenfalls genutzte Welle *B* bewegt. *B* trägt eine Kupplungsklaue (Fig. 321), die gestattet, je nach ihrer Lage eines der Kegelräder *6* oder *7* mitzunehmen und so die senkrechte Welle *I*, entweder in dem einen Drehsinn über die Kegelräder *6*, *7* langsam, oder im entgegengesetzten über *8*, *9* schnell umlaufen zu lassen. Fig. 322 zeigt das Wendegetriebe im Schnitt.

Ein auf Welle *I* aufgebrachtes Rad *10* treibt entweder direkt, über *11* als Zwischenrad und Rad *12*, die Bohrspindel an, oder es wirkt über *13*, *14* auf diese, je nachdem die Bohrspindel durch die Kupplungsklaue mit *12* oder *14* gekuppelt wird.

Zur Schaltung wird durch die als Nutwelle ausgebildete Bohrspindelverlängerung über einen Ziehkeilräderekasten, die Welle *IV* und von da über ein Vorgelege ins Schnelle oder ins Langsame die Welle *V* angetrieben — Fig. 323 zeigt die Anordnung der Kupplung, die durch Heben und Senken der Welle *V* den Vorgelegesprung betätigt — und von *V* aus wird über ein Schneckengetriebe, Trieb und Zahnstange die Bohrspindel vorwärts bewegt. Ein Handrad gestattet, über ein Schneckengetriebe ein Stirnrad zu betätigen, das sich in einer am Auslegerarm befestigten Zahnstange abwälzt und so den Bohrschlitten einstellt.

Der Ausleger selbst ruht auf einem Kugellager und ist unten geschlitzt, so daß man ihn durch Festziehen einer Klemmschraube in jeder Lage feststellen kann.

Bewegt man den Hebel *h*, am Maschinenständer nach rechts — was in der gezeichneten Lage des Anschlages *a*, unmöglich ist, so hebt man das besonders breit gehaltene Rad *2* in die Klaue *k* (ähnlich Fig. 323) hinein, so daß es über *k* die Schraubenspindele *s* antreibt. Durch diese wird der Ausleger aufwärts bewegt, bis er mit seinem Anschlag *a*, die gezeichnete Lage erreicht und den Hebel *h*, nach links drückt; Rad *2* wird gesenkt, außer Eingriff mit *k* gebracht, und die Schraubenspindele bleibt stehen. Ein entsprechender Anschlag *a*, begrenzt den Weg des Auslegers nach unten, indem er den Hebel *h*, zwingt, die Klaue im Wendegetriebe *I* auf Mitte, d. h. außer Eingriff zu stellen.

Die Maschine bietet also Selbstgang des Auslegers in 2 Richtungen, je nach Lage der Klaue im Wendegetriebe *I*, und gestattet beliebige Begrenzung des Hubes durch die verstellbaren Anschläge *a*, *a*. 8 Drehzahlen für das Bohren und gleichfalls 8 mit doppelter Geschwindigkeit für den schnellen Rücklauf der Bohrspindel sind gegeben, und außerdem ist der Vorschub/Umdrehung der Bohrspindel achtfach abgestuft. Die Betätigung dieser verschiedenen Antriebe ist bei jeder Lage des Schwenkarmes, und bei jeder Stellung des Bohrschlittens an ihm, möglich.

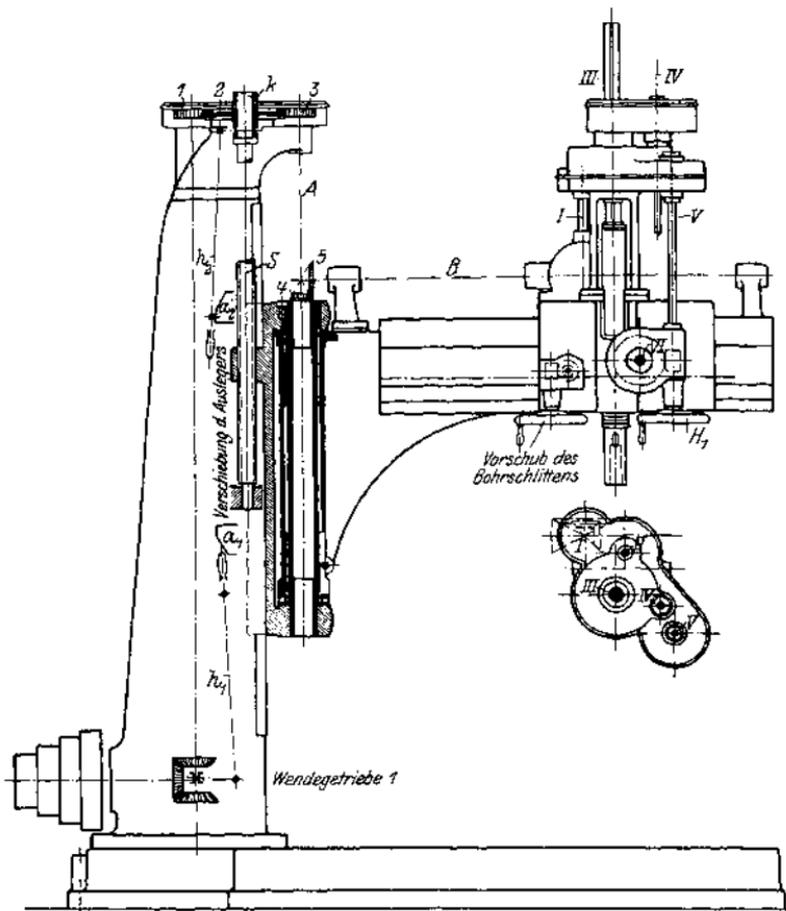


Fig. 320.

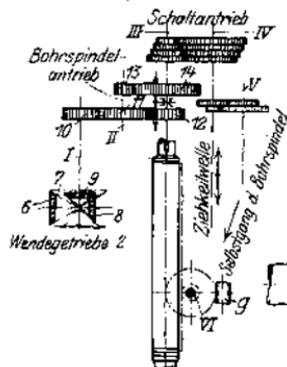


Fig. 321.

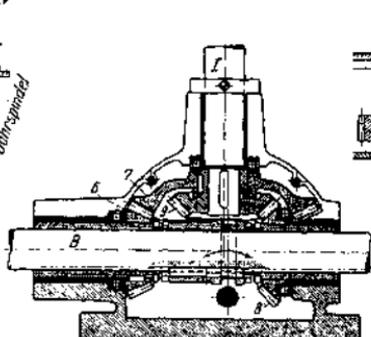


Fig. 322.

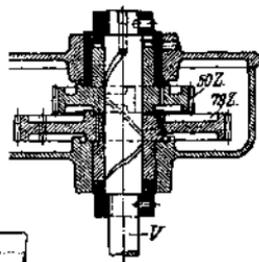


Fig. 323.

Fig. 320 bis 323. Radialbohrmaschine von Ludw. Loewe & Co., Berlin.

e) Wagrecht-Bohr- und Fräsmaschine von Droop & Rein, Bielefeld.

Fig. 324 zeigt die Gesamtanordnung. Durch vierfache Stufenscheibe und Rädervorgelege I, 2, 3, 4 sind der Bohrspindel 3 verschiedene Drehzahlen zu erteilen. In der zwangsläufig gelagerten Spindel (s. auch Fig. 103) ist eine durch Feder und Nut mitgenommene Bohrstange verschiebbar, die ihren Schaltantrieb über ein Schraubenrädergetriebe S_1 (s. auch Fig. 325), einen Ziehkalträderkasten für drei Übersetzungen, das Kegelradwendegetriebe k_1 , Schneckengetriebe S_2 , Trieb und Zahnstange erhält.

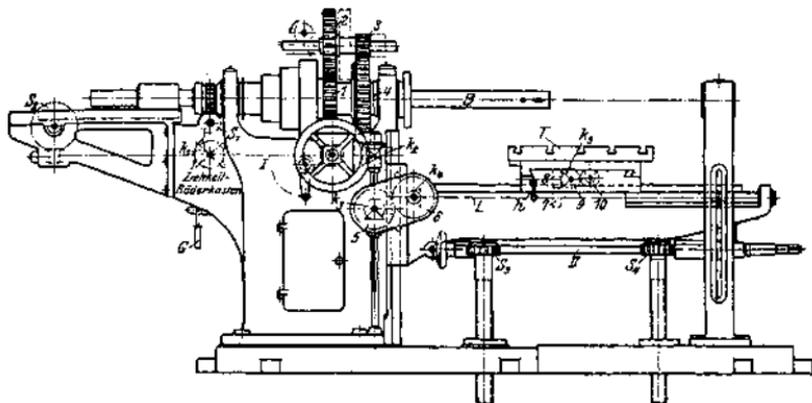


Fig. 324.

Fig. 324 bis 325.

Wagrecht-Bohr- und Fräsmaschine von Droop & Rein, Bielefeld.

Selbstgang des Tisches — für Fräsarbeiten, wobei die Bohrstange nicht bewegt wird — erfolgt ebenfalls von der Welle I aus über das Kegelradwendegetriebe k_2 , die Kegelradgetriebe k_3 und k_4 , die durch die Stirnräder 5, 6 verbunden sind, und die Leitspindel L parallel zur Bohrspindel. Rad 7, durch Reibung in dem ihm nachgeordneten Getriebe festgehalten, dient hierbei als Mutter. Wird 7 durch eine Kupplung, die Hebel h betätigt, mit der Leitspindel verbunden, so treibt es über 8, 9, 10 eine zweite Schraubenspindel, die den Tisch quer vorstellt.

Die Spannplatte ist drehbar und hat bei 90°, 180° und 270° Drehung einfallende Sperren.

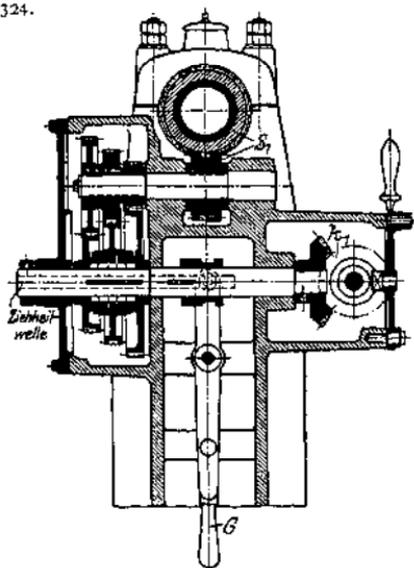


Fig. 325.

D. Fräsmaschinen.

1. Allgemeine Bemerkungen.

Wie schon auf S. 1232 bemerkt, sind für Fräsarbeiten so eingehende Versuchsergebnisse nicht bekannt gegeben wie für die bisher besprochenen Maschinen.

Die Maschinen zeigen vielfach sehr deutlich ihre Entstehung aus der Drehbank, zu der sie, wenigstens der äußeren Gestalt nach, in den Wagrechtbohr- und Fräsmaschinen (Fig. 324) wieder zurückkehren.

Wesentlich unterschieden von den Drehbänken sind sie durch die erheblich höheren Drehzahlen (vgl. Tabelle S. 1232) ihrer Hauptantriebsspindeln, während deren Aufbau und Antrieb nichts Neues gegenüber den besprochenen Ausführungen bietet.

c) Die Planfräsmaschinen,

(Fig. 347/48) haben die Querbewegung des Supports als Hauptarbeitsbewegung beibehalten, verlieren dagegen die senkrechte Verstellbarkeit, die dafür dem Spindelkasten zugewiesen wird. Der Gegenhalter *P* ist dem der einfachen und der Universalfräsmaschinen ähnlich, doch kommt neu hinzu ein richtiger Reitstock, in der Höhe gleich der Spindel verstellbar, was der ganzen Maschine eine gewisse Ähnlichkeit mit der Tischhobelmaschine verleiht.

d) Die Senkrechtfräsmaschinen

(Fig. 349) zeigen in ihrem oberen Teil eine große Ähnlichkeit mit den Bohrmaschinen, in der Supportanordnung sind sie den Stoßmaschinen (s. Fig. 295, 299) ähnlich gestaltet.

3. Der Schaltantrieb.

Er erfolgt, (s. Fig. 22, 23) wie auch aus der Tafel für Schnittgeschwindigkeiten auf S. 1232 zu ersehen ist, in mm/min, nicht, wie bei den anderen Werkzeugmaschinen mit kreisender Schnittbewegung, in mm/Umdr. Man ist jetzt ziemlich allgemein zu dieser Art des Schaltvorschubes übergegangen, die ihn, unabhängig von der Drehzahl der Arbeitsspindel, unmittelbar von der ersten Antriebswelle ableitet; diese Antriebswelle ist entweder die des Deckenvorgeleges, wie in Fig. 326/327 zu erkennen ist, oder, wie aus Fig. 339 zu ersehen, die Achse der treibenden einstufigen Riemenscheibe.

Der Grund zu dieser abweichenden Anordnung ist aus der nachstehenden Überlegung zu erkennen.

Wie aus Fig. 22 zu ersehen, ist

s_0 die Schaltung in mm/Zahn,

$s_0 \cdot z$ die Schaltung in mm/Umdrehung,

$s = s_0 \cdot z \cdot n$ die Schaltung in mm/Minute.

Nun ist $d\pi = Zt = \text{Zähnezahl} \times \text{Teilung des Fräasers}$, und daher

$$v = \frac{d \cdot \pi \cdot n}{1000} = \frac{z \cdot t \cdot n}{1000}$$

also

$$z \cdot n = \frac{v \cdot 1000}{t} \quad \text{und} \quad s = \frac{s_0 \cdot v \cdot 1000}{t}$$

Bei hartem Material — mit kleinem v — und stark geschweiften Fräsprofilen sind die Werte von s_0 , die ein Maß für die Spanstärke darstellen, naturgemäß gering anzunehmen, weil bei stark unterschrittenen Profilen ungünstig kleine Rückenwinkel vorliegen (Fig. 3) und deshalb starke Erwärmung zu fürchten ist. Bei Planfräsarbeiten mit Walzenfräsern, bei denen die denkbar besten Schnittverhältnisse gegeben sind, kann man größere Werte für s_0 und v wählen.

Nun werden aber gerade die oben erwähnten, stark unterschrittenen Fräsarbeiten — z. B. Zahnräder — mit hinterdrehten Fräsern hergestellt, die sehr wenig Zähne haben, also große Teilung t aufweisen, während Walzenfräser für Planarbeiten, nicht hinterdreht, meist mit vielen Zähnen, d. h. kleiner Teilung t versehen sind.

Es ist also $\frac{s_0 \cdot v}{t}$ klein für Fassonfräsarbeiten in hartem Material,

und groß für Planarbeiten mit Walzenfräsern in weichem Material zu wählen, also die

Schaltung s_0 unabhängig von der Drehzahl des Fräasers.

Macht man den Vorschub abhängig von der Drehzahl der Frässpindel, so erhält man die größten minutlichen Vorschübe bei kleinen Fräsern, weil diese die

größten Drehzahlen aufweisen, während sie ihrer feinen Zähne wegen nur schwache Späne nehmen dürften.

Die Gefahr, die bei unmittelbarem Antrieb des Vorschubes vorliegt, daß nämlich der Antriebsriemen des Fräasers rutschen und der Tisch trotzdem weiter geschaltet werden könnte, begegnet man durch eine Sicherheitskupplung, die den Vorschubantrieb unterbricht, sobald die Drehzahl der Frässpindel abnimmt, weil der Riemen gleitet.

Den wesentlichen Bestandteil des Schaltantriebes bildet heute meist ein Räderkasten, der 6, 8, 12 und mehr verschiedene Schaltvorschübe gestattet; die Notwendigkeit der vielen Schaltvorschübe — in Fig. 326 sind es zwölf, in Fig. 341 sogar sechzehn — dürfte aus der vorstehenden Ableitung zu erkennen sein. Vom Räderkasten aus überträgt eine Kugelgelenkwelle — s. hierzu Fig. 95 bis 100 — die Drehung entweder direkt auf eine Schnecke, die auf Welle W_{III} sitzt und ein auf der Tischspindel befestigtes Schneckenrad dreht, oder es liegt eine Ausführung vor wie in Fig. 328. Ein Zahnrad Z_1 ist schwenkbar angeordnet, so daß es ein Rad 2 entweder über ein oder über zwei Zwischenräder antreiben kann, den Tisch also vor oder rückwärts bewegt. Von 2 aus wird unter 3, 4, die Kegelradgetriebe 5, 6 und 7, 8 die Schraubenspindel st angetrieben, welche durch ihre Drehung auf die Mutter m des Supportschlittens wirkt. Eine andere Art der Schaltung zeigen die Fig. 345 bis 349. Die Durchrechnung eines Räderkastens wurde auf S. 1254 zu Fig. 66 gegeben.

Die Begrenzung des Tischweges kann nach Fig. 136 erfolgen (s. Beschreibung).

Die senkrechte Verstellung des Konsols für den Support, die ebenso wie die Bewegung parallel zur Arbeitsspindel mit Selbstgang versehen werden kann, (s. Fig. 342 bis 346 und Beschreibung) erfolgt durch eine Schraubenspindel, die jetzt meist als sogenannte Teleskopspindel (Fig. 329) hergestellt wird. Bei dieser Ausführung summieren sich die Verstellungen l_1 und l_2 , ohne daß das Maß $h = l_2$, bis zum Fußboden, beim Niederschrauben überschritten wird; ein Loch im Fußboden, das früher stets nötig war, wird auf diese Art vermieden.

4. Der Universalteilkopf.

Diese Vorrichtung ist den Universalfräsmaschinen eigentümlich und hat, entsprechend den Zwecken, welchen sie dienstbar gemacht werden soll, drei Arten von Einrichtungen.

Erstens eine Teileinrichtung, die gestattet, nach Vollendung einer Zahnflanke des Werkstückes den Teilkopf mit dem Werkstück um den Betrag eines Zahnes im Kreise zu schalten.

Zweitens eine Einrichtung zur Einstellung der Werkstückachse unter beliebigem Winkel gegenüber der Tischfläche des Supports; es können dann Nuten oder Zahnflanken in kegelförmig gestaltete Grundkörper gefräst werden.

Drittens eine Einrichtung, die gestattet, den Teilkopf zwangsläufig — durch Wechselräder — mit der Tischspindel so zu verkuppeln, daß eine Achse sich um bestimmte Beträge dreht, während der Tisch sich vorschiebt. Es werden so Schraubennuten erzeugt, wenn man die Mittelebene des Werkzeuges entsprechend der Steigung dieser Schraubennut einstellt, was nur bei dem drehbaren Support der Universalfräsmaschinen möglich ist.

Eine sehr erschöpfende Beschreibung der Universalteilköpfe und ihres Anwendungsgebietes gibt Schlesinger¹⁾ in der Werkstattstechnik, auf die hier verwiesen sei.

Fig. 330, 331 zeigen den Aufbau eines solchen Teilkopfes, bei welchem die Spindel w , zur Aufnahme des Werkstückes eingerichtet, an ihrem hinteren Ende ein Schneckenrad S_0 trägt, das von einer Schnecke g her angetrieben wird. Die

¹⁾ Schlesinger, Beiträge zur Berechnung der Werkzeugmaschinen. W. T. 1910, S. 547 ff. — Reyher, Selbsttätige Schaltung und Teilung. W. T. 1907, S. 329.

Spindel ist in einem Klotz *A* gelagert, der in dem auf dem Fräsmaschinentisch befestigten Führungsstück *B B* unter beliebigem Winkel von 0° bis 90° festzuklemmen ist. Auf der Schneckenachse sitzt eine Kurbel *K* mit einstellbarer Armlänge, deren Sperrstift *s*₁ in die Löcher eines der Lochkreise auf der Teilscheibe *C* einfallen und so die Schnecke *g* gegenüber der Teilscheibe feststellen kann. Die Teilscheibe *C* ist mit dem Kegelrade *k*₁ fest verbunden und kann von dem Kegelrade *k*₂ mitgenommen werden, das seinerseits über die Wechselräder *Z*₄ bis *Z*₁ von der Tischspindel her angetrieben werden kann.

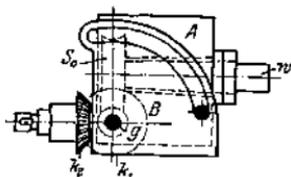


Fig. 331.

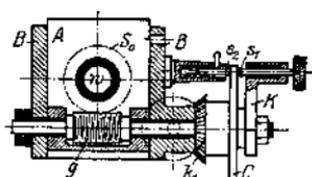


Fig. 330.

Ist die Verbindung zur Tischspindel unterbrochen, weil nur reine Teilung, keine zwangsläufige Mitnahme erfolgen soll, so verhindert der am Gehäuse *B* befestigte Stellstift *s*₂ eine Drehung der Teilscheibe.

Bezeichnet

Z die Zähnezahle eines zu fräsierenden Zahnrades,

*S*₀ die Zähnezahle des Schneckenrades,

g die Gangzahle der Schnecke,

n die Anzahl der Kurbeldrehungen für *K*

$n_w = \frac{1}{Z}$ den Teilbetrag einer ganzen Umdrehung, um den das Werkstück rund geschaltet werden soll, so ist:

$$n = n_w \cdot \frac{S_0}{g} = \frac{S_0}{Z \cdot g}$$

Gegeben sei: *Z*₀ = 40, *g* = 1 (d. h. Schnecke eingängig) und eine zweiseitige Teilscheibe mit den Lochkreisen von

15, 16, 17, 18, 19, 10, 21, 23, 27 Löchern auf der Vorderseite,
29, 31, 33, 37, 39, 41, 43, 47, 49 Löchern auf der Rückseite.

1. Beispiel: Zu fräsen ist ein Zahnrad mit 34 Zähnen.

Es ist:

$$n = \frac{40}{34 \cdot 1} = \frac{16}{34} = \frac{13}{17}$$

d. h. die Kurbel *k* muß einmal ganz herum und dann noch um drei Löcher des Lochkreises *l* weiter gesetzt werden.

Um dem Arbeiter dieses zusätzliche Weiterdrehen zu erleichtern, hat man einen Winkel *a, b* (Fig. 332) auf einen Ansatz der Teilscheibe aufgebracht, seine Schenkel sind so verstellbar, daß sie die richtige Anzahl von Löchern *v* auf dem gewählten Lochkreise einschließen. Im vorliegenden Fall würde *s*₁ aus dem entsprechenden Loch gehoben, die Kurbel einmal (rechts herum) gedreht, und nun der Sperrstift in das Loch *v* = 3 + 1 = 4 eingesetzt werden. Nachdem der Winkel — die Schenkel *a, b* sind miteinander verschraubt — nach rechts gedreht worden ist, bis der linke Schenkel an die neue Lage von *s*₁ anschlägt, steht der Teilkopf für eine neue Teilung bereit.

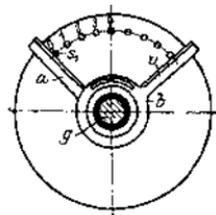


Fig. 332.

Zum Fräsen von schraubenförmigen Zähnen benutzt man die Kegelräder *k*₁, *k*₂ und die Wechselräder *Z*₁ bis *Z*₄ (Fig. 333), bei gelöstem Kuppelstift *s*₂. Die Tischspindel nimmt dann (s. Fig. 330) über die Wechselräder *l* bis *4*, die Kegelräder *k*₁, *k*₂ die Teilscheibe *C*, und diese mit Hilfe der gegen *C* festgestellten Kurbel *K* die Schnecke *g* mit, wodurch das Schneckenrad *S*₀ mit dem Werkstück gedreht wird. Da gleichzeitig der Tisch fortschreitet, so muß

eine schraubenförmige Furche entstehen, deren Steigung gleich dem Betrage ist, um den sich der Tisch bei einer vollen Umdrehung des Werkstückes — von der gewöhnlich nur ein Teil zustande kommt — vorwärts bewegt hätte.

Der Steigungswinkel der Schraubenfurchen ist σ , doch wird meist in der Werkstatt $\alpha = 90^\circ - \sigma$ als Steigungswinkel (Fig. 333) angegeben: α ist immer der Betrag, um den der Tisch gegen seine normale Lage gedreht werden muß, damit die Fräser Ebene tangential zur Schraubenfurche liegt (Fig. 334).

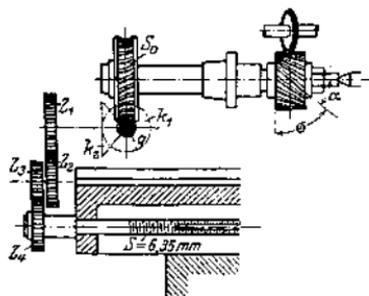


Fig. 333.

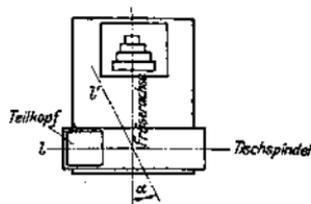


Fig. 334.

Die Auswahl der Wechselläder geschieht nach den gleichen Gesichtspunkten wie beim Schneiden von Gewinden auf der Leitspindel; die Werkstückachse wird als treibend, die Tischspindel als getrieben angesehen — in Wirklichkeit ist es natürlich umgekehrt —, und es ergibt sich die Beziehung.

$$\frac{\text{Steigung der Fräserzähne}}{\text{Steigung der Tischspindel}} = \frac{d \cdot \pi \cdot \operatorname{tg} \sigma}{S} = \frac{d \cdot \pi}{S \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{S_0 \cdot k_1 \cdot Z_1 \cdot Z_3}{g \cdot k_2 \cdot Z_2 \cdot Z_4}$$

also

$$\frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 \cdot Z_4} = \frac{g \cdot k_2 \cdot d \cdot \pi}{Z_0 \cdot k_1 \cdot S \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{d}{\operatorname{tg} C_0}$$

worin $C_0 = \frac{g \cdot k_2 \cdot \pi}{S_0 \cdot k_1 \cdot S}$ eine Konstante der Maschine bedeutet.

Nachdem das Schneiden eines Zahnes beendet und der Tisch zurückgelaufen ist, wird Kurbel K um den entsprechenden Betrag n (s. Beispiel 1) herumgedreht, wobei die Teilscheibe C — wegen des Stillstandes der ganzen Maschine — feststeht, und so das Werkstück zum Fräsen eines neuen Zahnes angestellt.

2. Beispiel: Zu schneiden ist ein Walzenfräser von 70 mm Durchmesser mit 37 Spiralzähnen von der Steigung $\sigma = 60^\circ$, $\alpha = 30^\circ$. Der Tisch und der Teilkopf zeigen folgende Abmessungen:

Steigung der Tischspindel $S = \frac{1}{4}'' = 6,35 \text{ mm}$

Schneckenübersetzung $\frac{g}{S_0} = \frac{1}{40}$

Kegelradübersetzung $\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{1}$

Fig. 336.

also $C_0 = \frac{1 \cdot 1 \cdot 3,14}{40 \cdot 1 \cdot 6,35} = 1,39$.

Vorhanden sind 22 Wechselläder mit den Zähnezahlen:

24, 25, 28, 30, 34, 37, 38, 39, 44, 42, 43, 47, 48, 49, 51, 53, 54, 57, 58, 59, 62, 66.

Die Lochkreise sind die gleichen wie oben.

$$\frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 \cdot Z_4} = 1,239 \frac{80}{0,578} = 1,5,$$

$$\frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 \cdot Z_4} = \frac{42 \cdot Z}{Z \cdot 28}$$

d. h. auf die Tischspindel kommt ein Rad mit 28 Zähnen, auf den Zapfen des Teilkopfes ein solches mit 42 Zähnen, und die Verbindung geschieht durch ein beliebiges Zwischenrad.

Die Einstellung der Kurbeldrehungen erfolgt wie im Beispiel 1.

$$n = \frac{40}{37} = \frac{13}{37}$$

d. h. es ist der Lochkreis mit 37 Löchern zu wählen und der Winkel α, β (Fig. 332) so einzustellen, daß er $3 + 1 = 4$ Löcher dieses Lochkreises faßt.

5. Ausgeführte Konstruktionen.

a) Universalfräsmaschine der Wanderer-Werke, Chemnitz.

Fig. 335 bis 338 zeigen den Kastenständer der Maschine mit der vollständig geschabten Stirnseite der Senkrechtführung, die außer zur Aufnahme des Tischkonsols auch zur Befestigung verschiedener Hilfseinrichtungen verwendet wird und deshalb bis oben hin durchgeführt werden muß; der Ständer hat eine auffallend breite Grundplatte, die ihm einen guten Halt gibt. Fig. 339 zeigt den Hauptantrieb der Frässpindel. Von der Scheibe a aus wird über das Langrad b und das verschiebbare Schwingenrad c die Stufenradwelle mit 4 Übersetzungen angetrieben und treibt ihrerseits entweder über die Räder $4, 5$ oder über $1, 6$ eine Hülse an, die auf der Frässpindel lose drehbar das Rad 7 trägt. Von 7 aus kann die Arbeitsspindel entweder direkt, oder über die Räder $8, 9, 10$ mit Vorgelege, angetrieben werden. Die Welle für $8, 9$ ist ausschwenkbar angeordnet (Fig. 340), und eine Kurvennut auf der Welle gestattet dem unter Federdruck stehenden Hebel x^1 , gleichzeitig mit Ausschwenken der Vorgelegewelle, den Kupplungsstift v

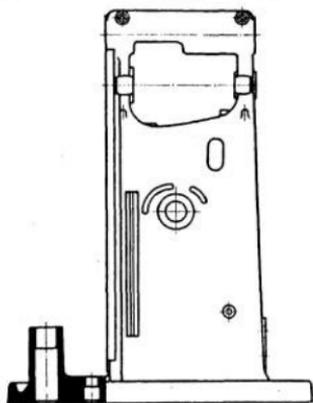


Fig. 335.

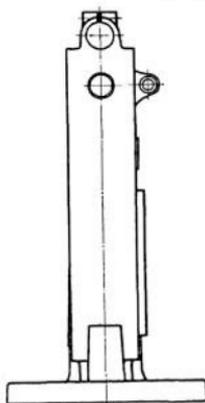


Fig. 336.

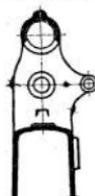


Fig. 337.

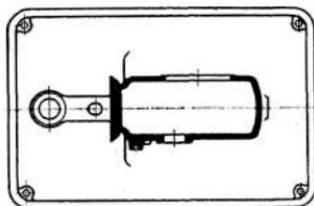


Fig. 338.

Fig. 335 bis 346.

Universalfräsmaschine der Wanderer-Werke, Chemnitz.

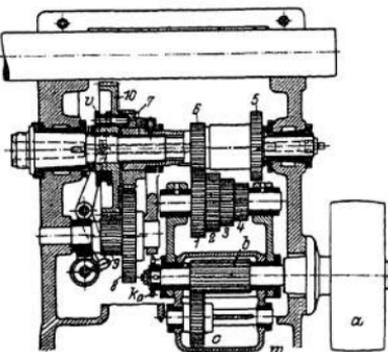


Fig. 339.

in Rad 7 (g) zu schieben; so wird die Fräserwelle, auf der Rad 10 (k) festsetzt, unmittelbar angetrieben. Beim Einschwenken von $8, 9$ (h, i) — zeitlich sogar noch vorher — wird die Kupplung v wieder gelöst, und der Antrieb erfolgt stark verlangsamt.

Der Schaltantrieb ist in Fig. 341 wiedergegeben und erfolgt durch zwei hintereinander geschaltete Ziehkeilrädern — Ausführung des Ziehkeils zeigt Fig. 107 — und ein Kegelradgetriebe auf die senkrechte, ausziehbare Welle α . Oben endigt α (Fig. 342) in ein Kegelradwendegetriebe k_1 , das der Welle b Drehungen rechts- oder linksherum gestattet.

¹⁾ In Fig. 340 sind die Räder 7 bis 10 mit g bis k bezeichnet.

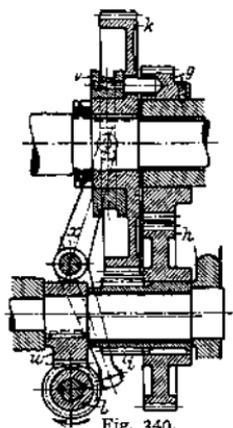


Fig. 340.

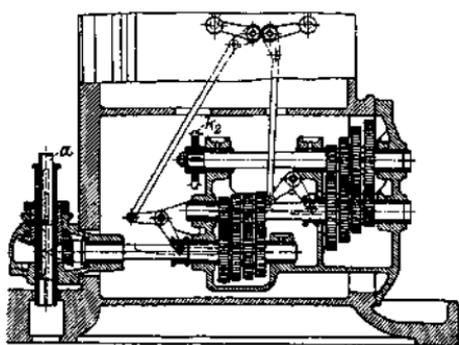


Fig. 341.

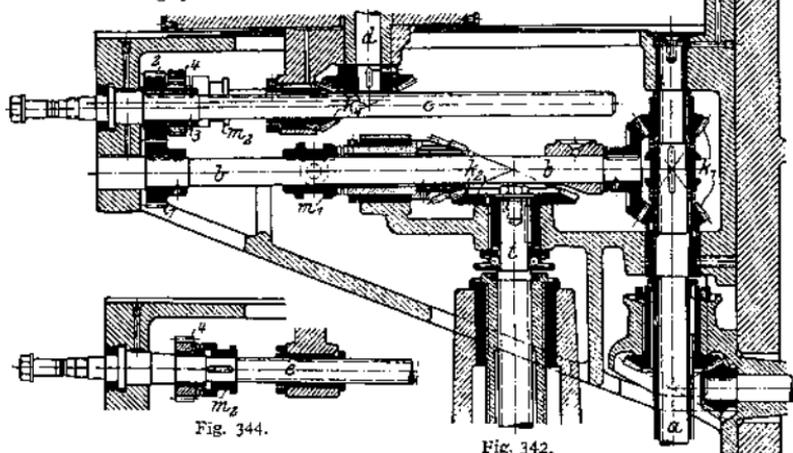


Fig. 344.

Fig. 342.

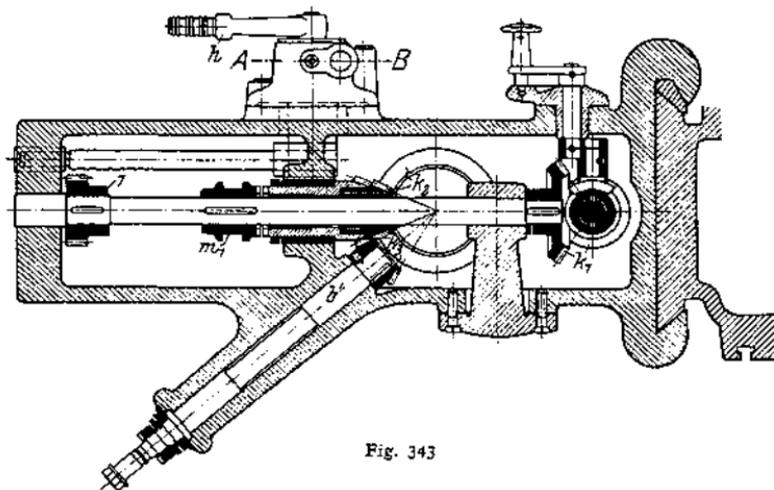


Fig. 343

Von b aus läßt sich Selbstgang für die Senkrechtbewegung, nach Einschalten der Kupplungsmuffe m_1 , über die Kegelräder k_2 bewirken; ist m_1 ausgerückt, so kann man von Hand über Welle b' (Fig. 343) und die Kegelradgetriebe k_3, k_4 die Schraubenspindel t drehen. Ebenfalls von b aus erfolgt, über die Stirnräder 1, 2, 3, 4 und Schraubenspindel e (Fig. 344) — nach Bintrücken der Kupplungsmuffe m_2 — der Selbstgang des Supports parallel zur Arbeitsspindel, und über 1, 2, die Nutwelle c , Kegelräder k_5 und Kegelradwendegetriebe k_6 (Fig. 345 und 346) Antrieb der Tischspindel t' , wenn die Kupplungsmuffe m_3 nicht — wie gezeichnet — in der Mittelstellung steht; m_3 wird durch einen Bügel mit Achsen s, s bewegt. Die selbsttätige Auslösung von m ist in Fig. 136 dargestellt und dort beschrieben worden; Fig. 136 ist ein Schnitt nach AB in Fig. 343.

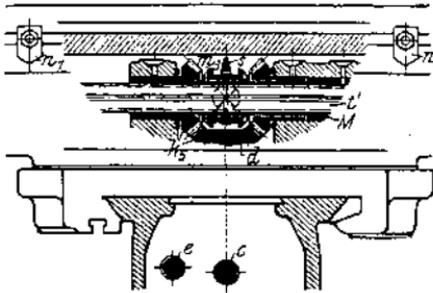


Fig. 345.

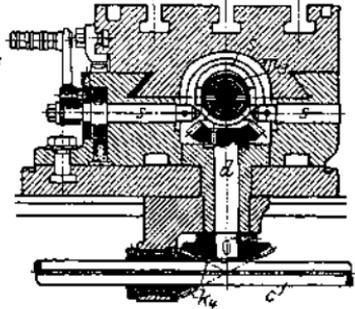


Fig. 346.

Die Fräsmaschine zeigt demnach 16 Arbeits- und 16 Schaltgeschwindigkeiten und selbsttätigen, umkehrbaren Selbstgang in 3 Richtungen.

b) Planfräsmaschine von Gildemeister & Co., Bielefeld.

Fig. 347 und 348 zeigen die Anordnung der Maschine, bei deren kastenartigem Bett die Rückkehr zur Drehbank deutlich erkennbar ist.

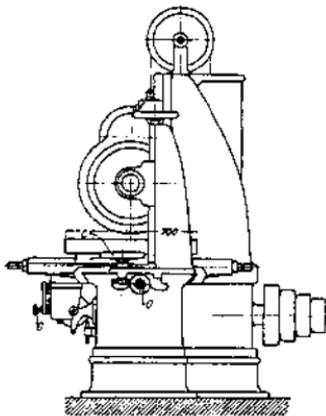


Fig. 348.

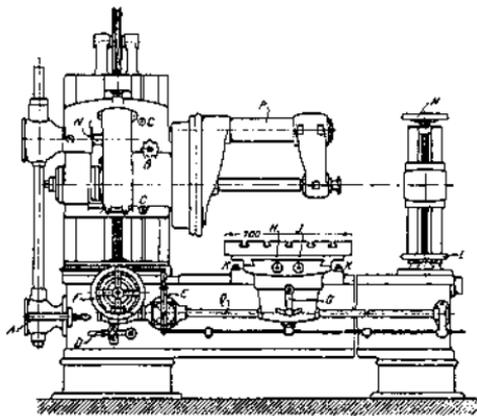


Fig. 347.

Fig. 347 u. 348. Planfräsmaschine von Gildemeister & Co., Bielefeld.

Der Hauptantrieb erfolgt von einem mit 2 Geschwindigkeiten umlaufenden Deckenvorgelege auf eine vierfache Stufenscheibe. Von da geht der Antrieb über ein Kegelradgetriebe im Inneren des Bettes und das durch Hebel A zu steuernde Kegelradwendegetriebe, über eine senkrechte Nutwelle mit einem dritten Kegelräderpaar, von Welle N aus auf die Arbeitsspindel; entweder über ein links gelegenes Stirnräderpaar ins Langsame, oder über ein rechts gelegenes ins Schnelle. Das Ein- und Ausrücken dieses Vorgeleges erfolgt durch den Knopf B . Die Arbeitsspindel wird durch einen kräftigen Gegenhalter P gestützt, der vom Spindelkasten abgenommen und durch den rechts erkennbaren Hilfsständer ersetzt werden kann. Durch Schraubenspindeln

mit den Handrädern *F* und *M* sind Spindelachse und Achse des Hilfsständers genau auf gleiche Höhe zu stellen. Schrauben *C, C*, die in Spannuten greifen, dienen zum Befestigen des Spindelkastens auf seinem Ständer, ein Handrad *L*, dessen Trieb in eine Zahnstange am Bett faßt, zur Längsverstellung des Hilfsständers.

Die Schaltbewegung geschieht von der Stufenscheibenwelle aus durch ein Sellers-Reibschneibgetriebe, über das durch Hebel *E* zu steuernde Kegelradwandelgetriebe und die Welle *Q* zur Bettplatte; von dort aus wirkt *G* durch 2 Räderysteme, die durch Handhebel *G* zu steuern sind auf die Schraubenspindel *H*, die eine Verschiebung des Supports quer zur Frässpindel bewirkt, oder auf eine Nutwelle *J*, die über Schraubenräder die Mutter einer feststehenden Schraubenspindel *O* (Fig. 348) dreht und so den Support längs des Bettes schaltet.

Es liegen also 16 Spindelgeschwindigkeiten und zwischen, von der Firma nicht angegebenen Grenzen, alle erdenklichen Größen für die Schaltung vor.

c) Senkrechtfräsmaschine von J. E. Reinecker, Chemnitz.¹⁾

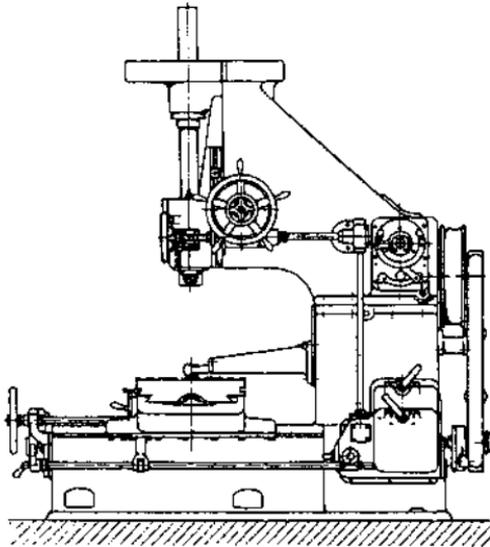


Fig. 349.

Fig. 349 gibt eine Ansicht der Maschine, die durch sehr kräftigen Bau ausgezeichnet ist.

In Fig. 350 und 351 ist der Räderkasten für den Spindeltrieb dargestellt, der von der Welle *A* aus entweder über die Räder 1, 2 oder 3, 4 auf Welle *B* erfolgen kann. Von *B* aus kann Welle *C*, entweder über 5, 6 oder 4, 7 oder über 8, 9 oder 10, 11 angetrieben werden. Die im Ölbad laufenden Räder 1, 3 und ein Sternrad *s* sorgen für ständige Schmierung der Zahnräder. Es sei besonders darauf hingewiesen, daß wegen der kleinen Zähnezahlen statt des üblichen Konstruktionswinkels von 75° ein solcher von 70° gewählt wurde, weil so trotz der kleinen Zähnezahlen Unterschnitt vermieden werden konnte.

Eigenartig ist die Anordnung des Hebels *h*₂ zur Schaltung der Räderpaare 6, 7 und 9, 11. Auf dem Ende der Welle *D* sitzt ein Trieb *r*, das mit Hilfe einer Zahnstange *x* die Gabel *g*₂ bewegt; *g*₂ ist dadurch gesperrt, daß ein Sperrklotz *k*, in dessen Aussparung *r* sich dreht, die Verschiebung hindert. Wird Welle *D* am Hebel *h*₂ herausgezogen, so daß *h*₂

über der Vorderfläche des Schildes *n* schwingen kann, so ist *g*₂ freigegeben, *r* kommt mit der Zahnstange an *g*₂ in Eingriff, und ein an *g*₂ befindlicher Klotz *k* sperrt diese Gabel.

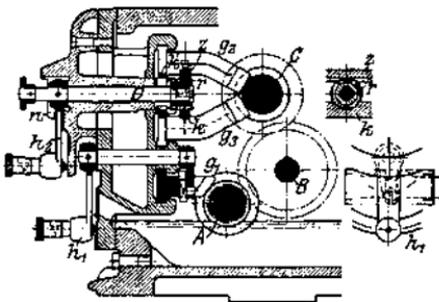


Fig. 350.

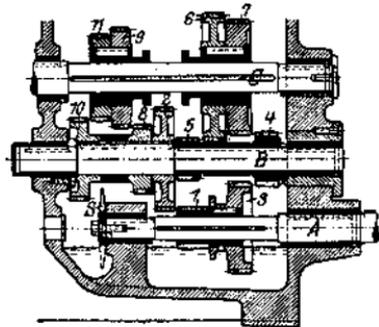


Fig. 351.

Fig. 349 bis 351. Senkrechtfräsmaschine von J. E. Reinecker, Chemnitz.

¹⁾ Siehe Nickel, Z. Ver. deutsch. Ing. 1913, S. 1409.

E. Schleifmaschinen.

1. Die Schleifscheiben.

Die Schleifmaschinen sind zunächst nur als Hilfsmaschinen in der Werkstatt in Form von Werkzeugschleifmaschinen angewendet worden, haben sich daneben aber nach und nach zu selbständigen Werkzeugmaschinen entwickelt. Ihr Werkzeug, die Schleifscheibe — heute wohl nur noch die künstliche aus Schmirgel- oder Karborundum, in ein Bindemittel eingebettet — entspricht in ihrer Wirkung dem Fräser, die Zähne sind hier Kristalle, die dem Werkstück ihre scharfen Kanten zuwenden und die sich ebenso nach und nach abstumpfen wie die Fräserzähne. Wenn sie stumpf geworden sind, so müssen sich die Kristalle aus ihrem Sitz lösen und anderen, scharfen, Platz machen, die ihrerseits die Schneidarbeit übernehmen; das Bindemittel einer Schleifscheibe muß also so fest sein, daß es die schneidfähigen Kristalle genügend festhält, sie dagegen beim Stumpfwerden und dementsprechend größeren Tangentialwiderständen P (s. Fig. 24 und 25) nicht hindert, herauszubrechen. Ein zu festes Bindemittel würde auch die stumpfen Kristalle noch festhalten, die Scheibe würde drücken, statt zu schneiden, und infolge der Erwärmung zunächst verglasen, unter Umständen aber auch platzen. Naturgemäß dürfen auch die Spantiefen t (Fig. 24) nicht zu groß werden — Fig. 26 zeigt als Höchstwert 0,16 mm, ein Wert, der vorläufig wohl kaum überschritten werden dürfte — und die Schleifmaschine kann an Leistungsfähigkeit nicht mit sonstigen Schruppmaschinen den Wettkampf aufnehmen. Auf der anderen Seite genügen aber ihre Spanleistungen vollkommen, um z. B. die Drehbank ganz von der Schlichtarbeit zu entlasten.

Der große Vorteil der Schleifmaschine liegt in der Breite der anzuwendenden Scheiben, die außerdem Schaltung in beiden Richtungen gestatten, da die Scheibe auf beiden Seiten gleich gut schneidet. Ein leerer Rücklauf, wie bei der Schnittbewegung der Hobelmaschine, kommt also hier nicht in Frage. Die Schaltung s darf nämlich (s. Tabelle S. 1232) $\frac{2}{3}$ bis $\frac{1}{2}$ der Scheibenbreite betragen und so sind Schaltvorschübe möglich — im Diagramm Fig. 26 bis zu 24 mm/Umdr. —, wie sie keine andere Werkzeugmaschine aufweist. Wegen der Breite der Scheiben kommen viele Kristalle zur Wirkung, deren jeder nur eine kleine Arbeit zu leisten hat; wählt man die Scheibendurchmesser als Vielfaches der Werkstücksdurchmesser (s. Fig. 25), so hat man also viele sehr harte Schneidzähne zur Verfügung, der Scheibendurchmesser wird sich während der Arbeit kaum verändern, und die Genauigkeit der Arbeit kann groß sein. Bei allen feinen Arbeiten muß man für Abführung der erzeugten Wärme sorgen und deshalb reichliche Wasserkühlung vorsehen; der Trockenschliff kommt mehr und mehr ab, da der Schleifstaub Lagerstellen der Maschine und Lungen der Arbeiter gleichstark abnutzt.

2. Spindelstöcke der Schleifscheiben. Schnittbewegung.

Fig. 352 zeigt das vordere Ende des Spindelstockes für Außenschleifen von einer Rundschleifmaschine und läßt die Sorgfalt erkennen, mit der man die Lagerstellen vor dem Schleifstaub schützt. Ein Spritzring sorgt, ähnlich wie schon zu Fig. 171 besprochen wurde, für einen schützenden Öl-schleier. Der Klotz a — es sind mehrere solcher Klötze vorhanden — dient zum Auswuchten der Schmirgelscheibe; er ist geschlitzt und in der Rille der Scheibenfassung durch eine konische Schraube an der richtigen Stelle festzupressen.

Fig. 353 stellt einen Schleifbock zum Innenschleifen dar, dessen Schleifspindel, mit der antreibenden Riemenscheibe durch eine Kupplung k verbunden,

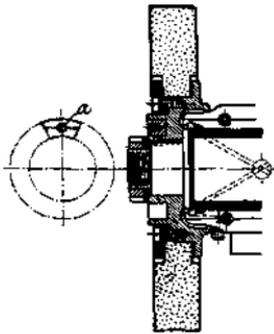


Fig. 352.

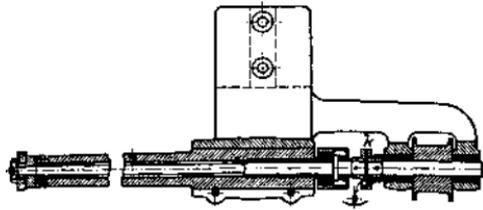


Fig. 353.

vor Erschütterungen geschützt ist, die der Antrieb auf sie übertragen könnte. Der Antrieb selbst bietet gegenüber denen der früher besprochenen Maschinen nichts wesentlich neues.

3. Aufnahme der Werkstücke.

Ein Spindelstock zur Aufnahme der umlaufenden Werkstücke ist in den Fig. 354 bis 357 dargestellt, sein Unterteil G ist auf den Tisch der Maschine (Fig. 363) aufzubringen. Auf G , nach Graden einstellbar, ist der eigentliche Spindelkasten O festzuklemmen, wenn man die Schraube s (Fig. 354) mit ihrem konischen Ansatz in den Riegel b preßt; um Abnutzungen auszugleichen, hat man den Stellhebel h auf einem Achtekant an s angeordnet, so daß man ihn nach

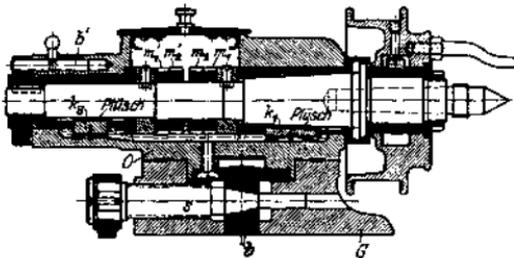


Fig. 354.



Fig. 357.

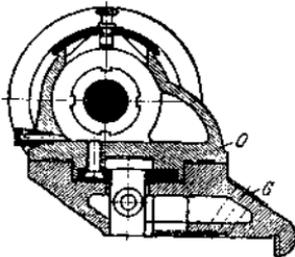


Fig. 355.

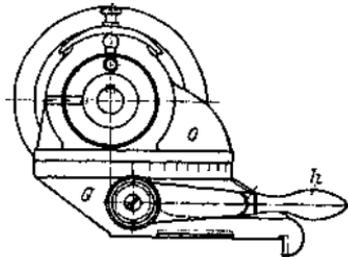
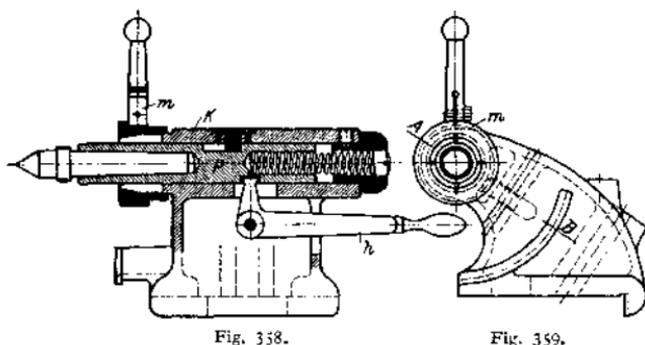


Fig. 356.

Bedarf um je 45° herumsetzen kann. Die Lagerstellen, vorn konisch, hinten zylindrisch ausgebildet, sind durch Stellringe und Doppelmuttern m_1 , m_2 und m'_1 , m'_2 gegen Längsverschiebungen zu sichern, und die Spindel ist im Bedarfsfalle durch einen Riegel b' gegen willkürliche Drehung geschützt. Die Schmierung geschieht von unten durch mit Plüsch bezogene Holzklötzchen (s. auch Fig. 357), die durch Federn angedrückt werden, das Öl aufsaugen und den Lagerstellen zuführen.

Einen Reitstock zeigen die Fig. 358 und 359; die Pinnole wird durch eine Feder angedrückt, ist durch die Mutter m in dem vorn geschlitzten Körper zu klemmen und wird, nach Lösen von m , durch den Hebel h zurückgezogen.



4. Antrieb der Schaltbewegung.

Stufenscheibe A (Fig. 364) bewirkt über ein Kegelradwendegetriebe h_1 , die Kegelräder $1, 2$ und die Stirnräder $3, 4$ bei links gelegter Klaue k (Fig. 361) den Antrieb der Tischspindel t mit der Steigung s ; bei rechts gelegter Klaue k kann durch ein Handrad (Fig. 362) die Tischspindel bewegt werden.

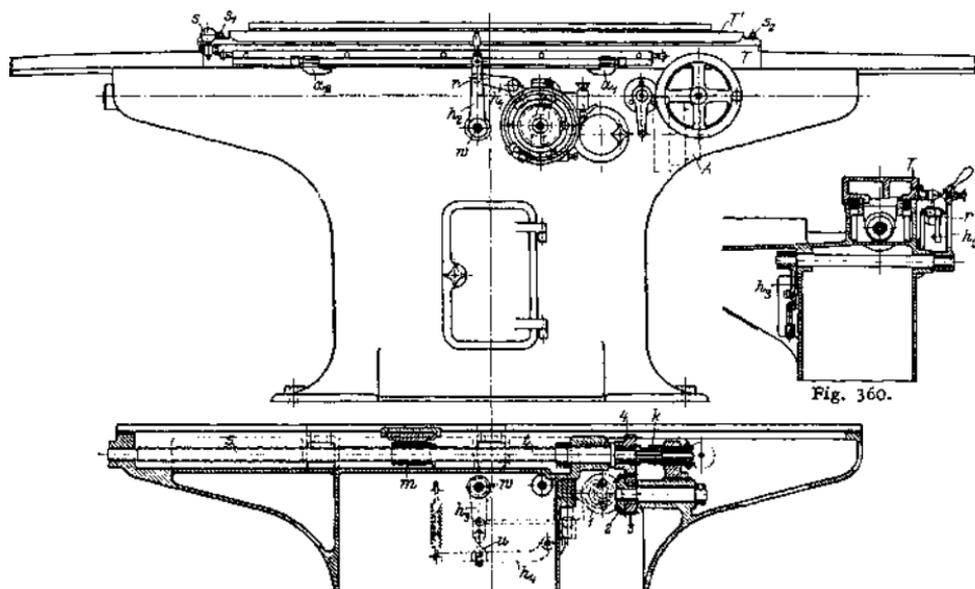


Fig. 361 und 362.

Die Ausrückung des Schaltvorschlubes geschieht durch Anschläge a_1, a_2 , die den Hebel h_2 zum Umfallen bringen (auf der Welle von h_2 (Fig. 360, 362, 365) ist ein zweiter Hebel h_3 befestigt (s. auch Fig. 361), der, über eine Schneide w an dem unter Federdruck stehenden Hebel h_4 gleitend, h_2 plötzlich herumreißt.)

und so — mit Hilfe einer Zugstange (Fig. 365) — Hebel h_3 zwingt, die Kupplungsklaue des Wendegetriebes k_1 umzuschalten. Gezeichnet ist die Einrichtung für den allerdings nie eintretenden Fall, daß bei u Schneide auf Schneide steht, die Kupplungsklaue von k_1 also beiderseits außer Eingriff ist.

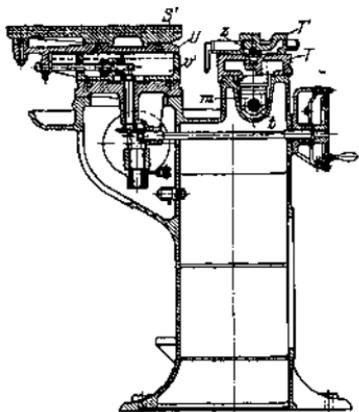


Fig. 363.

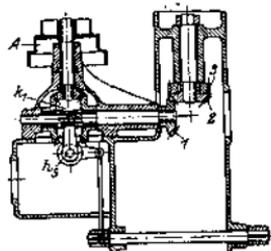


Fig. 364.

Der Tisch läuft nun zurück, bis Anschlag a_2 den Hebel h_3 wieder umlegt und die Umkehr bewirkt.

5. Die Einstellung der Spantiefe t

erfolgt hier ebenfalls selbsttätig, und ist aus den Fig. 360 bis 364, besser aus Fig. 365 zu erkennen. Der Anschlag a_1 , der mit seiner Stirnseite den Hebel h_2 schaltete, drückt mit der unten angeordneten schrägen Bahn — eine gleiche ist an a_2 vorhanden — den Hebel h_1 herunter und schaltet so durch eine schwingende Sperrklinke k_1 das Sperrrad, dessen unerwünschte Mitnahme

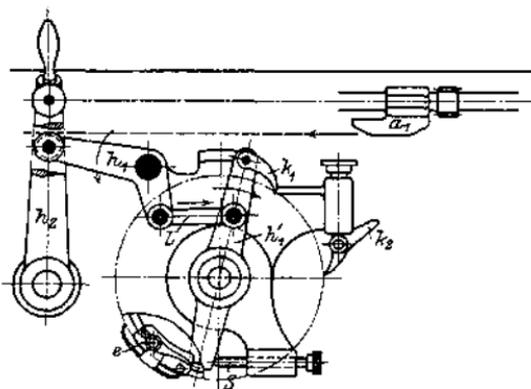


Fig. 365.

bei Rückgang des Hebels h_1 durch eine ruhende Klinke k_2 verhindert wird. Der Rückgang des Schwinghebels h_1 erfolgt unter Federdruck, und die Größe des Schaltweges wird durch eine Schraube S eingestellt. Durch eine Haube e (vgl. auch Fig. 129) wird verhindert, daß die Tiefenschaltung einen bestimmten Betrag überschreitet, denn die Haube, die, auf dem Sperrrad festgeklemmt, sich mit ihm umdreht, schützt die Sperrzähne gegen den Eingriff der Sperrklinke.

Von der Achse des Sperrrades aus wird über zwei Kegelradgetriebe eine Schraubenspindel betätigt (Fig. 363), die den Untersatz V auf seiner Schlittenführung v' gegen das Werkstück bewegt.

Auf V sitzt drehbar die Platte S' , die den Spindelkasten der Schleifscheiben zu tragen bestimmt ist.

Der Tisch T (Fig. 362, 363) trägt einen zweiten Tisch T' , der um einen Zapfen z schwenkbar ist; der Winkel ist durch eine Schraube s (Fig. 362) einstellbar und T' dann durch die Schrauben s_1 und s_2 gegen T zu klemmen.

Die Fig. 352 und 353 entstammen einer Schleifmaschine von Schubert & Salzer, die Fig. 354 bis 365 einer solchen der Firma E. J. Reinecker, beide in Chemnitz.

IV. Elektrischer Einzelantrieb von Werkzeugmaschinen.

A. Die Vorteile des elektrischen Einzelantriebes.

1. Fortfall der Transmissionen und Deckenvorgelege tritt ein, wodurch die Übersicht im Werkstattstraum ganz wesentlich erleichtert und die Möglichkeit geschaffen wird, oberhalb der Werkzeugmaschinen Hebezeuge zur Bedienung anzuordnen. Da die Decken frei werden, so ist man imstande, Laufschienen für die Krane anzuordnen und nicht mehr gezwungen, über den Fußboden hin Werkstücke und Hilfseinrichtungen an die Maschinen heranzubringen.

2. Die Möglichkeit, jederzeit und von jeder Stelle aus die Maschine ein- oder auszuschalten, erleichtert ganz wesentlich die Bedienung der Werkzeugmaschine.

3. Die Höhe der Werkstatträume ist vollkommen ohne Einfluß auf die Kraftübertragung; Deckenvorgelege an niedrigen Decken zwingen sonst zu kurzen Riemen, die schlecht durchziehen¹⁾, solche an sehr hohen Decken erfordern lange, teure Riemen und lange Ausrückstangen mit großen Ausrückwegen.

4. Bei Platzwechsel der Werkzeugmaschinen, für den Fall anderer Anordnung in der Werkstatt, zeigt sich als besonders angenehm die Unabhängigkeit von irgendeiner Kräfteinleitungsstelle.

5. Durch Einbau von Elektromotoren sind ortsbewegliche Werkzeugmaschinen zu schaffen, oder auch auf beweglichen Schlitten montierte Teile von Werkzeugmaschinen — Werkstückspindelkasten und Reitstock der Rundschleifmaschine — trotz ihrer Hin- und Herbewegung leicht anzutreiben.

Den unter 1 bis 5 genannten Vorzügen standen bis in die neuere Zeit, wenigstens für kleine Einheiten der benötigten Motoren, gewisse Nachteile gegenüber.

Einmal nämlich wurden Elektromotoren für kleine Leistungen — unterhalb 1 PS — nur mit sehr hohen Umdrehungszahlen gebaut, die wesentlich über 1500, ja bei kleinen Leistungen bis zu 3000 Umdr./min reichten. Deshalb haben sich die Motoren zuerst für den Antrieb von Schleif- und Bohrmaschinen, d. h. für solche Maschinen eingeführt, deren Arbeitsspindeln hohe Umdrehungszahlen verlangten.

Bei Verwendung für andere Werkzeugmaschinen war es nötig, entweder mechanische Einrichtungen für Geschwindigkeitsminderung einzubauen, oder durch Einschalten von Widerstand in den Ankerstromkreis die Drehzahl zu mindern. In beiden Fällen wurde der Wirkungsgrad des Elektromotors so wesentlich heruntergedrückt, daß man dann lieber wieder zum langsamer laufenden Deckenvorgelege griff.

Im Laufe der letzten Jahre hat sich von zwei Seiten her ein bedeutender Umschwung in dieser Beziehung bemerkbar gemacht.

Einerseits sind durch Einführung des Schnellstahles für Schrupparbeiten Spanquerschnitte und Schnittgeschwindigkeiten eingeführt worden, die sowohl Erhöhung der Leistung, als auch der Umdrehungszahl der Motoren fordern²⁾. Andererseits werden neuerdings Elektromotoren gebaut, die selbst bei geringen

¹⁾ S. S. 1242, 1243.

²⁾ S. Tabelle S. 1232.

Drehzahlen günstige Wirkungsgrade ergeben, wie aus nachstehender Tabelle¹⁾ entnommen werden kann.

PS	n	Volt	Amp.	η	M cmkg
0,15	840	220	0,78	0,667	12,8
0,25	800		1,3	0,646	22,4
0,5	760		2,38	0,707	47,1
1,0	640		4,8	0,698	112
1,5	720		6,8	0,765	149
2,5	600		10,8	0,785	298
3,0	585		12,3	0,817	367
3,5	670		15,0	0,780	374
5,0	610		20,6	0,816	587
6,3	550		27,0	0,782	820
7,0	750		28,0	0,835	670
8,0	550		33,6	0,798	1040
10,5	550		43,5	0,810	1370
13,5	510		54,0	0,837	1900

Die Tabelle bezieht sich auf Gleichstrom-Nebenschlußmotoren, die, wie nachher gezeigt werden soll, für Werkzeugmaschinen besonders gut geeignet sind. Drehstrommotoren sind für den gleichen Zweck ebenfalls gut anzuwenden.

B. Der Stufenmotor.

Die für den Werkzeugmaschinenbau so wichtige Regelung der Drehzahl von Elektromotoren hat bis vor kurzer Zeit nicht allen Anforderungen entsprochen. Auch jetzt erscheint die Aufgabe nur für Gleichstrom-Nebenschlußmotoren befriedigend gelöst.

Ein nahezu verlustloses Hochregulieren der Drehzahlen ist durch Schwächung des Feldes auszuführen, was durch den Nebenschlußregulierwiderstand erfolgt.

Jede Werkzeugmaschine hat ein maximales Drehmoment $P \cdot \frac{d}{2}$ zu überwinden, dessen Größe aus dem zu bearbeitenden härtesten Material, dem größten vorkommenden Spanquerschnitt und dem größten in Frage kommenden Durchmesser zu errechnen ist. Das vom Motor zu leistende Drehmoment ist das Produkt aus Feldstärke, Größe des Ankerstromes und einer Konstanten, die durch Abmessungen und Wicklung des Motors festgelegt ist.

Bei Feldschwächung zum Zwecke der Erhöhung der Umlaufzahl sinkt also das Drehmoment

$$M = \frac{N}{n} 71620 = J_a \cdot \mathfrak{B} \cdot C^2 \text{ cmkg,}$$

wenn nicht die Feldschwächung durch erhebliche Erhöhung der Stromstärke J_a wieder aufgehoben wird.

Bei Werkzeugmaschinen ist diese Erhöhung der Stromstärke, d. h. des Drehmomentes, gar nicht nötig, da das größte Drehmoment

$$s \cdot t \cdot K \cdot \frac{d}{2} \text{)}$$

nur zusammen mit der geringsten Drehzahl n_1 auftritt. Die Motorleistung

$$N = \frac{M \cdot n}{716,2} \text{ PS}$$

¹⁾ Katalog der A. E. G. 1913.

²⁾ C enthält die Konstanten des Motors.

³⁾ S. S. 1218 unten.

bleibt also annähernd gleich, der Motor entspricht in dieser Beziehung vollkommen dem mechanischen Geschwindigkeitswechsel. Bei geringeren Drehzahlen sinkt der Wirkungsgrad etwas, denn die Ventilation — teils eigene, teils künstliche — der Ankerdrähte kann dann weniger vollständig erfolgen, und die Stromstärke J_a muß kleiner gehalten, d. h. die höchste Leistung kann nicht erreicht werden; die Verhältnisse liegen ganz ähnlich wie beim Riemenantrieb mit geringer Riemengeschwindigkeit.

Mit Hilfe der Wendepolstufenmotoren, die schon für Erhöhung der Umlaufzahlen im Verhältnis bis zu 4:1 und mehr gebaut werden, ist man nun in der Lage, wie auch zu Fig. 378 gezeigt wird, zwischen die infolge der Stufensprünge der Stufenscheiben entstandenen großen Lücken unterteilende Geschwindigkeitsstufen einzuschleiben, deren Drehzahlen natürlich dann auch geometrisch angeordnet werden müssen. Die Größe des Geschwindigkeitsabfalles soll mindestens:

$$\frac{q - 1}{q} = \frac{v - v'}{v} = 10 \text{ v. H.}^1)$$

betragen, da für die Drehzahlen der Motoren meist an sich schon eine Toleranz von 5÷10 v. H. gestattet wird.

Ist so für den Gleichstrom-Nebenschlußmotor die Aufgabe als gut gelöst anzusehen, so bleibt vorläufig noch abzuwarten, wann der Drehstrom-Kollektormotor, der dem gleichen Zweck dienen soll, als befriedigende Konstruktion vorliegen wird.

C. Der Umkehrmotor.

Von besonders großer Bedeutung ist der elektrische Antrieb für eine intermittierende Arbeitsweise, wie sie bei Hobel- und Stoßmaschinen vorliegt. Beim Umsteuern der Maschine am Schluß des Arbeitsganges muß nämlich das ganze in den bewegten Massen aufgespeicherte Arbeitsvermögen vernichtet werden; es ist nötig, ein Wendegetriebe einzuschalten und in diesem mechanisch die Arbeitsvernichtung vorzunehmen.

1. Über mechanische Kupplungs- und Riemenwendegetriebe wurde auf S. 1277 bis 1278 schon ausführlich gesprochen, ebenso wurde eine magnet-elektrische Kupplung erwähnt.

Eine für Hobelmaschinen besonders entworfene Kupplung wird von der Vulcan M. A. G., für Gleichstrom von 110 bis 350 Volt Spannung, gebaut, sie macht allerdings das Verschieben der Riemen entbehrlich, was einen unleugbaren Vorteil bedeutet. Der Schlupf der Antriebsriemen und der dadurch bedingte, ebenfalls starke Riemenverschleiß wird aber nicht vermieden, und so kann diese Lösung schon mechanisch nicht voll befriedigen. Doch auch in bezug auf Wirtschaftlichkeit im Stromverbrauch ist die Anordnung nicht einwandfrei, wie aus folgender Betrachtung²⁾ hervorgeht. Würde der treibende Teil, gegen den die Ankerscheibe gezogen wird, stillstehen, so würde wegen ihrer Relativgeschwindigkeit gegenüber dem treibenden Teil das in ihr aufgespeicherte Arbeitsvermögen unter Umsetzung in Wärme vernichtet werden müssen. Nun handelt es sich aber nicht um einen stillstehenden, sondern um einen im entgegengesetzten Sinne umlaufenden Getriebeteil, der unter einem Bremsdrehmoment bewegt, dem also von außen her Arbeit zugeführt wird; auch diese Arbeit muß an jedem Hubende hergegeben werden, und die Kosten für aufzuwendenden Strom sind nicht unerheblich.

2. Bei Anwendung eines Gleichstromumkehrmotors, der mit Feldregulierung versehen ist, wird der Vorgang ein wesentlich anderer.

Liegt z. B. eine Hobelmaschine vor, die mit einer konstanten Rücklaufgeschwindigkeit von 20 m/min arbeitet und deren Geschwindigkeit durch Feldverstärkung bis auf 5 m/min herunterreguliert werden kann, so werden durch

¹⁾ S. S. 1244 oben.

²⁾ Z. Ver. deutsch. Ing. 1914, S. 643.

Feldverstärkung vor der Umsteuerung, also durch Verringern der Drehzahl auf $n_{\min} = \frac{1}{4}$ gegenüber $n_{\max}, \frac{15}{16}$ des in den bewegten Massen aufgespeicherten Arbeitsvermögens zurückgewonnen.

Zunächst läuft nämlich der Motoranker noch mit seiner alten Drehzahl im verstärkten Felde um, seine gegen elektromotorische Kraft steigt an, überwiegt die Netzspannung, und der Strom fließt in das Netz zurück. Der Motor wirkt als Dynamomaschine auf das Netz. Er wird angetrieben von den bewegten Massen der leerlaufenden Maschine, die an ihn eine Arbeit abgeben kann, die wegen der Drehzahlverminderung im Verhältnis $\frac{1}{4}$:

$$A_r = \frac{J\omega_1^2}{2} - \frac{J\omega_2^2}{2} = \left(1^2 - \frac{1}{4^2}\right) C = \frac{15}{16} C$$

beträgt, wenn C eine aus den Abmessungen und der maximalen Drehzahl errechnete Konstante bedeutet.

Es werden also vor dem Umsteuern vom schnellen Rücklauf auf den Arbeitsgang $\frac{15}{16} = 93,8$ v. H. (s. oben) der in den bewegten Massen aufgespeicherten Arbeit zurückgewonnen, und nur $\frac{1}{16} = 6,2$ v. H. ist durch Umsteuern noch zu vernichten.

Wird nun nach der Umkehr durch Feldschwächung allmählich die Schnittgeschwindigkeit auf 2, d. h. auf das Doppelte der minimalen heraufgebracht und kurz vor dem Hubende wieder $n_{\min} = 1$ durch Feldstärke eingestellt, so ist der Gewinn an dieser Seite:

$$A_a = \frac{J\omega_3^2}{2} - \frac{J\omega_2^2}{2} = \left(1^2 - \frac{1}{2^2}\right) C = \frac{3}{4} C,$$

d. h. $\frac{3}{4} = 0,75$ v. H. der aufgespeicherten Arbeit.

Es gehen also im ganzen nur $6,2 + 25 = 31,2$ v. H. der aufgewendeten Arbeit verloren, was gegenüber den mechanischen und elektromagnetischen Kupplungen einen Gewinn von ≈ 70 v. H. bedeutet.

Als ein besonderer Vorteil darf das allmähliche Heruntersetzen der Drehzahl gegen das Hubende auch noch aus folgenden zwei Gründen angesehen werden:

a) Das Werkzeug tritt mit geringer Geschwindigkeit in das Werkstück ein, was einen stark verminderten Stoß an der Arbeitsstelle bedeutet, kann dann allmählich bis auf eine Schnittgeschwindigkeit gebracht werden, die man ihm sonst, wegen des eben erwähnten Stoßes, nicht geben dürfte und verläßt das Werkstück ebenfalls mit herabgesetzter Geschwindigkeit, was ein Ausbröckeln des Werkstückes am Hubende verhindert.

Man erhält also ein Geschwindigkeitsdiagramm ähnlich dem in Fig. 74, erzielt kürzere Arbeitszeiten, bedeutende Schonung des Werkzeuges und größere Sauberkeit der bearbeiteten Fläche.

b) Weil die Geschwindigkeit der treibenden Teile bereits vor der Umkehr und allmählich heruntersetzt wird, so legen sich die Flanken sämtlicher arbeitenden Zahnradpaare schon vorher in die für die umgekehrte Arbeitsrichtung nötige Lage; ein Stoß im Getriebe kann also nicht auftreten, und die Getriebeteile werden erheblich geschont.

V. Berechnen und Entwerfen von Werkzeugmaschinen.

A. Entwurf einer Zugspindeldrehbank von 150 mm Spitzenhöhe mit 8 verschiedenen Drehzahlen.

Gegeben: $v_{\min} = 7,5$ m/min, $d_{\min} = 20$ mm

$v_{\max} = 20$ „ $d_{\max} = 300$ „

8 Vorschübe für den Längszug von 0,1 bis 1,4 mm/Umdr.

8 „ „ „ Planzug „ 0,075 „ 1,03 „

Schnittantrieb.

1. Berechnung der Grenzdrehzahlen (S. 1234).

$$n_1 = \frac{7,5 \cdot 1000}{300 \cdot 3,14} \approx 8 \text{ Umdr./min,}$$

$$n_8 = \frac{20 \cdot 1000}{20 \cdot 3,14} \approx 320 \text{ „}$$

2. Übersetzung und Zähnezahlen des Rädervorgeleges.

Auf logarithmischem Koordinatenpapier (s. Fig. 366 und 32) zieht man die Gerade $n_1 n_8$. Die Drehzahlen von n_1 bis n_4 werden mit, die von n_5 bis n_8 ohne Rädervorgelege hergestellt — diese stellen also gleichzeitig die 4 Drehzahlen der Stufenscheibe vor — und deshalb ist die Übersetzung des Rädervorgeleges:

$$J = \frac{n_1}{n_8}$$

Aus dem Diagramm entnimmt man $n_5 = 66$, mithin

$$J = \frac{8}{66} = \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 \cdot Z_4}$$

Die Entwurfskizze Fig. 367 zeigt, daß Rad Z_1 sich mit der Stufenscheibe lose auf der ziemlich starken Spindel drehen muß, deshalb nicht zu klein im Durchmesser sein darf, während das gleiche Bedenken für Rad Z_3 nicht gilt; man wird also gut tun, den größten Teil der Gesamtübersetzung durch das Räderpaar $\frac{Z_3}{Z_4}$ hervorzubringen, also die Anordnung etwa folgendermaßen zu treffen:

$$\begin{aligned} J &= \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 \cdot Z_4} = \frac{8 \cdot 20}{20 \cdot 66} \\ &= \frac{1 \cdot 1}{2,5 \cdot 3,3} \end{aligned}$$

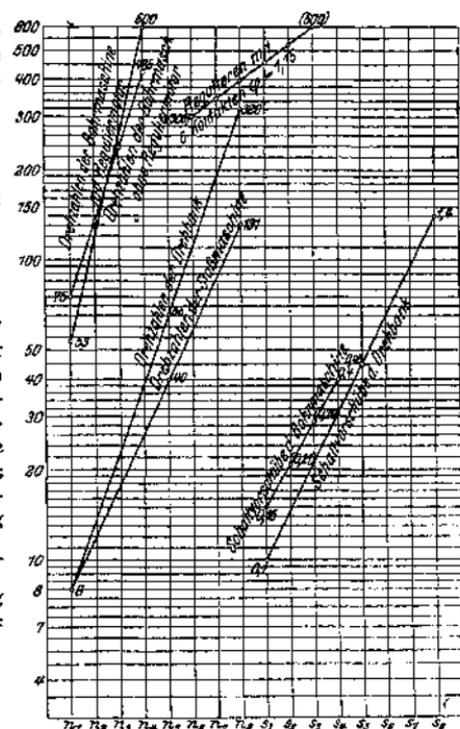


Fig. 366.

Nimmt man, da in den Teilkreisen der Räder 3, 4 die größere Kraft zu übertragen sein wird, die Modulus folgendermaßen an:

$$M_{1,2} = 4 \text{ mm}, \quad M_{3,4} = 5 \text{ mm},$$

so ergibt sich, da gleiche Achsenentfernung Bedingung ist:

$$\frac{4}{2} (Z_1 + Z_2) = \frac{5}{2} (Z_3 + Z_4),$$

oder:

$$Z_1 + Z_2 = \frac{5(Z_3 + Z_4)}{4},$$

d. h., damit die Zähnesumme $Z_1 + Z_2$ eine ganze Zahl sei, muß $Z_3 + Z_4$ durch 4 teilbar sein. Wird nun angenommen, daß der Durchmesser der größten Stufe $d_1 = 250$ mm ist, was ungefähr der Spitzenhöhe von 150 mm entspricht, und stellt man ferner die Bedingung, daß der Außendurchmesser des Rades 4 annähernd mit dieser Stufe abschneiden soll, so ergibt sich der Kopfkreisdurchmesser für Rad 4 zu:

$$250 = d_k = M(Z_4 + 2), \quad \text{oder} \quad Z_4 = \frac{250}{5} - 2 = 48 \text{ Zähne};$$

$$Z_3 = \frac{Z_4}{3,3} \text{ (s. oben) würde dann } 14,5 \text{ Zähne ergeben.}$$

Diese Zahl muß auf 15 erhöht werden und Z_4 auf 49, damit das Übersetzungsverhältnis erhalten bleibt und $(Z_3 + Z_4)$ durch 4 teilbar wird. Es steht also vorläufig fest:

$$Z_3 = 15, \quad Z_4 = 49 \text{ Zähne.}$$

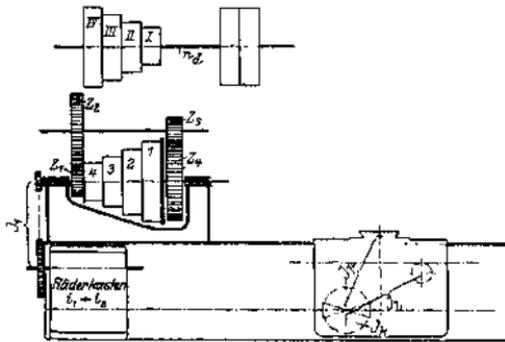


Fig. 367.

Mithin ist die Achsenentfernung

$$E = \frac{M_{3,4}}{2} (Z_3 + Z_4) = \frac{M_{1,2}}{4} (Z_1 + Z_2) = 160 \text{ mm}$$

und die Zähnesumme für das erste Räderpaar:

$$Z_1 + Z_2 = \frac{E \cdot 2}{M_{1,2}} = \frac{160 \cdot 2}{4} = 80 \text{ Zähne.}$$

Außerdem ist, da

$$\frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 \cdot Z_4} = \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \frac{15}{49} = \frac{8}{66} \quad \text{und} \quad \frac{Z_1}{Z_2} = 0,396:$$

$Z_1 + Z_2 = 80 = Z_2 \cdot 1,396$, d. h. $Z_2 = 58$, $Z_1 = 80 - Z_2 = 22$ Zähne.

Das tatsächliche Übersetzungsverhältnis des Rädervorgeleges ist also

$$J = \frac{22 \cdot 15}{58 \cdot 49} = \frac{8}{64,8};$$

gegenüber dem geforderten Wert ist ein Fehler von $\frac{1,2}{66} = 1,82$ v. H. vorhanden, der vernachlässigt werden kann.

3. Ermittlung des Quotienten der Stufenreihe.

Da $n_5 = n_1 \varphi^4$ sein muß, so ist $\varphi = \sqrt[4]{\frac{n_5}{n_1}} = \sqrt[4]{\frac{66}{8}}$. $\varphi = 1,694$.

4. Abmessungen der Stufenscheiben.

Die beiden Stufenscheiben auf der Drehspindel und am Deckenvorgelege sollen gleich sein, also ist folgendes Schema aufzustellen:

$d_1 = d_{IV}$	$\frac{d_I}{d_1}$	$\frac{d_{II}}{d_2}$	$\frac{d_{III}}{d_3}$	$\frac{d_{IV}}{d_4}$	
$d_2 = d_{III}$	$\frac{1}{\sqrt{\varphi^3}}$	$\frac{1}{\sqrt{\varphi}}$	$\frac{\sqrt{\varphi}}{1}$	$\frac{\sqrt{\varphi^3}}{1}$	(s. S. 1244)
$d_3 = d_{II}$	$\frac{113}{250}$	$\frac{158}{205}$	$\frac{205}{158}$	$\frac{250}{113}$	
$d_4 = d_I$	$\frac{113}{250}$	$\frac{158}{205}$	$\frac{205}{158}$	$\frac{250}{113}$	
$\sqrt{\varphi} = 1,3$					
$\sqrt{\varphi^3} = 2,21$					

da (s. oben) $d_1 = d_{IV} = 250$ mm angenommen wird, so ist

$$d_I = d_4 = \frac{250}{2,21} = 113 \text{ mm,}$$

ferner

$$d_{II} = d_3 = \frac{d_I + d_1}{1 + \sqrt{\varphi}} = \frac{363}{2,3} = 158 \text{ mm, } d_2 = d_{III} = 363 - 158 = 205 \text{ mm.}$$

Zusammenstellung: $d_1 = d_{IV} = 250$ mm

$d_3 = d_{III} = 205$ „

$d_2 = d_{II} = 158$ „

$d_4 = d_I = 113$ „

5. Drehzahl des Deckenvorgeleges.

Der Riemen liege auf den Stufen I, 1, die Stufenscheibe mache also (s. unter 2.) $n_5 = 66$ Umrdr./min, dann ist

$$n_4 = n_5 \frac{d_1}{d_I} = 66 \frac{250}{113} \approx 145 \text{ Umrdr./min.}$$

6. Zusammenstellung der Drehzahlen und Vergleich mit den theoretischen Werten der Reihe

	1	2	3
$n_1 = 145 \cdot \frac{22 \cdot 15}{58 \cdot 49} \cdot \frac{113}{250} =$	8,12	8	8
$n_2 = 145 \cdot \frac{22 \cdot 15}{58 \cdot 49} \cdot \frac{158}{205} =$	13,9	14	14
$n_3 = 145 \cdot \frac{22 \cdot 15}{58 \cdot 49} \cdot \frac{205}{158} =$	23,3	23	23
$n_4 = 145 \cdot \frac{22 \cdot 15}{58 \cdot 49} \cdot \frac{250}{113} =$	39,7	40	39
$n_5 = 145 \cdot \frac{113}{250} =$	65,5	66	66
$n_6 = 145 \cdot \frac{158}{205} =$	111,8	112	112
$n_7 = 145 \cdot \frac{205}{158} =$	188	188	188
$n_8 = 145 \cdot \frac{250}{113} =$	321	321	320

Spalte 2 enthält die auf ganze Drehzahlen abgerundeten tatsächlichen Werte für die 8 Drehzahlen, Spalte 3 zum Vergleich die theoretisch richtigen Werte nach dem logarithmischen Diagramm.

Schaltantrieb.

7. Verteilung der Übersetzungen (Fig. 367).

Angenommen ist für den Längszug:

Zahnstangenteilung: $M = 5$ mm; das eingreifende Trieb habe $Z_7 = 12$ Zähne. Dann ist

$$s_1 = 0,1 = 12 \cdot 5 \cdot 3,14 J_1 \cdot i_1 \cdot J_k \cdot J_l,$$

worin

$$J_k \approx \frac{1}{4}, \quad J_l \approx \frac{1}{12,5}, \quad J_1 \approx \frac{1}{3}$$

vorläufig angenommen werden soll.

Angenommen für den Planzug:

Steigung der Supportspindel: $S = 5$ mm. (Da meist eine Teilscheibe angeordnet wird, die Verstellungen des Schlittens um 0,1 mm angeben soll, so empfiehlt sich eine Steigung von 5 oder 10 mm.) J_1 und i_1 gelten auch für den Planzug, J_p soll erst nachher bestimmt werden.

8. Räderkasten

(nach Bickford, mit Norton-Schwinge), Fig. 368 und 369, 64 bis 66.

Quotient φ' der Reihe.

Nach dem logarithmischen Diagramm ergibt sich für $s_1 = 0,1$ und $s_2 = 1,4$ der Wert

$$s_6 = 0,45 \text{ mm/Umdr.},$$

mithin, da

$$s_3 = s_1 \cdot \varphi'^4 : \varphi' = \sqrt[4]{\frac{0,45}{0,1}} = 1,456$$

und

$$\varphi'^2 = 2,12, \quad \varphi'^3 = 3,08.$$

Schema:

$\frac{Z_1}{Z_1}$	$\frac{Z_1}{Z_2}$	$\frac{Z_1}{Z_3}$	$\frac{Z_1}{Z_4}$
a	$a \cdot \varphi'$	$a \cdot \varphi'^2$	$a \cdot \varphi'^3$
$\frac{12}{62}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{12}{29}$	$\frac{12}{20}$

also: $\frac{Z_1}{Z_4} = \varphi'^3 = 3,08.$

$$Z_1 = 62, \quad Z_4 = 20,$$

$$Z_2 = Z_4 \cdot \varphi'^2 = 20 \cdot 2,12 = 42,$$

$$Z_3 = Z_4 \cdot \varphi' = 20 \cdot 1,456 = 29,$$

in das Schema schon eingetragen, genügen dieser Bedingung.

$$Z_I = 12$$

wird angenommen; ein etwaiger Fehler läßt sich durch Abändern der anderen Teilübersetzungen J_1, J_k, J_l ausgleichen.

Die Zugspindel W_8 (Fig. 368) wird von Welle W_2 aus entweder über Z_8, Z_5 ins Langsame, oder über Z_1, Z_6 ins Schnelle angetrieben.

Wählt man $Z_5 = Z_1 = 62$; $Z_6 = Z_3 = 29$, so ergeben sich, je nach der Übersetzung über Z_3, Z_5 , oder über Z_1, Z_6 , zwei Gruppen von Drehzahlen, die sich verhalten wie

$$\frac{1}{\varphi'^4}, \text{ d. h. wie } \frac{s_1}{s_5} = \frac{s_2}{s_6} = \frac{s_3}{s_7} = \frac{s_4}{s_8}.$$

Zusammenstellung der Zähnezahlen für den Räderkasten:

$$\begin{array}{ll} Z_1 = 62 & Z_5 = 62 \\ Z_2 = 42 & Z_6 = 29 \\ Z_3 = 29 & Z_I = 12 \\ Z_4 = 20 & Z = 29 \end{array} \quad M = 2 \text{ mm}$$

Z ist Zwischenrad, also beliebig, und wird möglichst mit gleicher Zähnezahl wie ein schon vorhandenes gewählt.

Die kleinste Übersetzung im Räderkasten ist:

$$i_1 = \frac{12 \cdot 29}{62 \cdot 62} = 0,0906.$$

Wird dieser Wert für i_1 in die Formel unter 7) eingesetzt, so ergibt sich:

$$s_1 = 12 \cdot 5 \cdot 3,14 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,0906 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12,5} = 0,1137 \text{ mm/Umdr.},$$

ein Wert, der durch geringe Veränderung von J_1 (s. unter 10) auf den richtigen Betrag von $s_1 = 0,1$ mm/Umdr. zu bringen ist.

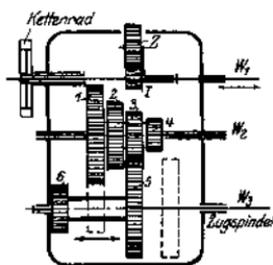


Fig. 368.

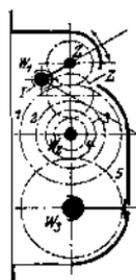


Fig. 369.

9. Supportbettplatte.

Auf der Zugspindel sind zwei Kegelräder k_1 und k_2 (Fig. 370/371 und 372) aufgefädert, die durch einen Greifer in der Längsrichtung verschoben werden können (s. auch Fig. 217, 218).

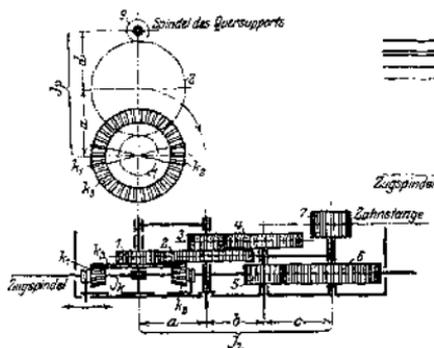


Fig. 370 und 371.

$$k_1 = k_2 = 18, \quad k_3 = 72, \quad M = 2 \text{ mm},$$

so daß also

$$J_k = \frac{k_1}{k_3} = \frac{k_2}{k_3} = \frac{1}{4} \text{ ist.}$$

Auf der Achse von k_3 ist ein Stirnrad 1 befestigt, das mit Rad 2 kämmt, gewählt werde:

$$Z_1 = 35, \quad Z_2 = 70, \quad M = 2 \text{ mm}$$

Rad 2 ist in einer Schwinge gelagert und in einem Schlitz der Bettplatte (s. Fig. 240) festzustellen, so daß es entweder über Zwischenrad 8 auf Rad 9, oder über ein mit ihm auf gleicher Achse festsetzendes Rad 3, auf Rad 4 treiben kann,

$$Z_9 = 16, \quad \text{angenommen } M = 2 \text{ mm.}$$

$$Z_3 = 22, \quad Z_4 = 55, \quad \text{angenommen } M = 2,5 \text{ mm.}$$

Von Rad 4 geht der Antrieb über 5 und 6 zum Zahnrad 7, das in die Zahnstange am Bett eingreift (s. auch unter 7).

$$Z_5 = 20, \quad Z_6 = 50, \quad \text{angenommen } M = 3 \text{ mm}$$

$$Z_7 = 12, \quad \text{s. unter 7, } M = 5 \text{ mm.}$$

Es ist also

$$J_1 = \frac{Z_1 \cdot Z_3 \cdot Z_5}{Z_2 \cdot Z_4 \cdot Z_6} = \frac{1}{12,5} \quad (\text{s. unter 7})$$

und

$$J_p = \frac{Z_1}{Z_0} = \frac{2,19}{1}.$$

10. Kettenräderübersetzung von der Drehspindel zum Räderkasten.

(Fig. 367.)

Die Übersetzung J_1 muß, da J_k und J_1 die vorgeschriebenen Werte erhalten haben (s. unter 7 und 8), noch etwas abgeändert werden; es muß sein:

$$J_1 = \frac{s_1}{12 \cdot 5 \cdot 3,14 \cdot i_1 \cdot J_k \cdot J_1} = \frac{0,1 \cdot 4 \cdot 12,5}{12 \cdot 5 \cdot 3,14 \cdot 0,0906} = 0,293.$$

Wählt man die Kettenräder mit 15 und 51 Zähnen, so ist auch dieser Bedingung genügt.

11. Zusammenstellung der Schaltvorschübe für den Längszug.

(S. unter 9.)

	1	2	3
$s_1 = 12 \cdot 5 \cdot 3,14$	$\frac{15 \cdot 1 \cdot 1}{51 \cdot 4 \cdot 12,5} \cdot \frac{29}{62} \cdot \frac{12}{62} = 0,1003$	0,10	0,1
$s_2 = 12 \cdot 5 \cdot 3,14$	$\frac{15 \cdot 1 \cdot 1}{51 \cdot 4 \cdot 12,5} \cdot \frac{29}{62} \cdot \frac{12}{42} = 0,148$	0,15	0,146
$s_3 = 12 \cdot 5 \cdot 3,14$	$\frac{15 \cdot 1 \cdot 1}{51 \cdot 4 \cdot 12,5} \cdot \frac{29}{62} \cdot \frac{12}{29} = 0,214$	0,21	0,21
$s_4 = 12 \cdot 5 \cdot 3,14$	$\frac{15 \cdot 1 \cdot 1}{51 \cdot 4 \cdot 12,5} \cdot \frac{29}{62} \cdot \frac{12}{20} = 0,311$	0,31	0,308
$s_5 = 12 \cdot 5 \cdot 3,14$	$\frac{15 \cdot 1 \cdot 1}{51 \cdot 4 \cdot 12,5} \cdot \frac{62}{29} \cdot \frac{12}{62} = 0,458$	0,46	0,45
$s_6 = 12 \cdot 5 \cdot 3,14$	$\frac{15 \cdot 1 \cdot 1}{51 \cdot 4 \cdot 12,5} \cdot \frac{62}{29} \cdot \frac{12}{42} = 0,677$	0,68	0,65
$s_7 = 12 \cdot 5 \cdot 3,14$	$\frac{15 \cdot 1 \cdot 1}{51 \cdot 4 \cdot 12,5} \cdot \frac{62}{29} \cdot \frac{12}{29} = 0,98$	0,98	0,95
$s_8 = 12 \cdot 5 \cdot 3,14$	$\frac{15 \cdot 1 \cdot 1}{51 \cdot 4 \cdot 12,5} \cdot \frac{62}{29} \cdot \frac{12}{20} = 1,42$	1,42	1,4

Für den Planzug (s. unter 7) genügt es, die Vorschubgröße s'_1 nachzuprüfen.

$$s'_1 = 5 \cdot \frac{15 \cdot 12 \cdot 29 \cdot 1 \cdot 35}{51 \cdot 62 \cdot 62 \cdot 4 \cdot 16} = 0,074$$

(verlangt wurde $s'_1 = 0,075$).

12. Leistung des Antriebmotors.

Der Wirkungsgrad der Drehbank für den Schnittantrieb werde zu $\eta = 0,7$ angenommen. Soll Maschinenstahl mit $v = 10$ m/min gedreht werden, mit einem Vorschube $s = 0,46$ mm/Umdr. und einer Spantiefe $t = 5$ mm, so ergibt das Diagramm Fig. 14 den Schnittdruck

$$P = P' \approx 600 \text{ kg.}$$

Also ist

$$N = \frac{P \cdot v}{60 \cdot 75 \cdot 0,7} = \frac{600 \cdot 10}{60 \cdot 75 \cdot 0,7} = 2,22 \text{ PS.}$$

Für den Schaltantrieb sei — wegen der vielen Zahnräder — $\eta' = 0,3$ angenommen.

Die Schaltgeschwindigkeit ist

$$v' = \frac{s \cdot n}{1000} \text{ m/min.}$$

Das Sägendiagramm Fig. 38 — für die vorliegenden Drehzahlen gezeichnet — ergibt für Maschinenstahl und 100 mm Durchmesser (Mittelwert) $n_s = 39$ Umdr./min, mithin

$$N' = \frac{P' \cdot v'}{60 \cdot 75} = \frac{600 \cdot 0,46 \cdot 39}{60 \cdot 75 \cdot 1000} = 0,0239 \text{ PS.}$$

ein Wert, der gegenüber N gar nicht in Betracht kommt.

Es wird also ein Motor von $N = 2,25$ PS gewählt.

13. Beanspruchung des Antriebsriemens.

Die Breite der Riemenscheiben sei 60 mm, die des Riemens also 50 mm. Die geringste — also ungünstigste — Geschwindigkeit hat der Riemen, wenn er auf den Stufen I , I liegt, nämlich

$$v = \frac{d_I \cdot \pi \cdot n}{1000 \cdot 60} = \frac{113 \cdot 3,14 \cdot 145}{1000 \cdot 60} = 0,86 \text{ m/sek.}$$

Es ergibt sich also der Riemenzug:

$$P = \frac{N \cdot 75}{v} = \frac{2,25 \cdot 75}{0,86} = 197 \text{ kg}$$

und die Beanspruchung

$$p = \frac{P}{b} = \frac{197}{5} = 39,4 \text{ kg/cm Riemenbreite.}$$

ein Wert, der ungefähr 10 mal so hoch ist, wie der von Gehrke's zuglassene.

Da man breitere Stufen nicht gut verwenden kann, so muß man sich durch häufiges Nachspannen des Riemens helfen.

14. Beanspruchung der Vorgelegerräder der Drehspindel.

Die Räder 3 , 4 haben den Schnittdruck, unter Umständen an einem Radius gleich dem des Teilkreises von Rad 4 , aufzunehmen. Die von ihnen auch noch zu überwindenden Reibungswiderstände in der Spindellagerung sollen außer Betracht bleiben.

Die Umfangskraft ist

$$P = 600 = b \cdot c \cdot t = 5 \cdot c \cdot 0,5 \cdot \pi^1),$$

also

$$c = \frac{600}{2,5 \cdot 3,14} = 76,5 \text{ kg/cm}^2.$$

Dieser Druck kann dauernd nur von Rädern aus Werkzeugstahl — noch besser aus Chromnickelstahl — aufgenommen werden.

Die Räder 1 , 2 haben nur einen Teil von dem Druck P aufzunehmen, nämlich $P \frac{r_3}{r_2}$, doch soll für die Reibung in Spindellagern und Vorgelegewelle ein Zuschlag von 15 v. H. gegeben werden. Der Modul ist $M = 4$ mm, die Breite demnach $b = 40$ mm und

$$P' = P \frac{r_3}{r_2} 1,15 = \frac{600 \cdot 15 \cdot 5 \cdot 2}{2 \cdot 58 \cdot 4} \cdot 1,15 = 223 \text{ kg,}$$

der spezifische Zahndruck:

$$c = \frac{223}{4 \cdot 0,4 \cdot 3,14} = 44,3 \text{ kg/cm}^2.$$

Ein Druck, der ebenfalls bestes Material und sehr sorgfältige Ausführung und Wartung nötig macht.

15. Die Drücke im Schaltantrieb

sind entsprechend zu untersuchen, wobei nach Fischer und Taylor angenommen wird, daß im Zahnstangeneingriff ein Druck P' gleich dem Schnittdruck P herrsche; man hat dann dem, ja eigentlich kleineren, Schaltdruck W'' (Fig. 14) bereits die in den Gleitbahnen des Supports entstehenden Reibungswiderstände zugezählt.

¹⁾ Normalräder haben eine Breite $b = 10 \cdot M$.

$$i_3 = \frac{Z_5}{Z_6} = \frac{\varphi}{1} = \frac{40}{27},$$

andere einfache Übersetzungen sind:

$$i_6 = \frac{Z_3}{Z_4} = \frac{1}{\varphi} = \frac{27}{40},$$

$$i_5 = \frac{Z_1}{Z_9} = \frac{1}{\varphi^2} = \frac{21}{46},$$

$$i_4 = \frac{Z_7}{Z_8} = \frac{1}{\varphi^2} = \frac{15}{52}.$$

(s. Fig. 71).

Zwischen Räderkasten und Antriebsrad 11 (s. Fig. 373, 374) soll noch ein Vorgelege gebracht werden, damit der nicht unerhebliche Zahndruck im Getriebe 11, 12 nicht unmittelbar den Räderkasten belastet, gewählt wird:

$$Z_9 = 37, \quad Z_{10} = 52.$$

Zusammenstellung der Zähnezahlen:

α) Räderkasten:

$$\left. \begin{array}{ll} Z_1 = 21 & Z_5 = 40 \\ Z_6 = 46 & Z_8 = 27 \\ Z_3 = 27 & Z_7 = 15 \\ Z_4 = 40 & Z_9 = 52 \end{array} \right\} M = 2,5 \text{ mm.}$$

β) Vorgelege:

$$Z_9 = 37 \quad Z_{10} = 52 \quad M = 3 \text{ mm.}$$

5. Zahnrad zum Antrieb des Kurbelarmes r .

Dieses Zahnrad 12 soll so groß gewählt werden, daß sein Teilkreis jedenfalls nicht kleiner als $2r$ wird.

Der Teilkreisdurchmesser wird deshalb $d_{12} = 212 \text{ mm}$, d. h. $> 2r$ (s. unter 1) angenommen, was für den Modul

$$M = 4 \text{ mm.}$$

ergibt:

$$Z_{12} = \frac{d_{12}}{M} = \frac{212}{4} = 53.$$

6. Drehzahl für die Riemenscheibe und Zähnezahl für Trieb 11.

$$n_8 = 131 = n \frac{40 \cdot 37 \cdot z_{11}}{27 \cdot 52 \cdot 53}$$

$$n \cdot z_{11} = \frac{131 \cdot 27 \cdot 52 \cdot 53}{40 \cdot 37} = 6590$$

$$n = 550 \text{ Umdr./Min. und } z_{11} = 12$$

genügen dieser Bedingung.

7. Vergleichende Zusammenstellung der Zähnezahlen.

	1	2	3
$n_1 = 550$	$\frac{37 \cdot 12}{52 \cdot 53} \cdot \frac{21 \cdot 27 \cdot 15}{46 \cdot 40 \cdot 52} = 7,9$	8	8
$n_2 = 550$	$\frac{37 \cdot 12}{52 \cdot 53} \cdot \frac{27 \cdot 27 \cdot 15}{40 \cdot 40 \cdot 52} = 11,67$	12	12
$n_3 = 550$	$\frac{37 \cdot 12}{52 \cdot 53} \cdot \frac{21 \cdot 40 \cdot 15}{46 \cdot 27 \cdot 52} = 17,3$	17	18
$n_4 = 550$	$\frac{37 \cdot 12}{52 \cdot 53} \cdot \frac{15}{52} = 25,6$	26	26,5
$n_5 = 550$	$\frac{37 \cdot 12}{52 \cdot 53} \cdot \frac{21}{46} = 40,5$	41	40
$n_6 = 550$	$\frac{37 \cdot 12}{52 \cdot 53} \cdot \frac{27}{40} = 59,8$	60	60
$n_7 = 550$	$\frac{37 \cdot 12}{52 \cdot 53} \cdot \frac{21 \cdot 40 \cdot 40}{46 \cdot 27 \cdot 27} = 88,3$	88	88
$n_8 = 550$	$\frac{37 \cdot 12}{52 \cdot 53} \cdot \frac{40}{27} = 131,4$	131	131

Spalte 2 enthält die auf ganze Drehzahlen abgerundeten, aus den Abmessungen ermittelten Werte, Spalte 3 zum Vergleich die aus dem logarithmischen Koordinatenpapier entnommenen Werte.

8. Aufstellung des Sägendagramms (Fig. 378).

Auch für die vorliegende Maschine läßt sich ein Diagramm, ähnlich dem in Fig. 38, aufstellen und zur Wahl der Drehzahlen für die vorliegende Hobelarbeit — zu Hub und Schnittgeschwindigkeit passend — benutzen.

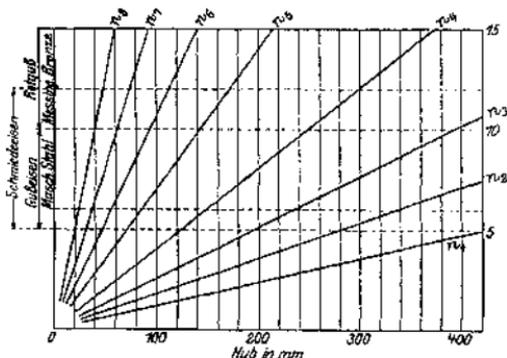


Fig. 375.

Allerdings weist die schon benutzte Formel

$$v_m = \frac{z \cdot h}{1000} \cdot \frac{m+1}{m}$$

nicht die gleiche Beziehung auf, wie dies für die Drehzahlen der Drehbänke und auch der Bohrmaschinen (s. unten) der Fall ist, da $\frac{m+1}{m}$ kein konstanter Wert ist.

Es ist nämlich, wie aus den Ausführungen auf S. 1261 entnommen werden kann:

$$\frac{m}{m+1} = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}, \text{ und da } \alpha = 180^\circ - \beta \text{ und } \cos \beta = \frac{h}{2R}$$

ist, so besteht eine, allerdings nicht ganz bequeme Beziehung zwischen $\frac{m}{m+1}$ und h .

Für die Grenzwerte des Hubes ist

$$\left. \begin{array}{l} \text{für } h = 420 \text{ mm:} \\ \text{„ } h = 60 \text{ „ :} \\ \text{und für } h = 0 \text{ :} \end{array} \right\} \frac{m}{m+1} = \frac{2}{3} \\ \frac{m}{m+1} = \frac{1,1}{2,1} \\ \frac{m}{m+1} = \frac{1}{2} \quad \text{s. unter 3.}$$

Nimmt man nun an, dieser Abfall von $\frac{2}{3}$ auf $\frac{1}{2}$ vollzöge sich — was nicht genau der Wirklichkeit entspricht — nach einer Geraden (siehe Fig. 376), so ergibt sich:

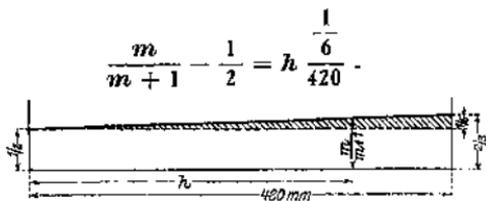


Fig. 376.

Diesen Wert kann man in die Formel

$$v_m = \frac{n \cdot h}{1000} \frac{m+1}{m}$$

einsetzen und erhält

$$\text{für } v_m = 15 \text{ m/min: } h = \frac{1260}{n \cdot 0,168 - 1}$$

und

$$\text{für } h = 420 \text{ mm: } v = n \cdot 0,63.$$

Mit diesen Formeln findet man Punkte auf der wagerechten oberen und der senkrechten rechts gelegenen Begrenzung des Diagramm-Rechteckes in Fig. 375, die uns entsprechende Diagramme¹⁾ für die Drehzahlen n_1 bis n_n liefern. Liegt z. B. ein Hub von $h = 200 \text{ mm}$ und als Material Gußeisen oder Maschinenstahl vor, so würde nach dem Diagramm die Drehzahl $n_4 = 26 \text{ Umdr/min}$ die richtige Schnittgeschwindigkeit $v_m = 8,1 \text{ m/min}$ liefern.

Die genaue Rechnung für $h = 200 \text{ mm}$, $n = 26 \text{ Umdr/min}$ liefert zunächst:

$$\cos \beta = \frac{200}{2 \cdot 420} = 0,238, \quad \alpha = 103^\circ 45', \quad \frac{m}{m+1} = \frac{\alpha^\circ}{130^\circ} = 0,577.$$

und endlich:

$$v_m = \frac{26 \cdot 200}{1000 \cdot 0,577} = 9 \text{ m/min.}$$

¹⁾ S. S. 1241 zu Fig. 38.

Die Abweichung beträgt allerdings 10%, doch wenn man bedenkt, daß sonst der Arbeiter überhaupt gar keinen Anhalt bei Wahl der Drehzahl hat — denn eine Bestimmung der Schnittgeschwindigkeit mit irgendeinem Meßwerkzeug ist bei den kurzen Hübten unmöglich —, so wird der Vorteil des Diagramms immerhin einleuchten; zumal wenn man dem Arbeiter zur Pflicht macht, in Zweifelsfällen stets die kleinere Drehzahl von zwei möglichen zu verwenden.

In der Nähe der Hubgrenzen $h' = 60$ mm, $h = 420$ mm wird der Fehler geringer, um an den Grenzen selbst zu verschwinden.

9. Leistung des Antriebsmotors.

Aus dem Diagramm Fig. 14 und unter Zugrundelegung einer Spanstärke $t = 5$ mm und einer Schaltung $s = 0,5$ mm/Hub ergibt sich bei $v = 10$ m/min für Maschinenstahl die Schnittkraft

$$P = 500 \text{ kg.}$$

Bei einem Gesamtwirkungsgrad von $\eta = 0,6$ — in Berücksichtigung der an den gleitenden Teilen auftretenden Reibung — ergibt sich

$$N = \frac{P \cdot v}{60 \cdot 75 \cdot 0,6} = \frac{500 \cdot 10}{60 \cdot 75 \cdot 0,6} = 1,85 \text{ PS.}$$

Da die Schaltung [siehe später] nicht unter Schnittdruck geschieht, so kann ihr Kraftverbrauch, ebenso wie der für Beschleunigung und Verzögerung der Massen, der vor und nach dem Arbeitsweg erfolgt, unberücksichtigt bleiben.

10. Beanspruchung des Riemens.

Für die Riemenscheibe werde gewählt

$$\text{ein Durchmesser } d = 250 \text{ mm.}$$

$$\text{eine Scheibenbreite } b = 55 \text{ mm.}$$

Die Drehzahl ist (s. unter 6)

$$n = 550 \text{ Umdr./min,}$$

mithin

$$v = \frac{d \cdot \pi \cdot n}{1000} = \frac{250 \cdot 3,14 \cdot 550}{1000} = 432 \text{ m/min}$$

und

$$P = N \frac{60 \cdot 75}{v} = \frac{1,85 \cdot 60 \cdot 75}{432} = 19,26 \text{ kg,}$$

bei einer Riemenbreite von

$$b = 45 \text{ mm}$$

ergibt sich die Riemenbelastung

$$p = \frac{19,26}{4,5} = 4,29 \text{ kg/cm.}$$

Es zeigt sich auch hier wieder, wie schon auf S. 1259 gefunden wurde, daß der Einscheibenantrieb die Riemen gegenüber dem Antrieb mit Stufenscheibe ganz erheblich entlastet.

11. Beanspruchung der Zahnräder.

α) Getriebe 11, 12.

Wie aus Fig. 373 zu ersehen ist, greift der Zerspanungsdruck $P=500$ kg am Arm L des Schwinghebels an, während der Zahndruck P_z in der Entfernung $e + r_{12}$ vom Drehpunkte wirkt.

Es ist:

$$L = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}} = \sqrt{420^2 - 210^2} = 363 \text{ mm}$$

und

$$e + r_{12} = 210 + \frac{53 \cdot 4}{2} = 316 \text{ mm},$$

folglich

$$P_z = \frac{1,15 \cdot 500 \cdot 363}{316} = 660 \text{ kg},$$

weil ein Zuschlag von 15%, entsprechend den Reibungswiderständen in den Gleitbahnen, nötig ist. Der spezifische Zahndruck ergibt sich aus:

$$P_z = b \cdot c \cdot t,$$

zu

$$c = \frac{660}{4 \cdot 0,4 \cdot 3,14} = 131 \text{ kg/cm}^2.$$

β) Getriebe 9, 10.

(10% Zuschlag wegen der Reibungswiderstände.)

$$P'_z = P_z \cdot 1,1 \cdot \frac{r_{11}}{r_{10}} = \frac{660 \cdot 1,1 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 2}{2 \cdot 52 \cdot 3} = 224 \text{ kg},$$

$$P'_z = b \cdot c \cdot t,$$

mithin der spezifische Zahndruck:

$$c = \frac{224}{3 \cdot 0,3 \cdot 3,14} = 79,3 \text{ kg/cm}^2.$$

γ) Zahndruck im Räderkasten.

Der in den Teilkreisen der Räder 9, 10 auftretende Zahndruck überträgt auf Welle II ein Drehmoment, das in den Teilkreisen der verschiedenen mit dieser Welle zu kuppelnden Räder Drücke hervorruft. Der größte Druck entsteht im Teilkreis des kleinsten Rades auf Welle II, des Rades 6.

$$P''_z = P'_z \cdot 1,1 \cdot \frac{r_6}{r_9} = \frac{224 \cdot 1,1 \cdot 27 \cdot 2,5 \cdot 2}{2 \cdot 37 \cdot 3} = 150 \text{ kg},$$

$$P''_z = b \cdot c \cdot t$$

und der spezifische Zahndruck:

$$c = \frac{150}{2,5 \cdot 0,25 \cdot 3,14} = 76,5 \text{ kg/cm}^2.$$

Bei den hohen Drücken, die in allen Zahnradteilkreisen auftreten, kann also nur bestes Material und sorgfältigste Ausführung eine unzulässige Abnutzung verhindern.

6) Erzielung der Schaltvorschübe.

Der Schaltvorschub wird nach der in der Fig. 279 dargestellten Weise bewirkt. Auf der Tischspindel von einer Steigung $S = 4$ mm sitzt ein Rad mit 32 Scharnzähnen (s. auch Fig. 119, 120), und die Sperrklinke g wird durch die Schubstange st_1 so gesteuert, daß sie bei äußerster Stellung des Kurbelzapfens um 8 dieser Schaltzähne bei einem Hin- oder Rückgang aushott und die Spindel so um höchstens

$$\frac{8}{32} = \frac{1}{4} \text{ einer vollen Umdrehung,}$$

also den Tisch um maximal $s_8 = S \cdot \frac{1}{4} = 1$ mm schaltet. Die kleinste Schaltung entspricht der Mitnahme des Scharnrades um einen Zahn, sie ist also

$$s_1 = \frac{S}{32} = \frac{1}{8} = 0,125 \text{ mm.}$$

C. Entwurf einer Senkrecht-Bohrmaschine

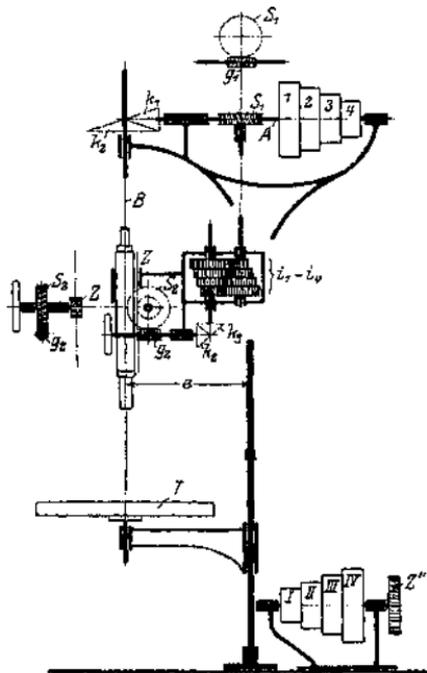


Fig. 377.

mit elektrischem Antrieb von $e = 250$ mm Ausladung mit 4 Drehzahlen für Bohrer von 15 bis 25 mm \varnothing und 4 Vorschüben (Fig. 377) von $s_1 = 0,15$ bis $s_4 = 0,4$ mm/Umdrehung.

Gegeben: $v_{\min} = 6 \text{ m/min}$, $d_{\min} = 15 \text{ mm}$
 $v_{\max} = 20 \text{ m/min}$, $d_{\max} = 25 \text{ mm}$.

Schnittantrieb.

1. Berechnung der Grenzdrehzahlen.

$$n_1 = \frac{6 \cdot 1000}{25 \cdot 3,14} \approx 75 \text{ Umdr./min}$$

$$n_4 = \frac{20 \cdot 1000}{15 \cdot 3,14} \approx 425 \text{ Umdr./min.}$$

2. Quotient φ der geometrischen Reihe.

$$n_4 = n_1 \varphi^3, \quad \varphi = \sqrt[3]{\frac{425}{75}} = 1,78.$$

3. Abmessungen der Stufenscheiben.

$$d_1 = d_{II} = 200 \text{ mm angenommen}$$

	$\frac{d_I}{d_1}$	$\frac{d_{II}}{d_2}$	$\frac{d_{III}}{d_3}$	$\frac{d_{IV}}{d_4}$
$d_2 = d_{III}$				
$d_3 = d_{II}$				
$d_4 = d_I$	$\frac{1}{\sqrt{\varphi}}$	$\frac{1}{\sqrt{\varphi}}$	$\frac{\sqrt{\varphi}}{1}$	$\frac{\sqrt{\varphi^3}}{1}$
$\sqrt{\varphi} = 1,335$	84	122	178	200
$\sqrt{\varphi^3} = 2,38$	200	178	122	84

$$d_2 = d_4 = \frac{d_1}{\sqrt{\varphi}} = \frac{200}{1,335} = 84 \text{ mm}, \quad d_{II} = d_3 = \frac{d_I + d_1}{1 + \sqrt{\varphi}} = \frac{284}{2,335} = 112 \text{ mm},$$

$$d_2 = d_{III} = 248 - 112 = 178 \text{ mm.}$$

$$\text{Zusammenstellung: } d_I = d_{IV} = 200 \text{ mm}$$

$$d_2 = d_{III} = 178 \text{ ,,}$$

$$d_3 = d_{II} = 122 \text{ ,,}$$

$$d_4 = d_I = 84 \text{ ,,}$$

4. Drehzahl des Fußvorgeleges.

Der Riemen liege auf den Stufen I, 1, die Bohrspindel macht demnach $n_1 = 75 \text{ Umdr./min.}$ und die obere Stufenscheibenwelle — weil $k_1/k_2 = 1:2$ angenommen wird — $n'_1 = 150 \text{ Umdr./min.}$, es ist also:

$$n_F = n'_1 \cdot \frac{d_1}{d_I} = 150 \frac{200}{84} = 367 \text{ Umdr./min.}$$

5. Zusammenstellung der Drehzahlen. Sägendigramm.

Die 4 Drehzahlen, aus dem logarithmischen Diagramm (Fig. 366) zu entnehmen oder aus den Stufendurchmessern und n_F zu errechnen, sind:

$$n_1 = 75 \text{ Umdr./min}$$

$$n_2 = 134 \quad ,,$$

$$n_3 = 238 \quad ,,$$

$$n_4 = 425 \quad ,,$$

Im Sägendigramm (Fig. 378) entsprechen den 4 Drehzahlen die strichpunktierten Strahlen.

Schaltantrieb.

6. Zahnstange und Trieb.

Die Teilung wird zu 3π und die Zähnezahzahl des Triebes $Z = 12$ gewählt, was eine Abweichung von der Normalform (s. Fig. 92) nötig macht.

7. Verteilung der Übersetzungen.

$$s_1 = 0,15 = 12 \cdot 3 \cdot 3,14 \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{g_1}{s_1} \cdot (i_1 \div i_4) \frac{k_3}{k_2} \cdot \frac{g_2}{s_2}$$

Es werde angenommen: $\frac{k_2}{k_1} = \frac{2}{1}$, $\frac{k_3}{k_2} = \frac{1}{1}$, $\frac{g_2}{s_2} = \frac{1}{30}$; dieser Schneckenantrieb muß selbsthemmend sein, wird also mit eingängiger Schnecke versehen, Schneckengetriebe $\frac{g_1}{s_1}$ wird erst nach Festlegung der Zähnezahlen für den Räderkasten ermittelt.

8. Zähnezahlen des Räderkastens.

Der Ziehkeil muß in der getriebenen Welle angebracht, diese also mit den größeren Rädern ausgerüstet werden, d. h. es müssen vorwiegend Übersetzungen ins Langsame gewählt werden, wie auch im Schema zu erkennen ist. Der Quotient

der Reihe ist $\eta = \sqrt[3]{\frac{0,4}{0,15}} = 1,385$, $\eta^3 = 1,92$.

$\frac{Z_I}{Z_1}$	$\frac{Z_{II}}{Z_2}$	$\frac{Z_{III}}{Z_3}$	$\frac{Z_{IV}}{Z_4}$
$\frac{1}{\eta^3}$	$\frac{1}{\eta}$	$\frac{1}{\eta}$	$\frac{\eta}{1}$
$\frac{17}{33}$	$\frac{21}{29}$	$\frac{35}{25}$	$\frac{29}{21}$

Zusammenstellung der Zähnezahlen:

$$\begin{aligned} Z_I &= 17 \\ Z_{II} &= Z_4 = 21 \\ Z_{III} &= Z_3 = 25 \quad \text{Mod} = 2 \text{ mm} \\ Z_{IV} &= Z_2 = 29 \\ Z_1 &= 33. \end{aligned}$$

9. Schneckenradübersetzung g_1/s_1 (s. unter 7).

Aus (8) folgt: $i_1 = \frac{1}{1,92}$, mithin ist

$$s_1 = 0,15 = 12 \cdot 3 \cdot 3,14 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{g_1}{s_2} \cdot \frac{17}{33} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{30},$$

d. h. $\frac{g_1}{s_1} = \frac{0,15 \cdot 33 \cdot 30}{36 \cdot 6,28 \cdot 17} = \frac{1}{26}$, also $g_1 = 2$, $s_1 = 52$.

Eine zweigängige Schnecke ($g_1 = 2$) ergibt einen besseren Wirkungsgrad, und die große Zähnezahl sorgt für eine genügende Entfernung der Radachse vom Mittelschnitt der Maschine.

10. Zusammenstellung der Schaltvorschübe.

$$s = 12 \cdot 3 \cdot 3,14 \cdot 2 \cdot \frac{2}{52} \cdot \frac{1}{30} (i_1 \div i_4) = 0,29 \cdot (i_1 \div i_4),$$

also aus den Übersetzungen errechnet:

$$s_1 = 0,151, \quad s_2 = 0,21, \quad s_3 = 0,29, \quad s_4 = 0,402 \text{ mm/Umdr.}$$

nach dem logarithmischen Diagramm:

$$s_1 = 0,15, \quad s_2 = 0,21, \quad s_3 = 0,29, \quad s_4 = 0,4 \text{ mm/Umdr.}$$

Antriebsmotor und Kraftverbrauch.

11. Drehmoment und Vorschubkraft.

Nach den Diagrammen auf S. 1231 ist für $d = 25$, Flußeisen als Werkstückmaterial und $s_2 = 0,21$ mm/Umdr.

$$R_1 \cdot s = 120 \text{ kg/mm, also das Drehmoment } M = 120 \cdot \frac{25^3}{80} = 940 \text{ cmkg,}$$

$$R \cdot s = 67 \text{ kg/mm, also die Vorschubkraft } F' = 67 \cdot 25 \cdot 0,433 = 725 \text{ kg.}$$

12. Leistung des Antriebsmotors.

1. Schnittantrieb. ($\eta = 0,65$, $n_1 = 75$ aus Diagramm Fig. 378.)

$$N = \frac{M \cdot n}{71\,620 \cdot \eta} = \frac{940 \cdot 75}{71\,620 \cdot 0,65} = 1,21 \text{ PS.}$$

2. Schaltantrieb. ($\eta' = 0,2$. $v' = \frac{s_2 \cdot n_1}{1000} = \frac{0,21 \cdot 75}{1000} = 0,0158 \text{ m/min}$)

$$N' = \frac{F' \cdot v'}{60 \cdot 75 \cdot \eta'} = \frac{725 \cdot 0,0158}{60 \cdot 75 \cdot 0,2} = 0,0127 \text{ PS.}$$

Es würde also ein Motor von einer Leistung

$$N = 1,6 \text{ PS}$$

genügen.

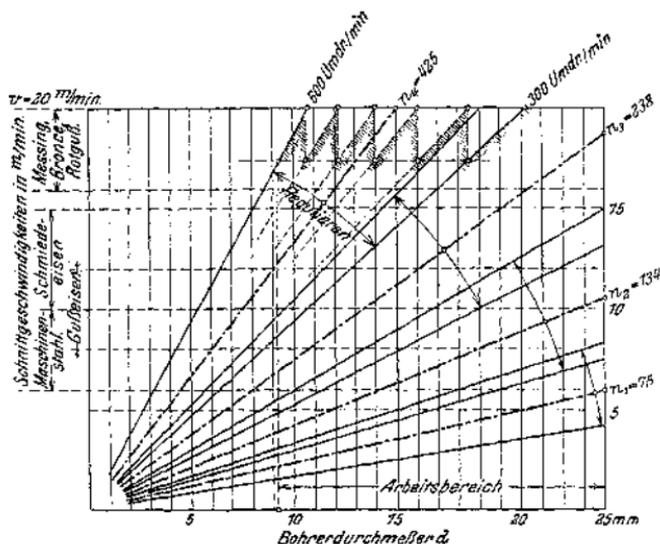


Fig. 378.

13. Motor und Regulierbereich.

Gewählt wird ein Gleichstrom-Nebenschlußmotor mit dem Regulierbereich (wegen $\varphi = 1,78$, s. unter 2) von 1 : 2. Listenmäßig²⁾ hat ein solcher Motor die

Grenzdrehzahlen 275 und 550 Umdr./min

bei einer Leistung von

$$N = 1,62 \text{ PS,}$$

die für den vorliegenden Fall ausreichen würde.

14. Übersetzungszahnräder $\frac{\text{Motor}}{\text{Fußvorgelege}}$.

Die Regulierung soll so verteilt werden, daß $n_4 \cdot \sqrt{2}$ die größte und $\frac{n_1}{\sqrt{2}}$ die kleinste tatsächliche Drehzahl der Bohrmaschine wird. Es soll also die Drehzahl des Fußvorgeleges

$$n_p = 367 \text{ Umdr./min (s. unter 4)}$$

hervorgebracht werden durch das geometrische Mittel aus den Drehzahlen des Motors:

$$n_m = \frac{550}{\sqrt{2}} = 389 \text{ Umdr.}$$

²⁾ Preisliste der A. E. G.

Für die Übersetzung $\frac{\text{Motor}}{\text{Fußvorgelege}} = \frac{367}{389}$ würde also ein

Rad auf der Motorwelle mit $Z = 50$ Zähnen,
auf der Fußvorgelegewelle mit $Z' = 53$ Zähnen (s. Fig. 377)
geeignet sein.

15. Einfluß des Reguliermotors auf den Arbeitsbereich der Bohrmaschine.

Wie schon unter 14 angeführt wurde, erreicht man durch den Reguliermotor eine Erhöhung der größten und eine Erniedrigung der kleinsten Drehzahl der Bohrspindel, so daß die Grenzen jetzt sind:

$$n_{\max} = 425 \cdot \sqrt{2} = 600 \text{ Umdr./min}$$

$$n_{\min} = \frac{75}{\sqrt{2}} = 53 \text{ Umdr./min}$$

Im logarithmischen Diagramm (Fig. 366) ist diese Zunahme deutlich zu erkennen und auch aus nachstehender Tabelle:

Drehzahlen	Reguliermotor	
	ohne	mit
n_1	75 Umdr./min	53 bis 116 Umdr./min
n_2	134 „	95 „ 190 „
n_3	238 „	168 „ 337 „
n_4	425 „	300 „ 600 „

16. Anzahl und Sprung der Regulierkontakte.

Da für einen Elektromotor ein Abfall der Drehzahl von 5 bis 10 v. H. als zulässig gilt, so hat es keinen Sinn, zu kleine Sprünge von φ zu fordern, und man ermittelt φ am besten aus

$$\frac{v - v'}{v} = \frac{\varphi - 1}{\varphi} \approx 10\% \text{ (s. S. 1241), d. h. } \varphi \approx 1,1.$$

Für die Grenzen der Drehzahlen $n'_1 = 300$, $n'_4 = 600$ Umdr./min ergäben sich also als Höchstzahl (s. S. 1235)

$$z = \frac{\log \frac{600}{300}}{\log \varphi} + 1, \quad \text{d. h. } \approx 8 \text{ Nuten.}$$

Bei Annahme von 6 Regulierstufen ergibt sich

$$\varphi = \sqrt[6]{\frac{600}{300}} = 1,15$$

und der maximale Schnittgeschwindigkeitsabfall zu

$$\frac{v - v'}{v} = \frac{\varphi - 1}{\varphi} = 13 \text{ v. H.,}$$

was, unter Berücksichtigung des obenerwähnten Zugeständnisses für die Motor drehzahlen, als vollkommen ausreichend angesehen werden kann.

Wie aus dem logarithmischen Diagramm (Fig. 366) zu entnehmen ist, entstehen durch den Reguliermotor unter Benutzung der Riemenlage IV/4 (n_4) die Zwischenwerte

$$300, 345, 396, 455, 525, 600 \text{ Umdr./min}$$

Die Drehzahlen stehen also genügend dicht.

17. Erweiterung des Arbeitsbereiches durch den Regullermotor.

In das Sägendigramm (Fig. 378) wurden für die Grenzen 300 und 600 (s. unter 7) die den Zwischenwerten entsprechenden Strahlen eingetragen, für n_1, n_2, n_3 nur die den Grenzdrehzahlen (s. unter 15) entsprechenden.

Man ist also jetzt in der Lage, einerseits die **höchste Schnittgeschwindigkeit** $r = 20 \text{ m/min}$ (mit einer Toleranz von 13 v. H.) noch für einen Bohrer von $d_{\min} = 9,2 \text{ mm}$ zu erreichen und andererseits den Bohrer von $d_{\max} = 25 \text{ mm}$ mit einer geringsten Schnittgeschwindigkeit von $v_{\min} = 4,25 \text{ m/min}$ (ausreichend für ganz hartes Material) umlaufen zu lassen.

18. Arbeitsdrücke in den Getriebeteilen.

Die Berechnung bietet nichts Neues gegenüber der Drehbank, auf die verwiesen wird. Zu bemerken ist nur, daß in Zahnstange und Trieb die hohe Vorschubkraft $P' = 725 \text{ kg}$ auftritt und das Drehmoment, durch geringe Zähnezahl für den Trieb, klein gehalten werden muß.

Elektrotechnik.

Bearbeitet von Dipl.-Ing. W. Gruhl.

I. Physikalische Grundgesetze.

1. Elektrotechnische Maßeinheiten.

Die physikalischen Größen lassen sich nach GAUß in absolutem Maß durch drei Grundeinheiten: Länge (cm), Masse (g) und Zeit (sek) ausdrücken. In diesem Zentimeter-Gramm-Sekunden-System (CGS-System) ist z. B. die Einheit der Geschwindigkeit = Weg : Zeit = $\frac{1 \text{ cm}}{1 \text{ sek}} = 1 \text{ CS}^{-1}$. Die „Dimension“ CS^{-1} läßt erkennen, in welcher Weise die abgeleitete Größe mit den Grundgrößen verknüpft ist.

Gebräuchliche mechanische Größen:

Zeichen	Begriff	Ableitung	Dimension	Benennung
v	Geschwindigkeit	Weg : Zeit	CS^{-1}	—
p	Beschleunigung	Geschwindigkeit : Zeit	CS^{-2}	—
P	Kraft	Masse · Beschleunigung	CGS^{-2}	Dyne
A	Arbeit	Kraft · Weg	C^2GS^{-2}	Erg
\mathcal{L}	Leistung	Arbeit : Zeit	C^2GS^{-3}	Erg pro Sek.
ω	Winkelgeschwindigkeit	Geschwindigkeit : Länge	S^{-1}	—

Das technische Maßsystem hat die Einheiten der Länge (m), der Zeit (sec) und der Kraft (kg) zugrunde gelegt, wobei unter Einheit der Kraft die mechanische Kraft zu verstehen ist, die auf eine Masse von 1 kg infolge der Erdbeschleunigung $g = 981 \text{ cm/sek}^2$ wirkt. Da Kraft = Masse · Beschleunigung, wird im technischen Maßsystem die Einheit der Kraft $1 \text{ kg} = 1 \cdot 1000 \cdot 981 \frac{\text{cm} \cdot \text{g}}{\text{sek}^2} = 981 \text{ 000}$ Dynen. Der Arbeit in mkg entsprechen $981 \text{ 000} \cdot 100 = 9,81 \cdot 10^7$ Erg. Die technische Einheit für die Leistung ist 1 PS = 75 mkg/sek. 1 PS entspricht mithin im absoluten Maßsystem = $9,81 \cdot 10^7 \cdot 75 \text{ Erg/sek} = 736 \cdot 10^7 \text{ Erg/sek}$.

Magnetische Einheiten:

Zeichen	Begriff	Ableitung	Dimension	Name
m	Polstärke (magn. Masse)	$\sqrt{\text{Kraft} \cdot (\text{Länge})^2}$	$\text{C}^{3/2}\text{G}^{1/2}\text{S}^{-1}$	Maxwell
M	Magn. Moment	Polstärke · Länge	$\text{C}^{3/2}\text{G}^{1/2}\text{S}^{-1}$	—
\mathcal{H}	Feldstärke	Kraft/magn. Masse	$\text{C}^{-1/2}\text{G}^{1/2}\text{S}^{-1}$	Gauß
\mathcal{B}	Induktion (Dichte)	$\mu \cdot \mathcal{H} = \mathcal{B} + 4\pi \mathcal{I}$	$\text{C}^{-1/2}\text{G}^{1/2}\text{S}^{-1}$	Gauß
μ	Permeabilität oder magn. Durchlässigkeit	$\mathcal{B} : \mathcal{H}$	—	—
Φ	Induktionsfluß	$\mathcal{B} \cdot Q = \text{Induktion} \cdot \text{Fläche}$	$\text{C}^{3/2}\text{G}^{1/2}\text{S}^{-1}$	Maxwell
MMK	Magnetomotorische Kraft	Feldstärke · Länge	$\text{C}^{1/2}\text{G}^{1/2}\text{S}^{-1}$	—
\mathcal{R}	Magn. Widerstand	$\frac{\text{Länge}}{\mu \cdot \text{Fläche}}$	C^{-1}	—
κ	Magn. Aufnahmefähigkeit	$\mathcal{I} : \mathcal{H}$	—	—
\mathcal{I}	Magnetisierung	magn. Moment : Volumen	$\text{C}^{-1/2}\text{G}^{1/2}\text{S}^{-1}$	Gauß

Elektrische Einheiten.

Die verschiedenen elektrischen Größen erhalten im CGS-System verschiedene Dimensionen, je nachdem man zu ihrer Ableitung elektrostatische oder elektromagnetische Erscheinungen zugrunde legt. Das elektromagnetische Maß ist das gebräuchlichere in der Elektrotechnik.

Elektrostatische Einheiten:

Zeichen	Begriff	Ableitung	Dimension
Q	Elektrizitätsmenge	$\sqrt{\text{Kraft} \cdot (\text{Länge})^3}$	$C^{1/2}G^{1/2}S^{-1}$
\mathcal{E}	Feldstärke	Kraft : Menge	$C^{-1/2}G^{1/2}S^{-1}$
V	Elektr. Potential	Arbeit : Menge	$C^{1/2}G^{1/2}S^{-1}$
C	Elektrost. Kapazität	Elektr.-Menge : Potential	C
I	Stromstärke	Elektr.-Menge : Zeit	$C^{1/2}G^{1/2}S^{-2}$
A	Arbeit	Strom · Potential · Zeit	C^2GS^{-3}
W	Potent. Energie	Menge · Potential	C^2GS^{-2}

Elektromagnetische Einheiten:

Zeichen	Begriff	Ableitung	Dimension
I	Stromstärke	Länge · Feldstärke	$C^{1/2}G^{1/2}S^{-1}$
Q	Elektrizitätsmenge	Stromstärke · Zeit	$C^{1/2}G^{1/2}S^0$
P	Potentialdifferenz	Arbeit : Elektr.-Menge	$C^{1/2}G^{1/2}S^{-2}$
A	Arbeit	Potentialdiff. · Strom · Zeit	C^2GS^{-2}
A	Wärmemenge	Strom ² · Widerst. · Zeit.	C^2GS^{-2}
\mathcal{Q}	Leistung	Arbeit : Zeit	C^2GS^{-3}
σ	Spez. Widerstand	Widerstand : Länge	$C^2G^0S^{-1}$
R	Widerstand	Potentialdiff. : Strom	CG^0S^{-1}
C	Kapazität	Elektr.-Menge : Potentialdifferenz	$C^{-1}G^0S^{-2}$
L	Selbstinduktions-Koeffiz.	(Potentialdiff. · Zeit) : Strom	CG^0S^0

Technische (praktische) Einheiten:

Zeichen	Begriff	Name	Wert in el.-mag. Einh.	Wert in el.-stat. Einh.
Q	Elektrizitätsmenge	Coulomb	10^{-1}	$3 \cdot 10^9$
I	Stromstärke	Ampere	10^{-1}	$3 \cdot 10^9$
D	Durchflutung	Amperewindung	10^{-1}	—
E	Elektromot. Kraft	Volt	10^8	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-2}$
P	Spannung, Potentialdifferenz	Volt	10^8	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-2}$
\mathcal{Q}	Leistung	Watt	10^7 Erg/sek	—
A	Arbeit	Voltcoulomb	10^7 Erg	10^7 Erg
		Joule	10^7 Erg	10^7 Erg
		Wattstunde	$36 \cdot 10^9$ Erg	—
R	Widerstand	Ohm	10^9	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$
C	Kapazität	Farad	10^{-9}	$9 \cdot 10^{11}$
		Mikrofarad	10^{-15}	$9 \cdot 10^5$
L	Selbstinduktions-Koeffiz.	Henry	10^9	—

1 PS = $736 \cdot 10^7$ Erg/sek = 736 Watt;

1 Watt = 1 Voltampere = 10^7 Erg/sek = 0,102 mkg/sek = 0,00136 PS.

2. Magnetismus.

Magnetisches Feld ist der Raum, in dem magnetische Wirkungen nachgewiesen werden können, z. B. Erdfeld, Feld von Stabmagneten.

Polstärke m . Nach Coulomb ist die Kraft, die zwei Magnetpole von der Polstärke m_1 und m_2 und bei einer Entfernung r aufeinander ausüben,

$P = \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$. Gleichnamige Pole stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an.

Ein Pol hat die Stärke = Eins, wenn er auf einen gleichstarken Pol in der Entfernung $r = 1$ cm eine Kraft von 1 Dyne ausübt.

Feldstärke \mathfrak{H} in einem Punkte des Feldes ist die Kraft, die auf einen Einheitspol in diesem Punkte ausgeübt wird.

(Fig. 1)
$$\mathfrak{H} = \frac{m}{r^2},$$

(Fig. 2)
$$\mathfrak{H} = \frac{m}{r_1^2} - \frac{m}{r_2^2}.$$

Die Feldstärke $\mathfrak{H} = 1$ herrscht um einen Einheitspol im Abstände $r = 1$ cm. In einem Felde von der Stärke \mathfrak{H} wird auf einen Pol von der Polstärke m eine Kraft $P = \mathfrak{H} \cdot m$ ausgeübt. \mathfrak{H} hat Größe und Richtung (Vektor). Die Richtung kann man, wenigstens in einer Ebene, sichtbar machen durch Eisenfeilspäne. Auf jeden Span wirkt die magnetische Kraft des Feldes. Die Späne reihen sich in Linien auf. Die Tangenten an die Linien geben die Richtung des Feldes in den einzelnen Punkten der Ebene an. Man spricht deshalb von Feldlinien. Um die Stärke des Feldes zu kennzeichnen, gibt man meist an, wieviel Feldlinien durch eine Fläche von 1 cm^2 hindurchtreten. $\mathfrak{H} =$ Linienzahl pro cm^2 .

Ein Einzelpol von der Polstärke m (Fig. 3) übt auf einen Einheitspol 1 in der Entfernung r eine

Kraft $\mathfrak{H} = \frac{m}{r^2}$ aus. Von dem Einzelpol gehen also (wenn $Q =$ Oberfläche einer Kugel um m)

$$\mathfrak{H} \cdot Q = \mathfrak{H} \cdot 4\pi r^2 = \frac{m}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi m = \Phi$$

Feldlinien aus. $\Phi =$ Gesamtlinienzahl, die überhaupt von m ausgeht.

Magnetisches Moment \mathfrak{M} . Ein Magnetstab (Fig. 4) von der Polstärke $+m$ und $-m$ und dem Polabstände l erleidet in einem Felde \mathfrak{H} ein Drehmoment. Ist das Feld homogen, so ist das Drehmoment

$$D = 2 \frac{l}{2} \cdot P \cos \alpha = \mathfrak{H} \cdot m \cdot l \cdot \cos \alpha;$$

$m \cdot l = \mathfrak{M} =$ magnetisches Moment (Stabmagnetismus).

Ein frei aufgehängter Magnet stellt sich mit seiner Achse $m \div m$ in die Richtung von \mathfrak{H} ein, denn dann ist $\alpha = 90^\circ$, $D = 0$; der Magnet ist im Gleichgewicht. Nach Ablenkung aus der Gleichgewichtslage schwingt der Magnet ähnlich einem physischen Pendel. Die Schwingungsdauer ist:

$$t = \pi \sqrt{\frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{größtes Drehmoment}}} = \pi \sqrt{\frac{\theta}{\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{M}}} \text{ sek.}$$

Bestimmung von $\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{M}$ aus t und θ .

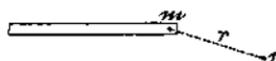


Fig. 1.

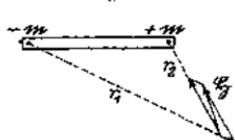


Fig. 2.

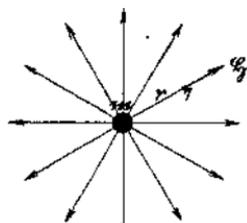


Fig. 3.

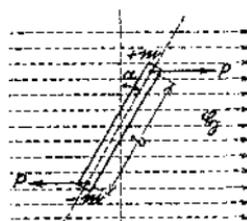


Fig. 4.

Erdmagnetismus. Eine frei aufgehängte Magnetnadel stellt sich in eine bestimmte Richtung ein; es muß mithin auf der Erdoberfläche ein magnetisches Feld vorhanden sein. Der Pol der Nadel, der sich nach dem geographischen Norden wendet, heißt Nordpol. Im geographischen Norden liegt also der magnetische Südpol der Erde. Die frei aufgehängte Magnetnadel bildet mit dem Erdmeridian einen bestimmten Winkel, die Deklination (für Deutschland ca. 9° westlich). Außerdem ist der Nordpol der Nadel noch gegen den Horizont geneigt. Der Neigungswinkel heißt Inklination (für Deutschland ca. 66° nach unten).

Verbindungslinien von Orten gleicher Deklination heißen Isogonen, gleicher Inklination: Isoklinen. Erdfeld an verschiedenen Orten der Erde nicht gleich.

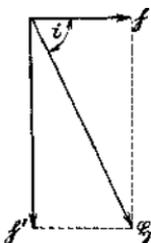


Fig. 5.

Innerhalb von Räumen geringer Ausdehnung, in denen auch sonst keine magnetischen Störungen herrschen, kann das Erdfeld als homogen und geradlinig angesehen werden. Das Erdfeld \mathfrak{H} kann in eine Horizontalkomponente $\mathfrak{h} = \mathfrak{H} \cos i$ und in eine Vertikalkomponente $\mathfrak{h}' = \mathfrak{H} \sin i$ zerlegt werden (Fig. 5). i = Inklinationswinkel. Erdfeld ist sehr langsamen Änderungen unterworfen. Zurzeit (1914) kann für Berlin $\mathfrak{h} = 0,192$ gesetzt werden. Unregelmäßige Störungen des Erdfeldes werden durch Polarlichter und gewisse Vorgänge auf der Sonne hervorgerufen (magnetische Stürme).

Magnetische Induktion. Bringt man in ein magnetisches Feld \mathfrak{H} ein Stück Eisen, so findet man, daß im Eisen eine größere Liniendichte herrscht als vorher an der Stelle in der Luft war. Diese induzierte Liniendichte pro cm^2 wird mit \mathfrak{H} bezeichnet und heißt Induktion. Sie ist außer von der Feldstärke \mathfrak{H} noch abhängig von dem Medium, welches die Linien aufzunehmen hat.

$\mathfrak{H} = \mu \cdot \mathfrak{H}$; μ = Permeabilität (Durchlässigkeit). Man setzt für Luft $\mu = 1$. Materialien mit $\mu > 1$ heißen paramagnetisch, solche mit $\mu < 1$ heißen diamagnetisch. Für Eisen μ meist sehr groß (bis über 3000).

$\mu > 1$ für Eisen, Nickel, Kobalt, Sauerstoff;

$\mu < 1$ für Kupfer, Silber, Antimon, Wismut;

$\mu = 1$ für Luft, Holz, Glas, Messing usw.

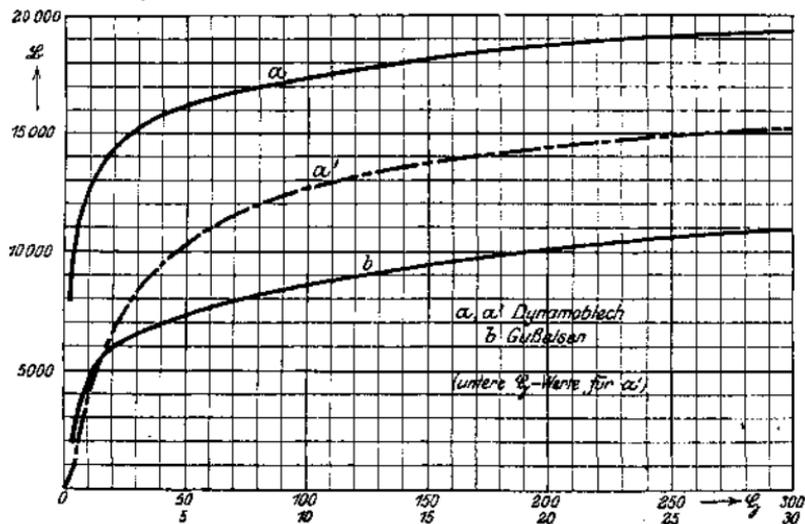


Fig. 6.

Die Permeabilität μ ist für Eisen nicht konstant, sondern selbst abhängig von der Zahl der Induktionslinien, die pro cm^2 durch das Eisen gehen, also abhängig von der Sättigung des Eisens. Die Kurven in Fig. 6 stellen die Beziehung zwischen \mathfrak{B} und \mathfrak{H} für Dynamoblech und Gußeisen dar. Stahlguß verhält sich wie Dynamoblech.

Induktionsfluß. Spricht man in der Elektrotechnik von magn. Induktion, so meint man, in irgend einem Querschnitt eines Materials (Eisen, Luft) herrscht eine Induktionsliniendichte von \mathfrak{B} Linien pro cm^2 . Hat der Querschnitt $Q \text{ cm}^2$, so ist der gesamte Induktionslinienstrom, der durch Q hindurchtritt: $\Phi = \mathfrak{B} \cdot Q$. Φ wird kurz Fluß genannt.

Die Induktionslinien sind in sich geschlossene Linien. Tritt an irgend einer Stelle des Induktionslinienweges eine Einschnürung des Querschnittes auf, so muß eine Verdichtung der Induktionslinien, also eine Vergrößerung von \mathfrak{B} eintreten. $\mathfrak{B} = \frac{\Phi}{Q}$. Man kann sich vorstellen, daß die Induktionslinien in einer in sich geschlossenen Röhre (Induktionsröhre), die verschiedenen und beliebigen Querschnitt haben kann, verlaufen. In der Technik schreibt man dem Induktionsfluß durch geeignete Anordnung von Eisenmassen den Weg vor. Linien, die den gewünschten Weg nicht einschlagen, bezeichnet man mit Streulinien (Streufuß, kurz Streuung).

Brechung der Induktionslinien. Treten Induktionslinien aus einem Medium in ein anderes über (Fig. 7), so werden sie gebrochen. Es verhalten sich die Tangenten der Einfallswinkel, wie die Permeabilitäten der Medien.

$$\frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg } \beta} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Da μ für Eisen sehr groß gegen μ für Luft ist (z. B. 3000 und 1), treten die Induktionslinien selbst bei großem Einfallswinkel im Eisen fast lotrecht in die Luft über (Schirmwirkung des Eisens, Panzer-galvanometer).

Intensität der Magnetisierung \mathfrak{J} . nennt man bei einem Magneten das magnetische Moment pro Volumeneinheit oder auch die Polstärke pro cm^2 Querschnitt des Magneten.

Ein Eisenstab in einem magnetischen Felde \mathfrak{H} äußert sich als Magnet, da er mehr Linien enthält als seine Umgebung ($\mathfrak{B} > \mathfrak{H}$). Sei die Polstärke $m = \mathfrak{J}$, so gehen von dem Pole des Eisenstabes $4\pi \mathfrak{J}$ Linien aus. Es ist $4\pi \mathfrak{J} = \mathfrak{B} - \mathfrak{H}$;

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}} = 1 + 4\pi \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{H}}; \quad \mu = 1 + 4\pi \kappa.$$

κ gibt an, wievielmals \mathfrak{J} größer ist als \mathfrak{H} und wird mit Suszeptibilität (Aufnahmefähigkeit) bezeichnet.

Magnetische Energie W . Die magnetische Energie eines Volumenelementes dV ist: $w = h \int \mathfrak{H}^2 \mu dV$. Sind \mathfrak{H} und μ im Gesamtvolumen V konstant, so wird

$$W = h \mathfrak{H}^2 \mu \cdot V.$$

$$h = \frac{1}{8\pi}.$$

(Ähnlichkeit mit der Energiegleichung $W = \frac{1}{2} m v^2$.)

Die magnetischen Linien verlaufen derart, daß sie den geringsten magnetischen Widerstand zu überwinden haben. (Magnetischer Widerstand $\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu \cdot q}$, wobei l die Länge und q der Querschnitt eines Zylinders aus dem Felde.) Die magnetische Energie des Feldes wird dann ein Minimum (Grund der Streuung).

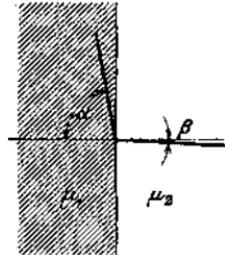


Fig. 7.

Zugkraft von Magneten. Herrscht im Raume zwischen dem Pole eines Zugmagneten und dem Anker eine Induktion \mathfrak{H} , und ist die Polfläche S , so ist die Zugkraft

$$P = \frac{\mathfrak{H}^2 \cdot S}{8 \pi} \text{ Dynen} = \frac{\mathfrak{H}^2 \cdot S}{8 \pi \cdot 981000} \text{ kg.}$$

Bei einem Hufeisenmagneten ist $2S$ einzusetzen.

Elektromagnetismus. Elektrischer Strom ist die Bewegung einer Elektrizitätsmenge. Um jeden stromdurchflossenen Leiter schlingen sich Feldlinien (Fig. 8).

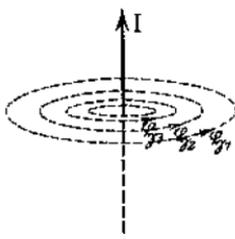


Fig. 8.



Fig. 9.

Die elektromagnetische Einheit der Stromstärke hat ein Strom, der, einen Kreisbogen von 1 cm Länge und 1 cm Radius durchfließend, im Mittelpunkte des Kreises eine Feldstärke $\mathfrak{H} = 1$ erzeugt. Ist der Leiterkreis geschlossen, also $l = 2\pi$, so erzeugt die Einheit der Stromstärke im Mittelpunkte des Kreises eine Feldstärke $\mathfrak{H} = 2\pi$. Technische Einheit der Stromstärke = 1 Ampere = 0,1 elektromagnetische Einheiten.

Biot-Savartsches Gesetz: Ein in einem Leiterteilchen von der Länge l fließender Strom (Fig. 9) von der Stärke I Ampere, erzeugt in der Entfernung r von diesem Teilchen eine Feldstärke

$$\mathfrak{H} = \frac{0,1 \cdot I \cdot l \sin \alpha}{r^2}.$$

α = Winkel zwischen l und r . Die Richtung von \mathfrak{H} ist senkrecht zu der durch l und r gelegten Ebene und bestimmt sich nach der Bohrerregel (Bohrer in Richtung des Stromes in den Leiter eingbohrt. Die Drehrichtung gibt die Richtung der Feldlinien an) (Fig. 10). Die Feldlinien umschlingen einen ringförmigen Leiter wie Kettenglieder (Fig. 11).

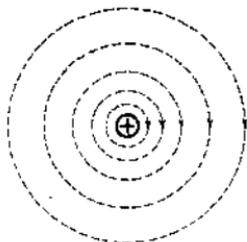


Fig. 10.

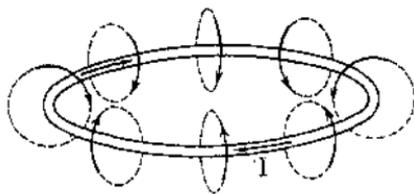


Fig. 11.

Parallele Leiter mit gleichgerichteten Strömen ziehen sich an, solche mit entgegengesetzt gerichteten Strömen stoßen sich ab. Sich kreuzende Leiter suchen sich so zu stellen, daß ihre Ströme in die gleiche Richtung kommen. Mittels Solenoiden (Drahtspulen) kann man außerordentlich starke Felder erzeugen.

Satz vom Linienintegral der Feldstärke. Das Linienintegral $\int \mathfrak{H} dl$, ausgerechnet für eine in sich zurücklaufende Feldlinie, ist Null, wenn die Summe der durch die von der Feldlinie umrandete Fläche hindurchtretenden Ströme Null ist. Tritt Strom durch die Fläche, so ist der Wert des Linienintegrals = $0,4 \pi I$; treten N Stromleiter mit den Strömen I durch die Fläche, so ist der Wert = $0,4 \pi N I$ (I = Stromstärke in Ampere).

Für einen vollständig geschlossenen Ring (Fig. 12), mit N Windungen gleichmäßig bewickelt, ist:

$$l = 2\pi r; \quad \oint \cdot I = 0,4\pi NI.$$

Ist der Ring durch einen Luftspalt $= \delta$ cm durchbrochen, so gilt:

$$\oint_{\text{Eisen}} \cdot l_{\text{Eisen}} + \oint_{\text{Luft}} \delta = 0,4\pi NI.$$

Allgemein ist: $\oint_1 l_1 + \oint_2 l_2 + \oint_3 l_3 + \dots = 0,4\pi NI$, wenn der „magnetische Kreis“ aus verschiedenen Medien (Dynamoblech, Luft, Stahlguß usw.) zusammengesetzt ist.

Da $\mu \oint = \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \cdot Q = \Phi$, wird

$$\Phi = \frac{N \cdot I}{\frac{l}{\mu \cdot Q}} \cdot 0,4\pi,$$

worin bedeuten:

$N I$ = Ampere-Windungszahl (Durchflutung),

$0,4\pi NI$ = magnetomotorische Kraft,

$\frac{l}{\mu \cdot Q}$ = magnetischer Widerstand (Reluktanz).

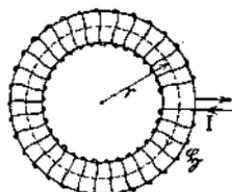


Fig. 12.

Um für einen beliebig zusammengesetzten magnetischen Kreis die zur Erzeugung eines bestimmten Flusses Φ erforderlichen Amperewindungen $N I$ zu berechnen, zerlege man nach Hopkinson den Kreis in Teile, für welche \mathfrak{B} und \mathfrak{H} konstant angesehen werden können. Man bestimme für jeden Teil den

Wert $\mathfrak{B} = \frac{\Phi}{Q}$ und entnehme aus der für das jeweilige Material geltenden Magnetisierungskurve (Fig. 6) den zugehörigen Wert \mathfrak{H} . Nach Abmessen der Länge l (cm) einer mittleren \mathfrak{H} -Linie in dem betreffenden Teile berechne man für jeden

Teil $N I = \frac{\mathfrak{H} \cdot l}{0,4\pi}$. Die Summe der $N I$ ist dann die Amperewindungszahl, die bei den in dem Kreise vorhandenen magnetischen Widerständen den gewünschten Induktionsfluß Φ erzeugt. Zur bequemen Rechnung ist meist bei den Magnetisierungskurven nicht \mathfrak{B} über \mathfrak{H} , sondern über $\frac{N I}{l}$ (also Amperewindungen pro cm Länge) aufgetragen (Fig. 13).

Beispiel. Für eine Drehstromdynamo für 600 K. V. A.-Leistung sollen die Ampere-Windungen pro Pol berechnet werden. Der die Ankerwicklung durchsetzende magnetische Fluß soll $\Phi = 3,53 \cdot 10^6$ Linien betragen. Die Streuung zwischen den Polen betrage 25%, d. h. in den Polen muß ein Fluß von $4,54 \cdot 10^6$ Linien durch die Erregerwicklung erzeugt werden. Zur Berechnung zeichne man sich den magnetischen Kreis maßstäblich auf (Fig. 13 a) und zeichne den Verlauf einer mittleren Induktionslinie (in Fig. strichpunktiert) ein. Man zerlege den magnetischen Kreis in Teile, für die \mathfrak{B} und \mathfrak{H} als konstant gelten können, stelle für jeden Teil Φ fest und errechne $\mathfrak{B} = \frac{\Phi}{Q}$. Die Querschnitte Q werden der Zeichnung entnommen. Die einzelnen Teile des Kreises sind Joch, Luftspalt zwischen Joch und Polen, Poleisen (Schenkel), Luftspalt δ (zwischen Anker und Polen), Zähne, Anker. Zu dem für jeden Teil in Frage kommenden Wert \mathfrak{B} entnehme man der Magnetisierungskurve (Fig. 13) die erforderlichen $\frac{N I}{l}$, messe aus der Zeichnung l in cm und finde durch Multiplikation die für die einzelnen Teile erforderlichen Amperewindungen. Die Summe der einzelnen $N I$ stellt die Gesamtamperewindungen pro Polpaar dar. Rechnung am besten in Form einer Tabelle wie folgt:

Masch.-Teil	Material	Fluß Φ	Querschnitt Q cm ²	Induktion \mathfrak{B} Linien pr cm ²	$\frac{N I}{l}$	l cm	$N I$
Joch	Gußeisen	$\frac{1}{2} \cdot 4,54 \cdot 10^6$	380	6000	16,5	28	460
Luft	Luft	$4,54 \cdot 10^6$	294	15500	12300	$2 \times 0,01$	246
Schenkel	Schmiedeeisen	$4,54 \cdot 10^6$	294	15500	30	2×23	1380
Luft	Luft	$3,63 \cdot 10^6$	450	8070	6500	$2 \times 0,8$	10400
Zähne	Dynamoblech	$3,63 \cdot 10^6$	192	18900	180	$2 \times 4,43$	1600
Anker	„	$\frac{1}{2} \cdot 3,63 \cdot 10^6$	227	8000	4,5	34	153
					Σ Amp.-Windungen ≈ 14250		

Die Amperewindungen pro cm Länge für Luft errechnen sich aus:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} = \frac{0,4 \pi N I}{l}; \quad \frac{N I}{l} = \frac{\mathfrak{H}}{0,4 \pi} = \infty 0,8 \mathfrak{H}.$$

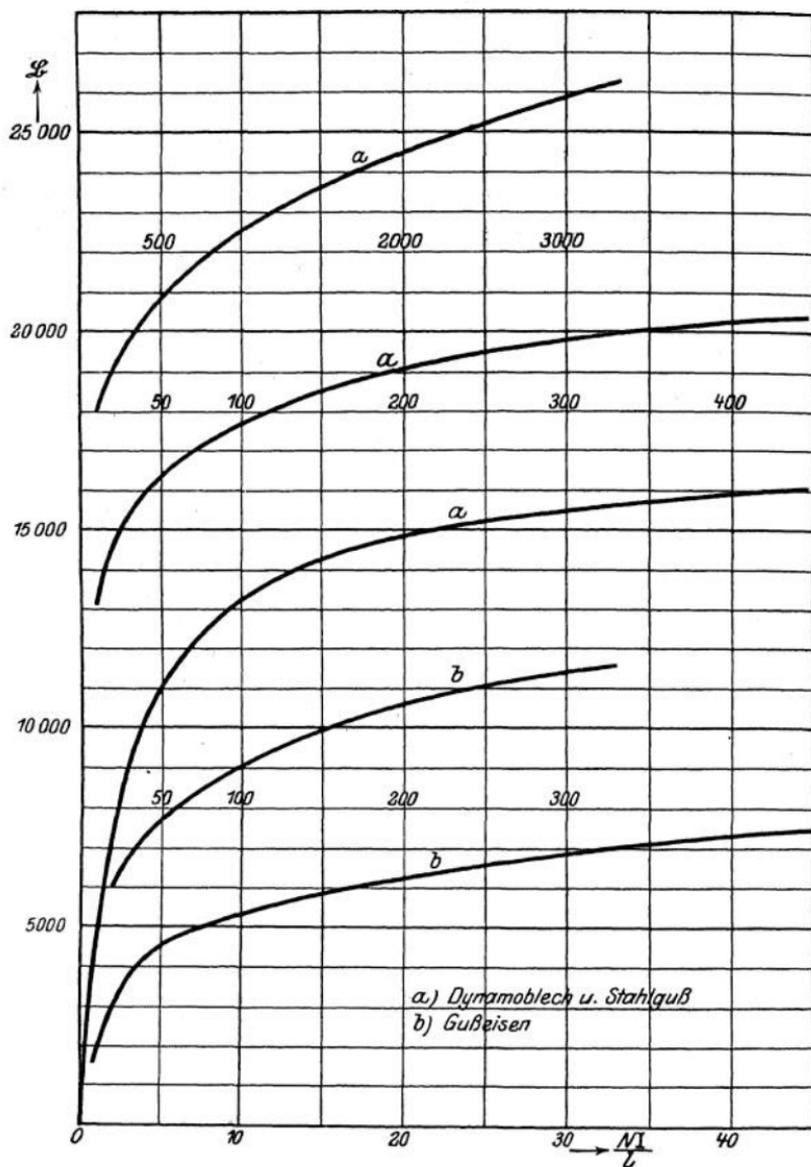


Fig. 13.

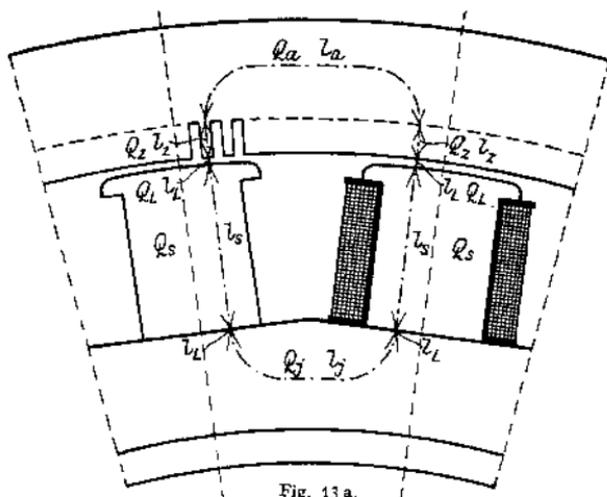


Fig. 13 a.

3. Elektrostatik.

Man nimmt zwei Elektrizitätsarten, positive und negative, an. Gleichartige Elektrizitäten stoßen sich ab, ungleichartige ziehen sich an.

Coulombsches Gesetz. Zwischen zwei mit den Elektrizitätsmengen Q_1 und Q_2 geladenen Punkten in der Entfernung r herrscht eine Kraft $P = \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$.

Die elektrostatische Einheit der Elektrizitätsmenge ist diejenige, die eine gleichgroße in der Entfernung $r = 1$ cm mit der Kraft von 1 Dyne abstößt. Die technische Einheit der Elektrizitätsmenge ist 1 Coulomb.

1 Coulomb = 0,1 elektromagnetische Einheiten.

1 absolute elektromagnetische Einheit der E. M. = $3 \cdot 10^{10}$ absolute elektrostatistische Einheiten.

1 Coulomb = $3 \cdot 10^9$ elektrostatistische Einheiten.

1 Mikrocoulomb = 3000 elektrostatistische Einheiten.

Elektrisches Feld heißt der Raum, in dem elektrische Anziehung oder Abstoßung nachgewiesen werden kann. Feldlinien. Ein geladener Körper bewegt sich unter alleinigem Einfluß des elektrischen Feldes längs einer Feldlinie.

Feldstärke \mathcal{E} an einer Stelle im Raum ist die Kraft in Dynen, die auf eine Elektrizitätsmenge $Q = 1$ ausgeübt wird. \mathcal{E} ist eine Vektorgröße. Feldstärke kann auch definiert werden als Zahl der Feldlinien pro cm^2 .

Das Feld einer auf einen Punkt vereinigten Elektrizitätsmenge $Q = 1$ hat in der Entfernung $r = 1$ den Betrag $\mathcal{E} = 1$.

Von einem mit $Q = 1$ geladenen Punkt gehen mithin 4π Feldlinien aus. Eine Elektrizitätsmenge Q erleidet in einem Felde \mathcal{E} eine Kraft $P = \mathcal{E} \cdot Q$.

Linienintegral der Feldstärke \mathcal{E} . Bewegt sich ein mit $+Q$ geladenes Körperchen längs einer Feldlinie von einem positiv geladenen Punkt 1 nach einem negativ geladenen Punkt 2, so wird eine Arbeit geleistet: $A = Q \int \mathcal{E} \cdot dl$. Ein geladener Körper befindet sich in einem gewissen Zwangszustand. Bringt man an einen geladenen Körper eine Elektrizitätsmenge gleicher Polarität heran, so wird Arbeit aufgewendet; bei Fortbewegung wird Arbeit geleistet. Mit Potential V bezeichnet man den durch eine Ladung herbeigeführten Zwangszustand eines Körpers. Bewegt sich ein mit $+Q$ geladener Körper von einem Punkt 1

mit dem Potential V_1 nach einem Punkt 2 mit dem niederen Potential V_2 , so wird eine Arbeit geleistet:

$$A = Q(V_1 - V_2).$$

Es ist also:

$$\int \mathcal{E} dl = V_1 - V_2.$$

$V_1 - V_2 =$ Potentialdifferenz = Spannung zwischen 1 und 2 $= P_{1,2}$.

$P_{1,2}$ ist mithin gleich der Arbeit, die aufzuwenden ist, um die Einheit der Elektrizitätsmenge vom Punkte 2 nach 1 zu schaffen. Potential der Erde = Null, mithin Potential eines Punktes gleich Spannung zwischen diesem Punkte und Erde. Jeder Punkt eines elektrischen Feldes befindet sich auf einem Potential. Die Feldstärke läßt sich also auch definieren als Spannung pro Längeneinheit.

Einheit der Spannung herrscht zwischen zwei Punkten, wenn die Arbeit = 1 Erg erforderlich ist, um die Elektrizitätsmenge = 1 von einem Punkte zum anderen zu bringen. Praktische (technische) Einheit der Spannung heißt Volt.

1 Volt = 10^9 elektromagnetische Einheiten = $\frac{1}{300}$ elektrostatische Einheiten.

Leiter sind Stoffe, in denen sich elektrische Felder nicht erhalten können. Ohne Zufuhr neuer Elektrizitätsmengen kann also zwischen zwei Punkten eines Leiters kein Potentialunterschied, d. h. keine Spannung bestehen.

Isolatoren (Dielektrika) sind Stoffe, in denen mehr oder weniger Felder bestehen können. Vollständige Isolatoren sind unbekannt.

Influenz. Bringt man in die Nähe eines mit $+Q$ geladenen Körpers A (Fig. 14) einen zweiten Körper B , so werden von A ausgehende Feldlinien den Leiter B treffen. In dem Leiter B tritt eine Strömung der Elektrizitäten ein, solange bis sich der ganze Leiter B auf demselben Potential befindet. Zwischen den einzelnen Punkten des Leiters B und seiner Umgebung werden Potentialunterschiede sein, d. h. es werden in der Nähe von A Feldlinien nach B laufen; auf der A abgewandten Seite von B werden Feldlinien aus B heraustreten. Der Leiter erscheint auf der A zugekehrten Seite negativ geladen, auf der abgewandten Seite positiv geladen. (Scheidung der Elektrizitäten durch Influenz.)

Flächendichte eines geladenen Körpers = Elektrizitätsmenge pro Flächeneinheit.

Elektrische Verschiebung. Nach Faraday besteht ein Dielektrikum aus kleinsten Teilchen, in denen in einem elektrischen Felde eine Scheidung der Elektrizitäten stattfindet. Es tritt eine Wanderung von $+$ Elektrizität und $-$ Elektrizität in entgegengesetzten Richtungen, eine elektrische Verschiebung ein. In einem zwischen zwei Leitern verschiedenen Potentials liegenden Dielektrikum können Verschiebungslinien angenommen werden. Die Ausgangspunkte dieser

Linien haben positive, die Punkte, wo sie auftreffen, negative Ladungen. Die Zahl der Verschiebungslinien pro Flächeneinheit heißt Verschiebung (oder elektrische Induktion) \mathcal{D} . Die Verschiebung \mathcal{D} bedingt einen gewissen Spannungszustand, eine Beanspruchung des Dielektrikums (in Volt/cm). Wird die zulässige Beanspruchung überschritten, so tritt Durchschlag des Isoliermittels auf. In ein und demselben Felde ist die Verschiebung verschieden je nach dem gewählten Dielektrikum. Die Verschiebung ist einer Dielektrizitätskonstanten ϵ direkt proportional.

Im Abstand $r = 1$ von einer punktförmigen Ladung Q ist:

$$\mathcal{E} = Q \text{ (wenn das Dielektrikum Luft } \epsilon = 1).$$

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{\epsilon} \text{ (in jedem anderen Dielektrikum).}$$

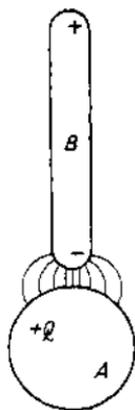


Fig. 14.

Die Verschiebung ist

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \frac{\mathfrak{E}}{4\pi} = \frac{Q}{4\pi}.$$

Im Abstand $r = r$ ist die Verschiebung

$$\mathfrak{D}_r = \varepsilon \frac{\mathfrak{E}_r}{4\pi} = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

Da jedem Punkte eines elektrischen Feldes ein bestimmtes Potential entspricht

$$V_1 - V_2 = P_{1,2},$$

ist

$$\mathfrak{E} dl = dP$$

oder

$$\mathfrak{E} = \frac{dP}{dl} = 4\pi \frac{\mathfrak{D}}{\varepsilon},$$

worin dl = Länge einer Röhre, in der \mathfrak{D} als konstant gelten kann.

Da 1 Coulomb = $3 \cdot 10^9$ elektrostatische Einheiten der Elektrizitätsmenge,

$$1 \text{ Volt} = \frac{1}{300} \text{ elektrostatische Einheiten der Potentialdifferenz,}$$

wird

$$\frac{dP}{dl} = \mathfrak{E} = 4\pi \frac{\mathfrak{D}}{\varepsilon} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 10^{11} \text{ Volt/cm}$$

(Grundformel für die elektrischen Festigkeitsrechnungen). (Näheres s. Petersen, Hochspannungstechnik, S. 4.)

Kapazität (Aufnahmefähigkeit). Die Größe der Ladung Q eines beliebig geformten Leiters hängt ab: 1. von der Potentialdifferenz, die zwischen ihm und seiner mit der entgegengesetzten Ladung versehenen Umgebung herrscht und 2. von der Kapazität C der Anordnung. Es ist:

$$Q = C(V_1 - V_2) = CP_{12}.$$

Die technische Einheit der Kapazität = 1 Farad hat ein Leiter, der durch eine Elektrizitätsmenge $Q = 1$ Coulomb auf das Potential $P = 1$ Volt aufgeladen wird.

1 Volt = 10^8 absolute elektromagnetische Einheiten;

1 Coulomb = $\frac{1}{10}$ absolute elektromagnetische Einheiten; mithin

1 Farad = 10^{-9} elektromagnetische Einheiten;

1 Mikrofard = 10^{-6} Farad = 10^{-16} absolute elektromagnetische Einheiten.

Die Kapazität selbst ist abhängig von der Größe der gegenüberstehenden Leiterflächen S (Belege), sowie von deren Abstand d und von der Dielektrizitätskonstanten ε .

$$C = \frac{\varepsilon \cdot S}{4\pi d}.$$

Die Anziehung zweier Belege ist:

$$K = \frac{\varepsilon S \cdot P^2}{8\pi d^2}.$$

Kondensatoren sind Leiteranordnungen mit mehr oder weniger hoher Kapazität. Dielektrikum meist Glas (Leidener Flaschen), Glimmer, Papier (Kondensatoren für Mcßzwecke), Flüssigkeitskondensatoren für niedere Spannungen (ca. 100 Volt). Die Belege sind meist als Platten ausgeführt. Drehbare Regulierkondensatoren. Da die Kapazität proportional der Größe der Belege ist, so wird durch Parallelschalten von n gleichen Kondensatoren mit der Kapazität C' die Kapazität C n mal so groß.

$$C = n C',$$

allgemein $C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots$ bei Parallelschaltung von Kondensatoren mit $C_1; C_2; C_3$ usw.

Bei Serienschaltung von Kondensatoren gilt

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots$$

Hintereinanderschaltung von n Kondensatoren der Kapazität C' hat die Gesamtkapazität

$$C = \frac{C'}{n}.$$

In der Technik spielt die Kapazität von Kabeln und Freileitungen eine Rolle.

Tabelle der Dielektrizitätskonstanten ϵ .

(nach Strecker, Hilfsbuch für die Elektrotechnik).

Kolophonium	2,6	Papier	1,8—2,6
Ebonit	2—3	Paraffin, fest	2,0—2,3
Glas (verschieden)	3—7	Paraffinöl	2—2,5
„ (weißes Spiegelglas)	6	Petroleum	2,0—2,2
Glimmer	5—8	Porzellan	4,4
Guttapercha	2,8—4,2	Rapsöl	2,3
Starkstromkabelisolierung (getränktes Papier oder Jute)	4,3	Rizinusöl	4,7
Fernsprechkabelisolierung (Papier und Luft)	1,6	Rüböl	3
Kautschuk, braun	2	Schellack	2,7—3,7
„ vulkanisiert, grau	2,7	Schwefel	2,4
Mikanit	4,5—5,5	Siegellack	4,3
Olivenöl	3	Terpentinöl	2,2
		Transformatoröl { Mineral	2,2
		{ Harz	2,5
		Wasser	80

4. Der elektrische Strom, seine Gesetze und Wirkungen.

In einem Leiter fließt ein Strom, wenn zwischen den Enden des Leiters eine Potentialdifferenz herrscht. 1 Ampere = 1 Coulomb pro sek. $I = \frac{Q}{t}$. Elektrischer Strom ist ein Ausgleich von Elektrizitäten.

Ohm'sches Gesetz. Der in einem Leiter fließende Strom I (Ampere) ist proportional der zwischen den Enden des Leiters herrschenden Potentialdifferenz P (Volt) und umgekehrt proportional dem Widerstande R Ohm des Leiters.

$$I = \frac{P}{R}; \quad P = I \cdot R; \quad I \cdot R = \text{Spannungsverlust.}$$

Den Widerstand $R = 1$ Ohm hat ein Leiter (Leitergruppe), wenn eine Spannung von 1 Volt an den Enden des Leiters im Leiter einen Strom von 1 Ampere erzeugt. Der Widerstand ist proportional der Länge des Leiter (m), dem spezifischen Widerstand σ und umgekehrt proportional dem Querschnitt q mm² des Leiters.

$$R = \frac{l \cdot \sigma}{q} \text{ Ohm.}$$

σ ist abhängig vom Material und von der Temperatur des Leiters. $\chi = \frac{1}{\sigma} =$ Leitfähigkeit oder spezifischer Leitwert (für Kupfer etwa 50).

Innerhalb praktischer Temperaturgrenzen kann man setzen:

$$R_2 = R_1 [1 \pm \alpha (t_2 - t_1)]; \quad \alpha = \text{Temperaturkoeffizient.}$$

Spezifische Widerstände:	σ	α
Kupfer	0,0175	+ 0,0040
Silber	0,0170	+ 0,0034
Blei	0,22	+ 0,0041
Aluminium	0,03 ÷ 0,05	+ 0,0039
Eisen	0,10 ÷ 0,12	+ 0,0045
Messing	0,07 ÷ 0,08	+ 0,0015
Neusilber	0,15 ÷ 0,36	+ 0,0002 ÷ 0,0004
Quecksilber	0,95	+ 0,0009
Bogenlampenkohle	55 ÷ 88	negativ
Osmium (Lampenfaden)	0,25	—

Zum Aufbau von Widerständen werden meist Legierungen mit hohem spezifischem Widerstand und geringem Temperaturkoeffizienten benutzt, z. B.:

	σ	α
Manganin	ca. 0,4	$\pm 0,00001$
Konstantan	„ 0,5	—
Nickelin	„ 0,4	0,0001 ÷ 0,0002
Kruppin	„ 0,85	0,0008
Neusilber	„ 0,36	0,0002
Rheotan	„ 0,50	—

Abweichendes Verhalten zeigen Wismut (magnetische Feldstärke) und Selen (Belichtung).

Kirchhoffsche Gesetze. 1. Die Summe der nach einem Knotenpunkt zufließenden Ströme ist gleich der Summe der abfließenden. Für jeden Knotenpunkt ist $\Sigma I = 0$. 2. In jedem in sich geschlossenen Stromkreise (Masche) ist die Summe der eingepprägten EMKe gleich der Summe der Spannungsabfälle:

$$\Sigma E = \Sigma (IR).$$

Stromverzweigung. Die Stromstärken i_1, i_2, i_3 in parallelen Zweigen verhalten sich umgekehrt wie die Widerstände r_1, r_2, r_3 der einzelnen Zweige (Fig. 15). Der Gesamtstrom I ist gleich der Summe der Teilströme:

$$i_1 : i_2 : i_3 = \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_2} : \frac{1}{r_3}; \quad I = \Sigma i.$$

Der Gesamtwiderstand der ganzen Schaltung (Widerstand zwischen AB) errechnet sich bei Parallelschaltung aus

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \dots$$

Hintereinander geschaltete Widerstände sind einfach zu addieren:

$$R = r_1 + r_2 + r_3 + \dots$$

Wärmewirkung des Stromes (Joulesches Gesetz). Ein Strom von der Stärke I Ampere entwickelt in einem Leiter vom Widerstand R Ohm innerhalb t sek eine Stromwärme:

$$A = 0,23865 I^2 R t \text{ Grammkalorien.}$$

Leistung des Stromes. Die Leistung eines infolge einer EMKe E getriebenen Stromes I ist gleich $\mathfrak{L} = EI$ Volt · Ampere.

$$\begin{aligned} 1 \text{ Voltampere} &= 1 \text{ Volt} \cdot 1 \text{ Ampere} = 10^8 \cdot 10^{-1} \text{ Erg pro sek} = 10^7 \text{ Erg/sek} \\ &= \frac{1}{9,81} \text{ kgm/sek} = 1 \text{ Watt.} \end{aligned}$$

$$1000 \text{ Watt} = 1 \text{ Kilowatt.} \quad 736 \text{ Watt} = 1 \text{ PS.}$$

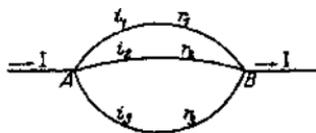


Fig. 15.

Die Arbeit des Stromes ist $A = E \cdot I \cdot t$ Wattsekunden (Joule, Volt-coulomb). Das gebräuchliche Maß für die Stromarbeit ist die Kilowattstunde. Zur Ladung eines Kondensators ist eine Arbeit erforderlich:

$$A = \frac{1}{2} C P^2 \quad (C \text{ in Farad, } P \text{ in Volt})$$

oder auch

$$A = \frac{1}{2} Q \cdot P \quad (Q \text{ in Coulomb}).$$

Wirken in einem Stromkreise vom Widerstand R eine EMK E und eine Gegen-EMK E' , so fließt ein Strom

$$I = \frac{E - E'}{R}.$$

Es ist:

$$E I = I^2 R + E' I,$$

d. h. die Gesamtleistung der Elektrizitätsquelle zerfällt in zwei Leistungen, deren eine $I^2 R$ sich als Stromwärme, deren andere $E' I$, je nach Art von E' , sich in einer anderen Form (Motorleistung) äußert.

Chemische Wirkung des Stromes. Leiter zweiter Klasse (nicht metallische Flüssigkeiten, Salze, Säuren, Basen) im gelösten oder geschmolzenen Zustande leiten die Elektrizität, wobei sie sich chemisch zersetzen. Elektroden: Anode positiv; Kathode negativ. Es gilt auch hier das Ohmsche Gesetz

$$R = \frac{l \cdot \sigma'}{q}; \quad (l \text{ in cm; } q \text{ in cm}^2).$$

Spezifischer Leitwert $\chi = \frac{1}{\sigma'}$ nimmt mit wachsender Temperatur zu. Metalle und Wasserstoff werden an der Kathode abgeschieden.

Faradaysche Gesetze. 1. Die aus einem Elektrolyten von verschiedenen starken Strömen in derselben Zeit ausgeschiedenen Mengen sind den Stromstärken proportional (absolute Strommessung durch Voltmeter). 2. Durch gleichstarke Ströme werden in gleichen Zeiten von verschiedenen Stoffen Mengen ausgeschieden, die chemisch äquivalent sind.

$$m = a I \cdot t;$$

$$a = \text{elektrochem. Äquivalent} = \frac{\text{chemisches Äquivalent}}{96,54} \text{ für 1 mg/Coulomb.}$$

Ein Strom von 1 Ampere scheidet in 1 Sekunde aus:

Silber	1,118 mg	Wasserstoff	0,1160 cm ³
Kupfer	0,3294 „	Sauerstoff	0,0580 „
Jod	1,3153 „	Knallgas	0,1740 „

Zersetzungsspannung ist die Spannung, die mindest erforderlich ist, um Abscheidung an den Elektroden hervorzurufen.

5. Induktion.

In einer Drahtschleife wird eine EMK induziert, solange eine Änderung des die Schleife durchsetzenden Induktionsflusses stattfindet. Diese EMK ist der zeitlichen Änderung des Flusses proportional. Die Art der Änderung und die Größe des Flusses selbst ist hierbei ohne Belang; maßgebend ist nur allein die Geschwindigkeit der Änderung des Flusses. Diese Erscheinung wird bei den Dynamomaschinen zur Erzeugung der EMK benutzt. Man ändert in bezug auf Spulen, in denen die Spannung induziert werden soll, den durchsetzenden magnetischen Fluß, indem man entweder an den ruhenden Spulen die Magnetpole oder an den ruhenden Polen die Spulen vorbei bewegt.

Lenzsches Gesetz. Die induzierte EMK ist stets so gerichtet, daß ein Strom, der durch sie getrieben wird, die Änderung des Flusses zu verhindern sucht (Fig. 16).

Es ist:

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} \cdot 10^{-8} \text{ Volt für eine Schleife,}$$

$$e = - N \frac{d\Phi}{dt} \cdot 10^{-8} \text{ Volt für eine Spule aus } N \text{ Windungen.}$$

In der Figur treten die Induktionslinien vom Beschauer aus durch die Papierebene (\mathfrak{B}_+). Der Bügel $ABCD$ umfaßt den Fluß Φ_+ . Wird der Leiter CD um ds in die Lage $C'D'$ verschoben, so tritt in bezug auf die Schleife eine Vergrößerung des Flusses um $d\Phi_+$ ein. Der induzierte Strom muß also von C nach D fließen, um die Flußänderung zu verhindern.

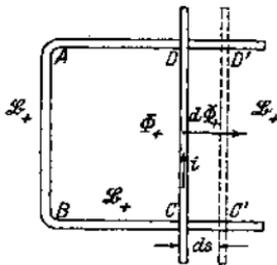


Fig. 16.

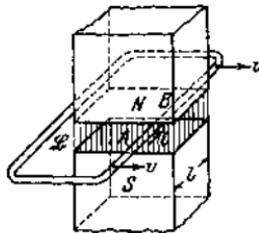


Fig. 17.

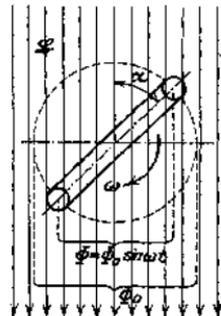


Fig. 18.

Meist erfolgt die Änderung des Flusses nach bestimmten und einfachen Gesetzen, z. B. Bewegungen einer Schleife in ein Feld (Fig. 17).

Ist \mathfrak{B} die Liniendichte des Feldes, v die Bewegungsgeschwindigkeit in cm/sek und l die Länge des Drahtstückes (in cm), welches die Induktionslinien von der Dichte \mathfrak{B} wirklich schneidet, so ist $E = -\mathfrak{B} \cdot lv \cdot 10^{-8}$ Volt. Da die Ausdehnung der Schleife in der Formel nicht berücksichtigt wird, kann man von einer geschlossenen Schleife absehen und nur das Schleifenstück AB von der Länge l betrachten. Man spricht kurz von „Induktion durch Schneiden von Induktionslinien“. Bei Rotation einer Schleife in einem homogenen Feld mit der Winkelgeschwindigkeit ω ändert sich der Fluß nach dem Gesetz (Fig. 18)

$$\Phi = \Phi_0 \sin \alpha = \Phi_0 \sin \omega t.$$

Es wird

$$E = - \frac{d\Phi}{dt} = -\omega \Phi_0 \cos \omega t.$$

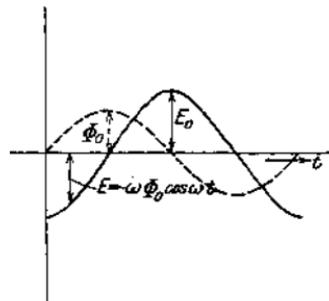


Fig. 19.

Die induzierte Spannung ändert sich hier periodisch zwischen 0 und einem Maximalwert $E_0 = -\omega \Phi_0$ (Fig. 19).

Selbstinduktion. Ebenso wie durch Bewegung eines Leiters im Feld eine EMK induziert wird, kann auch bei vollständiger Ruhe des Leiters durch Änderung des Feldes eine EMK erzeugt werden. Da jeder stromdurchflossene Leiter um sich ein Feld erzeugt ($\mathfrak{B} \cdot l = 0,4\pi NI$), bedingt jede Änderung des Stromes

im Leiter eine EMK im Leiter, die dieser Änderung entgegenwirkt. Selbstinduktion.

$$e = -N \frac{d\Phi}{dt}; \quad \oint \vec{H} = \frac{0,4 \pi N I}{l};$$

$$\Phi = \oint \vec{H} \cdot \vec{Q} = \frac{0,4 \pi N I}{l} \cdot \frac{Q}{\mu \cdot Q}; \quad e_s = - \frac{0,4 \pi N^2}{l} \cdot \frac{dI}{dt} = -L \frac{dI}{dt}.$$

L = Selbstinduktionskoeffizient (Dimension einer Länge, cm). Technische Einheit von $L = 1$ Henry. Da 1 Volt = 10^8 absolute Einheiten, 1 Ampere = 10^{-1} absolute Einheiten, so ist: 1 Henry = 10^9 absolute Einheiten = 10^9 cm. L kann bei Spulen sehr groß werden, wenn diese viele Windungen und Eisen enthalten (Erregerspulen, Elektromagnete). Schließungsfunke und Öffnungsfunke. Bifilare Wicklung für Spulen, die nur zur Aufnahme von Widerstandsdraht bestimmt sind und keine Selbstinduktion besitzen sollen. (Siehe unten unter II).

Für eine Doppelleitung, von der einfachen Länge l cm, einem Drahtabstand d cm und einem Drahradius q cm (nicht über 0,5 cm) gilt

$$L = l(4 \log \text{nat} \frac{d}{q} + 1) 10^{-9} \text{ Henry.}$$

Man spricht von gegenseitiger Induktion, wenn durch Änderung eines Stromes i in einer Leiteranordnung I in einer benachbarten Leiteranordnung Z eine EMK E_2 induziert wird.

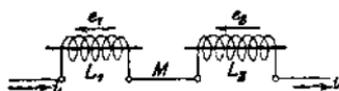


Fig. 20.

Koeffizient der gegenseitigen Induktion = M ;

$$E_2 = -M \frac{di}{dt}.$$

Besondere Fälle (Fig. 20). I. Zwei Spulen mit den Selbstinduktionen L_1 und L_2 haben bei Hintereinanderschaltung und magnetischer Verketzung die Gesamtselbstinduktion

$$L_1 + L_2 + 2M = L';$$

$$E = e_1 + e_2 = -(L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt}.$$

II. (Fig. 21). Zwei Spulen mit L_1 und L_2 sind bei magnetischer Verketzung gegengeschaltet:

$$L' = L_1 + L_2 - 2M;$$

$$E = e_1 - e_2 = -(L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt} \text{ (Kompensationswicklung).}$$

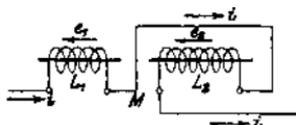


Fig. 21.

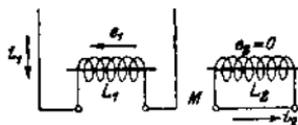


Fig. 22.

Decken sich die Spulen I und Z möglichst, d. h. liegen Windungen, die denselben Strom führen, möglichst nebeneinander, so gilt $L_1 = L_2 = M$. Die Selbstinduktion solcher Anordnung ist = 0 (bifilare Wicklung).

III. (Fig. 22). Zwei Spulen mit L_1 und L_2 sind magnetisch verketzt. Spule I wird mit Strom gespeist, Spule Z ist in sich kurzgeschlossen.

$$L' = L_1 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right); \quad E = -L_1 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right) \frac{di_1}{dt}.$$

Bei geeigneter Wahl von L_1 , L_2 und M kann der Klammerwert = Null werden (Kurzschlußkompensation).

Ist die magnetische Verkettung der Spulen 1 und 2 im Falle III nicht vollkommen, d. h. geht ein Teil der die Spule 1 durchsetzenden Induktionslinien nicht mit durch Spule 2, so ist die EMK der Selbstinduktion in Spule 1 von Null verschieden und ein Maß für die streuenden Linien (Streuspannung).

Regeln, nach denen die Richtungen von Strömen, Feldern und Bewegungen bestimmt werden können:

1. Feld um einen Leiter, Korkzieherregel (Fig. 23).

Man schraube den Bohrer in Richtung des Stromes in den Leiter hinein. Die Drehrichtung des Griffes gibt die Richtung des Feldes an.



Fig. 23.



Fig. 24.

2. Richtung des Stromes um einen Elektromagneten (Fig. 24). Aus 1. folgt: Blickt man auf den Nordpol eines Elektromagneten, so fließt der Strom um den Magneten im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers.

3. Ampèresche Schwimmerregel. Denkt man sich im Leiter mit dem Strom schwimmend und blickt dabei eine Magnetnadel an, so wird der Nordpol der Nadel durch den Strom nach links abgelenkt.

4. Handregel zur Bestimmung der Richtung induzierter Ströme (Fig. 25). Läßt man die Induktionslinien in die rechte Handfläche eintreten und bringt den Daumen in die Richtung der Bewegung des Leiters, so geben die ausgestreckten Finger die Richtung der induzierten Ströme an (Fig. 26).

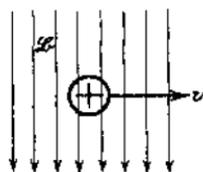


Fig. 25.

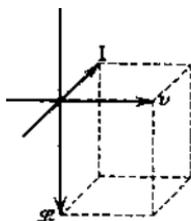


Fig. 26.

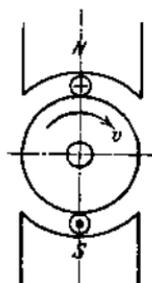


Fig. 27.

5. Blickt man in Richtung der Achse einer Dynamomaschine (Fig. 27), so tritt bei Rechtsdrehung des Ankers der Strom unter dem Nordpol ein, unter dem Südpol aus.

6. Richtung von Kräften. Gleichgerichtete Ströme ziehen sich an, entgegengesetzt gerichtete stoßen sich ab. Gekreuzte Ströme suchen sich gleichzurichten (Fig. 28).

Zwei Spulen, von denen die eine drehbar angeordnet ist (Fig. 29), suchen sich, wenn durch sie Strom fließt, so zu stellen, daß der von ihnen erzeugte Fluß ein Maximum wird, d. h. sie stellen sich koaxial ein.

7. Richtung der Bewegung, die ein vom Strom durchflossener Leiter im magnetischen

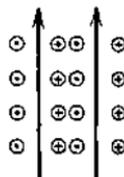


Fig. 28.

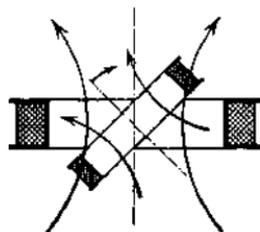


Fig. 29.

Felde einschlägt, läßt sich nach der Korkzieherregel bestimmen. Die Bewegung der Leiter erfolgt stets senkrecht zu den Induktionslinien (Fig. 30). Man bringe die Schraube des Korkziehers in die Stellung senkrecht zu den Induktionslinien, den Griff in die Richtung des Stromes im Leiter. Dreht man den Griff auf kürzestem Wege ($\frac{1}{4}$ Drehung) aus der Richtung des Stromes in die Richtung der Induktionslinien, so gibt die Fortbewegung der Rechtsschraube die Bewegungsrichtung an.

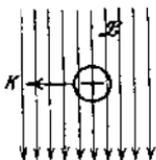


Fig. 30.

6. Wechselströme, ihre Darstellung, Gesetze und Wirkungen.

Wechselströme sind Ströme, deren Stärke und Richtung nach bestimmten Gesetzen periodisch schwanken. Graphische Darstellung des Stromes als Funktion der Zeit gibt die Wechselstromkurve, $i = f(t)$ (Fig. 31). Meist

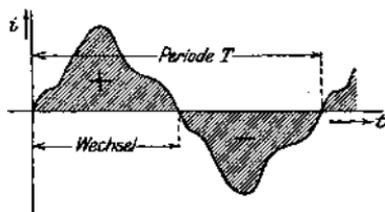


Fig. 31.

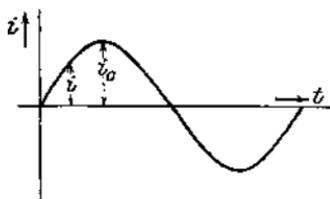


Fig. 32.

sinusförmiger Verlauf der Stromkurve. Dieser wird auch beim Bau der Wechselstromerzeuger angestrebt und den Wechselstrombetrachtungen zugrunde gelegt. i_0 = Maximalwert, Scheitelwert (Amplitude), i = Augenblickswert, Momentanwert.

$$i = i_0 \sin \alpha = i_0 \sin(\omega t) = i_0 \sin(2\pi \nu t) = i_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \quad (\text{Fig. 32});$$

$$\sin(2\pi \nu t) = \text{Phase};$$

Periode T ist die Zeit in sek, in der alle Momentanwerte i durchlaufen werden. Periodenzahl ν (Frequenz, Puls) gibt an, wieviel vollständige Zyklen in einer Sekunde durchlaufen werden. $\nu = \frac{1}{T}$. Übliche Periodenzahlen (in Deutschland) sind 50, 25, $16\frac{2}{3}$ pro sek. Eine Periode hat 2 Wechsel.

Vektordarstellung. Zur Untersuchung der Wechselstromerscheinungen wird die Darstellung durch Kurven nur in besonderen Fällen benutzt. Meist

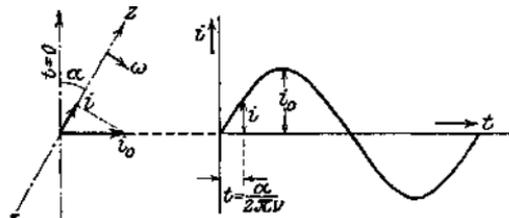


Fig. 33 a, b.

Darstellung durch Vektoren. Man kann die einzelnen Momentanwerte i eines sinusoidal verlaufenden Wechselstromes finden als Projektion eines den Maximalwert i_0 darstellenden Vektors (Fig. 33 a, b) auf eine mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi\nu$ im Sinne des Uhrzeigers rotierende Zeitlinie ZZ . Meist

nimmt man die vertikale Stellung mit der positiven Richtung nach oben als Nulllage der Zeitlinie an und zählt von dieser Lage aus die Zeit

$$\alpha = 2\pi \nu t, \quad i = i_0 \sin \alpha.$$

Hat man mehrere Sinusströme gleicher Frequenz, so kann man sie bei vektorieller Darstellung leicht in Beziehung zueinander setzen. Man sagt: Derjenige Vektor der Zeitlinie zuerst mit ihr zusammenfällt. In der Figur 34a und b eilt i_0'' dem Vektor i_0' vor. Die Voreilung ist hier φ (Phasenverschiebung). Für die Momentanwerte gelten dieselben Gesetze wie für Gleichstrom. Man kann Momentanwerte algebraisch addieren. Es ist:

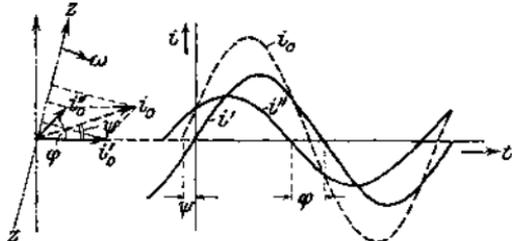


Fig. 34 a, b.

$$i_0' \sin \omega t + i_0'' \sin(\omega t \pm \varphi) = i_0 \sin(\omega t \pm \psi).$$

Mittelwerte. Der arithmetische, über eine ganze Periode genommene Mittelwert ist Null. Man versteht schlechthin unter Mittelwert den über einen Wechsel genommenen Wert

$$i_m = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} i \, dt.$$

Bei Sinusstrom ist

$$i_m = \frac{2}{\pi} i_0.$$

Für die Leistung des Wechselstromes kommt der quadratische Mittelwert, der „Effektivwert“, d. h. der Wert in Frage, der in einem Widerstande dieselbe Stromwärme erzeugen würde, wie ein Gleichstrom von demselben Betrage.

Effektivwert
$$I_{\text{eff.}} = I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 \, dt}.$$

Für Sinusstrom wird:

$$I = \frac{i_0}{\sqrt{2}}, \quad \text{allgemein ist } I = \frac{i_0}{k}; \quad k = \text{Scheitelfaktor.}$$

Formfaktor ist das Verhältnis:

$$\frac{I}{i_m} = f;$$

für Sinusstrom:

$$f = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11.$$

Analog gilt für Wechselspannungen:

Mittelwert:
$$e_m = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e \, dt;$$

für Sinusverlauf:

$$e_m = \frac{2}{\pi} e_0.$$

Effektivwert:

$$E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt};$$

für Sinusverlauf:

$$E = \frac{e_0}{\sqrt{2}}.$$

Leistung des Wechselstromes. Ein durch eine Wechselspannung $e = e_0 \sin \omega t$ getriebener Wechselstrom $i = i_0 \sin(\omega t \pm \varphi)$ (Voreilung oder Nacheilung des Stromes gegen die Spannung) hat die Momentanwerte der Leistung:

$$l = e_0 \sin \omega t \cdot i_0 \sin(\omega t \pm \varphi).$$

Der Effektivwert der Leistung wird:

$$\Omega = \frac{1}{T} \int_0^T e_0 \sin \omega t \cdot i_0 \sin(\omega t \pm \varphi) dt = \frac{1}{2} e_0 i_0 \cos \varphi.$$

$$\Omega = E I \cos \varphi; \quad \cos \varphi = \text{Leistungsfaktor}, \\ E I = \text{scheinbare Leistung}.$$

Zur Bestimmung der Leistung eines Wechselstroms genügt es mithin im allgemeinen nicht (wie bei Gleichstrom), nur die Stromstärke und die Spannung des Wechselstromes zu messen und das Produkt aus beiden zu bilden, sondern es muß die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung, der Zeitwinkel φ , berücksichtigt werden. Dies geschieht durch ein drittes Instrument, das Wattmeter, welches den Mittelwert der Momentanleistungen l über der Zeit einer ganzen Periode angibt. Die Phasenverschiebung richtet sich, wie unten unter „Wichtige Wechselstromkreise“ abgeleitet wird, nach der Art des Betriebes. Glühlampen z. B. stellen einen reinen, ohmschen Widerstand dar und verursachen keine Phasenverschiebung ($\varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$), d. h. die Spannungskurve und die Stromkurve gehen hier gleichzeitig durch Null (Fig. 37 a) oder im Vektordiagramm (Fig. 37 b): Der Strom- und der Spannungsvektor haben gleiche Richtung. Das Wattmeter muß also bei Glühlampenbelastung im Netz das Produkt aus den Angaben des Amperemeters und des Voltmeters angeben. $\Omega = E \cdot I \cdot 1$.

Besteht die Belastung des Netzes aus induktiven Widerständen (Motoren, Drosselspulen, Elektromagneten), so gehen die Stromkurve und die Spannungskurve nicht mehr zu gleicher Zeit durch Null. Die Vektoren des Stromes und der Spannung schließen einen Winkel φ ein (Fig. 35). Das Wattmeter zeigt in diesem Falle weniger an als dem Produkte aus Strom und Spannung, der „scheinbaren Leistung“, entspricht. Im äußersten Falle wäre $\varphi = 90^\circ$, $\cos \varphi = 0$. Die Stromkurve geht durch Null, wenn die Spannungskurve ihren Maximalwert erreicht hat und umgekehrt. In diesem Falle zeigt das Wattmeter keine Leistung an, obgleich Strom und Spannung beliebig hohe Werte besitzen können.

Beispiel. Eine Wechselstrommaschine für 5000 Volt arbeite mit 100 Ampere auf ein Netz, welches wesentlich mit Motoren belastet ist. Das Wattmeter zeigt 400 KW = wirkliche Leistung. Die scheinbare Leistung ist $5000 \cdot 100 = 500\,000$ Volt-Ampere = 500 KVA. Mithin $\cos \varphi = \frac{400}{500} = 0,8$. Die Antriebsmaschine braucht natürlich nur die wirkliche Leistung aufzubringen. Ist $\eta_m =$ Wirkungsgrad der Antriebsmaschine = 92%, $\eta_{dyn} =$ Wirkungsgrad der Dynamomaschine = 95%, so wird die Anzahl der PS₁

$$N_i = \frac{E \cdot I \cdot \cos \varphi}{736 \cdot \eta_{dyn} \cdot \eta_m} = \frac{400 \cdot 1000}{736 \cdot 0,95 \cdot 0,92} = 620 \text{ PS}_1.$$

Für den Entwurf der Antriebsmaschine wird jedoch die „scheinbare Leistung“ als Höchstwert zugrunde gelegt.

Die Leistung läßt sich graphisch darstellen als Fläche eines Parallelogrammes aus E und I' , wobei I' der um 90° gedrehte Vektor des Stromes I bedeutet (Fig. 35). Dreieck aus E und I' stellt die halbe Leistung dar.

Zerlegung der Vektoren in Komponenten. Projiziert man den Vektor des Stromes auf den Vektor der Spannung (Fig. 36), so erhält man die an der Leistung beteiligte Komponente $I' = I \cos \varphi$, die Leistungskomponente. Die Komponente $I'' = I \sin \varphi$ heißt leistungslose Komponente oder Leerkomponente.

Formulierung der Kirchhoffschen Gesetze für Wechselstrom.

1. Die geometrische Summe der Vektoren der Stromstärken, die nach einem Knotenpunkte zufließen, ist gleich der geometrischen Summe der Vektoren der Stromstärken, die von dem Punkte wegfließen. Das Polygon aus allen Stromstärken, die in dem Punkte zusammenkommen, muß geschlossen sein.

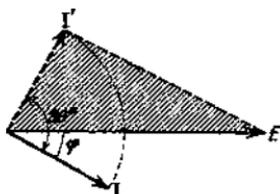


Fig. 35.

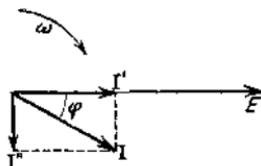


Fig. 36.

2. In jedem geschlossenen Wechselstromkreise ist die geometrische Summe aller EMKe und der Produkte IR gleich Null. Das Polygon der EMKe und der IR ist geschlossen.

Wichtige Wechselstromkreise.

1. Wahrer, ohmscher Widerstand R im Wechselstromkreise. Ein ohmscher Widerstand R (entsprechend $\frac{l \cdot \sigma}{q}$) setzt der angelegten Spannung eine Gegen-EMK $= -(iR)$ entgegen. Es muß $p = -(-iR)$ angelegt werden, um den Strom i zu erhalten. Mithin ist p proportional i (Fig. 37 a, b).

$$i = i_0 \sin \omega t; \quad p = R \cdot i_0 \sin \omega t;$$

$$p \text{ konphas } i; \quad \cos \varphi = 1; \quad \Omega = EI \cos \varphi = EI.$$

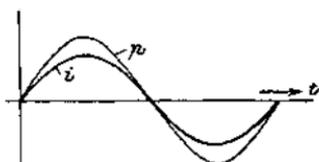


Fig. 37 a, b.

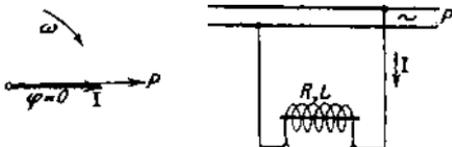


Fig. 38.

Es gilt wie bei Gleichstrom $P = I \cdot R$ (Ohmsches Gesetz). Als wahre, ohmsche Widerstände können Glühlampen, Wasserwiderstände angesehen werden.

2. Induktiver Widerstand neben ohmschem Widerstand im Kreise (Fig. 38). Neben der Gegen-EMK $(-iR)$ ist hier noch die EMK der Selbstinduktion

$$e_s = -L \frac{di}{dt}$$

zu überwinden. Ist $i = i_0 \sin \omega t$, so muß zur Erzeugung von i angelegt werden (Fig. 39 a, b):

$$p = iR + L \frac{di}{dt};$$

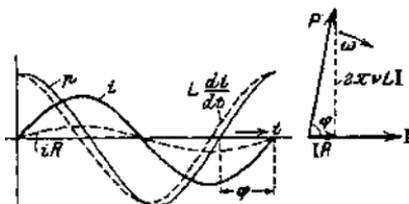


Fig. 39 a, b.

$$p = R \cdot i_0 \sin \omega t + \omega L i_0 \cos \omega t; \quad P = I \cdot R \hat{+} \omega L I.$$

Die angelegte Spannung P zerfällt mithin in eine Leistungskomponente zur Überwindung des ohmschen Widerstandes und eine dem Strom 90° voreilende

Leerkomponente zur Überwindung des induktiven Widerstandes. Aus dem Vektordiagramm (Fig. 39b) ergibt sich:

$$P^2 = (I \cdot R)^2 + (2\pi\nu L I)^2;$$

$$I = \frac{P}{\sqrt{R^2 + (2\pi\nu L)^2}} = \frac{\text{Spannung}}{\text{scheinbarer Widerstand}};$$

$$\sqrt{R^2 + (2\pi\nu L)^2} = \text{scheinbarer Widerstand (Impedanz)};$$

$$2\pi\nu L = \text{Reaktanz};$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{2\pi\nu L}{R}; \quad \mathcal{L} = P \cdot I \cos \varphi = I^2 \cdot R.$$

Mit induktiven Widerständen kann man mithin Spannungen abdrosseln, ohne dabei Leistung zu verbrauchen, wobei allerdings Phasenverschiebung auftritt. Induktiver Widerstand ist stets vorhanden, wenn mittels Wechselströmen Induktionsflüsse erzeugt werden (Motoren, Drosselspulen, Transformatoren). Z. B. könnte man eine sogenannte Drosselspule (Spule mit Eisenkern) in Wechselstrombogenlampenkreisen anwenden, um Leistungsverluste zu vermeiden. Bei Anschluß einer Wechselstromlampe von 30 Volt und 10 Ampere an ein 110 Volt-Netz wären 80 Volt in einem Vorschaltwiderstand zu vernichten. Hierbei wäre der Leistungsverlust $10 \cdot 80 = 800$ Watt. Schaltet man an Stelle eines Vorschaltwiderstandes eine Drosselspule vor die Lampe, so wird der Strom im Lampenkreis gegen die Spannung stark verschoben. Zwar fließen 10 Ampere durch Lampe und Drosselspule und beide liegen zusammen an 110 Volt ($110 = 30 \hat{+} E_{dr}$), doch ist der Verbrauch $L = 110 \cdot 10 \cdot \cos \varphi$ nicht viel größer als der Verbrauch der Lampe allein. Arbeitet eine Wechselstromquelle auf Glühlampen (Fig. 40), denen eine

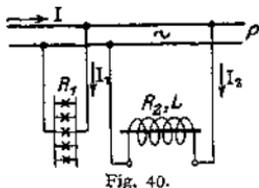


Fig. 40.

Drosselspule parallel geschaltet ist, so sind zwei Ströme zu unterscheiden: Für die Lampen (Widerstand R_1)

$$I_1 = \frac{P}{R_1} \quad (I_1 \text{ konphas } P).$$

Für die Drosselspule (Widerstand R_2 und Selbstinduktion L)

$$I_2 = \frac{P}{\sqrt{R_2^2 + (2\pi\nu L)^2}}; \quad \text{tg } \varphi_2 = \frac{2\pi\nu L}{R_2}.$$

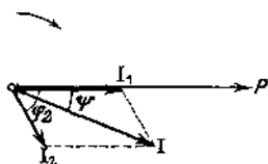


Fig. 41.

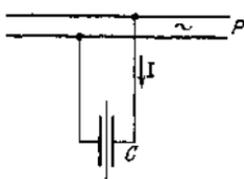


Fig. 42.

Der aus der Stromquelle fließende Strom I ist (Fig. 41)

$I = I_1 \hat{+} I_2$
(unter dem Winkel φ nacheilend gegen die Spannung P).

3. Kapazität im Wechselstromkreise (Fig. 42).

$$\text{Kapazität } C = \frac{Q}{P} = \frac{\text{Elektrizitätsmenge}}{\text{Potentialdifferenz}};$$

$$dq = C dp; \quad i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dp}{dt}.$$

Für Sinusstrom: $p = p_0 \sin \omega t; \quad i = \omega C p_0 \cos \omega t.$

Der Strom eilt der Spannung 90° vor (Fig. 43 a, b).
 Effektivwerte: $I = \omega C P$. Der Strom wächst mithin proportional mit der Frequenz.

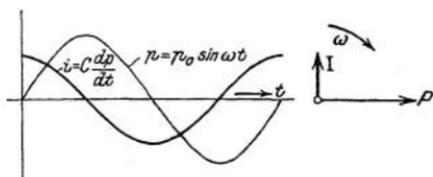


Fig. 43 a, b.

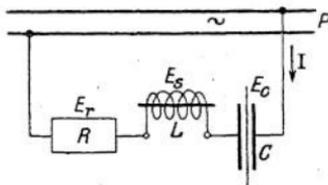


Fig. 44.

4. Wechselstromkreis mit ohmschem Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität (Fig. 44).

Es muß sein: $P = E_r \hat{=} E_s \hat{=} E_c$ (Fig. 45).

$$E_r = IR; \quad E_s = 2\pi\nu LI; \quad E_c = \frac{I}{2\pi\nu C};$$

$$I = \frac{P}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L - \frac{1}{2\pi\nu C}\right)^2}} \quad (\text{Ohmsches Gesetz});$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{E_s - E_c}{E_r};$$

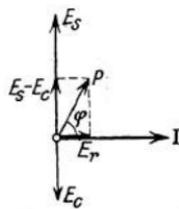


Fig. 45.

$$\sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L - \frac{1}{2\pi\nu C}\right)^2} = \text{scheinbarer Widerstand (Impedanz);}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2\pi\nu L - \frac{1}{2\pi\nu C} \\ 2\pi\nu L \end{array} \right\} \text{Reaktanz;}$$

$$\frac{1}{2\pi\nu C} = \text{Kapazitätsreaktanz (Kondensanz);}$$

$$L = \text{Induktanz, Selbstinduktionskoeffizient.}$$

Je nachdem Induktanz oder Kondensanz überwiegt, eilt die Spannung dem Strom vor oder nach. Die Phasenverschiebung kann Null werden ($\cos \varphi = 1$), wenn Selbstinduktion, Kapazität und Frequenz geeignet abgeglichen sind (Resonanz). Resonanz tritt ein, wenn $E_s = E_c$, d. h.

$$\omega^2 LC = 1 \quad \text{oder} \quad LC = \frac{1}{\omega^2}; \quad \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Mehrphasenströme.

Ordnet man auf einem Anker mehrere Spulen (Spulengruppen) derart an, daß ein und derselbe Induktionsfluß bei Bewegung des Ankers oder des Flusses zu verschiedenen Zeiten die Spulen durchsetzt, so werden in den Spulen Wechselspannungen induziert, die phasenverschoben sind.

Räumliche Verschiebung der Spulen bedeutet zeitliche Verschiebung der induzierten Spannungen.

Zweiphasenstrom. Zwei gleiche Spulen (Gruppen) sind elektrisch 90° (bei einer zweipoligen Anordnung räumlich 90°) gegeneinander verschoben (Fig. 46). Die induzierten Spannungen sind um $1/4$ Periode verschoben (Fig. 47). Zur Fortleitung eines Zweiphasenstromes sind im allgemeinen 4 Leitungen erforderlich (Fig. 48). Durch Zusammenlegung zweier Leitungen erhält man verketteten

Zweiphasenstrom mit 3 Leitungen (Fig. 49). Die gemeinsame Leitung führt je nach Art der Verbindung die Summe oder Differenz der Phasenströme. Bei gleicher Belastung der Phasen ist der verkettete Strom $\sqrt{2}$ mal so groß als der Phasenstrom (Fig. 50).

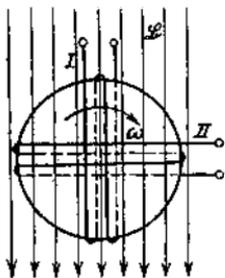


Fig. 46.

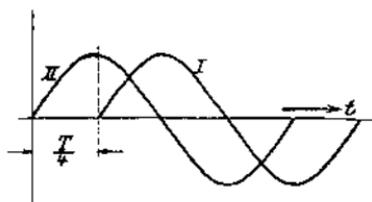


Fig. 47.

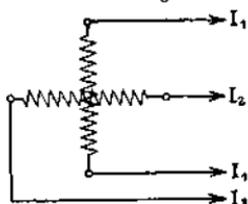


Fig. 48.

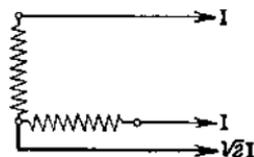


Fig. 49.

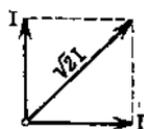


Fig. 50.

Dreiphasenstrom entsteht, wenn die Spulen 60° gegeneinander angeordnet sind (Fig. 51). Die induzierten Spannungen sind 60° gegeneinander verschoben. Der verkettete Dreiphasenstrom beträgt bei gleicher Belastung der drei Zweige das Doppelte des Phasenstromes (Fig. 52).

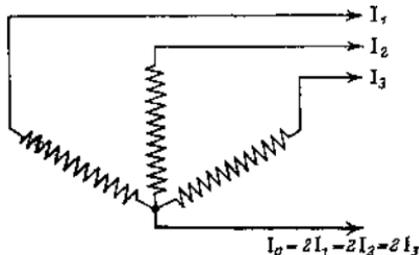


Fig. 51.

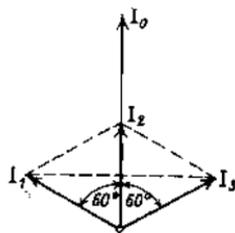


Fig. 52.

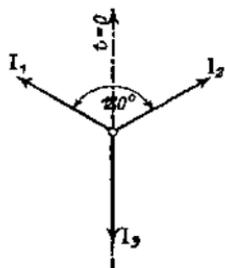


Fig. 53.

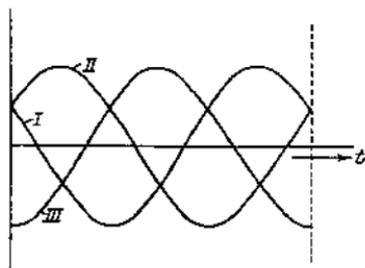


Fig. 54.

Drehstrom entsteht, wenn drei Spulen derart auf dem Anker angeordnet werden, daß sie 120° gegeneinander einschließen. Die drei Vektoren schließen dann

Winkel von 120° ein (Fig. 53). Die geometrische Summe der Vektoren ist Null. Während im allgemeinen zum Fortleiten des Drehstromes 6 Leitungen erforderlich sind, kann man bei Verkettung der drei Phasen und gleicher Belastung derselben mit 3 Leitungen auskommen, da der Summenstrom Null ist (Fig. 54). Zwei Möglichkeiten zu verketteten: Sternschaltung und Dreieckschaltung.

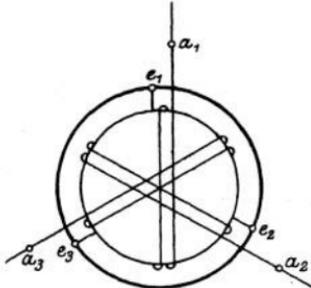


Fig. 55.

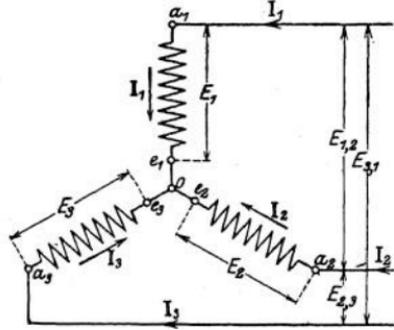


Fig. 56.

Sternschaltung entsteht, wenn die um 120° verschobenen Enden e_1, e_2, e_3 zusammengelegt werden (Fig. 55). Die Fortleitung des Drehstromes erfolgt durch Anschlüsse an a_1, a_2, a_3 . Es sind 6 Spannungen vorhanden (Fig. 56). 3 Spannungen zwischen Nullpunkt und den Klemmen a_1, a_2, a_3 und 3 Spannungen zwischen a_1, a_2, a_3 . Spannung zwischen Nullpunkt und Klemmen wird kurz Sternspannung genannt. Unter Spannung schlechthin eines Drehstromnetzes versteht man die Spannung zwischen den Klemmen (Außenleitern). Bezeichnet man die Sternspannungen mit E_1, E_2, E_3 , die Spannungen zwischen den Klemmen a_1, a_2, a_3 mit $E_{1,2}, E_{2,3}, E_{3,1}$, so ist, wie aus Fig. 57 ersichtlich, (als geometrische

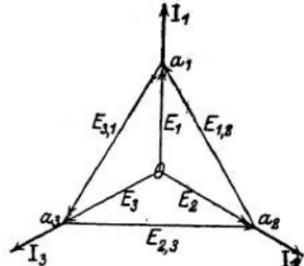


Fig. 57.

Differenz der Sternspannungen), $E_{1,2} = E_{2,3} = E_{3,1} = \sqrt{3} E_1 = \sqrt{3} E_2 = \sqrt{3} E_3$.

Die Ströme I_1, I_2, I_3 werden im Diagramm in den Punkten a_1, a_2, a_3 angetragen. Bei Sternschaltung sind die Ströme in den Außenleitern gleich den Strömen in den einzelnen Zweigen.

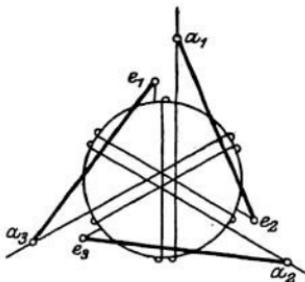


Fig. 58.

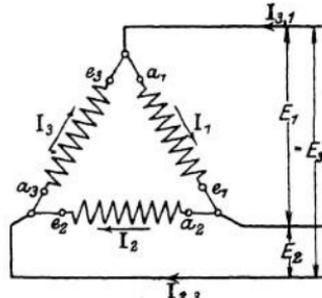


Fig. 59.

Dreieckschaltung entsteht, wenn man die Anfänge a_1, a_2, a_3 mit den Enden der nächsten Spulen e_2, e_3, e_1 verbindet (Fig. 58). Dies ist zulässig,

da die geometrische Summe der Vektoren der EMK = 0 ist. Bei Dreieckschaltung nur drei Spannungen, kurz Spannung genannt, nämlich die zwischen den Außenleitern (Fig. 59). Die Stromstärken in den Zuleitungen nach a_1, a_2, a_3 stellen die geometrische Differenz der Ströme in den einzelnen Zweigen dar:

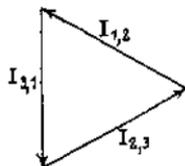


Fig. 60.

$$I_{12} = I_{23} = I_{31} = \sqrt{3} I_1 = \sqrt{3} I_2 = \sqrt{3} I_3 .$$

Die Vektoren der Ströme in den Zuleitungen müssen sich zu einem Dreieck schließen (Fig. 60).

Anwendung der Sternschaltung (Y) oder Dreieckschaltung (Δ) ist beliebig. Üblich ist, Lampen in Δ zu schalten; Motoren erhalten Y- oder Δ -Schaltung.

Leistung des Drehstromes. Die Gesamtleistung eines beliebig belasteten Drehstromsystems setzt sich aus den drei Einzelleistungen der Zweige zusammen.

$$\mathcal{Q} = E_1 I_1 \cos \varphi_1 + E_2 I_2 \cos \varphi_2 + E_3 I_3 \cos \varphi_3 \quad (\text{Fig. 57}).$$

Bei gleicher Belastung der Zweige wird:

$$\mathcal{Q} = 3 E_1 I_1 \cos \varphi_1 = 3 E_2 I_2 \cos \varphi_2 = 3 E_3 I_3 \cos \varphi_3 .$$

Da bei Y-Schaltung die Spannung zwischen den Außenleitern das $\sqrt{3}$ -fache der Sternspannung oder bei Δ -Schaltung der Strom im Außenleiter das $\sqrt{3}$ -fache des Zweigstromes ist, ist die Drehstromleistung bei gleicher Belastung der Zweige

$$\mathcal{Q} = \sqrt{3} E I \cos \varphi .$$

Die Leistung eines beliebig belasteten Drehstromsystems läßt sich bei Y-Schaltung graphisch darstellen als die doppelte Summe der Flächen der drei Dreiecke, jedes gebildet aus dem um 90° gedrehten Stromvektor und dem Vektor der zugehörigen Sternspannung (Fig. 61). Die Lage des Punktes O ist willkürlich. Legt man O in eine der Ecken a_1, a_2, a_3 , so wird eines der Flächendreiecke = Null. Die Drehstromleistung wird also auch durch die doppelte Fläche zweier Dreiecke dargestellt (siehe unter Messungen).

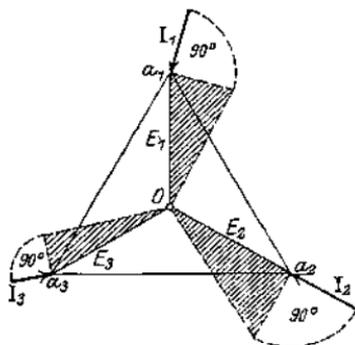


Fig. 61.

Eisen in veränderlichen Feldern.

Bringt man Eisen in ein magnetisches Feld, das von Null bis zu einem positiven Maximum stetig ansteigt, wieder über Null nach einem negativen Maximum

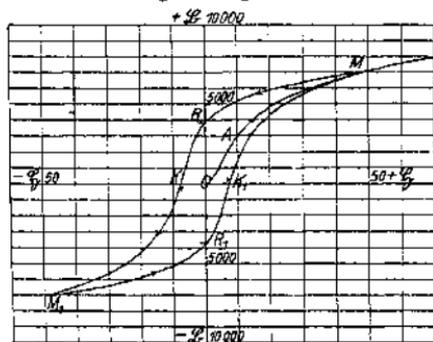


Fig. 62.

ebenso abnimmt und dann wieder stetig bis zum positiven Maximum anwächst, so sind die Werte \mathfrak{H} für ein und dieselben Werte von \mathfrak{H} beim Herauf- und Heruntergehen nicht gleich (Fig. 62). Die im Abschnitt „Magnetismus“ angegebene Beziehung $\mathfrak{H} = \mu \cdot \mathfrak{H}$ ist nicht vollkommen. Für $\mathfrak{H} = 0$ hat \mathfrak{H} noch den Wert OR (Remanenz). \mathfrak{H} wird erst = 0 für eine negative Feldstärke OK (Koerzitivkraft). Die bei graphischer Darstellung des Ummagnetisierungsprozesses ent-

stehende Schleife (Hysteresisschleife) schließt eine Fläche ein, die dem Arbeitsverlust proportional ist, der bei einer einmaligen vollständigen Ummagnetisierung auftritt und sich in Erwärmung des Eisens äußert. Hysteresisverlust.

Fläche $\int \mathfrak{H} d\mathfrak{B}$ ist unter Berücksichtigung des Abszissen- und Ordinatenmaßstabes nach Warburg das 4π -fache des Verlustes in Erg pro 1 cm^3 Eisen.

$$V = \frac{1}{4\pi} \int \mathfrak{H} d\mathfrak{B} \text{ Erg/cm}^3.$$

Das Gesetz gilt auch für nicht vollständig durchlaufene Ummagnetisierungsprozesse.

Wird Eisen in einer mit Wechselstrom gespeisten Spule ummagnetisiert, so wird eine der Hysteresis entsprechende elektrische Leistung verbraucht. Nach Steinmetz kann der Hysteresisverlust pro cm^3 Eisen gesetzt werden

$$V_h = \eta \nu \mathfrak{B}_0^{1,6} \text{ Erg/sek},$$

wobei ν = Frequenz/sek und \mathfrak{B}_0 = maximale Induktion. Da $1 \text{ Watt} = 10^7 \text{ Erg/sek}$, wird

$$V_h = \eta \nu \mathfrak{B}_0^{1,6} 10^{-7} \text{ Watt/cm}^3$$

oder

$$V_h = \frac{\eta \cdot \nu \mathfrak{B}_0^{1,6}}{7,7 \cdot 10^4} \text{ Watt/kg},$$

wobei $7,7$ = spezifisches Gewicht des Eisens.

Für Schmiedeeisen, Eisenblech, Stahlblech $\eta = 0,0012$ bis $0,0055$ je nach Härte,
 Gußeisen $\eta = 0,0011$ bis $0,016$,
 weichen Stahlguß η ca. $0,028$,
 modernes Transformatorenblech . . $\eta = 0,001$ bis $0,0015$.

Wirbelströme. Durchsetzt ein veränderlicher Fluß Eisen, so werden wie in jedem Leiter EMKE induziert (analog: Schneiden von Induktionslinien durch Eisenmassen). Infolge der EMKE bilden sich im Eisen Ströme (Foucaultsche Ströme, Wirbelströme) aus, die das Eisen erwärmen. Verlust durch Wirbelströme ist $V_w = \xi \cdot \nu^2 \mathfrak{B}_0^2 10^{-7} \text{ Watt/cm}^3$, wobei ξ etwa $0,000001$. Bei sinuoidalem Verlauf des Flusses ($\Phi = \Phi_0 \sin \omega t$) hat die EMK der Wirbelströme die Form

$$e_w = - \frac{d\Phi}{dt} = - \omega \Phi_0 \cos \omega t.$$

Der Verlust durch Wirbelströme (Joulesche Wärme) hat den Wert

$$V_w = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{e_w^2}{R_{\text{Eisen}}} dt,$$

wobei R_{Eisen} der ohmische Widerstand des Eisens ist.

Zur möglichsten Verhinderung der Wirbelströme setzt man Eisenmassen, die von Wechselströmen durchsetzt werden, aus Blechen zusammen. (Induktionslinien müssen längs der Blechebenen verlaufen.) Die Bleche werden durch Lack oder dünnes Papier voneinander isoliert. Blechdicke δ ca. $0,3$ bis $0,5 \text{ mm}$. Papierdicke etwa $0,03 \text{ mm}$. Eisen mit hohem Siliziumgehalt (legierte Bleche) hat höheren spezifischen Widerstand und deshalb geringen Wirbelstromverlust, doch leidet durch den Si-Gehalt die Magnetisierungsfähigkeit und die mechanische Festigkeit des Eisens.

Verluste durch Hysteresis und Wirbelströme treten praktisch im Eisen stets gemeinsam auf. Zur Kennzeichnung der Güte des Eisens bezüglich seiner Verluste bei der Ummagnetisierung gibt man die Verlustziffer des Eisens an. Verlustziffer nennt die Anzahl Watt, die bei der Ummagnetisierung von 1 kg Eisen (spezifisches Gewicht $7,7$ angenommen) durch sinusförmigen Wechselstrom von

der Frequenz = 50/sek und bei einer maximalen Induktion $\mathfrak{B}_0 = 10\,000$ cgs Linien/cm² bei einer bestimmten Temperatur (30° C) durch Hysteresis und Wirbelströme im Eisen in Wärme umgesetzt werden. Fig. 63 und 64 stellen die Verluste in Dynamoblech von 0,5 mm Dicke und in legiertem Blech (Transformatorblech) von 0,3 mm Dicke durch Hysteresis und Wirbelströme in Watt/kg in Abhängigkeit von der maximalen Induktion und der Frequenz dar. (Kurven nach Petersen - Kittler, Allgemeine Elektrotechnik, Bd. II, 1909.)

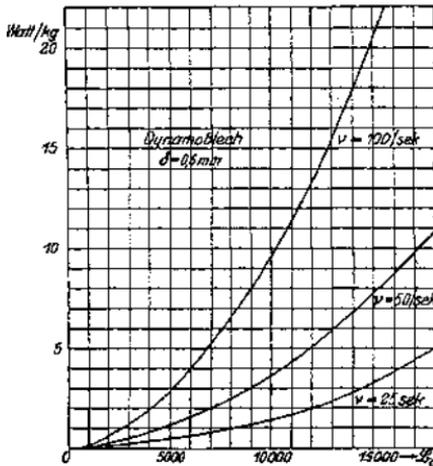


Fig. 63.

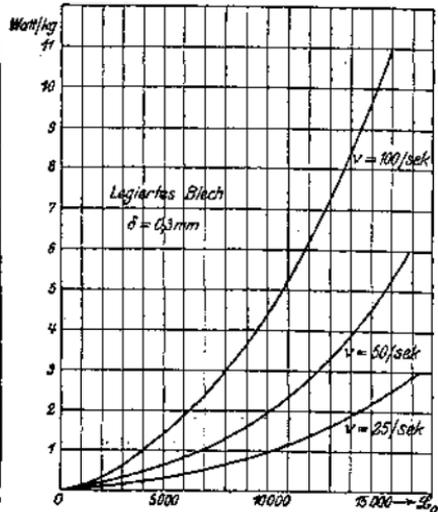


Fig. 64.

Skinneffekt (Hauteffekt). Infolge gegenseitiger Induktion zwischen inneren und äußeren Leiterschichten verteilt sich ein Wechselstrom nicht gleichmäßig über den Querschnitt eines Leiters (Eigenimpedanz). In den äußeren Schichten des Leiters ist die Stromdichte größer als im Innern des Leiters. Durch Skinneffekt wird mithin der ohmsche Widerstand scheinbar erhöht. (Siehe C. P. Feldmann, Wechselstromtransformatoren, S. 158, 1894.) Ist R_{pt} der wahre, ohmsche Widerstand (bei Gleichstrombelastung des Leiters) und R_w der infolge ungleicher Stromverteilung im Leiter bei Wechselstrom wirksame, der Stromwärme entsprechende Widerstand, so gilt $R_w = f \cdot R_{pt}$.

Werte von f für Kupferleiter vom Durchmesser d mm:

$\nu =$	Perioden/sek		
	25	50	100
$d = 5$ mm	1,00003	1,0001	1,00044
10 „	1,0004	1,0018	1,0070
15 „	1,0020	1,0098	1,0350
20 „	1,0070	1,0280	1,1120

Eine dem Skinneffekt analoge Erscheinung, nämlich eine Verdrängung der Induktionslinien durch die Wirbelströme, tritt auf, wenn Wechselfelder durch Leiter, z. B. Eisen, durchtreten. Es findet hier eine Erhöhung der Induktion \mathfrak{B} in den äußeren Schichten des Leiters statt. Bei Blechen bis 0,5 mm Dicke und bei den üblichen Frequenzen 25 und 50 pro sek kann dieser Skinneffekt vernachlässigt werden. (Näheres Petersen - Kittler, Allgemeine Elektrotechnik, Bd. II, 1909, S. 152.)

II. Elektrotechnische Meßkunde.

1. Konstruktion, Wirkungsweise und Anwendung der gebräuchlichen Meßinstrumente.

Der elektrische Strom wird bei Meßinstrumenten benutzt, um mechanische Kräfte auf die beweglichen Teile der Instrumente auszuüben. Meist Drehbewegung, selten Vorwärtsbewegung des „Systems“. Während der Ablenkung aus der Nulllage werden (durch Torsion von Fäden, äußere Magnetfelder, Federn, Schwerkraft) Gegenkräfte ausgelöst, die das System wieder in die Nullage zurückzubringen suchen. Durch das Zusammenwirken der ablenkenden und der gegenwirkenden Kräfte kommt nach Schwingungen das System in die neue Ruhelage. Dämpfung des Systems zur schnellen Ablesung des gesuchten Meßwertes.

Dämpfungsarten:

Flüssigkeitsdämpfung (leicht überaperiodisch, Zeiger „schleicht“).

Luftdämpfung (am gebräuchlichsten).

Wirbelstromdämpfung (bei Hitzdrahtinstrumenten).

Fig. 65 zeigt die möglichen Dämpfungsverhältnisse.

Gewicht und Trägheitsmoment des Systems sollen klein sein, um Achsen und Lager wenig zu beanspruchen und geringe kinetische Energie des Systems zu erhalten.

Empfindlichkeit: Ausschlag pro Einheit der zu messenden Größe.

Spiegelablesung, zum Beobachten sehr kleiner Ausschläge (nach Poggenдорff-Gauß). Fig. 66. Je nachdem bei C das Auge oder ein leuchtender Körper, spricht man von subjektiver oder objektiver Ablesung. Letztere bequemer, da man während der Ablesung gleichzeitig Handlungen vornehmen kann. Subjektive Ablesung ist genauer. In Fig. 66 ist die gemessene Größe $AB = n$ der Tangente des Winkels 2α proportional. Ist Abstand AS groß und α klein, kann ohne großen Fehler Proportionalität zwischen α und n angenommen werden. Objektive Ablesung mit vertikalem Lichtstrahl (Siemens & Halske).

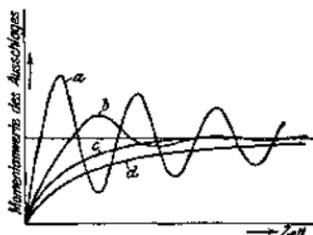


Fig. 65.

a) Schwingung periodisch, b) Schwingung schwach gedämpft, c) Ausschlag aperiodisch, d) Ausschlag stark gedämpft („überaperiodisch“).

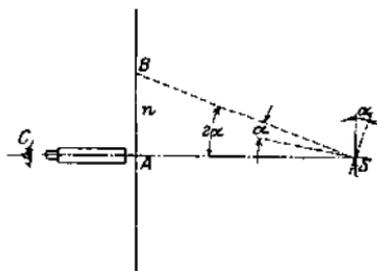


Fig. 66.

Systeme der Meßinstrumente.

Drehspulinstrumente (Thomson, Deprez, Weston).

In einem radialen, homogenen Felde, erzeugt durch einen permanenten Stahlmagneten, ist ein die Wicklung tragendes Rähmchen drehbar angeordnet (Fig. 67). Die Stromzuführung zum Rähmchen erfolgt durch Spiralfedern oder durch Aufhängedraht. Das auf das System ausgeübte Drehmoment ist

$$D = 2 \frac{\mathfrak{H} N i \cdot l}{10} \cdot r = \frac{1}{10} \mathfrak{H} \cdot S N i \text{ cm-Dynen,}$$

wobei N Windungszahl, l die Höhe, r halbe Breite, $2rl = S =$ Fläche des Rähmchens, $i =$ Stromstärke in Ampere, \mathcal{H} die Feldstärke im Luftspalt. ($i \cdot N$ etwa ≈ 1 Amperewindung, $\mathcal{H} = 500$ bis 3000 Linien.) Drehspulinstrumente für technische Zwecke (sogenannte Präzisions-Schalttafelinstrumente) und

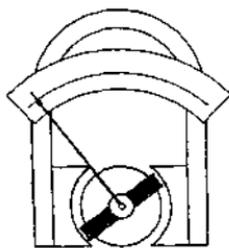


Fig. 67.

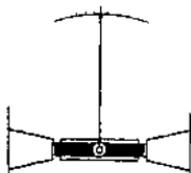


Fig. 68.

für Laboratorium (transportable Zeigerinstrumente oder Galvanometer mit Zeiger oder Spiegel) Differentialgalvanometer nach Deprez tragen zwei Spulen auf dem Rähmchen. Isthmusmethode für Zeigergalvanometer für Nullmethoden (Fig. 68). Durch Anwendung eines magnetischen

Nebenschlusses ist Änderung der Empfindlichkeit in weiten Grenzen möglich. Wirbelstromdämpfung mittels des die Spule tragenden Kupfer- oder Aluminiumrähmchens.

Bei Präzisionsmessungen soll bei Laboratoriumsinstrumenten wegen Durchhang der Federn und wegen geringer Exzentrizität die Achse vertikal stehen. Vorteile der Drehspulinstrumente sind: große Empfindlichkeit, proportionale Skala (\mathcal{H} homogen), gute Dämpfung, Erkennbarkeit der Stromrichtung (Instrument ist polarisiert), leichte Transportfähigkeit, leichte Änderung der Empfindlichkeit (magnetischer Nebenschluß). Drehspulinstrumente naturgemäß nur für Gleichstrom.

Drehmagnetinstrumente. Ein meist an Fäden aufgehängter permanenter Magnet (Glockenform oder Nadel) wird durch das Feld einer stromdurchflossenen, feststehenden Spule beeinflusst. Instrumente müssen „orientiert“ werden. Starke Beeinflussung durch äußere, fremde Magnetfelder. Panzergalvanometer. Astatisches Nadelpaar. In der Technik wegen ihrer schwierigen Aufstellung und leichten Beeinflussung nicht angewandt.

Weicheiseninstrumente (meist elektromagnetische Instrumente genannt). Ein die Achse und den Zeiger tragendes Weicheisenstück geeigneter Form wird durch das Feld einer feststehenden, stromdurchflossenen Spule beeinflusst. Älteste Form nach Kohlrusch. Empirische Herstellung der Skala. Meist Luftdämpfung. Angaben der Instrumente etwas abhängig von Frequenz und Kurvenform. Billigste Instrumente. Als Schalttafelinstrumente viel angewandt. Neuere Konstruktionen zeigen praktisch zu vernachlässigende Unterschiede in den Angaben für Gleich- und Wechselstrom.

Dynamometrische Instrumente. Enthalten kein Eisen. Eine feste und eine bewegliche Spule (Fig. 69) wird vom Strome durchflossen. Die ablenkende Kraft ist proportional dem Produkte der Ströme. $C\alpha = i^2$. Quadratische Skala. Angaben von der Polarität, Kurvenform und Frequenz unabhängig. Für Gleich- und Wechselstrom gleiche Angaben. Werden mit Gleichstrom geeicht. Ausführung als Galvanometer mit Spiegelablesung, als Torsionsgalvanometer und besonders für Laboratorien und Prüffelder mit direkter Zeigerablesung. Starke Beeinflussung durch fremde Magnetfelder. Wirbelstrom- oder Luftdämpfung.

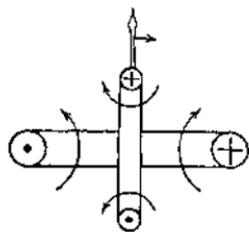


Fig. 69.

Drehfeldinstrumente (Ferrarisinstrumente). Mit Hilfe eines kleinen vierpoligen Magnetgestelles aus Blechen, dessen je zwei gegenüberliegende Pole mit in Reihe geschalteten Wicklungen versehen sind, wird ein Drehfeld erzeugt. Dies wird erreicht, indem die beiden Wicklungsgruppen mit Strömen beschickt werden, die in ihrer Phase 90° verschoben sind. Dies Drehfeld induziert in einer zwischen

Spitzen gelagerten und den Zeiger tragenden Aluminiumtrommel Ströme, die die Trommel mit dem Drehfeld fortzubewegen suchen (Fig. 70 und 71). Federn suchen

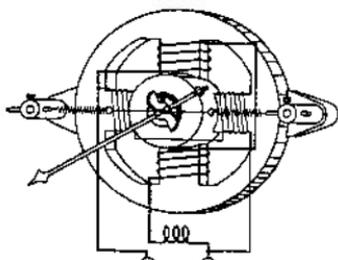


Fig. 70.

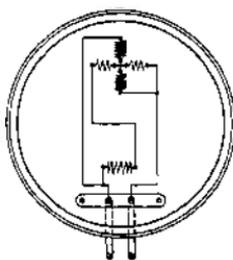


Fig. 71.

die Trommel wieder in die Nullage zurückzuziehen. Dämpfung durch Wirbelstrombremse. Instrumente sind sehr empfindlich und werden durch äußere Felder so gut wie gar nicht beeinflusst. Temperatur, Frequenz und Kurvenform haben großen Einfluß auf die Angaben. Müssen für bestimmte Frequenz geeicht werden.

Hitzdrahtinstrumente. Ein ausgespannter, sehr feiner Hitzdraht (Platin-Silber) wird vom Strom oder Teilen desselben durchflossen und erleidet durch die Joulesche Wärme Ausdehnung (Fig. 72). Diese wird benutzt, um durch geeignete Spannvorrichtung *CDE* eine Rolle *R* und mit dieser einen Zeiger *Z* zu bewegen. Instrumente sind träge. Bei Gleich- und Wechselstrom dieselben Angaben. Nullage muß wegen Temperaturschwankungen einstellbar sein. Großer Eigenverbrauch, mithin nicht sehr empfindlich. Gute Dämpfung durch Wirbelstrombremse. Bei größeren Stromstärken Unterteilung des Hitzdrahtes. (Hartmann & Braun, Frankfurt a. M.)

Unterschied zwischen Strom- und Spannungszeigern.

Vorgenannte Meßinstrumente sind im Grunde Stromzeiger, da der Ausschlag immer durch den elektrischen Strom hervorgerufen wird.

Bei den eigentlichen Stromzeigern (Amperemeter) fließt in der Regel nicht der ganze zu messende Strom durch die Spule, die das System beeinflusst. Meist ist ein Nebenschluß (shunt) vorgesehen, durch den der hauptsächlichste Teil des zu messenden Stromes geführt wird. Nebenschlüsse entweder eingebaut, zum Anstecken oder auch getrennt vom Instrument. Shuntleitungen. Auf der Skala des Instrumentes ist der Gesamtstrom angegeben. Stromzeiger erhalten möglichst kleinen Widerstand, um die Spannung an den Klemmen des Instrumentes klein, mithin auch den Eigenverbrauch des Instrumentes klein zu erhalten.

Spannungszeiger (Voltmeter), die die Potentialdifferenz zwischen den Instrumentklemmen anzeigen sollen, erhalten hohen Widerstand, um den Strom im System niedrig und damit auch den Eigenverbrauch des Instrumentes gering zu erhalten. Die Skala der Spannungszeiger gibt direkt die Spannung zwischen den Klemmen des Instrumentes in Volt an. Durch Vorschalten von Widerständen kann der Meßbereich des Instrumentes erweitert werden. Milli-, Volt- und Amperemeter können in Verbindung mit Vorschaltwiderständen als Voltmeter, in Verbindung mit Nebenschlüssen als Stromzeiger benutzt werden.

Meßtransformatoren gestatten bei Wechselstrom den Meßbereich eines Instrumentes in bequemer Weise zu erweitern. In Hochspannungsnetzen werden

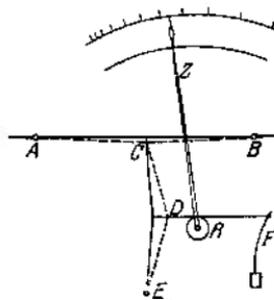


Fig. 72.

auch bei geringen Stromstärken Stromtransformatoren benutzt, um Hochspannung vom Meßinstrument fernzuhalten (Fig. 73 und 74). Ein Pol auf der Sekundärseite soll geerdet werden, auch ist das Gehäuse des Transformators an

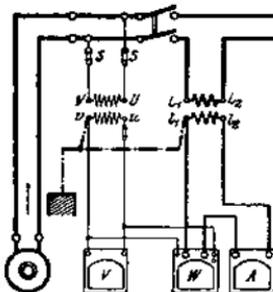


Fig. 73.

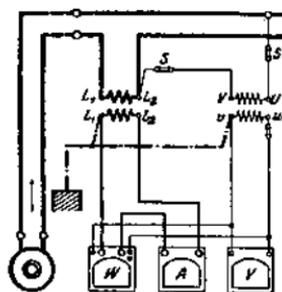


Fig. 74.

Erde zu legen. Das Übersetzungsverhältnis der Stromtransformatoren beträgt meist $I : 5$, das der Spannungstransformatoren $E : 100$. Eingebaute Stromtransformatoren sollen, wenn sekundär kein Stromzeiger angeschlossen ist, sekundär kurzgeschlossen werden, um unzulässige Erwärmung des Eisens infolge zu hoher Magnetisierung zu verhüten. Spannungstransformatoren sind auf der Primärseite stets, auf der Sekundärseite vorteilhaft zu sichern.

Elektrostatische Instrumente sind Elektrometer, mit denen Potentialdifferenzen gemessen werden. Meist für höchste Spannungen. (Quadranten-elektrometer mit Spiegelablesung für Laboratorien, elektrostatische Voltmeter [Multizellular-Elektrometer von Hartmann & Braun] für Laboratorien und Schalttafeln.) Beruhen auf der Anziehung resp. Abstoßung geladener Belege. Erhöhung des Meßbereiches durch Vorschalten von Kondensatoren oder durch Abzweigen von sehr hohen induktionsfreien Widerständen. Eigenverbrauch bei Gleichstrom Null, bei Wechselstrom praktisch Null.

Leistungszeiger (Wattmeter). Meist dynamometrische Instrumente, eine feste Stromspule und eine drehbare Spannungsspule enthaltend. An die Spannungsspule wird eventuell über einen Vorschaltwiderstand oder einen Spannungstransformator die für die zu messende Leistung in Frage kommende Spannung angelegt.

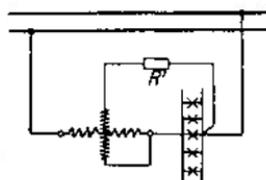


Fig. 75.

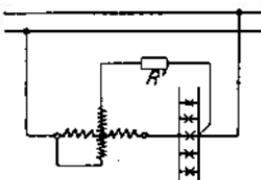


Fig. 76.

Es gilt $C\alpha = I \left(\frac{p}{R} \right)$,

wobei α = Ausschlag des Instrumentes, I der durch die Stromspule fließende Hauptstrom, p die Spannung an den Klemmen des Verbrauchers und R der Widerstand des Spannungskreises. Zwei Schaltungen (nach Fig. 75 und 76) möglich.

Schaltung nach Fig. 75 mißt die Stromstärke um den Strom im Spannungskreis zu hoch, die Spannung richtig. Schaltung nach Fig. 76 mißt den Strom richtig, jedoch die Spannung um den Spannungsabfall in der Stromspule zu hoch. Bei genauen Messungen sind also Korrekturen erforderlich. Der Vorschaltwiderstand R' im Spannungskreis muß stets so geschaltet werden, daß hohe Potentialunterschiede zwischen Strom- und Spannungsspule vermieden werden. Für hohe Stromstärken und bei Hochspannung Anschluß der Wattmeter an Strom- und Spannungstransformatoren (Fig. 73 und 74).

Leistungszeiger werden auch nach dem Ferrarisprinzip gebaut (Siemens & Halske, Hartmann & Braun). Ferrarisleistungszeiger sind empfindlicher als dynamometrische Instrumente, müssen aber für bestimmte Frequenz geeicht sein. Angaben auch von der Temperatur abhängig. Ferner Induktionswattmeter der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft (ETZ. 1899, S. 82).

Voltmeter messen die Stärke der Ströme aus ihrer Einwirkung auf zersetzbare Leiter. Faradaysches Gesetz (s. S. 1384). Voltmeter nur für Laboratorien zur absoluten Strommessung (Eichung von Stromzeigern) oder zur Messung von Elektrizitätsmengen (Coulometer in elektrochemischen Laboratorien). Besonders angewandt werden: Kupfer-, Silber- und Knallgasvoltmeter (bequeme Form des letzteren nach Kohlrausch).

Ballistische Galvanometer dienen zum Messen von Stromstößen, also Strömen kurzer Dauer. Galvanometer haben gegen die Dauer des Stromstoßes sehr große Schwingungsdauer (letztere wird unter Umständen durch Auflegen von Gewichten auf das bewegliche System erhöht). Ein durch das ballistische Galvanometer fließender, kurzdauernder Strom gibt dem System einen Impuls, der einen Ausschlag herbeiführt. Der erste Ausschlag ist der durch das Galvanometer hindurchgehenden Elektrizitätsmenge proportional. $Q = C \alpha$ Coulomb. Die Konstante C ist von der Dämpfung des Galvanometers abhängig. Ablesung mit Spiegel und Skala. (Näheres siehe Kohlrausch, Praktische Physik.)

Elektrizitätszähler, Apparate zum Messen der elektrischen Arbeit. $A = P I \cos \varphi \cdot t$. Ist die Leistung in einem Netz konstant (P und I konst.), z. B. in Bogenlampenkreisen, so genügt es, nur die Zeit zu zählen: Zeitzähler sind Uhren, die nur so lange im Gang sind, als der Stromkreis eingeschaltet ist.

In Gleichstromnetzen mit konstanter Netzspannung genügt es, nur die Elektrizitätsmenge $I \cdot t$ (Amperestunden) zu zählen: Amperestundenzähler (Coulombzähler).

Sind die Netzspannung und der Strom variabel oder kommt Phasenverschiebung in Frage, so sind zur Arbeitsmessung Wattstundenzähler erforderlich.

Haupttypen: Pendelzähler, rotierende oder oszillierende Zähler (Motorzähler), Elektrolytzähler.

Pendelzähler: Älteste Zählerform (Aron), Apparate, bei denen die Schwingungsdauer eines oder mehrerer Uhrpendel durch den Verbrauchsstrom beeinflusst wird (Fig. 77). Bei der neuesten Form sind zwei Uhrwerke vorhanden. Die Pendel der beiden Uhren tragen an Stelle der Linsen Spannungsspulen, die über den Stromspulen schwingen. Beide Pendel sind durch ein Differentialgetriebe gekuppelt und zwar läuft das eine Pendel um ebensoviel zu schnell, als das zweite Pendel zu langsam läuft. Der Gangunterschied der beiden Uhren wird mit Hilfe eines Planetengetriebes auf das Zählwerk (umlaufender Zeiger) übertragen. Um äußere Beeinflussung des Zählers und Fehler im Gang zu verhindern, ist eine selbsttätige Umschaltvorrichtung vorgesehen, die die Stromrichtung in beiden Pendeln nach kurzen Zeitintervallen umkehrt. Das Zählwerk zählt im gleichen Sinne weiter. Zähleruhren werden selbsttätig aufgezogen. Da die Zähler auf dynamometrischem Prinzip beruhen, sind sie für Gleich- und Wechselstrom zu gebrauchen, doch werden sie für jede Stromart geeicht. Amperestundenzähler (nur für Gleichstrom) tragen an Stelle der Spannungsspulen einen Stahlmagnet. Näheres ETZ. 1897, S. 372.)

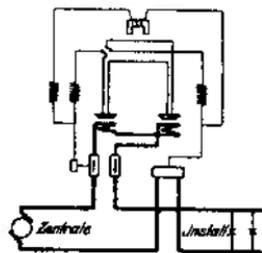


Fig. 77.

Motorzähler, rotierende, bestehen aus einem kleinen, von der Netzspannung gespeisten Gleichstrommotoranker A (mit Kommutator aus Silber), der im Felde zweier vom Netzstrom durchflossenen Hauptstromspulen laufen kann. Dem Drehmoment des Motors wirkt das Drehmoment einer Wirbelstrombremse B ent-

gegen (Konstanz der Bremsmagnete!) (Fig. 78). Um die Reibung zu kompensieren, benutzt man meist Hilfsspulen H (Hummel), die, von der Netzspannung gespeist, das Hauptfeld in geeigneter Weise unterstützen. Die Rotationsgeschwindigkeit ist der Arbeit proportional. Schneckenradübertragung auf das Zählwerk, das meist springende Zahlen erhält.

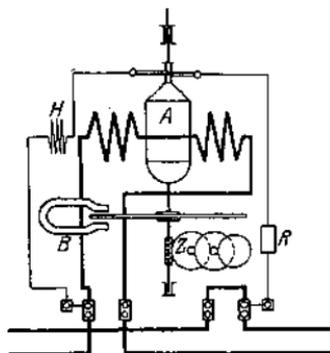


Fig. 78.

Oszillierende Zähler. Um den Kommutator zu umgehen, sind an Stelle des rotierenden Ankers zwei Spannungsspulen im Felde der Hauptstromspulen um kleine Winkel drehbar angeordnet. Drehung wird durch zwei Kontaktanschläge begrenzt, mit denen über ein Relais im Moment des Anschlagens die Spannungsspulen umgeschaltet werden und somit die Drehrichtung umgekehrt wird. Die Umschaltungen werden durch ein Klinkrad auf das Zählwerk übertragen. Bremsung wie bei Motorzählern.

Zählwerk mit Relais kann getrennt vom Zähler aufgestellt werden. (Allgemeine Elektrizitätsgesellschaft, Berlin.)

Induktions-Motorzähler sind rotierende Zähler für Wechselstrom. Der rotierende Anker besteht aus einer Metallscheibe (Kupfer oder Aluminium). Die Wechselstrommagnete sind derart angeordnet, daß sie mit ihren Polflächen der Scheibenebene gegenüberstehen. Der mittlere Magnet wird vom Verbraucherstrom gespeist, die beiden seitlichen, dünndrähtigen Nebenschlußspulen werden von der Netzspannung aus gespeist, und zwar durch geeignete Mittel derart, daß ihr Strom genau 90° Phasenverschiebung gegen die Netzspannung hat. Hat der Induktionsfluß der mittleren Spule gerade den Momentanwert Null, so haben die Wirbelströme in der Scheibe ihr Maximum, sie fließen zum Teil unter den Polflächen der Nebenschlußspulen und bilden mit den Induktionslinien dieser Spulen ein Drehmoment. Die Drehung der Scheibe wird mittels Wirbelstrombremse (Stahlmagnet, der die Scheibe umfaßt) abgebremst. Schneckenantrieb für das Zählwerk. Letzteres hat meist springende Ziffern.

Zur Messung der Drehstromarbeit werden in der Regel zwei getrennte Wechselstromzähler oder zwei in einem Zähler gemeinsam auf ein Zählwerk arbeitende Systeme benutzt.

Elektrolytische Zähler beruhen auf dem Faradayschen Gesetz, mithin nur für Gleichstrom. Sie sind Amperestundenzähler (Coulombzähler). Die durch den Zähler hindurchgegangene Elektrizitätsmenge wird gemessen, indem man entweder die niedergeschlagene Menge wägt (ältere Form) oder an graduierten Röhren (Quecksilber, Stiazähler) direkt abliest. Die Röhren sind meist in Amperestunden oder in Kilowattstunden (bei konstanter Netzspannung) geeicht. Durch Kippen der Röhre kann man den Zähler wieder in seinen Anfangszustand zurückbringen.

Anforderungen an Zähler.

Angaben dürfen gewisse Verkehrsfehlergrenzen nicht überschreiten. Für eine Belastung, die gleich $1:n$ der maximalen ist, ist die zulässige Verkehrsfehlergrenze

$$\begin{aligned} &\text{bei Gleichstromzählern } \pm (6 + 0,6 n) \text{ Prozent,} \\ &\text{bei Wechselstromzählern } \pm (6 + 0,6 n + 2 \operatorname{tg} \varphi) \text{ Prozent,} \end{aligned}$$

φ = Phasenverschiebung im Netz.

Von den Zählern wird verlangt: Konstanz der Angaben; Unempfindlichkeit gegen: Kurzschlüsse, Feuchtigkeit, Temperatur, Staub und Erschütterungen; lautloser Gang; Plombierbarkeit; leichte Transportfähigkeit; geringe Abmessungen, geringer Eigenverbrauch und geringer Preis.

2. Meßmethoden.

a) Widerstandsmessungen.

α) Aus „Strom und Spannung“. Fig. 79. Man legt an den unbekanntem Widerstand R_x eine geeignete Stromquelle und mißt den Strom I und die Spannung P an R_x . Es ist: $R_x = \frac{P}{I}$ Ohm.

Bedingung: Strom in R_x groß gegen den Voltmeterstrom, andernfalls Korrektur erforderlich. Zeigt das Voltmeter vom Widerstand r die Spannung P' an, so ist:

$$R_x = \frac{P'}{I - \frac{P'}{r}} \text{ Ohm.}$$

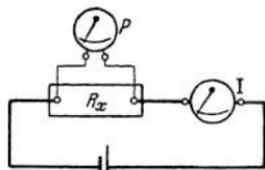


Fig. 79.

Methode gestattet, Widerstände während des Betriebes zu messen. (Messung der Temperaturzunahme während des Betriebes.)

β) Abzweigmethode. Man schaltet nach Fig. 80 den gesuchten Widerstand R_x mit einem bekannten, ungefähr gleichen Widerstand R hintereinander und mißt nacheinander die Spannungsabfälle an R_x und R mit einem Voltmeter über einen Umschalter. Die Widerstände verhalten sich wie die Potentialdifferenzen.

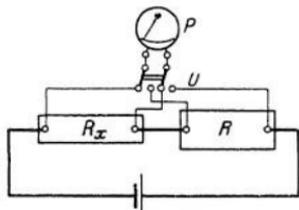


Fig. 80.

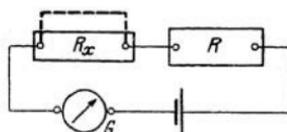


Fig. 81.

γ) Substitutionsmethode. Fig. 81. Der unbekanntem Widerstand R_x wird mit einem Rheostaten R und einem Galvanometer G in einen Stromkreis geschaltet. Nach Ablesung des Galvanometers schließt man R_x kurz und vergrößert R so lange, bis derselbe Ausschlag am Galvanometer erreicht ist. Ist R um r vergrößert worden, so beträgt $R_x = r$. Mäßige Genauigkeit. Methode eignet sich für Isolationsmessung, wenn für R große Vergleichswiderstände genommen werden.

δ) Wheatstonesche Brücke. Man schalte drei bekannte Widerstände R_1, R_2, R_3 und den unbekanntem Widerstand R_x nach Fig. 82 in ein Viereck und verbinde die gegenüberliegenden Ecken einmal über ein Nullpunktgalvanometer, das andere Mal über eine Stromquelle. Der Galvanometerstrom i_g ist gleich Null, wenn $R_1 : R_x = R_2 : R_3$,

$$R_x = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}.$$

In den für bequeme Handhabung fertig zusammengestellten Meßbrücken besteht R_1 aus einem fein unterteilten Rheostaten, R_2 und R_3 je aus Widerstandsgruppen von 1, 10, 100, 1000 Ohm. Wählt man also $R_2 = R_3$, so kann man (bei $i_g = \text{Null}$) $R_x = R_1$ ohne weiteres aus der Messung entnehmen.

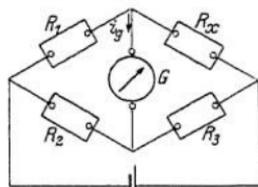


Fig. 82.

Da nur das Verhältnis der Widerstände R_3 und R_2 bekannt zu sein braucht, nicht aber die Größe der Widerstände selbst, kann man auch statt R_2 und R_3 einen homogenen Meßdraht ohne Temperaturkoeffizienten (Kirchhoff) benutzen (Fig. 83). Ein Schleifkontakt teilt den Meßdraht in die beiden Längen l_1 und l_2 .

Es gilt $R_1 : R_x = l_1 : l_2$. Bringt man unter dem Meßdraht eine Skala an, die das Verhältnis $l_2 : l_1$ direkt ablesen läßt, so kann man bei Wahl von $R_1 = 0,1; 1, 10$ usw., wenn $i_g = 0$, den Widerstand R_x direkt oder als Vielfaches von 10 an der Skala ablesen. Meßgenauigkeit in der Mitte des Meßdrahtes am größten.

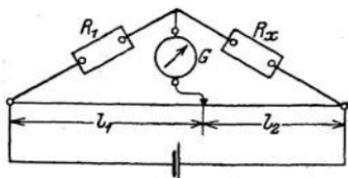


Fig. 83.

Widerstände von Elementen und Flüssigkeiten können mit vorstehenden Brücken gemessen werden, doch ist hier als Stromquelle ein kleiner Induktionsapparat oder ein Wechselstrom niedriger Spannung zur Vermeidung von Polarisation erforderlich.

Das Galvanometer muß durch ein Telephone ersetzt werden (Kohlrausch).

ε) Thomsonsche Doppelbrücke, zur Messung sehr kleiner Widerstände. Der zu messende Widerstand R_x wird in geeigneter Weise (Einspannvorrichtung

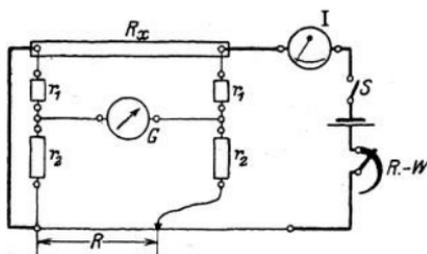


Fig. 84.

für gestreckte Leiterwiderstände) mit einem Meßdraht über einen Regulierwiderstand, Schalter und Amperemeter in einen Stromkreis geschaltet (Fig. 84). Von den Klemmen von R_x und von zwei Punkten des Meßdrahtes gehen Abzweige nach je zwei gleichen Widerständen r_1, r_1 und r_2, r_2 . Je zwei Widerstände r_1 und r_2 sind in Reihe geschaltet. Die Verbindungspunkte von r_1 und r_2 sind über ein empfindliches Galvanometer verbunden. Durch Änderung der Meßdrahtlänge (Schleifkontakt) und des Verhältnisses $r_1 : r_2$ kann man erreichen, daß der Galvanometerstrom Null wird. Dann gilt: $R_x : R = r_1 : r_2$; R kann auf einer Skala unter dem Schleifdraht direkt in Ohm abgelesen werden. Meßdraht darf nicht überlastet werden.

b) Isolationsmessung. Prüfung, ob eine Leitung genügend isoliert ist. Es sollen keine nennenswerten, fehlerhaften Stromübergänge stattfinden. Zu prüfen: Isolation gegen Erde, Isolation der Leiter gegeneinander. Bei Niederspannung soll der mindestzulässige Isolationswiderstand das 1000fache der Betriebsspannung sein, mithin bei einer Betriebsspannung von 220 Volt

$$R_i \geq 220\,000 \text{ Ohm.}$$

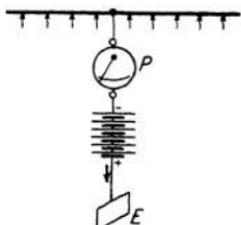


Fig. 85.

Messung mit Hilfsbatterie. Leitung gegen Erde (Fig. 85). Man trennt die zu untersuchende Leitung vollständig vom Netz und schaltet sämtliche Stromverbraucher ab. Die zu untersuchende Leitung legt man über einen Stromzeiger von hohem

Widerstand (Voltmeter) und eine Hilfsbatterie an Erde. (Positiver Pol an Erde.) Ist P die Spannung der Batterie und mißt man in der Schaltung über Erde P' Volt, so ist der Isolationswiderstand

$$R_i = \frac{P - P'}{P'} \cdot R_g,$$

wobei R_g = Widerstand des Voltmeters.

Isolationswiderstand zwischen zwei Leitungen wird in gleicher Weise (Fig. 86) gefunden.

Messung mit Netzspannung. Man schaltet den zu untersuchenden Leitungsstrang vollständig vom Netze ab (Fig. 87). Verbinde den + Pol des Netzes

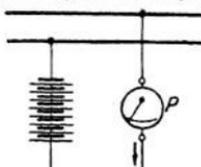


Fig. 86.

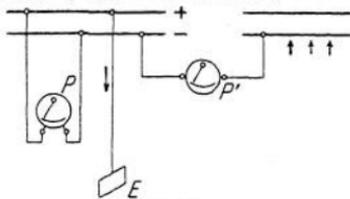


Fig. 87.

mit Erde und messe die Spannung zwischen - Pol und den abgeschalteten Leiterzweigen. Ist P die Spannung des Netzes, P' die Spannung zwischen - Pol und dem abgeschalteten Leiter, so ist der Widerstand gegen Erde:

$$R_t = \frac{P - P'}{P'} \cdot R_v,$$

wobei R_v = Widerstand des Voltmeters.

Den Isolationswiderstand beider Leitungen gegeneinander mißt man in gleicher Weise unter Benutzung der Schaltung nach Fig. 88.

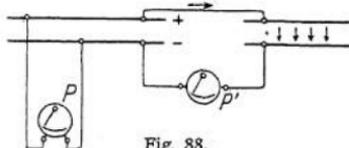


Fig. 88.

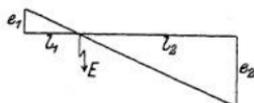


Fig. 89.

Fehlerortsbestimmung. Hierzu genügen oft sehr einfache Hilfsmittel. Hat z. B. ein Kabel einen groben Erdschluß, so genügt es, das Spannungsgefälle an den beiden Enden des mit beliebigem, aber konstantem Gleichstrom beschickten Kabels gegen Erde zu messen (Fig. 89). Die Spannungsgefälle e_1 und e_2 verhalten sich zueinander, wie die Längen der Kabelenden beiderseits bis zur Fehlerstelle, $e_1 : e_2 = l_1 : l_2$.

Bei ausgedehnten Netzen lokalisiert man den Fehler, indem man das Netz in Teilstrecken zerlegt. Der Fehler läßt sich mit der Schleifenmethode finden, wenn eine vollständige Hin- und Rückleitung vorhanden ist und die Leitung überall gleichen Querschnitt hat. In Fig. 90 sei AB eine Doppelleitung, die bei C einen Isolationsfehler gegen Erde habe. Man bildet mit Hilfe eines Schleifdrahtes DE eine Brücke (dicke Zuleitungen!), für welche gilt $a : b = l_1 : l_2$. a und b sind die Längen der bei B kurzgeschlossenen Leitung von der Fehlerstelle bis zu den Enden bei A . Ist die Gesamtlänge $L = a + b$ bekannt, so läßt sich a und b aus dem Verhältnis $l_1 : l_2$ bestimmen.

c) Eichungen von Strom- und Spannungsmessern. Strommesser werden zum Vergleich hintereinander, Spannungsmesser werden parallel geschaltet. Normalinstrumente. Absolute Strommessung mittels Voltmeter. Die Normalinstrumente selbst werden mit Hilfe von Normalelementen nach der Kompensationsmethode geeicht.

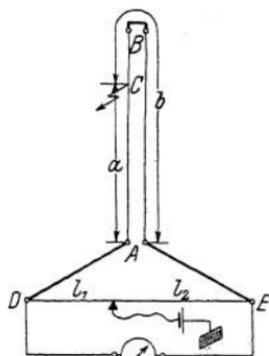


Fig. 90.

Normalelement von Clark: $E_n = 1,433 - 0,0012(t - 15^\circ)$ Volt,

Normalelement von Weston: $E_n = 1,019$ Volt (Temperaturkorrektion zu vernachlässigen).

Kompensationsmethode (Schaltung nach Fig. 91). An einen großen, unveränderlichen Widerstand AB legt man über einen Schalter und Widerstand R_1 eine Batterie. Der zu eichende Spannungsmesser P wird an AB angelegt. Der Kompensationskreis wird an A und an einen veränderlichen Punkt C des Widerstandes AB angelegt und besteht aus dem Normalelement, einem Schutzwiderstand R_2 , einem Galvanometer G und einem Schalter S . Ist Schalter S offen, so herrscht zwischen AC eine Potentialdifferenz P_{ac} , die dem Strom im Widerstande AB und dem Widerstandsstücke AC proportional ist. Durch Verschieben von C kann man die Spannung zwischen A und C beliebig verändern. Liegen die Batterie und das Normalelement mit dem + Pol an A , so sind die

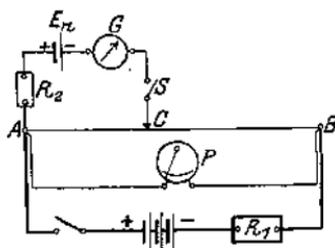


Fig. 91.

beiden Stromquellen gegeneinandergeschaltet. Durch Verschieben von C kann man erreichen, daß $P_{ac} = E_n$ wird. In diesem Falle fließt kein Strom durch den Kompensationskreis; dies ist am Nullpunktsgalvanometer zu erkennen. Dann gilt:

$$P = E_n \frac{R_{ab}}{R_{ac}}$$

Der Schutzwiderstand R_2 hat den Zweck, das Normalelement vor zu starker Stromentnahme zu schützen, solange die Stellung C noch nicht derart ist, daß $P_{ac} = E_n$. Für feinste Einstellung des Punktes C kann der Schutzwiderstand zuletzt kurzgeschlossen werden. Mit Hilfe von Normalwiderständen und mittels Kompensationsmethode genau bestimmten Potentialdifferenzen kann man weiter auf Grund des Ohmschen Gesetzes Eichungen von Stromzeigern vornehmen. (Technische Kompensationseinrichtungen von Weston, Siemens & Halske und Nadir.)

d) Leistungsmessungen. Zur Messung der Leistung sind bei Gleichstrom besondere Instrumente nicht erforderlich. Es genügt Strom- und Spannungsmessung. $\mathcal{L} = P \cdot I$ Watt.

Für die Leistungsmessung bei Wechselstrom gilt das im Abschnitt Meßinstrumente unter Wattmeter Gesagte. Der Leistungsfaktor ($\cos \varphi$) berechnet sich aus:

$$\cos \varphi = \frac{\text{Leistung}}{\text{scheinbare Leistung}} = \frac{P \cdot I \cdot \cos \varphi}{P \cdot I}$$

Drehstromleistungsmessungen. Die Leistung eines beliebig belasteten Drehstromsystems kann als Summe dreier Wechselstromleistungen angesehen werden. Es seien i_1, i_2, i_3 die Momentanwerte der Ströme in den drei Leitungen, e_1, e_2, e_3 die Momentanwerte der drei Sternspannungen, dann ist der Momentanwert der Drehstromleistung:

$$\begin{aligned} I &= e_1 i_1 + e_2 i_2 + e_3 i_3 ; \\ i_1 + i_2 + i_3 &= 0 ; \\ i_2 &= -(i_1 + i_3) , \end{aligned}$$

mithin

$$\begin{aligned} I &= e_1 i_1 - e_2 i_1 - e_2 i_3 + e_3 i_3 ; \\ I &= i_1 (e_1 - e_2) + i_3 (e_3 - e_2) ; \quad (e_1 - e_2) \quad \text{und} \quad (e_3 - e_2) \end{aligned}$$

stellen aber die verketteten Spannungen dar. Die Drehstromleistung läßt sich also als Summe zweier Wechselstromleistungen, die sich aus Netzstrom und verketteter Spannung ergeben, darstellen. Schaltung nach Fig. 92. Die Messung

einer Drehstromleistung ist mithin mit zwei Wattmetern möglich. (Gilt für Stern- und für Dreieckschaltung.) Die Wattmeter geben natürlich Effektivwerte an. Die Drehstromleistung ist: $\mathcal{Q} = I_1 E_{12} \cos(I_1 E_{12}) + I_3 E_{23} \cos(I_3 E_{23})$ oder wenn α_1 und α_2 die Ausschläge der Wattmeter:

$$\mathcal{Q} = C \cdot c(\alpha_1 + \alpha_2) \text{ Watt.}$$

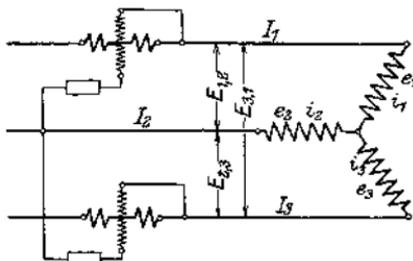


Fig. 92.

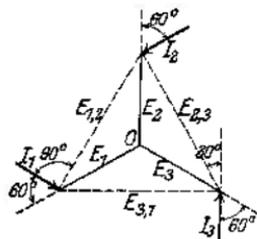


Fig. 93.

(Umschalter nach Aron und Behn-Eschenburg, um in Netzen mit nicht zu sehr schwankender Belastung mit einem Wattmeter auszukommen.) Da bei der Zweiwattmetermethode Phasenstrom und verkettete Spannung zur Messung herangezogen werden und zwischen beiden eine Phasenverschiebung von 30° besteht, wenn der Leistungsfaktor des Drehstromsystems = 1 ist, zeigen beide Wattmeter bei vollem Strom und voller Spannung bei $\cos \varphi = 1$ nur 0,866 des maximalen Ausschlags. Ist der Leistungsfaktor des Netzes 0,5 ($\varphi = 60^\circ$), so zeigt das eine Wattmeter (entsprechend der Phasenverschiebung von 30° zwischen Strom und Spannung am Wattmeter) 0,866 des maximalen Ausschlags, während das zweite Wattmeter (entsprechend der Phasenverschiebung von $60 + 30 = 90^\circ$) den Ausschlag 0 zeigt (Fig. 93). Ist der Leistungsfaktor kleiner als 0,5, so gibt das eine Wattmeter negativen Ausschlag, der Spannungskreis des Wattmeters muß mithin kommutiert werden. Die Gesamtleistung ergibt sich als Differenz der gemessenen Leistungen.

$$\mathcal{Q} = C \cdot c(\alpha_1 - \alpha_2) \text{ Watt.}$$

Fig. 94 zeigt, wie sich die Ausschläge der beiden Wattmeter und die gesamte Leistung des Drehstromsystems ändern, wenn man unter Konstanzhaltung von Strom und Spannung die Phasenverschiebung des Netzes von 0 bis 90° Vor- bzw. Nacheilung ändert.

Der Begriff des mittleren Leistungsfaktors eines Drehstromsystems, nämlich

$$\cos \varphi = \frac{\mathcal{Q}}{\sqrt{3} \cdot P \cdot I},$$

hat nur Sinn, wenn alle drei Phasen annähernd gleich belastet sind, z. B. bei Motorenbelastung. Bei gleicher Belastung der drei Phasen kann man mit einem Wattmeter auskommen, wenn der Nullpunkt zugänglich ist.

Kapazitive Belastung ← → Induktive Belastung

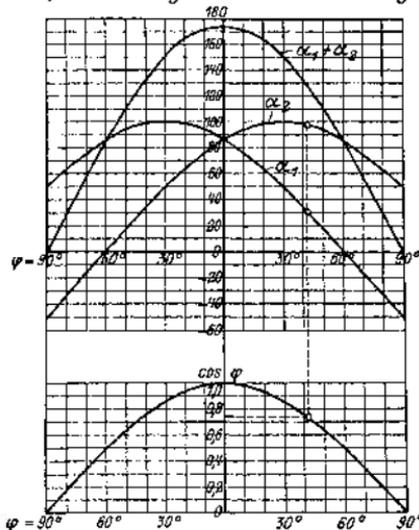


Fig. 94.

Schaltung nach Fig. 95. Andernfalls kann man künstlichen Nullpunkt nach Schaltung Fig. 96 herstellen. Die hierzu benutzten drei Widerstände müssen die Bedingung erfüllen:

$$R_1 = R_3 = R_2 + 1000,$$

wobei angenommen, daß der Widerstand der Spannungspule des Wattmeters 1000 Ohm beträgt.

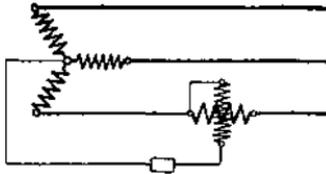


Fig. 95.

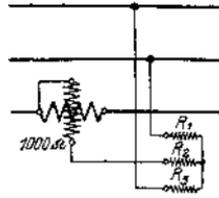


Fig. 96.

e) Frequenzmessung. Ist die Wechselstrommaschine zugänglich, so findet man die Frequenz aus der Beziehung $\nu = \frac{n \cdot \phi}{120}$, wobei ϕ die Polzahl und n die Drehzahl der Maschine pro Minute bedeuten. Zungenfrequenzmesser (Frahm, Hartmann & Braun, Siemens & Halske) beruhen auf dem Resonanzprinzip.

f) Eisenuntersuchungen. Der bequemste und für technische Untersuchungen härterer Eisensorten meist hinreichende Apparat zur Aufnahme der Magnetisierungskurven ist der Koepselapparat (Siemens & Halske). Der von einer Magnetisierungsspule umgebene Probestab ist durch ein Joch geschlossen. Dieses besitzt einen Luftspalt (Ausführung wie bei den Drehspulinstrumenten), in dem ein eine Hilfsspule tragendes Rähmchen schwingen kann. Wird diese Spule mit einem konstanten, dem Querschnitt der Probe entsprechenden Strome beschickt, so wird eine der Feldstärke im Luftraume proportionale Ablenkung des Rähmchens erfolgen. Der am Rähmchen angebrachte Zeiger spielt auf einer Skala, die direkt in \mathfrak{H} geeicht ist. Die zugehörige Feldstärke \mathfrak{H} erhält man aus dem Magnetisierungsstrom durch eine einfache Beziehung.

Zur Bestimmung der Verlustziffer (siehe Abschnitt: Eisen in veränderlichen Feldern) bedient man sich der wattmetrischen Messung (Fig. 97). Ein aus vier

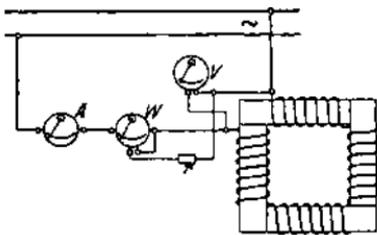


Fig. 97.

Kernen zusammengesetzter, vollständig geschlossener, magnetischer Kreis wird mittels gleichmäßig um die Kerne gelegten Windungen mit Wechselstrom bestimmter Frequenz magnetisiert. Die Induktion \mathfrak{B}_0 wird aus der angelegten Spannung berechnet. (Für Sinusstrom: $E = 4,44 \cdot \nu N \mathfrak{B}_0 Q 10^{-8}$ Volt.) Die mit dem Wattmeter gemessene Leistung stellt dar: Verluste durch Hysterisis und Wirbelströme im Eisen, Stromwärme in den Magnetisierungswindungen, Stromwärmen in den Spannungsspulen des Wattmeters und des Voltmeters. Bequeme Anordnung nach Epstein (ETZ. 1900, S. 303 und 1905, S. 403) und van Lonkhuyzen (Siemens & Halske) (ETZ. 1912, S. 531). Das Gesamtgewicht der vier Kerne soll mindestens 10 kg betragen. Bleche durch Papier usw. zu isolieren. Näheres: Normalien des Verbandes Deutscher Elektrotechniker.

g) Oszillograph, zur Aufnahme von Wechselstromkurven. Besonderen Wert bei Untersuchung der Vorgänge in Wechselstromkreisen. Meßschleifen (nach Blondel, Siemens & Halske) müssen hohe Eigenschwingungszahl (6000 ÷ 7000)

und geringe Selbstinduktion besitzen. Sichtbarmachung der Schwingungen durch Spiegel und Lichtstrahl auf geeignet geformte Trommel oder lichtempfindliches Papier.

III. Die Erzeugung des elektrischen Stromes.

1. Galvanische Elemente, Thermolemente, Akkumulatoren.

1. Galvanische Elemente (Primärelemente) sind Zusammenstellungen von zwei verschiedenen Metallen (Elektroden) in Elektrolyten (Säuren oder Salzlösungen). Bei Lösung der Metalle im Elektrolyt treten Potentialdifferenzen auf. Die Elektrode, die den höheren Lösungsdruck besitzt, wird Anode. Schließt man die beiden Metalle durch einen äußeren Leiter (Verbindung der „Pole“ durch einen Draht), so fließt der Strom im äußeren Verbindungsdraht zur Anode. Die Kathode ist also der positive Pol (+), die Anode der negative Pol (-) des Elementes. Im Element fließt der Strom von der Anode zur Kathode. Hierbei wird an der Kathode Wasserstoff ausgeschieden, der eine Gegen-EMK im Element hervorruft, indem er in Lösung geht (Polarisation). Durch Anwendung von Depolarisatoren sucht man die Bildung von Wasserstoff zu verhindern, die EMK der Elemente also zu erhöhen. Ist E die EMK. und R_i der innere Widerstand des Elementes, so ist bei Stromabgabe die Klemmenspannung des Elementes $P = E - I R_i$.

Meist wird Zink als Anode benutzt. Die aus dem Element gewonnene elektrische Energie wird durch den Zinkverbrauch gedeckt. Ist das Zink nicht rein, so treten innerhalb des Elementes Ströme auf, die das Zink schnell verbrauchen (Lokalaktion). Verhinderung der Lokalaktion durch Amalgamieren. Bei den sogenannten Trockenelementen wird die Flüssigkeit durch aufsaugfähige oder gallertartige Stoffe (Gips, Infusorienerde, Sand, Sägespäne, Wasserglas usw.) gebunden. Wichtigere Elemente nach folgender Tabelle:

Type	Anode	Kathode	Elektrolyt	De- polarisator	EMK in Volt	R_i in Ohm
Leclanché, Trockenelemente	Zink	Kohle	NH_4Cl	MnO_2	1,5	0,4 bis 0,6 0,5 bis 0,1 je nach Größe
Meidinger	Zink	Kupfer	ZnSO_4	CuSO_4	1,1	ca. 5
Daniell ¹⁾	Zink	Kupfer	ZnSO_4	CuSO_4	1,1	ca. 1
Grove ¹⁾	Zink	Platin	H_2SO_4	HNO_3	1,8	0,2
Bunsen ¹⁾	Zink	Kohle	H_2SO_4	HNO_3	1,8	0,2
Chromsäure, Tauchelement	Zink	Kohle	Chromsäure	Chromsäure	2,0	—
Cupron	Zink	Kupferoxyd	NaOH	Kupferoxyd	1,3	—

Normalelemente werden nicht als Stromquellen benutzt, sondern dienen wegen der außerordentlichen Konstanz ihrer EMK als Kontrollelemente. (Siehe unter Messungen: Kompensationsschaltung.) In Frage kommen nur das Normalelement von Clark (Quecksilber, gesättigte Lösung von Quecksilberoxydulsulfat, Zinksulfat, Zink). EMK = 1,433 - 0,0012 ($t - 15^\circ$) Volt. Die höchst zulässige Stromentnahme beträgt beim Clark-Element nur 0,0001 Ampere für ganz kurze Zeit. Besondere Anwendung findet heute das Normalelement von Weston (Quecksilber, gesättigte Lösung von Quecksilberoxydulsulfat, Kadmiunsulfat, Cadmium). EMK = 1,019 Volt. Temperaturkorrektur kann hier vernachlässigt werden. Weston-Normalelement ist gegen Stromentnahme nicht so sehr empfindlich wie das Clark-Element.

2. Thermolemente. Leitet man durch eine Lötstelle Wismut-Antimon von außen einen elektrischen Strom, so kühlt sich die Lötstelle ab (Peltier-Effekt).

¹⁾ Elemente haben Tonzelle.

Wird die Lötstelle von außen erwärmt, so fließt ein Thermostrom, der die Lötstelle abzukühlen sucht. Jede Verbindungsstelle zweier verschiedener Metalle bildet ein Thermoelement. Durch Aneinanderreihen vieler Verbindungsstellen erhält man Thermosäulen (Gülcher, Dynaphor von Heil). Meist heizt man mit Gas. Thermosäulen nur für Kleinbetriebe zur Erzeugung eines konstanten Gleichstromes, z. B. zum Laden kleiner Akkumulatoren. Wirkungsgrad nicht über 0,5.

Wichtig ist die Anwendung der Thermolemente zur Temperaturmessung (Pyrometer). Nach Le Chatelier wendet man Platin und Platin-Rhodium an. Meßbereich 300 bis 1600° C (Siemens & Halske und Hartmann & Braun). Es entsprechen 100° C Temperaturunterschied ca. 0,001 Volt. Pyrometer bestehend aus: Kupfer und Konstantan (Siemens & Halske) oder Konstantan und Silber (Hartmann & Braun) gestatten Temperaturen zwischen -190° und +600° C zu messen. Es entsprechen hier 100° C etwa 0,004 Volt. Die Pyrometer sind an empfindliche Galvanometer angeschlossen, deren Skala meist direkt in ° C geeicht ist.

3. Akkumulatoren (Sekundärelemente, Sammler). Bei den Akkumulatoren wird durch Ladung die elektrische Energie in chemische Form übergeführt und nach Bedarf bei der Entladung wieder in die erste Form zurückgewonnen. Der gebräuchlichste Akkumulator ist der

Bleiakkumulator. Zwei Bleiplatten stehen in verdünnter Schwefelsäure. Durch Ladung (Durchschicken eines Gleichstromes) bildet sich am negativen Pol (Kathode) Bleischwamm, am positiven Pol (Anode) Bleisuperoxyd. Diese Elektroden bilden zusammen ein Element von der mittleren EMK von 2 Volt. Im geladenen Zustand hat die + Platte dunkelbraune, die - Platte graue Farbe. Um eine große Kapazität des Akkumulators zu erhalten, sucht man die Oberfläche der Platten groß, d. h. die Platten möglichst porös, schwammartig zu machen. Nach Planté und Tudor erreicht man dies durch wiederholtes Laden und Entladen der Bleiplatten. Verfahren ist teuer, Prozeß ist langwierig, doch sind Akkumulatoren nach diesem Verfahren besonders haltbar. Nach Faure erreicht man ein schnelleres und billigeres Formieren der Platten, indem man in gitterförmige oder gerippte Bleiplatten Bleioxyd, Mennige (Pb₃O₄) einstreicht und dann die Platten ladet. Das Bleioxyd der + Platte geht hierbei durch Aufnahme von Sauerstoff in Bleisuperoxyd, das der - Platte durch Abgabe von Sauerstoff in metallisches Blei (Bleischwamm) über. — Die Zusammenstellung der Platten erfolgt in Glaströgen oder bei großen Elementen in mit Blei ausgeschlagenen Holzkästen. Da die + Platte mit der Zeit an Ausdehnung gewinnt, bei einseitiger Beanspruchung sich also krümmen würde, ordnet man stets die positive Platte zwischen zwei negativen Platten an. Jede Zelle hat mithin n positive und $n + 1$ negative Platten.

Der Vorgang bei der Ladung und Entladung kann durch folgende Formel dargestellt werden:



Mit der Ladung nimmt die Säuredichte zu, mit der Entladung ab. Gewöhnlich wird die Säuredichte für den geladenen Akkumulator zu 1,20 angenommen. Ein Akkumulator, der geladen eine Säuredichte 1,20 hatte, gilt als entladen, wenn die Dichte der Säure auf 1,18 gesunken ist. Die Spannungsverhältnisse des Bleiakкумуляtors während der Ladung und Entladung sind aus Fig. 98 zu ersehen. Bei der Ladung mit normaler Stromstärke steigt die Klemmenspannung kurz nach Einschalten auf 2,1 Volt, geht allmählich auf 2,3 Volt herauf und steigt dann weiter unter Gasentwicklung auf 2,6 bis 2,7 Volt (Kochen der Zellen, Lüftung des Akkumulatorenraumes). Das Steigen der Span-

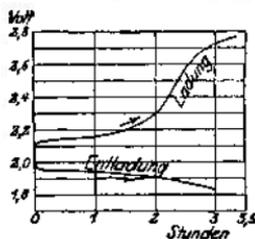


Fig. 98.

nung während der Ladung ist außer auf die chemische Veränderung der Platten, sowie außer auf den ohmschen Widerstand darauf zurückzuführen, daß sich Wasserstoff- und Sauerstoffbläschen bilden, welche die Gegen-EMK erhöhen. Die höchst zulässige Ladestromstärke richtet sich nach der Konstruktion und Größe der Zellen und wird von den Fabriken angegeben. Die Ladestromstärke kann zumal gegen Ende der Ladung niedriger gehalten werden. Da gegen Ende der Ladung die Spannung am Akkumulator bis auf ca. 2,7 Volt steigt, ist zum Laden einer Batterie eine Stromquelle von ca. 36% höherer Spannung als die normale Betriebsspannung der Batterie beträgt, erforderlich. Bei der Entladung mit normaler Stromstärke sinkt die Spannung eines Akkumulators rasch auf etwa 1,95 Volt, nimmt dann langsam bis auf 1,85 Volt ab, um am Ende der Entladung rasch zu fallen. Das Sinken der Spannung direkt nach dem Laden wird durch das Verschwinden der Wasserstoff- und Sauerstoffbläschen und den Wegfall der zur Überwindung des ohmschen Widerstandes erforderlichen Spannung verursacht. Zu weites Entladen und Stehenlassen des Akkumulators im entladenen Zustand ist dem Akkumulator sehr schädlich (Bildung von Bleisulfat, die + Platten nehmen hellere, rötliche oder graue Farbe an), Aufladen in Ruhepausen. Auch zu schnelles Entladen ist schädlich, da die chemische Umsetzung im Akkumulator ungleichmäßig erfolgt. Ladestrom etwa 0,7 bis 1,3 Amp/dcm², Entladestrom etwa 0,75 bis 1,5 Amp/dcm². Da die Säuredichte von 1,20 auf 1,18 beim Entladen sinkt, läßt sich aus ihr der Grad der Entladung feststellen (Aräometer). Aus der Klemmenspannung ist der Zustand des Akkumulators nicht zu erkennen. Der innere Widerstand eines Bleiakkumulators ist sehr klein, er nimmt mit der Ladung ab, weil bei Ladung die Säuredichte steigt und Bleisulfat (schlechter Leiter) verschwindet. Säure muß rein sein, besonders frei von Chlor, Arsen, Salpetersäure oder Metallen.

Kapazität (Aufnahmefähigkeit) eines Akkumulators wird in Amperestunden angegeben und stellt die Elektrizitätsmenge dar, die der geladene Akkumulator bei Entladung bis zur vorgeschriebenen Grenze abgeben kann. Kapazität ist abhängig von der Plattengröße, also von der Menge der aktiven Masse. Kapazität wächst mit der Entladezeit. Diese wird gewöhnlich mit 3, 5, 7¹/₂ oder 10 Stunden als normal von den Firmen angegeben. Nach der verlangten Entladezeit richtet sich der Aufbau der Platten (Großoberflächenplatten, Masseplatten). Ein Akkumulator von normal 3-stündiger Entladung hat bei 10-stündiger Entladung etwa 33% höhere Kapazität.

Wirkungsgrad, zu unterscheiden:

$$\text{Amperestundenwirkungsgrad} = \frac{\text{entl. Amperestunden}}{\text{gelad. Amperestunden}} \quad (\text{ca. } 95\%),$$

$$\text{Wattstundenwirkungsgrad} = \frac{\text{entlad. Wattstunden}}{\text{gelad. Wattstunden}} \quad (\text{ca. } 70 \text{ bis } 80\%).$$

Bei der Wirkungsgradbestimmung müssen sich die Zeiten von der vollständigen Ladung bis zur äußersten zulässigen Entladung und umgekehrt erstrecken. Der Wattwirkungsgrad ist bedeutend kleiner als der Amperestundenwirkungsgrad, weil während der Ladung die Spannungen viel höher liegen als bei der Entladung.

Aufstellung der Akkumulatorenbatterie. Akkumulatorenraum soll luftig, trocken, kühl, aber frostfrei und gut ventilierbar sein. Sorgfältige Isolation gegen das Holzgestell, auf denen sie meist montiert werden. Säurefester Fußboden und säurefester Anstrich der Wände. Fußboden muß horizontal und von ausreichender Tragfähigkeit sein.

Der alkalische Akkumulator.

Der bekannteste alkalische Akkumulator ist der Edison-Akkumulator. Als aktive Masse ist für die + Platte Nickeloxydhydrat, für die - Platte Eisen verwendet. Elektrolyt ist Kalilauge von 21% Gehalt. EMK beträgt 1,36 bis 1,4 Volt. Beim Laden kommt die Klemmenspannung bis 1,8 Volt,

während der Entladung fällt die Spannung allmählich von 1,37 bis 1,1 Volt. Ofteres Überladen und zu starkes Entladen soll dem Edison-Akkumulator nicht schädlich sein. Amperestundenwirkungsgrad etwa 66 bis 75%, Wattstundenwirkungsgrad 50 bis 55%. Wegen seiner Unempfindlichkeit gegen Erschütterungen und Stromstöße und wegen seiner geringen Wartung und geringen Gewichtes für elektrische Fahrzeuge empfohlen. Über alkalische Akkumulatoren sind noch wenig Erfahrungen vorhanden.

2. Dynamomaschinen.

Dynamo (Generator, Stromerzeuger) ist jede umlaufende Maschine, die mechanische in elektrische Leistung verwandelt.

a) Gleichstrommaschinen.

Hier ist zu unterscheiden: Der Anker, das ist der Teil, in dem durch Drehung in einem magnetischen Felde oder durch Bewegung eines magnetischen Feldes EMKe induziert werden. Der Anker braucht also nicht immer der bewegte Teil der Maschine zu sein, doch ist bei Gleichstrommaschinen die Ausführung mit rotierendem Anker ausschließlich gebräuchlich. Mit dem Anker verbunden ist der Kommutator, auf dem die Stromabnehmer (Bürsten) schleifen. Das Magnetgestell besteht aus Joch und Polen und dient zur Leitung des „Feldes“, des magnetischen Induktionsflusses, der in meist um die Pole gelegten Erregerspulen (Magnet- oder Feldwicklung) erzeugt wird. Permanente Magnete als Quelle des Feldes nur ganz untergeordnete Rolle (Zündmaschinen). Je nachdem der vom Anker erzeugte

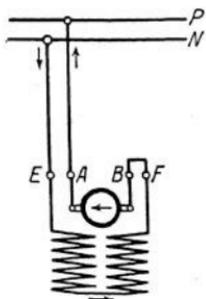


Fig. 99.

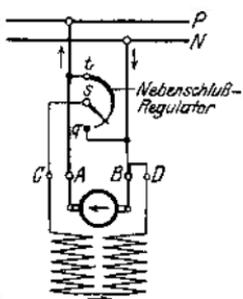


Fig. 100.

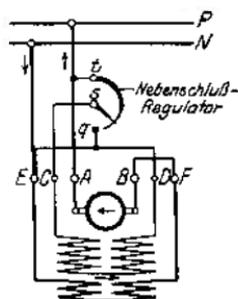


Fig. 101.

Strom I_a in voller Stärke oder nur ein kleiner Teil von I_a durch die Magnetwicklung geschickt wird, unterscheidet man Hauptstrommaschinen (Reihenschlußmaschinen, Fig. 99) oder Nebenschlußmaschinen (Fig. 100). Ist i_{err} der Strom in der Erregewicklung, I_a der Ankerstrom, I der Nutzstrom der Maschine, so ist bei der Hauptstrommaschine $i_{err} = I_a = I$, bei der Nebenschlußmaschine $I_a = I + i_{err}$. Man kann auch, um der Maschine bestimmte Eigenschaften zu geben, einen Teilstrom von I_a (also Nebenschlußwicklung) und den Nutzstrom I (also Hauptstromwicklung) zur Felderzeugung zugleich benutzen. Solche Maschinen heißen Compoundmaschinen (Doppelschlußmaschinen, Fig. 101).

Eine Maschine mit Fremderregung erhält man, wenn man, wie es häufig vorkommt, den Strom für die Felderzeugung nicht aus dem Anker der Maschine selbst nimmt, sondern aus einer fremden Stromquelle (besondere Erregermaschine, Akkumulatoren) deckt.

Der Aufbau der Gleichstrommaschine (Fig. 102).

Der Ankerkörper besteht aus 0,5 bis 0,3 mm dicken Blechen, die, um Wirbelströme zu verhindern, einseitig mit Papier beklebt oder auch lackiert sind (Füllfaktor ca. 0,9). Dickere Endbleche. Um gute Lüftung des Ankerblechpaketes zu erhalten, bringt man Luftschlitze an (Distanzbleche). Breite der Schlitze 6 bis 10 mm. Man ordnet in der Regel so viele Luftschlitze an, daß Blechpakete von 70 bis 40 mm Stärke entstehen. Bei kleinen Ankern werden die Blechschnitte aus einem Stück gestanzt, direkt auf die Welle aufgeschoben (Fig. 102) und durch Druckstücke (Bund, Springring) zusammengehalten. Anker größeren Durchmessers erhalten besondere Nabe (für gute Lüftung des Ankers ist Sorge zu tragen). Das Blechpaket wird dann aus Segmenten zusammengesetzt und durch kräftige Bolzen (Isolierung der Bolzen) zusammengehalten. Bei sehr großen Maschinen müssen die Arme auf Biegung berechnet werden.

Ankerwicklung. Kann als Ringwicklung oder Trommelwicklung hergestellt werden. Ringwicklung heute kaum noch angewandt wegen schwieriger Herstellung und schlechter Ausnutzung des Kupfermaterials. Die Trommelwicklungen werden meist in offenen Nuten im Ankerblech untergebracht. Stanzen der Nuten vor dem Zusammenbau des Blechpaketes (Haken der Nuten). Nicht zu feine Nutung. Für die Wicklung kommt nur Kupfer in Frage (Draht oder Stäbe), Stäbe bei hohen Stromstärken. Die Drähte werden durch doppelte Baumwollbespinnung isoliert (Fig. 103). Stäbe werden überlappt mit Leinenband unwickelt. Die in einer Nut liegenden Drähte müssen, den zwischen ihnen herrschenden Spannungen entsprechend, durch Zwischenlagen von Preßspan usw. voneinander isoliert werden. Ferner Auskleiden der Nut mit Preßspan. Spielraum für Einbringen der Wicklung in die Nut. Sicherung der Wicklung gegen Herausschleudern

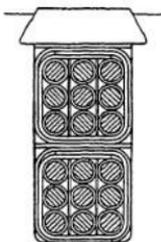


Fig. 103.

durch die Zentrifugalkraft mittels Bandagen (Stahl- oder Bronzedraht) oder mittels Keile (Holz oder Bronze, letztere bei Turbomaschinen). Die auf beiden Seiten des Blechpaketes herausragenden Wicklungsköpfe müssen ebenfalls durch Bandagen gesichert werden. Die Verbindungen der Leiter untereinander zu einer Wicklung müssen stets so vorgenommen werden, daß sich die in den einzelnen Leitern unter den verschiedenen Polen induzierten EMK addieren. Offene und geschlossene Wicklungen. Offene Wicklungen nicht gebräuchlich. In der Praxis nur geschlossene Wicklungen. Durchläuft man eine Wicklung und hat dabei, wenn man nach dem Ausgangspunkt zurückkommt,

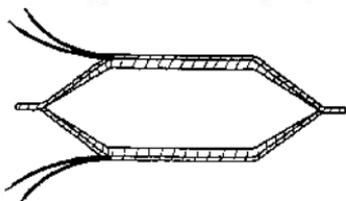


Fig. 104.

alle Leiter auf dem Anker berührt, so spricht man von einfach geschlossener Wicklung. Zweifach ist eine Wicklung geschlossen, wenn man beim Durchlaufen der Wicklung bis zum Ausgangspunkt nur die Hälfte der Leiter berührt. Die andere Hälfte bildet eine gleiche geschlossene Wicklung. Beide Wicklungen sind durch die Bürsten auf dem Kommutator parallelgeschaltet. In jeder Nut werden in der Regel mehrere Leiter (je nach der Spannung) untergebracht. Eine Gruppe von Leitern, die unter demselben Pol hintereinandergeschaltet sind, heißt Wicklungselement (Spulenseite, Fig. 104). Zwei Elemente geben zusammen eine Spule. Mehrere Spulen einer Nut können wieder zu Schablonen vereinigt sein.

Ringwicklung (nach Pacinotti) ist eine einfach geschlossene Wicklung, die meist als Spiralwicklung ausgeführt wird. Ist die Anzahl der Pole = $2p$, so sind $2a = 2p$ parallelgeschaltete Stromkreise auf dem Anker vorhanden. Ist der von der Maschine abgegebene Strom I , so beträgt der in den einzelnen Zweigen

fließende Strom $= \frac{I}{2p}$. Es können die Verbindungen zwischen jeden Windungen oder die Verbindungen zwischen Windungsgruppen zum Kommutator abgeleitet werden.

Trommelwicklung (von Hefner - Alteneck). Um eine fortlaufende, alle Ankerleiter berührende, nach dem Ausgangspunkt zurückkehrende Wicklung zu erhalten, muß man auf dem Anker nach bestimmten Regeln (Arnold: Die Ankerwicklungen) mit der Wicklung fortschreiten, d. h. Wickel-elemente in den einzelnen Nuten mit solchen in bestimmten anderen Nuten verbinden (Fig. 105).

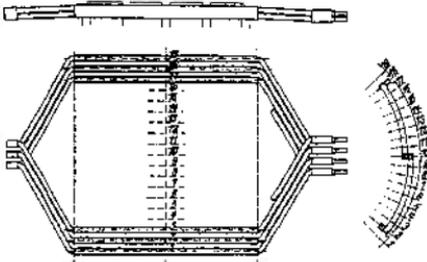


Fig. 105.

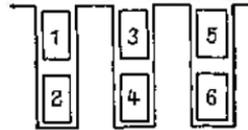


Fig. 106.

Man bezeichnet mit Wicklungsschritt y die Entfernung zweier zu verbindenden Wicklungselemente. y wird ausgedrückt in Elementzahlen, wobei man nach Fig. 106 numerieren kann. Man kann aber auch nach Nuten zählen (wie in Fig. 105 geschehen). Anzahl der Kommutatorsegmente ist stets gleich der halben Zahl der Wicklungselemente. Unter Kollektorschritt y_K versteht man die Entfernung zweier in der Wicklung folgenden Kommutatorsegmente; y_K gemessen in Segmentzahlen. Je nachdem man beim Durchlaufen der Wicklung nur vorwärts oder vorwärts und rückwärts schreitet, erhält man Wellenwicklung oder Schleifenwicklung. Da man auf beiden Ankerseiten Verbindungen machen muß, zerfällt der Schritt y in die Teilschritte y_1 und y_2 . Fig. 107 und 108 stellen das Prinzip einer Wellenwicklung und einer Schleifenwicklung dar.

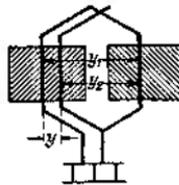


Fig. 107.

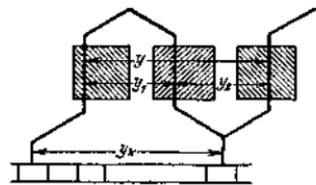


Fig. 108.

Ist die Zahl sämtlicher Leiter (Drähte oder Stäbe) auf dem Anker $= N$, so sind $\frac{N}{2}$ Windungen vorhanden. Besteht jedes Wickel-element aus w Leitern, so ist mit $\frac{N}{2w} = \frac{s}{2}$ Spulen zu rechnen. s = Anzahl der Spulenseiten oder Wickel-elemente.

Ist E die EMK der Gleichstrommaschine, n die Drehzahl/min, p = Zahl der Polpaare und Φ der magnetische Fluß pro Pol, so gilt

$$\text{für Wellenwicklung (Reihenschaltung)} \quad E = \frac{n}{60} \cdot p \cdot N \Phi \cdot 10^{-8} \text{ Volt,}$$

$$\text{für Schleifenwicklung (Parallelschaltung)} \quad E = \frac{n}{60} \cdot N \Phi \cdot 10^{-8} \text{ Volt}$$

(weil $p = a$),

$$\text{für Reihenparallelschaltung (nach Arnold)} \quad E = \frac{n}{60} \cdot \frac{p}{a} \cdot N \Phi \cdot 10^{-8} \text{ Volt.}$$

a ist die halbe Zahl der parallelgeschalteten Ankerstromzweige. Es bedeute: y_1 und y_2 die Teilschritte, y der resultierende Schritt, y_K der Kommutator-

schritt, K = Zahl der Kommutatorsegmente, s = Zahl der Wickelemente, dann gilt:

Für Reihenschaltung (Wellenwicklung):

$$y = y_1 + y_2 = \frac{s \pm 2}{p}; \quad K = \frac{s}{2}; \quad y_K = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

wobei sein muß:

$$y_1 \text{ und } y_2 \text{ ungerade; } \frac{s \pm 2}{p} \text{ gerade;}$$

$$\frac{y}{2} \text{ und } \frac{s}{2} \text{ sowie } y_K \text{ und } K \text{ müssen teilerfremd sein.}$$

Für Parallelschaltung (Schleifenwicklung):

$$y = y_1 + y_2, \text{ wobei } y_2 \text{ negativ; } K = \frac{s}{2}; \quad \frac{y}{2} = \pm \frac{a}{p} = \pm 1;$$

$$y_K = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

hier muß sein:

y_1 und y_2 ganze, ungerade Zahlen;

$\frac{y}{2} = y_K$ und $\frac{s}{2}$ müssen teilerfremd sein.

y_1 wird so gewählt, daß

$$y_1 = \frac{s \pm b}{2p};$$

b eine beliebig ganze Zahl, damit y_1 ungerade wird. Da die Ankerzweige parallelgeschaltet sind, ist gerade Nutzenzahl erwünscht.

Für Reihenparallelschaltung:

$$y = y_1 + y_2 = \frac{s \pm 2a}{p}; \quad K = \frac{s}{2}; \quad y_K = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Hier ist Bedingung, daß

$$y_1 \text{ und } y_2 \text{ ungerade; } \frac{s \pm 2a}{p} \text{ gerade.}$$

Für eine symmetrische Wicklung, die angestrebt werden soll, muß $\frac{p}{a}$ ganze Zahl sein. (Näheres über Wicklungen und ihre Gesetze siehe Arnold: Die Ankerwicklungen.)

Darstellung der Wicklungen in der Zeichnung entweder als Projektion der Wicklung auf eine zur Ankerachse senkrechte Ebene, oder was gebräuchlicher ist, als Abwicklung einer Zylinderfläche. Die Polflächen können hier schraffiert eingezeichnet werden. Die Leiter denkt man sich über die Polflächen fortbewegt. Fig. 109, Wicklungsschema einer Wellenwicklung, $s = 34$; $y_1 = 9$; $y_2 = 7$. Fig. 110, Wicklungsschema einer Schleifenwicklung, $s = 34$; $y_1 = 9$; $y_2 = -7$.

Aquipotentialverbindungen sind Ausgleichsleitungen, welche Punkte der Ankerwicklung, die sich auf demselben Potential befinden, verbinden, um Ausgleichsströme über die Bürsten zu verhindern. Sie sind hauptsächlich bei Anker mit Parallelschaltung erforderlich.

Die Zahl der Stromabnahmestellen (Bürstenbolzen) muß mindestens $2a$ betragen, mithin wären bei Reihenschaltung nur 2 Bürstenbolzen erforderlich. Aus Symmetriegründen werden fast stets $2p$ Bürstenbolzen vorgesehen.

Kommutator. Erfordert besondere Sorgfalt bei der Herstellung. Die Segmente bestehen aus gezogenem Kupfer und werden mittels Doppelkonus (zweckmäßig 6° und 30°) zusammengehalten (Fig. 111). Schnellaufende Kommutatoren (Turbogeneratoren, bis 35 m/sek Umfangsgeschwindigkeit) erhalten zum Schutze gegen die Zentrifugalkraft warm aufgezoogene Schrumpfringe, bei

größerer axialer Länge der Segmente mehrere Schrumpfringe. Die Isolierung der einzelnen Segmente untereinander geschieht durch besten Glimmer von 0,6 bis 1,0 mm Dicke, je nach Stärke der Segmente. Richtige Härte des

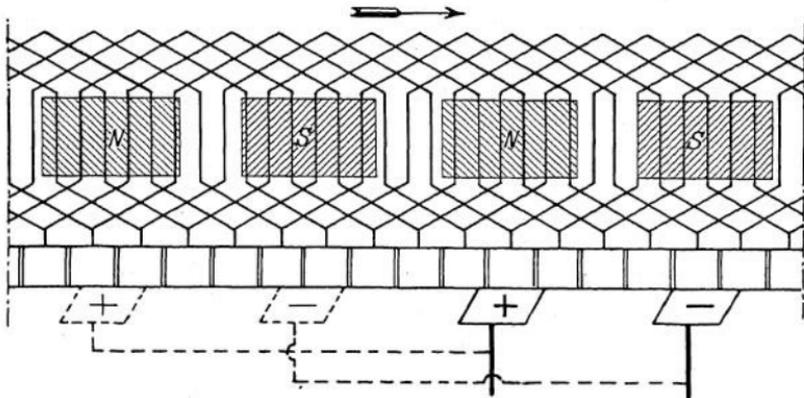


Fig. 109.

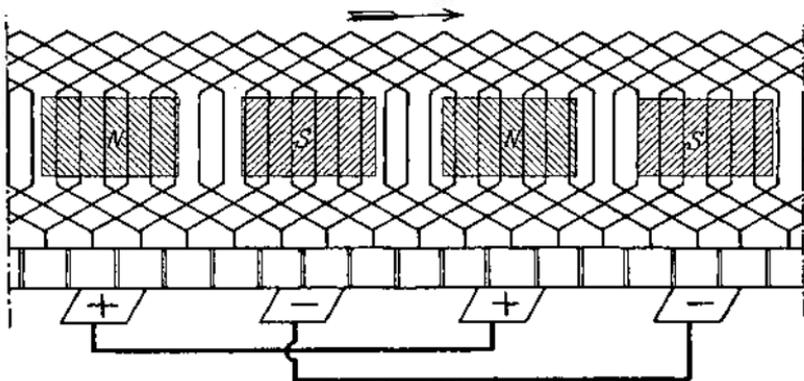


Fig. 110.

Glimmers wichtig. Glimmer und Kupfer sollen sich gleichmäßig abnutzen (Auskratzen der Isolation, Abschleifen des Kommutators mit Glaspapier). Die Verbindung der Ankerleiter mit dem Kommutator geschieht durch Verlöten. Die Größe der Schleiffläche des Kommutators richtet sich nach der abzuführenden Stromstärke I (ca. 3 bis 12 I je nach Bürstenmaterial und Umfangsgeschwindigkeit). Als Bürstenmaterial kommt fast nur Kohle in Betracht. Nur für ganz niedrige Spannungen und große Stromstärken Kupfergazebürsten. Der Auflagedruck der Bürsten auf dem Kommutator soll so hoch sein, daß Vibrationen der Bürsten nicht eintreten können (100 bis 200 g/cm², bei Fahrzeugen bis 400 g/cm² Bürstenauflegefläche). Jede Bürste bedeckt 2 bis 3½ Kommutatorsegment. Bürstenhalter sollen leicht auswechselbar sein. Die Halter sollen den Bürsten geringes Spiel geben, ein Kanten der Bürsten aber nicht gestatten. Der Auflagedruck soll sich durch Nachspannen von Federn leicht einstellen lassen. Die Bürsten-

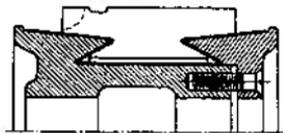


Fig. 111.

träger werden auf vom Gestell gut isolierte Bürstenbolzen aufgereiht (bei großen Stromstärken viele Bürsten auf einen Bolzen).

Pole und Magnetgestell. Moderne Gleichstrommaschinen haben fast ausschließlich Außenpole. Als Material für das Joch kommt Stahlguß, Gußeisen, wohl

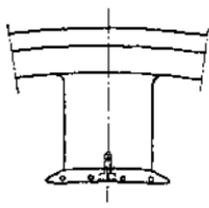


Fig. 112 a.

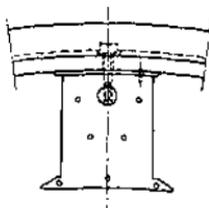


Fig. 112 b.

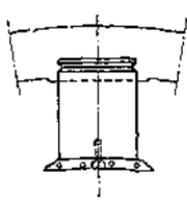


Fig. 112 c.

auch Dynamoblech in Frage. Die Pole (Fig. 112 a, b, c) werden entweder aus Blechen (ohne Isolation) zusammengesetzt und mit dem Joch verschraubt oder bestehen aus Stahlguß oder Gußeisen und sind mit dem Joch direkt vergossen. In diesem Falle erhalten sie meist lamellierte Polschuhe. Man hat auch Pole aus Blech, die in ein Graugußjoch eingegossen sind. Die Polspitzen der

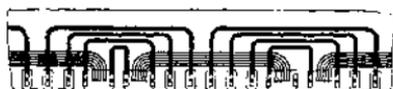


Fig. 113.

Bleche werden meist abwechselnd abgeschnitten, um in den Polspitzen hohe Sättigung, d. h. nicht zu steilen Feldanlauf zu erhalten. Vorteilhaft konstruiert man so, daß die Magnetspulen auf die Pole aufgeschoben

werden können. Sogenannte Déri-Maschinen haben ein Magnetgestell, das aus Blechnitten besteht, die Joch, Pole und Hilfspole zugleich verkörpern (Fig. 113).

Die Wicklung der Pole kann in Spulenkästen aus Isolationsmaterial oder Metall (Messing-, Zink- oder Eisenblech) untergebracht werden. Bei Spulenkästen aus Metall ist Auskleiden der Kästen mit Isolation nötig. Bei kleinen und mittleren Maschinen und bei gekapselten Maschinen (Bahnmotoren) wendet man oft „geschürte“ Spulen an. Diese sind ohne Spulenkästen frei gewickelt und werden durch Umschnürung mittels Band in ihrer Form, die sich dem zur Verfügung stehenden Platz anpassen kann, zusammengehalten. Um gute Abkühlung der Erregerspulen zu erhalten, werden die Spulen oft auch unterteilt (scheibenartig) ausgeführt. Compoundwicklungen werden meist aus hochkant gewickeltem Flachkupfer hergestellt.

Dynamowellen und Lager. Für die Wellen der Dynamomaschinen gelten im allgemeinen dieselben Grundsätze wie im Maschinenbau. Vorteilhaft ist es, die Wellen selbst bei größeren Durchmessern (bis 300 mm) nicht vorzuschmieden, sondern aus dem Vollen herauszudrehen. Die Achsen sollen möglichst wenig Absätze und Bündel besitzen, scharfe Einkerbungen und schroffe Querschnittsveränderungen sind zu vermeiden. Da sich der Anker infolge magnetischer Kräfte bei Lauf selbst in die Mittelstellung axial einstellt, kann man, wie bei kleineren Maschinen oft ausgeführt, vollständig zylindrische Achsen ohne jeden Bund anwenden. Meist erhalten die Wellen an den Lagerstellen Spritzringe, um das Öl abzuhalten, nach dem Anker hinzukriechen. Material für Dynamowellen meist gut härtbarer Flußstahl, für Turbodynamos und für kleine Achsen auch Tiegelgußstahl. Zulässige Beanspruchungen siehe Abschnitt Maschinenteile. Der Durchmesser wird berechnet aus

$$M_1 = k_b W = \frac{\pi}{32} k_b d^3.$$

(Ideelles Moment als reines Biegemoment angesehen.)

$$M_t = 0,35 M_b + 0,65 \sqrt{M_b^2 + (\alpha M_a)^2}; \quad \alpha = k_b : 1,3 k_a;$$

$$M_b = \frac{\pi}{32} k_b d^3; \quad M_a = \frac{97,5 \Omega}{n};$$

M_b und M_a in kg/cm; Ω = die von der Achse zu übertragende Leistung in Watt, n = Drehzahl pro Minute.

Bei schnelllaufenden Maschinen ist die „kritische Drehzahl“ wichtig, nämlich die Drehzahl/min, bei der unter Zusammenwirkung der aus unvermeidlicher Massenexzentrizität resultierenden Zentrifugalkraft und der Eigenschwingungen der Welle Resonanz auftritt. (S. Dynamik, S. 248.) Schnelllaufende Maschinen müssen gut ausbalanciert werden. Nach Föppl: Kritische Drehzahl

$$n_K = \frac{300}{\sqrt{f}};$$

f = max. Wellendurchbiegung in cm bei ruhender, beiderseits freiauflegender Welle. Die ermittelte kritische Drehzahl sollte wesentlich höher liegen als die normale Betriebsdrehzahl. Bei größeren Wellenlängen ist dies meist nicht zu erreichen. Man wählt dann n_K so, daß die Betriebsdrehzahl kein Vielfaches von n_K wird.

Lager. Meist als Ringschmierlager ausgebildet. Kleinere Lager erhalten ungeteilte Bronzeschalen (bis 40 mm Durchmesser). Größere Lager erhalten geteilte Schalen im Kugelgelenk. Spezifischer Lagerdruck $p = 2$ bis 4 kg/cm² bei kleineren Lagern bis 6 kg/cm² bei größeren. Bei besonders starken Belastungen wählt man Preßölschmierung, eventuell Wasserkühlung. Kugellager haben sich im Dynamobau wenig bewährt. Das Verhältnis $\frac{l}{d} = \frac{\text{Lagerlänge}}{\text{Zapfenstärke}}$ wird zwischen 2,5 bis 3,5 gewählt.

Gang der Rechnung beim ersten Entwurf einer Gleichstrommaschine.

Als erster Anhalt für die Dimensionierung einer Gleichstrommaschine kann der durch die zulässige Erwärmung der Maschine begrenzte Ausnützungsfaktor (Maschinenkonstante) C genommen werden. Es sei: Ω die Leistung der Maschine (oder des Motors) in KW, n die Drehzahl pro Minute, l die axiale, aktive Länge des Ankerreisens in cm, D der Durchmesser des Ankers in cm, so ist

$$C = \frac{\Omega \cdot 10^6}{D^2 \cdot l \cdot n}$$

(C für kleine Maschinen 1 bis 2, für Maschinen über 100 KW 2 bis 3). Meist ist Leistung und Drehzahl gegeben, so daß sich $D^2 \cdot l$ bestimmen läßt. Nach Wahl der Umfangsgeschwindigkeit des Ankers (15 bis 20 m/sek bei kleinen, 20 bis 25 m/sek bei größeren Maschinen und bis 100 m/sek bei Turbomaschinen, 5 bis 10 m/sek bei Fördermotoren) ist der Durchmesser bei gegebener Drehzahl festgelegt. Aus $D^2 \cdot l$ ist die axiale Ankerlänge zu bestimmen. Man zeichne den Anker

mit dem Magnetgestell maßstäblich auf und wähle die Zahl der Pole. Viele Pole ergeben eine leichte Maschine, doch wird die Maschine teuer und die Kommutierung schwierig. Den Polbogen b mache man 0,65 bis 0,75 der Polteilung τ . Man bestimme den Querschnitt des Luftspaltes, der für den Übertritt des Induktionsflusses aus dem Pole nach dem Anker in Frage kommt. Die Ausbreitung der Induktionslinien in den Ankerlücken (Fig. 114) ist dabei zu berücksichtigen. Als wirksamer Luftquerschnitt Q_L kann man für erste Rechnung setzen 0,7 bis 0,8 der Polaustrittsfläche Q_P . Man wähle die Induktion im Luftspalt ($\mathfrak{B}_L = 7000$ bis 9000 Linien/cm²) und berechne den nützlichen Fluß $\Phi = \mathfrak{B}_L \cdot Q_L$. Aus der zu induzierenden EMK E , der Polpaarzahl, der Drehzahl n und dem nützlichen Fluß Φ pro Pol errechne man mit Hilfe der Formeln auf Seite 1417 die Anzahl N der Ankerleiter. Der Spannungsverlust $I_a R_a$ kann zu 1,5 bis 3% angenommen werden. Kleinere Maschinen und solche mit höheren Spannungen werden meist mit Reihenschaltung ausgeführt. Ganz große Maschinen erhalten Reihenparallelschaltung. Maschinen für niedere Spannungen und große Stromstärken werden mit Parallelschaltung ausgeführt (Äquipotentialverbindungen). Man versuche die Drahtzahl N geschickt in Nuten unterzubringen und wähle dabei die Nutdimensionen und die Isolationsverhältnisse unter Berücksichtigung der Spannung. Hierauf berechne man den magnetischen Kreis der Maschine unter Benutzung der auf Seite 1377 gegebenen Richtlinien (Kurven Fig. 13).

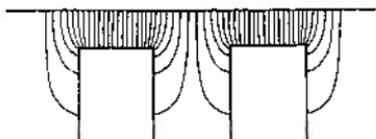


Fig. 114.

Als Streuung der Pole kann 15 bis 25% angenommen werden. Zu den resultierenden Ampere-windungen mache man einen Zuschlag von 25 bis 30% (Berücksichtigung der Ankerück-wirkung). Nach Pichelmayr, Dynamobau, Handbuch der Elektrotechnik Bd. V kann man die Beanspruchungen der Materialien bei Gleichstrommaschinen wie folgt wählen.

a) Induktionen im magnetischen Kreis:

- | | |
|---|--------------------------------------|
| 1. Joche aus Gußeisen | $\mathfrak{B}_y = 6\ 000 - 7\ 000$ |
| 2. Joche aus Blech und Flußeisen | $\mathfrak{B}_y = 12\ 000 - 13\ 000$ |
| 3. Schenkel aus Blech und Flußeisen | $\mathfrak{B}_s = 14\ 500 - 17\ 000$ |
| 4. Ankerzähne, scheinbare Induktionen im Fußkreis
bei normalen offenen Maschinen | $\mathfrak{B}_z = 22\ 000 - 23\ 000$ |
| bei Bahnmotoren, mit Serienwicklung, gerechnet für Stun-
denleistung | $\mathfrak{B}_z = 24\ 000 - 26\ 000$ |
| bei sehr schnellaufenden Maschinen, Ankerfrequenz hoch | $\mathfrak{B}_z = 16\ 000 - 18\ 000$ |
| 5. Ankereisen, je nach Frequenz und gegebenem Raum | $\mathfrak{B}_a = 12\ 000 - 20\ 000$ |

b) Stromdichten:

- | | |
|---|--------------------------------------|
| 1. Ankerdrähte, kleine Maschinen mit guter Ventilation, bei
Vollast, Dauerbetrieb | $i = 6 - 5$ Amp./mm ² |
| 2. Ankerdrähte, größere Maschinen mit Drahtwicklung und
Stabankern bei guter Ventilation | $i = 5 - 4$ Amp./mm ² |
| 3. Schenkeldrähte,
kleine Spulen | $i = 2,5 - 2$ Amp./mm ² |
| größere Spulen | $i = 1,8 - 1,3$ Amp./mm ² |
| Bahnmotoren mit Hauptstromspulen (Stundenleistung) | $i = 2,5 - 2,2$ Amp./mm ² |

c) Bürstenkontakte:

- | | |
|--|------------------------------------|
| 1. weiche, graphitische Kohleblöcke | $i = 10 - 8$ Amp./cm ² |
| 2. härtere, graphitische Kohleblöcke | $i = 8 - 6$ Amp./cm ² |
| 3. harte Kohlen | $i = 6 - 5$ Amp./cm ² |
| 4. Metallbürsten (Kupfergaze) | $i = 50 - 40$ Amp./cm ² |

Berechnung der Erregerspulen für Nebenschlußmaschinen.

Ist i_{err} , N_1 die erforderliche Amperewindungszahl (Durchflutung) pro Pol, l_m die Länge einer mittleren Windung der Spule, σ der spezifische Widerstand des Wickelmateri- als (Kupfer $\sigma = 0,02$), P die Klemmenspannung der Maschine, so wird der Querschnitt des Drahtes, wenn 2ϕ Pole hintereinander an die Spannung P gelegt werden:

$$q = \frac{i_{err} \cdot N_1 \cdot 2\phi \cdot l_m \cdot \sigma}{P} \text{ in mm}^2.$$

Diesem Querschnitt entspricht ein Durchmesser (blank) d_{bl} und ein Durchmesser d_{isol} .

Man kann setzen

$$d_{isol} = \frac{23}{19} d_{bl}.$$

Nimmt man den ungünstigsten Fall an, daß die runden Querschnitte sich genau neben- und übereinanderlagern, so kommen auf jede Spule, wenn der Wickelraum F beträgt,

$$N_1 = \frac{F}{\left(d_{bl} \cdot \frac{23}{19}\right)^2}$$

Windungen. Der Widerstand der Erregerwicklung wird

$$r_{err} = \frac{2 \cdot \phi \cdot N_1 \cdot l_m \cdot \sigma}{q}$$

und der Erregerstrom

$$i_{err} = \frac{P}{r_{err}} \text{ Ampere.}$$

Erwärmung.

Die bei Dauerbetrieb eintretende Erwärmung (Übertemperatur) der Magnetspulen kann gefunden werden aus:

$$\vartheta_0 = C \frac{i_{err}^2 r_{err}}{O} \text{ in } ^\circ\text{C},$$

wobei $i_{err}^2 \cdot r_{err}$ der Verbrauch der Erregerwicklung in Watt, O die abkühlende Oberfläche der Spule in cm² und C eine Temperaturkonstante = 400 bis 500 bedeuten.

Die Erwärmung des Ankers errechnet sich angenähert aus:

$$\vartheta_0 = C' \frac{\text{Verluste im Anker}}{O(1 + 0,1v)};$$

hierin bedeuten: O die abkühlende Oberfläche in cm² des Ankers, v die Umfangsgeschwindigkeit in m/sek; C' die Temperaturkonstante für den Anker (für kleine Maschinen 400 bis 500, für größere Maschinen 250 bis 450). Die Verluste im Anker setzen sich zusammen aus Verlusten durch Stromwärme und aus Eisenverlusten (Hysteresis und Wirbelströme). Siehe Kurven. Fig. 63.

Die zulässigen Erwärmungen (Übertemperaturen über der Temperatur der umgebenden Luft) sind in den Normalien des Verbandes Deutscher Elektrotechniker (§ 18) festgelegt und betragen je nach Art des verwendeten Isolationsmaterials 40 bis 80° C.

Das Verhalten der Gleichstrommaschine.

Eine leer, mit konstanter Drehzahl und konstantem Felde laufende Gleichstrommaschine gibt die größte Spannung, wenn die Bürsten in der neutralen Zone (Stellen des Ankers, an denen keine Feldlinien ein- oder austreten) stehen. In diesem Falle sind alle unter einem Pole liegenden, gleich induzierten Leiter hintereinandergeschaltet. Wird die Maschine belastet, so erzeugen die Ankerströme ein magnetisches Feld, das Querfeld, welches bei einer zweipoligen Maschine senkrecht auf dem Hauptfelde steht. Das Querfeld setzt sich mit dem Hauptfelde zu einem resultierenden Fluß zusammen, der aber nicht mehr gleichmäßig über die Pole verteilt ist, sondern unter den ablaufenden Polspitzen eine höhere Liniendichte besitzt (Fig. 115). Durch diese Verzerrung des Hauptfeldes erscheint die neutrale Zone in der Drehrichtung verschoben. Bürstenverschiebung in der Drehrichtung. Ist die Maschine stark gesättigt, wie es bei modernen Maschinen üblich ist, so läßt das Polmaterial eine Erhöhung der Liniendichte an den ablaufenden Polspitzen nicht mehr zu. Da aber an der anlaufenden Polkante eine Schwächung des Feldes eintreten kann, muß mithin bei Belastung der Maschine ein Sinken der elektromotorischen Kraft die Folge sein. Mittel zur Verminderung und Verhütung des Querfeldes sind geeignete Polform (nicht zu lange Polhöfner), geringe Ankeramperezahl und besonders Kompensationswicklung. Bei Verschiebung der Bürsten in der Drehrichtung (Fig. 116) aus der neutralen Zone erhält man außer dem Querfeld noch ein in die Richtung des Hauptfeldes fallendes, aber diesem entgegengerichtetes Feld. Bei einer belasteten Dynamo bedeutet also Verschieben der Bürsten in der Drehrichtung Feldschwächung, d. h. Sinken der EMK und Verschieben der Bürsten gegen die Drehrichtung Feldverstärkung, d. h. Steigen der EMK. Die Beeinflussung der EMK der Maschine durch die Ankerströme nennt man „Ankerrückwirkung“.

Bei der Rotation des Ankers werden die einzelnen Ankerspulen nacheinander durch die Bürsten kurzgeschlossen (Fig. 117). Von beiden Seiten des Ankers fließen die Ströme den Bürsten zu oder von ihnen ab. Während des Durchganges der Ankerleiter durch die neutrale Zone müssen sich die Ströme in den Leitern umkehren. In den kurzgeschlossenen Spulen wird mithin eine EMK der Selbstinduktion (Reaktanzspannung) erzeugt, die Kurzschlußströme über die Bürsten zur Folge hat. Die Bürsten werden einseitig belastet. Feuern der Bürsten. Die Stromwendung erfolgt nicht linear und wird nicht unter den Bürsten beendet. Bei Ablauf der Bürsten von den Leitern muß die Kommutierung erzwungen werden, wobei starke Spritzfunken auftreten.

Mittel zur Erlangung guter Kommutierung ist Bürstenverschiebung über die neutrale Zone hinaus

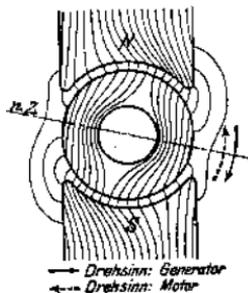


Fig. 115.

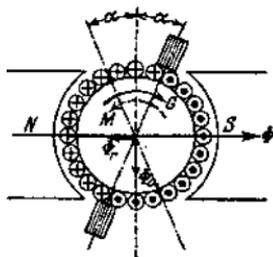


Fig. 116.

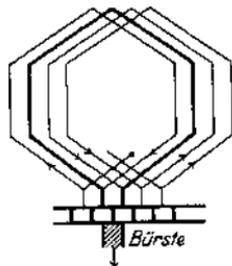


Fig. 117

in der Drehrichtung (bei Dynamomaschinen). Hierbei wird ein Teil des Hauptfeldes benutzt, das Ankerfeld in der Kommutierungszone aufzuheben, wodurch

in den durch die Bürsten kurzgeschlossenen Spulen die EMK der Selbstinduktion Null wird. Die Kommutierung kann dann linear und vollkommen unter den Bürsten beendet werden. Bei Maschinen mit veränderlicher Belastung ist das Mittel unbequem, da für jede Belastung die Bürsten eingestellt werden müssen. Vorteilhafter ist, das Ankerfeld in der Kommutierungszone durch ein besonderes Feld mit Hilfe eines Hilfspols (Wendepol), der durch den Ankerstrom erregt wird, aufzuheben (Fig. 118). Wendepole ohne stromführende Wicklung verschlechtern die

Kommutierung. Wendepole besonders für Maschinen mit schwankender Last, für solche mit veränderlicher Drehrichtung (Reversiermotoren) und für sehr schnelllaufende Maschinen.

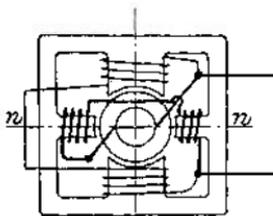


Fig. 118.

Charakteristiken der Maschinen.

Die Leerlaufcharakteristik (magnetische Charakt.) zeigt die Abhängigkeit der EMK einer Maschine von der Erregerstromstärke. Zur Aufnahme der Leerlaufcharakteristik mißt man die Spannung E an den Klemmen der Maschine und den aus fremder Stromquelle gedeckten Erregerstrom i_{err} . Die Drehzahl der Maschine wird konstant gehalten (Fig. 119). Mit stetig wachsendem Erregerstrom steigt E zunächst steil an (fast geradlinig), bei größerem Erregerstrom nimmt E immer weniger zu („Knie“ der Kurve). Da

$$E = \frac{n}{60} \cdot \frac{p}{a} \cdot N \cdot \Phi \cdot 10^{-8} = C \Phi \Psi$$

kann man unter Berücksichtigung des Maßstabes die Leerlaufcharakteristik auch als Kurve der Φ über i_{err} ansehen (magnetische Charakt.). Bei normalen Maschinen liegt der Punkt der normalen EMK E im Knie der Kurve oder wenig darüber. Dies ist erforderlich, damit die Maschine bei Belastung nicht zu großen Spannungsabfall hat.

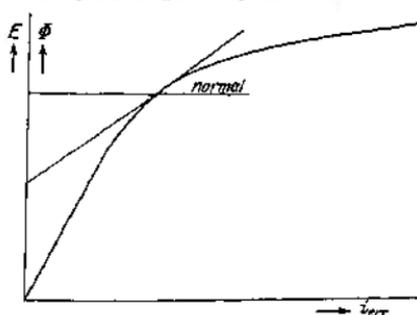


Fig. 119.

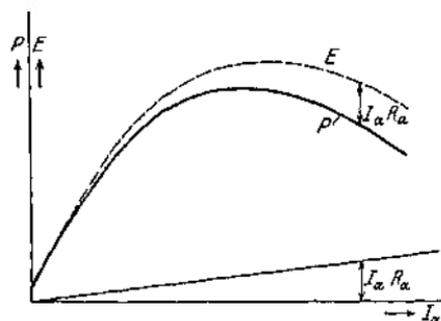


Fig. 120.

Belastungscharakteristik. Hier spielt die Schaltung der Maschine große Rolle. Bei der Aufnahme der Belastungscharakteristik werden Drehzahl und der Widerstand des Erregerkreises konstant gehalten (Selbsterregung). Man trägt die Klemmenspannung P über den Ankerstrom I_a auf und erhält die äußere Charakteristik. Da $E = P + I_a R_a$ (wobei R_a der Widerstand des Ankers ist) kann man die Kurve der E über I_a konstruieren, indem man die Punkte der äußeren Charakteristik um den Spannungsverlust $I_a R_a$ höher legt.

Man erhält dann die innere Charakteristik. Fig. 120 stellt die Belastungscharakteristik der Reihenschlußmaschine dar. Ist hier $I_a = 0$, so ist auch der Erregerstrom $i_{err} = 0$. Die Maschine gibt nur eine der Remanenz entsprechende geringe Spannung. Mit wachsendem Ankerstrom steigt die Klemmenspannung schnell an, um alsdann bei größerer Belastung infolge der Ankerückwirkung wieder abzunehmen. Reihenschlußgeneratoren sind wegen ihrer von der Belastung stark abhängigen Klemmenspannung für Kraftzentralen unbrauchbar.

Fig. 121 stellt die Belastungscharakteristik der Nebenschlußmaschine dar. Bei der Nebenschlußmaschine mit Selbsterregung nimmt der Erregerstrom i_{err} in dem Maße ab, als die Klemmenspannung P infolge Ankerückwirkung und Spannungsverlust $I_a R_a$ sinkt. Die Klemmenspannung P nimmt mit wachsender Belastung I_a zunächst langsam ab. Bei größerer Belastung sinkt P schneller; die Belastungscharakteristik hat bei einem bestimmten, maximalen Ankerstrom einen Umkehrpunkt. Bei Kurzschluß der Maschine wird $P = 0$, I_a behält infolge von Remanenz einen mäßigen Wert I_K . Da die Klemmenspannung der Nebenschlußmaschine (zumal bei kleinem Ankerwiderstand) mit der Belastung nur wenig sinkt, ist die Maschine für Kraftzentralen

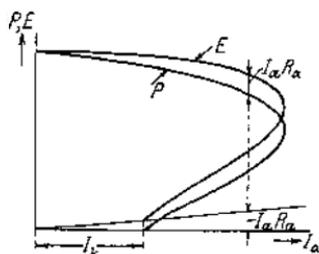


Fig. 121.

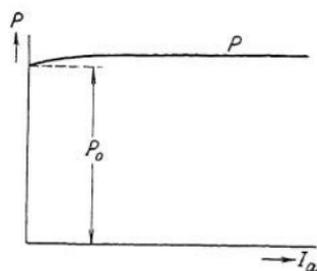


Fig. 122.

die geeignetste. Die Maschinen werden so weit benutzt, als der obere, erste Teil der Belastungscharakteristik gilt. Der Compoundmaschine kann man mehr oder weniger Eigenschaften der Nebenschluß- oder Hauptstrommaschinen geben, je nachdem man die Nebenschlußwicklung oder die Hauptstromwicklung überwiegen läßt. Fig. 122 zeigt die äußere Charakteristik einer Doppelschlußmaschine. Durch gutes Abstimmen der Hauptstromwicklung kann man erreichen, daß die Klemmenspannung P bei jeder Belastung der Maschine praktisch konstant bleibt (vollkommen compoundiert). Oft benutzt man „Übercompoundierung“ (z. B. bei Bahngeneratoren), um den Spannungsverlust in der Fernleitung (Fahrdraht) zu decken.

Querfeldmaschinen (Rosenberg) sind Maschinen für konstanten Strom (Speisung von Schweißapparaten, Zugbeleuchtung bei veränderlicher Wagengeschwindigkeit und Antrieb der Dynamo von der Wagenachse). Der Aufbau der Maschinen ist derart, daß sich ein starkes Querfeld ausbilden kann. Die Bürsten in der neutralen Zone sind kurzgeschlossen. Der Nutzstrom der Querfeldmaschine wird mittels Bürsten unter den Polen (in der Achse senkrecht zur neutralen Zone) abgenommen. Er wird durch Rotation des Ankers im Querfeld induziert. Der Nutzstrom erzeugt im Anker ein drittes Feld, das senkrecht auf dem Querfeld steht und das Hauptfeld schwächt. Wächst der Nutzstrom aus irgendeinem Grunde (Kurzschluß bei Schweißung, schnelleres Laufen der Maschine bei Zugbeleuchtung), so wird der Hauptfluß geschwächt, mithin auch das Querfeld. Der vom Querfeld abhängige Nutzstrom kann also nicht wesentlich zunehmen.

b) Wechselstromgeneratoren.

Aufbau der Maschinen. Am gebräuchlichsten ist der Innenpoltyp mit rotierendem Magnetsystem (Polkreuz, Polstern, Polrad) und feststehendem Anker, weil man bei Hochspannung, für die die Maschinen direkt gewickelt werden, die Ankerspulen sicherer isolieren kann. Die Stromabnahme erfolgt an Klemmen, welche am Gehäuse angebracht sind. Maschinen für Niederspannung werden zuweilen mit rotierendem Anker ausgeführt. Die Stromabnahme erfolgt dann mittels Bürsten auf Schleifringen. Der Anker stellt in der gebräuchlichen Ausführung einen Hohlzylinder, der an der inneren Mantelfläche die Trommelwicklung trägt, dar. Er ist, wie bei Gleichstrommaschinen, aus Blechen aufgebaut (Ventilationsschlitze). Der Ankerring wird in einem Gehäuse aus Gußeisen, selten aus Schmiedeeisen, angeordnet. Da der Luftspalt am ganzen Umfang zwischen Polrad und Anker der gleiche sein muß, ist das Gehäuse bei großen Maschinen gegen Durchbiegung zu sichern (geeignete Querschnittsform oder auch Versteifung des Gehäuses durch Arme oder Verspannungen). Das Gehäuse steht bei großen Maschinen über der Grube auf Füßen oder ist auf kräftigen Lagerböcken mittels Armen und Nabe gelagert. Letztere Anordnung gestattet ein Durchschwenken des ganzen Gehäuses bei Reinigung oder Reparatur der Wicklung. Die Ausführung des induzierenden Teiles (Induktors) ist sehr verschieden. Gleichpoltype und Wechselpoltype. Letztere ist gebräuchlicher. Langsamlaufende Maschinen erhalten einen Schwungradkranz aus Gußeisen, auf dem die Pole radial aufgeschraubt sind. In dem Radkranze werden unter Umständen ganz bedeutende Gewichte untergebracht, um das Trägheitsmoment mit Rücksicht auf den Parallelbetrieb der Maschine zu vergrößern. Bei schnelllaufenden Maschinen und solchen, bei denen starke Touren erhöhungen im Betrieb vorkommen können (Wasserturbinenantrieb), müssen die Polräder nach Festigkeitsrücksichten berechnet werden. Es kommen hier höchste Beanspruchungen vor. Man wählt dann Stahlgußboche oder ganze Polräder aus Stahlguß, die aus axial zusammengesetzten Platten bestehen können (hierdurch homogenes, leicht kontrollierbares Material). Man hat auch Joch und Polkerne aus Blechen aufgebaut.

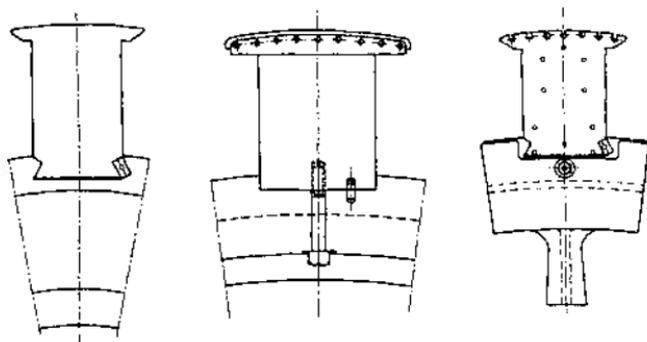


Fig. 123 a, b, c.

Die Pole werden aus Gußeisen, Stahlguß oder aus Blech hergestellt. Sind die Pole massiv, so erhalten sie in der Regel Polschuhe aus Blech. Befestigung der Pole mit dem Joch durch Schrauben oder Schwalbenschwanz (Fig. 123 a, b, c). Walzenförmige Magneträder für Turbogeneratoren sind entweder aus dem vollen Stück aus Stahlguß oder ausgeschmiedet. Die Nuten für die Erregerwicklung und die Luftkanäle sind hier eingefräst. Zuweilen sind die Magneträder auch aus Blechen mit Nuten zusammengesetzt. Blechisolation ist hier nicht erforderlich. Für die Zuführung des Erregerstromes zu den umlaufenden Polen werden

Schleifringe benutzt. Die Bewicklung der Pole kann mit Runddraht erfolgen, zuweilen wird hochkantgewickeltes Flachkupfer angewandt.

Die Wicklung der Wechselstrommaschinen kann in offenen, geschlossenen oder in halbgeschlossenen Nuten untergebracht werden. Offene Nuten gestatten die bequemste Herstellung der Wicklung (Einlegen der Wicklung), doch verursachen sie Oberschwingungen in den Wechselspannungen und Strömen, vergrößern den magnetischen Widerstand des Kreises und begünstigen Wirbelströme in den Polschuhen. Geschlossene Nuten haben nicht die Nachteile der offenen Nuten, unterstützen jedoch die Ankerstreuung und sind mühsam zu bewickeln. Fädeln oder „Nähen“ der Wicklung. Durch nachträgliches Schlitzten der geschlossenen Nut (halbgeschlossene Nut) kann man die Ankerstreuung stark herabdrücken. Die Nuten werden mit passenden Röhren aus Preßspan, Japanpapier oder Mikanit ausgekleidet.

Die Verteilung der Nuten über den Anker geschieht ganz gleichmäßig. Man wendet meist eine durch 3 teilbare Nutenzahl an, um ein und denselben Blechschnitt auch für Drehstrommaschinen verwenden zu können. Man bewickelt die Nuten derart, daß Spulen entstehen, deren Seiten gleich aber entgegengesetzt induziert werden. Die Spulenseiten müssen also über ungleichnamige Pole verteilt werden. Spulen, in denen EMKE gleicher Phase induziert werden, können je nach gewünschter Maschinenspannung hintereinander oder parallel geschaltet werden. Maschinenspannungen bis 20000 Volt.

Die induzierte EMK E einer Wechselstrommaschine ist, wenn ν = Frequenz/sek., Φ der Induktionsfluß pro Pol, N = Zahl der Leiter auf dem Anker und k eine Konstante zwischen 4 und 6 (abhängig von der Nutenzahl pro Pol und Phase und dem Verhältnis Polbogen : Teilung) $E = k \cdot \nu \cdot N \cdot \Phi \cdot 10^{-8}$ Volt.

Bei den Mehrphasenmaschinen erreicht man durch räumliche Verschiebung von Spulengruppen gegeneinander, daß diese nacheinander induziert werden, d. h. daß ihre EMKE gegeneinander zeitlich verschoben sind (Zweiphasenstrom 90°; Drehstrom 120° und 240°). Siehe S. 1394 und 1395.

Fig. 124 a, b, c gibt die Anordnung der Spulen bei Ein-, Zwei- und Drehphasenstrom (Drehstrom) in den Ankernuten [a] Drehstromwicklung, 2 Nuten pro Pol und Phase; alle Nuten bewickelt, b) Zweiphasenstrom, 3 Nuten pro Pol und Phase, alle Nuten bewickelt, c) Einphasenstrom, 4 Nuten pro Pol und Phase, nur $\frac{2}{3}$ der vorhandenen Nuten bewickelt]. Mit Rücksicht auf günstige Form der Wechselstromkurve wählt man vorteilhaft eine größere Anzahl Nuten pro Pol und Phase (kleine Maschinen 2 bis 3, größere bis 6). Die aus dem Blechpaket beiderseits herausragenden Wicklungsköpfe müssen geeignet gestützt und verspannt werden, damit sie bei Kurzschlüssen ihre Lage nicht verändern.

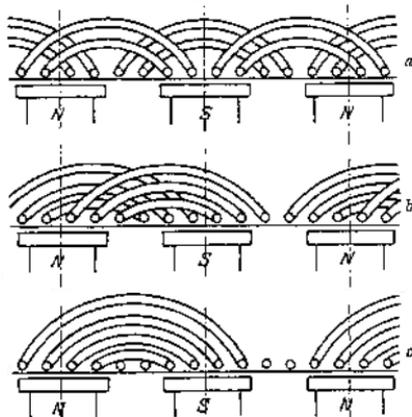


Fig. 124.

Fig. 125: A diagram showing the connection of three phases in a star configuration. It illustrates the three windings connected at a common neutral point (N) and the resulting three-phase output terminals (A, B, C). The diagram shows the internal connections and the external terminals.

Fig. 125.

Schaltet man die drei Phasen einer Drehstrommaschine in Dreieck, so gibt die Maschine die Phasenspannung. Bei Sternschaltung erhält man das $\frac{1}{\sqrt{3}}$ -fache der Phasenspannung. In der Regel werden bei Mehrphasenmaschinen Anfänge

und Enden der Phasen aus der Maschine herausgeführt. Eine Drehstrommaschine erhält also dann 6 Klemmen.

Fig. 125. Schema einer vierpoligen Drehstrommaschine in Sternschaltung.

Leistung einer Drehstrommaschine = $\sqrt{3} P \cdot I \cdot \cos \varphi$ bei gleicher Belastung der 3 Phasen. Die Antriebsleistung einer Drehstrommaschine ist

$$PS = \frac{\sqrt{3} P I \cdot \cos \varphi}{\eta \cdot 736}$$

Leistung einer Zweiphasenmaschine = $2 P \cdot I \cos \varphi$, wobei P und I sich auf je einen der beiden Zweige beziehen.

Leistung einer Einphasenmaschine = $P I \cos \varphi$, s. S. 1390.

Bei gegebener Polzahl und gegebener Frequenz/sek. ist die minutliche Drehzahl der Wechselstrommaschine festgelegt durch die Formel

$$n = \frac{60 \cdot \nu}{p}; \quad p = \text{Polpaarzahl.}$$

Bei Neuanlagen empfiehlt es sich, wenn möglich die Frequenz = 50 pro Sekunde zu wählen. Für Bahnen kommen niedrigere Periodenzahlen, z. B. $16\frac{2}{3}$ pro Sekunde, vor.

In den Normalien des V. D. E. für Bewertung und Prüfung elektrischer Maschinen sind die als normal in Frage kommenden Drehzahlen angegeben. Große Maschinen, die geteilt werden müssen, erhalten vorteilhaft eine durch 4 teilbare Polzahl.

Erregung der Wechselstrommaschinen. Der zur Erregung erforderliche Gleichstrom wird mittels Schleifringen (Bronzeguß, gewalzte Kupferlinge, Stahlguß- oder Gußeisenringe) und Bürsten (Kupfergazebürsten, Bronzekohlebürsten) dem Induktor zugeführt. Als Stromquelle für den Gleichstrom kommen in Frage: angebaute Erregermaschine (mit eigenen Lagern oder mit fliegendem Anker), getrennte Erregermaschine mit besonderem Antrieb (Motor) oder Erregung von einem besonderen Gleichstromnetz aus (Zentralerregung). Hat die Wechselstrommaschine besondere Erregermaschine, so empfiehlt es sich, den Erregerstrom nicht durch Änderung der Spannung der Erregermaschine allein zu regulieren, sondern den Erregerstrom mittels besonderem Regulierwiderstand im Nutzkreis der Erregermaschine einzustellen. Die Regulierung wird sicherer.

Das Verhalten der Wechselstrommaschinen.

Leerlaufcharakteristik gibt (wie bei der Gleichstrommaschine) die Abhängigkeit der induzierten EMK E der unbelasteten Maschine von dem Erregerstrom i_{err} . Die Drehzahl der Maschine ist bei der Aufnahme der Charakteristik konstant zu halten. Das auf S. 1424 über die Leerlaufcharakteristik der Gleichstrommaschine Gesagte gilt sinngemäß auch hier (Fig. 126). Es ist

$$E = k \nu N \Phi 10^{-8} \text{ Volt.}$$

Das Verhalten der Wechselstrommaschinen bei Belastung ist verschieden, je nachdem die Maschinen auf induktionsfreien Widerstand, auf induktiven Widerstand oder auf Kapazität arbeiten. Im allgemeinen ist der

Spannungsabfall der Wechselstrommaschine bei Belastung größer als der der Gleichstrommaschine, weil zu dem ohmschen Spannungsabfall noch der induktive dazukommt. Arbeitet die Wechselstrommaschine auf ein Netz mit $\cos \varphi = 1$, so besteht in der Maschine ein Querfeld, das genau wie bei der

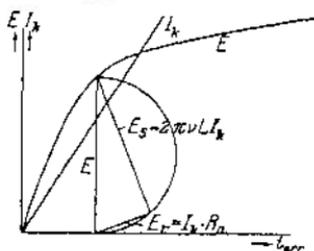


Fig. 126.

Gleichstrommaschine das Feld in den ablaufenden Polspitzen verstärkt, in den anlaufenden schwächt. Dies zieht einen Spannungsabfall (5 bis 7%) nach sich. Ist die Belastung der Maschine induktiv, so tritt eine beträchtliche Ankerückwirkung ein, und zwar wird das Feld bei induktiver Belastung der Maschine geschwächt. Der Spannungsabfall der Maschine ist groß (bis 30%). Arbeitet die Maschine auf ein Netz mit voreilendem Strom (Kabel im Netz), so wirkt die Ankerückwirkung feldverstärkend. Es tritt Spannungserhöhung ein. Fig. 127 stellt die Belastungscharakteristik dar. Sie wird bei konstanter Drehzahl aufgenommen. Über der Ankerstromstärke I_a wird die Klemmenspannung P aufgetragen. Aus dem Verhalten der Maschinen ist ersichtlich, daß die Erregung in weiten Grenzen regulierbar sein muß. In Netzen mit induktiver Belastung (Motoren) ist immer beim Schalten mit größeren Spannungsschwankungen zu rechnen. Man wendet deshalb mit Vorteil selbsttätige Spannungsregulatoren (Tirillregulator der AEG., Schnellregler der SSW.) an.

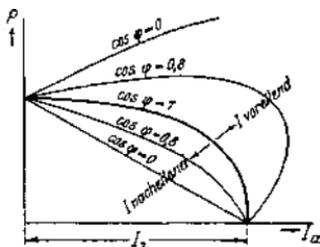


Fig. 127.

Um ein angenähertes Bild von der Ankerückwirkung bzw. vom induktiven Spannungsabfall in der Maschine zu erhalten, kann man die Kurzschlußstromstärke I_k in Abhängigkeit vom Erregerstrom i_{err} auftragen und das Spannungsdreieck aus E , $I_k R_a$ und $2\pi\nu L I_k$ konstruieren ($I_k R_a \perp 2\pi\nu L I_k$). Kurzschlußcharakteristik (Fig. 126). Die Drehzahl der Maschine braucht bei der Aufnahme der Kurzschlußcharakteristik nicht konstant zu sein. I_k ist bei normalen Maschinen und bei normaler Erregung ca. das 2- bis 4fache der normalen Betriebsstromstärke I_a . Das Verhalten der Wechselstrommaschine bei Änderung der Erregung kann auch durch Leistungslinien (Görges, E.T. Z 1900, S. 189) dargestellt werden.

IV. Elektromotoren.

Motor ist jede umlaufende Maschine, die elektrische in mechanische Leistung verwandelt.

I. Motoren für Gleichstrom.

Legt man an den Anker einer erregten Gleichstrommaschine eine Spannung P , und zwar so gerichtet, daß die Ströme vom Beschauer aus unter dem Nordpol ein- und unter dem Südpol austreten, so werden auf die einzelnen Ankerleiter Kräfte K ausgeübt, die eine Linksdrehung des Ankers verursachen (Fig. 30) $K = c \cdot I \cdot \mathfrak{B} \cdot l$, wobei I der Strom im Leiter, \mathfrak{B} die Liniendichte und l die Länge des Leiters im Feld. Die Gleichstrommaschine müßte, um die gleiche Stromrichtung im Anker zu erhalten, rechtsherum gedreht werden (s. Fig. 27). Durch das Querfeld des Motors, das dem der Dynamo gleichgerichtet ist, wird das Hauptfeld genau wie bei der Dynamo verzerrt, Fig. 115. Die neutrale Zone wird beim Motor, da sich der Drehsinn geändert hat, gegen die Drehrichtung verschoben, das Feld hat an den ablaufenden Polspitzen eine geringere Liniendichte (Mittel gegen Querfeld wie bei der Dynamo). Wie aus Fig. 116 ersichtlich, muß beim Motor (in Fig. 116 Pfeil der Drehrichtung gestrichelt) eine Verschiebung der Bürsten in der Drehrichtung eine Feldverstärkung, gegen die Drehrichtung eine Feldschwächung nach sich ziehen. Bezüglich der Kommutierungsverhältnisse gilt beim Motor dasselbe, was bei der Dynamo gesagt wurde (S. 1423). Bestes Mittel zur Erlangung guter Kommutierung bleibt die Anwendung von Wendepolen (Reversiermotoren, Motoren für schwankende Belastung). Soll die Kommutierung bei Motoren ohne Wendepole durch Bürsten-

verschiebung erfolgen, so muß diese, wie eine einfache Überlegung ergibt, im gleichen Sinne wie bei der Dynamomaschine, also gegen die Drehrichtung des Motorankers erfolgen.

Es sei P die Klemmenspannung, n = Drehzahl/min, I_a = Ankerstrom, R_a = Ankerwiderstand, E_a = EMK des Ankers, Φ = Fluß pro Pol.

Würde man P bei Stillstand an den Anker legen, so würde der Anker einen Strom aufnehmen $I_a = \frac{P}{R_a}$; bei Rotation entwickelt der Anker eine EMK $E_a = c \cdot n \Phi$, welche sich der Klemmenspannung P entgegensetzt. Der Anker nimmt also bei Rotation einen Strom auf $I_a = \frac{P - E_a}{R_a}$.

Da $n = \frac{E_a}{c \cdot \Phi}$ und $E_a = P - I_a R_a$, wird

$$n = \frac{P - I_a R_a}{c \cdot \Phi}.$$

R_a ist meist sehr klein.

Der Motor strebt danach, die Gegen-EMK $E_a = P$ zu erreichen. Da $I_a R_a$ nicht Null werden kann, weil sonst kein Drehmoment vorhanden wäre, wird E_a stets unter P bleiben (ca. 3%). Die Formel für n gibt Aufschluß über das Verhalten des Motors bei Änderung von P oder Φ . Da R_a fast immer sehr klein, so ist n fast proportional P , wenn Φ konstant, der Motor z. B. fremd erregt ist. Eine Änderung des Feldes bedingt Tourenänderung. Schwächung des Feldes gibt Tourenerhöhung, Verstärkung gibt Tourenverringern. Unterbrechung des Erregerstromes (also $\Phi = 0$) würde Durchgehen des Motors bedingen.

Wird ein Motor belastet, so sinkt seine Drehzahl und damit auch die EMK des Ankers. Der Motor nimmt mithin einen größeren Strom auf, um das der Belastung entsprechende Drehmoment zu entwickeln.

Ist d der Durchmesser des Ankers, so ist das Drehmoment

$$M_d = K \cdot \frac{d}{2} = c' I_a \Phi = c'' \cdot I_a \Phi.$$

Das Drehmoment ist also nur vom Ankerstrom und vom Fluß abhängig.

Der Reihenschlußmotor (Hauptstrommotor). Beim Reihenschlußmotor liegen Anker und Erregerwicklung in demselben Stromkreis (Fig. 128).

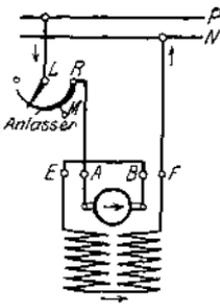


Fig. 128.

Der Induktionsfluß Φ ist also eine Funktion vom Ankerstrom. Der Motor wird mithin bei Belastung in seiner Tourenzahl stark nachlassen und bei Entlastung hohe Drehzahlen annehmen. Bei vollständiger Entlastung würde der Motor durchgehen. Er ist also überall, wo Leerlauf eintreten könnte (z. B. bei Riemenantrieben beim Herabfallen des Riemens), nicht geeignet. Andererseits hat der Hauptstrommotor ein sehr gutes Anzugsmoment, da sein Drehmoment durch das Produkt $I \cdot f(I)$ gegeben ist. Diese Eigenschaften machen den Reihenschlußmotor besonders geeignet für den Antrieb von Bahnen und Kranen, da man hier meist großes Anlaufmoment und geringe Geschwindigkeit bei Belastung haben will. Ein Durchgehen ist bei obengenannten Betrieben infolge der mechanischen

Kupplung des Motors mit dem Getriebe (Zahnradübertragung) ausgeschlossen. Fig. 129 zeigt die Betriebskurven eines Hauptstrommotors von 4 PS (dauernd) für 110 Volt Klemmenspannung. Die Kurven sind wie üblich über dem Nutzdrehmoment aufgetragen.

Der Nebenschlußmotor. Beim Nebenschlußmotor liegt die Erregerwicklung parallel zum Anker (Fig. 130). Ein an konstanter Klemmenspannung

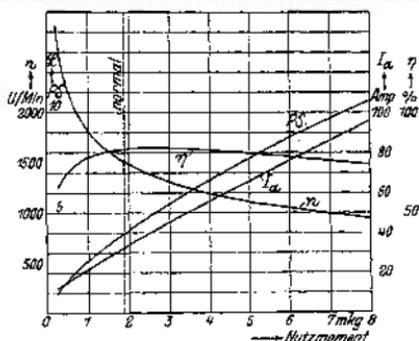


Fig. 129.

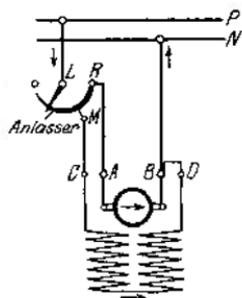


Fig. 130.

liegender Motor hat mithin konstantes Feld; er verhält sich wie ein fremd-erregter Motor, dessen Erregerstrom konstant gehalten wird. Läuft der Motor leer, so nimmt er nur einen geringen Strom auf, der die Leerlaufverluste zu decken hat. Seine Drehzahl ist begrenzt, da er mit vollem Flusse arbeitet. Wird der Motor belastet, so muß er um ein geringes langsamer laufen, um eine geringere EMK des Ankers zu erhalten, damit der dem Drehmoment entsprechende Strom I_a sich ausbilden kann. Die Geschwindigkeit ändert sich also mit zunehmender Belastung nur wenig, und zwar um so weniger, je geringer der Ankerwiderstand ist. Der Anlauf des Motors ist gut, solange die Klemmenspannung den ihr zukommenden Wert hat, weil der Motor dann mit vollem Felde anlaufen kann. Zuweilen ist diese Bedingung nicht erfüllt, wenn in den Zuleitungen zum Motor zu großer Spannungsverlust vorhanden ist (landwirtschaftliche Betriebe). Der Nebenschlußmotor ist überall dort brauchbar, wo bei schwankender Belastung eine ziemlich gleichbleibende Geschwindigkeit erwünscht ist (Antrieb von Werkzeugmaschinen, Pumpen, Fördermaschinen usw.). Fig. 131 gibt die Betriebskurven eines Nebenschlußmotors für 5 PS dauernd für 110 Volt Klemmenspannung.

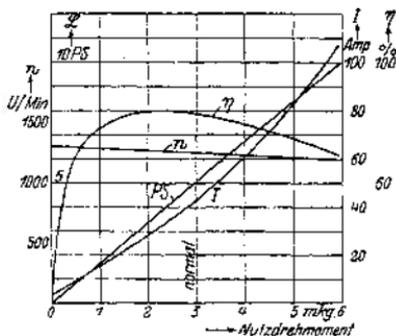


Fig. 131.

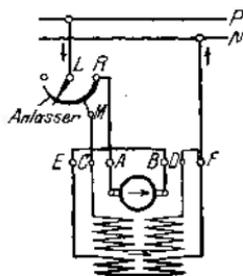


Fig. 132.

Doppelschlußmotoren (Kompondmotoren, Fig. 132). Je nachdem ob die Hauptstrom- oder Nebenschlußerregwicklung überwiegt, hat der Kompondmotor mehr Hauptstrommotor- oder mehr Nebenschlußmotoreigenschaften. Oft erhalten Nebenschlußmotoren etwas Kompondierung, um den Anlauf zu verbessern. Einige Firmen wenden zuweilen sog. Hilfskompondwicklung bei Nebenschlußmotoren mit Wendepolen an, um stabilen Gang bei allen Belastungen zu erhalten. Dies ist besonders bei Wendepolmotoren erforderlich, deren Drehzahl durch Feldschwächung reguliert werden soll.

Anlassen der Motoren. Da bei Stillstand des Motors die Gegen-EMK des Ankers gleich Null ist, würde der Motor einen unzulässig hohen Strom aufnehmen, wenn er beim Anlassen direkt an die volle Klemmenspannung gelegt

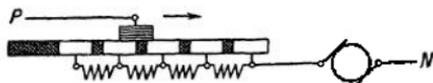


Fig. 133.

würde. Man schaltet deshalb vor den Anker Regulierwiderstände (Anlasser), die mit zunehmender Geschwindigkeit beim Anfahren (entsprechend der hierbei anwachsenden Gegen-EMK des Ankers) ausgeschaltet werden (Fig. 133). Die einzelnen Widerstandsstufen sollen nach einer geometrischen Reihe abnehmen. Wichtig ist, daß der Anlasser für Nebenschlußmotoren stets so geschaltet wird, daß der Erregerkreis immer die volle Spannung erhält, damit der Motor sein volles Drehmoment entwickeln kann.

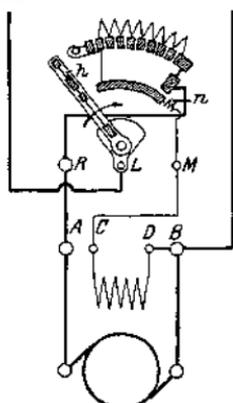


Fig. 134.

an das Netz legt (Fig. 134). In der Figur ist außerdem eine Funkenlöschspule vorgesehen. In der Ausschaltstellung ist der Erregerkreis über den Anker kurzgeschlossen. Sogenannte Selbstanlasser werden für Motoren benutzt, die aus der Ferne angelassen werden sollen. Für die Bestimmung der Größe des Anlassers ist nicht die Betriebsleistung des Motors, sondern die Anlaßleistung maßgebend (Anlasser für Anlauf ohne Last oder für Anlauf mit Vollast). Die Anlaßleistung kann sehr hoch werden, wenn Schwungmassen beschleunigt werden müssen. Wichtig ist auch die Anlaßzeit, da die Anlaßarbeit = Anlaßleistung \times Anlaßzeit vom Anlasser in Gestalt von Wärme abgeführt werden muß. Luftkühlung, Ölkühlung. Bei Ölanlassern muß das Öl die ganze Anlaßarbeit in Form von Wärme aufnehmen, sie sind mithin für häufiges Anlassen nicht geeignet (höchste Öltemperatur 80° C). Bei Anlassern für häufiges Anlassen und bei Anlassern, die zwecks Regulierung der Drehzahl des Motors dauernd auf Zwischenstufen stehen bleiben (Regulieranlasser) kommt Luftkühlung des Widerstandsmaterials in Frage. Anlasser für häufige Betätigung werden zweckmäßig als Schaltwalzen (Fig. 135) ausgeführt (Kranbetrieb, Fahrshalter, „Kontroller“

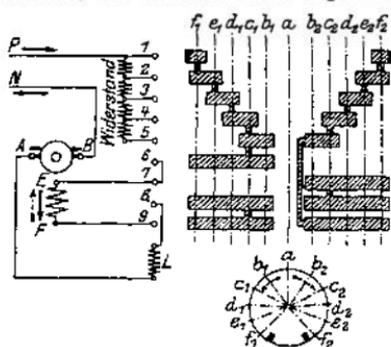


Fig. 135.

Bei Anlassern für häufiges Anlassen und bei Anlassern, die zwecks Regulierung der Drehzahl des Motors dauernd auf Zwischenstufen stehen bleiben (Regulieranlasser) kommt Luftkühlung des Widerstandsmaterials in Frage. Anlasser für häufige Betätigung werden zweckmäßig als Schaltwalzen (Fig. 135) ausgeführt (Kranbetrieb, Fahrshalter, „Kontroller“

für Bahnen). Zulässiger Anlaufstrom siehe „Bedingungen für den Anschluß von Motoren an öffentliche Elektrizitätswerke“.

Regelung der Drehzahl kann erfolgen:

1. Durch Feldänderung. Diese Regelung ist verlustlos. Tourenerhöhung bei Nebenschlußmotoren erhält man durch Vorschalten von Widerstand vor die Erregerwicklung (Nebenschlußregulator). Die Widerstände dürfen nicht ausschaltbar sein. Motoren ohne Wendepole können mittels Nebenschlußregulator bis ca. 20% in der Drehzahl reguliert werden. Bei weitergehender Regulierung (bis 1:4) müssen mit Rücksicht auf die Kommutierung Wendepole angewandt werden. Reguliermotoren werden schwerer und teurer als normale (Motor nimmt zur Erzeugung des Drehmomentes bei geschwächtem Feld höheren Strom auf, muß also reichlicher gebaut werden). Bei Hauptstrommotoren kann man eine Erhöhung der Drehzahl durch Parallelschalten von Widerstand zur Feldwicklung erreichen. Widerstand parallel zum Anker des Hauptstrommotors erzielt Feldverstärkung, also Tourenverminderung.

2. Durch Vorschalten von Widerstand vor den Anker (Regulieranlasser Fig. 133). Diese Regulierung ist nicht verlustlos. Ein Teil der Klemmenspannung wird vor dem Anker im Widerstand abgedrosselt. Die Drehzahl wird,

$$n = \frac{P - I_a (R_{\text{anl}} + R_{\text{Anker}})}{c \cdot \Phi}$$

Die Regulierung wird unwirksam, wenn das Drehmoment gering, mithin der Ankerstrom I_a gering wird.

3. Durch Anwendung verschiedener Netzspannungen für den Anker. In Mehrleiternetzen legt man den Anker an die Teilspannungen, während das Feld des Motors fest an einer Spannung liegen bleibt.

Crocker Wheeler Co. verwendet ein Mehrleitersystem mit den Spannungen 40, 120 und 80 Volt. Dies ermöglicht eine Tourenregelung in 6 Stufen im Verhältnis 1:6 durch Anlegen der Spannungen 40, 80, 120, 160, 200 und 240 Volt an den Anker.

4. Durch Anwendung der Schaltung nach Ward Leonard (Fig. 110, S. 1123). Der konstant und fremderregte Motor erhält seine Ankerspannung von einer auf beliebige Weise angetriebenen Dynamomaschine (Anlaßmaschine), deren Erregung geändert wird. Durch Betätigung eines Steuerapparates kann die Erregung der Anlaßmaschine zwischen Null und einem positiven oder negativen Maximalwert beliebig eingestellt werden. Die Dynamo kann also je nach Stellung des Steuerhebels Ankerspannungen zwischen Null und einem positiven oder negativen Maximalwert erhalten. Der Anker der Dynamo ist direkt auf den Anker des Motors geschaltet. Der Motor nimmt der Ankerspannung entsprechende Drehzahlen und der Polarität entsprechende Drehrichtung an. Die Regulierung ist außerordentlich fein und verlustlos. Da der Motor fremderregt ist, und die Dynamo so gewählt wird, daß sie den vollen Motorstrom liefern kann, kann der Motor selbst bei kleinster Drehzahl (Ankerspannung fast Null) das volle Drehmoment entwickeln (Anwendung bei Förderanlagen, Kranen). Der Motor zieht mit vollem Drehmoment an, sobald die Ankerspannung den Spannungsverlust im Motoranker übersteigt.

5. Durch Änderung des Luftspaltes des Motors mittels beweglicher Pole. Kommt auf Feldänderung heraus, da durch Veränderung des Luftspaltes der magnetische Widerstand im Motor geändert wird (wenig angewandt).

Die sog. „Zentratorkupplung“ setzt die hohe Drehzahl eines Motors mit Hilfe einer eingebauten Friktionskupplung um ein Vielfaches herab. Kommt ebenso wie die mit dem Motor direkt verbundenen Zahnradvorgelege nur für kleinere Leistungen in Frage.

Reversieren der Motoren. Da die Richtung der Bewegung eines stromdurchflossenen Leiters im Feld abhängig ist von der Richtung des magnetischen Feldes und von der Richtung des Stromes, muß zum Reversieren eines Motors stets eine Schaltungsänderung vorgenommen werden. Eine Umkehr des dem

Motor zugeführten Gesamtstromes (Vertauschen der Klemmen P und N in Fig. 128 u. 130) ist auf die Drehrichtung ohne Einfluß. Es kann der Strom entweder im Anker oder in der Erregerwicklung umgekehrt werden. Zu beachten

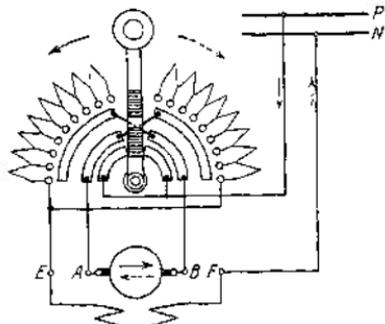


Fig. 136.

ist, daß bei Wendepolmotoren mit dem Anker auch die Wendepole und bei Kompoundmotoren mit der Erregung auch die Hauptstromwicklung umgeschaltet werden müssen. Bei öfterem Reversieren wendet man meist Schaltwalzen (Fig. 125) oder für kleinere Leistung auch Umkehranlasser (Fig. 136) an. Für sehr große Leistungen (Walzenzugsmotoren, Fördermotoren) wird Leonardschaltung benutzt.

Umkehrung der Motorwirkung in Generatorwirkung (Bremsen). Alle Motoren sind umkehrbar, d. h. sie können beim Bremsen elektrische Energie zurückgeben, also

als Generator laufen. Beim Reihenschlußmotor tritt Generatorwirkung ein, wenn er, vom Netz abgeschaltet, in entgegengesetzter Drehrichtung angetrieben wird (Senkbremsen bei Kranen). Kann die Drehrichtung nicht geändert werden, z. B. bei Bahnmotoren, so muß eine Umschaltung der Erregung oder des Ankers vorgenommen werden, weil sonst der Motor seinen Magnetismus verlieren würde. Die vom Reihenschlußmotor beim Bremsen zurückgewonnene, elektrische Energie wird meist in Widerständen vernichtet. Der Nebenschlußmotor braucht zum Bremsen nicht umgeschaltet zu werden. Er brems sofort, wenn er vom Netz abgeschaltet und auf Widerstände geschaltet wird. Auch die Drehrichtung braucht nicht geändert zu werden. Ist ein Nebenschlußmotor an ein Netz geschaltet und wird er durch fremde Kraftquelle so schnell angetrieben, daß die Gegen-EMK des Ankers E gleich der Netzspannung P wird, so nimmt er keinen Strom aus dem Netz auf, gibt auch keinen Strom an das Netz zurück (kritische Drehzahl des Nebenschlußmotors). Wird er so schnell angetrieben, daß $E > P$ wird, so läuft er als Generator.

Ausführung der Motoren. Im allgemeinen unterscheiden sich Motoren in ihrer Ausführung von Generatoren nicht. Größere Motoren sind meist dieselben Maschinen wie Generatoren. Für kleinere und mittlere Motoren hat man Ausführungen, die sich dem Betriebe, in dem sie benutzt werden, anpassen. Offene und geschlossene (gekapselte) Motoren. Da durch die Kapslung der Motoren die Ventilation verhindert ist, müssen solche Motoren in ihrer Leistung im Verhältnis zu ihrem Gewicht heruntergesetzt werden, oder es muß ihre Betriebszeit begrenzt werden. (Intermittierender Betrieb, Stundenleistung, Kranleistung.) Vollständige Kapslung kommt für Motoren in Frage, die in feuchten Räumen oder in solchen mit explosiblen Gasen oder Staub betrieben werden. („Schlagwettersicher“ gekapselte Motoren.) Kleinere Motoren werden oft mit drehbaren Lagerschildern ausgeführt, damit man sie nach Belieben auf dem Boden oder an der Decke montieren kann. „Flansch“-Motoren zum direkten Zusammenbau mit Pumpen, Laufkatzen usw. Im allgemeinen ist man bestrebt, die Drehzahl der Motoren möglichst hoch zu nehmen, da die Motoren leichter und billiger werden.

Man führt z. B. aus

	1 PS-Motoren für Drehzahlen zwischen 1700 und 1000 pro Min.
5	1300 700
10	1700 700
50	1300 400
100	100 500

Abgesehen von den normalen, schnellaufenden Motoren werden für Spezialfälle auch langsam laufende gebaut, z. B. für Förderzwecke solche mit nur 50 Umdrehungen pro Min.

2. Synchronmotoren.

Synchronmotoren unterscheiden sich von Wechselstrom-Generatoren bezüglich ihres Aufbaues in keiner Weise. Legt man an den Anker einer erregten Wechselstromdynamo eine Wechselspannung, so würde, abgesehen davon, daß

der Anker einen unzulässig hohen Strom aufnimmt, eine Rotation des Polrades nicht eintreten, da die Ankerleiter unter den einzelnen Polen, der Frequenz entsprechend, Ströme mit positiver und negativer Richtung führen, ein Drehmoment in einer Richtung also nicht auftreten kann. Treibt man jedoch den Generator mit einer Geschwindigkeit an, bei der gleiche Pole stets wieder unter die Ankerleiter kommen, wenn sie dieselben Momentanwerte der Ströme bei der gleichen Stromrichtung führen, so läuft der Generator als Motor weiter. Er läuft synchron und verträgt sehr große Überlastung. Synchronmotoren müssen bei der Inbetriebsetzung in „Tritt“ gebracht werden. Synchronische Geschwindigkeit $n = \frac{p \cdot 60}{p}$.

Weicht der Motor von der synchronen Geschwindigkeit ab, so „fällt er aus dem Tritt“ und bleibt stehen. Ist die Frequenz des Netzes konstant, so ist die Drehzahl des Synchronmotors, solange er überhaupt läuft, unbedingt konstant. Die Inbetriebsetzung der Synchronmotoren ist schwierig. Sie müssen erst auf Synchronismus gebracht werden (Anwurfsmotoren, Anlassen der Synchronmotoren von der Gleichstromseite aus, wenn der Motor im Betrieb eine Gleichstromdynamo antreibt, die ihrerseits auf Akkumulatoren arbeitet). Die Zuschaltung der Synchronmotoren auf das Netz muß genau wie bei den Generatoren erfolgen (Näheres Parallelschalten von Generatoren, S. 1461). Ohne Belastung und unter Aufwand sehr starker Ströme kann man Synchronmotoren für Mehrphasenstrom anlassen, wenn man sie bei ausgeschalteter Erregung oder besser sehr stark geschwächter Erregung auf das Netz schaltet (Vorsicht, lebensgefährliche Spannung an der Erregung). Die Synchronmotoren laufen dann als Induktionsmotoren an. Haben die Motoren Dämpferwicklung auf den Polen, so ist das Anlassen nach dieser Methode weniger schwierig. Einphasensynchronmotoren können in beliebiger Richtung laufen. Motoren für Mehrphasenstrom haben nur einen Drehsinn, nämlich den des Drehfeldes. Zur Änderung des Drehsinnes müssen hier zwei Zuleitungen vertauscht werden.

Da bei Motoren immer die Gegen-EMK E von der Klemmenspannung P wenig verschieden ist, und $E = c \Phi$, muß bei konstanter Klemmenspannung, auch wenn der Erregerstrom in weiten Grenzen verändert wird, der Fluß konstant bleiben. Ein an ein Netz geschalteter Synchronmotor nimmt bei Schwächung des Erregerstromes nachteilenden, bei Verstärkung des Erregerstromes voreilenden Strom aus dem Netze auf, weil beim Motor umgekehrt wie bei der Dynamo nacheilender Strom feldschwächend und voreilender Strom feldverstärkend und voreilender Strom feldschwächend wirkt (siehe S. 1429). V -Kurven (Fig. 137) Anwendung der Synchronmotoren als „Phasenregler“.

Anwendung finden Synchronmotoren für große Leistungen bei Motorgeneratoren, Maschinensätze, durch welche Umformung des Stromes vorgenommen wird. Der Betrieb der Synchronmotoren erfordert geschultes Personal. Kleine und kleinste Synchronmotoren finden nur dort Anwendung, wo unbedingt synchroner Lauf zweier Wellen erforderlich ist.

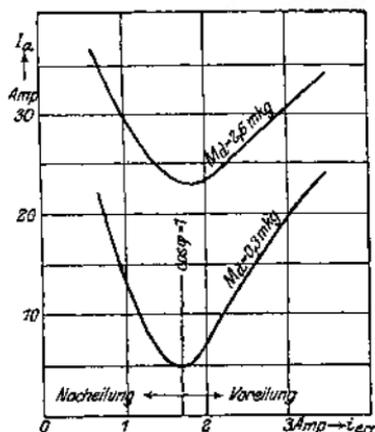


Fig. 137.

3. Asynchrone Motoren.

a) Induktionsmotoren.

Speist man eine Mehrphasenwicklung einer Maschine mit Mehrphasenstrom (z. B. eine dreiphasige Wicklung [Fig. 124a] mit Drehstrom), so setzen sich die Wechselfelder, die die einzelnen Phasenwicklungen durchsetzen, zu einem rotieren-

den Felde von konstanter Größe, dem Drehfelde, zusammen. Das Drehfeld rotiert synchron ($n = \frac{p \cdot 60}{p}$). Bringt man in ein solches Drehfeld einen um eine Achse drehbaren Anker, der eine gleichmäßig verteilte, geschlossene Wicklung trägt, so werden die Induktionslinien des Drehfeldes die einzelnen Leiter der Ankerwicklung schneiden und in ihnen Spannungen induzieren, die Ströme zur Folge haben. Diese Ströme bilden zusammen mit dem sie erzeugenden Drehfeld ein Drehmoment, welches den Anker in der Richtung des Drehfeldes in Bewegung setzt. Der Anker beschleunigt sich und strebt danach, die Geschwindigkeit des Drehfeldes zu erreichen. Da jedoch bei synchronem Lauf des Ankers ein Schneiden der Leiter durch das Drehfeld und mithin eine Induktion der Leiter nicht mehr stattfinden würde, muß der Anker immer in seiner Tourenzahl unter der des Drehfeldes bleiben, er muß asynchron laufen, schlüpfen. Die Schlüpfung stellt die Differenz der synchronen Drehzahl des Drehfeldes und der Drehzahl des Ankers dar und wird in Prozenten der synchronen Drehzahl ausgedrückt (Stillstand des Ankers bedeutet 100% Schlupf). Im normalen Betrieb bei normaler Belastung beträgt die Schlüpfung 4 bis 5%.

Die an dem Drehmoment eines Induktionsmotors beteiligten Ströme werden also dem Motor selbst nicht aus dem Netze zugeführt, sondern durch das Drehfeld im Motor induziert. Meist wird das Drehfeld im stillstehenden Teil des Motors, dem Ständer, Stator oder Primäranker erzeugt. Der rotierende Teil, der meist der induzierte ist, wird mit Läufer, Rotor oder Sekundäranker bezeichnet. Der gebräuchlichste Induktionsmotor ist der Drehstrommotor.

Der Primäranker der asynchronen Motoren unterscheidet sich im Aufbau von dem Anker der Synchronmaschinen nicht. Die Wicklung ist ebenso wie bei diesen in Nuten gleichmäßig über den Anker verteilt, der aus Blechen (mit Papierisolation) zusammengesetzt ist (Fig. 138). Der Rotor stellt eine ebenfalls aus Blechen zusammengesetzte, zylindrische Trommel dar und trägt, ebenfalls in Nuten untergebracht, eine Kurzschlußwicklung oder eine Mehrphasenwicklung, deren Enden nach Schleifringen abgeführt sind und mittels Bürsten über Widerstände (Regulierwiderstände, Anlasser) verbunden werden können.

Das Anlassen des Induktionsmotors. Von den im Primäranker erzeugten Induktionslinien kommen nicht alle für die Induktionswirkung im Sekundäranker in Frage. Ein Teil der Linien wird den meist sehr kleinen Luftspalt zwischen Stator und Rotor nicht durchsetzen und sich bereits über die Zahnkronen des Primärankers schließen. Ist der Sekundärkreis geschlossen, daß Ströme in der Wicklung entstehen können, so wird durch diese ein Sekundärfeld erzeugt werden, welches die vom Primäranker ausgehenden Linien von der Sekundärwicklung zum Teil abweist, so daß sich diese über die Zahnkronen des Sekundärankers schließen. Ist der Schlupf des Motors groß, so werden die Ströme im Sekundäranker so stark, daß die Abweisung ganz erheblich wird. Es tritt nur ein Bruchteil der Linien durch die kurzgeschlossene Ankerwicklung, so daß sich trotz des starken Sekundärstromes das erforderliche Drehmoment aus Mangel an Feld nicht ausbilden kann. Diese Erscheinung tritt am stärksten auf, wenn der sekundär kurzgeschlossene Motor stillsteht. Es ist deshalb in der Regel erforderlich, beim Anlassen des Motors Widerstand in den Sekundärkreis zur Niederhaltung des Sekundärstromes zu schalten. Der Anlasser wird an die Schleifringe angeschlossen. (Fig. 139 zeigt die Schaltung des Anlassers [AW], und zwar ist der Anlasser kurzgeschlossen, also in der dem normalen Betrieb entsprechenden Kontaktstellung gezeichnet.) Mit zunehmender Geschwindigkeit des Rotors, also mit abnehmendem Schlupf, kann man beim Anlassen den Widerstand im Rotorkreise allmählich verringern, zuletzt den Anlasser kurzschließen. Da bei kleinstem Rotorwiderstand der Schlupf am kleinsten wird, schließt man zuweilen bei Motoren, die in der Tourenzahl nicht reguliert werden sollen, nach der Bedienung des Anlassers auch die Schleifringe kurz und hebt die Bürsten von den Schleifringen ab (Kurzschluß- und Bürstenabhebevorrichtung).

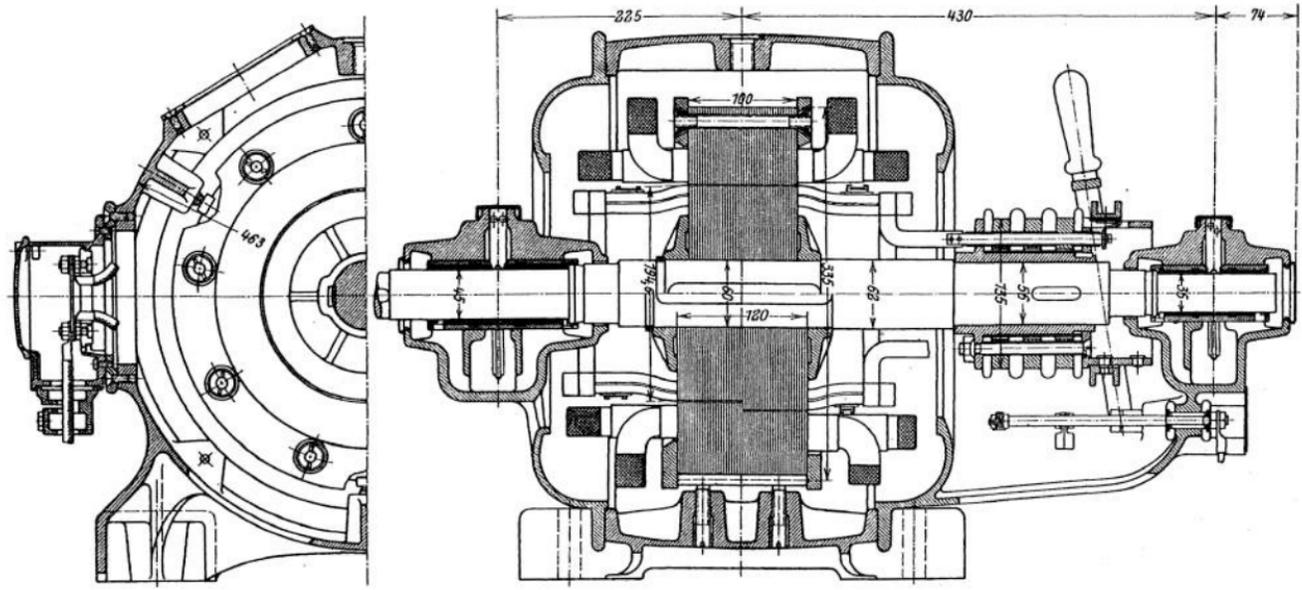


Fig. 138. Asynchr. Drehstrommotor ($\Omega = 13,6$ PS, $n = 1000$ pro Min., $\nu = 50$ pro sek. oder $\Omega = 17,0$ PS, $n = 1500$ pro Min., $\nu = 50$ pro sek.

Tourenregulierung. Vergrößert man den Widerstand im Sekundärkreis, so muß der Motor mehr schlüpfen, wenn der Strom wieder seinen alten, dem Drehmoment entsprechenden Wert erhalten soll. Die Tourenzahl des Induktionsmotors kann also durch Widerstand im Sekundärkreise reguliert werden. In Fig. 140 sind über der Drehzahl des Motors in Prozent der synchronen Drehzahl die Drehmomente bei drei verschiedenen Widerständen des Rotorstromkreises

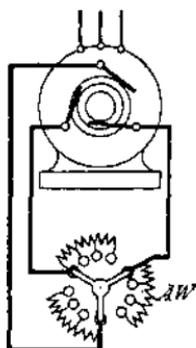


Fig. 139.

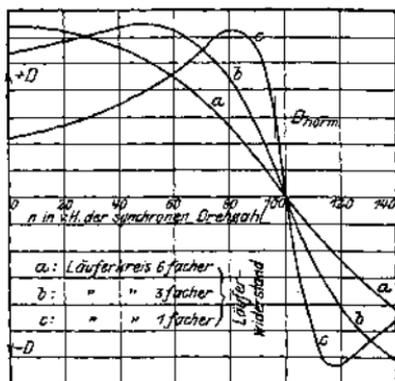


Fig. 140.

(Rotorwiderstand + Anlasserwiderstand) aufgetragen. Bei Kurve *c* ist der Anlasserwiderstand = Null. Der Motor entwickelt bei 0% Drehzahl (entsprechend Schlupf 100%) ein Drehmoment, das unter dem normalen liegt. Er würde also unter Last nicht anlaufen. Bei ungefähr 33% der synchronen Drehzahl entwickelt er das höchste Drehmoment. Bei Synchronismus ist sein Drehmoment = Null. Mit wachsendem Widerstand im sekundären Kreis (Kurven *a* und *b*) verschiebt sich das maximale Drehmoment, es wird bei größeren Schlüpfungen erreicht. Man wählt die Widerstände im Anlasser so, daß der Motor bei Stillstand das größte Drehmoment entwickelt. Die Widerstände des Anlassers werden nach einer geometrischen Reihe abgestuft.

Es sei: Φ_R = nützlicher Fluß im Rotor, I_R = Stromstärke im Rotorkreis, E_R = Rotorspannung, erzeugt durch Schneiden der Leiter durch Φ_R , σ = Schlupf = synchrone Drehzahl — Drehzahl des Rotors = $n_1 - n_2$. Man kann setzen: Drehmoment $M_d = 3 \cdot c_1 \cdot J_R \cdot \Phi_R$ und $E_R = c_2 \cdot \sigma \cdot \Phi_R$. Aus diesen Formeln folgt:

$$M_d \cdot \sigma = c \cdot 3 \cdot I_R^2 \cdot r_R,$$

worin r_R der ohmische Widerstand des ganzen Rotorstromkreises (einschl. Anlasser) bedeutet.

Die Stromwärme im Rotorstromkreise ist also dem Schlupfe und dem Drehmoment direkt proportional.

Drückt man die Schlüpfung σ in Prozenten von der Rotordrehzahl n_2 aus ($\sigma = n_2 \cdot \frac{s'}{100}$), so kann man schreiben:

$$M_d \cdot n_2 \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{s'}{100} = 3 \cdot I_R^2 r_R = M_d n_2 \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{\sigma}{n_2} \quad \text{in Worten:}$$

Die vom Rotor abgegebene, mechanische Leistung $M_d \cdot n_2$ verhält sich zur Stromwärme im Rotorkreis, wie die Drehzahl n_2 des Rotors zum Schlupf. Die gesamte, vom Primäranker auf den Sekundäranker übertragene Leistung setzt sich zum Teil in mechanische Leistung, zum Teil in Stromwärme um. Es verhält sich die übertragene Leistung zur Rotorstromwärme,

Klemmenspannung und somit der magnetische Fluß herabgesetzt wird, laufen die Motoren noch schlechter an als Motoren mit Kurzschlußanker, wenn sie direkt an das Netz gelegt werden. Motoren mit Kurzschlußanker höchstens bis 5 PS. Anlauf muß ohne Last erfolgen. An Stelle der Widerstände im Primärkreis kann man auch Transformatoren (meist Spartransformatoren) anwenden, um die Spannung am Motor beim Einschalten zu erniedrigen (Transformatoren üblich bei Abteufpumpenmotoren). Kleine Kurzschlußmotoren für Drehstrom, bei denen Anfänge und Enden der drei Phasen des Primärankers zugänglich sind, werden mit Stern-Dreieckschalter angelassen. Der Motor, der im normalen Betrieb in Dreieckschaltung läuft, wird in Sternschaltung angelassen.

Jeder Zweig des Primärankers erhält also dann beim Anlassen nur das $1 : \sqrt{3}$ fache der Netzspannung, so daß der Stromstoß beim Einschalten gemäßigt ist. Gegen-schaltung nach Görges wird von den Siemens-Schuckert-Werken ausgeführt. Der rotierende Sekundäranker erhält zwei Drehstromwicklungen in Sternschaltung, deren Windungszahlen verschieden, und deren Anfänge und Enden je zusammengelegt sind. Wird der Motor angelassen, so werden in jeder Wicklung ihrer Windungszahl entsprechende EMKe induziert. Die Ströme in den Rotor-zweigen werden durch die Differenz der EMKe getrieben, das Rotorfeld wird, da die Ströme in den einzelnen zusammengehörigen Zweigen entgegengesetzt fließen, außerordentlich schwach. Der Motor läuft mit kräftigem Moment an. Ist eine gewisse Drehzahl erreicht, so wird der ganze Rotor mit Hilfe eines Zentrifugalkurzschließers kurzgeschlossen, so daß der Motor als reiner Kurzschlußmotor mit sehr geringem Schlupf weiterläuft.

Will man bei größeren Motoren den Schleifringanker umgehen, so muß man den Motor mit dem Generator zusammen anlassen. Das Verfahren ist nur möglich, wenn an dem Generator keine weiteren Stromverbraucher angeschlossen sind, und der Generator vom ersten Augenblick des Anfahrens an seine volle Erregung besitzt. Fremderregung oder gesondert angetriebene Erregermaschine. Der Motor fährt mit vollem Felde an. Da die Frequenz beim Anlassen gering ist, bleiben auch die Ströme im Sekundäranker in normalen Grenzen, der Motor fährt mit vollem Drehmoment zusammen mit dem Generator hoch (Anwendung zuweilen bei Wasserhaltungsmaschinen).

Umsteuern der Induktionsmotoren erfolgt bei Drehstrom durch Vertauschen zweier Zuleitungen, bei Zweiphasenstrom durch Vertauschen der Anschlüsse eines Zweiges.

Weitere Mittel zur Tourenregulierung. Außer der Regulierung durch Widerstand im Sekundärkreis (künstlicher Schlupf, s. S. 1438) kann Änderung der Polzahl der Motoren angewandt werden. Polumschaltbare Motoren. Man führt den Primäranker mit mehreren, unterteilbaren Wicklungen aus, mit denen man verschiedene Polzahlen herstellen kann. Der Rotor erhält Kurzschlußwicklung. Motoren sind teuer, ihre Schaltung ist unübersichtlich (Anwendung bei Bahnmotoren, Brown, Boveri & Co.). Eine Verringerung der Drehzahl kann man (nach Görges) ferner durch Kaskadenschaltung zweier Mehrphasenmotoren erhalten. Ein mit seinem Primäranker am Netz liegender Motor (Vordermotor) ist mit dem Sekundäranker auf den Stator oder Rotor eines Hintermotors geschaltet. Der Sekundäranker des Hintermotors erhält einen Anlasser. Beide Motoren sind starr gekuppelt. Läßt man den Vordermotor 50% schlüpfen, so wird die eine Hälfte der auf den Sekundäranker des Vordermotors übertragenen Leistung in mechanische Leistung, die andere in elektrische Leistung übersetzt. Diese wird auf den Hintermotor geschaltet, der (wenn er die gleiche Polzahl wie der Vordermotor hat) ebenfalls mit halber Drehzahl läuft, da seine Frequenz dem Schlupf des Motors I entsprechend gleich der halben Netzfrequenz ist. Der Hintermotor erhält zum Anlassen einen Widerstand im Sekundäranker.

Nach Danielson erhält man 4 Geschwindigkeitsstufen, wenn man den beiden Motoren verschiedene Polzahlen gibt und die hierbei möglichen vier Schaltungs-

arten anwendet. Die Tourenregulierung mittels Kaskadenschaltung ist ohne große Verluste. Nachteil: Schlechter Leistungsfaktor, da magnetische Verketzung durch zwei Luftspalte erfolgt.

Induktionsmotor als Generator. Der Induktionsmotor wird Generator, wenn er übersynchron angetrieben wird. Der Motor muß dabei am Netz, das die Frequenz vorschreibt und den Magnetisierungsstrom liefert, angeschlossen sein. Die Drehrichtung beim Übergang des Motors zum Generator wird also nicht geändert. Im Heylandschen Diagramm (Fig. 141) gilt die untere Kreishälfte. Nachteil: Große Leerkomponente des Erregerstromes. Anwendung: Fördermotoren (Einhängen von Lasten), Senkbremse bei Drehstromkränen. Fig. 142 zeigt die Betriebskurven eines 4-poligen Drehstrommotors von 7 PS für 210 Volt und 50 Perioden/sek.

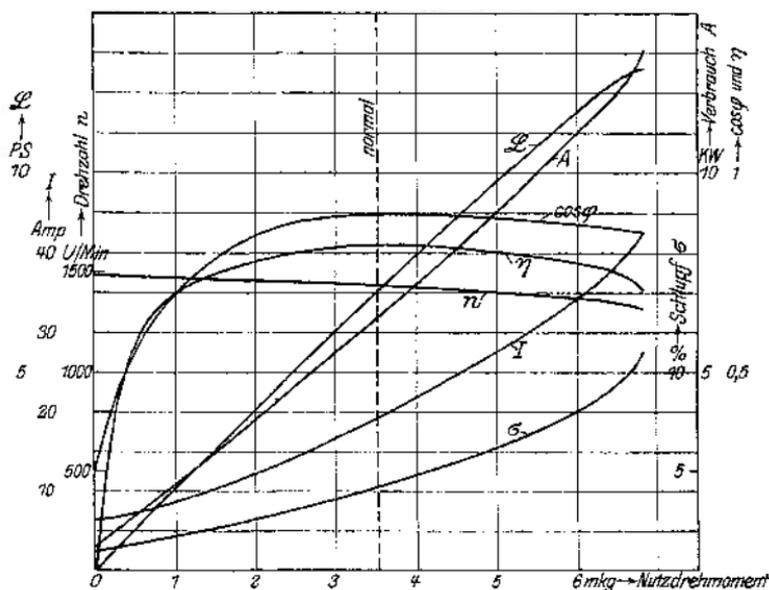


Fig. 142.

Einphaseninduktionsmotoren. Unterbricht man an einem normal laufenden Drehstrommotor eine Zuleitung, so läuft er als Einphasenmotor weiter, verliert dabei aber fast 40% seiner Belastbarkeit. Tatsächlich werden die Wicklungen der Primäranker der Einphaseninduktionsmotoren so ausgeführt, daß man zwei Zweige einer Drehstromwicklung in Reihe schaltet oder einen Zweig einer zweiphasigen Wicklung benutzt. Der Einphasenmotor hat mithin bei Stillstand kein Drehfeld, er läuft nicht allein ohne besonderes Hilfsfeld an. Der Sekundäranker ist ebenso wie der eines normalen Mehrphasenmotors ausgebildet (Kurzschluß oder Schleifringanker). Ist der Einphaseninduktionsmotor im Gang, so bildet sich aus dem Felde des Rotors (Querfeld) und dem Felde des Stators ein Drehfeld, so daß ein Drehmoment ausgeübt wird, und zwar in der Richtung, in der er in Gang gesetzt wurde. Da das Feld des Sekundärankers an der Bildung des Drehfeldes direkt beteiligt ist, ist es nicht zulässig, die Ströme des Sekundärankers durch Widerstände an den Schleifringen zu schwächen, der Motor würde sein Drehmoment verlieren. Ein Einphasenmotor leistet etwa nur 70% von dem eines gleich schweren Drehstrommotors (Theorie, siehe: Görges, Elektrotechn. Zeitschr. 1895, 1903 und 1907). Um den Motor aus dem Stillstand in Gang zu

bringen, erzeugt man in einer gegen die Hauptwicklung räumlich verschobenen Hilfswicklung (Kunstphase) ein gegen das Hauptfeld in der Phase verschobenes Hilfsfeld. Die Hilfswicklung wird von demselben Netz wie das Hauptfeld über eine Drosselspule oder einen Kondensator gespeist. Das entstehende Drehfeld ist stark elliptisch, Drehmoment mithin schwach; Anlaufstrom stark. Ist der Motor im Gang und sind die Wicklungen des Sekundärankers kurzgeschlossen, so muß die Hilfsphase abgeschaltet werden. Betriebskurven wie bei den Mehrphasenmotoren. Wirkungsgrad schlechter.

Mechanische Ausführung der Induktionsmotoren. Für die mechanische Ausführung der Induktionsmotoren gilt das gleiche wie das auf S. 1434 über die Gleichstrommotoren gesagt. Je nach Verwendungszweck offene und gekapselte Motoren. Vollständig geschlossene Motoren erhalten zuweilen Rohranschluß, um Luft zur Kühlung zu- und abführen zu können. Wenn Motoren öfter ihren Standort wechseln oder wo die Bedienung nicht zuverlässig ist, wendet man vorteilhaft Motoren mit angebautem Anlasser an. Hierbei wird durch Betätigung eines Handrades das Anschalten, Anlassen und Abstellen des Motors in richtiger Folge vorgenommen. Vertikale Motoren mit Kurzschlußanker kommen zum Antrieb von Abteufpumpen in Anwendung. Leistungen der Motoren von 0,2 bis mehrere Tausend Pferdestärken. Kleine Typen bis etwa 10 PS können bis 500 Volt gebaut werden, bei etwa 45 PS liegt die Spannungsgrenze bei 3000 Volt, bei den größten Typen bei 10 000 Volt. Meist wählt man die Drehzahl der Motoren hoch (für eine Frequenz = 50/sek z. B. 3000, 1500, 1000, 750 usw.), da dann die Motoren billiger werden. Langsamlaufende Motoren für Fördermaschinen, Walzenzüge und Kolbenpumpen.

Der Wirkungsgrad der Induktionsmotoren schwankt je nach Leistung und Drehzahl zwischen 70 und 95% (z. B. 5 PS-Motor bei 1500 Umdrehungen/min und 500 Volt, $\eta = 85\%$ bei Schleifringanker, 87% bei Kurzschlußanker). Der Leistungsfaktor beträgt bei mittleren Motoren etwa 0,85 bis 0,9. Er ist von der Spannung und Drehzahl des Motors abhängig.

Die Stromstärke der Induktionsmotoren berechnet sich nach folgenden Formeln:

$$\text{bei Drehstrom} \quad I = \frac{PS \cdot 736}{P \cdot \sqrt{3} \cdot \cos \varphi \cdot \eta} ; \quad P = \text{Klemmenspannung,}$$

$$\text{bei Zweiphasenstrom} \quad I = \frac{PS \cdot 736}{P \cdot 2 \cdot \cos \varphi \cdot \eta} ; \quad P = \text{unverkettete Betriebsspannung,}$$

$$\text{bei Einphasenstrom} \quad I = \frac{PS \cdot 736}{P \cdot \cos \varphi \cdot \eta} ; \quad P = \text{Klemmenspannung.}$$

b) Kommutator-Motoren.

Werden für Einphasenstrom und Drehstrom ausgeführt. (Letztere zuerst von Görges angegeben, Elektrotechn. Zeitschr. 1891.) Gestatten weitgehende Tourenregulierung. Regulierung ist wirtschaftlich. Der rotierende Teil (Anker) wird wie bei Gleichstrommotoren ausgeführt und besitzt Kommutator. Das Magnetgestell (Stator) hat selten ausgeprägte Pole, es stellt meist einen ganz aus Blechen zusammengesetzten Ring dar, der in Nuten die gleichmäßig über den Umfang verteilte Wicklung (ein- oder mehrphasig) trägt. Kommutierung viel schwieriger als bei Gleichstrom, daher meist Kompensationswicklung und Hilfspole (Wendezähne) angewandt (Fig. 113). Motoren haben je nach Schaltung Hauptstrom- oder Nebenschlußmotor-Charakteristik.

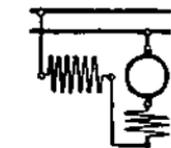


Fig. 143. Schaltung des Reihenschlußmotors mit Kompensationswicklung.

1. Reihenschlußmotor für Wechselstrom (Fig. 143). Er entwickelt ein Drehmoment in einer Richtung, da Anker und Feldwicklung in Serie geschaltet sind, mithin der Strom sich in beiden zugleich umkehrt. Ebenso wie beim Gleichstrommotor ist die EMK des Ankers

(Rotationsspannung) proportional der Drehzahl und dem Flusse. Da der Fluß pulsiert, wechselt auch die EMK des Ankers, und zwar mit gleicher Frequenz wie der Motorstrom und die Netzspannung. Da der Ankerstrom zugleich das Feld erzeugt, und die EMK des Ankers (E_a) dieselbe Phase wie das Feld besitzt, hat sie auch die Phase des Motorstromes I (Fig. 144). Die Klemmenspannung P am Motor setzt sich zusammen aus der Gegen-EMK E_a des Ankers (in Richtung des Stromes), der Gegen-EMK E_m

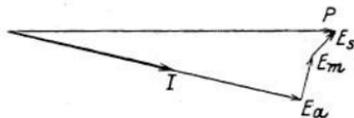


Fig. 144.

an den Klemmen der Feldwicklung (\perp zum Strom) und einer kleinen Spannung E_s , die erforderlich ist, um die Ohmschen Widerstände und induktiven Streuwiderstände zu überwinden. Damit der Leistungsfaktor des Motors hoch wird, muß E_a groß, E_m klein sein, d. h. viel Ankerleiter, wenig Erregerwindungen. Da hierdurch das Querfeld groß würde, wird Kompensationswicklung erforderlich. Leistungsfaktor kann bei höherer Belastung fast eins werden. Zur guten Kommutierung (funkenfreier Gang) sind Wendepole (Wendezähne) unerlässlich. Betriebseigenschaften des Wechselstromserienmotors sind die gleichen wie die des Gleichstromserienmotors. Drehzahl abhängig von der Belastung, Durchgehen bei vollständiger Entlastung. Anlauf unter starker Last gut, Bremsen durch Umschalten auf Widerstand (Selbsterregung). Reversieren durch Vertauschen der Erreger- oder Ankeranschlüsse. Die Regulierung erfolgt fast immer durch Änderung der Klemmenspannung mittels eines Transformators (Spartransformator). Verwendung als Triebmotoren auf elektrischen Lokomotiven und Motorwagen und bei Hebezeugen. Spannungsgrenze ca. 300 Volt, Frequenz meist 25 oder $16\frac{2}{3}$ pro Sekunde.

2. Repulsionsmotor (Fig. 145). Der Stator hat eine einphasige, in gleichmäßig verteilten Nuten untergebrachte Wicklung, nach Art der Wicklung eines Einphasen-Induktionsmotors. Der Läufer, ein Gleichstromanker mit Kommutator, erhält kurzgeschlossene Bürsten, die ca. 80° aus der neutralen Zone herausgedreht sind. Dem Läufer wird der Strom aus dem Netz direkt nicht zugeführt. Die Ströme werden durch das Feld des Ständers in dem Läufer induziert. Die Bürsten sind verstellbar. Stehen sie in der Achse \perp zur neutralen Zone, so hat der Motor trotz starker Läuferströme kein Drehmoment (Kurzschlußstellung). Stehen die Bürsten in der neutralen Zone, so führen die Läuferleiter keinen Strom. Das Drehmoment ist ebenfalls Null. Verdreht man die Bürsten aus einer der ausgezeichneten Stellungen, so läuft der Anker mit kräftigem Drehmoment je nach Richtung der Verdrehung in der einen oder anderen Richtung. Man kann sich das Drehmoment zustande gekommen denken als Summe zweier Drehmomente, das eine als Folge des Wechselquerflusses in Verbindung mit Läuferströmen, deren Felder in Richtung des Statorfeldes liegen, das andere als Folge des Statorfeldes in Verbindung mit Läuferströmen, die das Querfeld erzeugen. Verhalten des Repulsionsmotors wie das des Gleichstromserienmotors. Geht bei Entlastung durch, Anlaufmoment kräftig. Leistungsfaktor ist hoch. Motor kann Zentrifugalkurzschließer erhalten, der ihn nach Erlangung der vollen Drehzahl als Einphasen-Induktionsmotor weiter laufen läßt. Regulierung der Drehzahl durch Bürstenverschiebung oder durch Änderung der Klemmenspannung (Spartransformator). Anlassen und Umsteuern durch Bürstenverschieben. Déri hat den Motor verbessert, indem er pro Polpaar zwei Bürstenpaare anwendet, von denen je zwei kurzgeschlossen sind.

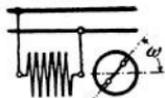


Fig. 145. Einfach-kurzschlußmotor. (Repulsionsmotor.) (Elihu Thomson.)

3. Reihenschluß-Kurzschlußmotor (kompensierter Repulsionsmotor). (Latour, Winter-Eichberg.) Der Motor hat die Schaltung des Reihenschlußmotors und besitzt auf dem Kommutator in der Achse der Statorwicklung kurzgeschlossene Bürsten (Fig. 146). Die Erregung liefert nicht die Statorwicklung,

sondern die Ankerwicklung. Die den Netzstrom zuführenden Bürsten heißen deshalb auch „Erregerbürsten“. Das Drehmoment kommt zustande durch

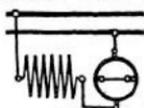


Fig. 146. Reihen-schluß-Kurzschluß-motor (Latour).

Zusammenwirken des Ankerquersfeldes (erzeugt durch die dem Anker mittels der Erregerbürsten zugeführten Netzströme) und der starken Ankerströme, die durch den Fluß der Ständerwicklung in der Ankerwicklung induziert werden und sich über die kurzgeschlossenen Bürsten schließen können. Die Ständerwicklung liefert also den Antriebsstrom. Motor hat starkes Anlaufmoment. Erregerbürsten laufen funkenfrei, Kurzschlußbürsten feuern bei Anlauf, deshalb Wendepole

oder Wendezähne in der Achse der Kurzschlußbürsten.

Nach Winter-Eichberg führt man den Erregerstrom den Erregerbürsten nicht direkt vom Netz zu, sondern schaltet einen Reguliertransformator in den Statorkreis (Fig. 147). Der Motor kann dann für höhere Spannungen (bis 800 Volt) benutzt werden.

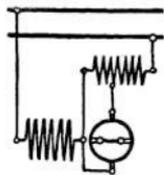


Fig. 147. Reihen-schluß-Kurzschluß-motor mit Erreger-transformator (Winter und Eichberg).

Der Leistungsfaktor des Reihenschluß-Kurzschlußmotors ist bei Synchronismus eins. Motor hat Hauptstromcharakteristik. Regelung der Drehzahl und Umkehr der Drehrichtung wie beim Serienmotor.

4. Reihenschlußmotor für Drehstrom. Der Ständer ist dem eines Drehstrominduktionsmotors gleich, der Läufer mit Kommutator hat dieselbe Konstruktion wie die Anker für Gleichstrommotoren. Schaltung nach Fig. 148. Es entstehen im Ständer und Läufer Drehfelder, deren Phase zueinander von der Bürstenstellung abhängig ist. Stehen die Bürsten so, daß sich die beiden Drehfelder decken, so hat der Motor kein Drehmoment (Nullstellung der Bürsten). Bei Verschiebung der Bürsten nach der einen oder anderen Seite aus der Nullstellung entwickelt sich ein Drehmoment, dessen Richtung vom Verschiebungssinn abhängt. Eigenschaften des Motors wie die eines Serienmotors für Gleichstrom. Die Speisung des Ankers kann auch über einen Drehstromreguliertransformator erfolgen, der mit der Ständerwicklung in Reihe geschaltet ist (Winter-Eichberg).

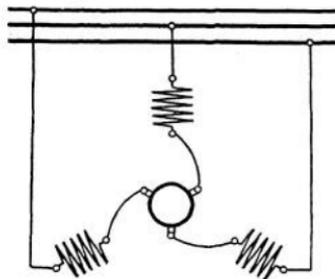


Fig. 148. Reihenschlußschaltung direkt.

5. Nebenschlußmotor für Drehstrom (Fig. 149). Man schaltet den Ständer in Stern oder Dreieck und führt den Bürsten den Drehstrom über einen Reguliertransformator zu. Bei Kurzschluß der Bürsten verhält sich der Motor wie ein Induktionsmotor. Die Geschwindigkeit des Motors läßt sich regulieren durch Änderung der Spannung an den Bürsten mit Hilfe des Reguliertransformators. Der Motor läuft mit wachsender Spannung an den

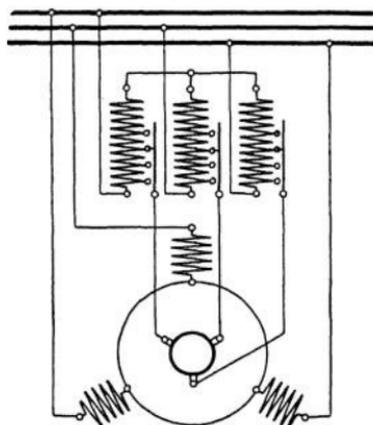


Fig. 149. Nebenschlußschaltung mit Transformator.

Bürsten langsamer, die Drehzahl bleibt nahezu konstant, solange der Reguliertransformator nicht betätigt wird. Nebenschlußcharakteristik.

V. Umformung des elektrischen Stromes.

Die Umformung eines Stromes in einen Strom von anderen Eigenschaften kann erfolgen durch: 1. Motorgenerator, eine Doppelmaschine, bestehend aus einem Motor und einem Generator, die unmittelbar miteinander gekuppelt sind; 2. Umformer, das ist eine Maschine, bei der die Umformung elektrischer Leistung in elektrische Leistung in einem Anker stattfindet; 3. durch Transformator, eine elektromagnetische Vorrichtung ohne dauernd bewegte Teile zur Umwandlung elektrischer Leistung in elektrische Leistung.

Umschaltprozesse rechnen nicht zur Umformung.

1. Motorgeneratoren

teilen die im vorhergehenden besprochenen Eigenschaften der Motoren und Generatoren. Sie gestatten eine Umwandlung eines elektrischen Stromes in einen beliebigen anderen. Der Wirkungsgrad der Gesamtanordnung ist nicht sehr hoch, da die Verluste in zwei Maschinen in Rechnung zu setzen sind. Ist der Wirkungsgrad des Motors η_m , der des Generators η_g , so ist der Wirkungsgrad des Umformers $\eta_u = \eta_m \cdot \eta_g$. Motorgeneratoren werden meist zur Umformung von Gleichstrom in Gleichstrom anderer Spannung, oder von Wechselstrom in Gleichstrom zum Zwecke der Erregung synchroner Maschinen benutzt. Sie stellen geringe Anforderungen an Bedienung beim Anlassen und im Betrieb und werden meist nur für kleine und mittlere Leistungen ausgeführt.

2. Einankerumformer

(kurz Umformer) bestehen aus einer Gleichstrommaschine, die neben dem Kommutator noch Schleifringe besitzt (Fig. 150). Führt man der Maschine über den Kommutator Gleichstrom zu, so daß sie von der Gleichstromseite aus als Motor läuft, so kann man je nach der Schaltung an den Schleifringen Wechselstrom resp. Mehrphasenstrom abnehmen. Die Periodenzahl des Wechselstromes richtet sich nach der Drehzahl des Umformers. Da bei einer Wechselstrommaschine, wenn sie gegen die Spannung phasenverschobenen Strom abgeben muß, infolge von Ankerrückwirkung Feldschwächung oder Feldverstärkung eintreten kann (s. S. 1429), wird im allgemeinen die Drehzahl des Umformers und damit die Frequenz des Wechselstromes nicht konstant sein, wenn die Belastung geändert wird. Umformer können sogar durchgehen, wenn sie sehr stark nachteiligen Strom abzugeben haben. Die Umformung von Gleichstrom in Wechselstrom oder Mehrphasenstrom empfiehlt sich mithin nicht. Umgekehrt eignet sich der Einankerumformer zur Umformung von Wechselstrom oder Mehrphasenstrom in Gleichstrom ganz besonders. Der Umformer läuft dann als Synchronmotor mit der der Frequenz und seiner Polzahl entsprechenden Drehzahl. Der Wechselstrom wird den Schleifringen zugeführt, am Kommutator wird der Gleichstrom abgenommen. Die Erregung des Umformers kann aus einem fremden Gleichstromnetz oder von der Gleichstromseite des Umformers selbst aus gedeckt werden. Die Spannung des zugeführten Wechsel- oder

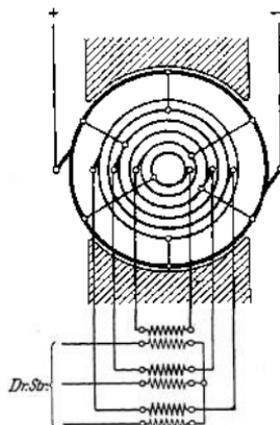


Fig. 150. Schaltung des Umformers mit Transformator.

Der Umformer läuft dann als Synchronmotor mit der der Frequenz und seiner Polzahl entsprechenden Drehzahl. Der Wechselstrom wird den Schleifringen zugeführt, am Kommutator wird der Gleichstrom abgenommen. Die Erregung des Umformers kann aus einem fremden Gleichstromnetz oder von der Gleichstromseite des Umformers selbst aus gedeckt werden. Die Spannung des zugeführten Wechsel- oder

Mehrphasenstromes steht zur Gleichstromspannung in einem ganz bestimmten festen Verhältnis. Setzt man die EMK bei Gleichstrom = 1, so beträgt die EMK des Wechselstromes: bei Einphasenstrom $= \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$, bei Drehstrom $= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = 0,612$, bei Zwei- oder Vierphasenstrom $= \frac{1}{2} = 0,500$, bei Sechsenstrom $= \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0,354$. Hierbei ist sinusförmiger Verlauf des Feldes voraus-

gesetzt. Bei Umformung von Drehstrom in Gleichstrom müßte man also z. B., um einen Gleichstrom von 750 Volt zu erhalten, einen Drehstrom von $750 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = 750 \cdot 0,612 = 458$ Volt dem Umformer zuführen. Da meist

höhere Drehstrom- (Wechselstrom-) Spannungen gegeben sind, wird eine Transformierung in ruhenden Transformatoren erforderlich.

Da der Anker des Einankerumformers Gleichstrom und Wechselstrom zu gleicher Zeit führt, so ist für die Stromwärme in der Ankerwicklung die Über-einanderlagerung der beiden Stromarten maßgebend. Die Erwärmung begrenzt die Leistung einer Maschine. Setzt man die Leistung einer Gleichstrommaschine = 100%, so dürfte dieselbe Maschine als Umformer betrieben und um dieselbe Stromwärme im Anker zu erhalten, betrieben werden mit einer Leistung von: bei Wechselstrom 85%, bei Drehstrom 134%, bei Zweiphasen- oder Vierphasenstrom 164%, bei Sechsenstrom 196%. Ein Umformer, dem Sechsenstrom zugeführt wird, kann also 96% mehr beansprucht werden als eine gleich-große Maschine, die nur mit Gleichstrom belastet wird. Da meist Drehstrom hoher Spannung in Gleichstrom mäßiger Spannung umgeformt wird, mithin ein Transformator fast immer erforderlich ist, kann man durch Auflösen des Nullpunktes der sekundären Drehstromseite des Transformators leicht sechs-phasigen Strom dem Umformer zuführen (Fig. 150), die Maschine also außer-ordentlich ausnutzen. Da der Umformer als Synchronmotor läuft, kann durch Einstellung der Erregung auch ein Leistungsfaktor = 1 erreicht werden. Der Wirkungsgrad eines Einankerumformers beträgt je nach Größe etwa 90 bis 95%. Ist ein Transformator vorhanden, so ist der Wirkungsgrad des Umformers noch mit dem des Transformators zu multiplizieren, um den Wirkungsgrad der ge-samten Umformung zu erhalten. Eine Änderung des Übersetzungsverhältnisses ist durch Änderung der Erregung des Umformers nicht möglich. Die Spannung auf der Gleichstromseite kann nur geändert werden durch Anwendung von Regu-liertransformatoren auf der Wechselstromseite oder von Zusatzmaschinen auf der Gleichstromseite. Man kann auch in die Zuführungsleitungen des Wechsel-stromes Drosselspulen einschalten und die Erregung des Umformers mittels Regulierwiderstandes oder durch eine Hauptschlußwicklung auf den Polen so stark wählen, daß der Umformer voreilenden Strom aufnimmt, hierdurch tritt eine Spannungserhöhung auf der Wechselstromseite und mithin eine solche auf der Gleichstromseite ein.

Anlassen der Einankerumformer erfolgt am besten von der Gleichstrom-seite aus oder durch Anwurfsmotor. Es gilt das auf S. 1435 über die Inbetrieb-setzung des Synchronmotors Gesagte. Neuerdings ist das Anlassen mittels Stufen-transformators („Anlassen mit $\frac{1}{3}$ Spannung“) bei Drehstromumformern beliebt. Die Umformer haben dann Dämpferwicklung auf den Polen und laufen als asynchrone Motoren an. Nachteil ist hier, daß die Polarität auf der Gleichstrom-seite unter Umständen nicht stimmt. Es wird Kommutierung der Erregung erforderlich.

Kaskadenumformer (Bragstad und la Cour) besteht aus einem nor-malen Asynchronmotor und einer Gleichstromdynamo, die beide auf derselben Welle sitzen. Die Rotorwicklung des Induktionsmotors A (Fig. 151) ist als Sechs-, Neun- oder Zwölfphasenwicklung ausgeführt und direkt auf die Anker-

wicklung der Dynamo *B* geschaltet. (In der Figur sind die Gehäuse beider Maschinen fortgelassen.) Haben *A* und *B* gleiche Polzahl, so läuft der Umformer mit halber synchroner Geschwindigkeit. Die dem Motor zugeführte Leistung wird zur Hälfte in mechanische umgesetzt und der Dynamo durch die Welle zugeführt, die andere Hälfte wird über den Rotor von *A* als elektrische Leistung von halber Frequenz des Netzstromes im Anker *B* in Gleichstrom umgeformt. Anlassen erfolgt von der Drehstromseite aus. Der Umformer wird als normaler asynchroner Motor mittels Anlasser in Betrieb gesetzt. Ist die normale Drehzahl erreicht, wird die Gleichstromdynamo voll erregt. Selbsterregung möglich. Die Spannung auf der Gleichstromseite kann $\pm 10\%$ durch Änderung der Erregung reguliert werden. Wirkungsgrad ca. 91 bis 92%. Vorteil des Kaskadenumformers ist, daß er im Gegensatz zum gewöhnlichen Einankerumformer für höhere Periodenzahlen (50 bis 60/sek) mit guter Kommutierung ausgeführt werden kann, ohne dabei zu große Dimensionen anzunehmen.

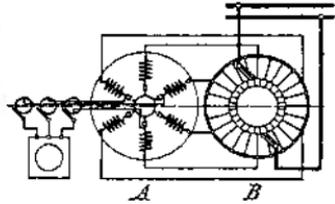


Fig. 151. Schaltung der Läufer des Kaskadenumformers.

3. Transformatoren

(Wandler) dienen zur Umwandlung von Wechselstrom (Ein- oder Mehrphasenstrom) in Wechselstrom gleicher Art, gleicher Frequenz, aber anderer Spannung. Es sind ruhende Apparate; sie bestehen aus einem aus Blechen zusammengesetzten Eisenkern, auf dem in der Regel zwei Wicklungen (oder Wicklungsgruppen), die Primär- und Sekundärwicklung, aufgebracht sind. (Primärwicklung diejenige, die die Leistung vom Netz empfängt.) Unterschieden wird auch: Hochspannungs- und Niederspannungswicklung. Jede von beiden kann Primär- oder Sekundärwicklung sein, je nachdem „herauf“ oder „herunter“ transformiert wird. Fließt in einer der Wicklungen oder in beiden Wicklungen Strom, so wird in dem Eisenkern ein Induktionsfluß entstehen. Dieser soll beide Wicklungen immer möglichst in gleicher Stärke durchsetzen, d. h. die Streuung soll gering sein. Um den Magnetisierungsstrom (Leerlaufstrom) möglichst niedrig zu erhalten, muß der den Fluß führende Eisenkern so gut als möglich magnetisch geschlossen sein, also möglichst keine Luftspalte enthalten. (Magnetischer Widerstand, s. S. 1377, gering). Mit Rücksicht auf billiges und leichtes Herstellen (leichtes Aufbringen der Spulen auf die Kerne) sind Stoßfugen (mit Papierlage) nicht zu vermeiden. Bei Präzisionstransformatoren wird zuweilen eine „Verblattung“ des Stoßes angewandt. Der Eisenkern selbst besteht zur Vermeidung von Wirbelstromverlusten (s. S. 1397) aus Blechen von 0,3 bis 0,5 mm Dicke, die durch Lack oder Papier voneinander isoliert und durch isolierte Bolzen zusammengehalten werden. Für die Bleche kommen leicht magnetisierbare Flußeisensorten, neuerdings besonders legierte Bleche mit niedriger Verlustziffer (s. S. 1397) in Frage.

Je nach Anordnung der Spulen auf dem Eisenkörper unterscheidet man Manteltransformatoren (Fig. 152) und Kerntransformatoren (Fig. 153). Bei Drehstromtransformatoren können die Spulen nach Fig. 154 auf den Kernen angeordnet werden. Zuweilen werden bei Transformierung von Drehstrom auch drei Einphasentransformatoren in

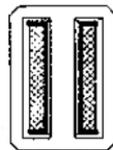


Fig. 152.

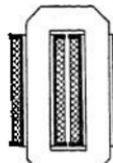


Fig. 153.



Fig. 154.

Stern- oder Dreieckschaltung angewandt. Die Anordnung der Wicklung soll derart sein, daß die Streuung möglichst gering wird. Übliche Anordnungen sind: Zylinderwicklung, bei der die Niederspannungs- und die Hochspannungsspulen konzentrisch zueinander zusammen auf den Eisenkern geschoben sind (Niederspannung meist innen), und Scheibenwicklung, bei der scheibenartige Hoch- und Niederspannungsspulen abwechselnd auf den Kern aufgeschichtet sind. Je mehr die Spulen gemischt sind, desto geringer die Streuung. Die Wicklungen sind gut gegeneinander und gegen den Kern mittels Holz, Preßspan usw. zu versteifen, um Brummen des Transformators zu verhüten. Isolation der Transformatoren muß sehr sorgfältig ausgeführt werden. Die ersten, nahe der Ausführungsklemmen liegenden Wicklungen müssen mit Rücksicht auf Überspannungen im Netz verstärkt isoliert werden.

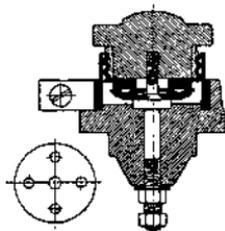


Fig. 155. Durchschlagssicherungen der S. S. W.

Man unterscheidet Transformatoren mit Trockenisolation (Preßspan, Papier, Leinenband, Baumwolle, Mikanit) und mit Ölisolation. Bei Öltransformatoren kommt als festes Isoliermittel nur Preßspan, Papier und Baumwollband in Frage. Das Öl muß wasserfrei und säurefrei sein. Neben der guten Isolation auch bessere Abkühlung der Transformatoren bei Anwendung von Öl. Für höhere Spannungen nur Öltransformatoren. Ölkästen aus Gußeisen oder Blech mit Kühlrippen. Bei großen Transformatoren auch Seitenkästen, um die Kühlung zu erhöhen. Oft auch künstliche Kühlung des Oles durch Wasser in Kühlschlangen. Oberfläche des Ölspiegels soll gering sein, damit das Öl aus der Luft nicht Wasser aufnimmt. Zuweilen Trocknung der Luft über dem Ölspiegel (Chlorkalzium). Besondere Anforderungen an Isolationsfestigkeit stellen die Ausführungsklemmen für die Hochspannung. (Näheres Elektrotechn. Zeitschr. 1940, S. 118. Ausführungsklemme der A. E. G. von Kuhlmann. Elektrische Bahnen und Betriebe 1906, S. 275. Klemme von Nagel ausgeführt von S. S. W.) Um beim Übertritt von Hochspannung in den Niederspannungskreis letzteren zu ertzen, Anwendung von Durchschlagssicherungen (Spannungssicherungen, Fig. 155).

Übersetzungsverhältnis. Durchsetzt der magnetische Fluß die primären und sekundären Windungen (N_1 und N_2) in gleicher Stärke, ist also keine Streuung vorhanden, so verhält sich, sinusförmigen Verlauf des Flusses vorausgesetzt, die primäre EMK E_1 des Transformators zur sekundären E_2 wie die primäre Windungszahl zur sekundären.

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{4,44 \cdot \nu N_1 \Phi_0 \cdot 10^{-8}}{4,44 \cdot \nu N_2 \Phi_0 \cdot 10^{-8}} = \frac{N_1}{N_2}$$

Tatsächlich ist bei einem belasteten Transformator Streuung vorhanden und zwar um so mehr, je mehr die beiden Wicklungen mit Strom belastet sind.

Leerlauf. Läuft der Transformator leer, d. h. ist die Sekundärwicklung offen, so nimmt er aus dem Netze einen Leerlaufstrom I_0 auf. Dieser ist die geometrische Summe aus dem den Fluß Φ erzeugenden Magnetisierungsstrom I_{μ} (\perp auf E_0 , konphas mit Φ) und dem Verluststrom I_h (in Richtung von E_0 , \perp auf Φ), der die Eisenverluste im Transformator deckt. Der Leerlaufstrom ist stark phasenverschoben gegen die Leerlaufspannung. Der Spannungsverlust im Transformator kann bei Leerlauf vernachlässigt werden ($P_0 = -E_0 I_0$). Die mit dem Wattmeter gemessene Leerlaufleistung $\mathcal{L}_0 = P_0 I_0 \cos \varphi_0$ stellt praktisch die Verluste im Eisen (Wirbelstrom und Hysteresis) dar. (I_0 etwa 4 bis 8% vom Normalstrom I_1 . Verlust durch Stromwärme bei Leerlauf praktisch zu vernachlässigen.)

Transformator bei Belastung. Wird der Transformator sekundär an einen Stromverbraucher angeschlossen, so wird in den Sekundärwicklungen ein

Strom I_2 fließen. Die Amperewindungen $I_2 N_2$ suchen den Induktionsfluß zu verhindern. Um den, den EMKe $E_1 = 4,44 \cdot \nu N_1 \Phi_0 \cdot 10^{-8}$ und $E_2 = 4,44 \cdot \nu N_2 \Phi_0 \cdot 10^{-8}$ entsprechenden Fluß, Φ_0 aufrecht zu erhalten, muß die Primärwicklung einen entsprechend höheren Strom I_1 dem Netze entnehmen (Fig. 156). Es muß sein $I_1 N_1 \uparrow I_2 N_2 = I_0 N_0$, d. h. die den Fluß erzeugenden Amperewindungen sind die geometrische Summe aus den primären und sekundären Amperewindungen. E_1 und E_2 stehen im Vektordiagramm senkrecht auf dem Flusse Φ_0 und eilen ihm 90° nach. Die sekundäre Klemmenspannung P_2 ist um den ohmschen Spannungsverlust $I_2 r_2$ (in Richtung I_2) und um den Spannungsverlust durch Streuung, den induktiven Spannungsverlust, $2\pi \nu L_2 I_2$ (senkrecht zu I_2) kleiner ($r_2 =$ ohmscher Widerstand, $L_2 =$ Selbstinduktionskoeffizient der Sekundärwicklung). Der Winkel φ_2 zwischen P_2 und I_2 wird durch die Art des Verbraucherkreises bestimmt (bei Glühlampenbelastung $\varphi_2 = 0$). Addiert man weiter zu E_1 den ohmschen Spannungsverlust $I_1 r_1$ (in Richtung I_1) und den induktiven Spannungsverlust $2\pi \nu L_1 I_1$ (senkrecht zu I_1), so erhält man eine Spannung $-P_1$, die von der primären Klemmenspannung P_1 überwunden werden muß, um den geforderten Betriebszustand zu erhalten. Der Winkel φ_1 zwischen P_1 und I_1 hängt ab vom Leerlaufstrom I_0 und von den Ohmschen und induktiven Spannungsverlusten. Arbeitet der Transformator auf induktive Widerstände, so ist die primäre Phasenverschiebung (φ_1) größer als die sekundäre (φ_2). Während bei Leerlauf die Spannungsverluste zu vernachlässigen sind, also $\frac{P_1}{P_2} = \frac{N_1}{N_2}$ gesetzt werden kann, gilt das Verhältnis bei Belastung nicht mehr. Die Abweichung beträgt ca. 3 bis 4%.

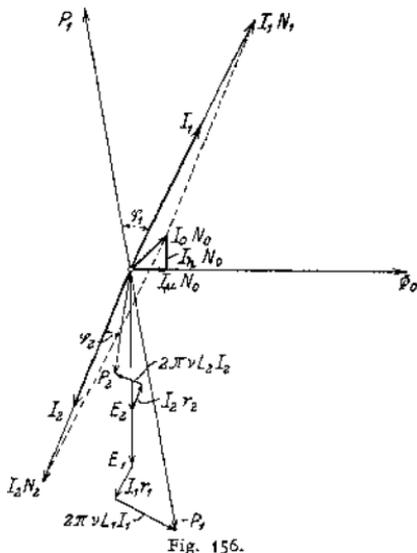


Fig. 156.

Kurzschluß des Transformators. Schließt man einen Transformator sekundär kurz, so genügt nur eine sehr geringe Klemmenspannung P_{1k} , um in der Primärwicklung einen Kurzschlußstrom I_{1k} von der Größe des Normalstromes I_1 zu erhalten. P_{1k} ca. 3 bis 4% von P_1 . P_2 ist Null. Der kleinen Spannung P_{1k} entsprechend ist auch Φ_{0k} sehr klein, ca. 3% vom Normalfluß Φ_0 . Es kann also der Magnetisierungsstrom I_μ und der Verluststrom I_h , mithin I_0 vernachlässigt werden, d. h. $I_{1k} N_1 = I_{2k} \cdot N_2$ oder $\frac{I_{1k}}{I_{2k}} = \frac{N_2}{N_1}$.

Wie auch dem Diagramm (Fig. 156) zu entnehmen ist, sind die Ströme in diesem Falle genau 180° verschoben.

Stromtransformatoren für Meßzwecke (s. Fig. 73 u. 74) laufen betriebsmäßig im Kurzschluß, die Eisenquerschnitte sind mithin, dem verschwindend kleinen Flusse entsprechend, nur gering gehalten. Die Messtransformatoren dürfen deshalb nicht leer laufen, d. h. bei Ausschalten eines Instrumentes müssen sie sekundär kurzgeschlossen werden.

Die mit dem Wattmeter gemessene Kurzschlußleistung $\Omega_k = P_{1k} I_{1k} \cos \varphi_k$ stellt praktisch die Verluste im Primär- und Sekundärkupfer dar infolge von Stromwärme. Die Leistungsmessung gibt die Verluste durch Stromwärme genauer, als die Rechnung aus den Strömen und Widerständen, weil meist mit Stromverdrängung (Skinneffekt) zu rechnen ist.

Wirkungsgrad. Die Verluste im Transformator setzen sich aus Verlusten im Eisen (Hysteresis- und Wirbelstromverluste) und aus Verlusten im Kupfer (Stromwärme) zusammen. Der Wirkungsgrad eines Transformators ist sehr hoch, er beträgt für kleine Transformatoren etwa 92%. Sehr große Transformatoren erreichen einen Wirkungsgrad von 99%. Jahreswirkungsgrad eines Transformators ist das Verhältnis der in einem Jahre sekundär abgegebenen Arbeit zu der in der gleichen Zeit primär verbrauchten Arbeit (Einfluß der Eisenverluste).

Schaltung der Transformatoren. Reihenschaltung mehrerer Transformatoren ist möglich, wenn die Primärwicklungen für gleiche Ströme ausgeführt sind. Reihenschaltung selten angewandt (Bogenlampenkreise).

Parallelschaltung von Transformatoren ist immer möglich, wenn die Transformatoren primär für gleiche Spannungen gewickelt sind. Sollen die sekundären Wicklungen auch parallel geschaltet werden, so ist darauf zu achten, daß außer den Sekundärspannungen selbst auch noch die Phase der Spannungen übereinstimmt. Bei Einphasenstrom ist nur auf richtigen Anschluß der Klemmen zu achten. Bei Drehstromtransformatoren stimmen trotz gleichen Übersetzungsverhältnisses unter Umständen die Sekundärphasen nicht überein, z. B. wenn der eine Transformator primär in Stern, sekundär in Stern, der andere Transformator primär in Stern und sekundär in Dreieck geschaltet ist. Es würde dann zwischen den beiden Sekundärspannungen, die gleich sein können, eine Phasendifferenz von 30° herrschen. (Näheres in den Normalien für Bewertung und Prüfung von elektrischen Maschinen des V. D. E. § 2.)

Spartransformatoren (Autotransformatoren) sind einspulige Transformatoren (Fig. 157) und werden nur zum Anschluß an Niederspannungsnetze

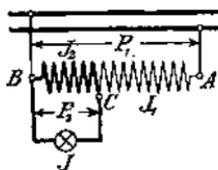


Fig. 157. Einspüliger Transformator, Sparschaltung.

benutzt, z. B. zum Anschluß von Wechselstrombogenlampen für 30 Volt an ein 110 Volt-Netz. Sie bestehen aus einer fortlaufenden Wicklung ($A-B$), die für die Netzspannung bemessen ist, und von der ein Teil als Sekundärkreis mitbenutzt wird (in Fig. 157 das Stück $B-C$). Teil $B-C$ erhält meist stärkeren Kupferquerschnitt. Sparschaltung kann auch bei Drehstrom angewandt werden, wenn die drei Oberspannungsspulen in Stern geschaltet sind.

Reguliertransformatoren (Stufentransformatoren) sind solche, bei denen Teile der sekundären Wicklung nach Belieben zu- oder abgeschaltet werden können. Hierzu meist besondere Windungsschalter, die verhüten, daß beim Übergang von Stufe zu Stufe Windungen des Sekundärkreises kurzgeschlossen werden. Sind sämtliche Windungen des Sekundärkreises abschaltbar, so kann man bis auf die Spannung = Null herunterregulieren. Werden für Einphasen- und für Drehstrom ausgeführt. Zuweilen Sparschaltung. Anwendung beim Anlassen von Asynchronmotoren mit Kurzschlußanker, bei Wechselstrom-Kommutatormotoren (auf Lokomotiven).

Phasentransformatoren stellen im Prinzip einen Mehrphaseninduktionsmotor dar, der festgebremst ist. Ständer — Primärwicklung, Läufer — Sekundärwicklung. Je nach Stellung des Läufers werden in der Sekundärwicklung durch das Drehfeld EMKs induziert, die verschiedene Phase gegen die EMK des Ständers haben. Man kann die Phase durch Einstellen des Läufers beliebig regulieren. Bewickelt man den Ständer und Läufer nur einphasig, so kann man am Läufer je nach Stellung beliebige Spannung zwischen einem positiven und negativen Maximalwert abnehmen. Die Phase und Frequenz sind dieselben wie die der Ständerwicklung. Man erhält einen sog. drehbaren Transformator (Zusatztransformator). Nachteil: schlechter Cosinus.

Scottsche Schaltung (Fig. 158) gestattet mit Hilfe zweier Transformatoren Zweiphasenstrom in Drehstrom oder umgekehrt umzuformen.

Drosselspulen sind Wechselstromelektromagnete, mit denen man Spannungen aufbrauchen kann, ohne dabei Leistung zu verlieren. Sie stellen im Prinzip einen leerlaufenden Transformator dar.

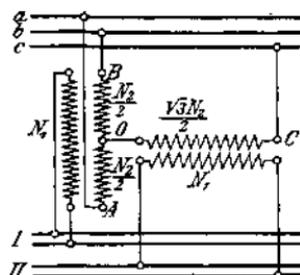


Fig. 158. Scottsche Schaltung zur Transformierung von Drehstrom in Zweiphasenstrom.

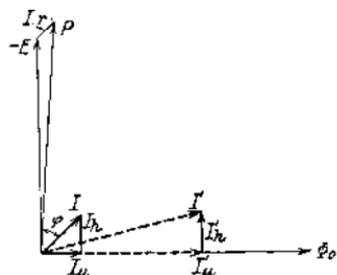


Fig. 159.

Legt man an eine Drosselspule eine Spannung P , so wird die Spule einen Strom I aufnehmen, der die geometrische Summe aus Magnetisierungsstrom I_μ und Verluststrom I_h darstellt (Fig. 159). Der durch den Eisenquerschnitt Q fließende magnetische Fluß Φ_0 errechnet sich, sinoidalen Verlauf vorausgesetzt, aus:

$$E = P \triangle I r = 4,44 \cdot \nu N \Phi_0 10^{-8} \text{ Volt,}$$

wobei ν = Frequenz/sek. und N = Windungszahl der Drosselspule. Bleibt die Spannung P konstant, so bleibt auch Φ_0 annähernd konstant, d. h. auch der die Eisenverluste und geringen Kupferverluste deckende Verluststrom I_h ist annähernd konstant. Der Magnetisierungsstrom I_μ richtet sich in seiner Größe nach den magnetischen Widerständen. Macht man den Eisenpfad für den Fluß nicht geschlossen, sondern unterbricht ihn durch einen womöglich regulierbaren Luftspalt, so muß mit wachsendem Luftspalt auch I_μ ansteigen, d. h. (weil $I = I_\mu \mp I_h$) auch I größer werden. Im Diagramm steht Φ_0 senkrecht auf E , I_μ fällt in Richtung von Φ_0 , I_h fällt als Leistungskomponente in Richtung von E , d. h. ist senkrecht auf Φ_0 , mithin muß mit wachsendem Luftspalt (also wachsendem I_μ) die Phasenverschiebung zwischen P und I immer größer werden. Die Phasenverschiebung beträgt bei vollständig geschlossenem Luftspalt ca. 45° , bei vollständig offenem magnetischen Kreis steigt sie bis 80° , 90° kann die Verschiebung zwischen Strom und Spannung nie werden, da immer die Leistungskomponente I_h vorhanden ist. Der tatsächliche Verbrauch einer Drosselspule ist $Q = P \cdot I \cos \varphi$ Watt, der scheinbare Verbrauch ist $Q_s = P \cdot I$ Voltampere. Man kann mit großer Annäherung setzen: Volumen des Luftspaltes = $\rho \cdot P \cdot I$. Sind der Querschnitt des Luftspaltes und die Spannung P konstant, so kann man setzen: Luftspalt $\delta = c' \cdot I$. Die Einregulierung des Drosselspulenstromes kann also durch Einstellung des Luftspaltes erfolgen. (Zwischenlagen von Preßspan, Pappe, Eisenfilz usw.)

Hubmagnete für Wechselstrom (Drehstrom) stellen nichts anderes als eine Drosselspule dar. Da im Moment des Einschaltens der Luftraum zwischen Anker und Magnet noch groß, ist der Einschaltstrom sehr groß. Die scheinbare Leistung ist beim Einschalten groß, die tatsächlich verbrauchte Leistung ist sehr gering.

VI. Elektrische Beleuchtung.

a) Grundbegriffe. Einheit der Lichtstärke J ist in Deutschland die horizontale Lichtstärke der Hefnerlampe (1 Hefnerkerze = 1 HK), d. h. die Lichtstärke, die eine Amylazetlampe bei 40 mm Flammenhöhe und einem Dochtdurchmesser von 8 mm in horizontaler Richtung aussendet. Die gesamte, von einem leuchtenden Punkte ausgestrahlte Energie, die gesamte Lichtmenge, breitet sich kugelförmig aus. Lichtstrom Φ ist die auf eine Fläche auffallende Lichtmenge. Einheit des Lichtstromes ist durch diejenige Lichtmenge gegeben, die auf 1 m^2 einer Kugeloberfläche vom Radius 1 m auftrifft, wenn sich 1 HK im Kugelzentrum befindet. Einheit des Lichtstromes = 1 Lumen (Lm). In einem Raumwinkel ω wird von einer punktförmigen Lichtquelle von der Stärke J ausgestrahlt der Lichtstrom $\Phi = J \cdot \omega$ Lumen. Von 1 HK geht der Lichtstrom 4π Lumen, von J HK gehen $4\pi J$ Lumen aus. 1 m^2 einer Kugeloberfläche

(Radius = r m) erhält von einer punktförmigen Lichtquelle J HK einen Lichtstrom $\frac{4\pi J}{4\pi r^2} = \frac{J}{r^2}$ Lumen. S m² erhalten $\frac{J \cdot S}{r^2}$ Lumen. Beleuchtung E ist die Lichtstromdichte oder der Lichtstrom pro m² belichteter Fläche. $E = \frac{\Phi}{S} = \frac{J}{r^2}$. Einheit der Beleuchtung = 1 Lux = $\frac{1 \text{ Lumen}}{1 \text{ m}^2}$. (Meterkerze nicht mehr gebräuchlich, weil „Kerze“ nicht gleichbedeutend mit Hefnerkerze).

Ungleichmäßigkeit der Beleuchtung ist das Verhältnis der maximalen zur minimalen Horizontalbeleuchtung — horizontale Komponente — der in Frage kommenden Gesamtfläche. Flächenhelle e (Glanz) eines Leuchtkörpers ist das Verhältnis der Lichtstärke J HK zur Oberfläche s cm² des leuchtenden Körpers. $e = \frac{J}{s}$. Einheit = 1 HK pro cm².

Spezifischer Effektverbrauch ist der Verbrauch an Watt pro Hefnerkerze.

Spezifischer Verbrauch der Beleuchtung ist der Verbrauch an Watt für 1 Lux mittlere Horizontalbeleuchtung und 1 m² Fläche.

b) Glühlampen. Nach den Verbandsvorschriften ist bei Glühlampen die mittlere horizontale Lichtstärke (HK) anzugeben.

Kohlenfadenlampen, große Widerstandsfähigkeit gegen Erschütterungen, geringer Preis. Lichtstärke von Spannungsschwankungen stark abhängig. Werden für Spannungen bis 250 Volt und Lichtstärken von 5, 10, 16, 25, 32, 50 und 100 HK marktgängig fabriziert. Spezifischer Verbrauch ca. 3 bis 4 Watt/HK. Lebensdauer (Nutzbrenndauer) 300 bis 800 Stunden (20% Abnahme der Lichtausbeute). Metallisierte Kohlenfadenlampen haben etwa 2,5 Watt/HK. Nutzbrenndauer ca. 500 Stunden, empfindlicher gegen Erschütterungen als die gewöhnliche Kohlenfadenlampe. Metalldrahtlampen mit gezogenem Leuchtdraht aus Wolframmetall (Osram-, Wotan-, Sirius- usw. Lampen) haben die sog. Metallfadenlampen mit ihrer geringen mechanischen Festigkeit des Leuchtkörpers verdrängt. Werden für 0,5 bis 2000 HK und 2 bis 260 Volt normal fabriziert. Spezifischer Verbrauch 1,1 bis 1,25 Watt/HK. Für Lampen höherer Spannung (220 Volt) 1 Watt/HK und für höhere Lichtstärken sogar 0,8 Watt/HK. Lebensdauer über 2000 Brennstunden bei nur 10% Lichtabnahme. Neuerdings Halbwattlampen für 600, 1000, 2000 und 3000 HK. Der niedrige Wattverbrauch von $\frac{1}{2}$ Watt/HK wird erzielt durch Anwendung einer Gasfüllung (Stickstoff unter ca. $\frac{2}{3}$ Atm. Druck) zur Verhinderung der Verdampfung des Wolframdrahtes und durch besondere Gestaltung des Leuchtdrahtes, um seine Wärmeabgabe herabzusetzen. Lebensdauer über 800 Brennstunden bei nur 20% Lichtabnahme.

c) Bogenlampen. Nach den Verbandsvorschriften ist bei Bogenlampen die untere hemisphärische Lichtstärke J_{\ominus} und das Verhältnis der sphärischen J_{\odot} zur unteren hemisphärischen J_{\ominus} anzugeben. Sämtliche Lichtangaben sollen sich auf den betriebsmäßigen Zustand der Lampe beziehen, d. h. auf mittlere betriebsmäßige Stromstärke, betriebsmäßige Kohlensorte vom richtigen Durchmesser. Dünnere Kohlen oder höhere Stromstärke ergeben mehr Licht als normal. Als praktischer Effektverbrauch einer Bogenlampe gilt der Gesamtverbrauch eines Bogenlampenstromkreises, gemessen an der Abzweigstelle vom Netz, dividiert durch die Anzahl der Lampen. Der Verbrauch von Transformatoren, Drosselspulen, Vorschaltwiderständen ist also einzuschließen. Netzspannung ist anzugeben, da die Lichtausbeute teilweise von der Höhe und Art der Vorschaltung abhängig ist. Der praktische spezifische Effektverbrauch ist der Quotient aus dem praktischen Effektverbrauch und J_{\ominus} (bei n Volt Spannung). Angabe von J_{\ominus} genügt nur zum Vergleich gleichartiger Bogenlampen. Je nach Konstruktion der Lampe ergibt sich auch bei gleicher J_{\ominus} eine sehr verschiedenartige Lichtverteilungskurve und damit verschiedene Beleuchtung.

Zur Projektierung von Beleuchtungsanlagen ist immer die Kenntnis der Lichtverteilungskurven (Fig. 160) der einzelnen Lampensorten erforderlich. Man unterscheidet:

Offene } Bogenlampen { über- } einander- { Rein- } Kohlen- } Gleichstrom
Geschlossene } mit { neben- } stehenden { Effekt- } für { Wechselstrom.

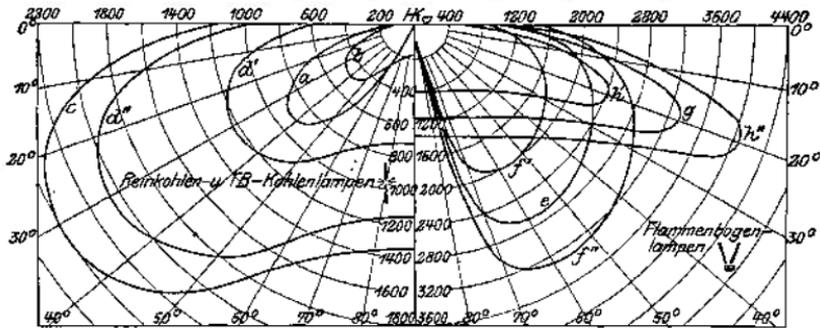


Fig. 160. Ausstrahlungskurven von Bogenlampen mit Klarglasglocke bei angenähert gleichem Verbrauch (∞ 440 Watt).

Bezeichnung	Lampenart	Schaltung bei 110 Volt	Stromstärke Amp.	Verbrauch Watt	Lichtstärke HK	Spez. Verbrauch W/HK
a	Reinkohlenbogenlampe Gleichstrom . . .	2 L. an 110 V	8	440	550	9,80
b	„ „ Wechselstrom mit Vorschaltwiderstand . . .	g L. an 110 V	12	440	335	1,32
c	TB-Kohlenlampe (Axisl.) Gleichstrom . .	3 L. an 110 V	12	440	2000	0,22
d'	„ „ Wechselstrom mit Vorschaltwiderstand . . .	„	12	400	1030	0,39
d''	TB-Kohlenlampe (Axisl.) Wechselstrom mit Vorschaltwiderstand . . .	„	15	425	1710	0,25
e	Flammenbogenlampe ohne dioptr. Glocke Gleichstrom . . .	2 L. an 110 V	8	440	2200	0,20
f'	Flammenbogenlampe ohne dioptr. Glocke Wechselstrom mit Vorschaltwiderstand . . .	„	10	456	1620	0,28
f''	Flammenbogenlampe ohne dioptr. Glocke Wechselstrom mit Vorschaltwiderstand . . .	„	12	435	2700	0,16
g	Flammenbogenlampe mit dioptr. Glocke Gleichstrom . . .	„	8	440	2040	0,22
h'	Flammenbogenlampe mit dioptr. Glocke Wechselstrom mit Vorschaltwiderstand . . .	„	10	456	1500	0,30
h''	Flammenbogenlampe mit dioptr. Glocke Wechselstrom mit Vorschaltwiderstand . . .	„	12	435	2480	0,18

Geschlossene Bogenlampen, um den Lichtbogen in sauerstoffarmer Luft zur Herabsetzung des Abbrandes der Kohlen brennen zu lassen (Sparbogenlampen). Effektkohlen (im Gegensatz zu Reinkohlen) enthalten Zusatz von Metallsalzen zur Erzielung höherer Lichtausbeute und besonderer Farbe des Lichtes.

Hauptstromlampen: Gesamtstrom der Lampe regelt den Kohlennachschub und stellt dauernd gleichen Verbrauch ein. Brennen bei jeder Spannung am Lichtbogen bei konstanter Stromstärke. Nur für Parallelschaltung

Nebenschlußlampen: Der Kohlennachschub und der Verbrauch der Lampen wird vom Nebenschlußstrom, der von der Lichtbogenspannung abhängig ist, reguliert. Lampe reguliert auf konstante Spannung. Für Parallelschaltung; können auch (bis 4 Stück) in Serie geschaltet werden. Durch Vorschalt-

widerstand kann die Lichtstärke, d. h. die Stromstärke, bei gleichbleibender Lichtbogenspannung reguliert werden. Differentiallampe, reguliert auf konstanten Strom und konstante Lichtbogenspannung. Läßt sich parallel und in größerer Zahl hintereinander schalten. Uhrwerklose Lampe (Becklampe) hat Kohlen mit Rippen, bei deren Abbrand die Kohlen genähert werden.

Vorschaltwiderstände sind nötig, um den Lichtbogen stabil zu machen und um die im Netz unvermeidlichen Spannungsschwankungen nicht allein der Lampe zukommen zu lassen (Beruhigungswiderstände).

Bei Wechselstromlampen nimmt man vorteilhaft an Stelle von Vorschaltwiderständen zwecks Energieersparnis Drosselspulen oder besser Transformatoren.

Reinkohlenlampen a) für Gleichstrom, zwei übereinanderstehende Kohlen, Lichtbogenspannung 40 bis 42 Volt, positive Kohle als Dochtkohle ausgebildet und gegen die negative Kohle etwa 60% stärker; 6 bis 15 Ampere.

b) für Wechselstrom, zwei übereinanderstehende Kohlen, Lichtbogenspannung etwa 30 Volt. Zwei gleichstarke Dochtkohlen, 8 bis 18 Ampere.

Brenndauer normaler Reinkohlenlampen je nach Größe 12 bis 22 Stunden.

Dauerbrandlampen, meist für kleine Stromstärken, Gleichstrom, Einzel-schaltung an 110 Volt (Lichtbogenspannung ca. 80 Volt), brennen im abgeschlossenen Luftraum, zwei gleichstarke, dünne Homogenkohlen. 4 bis 7 Ampere. Brenndauer ca. 100 Stunden mit einem Kohlensatz.

Flammenbogenlampen (Effektlampen). Stark gedöchtete Kohlen stehen nebeneinander, Lichtbogen nach unten, Lichtbogenspannung ca. 45 Volt. Zwei Lampen hintereinander an 110 Volt. Für Gleichstrom (6 bis 12 Ampere) und Wechselstrom (8 bis 12 Ampere). Da Maximum der Ausstrahlung wesentlich nach unten, Anwendung für Schaufenster und Reklamebeleuchtung. Für Erlangung einer gleichmäßigeren Beleuchtung (Straßenbeleuchtung) sind Diopterglocken erforderlich. Brenndauer 7 bis 17 Stunden.

TB-Kohlen (von Gebr. Siemens) sind Effektkohlen für Bogenlampen mit übereinanderstehenden Elektroden (besonders für Straßenbeleuchtung).

Fig. 160 zeigt die Ausstrahlungskurven einiger Bogenlampen.

Quecksilberdampflampen, Quarzlampen bestehen aus luftleeren Röhren aus Glas oder Quarzglas mit eingeschmolzenen Elektroden, deren eine oder beide in etwas Quecksilber ragen. Bei der Inbetriebsetzung wird durch einmaliges Kippen eine Verbindung der beiden Elektroden durch das Quecksilber auf kurze Zeit herbeigeführt. Hierbei sich bildende Quecksilberdämpfe geben dem Strome weiteren Durchgang und als Lichtbogen das Leuchten der Lampe. Blaugrünes, fahles Licht. Da der Stromdurchgang abhängig von der Temperatur des Quecksilberdampfes ist, wird die Stromstärke der Lampen durch Einstellung der Abkühlungsverhältnisse des Rohres einreguliert. Fächerartige Kühler aus Kupferblech. Lampen nur für Gleichstrom. 4 Ampere bei 110 Volt. 2,5 und 3,5 Ampere bei 220 Volt. $J_{\text{C}} = 1200$ bis 3000 HK. Einzelschaltung. Vorschaltwiderstände meist eingebaut. Garantierte Brennstundenzahl 1000. Vorteile der Lampe: Geringe Bedienungskosten, völlig ruhiges Licht.

Moorelicht. Lange, mit stark verdünnten Gasen gefüllte Röhren werden mit hochgespanntem Wechselstrom von ca. 50 Perioden/sek gespeist und strahlen dabei ein fast vollkommen diffuses Licht (nach Art der Geißlerschen Röhren) aus. Farbe je nach Gasfüllung. Erforderlich ist ein Hochspannungstransformator und eine Reguliervorrichtung, die den Gasdruck auf konstanten Wert hält, sowie eine Vorschalt-drosselspule. Wirtschaftlichkeit etwa wie die der Metall-fadenlampen.

d) Verteilung der Beleuchtung.

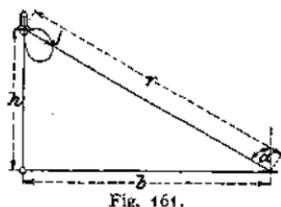
Die mittlere Horizontalbeleuchtung in der Meße-bene 1 m über dem Fußboden soll betragen nach Uppenborn-Monasch, Lehrbuch der Photometrie 1912, für

Spinnereien	15—20 Lux
Weberien (für helle Stoffe)	25—30 „
Weberien (für dunkle Stoffe)	30—40 „
Maschinenfabriken, Schlossereien	25—35 „
Metallbearbeitung	25—35 „
Feinmechanische Arbeiten	35—60 „
Druckereien, Setzereien	60—80 „
Hörsäle, Schulzimmer	35—60 „
Zeichensäle	60—80 „
Kaufmännische Bureaus	35—50 „
Verkaufsräume	35—60 „
Konzert- und Festsäle	40—60 „
Schaufenster	80—200 „
Nebenträume, Schlafzimmer, Hausgänge	5—10 „
Elegante Zimmer	20—30 „
Einfache Wohnzimmer, Speisezimmer	15—20 „
Hauptstraßen mit starkem Verkehr	3—12 „
Nebenstraßen mit starkem Verkehr	1,5—3 „
Nebenstraßen mit schwächerem Verkehr	0,5—1,5 „

Die Horizontalbeleuchtung beträgt bei Vollmond bei klarer Luft etwa 0,26 Lux.

Die Horizontalbeleuchtung berechnet sich aus der Ausstrahlungskurve Punkt für Punkt nach Fig. 161.

$$E_h = \frac{J}{r^2} \cos^3 \alpha = \frac{J \cdot h}{(h^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ Lux.}$$



VII. Anlagen für Stromlieferung (Zentralen).

In den Abbildungen 162 bis 173 bedeuten:

A = Auschalter,
 MiA = Minimalausschalter,
 U = Umschalter,
 S = Sicherung,
 V = Voltmeter,

Str = Stromzeiger,
 L = Leistungszeiger,
 Ani = Anlasser,
 NR = Nebenschlußregler,
 VR = Vorschaltwiderstand.

a) Normalschaltungen bei Gleichstrom.

Für Gleichstromzentralen kommen Nebenschlußmaschinen, seltener Compoundmaschinen in Frage, und zwar können die Maschinen entweder für Selbsterregung oder mit Netzerregung geschaltet werden. Fig. 162 gibt das Schaltungsschema für zwei Maschinen mit Netzerregung einer Zweileiteranlage. Netzerregung ist die üblichere, da bei ihr stets die richtige Polarität an den Klemmen der einzelnen Maschinen gewährleistet ist. Voltmeter braucht nicht polarisiert zu sein. Für jede Maschine sind hier zwei getrennte Ausschalter (A) erforderlich, deren einer (in der Fig. 162 der rechte) auszuschalten ist, bevor der Erregerstromkreis abgeschaltet ist. Sind die Maschinen für Selbsterregung geschaltet, so ist ein Umpolen der Maschinen nicht ausgeschlossen. Das Voltmeter muß die Polarität

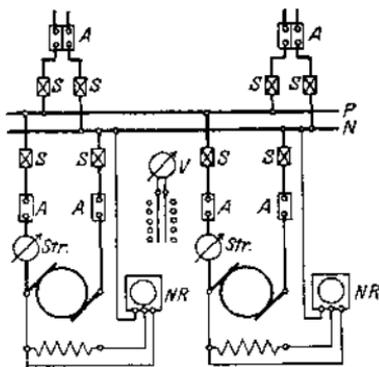


Fig. 162.

erkennen lassen (Ausschlag nach beiden Seiten). Die Maschinenhauptschalter können bei Selbstregung der Maschine gekuppelt sein (zweipoliger Schalter). Nebenschlußregulatoren für Maschinen, deren Erregerkreis ausgeschaltet werden soll, erhalten stets Kurzschlußkontakt (q), um vor dem Ausschalten die Magnetwicklung kurzzuschließen (Klemmen q , s = Schleifkurbel, t = Anschluß der Widerstände) (s. Fig. 100).

Bei Compoundmaschinen ist eine sog. „Ausgleichsleitung“ zwischen zwei gleichen Polen der zusammen arbeitenden Maschinen erforderlich (Fig. 163).

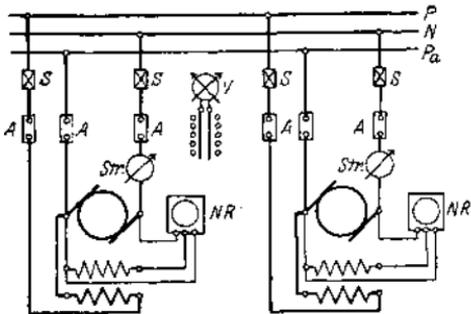


Fig. 163.

Ohne Ausgleichsleitung würde es nicht möglich sein, die Belastung auf die Maschinen gleichmäßig zu verteilen, außerdem liegt beim Parallelschalten der Maschinen die Gefahr vor, daß sie umpolen. Beim Zuschalten einer neuen Maschine schaltet man zunächst den Schalter in der Ausgleichsleitung und den im Kreise der Hauptschlußwicklung ein. Die Compoundwicklung erhält dann schon, bevor die zuzuschaltende Maschine Strom liefert, einen Strom von der richtigen Richtung und von

bestimmter Größe. Der Anker kann dann wie der einer gewöhnlichen Nebenschlußmaschine an das Netz geschaltet werden. Beim Abschalten einer Compoundmaschine ist der Schaltvorgang in umgekehrter Reihenfolge vorzunehmen.

Gleichstromanlagen mit Akkumulatoren. Die meisten Gleichstromanlagen sind mit Akkumulatoren ausgerüstet. Zweck der Akkumulatoren ist, entweder eine Reserve für die Maschinen zu schaffen oder die Maschinen bei plötzlichen stärkeren Stromstößen zu entlasten und zu unterstützen (Pufferbatterien). (S. S. 1460.)

Meist wendet man Akkumulatorenbatterien an, um auch bei Stillstand der Maschinenanlage eine Stromquelle zur Verfügung zu haben. Bei reinen Lichtenanlagen wird man die Betriebsverhältnisse so wählen, daß die Batterie des Tages über geladen wird, die Maschinen werden nach erfolgter Ladung abgeschaltet und stillgesetzt. Die Batterie liefert den gesamten Strom für die Lichtenanlage. Bei größeren Anlagen trifft man die Anordnung so, daß sowohl die Maschinen als auch die Batterie allein oder beide zusammen auf das Netz arbeiten können. Da die Spannung einer Batterie abhängig von ihrem Ladezustand ist, ist immer ein Zellschalter erforderlich, wenn die Spannung an den Sammelschienen konstant bleiben muß. Die Spannung muß zum Laden

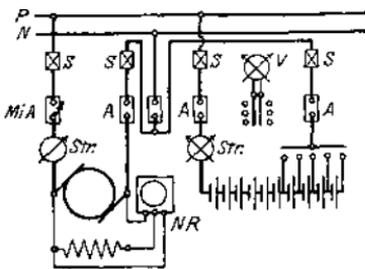


Fig. 164.

der Batterie auch erhöht werden können (ca. 36%). Diese Spannungserhöhung kann erfolgen 1. durch Anwendung von Maschinen, die eine Spannungserhöhung (sei es durch Erhöhung der Drehzahl oder der Erregung oder durch beides zugleich) erlauben oder 2. durch Anwendung von Zusatzmaschinen (siehe unten).

Zweileiteranlagen mit Batterie und Einfachzellenschalter (Fig. 164). Maschine und Batterie können je allein auf das Netz arbeiten. Durch den Einfachzellenschalter wird die Netzspannung einreguliert

und die Batterie entladen. Maschine und Batterie können auch zusammen auf das Netz arbeiten. Ist nur eine Maschine vorhanden, so muß bei der Ladung,

die über den Einfachzellenschalter erfolgt, das Netz abgeschaltet werden. Bei zwei Maschinen kann eine während der Ladung auf das Netz arbeiten. Das Amperemeter im Batteriekreis muß polarisiert sein, um die Ladung und Entladung erkennen zu können. Um eventuell Rückstrom aus der Batterie in die Maschinen zu vermeiden, erhält der Maschinenkreis Minimalschalter. In der Figur ist die Maschine mit Selbsterregung gezeichnet, das Voltmeter muß also, um die Polarität vor dem Anschalten der Maschinen zu erkennen, polarisiert sein.

Will man während der Ladung einer Batterie diese zugleich auch auf das Netz arbeiten lassen, so wird ein Doppelzellenschalter nötig. Man hat dann außer der P- und N-Schiene noch eine Hilfsschiene N', die für die Ladung in Frage kommt (Fig. 165). Während der Ladung (Maschinenumschalter UA nach unten) arbeitet die Batterie über die Entladeschiene (obere) des Zellenschalters auf die N-Schiene und liegt mit dem positiven Pol an der P-Schiene.

Die Ladung selbst erfolgt über die Hilfssammelschiene N' und über die Ladeschiene (untere). In der Schaltung (Fig. 165) ist angenommen, daß die zur Ladung erforderliche Spannungserhöhung mit der Maschine erreicht werden kann. Wird die Batterie während der Ladung zugleich entladen, so erhalten die zwischen den Schienen des Doppelzellenschalters liegenden Zellen stärkeren Strom als die nicht abschaltbaren Zellen. Sie werden mithin schneller geladen und müssen bald abgeschaltet werden. Da die Spannung eines Akkumulators je nach Ladezustand zwischen 1,8 und 2,75 Volt veränderlich ist, müssen bei einer Netzspannung von 110 Volt mindestens 61 Zellen angewandt werden, von denen (im geladenen Zustand) 6 Zellen abschaltbar sein müssen, wenn ein Einfachzellenschalter vorhanden ist. Bei einem Doppelzellenschalter müssen mindestens 21 Zellen abschaltbar sein, wenn die Netzspannung 110 Volt betragen soll, also gegen Ende der Ladung sämtlicher Zellen nur $\frac{110}{2,75} = 40$ Zellen an den Sammelschienen P und N liegen dürfen. Bei Netzen mit höheren Spannungen schaltet man nicht Einzelzellen ab, sondern

Gruppen von zwei Zellen, um nicht zuviel Zellen-schalterkontakte zu bekommen.

Will man beim Laden der Batterie die Spannung der Hauptdynamo nicht erhöhen, so muß eine Zusatzmaschine, angetrieben durch einen vom Netz gespeisten Motor, angewandt werden (Fig. 166). Diese Anordnung ist bei größeren Anlagen Regel. Ist nur ein Einfachzellenschalter vorgesehen (wie in Fig. 166), so kann man zwar während der Ladung Strom bei normaler Netzspannung abnehmen, doch ist eine Reserve in der Batterie nicht vorhanden.

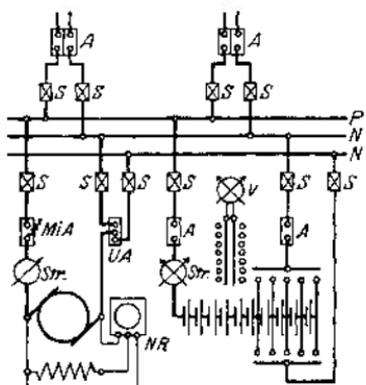


Fig. 165.

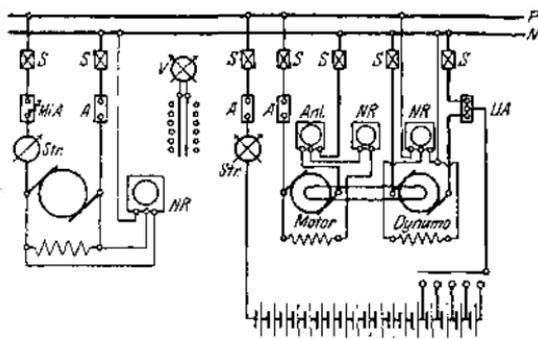


Fig. 166.

Dreileiteranlagen. Man hat hier zwei Verbraucherhälften, deren jede einen Außenleiter (+ oder -) erhält und die den Mittelleiter gemeinsam haben.

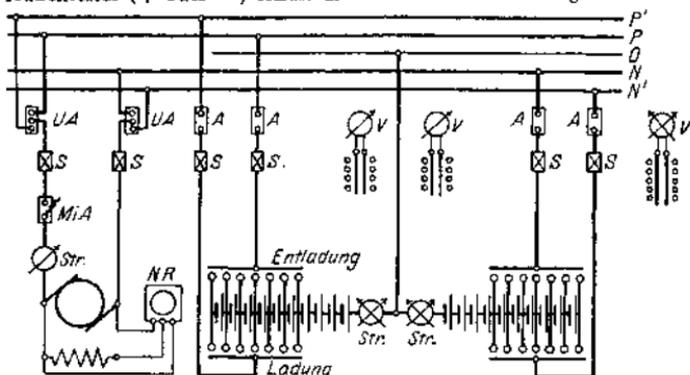


Fig. 167.

Vorteil: Ersparnis an Leitungsmaterial. Der Mittelleiter führt nur die Differenz der Ströme in den Außenleitern. Die Verbrauchstellen der +- und --Seite sind

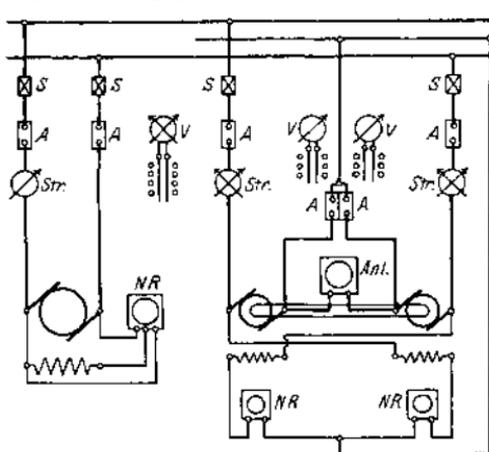


Fig. 168.

Erfolgt die Spannungsteilung durch Ausgleichsmaschinen (Fig. 168), so sind zwei gleiche, in Reihe geschaltete Maschinen zwischen die Außenleiter geschaltet. Sie werden mittels Anlasser als Motoren angelassen.

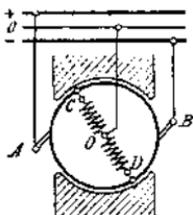


Fig. 169.

Spannungsleitung nach Dobrowsky.

Ihre Verbindung untereinander wird, bei Übereinstimmung ihrer Ankerspannungen mit den Spannungen der Netzhälften, auf den Nulleiter geschaltet. Die Erregung der Maschinen erfolgt am besten so, daß die Maschine der +-Seite ihre Erregung von der --Seite erhält und umgekehrt. Man erhält hierdurch einen besseren Ausgleich. Wird z. B. die +-Seite mehr belastet als die --Seite, so wird die Spannung auf der +-Seite sinken, die Maschine der --Seite erhält mithin weniger Erregung, will als Motor schneller als die Maschine der +-Seite laufen, diese wird Generator und unterstützt die +-Seite. Bei den Drei-

voneinander unabhängig. Arbeiten die Stromerzeuger auf die beiden Außenleiter P und N (was meist der Fall ist), so kann die Spannungsteilung erfolgen durch Batterie (Fig. 167). Es sind zwei Doppelzellschalter vorhanden. Die Mitte der Akkumulatorenbatterie liegt am Nulleiter. Die Maschinen können auf die Außenleiter zur Unterstützung der Batterie oder auf die Ladesammelschienen P' und N' geschaltet werden. Maschinen müssen zur Ladung mit erhöhter Spannung betrieben werden können.

leitermaschinen erfolgt die Spannungsteilung in der auf die Außenleiter arbeitenden Maschine selbst. Nach Dolivo-Dobrowolsky (Fig. 169) verbindet man zwei diametral gegenüberliegende Punkte C und D des Ankers über eine Drosselspule, deren Mitte O an den Nullleiter gelegt ist (Drosselspule meist außerhalb der Maschine, Anschluß über Schleifringe). Die Drosselspule führt dauernd einen mäßigen Wechselstrom ohne wesentlichen Energieverbrauch. Die Mitte der Drosselspule ist der Nullpunkt der Maschine. Der Gleichstrom findet in der Drosselspule so gut wie keinen Widerstand. Der dem Punkte O zufließende Strom ist die Differenz der Ströme in den Außenleitern. Größere Anlagen erhalten Ausgleichsmaschinen und Batterie zur Spannungsteilung. Für Ladung der Batterie ist eine Zusatzmaschine, die von den Ausgleichsmaschinen zugleich angetrieben wird, vorgesehen (Fig. 170). Die Hauptmaschinen arbeiten mit konstanter Spannung auf die Außenleiter P und N . Die beiden Pole der Batterie liegen über Einfachzellenschalter ebenfalls an P und N . Die Mitte der Batterie kann mittels Umschalter zur Spannungsteilung an die Nullschiene O gelegt werden, oder es kann

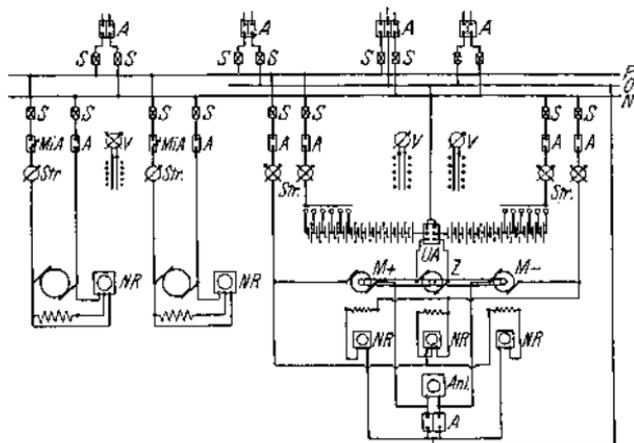


Fig. 170.

zur Ladung die Zusatzmaschine Z (Lademaschine) zwischen die beiden Batteriehälften geschaltet werden. Die Zusatzmaschine wird von den beiden Ausgleichsmaschinen $M+$ und $M-$ angetrieben. Diese sind über Kreuz erregt und werden mittels Anlasser, der zwischen ihnen liegt, angelassen. Sind die Spannungen der Maschinen $M+$ und $M-$ richtig eingestellt, so kann der Anlasser kurzgeschlossen werden (in der Figur durch den doppelpoligen Schalter ganz unten). Durch Erregung der Zusatzmaschine Z wird der Ladestrom eingestellt. Bei der Ladung liegt der Umschalter UA nach unten. Die Spannungsteilung erfolgt durch die Ausgleichsmaschinen $M+$ und $M-$, da bei kurzgeschlossenem Anlasser die Verbindung zwischen den Ankern $M+$ und $M-$ an die Nullschiene gelegt ist. Die Spannungsteilung erfolgt also bei Ladung der Batterie durch das Ausgleichsaggregat, bei Entladung der Batterie durch die Batterie oder durch das Ausgleichsaggregat oder durch beide zusammen.

b) **Regelung und Parallelschaltung von Gleichstrommaschinen.** Regelung geschieht bei Nebenschlußgeneratoren in erster Linie von Hand mittels eines Nebenschlußregulators im Erregerstromkreise (Fig. 100 und 101). Damit beim Abschalten des Erregerstromes infolge der Gegen-EMK der Selbstinduktion die Erregerwicklung nicht durchschlägt, erhalten die Nebenschlußregulatoren einen Kurzschlußkontakt q (Fig. 100), der vor dem Ausschalten die Erreger-

wicklung kurzschließt, so daß der Extrastrom auslaufen kann. Eine automatische Regelung der Maschinenspannung erhält man, wenn man ein von der Netzspannung betätigtes Relais auf einen Motor wirken läßt, der auf den Kontakthebel des Nebenschlußregulators mittels Schnecke und Schneckenrad arbeitet. Diese Regelung ist träge, schnelle Schwankungen der Spannung können mit ihr nicht ausgeglichen werden. Momentane Selbstregelung erzielt man durch Anwendung von Compoundwicklung (siehe S. 1425). Eine gut compoundierte Maschine hält die Spannung bei allen Belastungen praktisch konstant (Anwendung bei Bahnen ohne Pufferbatterie). Regelung der Maschinenspannung kann auch durch Einstellen der Drehzahl der Maschine erfolgen.

Parallelschalten von Gleichstromnebenschlußmaschinen. Betrieb einfach und ohne Schwierigkeiten. Maschinen sollen möglichst gleiche elektrische Eigenschaften haben. Regulatoren der Dampfmaschinen müssen gut statisch sein, weil sonst Schwingungen eintreten können, die die Leistung zwischen den parallelgeschalteten Maschinen hin und her pendeln lassen. Gleichstrommaschinen können parallelgeschaltet werden, wenn sie gleiche und in bezug auf das Netz gleichgerichtete Spannungen haben. Compoundmaschinen, Bedingungen zum Parallelschalten siehe S. 1456.

Pufferbatterien werden Gleichstrommaschinen parallelgeschaltet und haben den Zweck, bei starken, stoßweisen Stromschwankungen die Maschinen

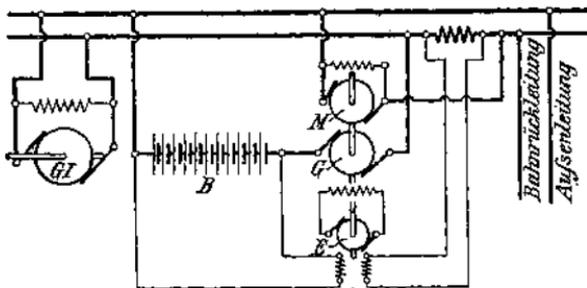


Fig. 171. Piranische Anordnung.

zu unterstützen, während sie in den Perioden schwacher Belastung von den Maschinen aufgeladen werden. Die Belastung der Maschinen soll möglichst gleichmäßig werden. Damit Pufferung eintritt, ist erforderlich, daß die Maschinen großen Spannungsabfall bei Belastung haben; das bedeutet aber starke Schwankungen der Netzspannung. Besser ist es deshalb, nach Pirani (Fig. 171) in den Pufferbatteriekreis eine Zusatzmaschine G zu schalten, die, von einem Motor M angetrieben, ihre Erregung von einer direktgekuppelten Erregermaschine E erhält, deren Spannung wieder vom Belastungszustand des Netzes abhängig ist. Wächst die Belastung des Netzes, so wird die Zusatzdynamo stärker erregt, ihre EMK setzt sich zur EMK der Batterie zu, so daß sie einen größeren Entladestrom abgibt. Der Erregermaschine gibt man vorteilhaft noch eine Nebenschlußwicklung, die an die Klemmen der Pufferbatterie angeschlossen ist, womit man erreicht, daß die Erregung der Zusatzmaschine bei starkem Netzverbrauch positiv, bei mittlerem Verbrauch Null und bei geringem Verbrauch negativ wird.

c) Normalschaltungen bei Drehstrom.

Die Schaltung von Wechselstrom- (Drehstrom-) Anlagen ist im allgemeinen von der von Gleichstromanlagen nur verschieden durch die Anwendung besonderer Erregermaschinen oder Erregerstromquellen. Um die Belastung der Maschinen zu erkennen, genügt es auch nicht mehr wie bei Gleichstrom, nur allein die Stromstärke neben der Spannung zu messen, sondern es wird, da mit dem Leistungsfaktor zu rechnen ist, die Anwendung von Wattmetern (Leistungszeigern) erforderlich. Die Erregung der einzelnen Wechselstromgeneratoren kann durch angebaute Erregermaschinen erfolgen, oder es kann Zentralerregung von einem besonderen Gleichstromnetz aus angewandt

werden. Im ersteren Falle kommen am besten Hauptstrommaschinen in Anwendung. Der Erregerkreis erhält dann einen Stromzeiger und einen Regulierwiderstand zum Einstellen der Erregung der Wechselstromdynamo. Größere Wechselstromanlagen erhalten Zentralerregung. Fig. 172 stellt das Schema einer Drehstromanlage mit Zentralerregung dar. Der Gleichstrom konstanter Spannung wird von Nebenschlußmaschinen erzeugt, die von besonderen Maschinen (Dampfmaschinen, Turbinen oder Drehstrommotoren) angetrieben werden. Es sind stets zwei Erregermaschinen vorzusehen, damit Reserve vorhanden ist. Werden die

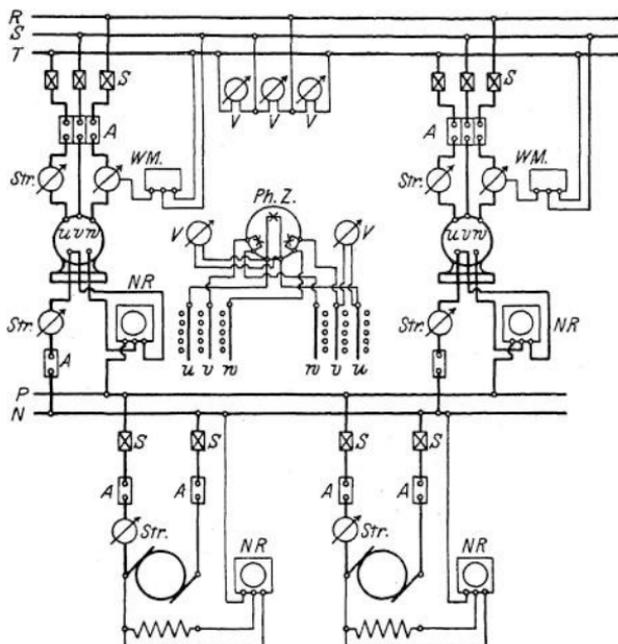


Fig. 172.

Maschinen durch Drehstrommotoren angetrieben, so wird zur ersten Inbetriebsetzung eine fremde Stromquelle erforderlich, außerdem sieht man eine Batterie als Reserve vor. Auf der Wechselstromseite sind außer den Schaltern, Sicherungen, Stromzeiger, Leistungszeiger (Schaltung in Fig. 172 nach Schema auf S. 1410, Fig. 96) drei Voltmeter an den Sammelschienen und eine Vorrichtung zum Phasenvergleich (beim Parallelschalten) vorgesehen. In Hochspannungsanlagen werden statt der Sicherungen meist Maximalrelais vorgesehen. Diese sind meist an die Schalter, die hier als Ölschalter ausgeführt sind, angeschlossen. Die Meßinstrumente erhalten in Hochspannungsanlagen Anschluß an Meßtransformatoren (s. Fig. 173 und 174). Bei Hochspannung wendet man auch vorteilhaft ein Doppelsammelschienensystem an, da dies Arbeiten am Netz erleichtert und Betriebsstörungen durch geeignete Umschaltung schnell behoben werden können.

d) Parallelschalten von Wechselstrommaschinen.

Wechselstrommaschinen, die parallel geschaltet werden sollen, müssen gleiche Spannung, gleiche Frequenz, möglichst gleiche Kurvenform und gleiche Phase haben, sie müssen im Tritt sein. Um die Phasen zu vergleichen, bedient man sich der Glühlampen, die entweder direkt oder unter Zwischenschaltung von Transformatoren (bei Hochspannung) zwischen die Pole der aufeinander zu schaltenden Maschinen geschaltet werden. Verbindet man korrespondierende Klemmen

der Maschinen über Lampen, so sind die Maschinen im Tritt, wenn die Lampen dunkel bleiben; es kann parallel geschaltet werden, wenn die sonstigen Bedingungen (siehe oben) erfüllt sind (Dunkelschaltung). Vertauscht man die Lampenleitungen, so daß nicht zusammengehörige Pole der Maschinen über Lampen verbunden sind, so sind die Maschinen im Tritt, wenn die Lampen hell brennen (Hellschaltung). Um bei Dunkelschaltung, die gebräuchlicher ist als Hellschaltung, besser erkennen zu können, daß die Lampen keine Spannung erhalten, daß also parallel geschaltet werden kann, schaltet man vorteilhaft parallel zu einer Lampe ein sog. Nullvoltmeter, d. i. ein Voltmeter, welches die höchst auftretende Spannung verträgt, kleine Spannungen aber noch gut ablesen läßt. Solange die Maschinen noch nicht im Tritt sind, und solange die Frequenzen der Maschinen nicht übereinstimmen, werden die Lampen periodisch hell und dunkel. Um Drehstrommaschinen parallel zu schalten, muß außer obigen Bedingungen noch die Bedingung erfüllt werden, daß der Drehsinn des Drehfeldes der beiden Maschinen derselbe ist. Um Phasengleichheit festzustellen, kann man wieder Lampen (hier drei) in Hell- oder Dunkelschaltung anwenden. Vertauscht man nach Michalke an einer Drehstrommaschine die Anschlüsse zweier Lampen, so leuchten die Lampen nacheinander auf. Die Reihenfolge des Aufleuchtens der in einem Kreise angeordneten Lampen läßt erkennen, welche der parallel zu schaltenden Maschinen schneller oder langsamer läuft. Im Schema (Fig. 172) ist die Schaltung nach Michalke vorgesehen. Phasengleichheit herrscht, wenn die im Schema oben gezeichnete Lampe dunkel ist.

Da beim Parallelschalten von Wechselstrommaschinen Frequenz und Phase genau eingestellt werden müssen, ist für den Antrieb der Maschinen erforderlich, daß die Drehzahl mit größter Genauigkeit einreguliert werden kann. Abgesehen von Wasserturbinenantrieb, wo die Regulierung durch Belastung der Maschinen erfolgt, wird die genaue Einstellung der Drehzahl durch Verstellung des Regulators der Antriebsmaschine vorgenommen. Dies kann auch von der Schalttafel aus geschehen, wenn man das Laufgewicht oder die Federspannung des Regulators mit Hilfe eines kleinen am Regulator angebauten Elektromotors, der von der Schalttafel aus bedient wird, verschiebt bzw. ändert. Die Belastung der einzelnen parallelgeschalteten Maschinen kann durch die Erregung der Maschinen nicht eingestellt werden. Bei Änderung der Erregung der einen oder anderen Maschine würde diese nur phasenverschobenen Strom aufnehmen (s. S. 1435, Synchronmotor). Die Änderung der Leistung einer Wechselstrommaschine kann nur durch Änderung des Antriebsdrehmomentes, also durch Verstellung des Regulators erfolgen. Der Zentrifugalregulator muß gut statisch sein, damit er nicht in Schwingungen gerät (eventuell Ölbremsen des Regulators). Geschwindigkeitsänderung etwa 5% zwischen Vollbelastung und Leerlauf ohne Regulatorverstellung. Parallelschaltete Wechselstrommaschinen laufen synchron. Eine Voreilung der einen Maschine würde eine Mehrbelastung, die bremsend wirkt, eine Nachteilung würde eine Entlastung, die antreibend wirkt, bedeuten. Die Maschinen halten sich durch die „synchronisierenden Kräfte“ im Tritt. Der Parallelbetrieb kann durch Schwingen (Pendeln) der Maschinen gestört werden. Eigenschwingungen können bei jeder Art Antrieb der Maschinen vorkommen und treten immer auf, wenn der Synchronismus gestört ist (z. B. bei Parallelschalten einer Maschine, die nicht vollkommen im Tritt war). Infolge der synchronisierenden Kraft wird das dynamische Gleichgewicht unter Schwingen wieder hergestellt. Dauer der einzelnen Schwingungen ist abhängig von dem Trägheitsmoment der bewegten Massen und von der Selbstinduktion der Maschine. Meist klingen Eigenschwingungen infolge von Dämpfung bald aus.

Erzwungene Schwingungen der Wechselstrommaschinen werden durch die Antriebsmaschine verursacht, wenn deren Antriebsdrehmoment während einer Umdrehung nicht konstant ist (Kolbenmaschinen, Gasmaschinen). Arbeitet eine Maschine allein auf das Netz, so läßt sich der Ungleichförmigkeitsgrad

$\frac{n_{\max} - n_{\min}}{n_{\text{mittel}}}$ aus dem Tangentialdruckdiagramm und den Schwungmomenten

nach den Regeln des Maschinenbaues ermitteln. Arbeiten Wechselstrommaschinen parallel, so tritt durch „Mitschwingen“ der Maschinen (Eigenschwingungen mit den erzwungenen Schwingungen) eine Vergrößerung des Ungleichförmigkeitsgrades ein. Nach Görges ist diese Vergrößerung gegeben durch den „Resonanzmodul“:

$$\zeta = \pm \frac{T_0^2}{T_0^2 - T_a^2},$$

wenn keine Dämpfung vorhanden ist. Hierbei ist:

T_0 die Eigenschwingungsdauer der Wechselstrommaschinen;

T_a die Schwingungsdauer der Antriebsmaschinen.

Ist $T_0 = T_a$ so wird $\zeta = \infty$; d. h. Parallelbetrieb ohne Dämpfung ist nicht möglich, da Resonanz vorhanden. Die Maschinen fallen aus dem Tritt. Für sicheren Betrieb soll $T_0 > T_a$ gewählt werden. Man erreicht dies durch große Schwungmassen (s. S. 1426). Die Schwingungen selbst können durch die Dämpfung (Dämpferwicklung nach Hutin und Leblanc) abgeschwächt resp. verhindert werden. Dämpfung ist nicht immer angebracht. Schwache Dämpfung verhindert die Eigenschwingungen, zu starke Dämpfung verhindert die erzwungenen Schwingungen, d. h. sie verhindert die Wirkung der Schwungmassen. Dies bedeutet Leistungsschwankungen der Maschinen. Dämpferwicklung meist bei Maschinen mit ziemlich gleichförmigem Antrieb und wenig Schwungmassen und bei denen leicht starke Schwingungen infolge Resonanz auftreten. (Sehr eingehende Abhandlungen über Parallelbetrieb von Wechselstrommaschinen s.: Görges, E. T. Z. 1900, 1903 und Phys. Zeitschr. 1909, sowie Rosenberg, E. T. Z. 1902, 1903.)

e) Leitungen. Nach den „Vorschriften für die Errichtung elektrischer Starkstromanlagen nebst Ausführungsregeln“ des Verbandes Deutscher Elektrotechniker gilt folgendes:

Leitungen müssen, soweit nicht die Verwendung blanker Leitungen gestattet ist, mit einer Isolierhülle versehen sein, deren Haltbarkeit und Isolierfähigkeit den Betriebsverhältnissen entspricht. Man unterscheidet:

Blanke Leitungen, besonders für Freileitungen. Material, Kupfer, Aluminium, Eisen, Bronze, letztere mehr aus Festigkeitsgründen. Verlegung auf Isolatoren (Porzellanglecken).

Gummiabandleitungen, nur geeignet zur festen Verlegung über Putz in trockenen Räumen für Spannungen bis 125 Volt.

Gummiaderleitungen (mit wasserdichter Isolierhülle) für feste Verlegung unter Putz nur in Röhren, über Putz für Spannungen bis 1000 Volt und zum Anschluß transportabler Stromverbraucher bis 500 Volt.

Spezialgummiaderleitung, geeignet zur festen Verlegung für jede Spannung, bei Anschluß transportabler Stromverbraucher bis 1500 Volt.

Panzeraderleitung, geeignet zur festen Verlegung für Spannungen bis 1000 Volt, bei transportablen Stromverbrauchern bis 500 Volt. Die Umklöppelung aus Stahldraht ist vor Rost und mechanischer Beschädigung zu schützen.

Rohr- und Falzdrähte, sind Gummiaderleitungen mit Metallmantel (feste Verlegung bis 1000 Volt).

Gummiaderschnüre, zur festen Verlegung für Spannungen bis 1000 Volt und zum Anschluß an transportable Stromverbraucher bis 500 Volt.

Fassungsdornen, zur Installation in und an Beleuchtungskörpern für Spannungen bis 250 Volt.

Pendelschnur, enthält eine Traglitze, geeignet für Schnurzugpendel bis 250 Volt Spannung.

Für Verlegung in der Erde oder in Kanälen kommen in Frage: Blanke Bleikabel, asphaltierte Bleikabel und armierte asphaltierte Bleikabel.

Elektrische Leitungen sind so zu bemessen, daß sie bei den vorliegenden Betriebsverhältnissen genügende mechanische Festigkeit besitzen und keine unzulässige Erwärmung annehmen können. Es gilt folgendes:

Belastungstabelle für isolierte Kupferleitungen und nicht im Erdboden verlegte Kabel
(§ 20 der Errichtungsvorschriften des Verbandes Deutscher Elektrotechniker).

Querschnitt in qmm	0,75	1	1,5	2,5	4	6	10	16	25	35	50	70	95	120	150	185	240	310	400	500	625	800	1000
Höchstzulässige Stromstärke in Amp.	9	11	14	20	25	31	43	75	100	125	160	200	240	280	325	380	450	540	640	760	880	1050	1250
Nennstromstärke für entsprechende Abschmelzsicherung in Amp.	6	6	10	15	20	25	35	60	80	100	125	160	190	225	260	300	360	430	500	600	700	850	1000

Blanke Kupferleitungen (nicht Freileitungen) bis 50 qmm unterliegen ebenfalls den Vorschriften der vorliegenden Tabelle. Mit Rücksicht auf die mechanische Festigkeit ist nach den Verbandsvorschriften der geringst zulässige Querschnitt: für Leitungen an und in Beleuchtungskörpern 0,75 qmm, für isolierte Leitungen bei Verlegung in Rohr oder auf Isolierkörpern, deren Abstand nicht mehr als 1 m beträgt 1 qmm, für blanke Leitungen in Gebäuden sowie für isolierte Leitungen in Gebäuden und im Freien, bei denen der Abstand der Befestigungspunkte mehr als 1 m beträgt 4 qmm, bei Freileitungen für Niederspannung 6 qmm, bei Freileitungen für Hochspannung 10 qmm.

Belastungstabelle für im Erdboden verlegte Kabel
nach den Normalen des Verbandes Deutscher Elektrotechniker.

Art des Kabels	Für Spannungen bis Volt	Zulässige Belastung in Ampere bei einem Querschnitt von qmm																					
		1	1,5	2,5	4	6	10	16	25	35	50	70	95	120	150	185	240	310	400	500	625	800	1000
Einleiter für Gleichstrom, mit und ohne Prüfdraht	700	24	31	41	55	70	95	130	170	210	260	320	385	450	510	575	670	785	910	1035	1190	1380	1585
Zweileiter, verselt	3000	—	—	42	53	70	95	125	150	190	230	275	315	360	405	470	545	635	—	—	—	—	—
Dreileiter, verselt	3000 bis 10 000	—	—	—	—	65	90	115	140	175	215	255	290	335	380	—	—	—	—	—	—	—	—
Dreileiter, verselt	3000	—	—	37	47	65	85	110	135	165	200	240	280	315	360	420	490	570	—	—	—	—	—
Vierleiter, verselt	3000 bis 10 000	—	—	—	—	60	80	105	125	155	190	225	260	300	340	—	—	—	—	—	—	—	—
Vierleiter, verselt	3000	—	—	—	—	34	43	57	75	100	120	150	185	220	250	290	330	385	445	—	—	—	—
Vierleiter, verselt	3000 bis 10 000	—	—	—	—	—	—	55	70	95	115	140	170	205	240	275	310	—	—	—	—	—	—

Der Tabelle ist eine Übertemperatur von 25° C und die übliche Verlegungstiefe von etwa 70 cm zugrunde gelegt. Sie gilt, solange nicht mehr als zwei Kabel im gleichen Graben nebeneinanderliegen. Gesondert verlegte Mittelleiter bleiben hierbei unberücksichtigt. Bei Anlaufung von Kabeln im Erdboden oder ähnlichen ungünstigen Verhältnissen empfiehlt es sich, die Höchstbelastung auf $\frac{3}{4}$ der in der Tabelle angegebenen Werte zu ermäßigen. Die in den Tabellen angegebenen Stromstärken dürfen nur bei Betrieben mit stark und schnell schwankender Belastung, z. B. bei Förderanlagen, Walzwerken und dergleichen, überschritten werden. Die Tabelle stellt keine unbedingte Vorschrift dar, sondern ist lediglich als Anhaltspunkt zu betrachten, weil die Betriebsverhältnisse bei Kabeln zu verschiedenen sind, um eine allgemein gültige Tabelle aufstellen zu können.

Gebäude		Verlegungsarten	Schalter und Steckdosen	Beleuchtungskörper
Wohngebäude	Keller	a) Gummiaderleitungen auf Keller-, Mantel- oder Porzellanrollen	wasserdicht auf Putz	wasserdichte Armaturen
		b) Gummiaderleitungen in verbleitem oder Stahlpanzerrohr	einfache auf Putz	einf. Deckenbeleuchtung
	Erd-, I.—IV. Geschoß	a) Gummiaderleitungen in verbleitem oder Messingrohr auf Putz	offen auf Putz oder unter Putz	nach Wahl
		b) Gummiaderlitze auf Putz, Herunterführungen in Rohr		
	c) Gummiaderleitungen in Gummi, verbleitem od. Stahlpanzerrohr unt. Putz			
Dachgeschoß	a) Gummiaderleitungen in verbleitem Rohr auf Putz b) Gummiaderleitungen auf Porzellanrollen	offen auf Putz	einfach	
Hauptleitungen	Im Keller in Rohr oder Kabel, als Steigeleitung in Rohr oder auf Register	—	—	
Geschäftsräume, Warenhäuser, Restaurants, Hotels usw.	Keller u. Dachgeschoß	In verbleitem oder Stahlpanzerrohr oder auf Keller-, Mantel- oder Porzellanrollen	offen auf Putz oder wasserdicht	einfach oder Armaturen
	Erd-, I.—IV. Geschoß	a) Gummiaderleitungen in Gummirohr, verbleitem oder Stahlpanzerrohr unt. Putz, mit Abzweigdosen in der Decke b) Gummiaderleitungen wie vor, unter Putz, ohne Abzweigdosen im Fußboden	offen auf Putz oder unter Putz	nach Wahl
	—	Hauptleitungen wie in Wohnhäusern nebst Not- und Wegebeleuchtung	—	—
Maschinen- und Kesselhäuser, allgem. Fabriken	Gummiaderleitungen auf Rollen oder Isolatoren, Herunterführungen durch Rohr geschützt	offen auf Putz oder wasserdicht	wasserdicht	
Zement-Fabriken	Gummiaderleitungen auf Isolatoren oder Mantelrollen, ev. säurefeste Leitungen, Herunterführungen in Rohr	wasserdicht	wasserdicht	
Fabriken mit säurehaltigen Dämpfen	Blanke Leitungen gestrichen auf Isolatoren oder säurefeste Leitungen, Herunterführungen in Stahlpanzerrohr	wasserdicht	Armaturen	
Fabriken mit explosionsgefährlichen Dämpfen	Die Räume selbst sowie Nebenräume komplett verschraubtes Rohrnetz (Stahlpanzerrohr)	wasserdicht verriegelt	verschraubte Armaturen	
Autogaragen	Gummiaderleitungen in verbleitem oder Stahlpanzerrohr	wasserdicht verriegelt	Armatur-, Handlampen n.d. neuen Min.-Verordnung	
Brauereien, Brennereien und landwirtschaftl. Betriebe	Gummiaderleitungen oder säurefester Draht auf Isolatoren, Herunterführungen möglichst zu vermeiden.	wasserdicht Stallschalter	Armaturen	

Die vorstehende Zusammenstellung (veröffentlicht von der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft, Berlin) soll eine annähernde Übersicht über die bei der Leitungsverlegung zu wählenden Materialien in den verschiedenen Räumlichkeiten bieten.

Berechnung der Leitungen. Für die Bestimmung des Leiterquerschnitts kann ausschlaggebend sein: die Wirtschaftlichkeit, der zulässige Spannungsverlust oder die Erwärmung der Leitung. Mit Rücksicht auf Wirtschaftlichkeit wird der Leiterquerschnitt so berechnet, daß die gesamten Kosten der Leitungsanlage (Errichtung, Verzinsung, Abschreibungen, jährlicher Energieverlust in der Leitung und im Kraftwerk) ein Minimum werden. Da die Rechnung nach diesen Gesichtspunkten meist nicht durchführbar ist, berechnet man die Leitung meist so, daß der Leitungsverlust in der Leitung in zulässigen Grenzen bleibt. Ist die Spannung an der Verbrauchsstelle festgelegt, so muß die Leitung unter Grundlegung des zulässigen Spannungsverlustes mit Berücksichtigung der größten zu erwartenden Stromstärke berechnet werden. Speiseleitungen zu Speisepunkten, Verbindung dieser untereinander zum Ausgleich der Spannungsverluste. Den Speiseleitungen soll auf ihre ganze Länge kein Strom entnommen werden. Man läßt in ihnen 6 bis 15% Spannungsverlust zu. Kommt die zulässige Erwärmung der Leitung bei der Berechnung in Frage, so werden die Querschnitte nach der auf S. 1464 gegebenen Belastungstabelle gewählt.

Es sei

E_1 = Spannung am Anfang der Leitung in Volt;

E_2 = Spannung am Ende der Leitung in Volt;

Ω_1 und Ω_2 die Leistungen am Anfang und Ende in der Leitung in Watt;

R der ohmsche Widerstand der einfachen Leitung in Ohm;

I die Stromstärke in der Leitung in Ampere;

q der Querschnitt der Leitung in mm^2 ;

l die Länge der einfachen Leitung in m;

p_{Ω} der prozentuale Leistungsverlust in der Leitung bezogen auf die Leistung Ω_2

φ_1 und φ_2 die Winkel der Phasenverschiebung am Anfang und Ende der Leitung.

Wird der Strom nur am Ende der Leitung abgenommen, so beträgt bei Gleichstrom:

der Spannungsverlust $V_E = E_1 - E_2 = 2 \cdot I \cdot R$ Volt;

$$R = \frac{l \cdot \sigma}{q} \text{ Ohm; } \sigma = \text{spez. Widerstand}$$

der Leistungsverlust $V_{\Omega} = \Omega_1 - \Omega_2 = 2 I^2 \cdot R$ Watt.

Wird p_{Ω} angenommen, so errechnet sich der Leiterquerschnitt aus:

$$q = \frac{200 \cdot l \cdot \Omega_2 \cdot \sigma}{p_{\Omega} \cdot E_2^2} \text{ mm}^2.$$

Bei Wechselstrom und Drehstrom gelten dieselben Formeln wie für Gleichstrom, wenn die Belastung induktionsfrei ist (Glühlichtbelastung). Ist die Belastung induktiv, so wird bei Wechselstrom (einphasig)

$$q = \frac{200 \cdot l \cdot \Omega_2 \cdot \sigma}{p_{\Omega} E_2^2 \cos^2 \varphi_2},$$

bei Drehstrom

$$q = \frac{100 \cdot l \cdot \Omega_2 \cdot \sigma}{p_{\Omega} E_2^2 \cos^2 \varphi_2}.$$

Da man zur Fortleitung ein und derselben Leistung bei Drehstrom bei gleichem Leistungsverlust nur die Hälfte des bei Einphasenstrom erforderlichen Querschnittes nötig hat, folgt, daß der Kupferaufwand bei Drehstrom

(3 Leitungen) nur $\frac{3}{4}$ von dem bei Einphasenstrom (2 Leitungen) erforderlichen beträgt.

Der GesamtLeistungsverlust wird bei Einphasenstrom $V_g = 2 I^2 R$ Watt,
bei Drehstrom $V_g = 3 I^2 R$ Watt.

Spannungsverluste V_B bei Wechselstrom.

Sind die Leitungen frei von Selbstinduktion und Kapazität, so gelten für den Spannungsverlust dieselben Formeln wie bei Gleichstrom. Es ist nur ohmscher Spannungsverlust vorhanden.

Dieser ist bei Einphasenstrom $V_B = 2 \cdot I \cdot R$ Volt,
bei Drehstrom $V_B = \sqrt{3} I \cdot R$ Volt.

Meist besitzt die Leitung noch Selbstinduktion (Freileitungen). Der induktive Spannungsabfall von der Größe $E_s = 2 \pi \nu L I$ addiert sich geometrisch zum ohmschen Spannungsabfall

$$V_B = 2 I R \hat{+} 2 \pi \nu L I.$$

Vorteilhaft wird die Rechnung auf graphischem Wege durchgeführt. Der ohmsche Spannungsabfall fällt in Richtung von I , der induktive Spannungsabfall steht senkrecht auf I . Bei langen Freileitungen kann E_s ziemlich hohe Werte annehmen. Berechnung von L für eine Hin- und Rückleitung s. S. 1386. Über Skineffekt s. S. 1398. Bei Kabeln und bei hohen Spannungen spielt die Kapazität eine wesentliche Rolle. Die Wirkung der Kapazität kann so groß werden, daß im Netz ein beträchtlicher Strom fließt, ohne daß am Ende der Leitung Verbrauchsapparate angeschaltet sind. Die Kapazität einer Leitung äußert sich in einer Kapazitätsspannung

$$E_c = \frac{I}{2 \pi \nu C}, \quad \text{und es ist hier} \quad V_B = 2 I R \hat{+} \frac{I}{2 \pi \nu C}.$$

Schwierig werden die Rechnungen, wenn in einer Leitung Selbstinduktion und Kapazität zusammen vorhanden sind.

Verteilungsleitungen gehen von den Speisepunkten aus und dienen, wie der Name sagt, zur Weiterführung der elektrischen Energie nach den einzelnen Konsumstellen. Verteilungsleitungen können als offene oder geschlossene Leitungen ausgeführt werden.

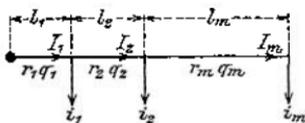


Fig. 173



Fig. 174. Schematische Darstellung der Schnittmethode.

Offene Leitungen haben ihre Stromzuführung nur auf einer Seite (Fig. 173). Den geschlossenen Leitungen wird der Strom an zwei oder mehreren Stellen (Speisepunkten) zugeführt. (In Fig. 174 bei I u. II).

Ringleitungen sind solche, die von einem Speisepunkt ausgehen und zu ihm wieder zurückführen. Sie stellen also auch geschlossene Leitungen dar. Von den Verteilungsleitungen gehen wieder die eigentlichen Installationsleitungen zu den Verbrauchern ab. Meist läßt man in der Verteilungsleitung und der Installationsleitung zusammen einen Spannungsverlust von 4% der Verbraucherspannung zu und berechnet die Leitung auf konstanten Querschnitt auf der ganzen Länge oder auf konstante Stromdichte. Seltener wird die Leitung auf geringsten Kupferaufwand berechnet.

In Fig. 173 sei eine offene Leitung schematisch dargestellt (als Doppelleitung zu denken). Am Knotenpunkt wird der Strom I_1 zugeführt. In der Entfernung l_1 wird i_1 ; $l_1 + l_2$ wird i_2 usw. von der Verteilungsleitung abgenommen. Es ist ersichtlich, daß der gesamte Spannungsabfall in der ganzen Leitung gleich ist der Summe der Spannungsverluste in den einzelnen Leiterabschnitten l_1 ; l_2 usw., mithin:

$$V_E = 2 \left(I_1 \frac{l_1 \sigma}{q_1} + I_2 \frac{l_2 \sigma}{q_2} + \dots + I_m \frac{l_m \sigma}{q_m} \right) = 2 \sum_1^m \frac{I \cdot l}{q} \cdot \sigma.$$

Hier bedeuten I die Stromstärken in den einzelnen Leiterstrecken, l die einfachen Längen der Leiterabschnitte. Ist r = Widerstand der einfachen Länge eines Leiterabschnittes in Ohm, so kann man schreiben:

$$V_E = 2 [(i_1 + i_2 + i_m) r_1 + (i_2 + i_m) r_2 + i_m r_m] \\ = 2 [i_1 r_1 + i_2 (r_1 + r_2) + i_m (r_1 + r_2 + r_m)].$$

Da die Gleichung die Form einer Momentengleichung hat, kann $\frac{V_E}{2}$ auch graphisch mit Hilfe eines Kräfte- und Seilpolygons gefunden werden. Wird für die ganze Verteilungsleitung konstanter Querschnitt gewählt, was meist der Fall ist, so wird

$$q = \frac{2 \sigma \sum_1^m I \cdot l}{V_E} \text{ mm}^2.$$

Der gefundene Querschnitt muß selbstverständlich den auf S. 1464 in der Belastungstabelle wiedergegebenen Bedingungen des V. D. E. entsprechen.

Geschlossene Leitungen können nach der Schnittmethode von Herzog berechnet werden. In Fig. 174 erhalte die geschlossene Leitung von zwei Seiten (bei I und II) Stromzufuhr. Die Spannungen bei I und II seien V_I und V_{II} . V_I kann gleich V_{II} sein, wenn die Leitung eine geschlossene Ringleitung ist.

Die Abzweigströme i_1, i_2, i_3, i_4 werden teils von I , teils von II aus gedeckt. Es gibt in der Leitung einen Punkt (Schwerpunkt), z. B. Punkt 2, in dem sich die von beiden Seiten zufließenden Ströme treffen. Die Leitung kann bei 2 aufgeschnitten werden, und i_2 zerfällt in die beiden Ströme x_2 und y_2 , wovon x_2 von links, y_2 von rechts aus gedeckt wird. An dem Schnittpunkt sind die Spannungen von links und rechts her gleich. Es muß sein:

Spannung bei I minus Spannungsverlust von I bis zum Schnittpunkt = Spannung bei II minus Spannungsverlust von II bis zum Schnittpunkt.
oder

$$V_I - 2(i_1 R_1 + x_2 R_2) = V_{II} - 2[i_4 (R - R_4) + i_3 (R - R_3) + y_2 (R - R_2)]$$

da $x_2 + y_2 = i_2$ und $V_I - V_{II} = p$ wird

$$x_2 = \frac{p}{2R} + i_2 + i_3 + i_4 - \frac{i_1 R_1 + i_2 R_2 + i_3 R_3 + i_4 R_4}{R}.$$

$$y_2 = i_2 - x_2.$$

Der Schnittpunkt ist richtig getroffen, wenn die Vorzeichen von x und y gleich sind. (Bei einer Ringleitung ist $p = 0$, da Punkt I und II zusammenfallen.) Die Weiterrechnung erfolgt so, als ob man zwei offene Leitungen zu berechnen hätte.

VIII. Wahl der Stromart und der Spannung.

Bei der Wahl des Stromsystems für eine neu zu beschaffende Anlage können die mannigfaltigsten Umstände ausschlaggebend sein. Besonders von Einfluß sind: Art des Betriebes, Ausdehnung des Gebietes, welches für die Stromversorgung in Frage kommt, und Größe der zu erzeugenden Leistung.

a) **Gleichstrom**, wird immer zu wählen sein, wo eine Aufspeicherung der elektrischen Energie in Akkumulatoren gewünscht wird, auch hat Gleichstrom bei kleineren Anlagen viele Vorteile. Gleichstrombogenlampen vorteilhafter als Wechselstrombogenlampen; außerordentlich hohe Regulierfähigkeit der Gleichstrommotoren, Fortfall der Ummagnetisierungsarbeit in Elektromagneten. Bei Anwendung einer Batterie kann die Leistung der Zentralmaschinen kleiner gewählt werden, da die Batterie zu Zeiten hohen Energiebedarfes als Reserve einspringt, die Belastungsspitzen der Maschinen ausgeglichen werden.

Zweileiteranlagen meist mit 220 Volt Spannung für kleine Anlagen und ganz geringer Ausdehnung.

Dreileiteranlagen mit 2×220 Volt Spannung für Anlagen mäßiger Ausdehnung.

Spannungsgrenzen bei Gleichstrom etwa 2000 Volt (Bahnen mit besonderem Bahnkörper). Für Fabrikanlagen würde als höchste Spannung 440 Volt in Frage kommen. Zuweilen ein Vielleitersystem, um die Regulierbarkeit der angeschlossenen Motoren zu erhöhen.

b) **Wechselstrom**. Einphasenstrom und Drehstrom. Ersterer nur, wenn ausschließlich Lichtbelastung oder bei Bahnen. Vorteile des Wechselstromes sind: Transformierbarkeit (bis zu den praktisch angewandten Spannungen von 135 000 Volt) und damit Möglichkeit, auf sehr weite Entfernungen die elektrische Energie zu übertragen. Es kommt fast ausschließlich Mehrphasenstrom, speziell Drehstrom, für Fernleitung in Frage. Bei Anlagen in Städten verlegt man neben dem Hochspannungsnetz ein Niederspannungsnetz, um nicht kleine Abnehmer mit Hochspannung zu belästigen und um eine geringe Zahl Transformatoren (also geringe Leerlaufverluste) zu erhalten. In größeren Fabrikanlagen kommt, wenn von den Motoren nicht große Regulierfähigkeit verlangt wird, Drehstrom in Anwendung. Drehstrom findet ferner ausschließlich Anwendung in Anlagen, wo große Konstanz der Drehzahl (Webereien) erforderlich oder wo mit Feuer- oder Explosionsgefahr zu rechnen ist (z. B. Bergwerke, chemische Fabriken, Pulverfabriken, Mühlen, Spinnereien und Webereien).

Sachverzeichnis.

Abdampfinjektor	1010	Anstellwinkel	1229	Aufzug, Steuerungsverriegelung	1223
— -leitung	1048, 1051	Anthrazit	503	—, Transmissions-	1260
— -sammler	1016	Antrieb, Satz vom	241	—, Türverschlüsse für	1223
— -turbine	1016	Antriebsarten für Hebezeuge	1108, 1113	—, Zulässige Geschwindigkeit	1200, 1204
— -verwertung	1012	Antriebsorgane (für Schnitt- und Schaltbewegung)	1234	Ausdehnungskoeffizient	353
— -vorwärmer	829	Armatur, Dampfkessel-	849	— -rohr	742
— —, Abmessungen	829	— -stutzen	857	Ausdrücke, unbestimmte	167
— —, Ausführung	830	Arndtsche Kupplung	632	Ausfluß (Hydraulik)	343
Abhitze, Befuerung durch	788	Arbeit	236	— von Dämpfen	374
Abschlammventil (Dampfkessel)	851	— -spunkt von Zentrifugal-	980	Ausgleichrolle für Winden	1069, 1125
Absperrschieber	750	— -swiderstand beim		Ausleger-Laufkran	1148
— -ventil	745, 850	Bohren	1231	Auspufftopf	1054
Abstufung der Drehzahlen (Werkzeugmasch.)	1234	— — beim Drehen	1229	Ausrückbare Kupplung	623
Abwärmeverwertung	1012	— — beim Fräsen	1232	Aussetzer-Regelung	902
— bei Großgasmaschinen	1020	— — beim Hobeln	1229	Autogene Schweißung	535
— — Dieselmotoren	1020	— — beim Schleifen	1233	Axer-Feuerung	784
Achsen	602	— — beim Stoßen	1229	Axialschub in Dampfturbinen	992
— -regler	1031	— -swinkel bei Werkzeugen	1228	— — Wasserturbinen	967, 969
Achshalter	1072	Asbest	561	— — Zentrifugalpumpen	980, 984
Adamson-Ring	840	Astatischer Regler	1026, 1028	Axialturbine	953
Adiabate des Wasserdampfes	372, 374	Asynchronmotor	1435		
Adiabatische Zustandsänderung	381, 384	—, Induktionsmotor	1435		
A. E. G.-Turbine	1000	—, Kommutatormotor	1442		
— —, Regelung	1005	Atomgewichte	527		
— —, Turbokompressor	1007	Aufbringen der Werkzeuge	1286		
Akkumulator	1412	Aufhängung der Last (Hebezeuge)	1097		
—, alkalischer —	1413	Auflagerdruck (bei Zapfen)	596		
—, Aufstellung der — -batterie	1413	— (bei Schiebern)	867		
—, Blei-	1412	Aufnehmerdruck	896		
—, Edison-	1413	— -heizung	896		
— -kapazität	1413	Auftrieb	352		
— -ladung	1412	Aufzug, Akten-	1199		
— -wirkungsgrad	1413	- -bremse	1210		
Aktenaufzug	1199	- -druckwasser-	1200		
Aktionsturbine (Dampf)	990	- -Elektrischer	1204		
— (Wasser)	953	- -fahrkorb	1212		
Aktionswirkung in Turbinen	951	- -fahrschacht	1212		
Alliansche Umsteuerung	890	- -fangvorrichtung	1217		
Aluminium	551	- -führung	1212		
Amperesche Schwimmerregel	1387	- -gegengewicht	1211		
Analytische Geometrie der Ebene	106	—, Hand-	1199		
— — des Raumes	208	—, Lasten-	1204		
Anker (Dynamo)	1415	- -maschine	1206		
— -rückwirkung	1423	—, Paternoster-	1225		
— -wicklung	1415	—, Personen-	1205		
Anlassen von Gasmaschinen	910	—, Polizeiverordnung			
— — Hauptstrommotoren	1192	für —	1198		
— — Oelmaschinen	915, 918	- -Regler	1221		
Anlasser für Elektromotoren	1432, 1439	- -Schlauffeilausrückung			
— — elektr. Hebezeuge	1192	für —e	1222		
		—, Sicherheitsvorrichtungen für —e			
		—, Speise-	1217		
		—, Steuerung für elektrische —e	1213		
				Bach-Schüle, Gesetz von	391
				Backenbremse	1083
				Balata	562
				— -riemen	680
				Bandbremse	1086
				— -kupplung	622
				— —, ausrückbare	624
				Baustoffe (Festigkeit)	396
				Beaufschlagung der Turbinen	953
				Behälternietung	576
				Beharrungsregler	1032
				Beleuchtung, elektrische	1451
				—, Bogenlampen-	1452
				—, Glühlampen-	1452
				—, Grundbegriffe	1451
				—, Ungleichmäßigkeit	
				der —	1452
				—, Verteilung der —	1454
				Bennkupplung	628
				Benzin	504
				Beobachtungsfehler, Theorie der	65
				Berielungskondensator	1038
				Berührung zweier Kurven	164
				Beschleunigung	213
				—, Fall-	216
				—, Zerlegung der	216
				—, sdruck	234
				Beschickmaschine	1189
				Beton	560
				Bettplatte (Drehbank)	1296

- Bewegung, beschleunigte 214
 — eines Punktes 213
 —, geradlinige 213
 —, krummlinige 216
 —, Zusammensetzung
 der — -en 221
 — -sgröße 241, 254
 — -lehre 213
 Bickford-Getriebe 1254
 Biegungsarbeit 452
 — -federn 477
 — -sfestigkeit 419
 — -sformeln 436
 — -smoment 420
 — -sspannung 425
 — und Drehung 469
 — und Schub 468
 Binomischer Satz 44, 89
 Biot-Savartsches Gesetz 1376
 Bleche 528
 Blechschornstein, Ausfüh-
 rung 803
 —, statische Berechnung 803
 Blei 551
 Blockeinsetzmaschine 1190
 Bockkran 1150
 —, fahrbarer 1151
 —, feststehender 1150
 Bogenlampe 1452
 —, Ausstrahlungskurven 1453
 —, Dauerbrandlampe 1454
 —, Effektverbrauch 1452
 —, Flammenbogenlampe 1454
 —, Hauptstromlampe 1453
 —, Moorelicht- 1453
 —, Nebenschlußlampe 1453
 —, Quarzlampe 1454
 —, Reinkohlenlampe 1454
 Bogendifferential 190
 — -höhe des Kreises (Tafel) 36
 — -länge 189
 — -länge des Kreises 36
 Bohren (Arbeitswiderstand) 1231
 Bohrmaschine 1322
 —, Aufnahme der Arbeits-
 drucke 1322
 —, Ausführungen 1327
 —, Bohrtisch 1326
 —, Entwurf 1364
 — n-Gestell 1322
 —, Grundplatte 1326
 —, Schaltbewegung 1325
 —, Schnittantrieb 1325
 —, Spindellagerung 1323
 —, Verbindung der Spindel
 mit Gestell 1324
 Bolzen 592
 — -kupplung, ausrückbare 624
 Borsig-Kompressorventil 943
 — -schieber 753
 Bosch-Zündung 905
 Braunkohle 501
 Braunkohlenteergruppe 505
 Brechung der Induktions-
 linien 1375
 Bremse, Backen- 1083
 —, Band- 1086
 —, Differential- 1088
 —, Elektrische — 1120
 —, Elektromagnetisch be-
 tätigte — 1085, 1087
 —, Fall- 1221
 —, Fliehkraft- 1091
 —, Kegel- 1086
 —, Lamellen- 1089
 Bremse,, Lastdruck- 1093
 — -lüftmagnet 1194
 — -lüftmotor 1195
 —, mechanische — für
 Hebezeuge 1082
 —, Senksperr- 1093
 —, Sperrad- 1089
 Brennsamagnet 1194
 Brennpunkt (Verbrennung) 499
 — der Ellipse 115
 — der Hyperbel 118
 — der Parabel 112
 Brennstoff, fester 500
 —, flüssiger 504
 —, gasförmiger 508
 —, Heizwert 521
 —, Lagerung 510
 —, Leistungsfähigkeit 765
 — -pumpe (Dieselmasch.) 920
 — -verteilung bei offener
 Düse (Dieselmasch.) 918
 Bronsmotor 918
 Bronzerohre (Tabelle) 740
 Bruttoverdampfung 765
 Bürstenkupplung 631
 Cachinkupplung 622
 Calypsoläger 636
 Cardanische Formel für ku-
 bische Gleichungen 60
 Cardanisches Gelenk 621, 1266
 Cariofeuerung 779
 Carnotscher Kreisprozeß 365
 Cauchysches Konvergenz-
 kriterium 87
 Charakteristik der Gleich-
 strommaschine 1424
 — der Regulatoren 1027
 — der Wechselstromma-
 schine 1428
 C-Kurven (bei Regula-
 toren) 1027
 Chemische Zusammenset-
 zung technisch wichtiger
 Stoffe 527
 Clapeyronsche Gleichung 371
 Collmann-Steuerung 884, 885
 Collmoldynamo 1414
 Coriolische Zusatzbeschleu-
 nigung 223
 — Zusatzkraft 244
 Corliss-Schränkung 874
 — -Steuerung 873
 Cosinus (Tafel) 31
 Cosinus φ (Leistungsfaktor)
 1390
 Cosinussatz 77
 Cotangens (Tafel) 33
 Coulombsches Gesetz 1379
 Cremonaverfahren 315
 Culmannsches Verfahren
 275, 314
 Curtis-Rad 992, 1000
 d'Alembertsches Prinzip 252
 Daltonsches Gesetz 376
 Dampf, nasser 368
 —, überhitzter 372
 — -Tabellen 369
 — -antrieb d. Hebemasch.
 1114, 1178
 Dampfgeschwindigkeit in
 Kanälen 862
 — in Rohrleitungen 1045
 Dampfkessel, Absperr-
 und Entleerungsvorrich-
 tungen 850
 Dampfkessel, Anker 848
 — -armatur 849
 — -ausrüstung 849
 — -böden 835
 —, Dampfraum 805
 —, Fabrikschild 857
 — -festigkeitsrechnung 843
 — -heizfläche 803
 — -heizröhren 839
 — -mannlochplatte 838
 — -manometer 857
 — -mantel 839
 — -mauerwerk 792
 — -putzlochverschluß 842
 — -sicherheitsventil 856
 — -speiseraum 805
 — -speisevorrichtung 849
 — -systeme 805
 —, Verbindung einzelner
 Teile der — 839
 —, -Verdampfungsoberfläche
 805
 —, -Verdampfversuchsbe-
 richt 768
 — -vernietungen 572
 — -wärmeverlust 766
 — -wasserraum 804
 — -wasserröhren 839
 — -wasserstandsvorrichtung
 852
 —, Wellenflamrohr 838
 — -wirkungsgrad 764, 765
 Dampfmanntel 893
 Dampfmaschine 859
 —, Dampfdiagramm 859
 —, Dampfleitung 1051
 —, Indizierte Spannung 861
 —, Kondensation 1035
 —, Pendelschwingungen
 bei Dynamoantrieb 1024
 —, Rückkühlung 1048
 —, Schwungradberech-
 nung 1021
 —, Steuerung 861
 —, Überhitzung 897
 —, Verbundwirkung 894
 —, Wirkungsgrad, mech. 861
 —, Zylinder 868, 874, 878
 Dampfraum 805
 Dampfstrahlgebläse (für
 Zugzeugung) 781
 Dampftrockner 743
 Dampfturbine 989
 —, Berechnung 996
 —, Dampfverbrauch 993
 —, Düsen 989, 1003
 —, Elementare Theorie 989
 —, Gehäuse 1001
 —, Gesamtanordnung
 der — 1000
 —, Konstruktive Angaben
 für — 999
 —, Lauf- und Leiträder 1003
 —, Regelung 1005
 —, Stopfbüchsen 1004
 —, Wirkungsgrade 993
 Deckenvorgelege 1245
 Dehnung 390, 393
 Dehnungsmaße im Beton 403
 Dehnungsrohr 742
 Dekrement, logarithm. —
 der gedämpften Schwin-
 gung 205

Deplicement	352	Drehbank, Bettplatte	1296	Durchbiegung von Trägern	436
Derrick-Kran	1166	—, Einrichtung zum Ge-		Durchgangsventil	747
Deutzer Motoren 906, 915, 916,	919	windeschneiden	1292	Düse der Dampfturbinen	375, 989, 1003
Dielektrizitätskonstanten,		—, Reitstock	1298	—, offene- der Diesel-	
Tabelle der	1382	—, Spindel	1291	maschinen	918
Dieselmachine	916	—, Support	1295	Dynamik starrer Körper	213
—, Angaben für Berech-		Drehfeldinstrument (elektr.)	1400	— flüssiger Körper	343
nung	920	— Drehmagnetinstrument	1400	Dynamomaschine	1414
—, Anlaßvorrichtung	918	— -spulinstrument	1399	—, Gleichstrommaschine	1414
—, Brennstoffnadeleinsatz	919	Drehen (Arbeitswider-		—, Wechselstrommaschine	1426
—, Brennstoffpumpe	920	stand)	1229	Dynamometrische Instru-	
—, Leistungssteigerung	917	Drehkran	1162	mente (elektr.)	1400
—, Luftpumpe	920	Drehkran, Ausleger-	1169, 1175	e (Grundzahl der Logarith-	
—, Plattenzerstäuber	919	—, fahrbarer	1178	men)	47
—, Regulierung	920	—, feststehender	1163	$e^{1/x}$	313
—, Zweitakt-Bauart	916	— mit doppelspurigem		Eichung von Strom- und	
Differentialbremse	1088	Unterwagen	1178	Spannungsmessern	1407
Differentialflaschenzug	311	— mit einspurigem Unter-		Edison-Akkumulator	1413
— -formeln	153	wagen	1185	Effektivwert des Wechsel-	
— -getriebe	1248	—, Portal-	1181	stroms	1389
— -gleichungen	197, 200	—, Säulen-	1163	Eigenschwingung	247
— -linien	157	—, Turm-, fahrh.	1184	— -en der Wechselstrom-	
— -pumpen	925	Drehscheibenkran	1171	maschine	1462
— -quotient, höherer der		Drehschauleln (Francis-		Einankerumformer	1445
unentwickelten Funktion	159	Turbinen)	965	Einflußfläche	326
— -quotient höherer Ord-		Drehstrom	1394	— -linien	325
nung	153	— -leistung	1396	Eingriffsbogen	648
— -quotient, partieller	151	Drehstromleistungsmes-		— -dauer	648
— -rechnung	147	ung	1408	— -linie	647
Differentiation	149	— -motor s. Induktions-		Einheitsgewichte	528
— -inverser Funktionen	150	motor u. Kommutator-		Einkammerkessel	814
— -logarith. Funktionen	150	motor.		Einmauerung der Dampf-	
— -trigonometrischer Funk-		Drehstrommotoren (für		kessel	792
tionen	150	Hebemasch.)	1117	Einphaseninduktionsmotor	1441
— -unentwickelter Funk-		Drehstromschaltung (Hebe-		Einsatzhärtung	534
tionen	151	masch.)	1122	Einselgreifer	1098
— -einer Potenz	149	Drehung und Biegung	469	Einspritzkondensator	1036
— -von Produkt und Quo-		— — Schub	465	Eintrittskondensator	893
tient	149	— — Zug	469	Eisen	530
— -von Summe und Diffe-		— -sfeder	478	—, schmiedbares	531
renz	149	— -sfestigkeit	449	— -beton	561
Dochtschmierung	633	Drehwerk	1167, 1174	Elastische Kupplung	621
Doerfel-Doppeldäunen	880	Dreieck, Berechnung recht-		Elastizitätsmaß	391
— -Regler	1032	winkliger — e	76	— -grenze	393
— -Ventilsteuerung	881	— Berechnung schiefwink-		— -zahlen	396
— -Zweikammersteuerung	873	liger — e	76	Elektrische Bremsung	1120
Dohnen-Leblanc-Kupp-		Dreieckschaltung	1395	Elektromotor	1429
plung	625	Dreika-Kupplung	632	— für Aufzug	1207
Doppelantrieb für Winden		Dreileiteranlagen	1458	— für unterbrochenen Be-	
(M. A. N.)	1131	Dreimotorenkran	1135	trieb	1116
— -enderkessel	813	Dreiphasenstrom	1394	—, Asynchronmotor	1435
— -generator	924	Drosselspule	1451	—, Gleichstrommotor	1429
Doppelbrücke (Thompson-		Druckfestigkeit	407	—, Synchronmotor	1434
sche)	1406	Druck und Drehung	469	Elektrische Verschiebung	1380
— -haken	1076	— — Schub	467	Elektrisches Feld	1379
— -kessel	808	— -gasanlage	923	Elektrische Beleuchtung	1451
— -laschennietung	574	— -höhenverbrauch in		— Bremsung	1120
— -punkt einer Kurve	166	Rohrleitungen	1056	— Leitung	1463
— -schiebersteuerung	868	— -knopfsteuerung	1215	Elektrischer Antrieb für	
— -schlußmotor	1431	— -lagerbremse	1093	Aufzüge	1204
Dowsongas	510	— -Luftantrieb für Hebe-		— — — Hebemaschinen	1115
Draht	549	zeuge	1114	— — — Werkzeugmaschi-	
Drahtseil	691, 696, 1066	— -stufung bei Dampftur-		nen	1345
— -rolle	1069	binen	990	Elektrizitätszähler	1403
— -tabelle	1068, 1070	— -wasserantrieb für Hebe-		—, Elektrolytische Zähler	1404
— -trieb	691	zeuge	1115	—, Induktionsmotorzähler	1404
— -trommel	1069	— -wasseraufzug	1200	—, Motorzähler	1403
Drall	255	— -wasserhebebock	1107	—, Pendelzähler	1403
Drehbank	1288	— -wechsel im Kurbel-		—, Pendelzähler	1403
—, auftretende Kräfte	1288	trieb	1025	Elektromagnetismus	1376
—, Ausführungen	1299	— -wirkung in Kolben-		Elektrostahl	532
—, Berechnung und Ent-		pumpen	926	Elektrostatik	1379
wurf	1349	Dunkerley-Formel	248		
—, Bett	1290	Duplexpumpe	937		

Elektrostatische Instrumente		Fette (Schmiermittel)	566	Frikions-Trommel	1071
Elektrotechnische Maßeinheiten	1402	Fieberbuchskessel	810	Führungen an Werkzeugmaschinen	1279
Elementarbewegungen	1371	— mit vorgehenden Heizröhren	811	— für gerade Wege (Werkzeugmasch.)	1281
El-Is-Kupplung	225	— mit rückkehrenden Heizröhren	813	—, Nachstellung der —	1283
Ellipse	623	—, stehende	814	— für kreisförmige Wege (Werkzeugmasch.)	1284
Ellipsoid	115	Feuerbrücke	778	—, Nachstellung der —	1286
Endausschalter für Kraue	211	—-geschränk	772	Füllung	859
— für Aufzüge	1196	—-schweißung	535	Füllungsausgleich bei Schiebersteuerungen	865
Energie, magnetische	1375	—-türen	772	— — Ventilsteuerungen	881, 886
Energie der Regulatoren	1026	Feuerung der Dampfkessel	769	— — Kulissensteuerungen	891
Enthärtung (des Wassers)	498	— für flüssige Brennstoffe	786	— — Lenker-Umsteuerungen	892
Entölung	1048	—, Einzelteile	772	Fundamentanker	590
Entropie	367, 379	—, Lage der — zum Kessel	769	Fußbodenkontakt f. Aufzüge	1225
— Temperatur-Diagramm	380	—, Wirkungsgrad	764	Gabelrahmen	719
Entzündungstemperatur	499	Feuerzüge	790	Galliche Kette	1063
Epicykloide	134	—, Ausführung	791	— Tabelle	1064
—, verlängerte	134	—, Lage	791	Galvanische Elemente	1411
—, verkürzte	134	—, Querschnitt	790	Galvanometer, ballistische	1403
Erdmagnetismus	1374	Finksche Drehschaukelung	965, 967	Garbe-Kessel	819
Erdöl	504	Fittings	735	Gase	359
— rückstand	505	Flächendichte (eines elektrisch geladenen Körpers)	1380	—, Ausdehnung durch Wärme	359
Etagenturbine	967	Flächengeschwindigkeit	221	—, Druckgasanlage	923
Eulersche Knickformel	203, 410	Flächgewinde	584	—, Endtemperatur und Druckzunahme bei Verbrennung	522, 524
Evolvente	135	Flächeninhalt bei Polarkoordinaten	176	—-feuerung	788
Evolventenverzahnung	651	Flächeninhalte	99, 174	—-generator	7
Expansionslinie	860	—, Bestimmung von —n	174	—-gewinde	735
—-steuerung	868	Flachregler	1031	—, konstante	359
Exponentialfunktion	151	Flammpunkt	499	—, Kraftgasanlage	921
—-kurve	145	Flammpunkt	499	—-leitung	1034
—-reihe	90	Flanzenrohr	840	—-maschine	898
Exzenter	707	—, Berechnung	844	—-mischungen	376
—-aufteilung bei Kulissensteuerungen	891	—-kessel	805	—-öl	505
—-aufteilung bei Schiebersteuerungen	868	—-versteifung	840	—-pumpe von Humphrey	1011
—-aufteilung bei Ventilsteuerungen	881	—, Wellen-	838	—-rohrgewinde	735
—, Relativ-	870	Flanschrohr	731	—, Sauggasanlage	923
Exzentrizität, numerische	116, 119	Flaschenzug		—, spezifische Wärme	359
Fachwerk	314	—, Differential-	1104	—-ventil	748
Fahrwerk für Krane	1111, 1137	—, gewöhnlicher	1104	—, Zustandsänderung	359
—, Winden-	1111, 1127	—, Stirnräder-	1105	Gay-Lussac-Gesetz	360
Faktorenrollenzug	309	—, Schrauben-	1104	Gedämpfte Schwingung	146
Fallbeschleunigung	216	Fliehkraft-Bremse	1091	Gefrierpunkt (Eispunkt)	353
Fangrost	779	—-bremse, elektr. gesteuerte	1092	Gefriedrücklinie	860
—-vorrichtung für Aufzüge	1217	Fließgrenze	392	—-maschine	1012
Faradaysche Gesetze	1384	Flügelradwassermesser	348	—-turbine	1013
Feder (Festigkeit)	476	Fluß Eisen	331	Gegengewicht (Kurbeltrieb)	704
—, Biegungs-	477	Flußstahl	531	Gegenstromkondensation	1036
—, Drehungs-	478	Fördergefäße	1097	—-senkbremsung	1122
—-keil	579	Formänderungsarbeit	451	Generatoren s. Kraftgaszeuger	921
Fehlerortsbestimmung	1407	Formstücke (Rohre)	730	Geometrie, kinematische	229
Feldstärke	266	Francis-Turbine	957	Geometrische Reihen	84
Feldstärke, magnetische	1373	—, Anordnung	966	Gerade Linie, Gleichung der	106
—, Satz vom Linienintegral der —	1376	—, Einzelteile	968	Geradeführung	791
—, elektrische	1379	—, Laufrad	959	Gesamthärte (des Wassers)	496
Fernsichtung	936	—, Leitrad	959	Gesamtungleichförmigkeitsgrad	1027
Ferranti-Schieber	753	—, Regulierung	965	Geschwindigkeit	213
Festigkeit von Federn	476	—, Saugrohr	957, 968	—-messer (Hydraulik)	347
— von Gefäßen, umlaufenden Scheiben, Platten	479	—, Schaufelform	959	—-rad (Curtis-Rad)	992, 1000
— von Stäben mit gerader Achse	407	—, Spiralgehäuse	964	—-regler für Aufzüge	1221
— von Stäben mit gekrümmter Achse	471	Fränkel-Feuerung	779	—-regler für Kraftmaschinen	1026
—, zusammengesetzte	461	Fräsen (Arbeitswiderstand)	1232	—-stufung bei Dampfmaschinen	990
—-lehre	389	Fräsmaschine	1331		
—-szahlen	396	—, Allgemeines	1331		
Fest- und Losscheibe	687	—, Arten	1332		
		—, Ausführungen	1337		
		—, Schaltantrieb	1333		
		—, Universalteilkopf	1334		
		Freie Achse	260		
		Frequenzmessung	1410		
		Frikionskupplung	624		

Gesperre, Betätigung der	1272	Greifer, Zweiseil-	1099	Herkules-Turbine	963
—, laufendes	1270	Grenzkurve der Dämpfe	368	Herzkurve	144
—, ruhendes	1270	Grenzscharter für Aufzüge	1222	Heusinger-Waldegg-Um-	
—, stummes	1270	Grissongetriebe	673	steuerung	890
Gewichtstabellen	546	Grobmörtel	560	Heylandsches Diagramm	1439
Gewindearten	583	Großgasmaschine	906, 910	Hilfdebrandt-Kupplung	624
— -schneiden	1292	—, Anlassen	910	Hilfskompondwicklung	1431
Gießereidrehkran	1164	—, Kolben	912	Hillkupplung	626
Gleichgewicht	269	—, Kolbenstange	912	Hitzdrahtinstrumente	1401
— -sbedingungen	278	—, Kolbenstangenkupp-		Hobeln	1229
Gleichstromanlage mit		lung	912	Hobel- und Stoßmaschinen	1305
Akkumulatoren	1456	—, Leistungssteigerung	908	— — —, Aufnahme der	
Gleichstromdampfmaschine	886	—, Stopfbuchse	912	Arbeitsdrucke	1305
Gleichstromdynamomaschine		—, Ventile	911	— — —, Ausführungen	1315
	1414	—, Zylinder	910	— — —, Entwurf einer	
—, Anker	1415	Großwasserraumkessel	805	Wagerechtstoßmaschine	1357
—, Ankerrückwirkung	1423	Grundkreis der Zahnräder	648	— — —, Schaltantrieb	1314
—, Äquipotentialverbindung		Grundzahl (Basis) der Lo-		— — —, Schlitzenfüh-	
	1418	garithmen	47	rung	1311
—, Charakteristik	1424	Gruppen sprung	1236	— — —, Ständer	1309
—, Compound-	1414	Gruppenventil	936	— — —, Tischgestell	1309
— mit Fremderregung	1414	Guldinsche Regel	185	— — —, Wagerecht- und	
—, Gang der Berechnung	1421	Gußeisen	531	Senkrechtstoßmaschine	1305
—, Hauptstrom-	1414	Gutermuth-Klappe	944	— — —, Wirkung der	
—, Kommutator	1418	Guttapercha	562	Massenkräfte	1306
—, Kompensationswicklung		Hackworth-Bremse-Um-		Hochbahnkran	1153
	1423	steuerung	892	Hochhub-Sicherheitsven-	
—, Lager	1421	Hackworth-Klug-Umsteue-		til	756
—, Nebenschluß	1414	rung	891	Hochleistungskammerkes-	
—, Neutrale Zone	1423	Hahn	754	sel	817
—, Querfeld-	1425	Haken, Doppel-	1076	Hoerbiger-Ventil	943
—, Welle	1420	—, einfacher	1073	Hohlkeil	580
—, Wendepol	1424	— -geschirre	1078	Hohlkugel unter innerem	
—, Wicklung	1415	—, geschlossener	1077	Druck	487
Gleichstrommotor	1429	—, Kugelspurlager f.	1077	— — — äußerem Druck	487
—, Anlassen	1432	—, -tabellen	1076	Hohlroststab	775
—, Ausführung	1434	Halbgasfeuerung	780	Hohlwelle	628
—, Bremsen durch Gene-		Halbportalkran	1183	Hohlzylinder unter innerem	
ratorwirkung	1434	Halbrundgewinde	584	Druck	480
—, Doppelschluß-	1431	Halszapfen	592	— unter äußerem Druck	486
—, für Hebemascinen	1116	— (Turbinen)	970	Holz (Brennstoff)	500
—, Hilfskompondwick-		Handaufzug	1199	— (Baustoff)	555
lung	1431	Handrad-Steuerung (Auf-		—, Festigkeitszahlen	406
—, Nebenschluß-	1431	züge)	1213	— -zahn	668, 670
—, Regelung	1433	Hanfseil	692, 696	Hookesches Gelenk	621
—, Reihen(Haupt)schluß-	1430	— für Hebemascinen	1065	Hookesches Gesetz	391
—, Reversieren	1413, 1433	—, Beanspruchung	695	Howaldt-Packung	761
—, Umkehrung in Genera-		—, Rolle	1065	Hülenskupplung	618
torwirkung	1434	—, Tabelle	1066	Humphrey-Gaspumpe	1011
Gleichstromschaltung (für		—, trommel	1065	Hygrometer	377
Hebemasc.)	1121	Hängebock	639	Hydrostatik	351
Gleichungen	51	Härtegrad (des Wassers)	496	Hyperbel	118
Gleichungen 1. Grades	52	Härten des Stahles	533	— -funktionen	180
— 2. Grades	55	Hartguß	531	—, gleichseitige	120, 131
— 3. Grades	60	Härtung (durch Aufstreu-		—, Polargleiche der	121
Gleitlagen	635, 643	pulver)	534	Hyperbolische Kurven	
Gleitwiderstand	571	Härtung-Regler	1030	höheren Grades	131
Gliederketten	1059	Häselersche Formeln	410	Hyperboloideuräder	664
— -tabelle	1060, 1062	Haspelräder	1080	Hypocycloide	135
Glogner-Kessel	816	Hauptgleichung der Turbi-		—, verkürzte	135
Glühfarben des Eisens	353	nen	952	—, verlängerte	135
Glühlampe	1452	— der Zentrifugalpumpen	973	Hysteresisverlust	1397
—, Halbwattlampe	1452	Hauptstromdynamo	1414	Imaginäre Zahlen	49
—, Kohlenfadentlampe	1452	Harzöle	567	Impedanz	1392
—, Metalldrahtlampe	1452	Hebeböcke, Druckwasser-	1107	Indikator-Diagramm	859
—, Metallisierte Kohlen-		—, Lokomotiv-	1107	Induktionsfluß	1375
fadenlampe	1452	Hebelsteuerung (Aufzüge)	1214	Induktionslinien, Brechung	
Glührohrzündung	905	der	1451	der	1375
Glycometall	638	Heißdampf-Ventilzylinder	876, 878	Induktionsmotor	1435
Goochsche Umsteuerung	889	Heizfläche	803	—, Anlassen	1436, 1439
Gradierwerk	1049	—, Beanspruchung	763	—, Einphasen-	1441
Greifer		—, Wirkungsgrad	764	— als Generator	1441
—, Einseil-	1098	Heizwert	521	—, mech. Ausführung	1442
—, Selbst-	1098			—, Schlupf	1436
— -winde	1133				

Induktionsmotor, Strom- wärme	1438	Kette, kalibrierte	1059	Kondenstopf	745
—, Tourenregelung 1438,	1440	—, kinematische	232	König-Steuerung	884
—, Wirkungsgrad	1442	—nlinie	141	Koksöfengasfeuerung	789
Induktanz	1393	—, gemeine	141	Konsolkrane	1159
Influenz (elektr.)	1380	—nnuß	1061	— mit festem Ausleger	1159
Inhalte von Flächen	99	—nrad	676, 1062	— mit schwenkbarem Aus- leger	1161
— von Körpern	102	—, (Tabelle)	1064	Konsollager	639
Injektor	1010	— für Gallsche Ketten	1065	Kontraktion	393
Inneneinströmung bei Kol- benschiebern	867	Kettenrolle für Gliederket- ten	1061	Konstruktionsstahl	397, 399
Innenfeuerung	769	—ntabelle für Glieder- ketten	1062	Kontinuitätsgleichung	345
Innenverzahnung mit		— für Gallsche Ketten	1064	Kontroll für elektr. Hebezeuge	1192
Evolventen	652	—ntrommel	1063	Kontrollflansch (Dampfkes- sel)	857
— mit Zykloiden	651	Kinematische Kette	232	Konus, metrischer	1288
Integral, bestimmtes	171	Kinetische Energie	240	—, Morse-	1287
—formeln	172	Kippkübel	1097	Konvergenzbedingungen	86
—kurven	191	Kipp-Wassermesser (Eck- hardt)	348	Koordinaten-Umwandlung	107
—kurven als Seillinien	196	Kirchhoffsche Gesetze	1383	Korkzieherregel	1387
—rechnung	169	Kirchhoffsche Gesetze für Wechselstrom	1391	Körperinhalte	177
Intensität der Magnetisie- rung	1375	Kitte	562	Kräftepaar	275, 276
Inverse Funktion	150	Klappgefäße	1097	— zug	270
Isfort-Kupplung	629	Klaufenkupplung	620, 1268	—, Zusammensetzung	269
Isodromregler	1034	—, ausrückbare	623	Kraftfeld	266
Isogonen	1374	Kleingasmaschinen, Aus- führung von	906	Kraftgaserzeuger	921
Isoklinen	1374	Klemmgesperre	1082	Kraftmaschinenkupplung	631
Isolationsmessung	1406	Klinkengesperre	1081	Kran, Ausleger 1148, 1169, 1175	1175
—, Fehlerortsbestimmung	1407	Knickfestigkeit	410	—, Beschick-	1189
— mit Hilfsbatterie	1406	Koerting-Motoren	906, 909, 915	—, Blockeinsetz-	1190
— mit Netzspannung	1407	Koester-Steuerung für Kompressoren	944	—, Bock-	1150
Isolatoren (Dielektrika)	1380	Kohlenstaubfeuerung	786	—, Dreieck-	1166
Isotherme der Gase	360	Kolben	723, 912	—, Dreh-	1162
— des Wasserdampfes	372, 373	—berechnung	727	—, Elektr. Ausrüstung d.	1192
—, Zustandsänderung	381, 384	—beschleunigung	703	—, Fahrbahn	1150
Isothermische Zustands- änderung, Arbeit bei	175	—geschwindigkeit	702	—, Fahrwerk	1137
Jaeger-Turbokompressor	1008	—kompressor	940	—, flasche	1079
Jaeger-Zentrifugalpumpe	984, 987	—pumpe	924	—, Gieß-	1188
Joulesches Gesetz	1383	—ring	724	—, Gießereidreh-	1164
Joy-Steuerung	892	—schieber	867	—, Hochbahn-	1153
Kabinensteuerung (Auf- züge)	1214	—stange	722, 912	—, Konsol-	1159
Kalk	559	—stangenkupplung	912	—, Lauf-	1134
Kalorie	354	—ventilsteuerung	876	—, Lokomotivhebe-	1149
Kaminkühler	1049	—wassermesser	348	—, Magnet-	1191
Kammerkessel	814	—weg	700	—, Muldeverlade-	1191
Kammlager	643	Kollektorschritt	1417	—, Portal-	1181
Kammzapfen	599	Kombinationen	62	—, Prätzen-	1191
Kanalisationspumpe	937	Kombinationsregelung für Gasmaschinen	903	—, Schwenk-	1163
Kapazität	1381	Kommutator	1414, 1418	—, Schwerlast-	1165, 1171
Kapazitätsreaktanz	1393	Kommutatormotor, Neben- schlußmotor für Dreh- strom	1444	—, Schwimm-	1187
Kardiode	144	—, Reihenschlußmotor für Drehstrom	1444	—, Seilbahn-	1158
Kautschuk	561	—, — für Wechselstrom	1442	—, Stripper-	1190
Kegelbremse	1086	—, Reihenschluß-Kurz- schlußmotor	1443	—, Tabelle elektr. Lauf-	1146
Kegelrad	662	—, Repulsionsmotor	1443	—, Tiefofen-	1190
Kegelschnitte, gemein- samer Ursprung der	121	Kompensationsrohr	742	—, Turmdreh-, fahrb.	1184
Keil	296	Kompensationswicklung	1423	—, Velociped-	1185
—kette	297	Komplexe Zahlen	49	—, wäge	1097
—verbindungen	579	Kompressor, hydraulischer	1011	—, Wanddreh-	1163
Kennziffer der Logarith- men	47	—, Kolben-	940	Kreis	111
Kern (des Querschnittes)	463	—, Turbo-	1006	—abschnitt	100
Kerntransformator	1447	—ventil	943	—ausschnitt	100
Kesselsteinbildner	496	—, Verbund-	942	—evolvente	135
—steinmittel	498	Konchoide	144	—flächen (Tafel)	2
— zugüberhitzer	824	Kondensanz	1393	—funktionen	70
Kestner-Kessel	822	Kondensation	1035	—prozeß	364, 382
Kette, Gallsche	1063	— mit Luftkühlung	1039	—tafel	30
—, Gleichung der	201	Kondensator (elektrisch)	1381	—umfänge (Tafel)	2
—, Glieder-	1059			Kreiseldensator	1039
				— theorie	1040
				Kreiselpumpe	973
				Kreuzgelenkkupplung	621
				Kreuzkopf	715
				—führung	719
				Kritische Dampfgeschwin- digkeit	375

Kritisches Druckverhältnis	375	Lager	635	Lichtstrom	1451
Kritische Umlaufzahl der Turbinenwellen	248	—, Turbinen-	969	Lieferungsgrad der Wasserpumpe	924
Kubische Parabel	128	Lamellenbremse	1089	— des Luftkompressors	941
Kugel, Gleichung der	211	— senksperrbremse	1094	Lietzenmeyer-Olmaschine	918
— -käßig	640, 641	Landsbergische Formeln	410	Lineare Differentialgleichung	197
— -lager	306, 640, 643	Langmutter	1265	— s Vorellen	863
— -spurlager für Kranhaken	1077	Längskeil	579	Linie, gerade, in der Ebene	106
— -zapfen	597	Laschnennietung	572	—, — im Raume	208
Kühlgrenze	1050	Lastbügel (geschlossener Haken)	1077	Linienintegral der Feldstärke	1376, 1379
Kühlteich	1048	— -druckbremse	1093	Lodge-Zündung	905
Kußissen-Aufhängung	891	— -haken, s. Haken		Löffelturbine	953
— -stein, Springen des	891	— -hebemagnet	1102	Logarithmen	47
— -steuerung	888	Lasten, bewegliche	1204	Logarithmische Kurve	146
Kupfer	400, 550	— -aufzug	1148	Lokomobilkessel	812
— -legierungen	400	Laststellung, ungünstigste	337	Lokomotivhebekran	1449
— -rohre (Tabelle)	740	Laufkran, Ausleger-	1148	Lokomotivkessel	812
Kupplung	618	—, Brücke	1139	Löwenherz-Gewinde	584
—, ausrückbare	623, 624	—, elektrischer	1135	Lüftungsbremse	1089
—, bewegliche	620	—, Fahrwerk	1111, 1137	Luftbedarf für Verbrennung	512, 902
—, Bürsten-	631	—, Hand-	1134	— -feuchtigkeit	377
—, elastische	621	—, Tabelle elektr. —e	1146	— -gas	525
—, elektromagnetische	629	—, Transmissions-	1135	—, polytrophische Kompression	362
—, feste	618	Laufkranschiene	1140	— -kompressor	940
—, Kraftmaschinen-	631	Laufwinden	1130	— -leitung für Kompressoren	1053
—, Reibungs-	624	Leach-Feuerung	783	— -pumpe	1041
Kupplungseinrichtungen (bei Werkzeugmasch.)	1266	Lederlamellenkupplung	621	— -überschuß (Verbrennung)	516
Kurbel	705	— -ringkupplung	621	Lumen	1451
— -getriebe	700, 1260	Leerkomponente (Wechselstrom)	1390	Mac Nicol-Kessel	809
—, Hand-	1080	— -laufbuchse	687, 689	Magnet, Lasthebe-	1102
—, kräftigung	605	Legierungen	552	—, Bremsluft-	1194
— -lager	720	Leistungsermittlung aus dem Dampfdiagramm	861	—, Zugkraft von	1376
— -schleife, schwingende (Werkzeugmasch.)	1260	— -Leistungsregler	1033	Magnetische Energie	1375
— -schleife, umlaufende (Werkzeugmasch.)	1262	— -steigerung bei Dieselmotoren	917	— -s Feld	1373
—, Sicherheits-	1091	— -steigerung bei Gasmaschinen	908	— -e Induktion	1374
— -steuerung	1243	— -steigerung bei Gasmaschinen	908	— -r Kreis	1377
— -welle	603	— -faktor ($\cos \varphi$)	1390	— -s Moment	1373
— -zapfen	706	— -messung, elektr.	1408	— -r Widerstand	1375
Kurve der gedämpften Schwingung	146	— -zeiger	1402	Magnetisierung, Intensität der	1375
—, Exponential-	145	Leiter, elektrische	1380	Magnetisierungskurven	1378
— von der Form $y = a^m \cdot \cos(m \varphi)$	143	Leitlinie	122	Magnetismus	1373
—, hyperbolische — höheren Grades	131	Leitrad bei Dampfturbinen	1003	Manometer	856
—, logarithmische —	146	— bei Francisturbinen	959	Manschette	729, 760
—, parabolische — höheren Grades	127	— bei Zentrifugalpumpen	980	Manteltransformator	1447
—, Parameter-Darstellung von —n	127	Leit- und Zugspindeldrehbank von Loewe & Co.	1299	Mantisse der Logarithmen	47
—, polytrophische —	132	— -support von Heidenreich und Harbeck	1303	Marinokopf	711
—, zyklische —	133	— -von Reinecker	1304	Mariottesches Gesetz	360
Kurven, einhüllende	205	Leitungen, elektrische	1463	Maschinenenteile. Achsen	
— -lehre	106	—, Belastungstabelle für —	1464	— und Wellen	600
— -schaaren	205	—, Berechnung	1466	— Bolzen	592
— -scheibe (Werkzeugmasch.)	1273	—, Ring-	1467	—, Keilverbindungen	581
Ladepumpen für Zweitaktmaschinen	909	—, Verteilungs-	1467	—, Kolben	723
Lager	634	Lenniskate	143	—, Kupplungen	618
— -entfernung (Triebwerkwellen)	602	Lenkersteuerung	891	—, Kurbetrieb	700
— -gewichte	530	Lentz-Daumen	880	—, Lager	634
—, Hänge-	638	— -packung	761	—, Riemen- und Seiltrieb	677
—, Konsol-	638	— -regler	1032	—, Rohrleitungen	730
—, Kugel-	640	— -steuerung	880	—, Schrauben	582
—, Kurbelwellen-	720	Lenzsches Gesetz	1385	—, Stopfbüchsen	760
— -reibung	594	Leonard-Schaltung (Hebemasch.)	1123	—, Ventile	745
—, Rollen-	642, 644	Lichtstärke	1451	—, Zahnräder	646
—, Sellers-	635			—, Zapfen	592
				Masse, reduzierte	259
				Massendruck (Kurbetrieb)	704
				Massenwirkung (bei Dampfmotoren)	1021

Mauerwerk der Dampfkes- sel	792	Muffenrohre	732	Phasentransformator	1450
Maxima und Minima	160	Muldenschargierkran	1189	Physisches Pendel	260
Mechanik flüssiger Körper	343	Muldenverladekran	1191	pI-Diagramm	387
—, Dynamik	213	Müllersches Schieberdia- gramm	863	Pinnolenklemmung (Sel- lers)	1283
—, Statik	269	Müller-Breslau, Formel von	410	Pitotrohr	350
Mehrphasenströme	1393	Muschelschieber	863	Planetengeretrie	1248
Meißelwinkel	1228	Mutteren	587	Planfräsmaschine von	
Melms-Pfenninger-Turbine	1000	Mutterschloß	1296	— Gildemeister & Co.	1339
Messingrohre (Tabelle)	741			Planimetrie	99
Meßinstrumente, elektro- techn.	1399	Nadelschmierapparat	633	Planrost	770
—, Ballistische Galvano- meter	1403	Nasenkeil	579	Platten, Festigkeit von	
—, Drehfeldinstrumente	1400	Nebenauslaß (bei Turbinen)	970	— ebenen —	491
—, Drehmagnetinstru- mente	1400	Nebenschlußdynamo	1414	Plattenzerstäuber	919
—, Drehpulvinstrumente	1399	— -motor	1431	Pleuelstange	709
—, Dynamometrische In- strumente	1400	Nepersche Gleichungen	77	Poliermittel	564
—, Elektrizitätszähler	1403	Nettoverdampfung	765	Polstärke (Magnet)	1373
—, Elektrostatische In- strumente	1402	Neutrale Achse	425	Polysius-Kupplung	626
—, Hitzdrahtinstrumente	1402	— Zone (Dynamo)	1423	Polytrope	361
—, Leistungszeiger	1402	Nieten	569	Polytropische Kurve	132
—, (Meßtransformatoren)	1401	Nockensteuerung	892	Portalkran	1181
—, Spannungszeiger	1401	Normalbeschleunigung	219	— -träger	457
(Voltmeter)	1401	— -dampf	765	— -turmdrehkran	1182
—, Voltmeter	1403	— -lager	635	Ponceletmündung	343
—, Weicheiseninstrumen- te	1400	— -profile	537	Potential	266
Meßkunde, elektrotech- nische	1399	— -schieber	750	— -gefälle	267
Meßlänge bei Festigkeits- prüf.	392	— -spannung	390	Potenz	43
Meßmethoden, elektrotech.	1405	Normalelemente, galvani- sche	1411	— -gesetz	391
—, Eichungen von Strom- und Spannungsmessern	1407	Normalien, Formstücke für Rohrleitungen	734	— -kurve	132
—, Eisenuntersuchungen	1410	—, gußeiserne Muffen- und Flanschenrohre	732	— -rollenzug	310
—, Frequenzmessung	1410	—, Rohrleitungen für hochgespannten Dampf	739	Pratzenkran	1191
—, Isolationsmessung	1396	Nortongetriebe	1253	Prinzip d'Alembert	252
—, Leistungsmessung	1408	Nutenkeil	579	Prinzip der virtuellen Ge- schwindigkeiten	279
—, Oszillograph	1410			Probierhahn	855
—, Widerstandsmessung	1405	Oberfläche von Körpern	102	— -ventil	855
Meßtransformator	1401	Oberflächenkondensation	1036	Proell-Packung	761
Metazentrum	352	—, geschlossene	1036	— -Regler	1032
Methode der kleinsten Quadrate	66	—, offene	1038	— -Steuerung	881
Metrischer Konus	1288	—, Rohrabdichtung	1037	Proportionalitätsgrenze	391
Meyer-Steuerung	870	Oberwasserzapfen	969	Pseudoastatischer Regler	1026
— mit großer Schraube	871	Oberwind	780	Psychrometer	378
Mineralfette	567	Odesse-Pumpe	938	Pufferbatterie	1460
Mineralöle	567	Öbrenner	787	Pulsometer	1010
Mischgas	526	— -feuerung	787	Pumpe, Differential-	925
Mischkondensation	1036	— -maschine	913	—, Kolben-	924
Mischventil	904, 906	— -pumpe	634	—, Kreisel-	973
Missong-Maschine	1015	— -tropfapparat	633	—, Luft-	1041
Missong-Schieber	750	Ohmsches Gesetz	1382	—, Speise-	849
Mitiguß	532	Oerlikon-Abdampfturbine	1019	—, Zentrifugal-	937
Mohrscher Satz	428	Ostenfeldsche Formel	444	Pumpenventil	929
Moirvescher Satz	50	Oszillograph	1410	—, -Ausführung	936
Mollweidesche Gleichungen	77	Parabel	112	—, -Berechnung	929
Moment, magnetisches	1373	—, gemeine oder quadra- tische	128	—, gesteuertes	937
—, statisches	275, 277, 278	—, kubische	128	Punkt in der Ebene	106
Momentenfläche	421	Parabolische Kurven hö- heren Grades	127	— im Raume	208
Momentlinie, Beziehung zwischen — und Zeit- weglinie	194	Parameter	116	Q/H-Kurve	976, 981, 983
Morse-Konus	1287	— Darstellung von Kur- ven	127	Quadrate, Methode der kleinsten	66
Mörtel	559	—, variabler	206	Qualitätsregelung der Gas- maschinen	902
Motorischer Antrieb d. Hebezeuge	1113	Paternosteraufzug	1225	Quantitätsregelung der Gasmaschinen	903
Motorgeneratoren	1445	Pelton-Rad	953, 955	Querfeldmaschine (Ro- senberg)	1425
Muffendruck (Regler)	1026	—, Schaufelteilung	954	Querkeile	581
Muffenkupplung	619	Pennschieber	867	Querkraftfläche	421
		Petroleum	505	Querzusammenziehung	390
		Perizykloide	135	Räderkasten	1253
		Permeabilität	1374	—, Bickfordgetriebe	1254
		Perret-Roststab	779	— von Böhlinger	1301
		Personen-Aufzug (elektr.)	1205	—, Nortongetriebe	1253
				— von Reinecker	1257

Räderkasten, Ruppert		Rentenrechnung	84	Säulendrehkran	1163
—, Ziehkeilgetriebe	1256	Restarting-Injektoren	1010	Schädllicher Raum	859, 862
Rädervorgelege	1247	Ridersteuerung	871	Schalenkupplung	619
Räderwinde	1108	Riedler-Ventile (gesteuert)	937	Schaltdose (von Gray)	1271
Radialbohrmaschine	1322	Riemen	679	Schalteinrichtungen (für	
— von Loewe & Co.	1329	—-ausrücker	687	Werkzeugmaschinen)	1266
Radialturbine	933	—-berechnung	681	Schaltschwinge	1277
Radovanovic-Steuerung	883	—-länge	1242	Schalung, Aufzugsmoto-	
Randspannungen	464	—-leiter	690	ren	1209
Rankinisieren	894	—-scheibe	686	—, Krafmotoren-	1120
Rauchen der Feuerungen	512	—-scheibenvorgelege	1243	—, Leonard-	1123
Raubgasmeße	318	—-umsteuerung	1278	—, Normal-bei Gleichstrom	1455
—, spez. Gewicht	520	—-verbindung	680	—, Normal- bei Drehstrom	1460
—, Vorwärmer	830	—-wendegetriebe	1278	—, Parallel- von Gleich-	
—, Wärmehalt	520	Riemtrieb	677, 679	strommaschinen	1459
Rauchverhütung	779	—, Anordnung	684	—, Parallel- von Wechsel-	
Raumgeometrie	208	—, Ausführung	686	strommaschinen	1461
Reaktanz	1392	Riffelblech	549	—, Scottsche	1451
Reaktionswirkung in Tur-		Ringleitung für Dampf	1053	—, Werkzeugmaschinen-	1228
binen	951	—-schmierlager	635	—, Tabelle	1232
Reaktionsturbine, (Dampf)	992	—-schmierung	634	Schauflung für Francis-	
—, Wasser	956	—-ventil	936	Turbinen	959
Reduzierventil	757	—-zapfen	599	—, Pelton-Räder	954
Reelle Zahlen	49	Rittersches Verfahren	318	—, Zentrifugalpumpen	978
Regler, Achsen-	1031	Roheisen	530	Scheiben gleicher Festigkeit	490
—, Beharrungs-	1032	Rohrberechnung	731	Scheibekupplung	619
—, Charakteristik	1027	—-bruchventil	758, 851	—, bewegliche	620
—, Flach-	1031	—-stopfbuchse	742	Scheibenwassermesser	348
—, indirekt wirkende	1034	—-tabelle	731	Schieber, Absperr-	745
—, Kraftmaschinen-	1026	Rohrleitungen	730, 1051	—, Corliü-	873
—, Leistungs-	1033	— für Dampfmaschinen	1051	—, Dampfkolben als	886
Regulierung	1020	—, Gasmaschinen	1054	—-diagramm	863, 864
—, Dampfturbinen	1004	—, Kompressoren	1053	—-ellipse	865
—, Gasmaschinen	902	—, Pumpen	1055	—, Kolben-	867
—, Kompressoren	946	— für hohen Druck, Nor-		—-steuerung	863
—, Verbundmaschinen	896	malien	738	—, entlastete	867
—, Wasserturbinen	965	Rolle	307	—, für Kompressoren	944
—, Zentrifugalpumpen	980	— für Drahtseil	1069	—-ventil	750
Reguliertransformator	1450	— für Hanfseil	1065	Schiffskessel	813
Regulierventil	749	— für Ketten	1061	Schlaffseilausrückung für	
Regulierzeit (Schlußzeit,		Rollenachse (Hebezeuge)	1072	Aufzüge	1222, 1223
Turbinen)	1034	—-kette	677	Schleifen	1233
Reibgesperre	1271	—-lager	642, 644	Schleifenkurve	143
Reibgetriebe	1241	—-zug	3071	Schleifmaschine	1341
Reibkupplung	624, 1269	Rollkran	1178	—, Antrieb der Schalt-	
Reibung	289	—-kreis (Zahnrad)	648	bewegung	1343
—-sgesperre	1082	Rost	769	—, Aufnahme der Werk-	
—-skegel	291	— für Schüttfeuerung	770	stücke	1342
—-skegelkupplung	624	— für Wurfteuerung	770	—, Einstellung der Span-	
—-skoeffizient	290	—-belastung	763	tiefe	1344
—-srad	675	—-leistung	763	—, Schleifscheibe	1341
—-strommel	1071	—-schutz	594	—, Schnittbewegung	1341
—-swinkel	290	Roststab	774	—, Spindelstock	1341
Reihen, arithmetische	82, 83	—-abmessungen	775	Schleifmittel	563
—, binomische	90	—-formen	775	Schleudebremse	1091
—, endliche	82	—-lagerung	777	Schließkopf (der Niete)	571
—, Exponential-	90	Rotationshyperboloid	211	Schlitzlänge für Gasmaschi-	
—, Fouriersche	92	Rotationsparaboloid	211	nen	909, 921
—, geometrische	84	Rückenwinkel	1228	— — Ölnmaschinen	921
—, Konvergenzbeding-		Rückkühlung	1048	Schlupf (Wechselstrommo-	
gungen der	86	—, Theorie	1050	toren)	1436
—, logarithmische	91	Rückschlagventil	755	Schmiermittel	565
—, Maclaurinsche	88	Rundgewinde	584	—-prüfung	566
—, Potenz-	88	Ruppertgetriebe	1256	Schmierung	633
—, Taylorsche	88	Sägendigramm	1241	—, (Werkzeugmasch.)	1280
—, trigonometrische	91	Salzmann-Ventil	758	Schnecke und Zahnstange	
—, unendliche	85	Sammelleitung (Dampf)	1053	(bei Werkzeugmasch.)	1266
Reihenschlußmotor	1430	Sauggasanlagen	923	Schneckenrad	655
Rektifikation von Kurven	189	Saugtopf	1054	Schneckenwinkel	1228
Relativbewegung	223	Saugrohr	957	Schnellbohrmaschine von	
Relativexzenter	870	—-ausführung	968	Hasse & Wrede	1322, 1327
Reluktanz	1377	Saugwirkung (Kolbenpum-		pen)	1229, 1229
Remanenz	1396	—-tabelle	926	—-geschwindigkeit	1228, 1229
Renoldkette	676	Saugzeug, künstlicher	780	—-geschwindigkeit	1232
				—-geschwindigkeit	1240

Schöpfschmierung	634	Seil, Spannscheibe	697	Sperrbremse	1089
Schornstein	794	—-steuerung für Aufzüge	1213	—-räder	1081
—, Ausführung	801	—-trieb	677, 691	—-werke	1081
—-berechnung	797	—-trommel für Drahtseile	1069	Spez. Gewichte s. Einheitsgewichte.	
—, Blech-	800, 803	—-wirkungsgrad	695	— Drehzahl (Turbinen)	971
—, Eisenbeton-	799	—-züge für elektr. Winden	1125	— Turbinengrößen	970
—-höhe	795	Sekundärluftzuführung	779	Spill, elektrisches	1128
—-lichtweite	796	Selbstgreifer	1098	—-trommel	1072
—-verlust	767	— Jaeger	1099	Spiralen	135
Schrägrost	770	— Laudi	1100	—, Archimedische	135
Schraube	296, 582	— Palm	1101	—, hyperbolische	136
—, Berechnung	585	Selbsthemmung	296	—, logarithmische	136
—-nfläche	211	Selbstinduktion	1385	Spiralgehäuse für Turbinen	964, 968
—-nflaszenguz	1104	Selbstinduktionskoeffizient	1393	— — Zentrifugalpumpen	980
—-nkopf	589	Sellers-Lager	635	Spreizkupplung	1269
—-nmutter	587	—-Gewinde	586	Spritzguß	554
—-nrad	664	—-Kupplung	620	Sprung (bei Zahnrädern)	660
—-nsicherung	591	—-Pinnolenklemmung	1283	Spurdrukschraube	1285
—-nwinden	1106	—-Tischobelmaschine, Antrieb der —	1266	Spurzapfen	598
Schrumplplatten	578	—-Wendegertriebe	1278	Spurzapfen-Reibungskoeffizient	306
—-ringe	578	Senkbremsschaltung	1121	Stabeisen	546
Schubstange	709	Senkrechtbohrmaschine von Loewe & Co.	1327	Stabilitätsmoment	274
Schubfestigkeit	418	— von Droop & Rein	1328	— schwimmender Körper	352
—-spannung	394	Senkrechtfäsmaschine von Reinecker	1340	Stahlband	681
—-zahl	394	Senkrechtstoßmaschine von Droop & Rein	1319	—-guß	531
— und Biegung	468	— von Schieß	1319	—-halter	1286
— und Drehung	465	Senkspernbremse	1093, 1089	Stangenlänge, endliche	865
— und Zug (Druck)	467	Shapingmaschine	1305	Statisches Moment	275, 277, 278
Schürplatte	773	S.-I.-Diagramm	387	Staudoppel-(Pitot-)Rohr	350
Schütbfefuerung, Roste für	770	—-Gewinde	584	Staufer-Büchse	633
Schüttrichter	774	Sicherheitskupplung	631, 1268	Stauwehr	344
Schwamkrug-Turbine	953, 954	—-kurbel	1091	Stellrohrkessel	818
Schweißen	531	—-senkschaltung	1122	Steine, natürliche	557
—, elektr.	536	—-ventil	755, 856	—, nicht gebrannte	559
Schweißstahl	531	—-vorrichtungen für Aufzüge	1217	Steinkohle	501
Schweißung	535	—-vorrichtungen für elektr. Hebezeuge	1197	Steinkohlenteergruppe	506
Schwerlastkrane	1165, 1170, 1187	— — für Lasthebe-		Stelleisten (Werkzeugmasch.)	1284
Schwerpunkt	179	— — für Lasthebe-		Stelling	602
Schwerpunkt	282, 286	— — magnet	1103	Stephensonsche Umsteuerung	888
—-bestimmung	179, 287	Siedepunkt	355	Stereometrie	99
— von Flächen	283	Siederohrtabelle	736	Sternschaltung	1395
— homogener Linien	283	Skineffekt	1398	Sternspannung	1395
Schwimmkran	1187	Simplexpumpen	937	Steuerapparate für elektrische Krane	1192
Schwingdaumen	880	Sinus (Tafel)	30	Steuerung, Aufzug-	1213
Schwingscheibe	874	Sinuslinien	137	—, Dampfmaschinen-	861
Schwingungen, gedämpfte	246	—-satz	76	—, Expansions-	868
— elastischer Körper	245	Sohlplatten	638	—, Gasmaschinen-	904
—, erzwungene	247	Sonderkrane	1188	—, Kompressor-	944
—, erzwungene — der Wechselstrommaschinen	1462	Sonnleithner-Maschine	1015	—, Kulissen-	888
—, harmonische	216, 245	Spaltdruck	952	—, Lenkerum-	891
Schwungradberechnung	1021	— in Turbinen	956	—, Um-	888
— auf Festigkeit	474	— in Zentrifugalpumpen	980	—, Umfall- (Werkzeugm.)	1275
— für Gasmaschinen	1023	Spaltmenge (bei Ventilen)	930	—, Ventil-	876
— — Kompressoren	1025	Spanabgangswinkel	1228	— der elektr. Aufzüge	1213
Schwungradlose Dampf-pumpe	937	Spannscheibe (Seiltrieb)	697	— der Kranmotoren	1120
Scottsche Schaltung	1451	Spannung, zulässige für den Hochbau	405	—, Universal-	1193
Schwingmoment	258, 1023	— — — Maschinenbau	402	—-sverriegelung der elektr. Aufzüge	1223
Segerkegel	353	Spannungszeiger	1401	Steuerungsventil	876
Sehnenformeln	77	Spannvorrichtung (Werkzeugmaschinen)	1287	Stiefelkecht (Werkzeugmasch.)	1275
Seil	691	Spartransformator	1450	Stiftkupplungen	631, 1268
—-bahnkran	1158	Speiseaufzug	1199	Stirling-Kessel	822
—-befestigung an der Trommel	1069	—-pumpe	849	Stirnräder mit geraden Zähnen	646
—-berechnung	692	—-raum	805	— — Winkelzähnen	660
—, Draht-	1066	—-ventil	849	— — Schraubenzähnen	662
—-eck	272	— wasservorwärmer	829	Stirnzapfen	592
—-kausche	1069			Stopfbüchsen	760
—-reibung	312				
—-rollen für Drahtseile	1069				
—-scheibe	698				

Stopfbüchsen für Rohre	742	Triumph-Kupplung	630	— verstellbarer Gerad-	
— Gasmaschinen	912	Triebstockverzahnung	653	führung	883
— Dampfturbinen	1004	Trommel, Drabtsil-	1069	— zwei Antrieben	883
Stoß	264	—, Hanfseil-	1065	— veränderlicher Lage	
Stoßen (Arbeitsaufwand)	1229	—, Ketten-	1063	des Antriebpunktes	884
Stoßmaschine s. Hobelma-		—, Reibungs-	1071	— unrunder Scheiben	884
schleife		—, -welle	1073	— kleinem Einfallweg	
Strahlkondensatoren	1039	Turbine, Dampf-	989	der Klinke	885
Streckgrenze	392	—, Wasser-	953	— großem Einfallweg	
Streudüsen	1049	Turbinenpumpen	973	der Klinke	885
Strom, elektr., Leistung		Turbokompressoren	1006	— zwangläufiger Klin-	
des —es	1383	—, Arbeitsweise	1006	kenbewegung	885
— Wärmewirkung des	1383	—, Ausführung und Einzel-		Venturiwassermesser	349
—, chemische Wirkung		heiten	1007	Verbrennung im geschlos-	
des —es	1384	—, -berechnung	1009	senen Raum	516
Strömung von Dämpfen	374	Turmdrehkran, fahrbarer	1184	— offenen Raum	516
Stromverzweigung	1383	Türverschlüsse für elektr.		— -slutmenge, theoretische	
Stripperkran	1190	Aufzüge	1223	— -smotoren, Antrieb der	
Stufenmotor für Werk-		Überhitzer	823	Hebezeuge durch	1114
zeugmaschinen	1346	—, Ausführung	825	— -stemperatur	522
Stufenscheibe	1242	—, Ausrüstung	827	— -svorgang	499
Stützlager	643	—, Berechnung	824	Verbundkompressoren	942
Stützpunkt	273	—, Einbau	827	—, Regelung	946
Stützzapfen	598	—, Oberhitzung	897	—, Ausführung	948
Support	1295	Überhöhungswinkel	1229	Verbundmaschinenrege-	
Synchronmotor	1434	Überlappungsnetungen	570,572	lung	896
— Anlassen	1435	Uhlhorn-Kupplung	632	Verbundturbine (Dampf)	992
Tangentialbeschleunigung	219	Umfallsteuerung	1275	— (Wasser)	967
— -druck	702	Umfang von Flächen	99	Verbundwirkung	894
— -druckdiagramm	1022	Umformer	1445	Verdampfungszeit	765
Tangentialkeil	581	—, Anlassen	1446	Verdampfungsbericht	768
Tangensatz	77	—, Kaskaden-	1446	Verdampfungsoberfläche	803
Temperatur, absolut	353	Umformung des elektr.		Verdampfungswärme	355
Temperguß	531	Stromes	1445	Verdampfung	524
Thermitschweißverfahren	535	—, Elioankerumformer	1445	Vergüteten	534
Thermoelement	1411	—, Motorgeneratoren	1445	Verladebrücken	1153
Tischhobelmaschine	1305	—, Transformatoren	1447	Verlustziffer des Eisens	
— von Böhlinger	1315	Umkehrbare Zustandsände-		(durch Hysterisis und	
Tiegelstahl	532	rung	364	Wirbelströme)	1397
Tiefenkrane	1190	Umkehrmotor für Werk-		Vernietungen	569
Tolle-Regler	1031	zeugmaschinen	1347	Verstemmen	570
Torf	500	Umlaufende Scheiben	488	Viertaktgasmotoren	902
Träger auf mehreren Stützen	438	Umlaufträger, rückkehrende	1249	—, Ausführung	906
—, Durchbiegungsformeln	436	—	1284	—, Leistungssteigerung	908
— von gleichem Wider-		Umsteuerungen	888	—, Regelung	902
stand	446	— durch Kupplungen		—, Steuerung	904
Traglager	635	(Werkzeugmasch.)	1278	—, Zündung	903
Trägheitsmomente (Tabelle)	433	Unempfindlichkeitsgrad	1026	Viktoria-Vorgelege	1242
—, Bestimmung von —n	186	Ungleichförmigkeitsgrad		Virtuelle Geschwindigkeiten	279
Trägheitsmomente	256	(Schwungräder)	1023	Vollportalkrane	1181
Tragzapfen	592	— (Regulatoren)	1026	Voltmeter	1403
— -reibungskoeffizienten	300	Universalfräsmaschine der		Voltmeter	1401
Trajektorie	280	Wanderer-Werke	1337	Volumendiagramm	895
Transformatoren	1447	Unrunde Scheiben	878	Vorausströmung	860
— bei Belastung	1448	Unterfeuerung	769	Voreinstromung	859
—, Scottsche Schaltung	1450	Unterlegscheiben	591	Vorfeuerung	769
—, Kurzschluß-	1449	Unterschubfeuerung	784	Vorschubkraft	1231
—, Leerlauf	1448	Unterwind	780	Vorwärmer	829
—, Phasen-	1450	Vakuumerzeugung	1013	W agerechtbohr- und Fräs-	
—, Regulier-	1450	Vektordarstellung des		maschine von Droop &	
—, schaltung	1450	Wechselstroms	1388	Rein	1331
—, Spar-	1450	Veloziped-Krane	1185	Wagerechtsstoßmaschine	1305
— Übersetzungsverhältnis		Ventil, Absperr-	745	— von Gebr. Heinemann	1318
— Wirkungsgrad	1448	— -erhebungsdiagramm	880	Wahrscheinlichkeitsrech-	
Transmissionsantrieb der	1450	—, selbsttätiges	755	nung	64
Hebezeuge	1113	—, Sicherheits-	856	Walzenkessel	805
— — Aufsätze	1200	—, -steuerung	876	Walzenlager	642
Trapezgewinde	584	Ventilsteuerungen, zwang-		Walzenhebel	878
Treppenrost	370	läufige und paarschlüs-		Wanddrehkrane	1163
Trickschieber	866	sige	880	Wauderost	785
Triebstockverzahnung	653	—, freifallende	885	Wandkonsol	638
Triebwerkswellen, normale	600	— mit Flachregler	880	Wärmeäquivalent	358
Trigonometrische Formeln	74	— — umlegbarem Lenker	882	— -ausdehnung	353

Wärmediagramm	379	Werkzeuge, Schleifen	1233	Wurfbahn	125
— durchgang	356	—, Schnittdruck, spez.	1229	Wurfereien, mecha-	
— einheit	354	—, Schnittgeschwindig-		— nische	783
— mechanik	353	—, keit 1229, Tabelle	1232	—, Roste für	770
—, spezifische	354, 359	—, Stoßen	1229	Wurzelrechnung	45
—, speicher	1016	—, Werkzeugwinkel	1227	X-Kupplung	628
— verluste in Dampfkes-		Werkzeugmaschinen,		Zahlen, imaginäre und	
— selanlage	766	spanabhebende	1288	—, komplexe,	49
— wirkung des Stromes		—, Bohrmaschine	1322	—, reelle	49
(Joulesches Gesetz)	1383	—, Drehbank	1288	Zahlensysteme	49
Wasserabscheider	743	—, elektrischer Antrieb		Zahnberechnung	655
— gas	525	—, von	1235	— form	647
— gasschweißung	535	—, Entwerfen und Be-		—, gesperre	1081
— leitungen für Pumpen	1055	—, rechnen von —	1349	—, Holz-	668, 670
— messer	347	—, Fräsmaschine	1331	Zahnstange	651, 652
— prüfung	495	—, Hobelmaschine	1305	—, nwinde	1106
— reinigung	497	—, Schleifmaschine	1341	Zahnrad	646
— rohrkessel	814	—, Stoßmaschine	1305	—, ausführung	668
— standsvorrichtungen	852	Weston-Flaschenzug	1104	—, Berechnung	655, 669
— standsmarke	856	Wheatstonesche Brücke	1405	—, Evolventenverzahnung	651
Wasserturbinen	953	Whitworth-Gewinde	583, 586	—, flaschenzug	1105
—, Angaben für den Ent-		Widerstandsmomente		—, Gewicht	675
—, wurf	972	(Tabelle)	433	—, Kegelrad	662
—, Anwendungsgebiet	971	Widmann-Steuerung	822	—, für sich kreuzende Wel-	
—, Heber-	966	Wicklung der Dynamo-		—, len	664
—, Regelung	955, 965	maschinen	1415, 1427	—, Rohhaut	668
—, Saugrohr	957, 968	—, Darstellung der	1418	—, Schnecke	665
—, Schaufelräder der Fran-		—, Kollektorschritt	1417	—, wendegetriebe	1277
—, cis-	959	—, in Reihenparallelschal-		—, Winkel-	660
—, Schaufelform der Pel-		—, tung	1417	—, Zykloiden	649
—, tonräder	954	—, Ring- (nach Pacinotti)	1416	— und Zahnstange (bei	
—, Spezifische Größen	970	—, Schleifen-	1417	Werkzeugmasch.)	1265
—, Verbund-	967	—, sschritt	1417	Zangen z. Transport von	
—, Zapfen	969	—, Trommel-	1417	Blöcken	1104
Watzke-Kupplung	629	—, Wellen-	1417	Zapfen	592
Wechselräder, Aufbringen		Widerstandsmessungen,		—, berechnung	595
der	1295	elektr.	1405	—, drucke, zulässige	596
Wechselradsätze	1292	—, Abzweigmethode	1405	—, reibung	299
Wechselstrom	1388	—, Strom- und Span-		—, reibungsarbeit	596
—, Effektivwert	1389	—, nung"	1405	—, reibungskoeffizient	594
—, Kirchhoffsche Gesetze	1391	—, Doppelbrücke (Thomp-		Zementstahl	531
—, Leerkomponente	1390	son)	1406	Zentralen, Elektrische	1455
—, Leistung	1390	—, Substitutionsmethode	1405	—, Normalschaltungen	
—, kreise, wichtige	1391	—, Wheatstonesche Brücke	1405	—, bei Gleichstrom	1455
—, Vektordarstellung	1388	Winde	1106	—, — Drehstrom	1460
Wechselstromgeneratoren	1426	—, Bau-	1109	—, Parallelschaltung von	
—, Anker	1426	—, Bock-	1110	Wechselstrommaschinen	1461
—, Aufbau	1426	—, elektrisch betriebene—	1109	—, Regelung und Parallel-	
—, Charakteristik	1428	—, —, Berechnung und		schaltung von Gleich-	
—, Erregung	1428	—, Ausführung	1124	strommaschinen	1459
—, Pole	1426	—, fahrbare —	1129	Zentralüberhitzer	823
—, Verhalten	1428	—, feststehende	1129	—, Ausführung	829
—, Wicklung	1427	—, Hubwerk	1124	Zentrifugalpumpen	973
Wechselventil	748	—, Querfahrwerk	1127	—, Ausführung	984
Wegbegrenzung an Werk-		—, fahrbare	1111	—, Charakteristik 976, 981,	983
zeugmaschinen	1274	—, Hand-	1109	—, Geschwindigkeitsdia-	
Weicheiseninstrumente	1400	—, mittelbar wirkende —	1108	gramme	976
Weißblech	548	—, motorischer Antrieb		—, Regelung	980
Wellen	600	der —	1113	—, Schaufelform	978
—, berechnung	438, 455	—, Schrauben-	1106	—, Schaufelwinkel	973
—, durchbiegung	607	—, Transmissions-	1113	Zeunersches Schieberdia-	
Wendegetriebe für Werk-		—, unmittelbar wirkende	1106	gramm	864
zeugmaschinen	1277	—, Wand-	1111	Ziegel, gebrannte	558
—, Riemen-	1278	—, Wirkungsgrad der —	1108	Ziehkeilgetriebe	1255
—, Umsteuerung durch		—, Zahnstangen-	1106	Ziehkeilkupplungen	1268
Kupplungen	1278	Windkessel	926, 927	Zink	550
—, Zahnrad-	1277	—, Ausführung	934	Zinn	551
Wendepol (Dynamo)	1424	—, Bemessung	928	Zinsseszinsrechnung	84
Wendepunkt, tangente	163	Winkelgeschwindigkeit	215	Zissoide	144
Werkzeuge	1227	—, kritische	248	Zoelly-Turbine	1000
—, Arbeitswinkel	1227	Winkelräder	663	Zodel-Turbinenregulierung	966
—, Bohren	1231	Wirbelströme (elektr.)	1397	Zug, künstlicher	780
—, Drehen	1229	Wirkungsgrad	239	Zugfestigkeit	407
—, Fräsen	1232	Wiß-Ventil	748, 755		
—, Hobeln	1229	Woltmannflügel	348		

Zugfestigkeit:	407	Zustandsänderung der Gase	359	Zweitaktgasmaschine	909
— -spannung	391, 409	Zweidruckturbine	1017	—, Ladepumpen	910
— und Biegung	461	—, Regelung	1018	—, Steuerung	909
— und Drehung	469	Zweikammerkessel	814	—, Zylinder	911
— und Schub	467	Zweikammersteuerung	873	Zweitaktblömaschine	915
Zugregler	779	Zweileiteranlagen	1456	Zwischendampfentnahme	1013
Zugkanäle	790	Zweiphasenstrom	1395	Zwischenüberhitzung	898
Zugkraft von Magneten	1376	Zweiradkran	1185	Zwonicek-Steuerung	884
Zündung (f. Gasmaschinen)	905	Zweiseilgreifer	1098	Zyklische Kurven	133
Zusammengesetzte Kessel	808	Zweitakt-Dieselmachine	916	Zykloide, gemeine	133
Zusatzbeschleunigung	223	— von Sulzer	916	—, verlängerte	134
Zusatzkraft	244	— von Junkers	917	—, verkürzte	134
Zustandsänderung der		—, Ladepumpen	920	Zykloidenverzahnung	649
Dämpfe	372, 373	—, Leistungssteigerung	917		

- Entwerfen und Berechnen der Dampfmaschinen.** Ein Lehr- und Handbuch für Studierende und angehende Konstrukteure. Von Ingenieur Heinrich Dubbel. Dritte, umgearbeitete Auflage. Mit 470 Textfiguren. In Leinwand gebunden Preis M. 10.—.
- Die Steuerungen der Dampfmaschinen.** Von Ingenieur Heinrich Dubbel. Mit 446 Textfiguren. In Leinwand gebunden Preis M. 10.—.
- Großgasmaschinen.** Ihre Theorie, Wirkungsweise und Bauart. Von Ingenieur Heinrich Dubbel. Mit 400 Textfiguren und 6 Tafeln. In Leinwand gebunden Preis M. 10.—.
- Hilfsbuch für den Maschinenbau.** Für Maschinentechniker, sowie für den Unterricht an technischen Lehranstalten. Von Professor Fr. Freytag, Lehrer an den Technischen Staatslehranstalten in Chemnitz. Vierte, erweiterte und verbesserte Auflage. Mit 1108 Textfiguren, 10 Tafeln und einer Beilage für Österreich. In Leinwand gebunden Preis M. 10.—; in Ganzleder gebunden M. 12.—.
- Die ortsfesten Kolbendampfmaschinen.** Ein Lehr- und Handbuch für angehende und ausübende Konstrukteure. Von Professor Fr. Freytag, Kgl. Baurat, Lehrer an den Technischen Staatslehranstalten in Chemnitz. Mit 319 Textfiguren und 18 Tafeln. Preis M. 14.—; in Leinwand gebunden M. 16.—.
- Technische Untersuchungsmethoden zur Betriebskontrolle,** insbesondere zur Kontrolle des Dampfbetriebes. Zugleich ein Leitfaden für die Übungen in den Maschinenbaulaboratorien technischer Lehranstalten. Von Professor Julius Brand, Elberfeld. Dritte, verbesserte Auflage. Mit 285 Textfiguren, einer lithographischen Tafel und zahlreichen Tabellen. In Leinwand gebunden Preis M. 8.—.
- Wärmetechnik des Gasgenerator- und Dampfkesselbetriebes.** Die Vorgänge, Untersuchungs- und Kontrollmethoden hinsichtlich Wärmeerzeugung und Wärmeverwendung im Gasgenerator- und Dampfkesselbetrieb. Von Ingenieur Paul Fuchs. Dritte, erweiterte Auflage. Mit 43 Textfiguren. In Leinwand gebunden Preis M. 5.—.
- Formeln und Tabellen der Wärmetechnik.** Zum Gebrauch bei Versuchen in Dampf-, Gas- und Hüttenbetrieben. Von Ingenieur Paul Fuchs. In Leinwand gebunden Preis M. 2.—.
- Die Dampfkessel.** Lehr- und Handbuch für Studierende technischer Hochschulen, Schüler Höherer Maschinenbauschulen und Techniken, sowie für Ingenieure und Techniker. Von Professor F. Tetzner, Oberlehrer an den Kgl. Vereinigten Maschinenbauschulen zu Dortmund. Fünfte, verbesserte Auflage. Mit 230 Textfiguren und 44 lithographischen Tafeln. In Leinwand gebunden Preis M. 8.—.
- Die Dampfkessel nebst ihren Zubehörteilen und Hilfseinrichtungen.** Ein Hand- und Lehrbuch zum praktischen Gebrauch für Ingenieure, Kesselbesitzer und Studierende. Von R. Spalckhaver, Regierungs-Baumeister, Kgl. Oberlehrer in Altona a. E., und Fr. Schneiders, Ingenieur in M.-Gladbach. Mit 679 Textfiguren. In Leinwand gebunden Preis M. 24.—.
-

- Berechnen und Entwerfen der Schiffskessel** unter besonderer Berücksichtigung der Feuerrohr-Schiffskessel. Ein Lehr- und Handbuch für Studierende, Konstrukteure und Überwachungsbeamte, Schiffingenieure und Seemaschinenisten. In Gemeinschaft mit Dipl.-Ing. Hugo Buchholz, Geschäftsführer des Verbandes technischer Schiffsoffiziere, herausgegeben von Prof. Hans Dieckhoff, Technischer Direktor der Woermann-Linie und der Deutschen Ost-Afrika-Linie, vordem etatsmäßiger Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu Berlin. Mit 96 Textabbildungen und 18 Tafeln. In Leinwand gebunden Preis M. 12.—.
- Die Grundlagen der deutschen Material- und Bauvorschriften für Dampfkessel.** Von Professor R. Baumann an der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart. Mit einem Vorwort von Dr.-Ing. C. v. Bach, Kgl. Württ. Baudirektor, Professor des Maschineningenieurwesens an der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart, Vorstand des Ingenieurlaboratoriums und der Materialprüfungsanstalt an derselben. Mit 38 Textfiguren. Kartoniert Preis M. 2.80.
- Berechnung, Entwurf und Betrieb rationeller Kesselanlagen.** Von Max Gensch, Ingenieur. Mit 95 Textfiguren. In Leinw. geb. Preis M. 6.—.
- Handbuch der Feuerungstechnik und des Dampfkesselbetriebes** mit einem Anhang über allgemeine Wärmetechnik. Von Dr.-Ing. Georg Herberg, Stuttgart. Mit 54 Textabbildungen und Diagrammen, 87 Tabellen, sowie 43 Rechnungsbeispielen. In Leinwand gebunden Preis M. 7.—.
- Dampfkessel-Feuerungen zur Erzielung einer möglichst rauchfreien Verbrennung.** Von F. Haier. Zweite Auflage. Im Auftrage des Vereins deutscher Ingenieure bearbeitet vom Verein für Feuerungsbetrieb und Rauchbekämpfung in Hamburg. Mit 375 Textfiguren, 29 Zahlentafeln und 10 lithographischen Tafeln. In Leinwand geb. Preis M. 20.—.
- Neue Tabellen und Diagramme für Wasserdampf.** Von Dr. R. Mollier, Professor an der Technischen Hochschule zu Dresden. Mit 2 Diagrammtafeln. Preis M. 2.—.
- Technische Thermodynamik.** Von Prof. Dipl.-Ing. W. Schüle. Zweite, erweiterte Auflage der „Technischen Wärmemechanik“.
- Erster Band: Die für den Maschinenbau wichtigsten Lehren nebst technischen Anwendungen. Mit 223 Textfiguren und 7 Tafeln. In Leinwand gebunden Preis M. 12.80.
- Zweiter Band: Höhere Thermodynamik mit Einschluß der chemischen Zustandsänderungen, nebst ausgewählten Abschnitten aus dem Gesamtgebiet der technischen Anwendungen. Mit 155 Textfiguren und 3 Tafeln. In Leinwand gebunden Preis M. 10.—.
- Verdampfen, Kondensieren und Kühlen.** Erklärungen, Formeln und Tabellen für den praktischen Gebrauch. Von E. Hausbrand, Kgl. Baurat. Fünfte, vermehrte Auflage. Mit 45 Textfiguren und 94 Tabellen. In Leinwand gebunden Preis M. 12.—.
- Kondensation.** Ein Lehr- und Handbuch über Kondensation und alle damit zusammenhängenden Fragen, auch einschließlich der Wasserrückkühlung. Für Studierende des Maschinenbaues, Ingenieure, Leiter größerer Dampfbetriebe, Chemiker und Zuckertechniker. Von F. J. Weiß, Zivilingenieur in Basel. Zweite, ergänzte Auflage. Bearbeitet von Ingenieur E. Wiki in Luzern. Mit 141 Textfiguren und 10 Tafeln. In Leinwand gebunden Preis M. 12.—.

Die Kondensation der Dampfmaschinen und Dampfturbinen. Lehrbuch für höhere technische Lehranstalten und zum Selbstunterricht. Von Dipl.-Ing. Karl Schmidt. Mit 116 Textfiguren.

In Leinwand gebunden Preis M. 5.—.

Die Abwärmeverwertung im Kraftmaschinenbetrieb mit besonderer Berücksichtigung der Zwischen- und Abdampfverwertung zu Heizzwecken. Eine kraft- und wärmewirtschaftliche Studie. Von Dr.-Ing. Ludwig Schneider. Zweite, bedeutend erweiterte Auflage. Mit 118 Textfiguren und einer Tafel. Preis M. 5.—; in Leinwand gebunden M. 5.80.

Die Zwischendampfverwertung in Entwicklung, Theorie und Wirtschaftlichkeit. Von Dr.-Ing. Ernst Reutlinger, Köln. Mit 69 Textfiguren. Preis M. 4.—; in Leinwand gebunden M. 4.80.

Wahl, Projektierung und Betrieb von Kraftanlagen. Ein Hilfsbuch für Ingenieure, Betriebsleiter, Fabrikbesitzer. Von Friedrich Barth, Oberingenieur an der Bayrischen Landesgewerbeanstalt in Nürnberg. Mit 126 Figuren im Text und auf 3 Tafeln. In Leinwand geb. Preis M. 12.—.

Ermittlung der billigsten Betriebskraft für Fabriken unter besonderer Berücksichtigung der Abwärmeverwertung. Von Karl Urbahn. Zweite, vollständig erneuerte und erweiterte Auflage von Dr.-Ing. Ernst Reutlinger, Direktor der Ingenieurgesellschaft für Wärmewirtschaft m. b. H. in Köln. Mit 66 Figuren und 45 Zahlentafeln.

In Leinwand gebunden Preis M. 5.—.

Leitfaden zum Berechnen und Entwerfen von Lüftungs- und Heizungsanlagen. Ein Hand- und Lehrbuch für Ingenieure und Architekten. Von H. Rietschel, Geh. Regierungs-Rat und Professor in Berlin, unter Mitwirkung von Dr. techn. K. Brabbée, Professor in Berlin. Fünfte, neu bearbeitete Auflage. Zwei Teile. Mit 84 Textfiguren, 31 Tabellen, 33 Tafeln und vier Hilfsblättern.

In zwei Leinwandbände gebunden Preis M. 28.—.

Heizung und Lüftung von Gebäuden. Ein Lehrbuch für Architekten, Betriebsleiter und Konstrukteure. Von Prof. Dr.-Ing. Anton Gramberg, Dozent an der Königlichen Technischen Hochschule in Danzig-Langfuhr. Mit 236 Figuren im Text und auf 3 Tafeln.

In Leinwand gebunden Preis M. 12.—.

Die Dampfturbinen. Mit einem Anhang über die Aussichten der Wärmekraftmaschinen und über die Gasturbine. Von Dr. phil., Dr.-Ing. A. Stodola, Professor am Eidgenössischen Politechnikum in Zürich. Vierte, umgearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 856 Textfiguren und 9 Tafeln.

In Leinwand gebunden Preis M. 30.—.

Entwerfen und Berechnen der Dampfturbinen, mit besonderer Berücksichtigung der Überdruckturbine einschließlich der Berechnung von Oberflächenkondensatoren und Schiffsschrauben. Von John Morrow, M. Sc., D. Eng., Lecturer in Engineering, Armstrong College, Newcastle-on-Tyne. Autorisierte deutsche Ausgabe von Dipl.-Ing. Carl Kisker. Mit 187 Textfiguren und 3 Tafeln. In Leinwand gebunden Preis M. 14.—.

Der Wirkungsgrad von Dampfturbinenbeschaufelungen. Von Paul Wagner, Oberingenieur in Berlin. Mit 107 Textfiguren und einer Tafel. Preis M. 6.—; in Leinwand gebunden M. 6.80.

- Die Gasmaschine.** Ihre Entwicklung, ihre heutige Bauart und ihr Kreisprozeß. Von R. Schöttler, Geh. Hofrat, o. Prof. an der Herzogl. Techn. Hochschule zu Braunschweig. Fünfte, umgearbeitete Auflage. Mit 622 Figuren im Text und auf 12 Tafeln.
In Leinwand gebunden Preis M. 20.—
- Das Entwerfen und Berechnen der Verbrennungskraftmaschinen und Kraftgas-Anlagen.** Von Hugo Güldner, Maschinenbaudirektor, Vorstand der Güldner-Motoren-Gesellschaft in Aschaffenburg. Dritte, neubearbeitete und bedeutend erweiterte Auflage. Mit 1282 Textfiguren, 35 Konstruktionstafeln und 200 Zahlentafeln.
In Leinwand gebunden Preis M. 32.—
- Dieselmotoren für Land- und Schiffsbetrieb.** Von A. P. Chalkley, B. Sc. (Lond.), A. M. Inst. C. E., A. I. E. E. Mit einer Einleitung von Dr.-Ing. Rudolf Diesel, München. Ins Deutsche übertragen von Dr. phil. Ernst Müller, Dipl.-Ing., Gent. Zweiter, unveränderter Abdruck. Mit 90 Figuren.
In Leinwand gebunden Preis M. 8.—
- Die flüssigen Brennstoffe, ihre Gewinnung, Eigenschaften und Untersuchung.** Von Dr. L. Schmitz, Chemiker. Mit 56 Textfiguren.
In Leinwand gebunden Preis M. 5.60.
- Motorwagen und Fahrzeugmaschinen für flüssigen Brennstoff.** Ein Lehrbuch für den Selbstunterricht und für den Unterricht an technischen Lehranstalten. Von Dr. techn. A. Heller, Berlin. Mit 650 in den Text gedruckten Figuren. In Leinwand gebunden Preis M. 20.—
- Die Entropie-Diagramme der Verbrennungsmotoren einschließlich der Gasturbine.** Von Dipl.-Ing. P. Ostertag, Professor am Kantonalen Technikum Winterthur. Mit 17 Textfiguren. Preis M. 1.60.
- Die Entropietafel für Luft und ihre Verwendung zur Berechnung der Kolben- und Turbo-Kompressoren.** Von Dipl.-Ing. P. Ostertag, Professor am Kantonalen Technikum in Winterthur. Mit 11 Textfiguren und 2 Tafeln. Preis M. 2.80.
- Theorie und Konstruktion der Kolben- und Turbo-Kompressoren.** Von Dipl.-Ing. P. Ostertag, Professor am Kantonalen Technikum Winterthur. Mit 266 Textfiguren. In Leinwand gebunden Preis M. 11.—
- Berechnung der Kältemaschinen auf Grund der Entropiediagramme.** Von Prof. Dipl.-Ing. P. Ostertag, Winterthur. Mit 30 Textfiguren und 4 Tafeln. Preis M. 4.—
- Kompressoren-Anlagen, insbesondere in Grubenbetrieben.** Von Dipl.-Ing. Karl Teiwes. Mit 129 Textfiguren.
In Leinwand gebunden Preis M. 7.—
- Die Gebläse.** Bau und Berechnung der Maschinen zur Bewegung, Verdichtung und Verdünnung der Luft. Von A. von Ihering, Kaiserl. Geh. Regierungsrat. Dritte, umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 643 Textfiguren und 8 Tafeln. In Leinwand gebunden Preis M. 20.—

- Die Zentrifugalpumpen** mit besonderer Berücksichtigung der Schaufel-schnitte. Von Dipl.-Ing. Fritz Neumann. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 221 Textfiguren und 7 lithographierten Tafeln.
In Leinwand gebunden Preis M. 10.—
- Die Kolbenpumpen.** Von H. Berg, Professor an der Technischen Hoch-schule, Stuttgart. Mit ca. 486 Textfiguren und 14 lithographierten Tafeln.
Erscheint im Herbst 1914.
- Die Turbinen für Wasserkraftbetrieb.** Ihre Theorie und Konstruktion. Von A. Pfarr, Geh. Baurat, Professor des Maschinen-Ingenieurwesens an der Großherzogl. Techn. Hochschule zu Darmstadt. Zweite, teilweise umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 548 Textfiguren und einem Atlas von 62 lithographierten Tafeln.
In zwei Leinwandbände gebunden Preis M. 40.—
- Die Theorie der Wasserturbinen.** Ein kurzes Lehrbuch von Rudolf Escher, Professor am Eidgenössischen Polytechnikum in Zürich. Mit 242 Textfiguren.
In Leinwand gebunden Preis M. 8.—
- Wasserkraftmaschinen.** Ein Leitfaden zur Einführung in Bau und Be-rechnung moderner Wasserkraftmaschinen und -Anlagen. Von Dipl.-Ing. L. Quantz, Oberlehrer an der Kgl. Höheren Maschinenbauschule zu Stettin. Zweite, erweiterte und verbesserte Auflage. Mit 159 Text-figuren.
In Leinwand gebunden Preis M. 4.—
- Die Wasserkräfte, ihr Ausbau und ihre wirtschaftliche Ausnutzung.** Ein technisch-wirtschaftliches Lehr- und Handbuch. Von Dr.-Ing. Adolf Ludin, Großherzogl. Bauinspektor. In zwei Bänden. Mit 1087 Abbil-dungen im Text und auf 11 Tafeln. Preisgekrönt von der Kgl. Akademie des Bauwesens in Berlin.
In Leinwand gebunden Preis M. 60.—
- Technische Hydrodynamik.** Von Dr. Franz Prášil, Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich. Mit 81 Textfiguren.
In Leinwand gebunden Preis M. 9.—
- Strömungsenergie und mechanische Arbeit.** Beiträge zur abstrakten Dy-namik und ihre Anwendung auf Schiffspropeller, schnelllaufende Pumpen und Turbinen, Schiffswiderstand, Schiffssegel, Windturbinen, Trag- und Schlagflügel und Luftwiderstand von Geschossen. Von Paul Wagner, Oberingenieur in Berlin. Mit 151 Textfiguren.
In Leinwand gebunden Preis M. 10.—
- Technische Schwingungslehre.** Einführung in die Untersuchung der für den Ingenieur wichtigsten periodischen Vorgänge aus der Mechanik starrer, elastischer, flüssiger und gasförmiger Körper, sowie aus der Elektrizitäts- lehre. Von Dr. Wilhelm Hort, Dipl.-Ing. Mit 87 Textfiguren.
Preis M. 5.60; in Leinwand gebunden M. 6.40.
- Leitfaden der Flugtechnik.** Für Ingenieure, Techniker und Studierende. Von Professor Siegmund Huppert, Ingenieur, Direktor des Kyff-häuser-Technikums Frankenhausen a. Kyffh. Mit 235 Textfiguren.
In Leinwand gebunden Preis M. 12.—

Ingenieur-Mathematik. Lehrbuch der höheren Mathematik für die technischen Berufe. Von Dr.-Ing. Dr. phil. Heinz Egerer, Diplom-Ingenieur, vorm. Professor für Ingenieur-Mechanik und Material-Prüfung an der Technischen Hochschule Drontheim.

Erster Band: Niedere Algebra und Analysis. — Lineare Gebilde der Ebene und des Raumes in analytischer und vektorieller Behandlung. — Kegelschnitte. Mit 320 Textabbildungen und 575 vollständig gelösten Beispielen und Aufgaben. In Leinwand gebunden Preis M. 12.—.

Differential- und Integralrechnung. (Infinitesimalrechnung.) Für Ingenieure, insbesondere auch zum Selbststudium. Von Dr. W. Koestler, Diplom-Ingenieur, Burgdorf und Dr. M. Tramer, Zürich.

Erster Teil: Grundlagen. Mit 221 Textfiguren und 2 Tafeln.

Preis M. 13.—; in Leinwand gebunden M. 14.—.

Elastizität und Festigkeit. Die für die Technik wichtigsten Sätze und deren erfahrungsmäßige Grundlage. Von Dr.-Ing. C. v. Bach, K. Württ. Baudirektor, Prof. des Maschinen-Ingenieurwesens an der K. Technischen Hochschule Stuttgart. Sechste, vermehrte Auflage. Unter Mitwirkung von Prof. R. Baumann an der K. Technischen Hochschule Stuttgart. Mit Textabbildungen und 20 Tafeln in Lichtdruck.

In Leinwand gebunden Preis M. 20.—.

Festigkeitslehre nebst Aufgaben aus dem Maschinenbau und der Baukonstruktion. Ein Lehrbuch für Maschinenbauschulen und andere technische Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht und für die Praxis. Von Ernst Wehnert, Ingenieur und Oberlehrer an der Städt. Gewerbe- und Maschinenbauschule in Leipzig

I. Band: Einführung in die Festigkeitslehre. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 247 Textfiguren.

In Leinwand gebunden Preis M. 6.—.

II. Band: Zusammengesetzte Festigkeitslehre. Mit 142 Textfiguren.

In Leinwand gebunden Preis M. 7.—.

Technische Mechanik. Ein Lehrbuch der Statik und Dynamik für Maschinen- und Bauingenieure. Von Ed. Autenrieth. Zweite Auflage. Neu bearbeitet von Prof. Dr.-Ing. Max Ensslin in Stuttgart. Mit 297 Textfiguren.

In Leinwand gebunden Preis M. 18.—.

Aufgaben aus der technischen Mechanik. Von Professor Ferd. Wittenbauer, Graz.

I. Band: Allgemeiner Teil. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. 816 Aufgaben nebst Lösungen. Mit 610 Textfiguren.

In Leinwand gebunden Preis M. 6.40.

II. Band: Festigkeitslehre. 591 Aufgaben nebst Lösungen und einer Formelsammlung. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 490 Textfiguren.

Preis M. 6.—; in Leinwand gebunden M. 6.80.

III. Band: Flüssigkeiten und Gase. 504 Aufgaben nebst Lösungen und einer Formelsammlung. Mit 347 Textfiguren.

Preis M. 6.—; in Leinwand gebunden M. 6.80.

Die Technologie des Maschinentechnikers. Von Ingenieur Karl Meyer, Professor, Oberlehrer an den Kgl. Vereinigten Maschinenbauschulen zu Köln. Dritte, verbesserte Auflage. Mit 405 Textfiguren.

In Leinwand gebunden Preis M. 8.—.

Einzelkonstruktionen aus dem Maschinenbau. Herausgegeben von Ingenieur C. Volk, Berlin.

1. Heft: Die Zylinder ortsfester Dampfmaschinen. Von Oberingenieur H. Frey, Berlin. Mit 109 Textfiguren. Preis M. 2.40.
2. Heft: Kolben. I. Dampfmaschinen- und Gebläsekolben. Von Ing. C. Volk, Berlin. II. Gasmaschinen- und Pumpenkolben. Von A. Eckardt, Betriebsingenieur der Gasmotorenfabrik Deutz. Mit 247 Textfiguren. Preis M. 4.—.
3. Heft: Zahnräder. I. Teil. Stirn- und Kegelräder mit geraden Zähnen. Von Dr. A. Schiebel, a. o. Professor der k. k. deutschen technischen Hochschule zu Prag. Mit 110 Textfiguren. Preis M. 3.—.
4. Heft: Die Kugellager und ihre Verwendung im Maschinenbau. Von Werner Ahrens, Winterthur. Mit 134 Textfiguren. Preis M. 4.40.
5. Heft: Zahnräder. II. Teil. Räder mit schrägen Zähnen. (Räder mit Schraubenzähnen und Schneckengetriebe.) Von Dr. A. Schiebel, o. ö. Professor der k. k. deutschen technischen Hochschule zu Prag. Mit 116 Textfiguren. Preis M. 4.—.
6. Heft: Schubstangen und Kreuzköpfe. Von Oberingenieur H. Frey, Weidmannslust b. Berlin. Mit 117 Textfiguren. Preis M. 1.60.

Weitere Hefte in Vorbereitung.

Maschinenelemente. Leitfaden zur Berechnung und Konstruktion für technische Mittelschulen, Gewerbe- und Werkmeisterschulen, sowie zum Gebrauch in der Praxis. Von Ingenieur Hugo Krause. Zweite, vermehrte Auflage. Mit 357 Textfiguren.

In Leinwand gebunden Preis M. 5.60.

Transmissionen. Wellen, Lager, Kupplungen, Riemen- und Seiltrieb, Anlagen. Von Ingenieur Stephan Jellinek in Wien. Mit 61 Textfiguren und 30 Tafeln.

In Leinwand gebunden Preis M. 12.—.

Hebemaschinen. Eine Sammlung von Zeichnungen ausgeführter Konstruktionen mit besonderer Berücksichtigung der Hebemaschinen-Elemente. Von C. Bessel, Ingenieur, Oberlehrer an der Kgl. höh. Maschinenbauschule Altona. (34 Tafeln.) Zweite Auflage.

In Leinwand gebunden Preis M. 6.60.

Die Werkzeugmaschinen und ihre Konstruktionselemente. Ein Lehrbuch zur Einführung in den Werkzeugmaschinenbau. Von Fr. W. Hülle, Oberlehrer an den Königlichen vereinigten Maschinenbauschulen in Dortmund. Dritte, verbesserte Auflage. Mit 877 Textfiguren und 6 Tafeln.

In Leinwand gebunden Preis M. 15.—.

Die Grundzüge der Werkzeugmaschinen und der Metallbearbeitung. Ein Leitfaden von Fr. W. Hülle in Dortmund. Mit 208 Textabbildungen.

In Leinwand gebunden Preis M. 5.—.

Leitfaden der Werkzeugmaschinenkunde. Von Prof. Dipl.-Ing. Herm. Meyer, Oberlehrer an den Königl. vereinigten Maschinenbauschulen zu Magdeburg. Mit 312 Textfiguren. In Leinwand gebunden Preis M. 5.—.

Verlag von Julius Springer in Berlin.

Taschenbuch für Bauingenieure

Unter Mitwirkung hervorragender Fachmänner
herausgegeben von
Max Foerster

Geh. Hofrat, ord. Professor an der Technischen Hochschule in Dresden

Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage

ca. 2070 Seiten mit 3054 Figuren

Zwei Teile. In englisch Leinen gebunden

In einem Bande Preis M. 20.—; in zwei Bänden Preis M. 21.—.

Hilfsbuch für die Elektrotechnik

Unter Mitwirkung namhafter Fachgenossen
bearbeitet und herausgegeben von

Dr. Karl Strecker

Geh. Oberpostrat und Professor

Achte, umgearbeitete und vermehrte Auflage

Mit 800 Textfiguren

In Leinwand gebunden Preis M. 18.—

Der Fabrikbetrieb. Praktische Anleitungen zur Anlage und Verwaltung von Maschinenfabriken und ähnlichen Betrieben, sowie zur Kalkulation und Lohnverrechnung. Von Albert Ballewski. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage, bearbeitet von C. M. Lewin, beratender Ingenieur für Fabrikorganisation in Berlin.

In Leinwand gebunden Preis M. 6.—.

Die Betriebsleitung, insbesondere der Werkstätten. Von Fred. W. Taylor, Philadelphia. Autorisierte deutsche Ausgabe der Schrift: „Shop management“. Von A. Wallichs, Professor an der Technischen Hochschule in Aachen. Dritte, vermehrte Auflage. Mit 26 Figuren und 2 Zahlentafeln.

In Leinwand gebunden Preis M. 6.—.

Aus der Praxis des Taylor-Systems mit eingehender Beschreibung seiner Anwendung bei der Tabor Manufacturing Company in Philadelphia. Von Dipl.-Ing. Rudolf Seubert. Mit 45 Abbildungen und Vordrucken.

In Leinwand gebunden Preis M. 7.—.

Selbstkostenberechnung im Maschinenbau. Zusammenstellung und kritische Beleuchtung bewährter Methoden mit praktischen Beispielen. Von Dr.-Ing. Georg Schlesinger, Prof. an der Kgl. Techn. Hochschule zu Berlin. Mit 110 Formularen. In Leinwand gebunden Preis M. 10.—.

Werkstattstechnik. Zeitschrift für Fabrikbetrieb und Herstellungsverfahren. Herausgegeben von Dr.-Ing. G. Schlesinger, Professor an der Technischen Hochschule zu Berlin.

Jährlich 24 Hefte in Quartformat.

Preis vierteljährlich M. 3.—.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

