

Ubezpieczenia wobec wyzwań XXI

pod redakcją
Wandy Ronki-Chmielowiec



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2011

Recenzenci: Jerzy Handschke, Jan Monkiewicz, Kazimierz Ortyński, Wanda Sułkowska,
Włodzimierz Szkutnik, Tadeusz Szumlicz, Stanisław Wieteska

Redaktor Wydawnictwa: Elżbieta Kożuchowska

Redaktor techniczny: Barbara Łopusiewicz

Korektor: Barbara Cibis

Łamanie: Małgorzata Czupryńska

Projekt okładki: Beata Dębska

Publikacja jest dostępna na stronie www.ibuk.pl

Streszczenia opublikowanych artykułów są dostępne w międzynarodowej bazie danych
The Central European Journal of Social Sciences and Humanities <http://cejsh.icm.edu.pl>
oraz w The Central and Eastern European Online Library www.ceeol.com,
a także w adnotowanej bibliografii zagadnień ekonomicznych BazEkon [http://kangur.uek.krakow.pl/
bazy_ae/bazekon/nowy/index.php](http://kangur.uek.krakow.pl/bazy_ae/bazekon/nowy/index.php)

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania znajdują się
na stronie internetowej Wydawnictwa
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

Kopiowanie i powielanie w jakiegokolwiek formie
wymaga pisemnej zgody Wydawcy

© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wrocław 2011

ISSN 1899-3192

ISBN 978-83-7695- 191-1

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Druk: Drukarnia TOTEM

Spis treści

Wstęp	11
Katarzyna Barczuk, Ewa Łukasik: Formy zabezpieczenia emerytalnego w wybranych krajach europejskich	13
Teresa H. Bednarczyk: Działalność sektora ubezpieczeniowego a wzrost gospodarczy.....	23
Anna Bera, Dariusz Pauch: Programy edukacyjne jako instrument zwiększania świadomości ubezpieczeniowej w zakresie przestępczości ubezpieczeniowej	31
Jacek Białek: Ocena grupowa w analizie Otwartych Funduszy Emerytalnych.....	40
Sylwia Bożek: Czynności monitorujące i kontrolne w procesie zarządzania ryzykiem w przedsiębiorstwie ubezpieczeniowym	51
Anna Celczyńska: Należności od ubezpieczających z umów ubezpieczenia OC posiadaczy pojazdów mechanicznych.....	60
Magdalena Chmielowiec-Lewczuk: Problemy kalkulacji kosztów zakładów ubezpieczeń na tle powiązań w grupach finansowych	68
Dominika Cichońska: Rola ubezpieczeń w zarządzaniu ryzykiem w zakładach opieki zdrowotnej.....	78
Krystyna Ciuman: Zakłady ubezpieczeń a inne instytucje pośrednictwa finansowego w Polsce w latach 2005–2009.....	87
Tadeusz Czernik: O pewnym sformułowaniu zagadnienia ruiny	94
Teresa Czerwińska: Uwarunkowania polityki dywidend spółek ubezpieczeniowych.....	106
Robert Dankiewicz: Determinanty rozwoju rynku ubezpieczeń kredytu kupieckiego w Polsce	116
Beata Dubiel: Ubezpieczeniowe aspekty ryzyka ekologicznego	126
Roman Garbicz: Ryzyko starości jako element konstruowania systemów emerytalnych w Unii Europejskiej	135
Waldemar Glabiszewski: Znaczenie innowacji technologicznych w działalności ubezpieczeniowej	146
Łukasz Gwizdała: Możliwości analizy systemów bonus-malus w świetle procesów Markowa.....	156
Magdalena Homa: Kalkulacja składki w inwestycyjnych ubezpieczeniach na życie typu unit-linked	168
Beata Jackowska: Charakterystyka wybranych metod wyrównywania tablic trwania życia – wnioski dla zastosowań aktuarialnych	179

Beata Jackowska, Tomasz Jurkiewicz, Ewa Wycinka: Grupowe ubezpieczenia na życie w sektorze MSP	190
Marietta Janowicz-Lomott: Produkty strukturyzowane w formie ubezpieczeń w Polsce.....	201
Anna Jędrzychowska, Ewa Poprawska: Próba zidentyfikowania czynników mających wpływ na wysokość składki przypisanej brutto w ubezpieczeniach komunikacyjnych w Polsce.....	213
Tomasz Jurkiewicz, Agnieszka Pobłocka: Ocena praktycznych metod szacowania rezerwy IBNR w ubezpieczeniach majątkowych	222
Piotr Kania: Specjalistyczne fundusze inwestycyjne otwarte jako forma zewnętrznego zarządzania ubezpieczeniowymi funduszami kapitałowymi zakładów ubezpieczeń na życie	232
Robert Kurek: Uprawnienia organów nadzoru w zakresie kontroli wypłacalności – ujęcie w Solvency II.....	241
Jacek Lisowski: Rola biegłego rewidenta w ocenie gospodarki finansowej ubezpieczyciela – unormowania prawne	250
Jerzy Łańcucki: Przesłanki i kierunki zmian w regulacjach dotyczących pośrednictwa ubezpieczeniowego	258
Krzysztof Łyskawa: Zagrożenie równowagi odszkodowania i szkody w obowiązkowych ubezpieczeniach mienia.....	267
Aleksandra Małek: Obowiązki banku jako ubezpieczającego w świetle Rekomendacji Dobrych Praktyk Bancassurance	277
Piotr Manikowski: Rynek ubezpieczeń w Polsce a cykle underwritingowe ..	286
Dorota Maśniak: Ubezpieczyciel jako główne ogniwo transgranicznego systemu ochrony ofiar wypadków drogowych	295
Artur Mikulec: Efektywność systemów emerytalnych krajów UE i EFTA w latach 2005–2008	305
Aniela Mikulska: Małe i średnie przedsiębiorstwa jako odbiorcy usług ubezpieczeniowych	316
Marek Monkiewicz: Jednolity rynek ubezpieczeniowy UE w warunkach globalnego kryzysu finansowego 2007–2009 – pomoc publiczna a wspólnotowe reguły konkurencji	325
Joanna Niżnik: Reforma systemów emerytalnych Ameryki Łacińskiej na przykładzie Chile i Argentyny	335
Magdalena Osak: Medyczne konto oszczędnościowe jako mechanizm finansowania ochrony zdrowia	344
Dorota Ostrowska: Kapitał międzynarodowy a dostęp do produktów ubezpieczeniowych strategicznych dla rozwoju gospodarki polskiej.....	352
Anna Ostrowska-Dankiewicz: Polisa strukturyzowana jako forma inwestycji alternatywnej na rynku polskim.....	362
Renata Pajewska-Kwaśny: Perspektywy rozwoju tradycyjnych i nowatorskich form sprzedaży ubezpieczeń w Polsce – cz. I	373

Monika Papież: Analiza przyczynowości na rynku ubezpieczeń życiowych w latach 2003–2010	383
Agnieszka Pawłowska: Ubezpieczenie <i>business interruption</i> w zarządzaniu ryzykiem przerw w działalności gospodarczej	394
Krzysztof Piasecki: Rozmyte zbiory probabilistyczne w rachunku aktuarnym	402
Piotr Pisarewicz: Rola funduszy inwestycyjnych w rozwoju programów emerytalnych w USA	409
Ryszard Pukała: Procesy integracyjne rynków ubezpieczeniowych krajów Europy Środkowej i Wschodniej	416
Małgorzata Rutkowska-Podolowska, Nina Szczygiel: Medical savings account as a funding mechanism for health	426
Grażyna Sordyl: Rola i działalność holenderskiego funduszu gwarancyjnego (College voor Zorgverzekeringen CVZ) w obszarze prywatnych ubezpieczeń zdrowotnych	435
Ewa Spigarska: Sprawozdanie finansowe zakładu ubezpieczeń a Międzynarodowe Standardy Sprawozdawczości Finansowej w świetle wprowadzanych zmian	445
Elżbieta Izabela Szczepankiewicz, Maria Kiedrowska: Organizacja audytu wewnętrznego w zakładach ubezpieczeń w świetle <i>Solvency II</i> oraz standardów audytu	454
Anna Szkarłat-Koszalka: Instrumenty systemu rachunkowości a kontrola bezpieczeństwa finansowego ubezpieczyciela	463
Tomasz Szkutnik: Funkcje łączące w agregacji ryzyka ubezpieczyciela	472
Włodzimierz Szkutnik: Ryzyko uruchomienia rezerw katastroficznych	483
Anna Szymańska: Czynniki determinujące wybór ubezpieczyciela na rynku ubezpieczeń komunikacyjnych OC	494
Ilona Tomaszewska: Perspektywy rozwoju tradycyjnych i nowatorskich form sprzedaży ubezpieczeń w Polsce – cz. II	507
Damian Walczak, Agnieszka Żołądkiewicz: Świadomość ubezpieczeniowa oraz skłonność do ryzyka studentów	515
Stanisław Wanat: Modelowanie zależności w kontekście agregacji kapitałowych wymogów wypłacalności w <i>Solvency II</i>	525
Stanisław Wieteska: Adaptacja zakładów ubezpieczeń majątkowych do likwidacji skutków efektu cieplarnianego na terenie Polski	537
Ewa Wycinka, Mirosław Szreder: Statystyczna ocena wpływu przekraczania prędkości na liczbę wypadków drogowych w Polsce	547

Summaries

Katarzyna Barczuk, Ewa Łukasik: Forms of retirement security in selected European countries	22
Teresa H. Bednarczyk: The activity of insurance sector vs. economic growth.....	30
Anna Bera, Dariusz Pauch: Educational programs as an instrument to increase awareness of the crime of insurance cover	39
Jacek Bialek: Group evaluation of open pension funds	50
Sylvia Bożek: Monitoring and control activities in the risk management process of an insurance company.....	59
Anna Celczyńska: Accounts receivable from motor vehicle owners insured under third party insurance agreements	67
Magdalena Chmielowiec-Lewczuk: Problems of cost calculation of insurance companies against the background of connections in financial groups .	77
Dominika Cichońska: The role of insurance in risk management in health care facilities	86
Krystyna Ciuman: Insurance companies versus other financial intermediaries in Poland in the years 2005–2009.....	93
Tadeusz Czernik: An alternative formulation of ruin problem.....	105
Teresa Czerwińska: Determinants of the dividend policy in the insurance companies	115
Robert Dankiewicz: Determinants of development of trade credit insurance market in Poland	125
Beata Dubiel: Insurance aspects of ecological risk	134
Roman Garbiec: The risk of old age as the component of constructing the pension systems in the European Union	145
Waldemar Glabiszewski: The importance of technological innovations in the insurance sector.....	155
Łukasz Gwizdała: The capabilities of analyzing bonus-malus systems in the light of Markov processes	167
Magdalena Homa: Correct calculation of net premium in unit-linked investment insurance	178
Beata Jackowska: Characterization of selected methods of the graduation of life tables in the perspective of their actuarial applications	189
Beata Jackowska, Tomasz Jurkiewicz, Ewa Wycinka: Group life insurance in the SME sector.....	200
Marietta Janowicz-Lomott: Structured products in the form of insurance in Poland	212
Anna Jędrzychowska, Ewa Poprawska: An attempt to identify the factors having influence on the gross written premium in motor insurance in Poland	221

Tomasz Jurkiewicz, Agnieszka Poblocka: Evaluation of practical methods of estimation of incurred but not reported reserves in non-life insurance..	231
Piotr Kania: Specialized open-end investment funds as an external management form of investment funds of life insurance companies.....	240
Robert Kurek: Powers of supervision authorities regarding solvency control – Solvency II perspective.....	249
Jacek Lisowski: The role of the auditor in assessing the financial management of the insurer – legal norms	257
Jerzy Łańcucki: Regulations on insurance mediation – stressing premises and directions of change	266
Krzysztof Łyskawa: Threat of compensation balance and damages in compulsory property insurance	276
Aleksandra Malek: Duties of a bank acting as an coverage buying entity in the context of Recommendations on the Bankassurance Activity.....	285
Piotr Manikowski: The insurance market in Poland and underwriting cycles	294
Dorota Maśniak: Insurer as a major link in a cross-border system for protection of victims of road accidents – the role of co-operation of private and public entities.....	304
Artur Mikulec: Effectiveness of pension systems in EU and EFTA countries in the years 2005–2008.....	315
Aniela Mikulska: Small and medium-sized companies as recipients of insurance services	324
Marek Monkiewicz: Single insurance market in the EU and global financial crisis 2007–2009 – public intervention and Community competition rules.....	334
Joanna Niżnik: The reform of pension systems in Latin America. The Chilean and Argentinean models.....	343
Magdalena Osak: Medical savings account as a funding mechanism of health care.....	351
Dorota Ostrowska: The access to the insurance products strategic for the development of Polish economy in reference to the international capital..	361
Anna Ostrowska-Dankiewicz: Structured policy as a form of alternative investment on Polish market.....	372
Renata Pajewska-Kwaśny: Prospects of development of traditional and innovative forms of insurance sales in Poland – part I.....	382
Monika Papież: Causality analysis on the life insurance market in the period 2003–2010	393
Agnieszka Pawłowska: Business interruption insurance implementation in risk management for interrupted activities	401
Krzysztof Piasecki: Probabilistic fuzzy sets in the actuarial calculation	408
Piotr Pisarewicz: Mutual funds role in retirement programs' development in the USA.....	415

Ryszard Pukała: Integration processes of insurance markets in Middle and Eastern Europe.....	425
Małgorzata Rutkowska-Podolowska, Nina Szczygiel: Medyczne konto oszczędnościowe jako mechanizm finansowania ochrony zdrowia	434
Grażyna Sordyl: The Role and Activity of the Dutch Guarantee Fund (College voor Zorgverzekeringen CVZ) in the area of private health insurance	444
Ewa Spigarska: Financial statement of insurance company vs. International Standards of Financial Reporting in the light of changes.....	453
Elżbieta Izabela Szczepankiewicz, Maria Kiedrowska: Organization of internal auditing in insurance companies in the light of Solvency II and audit standards	462
Anna Szkarłat-Koszalka: Instruments of accounting system vs. control of financial security of an insurer.....	471
Tomasz Szkutnik: Copula functions in the aggregation of insurer risk	482
Włodzimierz Szkutnik: The risk of using catastrophic reserves	493
Anna Szymańska: Factors determining the choice of the insurer on the CR automobile insurance market.....	506
Iłona Tomaszewska: Prospects of development of traditional and innovative forms of insurance sales in Poland – part II	513
Damian Walczak, Agnieszka Żołądkiewicz: Students' insurance awareness and risk seeking	524
Stanisław Wanat: Modeling of dependencies in the context of the aggregation of solvency capital requirements in Solvency II	536
Stanisław Wieteska: Property insurance companies adaptation process to reduce the impact of greenhouse effect in Poland	546
Ewa Wycinka, Mirosław Szreder: Statistical analysis of speeding as a factor affecting car accidents in Poland	556

Tadeusz Czernik

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

O PEWNYM SFORMUŁOWANIU ZAGADNIENIA RUINY

Streszczenie: Wszelkim rodzajom aktywności człowieka towarzyszy ryzyko, jednak działalność ubezpieczeniowa wyróżnia się spośród pozostałych tym, że jej przedmiotem jest ryzyko jako takie. W pracy przedstawiono alternatywne sformułowanie zagadnienia ruiny. Podejście to nie wymaga zawansowanego aparatu analizy stochastycznej, jednak intensywnie korzysta z teorii funkcji uogólnionych.

Słowa kluczowe: teoria ruiny, proces Poissona, funkcje uogólnione

1. Wstęp

Wszelkim rodzajom aktywności człowieka towarzyszy ryzyko, jednak działalność ubezpieczeniowa wyróżnia się spośród pozostałych tym, że jej przedmiotem jest ryzyko jako takie. Zakład ubezpieczeń „skupuje” ryzyko i wykorzystując narzędzia analizy statystycznej/stochastycznej, nim zarządza. Jednym z największych zagrożeń systemu ubezpieczeniowego jest utrata płynności przez choć jednego z jego członków. Jedną z miar ryzyka utraty płynności jest prawdopodobieństwo ruiny (wraz z wielkościami pochodnymi: oczekiwany moment wystąpienia ruiny, wartość nadwyżki w momencie wystąpienia ruiny itp.) [Asmussen, Albrecher 2010; Rolski i in. 1999; Dickson, 2005]. W pracy tej zaproponowano alternatywne sformułowanie zagadnienia ruiny.

2. Dynamika nadwyżki ubezpieczeniowej

Rozważmy najprostszy model dynamiki nadwyżki ubezpieczeniowej:

$$dU(t) = cdt - dS(t), \quad (1)$$

gdzie: $U(t)$ – proces nadwyżki ubezpieczeniowej,
 c – stałe w czasie natężenie napływu składki ubezpieczeniowej,
 t – czas,
 $S(t)$ – proces szkód.

Ponieważ równanie (1) jest stochastycznym równaniem różniczkowym [Oksendal 2003; Hanson 2007], należy do niego dołączyć tzw. warunek początkowy: wartość nadwyżki w chwili $t = 0$ wynosi $U(0) = u$. Proces szkód $S(t)$ najczęściej modelowany jest złożonym procesem Poissona:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \theta(t - T_i), \quad (2)$$

gdzie: $N(t)$ – zliczający proces Poissona (reprezentuje losową liczbę szkód odnotowanych do czasu t),

T_i – losowy moment wystąpienia i -tej szkody,

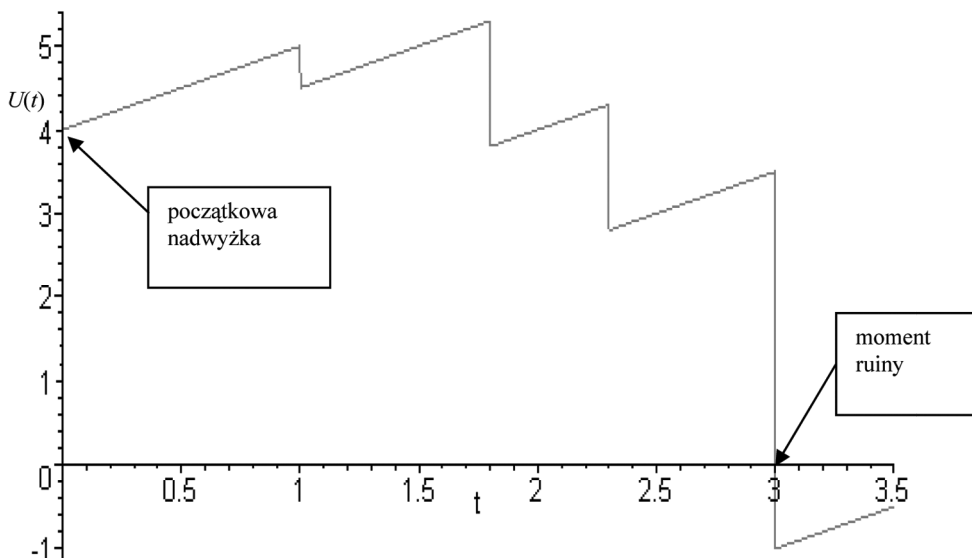
X_i – losowa wartość i -tej szkody,

$\theta(\cdot)$ – funkcja schodkowa (funkcja Heavisidea) $\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \geq 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$

(UWAGA: w poniższej pracy występować będą funkcje schodkowe o różnych nośnikach).

W najprostszym modelu dodatkowo zakłada się niezależność momentów wystąpienia szkody T_i oraz wartości szkody X_i oraz jednorodność w czasie procesu Poissona.

Rysunek 1 przedstawia przykładową realizację procesu nadwyżki ubezpieczeniowej $U(t)$.



Rys. 1. Przykładowa realizacja procesu nadwyżki ubezpieczeniowej ($c = 1$, $u = 4$)

3. Zagadnienie ruiny

Ruinę zwykle definiuje się jako zdarzenie, w którym wartość nadwyżki po raz pierwszy spadła poniżej wartości zero. Wynika stąd, że zagadnienie ruiny należy do szerszej klasy zagadnień zwanych zagadnieniami pierwszego przejścia lub pierwszego wyjścia [Redner 2001; Schuss 1989].

Moment czasu, w którym nadwyżka spadła po raz pierwszy poniżej poziomu zerowego, definiujemy (moment wystąpienia ruiny):

$$T = \inf_{t \in (0, +\infty)} (t : U(t) < 0). \quad (3)$$

Ponieważ proces nadwyżki jest procesem losowym, moment wystąpienia ruiny jest wielkością losową (zmienną losową, lecz nie jest procesem losowym). Tak zdefiniowany moment wystąpienia ruiny często jest tzw. ułomną zmienną losową tzn. $P(T < +\infty) < 1$. W celu usunięcia tej „wady” można zdefiniować moment wystąpienia ruiny następująco:

$$T = \begin{cases} \inf_{t \in (0, +\infty)} (t : U(t) < 0) \\ +\infty \quad \forall t \geq 0 : U(t) \geq 0 \end{cases}. \quad (4)$$

Po zastosowaniu powyższej procedury uzwarczenia zmienna T należy do $(0, +\infty]$. Wtedy nadal może być $P(T < +\infty) < 1$, lecz $P(T \leq +\infty) = 1$.

Prawdopodobieństwo wystąpienia ruiny w nieskończonym horyzoncie czasu (*probability of the ultimate ruin*) definiujemy:

$$\psi(u) = P(\exists t \geq 0 : U(t) < 0) \quad (5)$$

lub

$$\psi(u) = P(T < +\infty). \quad (6)$$

Zapis $\psi(u)$ podkreśla zależność prawdopodobieństwa ruiny od początkowej nadwyżki ubezpieczeniowej (prawdopodobieństwo wystąpienia ruiny definiuje się jako prawdopodobieństwo warunkowe, gdzie warunkiem jest początkowa wartość nadwyżki – w poniższej pracy nie będziemy stosowali tej notacji, gdyż przypadek ujemnej wartości nadwyżki jest trywialny, a zależność od wartości początkowej oczywista).

Wielkością ściśle związaną z prawdopodobieństwem ruiny w nieskończonym horyzoncie czasu jest prawdopodobieństwo przetrwania (*probability of the ultimate survival*) [Panjer, Willmot 1992]:

$$\phi(u) = P(\forall t \geq 0 : U(t) \geq 0) = P(T = +\infty). \quad (7)$$

Ponieważ są tylko dwie możliwości: wystąpienie ruiny bądź jej brak, zachodzi związek:

$$\phi(u) + \psi(u) = 1. \quad (8)$$

Analogicznie definiujemy prawdopodobieństwo ruiny w skończonym czasie t :

$$\psi(u, t) = P(\exists s \in (0, t) : U(s) < 0) = P(T < t) \quad (9)$$

oraz prawdopodobieństwa przetrwania w skończonym czasie t :

$$\phi(u, t) = P(\forall s \in (0, t) : U(s) \geq 0) = P(T \geq t) \quad (10)$$

(ponieważ zmienna losowa T jest dla skończonych wartości czasu ciągłą zmienną losową, można zapisać $\phi(u) = P(\forall s \in (0, t) : U(s) \geq 0) = P(T > t)$).

W pracy [Rolski i in. 1999] można znaleźć wyprowadzone (korzystając z techniki warunkowania) równania na prawdopodobieństwo przetrwania w nieskończonym horyzoncie czasu:

$$c\phi(u)' = \lambda\phi(u) - \lambda \int_0^u \phi(u-x) dF_X(x) \quad (11)$$

oraz w skończonym horyzoncie czasu [Panjer, Willmot 1992]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(u, t) = c \frac{\partial}{\partial u} \phi(u, t) - \lambda \phi(u, t) + \lambda \int_0^u \phi(u-x, t) dF_X(x). \quad (12)$$

gdzie: $\lambda = \text{const} > 0$ – intensywność procesu Poissona,

$F_X(x)$ – dystrybuanta wartości pojedynczej szkody (nośnikiem gęstości prawdopodobieństwa $f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$ pojedynczej szkody jest $x \in (0, +\infty)$).

W pracy [Asmussen, Albrecher 2010] można znaleźć analityczne rozwiązanie równania (12) w przypadku wykładniczego rozkładu wartości szkód.

Należy podkreślić, że $\psi(u, t) = 1 - \phi(u, t)$ jest dystrybuantą momentu wystąpienia ruiny (ściśle mówiąc, należy dołączyć skok $P(T = +\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} [1 - \psi(u, t)] = 1 - \psi(u)$). Widać stąd, że dystrybuanta warunkowa $F_T(t / T < +\infty) = P(T < t / T < +\infty)$ dana jest wzorem:

$$F_T(t/T < +\infty) = \frac{\psi(u, t)}{\psi(u)} \quad (13)$$

(dystrybuanta warunkowa nie jest ułomna).

Poniżej przedstawione zostanie alternatywne sformułowanie zagadnienia ruiny. Analogiczną metodę zastosowano w przypadku procesów generowanych procesem Wienera [Czernik 2010]. W podejściu tym prawdopodobieństwo ruiny (oraz wielkości związane z zagadnieniem ruiny) jest wielkością wtórną w stosunku do rozkładów prawdopodobieństwa procesu nadwyżki o zmodyfikowanym równaniu ewolucji:

$$dU = c(U)dt - d\widehat{S}(t), \quad (14)$$

gdzie: $c(U) = c\theta_0(U)$ – przestrzennie niejednorodne natężenie napływu składki $c > 0$,

$\widehat{S}(t)$ – przestrzennie niejednorodny proces Poissona:
 $\lambda(U) = \lambda\theta_0(U)$ oraz $\lambda > 0$,

$\theta_0(U) = \begin{cases} 0 & \text{dla } U < 0 \\ 1 & \text{dla } U \geq 0 \end{cases}$ – funkcja schodkowa.

Z powyższego widać, że jeżeli wartość procesu nadwyżki spadnie poniżej zera, proces jest zatrzymywany – składki nie spływają oraz nie pojawiają się szkody. W pracy [Rolski i in. 1999] można znaleźć podobną technikę, występują jednak zasadnicze różnice. W zaproponowanej w powyższej pracy technice dokonuje się tzw. *killingu*, tzn. proces jest przerywany do sztucznego stanu (*cemetery state*) niepamiętającego wartości nadwyżki w chwili ruiny. Ponadto autorzy przeprowadzają rozważania (skądinąd bardzo pomysłowe) natury probabilistycznej, w poniższej pracy większość rozważań przeprowadzanych będzie na równaniach różniczkowo-całkowych w przestrzeni funkcji uogólnionych (teoriomiarowe rozszerzenie dystrybucji Schwartz'a). Stąd rozważania powinny być łatwo przenoszone na inne zagadnienia, w których znane jest równanie ewolucji gęstości prawdopodobieństwa wartości procesu i nie jest wymagana znajomość zaawansowanych twierdzeń analizy stochastycznej.

Założmy, że ewolucja zmodyfikowanego procesu nadwyżki dana jest wzorem (14). Wtedy ewolucja gęstości prawdopodobieństwa wartości nadwyżki $p(U, t)$ opisana jest prospektywnym równaniem Kołmogorowa dane jest wyrażeniem [Hanson 2007]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(U, t) = & -\frac{\partial}{\partial U} [c(U)p(U, t)] - \lambda(U)p(U, t) + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(U+x)p(U+x, t)f_x(x)dx \end{aligned} \quad (15)$$

z warunkiem początkowym $p(U, 0) = \delta(U - u)$, gdzie:

$u \geq 0$ – początkowa wartość nadwyżki,

$\delta(U - u)$ – delta Diraca (miara atomowa) z nośnikiem w punkcie u .

Ponieważ ograniczamy się do szkód o wartości dodatniej, rozkład szkody posiada nośnik ograniczony do zbioru liczb dodatnich. Stąd równanie (15) można zapisać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(U, t) = & -\frac{\partial}{\partial U} [c(U) p(U, t)] - \lambda(U) p(U, t) + \\ & + \int_0^{+\infty} \lambda(U+x) p(U+x, t) f_x(x) dx. \end{aligned} \quad (16)$$

W celu otrzymania wielkości interesujących z punktu widzenia teorii ruiny dokonamy dekompozycji gęstości prawdopodobieństwa $p(U, t)$ (zaprezentowana tu dekompozycja stanowi uogólnienie dekompozycji zastosowanej w [Czernik, Łuczka 2000]):

$$p(U, t) = p_-(U, t) \theta_-(U) + p_0(U, t) \theta_0(U) + \alpha(t) \delta(U - U^*(t)), \quad (17)$$

gdzie: $\theta_-(U) = \begin{cases} 1 & \text{dla } U < 0 \\ 0 & \text{dla } U \geq 0 \end{cases}$ – funkcja schodkowa o nośniku na zbiorze liczb ujemnych,

$U^*(t)$ – nośnik atomowej składowej gęstości $p(U, t)$ taki, że $U^*(0) = u$ (prawdopodobieństwo, że w skończonym czasie nie pojawi się szkoda, jest większe od zera).

Podstawiając (17) do równania (16), otrzymamy iloczynny:

$$c(U) p(U, t) = c p_0(U, t) \theta_0(U) + c \alpha(t) \theta_0(U^*(t)) \delta(U - U^*(t)), \quad (18)$$

$$\lambda(U) p(U, t) = \lambda p_0(U, t) \theta_0(U) + \lambda \alpha(t) \theta_0(U^*(t)) \delta(U - U^*(t)), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \lambda(U+x) p(U+x, t) = & \lambda p_0(U+x, t) \theta_0(U+x) + \\ & + \lambda \alpha(t) \theta_0(U^*(t)) \delta(U+x - U^*(t)). \end{aligned} \quad (20)$$

W powyższych iloczynach pojawiły iloczyny funkcji nieciągłych oraz delty Diraca. Klasyczna teoria dystrybucji Schwartza nie dopuszcza istnienia takich iloczynów. Jednak, zakładając, że wchodzące w skład iloczynu funkcje są funkcjami o lokalnie ograniczonym wahanu [Wyderka 1994], można udowodnić, że iloczyny (18), (19) i (20) są wykonalne/istnieją.

Ponadto obliczając pochodną iloczynu (18), otrzymamy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial U} [c(U)p(U,t)] &= c\theta_0(U) \frac{\partial}{\partial U} p_0(U,t) + cp_0(0,t)\delta(U) + \\ &+ c\alpha(t)\theta_0(U^*(t)) \frac{\partial}{\partial U} \delta(U - U^*(t)). \end{aligned} \quad (21)$$

Ponadto całka $\int_0^{+\infty} \lambda(U+x)p(U+x,t)f_X(x)dx$ przyjmie postać:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \lambda(U+x)p(U+x,t)f_X(x)dx &= \lambda \int_{\max(0,-U)}^{+\infty} p_0(U+x,t)f_X(x)dx + \\ &+ \lambda\alpha(t)\theta_0(U^*(t))\theta_0(U^*(t)-U)f_X(U^*(t)-U) \end{aligned} \quad (22)$$

lub

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \lambda(U+x)p(U+x,t)f_X(x)dx &= \lambda\theta_0(U) \int_0^{+\infty} p_0(U+x,t)f_X(x)dx + \\ &+ \lambda\theta_-(U) \int_{-U}^{+\infty} p_0(U+x,t)f_X(x)dx + \\ &+ \lambda\alpha(t)\theta_0(U^*(t))\theta_0(U^*(t)-U)f_X(U^*(t)-U). \end{aligned} \quad (23)$$

Konieczne jest również obliczenie pochodnej $\frac{\partial}{\partial t} p(U,t)$:

$$\begin{aligned} \dot{p}(U,t) &= \dot{p}_-(U,t)\theta_-(U) + \dot{p}_0(U,t)\theta_0(U) + \\ &+ \dot{\alpha}(t)\delta(U - U^*(t)) + \alpha(t)\dot{\delta}(U - U^*(t)). \end{aligned} \quad (24)$$

gdzie kropka nad symbolem oznacza pochodną ze względu na czas t .

Korzystając z faktu, iż $\dot{\delta}(U - U^*(t)) = -\dot{U}^*(t) \frac{\partial}{\partial U} \delta(U - U^*(t))$, wyrażenie (24) może być zapisane w postaci:

$$\begin{aligned} \dot{p}(U,t) &= \dot{p}_-(U,t)\theta_-(U) + \dot{p}_0(U,t)\theta_0(U) + \\ &+ \dot{\alpha}(t)\delta(U - U^*(t)) - \alpha(t)\dot{U}^*(t) \frac{\partial}{\partial U} \delta(U - U^*(t)). \end{aligned} \quad (25)$$

Podstawiając obliczone wyrażenia do równania (16), otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 & \dot{p}_-(U, t)\theta_-(U) + \dot{p}_0(U, t)\theta_0(U) + \\
 & + \dot{\alpha}(t)\delta(U - U^*(t)) - \alpha(t)\dot{U}^*(t)\frac{\partial}{\partial U}\delta(U - U^*(t)) = \\
 = & -c\theta_0(U)\frac{\partial}{\partial U}p_0(U, t) - cp_0(0, t)\delta(U) - c\alpha(t)\theta_0(U^*(t))\frac{\partial}{\partial U}\delta(U - U^*(t)) - \\
 & - \lambda p_0(U, t)\theta_0(U) - \lambda\alpha(t)\theta_0(U^*(t))\delta(U - U^*(t)) + \\
 & + \lambda\theta_0(U)\int_0^{+\infty} p_0(U+x, t)f_X(x)dx + \lambda\theta_-(U)\int_{-U}^{+\infty} p_0(U+x, t)f_X(x)dx + \\
 & + \lambda\alpha(t)\theta_0(U^*(t))\theta_0(U^*(t)-U)f_X(U^*(t)-U).
 \end{aligned} \tag{26}$$

Ponieważ równanie (26) ma postać $g(x) + \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^m \beta_{ij} \delta^{(i)}(x - x_j) = 0$, możemy skorzystać z twierdzenia [Kecs, Teodorescu 1974], które mówi, że jeżeli $g(x)$ jest lokalnie całkowalna, to powyższe równanie jest równoważne układowi:

$$\begin{cases} g(x) = 0 \\ \beta_{ij} = 0 \quad i = 0, \dots, n; j = 1, \dots, m \end{cases} \tag{27}$$

Grupując wyrażenia w (26), otrzymamy następujący układ warunków:

$$\alpha(t)\left[\dot{U}^*(t) - c\theta_0(U^*(t))\right] = 0, \tag{28}$$

$$p_0(0, t) = 0, \tag{29}$$

$$\dot{\alpha}(t) = -\lambda\alpha(t)\theta_0(U^*(t)), \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_0(U, t) = & -c\frac{\partial}{\partial U}p_0(U, t) - \lambda p_0(U, t) + \\
 & + \lambda \int_0^{+\infty} p_0(U+x, t)f_X(x)dx +
 \end{aligned} \tag{31}$$

$$+ \lambda\alpha(t)\theta_0(U^*(t))\theta_0(U^*(t)-U)f_X(U^*(t)-U),$$

dla $U \geq 0$, oraz

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_-(U, t) = & \lambda \int_{-U}^{+\infty} p_0(U+x, t)f_X(x)dx + \\
 & + \lambda\alpha(t)\theta_0(U^*(t))\theta_0(U^*(t)-U)f_X(U^*(t)-U),
 \end{aligned} \tag{32}$$

dla $U < 0$.

Korzystając z warunku początkowego $p(U, 0) = \delta(U - u)$ oraz $U^*(0) = u$, stwierdzamy, że $\alpha(0) = 1$ (z (30) wynika również, że $\alpha(t) > 0$). Ponadto można łatwo wykazać (korzystając z (28) oraz $\alpha(t) > 0$), że $U^*(t) = ct + u$. Wynik ten był przewidywalny, gdyż z dodatnim prawdopodobieństwem w skończonym horyzoncie czasu nie pojawi się ani jedna szkoda, a ponieważ napływają składki, nośnik delty Diraca przemieszcza się zgodnie ze wzorem $U^*(t) = ct + u$.

Warunek $p_0(0, t) = 0$ może się wydawać dziwny, gdyż z dodatnim prawdopodobieństwem na skutek pojawiających się szkód wartość nadwyżki może zmaleć do zera. Jednakże, na skutek ciągłego napływu składki, wartość nadwyżki będzie oddalała się od zera.

Z warunku (30) wynika także:

$$P(U = U^*(t)) = P(N(t) = 0) = \alpha(t) = e^{-\lambda t}. \quad (33)$$

Rezultat ten jest oczywisty, ponieważ $e^{-\lambda t}$ jest prawdopodobieństwem, że do czasu t nie pojawiła się żadna szkoda (amplituda miary atomowej skoncentrowanej w punkcie $U^*(t) = ct + u$).

Korzystając z powyższych rezultatów, możemy równania (31) i (32) zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \dot{p}_0(U, t) = & -c \frac{\partial}{\partial U} p_0(U, t) - \lambda p_0(U, t) + \\ & + \lambda \int_0^{+\infty} p_0(U + x, t) f_X(x) dx + \lambda e^{-\lambda t} \theta_0(ct + u - U) f_X(ct + u - U), \end{aligned} \quad (34)$$

dla $U \geq 0$, oraz

$$\dot{p}_-(U, t) = \lambda \int_{-U}^{+\infty} p_0(U + x, t) f_X(x) dx + \lambda e^{-\lambda t} f_X(ct + u - U), \quad (35)$$

dla $U < 0$.

Z warunku początkowego $p(U, 0) = \delta(U - u)$ oraz faktu, iż funkcje $p_0(U, t)$ i $p_-(U, t)$ są funkcjami o lokalnie ograniczonym wahaniiu, wynika, że:

$$p_0(U, 0) = p_-(U, 0) = 0. \quad (36)$$

Całkując równanie (34) w granicach od $U^*(t) = ct + u$ do $+\infty$, otrzymamy (korzystając z tożsamości:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{g(t)}^{h(t)} f(x,t) dx &= \int_{g(t)}^{h(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) dx + f(h(t),t)\dot{h}(t) - f(g(t),t)\dot{g}(t): \\ \frac{d}{dt} \int_{U^*(t)}^{+\infty} p_0(U,t) dU &= -\lambda \int_{U^*(t)}^{+\infty} p_0(U,t) dU + \\ &+ \lambda \int_0^{+\infty} \left[\int_{U^*(t)}^{+\infty} p_0(U+x,t) dU \right] f_x(x) dx \end{aligned} \quad (37)$$

i dalej znajdujemy

$$\frac{d}{dt} \int_{U^*(t)}^{+\infty} p_0(U,t) dU \leq 0. \quad (38)$$

Wynika stąd, że $\int_{U^*(t)}^{+\infty} p_0(U,t) dU = 0$, czyli $p_0(U,t) = 0$ dla $U > U^*(t) = ct + u$.

Nośnikiem funkcji $p_0(U,t)$ w chwili t jest przedział $[0, U^*(t)]$. Wniosek ten jest również oczywisty, gdyż założyliśmy, że szkody są zmiennymi losowymi o wartościach dodatnich.

Rodzi się pytanie: jaka jest interpretacja gęstości $p_0(U,t)$ oraz $p_-(U,t)$.

Wielkość $p_0(U,t)dU$ jest prawdopodobieństwem, że $U \in (U, U + dU)$ i nie doszło jeszcze do ruiny (należy pamiętać, że nośnikiem jest przedział $[0, U^*(t)]$) i pojawiła się co najmniej jedna szkoda:

$$p_0(U,t)dU = P(U \in dU, T > t, N(t) \geq 1). \quad (39)$$

Wynika stąd, że $P(T > t, N(t) \geq 1) = \int_0^{U^*(t)} p_0(U,t) dU$ oraz, że

$\int_0^{U^*(t)} p_0(U,t) dU + \alpha(t)$ jest prawdopodobieństwem, że w horyzoncie czasu t nie dojdzie do ruiny (prawdopodobieństwo przetrwania), czyli:

$$\phi(u,t) = \int_0^{U^*(t)} p_0(U,t) dU + \alpha(t). \quad (40)$$

Korzystając z faktu, że wielkość $P(U \in dU, T > t)$ dana jest wzorem $\left[p_0(U, t) + \alpha(t) \delta(U - U^*(t)) \right] dU$, możemy zapisać:

$$P(U \in dU / T > t) = \frac{p_0(U, t) + \alpha(t) \delta(U - U^*(t))}{\phi(u, t)} dU. \quad (41)$$

Wielkość $p_-(U, t) dU$ jest prawdopodobieństwem, że $U \in (U, U + dU)$ i doszło do ruiny, czyli (pamiętając, że $U < 0$):

$$p_-(U, t) dU = P(U \in dU, T \leq t). \quad (42)$$

Jasne jest również, że $\int_{-\infty}^0 p_-(U, t) dU$ jest prawdopodobieństwem, że w horyzoncie czasu t dojdzie do ruiny (prawdopodobieństwo ruiny $\psi(u, t)$). Całkując równanie (35) od minus nieskończoności do zera, możemy wywnioskować, iż (ułamna) gęstość prawdopodobieństwa zmiennej T dana jest wzorem:

$$P(T \in dt) = \left\{ \lambda \int_0^{U^*(t)} p_0(x, t) [1 - F_x(x)] dx + \lambda e^{-\lambda t} [1 - F_x(U^*(t))] \right\} dt. \quad (43)$$

Ponadto z (41) oraz (35) wynika, że:

$$P(T \in (t, t_1) / T > t) = \frac{\int_{-\infty}^0 [p_-(U, t_1) - p_-(U, t)] dU}{\phi(u, t)}. \quad (44)$$

Ponieważ zachodzi (34), (35) oraz:

$$\int_0^{U^*(t)} p_0(U, t) dU + \alpha(t) + \int_{-\infty}^0 p_-(U, t) dU = 1 \quad (45)$$

wiele ze związków wyrażonych za pomocą $p_0(U, t)$ można wyrazić alternatywnie za pomocą $p_-(U, t)$ i *vice versa*.

Z uwagi na ograniczoną objętość pracy nie przedstawiono wielu innych charakterystyk i ich zależności od gęstości $p_0(U, t)$ i $p_-(U, t)$ (np. deficyt w momencie ruiny, warunkowy deficyt w momencie ruiny).

4. Podsumowanie

Zaprezentowane podejście (modyfikacja stochastycznego równania różniczkowego) do zagadnienia ruiny stanowi ciekawą alternatywę dla klasycznych probabilistycznych sformułowań. Znając rozwiązanie analityczne/numeryczne równań (34) i (35), pozostałe wielkości charakteryzujące ewolucję nadwyżki można już łatwo obliczyć. Przedstawione rozważania można uogólnić na bardziej realistyczną dynamikę nadwyżki: przestrzennie niejednorodne natężenie napływu składki, uwzględnienie reasekuracji, ryzyka zależne itp.. Ponadto zaproponowana metoda pozwala na odseparowanie prawdopodobieństwa poniesienia straty, której bezpośrednią przyczyną było ryzyko inwestycyjne bądź szkoda natury ubezpieczeniowej.

Literatura

- Asmussen S., Albrecher H. [2010], *Ruin probabilities*, World Scientific.
- Czernik T. [2010], *First Passage Phenomena from the new perspective and the Generalized Maximal Loss*, zaprezentowany na 1st Summer School, Quantitative Methods for Economic, Agricultural-Food and Environmental Sciences, Alcantara Park.
- Czernik T., Łuczka J. [2000], *Rectified steady flow induced by white shot noise: diffusive and non-diffusive regimes*, *Annalen der Physik*, vol. 9, no. 9–10.
- Dickson D.C.M. [2005], *Insurance, risk and ruin*, Cambridge University Press.
- Hanson F.B. [2007], *Applied stochastic processes and control for jump-diffusions. Modeling, analysis, and computation*, SIAM.
- Kecs W., Teodorescu P.P. [1974], *Applications of the theory of distributions in mechanics*, Editura Academiei Romane and Abacus Press.
- Oksendal B. [2003], *Stochastic differential equations. An introduction with applications*, Springer.
- Panjer H.H., Willmot G.E. [1992], *Insurance risk models*, Society of Actuaries.
- Redner S. [2001], *A guide to First-Passage processes*, Cambridge University Press.
- Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J. [1999], *Stochastic processes for insurance and finance*, Wiley.
- Schuss Z. [1989], *Teoria i zastosowania stochastycznych równań różniczkowych*, PWN, Warszawa.
- Wyderka Z. [1994], *Linear differential equations with measures as coefficients and control theory*, University of Silesia, Katowice.

AN ALTERNATIVE FORMULATION OF RUIN PROBLEM

Summary: All kinds of human activity is accompanied by the risk, but the insurance business stands out from the rest of the fact that its subject is a risk itself. The paper presents an alternative formulation of the ruin problem. This approach does not require an advanced stochastic analysis, but the intensive use of the theory of generalized functions.

Keywords: ruin theory, Poisson process, generalized functions.