

# Bewertung optischer Systeme für den Prozess der automatischen Korrektur auf der Grundlage der Definitionshelligkeit\*\*

Ausgehend von den strahlbezogenen Queraberrationen wird ein einfacher Weg zur Berechnung der Deformation der Wellenfläche aufgezeigt, der speziell den Erfordernissen der automatischen Korrektur angepasst ist. Das Vorgehen wird getrennt für Bildpunkte auf der optischen Achse, für differentiell der Achse benachbarte Bildpunkte sowie für Feldpunkte erläutert. Als Beispiele sind praxisnah aufbereitete Bewertungsmatrizen für diese 3 Fälle angegeben.

## O. Einleitung

Bei der Bewertung eines optischen Systems im Prozess der automatischen Korrektur ist für den Rechenautomaten ein nur aus einem Zahlenwert bestehendes Bildgütekriterium erwünscht. Dieses Kriterium soll ausserdem einfach und schnell berechnbar sein. Näherungen sind zulässig, solange gewährleistet bleibt, dass aufgrund der näherungsweise Gütezahlberechnung keine Scheinverbesserungen des optischen Systems vorgetäuscht werden können. Die Definitionshelligkeit erfüllt neben anderen möglichen Bildgütekriterien die hier formulierten Ansprüche. Sie ist vor allem für bis in die Nähe der beugungstheoretischen Grenze auskorrigierbare optische Systeme das geeignete Bildgütekriterium zur automatischen Korrektur.

### 1. Physikalische Ausgangssituation, Begriffsfestlegung sowie Ansatzgleichungen [1]

Im Bild 1 ist  $C$  das Austrittspupillenzentrum eines Systems mit der optischen Achse  $z$ . Die  $y$ -Achse fällt hier zur Schaffung übersichtlicher Verhältnisse mit der Meridionalebene zusammen. Der Hauptstrahl durchstösst die gewählte Auffangebene  $z = 0$  im Aufpunkt  $Q$ , der gleichzeitig das Zentrum der gedachten Referenzsphäre  $S$  mit dem Radius  $R$  darstellt. Die Normalenrichtung  $r^0$  im Punkt  $P$  der Wellenfläche stimmt mit der Richtung des Strahls überein, der seinerseits die gewählte Auffangebene  $z = 0$  im Punkt  $T$  mit den Queraberrationen  $\Delta x$  und  $\Delta y$  durchstösst.

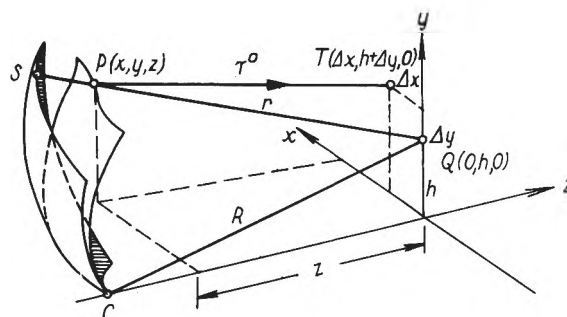


Bild 1. Ausgangsskizze

Die Definitionshelligkeit ist das Verhältnis  $V$  der Intensität  $I$  im Aufpunkt  $Q$ , die in diesem Punkt von der realen, deformierten Wellenfläche  $P$  hervorgerufen wird, zu der Intensität  $I_0$ , die eine gedachte im gleichen Punkt konvergierende ideale Kugelwelle  $S$  gleicher Öffnung erzeugen würde. Die von den Punkten  $S$  auf der fiktiven Kugelwelle hervorgehenden Elementarwellen hätten sämtlich den gleichen Lichtweg  $R$  bis zum Aufpunkt  $Q$  und damit keine Phasendifferenzen untereinander. Die realen Elementarwellen, die von den Punkten  $P$  der deformierten Wellenfläche ausgehen, weisen demgegenüber bis zum Aufpunkt  $Q$  Gangdifferenzen in der Grösse des Abstandes von  $S$  nach  $P$  auf, die als Wellenaberrationen  $W$  bezeichnet werden. Die Wellenaberrationen bewirken im Aufpunkt  $Q$  Phasendifferenzen zwischen den einzelnen Elementarwellenanteilen in der Grösse von

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} W(x; y). \quad (1)$$

Dies ist bei der Summation aller komplexen Amplituden  $A \cdot \exp i\delta$  im Aufpunkt  $Q$  zur Lichterregung  $u_Q$  in Rechnung zu setzen. Die Summe wird mittels Integration über alle aus dem Pupillengebiet stammenden Elementarwellenanteile gebildet.

\*) VEB Carl Zeiss Jena, DDR 69 Jena Carl-Zeiss-Str. 1.

\*\*\*) Vorgetragen auf der 5. Frühjahrschule Optik Giessübel 1973.

$$u_Q \sim \iint_P A \cdot \exp \frac{2\pi i}{\lambda} W(x; y) dx dy. \quad (2)$$

Wird der Einfachheit wegen die Transmission der optischen Systeme als über das Pupillengebiet konstant angenommen, haben alle zu summierenden Einzelamplituden den gleichen Betrag  $A$ , der somit vor das Doppelintegral gezogen werden kann. Die zur Berechnung der Definitionshelligkeit  $V$  im Aufpunkt  $Q$  benötigten Intensitäten  $I$  und  $I_0$  sind dem Absolutquadrat der komplexen Lichterregungen  $u$  proportional. Die Wellenaberration  $W_0$  der fiktiven Bezugswelle ist definitionsgemäss null, so dass zur Berechnung der Definitionshelligkeit folgende Ansatzgleichungen zur Verfügung stehen:

$$V = \frac{|u_Q|^2}{|u_{Q_0}|^2} = \frac{\left| \iint_P A \cdot \exp \frac{2\pi i}{\lambda} W(x; y) dx dy \right|^2}{\left| \iint_P A \cdot \exp \frac{2\pi i}{\lambda} W_0(x; y) dx dy \right|^2} = \frac{\left| \iint_P \exp \frac{2\pi i}{\lambda} W(x; y) dx dy \right|^2}{\left| \iint_P dx dy \right|^2}. \quad (3)$$

## 2. Mathematische Verknüpfung von Wellen- und Queraberration [2]

Bei der Strahldurchrechnung fallen die Queraberrationen zwanglos an, dagegen ist die direkte Berechnung ausreichend genauer Wellenaberrationen wesentlich aufwendiger. Zur Berechnung der Definitionshelligkeit nach (3) wird jedoch die Wellenaberration benötigt. Mit den Bezeichnungen im Bild 1 liest man gemäss der Definition für die Wellenaberration ab:

$$W(x; y) = n'(r - R) \quad (4)$$

$n'$  ist hierin die Brechzahl des Mediums im Bildraum. Da der Bezugskugelradius  $R$  eine Konstante ist, ergibt die Differentiation von (4) nach  $x$  und  $y$ :

$$\frac{\partial W}{\partial x} = n' \frac{\partial r}{\partial x}, \quad (5a)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = n' \frac{\partial r}{\partial y}. \quad (5b)$$

Die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial r}{\partial x}$ ;  $\frac{\partial r}{\partial y}$  sind also irgendwie durch die Queraberrationen darzustellen. Die Wellenfläche sei durch die implizite Funktion  $F(x; y; z) = 0$  gegeben.  $x$  und  $y$  sind die unabhängigen,  $z$  und  $r$  die abhängigen Variablen. Der räumliche

Pythagoras für die Strecke  $r$  zwischen den Punkten  $P$  und  $Q$  liefert eine implizite Verknüpfungsgleichung  $G(x; y; z; r) = 0$  zwischen den abhängigen und unabhängigen Variablen.

$$G(x; y; z; r) = 0 = x^2 + (y - h)^2 + z^2 - r^2. \quad (6)$$

Die Differentiation zweier implizit gegebener Funktionen  $F$  und  $G$  nach 2 unabhängigen Variablen führt gemäss (3) zunächst für  $x$  auf ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

zur Bestimmung der partiellen Ableitung  $\frac{\partial r}{\partial x}$ , dessen Auflösung

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{\partial G / \partial r} \left( \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial z} \cdot \frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z} \right) \quad (8)$$

ergibt. Die benötigten partiellen Ableitungen von  $G$  sind mühelos aus (6) zu gewinnen. Mit Hilfe des Gradienten  $\mathbf{r}^0$  lassen sich die partiellen Ableitungen von  $F$  in (8) durch die Richtungscosini der Strahlen ausdrücken, da diese genau wie der Gradient immer senkrecht auf der Wellenfläche stehen.

$$\begin{aligned} \text{grad } F = \mathbf{r}^0 &= \frac{\partial F}{\partial x} \mathbf{r}_x + \frac{\partial F}{\partial y} \mathbf{r}_y + \frac{\partial F}{\partial z} \mathbf{r}_z = \\ &= \cos \alpha \mathbf{r}_x + \cos \beta \mathbf{r}_y + \cos \gamma \mathbf{r}_z. \end{aligned} \quad (9)$$

Die Richtungscosini des Strahls  $\mathbf{r}^0$  sind aus der Geometrie des Bildes 1 ablesbar.

$$\cos \alpha = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x - Ax}{\sqrt{(x - Ax)^2 + [y - (h + Ay)]^2 + z^2}}, \quad (10a)$$

$$\cos \beta = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{y - (h + Ay)}{\sqrt{(x - Ax)^2 + [y - (h + Ay)]^2 + z^2}}, \quad (10b)$$

$$\cos \gamma = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{(x - Ax)^2 + [y - (h + Ay)]^2 + z^2}}. \quad (10c)$$

Da in (8) ein Verhältnis zwischen partiellen Ableitungen von  $F$  auftaucht, kürzen sich die Wurzeln in den Nennern von (10). Zusammen mit den Ableitungen von (6) erhält man aus (8):

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{Ax}{r}. \quad (11a)$$

Auf dem gleichen Weg kommt man für die andere unabhängige Variable zu:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\Delta y}{r}. \quad (11b)$$

Aus (11) gehen mit Hilfe von (4) und (5) zwei partielle Differentialgleichungen hervor, die die Wellenaberrationen exakt mit den hauptstrahlbezogenen Queraberrationen verknüpfen.

$$\frac{\partial W}{\partial x} = n' \frac{\Delta x}{r}, \quad (12a)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = n' \frac{\Delta y}{r}. \quad (12b)$$

Die Wellenaberration ist bezogen auf den Radius der Bezugskugel stets eine vernachlässigbar kleine Grösse, so dass die vereinfachende Näherung  $r \approx R$  Anwendung findet.

$$\frac{\partial W}{\partial x} \approx n' \frac{\Delta x}{R}; \quad (13a)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} \approx n' \frac{\Delta y}{R}. \quad (13b)$$

Es erweist sich als zweckmässig, in der Pupille auf 1 normierte Koordinaten zu benutzen. Bis zu mässigen Feldwinkeln kann bei kleinen Öffnungswinkeln  $u'$  für die maximalen Pupillenkoordinaten annähernd gesetzt werden:

$$x_{\max} = y_{\max} = R \cdot \sin u'. \quad (14)$$

Mit den auf 1 normierten neuen Koordinaten  $x' = x/R \cdot \sin u'$  und  $y' = y/R \cdot \sin u'$  nehmen die Gleichungen (13a, b) die Gestalt

$$\frac{\partial W}{\partial x'} \approx n' \sin u' \Delta x, \quad (15a)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y'} \approx n' \sin u' \Delta y. \quad (15b)$$

Da die optischen Systeme kreisförmige Pupillen besitzen, ist die Einführung von Polarkoordinaten  $r$ ;  $\varphi$  in der Pupille angebracht. Die Queraberrationen in der Bildebene sollen weiterhin in kartesischen Koordinaten dargestellt bleiben. Mit den Substitutionen  $x' = r \cdot \sin \varphi$  und  $y' = r \cdot \cos \varphi$  wird für die in (15) benötigten Differentiale  $\frac{\partial W}{\partial x'}$ ;  $\frac{\partial W}{\partial y'}$  ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial r} &= \frac{\partial W}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial r} = \\ &= \sin \varphi \cdot \frac{\partial W}{\partial x'} + \cos \varphi \cdot \frac{\partial W}{\partial y'}, \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \varphi} &= \frac{\partial W}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial \varphi} + \frac{\partial W}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial \varphi} = \\ &= r \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\partial W}{\partial x'} - r \cdot \sin \varphi \cdot \frac{\partial W}{\partial y'} \end{aligned} \quad (16b)$$

aufgestellt, dessen Auflösung den Austausch der Kartesischen gegen Polarkoordinaten ermöglicht.

$$\sin \varphi \cdot \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \cdot \frac{\partial W}{\partial \varphi} \approx n' \cdot \sin u' \cdot \Delta x, \quad (17a)$$

$$\cos \varphi \cdot \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \cdot \frac{\partial W}{\partial \varphi} \approx n' \cdot \sin u' \cdot \Delta y. \quad (17b)$$

### 3. Reihenentwicklungen für die Definitionshelligkeit [4]

Falls die Wellenaberration eine im Vergleich zur Lichtwellenlänge kleine Grösse bleibt, tauchen im Argument der Exponentialfunktion unter dem Integral (3) zur Berechnung der Definitionshelligkeit stets nur Bruchteile der Zahl  $\pi$  auf, so dass eine Reihenentwicklung denkbar wird.

$$\exp \frac{2\pi i}{\lambda} W = 1 + \frac{2\pi i}{\lambda} W - \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 W^2 + \dots \quad (18)$$

Die Reihenentwicklung des Integranden in (3) lässt Integralausdrücke entstehen, die als Mittelwert (19) bzw. quadratisches Mittel (20) bekannt sind.

$$\overline{W} = \frac{\iint_P W(x; y) dx dy}{\iint_P dx dy}, \quad (19)$$

$$\overline{W^2} = \frac{\iint_P W^2(x; y) dx dy}{\iint_P dx dy}. \quad (20)$$

Mit diesen Abkürzungen ist die Rechenvorschrift zur näherungsweise Bestimmung der Definitionshelligkeit wie folgt aufzuschreiben:

$$V \approx \left| \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \overline{W^2} \right\} + i \left\{ \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) \overline{W} \right\} \right|^2. \quad (21)$$

Es ist das Quadrat des Absolutbetrages einer komplexen Zahl  $a + ib$  zu bilden. Der Weg über  $|a + ib|^2 = a^2 + b^2$  führt unter Vernachlässigung des Gliedes  $\frac{1}{4} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 \cdot \overline{W^2}^2$  zu der sogenannten quadratischen Form der Näherung für die Definitionshelligkeit.

$$V \approx 1 - \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 (\overline{W^2} - \overline{W}^2). \quad (22)$$

Eine andere scheinbar gleichwertige Umformung erfolgt über  $|a + ib|^2 = \{ \sqrt{a^2 + b^2} \}^2$  und Entwicklung der Wurzel in eine Reihe.

$$V = \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 (W^2 - \bar{W}^2) \right\}^2. \quad (23)$$

Diese sogenannte biquadratische Form bedingt eine geringfügig bessere Approximation, da bei der Quadratbildung auch das zunächst vernachlässigte Glied nachträglich wieder erzeugt wird. Wie eine Rückrechnung zeigt, kann der Ausdruck  $(W^2 - \bar{W}^2)$  in (22) und (23) als mittlere quadratische Deformation  $[r(oor)m(ean)square]$  gedeutet werden.

$$(rms)^2 = \frac{\int \int_{\mathcal{F}} (W - \bar{W})^2 dx dy}{\int \int_{\mathcal{F}} dx dy} = W^2 - \bar{W}^2. \quad (24)$$

Wenn man zum Zweck einer zahlenmässigen Abschätzung annimmt, dass ein Absinken der Definitionshelligkeit auf 80% noch nicht bildschädigend wirkt, bedeutet dies gemäss (22) für die mittlere quadratische Deformation  $rms$  der Wellenfläche

$$(rms)^2 \approx \frac{\lambda^2}{20\pi^2} \approx \frac{\lambda^2}{196}.$$

Die mittlere Abweichung dürfte in diesem Fall also höchstens  $\lambda/14$  betragen.

#### 4. Berechnung der mittleren quadratischen Wellenflächendeformation

Durch eine mathematisch vorteilhafte und den physikalischen Gegebenheiten angepasste Darstellung der Wellenfläche wird angestrebt, deren mittlere quadratische Abweichung aus der Quadratsumme der Koeffizienten  $A_{nm}$  des Ansatzes bestimmen zu können. Für den Prozess der automatischen Korrektur ist dies zweckmässig, da speziell für quadratische Formen der Bewertungsfunktion rechentechnisch schlagkräftige Minimierungsverfahren zur Verfügung stehen. Dazu wird nach NUBOER [5] für die Radialabhängigkeit das Orthogonalsystem der Zernike'schen Kreispolynome  $R_n^m(r)$  verwendet; die kreisperiodischen Änderungen längs des Azimutwinkels  $\varphi$  werden in Form einer Fourierreihe ebenfalls orthogonal entwickelt, für die aufgrund der Symmetrie der Wellenfläche zum Meridionalschnitt jedoch nur die geraden  $\cos$ -Glieder angesetzt zu werden brauchen. In dem gemäss (16) zylindrisch abgewandelten Koordinatensystem des Bildes 1 (die optische Achse  $z$  wird Zylinderachse) lautet dieser Wellenflächenansatz:

$$W(r; \varphi) = A_{00} + \sum \sum \varepsilon_{nm} A_{nm} R_n^m(r) \cos m\varphi. \quad (25)$$

Der Faktor  $\varepsilon_{nm}$  hat für  $n \neq 0; m = 0$  den Wert  $1/\sqrt{2}$ , für alle anderen Fälle den Wert 1 und dient lediglich

zur späteren Vereinfachung der Endformel. Die Laufindizes  $n; m$  sind positiv und unterliegen den Bedingungen:  $n \geq m; n - m$  geradzahlig. Das Orthogonalsystem der Radialpolynome  $R_n^m(r)$  ist definiert durch:

$$R_n^m(r) = \sum_{p=0}^{\frac{n-m}{2}} (-1)^p \frac{(n-p)!}{p! \left(\frac{n+m-p}{2}\right)! \left(\frac{n-m-p}{2}\right)!} r^{n-2p}. \quad (26)$$

Zunächst ist gemäss (19) innerhalb der gebräuchlichen Kreispupillen der Mittelwert  $\bar{W}$  für eine Wellenfläche nach dem Ansatz (25) zu bestimmen. Wie durch (15) bereits vorsorglich eingeführt, benutzt man hierbei auf 1 normierte Polarkoordinaten mit dem Flächenelement  $dx dy = r dr d\varphi$ .

$$\bar{W} = \frac{\int_0^1 \int_0^{2\pi} W(r; \varphi) r dr d\varphi}{\int_0^1 \int_0^{2\pi} r dr d\varphi} = \quad (27)$$

$$= A_{00} + \frac{1}{\pi} \sum_n \sum_m \varepsilon_{nm} A_{nm} \int_0^1 \int_0^{2\pi} R_n^m(r) \cos m\varphi r dr d\varphi.$$

Für alle  $m \neq 0$  liefert das Integral (27) rechts den Wert 0, da über eine volle Periode der  $\cos$ -Funktion integriert wird. Im Fall  $m = 0$  ist das Integral

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} R_n^0(r) r dr d\varphi = 2\pi \int_0^1 r R_{2n'}^0(r) dr$$

zu untersuchen. Für gerade Indices  $n = 2n'$  und  $m = 0$  lassen sich die Kreispolynome  $R_{2n'}^0(r)$  in die Legendre'schen Polynome  $P_n$ , des Arguments  $(2r^2 - 1)$  überführen. Mit den Substitutionen  $x = 2r^2 - 1$  und  $dx = 4r dr$  formt man um:

$$\int_0^1 r R_{2n'}^0(r) dr = \int_0^1 r P_{n'}(2r^2 - 1) dr = \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} P_n(x) dx.$$

Die erzeugende Gleichung der Legendre'schen Polynome lautet:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(x^2 - 1)^n\}. \quad (28)$$

Diese Form ermöglicht sofort die Angabe des unbestimmten Integrals:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) dx = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \{(x^2 - 1)^n\}_{-1}^{+1}. \quad (29)$$

Bei der  $(n-1)$  maligen Differentiation des Ausdrucks  $(x^2 - 1)^n$  taucht in allen bei der Anwendung der Ketten- und Produktregel entstehenden Gliedern der Faktor  $(x^2 - 1)$  auf, der aber für die Grenzen  $\pm 1$  null wird und auf diese Weise das bestimmte Integral (29) zum Verschwinden bringt. Folglich trägt das Schlussintegral in (27) auch für den Spezialfall  $m = 0$  nichts

zum Mittelwert  $\bar{W}$  bei. Damit wird  $\bar{W} = A_{00}$ . Dieses Ergebnis findet bei der Berechnung der mittleren quadratischen Deformation  $rms^2$  in der Beziehung (24) Verwendung.

$$(rms)^2 = \frac{\int_0^1 \int_0^{2\pi} (W - \bar{W})^2 r dr d\varphi}{\int_0^1 \int_0^{2\pi} r dr d\varphi} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left( \sum_n \sum_m \varepsilon_{nm} A_{nm} R_n^m(r) \cos m\varphi \right)^2 r dr d\varphi. \quad (30)$$

Bei dem Quadrieren der Summe entstehen sämtliche möglichen, zweiteiligen Produkte zwischen allen Summengliedern. Dem entspricht eine Vierfachsumme des allgemeinen Produkts mit 2 voneinander unabhängigen Indizierungen  $n; m$  und  $n'; m'$ .

$$(rms)^2 = \frac{1}{\pi} \sum_n \sum_m \sum_{n'} \sum_{m'} \varepsilon_{nm} \varepsilon_{n'm'} A_{nm} A_{n'm'} \times \int_0^1 R_n^m(r) R_{n'}^{m'}(r) r dr \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos m'\varphi d\varphi. \quad (31)$$

Da gliedweise und getrennt über  $r$  und  $\varphi$  integriert werden kann, lässt sich Integration und Summation vertauschen sowie das Doppelintegral in das Produkt zweier Einfachintegrale aufspalten. Mittels einer goniometrischen Umformung ist das Integral über den Winkel  $\varphi$  einfach zu überschauen.

$$\int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos m'\varphi d\varphi = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{2\pi} \cos(m-m')\varphi d\varphi + \int_0^{2\pi} \cos(m+m')\varphi d\varphi \right\}. \quad (32)$$

Lediglich im Fall  $m = m' \neq 0$  bekommt das bestimmte Integral (32) den von Null verschiedenen Wert  $\pi$ . Damit ist das Integral  $\int_0^1 R_n^m(r) \cdot R_n^{m'}(r) r dr$  nur für  $m = m'$  auszuwerten. Dies ist aber das Normierungsintegral der Kreispolynome:

$$\int_0^1 R_n^m(r) \cdot R_n^{m'}(r) r dr = \begin{cases} \frac{1}{2(n+1)} & \text{für } n = n', \\ 0 & \text{für } n \neq n'. \end{cases} \quad (33)$$

Im bisher ausgeschlossenen Spezialfall  $m = m' = 0$  erhält man aus (32) den doppelten Betrag  $2\pi$ , den jedoch der vorsorglich eingeführte Faktor  $\varepsilon_{nm}$  bei  $m = 0$  durch  $\varepsilon_{n0} \varepsilon_{n'0} = \frac{1}{2}$  gerade wieder halbiert und so die Angabe einer einheitlichen Schluss-

beziehung für die mittlere quadratische Deformation ermöglicht. Wie angestrebt verschwinden aufgrund der Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen alle zwischen  $n; m$  und  $n'; m'$  gemischten Produkte. Von der Vierfachsumme in (31) bleibt daher nur die Doppelsumme über alle quadratischen Glieder mit  $m = m'$  und  $n = n'$  übrig:

$$(rms)^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=n'} \sum_{m=m'} \frac{A_{nm}^2}{n+1}. \quad (34)$$

In der biquadratischen Näherung (23) strebt man aus praktischen Erwägungen beim Erreichen von 81% Definitionshelligkeit den Wert 1 für die zu minimierende Quadratsumme an. Die Erweiterung mit dem Faktor 0,10 sowie die formale Umdefinition der Koeffizienten zu:  $a_{nm} = \sqrt{\frac{10}{n+1}} \cdot \frac{\pi}{\lambda} \cdot A_{nm}$  bringt die numerisch bequeme Verknüpfung zwischen der zu minimierenden Summe  $\sum_n \sum_m a_{nm}^2$  und der Definitionshelligkeit.

$$V = \left\{ 1 - \left( \frac{\pi}{\lambda} \right)^2 \sum_n \sum_m \frac{A_{nm}^2}{n+1} \right\}^2 = \left\{ 1 - 0,1 \sum_n \sum_m a_{nm}^2 \right\}^2. \quad (35)$$

Das Bewertungsproblem reduziert sich somit auf die Bestimmung der Koeffizienten  $a_{nm}$  des orthogonalen Wellenflächenansatzes nach Nijboer-Zernike. Das Vorgehen wird getrennt für Achsenbildpunkte, differentiell der Achse benachbarte sowie für Punkte im Bildfeld erläutert. Der gemeinsame Ausgang ist das Differentialgleichungssystem (17), das die strahlbezogenen Queraberrationen mit den gesuchten Koeffizienten in Beziehung setzt, wenn die aus dem Ansatz (25) gebildeten Differentiale  $\frac{\partial W}{\partial r}$ ;  $\frac{\partial W}{\partial \varphi}$  eingeführt werden. Jede Queraberration  $\Delta x_i$  und  $\Delta y_i$  eines Strahls  $r_i$  mit den zahlenmässig fest vorgegebenen Pupillenkoordinaten  $r_i$ ;  $\varphi_i$  liefert auf diese Weise eine lineare Bestimmungsgleichung für die unbekanntenen Koeffizienten. Es sind soviel Gleichungen aufzustellen wie Koeffizienten in Ansatz gebracht wurden. Der Kehrmatrix als allgemeiner Lösung des Gleichungssystems sind dann die Vorschriften zur Bildung der Koeffizienten zu entnehmen, bei denen es sich um reine Linearkombinationen zwischen den Strahlaberrationen handelt.

## 5. Rotationssymmetrische Wellenflächen

Bei Bildpunkten auf der optischen Achse ist die Rotationssymmetrie in keiner Weise gestört. Die zu-

gehörigen Wellenflächen zeigen demzufolge keine Azimutabhängigkeit;  $\frac{\partial W}{\partial \varphi}$  ist null. Das Differentialgleichungssystem (17) vereinfacht sich zu:

$$\sin \varphi \cdot \frac{\partial W}{\partial r} = n' \cdot \sin u' \cdot \Delta x, \quad (36a)$$

$$\cos \varphi \cdot \frac{\partial W}{\partial r} = n' \cdot \sin u' \cdot \Delta y. \quad (36b)$$

Dies ist die  $x$ - und  $y$ -Komponente einer azimutunabhängigen Radialabweichung  $\Delta Q$  in der Auffangebene, die man über  $\Delta Q = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  zu einer solchen zusammenfasst.

$$\frac{\partial W}{\partial r} = n' \cdot \sin u' \cdot \Delta Q. \quad (37)$$

$\Delta Q$  ist die Queraberration in einer beliebigen Auffangebene. Normalerweise fällt rechnerisch jedoch die Queraberration  $\Delta y'_G$  in der Gauss'schen Bildebene an. Bei einem Abstand  $b'$  zwischen den Auffangebenen lässt sich  $\Delta Q$  durch  $\Delta y'_G$  ausdrücken.

$$\Delta Q = \Delta y'_G - b' \cdot \tan \sigma' = \Delta y'_G - b' \cdot r \cdot \sin u'.$$

Der Tangens des Strahlschnittwinkels  $\tan \sigma'$  ist bei Beschränkung auf kleine Öffnungswinkel annähernd durch dessen Sinus zu ersetzen, der seinerseits über  $r \cdot \sin u'$  als Bruchteil  $r$  der Maximalöffnung  $\sin u'$  angebar ist, da  $r_{\max}$  nach (14) auf 1 normiert wurde. Das weitere Vorgehen ist mathematisch einheitlicher, wenn die Queraberration  $\Delta y'_G$  mit den gleichen Näherungen über  $\Delta y'_G = \Delta s' \tan \sigma \approx \Delta s' r \cdot \sin u'$  in die Längsabweichung  $\Delta s'$  umgewandelt wird. Die Gleichung (37) nimmt so die Form

$$\frac{\partial W}{\partial r} = n' \cdot \sin^2 u' \cdot r (\Delta s' - b'). \quad (38)$$

Die geforderte Ableitung  $\frac{\partial W}{\partial r}$  ist aus den rein rotationssymmetrischen Gliedern des allgemeinen Ansatzes (25), also mit  $m = 0$  zu bilden. Für unser Beispiel sollen 5 Koeffizienten mitgenommen werden.

$$W(r) = A_{00} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=2}^{10} A_{n0} R_n^0(r). \quad (39)$$

Die Ableitung dieses rotationssymmetrischen Ansatzes liefert in expliziter Form mit den nach (26) gebildeten Kreispolynomen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{r}{\sqrt{2}} \{ & 4 A_{20} + (24r^2 - 12) A_{40} + \\ & + (120r^4 - 120r^2 + 24) A_{60} + \\ & + (560r^6 - 840r^4 + 360r^2 - 40) A_{80} + \\ & + (2520r^8 - 5040r^6 + 3360r^4 - 840r^2 + 60) \times \\ & \times A_{100} + \dots \} \end{aligned} \quad (40)$$

Die Beziehung (38) wird mit (40) gleichgesetzt und für 5 Strahlen in der Pupillenabstufung  $r_i = \sqrt{\frac{i}{4}}$  ( $i = 0; 1 \dots 4$ ) zahlenmässig aufgelöst.

Hieraus geht ein System von 5 linearen Gleichungen für die Unbekannten  $A_{n0}$  hervor, dessen Koeffizientenmatrix sich mit modifizierten Variablen  $A'_{n0} = \frac{A_{n0}}{n' \sin^2 u' \sqrt{2}}$  einfacher schreibt:

(41)

$i$	$r$	$A'_{20}$	$A'_{40}$	$A'_{60}$	$A'_{80}$	$A'_{100}$	Aberration
0	0	4	-12	24	-40	60	$-b'$
1	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	4	-6	$\frac{3}{2}$	$\frac{25}{4}$	$\frac{285}{32}$	$\Delta s'_1 - b'$
2	$\sqrt{\frac{2}{4}}$	4	0	-6	0	$\frac{15}{2}$	$\Delta s'_2 - b'$
3	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	4	6	$\frac{3}{2}$	$-\frac{25}{4}$	$\frac{285}{32}$	$\Delta s'_3 - b'$
4	$\sqrt{\frac{4}{4}}$	4	12	24	40	60	$\Delta s'_4 - b'$

(42)

Koeff.	Vorfaktor	$\Delta s'_1$	$\Delta s'_2$	$\Delta s'_3$	$\Delta s'_4$	$b'$
$a_{20}$	$8\pi \sqrt{\frac{5}{3}} \left( \frac{n' \sin^2 u'}{4\lambda} \right)$	$\frac{8}{105}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{8}{105}$	$\frac{1}{168}$	$\frac{1}{4}$
$a_{40}$	$8\pi$ ( „ )	$-\frac{4}{63}$	0	$\frac{4}{63}$	$\frac{5}{504}$	0
$a_{60}$	$8\pi \sqrt{\frac{5}{7}}$ ( „ )	$\frac{4}{135}$	$-\frac{7}{90}$	$\frac{4}{135}$	$\frac{1}{108}$	0
$a_{80}$	$8\pi \sqrt{\frac{5}{9}}$ ( „ )	$\frac{2}{105}$	0	$-\frac{2}{105}$	$\frac{1}{105}$	0
$a_{100}$	$8\pi \sqrt{\frac{5}{11}}$ ( „ )	$-\frac{16}{945}$	$\frac{8}{315}$	$-\frac{16}{945}$	$\frac{4}{945}$	0

Die Berechnung der Kehrmatrix erfolgt maschinell nach dem in [6] publizierten Algoltext. Die Kehrmatrix ist mittels der Rücksubstitutionen:  $A'_{n0} = > A_{n0}$

$\Rightarrow a_{n_0}$  der gewünschten Form (35) anzupassen. Die anfallenden Dezimalzahlen sind in rationale Brüche rückverwandelt.

Die Koeffizienten  $a_{n_0}$  sind so aus den Aberrationsbeiträgen  $\Delta s'_i$  fest vorgegebener Strahlen des Achsbüschels einfachst durch Linearkombination zu berechnen. Der Teil  $\left(\frac{n'^2 \sin u'}{4\pi}\right)$  des Vorfaktors wird vorteilhaft wie ein Gewichtungsfaktor behandelt. Die Umstellung der Bewertung auf andere Aperturen oder Wellenlängen ist dadurch erleichtert. Bei noch unkorrigierten Systemen wird die Quadratsumme der Koeffizienten zunächst lediglich eine Steuerfunktion im Korrektionsablauf übernehmen, die jedoch mit der schrittweisen Verbesserung des Korrektionszustandes immer mehr in die physikalisch wohlfundierte Bewertungsgrösse „Definitionshelligkeit“ einmündet, da die getroffenen Näherungen mit steigender Güte des Systems ständig besser gerechtfertigt sind.

## 6. Strahlen- und wellenoptische Auswertung der Sinusbedingung

Gemäss CONRADY [7] betrachten wir im Bild 2 die Abbildung von achsnahen Punkten durch eine brechende Kugelfläche. Der Achspunkt  $O$  wird über

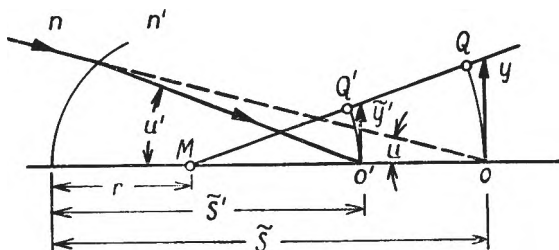


Bild 2. Abbildung achsnaher Punkte an der brechenden Kugelfläche

die kegelmantelförmigen Strahlenfächer der Öffnung  $u$  bzw.  $u'$  punktförmig nach  $O'$  abgebildet. Die gleiche Aussage gilt für die Punkte  $Q$  und  $Q'$ , die auf einer um den Krümmungsmittelpunkt  $M$  verkippten, sonst aber gleichwertigen optischen Nebenachse liegen. Bei einem differentiellen Kippwinkel bleiben die Öffnungswinkel  $u$  und  $u'$  gleich und die Kreisbögen  $\widehat{OQ}$  und  $\widehat{O'Q'}$  können durch die Tangenten ersetzt werden, die dann mit  $y$  als Ding- bzw. mit  $\tilde{y}'$  als Bildgrösse gleichzusetzen sind. Aus den ähnlichen Dreiecken des Bildes 2 ist abzulesen:

$$\frac{\tilde{y}'}{y} = \frac{\tilde{s}' - r}{\tilde{s} - r} \quad (43)$$

Andererseits ist aus den Durchrechnungsformeln an der brechenden Kugelfläche bekannt:

$$\frac{n' \cdot \sin u'}{n \cdot \sin u} = \frac{\tilde{s} - r}{\tilde{s}' - r} \quad \text{z.B. aus [1]} \\ \text{2. Lbf. Geom. Opt.} \\ \text{Formel (6)}$$

Die Vereinigung der beiden Beziehungen bringt:

$$y \cdot n \cdot \sin u = \tilde{y}' \cdot n' \cdot \sin u' \quad (44)$$

Für differentiell kleine Objekt- und Zwischenbildhöhen  $y$  bzw.  $\tilde{y}'_k$  kann die Invariante (44) von Fläche zu Fläche fortgesetzt angewandt werden, so dass sie letztlich die entsprechenden Grössen aus dem Ding- und Bildraum verknüpft. Formal gleicht folglich die Invariante (44) der Abbe'schen Sinusbedingung. Die Art der Ableitung an der brechenden Kugelfläche ermöglicht eine zusätzliche strahlenoptische Ausdeutung: „Wenn von einem differentiell neben der optischen Achse liegenden Dingpunkt ein kegelmantelförmiger Strahlenfächer mit dem Öffnungswinkel  $u$  ausgeht, so vereinigen sich im Bildraum alle Strahlen dieses Kegelmantels wieder in einem Punkt mit der ebenfalls noch differentiell kleinen Bildhöhe  $\tilde{y}'$ “.

$$\tilde{y}' = y \frac{n \cdot \sin u}{n' \cdot \sin u'}$$

Da der Abbildungsmassstab  $\tilde{\beta}' = \frac{n \cdot \sin u}{n' \cdot \sin u'}$  für solche kegelmantelförmigen Strahlenfächer von vornherein keine aperturunabhängige Konstante sein wird und ausserdem mit dem Auftreten des Öffnungsfehlers zu rechnen ist, ergeben sich in einer festen Auffangebene kreisförmige Zerstreuungsfelder, deren Zentren aperturabhängig verschoben sind. Dies ist das Erscheinungsbild der Koma in Achsnähe. Das Bild 3 veranschaulicht den Sachverhalt im Bildraum.

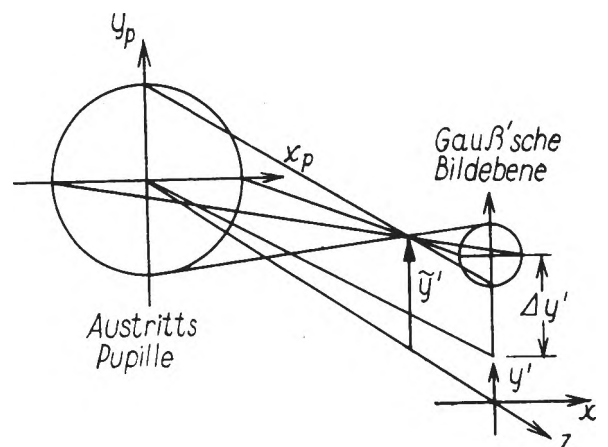


Bild 3. Vereinigung kegelmantelförmiger Strahlenfächer in Achsnähe

Ein Kegelmantel aus Strahlen mit dem Öffnungswinkel  $u'$  vereinigt sich punktförmig bei einer Bildhöhe  $\tilde{y}'$ , der aufgrund des Öffnungsfehlers eine von der paraxialen Schnittweite  $s'$  abweichende Schnittweite  $\tilde{s}'$  zuzuordnen ist. Die Spitze eines immer kleiner werdenden Kegelmantels liegt nach dem Grenzübergang  $u'$  gegen Null im Gauss'schen Bildpunkt mit der paraxialen Bildhöhe  $y'$ . Das Bild 4 zeigt die  $y$ - $z$ -

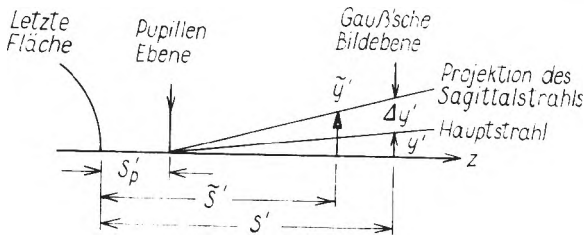


Bild 4. Skizze für die Ableitung der Isoplanasiebedingung

-Ebene aus Bild 3, in die zusätzlich die Projektion der beiden Sagittalstrahlen eingetragen ist. Den ähnlichen Dreiecken des Bildes 4 entnimmt man:

$$\frac{y' + \Delta y'}{y'} = \frac{s' - s'_p}{\tilde{s}' - s'_p} \quad (45)$$

Das Ziel ist die zahlenmässige Bestimmung der Queraberrationskomponente  $\Delta y'$  von Sagittalstrahlen aus den Daten der Meridionalstrahldurchrechnung. Daher wird (45) umgestellt nach:

$$\frac{\Delta y'}{y'} = \frac{\tilde{y}'}{y'} \cdot \frac{s' - s'_p}{\tilde{s}' - s'_p} - 1 \quad (46)$$

Die beidseitige Division der Invarianten (44) durch die paraxiale Bildgrösse  $y'$  erlaubt die Berechnung des Quotienten  $\frac{\tilde{y}'}{y'}$  in (46) aus Werten, die bei der Durchrechnung von Strahlen des Achsbüschels anfallen. Das führt auf das als Isoplanasiebedingung  $IB$  bekannt gewordene Korrektionskriterium.

$$IB = \frac{\Delta y'}{y'} = \frac{1}{\beta'} \cdot \frac{n' \cdot \sin u'}{n' \cdot \sin u'} \cdot \frac{(s' - s'_p)}{(\tilde{s}' - s'_p)} - 1 \quad (47a)$$

Die Formel versagt bei unendlicher Dingschnittweite. Für den Grenzübergang wird der Abbildungsmaßstab  $\beta'$  durch  $\frac{a'}{a} \cdot \frac{n}{n'}$  ersetzt sowie  $a \cdot \sin u$

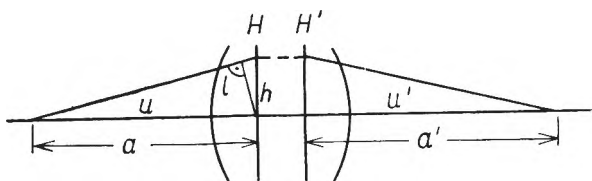


Bild 5. Zum Grenzübergang  $\beta'$  gegen 0 in der Isoplanasiebedingung

als Lotlänge 1 gedeutet. Bei unendlicher Dingschnittweite geht die Lotlänge in die Einfallshöhe  $h$  und die Bildweite  $a'$  in die bildseitige Brennweite  $f'$  über, sodass als Spezialfall der Isoplanasiebedingung entsteht:

$$IB = \frac{\Delta y'}{y'} = \frac{h}{f' \cdot \sin u'} \cdot \frac{(s' - s'_p)}{(\tilde{s}' - s'_p)} - 1 \quad (47b)$$

Die Isoplanasiebedingung ist also nicht ein Korrektionskriterium schlechthin, das tunlichst null sein sollte, sondern gibt ausserdem für differentiell der Achse benachbarte Bildpunkte die relative Queraberrationskomponente  $\frac{\Delta y'}{y'}$  von Sagittalstrahlen

an, die sonst nur durch windschiefe vektorielle Strahldurchrechnung zu erhalten wäre. Die geometrisch-optischen Erkenntnisse, die bei der Herleitung des Korrektionskriteriums „Isoplanasiebedingung“ gewonnen wurden, sind bei der Berechnung der Definitionshelligkeit für differentiell der Achse benachbarte Punkte schon im Ansatz zu berücksichtigen. Folglich werden aus dem Wellenflächenansatz (25) nur die Glieder mit  $m=1$  benötigt, weil deren zugehörige Aberrationsfigur die aperturabhängig gegeneinander versetzten Zerstreungskreise ergibt. Um dies zu zeigen geht man mit dem Ansatz

$$W(r; \varphi) = A_{00} + \cos \varphi \sum_n A_{n1} R_n^1(r) \quad (48)$$

in das DGL-System (17) und formt trigonometrisch um:

$$\begin{aligned} n' \cdot \sin u' \cdot \Delta x &= \\ &= \sin \varphi \cdot \cos \varphi \sum_n A_{n1} \frac{d}{dr} R_n^1(r) - \\ &- \sin \varphi \cdot \cos \varphi \sum_n A_n \frac{1}{r} R_n^1(r) = \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\varphi \sum_n A_{n1} \left\{ \frac{d}{dr} R_n^1(r) - \frac{1}{r} R_n^1(r) \right\}, \end{aligned} \quad (49a)$$

$$\begin{aligned} n' \cdot \sin u' \cdot \Delta y &= \\ &= \cos^2 \varphi \sum_n A_{n1} \frac{d}{dr} R_n^1(r) + \sin^2 \varphi \sum_n A_{n1} \frac{1}{r} R_n^1(r) = \\ &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi) \sum_n A_{n1} \frac{d}{dr} R_n^1(r) + \frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi) \times \\ &\times \sum_n A_{n1} \frac{1}{r} R_n^1(r) = \frac{1}{2} \cos 2\varphi \sum_n A_{n1} \left\{ \frac{d}{dr} R_n^1(r) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{r} R_n^1(r) \right\} + \frac{1}{2} \sum_n A_{n1} \left\{ \frac{d}{dr} R_n^1(r) + \frac{1}{r} R_n^1(r) \right\}. \end{aligned} \quad (49b)$$



Dies ist die Parameterdarstellung von Zerstreungskreisen, die in Abhängigkeit vom Pupillenradius  $r$  und demzufolge entsprechend dem Aperturwinkel  $u'$  ihre Lage und Grösse längs der  $y$ -Achse ändern. Für das Beispiel, das im Abschnitt 5 für Achspunkte angegeben wurde, waren 4 Meridionalstrahlen durchzurechnen, aus deren Daten mit geringem Mehraufwand die erwähnten Queraberrationskomponenten von Sagittalstrahlen bestimmbar sind, die dazu benutzt werden sollen, um für achsnahe Bildpunkte ein Gleichungssystem zur Bestimmung von Komakoeffizienten  $A_{ni}$  aufzustellen. Die  $y$ -Komponente der Queraberration von Sagittalstrahlen ist in guter Näherung von der Lage  $b'$  der Auffangebene unabhängig. Die Spezialisierung der Beziehung (49b) auf Sagittalstrahlen mit dem Azimutwinkel  $\varphi = \pm(\pi/2)$  liefert mit explizit ausgerechneten Kreispolynomen:

$$\begin{aligned}
 n' \sin u' \Delta y &= \\
 &= A_{11} + (3r^2 - 2)A_{31} + \\
 &+ (10r^4 - 12r^2 + 3)A_{51} + (35r^6 - 60r^4 + \\
 &+ 30r^2 - 4)A_{71} + (126r^8 - 280r^6 + \\
 &+ 210r^4 - 60r^2 + 5)A_{91} + \dots \quad (50)
 \end{aligned}$$

Für  $r$  gegen Null ist auch  $\Delta y$  gegen Null zu fordern, damit die Queraberration wie vorausgesetzt auf den Hauptstrahl bezogen bleibt. Dies zieht eine Zwangsbedingung für den Verzeichnungskoeffizienten  $A_{11}$  nach sich:

$$0 = A_{11} - 2A_{31} + 3A_{51} - 4A_{71} + 5A_{91} + \dots \quad (51)$$

Unter Berücksichtigung der Bedingung (51) besteht zwischen den Komakoeffizienten  $A_{ni}$  und der hauptstrahlbezogenen Queraberrationskomponente  $\Delta y'$  von Sagittalstrahlen der allgemeine Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
 n' \sin u' \Delta y' &= \\
 &= 3r^2 A_{31} + (10r^4 - 12r^2) A_{51} + \\
 &+ (35r^6 - 60r^4 + 30r^2) A_{71} + \\
 &+ (126r^8 - 280r^6 + 210r^4 - 60r^2) A_{91} + \dots \quad (52)
 \end{aligned}$$

Mit den Sagittalaperturen in der gleichen Stufung

$$r_i = \sqrt{\frac{i}{4}} \quad (i = 1 \dots 4)$$

geht aus der allgemeinen Hauptgleichung (52) das Gleichungssystem zur Bestimmung der Komakoeffizienten  $A_{ni}$  zahlenmässig hervor. Wie im Abschnitt 5 werden zur Vereinfachung in der Schreibweise modifizierte Koeffizienten

$$A'_{ni} = \frac{A_{ni}}{n' \cdot y' \cdot \sin u'}$$

eingeführt und die Koeffizientenmatrix des Systems angegeben.:

$i$	$r$	$A'_{31}$	$A'_{51}$	$A'_{71}$	$A'_{91}$	Aberration
1	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{19}{8}$	$\frac{275}{64}$	$-\frac{737}{128}$	$IB_1$
2	$\sqrt{\frac{2}{4}}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{35}{8}$	$-\frac{37}{8}$	$IB_2$
3	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{27}{8}$	$\frac{225}{64}$	$-\frac{657}{128}$	$IB_3$
4	$\sqrt{\frac{4}{4}}$	3	-2	5	-4	$IB_4$

(53)

Das Gleichungssystem wurde nach dem Eliminationsverfahren von Gauss-Jordan mit rationalen Zahlen gelöst. Der Vorfaktor entsteht durch die Rücksubstitution der Koeffizienten  $A'_{ni}$  über  $A_{ni}$  zu  $a_{ni}$  um zur Berechnung des Definitionshelligkeitsverlustes neben der Achse wieder die Form (35) heranziehen zu können. Das maschinell kontrollierte Ergebnis der Kehrmatrix lautet:

Koeff.	Vorfaktor	$IB_1$	$IB_2$	$IB_3$	$IB_4$
$a_{31}$	$4\pi \sqrt{\frac{5}{2}} \left( \frac{n' \cdot y' \cdot \sin u'}{4\lambda} \right)$	$\frac{16}{63}$	$\frac{44}{105}$	$\frac{16}{35}$	$\frac{83}{315}$
$a_{51}$	$4\pi \sqrt{\frac{5}{3}} \left( \dots \right)$	$\frac{40}{105}$	$\frac{22}{35}$	$\frac{8}{105}$	$\frac{29}{105}$
$a_{71}$	$4\pi \sqrt{\frac{5}{4}} \left( \dots \right)$	$\frac{32}{945}$	$\frac{128}{315}$	$\frac{544}{945}$	$\frac{208}{945}$
$a_{91}$	$4\pi \left( \dots \right)$	$\frac{64}{189}$	$\frac{96}{189}$	$\frac{64}{189}$	$\frac{16}{189}$

(54)

Die Öffnungsfehlerkoeffizienten  $a_{ni}$  von differentiell der Achse benachbarten Bildpunkten werden sich nur unwesentlich von denen des Achspunktes unterscheiden. Um die Definitionshelligkeit für die Umgebung der Achse zu berechnen, sind die Komakoeffizienten  $a_{ni}$  gemäss (54) nachträglich in die bereits bekannte Quadratsumme (35) der Öffnungsfehlerkoeffizienten des Achspunktes einzubeziehen. Der Faktor

$$\left( \frac{n' \cdot y' \cdot \sin u'}{4\lambda} \right)$$

ist zweckmässig wie ein Gewichtungsfaktor zu behandeln. Da die Bildgrösse  $y'$  mit in die Berechnung eingeht, ist es möglich, die Grösse des isoplanatischen Gebietes um die Achse abzuschätzen. In dieser weiterentwickel-

ten Form wird die Abbe'sche Sinusbedingung heute ca. 100 Jahre nach ihrer Entdeckung bei der automatischen Korrektur optischer Systeme eingesetzt.

## 7. Bestimmung der Definitionshelligkeit ausseraxialer Bildpunkte

Die Anzahl und Verteilung der Strahlen in einem ausseraxialen Bündel sind massgebend dafür, bis zu welcher Symmetriezahl  $m$  Oberwellen  $\cos m\varphi$  in der Fourierreihe für die kreisperiodischen Wellenflächenschwankungen bestimmbar sind und bis zu welchem Grad  $n$  Kreispolynome zur Beschreibung radialer Wellenflächenänderungen herangezogen werden können. Für unser Demonstrationsbeispiel wird die Strahlverteilung nach Bild 6 mit der Pupillen-

funktion  $r_i = \sqrt{\frac{i}{2}}$  ( $i = 1; 2$ ) benutzt. Die ausgewählten

Strahlen liegen im Meridional- ( $\varphi = 0; \pi$ ) und im Sagittalschnitt ( $\varphi = (\pi/2)$ ). Sie liefern 8 Queraberrationskomponenten:  $\Delta y_1$  bis  $\Delta y_4$ ;  $\Delta x_5$ ;  $\Delta y_5$ ;  $\Delta x_6$ ;  $\Delta y_6$ . Aufgrund der gewählten Strahlverteilung sowie der Zahl der aufgeführten Einzelaberrationen wird die Entwicklung bis  $m = 3$  und bis  $n = 5$  getrieben

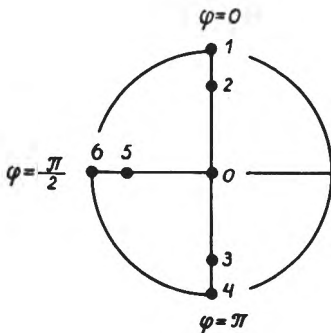


Bild 6. Lage der Strahlen des ausseraxialen Bündels in der Pupille

Unter Beachtung der Bedingungen  $n \geq m$ ;  $n-m$  geradzahlig erhält man aus (25) und (26) den expliziten Wellenflächenansatz mit 8 signifikanten Gliedern.

$$\begin{aligned}
 W(r; \varphi) = & A_{00} + \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (2r^2 - 1) A_{20} + \\
 & + (6r^4 - 6r^2 + 1) A_{40} \} + \\
 & + \cos \varphi \{ r A_{11} + (3r^3 - 2r) A_{31} + \\
 & + (10r^5 - 12r^3 + 3r) A_{51} \} + \\
 & + \cos 2\varphi \{ r^2 A_{22} + (4r^4 - 3r^2) A_{42} \} + \\
 & + \cos 3\varphi \{ r^3 A_{33} + \\
 & + (5r^5 - 4r^3) A_{53} \}. \quad (55)
 \end{aligned}$$

Damit lassen sich die im DGL-System (17) geforderten Ableitungen der Wellenfläche nach  $r$  sowie nach  $\varphi$  bilden. Im DGL-System (17) sind  $\Delta x$  und  $\Delta y$  die Queraberrationen in einer nicht näher bestimmten Auffangebene, die um die Strecke  $b'$  gegenüber der wohlbestimmten Gauss'schen Bildebene verschoben sei. Für eine solche allgemeine Auffangebene  $b'$  rechnet man zweckmässig auf die eindeutig festliegenden Queraberrationen  $\Delta x'$  und  $\Delta y'$  in der Gauss'schen Bildebene um. Bis zu mässigen Feldwinkeln sind dabei unter sonst gleichen Voraussetzungen die für die Behandlung des Achsenpunktes getroffenen Näherungen vertretbar. Die mit dem Wellenflächenansatz (55) aus dem Gleichungssystem (17) hervorgehenden allgemeingültigen Gleichungen werden spezialisiert angegeben für:

1.  $\Delta x'$ -Komponenten von Sagittalstrahlen mit

$$q = \pm \frac{\pi}{2}, \quad (56a)$$

$$\begin{aligned}
 n' \sin u' (\Delta x' \mp b' \cdot r \cdot \sin u') = & \pm \frac{r}{\sqrt{2}} \{ 4A_{20} + (24r^2 - \\
 & - 12) A_{40} \} \mp r \{ 2A_{22} + (16r^2 - 6) A_{42} \}.
 \end{aligned}$$

Das untere Vorzeichen gilt bei  $q = -\frac{\pi}{2}$ .

2.  $\Delta y'$ -Komponenten von Sagittalstrahlen mit

$$q = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (56b)$$

Bei kleinen Aberrationen  $\Delta y'$  ist diese Komponente von der Auffangebene  $b'$  weitgehend unabhängig. Um die Aberrationen auf den Hauptstrahl beziehen zu können, ist auch hier wie im Abschnitt 6 erläutert eine Zwangsbedingung für den Verzeichnungs-koeffizienten eingeführt worden.

$$\begin{aligned}
 n' \cdot \sin u' \cdot \Delta y' = & 3r^2 A_{31} + (10r^4 - 12r^2) A_{51} - 3r^2 A_{33} - \\
 & - (15r^4 - 12r^2) A_{53}.
 \end{aligned}$$

3.  $\Delta y'$ -Komponenten von Meridionalstrahlen mit

$$q = 0 \text{ und } q = \pi. \quad (56c)$$

$$\begin{aligned}
 n' \sin u' (\Delta y' \mp b' \cdot r \cdot \sin u') = & \pm \frac{r}{\sqrt{2}} \{ 4A_{20} + (24r^2 - \\
 & - 12) A_{40} + \} 9r^2 A_{31} + (50r^4 - 36r^2) A_{51} \pm r \{ 2A_{22} + \\
 & + (16r^2 - 6) A_{42} \} + 3r^2 A_{33} + (25r^4 - 12r^2) A_{53}.
 \end{aligned}$$

Das untere Vorzeichen ist dem Azimutwinkel  $\varphi = \pi$  für die Strahlen 3 und 4 zugeordnet. Aus den 6 festgelegten Bündelstrahlen ist gemäss (56a..c) für jede der 8 auftretenden Einzelaberrationen eine lineare

Gleichung zur Bestimmung der modifizierten Koeffizienten

$$A'_{nm} = \frac{A_{nm}}{n' \cdot \sin u'}$$

zu gewinnen. In Matrixform hat das Gleichungssystem die Gestalt:

Die Minimierung der Quadratsumme von solchen Koeffizienten  $a_{nm}$  bewirkt, dass die unvermeidlichen geometrisch-optischen Bildfehlerreste physikalisch sinnvoll gegeneinander ausbalanciert werden. Das rein mathematisch angelegte Verfahren zur iterativen Minimierung irgendwelcher Quadratsummen erhält

(57)

Strahl №	$A'_{20}$	$A'_{40}$	$A'_{31}$	$A'_{51}$	$A'_{22}$	$A'_{42}$	$A'_{33}$	$A'_{53}$	Aberration
1	$2\sqrt{2}$	$6\sqrt{2}$	9	14	2	10	3	13	$\Delta y'_1 - b' \cdot \sin u'$
2	2	0	$\frac{9}{2}$	$-\frac{11}{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\Delta y'_2 - \frac{b'}{\sqrt{2}} \cdot \sin u'$
3	-2	0	$\frac{9}{2}$	$-\frac{11}{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\Delta y'_3 + \frac{b'}{\sqrt{2}} \cdot \sin u'$
4	$-2\sqrt{2}$	$-6\sqrt{2}$	9	14	-2	-10	3	13	$\Delta y'_4 + b' \cdot \sin u'$
5	0	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\Delta y'_5$
6	0	0	3	-2	0	0	-3	-3	$\Delta y'_6$
5 <sub>s</sub>	2	0	0	0	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	0	$\Delta x'_5 - \frac{b'}{\sqrt{2}} \cdot \sin u'$
6 <sub>s</sub>	$2\sqrt{2}$	$6\sqrt{2}$	0	0	-2	-10	0	0	$\Delta x'_6 - b' \cdot \sin u'$

Die angepassten Koeffizienten  $a_{nm}$  zur Berechnung der Definitionshelligkeit ausseraxialer Bildpunkte entsprechend der Form (35) sind der invertierten Matrix zu entnehmen. Die Auflösung liefert:

erst durch eine derartig angepasste Art der Systembewertung seine volle optische Schlagkraft für die automatische Korrektur.

(58)

Koeff.	Vorfaktor	$\Delta y'_1$	$\Delta y'_2$	$\Delta y'_3$	$\Delta y'_4$	$\Delta y'_5$	$\Delta y'_6$	$\Delta x'_5$	$\Delta x'_6$	$b' \sin u'$
$a_{20}$	$4\pi \sqrt{\frac{10}{3}} \left( \frac{n' \sin u'}{4\lambda} \right)$	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$
$a_{40}$	$4\pi \sqrt{\frac{10}{5}} ( \dots )$	$\frac{\sqrt{2}}{48}$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$-\frac{\sqrt{2}}{48}$	0	0	$-\frac{1}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{24}$	0
$a_{31}$	$4\pi \sqrt{\frac{10}{4}} ( \dots )$	$\frac{11}{600}$	$\frac{7}{150}$	$\frac{7}{150}$	$\frac{11}{600}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{7}{60}$	0	0	0
$a_{51}$	$4\pi \sqrt{\frac{10}{6}} ( \dots )$	$\frac{3}{200}$	$-\frac{3}{100}$	$-\frac{3}{100}$	$\frac{3}{200}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	0	0	0
$a_{22}$	$4\pi \sqrt{\frac{10}{3}} ( \dots )$	$-\frac{1}{32}$	$\frac{5\sqrt{2}}{32}$	$-\frac{5\sqrt{2}}{32}$	$\frac{1}{32}$	0	0	$-\frac{10\sqrt{2}}{32}$	$\frac{1}{16}$	0
$a_{42}$	$4\pi \sqrt{\frac{10}{5}} ( \dots )$	$\frac{1}{32}$	$-\frac{\sqrt{2}}{32}$	$\frac{\sqrt{2}}{32}$	$-\frac{1}{32}$	0	0	$\frac{\sqrt{2}}{16}$	$-\frac{1}{16}$	0
$a_{33}$	$4\pi \sqrt{\frac{10}{4}} ( \dots )$	$-\frac{1}{600}$	$\frac{13}{150}$	$\frac{13}{150}$	$-\frac{1}{600}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{20}$	0	0	0
$a_{53}$	$4\pi \sqrt{\frac{10}{6}} ( \dots )$	$\frac{1}{100}$	$-\frac{2}{100}$	$-\frac{2}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	0	0	0

## 8. Schluss

Bei der Bewertung nach dem Kriterium *Definitionshelligkeit* wird eine hohe Grenzauflösung bzw. die Beugungsgrenze selbst angesteuert. Für optische Systeme, die vom Typ oder der Anwendung her nicht so weit auskorrigierbar sind, strebt man eher einen hohen Kontrast für niedrige Ortsfrequenzen an. Hierfür ist das Kriterium *Gaussmoment* geeignet, für das LUKOSZ [8] eine Orthogonalentwicklung angegeben hat, die sich auf die gleiche Weise praxisnah aufbereiten lässt. Man muss sich darüber im Klaren sein, dass es sich bei diesen Bewertungsverfahren um zweckmässige und für die gegenwärtige EDV-Generation wohl noch notwendige rechenzeitverkürzende Näherungen handelt, die durch weitere Raffinements wie elliptische Pupillen oder projektive Entzerrung von Aberrationen nur unwesentlich zu verbessern sind. Zur genaueren Bewertung optischer Systeme im Anschluss an die automatische Korrektur z.B. für den Vergleich von Varianten empfiehlt sich schon heute die Berechnung ganzer Gütefunktionen wie Linienbild oder Kontrastübertragung mittels der schnellen Fouriertransformation [9].

### **Evaluation of the Optical Systems useful in Automatic Correction on the Basis of "Definitionshelligkeit"**

A simple way of wave front deformation calculation is shown starting with transversal ray aberrations, which is particularly suitable for automatic correction. The procedure is described separately for an image point on the axis, for image points lying in the axis and for field points. These three cases are illustrated by respective examples of evaluation matrices chosen for situations close to the praxis.

## **Évaluation des systèmes optiques dans le processus de la correction automatique en accord avec le critère de Strehl**

A partir des aberrations latérales on a montré une méthode simple de calcul d'une déformation de la surface d'onde spécialement adaptée aux besoins de la correction automatique. On a donné le procédé à part: pour les points de l'axe optique, pour les points paraxiaux et aussi pour les points de champ. Pour ces trois cas on a ajouté, comme exemples, les calculs de la matrice d'évaluation adaptés aux besoins de la pratique.

### **Оценка оптических систем в процессе автоматической коррекции на основе критерия Штреля**

Исходя из поперечных aberrаций, излагают несложный способ расчета деформаций волновой поверхности, специально приспособленный к автоматическому коррелированию. Вопрос о применении обсужден отдельно для точек на оптической оси, для приосевых точек и для точек в поле. В качестве примеров приводятся расчеты матриц оценок для трех названных случаев, приспособленные к потребностям практики.

## **Literatur**

- [1] HAFERKORN, Lehrbriefreihen "Geometrische-" und "Wellenoptik" der TH Ilmenau 1963-67.
- [2] RAYCES, *Optica Acta*, 2 (1964).
- [3] BRONSTEIN, Taschenbuch d. Math. Teubner, Leipzig 1958.
- [4] MARECHAL, *Revue d'Optique*, 26, 257 (1947).
- [5] NIJBOER, *Physika* 10 (1947), 679; 13, 605 (1947)
- [6] GEORGE, *Com. of the ACM*, Vol. 5 No. 8, Vol. 5, No. 1.
- [7] CONRADY, *Appl. Opt. and opt. Design.*, Humphrey Milford, London 1929.
- [8] LUKOSZ, *Optica Acta* 10, 1 (1963).
- [9] HAFERKORN u.a., *Feingerätetechnik* 19. Jg., Heft 10/1970.

*Received, July 29, 1973.*