

Witold Szymański

O pewnym przekształceniu perspektywy na tło pionowe w perspektywę na tło pochyle

Przedmowa

Prezentowana metoda umożliwia łatwe przekształcenie perspektywy zrealizowanej na tło pionowe w perspektywę na tło pochyle. Dzięki niej można tworzyć perspektywiczne obrazy dowolnych układów przestrzennych na tło pochyle, poprzez perspektywiczne przekształcenie perspektywy takich układów istniejącej na tle pionowym.

Wadą stosowanej powszechnie tzw. *metody punktów mierzenia* jest to, że odnosi się ona jedynie do prostych układów wielościanów, najczęściej prostopadłościennych, o trzech kierunkach zbiegów. Niedogodności tej metody ujawniają się wielostopniowo w dydaktyce perspektywy.

Po pierwsze, ukierunkowują one silnie uwagę słuchaczy na proste czy wręcz banalne formy prostopadłościenne i pochodne tych form.

Po drugie, utrwalają przekonanie, że perspektywa, zwłaszcza na tło pochyle o więcej niż trzech kierunkach zbiegu, jest trudna w realizacji. Brak prostego narzędzia do realizacji perspektywy bardziej zaawansowanych układów przestrzennych (ryc. 1–5) utrudnia ich wyobrażenie i perspektywiczne przedstawienie.

Dostępna literatura przedmiotu często propaguje fałszywy obraz przekształcenia perspektywicznego, czyniąc z narzędzia cel sam w sobie. Znajduje to odzwierciedlenie w słownictwie dotyczącym tego zagadnienia. Takie określenia jak *perspektywa jedno-, dwu- lub trójzbiegowa* dowodzą niezrozumienia istoty i celu tego przekształcenia. A przecież wiadomo, że zasada odwzorowania perspektywicznego jest niezmienna, forma zaś odwzorowywanego obiektu nie ma tu znaczenia. W przeciwnym bowiem razie istniałoby nieskończenie wiele *perspektyw*, których nazwy warunkowałyby liczba *punktów zbiegu*, co oczywiście prowadzi do absurdu. Jak

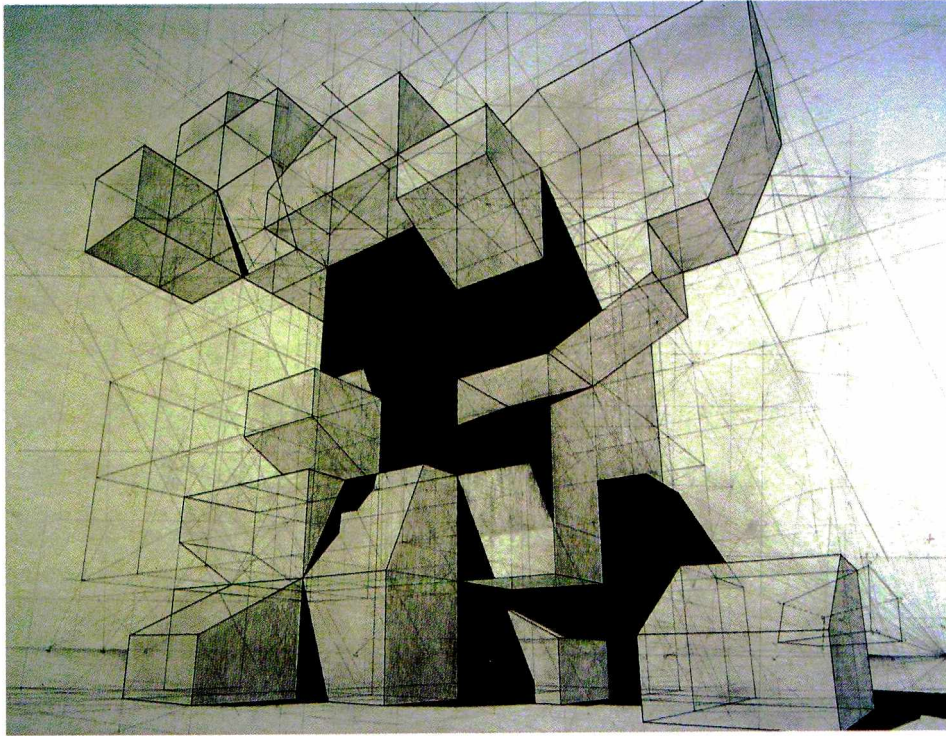
bowiem nazwalibyśmy *perspektywę* do rysowania obiektu, o – na przykład – stu czterdziestu trzech kierunkach jego krawędzi? Czyż byłaby to *perspektywa stu czterdziestotrójzbiegowa*? Podręczniki do nauki rysowania perspektywy nie miałyby końca.

Taki sposób traktowania aparatu obrazowania perspektywicznego, w którym zasadniczą kategorię stanowi liczba *punktów zbiegu* (jeden, dwa, najwyżej trzy), każe raczej dostosować układy przestrzenne do metod (np. *metody punktów mierzenia*), a nie metody do obiektów i układów przestrzennych. Nie sprzyja on rozwijaniu wyobraźni w dziedzinie projektowania form przestrzennych przyszłych architektów i artystów.

Inną niedogodnością stosowanych metod perspektywy jest to, że są one przeznaczone do wtórnego obrazowania form zaprojektowanych wcześniej. Natomiast projektowanie układów przestrzennych wyłącznie za pomocą ich dwuwymiarowych rzutów znacznie utrudnia i ogranicza ten proces, wyniki tych dwuwymiarowych poszukiwań można bowiem w pełni oceniać i dostrzec dopiero później, w rzucie perspektywicznym. Gdy jednak okażą się one niezadowolające, wrócić wówczas musimy do „projektowania dwuwymiarowego”.

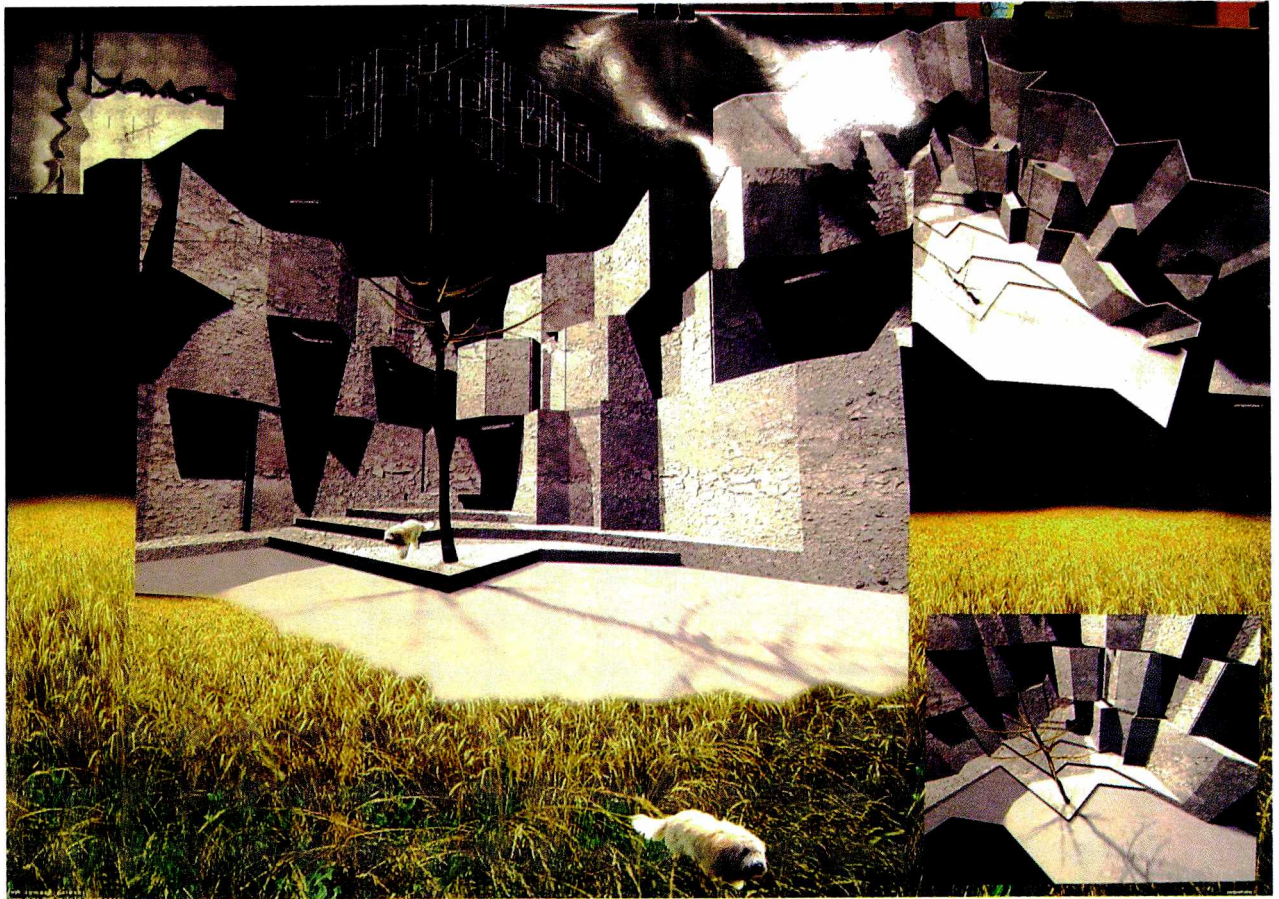
Metody obrazowania perspektywicznego należy uzupełnić więc o nowe, nie znane dotychczas cechy, które nadadzą im rangę narzędzia projektowego.

Przykładem zastosowania takiego właśnie podejścia do omawianego problemu są projekty układów przestrzennych, wykonane przez studentów I roku Wydziału Architektury Politechniki Wrocławskiej w ramach kursu perspektywy, prowadzonego przez autora artykułu (ryc. 1–5). Powstały one w wyniku operowania na formie przestrzennej wyłącznie w przestrzeni trójwymiarowej, obrazowanej perspektywicznie, z pominięciem



Ryc. 1. Projekt układu przestrzennego w perspektywie na tło pochyle

Fig. 1. Spatial arrangement project in perspective onto a slanting background

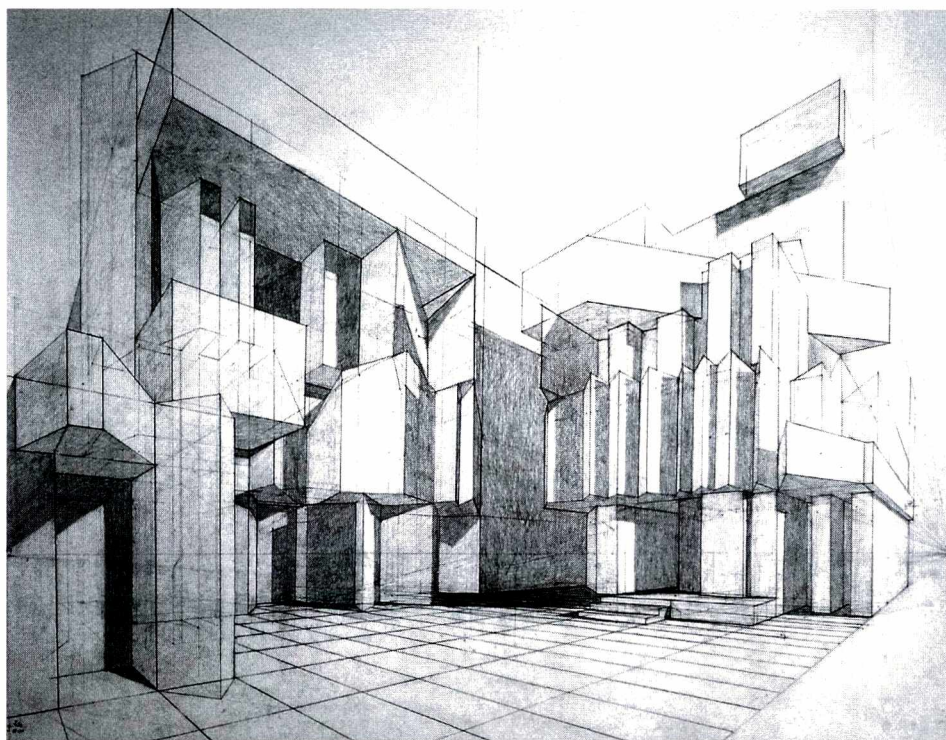


Ryc. 2. Projekt układu przestrzennego w perspektywie na tło pionowe

Fig. 2. Spatial arrangement project in perspective onto a vertical background

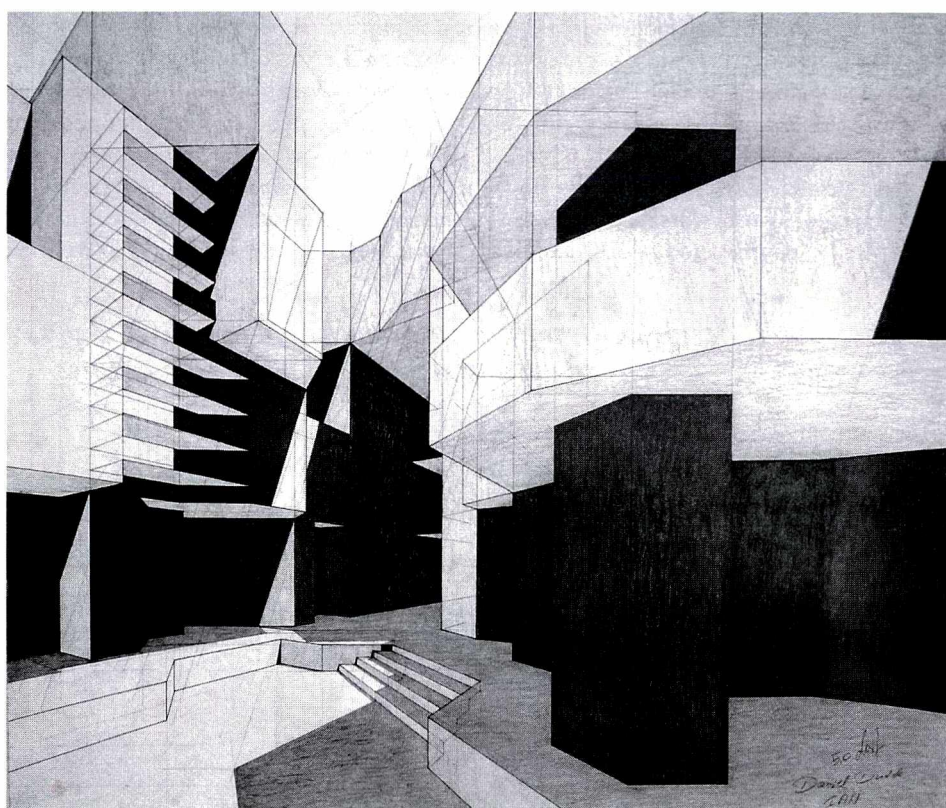
Ryc. 3. Projekt układu przestrzennego w perspektywie na tło pionowe

Fig. 3. Spatial arrangement project in perspective onto a vertical background



Ryc. 4. Projekt układu przestrzennego w perspektywie na tło pionowe

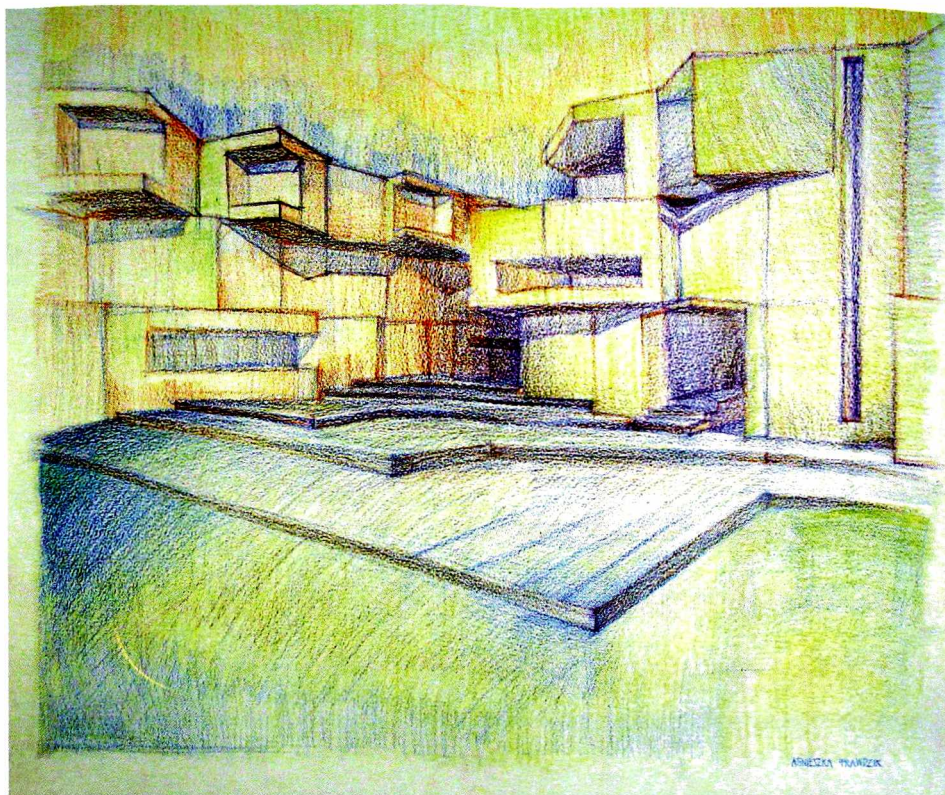
Fig. 4. Spatial arrangement project in perspective onto a vertical background



etapu rzutów, a więc zupełnie inaczej niż w tradycyjnym projektowaniu, realizowanym wyłącznie w przestrzeni 2-wymiarowej. Zauważalną cechą takiej metody projektowania jest łatwość, z jaką projektujący kształtuje formę przestrzenną.

Inną ważną cechą tego podejścia jest jego efektywność, każda bowiem decyzja projektowa znajduje natychmiast swoje perspektywiczne wyobrażenie.

Widać więc jak wypada porównanie z tradycyjnym sposobem projektowania przestrzennego i architektonicz-



Ryc. 5. Projekt układu przestrzennego w perspektywie na tło pionowe

Fig. 5. Spatial arrangement project in perspective onto a vertical background

nego, w którym autor kończy proces tworzenia, w dwuwymiarowej przestrzeni, stając się następnie niewolnikiem rzutów i przekrojów. Może on mieć jedynie nadzieję, że swą wyobraźnią ogarnął całość projektowanego, czasami niezwykle złożonego, układu stosunków przestrzennych. Ponieważ jednak zdolność wyobrażenia form przestrzennych ma swoje granice, częstym udziałem projektanta jest więc uczucie zawodu. Aspiracje bowiem nierzadko przerastają możliwości warsztatu projektowego, a mówiąc ściślej – tradycyjnych metod wizualizacji perspektywicznej.

Przedstawione w prezentowanym opracowaniu studenckie projekty układów przestrzennych dowodzą, iż pewne sposoby korzystania z perspektywy czynią z niej zaskakująco efektywne i zarazem proste narzędzie projektowania przestrzennego. Dokładne ich omówienie stanowi przedmiot oddzielnych opracowań pt. *O pewnej metodzie projektowania i perspektywicznej wizualizacji form przestrzennych* oraz *Komplex Symplexu*, przedstawionych na międzynarodowej konferencji naukowej w Strasburgu i w Rydzynie w 2005 r.

1. Perspektywiczne odwzorowanie punktów płaszczyzny rzutowej R^2 na dwa szeregi punktów tej płaszczyzny

Przyjmijmy na płaszczyźnie rzutowej R^2 (ryc. 6) proste t_1 i t_2 oraz punkt S , nienależący do prostych t_1 i t_2 . Niech proste t_1 i t_2 przecinają się w punkcie O .

Przez punkt S poprowadzimy prostą a , gdzie $a // t_1$ oraz prostą b , przy czym $b // t_2$.

Ustalmy odwzorowanie punktów płaszczyzny na proste t_1 i t_2 .

Przyjmijmy pęk prostych o wierzchołku S

$$S(r_1, r_2, r_3, \dots, r_n) = (S), \tag{1}$$

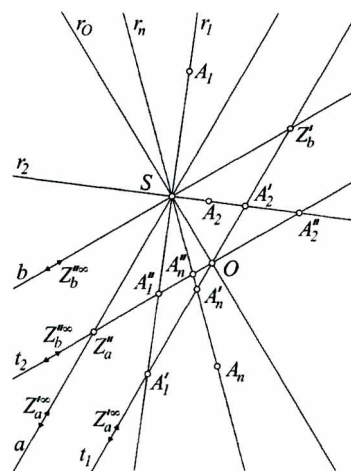
przy czym $n = 1, 2, 3, \dots, j, \dots$.

Proste tego pęku odwzorowują zbiór punktów płaszczyzny R^2 na dwa szeregi punktów

$$t_1(A'_1, A'_2, A'_3, \dots, A'_n) = (t_1), \tag{2}$$

i

$$t_2(A''_1, A''_2, A''_3, \dots, A''_n) = (t_2). \tag{3}$$



Ryc. 6. Perspektywiczne odwzorowanie punktów płaszczyzny rzutowej R^2 na dwa szeregi punktów

Fig. 6. Perspective transformation of points of R^2 projection plane onto two rows of points

Przyporządkowanie punktów w szeregach (t_1) i (t_2) jest jednoznaczne.

Punkt $O = O' = O''$ jest punktem wspólnym szeregów (t_1) i (t_2) .

Punktowi Z_b' w szeregu (t_1) , który jest punktem wspólnym prostych b i t_1 , odpowiada w szeregu (t_2)

punkt niewłaściwy Z_b'' , który jest punktem wspólnym prostych b i t_2 .

Punktowi Z_a'' w szeregu (t_2) , który jest punktem wspólnym prostych a i t_2 , odpowiada w szeregu (t_1) punkt niewłaściwy Z_a' , który jest punktem wspólnym prostych a i t_1 .

2. Perspektywiczne odwzorowanie punktów przestrzeni rzutowej R^3 na dwa układy płaskie

Przyjmijmy w przestrzeni rzutowej R^3 (ryc. 7) dwie płaszczyzny τ_1 i τ_2 oraz punkt S nienależący do tych płaszczyzn.

Niech płaszczyzny τ_1 i τ_2 wyznaczają wspólną prostą o .

Przez punkt S poprowadzimy płaszczyznę α , gdzie $\alpha // \tau_1$, oraz płaszczyznę β , gdzie $\beta // \tau_2$.

Ustalmy odwzorowanie punktów przestrzeni R^3 na płaszczyzny τ_1 i τ_2 .

Przyjmijmy wiązkę prostych o wierzchołku S

$$S[r_1, r_2, r_3, \dots, r_n] = [S], \quad (4)$$

przy czym $n = 1, 2, 3, \dots, j, \dots$.

Proste wiązki odwzorowują zbiory punktów przestrzeni R^3 na dwa płaskie zbiory punktów

$$\tau_1(A'_1, A'_2, A'_3, \dots, A'_n) = (\tau_1), \quad (5)$$

i

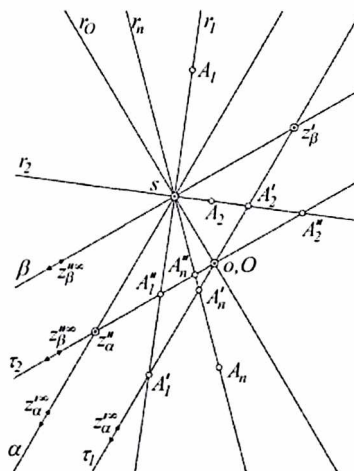
$$\tau_2(A''_1, A''_2, A''_3, \dots, A''_n) = (\tau_2). \quad (6)$$

Przyporządkowanie punktów w zbiorach (τ_1) i (τ_2) jest jednoznaczne.

Prosta $o = o' = o''$ jest wspólnym elementem zbiorów (τ_1) i (τ_2) .

Prostej z'_β na płaszczyźnie τ_1 , która jest wspólną prostą płaszczyzn β i τ_1 , odpowiada na płaszczyźnie τ_2 prosta niewłaściwa z''_β , która jest wspólną prostą płaszczyzn β i τ_2 .

Prostej z''_α na płaszczyźnie τ_2 , która jest wspólną prostą płaszczyzn α i τ_2 , odpowiada na płaszczyźnie τ_1 prosta niewłaściwa z'_α , która jest wspólną prostą płaszczyzn α i τ_1 .



Ryc. 7. Perspektywiczne odwzorowanie punktów przestrzeni rzutowej R^3 na dwa układy płaskie

Fig. 7. Perspective transformation of points of R^3 space onto two planes

Zauważmy, że zbiory płaskie (τ_1) i (τ_2) są perspektywicznymi obrazami zbiorów punktów przestrzeni R^3 .

W praktyce oznacza to, że wyznaczać je można w perspektywie na tło pionowe i pochyle. Ponieważ zbiory płaskie (τ_1) i (τ_2) są przyporządkowane jednoznacznie, perspektywę dowolnie złożonego układu, zrealizowaną w układzie tła pionowego, łatwo można więc odwzorować na tło pochyle i przeciwnie, z pominięciem tzw. metody punktów mierzenia, niedostosowanej do odwzorowań układów dowolnych.

3. Przekształcenie perspektywy na tło pionowe w perspektywę na tło pochyle

Na potrzeby stosowanej perspektywy ustalmy w przestrzeni rzutowej R^3 następujący układ odniesienia (ryc. 8): tło pionowe τ_1 , tło pochyle τ_2 , płaszczyznę horyzontu π , prostą h oraz punkt S . Prosta h jest wspólną dla tła τ_1 i τ_2 oraz płaszczyzny horyzontu π . Punkt S należy do płaszczyzny horyzontu π , lecz nie należy do prostej h .

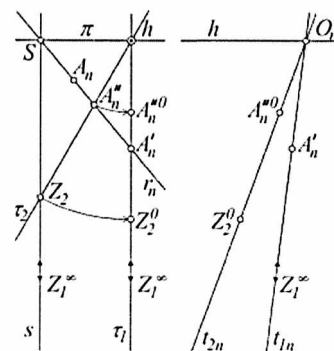
Ustalmy warunki odwzorowania punktów przestrzeni R^3 dla przyjętego układu. W tym celu przyjmijmy na płaszczyźnie τ_1 punkt niewłaściwy Z_1^∞ , niebędący na prostej h . Przez punkt S i Z_1^∞ poprowadzmy prostą s .

Prosta s ma z płaszczyzną τ_2 punkt wspólny Z_2 .

Przyjmijmy prostą s za podstawę pęku płaszczyzn

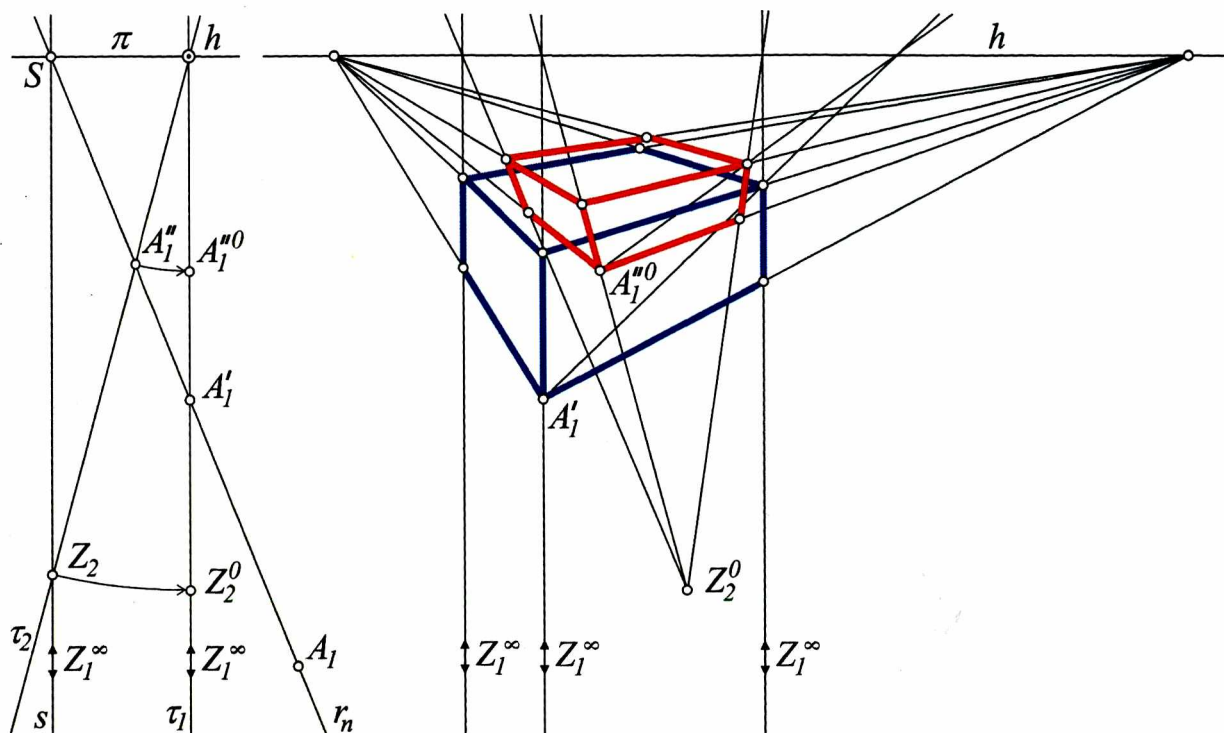
$$s(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_n) = (s), \quad (7)$$

przy czym $n = 1, 2, 3, \dots, j, \dots$.



Ryc. 8. Przekształcenie perspektywy punktu

Fig. 8. Transformation of point perspective image



Ryc. 9. Przekształcenie perspektywy na tło pionowe w perspektywę na tło pochyłe

Fig. 9. Transformation of perspective onto a vertical background into perspective onto a slanting background

Każda z płaszczyzn pęku (s) przecina płaszczyzny τ_1 i τ_2 w dwóch prostych t_{1n} i t_{2n} , które mają wspólny punkt O_n na prostej h .

Zbiór prostych t_{1n} ma punkt przecięcia w punkcie niewłaściwym Z_1^∞ , natomiast zbiór prostych t_{2n} ma punkt przecięcia w punkcie Z_2 .

Przyjmijmy w przestrzeni R^3 dowolny punkt A_n . Przez punkty S i A_n poprowadzimy płaszczyznę ρ_n . Płaszczyzna ρ_n przetnie płaszczyzny τ_1 i τ_2 w prostych t_{1n} i t_{2n} .

Przez punkty S i A_n poprowadzimy prostą r_n . Prosta r_n przetnie dwie proste t_{1n} i t_{2n} płaszczyzn τ_1 i τ_2 w punktach przyporządkowanych odpowiednio A_n' i A_n'' , które są obrazami punktu A_n .

W odwzorowaniu tym przyporządkowanie punktów A_n' i A_n'' na płaszczyznach τ_1 i τ_2 jest jednoznaczne.

Punktowi niewłaściwemu Z_1^∞ na płaszczyźnie τ_1 od-

powiada punkt Z_2 na płaszczyźnie τ_2 , punkty O_n przecięcia prostych t_{1n} i t_{2n} odpowiadają same sobie.

Proste t_{1n} i t_{2n} są prostymi przyporządkowanymi, ponieważ wyznaczają je pary punktów przyporządkowanych Z_1^∞ i A_n' oraz Z_2 i A_n'' .

Dzięki temu przekształceniu możemy odwzorować dowolne zbiory punktów przestrzeni R^3 na zbiory punktów płaszczyzn τ_1 i τ_2 oraz dowolne zbiory punktów płaszczyzny τ_1 na płaszczyznę τ_2 i odwrotnie.

Przyjęty układ i wspomniane zależności przedstawia w dwóch rzutach prostokątnych ryc. 8 i 9.

Wynik zastosowania w praktyce omówionej konstrukcji, w celu przekształcenia dowolnego zbioru punktów płaszczyzny τ_1 na zbiór punktów płaszczyzny τ_2 , a więc perspektywy wykonanej wcześniej na tle pionowym w perspektywę na tło pochyłe przedstawia ryc. 1.

Ryciny: 1, 4 – Daniel Dudek, 2 – praca niepodpisana, 3 – Magdalena Kalita, 5 – Agnieszka Prawdzik, 6–9 – autor.

Figures: 1, 4 – Daniel Dudek, 2 – illustration without signature, 3 – Magdalena Kalita, 5 – Agnieszka Prawdzik, 6–9 – by the author.

Bibliografia

- [1] Bieliński A., Łapińska C., *Perspektywa na tło pochyle jako obraz środkowo-kolineacyjny perspektywy pionowej*, „Geometria Wykreślna i Grafika Inżynierska” 1999, nr 5.
- [2] Grochowski B., *Geometria wykreślna z perspektywą*, Warszawa 1999.
- [3] Suzin M., *Perspektywa wykresowa dla architektów*, Warszawa 1974.

On a certain transformation of perspective onto a vertical background into perspective onto a slanting background

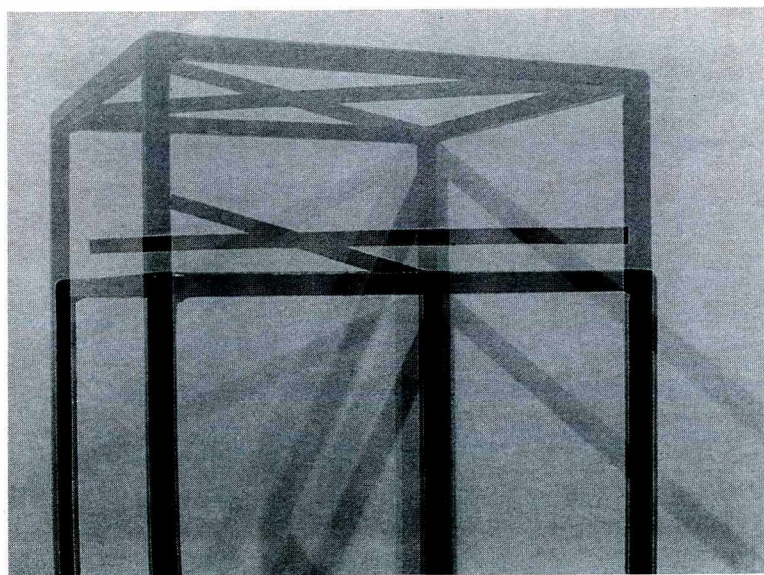
The presented method allows easy transforming of perspective realized onto a vertical background into perspective onto a slanting background. As a result it is possible to create perspective images of optional spatial arrangements onto a slanting background through collinear transformation of the perspective of such arrangements existing on a vertical background.

It widens the knowledge in the range of practical application of collineation of spatial systems and flat systems. It may be applied in didactics and perspective practice.

The weakness of the so-called *points of measuring method* used hitherto is that it relates only to simple multi-wall systems, most often perpendicular, usually having no more than three perspective confluences for the directions of their borders. The inconveniences of this method are revealed in multi-stages in perspective didactics.

Irrespective of this, the attainable literature on the subject often propagates a false image of perspective transformation creating out of the instrument an aim in itself. This is reflected in the vocabulary referring to this issue. Such terms as *single-*, *double-*, or *three-confluence* prove the lack of understanding the essence and aim of the transforming.

While it is known that the principle of perspective visualization is unchangeable while the form of the visualized object is of no significance. Otherwise, there would exist an infinite number of *perspectives*, whose designations would condition the quantity of the so-called *points of confluence*, which obviously leads to the absurd while perspective-drawing text books would be never-ending.



Jerzy Olek
Bez wymiar iluzji