

Daniel Iskra

Akademia Ekonomiczna w Katowicach

VAR – OPTYMALNY LINIOWY PORTFEL INWESTYCYJNY Z OGRANICZENIAMI

1. Wstęp

Wartością zagrożoną (wartością ryzykowaną) – w skrócie VaR – nazywa się maksymalną kwotę, którą można stracić w wyniku inwestycji w portfel o określonym horyzoncie czasowym i przy założonym poziomie ufności [Best 2000]. Każdy inwestor zdaje sobie sprawę z tego, iż jego portfel jest narażony na ryzyko, i na pewno chciałby, aby to ryzyko było jak najmniejsze. Uzasadnione jest zatem dobieranie struktury wartościowej portfela w taki sposób, aby ryzyko związane z tym portfelem (w tym przypadku VaR) było jak najmniejsze przy zadanym poziomie ufności. Kiedy inwestor jest w stanie zaakceptować stratę z portfela na założonym przez niego poziomie, portfel można optymalizować ze względu na prawdopodobieństwo wystąpienia założonej straty. Bardzo często inwestorzy rozważają portfele, w których zakładają pewne ograniczenia na parametry portfela, np. można narzucić warunki zarówno na dryf portfela, jak i na jego zmienność. Ograniczenia mogą być jednostronne i dwustronne.

W artykule rozpatrzono dwie strategie doboru struktury wartościowej portfela (składającego się z akcji) z narzuconymi ograniczeniami na jego dryf:

- minimalizację prawdopodobieństwa przekroczenia przez VaR z góry zadanej wartości,
- minimalizację wartości VaR przy zadanym poziomie ufności.

Dobierając strukturę wartościową portfela z użyciem pierwszej strategii, otrzymywano najmniejsze prawdopodobieństwo zdarzenia, w którym wartość portfela byłaby mniejsza od wartości ustalonej przez inwestora. Korzystając z drugiej strategii, dobierano taki skład portfela, w którym – przy ustalonym przez inwestora prawdopodobieństwie α – wartość, poniżej której nie spadnie wartość portfela (z

prawdopodobieństwem $1-\alpha$), była jak najwyższa. W obu przypadkach można było żądać, aby dryf portfela był nie mniejszy niż wcześniej założony.

W dalszej części pracy przyjęto założenie, że wartość początkowa portfela jest większa od zera, a dynamika cen akcji opisana jest geometrycznym ruchem Browna [Wilmott 2000].

2. Prawdopodobieństwo osiągnięcia przez portfel określonej wartości

Niech dynamika cen instrumentu będzie opisana geometrycznym ruchem Browna [Wilmott 2000]:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW, \quad (1)$$

gdzie: S – wartość akcji,

μ – współczynnik dryfu,

σ – współczynnik zmienności,

$W(t)$ – proces Wienera.

Gdy portfel inwestycyjny składa się z n instrumentów różnych podmiotów (o dymniecie opisanej geometrycznym ruchem Browna), wówczas korzystając z własności procesu Wienera, dynamikę portfela można wyrazić następująco [Czernik 2004]:

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = \mu_{\Pi} dt + \sigma_{\Pi} dW, \quad (2)$$

gdzie μ_{Π} i σ_{Π} są odpowiednio dryfem oraz zmiennością portfela i przyjmują wartości:

$$\mu_{\Pi} = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i, \quad (3)$$

$$\sigma_{\Pi} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \right)}, \quad (4)$$

a

$$\rho_{ij} = \text{cor} \left(\frac{dS_i}{S_i}, \frac{dS_j}{S_j} \right) \quad (5)$$

jest korelacją pomiędzy stopami zwrotu instrumentu i -tego i j -tego, a w_i $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ są wagami struktury wartościowej portfela:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1. \quad (6)$$

Obie strategie omawiane w dalszej części będą się opierały na utrzymaniu stałej struktury wartościowej portfela w czasie, co implikuje stałość parametrów μ_{Π} i σ_{Π} w czasie trwania strategii.

Korzystając z równania Kołmogorowa, można wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa wartości portfela [Gardiner 1986], a następnie samo prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na tym, iż dla ustalonego czasu t wartość portfela nie przekroczy wartości Π :

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad (7)$$

gdzie:

$$z = \frac{\ln\left(\frac{\Pi}{\Pi_0}\right) - \left(\mu_{\Pi} - \frac{1}{2}\sigma_{\Pi}^2\right)t}{\sigma_{\Pi}\sqrt{t}}. \quad (8)$$

Dla $\Pi = \Pi_0 - \Delta\Pi$ równanie (8) przybiera postać:

$$z = \frac{\ln\left(1 - \frac{\Delta\Pi}{\Pi_0}\right) - \left(\mu_{\Pi} - \frac{1}{2}\sigma_{\Pi}^2\right)t}{\sigma_{\Pi}\sqrt{t}}. \quad (9)$$

Oczywiście prawdopodobieństwo tego, iż portfel w chwili t przybierze wartość większą od Π lub równą Π , wynosi:

$$1 - N(z) \quad (10)$$

dla z opisanego wzorem (9).

3. Minimalizacja prawdopodobieństwa dla ustalonej wartości VaR

Strategia ta polega na minimalizacji prawdopodobieństwa przekroczenia przez VaR z góry zadanej wartości. Struktura wartościowa portfela inwestycyjnego musi zostać dobrana tak, aby dla ustalonej wartości $\Delta\Pi$ (wartość $\Delta\Pi$ reprezentuje akceptowalny poziom VaR) prawdopodobieństwo α , dla którego wartość portfela w chwili t nie będzie większa od wartości $\Pi_0 - \Delta\Pi$, było minimalne. Do obliczeń będzie używana względna wartość wartości narażonej na ryzyko do początkowej wartości portfela $-\Delta\Pi/\Pi_0$.

Po skorzystaniu z własności dystrybucji rozkładu normalnego minimalne prawdopodobieństwo $\alpha = N(z)$ zostanie osiągnięte dla minimalnej wartości argumentu z [Papoulis 1972]. Należy zatem znaleźć wartość minimalną funkcji:

$$z(w_1, \dots, w_n) = \frac{\ln\left(1 - \frac{\Delta\Pi}{\Pi_0}\right) - \left(\mu_{\Pi} - \frac{1}{2}\sigma_{\Pi}^2\right)t}{\sigma_{\Pi}\sqrt{t}}, \quad (11)$$

gdzie μ_{Π} i σ_{Π} są wyrażone odpowiednio wzorami (3) i (4). Zatem w_i $i = \{1, \dots, n\}$, dla których funkcja (11) osiągnie minimum, ustala strukturę wartościową portfela, w którym

VaR może przekroczyć $\Delta\Pi$ z minimalnym prawdopodobieństwem α (wartość portfela może spać poniżej ustalonej granicy $\Pi_0 - \Delta\Pi$ z minimalnym prawdopodobieństwem α).

W strategii tej można rozważać portfele z ograniczeniami dryfu zarówno jednostronnymi, jak i dwustronnymi. Należy wówczas przy przeprowadzanych obliczeniach dodać odpowiednie założenia co do dryfu portfela. Przy założeniu, iż dryf portfela przybierze określoną przez inwestora wartość, pochodna funkcji opisanej wzorem (11) dla dowolnej wagi w_i , $i = \{1, \dots, n\}$ wyraża się następująco:

$$\frac{\partial z(w_1, \dots, w_n)}{\partial w_i} = \left[\frac{\left(\mu_n + \frac{1}{2} \sigma_n^2 \right) t - \ln \left(1 - \frac{\Delta\Pi}{\Pi_0} \right)}{\sigma_n^2 \sqrt{t}} \right] \frac{\partial \sigma_n}{\partial w_i} \quad \text{dla } i = \{1, \dots, n\}. \quad (12)$$

Spełnienie nierówności:

$$\left(\mu_n + \frac{1}{2} \sigma_n^2 \right) t - \ln \left(1 - \frac{\Delta\Pi}{\Pi_0} \right) > 0, \quad (13)$$

która po przekształceniach przybiera postać:

$$\Pi_0 e^{\left(\mu_n + \frac{1}{2} \sigma_n^2 \right) t} > \Pi_0 - \Delta\Pi, \quad (14)$$

będzie oznaczać, iż spełniona będzie następująca nierówność:

$$\frac{\left(\mu_n + \frac{1}{2} \sigma_n^2 \right) t - \ln \left(1 - \frac{\Delta\Pi}{\Pi_0} \right)}{\sigma_n^2 \sqrt{t}} > 0. \quad (15)$$

Przy takich założeniach punkty podejrzane o ekstremum $w^* = (w_1^*, \dots, w_n^*)$ dla funkcji (11) są równocześnie punktami podejrzany o ekstremum dla zmienności portfela σ_n – opisanej wzorem (4).

Pamiętając, iż przy spełnieniu nierówności (14) zachodzi również nierówność (15), możemy wyciągnąć wniosek, iż osiągnięcie minimum w punkcie $w^* = (w_1^*, \dots, w_n^*)$ przez funkcję (11) jest równoważne z osiągnięciem minimum zmienności portfela w punkcie $w^* = (w_1^*, \dots, w_n^*)$ i odwrotnie. W takim przypadku wyznaczanie struktury wartościowej portfela, dla którego VaR może zostać przekroczony z minimalnym prawdopodobieństwem α , jest równoważne z wyznaczeniem takich wag, których zmienność portfela będzie minimalna.

4. Minimalizacja wartości VaR przy ustalonym prawdopodobieństwie α

Strategia ta polega na takim dobrze wag w_i , $i = \{1, \dots, n\}$, aby dla ustalonej wartości prawdopodobieństwa α wartość $\Delta\Pi/\Pi_0$ była minimalna. Zatem dla ustalonej wartości prawdopodobieństwa α należy znaleźć wartość funkcji odwrotnej do dystrybuanty rozkładu normalnego:

$$z = N^{-1}(\alpha). \quad (16)$$

Po przekształceniu równania (8) i podstawieniu równania (16) otrzymano:

$$\frac{\Delta\Pi}{\Pi_0}(w_1, \dots, w_n) = 1 - e^{N^{-1}(\alpha)\sigma_{\Pi}\sqrt{t} + (\mu_{\Pi} - \frac{1}{2}\sigma_{\Pi}^2)t}, \quad (17)$$

gdzie μ_{Π} i σ_{Π} są wyrażone odpowiednio wzorami (3) i (4).

Po wyznaczeniu wag w_i , $i = \{1, \dots, n\}$, dla których funkcja (17) osiąga minimum, otrzymano strukturę wartościową portfela, w którym wartość narażona na ryzyko jest minimalna dla ustalonego poziomu prawdopodobieństwa α .

Dla krótkich czasów wielkość $\Delta\Pi/\Pi_0$ opisaną wzorem (17) można przybliżyć równaniem:

$$\frac{\Delta\Pi}{\Pi_0}(w_1, \dots, w_n) \approx -N^{-1}(\alpha)\sigma\sqrt{t} - [\mu + \frac{1}{2}\sigma^2((N^{-1}(\alpha))^2 - 1)]t. \quad (18)$$

Z powyższego wzoru wynika, że dla małych t , przy ustalonej wartości prawdopodobieństwa α minimalizacja wartości $\Delta\Pi/\Pi_0$ jest równoważna minimalizacji zmienności portfela σ_{Π} (pierwszy człon rozwinięcia we wzorze (18) ma decydujące znaczenie). Należy jeszcze podkreślić to, że dla $\alpha \leq 0,5$, $N^{-1}(\alpha) \leq 0$ i w takim przypadku szukana granica, poniżej której może spaść wartość portfela z prawdopodobieństwem α , znajduje się poniżej początkowej wartości portfela lub jest jej równa.

Również w tej strategii można rozważać portfele z ograniczeniami dryfu zarówno jednostronnymi, jak i dwustronnymi. Zauważono ponadto, że w tym przypadku minimalizacja wartości $\Delta\Pi/\Pi_0$ sprowadza się do maksymalizacji wartości:

$$N^{-1}(\alpha)\sigma_{\Pi}\sqrt{t} + (\mu_{\Pi} - \frac{1}{2}\sigma_{\Pi}^2)t. \quad (19)$$

Z powyższego wzoru wynika, że dla ustalonego czasu t i dla dryfu portfela określonego przez inwestora na stałym poziomie oraz przy spełnionej nierówności $\alpha \leq 0,5$ (wówczas $N^{-1}(\alpha) \leq 0$) maksymalizacja wartości opisanej wzorem (19) jest równoważna minimalizacji zmienności portfela. Zatem w tym przypadku dobór struktury wartościowej portfela, w którym przy ustalonym prawdopodobieństwie α wartość narażona na ryzyko jest minimalna, sprowadza się do doboru takich wag w_i , $i = \{1, \dots, n\}$, dla których zmienność portfela również będzie minimalna. Dla stałego dryfu portfela, przybierającego wartość określoną przez inwestora bez względu na horyzont czasowy, powyższy problem sprowadza się do skonstruowania portfela metodą Markowitza.

Uwzględniając w obliczeniach warunek (6), w obu strategiach można liczbę zmiennych zredukować do liczby $n-1$. Ponadto obie te strategie nie wykluczają krótkiej sprzedaży, a więc wagi mogą być ujemne. Wykluczenie krótkiej sprzedaży polegałoby na wprowadzeniu dodatkowego założenia o nieujemności wszystkich wag.

Należy zwrócić jeszcze uwagę na to, że w obu strategiach trudno jest przeprowadzić obliczenia, nie używając metod numerycznych (przynajmniej dla większych n).

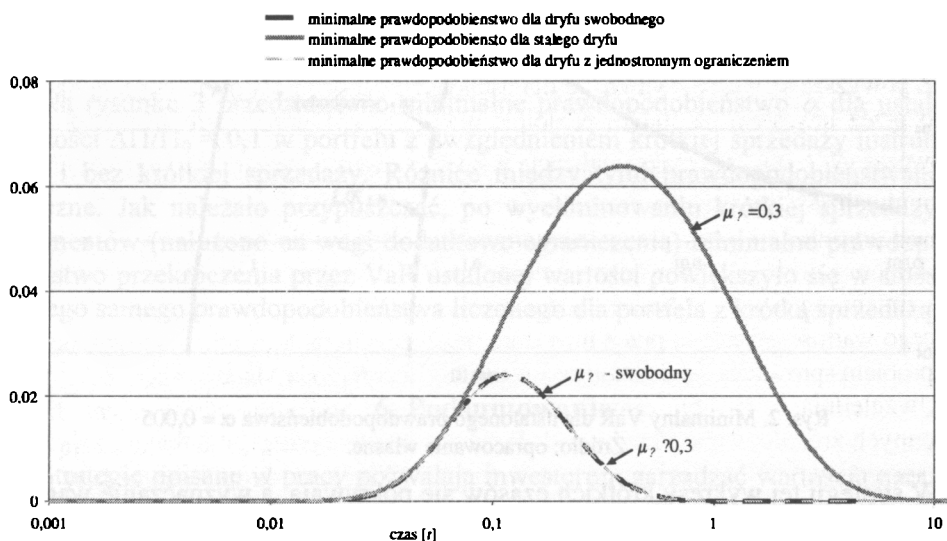
5. Aplikacje

Na potrzeby symulacji stworzono portfel składający się z akcji pięciu przedsiębiorstw. Liczba spółek wchodzących w skład portfela nie może być w tym przypadku mniejsza od trzech ze względu na liczbę stopni swobody budowanego portfela (jedną zmienną można wyeliminować, korzystając z założenia o sumie wag, a drugą – z założenia o stałym dryfie portfela). Należy zauważyć, iż czas potrzebny na obliczenia rośnie wykładniczo w miarę wzrostu liczby spółek w portfelu. Dlatego w symulacji ograniczono tę liczbę do pięciu, nie tracąc na ogólnych założeniach. Ze względu na podglądowy charakter symulacji wybór spółek wchodzących w skład portfela nie miał znaczenia, dlatego losowo wybrano: Pekao SA, PKN Orlen SA, Telekomunikację Polską SA, KGHM Polska Miedź SA, Netię SA. Notowania akcji z okresu 20.02.2004 r. - 04.05.2004 r. zostały pobrane z GPW w Warszawie. Korzystając z metody momentów, oszacowano współczynniki dryfu i zmienności cen akcji [Czernik] na podstawie ostatnich 50 notowań sesyjnych w badanym okresie. Ze wzoru [Czernik 2004]:

$$\rho_{12} = \frac{\text{cov}\left(\frac{\Delta S_1}{S_1}, \frac{\Delta S_2}{S_2}\right)}{\sigma_1 \sigma_2 \Delta t} \quad (20)$$

policzono korelację wartości instrumentów, natomiast $\Delta t = 1/250$.

Na rysunku 1 przedstawiono minimalną wartość prawdopodobieństwa α , jaka może zostać przyjęta przy ustalonym $\Delta \Pi / \Pi_0 = 0,1$.

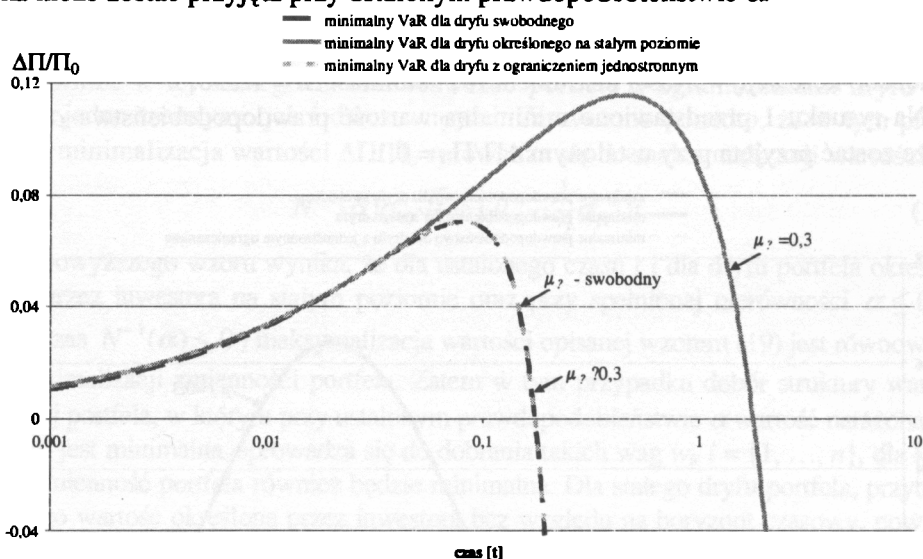


Rys. 1. Minimalne prawdopodobieństwo dla ustalonej wartości VaR ($\Delta \Pi / \Pi_0 = 0,1$)

Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 1 widać, że wszystkie trzy wykresy dla początkowych t (t mniejsze od ok. 0,4 – okres ok. 10 pierwszych dni) prawie się pokrywają. Można właściwie zaobserwować, że dla tych czasów wykresy dryfu ustalonego na poziomie 0,3 oraz ograniczonego jednostronnie (większy od 0,3 lub równy mu) są takie same. Z kolei po przekroczeniu tego czasu wartość prawdopodobieństwa α w przypadku dryfu z ograniczeniem jednostronnym i w przypadku dryfu swobodnego jest takie samo. Wiadomo, że dla dryfu określonego na stałym poziomie wyznaczanie struktury wartościowej portfela sprowadza się do wyznaczenia tej struktury z jednoczesnym minimalizowaniem zmienności portfela. Wynika z tego, iż w pozostałych przypadkach dla krótkich czasów minimalizacja prawdopodobieństwa również sprowadza się do konstrukcji portfela metodą Markowitza. Można zauważyć także, że dla $t \rightarrow 0$ oraz $t \rightarrow \infty$ prawdopodobieństwo α dąży do 0. Jest też pewien horyzont czasowy inwestycji, dla którego – w zależności od ograniczeń dryfu – prawdopodobieństwo α jest największe. Horyzont ten w tym przykładzie wynosi odpowiednio około miesiąca dla dryfu swobodnego lub z ograniczeniem jednostronnym i czterech miesięcy dla dryfu określonego na poziomie 0,3.

Na rysunku 2 umieszczono wykres przedstawiający minimalną wartość $\Delta\P/\Pi_0$, jaka może zostać przyjęta przy ustalonym prawdopodobieństwie α .

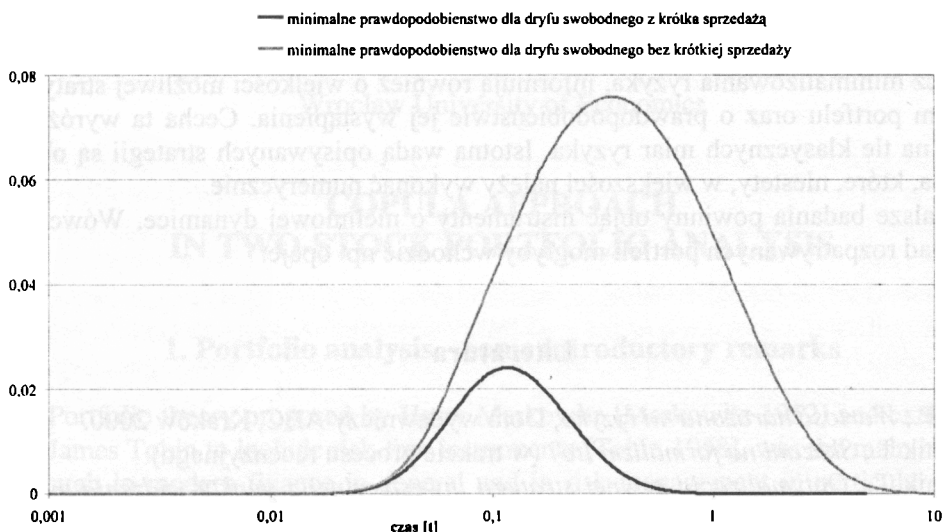


Rys. 2. Minimalny VaR dla ustalonego prawdopodobieństwa $\alpha = 0,005$

Źródło: opracowanie własne.

W strategii tej wykresy krótkich czasów się pokrywają, a wyznaczanie wag minimalizujących $\Delta\P/\Pi_0$ w tym okresie można sprowadzić do wykorzystania metody Markowitza. Również w tej strategii od pewnego czasu t wartości $\Delta\P/\Pi_0$ w przypadku dryfu z ograniczeniem jednostronnym i w przypadku dryfu swobodnego są

takie same. Dla $t \rightarrow \infty$ wartość $\Delta\Pi/\Pi_0 \rightarrow -\infty$, wartości ujemne $\Delta\Pi/\Pi_0$ oznaczają, iż poziom $\Pi_0 - \Delta\Pi$, poniżej którego portfel może przyjmować wartości w czasie t z ustalonym prawdopodobieństwem α jest większy od wartości początkowej portfela. Z uwagi na ten sam skład portfela co w strategii pierwszej najbardziej niekorzystne ze względu na VaR są inwestycje o horyzoncie czasowym odpowiednio: około miesiąca dla dryfu swobodnego lub z ograniczeniem jednostronnym i około czterech miesięcy dla dryfu określonego na poziomie 0,3.



Rys. 3. Minimalne prawdopodobieństwo dla ustalonej wartości VaR ($\Delta\Pi/\Pi_0 = 0,1$)

Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 3 przedstawiono minimalne prawdopodobieństwo α dla ustalonej wartości $\Delta\Pi/\Pi_0 = 0,1$ w portfelu z uwzględnieniem krótkiej sprzedaży instrumentów i bez krótkiej sprzedaży. Różnice między tymi prawdopodobieństwami są znaczne. Jak należało przypuszczać, po wyeliminowaniu krótkiej sprzedaży instrumentów (nałożono na wagi dodatkowe ograniczenia) minimalne prawdopodobieństwo przekroczenia przez VaR ustalonej wartości powiększyło się w stosunku do tego samego prawdopodobieństwa liczonego dla portfela z krótką sprzedażą.

6. Podsumowanie

Strategie opisane w pracy pozwalają inwestorom zarządzać wartością narażoną na ryzyko w skonstruowanych przez nich portfelach. Symulowany portfel przedstawiony w pracy składał się z pięciu różnych instrumentów. Liczba stopni swobody tego portfela pozwala na wprowadzanie, oprócz standardowego założenia dotyczącego sumy wag, dodatkowych założeń. W tym przypadku dodatkowe założenia

dotyczyły dryfu portfela, a dokładniej jego ograniczeń, które mogły być zarówno jednostronne, jak i dwustronne. Okazuje się, że dla określonego dryfu portfela wyznaczanie struktury wartościowej portfela – zarówno przy minimalizacji wartości VaR przy ustalonym prawdopodobieństwie α , jak i przy minimalizacji prawdopodobieństwa α dla ustalonej wartości VaR – jest równoważne z dobraniem takich wag, dla których zmienność portfela jest minimalna (w drugim przypadku musi być spełniana nierówność (13), która wprowadza dość naturalne założenie co do wartości narażonej na ryzyko). Takie dodatkowe założenia pozwalają precyzyjniej określić oczekiwania inwestora odnośnie do portfela. Ponadto opisywane strategie, oprócz minimalizowania ryzyka, informują również o wielkości możliwej straty w danym portfelu oraz o prawdopodobieństwie jej wystąpienia. Cecha ta wyróżnia VaR na tle klasycznych miar ryzyka. Istotną wadą opisywanych strategii są obliczenia, które, niestety, w większości należy wykonać numerycznie.

Dalsze badania powinny objąć instrumenty o nieliniowej dynamice. Wówczas w skład rozpatrywanych portfeli mogłyby wchodzić np. opcje.

Literatura

- Best P., *Wartość narażona na ryzyko*, Dom wydawniczy ABC, Kraków 2000.
- Czernik T., *Skazani na formalizm Ito?* (w trakcie procesu recenzyjnego).
- Czernik T., *Optymalizacja pewnej strategii inwestycyjnej z punktu widzenia maksymalnej straty*, [w:] W. Tarczyński (red.), *Rynek kapitałowy. Skuteczne inwestowanie*, Szczecin 2004.
- Gardiner C.W., *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences*, Mir, Moskwa 1986.
- Papoulis A., *Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne*, WNT, Warszawa 1972.
- Wilmott P., *Paul Wilmott on Quantitative Finance*, John Wiley & Sons 2000.

VaR – OPTIMAL SECURITIES PORTFOLIO WITH CONSTRAINTS

Summary

The article presents the optimization of securities portfolio process with constraints. Taking into account the VaR the optimization concerns the value's portfolio structure. Two strategies are considered by the author:

- setting a VaR the minimization of the probability that the VaR excide the value,
- setting a probability level the minimization of VaR value.

First strategy enables building the portfolio structure which value would be less than the value settled by the investor with minimal probability. Second strategy begins with setting probability α . Next step is to build such a portfolio structure that the value limit beneath which the portfolio value would not decrease (with probability $1-\alpha$) will be at the maximum level. In both cases the required drift of the securities portfolio should not be lower than determined earlier.