Stanisław Piesiak

Identyfikacja układów mechanicznych w dziedzinie nieliniowych i zdegenerowanych modeli dynamicznych

Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej

EX LIBRIS
BIBLIOTEKI
POLITECHNIKI
WROCŁAWSKIEJ

Stanisław Piesiak

Identyfikacja układów mechanicznych w dziedzinie nieliniowych i zdegenerowanych modeli dynamicznych

Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej
Wrocław 2003

MS 17 388

Recenzenci
Wacław Kasprzak
Andrzej Tylikowski

Opracowanie redakcyjne i korekta
Alina Kaczak

Biblioteka Główna i OINT
Politechniki Wrocławskiej
001758651

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA
Biblioteka Główna

312433 W/3

© Copyright by Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2003

OFICYNA WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

ISBN 83-7085-708-6

Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 356/2003

Alk 20031

Spis treści

1. Opis problematyki i cel pracy 5
1.1. Wprowadzenie 5
1.2. Ujęcie problemu 7
1.3. Cel i układ pracy 12
2. Proces identyfikacji w przypadku wymuszeń periodycznych dowolnego kształtu 14
2.1. Wprowadzenie. Idea rozwiązania 14
2.2. Rozwiązanie układu o konfiguracji równoległej 19
2.3. Rozwiązanie układu o złożonej konfiguracji z elementem Reida 25
2.4. Przykłady rozwiązań w układach o wielu stopniach swobody 29
3. Proces identyfikacji w przypadku stacjonarnych wymuszeń losowych . . . 47
3.1. Uśrednione równanie bilansu energii i mocy 48
3.2. Przykłady zastosowania uśrednionego równania bilansu energii 51
3.3. Przykład zastosowania uśrednionego równania bilansu mocy 55
3.4. Równania bilansu energii i bilansu mocy w przypadku wymuszeń losowych 59
3.5. Uogólnienie metody dla układów o N-stopniach swobody 69
4. Procedury identyfikacji układów zdegenerowanych 83
4.1. Wprowadzenie 83
4.2. Identyfikacja układów zdegenerowanych z wykorzystaniem równań bilansu energii 85
4.3. Metoda identyfikacji nieliniowego układu zdegenerowanego o złożonej konfiguracji 90
4.4. Uogólnienie metody na układy o N-stopniach swobody 104
4.5. Identyfikacja układu zdegenerowanego dwumasowego 120
5. Podsumowanie. Aspekty zastosowań. Wnioski 125
Literatura 139

1. Opis problematyki i cel pracy

1.1. Wprowadzenie

W identyfikacji i modelowaniu układów mechanicznych dominują obecnie metody związane z eksperymentalną analizą modalną. Jak wiadomo, metoda ta umożliwia wyznaczenie tzw. „modelu modalnego", a ściślej – wyznaczenie jego parametrów: częstości drgań własnych oraz współczynników macierzy modalnej, której kolumny korespondują z określonymi formami drgań. Należy zaznaczyć, że tak wyznaczony model umożliwia wyznaczenie odpowiedzi układu na dowolne wymuszenie dynamiczne zarówno typu deterministycznego, jak i losowego [15, 27, 60, 74, 86, 106, 106, 108, 109]. Wyłania się przy tym pytanie na ile dokładnie tak zbudowany model odzwierciedla właściwości badanego rzeczywistego układu. Jeśli uwzględni się fakt, że wyprowadzono go na gruncie teorii układów liniowych, to stosowanie analizy modalnej w przypadku układów nieliniowych sprowadza się do poszukiwania liniowego modelu optymalnego, w którym efekty nieliniowe jednak nie występują. Uzyskany w ten sposób model jedynie w przybliżeniu opisuje drgania układu. Ma to praktyczne zastosowanie, kiedy układ rzeczywisty działa w obszarze ograniczonych wymuszeń. Należy podkreślić, że model modalny nie jest otrzymywany na podstawie znajomości struktury badanego układu (która umożliwia uzyskanie modelu matematycznego w postaci równań różniczkowych), **lecz przez stosowanie badań eksperymentalnych**, w których **układ traktuje się jako tzw. „czarną skrzynkę"**. Metoda eksperymentalnej analizy modalnej spełnia swą rolę w identyfikacji chwilowych charakterystyk badanego układu w zadanym zakresie wymuszeń.

Ze względu na zastosowania techniczne modelowanie lub też identyfikacja odnosi skutek, jeśli opisuje w miarę dokładnie zachowanie się badanego obiektu w ustalonym przedziale czasu jego działania (np. czas eksploatacji maszyny). Można przyjąć, że większość wytworzonych obiektów inżynierskich spełnia zarówno warunek liniowości (warunek superpozycji obciążeń), jak i warunek niezmienniczości w czasie (*time invariant condition*) w przypadku małych drgań i dla zdefiniowanego (skończonego) czasu ich obserwacji. Jednakże nieco odmienną sytuację mamy wtedy, gdy zachodzą zmiany w elemencie maszyny pod wpływem długotrwałych obciążeń. Jak wiadomo, w takich przypadkach podstawowym miernikiem zmian może być energia strat. Jej prawidłowe oszacowanie wymaga jednak wprowadzenia dokładnego modelu tłumienia drgań, z uwzględnieniem nie tylko tarcia wiskotycznego, ale także np. oporów ruchu związanych z tarciem suchym. W konsekwecji prowadzi to do zastosowania modelu nieliniowego. **Niezmiernie interesujące jest określenie zmian nieliniowych charakterystyk sprężysto-tłumiących badanego elementu aż do momentu jego zniszczenia. Dokonujące się z upływem czasu zmiany tych charakterystyk, mogą być źródłem istotnych informacji o trwałości badanego elementu i wykorzystane w jego diagnostyce.**

Rozwijające się tendencje budowy układów samodiagnozujących znalazły też już odzwierciedlenie w prowadzonych badaniach. Pierwsze w Polsce prace dotyczące modeli umożliwijących diagnostykę opublikował Tylikowski [120, 121].

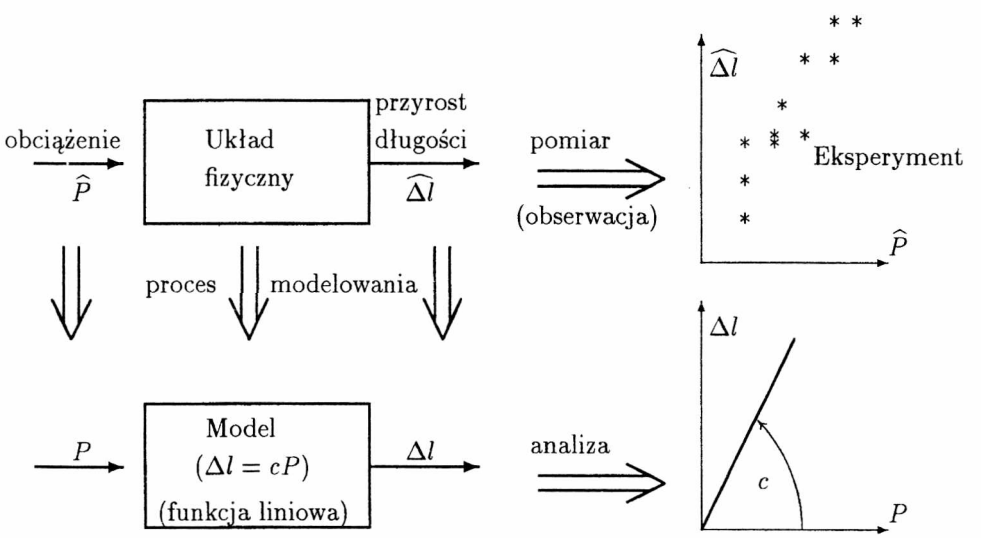
Istotny rozwój w takim kierunku będzie w pełni możliwy, jeśli uda się rozwinąć metody modelowania i identyfikacji dynamicznych układów mechanicznych zgodnie z odpowiednią różnorodnością modeli nieliniowych.

W niniejszej pracy podjęto próbę przedstawienia całokształtu opracowanych procedur, służących do rozszerzenia zakresu badań dynamicznych rzeczywistych układów w takim właśnie kierunku. Duża część tych procedur (ich koncepcje, podstawy teoretyczne, eksperymentalna weryfikacja) była wielokrotnie oddzielnie przedstawiana na różnych konferencjach [4–7, 10, 12–14, 53, 57, 59, 61–66, 68–73, 75, 76, 79–80, 83, 84], a także publikowana [55, 56, 58, 60, 67, 74, 77, 78, 81, 82]. Jednakże ich zbiorcze przedstawienie, zawierające zestaw specjalnie zaprojektowanych sekwencji procedur służących do celów praktycznych zastosowań z rozwinięciem także na układy zdegenerowane, wydaje się wysoce pożądane. Daje to bowiem możliwość opisu układu w szerszym zakresie wymuszeń, także śledzenie zmian jego charakterystyk, a więc zastosowań do celów diagnostycznych [18, 24, 25].

1.2. Ujęcie problemu

W analizie drgań układów mechanicznych zwykle stosowano znane metody matematyczne związane z analizą widmową, teorię układów liniowych, technikę operatorową Laplace'a, czy też analizą korelacyjną [29, 30, 31, 32, 35, 36, 46, 109, 113, 114, 124, 125]. Posługiwanie się tymi metodami daje bardzo dobre rezultaty w przypadku analizy układów liniowych, niezależnie od liczby stopni swobody i struktury tych modeli. W przypadku układów silnie nieliniowych i dla złożonych struktur poszczególnych elementów sprężysto-tłumiących nie jest możliwe otrzymanie rozwiązań analitycznych, a w związku z tym dokonanie pełnej analizy i syntezy takich układów.

Rzeczywisty układ fizyczny jest postrzegany jako pewna konfiguracja wyróżnionych mas (punktów materialnych lub ciał sztywnych), połączonych między sobą elementami sprężystymi i dyssypatywnymi liniowymi lub nieliniowymi o różnorakiej ich konfiguracji. Obserwacje obiektu rzeczywistego, np. przez pomiar wielkości mierzalnych, takich jak przemieszczenie, prędkość i przyspieszenie, temperatura itp., których zmiany są wywoływane odpowiednimi wymuszeniami, umożliwiają zbudowanie modelu, który może być (i najczęściej jest) podstawą dogłębnej analizy. Modele takie można budować w przypadku badań statycznych (np. rozciąganie próbek), jak i dynamicznych (np. pojazd poddany wymuszeniom losowym lub element konstrukcyjny poddany obciążeniom dynamicznym).



Rys. 1.1. Poglądowy schemat procesu identyfikacji i modelowania układu mechanicznego

W celu wyjaśnienia stosowanych w niniejszej pracy oznaczeń i symboli, odnoszących się do układu badanego lub/i jego modeli, należy powtórzyć znane spostrzeżenia.

Typowo empirycznym ujęciem w analizie układów mechanicznych od czasów Wienera jest traktowanie układu jako „czarnej skrzynki". Poglądowo schemat procesu identyfikacji można przedstawić jak na rysunku 1.1. Schemat ten jest stosowany zarówno w badaniach statycznych, jak i dynamicznych (rys. 1.2). Modelowanie dotyczy zarówno wielkości wejściowych, jak i wyjściowych oraz samego układu. W tym ujęciu obiekt przekształca obserwowane przebiegi wejściowe na sygnały wyjściowe. Model obiektu podaje zależność wejść i wyjść wprost w języku matematyki [31, 35, 36, 38, 42, 94–96, 123, 124].

Rys. 1.2. Ogólny schemat obiektów dynamicznych

W przypadku układów dynamicznych wielkości wejściowe $\widehat{\widehat{p}}(t)$ i wyjściowe $\widehat{\widehat{x}}(t)$ modeluje się funkcjami czasu deterministycznymi lub losowymi (procesy losowe). Budowa modelu adekwantnego do analizowanego zjawiska (lub zjawisk) wymaga poznania i wykorzystania wielu metod eksperymetalnych, zasad projektowo-konstrukcyjnych obiektów dynamicznych, metod wytwarzania itp.

Przykładowo, jeśli weźmie się pod uwagę typowy układ drgający zbudowany z masy $\widehat{m}$ podtrzymywany przez pewien element o właściwościach sprężysto-tłumiących (patrz rys. 1.3), to równanie równowagi dynamicznej masy $\widehat{m}$ zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona można zapisać w postaci

$$m\ddot{x} + F(?) = p(t), \tag{1.1}$$

w której poszczególne symbole oznaczają: m – zmienna rzeczywista opisująca wartość masy $\widehat{m}$, $\ddot{x}$ – funkcja zmiennej rzeczywistej czasu t opisująca przyspieszenie $\widehat{a}$, $F(?)$ – funkcja o nieznanych argumentach (przyjmowana najczęściej jako funkcja prędkości $\widehat{\dot{x}}$ i przemieszczenia $\widehat{x}$ masy $\widehat{m}$), opisująca siłę oddziaływania elementu na masę $\widehat{m}$, $p(t)$ – funkcja rzeczywista opisująca siłę wymuszającą (wymuszenie zewnętrzne) (np. $p(t) = 0, p(t) = P\sin\omega t$ itp.).

W zastosowaniach inżynierskich przyjmuje się, że właściwości dynamiczne elementu sprężysto-tłumiącego opisują dwa współczynniki:

- c – sztywność,
- k – tłumienie drgań.

Ujęcie takie jest związane z przyjęciem (intuicyjnym) modelu liniowego o konfiguracji równoległej (patrz rys. 1.3 model (a)). Jednakże równie dobrze można przyjąć w tym przypadku model w postaci (b), (c) lub innej. Przyjęcie modelu o konfiguracji równoległej (model (a)) jest na ogół powszechne w układach złożonych o wielu stopniach swobody. Taka postać modelu elementu sprężysto-tłumiącego maszyny prowadzi do układu równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach. Należy zauważyć, że w celu wyznaczenia współczynników takiego modelu stworzono profesjonalną metodę analizy doświadczalnej układów dynamicznych, znaną jako „Esperymentalna Analiza Modalna" [1, 2, 22, 28, 37, 92, 106, 111]. Teoretyczne podstawy tej metody można znaleźć między innymi w wielu pracach (np. [19, 107, 116, 126]). Zastosowanie praktyczne metody eksperymentalnej analizy modalnej wymaga odpowiedniego wyposażenia aparaturowego (analizatory wielokanałowe, młotki udarowe, akcelerometry).

Istnieją jednakże sytuacje, w których stosowanie modeli liniowych będzie zbytnim uproszczeniem. Jako przykład można rozpatrzyć układ z rysunku 1.3, który jest opisany równaniem

$$m\ddot{x} + h\,\mathrm{sgn}\,\dot{x} + k_1\dot{x} + k_3\dot{x}^3 + k_5\dot{x}^5 + cx = p(t). \tag{1.2}$$

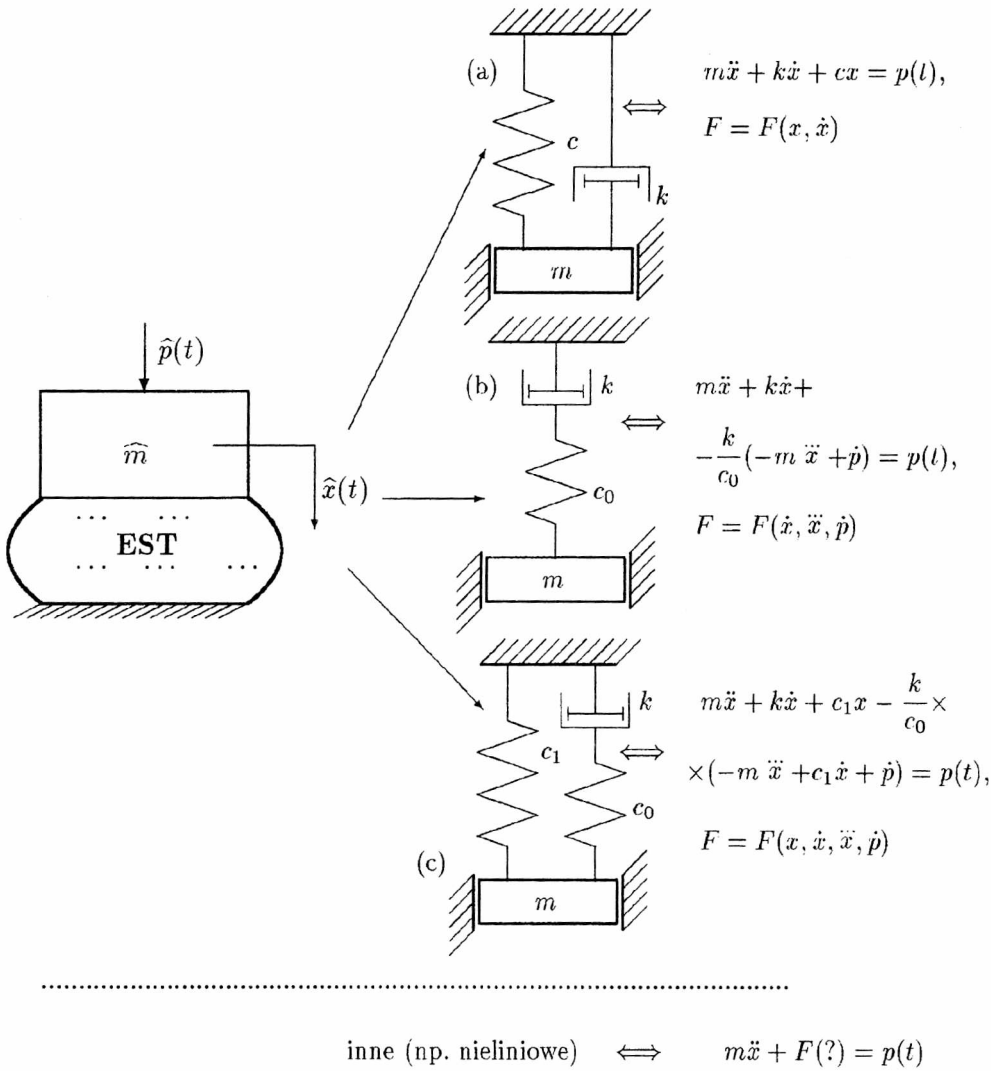
Załóżmy, że pod wpływem ciągłych obciążeń cyklicznych właściwości dynamiczne tego układu ulegają powolnym zmianom (starzenie się materiału, osłabienie, zmęczenie, pełzanie, relaksacja itp.) [18, 21, 41, 98, 99, 103, 104, 105] (patrz rys. 1.4).

Właściwości dynamiczne układu dynamicznego (1.2) określone są przez parametry h, k_1, k_3, k_5, c pewnej (nieliniowej!) funkcji $F(x, \dot{x})$. Jeśli więc właściwości dynamiczne układu rzeczywistego ulegają zmianie (zjawisko zmęczenia), to parametry h, k_1, k_3, k_5 mogą się powoli zmieniać w czasie (patrz rys. 1.4).

Można oczekiwać zmian postaci funkcji i zmian wartości parametrów. Najłatwiej zmiany te można uchwycić, stosując możliwie skomplikowaną postać funkcji tłumienia, np.

$$F_t(\dot{x}) = h\,\mathrm{sgn}\,\dot{x} + k_1\dot{x} + k_3\dot{x}^3 + k_5\dot{x}^5. \tag{1.3}$$

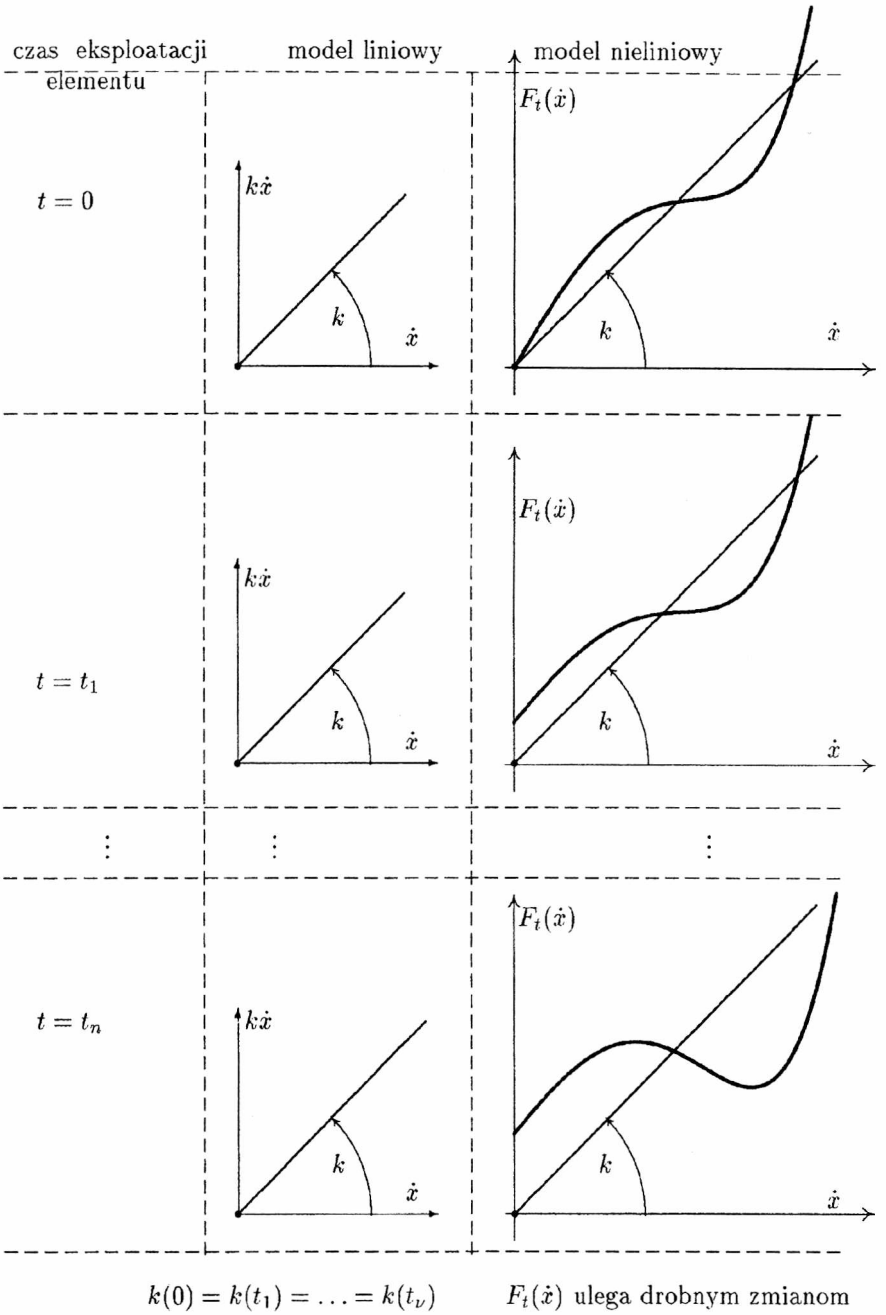
Zauważa się, że zmiany funkcji tłumienia mogą dać istotne wskazówki co do konieczności wymiany badanego elementu sprężysto-tłumiącego (EST) maszyny.



Rys. 1.3. Możliwe struktury rozpatrywanego układu (EST – element sprężysto-tłumiący)

Aby to jednak stwierdzić, trzeba *wyznaczyć postać funkcji tłumienia interesującego elementu sprężysto-tłumiącego* (EST) *maszyny w dowolnym czasie jej eksploatacji i wartości jej współczynników.*

Implikuje to konieczność opracowania nowych procedur identyfikacyjnych, opartych na złożonych nieliniowych modelach dynamicznych.



Rys. 1.4. Przykłady zmian funkcji tłumienia w czasie eksploatacji

1.3. Cel i układ pracy

Konieczność opracowania możliwie uniwersalnych metod identyfikacji układów fizycznych w mechanice wymaga, jak to wykazano w punkcie 1.2, wprowadzenia do modeli członów nieliniowych o odpowiedniej strukturze i konfiguracji. Takie ujęcie było wykorzystane już w pracach Kulisiewicza [49–51]. Przedstawione tam metody polegały na wykorzystaniu odpowiednich równań identyfikacyjnych dla częstości rezonansowych i tzw. częstości rezonansów symulowanych (układy o dużej liczbie stopni swobody). Należy jednak podkreślić, że realnie istniejące układy fizyczne (np. materiały konstrukcyjne) charakteryzują się różnymi własnościami dynamicznymi dla różnych częstości drgań. Wynika z tego konieczność opracowania takich algorytmów identyfikacyjnych, które byłyby oparte na bardziej uniwersalnych związkach ważnych nie tylko w obrębie rezonansów, ale także poza nimi. Algorytmy takie mogłyby służyć nie tylko do szeroko rozumianej identyfikacji, lecz także do weryfikacji modelu dynamicznego uzyskanego np. metodą rezonansową. Model taki mógłby w sferze zastosowań spełniać taką samą rolę jak model modalny, jednakże w dużo szerszym zakresie. Należy również podkreślić fakt, że wielokrotnie w badaniach rzeczywistych układów drgających obserwuje się występowanie efektów nieliniowych, których metody wykrywania są dobrze znane [33, 47, 89, 90, 91, 93, 127].

W niniejszej pracy podjęto próbę opracowania metod i algorytmów identyfikacji, formalizujących opis badanych układów, odpowiednio zbliżony do obserwowanego nie tylko w obszarze rezonansów, ale także poza nimi, w szerokim zakresie wymuszeń.

W pracy zatem:

- Opisano koncepcję wykorzystania równań bilansu energii i mocy do identyfikacji układów dyskretnych, przedstawionych w rozdz. 2. Podano warunki stosowania metody bilansu energii i mocy. Wybrano do identyfikacji przykłady układów o konfiguracji rónoległej i strukturze kaskadowej o wielu stopniach swobody z elementami silnie nieliniowymi. Badania i weryfikację układów od jednego do czterech stopni swobody przeprowadzono dla wymuszeń okresowych.

- Wyprowadzono uśrednione równania bilansu mocy i bilansu energii w przypadku wymuszeń nieokresowych (rozdz. 3). Do testowania zaproponowanej metody wykorzystano wymuszenia nieharmoniczne, wymuszenia losowe stacjonarne. W tym ostatnim przypadku równania bilansu energii i bilansu mocy oparto na wartościach oczekiwanych odpowiednich kombinacji sygnałów odpowiedzi układu i wymuszenia. Metodę uogólniono na układy o wielu stopniach swobody o strukturach kaskadowych. Badano doświadczalnie skuteczność tak zaproponowanego

algorytmu dla wymuszeń losowych typu białego szumu, różowego szumu oraz wymuszeń losowych wybuchowych (tzw. wymuszeń „Burt Rondom" [34]).

- Podano procedury identyfikacyjne w przypadku układów, których liczba stopni swobody nie jest liczbą całkowitą (patrz rozdz. 4) (nazwano je układami zdegenerowanymi). Równania identyfikacyjne wyprowadzono dla znacząco różnych struktur (kombinacji elementów sprężysto-tłumiących) analizownych układów. Uogólniono metodę na układy wielomasowe o strukturach kaskadowych. Procedury identyfikacyjne oparto także na równaniach bilansu energii i bilansu mocy. Algorytmy wyprowadzono dla wymuszeń okresowych. Łatwo można je zaadaptować także do wymuszeń losowych, stosując technikę uśredniania opisaną w rozdziale 3.

Ograniczeniem opracowanych metod jest fundamentalne założenie dotyczące warunków okresowości rozwiązań przy obciążeniach okresowych w przypadku algorytmów opartych na określeniu pól pętli histerezy, w przypadku zaś obciążeń losowych ograniczenie to sprowadza się do stacjonartości odpowiedzi i wymuszeń.

Biblioteka Pol. Wrocł.

2. Proces identyfikacji w przypadku wymuszeń periodycznych dowolnego kształtu

2.1. Wprowadzenie. Idea rozwiązania

W pracach [48–51] pokazano pewne rozwiązania procesu identyfikacji układów mechanicznych o właściwościach silnie nieliniowych. Przedstawione tam rozwiązania wymagają wprowadzenia odpowiednio sterowanych wymuszeń harmonicznych albo też specjalnego wymuszenia dodatkowego, generującego drgania czysto harmoniczne.

W niniejszym rozdziale pokazano odmienne ujęcie stosowane w identyfikacji układów poddawanych wymuszeniom okresowym dowolnego kształtu. Różnica w podejściu polega głównie na całkowaniu równań różniczkowych ruchu, a nie na analizie ich rozwiązań. W ogólnym zarysie koncepcja tego rozwiązania polega na:

- zastosowaniu w rozpatrywanym układzie dowolnego wymuszenia okresowego $\widehat{p}(t)$ (typu ciągłego bądź ciągu impulsów o dowolnej postaci),
- przeanalizowaniu odpowiedzi $\widehat{x}(t)$ badanego układu w celu sprawdzenia, czy spełniony jest warunek okresowości, tzn. warunek

$$\widehat{x}(t) = \widehat{x}(t+T), \quad \text{gdy} \quad \widehat{p}(t) = \widehat{p}(t+T), \tag{2.1}$$

- apriorycznym przyjęciu dowolnie nieliniowej postaci modeli,
- wyprowadzeniu równania bilansu energii przyjętej postaci modelu i wyznaczeniu odpowiednich pętli histerezy,
- określeniu sposobu pomiarów zmiennych występujących w równaniu energii i opracowaniu algorytmu identyfikacji,
- eksperymentalnej weryfikacji zbudowanego algorytmu.

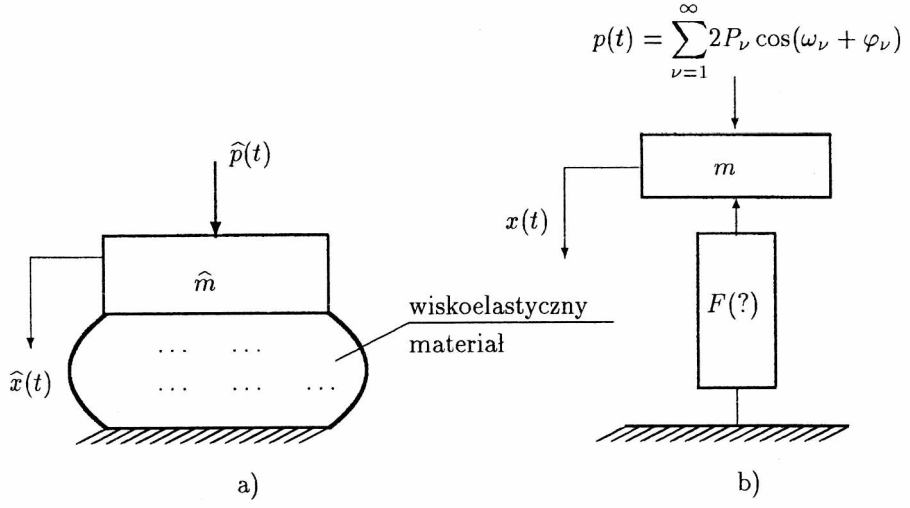
Ujęcie takie wynika przede wszystkim z potrzeby opracowania globalnej procedury identyfikacji właściwości dynamicznych wiskoelastycznych materiałów, stosowanych w elementach sprężysto-tłumiących maszyn (np. w układach zawieszenia).

Przykładowo w układach zawieszeń maszyn pojawiają się dwa zasadnicze problemy:

a) wpływ rodzaju zawieszenia na działanie maszyny,
b) analiza działania zawieszenia w warunkach eksploatacji (żywotność, zmiany właściwości dynamicznych itp.).

W obydwu tych przypadkach proces modelowania może odbywać się podobnie. Jednakże należy zauważyć, że o ile w przypadku a) dostateczną dokładność otrzymuje się nawet przez proste modele liniowe, o tyle w przypadku b) najczęściej przybliżenia liniowe nie dają satysfakcjonujących rezultatów.

Wymagania techniczne stawiane obecnie nowoczesnym układom dynamicznym, a dotyczące głównie oszczędności energii i materiałów (konstrukcje lekkie), ciągle rosną. **Zadowalające rozwiązania wymagają stosowania dokładnych, najczęściej nieliniowych modeli dynamicznych, co stwarza dodatkowe trudności w sferze modelowania i identyfikacji elementów sprężysto-tłumiących maszyn.**



Rys. 2.1. Schemat przyjętego modelu b) układu fizycznego a)

W następnym punkcie skoncentrowano się przede wszystkiem na przypadku ogólnym, ważnym dla nieliniowych charakterystyk tłumienia i sprężystości dowol-

nego kształtu [21, 55, 58, 63, 96]. Przyjęto więc, że **oddziaływanie elementu sprężysto-tłumiącego na ruch masy** $\widehat{m}$ (patrz rys. 2.1) **opisuje się funkcją** $F(x, \dot{x})$, założywszy jej addytywność

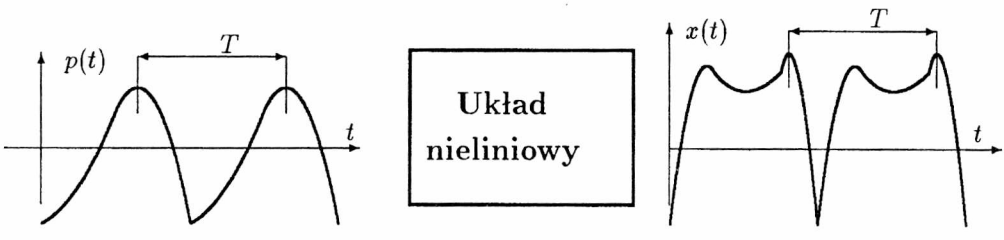
$$F(x, \dot{x}) = F_s(x) + F_t(\dot{x}). \tag{2.2}$$

Założenie to jest powszechnie stosowane w dynamice układów mechanicznych [30, 96]. Funkcje $F_s(x), F_t(\dot{x})$ opisują oddziaływania sprężysto-tłumiące elementów maszyn, zwane dalej charakterystykami sprężysto-tłumiącymi. Ideę rozwiązania wyjaśniono na przykładzie modelu opisanego równaniem

$$m\ddot{x} + k_1\dot{x} + k_3\dot{x}^3 + c_1x + c_3x^3 = p(t), \tag{2.3}$$

w którym k_1, k_3, c_1, c_3 stałe współczynniki.

Przyjęto, że wymuszenie $p(t)$ i odpowiedź $x(t)$ tego układu są opisane przez dowolne funkcje okresowe o okresie T. Zauważono, że począwszy od dostatecznie długiego czasu t, w którym odpowiedź układu jest niezależna od warunków początkowych, założenie to jest na ogół spełnione w większości układów fizycznych.



Rys. 2.2. Podstawowe założenie metody

Przyjęto więc, że w badanym układzie jest spełniony warunek (2.1) (patrz rys. 2.2). Identyfikowany układ nieliniowy może być również traktowany jako operator przekształcający sygnał wejściowy okresowy $p(t)$ w sygnał wyjściowy $x(t)$ również okresowy, lecz o innej postaci.

Równanie bilansu energii układu (2.3) uzyskuje się po wymnożeniu równania różniczkowego ruchu przez elementarne przemieszczenie $dx = \dot{x}dt$ i scałkowaniu po okresie T [56–58, 61, 62, 83]. Łatwo jest wykazać, że w przypadku drgań okresowych dowolnego kształtu zachodzi

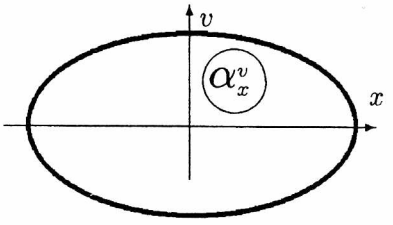
$$\int_0^T m\ddot{x}\dot{x}dt = \int_0^T (c_1x + c_3x^3)\dot{x}dt = 0, \tag{2.4}$$

skąd otrzymuje się równanie bilansu energii w postaci

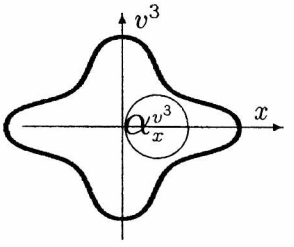
$$k_1 \mathcal{A}_x^v + k_3 \mathcal{A}_x^{v^3} = \mathcal{A}_x^p. \tag{2.5}$$

Symbole $\mathcal{A}$ oznaczają zmienne, których przykłady przedstawiono na rys. 2.3.

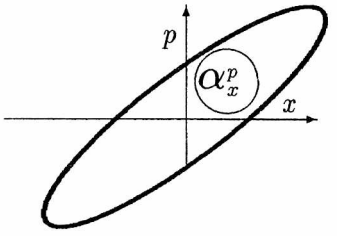
$$\mathcal{A}_x^v = \int_0^T \dot{x}\dot{x}dt = \int_{x(0)}^{x(T)} v dx \quad \Longrightarrow$$



$$\mathcal{A}_x^{v^3} = \int_0^T \dot{x}^3\dot{x}dt = \int_{x(0)}^{x(T)} v^3 dx \quad \Longrightarrow$$



$$\mathcal{A}_x^p = \int_0^T p\dot{x}dt = \int_{x(0)}^{x(T)} p dx \quad \Longrightarrow$$



Rys. 2.3. Przykłady zmiennych występujących w równaniach (2.5)

Nietrudno zauważyć, że z powodu warunku okresowości (patrz rys. 2.2) całki przedstawione na rys. 2.3 powinny być równe zeru, ponieważ $x(0) = x(T)$ oraz $v(0) = v(T)$. Jednakże zależności $v(x)$, $v^3(x)$, $p(x)$ nie przedstawiają zwykłych zależności funkcyjnych, lecz pewne krzywe zamknięte. Zależność $v(x)$ przedstawia portret fazowy, $p(x)$ - dynamiczną pętlę histerezy. Wartości tych całek są równe polom ograniczonym przez odpowiednie krzywe zamknięte (pętle).

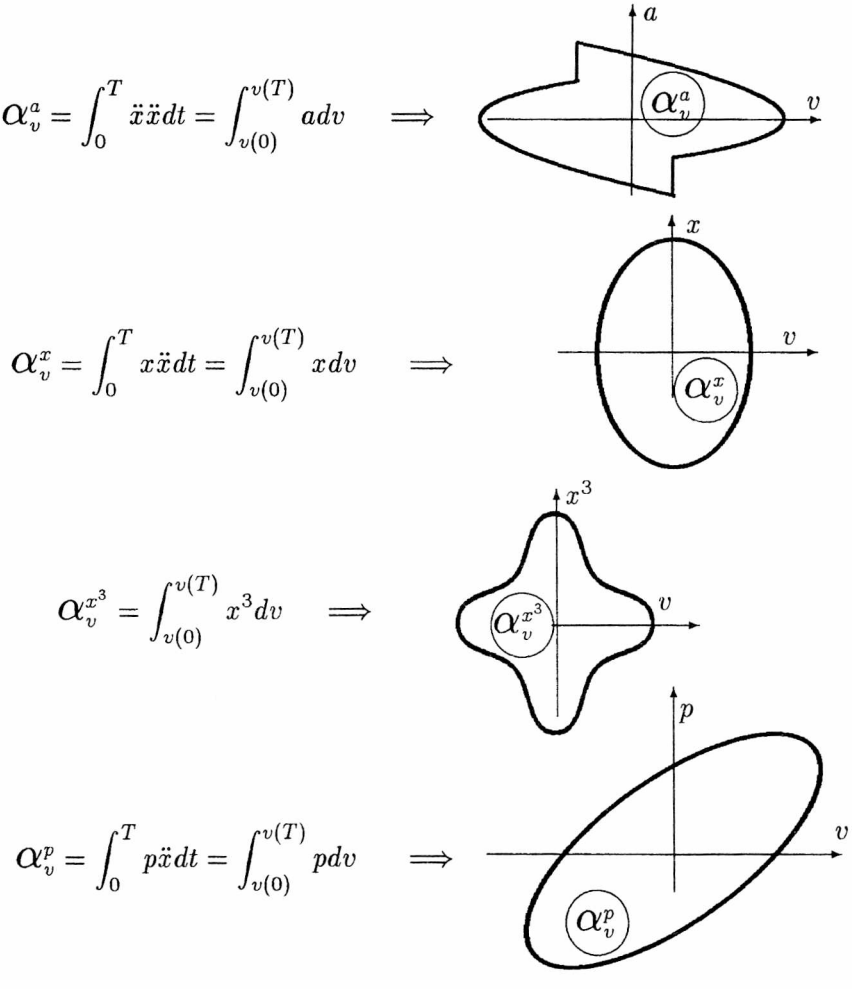
Podobnie, po wymnożeniu równania (2.3) przez $d\dot{x} = \ddot{x}dt$ i scałkowaniu otrzymuje się

$$\int_0^T (k_1\dot{x} + k_3\dot{x}^3)\ddot{x}dt = 0, \tag{2.6}$$

skąd równanie bilansu mocy przyjmuje postać

$$m\alpha_v^a + c_1\alpha_v^x + c_3\alpha_v^{x^3} = \alpha_v^p. \tag{2.7}$$

Przykładowe zmienne α występujące w równaniu (2.7) przedstawiono na rys. 2.4.



Rys. 2.4. Przykładowe zmienne występujące w równaniu (2.7)

Uzyskane równania (2.5) i (2.7) są algebraicznymi równaniami o nieznanych stałych k_1, k_3 oraz m, c_1, c_3. Mogą być użyte do wyznaczenia tych stałych, jeśli wartości zmiennych α_x^v, $\alpha_x^{v^3}$, α_x^p oraz α_v^a, α_v^x, $\alpha_v^{x^3}$, α_v^p uzyskano w drodze eksperymentu w przypadku różnych wymuszeń okresowych $p(t)$.

Zauważono także, że w sensie fizycznym równanie (2.5) przedstawia **bilans energii** dostarczonej do układu (zmienna α_x^p) i straconej (lewa strona równania). W równaniu (2.7) poszczególne składniki oraz prawa strona (α_v^p) ma natomiast **wymiar mocy. Równanie (2.5) nie zależy od stałych funkcji sprężystości i masy, równanie (2.7) zaś – od stałych tłumienia k_1 i k_3. Stąd też równania te będą podstawą konstrukcji odpowiednich algorytmów identyfikacji.**

2.2. Rozwiązanie układu o konfiguracji równoległej

Przedstawioną w punkcie 2.1 ideę postępowania można rozszerzyć na funkcje tłumienia $F_t(\dot{x})$ i sprężystości $F_s(x)$ dowolnej postaci. Przyjęto więc, że funkcje te są opisane przez wyrażenia

$$F_t(\dot{x}) = h \operatorname{sgn} \dot{x} + \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \dot{x}^\nu, \quad F_s(x) = \sum_{\nu=1}^{q} c_\nu x^\nu, \tag{2.8}$$

stała h określa wartość tzw. tarcia suchego, a n, q – to dowolnie duże liczby naturalne. W przypadku funkcji (2.8) równanie różniczkowe ruchu modelu przyjmie postać

$$m\ddot{x} + h \operatorname{sgn} \dot{x} + \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \dot{x}^\nu + \sum_{\nu=1}^{q} c_\nu x^\nu = p(t). \tag{2.9}$$

Przykładową funkcję tłumienia $F_t(\dot{x})$, dla której wykonano badania symulacyjne pokazano na rysunku 2.5. W przypadku układu opisanego równaniem (2.9), przedstawiony sposób daje dwa następujące równania identyfikacyjne

$$h\alpha_x^{S(v)} + \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \alpha_x^{v^\nu} = \alpha_x^p, \tag{2.10}$$

$$m\alpha_v^a + \sum_{\nu=1}^{q} c_\nu \alpha_v^{x^\nu} = \alpha_v^p, \tag{2.11}$$

w których zmienne $\alpha_x^{S(v)}$, $\alpha_x^{v^\nu}$, $\alpha_v^{x^\nu}$ oznaczają

$$\alpha_x^{S(v)} = \int_0^T \operatorname{sgn} \dot{x}\dot{x}dt, \quad \alpha_x^{v^\nu} = \int_0^T \dot{x}^\nu \dot{x}dt, \quad \alpha_v^{x^\nu} = \int_0^T x^\nu \ddot{x}dt, \tag{2.12}$$

a α_v^p, α_x^p, α_v^a są określone wzorami, które podano na rysunkach 2.3 i 2.4. Zauważono, że równania (2.10) i (2.11) – to rozseparowane równania algebraiczne. Z tego

względu są one wygodne do wyznaczenia stałych h, k_ν oraz m, c_ν, ($\nu = 1, 2, \ldots, n$ lub q) w przypadku, gdy wartości odpowiednich zmiennych α pochodzą z pomiaru.

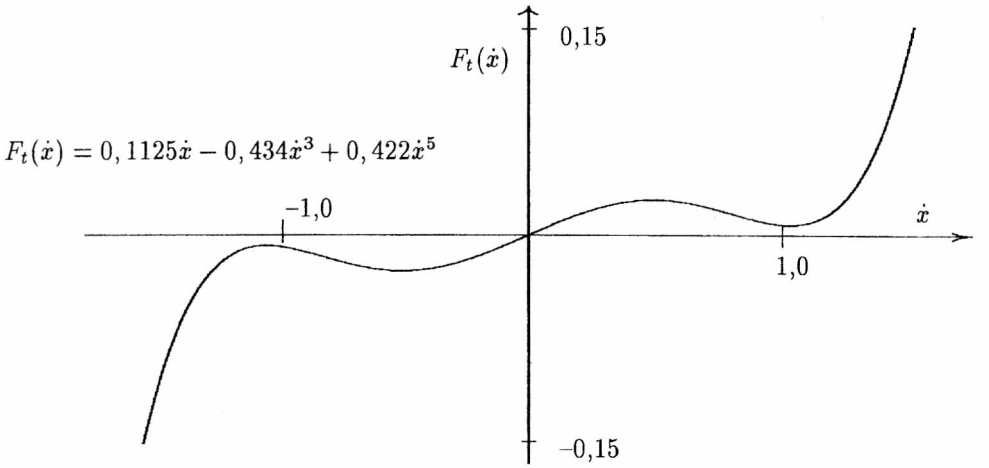
Wielkości α można zmierzyć w prosty sposób, przyjmując, że wartości całek w równaniu (2.7) w przypadku dowolnych drgań okresowych są równe polom ograniczonym przez krzywe zamknięte odpowiednich zależności (patrz rys. 2.4). Przykłady tych zależności dla układów o nieliniowej charakterystyce tłumienia (patrz rys. 2.5) przedstawiono na rysunkach 2.6 i 2.7. Badania wykonano metodą symulacyjną (za pomocą programu TUTSIM [122]), przez zastosowanie wymuszeń harmonicznych. Wyznaczone w symulowanym eksperymencie wartości $\widehat{\alpha}_x^{S(v)}$, $\widehat{\alpha}_x^{v^\nu}$, $\widehat{\alpha}_x^{p}$ oraz $\widehat{\alpha}_v^{p}$, $\widehat{\alpha}_v^{x^\nu}$, $\widehat{\alpha}_v^{p}$ w przypadku różnych wymuszeń okresowych (np. różne wartości częstości wymuszenia bądź różne rodzaje wymuszeń) tworzą dwie macierze obserwacji o następującej postaci

$$\mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} \widehat{\alpha}_x^{S(v)\mathrm{I}} & \widehat{\alpha}_x^{v\mathrm{I}} & \ldots & \widehat{\alpha}_x^{v^n\mathrm{I}} & \widehat{\alpha}_x^{p\mathrm{I}} \\ \widehat{\alpha}_x^{S(v)\mathrm{II}} & \widehat{\alpha}_x^{v\mathrm{II}} & \ldots & \widehat{\alpha}_x^{v^n\mathrm{II}} & \widehat{\alpha}_x^{p\mathrm{II}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \widehat{\alpha}_x^{S(v)\mathcal{N}} & \widehat{\alpha}_x^{v\mathcal{N}} & \ldots & \widehat{\alpha}_x^{v^n\mathcal{N}} & \widehat{\alpha}_x^{p\mathcal{N}} \end{bmatrix},$$

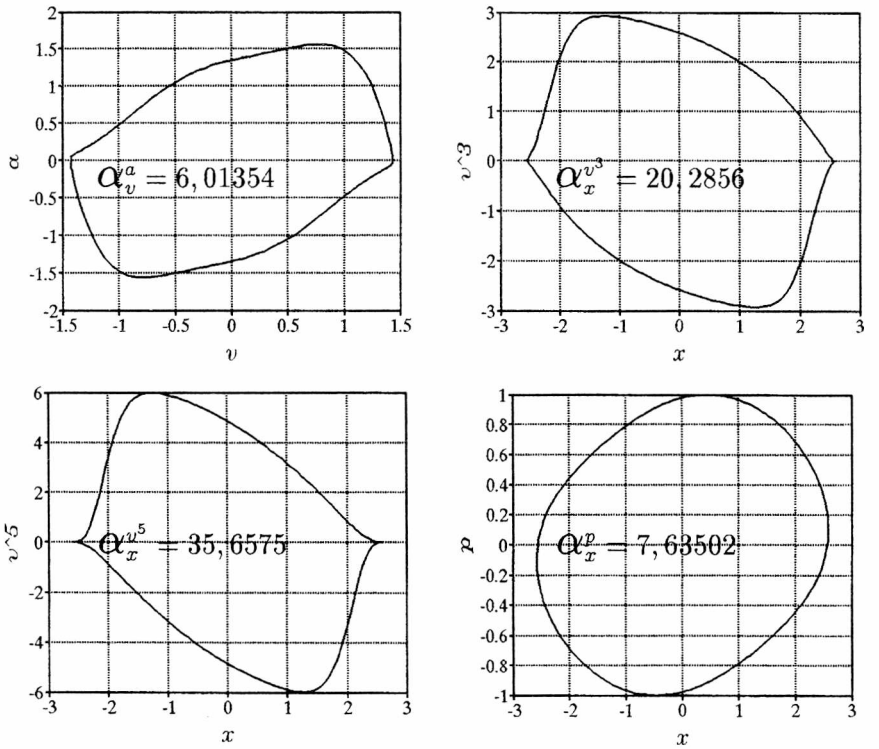
$$\mathbf{A}_v = \begin{bmatrix} \widehat{\alpha}_v^{a\mathrm{I}} & \widehat{\alpha}_v^{x\mathrm{I}} & \ldots & \widehat{\alpha}_v^{x^n\mathrm{I}} & \widehat{\alpha}_v^{p\mathrm{I}} \\ \widehat{\alpha}_v^{p\mathrm{II}} & \widehat{\alpha}_v^{x\mathrm{II}} & \ldots & \widehat{\alpha}_v^{x^n\mathrm{II}} & \widehat{\alpha}_v^{p\mathrm{II}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \widehat{\alpha}_v^{a\mathcal{N}} & \widehat{\alpha}_v^{x\mathcal{N}} & \ldots & \widehat{\alpha}_v^{x^n\mathcal{N}} & \widehat{\alpha}_v^{p\mathcal{N}} \end{bmatrix}, \tag{2.13}$$

gdzie: $\mathcal{N}$ – liczba eksperymentów, równa liczbie wymuszeń, α – odpowiednia zmienna $\widehat{\alpha}$ wyznaczona z pomiaru.

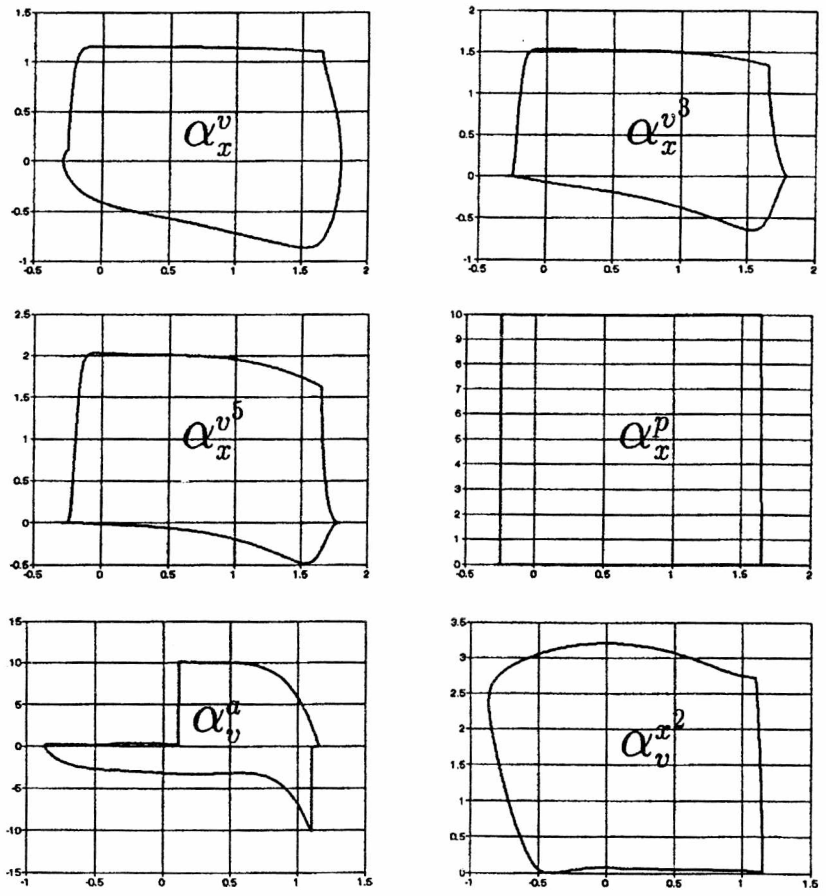
Optymalne wartości parametrów h, k_ν, ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) w przypadku danych macierzy $\mathbf{A}_x$ (oraz wartości parametrów m, c_ν dla danych macierzy $\mathbf{A}_v$) można uzyskać przykładowo metodą najmniejszych kwadratów, oddzielnie do równania (2.10) i do równania (2.11).



Rys. 2.5. Zadana funkcja tłumienia badanego układu

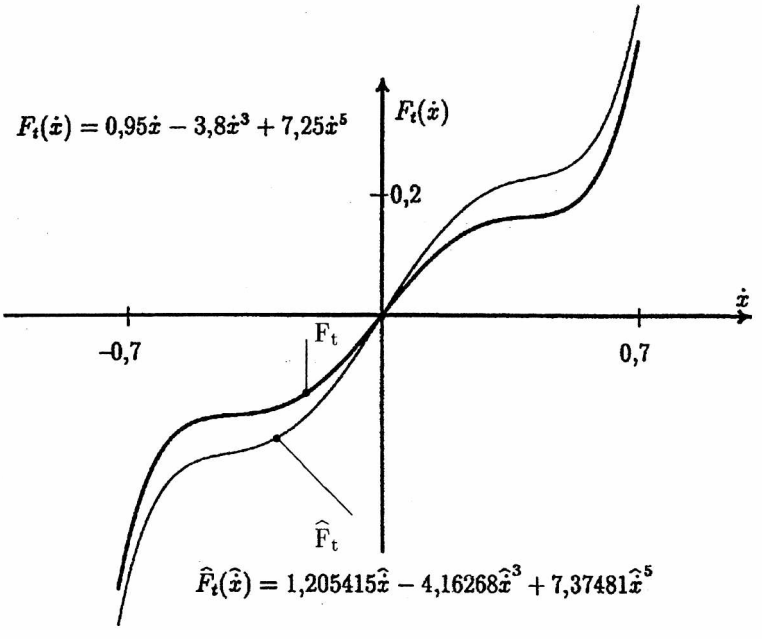


Rys. 2.6. Przykładowe pętle układu nieliniowego o konfiguracji równoległej podczas wymuszeń harmonicznych dla danej funkcji tłumienia z rys. 2.5

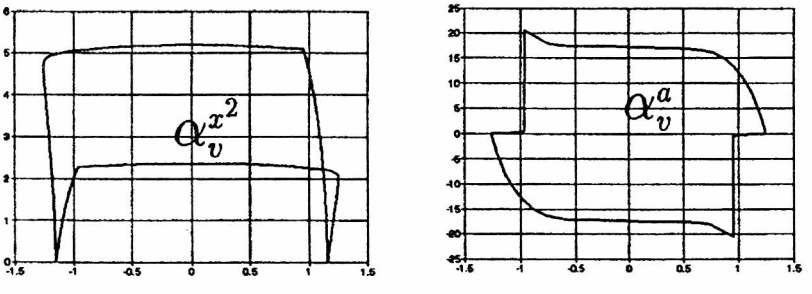


Rys. 2.7. Przykłady pętli uzyskanych eksperymetalnie dla pewnego układu rzeczywistego (podkładka gumowa)

Algorytm ten stanowi podstawę wielowymiarowej analizy regresji (por. np. [39, 87, 116]), której zastosowanie w tym przypadku umożliwia także odpowiednią redukcję zmiennych w równaniach (2.10) i (2.11), a w następstwie odpowiednie uproszczenie modelu wyjściowego (2.9). Przedstawiona metoda jest dość wygodna w zastosowaniach praktycznych. Nie wymaga bowiem stosowania wymuszeń dodatkowych, generujących drgania harmoniczne w układach nieliniowych, a ponadto jest dobra przy wymuszeniach okresowych dowolnej postaci, co zwiększa uniwersalność jej wykorzystania. Przykładowe pętle z badań symulacyjnych pokazano na rys. 2.7 i 2.9.



Rys. 2.8. Wyniki identyfikacji tłumienia metodą bilansu energii układu nieliniowego podczas wymuszeń nieharmonicznych



Rys. 2.9. Przykłady pętli uzyskanych eksperymetalnie przy wymuszeniach „prostokątnych"

Przykładowo wykonano odpowiednie badania symulacyjne na obiekcie silnie nieliniowym, o nieliniowej funkcji restytucyjnej $F_s(x)$ i dyssypacyjnej $F_t(\dot{x})$ w postaci

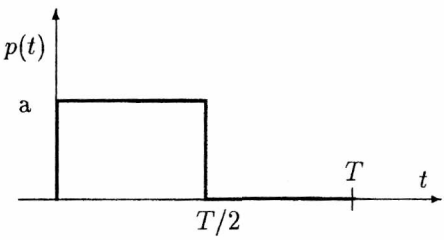
$$F_s(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3,$$

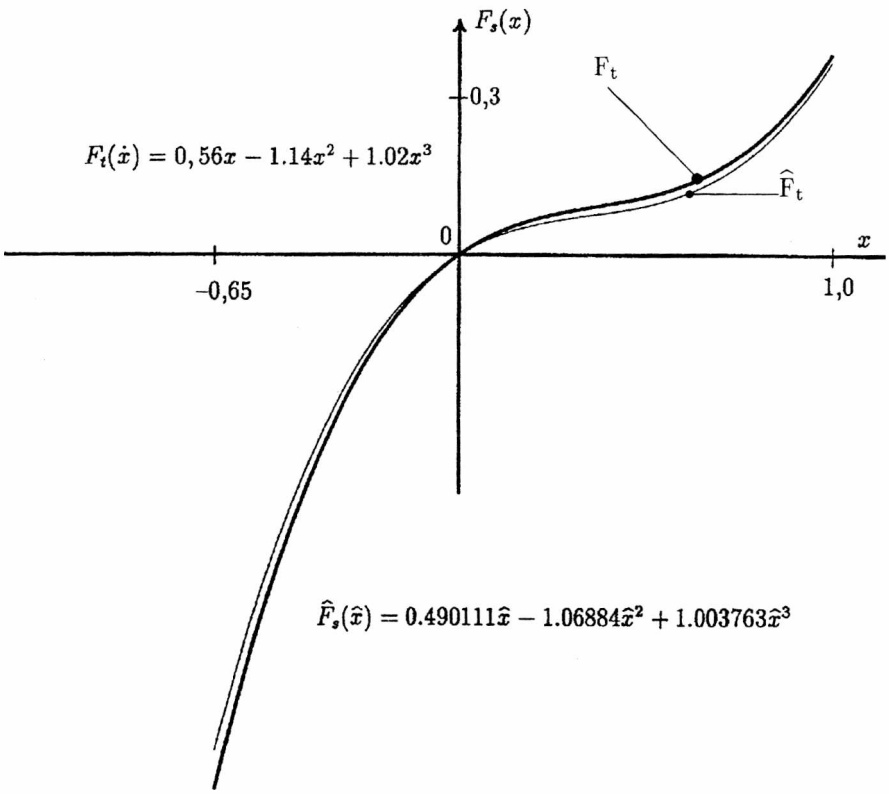
$$F_t(\dot{x}) = k_1 \dot{x} + k_3 \dot{x}^3 + k_5 \dot{x}^5.$$

Wykazano na podstwawie badań, że w przypadku wymuszeń nieharmonicznych, lecz okresowych w postaci symetrycznych lub/i niesymetrycznych impulsów prostokątnych uzyskano również zadawalające wyniki (por. rys. 2.8 i rys. 2.10).

Badania symulacyjne prowadzono między innymi przy wymuszeniach „prostokątnych" niesymetrycznych okresowych o okresie T postaci:

$$p(t) = \begin{cases} a & \text{dla} \quad t \in (0, \frac{T}{2}), \\ 0 & \text{dla} \quad t \in (\frac{T}{2}, T), \end{cases},$$

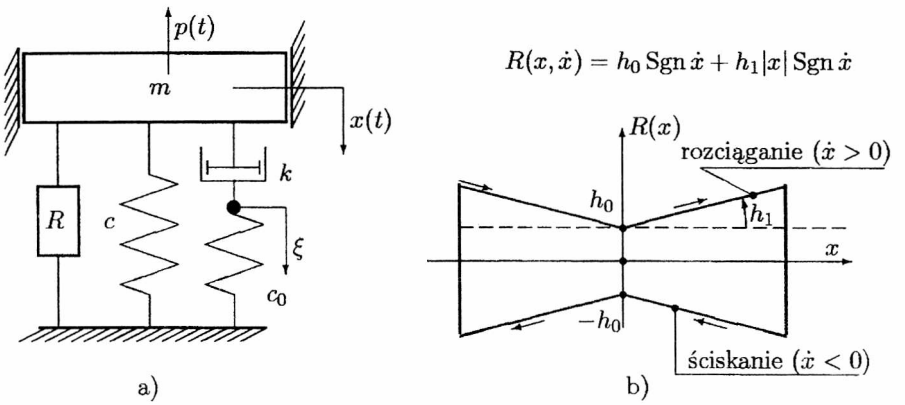




Rys. 2.10. Wyniki identyfikacji funkcji restytucyjnej metodą bilansu mocy układu nieliniowego przy wymuszeniach nieharmonicznych

2.3. Rozwiązanie układu o złożonej konfiguracji z elementem Reida

Przedstawioną metodę w punkcie 2.2 można zastosować także w układach o konfiguracji złożonej (nierównoległej). Jako przykład rozpatrzono układ przedstawiony na rysunku 2.11.



Rys. 2.11. Schemat układu zdegenerowanego z nieliniowym elementem Reida (a) i charakterystyka statyczna elementu R (b)

Układ ten jest szczególnym przypadkiem modelu ogólnego o postaci

$$m\ddot{x} + S(?) = p(t), \tag{2.14}$$

w którym siła $S(?)$ określa wpływ wiskoelastycznego materiału na ruch masy $\widehat{m}$ (rys. 2.12).

Warto przypomnieć, że istnieją dwie podstawowe przyczyny, których analiza przypadku ogólnego jest ważna:

a) dokładne określenie drgań masy $\widehat{m}$ potrzebne np. do optymalizacji lub modyfikacji badanego układu rzeczywistego,

b) dokładne zdefiniowanie funkcji $S(?)$ konieczne do wyznaczenia np. czasu życia wiskoelastycznego materiału lub/i jego zmian zmęczeniowych.

Szczególnie w przypadku b) zmiany energii strat są bardzo istotne i ich prawidłowy matematyczny opis jest bardzo ważny. Dlatego zastosowanie metody bilansu energii w procesie identyfikacji wydaje się właściwą drogą w modelowaniu układów fizycznych tego typu.

W pracy [49] pokazano procedurę identyfikacji układów fizycznych opisanych przez model (2.14), w którym funkcja S ma kształt

$$S = \widetilde{R} + k\dot{x} - \frac{k}{c_0}\left[-m\,\dddot{x} - \frac{d}{dt}\widetilde{R} + \dot{p}\right], \tag{2.15}$$

gdzie: k, c_0, m – pewne rzeczywiste stałe dodatnie, $p(t)$ – człon wymuszający, $\widetilde{R}$ – nieliniowa funkcja wiskoelastyczna przemieszczenia x i prędkości $\dot{x}$ o postaci

$$\widetilde{R} = cx + (h_0 + h_1|x|)\,\mathrm{sgn}\,\dot{x} = cx + R(x, \dot{x}), \tag{2.16}$$

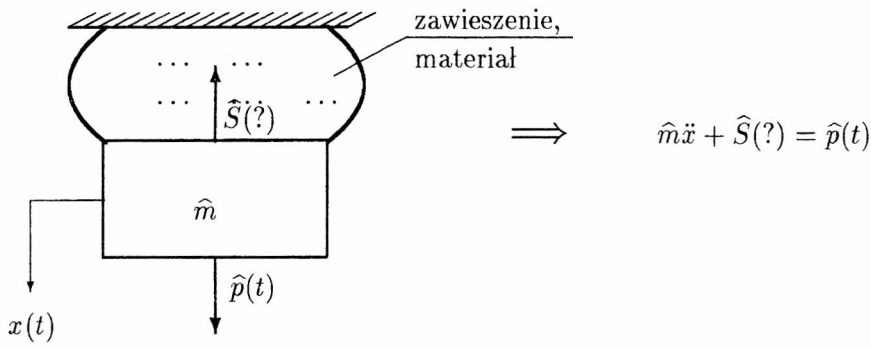
gdzie c, h_0, h_1 – stałe rzeczywiste.

Możemy zauważyć, że dla $h_0 = 0$ jest

$$widetildeR(x, \dot{x}, h_0 = 0) = cx + h_1|x|\,\mathrm{sgn}\,\dot{x} = c(x + g|x|\,\mathrm{sgn}\,\dot{x}), \tag{2.17}$$

gdzie $g = h_1/c$.

Funkcja (2.17) przedstawia tzw. sprężynę Reida, która w dziedzinie problemów flatterowych jest używana do opisu strat energii w materiałach konstrukcyjnych [18].



Rys. 2.12. Schemat typowego układu fizycznego

Nietrudno zauważyć, że równanie (2.14), w którym S jest postaci (2.15) opisuje ruch układu pokazanego na rys. 2.11. W dodatku dla $h_0 = h_1 = 0$ układ staje się liniowy, a jego konfiguracja odpowiada układowi o 1,5 stopnia swobody (konfiguracja uniwersalna). Wiadomo, że zmienna ξ (por. z rys. 2.11) nie może być mierzona, więc z tego powodu problem identyfikacji jest złożony.

Odpowiednią procedurę identyfikacji, w której musi być stosowane dodatkowe wymuszenie nieharmoniczne w celu uzyskania czysto harmonicznej odpowiedzi pokazano w pracy [49]. W niniejszej pracy przedstawiono natomiast inny sposób

identyfikacji, który może być używany alternatywnie. Zakłada się jednocześnie, że dla okresowego wymuszenia $\widehat{p}(t)$ odpowiedź $\widehat{x}(t)$ układu fizycznego jest także okresowa. Równanie bilansu energii zdefiniowano następująco

$$\int_0^T S\dot{x}dt = \int_0^T p\dot{x}dt, \tag{2.18}$$

w przypadku drgań okresowych dowolnego kształtu i siły S o postaci (2.15) przyjmuje postać

$$c\int_0^T x\dot{x}dt + h_1\int_0^T |x|(\operatorname{sgn}\dot{x})\dot{x}dt + h_0\int_0^T (\operatorname{sgn}\dot{x})\dot{x}dt + k\int_0^T \dot{x}^2dt$$

$$-\frac{k}{c_0}\left[-m\int_0^T \ddot{x}\,\dot{x}dt - \int_0^T \frac{d}{dt}\left[\widetilde{R}(x,\dot{x})\right]\dot{x}dt + \int_0^T \dot{p}\dot{x}dt\right] = \int_0^T p\dot{x}dt. \tag{2.19}$$

Zauważano, że dla czysto harmonicznych drgań, które mogą być uzyskiwane w następstwie pewnych nieharmonicznych wymuszeń, na podstawie (2.19) otrzymano zależność

$$-(c_0+c) + m\omega^2 + \frac{c_0}{k}\left[\frac{\int_0^T p\dot{x}dt - 8h_0X - 8h_1X^2}{4\pi\omega X^2}\right] = \frac{\int_0^T p\ddot{x}dt}{4\pi\omega X^2}, \tag{2.20}$$

w której ω, X – stałe odpowiedzi harmonicznej $x(t) = 2X\cos(\omega t + \alpha)$.

Jeśli stałe c_0, h_0, h_1 są znane z eksperymentu statycznego, to równanie (2.20) umożliwia określenie stałych

$$b_0 = -(c_0+c), \quad b_1 = m, \quad b_2 = \frac{c_0}{k}. \tag{2.21}$$

Wtedy zmienne

$$y_1 = \omega^2, \quad y_2 = \frac{\int_0^T p\dot{x}dt - 8h_0X - 8h_1X^2}{4\pi\omega X^2}, \quad z = \frac{\int_0^T p\ddot{x}dt}{4\pi\omega X^2} \tag{2.22}$$

muszą być mierzalne. W przypadku nieharmonicznych (ale okresowych!) drgań człony całkowe w równaniu (2.19) przyjmują natomiast postać

$$\int_0^T x\dot{x}dt = 0, \tag{2.23}$$

$$\int_0^T (\operatorname{sgn}\dot{x})\dot{x}dt = \int_{x(0)}^{x(T)} (\operatorname{sgn} v)dx = \alpha_x^{S(v)}, \tag{2.24}$$

$$\int_0^T |x|(\operatorname{sgn}\dot{x})\dot{x}dt = \int_{x(0)}^{x(T)} |x|(\operatorname{sgn} v)dx = \alpha_x^{|x|S(v)}, \tag{2.25}$$

$$\int_0^T \dot{x}^2 dt = \int_{x(0)}^{x(T)} v dx = \alpha_x^v, \tag{2.26}$$

$$\int_0^T \dddot{x}\,\dot{x}dt = -\int_{v(0)}^{v(T)} a dv = -\alpha_v^a, \tag{2.27}$$

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\widetilde{R}(x,\dot{x})\dot{x}dt = -\int_{v(0)}^{v(T)} \widetilde{R}(x,v)dv = -\alpha_v^{\widetilde{R}}, \tag{2.28}$$

$$\int_0^T \dot{p}\dot{x}dt = -\int_0^T p\ddot{x}dt = -\int_{v(0)}^{v(T)} p dv = -\alpha_v^p, \tag{2.29}$$

$$\int_0^T p\dot{x}dt = \int_{x(0)}^{x(T)} p dx = \alpha_x^p, \tag{2.30}$$

gdzie $S(v) \equiv \operatorname{sgn} v$.

Na podstawie (2.28) i (2.16) zmienną $\alpha_v^{\widetilde{R}}$ można rozpisać jako

$$\begin{aligned} \alpha_v^{\widetilde{R}} &= \textstyle\int_0^T \widetilde{R}(x,\dot{x})\ddot{x}dt = c\int_0^T x\ddot{x}dt + h_1\int_0^T |x|(\operatorname{sgn}\dot{x})\ddot{x}dt \\ &+ h_0\textstyle\int_0^T (\operatorname{sgn}\dot{x})\ddot{x}dt = -c\alpha_x^v + h_1\alpha_v^{|x|S(v)}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Po uwzględnieniu związków (2.23)÷(2.30) oraz (2.31), ze wzoru (2.19) otrzymano

$$h_0\alpha_x^{S(v)} + h_1\alpha_x^{|x|S(v)} + k\alpha_x^v - \frac{k}{c_0}\left[m\alpha_v^a - c\alpha_x^v + h_1\alpha_v^{|x|S(v)} - \alpha_v^p\right] = \alpha_x^p,$$

co po uporządkowaniu równanie można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} &-(c_0+c)\alpha_x^v + m\alpha_v^a + \frac{c_0}{k}\left[\alpha_x^p - h_0\alpha_x^{S(v)} - h_1\alpha_x^{|x|S(v)}\right] \\ &= \alpha_x^p - h_1\alpha_v^{|x|S(v)} \end{aligned} \tag{2.32}$$

lub

$$b_0 + b_1y_1 + b_2y_2 = z, \tag{2.33}$$

gdzie b_0, b_1, b_2 – określone wzorami (2.21), a zmienne y_1, y_2, z – zdefiniowane zależnościami

$$y_1 = \frac{\alpha_v^a}{\alpha_x^v}, \quad y_2 = \frac{\alpha_x^p - h_0\alpha_x^{S(v)} - h_1\alpha_x^{|x|S(v)}}{\alpha_x^v}, \quad z = \frac{\alpha_v^p - h_1\alpha_v^{|x|S(v)}}{\alpha_x^v}. \tag{2.34}$$

Można zauważyć, że w przypadku czysto harmonicznych drgań, zmienne (2.34) przyjmują postać (2.22). Równanie (2.20) jest więc szczególnym przypadkiem równania (2.32) **będącego równaniem bilansu energii dla dowolnych (okresowych) wymuszeń dynamicznych.**

Przeanalizowany model Reida nie w pełni uwzględnia wszystkie zjawiska rozpraszania energii. Przykładowo, w połączeniach elementów maszyn tarcie konstrukcyjne zależy także od historii obciążeń, co wymagałoby dodatkowej komplikacji modelu, np. przez wprowadzenie stałych h_0, h_1 zależnych od czasu [96]. W większości jednak przypadków zmiany $h_0(t), h_1(t)$ są na tyle powolne, że nie wpływają na szybkie ruchy drgające, które stosuje się w proponowanym tutaj procesie identyfikacji.

2.4. Przykłady rozwiązań w układach o wielu stopniach swobody

W złożonych układach dynamicznych, takich jak maszyny robocze, żurawie, pojazdy samochodowe itp. można wyróżnić pewne podatne elementy, które absorbują energię wymuszeń typu impulsowego (uderzeń). Elementy te (zwane w pracy elementami sprężysto-tłumiącymi) są łatwo deformowalne, ich zaś charakterystyki w znacznym stopniu określają dynamiczne zachowanie się całej maszyny (np. zawieszenia samochodu). Dlatego właściwa identyfikacja dynamicznych charakterystyk takich elementów staje się niezmiernie ważna. Jednakże obserwacja zmian takich charakterystyk podczas eksploatacji maszyny może wnosić również wiele wartościowych informacji, na podstawie których można wyznaczyć czas życia lub/i konieczność napraw i wymiany określonych elementów maszyny. Stąd potrzeba opracowania różnych metod badawczych opartych na tzw. passywnym eksperymencie, w których to metodach stosowanie wybranych wymuszeń nie jest możliwe (np. wymuszeń czysto harmonicznych).

Założono więc, że badany element sprężysto-tłumiący maszyny (układu technicznego) działa w układzie realnie istniejących tłumików i sprężyn o charakterystykach liniowych oraz masach $\widehat{m}_1$ i $\widehat{m}_2$, jak w konfiguracji na rysunku 2.13 [59].

Przyjęty model jest układem dyskretnym o dwu stopniach swobody, którego ruch opisują funkcje $\xi(t)$ i $x(t)$. Funkcja $x(t)$ opisuje jednocześnie ruch masy m_2

oraz odkształcenie badanego elementu sprężysto-tłumiącego, podczas gdy funkcja $\xi(t)$ – ruch masy m_1. Przyjęto, że wyrażeniem

$$F(x, \dot{x}) = c_0 x + c_3 x^3 + k_0 \dot{x} + k_3 \dot{x}^3 \tag{2.35}$$

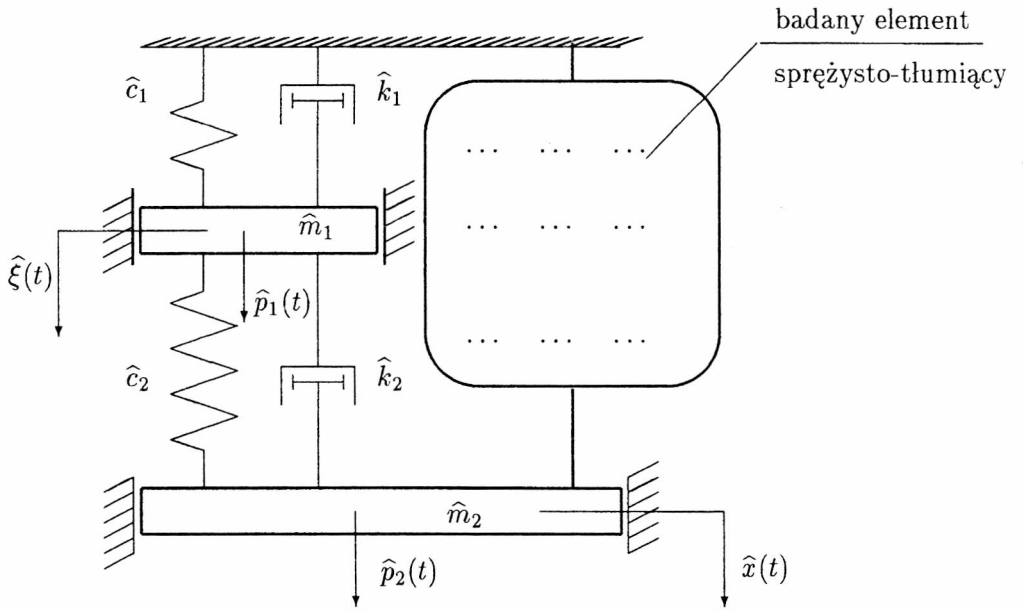
można dostatecznie dokładnie opisać siłę oddziaływania elementu sprężysto-tłumiącego na masę m_2. Zgodnie z zasadą równowagi sił (patrz rys. 2.14) równania różniczkowe ruchu opisujące układ są następujące

$$m_1 \ddot{\xi} + k_1 \dot{\xi} - k_2(\dot{x} - \dot{\xi}) + c_1 \xi - c_2(x - \xi) = p_1(t), \tag{2.36}$$

$$m_2 \ddot{x} + F_t(\dot{x}) + F_s(x) + k_2(\dot{x} - \dot{\xi}) + c_2(x - \xi) = p_2(t), \tag{2.37}$$

w których przez $F_t(\dot{x})$ i $F_s(x)$ oznaczono funkcje tłumienia i sprężystości, aproksymowane zgodnie z (2.35) nieliniowymi wyrażeniami w postaci

$$F_t(\dot{x}) = k_0 \dot{x} + k_3 \dot{x}^3, \quad F_s(x) = c_0 x + c_3 x^3. \tag{2.38}$$



Rys. 2.13. Schemat rozpatrywanego układu fizycznego

Zgodnie z koncepcją równań bilansu energii przyjmuje się, że na układ działają wymuszenia okresowe o dowolnej postaci i że wymuszenia te realizują odpowiedź również periodyczną. Dokładniej, że T_1 jest okresem wymuszenia $p_1(t)$, T_2 zaś okresem wymuszenia $p_2(t)$, okres odpowiedzi T może różnić się od T_1 i T_2, jednak musi zachodzić

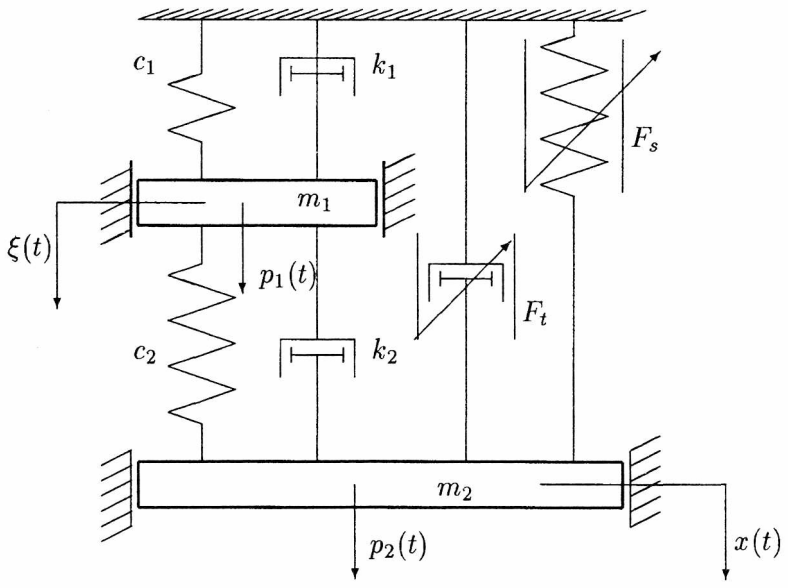
$$x(t) = x(t+T) \quad \text{oraz} \quad \xi(t) = \xi(t+T)$$

$$\text{jeśli} \quad p_1(t) = p_1(t+T) \quad \text{i} \quad p_2(t) = p_2(t+T) \tag{2.39}$$

przy czym T jest wspólną wielokrotnością T_1, T_2,

$$T = n_1 T_1 = n_2 T_2, \tag{2.40}$$

gdzie n_1, n_2 – liczby naturalne, t – czas. Zauważno, że założenie o badanym układzie postaci (2.39), (2.40) jest założeniem dość słabym i na ogół zawsze spełnionym przez układy fizyczne po dostatecznie dużym okresie od momentu startu działania ustalonych wymuszeń p_1, p_2.



Rys. 2.14. Model strukturalny układu o dwóch stopniach swobody

Po scałkowaniu równania (2.36) (w skończonym przedziale czasu T), po kolejnym wymnożeniu najpierw przez $\dot{\xi}dt$ oraz $\dot{x}dt$ otrzymano dwa równania algebraiczne postaci

$$(k_1 + k_2)\mathcal{A}_{\xi}^{\dot{\xi}} - k_2\mathcal{A}_{\xi}^{\dot{x}} - c_2\mathcal{A}_{\xi}^{x} = \mathcal{A}_{\xi}^{p_1}, \tag{2.41}$$

$$m_1\mathcal{A}_{x}^{\ddot{\xi}} + (k_1 + k_2)\mathcal{A}_{x}^{\dot{\xi}} + (c_1 + c_2)\mathcal{A}_{x}^{\xi} - k_2\mathcal{A}_{x}^{\dot{x}} = \mathcal{A}_{x}^{p_1}, \tag{2.42}$$

gdzie symbole $\mathcal{A}_{y}^{z}$ ($y \equiv x$ lub ξ, $z \equiv x, \dot{x}, p_1, \xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}$) oznaczają pola ograniczone przez pętle zależnością $z(y)$, uzyskane po wyrugowaniu czasu t z funkcji $z = z(t)$ i $y = y(t)$. Jeśli zmienne $\mathcal{A}_{y}^{z}$ są mierzalne, to zależności (2.41), (2.42) mogą być wykorzystane do oszacowania stałych współczynników tych równań, czyli

$(k_1 + k_2), k_2, c_2$ – z równania (2.41),

$m_1, (k_1 + k_2), (c_1 + c_2)$, k_2 – z równania (2.42).

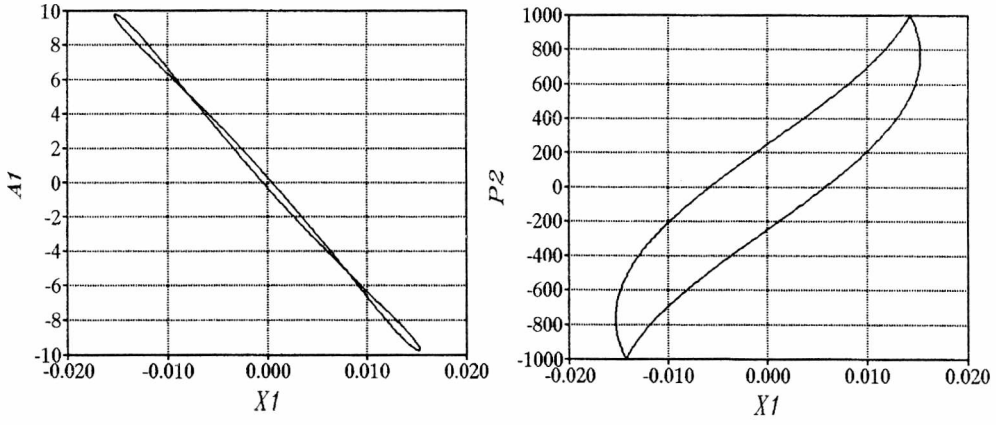
Podobne obliczenia wykonane dla równania (2.37), po uwzględnieniu postaci (2.38), otrzymuje się

$$m_2\mathcal{A}_{\xi}^{\ddot{x}} + (k_0 + k_2)\mathcal{A}_{\xi}^{\dot{x}} + k_3\mathcal{A}_{\xi}^{\dot{x}^3} + (c_0 + c_2)\mathcal{A}_{\xi}^{x} - c_3\mathcal{A}_{\xi}^{x^3} - k_2\mathcal{A}_{\xi}^{\dot{\xi}} = \mathcal{A}_{\xi}^{p_2} \tag{2.43}$$

oraz

$$(k_0 + k_2)\mathcal{A}_{x}^{\dot{x}} + k_3\mathcal{A}_{x}^{\dot{x}^3} - k_2\mathcal{A}_{x}^{\dot{\xi}} - c_2\mathcal{A}_{x}^{\xi} = \mathcal{A}_{x}^{p_2}. \tag{2.44}$$

Zależności (2.43) i (2.44) wystarczają do wyznaczenia pozostałych parametrów (k_0, k_3, m_2, c_0, c_3) badanego układu, a więc nieznanych funkcji $F_s(x)$ i $F_t(\dot{x})$ badanego elementu sprężysto-tłumiącego.



Rys. 2.15. Przykładowe pętle histerezy badanego układu ($X1 = \xi$, $A1 = \ddot{\xi}$, $P2 = p_2$)

Badania symulacyjne przeprowadzono za pomocą bloków operacyjnych systemu TUTSIM według równań (2.36), (2.37), przyjęto zaś następujące dane liczbowe:

- stałe sprężystości

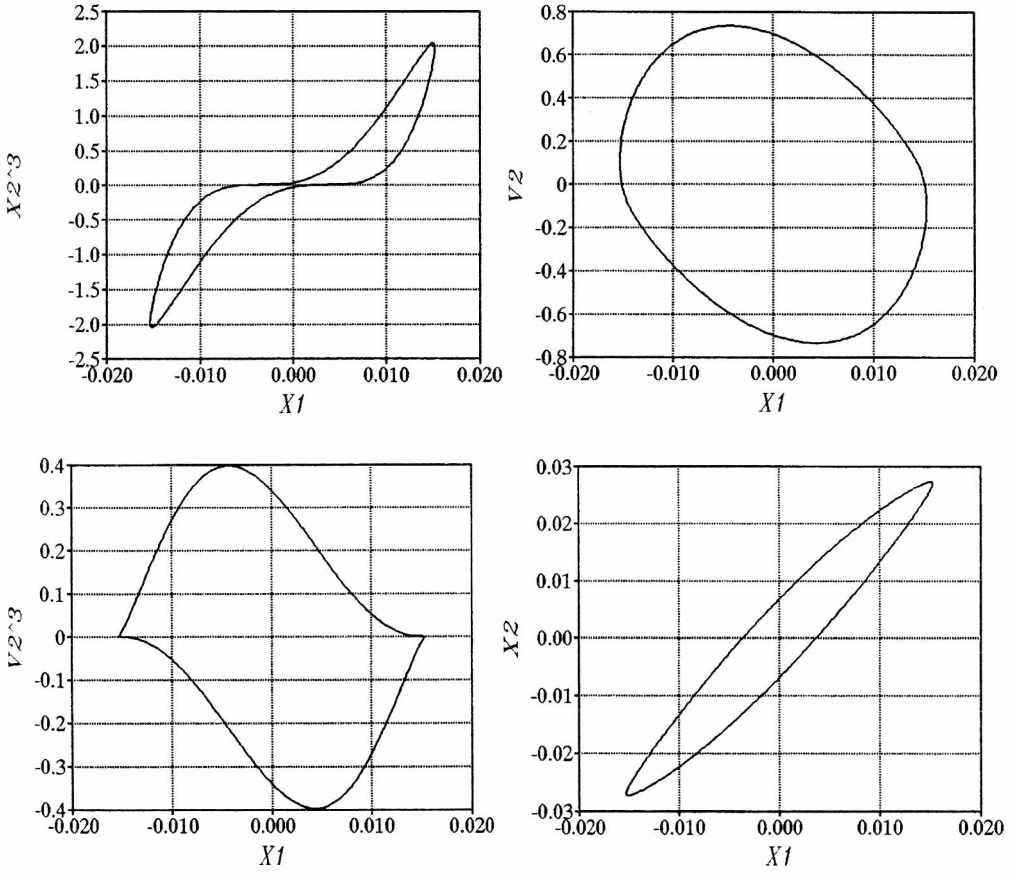
$$c_0 = 50000 \text{ kg/s}^2, \quad c_1 = 20000 \text{ kg/s}^2,$$
$$c_2 = 10000 \text{ kg/s}^2, \quad c_3 = 15000 \text{ kg/(s}^2 \cdot \text{m}^2), \tag{2.45}$$

- stałe tłumienia

$$k_0 = 100 \text{ kg/s}, \quad k_1 = 200 \text{ kg/s},$$
$$k_2 = 50 \text{ kg/s}, \quad k_3 = 20 \text{ (kg} \cdot \text{s)/m}^2, \tag{2.46}$$

- masy

$$m_1 = 20 \text{ kg}, \quad m_2 = 40 \text{ kg}. \tag{2.47}$$



Rys. 2.16. Przykładowe pętle badanego układu
($X1 = \xi$, $V1 = \dot{\xi}$, $A1 = \ddot{\xi}$, $X2 = x$, $V2 = \dot{x}$, $A2 = \ddot{x}$,)

Badania układu prowadzono dla wymuszeń czysto sinusoidalnych $p_1(t)$ i $p_2(t)$, przy czym zmieniano tak częstość wymuszenia, aby okres T był zawarty w przedziale $T \in (0,104\ \mathrm{s},\ 0,280\ \mathrm{s})$. W zakresie tym wybrano 24 wartości okresu. Wartości pól α_y^z odpowiednich pętli liczono automatycznie za pomocą programu IUDRBE [6]. Po wstawieniu tych wartości do równań (2.41), (2.42), (2.43), (2.44) uzyskano cztery układy algebraiczne równań liniowych (po 24 równań w każdym układzie), które niezależnie rozwiązywano metodą analizy regresji [39, 87, 116]. Następnie z wartości występujących kilkakrotnie (np. k_2 i c_2) wyznaczono wartość średnią. Przykładowe pętle histerezy (dla $p_1(t) = 0$ i $p_2(t)$ – wymuszenie harmoniczne) pokazano na rysunkach 2.15 i 2.16. Wyniki wyznaczonych wartości parametrów układu przedstawiono w tabeli 2.1, przy czym osobno podano wartości dla następujących zestawów wymuszeń:

- [zestaw I]: $p_1(t)$ i $p_2(t)$ – harmoniczne przesunięte w fazie względem siebie o 90°,
- [zestaw II]: $p_1(t)$ – harmoniczne, $p_2(t) = 0$ lub/i $p_1(t) = 0$, $p_2(t)$ – harmoniczne.

Tabela 2.1. Wyniki weryfikacji doświadczalnej dla wymuszeń harmonicznych

Parametr	Wartości parametrów				
	Zadane	Zestaw I		Zestaw II	
		obliczone	błąd [%]	obliczone	błąd [%]
m_1, kg	20,0	19,9993	0,0035	19,9991	0,0045
m_2, kg	40,0	40,0001	0,0003	39,9991	0,0045
k_2, kg/s	50,0	49,8813	0,2374	50,2623	0,5246
k_1, kg/s	200,0	200,315	0,1575	199,796	0,102
k_0, kg/s	100,0	98,9468	1,0532	99,8692	0,1308
k_3, (kg·s)/m^2	20,0	20,1234	0,617	19,9877	0,0615
c_2, kg/s^2	10000	10014,1	0,141	10005,8	0,058
c_1, kg/s^2	20000	19986,6	0,067	19993,9	0,0305
c_0, kg/s^2	50000	49986,0	0,028	50009,4	0,0188
c_3, kg/(s^2·m^2)	15000	14999,2	0,0053	15419,2	2,7947

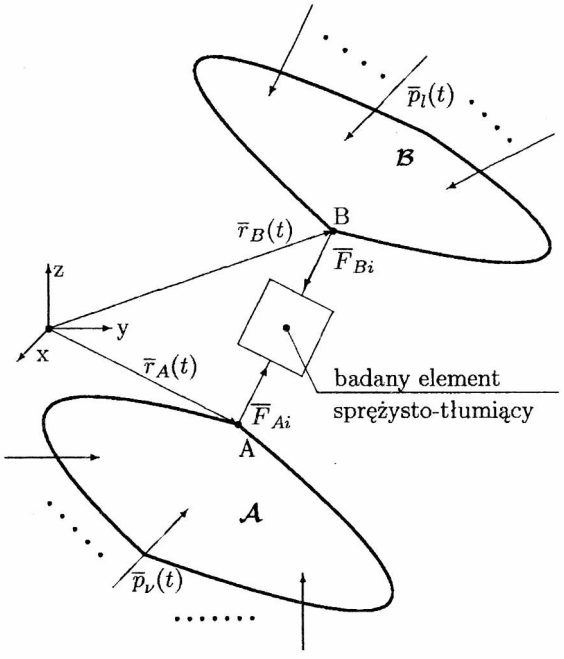
W wyniku symulacji stwierdzono, że przedstawiona metoda funkcjonuje poprawnie w przypadku wymuszeń harmonicznych bez względu na to, do której masy (m_1 i m_2) wymuszenia te są przykładane. Największą różnicę wyniku stwierdzono w ocenie parametru c_3 oraz k_0. Błędy te jednak nie przekraczają 3% (patrz tabela 2.1 pomiarów). Z badań wynika, że technika i oprogramowanie procedury eksperymentalnej jest w pełni realizowalne technicznie i łatwe do wykonania.

Należy również podkreślić, że opracowana metoda identyfikacji nie wymaga specjalnie sterowanych wymuszeń, które znacznie komplikują eksperyment.

Przyjdźmy teraz do opisu rozwiązania identyfikacji dowolnego elementu sprężysto-tłumiącego w układzie wielomasowym o strukturze kaskadowej [6, 73].

Element sprężysto-tłumiący w złożonym układzie wielomasowym łączy pewien wielomasowy podukład $\mathcal{A}$ z innym (na ogół również wielomasowym) układem $\mathcal{B}$ (por. rys. 2.17). Jeśli przyjąć, że inercja tego elementu jest mała, to wektory oddziaływania $\overline{F}$ tego elementu na obydwa podukłady spełniają warunek w każdej chwili t

$$\overline{F}_A(t) = -\overline{F}_B(t). \tag{2.48}$$



Rys. 2.17. Funkcjonowanie elementu sprężysto-tłumiącego w złożonym (trójwymiarowym) układzie wielomasowym (rysunek poglądowy)

Jeśli wektory aktywnych wymuszeń $\overline{p}_\nu(t)$ i $\overline{p}_l(t)$, działające na obydwa podukłady $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są niekontrolowane (a jedynie biernie obserwowalne), parametry zaś elementu sprężysto-tłumiącego (sztywność, zdolność rozpraszania energii) nieznane, to wyznaczenie funkcji $\overline{F}(t)$ (dla znanych wektorów $\overline{r}_A(t)$ i $\overline{r}_B(t)$, opisujących ruch punktów A i B), jest trudne do wykonania.

Rozpatrzono przypadek układu wielomasowego w przestrzeni jednowymiarowej o strukturze kaskadowej którego schemat pokazano na rysunku 2.18 (tzw. chain-like system [67]). Dla przyjętych współrzędnych uogólnionych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, które opisują wzajemne przemieszczenia sąsiednich mas skupionych $m_1, m_2, \ldots, m_n$, równania różniczkowe ruchu mają postać

$$\begin{aligned}
&m_1 a_1 + F_1(x_1, \dot{x}_1) = p_1, \\
&m_2 a_2 + F_2(x_2, \dot{x}_2) = p_2 + F_1(x_1, \dot{x}_1), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&m_i a_i + F_i(x_i, \dot{x}_i) = p_i + F_{i-1}(x_{i-1}, \dot{x}_{i-1}), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&m_n a_n + F_n(x_n, \dot{x}_n) = p_n + F_{n-1}(x_{n-1}, \dot{x}_{n-1}).
\end{aligned} \tag{2.49}$$

W równaniach (2.49) przyspieszenie a_i dowolnej (i-tej) masy m_i wyraża się przez współrzędne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ w sposób następujący

$$a_i = \ddot{x}_n + \ddot{x}_{n-1} + \cdots + \ddot{x}_i = \sum_{\nu=i}^{n} \ddot{x}_\nu, \tag{2.50}$$

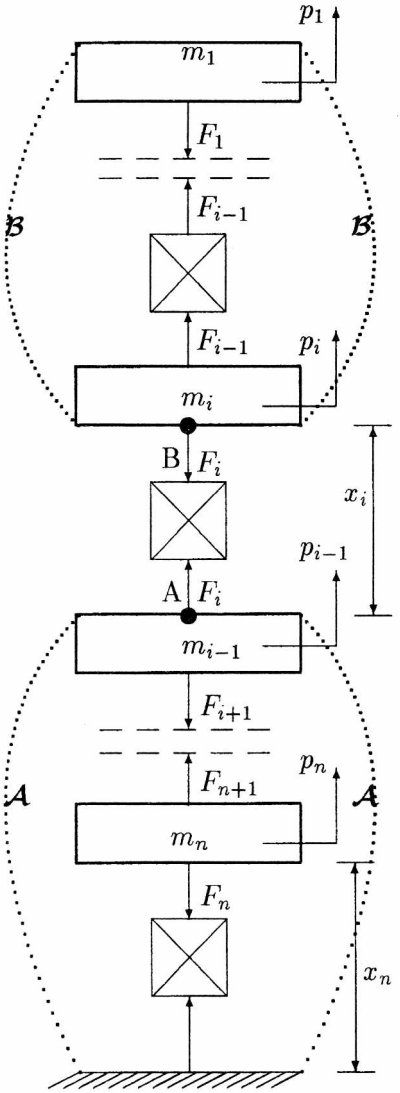
siły zaś $F_1, \ldots, F_n$ są nieznanymi, dowolnie nieliniowymi funkcjami zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ bądź ich pochodnych.

Siły te opisują właściwości sprężyste i dyssypatywne elementów sprężysto-tłumiących. Każdą taką siłę można wyrazić za pomocą niezależnych sił aktywnych $p_\nu(t)$ oraz (również niezależnych) przyspieszeń $a_\nu(t)$, odpowiednich mas m_i.

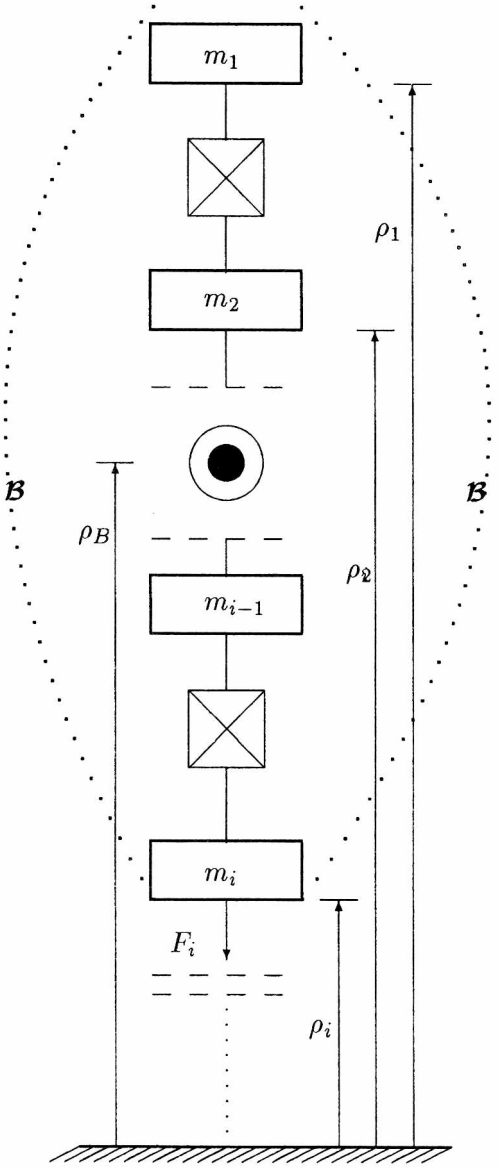
Na podstawie układu równań (2.49) mamy

$$\begin{aligned}
F_1 &= p_1 - m_1 a_1, \\
F_2 &= p_2 - m_2 a_2 + F_1 \\
&= p_1 + p_2 - (m_1 a_1 + m_2 a_2), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
F_i &= p_i - m_i a_i + F_{i-1} \\
&= \sum_{\nu=1}^{i} p_\nu + \sum_{\nu=1}^{i} (-m_\nu a_\nu).
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Pierwszy składnik wymuszenia (2.51) jest w sensie fizycznym wypadkową wszystkich sił aktywnych działających na podukład wielomasowy $\boldsymbol{B}$, drugi składnik zaś jest wypadkową wszystkich sił bezwładności tego podukładu



Rys. 2.18. Układ wielomasowy o strukturze kaskadowej



Rys. 2.19. Ruch środka masy części odciętej (podukład $\mathcal{B}$) określa siłę F_i i-tego elementu sprężysto-tłumiącego

$$\sum_{\nu=1}^{i}(-m_\nu a_\nu) = b_i, \quad \sum_{\nu=1}^{i} p_\nu = w_i. \tag{2.52}$$

Posługując się definicją środka masy podukładu $\boldsymbol{B}$ (o całkowitej masie m_B), mamy spełnione równanie

$$m_B \rho_B = \sum_{\nu=1}^{i} m_\nu \rho_\nu, \tag{2.53}$$

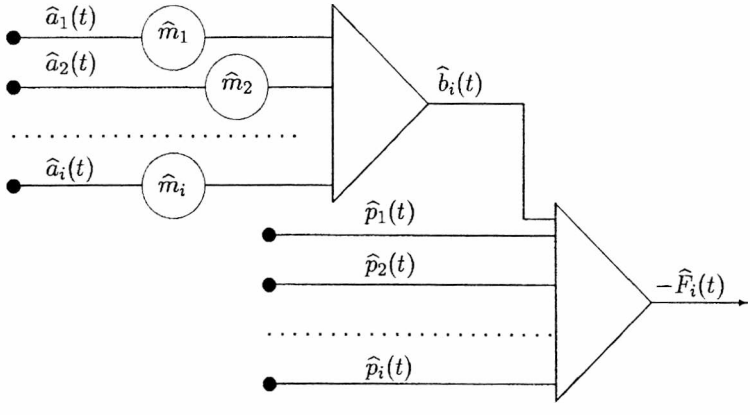
gdzie $m_B = \sum_{\nu=1}^{i} m_\nu$, zaś ρ_ν oznacza położenie ν-tej masy m_ν względem inercjalnego układu odniesienia (por. rys. 2.19). Po różniczkowaniu dwukrotnym równania (2.53) otrzymano

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_B \rho_B) = \frac{d^2}{dt^2}\sum_{\nu=1}^{i} m_\nu \rho_\nu$$

skąd

$$m_B a_B = \sum_{\nu=1}^{i} m_\nu a_\nu = -b_i. \tag{2.54}$$

Powyższe rozważania uzasadniają pewną procedurę eksperymentalnego wyznaczania przebiegu czasowego funkcji $\widehat{F}_i$ w sposób przedstawiony na rysunku 2.20. Realizacja techniczna takiego pomiaru nie powinna stanowić większego problemu w przypadku małej liczby i.



Rys. 2.20. Schemat pomiaru siły F_i w i-tym elemencie sprężysto-tłumiącym układu kaskadowego

Jeśli przyjmiemy, że siła F_i zależy jedynie od przemieszczenia względnego x_i oraz prędkości względnej $v_i = \dot{x}_i$, czyli

$$F_i = F_i(x_i, \dot{x}_i), \tag{2.55}$$

to do wyznaczenia tej zależności konieczne są (oprócz sygnału $\widehat{F}_i(t)$) także pomiary $\widehat{x}_i(t)$ i $\widehat{\dot{x}}_i(t)$ [49].

Zależność (2.55) można eksperymentalnie wyznaczyć dla znanych wartości $\widehat{F}_{i\nu}, \widehat{x}_{i\nu}, \widehat{\dot{x}}_{i\nu}$ w określonej chwili t_ν, to jest dla wielkości

$$\widehat{F}_{i\nu} = \widehat{F}_i(t_\nu), \quad \widehat{x}_{i\nu} = \widehat{x}_i(t_\nu), \quad \widehat{v}_{i\nu} = \widehat{v}_i(t_\nu), \tag{2.56}$$

gdzie $\nu = 1, 2, \ldots, \gamma$. W takim przypadku konieczne jest użycie profesjonalnego układu komputerowego (z odpowiednią klasą dokładności) i z odpowiednim programem aproksymacji funkcji w przestrzeni trójwymiarowej (np. identyfikacja na podstawie wielomianów Czybyszewa [99, 100]). Jeśli klasa funkcji $F_i(x_i, \dot{x}_i)$ jest znana (np. wyznaczona w układzie jednomasowym za pomocą opracowanych metod identyfikacyjnych [56, 61, 64]), to można zastosować i w tym przypadku procedury modelowania, wykorzystując dynamiczne pętle histerezy [54, 65, 77, 97]. Przyjmujemy więc dla przykładu, że funkcja $F_i(x_i, \dot{x}_i)$ ma człon czysto sprężysty $F_{si}(x_i)$ oraz czysto tłumiący $F_{ti}(\dot{x}_i)$ dowolnie nieliniowy, tzn. daje się opisać wyrażeniem

$$F_i(x_i, v_i) = h_i \operatorname{sgn} v_i + \sum_{\mu=1}^{n} k_{i\mu} v_i^\mu + \sum_{\mu=1}^{q} c_{i\mu} x_i^\mu. \tag{2.57}$$

Postać funkcji $F_i(x_i, v_i)$ jest zdeterminowana przez stałe (nieznane co do wartości) parametry $h_i, k_{i\mu}, c_{i\mu}$, których liczność określają dowolnie duże liczby naturalne n, q. Po podstawieniu (2.57) do równania (2.51) otrzymuje się

$$h_i \operatorname{sgn} v_i + \sum_{\mu=1}^{n} k_{i\mu} v_i^\mu + \sum_{\mu=1}^{q} c_{i\mu} x_i^\mu = w_i(t) + b_i(t). \tag{2.58}$$

Jeśli zbiór wymuszeń $p_1(t), \ldots, p_n(t)$ realizuje określony stan drgań okresowych dowolnego kształtu o okresie T

$$x_i(t) = x_i(t+T), \quad w_i(t) = w_i(t+T), \quad b_i(t) = b_i(t+T), \tag{2.59}$$

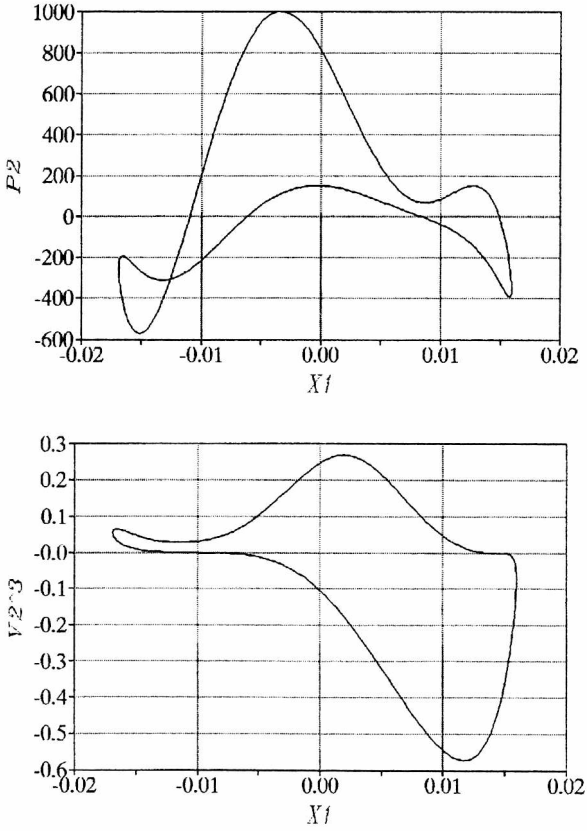
przy czym T jest dowolnie duże, to równanie bilansu energii dla każdego dowolnego i otrzymano w postaci

$$h_i \alpha_{x_i}^{S(v_i)} + \sum_{\mu=1}^{n} k_{i\mu} \alpha_{x_i}^{v_i^\mu} = \alpha_{x_i}^{w_i} + \alpha_{x_i}^{b_i}, \tag{2.60}$$

w którym wartości zmiennych $\alpha_x^{z_i}$ $(z_i = S(v_i), v_i^\mu, w_i, b_i)$ są określone przez pola odpowiednich krzywych zamkniętych zależności $z_i(x_i)$.

Wymnożenie wyrażenia (2.58) przez elementarną prędkość $dv_i = \ddot{x}dt$ oraz scałkowanie w czasie $t \in (\tau, \tau + T)$ daje równanie algebraiczne

$$\sum_{\mu=1}^{q} c_{i\mu} \alpha_{v_i}^{x_i^\mu} = \alpha_{v_i}^{w_i} + \alpha_{v_i}^{b_i}. \tag{2.61}$$



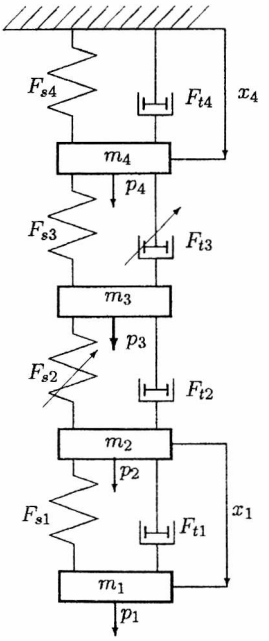
Rys. 2.21. Przykłady pętli uzyskanych eksperymetalnie dla pewnego układu rzeczywistego (podkładka gumowa)

Równanie (2.60) służy do wyznaczania stałych tłumienia $h_i, k_{i1}, k_{i2}, \ldots, k_{in}$ odpowiedniej charakterystyki dyssypatywno-sprężystej i-tego elementu sprężysto-tłumiącego badanego układu, równanie (2.61) zaś do wyznaczenia stałych sprężystości $c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{iq}$ tego elementu [6, 68, 74].

Wykonany eksperyment w przypadku układu dwumasowego potwierdził przydatność opracowanej metody. Oszacowane parametry nie przekroczyły błędu 3%.

Z przeprowadzonej symulacji komputerowej pokazano na rysunku 2.21 przykładowe pętle badanego układu.

Wyprowadzony algorytm dla układu kaskadowego przykładowo wykorzystano do układu o czterech stopniach swobody, którego schemat pokazano na rysunku 2.22.



Rys. 2.22. Schemat modelu o czterech stopniach swobody

Równania różniczkowe ruchu tego układu są następujące

$$
\begin{aligned}
&m_1 \sum_{\nu=1}^{n} \ddot{x}_\nu + [F_{t1}(\dot{x}_1) + F_{s1}(x_1)] = p_1(t),\\
&m_2 \sum_{\nu=2}^{n} \ddot{x}_\nu - [F_{t1}(\dot{x}_1) + F_{s1}(x_1)] + [F_{t2}(\dot{x}_2) + F_{s2}(x_2)] = p_2(t),\\
&m_3 \sum_{\nu=3}^{n} \ddot{x}_\nu - [F_{t2}(\dot{x}_2) + F_{s2}(x_2)] + [F_{t3}(\dot{x}_3) + F_{s3}(x_3)] = p_3(t),\\
&m_4 \sum_{\nu=4}^{n} \ddot{x}_\nu - [F_{t3}(\dot{x}_3) + F_{s3}(x_3)] + [F_{t4}(\dot{x}_4) + F_{s4}(x_4)] = p_4(t)
\end{aligned}
\tag{2.62}
$$

lub

$$
\begin{aligned}
m_1 a_1 + [F_{t1}(\dot{x}_1) + F_{s1}(x_1)] &= p_1(t), \\
m_2 a_2 + [F_{t2}(\dot{x}_2) + F_{s2}(x_2)] &= p_2(t) + [F_{t1}(\dot{x}_1) + F_{s1}(x_1)], \\
m_3 a_3 + [F_{t3}(\dot{x}_3) + F_{s3}(x_3)] &= p_3(t) + [F_{t2}(\dot{x}_2) + F_{s2}(x_2)], \\
m_4 a_4 + [F_{t4}(\dot{x}_4) + F_{s4}(x_4)] &= p_4(t) + [F_{t3}(\dot{x}_3) + F_{s3}(x_3)],
\end{aligned}
\tag{2.63}
$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \ddot{x}_3 + \ddot{x}_4, \\
a_2 &= \ddot{x}_2 + \ddot{x}_3 + \ddot{x}_4, \\
a_3 &= \ddot{x}_3 + \ddot{x}_4, \\
a_4 &= \ddot{x}_4.
\end{aligned}
\tag{2.64}
$$

Na podstawie wcześniej wyprowadzonych równań (2.60) i (2.61) można równanie bilansu energii i bilansu mocy dla i-tej masy ostatecznie zapisać jako

$$
\begin{aligned}
h_i \alpha_{x_i}^{S(v_i)} + \sum_{\mu=1}^{n} k_{i\mu} \alpha_{x_i}^{v_i^\mu} &= \alpha_{x_i}^{w_i + b_i} \\
\sum_{\mu=1}^{q} c_{i\mu} \alpha_{v_i}^{x_i^\mu} &= \alpha_{v_i}^{w_i} + \alpha_{vi}^{b_i},
\end{aligned}
\tag{2.65}
$$

gdzie wartości zmiennych $\alpha_x^{z_i}$ $(z_i = S(v_i), x_i^\mu, v_i^\mu, w_i, b_i)$ są wyznaczone przez pola odpowiednich krzywych zamkniętych zależności $z_i(x_i)$, w_i i b_i zaś oznaczają

$$
\begin{aligned}
b_1 &= -m_1 a_1, \\
b_2 &= b_1 - m_2 a_2, \\
b_3 &= b_2 - m_3 a_3, \\
b_4 &= b_3 - m_4 a_4, \\
w_1 &= p_1, \\
w_2 &= p_1 + p_2, \\
w_3 &= p_1 + p_2 + p_3, \\
w_2 &= p_1 + p_2 + p_3 + p_4.
\end{aligned}
\tag{2.66}
$$

Należy pamiętać, że w przyjętych współrzędnych uogólnionych relacja między przyspieszeniami a przemieszczeniami jest określona równaniami (2.64). Przyjmujemy, że funkcje F_{si} i F_{ti} $(i = 1, 2, 3, 4)$ są postaci

$$\begin{aligned}
&F_{s1}(x_1) = c_{11}x_1, \quad F_{t1}(\dot{x}_1) = h_1 \operatorname{sgn} \dot{x}_1 + k_{11}\dot{x}_1,\\
&F_{s2}(x_2) = c_{21}x_2 + c_{22}x_2^2 + c_{23}x_2^5, \quad F_{t2}(\dot{x}_2) = k_{21}\dot{x}_2,\\
&F_{s3}(x_3) = c_{31}x_3, \quad F_{t3}(\dot{x}_3) = k_{31}\dot{x}_3 + k_{33}\dot{x}_3^3 + k_{35}\dot{x}_3^5,\\
&F_{s4}(x_4) = c_{41}x_4, \quad F_{t4}(\dot{x}_4) = k_{41}\dot{x}_4.
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Po rozpisaniu pierwszego równania (2.65) i uwzględnieniu (2.67), otrzymano następujący układ równań bilansu energii

$$\begin{aligned}
h_1\alpha_{x_1}^{S(v_1)} + k_{11}\alpha_{x_1}^{v_1} &= \alpha_{x_1}^{w_1} + \alpha_{x_1}^{b_1} = \alpha_{x_1}^{w_1+b_1},\\
k_{21}\alpha_{x_2}^{v_2} &= \alpha_{x_2}^{w_2} + \alpha_{x_2}^{b_2} = \alpha_{x_2}^{w_2+b_2},\\
k_{31}\alpha_{x_3}^{v_3} + k_{33}\alpha_{x_3}^{v_3^3} + k_{35}\alpha_{x_3}^{v_3^5} &= \alpha_{x_3}^{w_3} + \alpha_{x_3}^{b_3} = \alpha_{x_3}^{w_3+b_3},\\
k_{41}\alpha_{x_4}^{v_4} &= \alpha_{x_4}^{w_4} + \alpha_{x_4}^{b_4} = \alpha_{x_4}^{w_4+b_4}.
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Równania bilansu mocy zaś przyjmą dla zadanych funkcji (2.67) postać

$$\begin{aligned}
c_{11}\alpha_{v_1}^{x_1} &= \alpha_{v_1}^{w_1} + \alpha_{v_1}^{b_1} = \alpha_{v_1}^{w_1+b_1},\\
c_{21}\alpha_{v_2}^{x_2} + c_{22}\alpha_{v_2}^{x_2^2} + c_{23}\alpha_{v_2}^{x_2^3} &= \alpha_{v_2}^{w_2} + \alpha_{v_2}^{b_2} = \alpha_{v_2}^{w_2+b_2},\\
c_{31}\alpha_{v_3}^{x_3} &= \alpha_{v_3}^{w_3} + \alpha_{v_3}^{b_3} = \alpha_{v_3}^{w_3+b_3},\\
c_{41}\alpha_{v_4}^{x_4} &= \alpha_{v_4}^{w_4} + \alpha_{v_4}^{b_4} = \alpha_{v_4}^{w_4+b_4}.
\end{aligned} \tag{2.69}$$

W celu identyfikacji i-tego elementu sprężysto-tłumiącego $(i = 1, 2, 3, 4)$ należy wybrać odpowiednie równanie bilansu energii i bilansu mocy. Zasadniczej komplikacji ulega jedynie pomiar prawej strony tych równań (zmiennych $\alpha_{x_i}^{w_i+b_i}$ lub $\alpha_{v_i}^{w_i+b_i}$).

Weryfikację prowadzono na symulowanym układzie komputerowym z wykorzystaniem specjalnego oprogramowania IUDRBE [4] oraz bloków operacyjnych

TUTSIM [122]. Przyjęto w badanym układzie następujące dane liczbowe

$$m_1 = 10 \text{ kg}, \quad F_{s1}(x_1) = 4000x_1, \quad F_{t1}(\dot{x}_1) = 0,8 \operatorname{sgn} \dot{x}_1 + 120\dot{x}_1,$$

$$m_2 = 2 \text{ kg}, \quad F_{s2}(x_2) = 10000x_2 - 200000x_2^2 + 2000000x_2^5, \quad F_{t2}(\dot{x}_2) = 200\dot{x}_2,$$

$$m_3 = 5 \text{ kg}, \quad F_{s3}(x_3) = 5000x_3, \quad F_{t3}(\dot{x}_3) = 500\dot{x}_3 - 650\dot{x}_3^3 + 350\dot{x}_3^5,$$

$$m_4 = 2 \text{ kg}, \quad F_{s4}(x_4) = 5000x_4, \quad F_{t4}(\dot{x}_4) = 180\dot{x}_4.$$

Badania prowadzono podczas wymuszeń harmonicznych o zmiennej amplitudzie i częstości [6]. Do wyznaczenia stałych występujących w równaniach bilansu energi i bilansu mocy (odpowiednie pola pętli histerezy $\widehat{\alpha}$) wykorzystano oprogramowanie Quattro Pro [112], do wyznaczenia zaś parametrów badanego układu wykorzystano analizę regersji [117].

Na podstawie prowadzonych badań stwierdzono, że im dalej jest przyłożone wymuszenie od identyfikowanego elementu sprężysto-tłumiącego, tym dokładność uzyskanych wyników jest gorsza. Dotyczy to przede wszystkim charakterystyk restytucyjnych silnie nieliniowych. Z symulacji komputerowej uzyskano charakterystyki sprężystości i tłumienia, w przypadku gdy wymuszenie sinusoidalne przyłożono do masy m_1. Są one następujące

$$\widehat{F}_{s1} = 4109,044\widehat{x}_1, \quad \widehat{F}_{t1} = 0,8 \operatorname{sgn} \widehat{\dot{x}}_1 + 120,0003\widehat{\dot{x}}_1,$$

$$\widehat{F}_{s2} = 10000,04\widehat{x}_2 - 201782\widehat{x}_2^2 + 6,13 \times 10^{10}\widehat{x}_2^5, \quad \widehat{F}_{t2} = 200,001\widehat{\dot{x}}_2,$$

$$\widehat{F}_{s3} = 5000,0\widehat{x}_3, \quad \widehat{F}_{t3} = 500,00\widehat{\dot{x}}_3 - 650,909\widehat{\dot{x}}_3^3 + 3844,701\widehat{\dot{x}}_3^5,$$

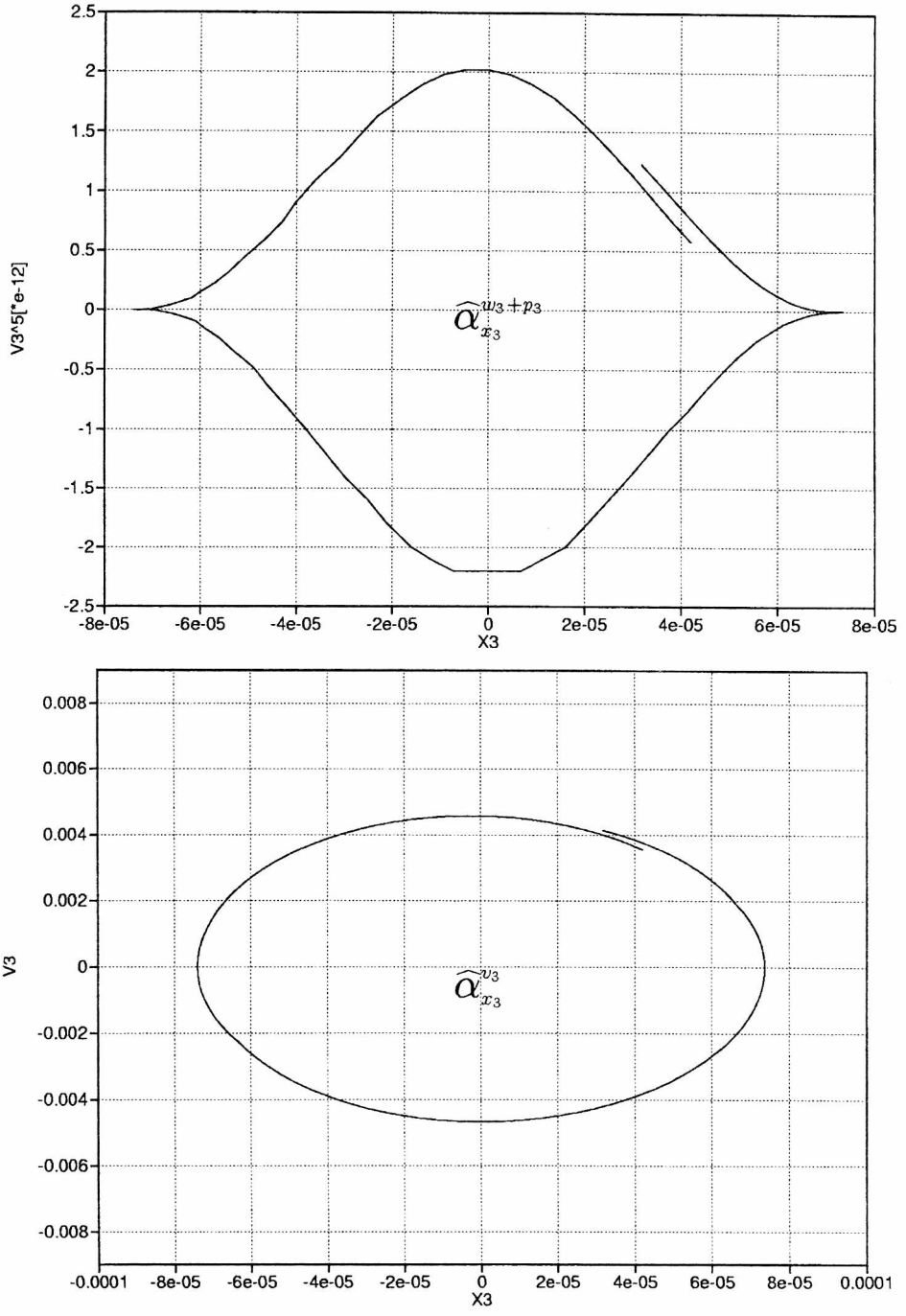
$$\widehat{F}_{s4} = 5000,002\widehat{x}_4, \quad \widehat{F}_{t4} = 180,00\widehat{\dot{x}}_4.$$

Prowadzono ponadto badania, gdy wymuszenie sinusoidalne przyłożono do masy m_2 i m_4 bez przesunięcia fazowego i do każdej masy oddzielnie.

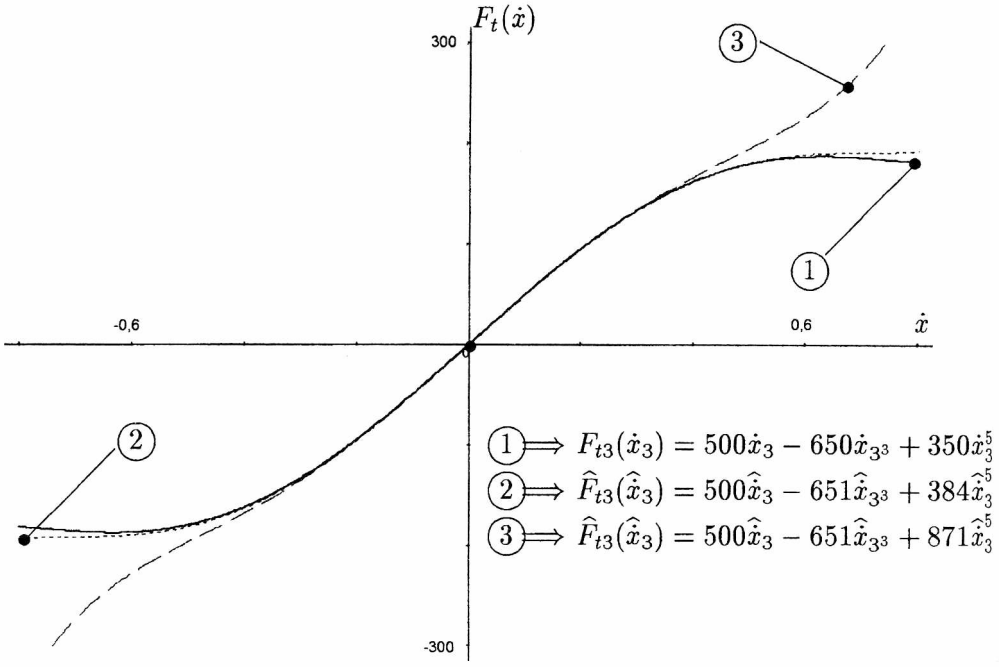
Wyznaczona charakterystyka tłumienia (gdy $p_2 \neq 0, p_1 = p_3 = p_4 = 0$) jest następująca

$$\widehat{F}_{t3} = 500,00\widehat{\dot{x}}_3 - 650,909\widehat{\dot{x}}_3^3 + 871\widehat{\dot{x}}_3^5.$$

Przykładowe funkcje tłumienia zadane i wyznaczone z eksperymentu (z badań symulacyjnych) pokazano na rys. 2.24.



Rys. 2.23. Przykłady wyznaczonych eksperymetalnie zależności badanego układu pokazanego na rys.2.22



Rys. 2.24. Wyniki identyfikacji funkcji tłumienia F_{t3} w badanym układzie kaskadowym (wymuszenie do układu przyłożono do masy m_2)

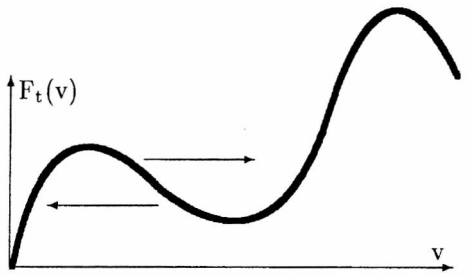
Krzywe nie zawsze się zamykały (a tak naprawdę krzywe niedomknięte), co świadczyć może o w nieidealnym spełnieniu w tym przypadku założenia okresowości analizowamym zakresie drgań (patrz rys. 2.23). Dlatego wystąpiły wyraźne różnice w uzyskanych wynikach współczynników. Były one zwłaszcza wyraźnie widoczne dla wyższych potęg prędkości i przemieszczeń, które decydują o zachowaniu się charakterystyk w pobliżu końców przyjętych zakresów drgań.

3. Proces identyfikacji w przypadku stacjonarnych wymuszeń losowych

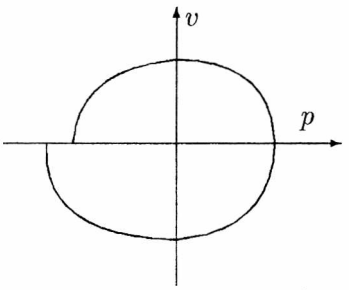
Opisaną procedurę identyfikacji parametrycznej przy wymuszeniach periodycznych (rozdz. 2) można zastosować także w przypadku wymuszeń losowych, opisanych stacjonarnymi i ergodycznymi procesami stochastycznymi. Wyniki w przypadku wymuszeń losowych przedstawione w niniejszym rozdziale są dalszą kontynuacją i rozwinięciem we wcześniej publikowanych pracach [48, 49, 67, 68].

Równania bilansu energii i bilansu mocy umożliwiły osobne poszukiwanie optymalnych parametrów, opisujących tłumienie drgań (funkcję dyssypacji) w odseperowaniu od parametrów opisujących czyste oddziaływanie sprężyste (funkcji sprężystości). Podstawowym warunkiem ich konstrukcji był warunek okresowości zarówno wymuszenia, jak i odpowiedzi badanego układu. Jednakże w przypadku układów silnie nieliniowych, w których na przykład charakterystyka tłumienia nie jest monotonicznie rosnąca (rys. 3.1), mogą występować liczne przypadki odpowiedzi nieokresowych, dla których równanie energii czy bilansu mocy nie będzie formalnie spełnione (stany nieustalone). Drugim aspektem dotychczas nieporuszanym był fakt możliwości występowania składowych podharmonicznych w odpowiedzi obiektu, tzn. jeśli $p(t) = p(t+T)$, to $x(t) = x(t+\nu T)$, gdzie $\nu = 2, 3, 4, \ldots$. Powoduje to, że pojedyncza pętla histerezy $p(x)$ nie jest zamknięta po upływie okresu T wymuszenia $p(t)$ (patrz rys. 3.2).

W badaniach rzeczywistych układów fizycznych mogą pojawiać się pewne przypadkowe zaburzenia ruchu, które również utrudniają warunek okresowości. Wszystkie odpowiedzi, w przypadku których warunek okresowości nie jest formalnie spełniony, mogą być usuwane ze zbiorów danych.



Rys. 3.1. Funkcja tłumienia z „siodłem"



Rys. 3.2. Zależność („pętla") w obrębie pojedyńczego okresu T nie musi się zamykać

Jednakże możliwe jest również pewne „uśrednienie" wyników, uzyskanych z dużej liczby zarejestrowanych pętli. Pokazano również, że taka modyfikacja metody jest możliwa z zastosowaniem odpowiedniej wyspecjalizowanej aparatury badawczej. W ten sposób można otrzymać odpowiednie równania bilansu energii i bilansu mocy dla wymuszeń losowych, o dowolnym stacjonarnym rozkładzie prawdopodobieństwa, które realizują stan ustalony badanego układu.

3.1. Uśrednione równanie bilansu energii i mocy

Opisana metoda identyfikacji układów dynamicznych na podstawie równania bilansu energii i bilansu mocy jest uwarunkowana przez spełnienie okresowości (por. rozdz. 2) w odpowiedzi i wymuszeniu układu. Zakłada się, że zamiast mierzyć odpowiednie pola pętli α w obrębie jednego pełnego okresu T_0, będzie się to czynić w czasie $T >> T_0$, przy czym T nie musi być wielokrotnością okresu T_0

$$T \neq nT_0 \tag{3.1}$$

(n – liczba naturalna). Aby skupić uwagę, przykładowo przyjęto dowolny (np. ν-ty) składnik równania energii następującego układu

$$m\ddot{x} + F_t(\dot{x}) + F_s(x) = p(t), \tag{3.2}$$

w którym

$$F_s(x_i) = \sum_{\nu=1}^{q} c_{i\nu} x^\nu, \quad F_t(\dot{x}_i) = h_i \operatorname{sgn} \dot{x}_i + \sum_{\nu=1}^{g} k_{i\nu} \dot{x}^\nu. \tag{3.3}$$

W tym przypadku równanie bilansu energii ma postać

$$h\alpha_x^{S(v)} + \sum_{\nu=1}^{g} k_\nu \alpha_x^{v^\nu} = \alpha_x^p. \tag{3.4}$$

Dowolna zmienna $\alpha_x^{v^\nu}$ w tym równaniu była zdefiniowana w następujący sposób

$$\alpha_x^{v^\nu} \equiv \int_{x(0)}^{x(T_0)} v^\nu dx \equiv \int_0^{T_0} v^\nu \frac{dx}{dt} dt \equiv \int_0^{T_0} v^{\nu+1} dt. \tag{3.5}$$

Wartość średnią $< v^{\nu+1} >_0$ sygnału $v^{\nu+1}(t)$, wyznaczonego w dowolnym czasie $T >> T_0$, zdefiniowano w sposób następujący (patrz rys. 3.3)

$$< v^{\nu+1} >_0 = \frac{1}{T} \int_0^T v^{\nu+1} dt \tag{3.6}$$

można założyć, że

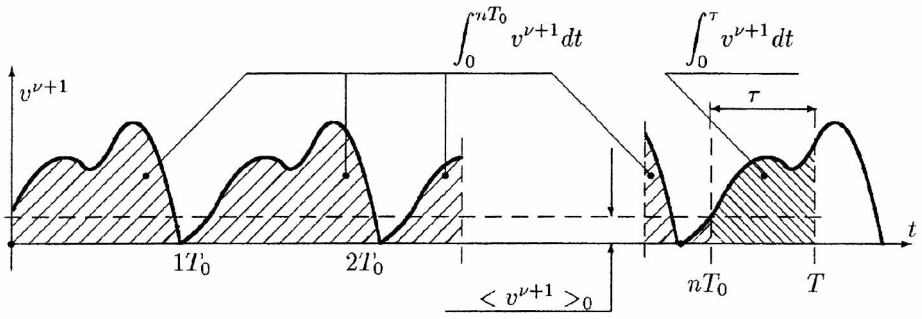
$$T = nT_0 + \tau, \qquad \tau \in (0, T_0). \tag{3.7}$$

Na podstawie (3.6) i (3.7) jest

$$\begin{aligned} < v^{\nu+1} >_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T v^{\nu+1} dt = \frac{1}{nT_0 + \tau} \int_0^{nT_0+\tau} v^{\nu+1} dt \\ &= \frac{1}{nT_0 + \tau} \left[\int_0^{nT_0} v^{\nu+1} dt + \int_0^{\tau} v^{\nu+1} dt \right]. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Po uwzględnieniu związku (3.5) otrzymuje się

$$\begin{aligned} < v^{\nu+1} >_0 &= \frac{1}{nT_0 + \tau} \left[n\alpha_x^{v^\nu} + \int_0^{\tau} v^{\nu+1} dt \right] \\ &= \frac{n\alpha_x^{v^\nu}}{nT_0 + \tau} + \frac{\int_0^{\tau} v^{\nu+1} dt}{T}. \end{aligned} \tag{3.9}$$



Rys. 3.3. Interpretacja wartości średniej $< v^{\nu+1} >_0$ w przypadku $T \neq nT_0$ (T_0 – okres funkcji)

Z równania (3.9) wynika, że im większy jest czas obserwcji T, tym mniejszy jest udział drugiego składnika w sumie $< v^{\nu+1} >_0$ (patrz rys. 3.3 – pole gęściej zakreskowane i pod innym kątem).

Gdy czas T dąży do nieskończoności, wówczas otrzymamy

$$\lim_{T\to\infty} < v^{\nu+1} >_0 = \frac{\alpha_x^{v^\nu}}{T_0}. \tag{3.10}$$

Podobnie dla pozostałych członów równania bilansu energii postaci (3.4) otrzymano

$$\lim_{T\to\infty} < |v| >_0 = \frac{\alpha_x^{S(v)}}{T_0}, \tag{3.11}$$

$$\lim_{T\to\infty} < pv >_0 = \frac{\alpha_x^{p}}{T_0}. \tag{3.12}$$

Po podzieleniu równania (3.4) przez czas T_0 oraz uwzględnieniu (3.10)÷(3.12), równanie to zapisuje się w zmodyfikowanej formie

$$h < |v| >_0 + \sum_{\nu=1}^{g} k_\nu < v^{\nu+1} >_0 + < pv >_0 + \varepsilon, \tag{3.13}$$

błąd ε dąży do zera, gdy czas uśrednienia T dąży do nieskończoności, tzn.

$$\lim_{T\to\infty} \varepsilon = 0. \tag{3.14}$$

Podobne postępowanie w przypadku równania bilansu mocy (patrz rozdz. 2)

$$m\alpha_v^a + \sum_{\nu=1}^{q} c_\nu \alpha_v^{x^\nu} = \alpha_v^p, \tag{3.15}$$

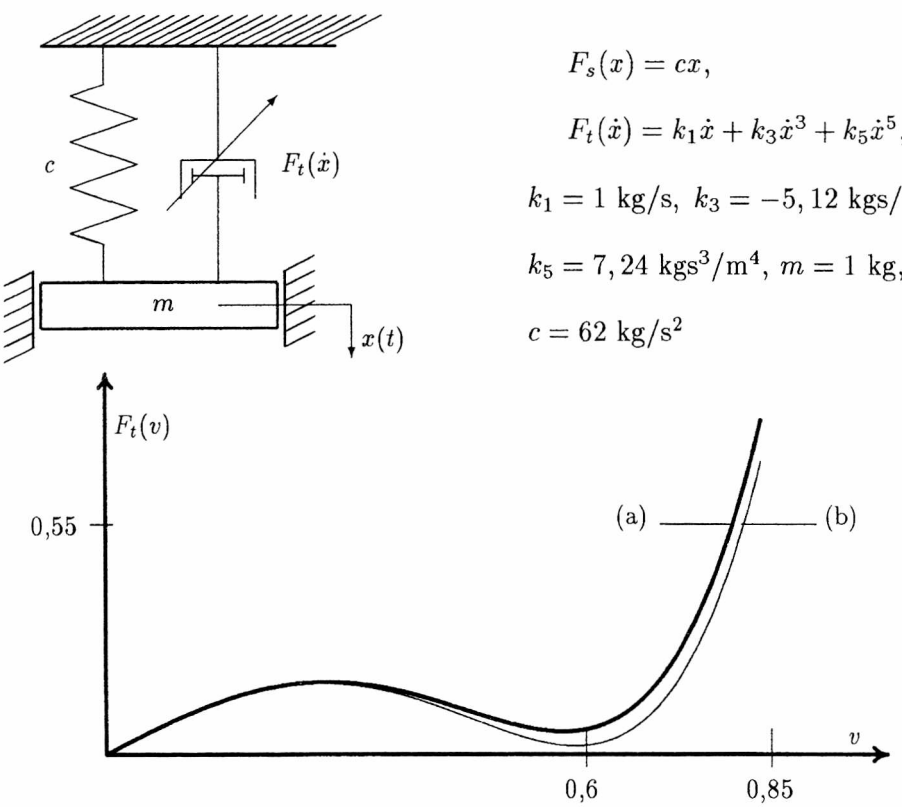
daje

$$m < a^2 >_0 + \sum_{\nu=1}^{q} c_\nu < x^\nu a >_0 = < pa >_0 + \varepsilon. \tag{3.16}$$

Budowa odpowiednich algorytmów identyfikacji na podstawie uśrednionych równań (3.13) i (3.16) znacznie ułatwia eksperyment, w którym zamiast mierzyć pola odpowiednich pętli można wyznaczyć wartości średnie odpowiednio skonstruowanych przebiegów czasu. W dalszym ciągu pracy pokazano przykłady takich algorytmów.

3.2. Przykłady zastosowania uśrednionego równania bilansu energii

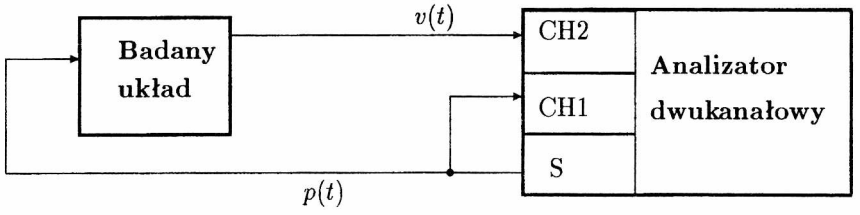
Jako przykład rozpatrzono układ opisany równaniem (3.2) (rys. 3.4 wraz z danymi liczbowymi).



Rys. 3.4. Badany układ dynamiczny z daną charakterystyką tłumienia (a) i wyznaczoną przez procedury identyfikacyjne (b)

Układ badany połączono z analizatorem dwukanałowym (CH1 i CH2), wyposażonym w generator sygnałów (S) (analizator HP 35665A [34]). Analizator był wyposażony w odpowiednie oprogramowanie umożliwiające tworzenie szerokiej gamy różnych operacji matematycznych na sygnałach wejściowych. Dzięki temu wyznaczenie odpowiednch wartości średnich uśrednionego równania bilansu energii było dość proste. Polegało ono na:

- utworzeniu odpowiednich sygnałów przebiegów czasowych (np. v^2, pv itp.),
- wyznaczeniu wartości średnich tych sygnałów drogą analizy spektralnej.



Rys. 3.5. Schemat układu badanego w połączeniu z analizatorem dwukanałowym

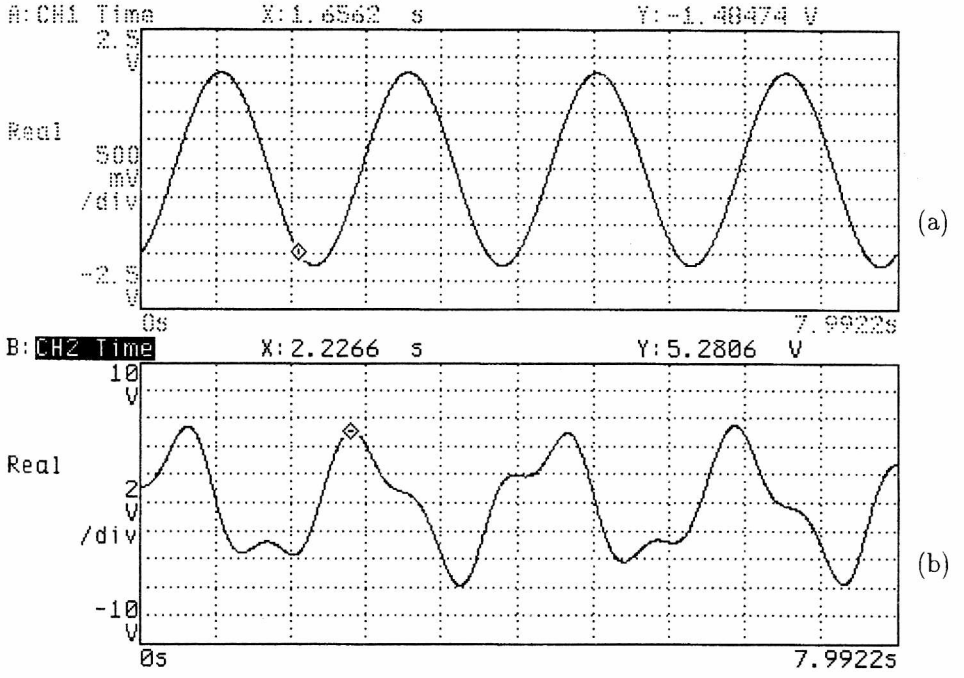
Ażeby proces ten dało się zrealizować, należało połączyć analizator z układem badanym, zgodnie ze schematem pokazanym na rys. 3.5. Sygnał z generatora (S) analizatora wprowadzono jako sygnał wymuszający $p(t)$ na badany obiekt oraz na kanał I (CH1) analizatora. Na kanał II (CH2) wprowadzono zaś prędkość $v(t)$. W rozważanym przypadku (por. rys. 3.4) uśrednione równanie bilansu energii zgodnie z równaniem (3.13) ma postać

$$< pv >_0 = k_1 < v^2 >_0 + k_3 < v^4 >_0 + k_5 < v^6 >_0 + \varepsilon. \tag{3.17}$$

Za pomocą odpowiedniego podprogramu ANALYS, który jest na wyposażeniu analizatora widmowego (tzw. *display hardkey ANALYS*) skonstruowano następujące operacje:

- F1 = TIME2*TIME2 – przebieg czasowy sygnału – kwadrat prędkości v^2,
- F2 = FFT(F1) – transformata Fouriera kwadratu prędkości v^2,
- F3 = FFT(F1*F1) – transformata Fouriera sygnału v^4,
- F4 = FFT(F1*F1*F1) – transformata Fouriera sygnału v^6,
- F5 = FFT(TIME1*TIME2) – transformata Fouriera iloczynu sygnałów p i v.

Na rysunku 3.7 pokazano przykłady przebiegów uzyskanych w ten sposób funkcji (np. F1 itp.) w przypadku wymuszenia harmonicznego o częstości zbliżonej do częstości drgań własnych badanego układu (około 1,25 Hz). Wymuszenie $p(t)$ pokazano na wykresie (a) (rys. 3.6), na wykresie (b) zaś – odpowiedź (prędkość $v(t)$) na to wymuszenie. Obydwa przebiegi były rejestrowane w czasie około 8 sekund.

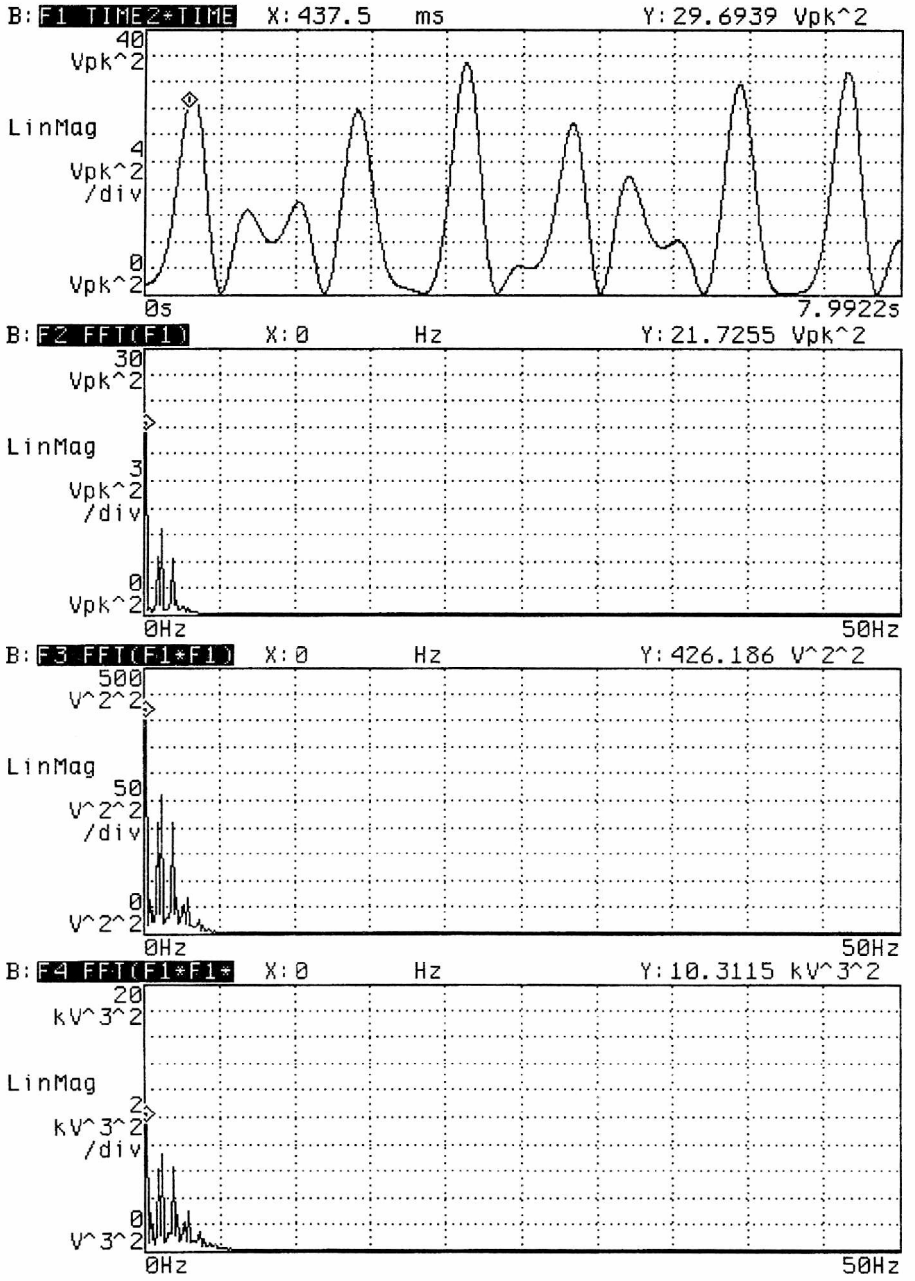


Rys. 3.6. Przykład sygnałów wejściowych i wyjściowych badanego układu

Na wykresie (c) przedstawiono natomiast przebieg kwadratu prędkości, pozostałe zaś wykresy przekształcają widma odpowiednich przebiegów, przy czym tzw. MARKER ustawiono zawsze na częstotliwości 0 Hz, ażeby odczytać odpowiednią wartość średnią (wartość Y). Na podstawie tych wartości dla 48 różnych co do częstości i amplitudy wymuszeń (po odpowiednim przeliczeniu jednostek elektrycznych na mechaniczne i zastosowaniu analizy regresji zgodnie z równaniem (3.17)) uzyskano następujące wartości estymatorów (patrz [47]) $\widehat{k}_1, \widehat{k}_3, \widehat{k}_5$

$$\widehat{k}_1 = 1{,}00 \mp 0{,}06, \ \widehat{k}_3 = -5{,}28 \mp 0{,}15, \ \widehat{k}_5 = 7{,}22 \mp 0{,}16. \tag{3.18}$$

Wykres estymaty $\widehat{F}_t(v)$ w przypadku uzyskanych danych (3.18) pokazano w celu porównania na rys. 3.4.



Rys. 3.7. Przykład funkcji F1÷ F4 uzyskiwanych z eksperymentu

3.3. Przykład zastosowania uśrednionego równania bilansu mocy

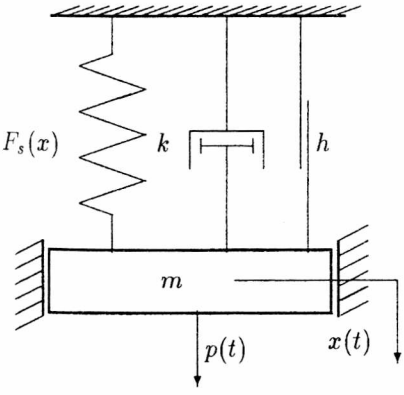
(a) Zstosowanie uśrednionego równania bilansu mocy pokazano na przykładzie układu opisanego równaniem

$$m\ddot{x} + h\,\mathrm{sgn}\,\dot{x} + k\dot{x} + c_1 x + c_3 x^3 = p(t). \tag{3.19}$$

Układ zamodelowano na maszynie analogowej, przy czym dane liczbowe parametrów h, c_3 ustalono tak, aby uzyskać wyraźne nieliniowe efekty w odpowiedzi układu [66]. Przyjęto więc dane liczbowe, które przedstawiono łącznie z wykresami charakterystyk tłumienia i sprężystości układu pokazanego na rys. 3.8.
(b) Wpływ nieliniowych członów najlepiej jest widoczny w przebiegach czasowych przyspieszenia przy wymuszeniach czysto sinusoidalnych (patrz rys. 3.9). Dla badanego układu uśrednione równanie bilansu mocy (patrz (3.16) i (3.19) przyjmie postać

$$m < a^2 >_0 + c_1 < xa >_0 + c_3 < x^3 a >_0 = < pa >_0 \tag{3.20}$$

(c)



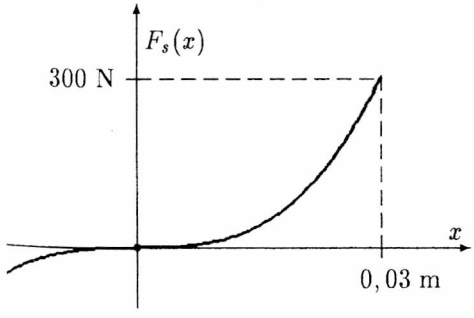
$F_s(x) = c_1 x + c_3 x^3$

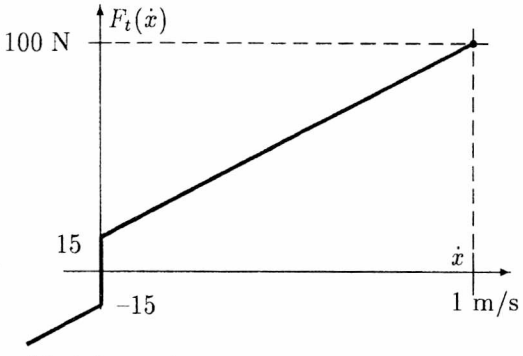
$F_t(\dot{x}) = h\,\mathrm{sgn}\,\dot{x} + k\,\dot{x}$

$m = 8$ kg, $h = 15$ kg/s, $k = 85$ kg/s

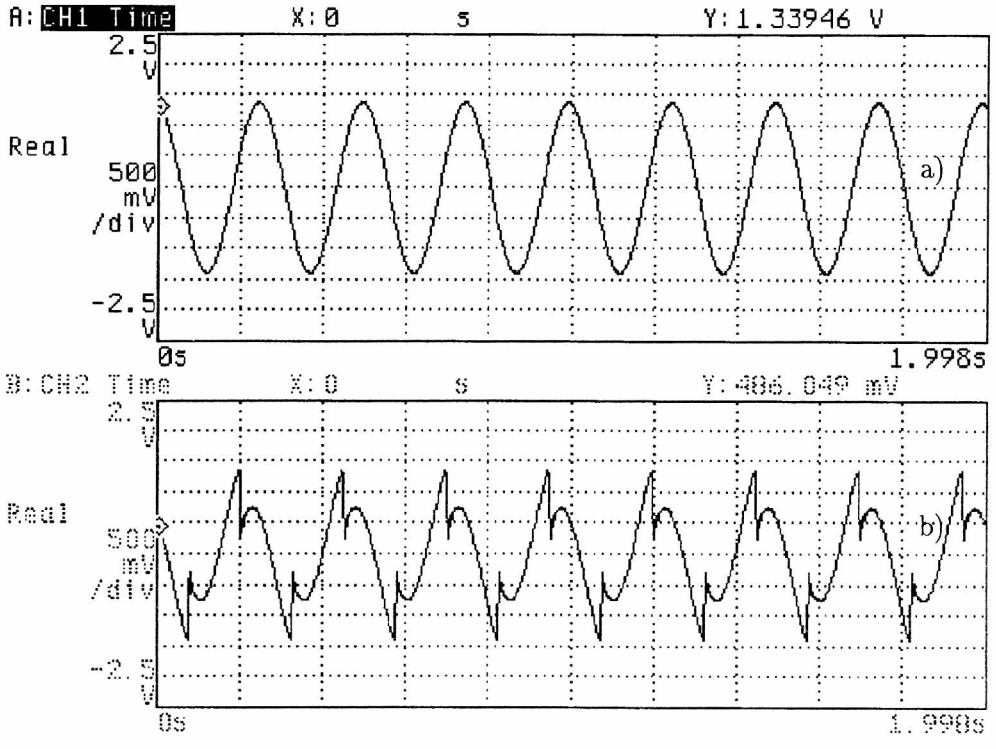
$c_1 = 10^3$ kg/s^2, $c_3 = 10^7$ kg/s$^2 \cdot$ m^2

(d)





Rys. 3.8. Badany układ dynamiczny



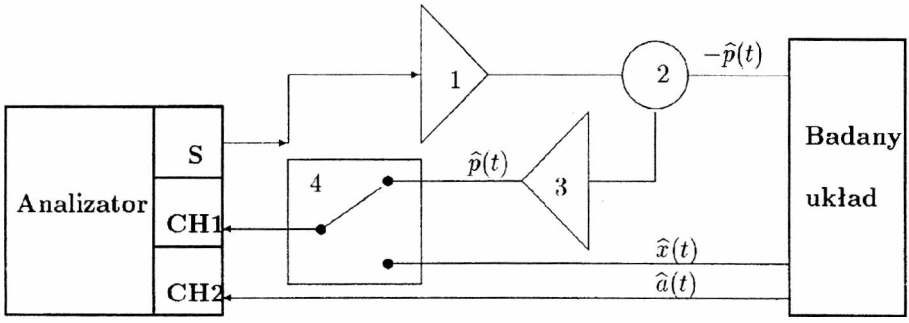
Rys. 3.9. Przebiegi wymuszenia i odpowiedzi układu dla modelu (3.19)

W tym przypadku konieczny jest jednoczesny pomiar trzech zmiennych: wymuszenia – $p(t)$, przemieszczenia – $x(t)$ oraz przyspieszenia – $a(t)$. Dlatego, korzystając z analizatora dwukanałowego, należało na kanale pierwszym powtórzyć kilkakrotnie eksperyment, przy zastosowaniu tego samego wymuszenia $p(t)$. W związku z tym na kanale pierwszym analizatora rejestrowano kolejno wymuszenie $p(t)$, lub też przemieszczenie $x(t)$, podczas gdy na kanale drugim rejestrowano zawsze przyspieszenie $a(t)$ (por. rys. 3.9).

W celu wyznaczenia stałych w równaniu (3.20) utworzono następujące funkcje:

- $\mathrm{F1}' = p \cdot a$ – sygnał utworzony z iloczynu sygnałów $p \cdot a$,
- $\mathrm{F1}'' = x \cdot a$ – sygnał utworzony z iloczynu sygnałów $x \cdot a$,
- $\mathrm{F2}' = \mathrm{FFT}(\mathrm{F1}')$ – oznacza transformatę Fouriera sygnałów $p \cdot a$,
- $\mathrm{F2}'' = \mathrm{FFT}(\mathrm{F1}'')$ – oznacza transformatę Fouriera sygnałów $x \cdot a$,

- F3 = $x^3 \cdot a$ – sygnał utworzony z iloczynu sygnałów przemieszczenia x^3 i przyspieszenia a,
- F4 = FFT(F3) – oznacza transformatę Fouriera sygnału $x^3 \cdot a$,
- F5′ = a^2 – sygnał utworzony z podniesienia sygnału przyspieszenia do potęgi drugiej.
- F5 = FFT(F5′) – oznacza transformatę Fouriera sygnału a^2.



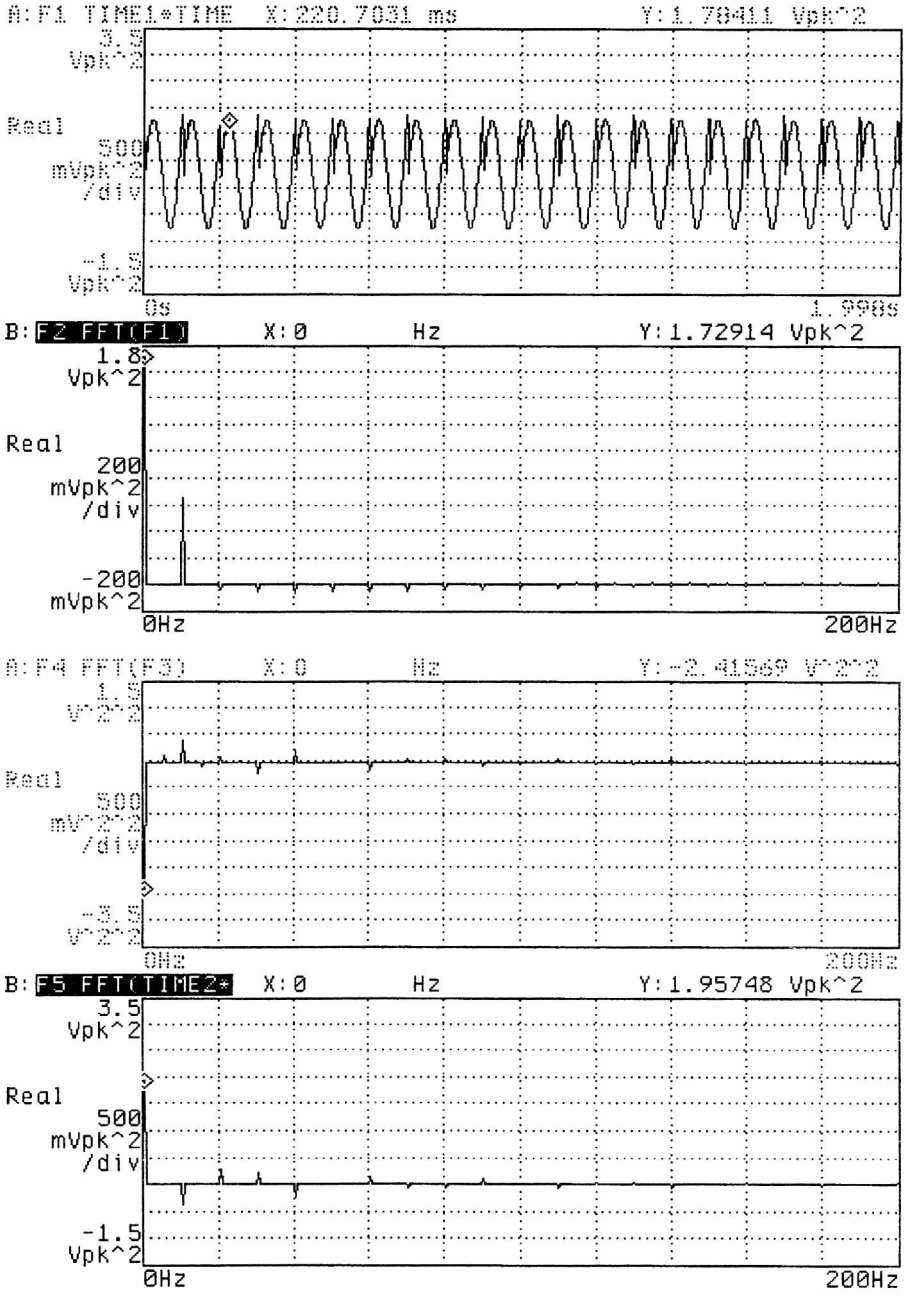
Rys. 3.10. Schemat połączenia analizatora dwukanałowego z badanym układem w przypadku identyfikacji charakterystyki sprężystości

Przykłady wybranych funkcji (F1′, F2″, F4, F5) otrzymanych przy wymuszeniach czysto sinusoidalnych dla różnych częstości i amplitud (3 Hz–10 Hz) pokazano na rys. 3.11. Uzyskane w ten sposób wartości średnie (wartości dla zerowej częstości na wykresach częstotliwościowych) stały się podstawą dalszych obliczeń, realizowanych zgodnie z metodą analizy regresji opartą na równaniu (3.20).

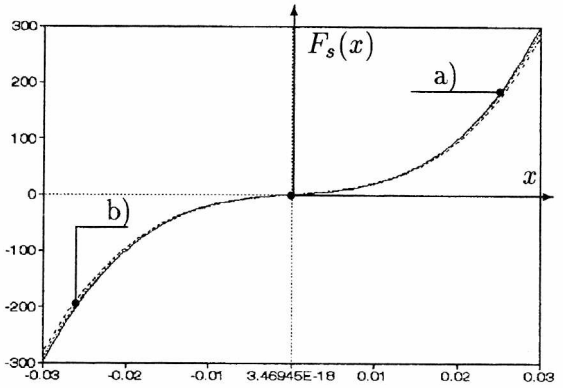
Dla liczby wymuszeń 24, por. [66]) uzyskano następujące wartości estymatorów $\hat{m}$, $\hat{c}_1$ $\hat{c}_3$

$$\begin{aligned} \hat{c}_1 &= 1099 \mp 73 \text{ kg/s}^2, \\ \hat{c}_3 &= (9,4 \mp 0,1) \cdot 10^6 \text{ kg/(s}^2 \cdot \text{m}^2), \\ \hat{m} &= 8,15 \mp 0,15 \text{ kg}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Na rysunku 3.12 przestawiono $F_s(x)$ zadaną oraz $\hat{F}_s(x)$ uzyskaną dla estymowanych parametrów.



Rys. 3.11. Przykład funkcji F1÷F5 badanego układu uzyskany przy wymuszeniach harmonicznych



Rys. 3.12. Kształt uzyskanej estymaty $\widehat{F}_s(x) = \widehat{c}_1 x + \widehat{c}_3 x^3$ (a) w porównaniu z daną funkcją $F_s(x)$ (b)

3.4. Równania bilansu energii i bilansu mocy w przypadku wymuszeń losowych

Uśrednione równania bilansu energii i bilansu mocy można stosować także w przypadku wymuszeń niekoniecznie czysto sinusoidalnych, lecz również dla wymuszeń losowych stacjonarnych [62, 67, 68, 71, 82]. Załóżmy więc dalej, że wymuszenie $p(t)$ w równaniu postaci:

$$m\ddot{x} + h\,\mathrm{sgn}\,\dot{x} + \sum_{\nu=1}^{g} k_\nu \dot{x}^\nu + \sum_{\nu=1}^{q} c_\nu x^\nu = p(t) \tag{3.22}$$

jest stochastycznym procesem stacjonarnym oraz że jednowymiarowy rozkład prawdopodobieństwa procesu $p(t)$ jest niezmienniczy względem czasu. Jest to proces ergodyczny. O układzie dynamicznym zakłada się, że jest asymptotycznie stabilny, tzn. osiąga stan ustalony, gdy $t \to \infty$. Jak wiadomo ustalona odpowiedź układu jest także procesem stacjonarnym, a zwłaszcza statystyczne momenty odpowiedzi ustalonej (tzn. momenty samego procesu i jego pierwszej pochodnej) są stałe.

Po wymnożeniu równania (3.22) obustronnie przez elementarne przemieszczenie $dx = \dot{x}dt$ i uśrednieniu w pewnym skończonym przedziale czasu $t \in T$, otrzymuje się

$$m\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{x}\dot{x}dt + h\frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{sgn}\dot{x}\dot{x}dt + \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{\nu=1}^{g} k_\nu \dot{x}^\nu \dot{x}dt$$
$$+\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{\nu=1}^{q} c_\nu x^\nu \dot{x}dt = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\dot{x}dt. \tag{3.23}$$

Gdy założymy, że stacjonarny proces odpowiedzi jest także ergodyczny, można operacje uśrednienia po czasie zastąpić odpowiednimi operacjami na wartościach oczekiwanych. Można wtedy zauważyć, że pierwsza całka i czwarta grupa całek po lewej stronie równania (3.23) będą równe zeru. I tak w przypadku całki stojącej przy stałej m będzie

$$\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{x}\dot{x}dt\right] = E[\ddot{x}\dot{x}] = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}E[\dot{x}^2]. \tag{3.24}$$

Sygnał prędkości $v(t) \equiv \dot{x}(t)$ jest procesem stacjonarnym, więc musi spełniać warunek

$$\frac{d}{dt}E[\dot{x}^2] = 0. \tag{3.25}$$

Podobnie dla każdej z całek o dowolnym współczynniku c_ν musi zachodzić

$$\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_0^T x^\nu \dot{x}dt\right] = E[x^\nu \dot{x}] = \frac{1}{\nu+1}\frac{d}{dt}E[x^{\nu+1}]. \tag{3.26}$$

Stosowana w (3.26) przemienność operacji uśredniania z operacją różniczkowania jest uzasadniona, gdy proces $x(t)$ ma różniczkowalną funkcję korelacji [113]. Jest to dodatkowe założenie o odpowiedzi $x(t)$, które przyjmujemy dalej, że jest spełnione.

Ze względu na stacjonarność procesu $x(t)$ wartość oczekiwana $E[x^{\nu+1}]$ musi być także stała, więc

$$\frac{d}{dt}E[x^{\nu+1}] = 0. \tag{3.27}$$

Równanie bilansu energii w przypadku wymuszeń losowych stacjonarnych i ergodycznych jest następujące

$$hE[|v|] + \sum_{\nu=1}^{g} k_\nu E[v^{\nu+1}] = E[pv]. \tag{3.28}$$

Stosowanie równania (3.28) do wyznaczenia stałych wartości h, k_ν funkcji $F_t(v)$ jest możliwe, jeśli wartości oczekiwane odpowiednich sygnałów (sygnałów

odpowiednio utworzonych z sygnałów prędkości $v(t)$ i wymuszenia $p(t)$) będą mierzone.

Równanie bilansu mocy otrzymuje się po wymnożeniu równania (3.22) obustronnie przez elementarną prędkość $dv = \ddot{x}dt$ i uśrednieniu w przedziale czasu $t \in (0, T)$, mamy wtedy

$$\begin{aligned} m\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{x}\ddot{x}dt + \frac{1}{T}h\int_0^T \operatorname{sgn}\dot{x}\ddot{x}dt + \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{\nu=1}^{g} k_\nu \dot{x}^\nu \ddot{x}dt \\ + \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{\nu=1}^{q} c_\nu x^\nu \ddot{x}dt = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\ddot{x}dt. \end{aligned} \tag{3.29}$$

W przypadku stacjonarnych i ergodycznych procesów operację uśredniania w równaniu (3.29) można zastąpić wyznaczeniem wartości oczekiwanej. Wartości te będą równe zeru jedynie tam, gdzie występują współczynniki h, k_ν w równaniu (3.29). I tak w przypadku drugiego członu całki (3.29) (stała h) będzie

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T (\operatorname{sgn} v)\dot{v}dt = E[S(v)\dot{v}] = \frac{d}{dt}E[|v|]. \tag{3.30}$$

Jeśli $v(t)$ jest procesem stacjonarnym, to wartość oczekiwana $E[|v|]$ jest stała i otrzymujemy

$$\frac{d}{dt}E[|v|] = 0. \tag{3.31}$$

W przypadku zaś trzeciego członu całki (3.29) (stała k_ν) wartość oczekiwaną obliczymy jako

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T v^\nu \dot{v}dt = \frac{1}{\nu+1}\frac{d}{dt}E[v^{\nu+1}] = 0. \tag{3.32}$$

Po uwzględnieniu obydwu wyników (3.31) i (3.32) z równania (3.29) otrzymuje się równanie bilansu mocy w postaci

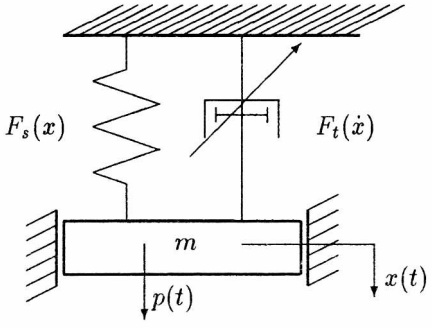
$$m\,E[a^2] + \sum_{\nu=1}^{q} c_\mu\,E[x^\nu a] = E[pa], \tag{3.33}$$

przy czym a – przyspieszenie masy m.

Uzyskane równania bilansu energii i bilansu mocy są spełnione także w przypadku wymuszeń losowych dowolnego kształtu (typu ciągłego bądź impulsowego), jeśli generują one w badanym układzie odpowiedź ustaloną. Ich wykorzystanie do określenia wartości nieznanych parametrów h, k_ν, m, c_μ badanego układu jest

możliwe wtedy, gdy równania (3.28) i (3.33) tworzą układ równań liniowo niezależnych i jeśli wartości oczekiwane występujące w tych równaniach są dane (np. z badań eksperymentalnych). Weryfikację opracowanych algorytmów przeprowadzono na układzie pokazanym na rysunku 3.13 o następujących danych

$$\begin{aligned} &F_t(\dot{x}) = k_1\dot{x} + k_3\dot{x}^3 + k_5\dot{x}^5, \quad F_s(x) = cx, \\ &m = 8 \text{ kg}, \quad c_1 = 9800 \text{ kg/s}^2, \quad k_1 = 260 \text{ kg/s}, \\ &k_3 = -320 \text{ (kg} \cdot \text{s)/m}^2, \quad k_5 = 340 \text{ (kg} \cdot \text{s}^3)/\text{m}^4. \end{aligned} \tag{3.34}$$



Rys. 3.13. Badany układ dynamiczny

Układ zamodelowano na maszynie analogowej, na której następnie wykonano badania testujące. Trzy parametry (k_1, k_3, k_5) określają nieliniową funkcję tłumienia $F_t(\dot{x})$, której wykres dla danych wartości (3.34) przedstawiono na rys. 3.14 (wykres a)).

Aby wyznaczyć eksperymentalnie kształt tej funkcji, zastosowano dwa typy wymuszeń losowych:

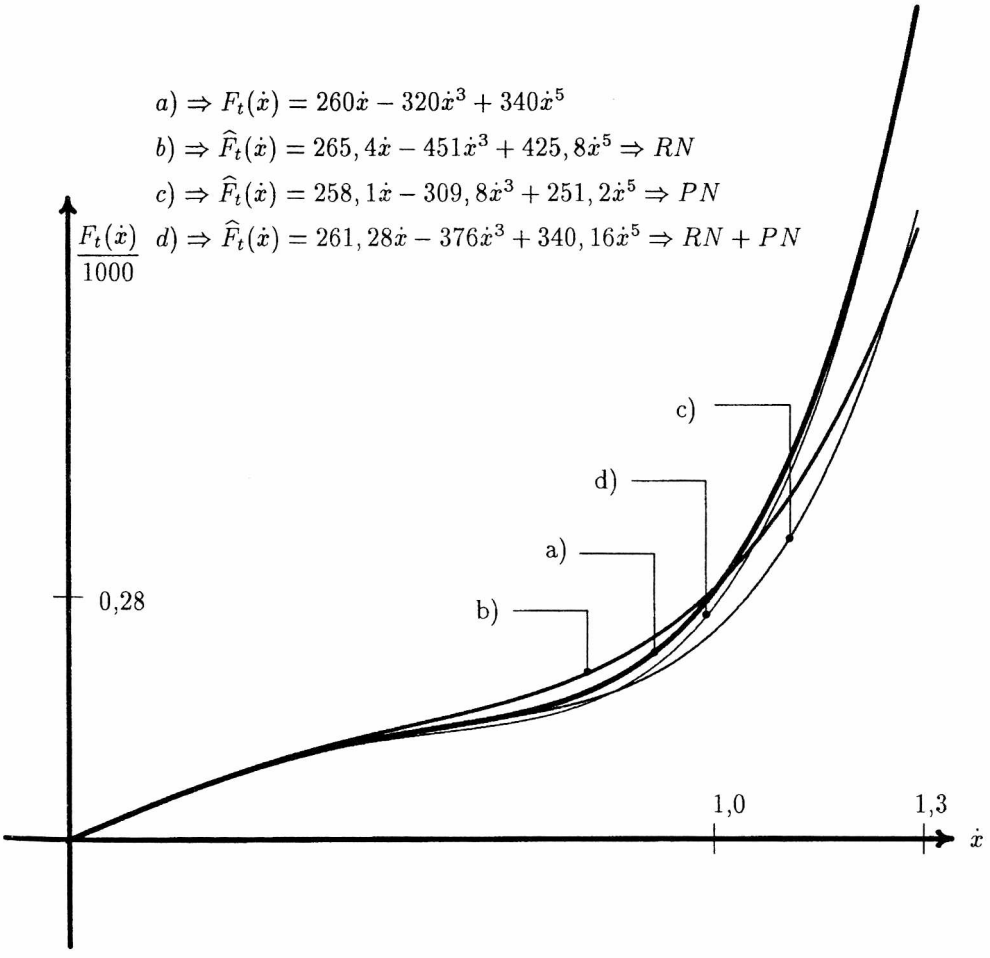
- biały szum (*Random Noise Excitation* – RN),
- różowy szum (*Pink Noise Excitation* – PN).

Równanie bilansu energii (por. równanie (3.28)) w rozważanym przypadku przyjmuje uproszczoną postać

$$k_1E[v^2] + k_3E[v^4] + k_5E[v^6] = E[pv]. \tag{3.35}$$

Do pomiarów czterech wartości średnich $E[v^2], E[v^4], E[v^6], E[pv]$ występujących w równaniu (3.35) podobnie jak dla wymuszeń harmonicznych (por. punkty 3.2, 3.3), użyto odpowiednio oprogramowanego analizatora, dzięki któremu utworzono następujące funkcje sygnałów $v(t)$ i $p(t)$:

- F1 = TIME2·TIME2 – kwadrat sygnału prędkości ($v^2(t)$),
- F2 = FFT(F1) – spektrum kwadratu sygnału prędkości,
- F3 = FFT (F1·F1) – spektrum sygnału prędkości podniesionego do potęgi czwartej ($v^4(t)$),
- F4 = FFT (F1·F1·F1) – spektrum sygnału prędkości podniesionego do potęgi szóstej ($v^6(t)$),
- F5 = FFT(TIME1·TIME2) – spektrum iloczynu sygnałów $p(t)$ i $v(t)$.



Rys. 3.14. Charakterystyki tłumienia dane i otrzymane z eksperymentu

Przykłady takich funkcji uzyskane w eksperymencie przedstawiono na rys. 3.15. W tabeli wartości średnich (tab. 3.1) podano przykładowe dane uzyskane na podstawie wykresów funkcji F2, ..., F5. Przykładowo dane w pozycji 6 tej tabeli uzyskano w następujący sposób:

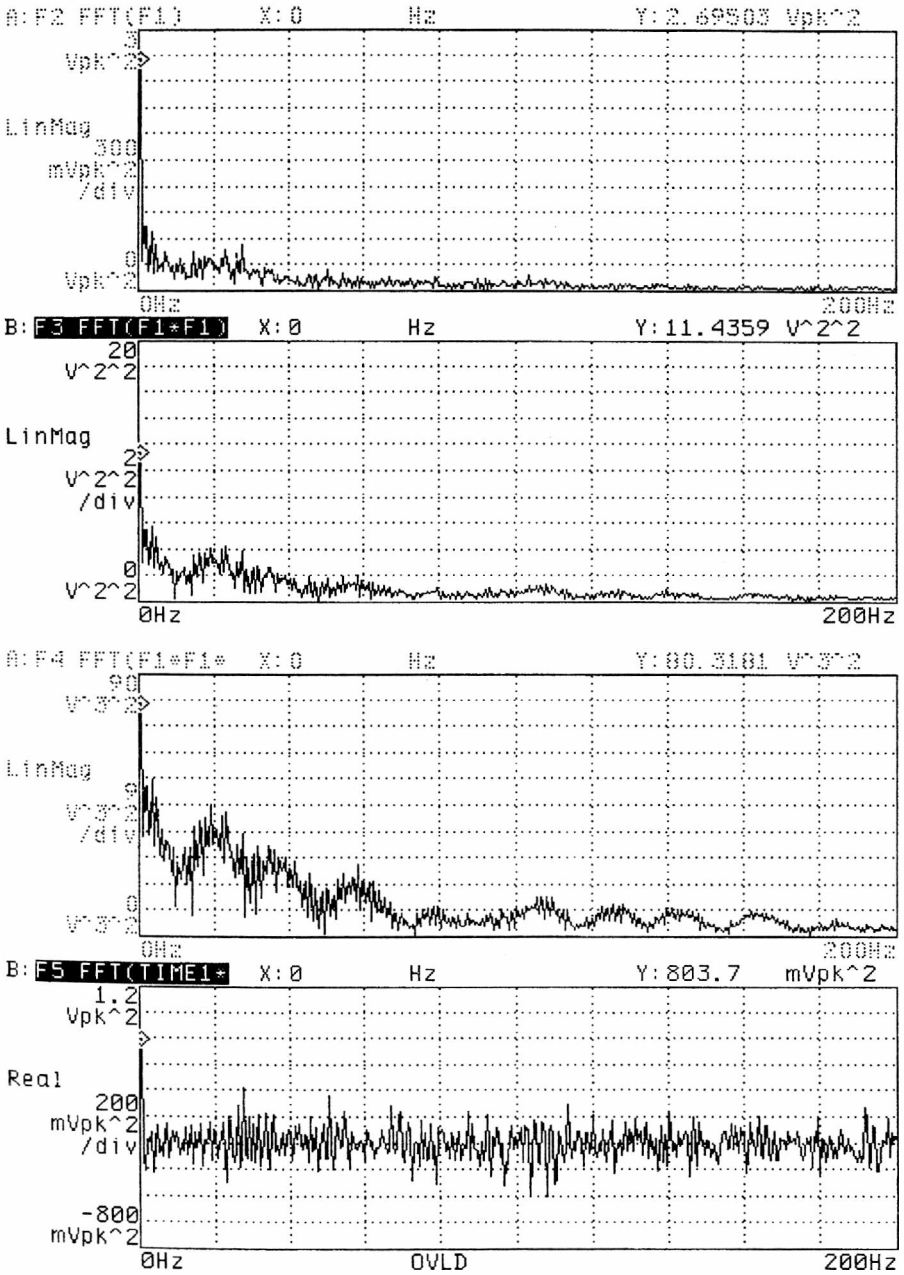
1) na podstawie wykresu funkcji F2 (rys. 3.15) otrzymano Y: $2{,}69503\,V_{pk}^2$, skąd $E[v^2] = 0{,}0269503(\mathrm{m/s})^2$
2) na podstawie wykresu funkcji F3 (rys. 3.15) otrzymano Y: $11{,}4359\,V_{pk}^{2\,2}$, skąd $E\,[v^4] = 0{,}0114359(\mathrm{m/s})^4$
3) na podstawie wykresu funkcji F4 (rys. 3.15) otrzymano Y: $80{,}3181\,V_{pk}^{3\,2}$, skąd $E[v^6] = 0{,}00008032(\mathrm{m/s})^6$
4) na podstawie wykresu funkcji F5 (rys. 3.15) otrzymano Y: $0{,}8037\,V_{pk}^2$, skąd $E[pv] = 0{,}008037((\mathrm{N{\cdot}m})/800\ \mathrm{s})$

W podobny sposób uzyskano zestawienie danych dla w przypadku wymuszenia typu szumu różowego, oznaczone jako PN (patrz tab. 3.2). Na rysunku 3.16 przedstawiono przykładowe funkcje F1÷F5, jakie uzyskano w tym przypadku.

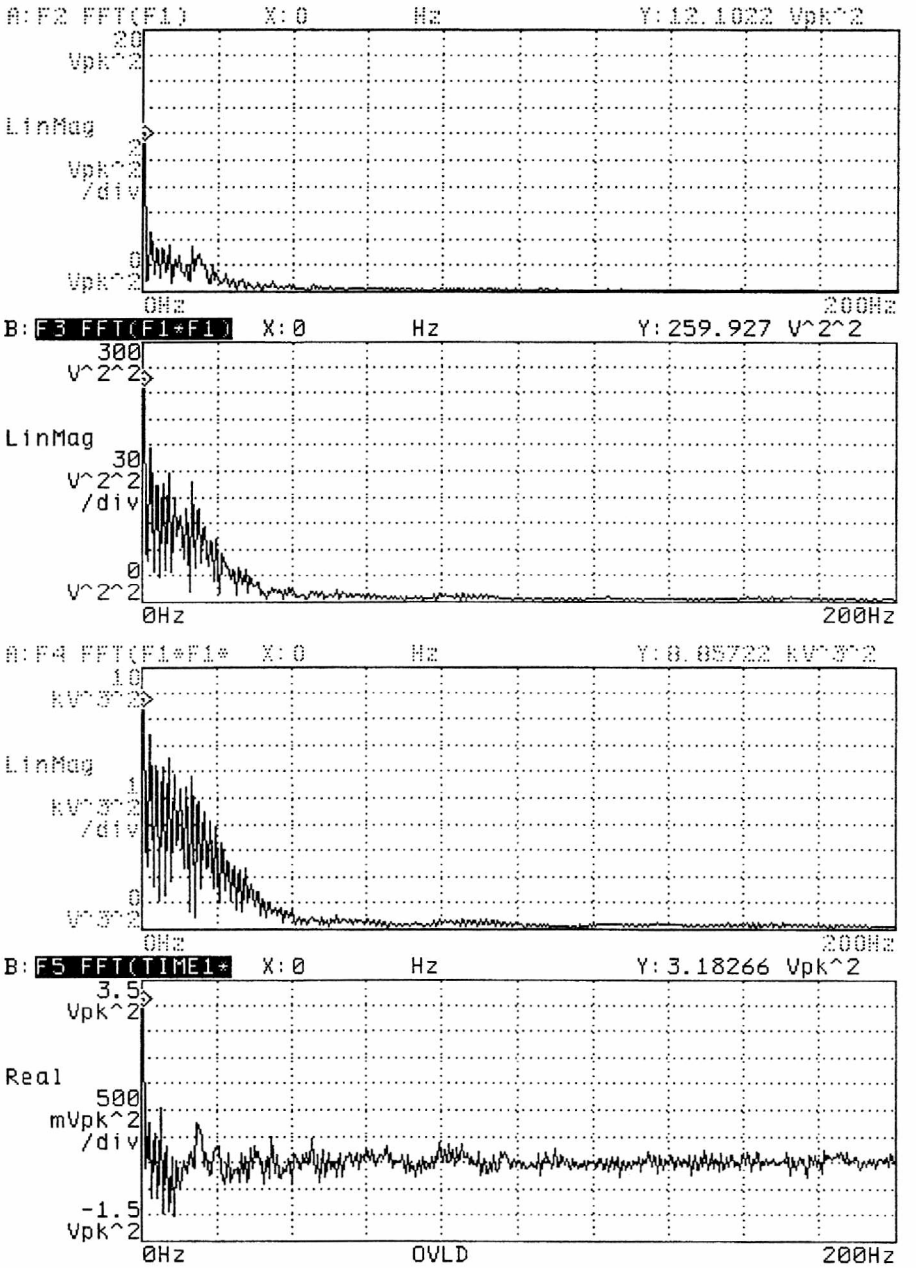
Na podstawie równania (3.35) i uzyskanych danych (tabele 3.1 i 3.2) obliczono wartości estymatorów $\widehat{k}_1, \widehat{k}_3, \widehat{k}_5$ parametrów k_1, k_3, k_5. Oszacowania te wykonano osobno w przypadku wymuszenia szumem białym (RN), osobno dla wymuszenia szumem różowym (PN) oraz razem dla obydwu wymuszeń. Wyniki wszystkich trzech przypadków w celu porównania przedstawiono na wspólnym rysunku (por. rys. 3.14), dokładny zaś opis eksperymentu jest opisany i podany w pracy [72, 75].

Tabela 3.1. Przykładowe wartości uzyskane w eksperymencie

Lp.	F2 = E[v^2]	F3 = E[v^4]	F4 = E[v^6]	F5 = E[pv]
1	0,18966	0,051314	0,021031	0,045425
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	0,090996	0,015092	0,0042637	0,022198
6	0,02695	0,0011436	0,00008032	0,008040
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
32	0,10614	0,0159143	0,0034727	0,02755



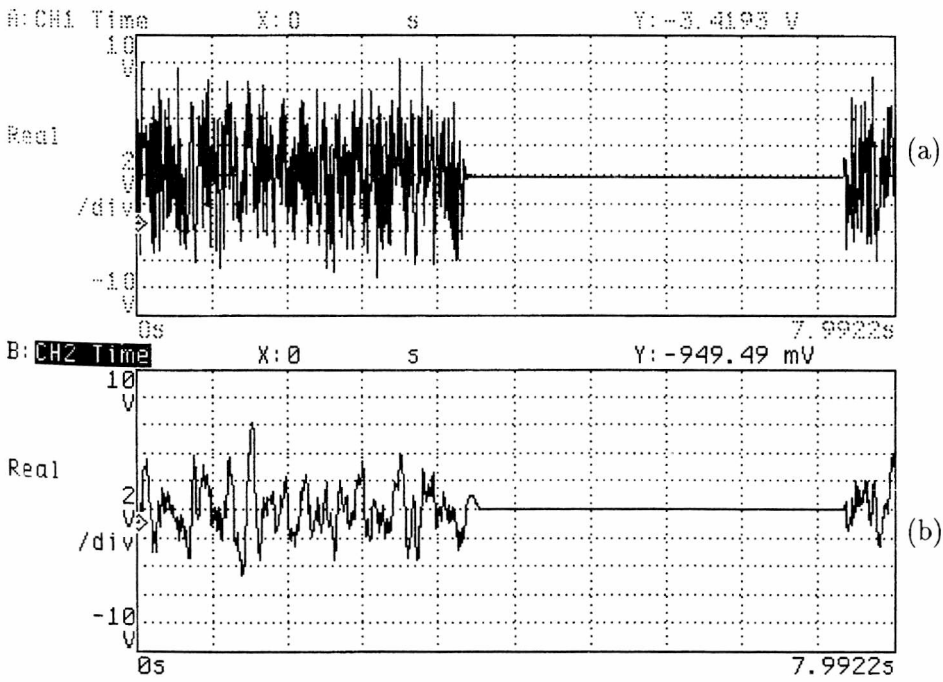
Rys. 3.15. Przykładowe funkcje $F1, \ldots, F5$ otrzymane z eksperymentu przy wymuszeniach stochastycznych typu RN (tab. 3.1, poz. 6)



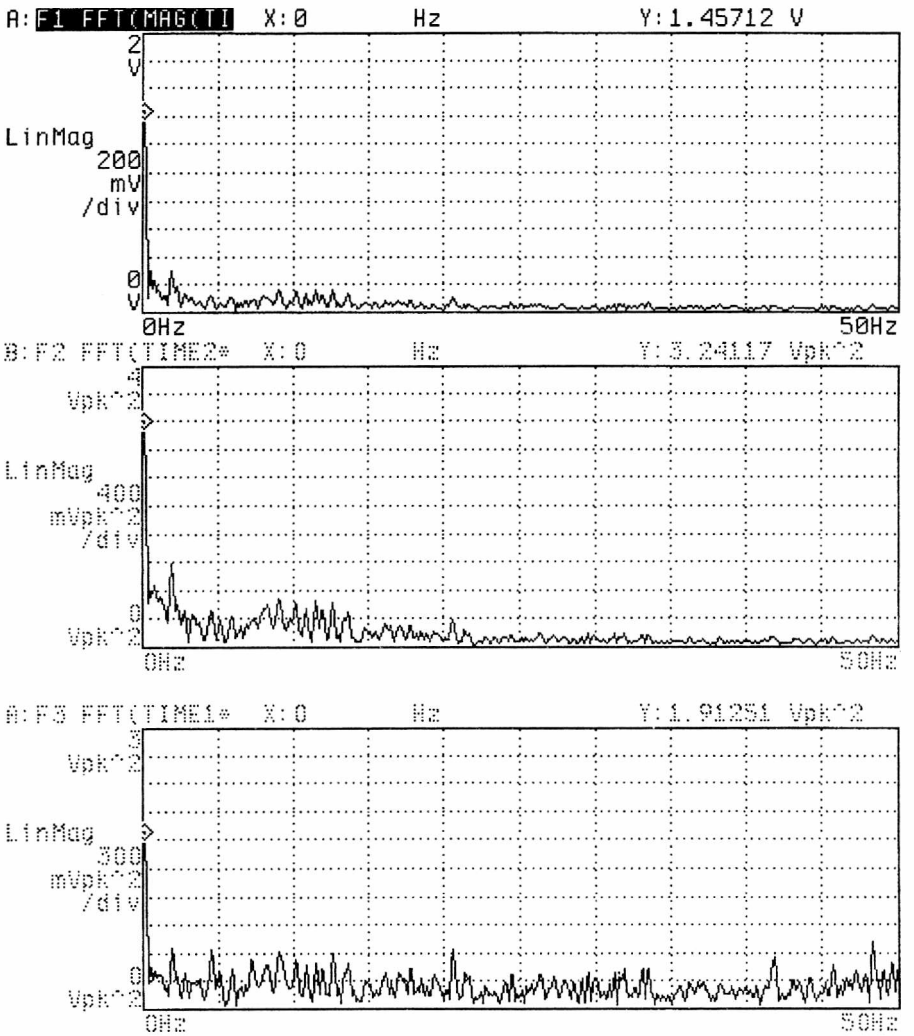
Rys. 3.16. Przykładowe funkcje F1,..., F5 otrzymane z eksperymentu przy wymuszeniach stochastycznych typu RN (tab. 3.2, poz. 18)

Tabela 3.2. Przykłady wartości średnich uzyskanych w eksperymencie (szum różowy–PN) z wykorzystaniem funkcji F2, ..., F5

Lp.	F2 = E[v^2]	F3 = E[v^4]	F4 = E[v^6]	F5 = E[pv]
1	0,131721	0,026851	0,00927514	0,0338197
2	0,16147	0,0435021	0,0177616	0,039988
3	0,20299	0,069316	0,0406493	0,049971
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
18	0,121022	0,0259927	0,0088572	0,031827
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
32	0,251428	0,0753756	0,0309312	0,062872



Rys. 3.17. Przykład wymuszenia typu detonacje losowe (z ang. *Burst Random*-BR) (a) oraz odpowiedzi badanego układu (b)



Rys. 3.18. Przykładowe odpowiedzi badanego układu (funkcje F1, F2, F3 przy wymuszeniach typu detonacje losowe (BR)

W celu rozszerzenia klasy wymuszeń wykorzystano możliwości posiadanej aparatury (analizator HP 35665A [34]) i badania prowadzono dla wymuszeń nietypowych, charakteryzujących się pojawianiem przerywanych sygnałów losowych, które nazwano detonacjami losowymi (z ang. *Burst Random*). Badany układ został pobudzony takim wymuszeniem. Był to układ opisany równaniem

$$m\ddot{x} + F_t(\dot{x}) + F_s(x) = m\ddot{x} + h\,\mathrm{sgn}\,\dot{x} + k\dot{x} + c_1 x + c_3 x^3 = p(t),$$

a do symulacji przyjęto następujące wartości parametrów

$$m = 8 \text{ kg}, \quad h = 15 \text{ kg/s}, \quad k = 85 \text{ kg/s}, \quad c_1 = 10^3 \text{ kg/s}^2, \quad c_3 = 10^7 \text{kg/(s}^2\text{m}^2).$$

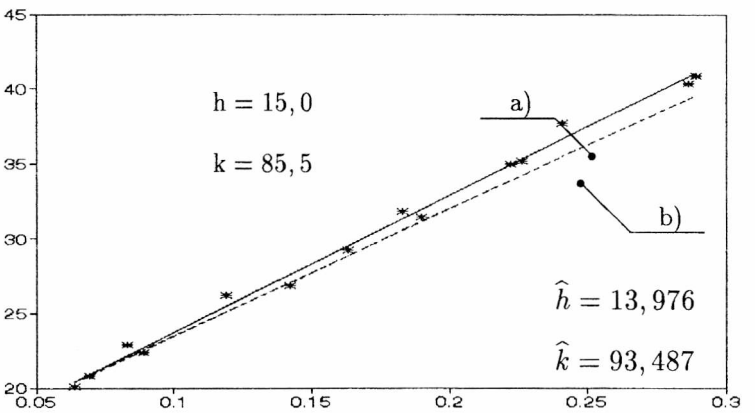
Przykład wymuszenia i odpowiedzi układu przedstawiono na rys. 3.17 i 3.18. Równanie bilansu energii jest w tym przypadku następujące

$$hE[|v|] + kE[v^2] = E[pv],$$

wymagało to więc skonstruowania trzech następujących funkcji F1, F2, F3

- F1 – spectrum sygnału $|v|$,
- F2 – spectrum sygnału v^2,
- F3 – spectrum sygnału pv.

Przykłady funkcji F1, F2, F3 dla tego typu wymuszeń przedstawiono na rys. 3.18, wyniki zaś obliczeń identyfikacyjnych na rys. 3.19.



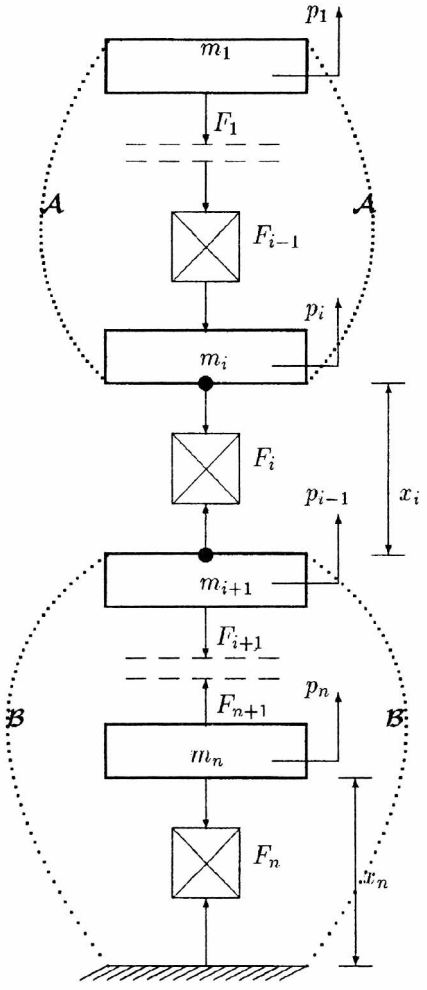
Rys. 3.19. Charakterystyka tłumienia wyznaczona przy wymuszeniach typu BR: (a) – wynik identyfikacji, (b) – charakterystyka dana

3.5. Uogólnienie metody dla układów o N-stopniach swobody

Przedstawiono metodę identyfikacji charakterystyk dynamicznych elementów sprężysto-tłumiących w układzie wielomasowym poddanym ergodycznym stacjonarnym wymuszeniom stochastycznym o dowolnym rozkładzie prawdopodobień-

stwa. W metodzie tej przyjęto, że zarówno odpowiedź układu, jak i wymuszenie mogą być mierzone w skończonym (dostatecznie długim) przedziale czasu T, w którym stan układu jest ustalony [67, 71, 74].

Interesujący i-ty element sprężysto-tłumiący, którego charakterystykę dynamiczną (funkcję $F_i(x_i, \dot{x}_i)$) należy w sposób eksperymentalny wyznaczyć, działa w pewnym układzie wielomasowym o konfiguracji przedstawionej na rys. 3.20.



Rys. 3.20. Schemat układu o konfiguracji kaskadowej

Przyjmijmy przemieszczenia względne x_ν sąsiednich mas jako bazę współrzędnych uogólnionych, równania różniczkowe ruchu układu dla dowolnych oddziały-

wań $F_\nu(x_\nu, \dot{x}_\nu)$ i dowolnych wymuszeń $p_\nu(t)$ (dla $\nu = 1, 2, \ldots, n$) można zapisać w postaci

$$
\begin{aligned}
&m_1 a_1 + F_1(x_1, \dot{x}_1) = p_1, \\
&m_2 a_2 + F_2(x_2, \dot{x}_2) = p_2 + F_1(x_1, \dot{x}_1), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&m_i a_i + F_i(x_i, \dot{x}_i) = p_i + F_{i-1}(x_{i-1}, \dot{x}_{i-1}), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&m_n a_n + F_n(x_n, \dot{x}_n) = p_n + F_{n-1}(x_{n-1}, \dot{x}_{n-1}),
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

gdzie przez a_i oznaczono przyspieszenia bezwzględne

$$
a_i = \sum_{\nu=i}^{n} \ddot{x}_\nu. \tag{3.37}
$$

Każdą siłę oddziaływania $F_\nu(x_\nu, \dot{x}_\nu)$ można wyrazić na podstawie układu równań (3.36) za pomocą wymuszeń i przyspieszeń odpowiednich mas w następujący sposób

$$
\begin{aligned}
&F_1(x_1, \dot{x}_1) = p_1 - m_1 a_1, \\
&F_2(x_2, \dot{x}_2) = p_2 - m_2 a_2 + F_1 = p_1 + p_2 - (m_1 a_1 + m_2 a_2), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&F_i(x_i, \dot{x}_i) = \sum_{\nu}^{i} p_\nu + \sum_{\nu}^{i} (-m_\nu a_\nu), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&F_n(x_n, \dot{x}_n) = \sum_{\nu}^{n} p_\nu + \sum_{\nu}^{n} (-m_\nu a_\nu).
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

W przypadku dowolnie wybranego i-tego elementu sprężysto-tłumiącego, funkcję oddziaływania $F_i(x_i, \dot{x}_i)$ podukładu $\mathcal{A}$ na podukład $\mathcal{B}$ (por. rys. 3.20) można zapisać w postaci

$$
F_i(x_i, \dot{x}_i) = w_i(t) + b_i(t), \tag{3.39}
$$

gdzie $w_i(t)$ – wypadkowa wszystkich sił wymuszających, działających na podukład $\mathcal{A}$, b_i – wypadkowa wszystkich sił bezwładności tego podukładu,

$$
w_i(t) = \sum_{\nu=1}^{i} p_\nu(t), \quad b_i(t) = \sum_{\nu=1}^{i} (-m_\nu a_\nu). \tag{3.40}
$$

Wartości funkcji $w_i(t)$ i $b_i(t)$ ponadto można mierzyć, jeśli odpowiednie masy $m_1, m_2, \ldots, m_i$ są znane. Wybrana i-ta funkcja oddziaływania składa się z nieliniowego członu czysto sprężystego $F_s(x_i)$ i nieliniowego członu czysto dyssypatywnego $F_t(\dot{x}_i)$

$$F_s(x_i) = \sum_{\mu=1}^{q} c_{i\mu} x^{\mu}, \quad F_t(\dot{x}_i) = h_i \operatorname{sgn} \dot{x}_i + \sum_{\mu=1}^{g} k_{i\mu} \dot{x}^{\mu}. \tag{3.41}$$

Równanie (3.39) przyjmuje wtedy postać

$$h_i \operatorname{sgn} \dot{x}_i + \sum_{\mu=1}^{g} k_{i\mu} \dot{x}^{\mu} + \sum_{\mu=1}^{q} c_{i\mu} x^{\mu} = w_i(t) + b_i(t). \tag{3.42}$$

W rozdziale 2 pokazano, że wyprowadzając dla równania (3.42), tzw. równanie bilansu energii oraz tzw. równanie bilansu mocy można określić nieznane parametry $h_i, k_{i\mu}, c_{i\mu}$ obydwu funkcji (3.41) dla dowolnych wymuszeń okresowych.

Przyjęto, że na rozpatrywany układ (rys. 3.20) działają wymuszenia opisane stacjonarnymi i ergodycznymi procesami stochastycznymi o dowolnym rozkładzie prawdopodobieństwa, pod wpływem których odpowiedź układu daje się opisać stacjonarnymi funkcjami losowymi. Wówczas prawa strona równania (3.42) jest również procesem stacjonarnym (patrz wyrażenie (3.4)). Po wymnożeniu równania (3.42) obustronie przez elementarne przemieszczenie $dx_i = \dot{x}_i dt$ i scałkowaniu w czasie T (gdzie T jest pewnym czasem obserwacji układu) można napisać

$$\begin{aligned} h_i \int_0^T (\operatorname{sgn} \dot{x}_i) \dot{x}_i dt + \sum_{\mu=1}^{g} k_{i\mu} \int_0^T \dot{x}_i^{\mu+1} dt + \sum_{\mu=1}^{q} c_{i\mu} \int_0^T x_i^{\mu} \dot{x}_i dt \\ = \int_0^T w_i \dot{x}_i dt + \int_0^T b_i \dot{x}_i dt. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Po podzieleniu obustronnie równania (3.43) przez T i dokonaniu przejścia granicznego $T \to \infty$, otrzymuje się

$$h_i E[(\operatorname{sgn} \dot{x}_i)\dot{x}_i] + \sum_{\mu=1}^{g} k_{i\mu} E[\dot{x}_i^{\mu+1}] + \sum_{\mu=1}^{q} c_{i\mu} E[x_i^{\mu} \dot{x}_i] = E[w_i \dot{x}_i] + E[b_i \dot{x}_i], \tag{3.44}$$

gdzie $E[...]$ – wartość oczekiwana odpowiedniego sygnału losowego.

W przypadku $E[x_i^{\mu} \dot{x}_i]$ dla dowolnego i oraz dowolnej potęgi μ prawdziwa jest zależność

$$E[x_i^{\mu} \dot{x}_i] = \frac{1}{\mu + 1} \frac{d}{dt} E[x_i^{\mu+1}]. \tag{3.45}$$

Wartość średnia sygnału $x_i^{\mu+1}$ jest stała (proces stacjonarny), zatem

$$E[x_i^{\mu}\dot{x}_i] = \frac{1}{\mu+1}\frac{d}{dt}E[x_i^{\mu+1}] = 0. \tag{3.46}$$

Uwzględniwszy wynik (3.46), można równanie (3.44) zapisać w postaci

$$h_i E[|\dot{x}_i|] + \sum_{\mu=1}^{g} k_{i\mu} E[\dot{x}_i^{\mu+1}] = E[(w_i + b_i)\dot{x}_i]. \tag{3.47}$$

Równanie (3.47) przy możliwości pomiaru wartości funkcji $w_i(t)$ i $b_i(t)$ może być wykorzystane do określenia stałych h_i, $k_{i\mu}$, jeśli odpowiednie wartości średnie $E[...]$ będą uzyskane eksperymentalnie. Równanie to zależy jedynie od stałych odpowiedzialnych za dyssypację energii.

Podobnie po wymnożeniu równania (3.42) obustronnie przez elementarną prędkość $dv_i = \ddot{x}_i dt$ otrzymuje się

$$\begin{aligned} &h_i\left[\frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{sgn}\dot{x}\,\ddot{x}_i dt\right] + \sum_{\mu=1}^{g} k_{i\mu}\left[\frac{1}{T}\int_0^T \dot{x}_i^{\mu}\ddot{x}_i dt\right] \\ &+\sum_{\mu=1}^{q} c_{i\mu}\left[\frac{1}{T}\int_0^T x_i^{\mu}\ddot{x}_i dt\right] = \frac{1}{T}\int_0^T w_i\ddot{x}_i dt + \frac{1}{T}\int_0^T b_i\ddot{x}_i dt, \end{aligned} \tag{3.48}$$

następnie po dokonaniu przejścia granicznego $T \longrightarrow \infty$ pierwszego wyrażenia równania (3.48) otrzymano

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T (\operatorname{sgn}\dot{x}_i)\ddot{x}_i dt = E[(\operatorname{sgn}\dot{x}_i)\ddot{x}_i] = \frac{d}{dt}E[|\dot{x}_i|] = 0 \tag{3.49}$$

i podobnie dla drugiego wyrażenia równania (3.48)

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \dot{x}_i^{\mu}\ddot{x}_i dt = E[\dot{x}_i^{\mu}\dot{x}_i] = \frac{1}{\mu+1}\frac{d}{dt}E[\dot{x}_i{}^{\mu+1}] = 0. \tag{3.50}$$

Po uwzględnieniu powyższych wyników równanie bilansu mocy ostatecznie przyjmie postać

$$\sum_{\mu=1}^{q} c_{i\mu} E[x_i^{\mu}\ddot{x}_i] = E[(w_i + b_i)\ddot{x}_i]. \tag{3.51}$$

Równanie (3.51) spełnione w przypadku wymuszeń stochastycznych jest odpowiednikiem wcześniej wyprowadzonego równania bilansu mocy (2.61) dla wymuszeń zdeterminowanych. Nie zależy ono jak widać od stałych $h_i, k_{i\mu}$, opisujących mechanizm tłumienia drgań.

Rozważa się przykład układu o dwóch stopniach swobody typu kaskadowego [59]. Kolejno (prawe strony równania (3.47)) dla $i = 1$ oraz $i = 2$ ($n = 2$) otrzymuje się

$$\begin{aligned} E[(w_1 + b_1)\dot{x}_1] &= E[(p_1 - m_1 a_1)\dot{x}_1], \\ E[(w_2 + b_2)\dot{x}_2] &= E[(p_1 + p_2 - m_1 a_1 - m_2 a_2)\dot{x}_2]. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Jeśli $a_2 = \ddot{x}_2$, to

$$E[a_2 \dot{x}_2] = E[\ddot{x}_2 \dot{x}_2] = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}E[\dot{x}_2^2] = 0,$$

stąd drugie równanie (3.52) przyjmie postać

$$E[(w_2 + b_2)\dot{x}_2] = E[(p_1 + p_2 - m_1 a_1)\dot{x}_2]. \tag{3.53}$$

Podobnie prawe strony równania (3.51) zapisuje się jako

$$E[(w_1 + b_1)\ddot{x}_1] = E[(p_1 - m_1 a_1)\ddot{x}_1], \tag{3.54}$$

$$E[(w_2 + b_2)\ddot{x}_2] = E[(p_1 + p_2 - m_1 a_1 - m_2 a_2)\ddot{x}_2]. \tag{3.55}$$

Uwzględniwszy podane wyniki, w przypadku $i = 1$ otrzymuje się kolejno:

- równanie bilansu energii w postaci

$$h_1 E[|\dot{x}_1|] + \sum_{\mu=1}^{g} k_{1\mu} E[\dot{x}_1^{\mu+1}] = E[(p_1 - m_1 a_1)\dot{x}_1], \tag{3.56}$$

- równanie bilansu mocy w postaci

$$m_1 E[a_1 \ddot{x}_1] + \sum_{\mu=1}^{q} c_{1\mu} E[x_1^{\mu} \ddot{x}_1] = E[p_1 \ddot{x}_1], \tag{3.57}$$

oraz podobnie, gdy $i = 2$

$$h_2 E[|\dot{x}_2|] + \sum_{\mu=1}^{g} k_{2\mu} E[\dot{x}_2^{\mu+1}] = E[(p_1 + p_2 - m_1 a_1)\dot{x}_2], \tag{3.58}$$

$$m_2 E[a_2 \ddot{x}_2] + \sum_{\mu=1}^{q} c_{2\mu} E[x_2^{\mu} \ddot{x}_2] = E[(p_1 + p_2 - m_1 a_1)\ddot{x}_2]. \tag{3.59}$$

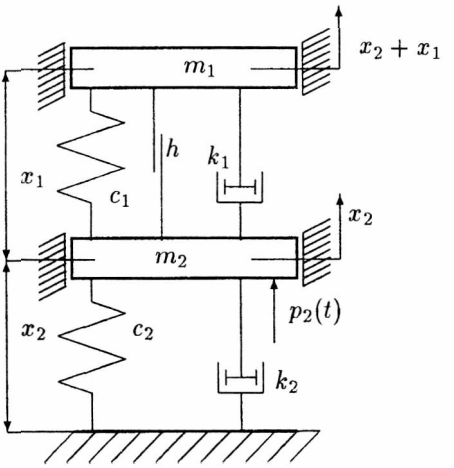
Równania (3.56)÷(3.59) umożliwiają pełną identyfikację układu dla dowolnych wymuszeń stacjonarnych, gdy odpowiednie wartości średnie występujące w tych równaniach są mierzalne. Algorytm takiej identyfikacji przedstawiono w tabeli 3.3. Odpowiednie sygnały (druga kolumna tabeli) powinny być mierzone równocześnie. Stąd też użycie odpowiednich analizatorów wielokanałowych określonej klasy jest w eksperymencie konieczne.

Tabela 3.3. Schemat algorytmu identyfikacji układu o dwóch stopniach swobody

Etap	Sygnały mierzone (równocześnie)	Wyznaczane wartości	Stosowane równanie	Parametry obliczone
1	$a_1, \ddot{x}_1, p_1, x_1$	$E[a_1\ddot{x}_1]$, $E[x_1^{\mu}\ddot{x}_1]$ $E[p_1\ddot{x}_1]$	(3.57)	$m_1, c_{1\mu}$
2	$\dot{x}_1, p_1, a_1,$	$E[\lvert\dot{x}_1\rvert]$, $E[\dot{x}_1^{\mu+1}]$, $E[(p_1 - m_1a_1)\dot{x}_1]$	(3.56)	$h_1, k_{1\mu}$
3	$a_2, \ddot{x}_2, \dot{x}_2$ $(p_1 + p_2), a_1$	$E[a_2\ddot{x}_2]$, $E[\dot{x}_2^{\mu}\ddot{x}_2]$ $E[(p_1 + p_2 - m_1a_1)\dot{x}_2]$	(3.59)	$m_2, c_{2\mu}$
4	$\dot{x}_2, p_1 + p_2, a_1,$	$E[\lvert\dot{x}_2\rvert]$, $E[\dot{x}_2^{\mu+1}]$, $E[(p_1 + p_2 - m_1a_1)\dot{x}_2]$	(3.58)	$h_2, k_{2\mu}$

Badania symulacyjne prowadzono dla układu o dwóch stopniach swobody, korzystano z wcześniej wyprowadzonych równań dla $i = 1$ oraz $i = 2$ $(n = 2)$ (por. równanie 3.36). W badanym układzie przedstawiono identyfikację górnego podukładu, przy wymuszeniu działającym na masę m_2. Równania ruchu badanego układu są następujące

$$\begin{aligned} m_1a_1 + F_1(x_1, \dot{x}_1) &= p_1, \\ m_2a_2 + F_2(x_2, \dot{x}_2) &= p_2, \end{aligned} \tag{3.60}$$



Rys. 3.21. Schemat badanego układu dynamicznego o dwóch stopniach swobody

gdzie $a_1 = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2$, $a_2 = \ddot{x}_2$, $v_1 = \dot{x}_1$, oraz

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \dot{x}_1) &= k_1\dot{x}_1 + c_1x_1 + h\,\mathrm{sgn}\,\dot{x}_1, \\ F_2(x_2, \dot{x}_2) &= k_2\dot{x}_2 + c_2x_2. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Przyjęto, że $p_1 \equiv 0$, $p_2 = p \neq 0$, następnie wyznaczono z pierwszego równania (3.60) F_1 i podstawiono do równania drugiego (3.60),

$$m_1a_1 + m_2a_2 + F_1(x_1 + F_2(x_2, \dot{x}_2) = p(t). \tag{3.62}$$

Równanie (3.62) nie jest najwygodniejsze do analizy w przypadku, kiedy np. nie jest znane wymuszenie $p(t)$, co może się zdarzyć w warunkach rzeczywistych. Dlatego równanie bilansu energii wyprowadzono w przypadku równania opisującego ruch masy m_1 po uwzględnieniu (3.61) jako

$$m_1\ddot{x}_1 + m_1\ddot{x}_2 + k_1\dot{x}_1 + c_1x_1 + h\,\mathrm{sgn}\,\dot{x}_1 = 0. \tag{3.63}$$

Po wymnożeniu równania (3.63) przez elementarne przemieszczenie $dx_1 = \dot{x}_1dt$ i scałkowaniu w czasie T, a następnie podzieleniu przez T oraz dokonaniu przejścia granicznego $T \Rightarrow \infty$, otrzymuje się równanie bilansu energii

$$a_0E[|\dot{x}_1|] + a_1E[\dot{x}_1^2] = -E[\ddot{x}_2\dot{x}_1] \tag{3.64}$$

w którym $a_0 = h/m_1$, $a_1 = k_1/m_1$ mogą być wyznaczone, gdy odpowiednie wartości oczekiwane $a_0E[|\dot{x}_1|]$, $a_1E[\dot{x}_1^2]$, $E[\ddot{x}_2\dot{x}_1]$ będą wyznaczone eksperymentalnie.

Równanie (3.64) zapisuje się jako

$$a_0 + a_1X = -Y, \tag{3.65}$$

w którym

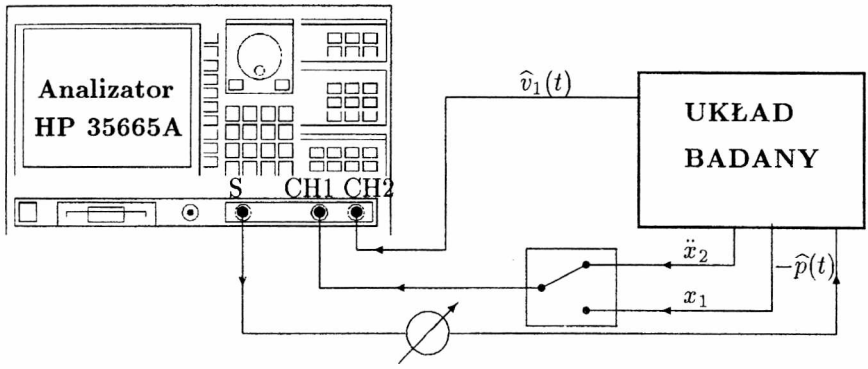
$$X = \frac{E[\dot{x}_1^2]}{E[|\dot{x}_1|]}, \qquad Y = \frac{E[\ddot{x}_2\dot{x}_1]}{E[|\dot{x}_1|]}.$$

Układ przedstawiony na rys. 3.21 zamodelowano na maszynie analogowej, wymuszenia rejestrowano miernikiem sygnałów, a ich przetwarzanie realizowano na analizatorze widmowym HP 35665A. Obliczenia wykonano dla następujących danych

$$\begin{aligned} &m_1 = 10\ \mathrm{kg}, \quad m_2 = 15\ \mathrm{kg}, \quad c_1 = 3{,}0 \cdot 10^4\ \mathrm{kg/s^2}, \\ &k_1 = 300\ \mathrm{kg/s}, \quad h = 50\ \mathrm{kg/s}, \\ &c_2 = 2 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/s^2}, \quad k_2 = 160\ \mathrm{kg/s}. \end{aligned}$$

Schemat konfiguracji aparaturowej stosowany w badaniach tego układu przedstawiono na rys. 3.22.

Różne co do kształtu sygnały wymuszające $p(t)$ realizowano, za pomocą generatora wymuszeń (blok source – S). Poziom (wzmocnienie) tych sygnałów regulowano w sposób płynny, tak ażeby uzyskać drgania układu na zadanych zakresach (zakres $0 < |v_1| < 1$ m/s). Na kanał pierwszy (CH1) analizatora przesyłano zawsze sygnał przyspieszenia dolnej masy (sygnał $\ddot{x}_2$). Na kanał drugi (CH2) przesyłano natomiast zawsze sygnał prędkości (sygnał v_1).



Rys. 3.22. Układ pomiarowy

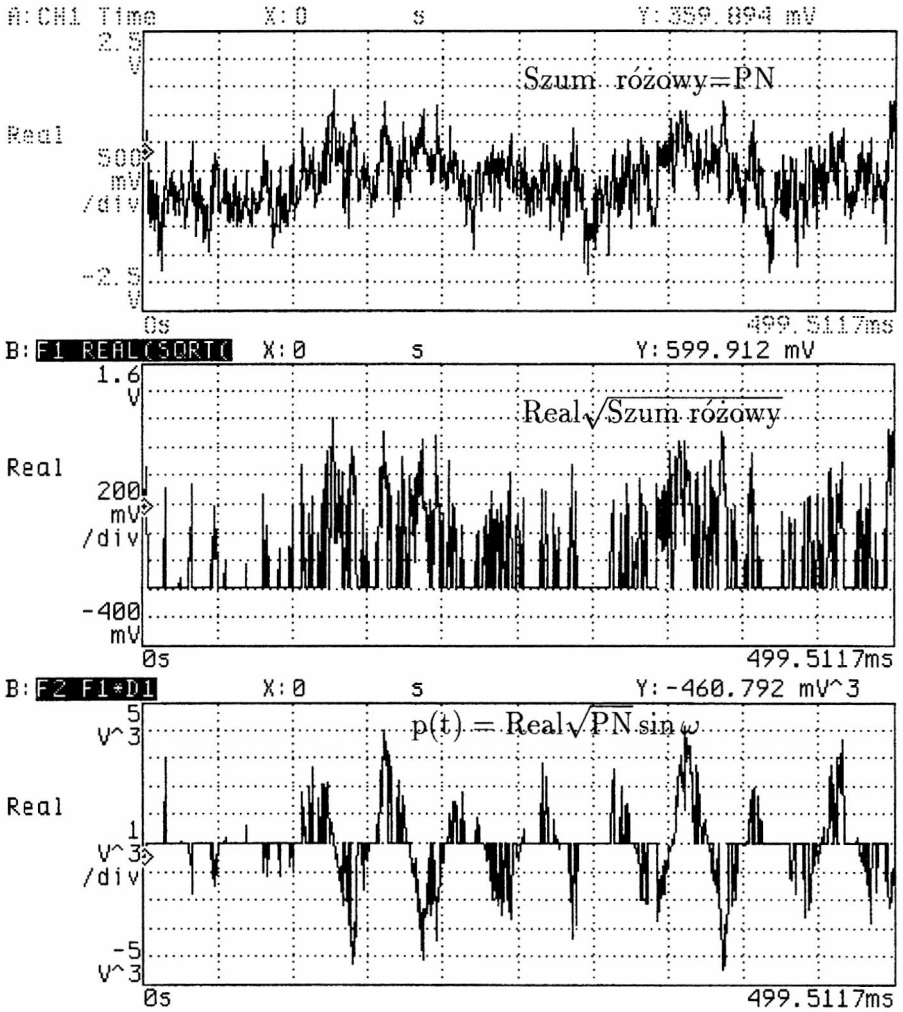
Identyfikację tłumienia badanego układu prowadzono w przypadku wymuszeń czysto sinusoidalnych, jak i wymuszeń w postaci losowej serii impulsów. Pozwoliło to na porównanie wyników uzyskanych z obydwu typów wymuszeń dynamicznych. Wymuszenia losowe $p(t)$ realizowano za pomocą generatora sygnałów analizatora drgań, pomnożono część rzeczywistą z pierwiastka kwadratowego procesu stacjonarnego przez sygnał czysto sinusoidalny, czyli

$$p(t) = \mathrm{Real}[\sqrt{\text{proces stacjonarny}}] \times \text{sygnał harmoniczny}(\omega). \tag{3.66}$$

Losowym procesem stacjonarnym był szum różowy (PN). W członie harmonicznym ustawiano odpowiednio częstość ω, tak by uzyskać zmienną intesywność pojawiania się impulsów (patrz rys. 3.23). Wykonano badania dla następujących częstości członu harmonicznego: 5, 10, 20, 30, 40 Hz.

W przypadku wymuszeń czysto harmonicznych badania wykonano dla częstości zbliżonych do rezonansu zmiennej $x_1(t)$, to jest dla wartości $9, 11, 13$ Hz. Stosowano oprogramowanie analizatora (opcja szybkiej transformaty Fouriera FFT) i uzyskano podwójne wartości średnich sygnałów $|v_1|, v_1^2, \ddot{x}_2 v_1$ konieczne do identyfikacji. Wartości te uzyskiwano przez zaprogramowanie na analizatorze następujących operacji (funkcji):

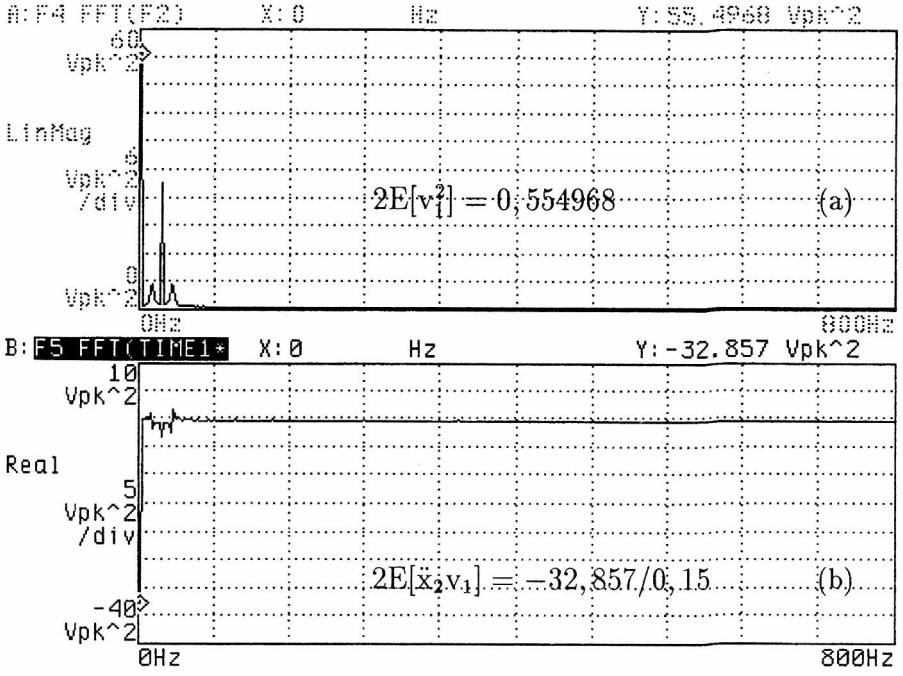
- F1 = MAG(TIME2) – przebieg sygnału $|v_1|$,
- F2 = TIME2*TIME2 – przebieg sygnału v_1^2,
- F3 = FFT(F1) – widmo przebiegu sygnału v_1,
- F4 = FFT(F2) – widmo przebiegu sygnału v_1^2,
- F5 = FFT(TIME1*TIME2) – widmo przebiegu sygnału $\ddot{x}_2 v_1$.



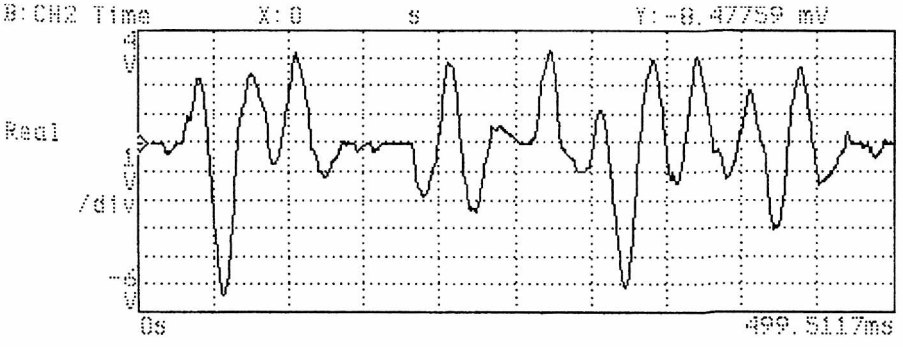
Rys. 3.23. Przykład tworzenia stosowanych wymuszeń losowych (częstość członu sinusoidalnego ω = 20 Hz)

Przykłady uzyskanych w czasie eksperymentu funkcji F4 i F5 w przypadku wymuszeń czysto harmonicznych przedstawiono na rys. 3.24, dla impulsowych zaś wymuszeń losowych na rys. 3.25, 3.26, 3.27 i 3.28.

Przez zmianę poziomu i częstości wymuszeń uzyskano zbiór wartości średnich (około kilkunastu dla każdej częstości), na podstawie których obliczono odpowiadające im wartości X, Y (patrz równania (3.65)).



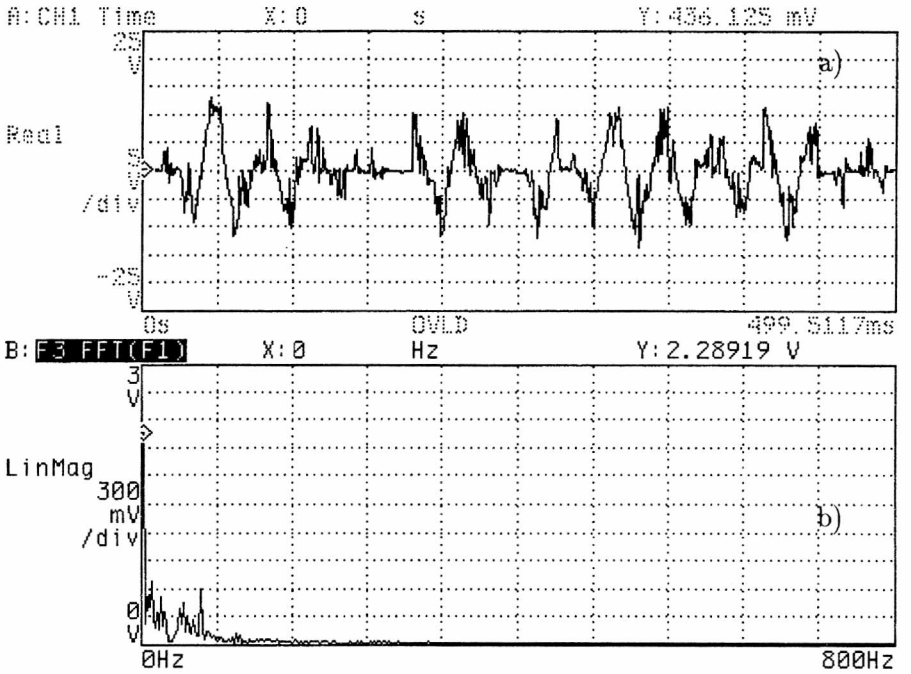
Rys. 3.24. Widmo sygnału v_1^2 (a) i sygnału $\ddot{x}_2 v_1$ (b) wyznaczone przy wymuszeniach harmonicznych (11 Hz)



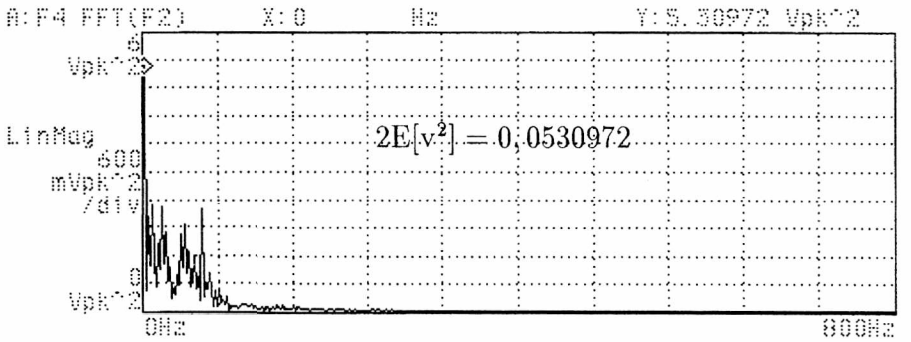
Rys. 3.25. Przykład przebiegu prędkości v_1 przy impulsowych wymuszeniach losowych (częstość członu harmonicznego 30 Hz)

Każdy pomiar wykonywano dwukrotnie dla każdego poziomu wymuszenia w celu sprawdzenia powtarzalności wyników.

Uzyskane zależności $Y(X)$ w przypadku stosowanych wymuszeń przedstawiono na rys. 3.29 i 3.30. Zależności te aproksymowano metodą regresji liniowej osobno dla każdego z wariantu wymuszeń.

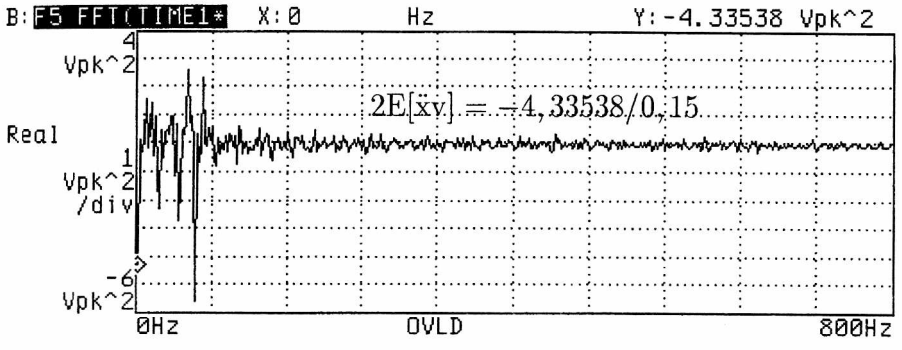


Rys. 3.26. Przykład sygnału przyspieszeń $\ddot{x}_2$ (a) oraz widmo sygnału prędkości v_2 (b) przy impulsowych wymuszeniach losowych (częstość członu harmonicznego 30 Hz)

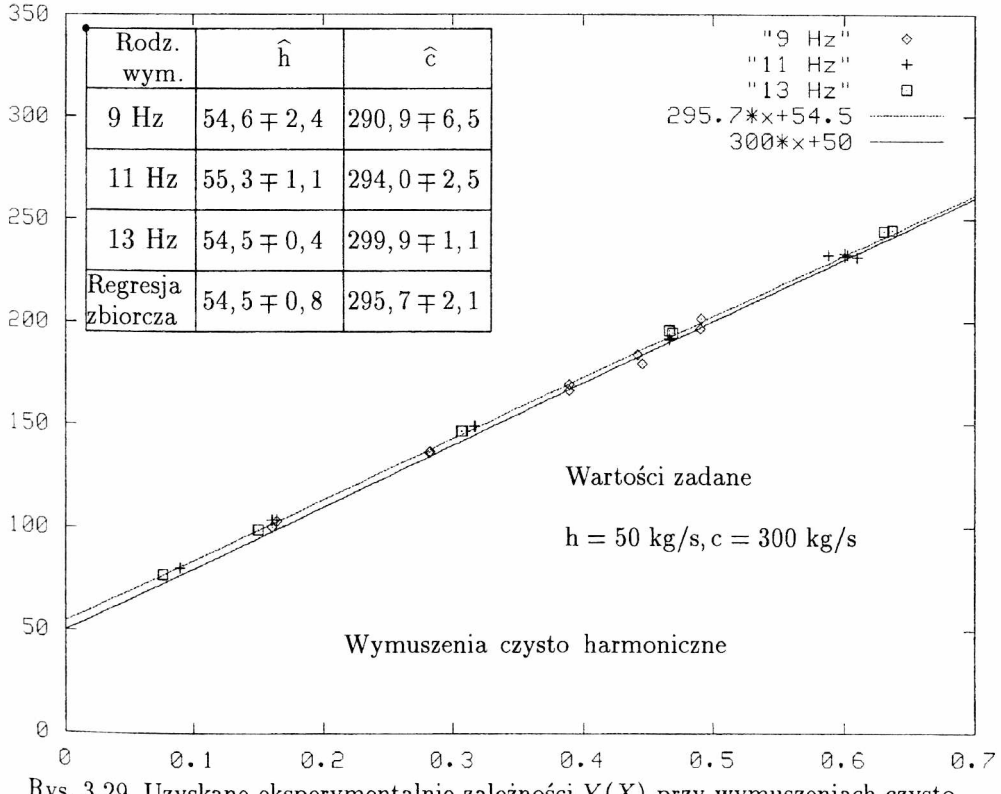


Rys. 3.27. Przykład funkcji F4 uzyskanych przy impulsowych wymuszeniach losowych (częstość członu harmonicznego 30 Hz)

W wyniku przeprowadzonych badań można stwierdzić, że równanie bilansu energii (3.64) jest praktycznie spełnione zarówno przez wartości oczekiwane uzyskane przy wymuszeniach czysto harmonicznych, jak i losowych wymuszeniach impulsowych.



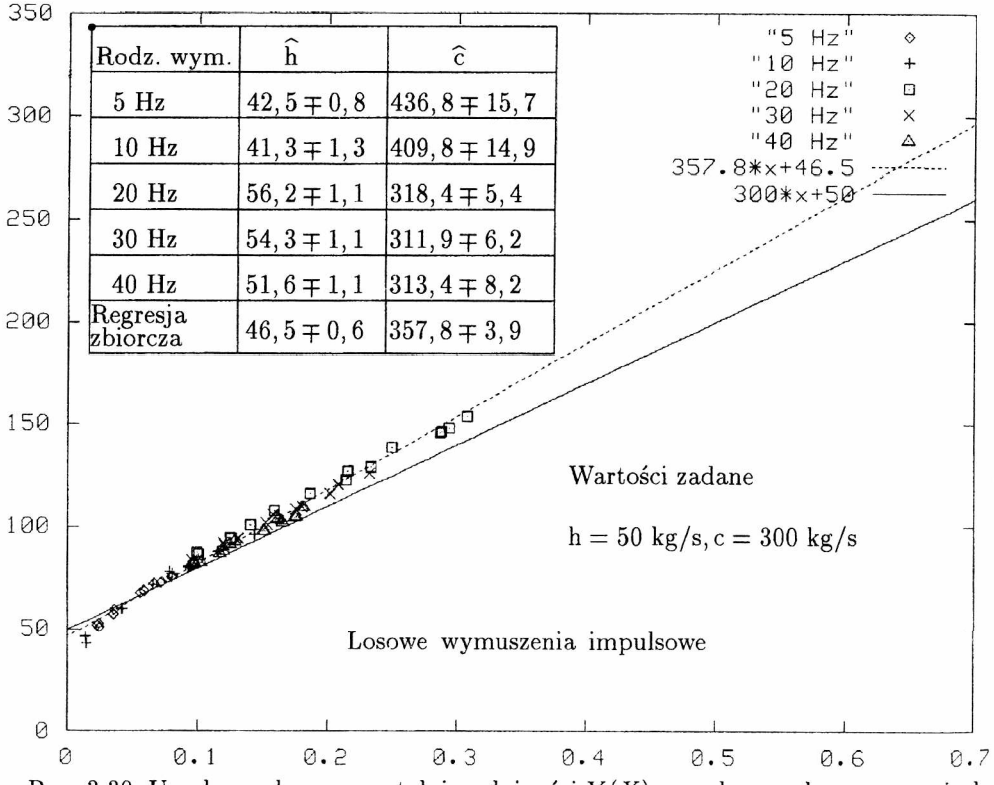
Rys. 3.28. Przykład funkcji F5 uzyskanych dla impulsowych wymuszeń losowych (częstość członu harmonicznego 30 Hz)



Rodz. wym.	$\hat{h}$	$\hat{c}$
9 Hz	$54,6 \mp 2,4$	$290,9 \mp 6,5$
11 Hz	$55,3 \mp 1,1$	$294,0 \mp 2,5$
13 Hz	$54,5 \mp 0,4$	$299,9 \mp 1,1$
Regresja zbiorcza	$54,5 \mp 0,8$	$295,7 \mp 2,1$

Rys. 3.29. Uzyskane eksperymentalnie zależności $Y(X)$ przy wymuszeniach czysto sinusoidalnych oraz wyniki ich aproksymacji

Jeśli przy wymuszeniach harmonicznych wyniki aproksymacji są prawie idealne (rys. 3.29), to w przypadku dowolnych wymuszeń impulsowych wyniki te są obarczone już większym błędem.



Rodz. wym.	$\widehat{h}$	$\widehat{c}$
5 Hz	$42,5 \mp 0,8$	$436,8 \mp 15,7$
10 Hz	$41,3 \mp 1,3$	$409,8 \mp 14,9$
20 Hz	$56,2 \mp 1,1$	$318,4 \mp 5,4$
30 Hz	$54,3 \mp 1,1$	$311,9 \mp 6,2$
40 Hz	$51,6 \mp 1,1$	$313,4 \mp 8,2$
Regresja zbiorcza	$46,5 \mp 0,6$	$357,8 \mp 3,9$

Rys. 3.30. Uzyskane eksperymentalnie zależności $Y(X)$ przy losowych wymuszeniach impulsowych oraz wyniki ich aproksymacji

Błąd ten jednak wyraźnie maleje wraz ze wzrostem intensywności pojawiania się impulsów. Najbardziej zbliżone do danych są wartości $\widehat{h}, \widehat{c}$ uzyskane dla intensywności 30 i 40 Hz, najmniej zaś dokładne wyniki uzyskano przy intensywności 5 Hz. Wyraźnie widać, że jest to związane z uzyskanym w czasie badań zakresem zmian zmiennej X. Zakres ten zależy wyraźnie od intensywności pojawiania się impulsów (patrz rys. 3.30). Widać, że w przypadku intensywności 5 i 10 Hz, zakres zmian zmiennej X jest zbyt mały, aby uzyskać zadowalające rezultaty z aproksymacji. Nawet w przypadku regresji zbiorczej wykonanej dla wszystkich wymuszeń losowych zakres zmiennej X jest o połowę mniejszy od zakresu uzyskanego przy wymuszeniach czysto harmonicznych.

4. Procedury identyfikacji układów zdegenerowanych

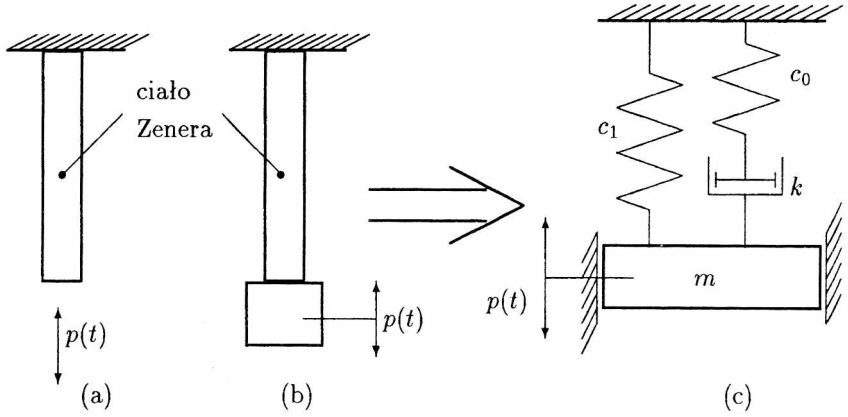
4.1. Wprowadzenie

Zjawisko rozpraszania energii w dynamicznie obciążonych elementach maszyn należy do najtrudnieszych zadań identyfikacji. Punktem wyjściowym procesu identyfikacji tłumienia drgań takich elementów jest prawidłowe założenie modelu oddziaływań sprężysto-tłumiących. Model taki na ogół zależy od rodzaju materiału, z którego wykonany jest badany element. Wiąże się to z przyjęciem określonych modeli reologicznych materiału (tarcie wewnętrzne) [21], a także z modelami rozpraszania energii w utwierdzeniach badanych elementów (tarcie konstrukcyjne).

Właściwości sprężysto-tłumiące współczesnych materiałów konstrukcyjnych znacznie odbiegają od tradycyjnych założeń związanych z liniowym prawem Hooke'a i Kelvina. Nieodwracalne procesy, jakie zachodzą podczas obciążeń dynamicznych wymagają stosowania bardziej złożonych modeli reologicznych. Jednakże przyjęcie bardziej złożonego modelu reologicznego materiału prowadzi w konsekwencji do przyjęcia modelu dynamicznego o odpowiednio złożonej konfiguracji. Przykładowo założenie modelu Zenera (tzw. ciało standardowe [21]) w przypadku pręta poddanego np. cyklicznym obciążeniom rozciągającym (patrz rys. 4.1a) prowadzić powinno do przyjęcia modelu dynamicznego drgań masy przytwierdzonej do tego pręta (rys. 4.1b) w postaci modelu zdegenerowanego (rys. 4.1c). Umożliwia to identyfikację dynamiczną elementów maszyn po uprzedniej identyfikacji właściwości dynamicznych materiału i odwrotnie: na identyfikację materiału po wcześniejszej identyfikacji własności sprężysto-tłumiących elementu maszyny.

Stwarza to jednak **konieczność opracowywania metod identyfikacji układów zdegenerowanych liniowych, a także zwłaszcza w przypadkach większych amplitud, układów zdegenerowanych o elementach nieliniowych.**

Generalnie układem zdegenerowanym posiadającym niecałkowitą liczbę stopni swobody, będziemy nazywać układ liniowy lub nieliniowy, charakteryzujący się tzw. elementem Maxwella. Podstawową własnością takiego układu jest to, że macierz mas i macierz sztywności, nie są dodatnio określone.



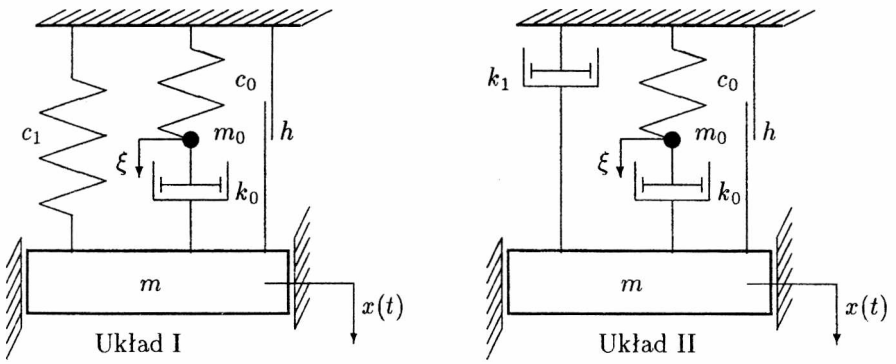
Rys. 4.1. Model dynamiczny drgań masy m wynikający z modelu reologicznego materiału pręta

Jest to istotna różnica w stosowanych dotychczas w mechanice procedurach identyfikacyjnych, które polegają głównie na wykorzystaniu modelu liniowego o konfiguracji równoległej [42, 86, 124] bądź też nieliniowego, w którym siła oddziaływania elementu sprężysto-tłumiącego na masę m zależy jedynie od przemieszczenia x i prędkości $\dot{x}$ ($S = S(x, \dot{x})$). W niniejszym rozdziale przedstawiono procedury identyfikacji układów sprężysto-tłumiących elementów maszyn opartych na modelach zdegenerowanych z członami nieliniowymi, np. w postaci tarcia suchego. Koncepcja budowy tych procedur, polega na wykorzystaniu równań bilansu energii i bilansu mocy, które zostały dotychczas wyprowadzone i przetestowane dla układów niezdegenerowanych (patrz rozdz. 2, 3).

Omówiono wstępnie dwa przykłady układów zdegenerowanych przedstawionych na rys. 4.2. Układy te są identyczne w sensie liczby równań opisujących ruch masy skupionej m. Różnica polega jednak na odmiennym opisie samych oddziaływań sprężysto-tłumiących, co jest związane z różną konfiguracją tych układów, a konkretnie na zastąpieniu elementu sprężystego o sztywności c_1, elementem tłumiącym o współczynnniku k_1 [14].

4.2. Identyfikacja układów zdegenerowanych z wykorzystaniem równań bilansu energii

Równania bilansu energii przyjętych (rys. 4.2) najprostszych układów zdegenerowanych można wyprowadzić na podstawie odpowiednich równań różniczkowych drgań masy m. Równania takie można uzyskać przez wprowadzenie zmiennej ξ opisującej ruch masy fikcyjnej $m_0 = 0$ (rys. 4.2) z dwu równań równowagi sił zapisanych odpowiednio dla masy m_0 i masy m. Jest to konieczne ze względu na to, że zmienna ξ jest (np. w przypadku badań materiałów) niemierzalna.



Rys. 4.2. Schematy zdegenerowanych modeli w proponowanych procedurach identyfikacyjnych

W układzie rzeczywistym obserwowany jest ruch jedynie masy m (patrz rys. 4.1). Ujęcie to pokazano w przypadku układu I (rys. 4.2). Równania równowagi sił tego układu zapisano jako

$$m_0\ddot{\xi} + c_0\xi - k_0(\dot{x} - \dot{\xi}) = 0, \tag{4.1}$$

$$m\ddot{x} + k_0(\dot{x} - \dot{\xi}) + c_1 x + h \operatorname{sgn} \dot{x} = p(t), \tag{4.2}$$

c_0, c_1 – stałe określające charakterystyki sprężystości, k_0, k_1 – współczynniki tłumienia wiskotycznego, h – współczynnik tarcia suchego.

Jeśli $m_0 = 0$, to

$$c_0\xi = k_0(\dot{x} - \dot{\xi}). \tag{4.3}$$

Z równania (4.2), po uwzględnieniu równości (4.3), otrzymuje się

$$m\ddot{x} + c_0\xi + c_1 x + h \operatorname{sgn} \dot{x} = p. \tag{4.4}$$

Po wyznaczeniu z równania (4.4) zmiennej ξ, a następnie zróżniczkowaniu otrzymano

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{c_0}\left[\dot{p} - m\,\dddot{x} - c_1\dot{x} - h\frac{d}{dt}(\operatorname{sgn}\dot{x})\right]. \tag{4.5}$$

Przez podstawienie zmiennej $\dot{\xi}$ z równania (4.4) do równania (4.2), otrzymuje się jedno równanie różniczkowe ruchu masy m w postaci

$$\gamma m\,\dddot{x} + m\ddot{x} + (k_0 + \gamma c_1)\dot{x} + h\operatorname{sgn}\dot{x} + c_1 x + \gamma h\frac{d}{dt}(\operatorname{sgn}\dot{x}) = p + \gamma\dot{p}, \tag{4.6}$$

w którym $\gamma = k_0/c_0$. Po zastosowaniu wprost II zasady dynamiki dla układu rzeczywistego (rys. 4.1b) można napisać

$$m\ddot{x} + S = p, \tag{4.7}$$

gdzie S – siła oddziaływania elementu sprężysto-tłumiącego na masę m.

Z porównania obydwu równań (4.6) i (4.7) wynika, że S jest funkcją nie tylko prędkości $\dot{x}$ i przemieszczenia x, ale także trzeciej pochodnej $\dddot{x}$ przemieszczenia x względem czasu, a dokładnie

$$S = S(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}\ \dot{p}) = \gamma m\,\dddot{x} + (k_0 + \gamma c_1)\dot{x} + h\operatorname{sgn}\dot{x} + c_1 x + \gamma h\frac{d}{dt}\operatorname{sgn}\dot{x} - \gamma\dot{p}. \tag{4.8}$$

Równanie bilansu energii otrzymuje się po wymnożeniu równania różniczkowego drgań układu przez elementarne przemieszczenie dx i scałkowaniu po jednym pełnym okresie drgań T. W rozdziale 2 i 3 do wyprowadzenia tych równań korzysta się jedynie z założenia stabilności układu, tzn. istnienia okresowej odpowiedzi układu podczas wymuszeń harmonicznych lub okresowych

$$x(t) = x(t+T) \text{ jeśli } p(t) = p(t+T), \tag{4.9}$$

gdzie T – dowolnie duży (skończony) przedział czasu.

Takie postępowanie w przypadku równania (4.6) daje

$$\int_0^T \dddot{x}\,\dot{x}dt = \int_{a(0)}^{a(T)} v da = \mathcal{A}_a^v, \tag{4.10}$$

$$\int_0^T \ddot{x}\dot{x}dt = \int_{v(0)}^{v(T)} v dv = \frac{v^2}{2}\Big|_{v(0)}^{v(T)} = 0 \tag{4.11}$$

bez względu na postać funkcji $v(t)$, ponieważ $v(0) = v(T)$,

$$\int_0^T \dot{x}\dot{x}dt = \int_{x(0)}^{x(T)} v dx = \mathcal{A}_x^v, \tag{4.12}$$

$$\int_0^T \operatorname{sgn} \dot{x}\dot{x}dt = \int_{x(0)}^{x(T)} (\operatorname{sgn} v)dx = \mathcal{A}_x^{\operatorname{sgn} v}, \tag{4.13}$$

$$\int_0^T x\dot{x}dt = \int_{x(0)}^{x(T)} xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_{x(0)}^{x(T)} = 0 \tag{4.14}$$

podobnie i ten wynik nie zależy od funkcji $x(t)$, gdyż $x(0) = x(T)$,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(\operatorname{sgn} \dot{x})\dot{x}dt = \int_{v(0)}^{v(T)} (\operatorname{sgn} v)dv = -|v|\Big|_{x(0)}^{x(T)} = 0, \tag{4.15}$$

$$\int_0^T p\dot{x}dt = \int_{x(0)}^{x(T)} pdx = \mathcal{A}_x^p, \tag{4.16}$$

$$\int_0^T \dot{p}\dot{x}dt = -\int_{v(0)}^{v(T)} pdv = -\mathcal{A}_v^p, \tag{4.17}$$

gdzie $\mathcal{A}_y^z$ – pola zamknięte przez pętle zależności zmiennych $z(y)$ (np. $\mathcal{A}_x^v$ – pole zamknięte wewnątrz portretu fazowego $v(x)$, $\mathcal{A}_x^p$ – pole zamknięte wewnątrz dynamicznej pętli histerezy $p(x)$ itp.) Otrzymujemy równanie bilansu energii dla układu I w postaci

$$\gamma m\mathcal{A}_a^v + (k_0 + \gamma c_1)\mathcal{A}_x^v + h\mathcal{A}_x^{\operatorname{sgn} v} = \mathcal{A}_x^p - \gamma\mathcal{A}_v^p. \tag{4.18}$$

Podobne postępowanie, ale w przypadku modelu II, daje:

- równania równowagi sił

$$m_0\ddot{\xi} + c_0\xi - k_0(\dot{x} - \dot{\xi}) = 0,$$

$$m\ddot{x} + k_0(\dot{x} - \dot{\xi}) + k_1\dot{x} + h\operatorname{sgn}\dot{x} = p(t)$$

- równanie różniczkowe ruchu masy m trzeciego rzędu

$$\gamma m\dddot{x} + (m + \gamma k_1)\ddot{x} + (k_0 + k_1)\dot{x} + h\operatorname{sgn}\dot{x} + \gamma h\frac{d}{dt}(\operatorname{sgn}\dot{x}) = p + \gamma\dot{p}, \tag{4.19}$$

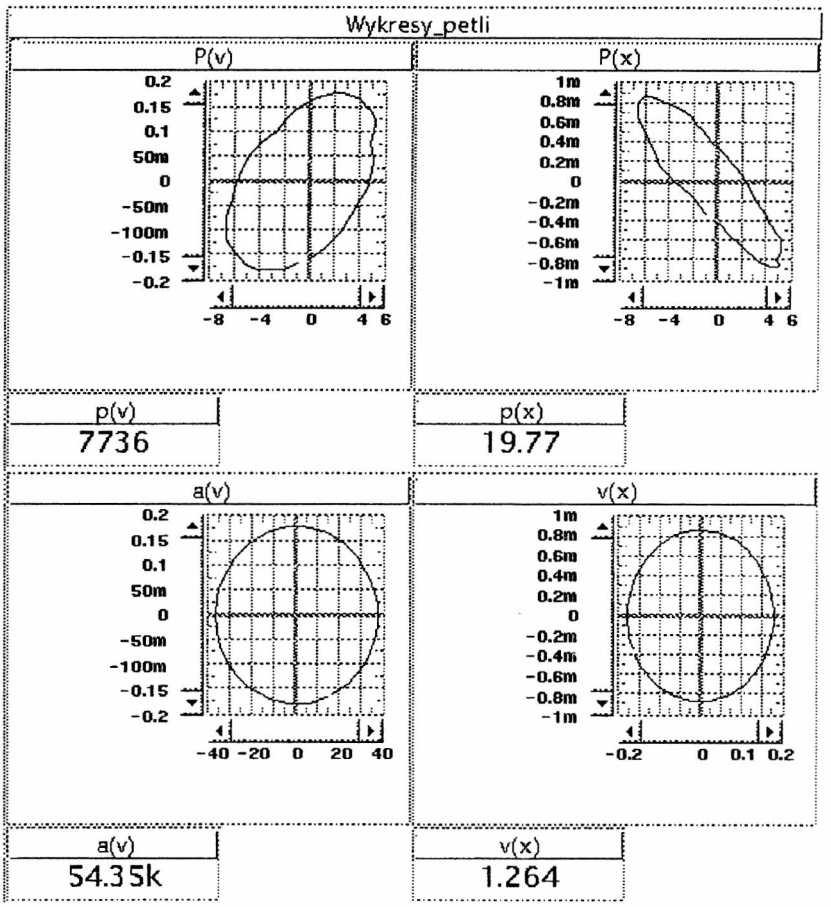
w którym $\gamma = \dfrac{k_0}{c_0}$,

- siła S jest równa

$$S = (k_0 + k_1)\dot{x} + h\operatorname{sgn}\dot{x} + \gamma[m\dddot{x} + k_1\ddot{x} + h\frac{d}{dt}(\operatorname{sgn}\dot{x}) - \dot{p}]. \tag{4.20}$$

- a równanie bilansu energii przyjmie postać

$$\gamma m \alpha_a^v + (k_0 + k_1)\alpha_x^v + h\alpha_x^{\operatorname{sgn} v} = \alpha_x^p - \gamma \alpha_v^p. \tag{4.21}$$



Rys. 4.3. Przykłady pętli uzyskanych eksperymentalnie dla pewnego układu rzeczywistego (podkładka gumowa)

Obydwa równania bilansu energii (4.18) i (4.21) są w sensie matematycznym identyczne. Różnica polega jedynie na odmiennej interpretacji współczynnika dla zmiennej α_x^v. Dlatego eksperyment obydwu modeli będzie identyczny. Polega on na pomiarze w obu przypadkach tych samych zmiennych, to jest zmiennych

$$\alpha_a^v,\ \alpha_x^v,\ \alpha_x^{\operatorname{sgn} v},\ \alpha_x^p,\ \alpha_v^p. \tag{4.22}$$

Pomiar zmiennych (4.22) można dokonać, stosując różne wymuszenia $p(t)$ zarówno w sensie różnych częstotliwości i amplitud, jak i postaci stosowanych wymuszeń. Technika pomiaru tych zmiennych jest obecnie zautomatyzowana komputerowo za pomocą odpowiednich programów (por. rys. 4.3). Konieczne jest jednak opracowanie programu dalszych obliczeń pod kątem wykorzystania tych pętli w sposób wynikający z wyprowadzonych równań bilansu energii dla układów zdegenerowanych. Zarówno w przypadku modelu I (równanie (4.18)), jak i w przypadku modelu II (równanie (4.21)) równanie identyfikacyjne przyjmie postać

$$a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 = Y, \tag{4.23}$$

gdzie

$$X_1 = \frac{\alpha_a^v}{\alpha_x^v}, \quad X_2 = \frac{\alpha_x^{\operatorname{sgn} v}}{\alpha_x^v}, \quad X_3 = \frac{\alpha_v^p}{\alpha_x^v}, \quad Y = \frac{\alpha_x^p}{\alpha_x^v}, \tag{4.24}$$

$$a_1 = \gamma m, \quad a_2 = h, \quad a_3 = \gamma, \tag{4.25}$$

- dla modelu I

$$a_0 = k_0 + \gamma c_1 \tag{4.26}$$

- dla modelu II

$$a_0 = k_0 + k_1. \tag{4.27}$$

Współczynniki tego równania $a_0, a_1, \ldots, a_3$ są możliwe do wyznaczenia metodą analizy regresji dla różnych wartości zmiennych X_1, X_2, X_3, Y tworzących macierz wartości eksperymentalnych postaci

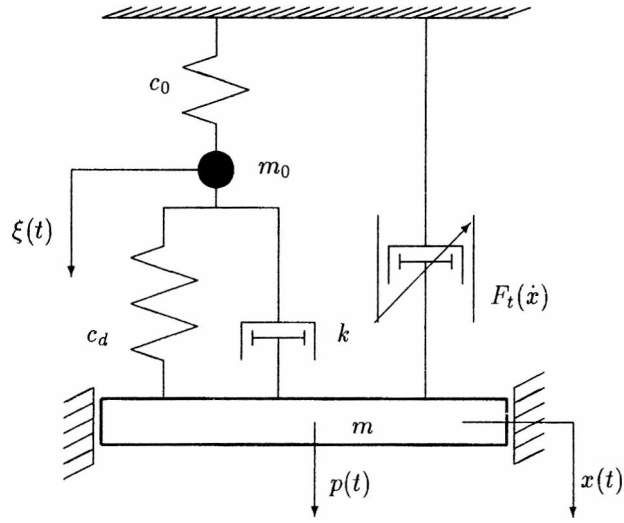
$$\left[\widehat{X}_{1i}, \widehat{X}_{2i}, \widehat{X}_{3i}, \widehat{Y}_i\right], \quad i = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{4.28}$$

gdzie ν – liczba różnych wymuszeń dynamicznych stosowanych w eksperymencie.

Należy jednak zauważyć, że różne wartości tej macierzy można uzyskać dla różnych wymuszeń dynamicznych zarówno harmonicznych, jak i złożonych niesinusoidalnych, albowiem równanie identyfikacyjne (4.23) jest spełnione dla wymuszeń dynamicznych $p(t)$ i odpowiedzi $x(t)$ dowolnie złożonych.

4.3. Metoda identyfikacji nieliniowego układu zdegenerowanego o złożonej konfiguracji

W niniejszym punkcie wykazano, że stosowanie równania bilansu energii i bilansu mocy jest możliwe także w przypadku układów zdegenerowanych o bardziej złożonej konfiguracji elementów sprężysto-tłumiących niż te, które przedstawiono na rys. 4.2. Schemat takiego wybranego do analizy układu przedstawiono na rys. 4.4.



Rys. 4.4. Schemat układu zdegenerowanego o złożonej konfiguracji

Równania ruchu dla tego modelu są następujące

$$\begin{aligned} m_0\ddot{\xi} + c_0\xi &= k(\dot{x} - \dot{\xi}) + c_d(x - \xi), \\ m\ddot{x} + F_t(\dot{x}) + c_0\xi &= p(t). \end{aligned} \tag{4.29}$$

Po wyznaczeniu ξ z drugiego równania (4.29) oraz przyjęciu za $m_0 = 0$, otrzymuje się

$$\xi = \frac{1}{c_0}\left[p - m\ddot{x} - F_t(\dot{x})\right],$$

po zróżniczkowaniu zaś

$$\dot{\xi} = \frac{1}{c_0}\left[\dot{p} - m\dddot{x} - \frac{d}{dt}F_t(\dot{x})\right].$$

Po wstawieniu ξ i $\dot{\xi}$ do pierwszego równania (4.29), otrzymuje się ostatecznie równanie ruchu, opisujące ruch układu (rys. 4.4) w postaci

$$[p - m\ddot{x} - F_t(\dot{x})]$$
$$= \frac{kc_0}{c_0 + c_d}\dot{x} + \frac{c_d c_0}{c_0 + c_d}x - \frac{k}{c_0 + c_d}\left[\dot{p} - m\,\dddot{x} - \frac{d}{dt}F_t(\dot{x})\right]. \tag{4.30}$$

Z porównania równania (4.30) z II zasadą dynamiki otrzymuje się wyrażenie na siłę S

$$S = \frac{c_d c_0}{c_0 + c_d}x + \frac{kc_0}{c_0 + c_d}\dot{x} + F_t(\dot{x}) + \frac{k}{c_0 + c_d}\left[m\,\dddot{x} + \frac{d}{dt}F_t(\dot{x}) - \dot{p}\right]. \tag{4.31}$$

Przykładowo, gdy przyjmiemy funkcję tłumienia w postaci

$$F_t = h\,\mathrm{sgn}\,\dot{x} + k_1\,\dot{x} + k_3\,\dot{x}^3 + k_5\,\dot{x}^5, \tag{4.32}$$

wtedy równanie bilansu energii dla układu (4.29) lub (4.30) po odpowiednich przekształceniach przyjmuje postać

$$\begin{aligned} h\alpha_x^{S(v)} + (k_1 + \frac{kc_0}{c_0 + c_d})\alpha_x^v + k_3\alpha_x^{v^3} + k_5\alpha_x^{v^5} \\ + \frac{k}{c_0 + c_d}\alpha_v^p - \frac{mk}{c_0 + c_d}\alpha_v^a = \alpha_x^p. \end{aligned} \tag{4.33}$$

W rozważanym przypadku do badań przyjęto model, w którym funkcja tłumienia była w postaci $F_t(\dot{x}) = h\,\mathrm{sgn}\,\dot{x}$, czyli przyjęto $k_1 = k_3 = k_5 = 0$. Ostatecznie więc równanie (4.33) można zapisać jako

$$h\alpha_x^{S(v)} + \frac{kc_0}{c_0 + c_d}\alpha_x^v + \frac{k}{c_0 + c_d}\alpha_v^p - \frac{mk}{c_0 + c_d}\alpha_v^a = \alpha_x^p, \tag{4.34}$$

gdzie zmienne α_y^z ($y = x, v$ lub $z = a,\ v, p$, $\mathrm{sgn}\,v = S(v)$,) – pola ograniczone krzywymi zamkniętymi (pętlami) odpowiednich zależności dynamicznych $z(y)$.

Równanie (4.34) jest w różny sposób wykorzystane w zależności od tego, co można zmierzyć w warunkach obciążeń statycznych. W przypadku szeregowych połączeń sprężyn sztywność zastępczą zapisuje się w postaci

$$c_z = \frac{c_d c_0}{c_0 + c_d}.$$

Przy założeniu, że z badań statycznych zostanie zmierzone c_z i h równanie identyfikacyjne (4.34) zapisuje się w postaci

$$A_1\alpha_x^v + A_2\alpha_v^p + A_3\alpha_v^a = \alpha_x^p - h\alpha_x^{S(v)}, \tag{4.35}$$

gdzie

$$A_1 = \frac{kc_0}{c_0 + c_d}, \quad A_2 = \frac{k}{c_0 + c_d}, \quad A_3 = \frac{-mk}{c_0 + c_d}.$$

Jak łatwo zauważyć, parametry układu oblicza się z zależności

$$c_0 = \frac{A_1}{A_2}, \quad m = \frac{-A_3}{A_2}, \quad c_d = \frac{c_z c_0}{c_0 - c_z}, \quad k = A_2(c_0 + c_d). \tag{4.36}$$

Przy założeniu zaś, że wyznaczy się parametry z badań statycznych c_z, h i m, to równanie identyfikacyjne (4.34) można zapisać w postaci

$$\frac{kc_0}{c_0 + c_d}\alpha_x^v + \frac{k}{c_0 + c_d}[\alpha_v^p - m\alpha_v^a] = \alpha_x^p - h\alpha_x^{S(v)} \tag{4.37}$$

lub w sposób uproszczony

$$A_1\alpha_x^v + A_2[\alpha_v^p - m\alpha_v^a] = \alpha_x^p - h\alpha_x^{S(v)}.$$

Parametry układu c_0, k, c_d obliczymy z zależności (4.36). Podzielmy równanie identyfikacyjne (4.37) przez α_x^v

$$\frac{kc_0}{c_0 + c_d} + \frac{k}{c_0 + c_d}\left[\frac{\alpha_v^p - m\alpha_v^a}{\alpha_x^v}\right] = \left[\frac{\alpha_x^p - h\alpha_x^{S(v)}}{\alpha_x^v}\right]. \tag{4.38}$$

Parametry c_0, c_d, k układu obliczamy podobnie jak poprzednio z zależności (4.36). Równanie (4.34) po uporządkowaniu można przedstawić także w postaci

$$B_1\left[h\alpha_x^{S(v)} - \alpha_v^p\right] + B_2\alpha_v^p + B_3\alpha_v^a = -c_z\alpha_x^v, \tag{4.39}$$

przy czym

$$B_1 = \frac{c_d}{k}, \quad B_2 = \frac{c_d}{c_0 + c_d}, \quad B_3 = -\frac{mc_d}{c_0 + c_d}.$$

Dla znanych parametrów h, c_z, podobnie jak dla równania (4.35), pozostałe parametry wyznaczono ze związków

$$-m = \frac{B_3}{B_2}, \quad c_0 = \frac{B_2}{c_z}, \quad c_d = \frac{c_z c_0}{c_0 - c_z}, \quad k = \frac{c_d}{B_1}.$$

Po dokonaniu podobnej analizy przez scałkowanie równania ruchu (4.30) (po uprzednim wymnożeniu przez $\ddot{x}dt$) uzyskano równanie bilansu mocy (po założeniu $k_1 = k_3 = k_5 = 0$) w postaci

$$m\alpha_v^a + \frac{k}{c_0 + c_d}\left[\alpha_a^p - h\alpha_a^{S(v)}\right] + c_z\alpha_v^x = \alpha_v^p. \tag{4.40}$$

Warto tu zaznaczyć, że całki z funkcji $F_t(\dot{x})$ są równe

$$\int_0^T F_t(\dot{x})\ddot{x}dt = \int_0^T F_t(v)\frac{dv}{dt}dt = \int_0^T F_t(v)dv = 0,$$

$$\int_0^T \frac{d}{dt}F_t(\dot{x})\ddot{x}dt = F_t(\dot{x})\ddot{x}\Big|_0^T - \int_0^T F_t(\dot{x})\,\dddot{x}\,dt = -\alpha_a^{F_t}.$$

W przypadku funkcji danej równaniem (4.32) ostatnią całkę rozpisano następująco

$$\alpha_a^{F_t} = h\alpha_a^{\operatorname{sgn} v} + k_1\alpha_a^v + k_3\alpha_a^{v^3} + k_5\alpha_a^{v^5}.$$

Przy założeniu, że można z badań statycznych wyznaczyć h, c_z równanie (4.40) zapisano w formie

$$m + \frac{k}{c_0 + c_d}\left[\frac{\alpha_a^p - h\alpha_a^{S(v)}}{\alpha_v^a}\right] = \left[\frac{\alpha_v^p - c_z\alpha_v^x}{\alpha_v^a}\right]. \tag{4.41}$$

Wszystkie zmienne α tego równania można wyznaczyć eksperymentalnie.

Ze względu na brak dobrego oprogramowania, służącego do wyznaczania pola pętli histerezy na podstawie danych liczbowych punktów, należących do krzywej, zmodyfikowano metodę bilansu energii (por. rozdział 2 i 3). Modyfikacja ta polega na tym, że pola pętli histerezy, uzyskane z metod bilansu energii i mocy, są zamieniane na całki liczone w granicach od 0 do T. Można przy tym wykorzystać fakt, że pola pętli histerezy, określone w równaniach bilansu energii i bilansu mocy, można zastąpić pomiarem wartości średnich odpowiednich sygnałów (co wykazano w pracach [6, 8, 60, 62]). Sygnały te są specjalnie tworzone przez odpowiednią kombinację mierzonych wielkości, a także siły wymuszającej. Dzięki zastosowaniu analizatora widmowego wykorzystanie tego pomysłu w praktyce staje się dość łatwe i proste. W prowadzonych badaniach odpowiednie pola pętli odpowiadają wartościom średnim w następującej relacji

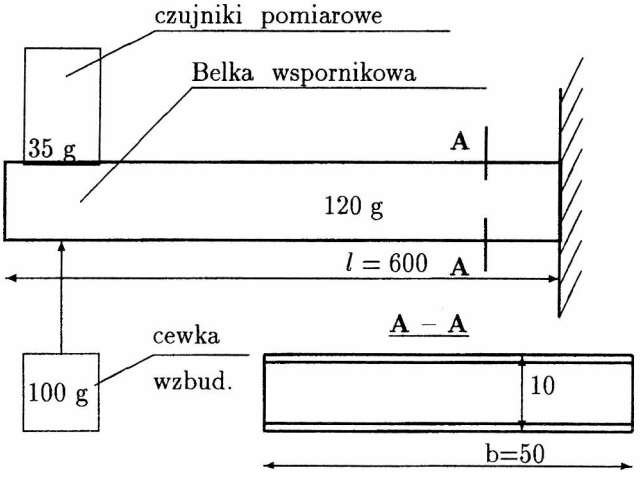
$$\left[\frac{1}{T}\int_0^T a^2dt\right] = E[a^2] \Longrightarrow \alpha_v^a, \quad \left[\frac{1}{T}\int_0^T v^2dt\right] = E[v^2] \Longrightarrow \alpha_x^v,$$

$$\left[\frac{1}{T}\int_0^T padt\right] = E[pa] \Longrightarrow \alpha_v^p, \quad \left[\frac{1}{T}\int_0^T pvdt\right] = E[pv] \Longrightarrow \alpha_x^p,$$

$$\left[\frac{1}{T}\int_0^T S(v)\dot{a}dt\right] = E[S(v)\dot{a}] \Longrightarrow \alpha_a^{S(v)}, \quad \left[\frac{1}{T}\int_0^T p\dot{a}dt\right] = E[pa] \Longrightarrow \alpha_a^p,$$

$$\left[\frac{1}{T}\int_0^T S(v)vdt\right] = E[|v|] \Longrightarrow \alpha_x^{S(v)}.$$

Badania weryfikujące wykonano na obiekcie rzeczywistym, którego schemat pokazano na rys. 4.5 [79].



Rys. 4.5. Schemat badanego obiektu

Obiektem tym była belka przekładkowa zamocowana sztywno o następujących danych:

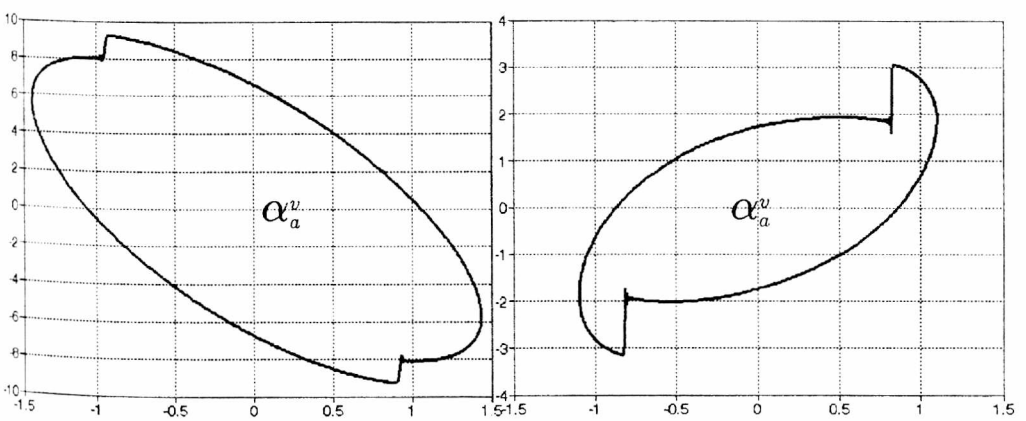
- długość belki l = 600 mm,
- szerokość belki b = 50 mm,
- grubość belki h = 10 mm,
- grubość blach wykorzystanych na zewnętrzne okładziny g_1 = 0,5 mm,
- masa belki m = 120 g,
- masa czujnika zawieszonego na końcu belki m_1 = 35,38 g,
- materiał wypełniacza – spieniony polistyren.

Eksperyment przeprowadzono w taki sposób, że przyłożono obciążenie harmoniczne do końca belki. W obciążeniu tym zmieniano amplitudę i częstość, mierzono zaś skojarzone ze sobą różne sygnały, które są miarą pola histerezy. Fragment wyników z badanej belki podano w tabeli 4.1.

Przykładowe pętle histerezy dla badanej belki podano na rys. 4.6. Na podstawie analizy regresji z równań identyfikacyjnych (4.37) i (4.39) ostatecznie wyznaczono parametry badanego układu (patrz tab. 4.2).

Tabela 4.1. Wartości całek dla badanej belki

Lp.	$E[\|v\|] = \alpha_x^{S(v)}$	$E[v^2] = \alpha_x^v$	$E[pa] = \alpha_v^p$	$E[a^2] = \alpha_v^a$	$E[pv] = \alpha_x^p$
1	0,626357	0,240881	-220,021	2702,754	1,286456
2	0,708509	0,310106	-228,451	3382,262	1,717767
3	0,820562	0,415349	-205,328	4559,651	2,588357
4	0,897093	0,497321	-111,999	6218,727	3,410727
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
47	0,25428	0,039943	-105,704	585,7491	0,199322
48	0,28978	0,051876	-134,34	757,2218	0,241887
49	0,323092	0,064491	-164,830	935,1308	0,292141
50	0,355447	0,078066	-197,827	1147,998	0,344072
51	0,390245	0,094115	-234,413	1341,634	0,403034
52	0,424895	0,111569	-275,106	1588,876	0,470499



Rys. 4.6. Przykładowe pętle histerezy wyznaczone dla dwóch częstości siły wymuszającej badanej belki

Tabela 4.2. Wyznaczone parametry badanego układu

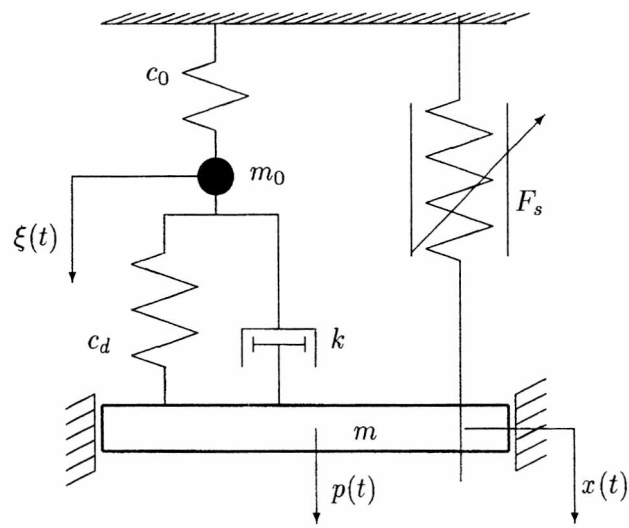
Parametry wyznaczone z badań statycznych	Parametry wyznaczone z równań identyfikacyjnych	
$h = 0,0305$ $m = 0,1279$ $c_z = 401,75$	$c_0 = 9646,28$ $k = 8,36$ $c_d = 418,393$	równanie (4.37)
$c_z = 401,75$ $h = 0,030$	$m = 0,1147$ $k = 8,43$ $c_0 = 7485,63$ $c_d = 423,70$	równanie (4.35)

Na podstawie prowadzonych badań eksperymentalnych można sformułować następujący wniosek:

Na podstawie opracowanych metod przy założeniu, że z pomiarów statycznych wyznaczymy sztywność zastępczą c_z oraz parametr tarcia suchego h, możemy oszacować z równania bilansu energii pozostałe parametry układu.

Przeprowadzone badania eksperymentalne są skuteczną próbą wykorzystania w praktyce opracowanych algorytmów.

Rozpatrzmy dodatkowo przykład układu zdegenerowanego, który charakteryzuje się tym, że zamiast nieliniowego tłumienia (por. rys. 4.6) jest teraz element sprężysty nieliniowy (patrz rys. 4.7).



Rys. 4.7. Schemat układu zdegenerowanego o złożonej konfiguracji

Ruch masy m w tym przypadku można opisać za pomocą następującego układu równań

$$\begin{aligned} m_0\ddot{\xi} + c_0\xi &= k(\dot{x} - \dot{\xi}) + c_d(x - \xi), \\ m\ddot{x} + F_s(x) + c_0\xi &= p(t). \end{aligned} \tag{4.42}$$

Wyznaczamy z drugiego równania współrzędną ξ i wstawiamy do pierwszego z równań (4.42) oraz przyjmujemy $m_0 = 0$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} &p(t) - m\ddot{x} - F_s(x) \\ &= \frac{c_0 c_d}{c_0 + c_d}x + \frac{c_0 k}{c_0 + c_d}\dot{x} + \frac{k}{c_0 + c_d}\frac{d}{dt}\left[m\ddot{x} + F_s(x) - p(t)\right]. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Z porównania powyższych wyników z równaniem

$$m\ddot{x} + S = p$$

uzyskujemy wyrażenie na siłę S w postaci

$$S = F_s(x) + \frac{c_0 c_d}{c_0 + c_d}x + \frac{c_0 k}{c_0 + c_d}\dot{x} + \frac{k}{c_0 + c_d}\left[m\dddot{x} + \frac{d}{dt}F_s - \dot{p}\right]. \tag{4.44}$$

Gdy funkcja sprężystości $F_s(x)$ jest postaci

$$F_s(x) = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5, \tag{4.45}$$

wtedy równanie bilansu energii dla układu (4.43), po odpowiednich przekształceniach, wyprowadzono podobnie jak w poprzednich przypadkach. Po wymnożeniu każdego wyrażenia równania (4.43) przez elementarne przemieszczenie $dx = \dot{x}dt$ otrzymujemy równanie bilansu energii

$$B_1\mathcal{A}_x^v + B_2\mathcal{A}_p^v + B_3\mathcal{A}_a^v + +B_4\mathcal{A}_x^{x^2v} + B_5\mathcal{A}_x^{x^4v} = \mathcal{A}_x^p, \tag{4.46}$$

gdzie

$$B_1 = \frac{k(c_0 + c_1)}{c_0 + c_d}, \quad B_2 = -\frac{k}{c_0 + c_d}, \quad B_3 = \frac{km}{c_0 + c_d},$$

$$B_4 = \frac{3kc_3}{c_0 + c_d}, \quad B_5 = \frac{5kc_5}{c_0 + c_d}.$$

Zmienne $\mathcal{A}_x^{x^2v}$ i $\mathcal{A}_x^{x^4v}$ są odpowiednimi całkami postaci

$$\int_0^T x^2\dot{x}\dot{x}dt = \mathcal{A}_x^{x^2v}, \qquad \int_0^T x^4\dot{x}\dot{x}dt = \mathcal{A}_x^{x^4v}.$$

Umożliwia to:

- wyznaczenie stałych c_3, c_5 ze związków

$$\frac{B_4}{B_2} = -3c_3, \quad \frac{B_5}{B_2} = -5c_5,$$

stąd

$$c_3 = -\frac{1}{3}\frac{B_4}{B_2}, \quad c_5 = -\frac{1}{5}\frac{B_5}{B_2}$$

- wyznaczenie stałej $(c_0 + c_1)$

$$c_0 + c_1 = -\frac{B_1}{B_2}$$

- wyznaczenie masy m

$$m = -\frac{B_3}{B_2}.$$

Problemem pozostaje wyznaczenie stałych c_0, c_1. Na podstawie jednak wzoru na siłę S postaci (4.44) w warunkach obciążeń statycznych jest

$$S = F_s(x) + \frac{c_0 c_d}{c_0 + c_d}x = (c_1 + \frac{c_0 c_d}{c_0 + c_d})x + c_3 x^3 + c_5 x^5 = p.$$

Jeśli c_3, c_5 są znane, to zmienna zależna Y przyjmie kształt

$$Y = p - c_3 x^3 - c_5 x^5,$$

sztywność zastępcza jest postaci

$$c_z = (c_1 + \frac{c_0 c_d}{c_0 + c_d}).$$

Sztywność tę możemy wyznaczyć, aproksymując zależność $Y(x)$ funkcją liniową postaci

$$Y(x) = c_z x. \tag{4.47}$$

Jednakże wyznaczenie stałej c_z również nie pozwala na wyznaczenie wszystkich stałych c_1, c_0, c_d. Spróbowano wykorzystać jeszcze równanie bilansu mocy. Równanie bilansu mocy wyprowadzono w podobny sposób, ale mnożymy równanie (4.43) przez elementarną prędkość $d\dot{x} = \ddot{x}dt$

$$\begin{aligned} &\frac{c_0 + c_d}{c_0}\left[p(t) - m\ddot{x} - F_s(x)\right] \\ &= c_d x + k\dot{x} - \frac{k}{c_0}\frac{d}{dt}\left[p(t) - m\ddot{x} - F_s(x)\right]. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Dokonujemy całkowania poszczególnych wyrażeń równania (4.48), pamiętając jednocześnie, że F_s jest dana równaniem (4.45) i otrzymujemy kolejno

$$
\begin{gathered}
\int_0^T p\ddot{x}dt = \alpha_v^p, \\
\int_0^T \ddot{x}\ddot{x}dt = \int_0^T \ddot{x}dv = \alpha_v^a, \\
\int_0^T F_s(x)\ddot{x}dt = c_1\alpha_v^x + c_3\alpha_v^{x^3} + c_5\alpha_v^{x^5}, \\
\int_0^T \dot{x}\ddot{x}dt = \int_0^T vdv = 0 \\
\int_0^T \frac{dp}{dt}\ddot{x}dt = p\ddot{x}\Big|_0^T - \int_0^T p\ddot{x}dt = 0 - \alpha_a^p \int_0^T \ddot{x}dp = \alpha_p^a, \\
\int_0^T \frac{d\ddot{x}}{dt}\ddot{x}dt = \int_0^T ada = 0,
\end{gathered}
\tag{4.49}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \frac{d}{dt}F_s\ddot{x}dt &= \int_0^T \frac{d}{dt}\left[c_1x + c_3x^3 + c_5x^5\right]\ddot{x}dt \\
&= 3c_3(-\alpha_x^{xv^2}) + 5c_5(-2\alpha_x^{x^3v^2}).
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

Całkę wyrażenia (4.50) rozpisano szczegółowo w kolejności poszczególnych składników. Dla pierwszego i drugiego składnika otrzymano

$$
\begin{gathered}
\int_0^T \frac{d}{dt}(c_1x)\ddot{x}dt = \int_0^T c_1\dot{x}\ddot{x}dt = c_1\int_0^T vdv = 0, \\
\int_0^T \frac{d}{dt}(c_3x^3)\ddot{x}dt = 3c_3\int_0^T x^2\dot{x}\ddot{x}dt = 3c_3(-\alpha_x^{xv^2}).
\end{gathered}
\tag{4.51}
$$

Z kolei po rozpisaniu szczegółowo ostatniej całki wyrażenia (4.51) otrzymano

$$
\begin{aligned}
\int_0^T (x^2\dot{x})\ddot{x}dt &= \dot{x}(x^2\dot{x})|_0^T - \int_0^T \dot{x}(2x\dot{x}\dot{x} + x^2\ddot{x})dt \\
&= 0 - \int_0^T (x^2\dot{x})\ddot{x}dt - 2\int_0^T x\dot{x}^3dt,
\end{aligned}
\tag{4.52}
$$

a więc

$$2\int_0^T x^2\dot{x}\ddot{x}dt = -2\int_0^T x\dot{x}^3dt = -2\alpha_x^{xv^2}. \tag{4.53}$$

W przypadku składnika trzeciego (wyrażenie (4.50)) otrzymano

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(c_5x^5)\ddot{x}dt = \int_0^T (c_5 5x^4)\dot{x}\ddot{x}dt = -10c_5\alpha_x^{x^3v^2}, \tag{4.54}$$

po scałkowaniu przez części otrzymuje się

$$\int_0^T [x^4\dot{x}]\ddot{x}dt = \dot{x}[x^4\dot{x}]\Big|_0^T - \int_0^T \dot{x}[4x^3\dot{x}\dot{x} + x^4\ddot{x}]dt = 0 - \left[\int_0^T 4x^3\dot{x}^3dt + \int_0^T x^4\ddot{x}^2\dot{x}dt\right],$$

a po dalszych przekształceniach

$$2\int_0^T x^4\dot{x}\ddot{x}dt = -4\int_0^T x^3\dot{x}^3dt, \tag{4.55}$$

stąd

$$\int_0^T x^4\dot{x}\ddot{x}dt = -2\alpha_x^{x^3v^2}. \tag{4.56}$$

Ostatecznie równanie bilansu mocy układu, opisanego równaniem (4.42), po uwzględnieniu powyższych obliczeń oraz po uporządkowaniu, przyjmuje następującą postać

$$\begin{aligned} &\alpha_v^p - m\alpha_v^a - c_1\alpha_v^x - c_3\alpha_v^{x^3} - \alpha_v^{x^5} \\ &= \frac{-k}{c_0+c_d}\left[\alpha_p^a + 3c_3\alpha_x^{xv^2} + 10c_5\alpha_x^{x^3v^2}\right] + \frac{c_dc_0}{c_0+c_d}\alpha_v^x. \end{aligned} \tag{4.57}$$

Przyjmujemy, że stałe m, c_3, c_5 są znane na podstawie równań bilansu energii, zmienna Y zaś jest postaci

$$Y = \alpha_v^p - m\alpha_v^a - c_3\alpha_v^{x^3} - \alpha_v^{x^5}. \tag{4.58}$$

Zmienna Y musi spełniać wyprowadzone równanie mocy postaci

$$Y = \left(c_1 + \frac{c_0c_d}{c_0+c_d}\right)\alpha_v^x - \frac{k}{c_0+c_d}X, \tag{4.59}$$

gdzie

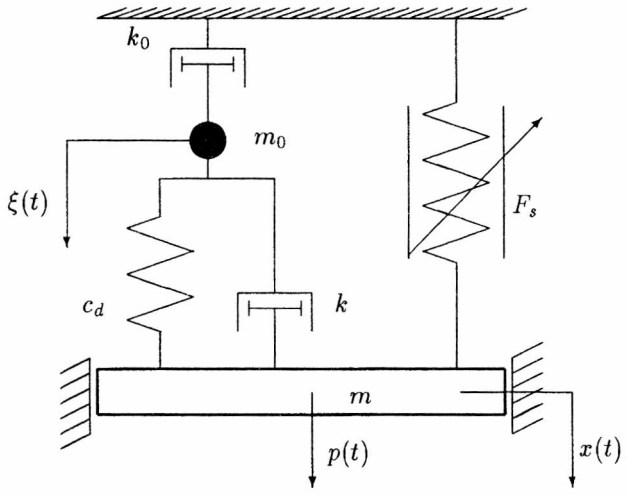
$$X = \alpha_p^a + 3c_3\alpha_x^{xv^2} + 10c_5\alpha_x^{x^3v^2}.$$

Z równania (4.59) można jedynie wyznaczyć stałe

$$\frac{k}{c_0 + c_d}, \qquad c_1 + \frac{c_0 c_d}{c_0 + c_d},$$

co nie wnosi nic nowego w identyfikacyję układu, albowiem stałe te można wyznaczyć z równania bilansu energii (stała B_2) oraz z badań statycznych (stała c_z). Tak więc możliwa jest w tym przypadku jedynie identyfikacja częściowa, polegająca na wyznaczeniu nie wszystkich parametrów układu.

W podobny sposób przeanalizowano układ dynamiczny pokazany na rys. 4.8 różniący się tym od poprzedniego (por. rys. 4.7), że element liniowy sprężysty zamieniono na element tłumiący również liniowy. Dla tego układu wyprowadzono równania bilansu energii i bilansu mocy.



Rys. 4.8. Schemat układu zdegenerowanego o złożonej konfiguracji z elementami nieliniowymi

Model ten można przedstawić za pomocą następującego układu równań

$$\begin{aligned} m_0\ddot{\xi} + k_0\dot{\xi} &= k(\dot{x} - \dot{\xi}) + c_d(x - \xi), \\ m\ddot{x} + F_s(x) + k_0\dot{\xi} &= p(t). \end{aligned} \tag{4.60}$$

Pierwsze równanie (4.60) różniczkujemy względem czasu i przyjmujemy $m_0 = 0$, po uporządkowaniu otrzymujemy

$$(k_0 + k)\ddot{\xi} = k\ddot{x} + c_d(\dot{x} - \dot{\xi}). \tag{4.61}$$

Po wyznaczeniu $\dot{\xi}$ z drugiego równania (4.60) i podstawieniu do równania (4.61) otrzymano

$$(k_0 + k)\frac{1}{k_0}\left[\dot{p} - m\,\dddot{x} - \frac{d}{dt}F_s\right] = k\ddot{x} + c_d\dot{x} - \frac{c_d}{k_0}\left[p - m\ddot{x} - F_s(x)\right]. \tag{4.62}$$

Z porówania powyższych wyników z równaniem

$$m\ddot{x} + S = p$$

uzyskano wyrażenie na siłę S w postaci

$$S = \frac{k_0 c_d}{k_0 + k}\dot{x} + \frac{k_0 k}{k_0 + k}\ddot{x} + F_s(x) - \frac{k_0 + k}{k_0}\left[\dot{p} - m\,\dddot{x} - \frac{d}{dt}F_s(x)\right]. \tag{4.63}$$

Funkcję sprężystości $F_s(x)$ dla tego układu przyjęto w postaci równania (4.45). Równanie bilansu energii dla układu (4.62) wyprowadzono podobnie jak w poprzednich przypadkach, mnożąc każde wyrażenie tego równania przez elementarne przemieszczenie $dx = \dot{x}dt$. Po odpowiednich przekształceniach otrzymano równanie bilansu energii postaci

$$\begin{gathered}\left[k_0 + \frac{(k_0 + k)c_1}{c_d}\right]\alpha_x^v - \frac{(k_0 + k)m}{c_d}\alpha_v^a + \frac{3c_3(k_0 + k)}{c_d}\alpha_x^{x^2 v} \\ + \frac{5c_5(k_0 + k)}{c_d}\alpha_x^{x^4 v} + \frac{k_0 + k}{c_d}\alpha_v^p = \alpha_x^p.\end{gathered} \tag{4.64}$$

Równanie (4.64) można zapisać również w postaci

$$A_0 + A_1X_1 + A_2X_2 + A_3X_3 + A_4X_4 = Y, \tag{4.65}$$

gdzie

$$\begin{gathered}X_1 = \frac{\alpha_v^a}{\alpha_x^v}, \quad X_2 = \frac{\alpha_x^{x^2 v}}{\alpha_x^v}, \quad X_3 = \frac{\alpha_x^{x^4 v}}{\alpha_x^v}, \\ X_4 = \frac{\alpha_v^p}{\alpha_x^v}, \quad Y = \frac{\alpha_x^p}{\alpha_x^v}, \\ A_0 = k_0 + \frac{(k_0 + k)c_1}{c_d}, \quad A_1 = \frac{(k_0 + k)m}{c_d}, \quad A_2 = \frac{3c_3(k_0 + k)}{c_d}, \\ A_3 = \frac{5c_5(k_0 + k)}{c_d}, \quad A_4 = \frac{k_0 + k}{c_d}.\end{gathered} \tag{4.66}$$

Wyrażenia $\alpha_x^{x^2v}$ i $\alpha_x^{x^4v}$ oznaczają odpowiednie całki

$$\int_0^T x^2\dot{x}\dot{x}dt = \alpha_x^{x^2v}, \quad \int_0^T x^4\dot{x}\dot{x}dt = \alpha_x^{x^4v}.$$

Ostatecznie algorytm umożliwia wyznaczenie następujących stałych:

- stałych $A_0, A_1, \ldots, A_4$ metodą analizy regresji, jeśli wartości α są znane z eksperymentu,
- wyznaczenie współczynników m, c_3, c_5 ze wzorów

$$m = \frac{A_1}{A_4}, \quad c_3 = \frac{1}{3}\frac{A_2}{A_4}, \quad c_5 = \frac{1}{5}\frac{A_3}{A_4}.$$

Równanie bilansu mocy wyprowadzono po wymnożeniu równania (4.62) przez elementarną prędkość $d\dot{x} = \ddot{x}dt$, dokonaniu odpowiednich obliczeń (korzystano z już wcześniej obliczonych całek (4.49) i (4.50) i uporządkowaniu, otrzymano równanie postaci

$$\begin{aligned}&\left[m + \frac{kk_0}{c_d}\right]\alpha_v^a + c_1\alpha_v^x + c_3\alpha_v^{x^3} + c_5\alpha_v^{x^5}\\ &+\frac{(k_0+k)3c_3}{c_d}\alpha_v^{x^2v} + \frac{5c_5(k_0+k)}{c_d}\alpha_v^{x^4v} + \frac{k_0+k}{c_d}\alpha_a^p = \alpha_v^p.\end{aligned} \tag{4.67}$$

Proces identyfikacji układu opisanego równaniem (4.62) można podzielić na następujące etapy:

1. Wykorzystanie obliczonych stałych A_2, A_3, A_4 z równania bilansu energii (4.65) (na podstawie tych stałych wyliczono c_3 i c_5). Zauważono przy tym, że równanie bilansu mocy, z uwzględnieniem tych stałych można zapisać w postaci

$$\left[m + \frac{kk_0}{c_d}\right]\alpha_v^a + c_1\alpha_v^x = \alpha_v^p - A_2\alpha_v^{x^2v} - A_3\alpha_v^{x^4v} - A_4\alpha_a^p. \tag{4.68}$$

2. Konstruowanie zmiennych X, Y postaci

$$Y = \frac{\alpha_v^p - A_2\alpha_v^{x^2v} - A_3\alpha_v^{x^4v} - A_4\alpha_a^p}{\alpha_v^a}, \quad X = \frac{\alpha_v^x}{\alpha_v^a}.$$

Równanie (4.68) zapisano teraz w sposób

$$B_0 + B_1X = Y,$$

gdzie $B_0 = m + \dfrac{kk_0}{c_d}$, $B_1 = c_1$.

3. Wyznaczenie stałych B_0, B_1 metodą analizy regresji. Dla znanych stałych B_0, B_1 oraz stałych wyznaczonych z równania bilansu energii (4.64) $A_0, A_1, \ldots, A_4$ można obliczyć tzw. masę dodatkową m^* w sposób

$$\frac{kk_0}{c_d} = B_0 - \frac{A_1}{A_4} = B_0 - m = m^*.$$

4. Wyznaczenie pozostałych stałych parametrów układu z zależności

$$A_0 = k_0 + A_4 B_1 \Longrightarrow k_0 = A_0 - A_4 B_1,$$

$$k = \frac{k_0(B_0 A_4 - A_1)}{k_0 A_4^2 - (B_0 A_4 - A_1)},$$

$$A_4 = \frac{k_0}{c_d} + \frac{k}{c_d} = \frac{k_0}{c_d} + \frac{m^*}{k_0} \Longrightarrow c_d = \frac{k_0 + k}{A_4}.$$

Kończy to procedurę identyfikacji tego modelu.

W bardzo podobny sposób można wyprowadzić procedury identyfikacyjne różnorakich modeli zdegenerowanych jeszcze bardziej złożonych. Podane przykłady są wybiórcze. Jednakże realizacja tych procedur jest jak wykazano możliwa w przypadku zatosowania metod bilansu energii i bilansu mocy dla różnorakich wymuszeń.

Podane przykłady rozwijają techniki identyfikacji oparte na równaniach bilansu energii i bilansu mocy układów zdegenerowanych. Tym samym umożliwiają znaczne rozszerzenie badań dynamicznych układów rzeczywistych.

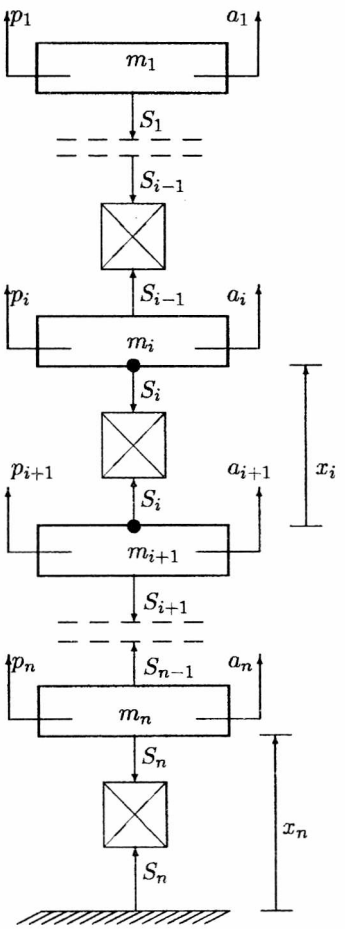
Należy jednak zaznaczyć, że nie we wszystkich rozpatrywanych przypadkach można wyznaczyć wszystkie parametry. Częściową identyfikację można przeprowadzić w przypadku układu zdegenerowanego, przedstawionego na rys. 4.7 [1], składającego się z dwu sprężyn działających równolegle bądź szeregowo na masę m. Identyfikacja stałych c_1 i c_2 jest niemożliwa.

4.4. Uogólnienie metody na układy o N-stopniach swobody

Zajmiemy się teraz rozszerzeniem metody identyfikacji charakterystyk dynamicznych elementów sprężysto-tłumiących układów wielomasowych typu kaskadowego, o schemacie jak na rys. 4.9. Każdy element sprężysto-tłumiący tego

[1] Z podobną sytuacją ma się do czynienia w przypadku układu oscylatora harmonicznego postaci $m\ddot{x} + (c_1 + c_2)x = p(t)$.

układu może mieć konfigurację układu zdegenerowanego opisanego równaniami, np. (4.6), (4.19), (4.42) lub (4.53). Zarówno odpowiedź układu, jak i wymuszenie mogą być mierzone w skończonym (dostatecznie długim) przedziale czasu T, w którym stan układu jest ustalony. Interesujący nas i-ty element sprężysto-tłumiący (którego charakterystykę dynamiczną chcemy w sposób eksperymentalny wyznaczyć), działa w pewnym układzie wielomasowym o konfiguracji przedstawionej na rys. 4.9. Dodatkowo przyjęto, że do każdej masy jest przyłożone wymuszenie okresowe $p(t)$ o okresie T.



Rys. 4.9. Schemat układu o konfiguracji kaskadowej,którego elementy są układami zdegenerowanymi

Przyjęto przemieszczenia względne x_ν sąsiednich mas jako bazę współrzędnych uogólnionych, równania różniczkowe ruchu układu w przypadku dowolnych od-

działywań S_ν i dowolnych wymuszeń $p_\nu(t)$ (dla $\nu = 1, 2, \ldots, n$) są następujące

$$\begin{aligned} &m_1 a_1 + S_1 = p_1, \\ &m_2 a_2 + S_2 = p_2 + S_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &m_i a_i + S_i = p_i + S_{i-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &m_n a_n + S_n = p_n + S_{n-1}, \end{aligned} \tag{4.69}$$

przez a_i oznaczono przyspieszenia bezwzględne, czyli

$$a_i = \sum_{\nu=i}^{n} \ddot{x}_\nu. \tag{4.70}$$

Każdą siłę oddziaływania S_ν można wyrazić za pomocą wymuszeń i przyspieszeń odpowiednich mas w następujący sposób

$$\begin{aligned} &S_1 = p_1 - m_1 a_1, \\ &S_2 = p_2 - m_2 a_2 + S_1 = p_1 + p_2 - (m_1 a_1 + m_2 a_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &S_i = \sum_{\nu=1}^{i} p_\nu + \sum_{\nu=1}^{i} (-m_\nu a_\nu), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &S_n = \sum_{\nu=n}^{n} p_\nu + \sum_{\nu=n}^{n} (-m_\nu a_\nu). \end{aligned} \tag{4.71}$$

Wyprowadźmy równania bilansu energii dla elementu sprężysto-tłumiącego dowolnie wybranego. Niech będzie to i-ty element, który znajduje się między masą m_i a masą m_{i+1}, o strukturze pokazanej na rys. 4.10. Siłę oddziaływań elementu sprężysto-tłumiącego między masą m_i a masą m_{i+1} zapisano jako

$$\begin{aligned} S_i &= c_1 x_i + c_0 (x_i - \xi_i), \\ k\dot{\xi}_i &= c_0 (x_i - \xi_i), \end{aligned} \tag{4.72}$$

przy czym: x_i – współrzędna określająca położenie masy m_i względem masy m_{i+1}, ξ_i – współrzędna określająca położenie masy m_{0i} względem masy m_{i+1}.

Wyznaczono z pierwszego równania (4.72) zmienną ξ_i

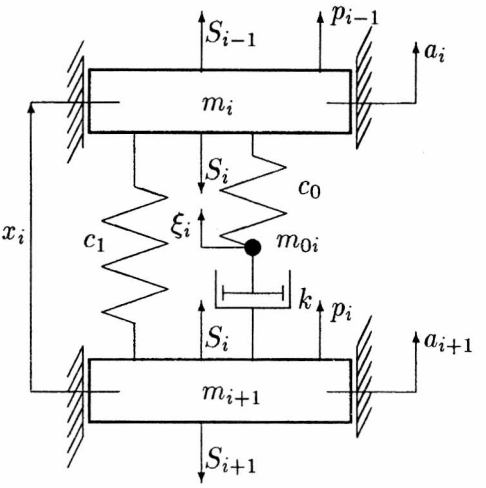
$$\xi_i = \frac{1}{c_0} \left[(c_0 + c_1) x_i - S_i \right].$$

Po zróżniczkowaniu zmiennej ξ względem czasu

$$\dot{\xi}_i = \frac{1}{c_0}\left[(c_0 + c_1)\dot{x}_i - \dot{S}_i\right] \tag{4.73}$$

oraz po podstawieniu ξ_i i $\dot{\xi}_i$ do drugiego równania (4.72) otrzymano

$$\frac{k}{c_0}\left[(c_0 + c_1)\dot{x}_i - \dot{S}_i\right] = c_0 x_i - [(c_0 + c_1)x_i - S_i] = S_i - c_1 x_i. \tag{4.74}$$



Rys. 4.10. Struktura podukładu zdegenerowanego wybranego z układu kaskadowego elementu umieszczonego pomiędzy masą m_i a masą m_{i+1}

Po zróżniczkowaniu i-tego równania układu (4.71) otrzymuje się

$$\dot{S}_i = \sum_{\nu=1}^{i} \dot{p}_\nu + \sum_{\nu=1}^{i}(-m_\nu \dot{a}_\nu). \tag{4.75}$$

Równanie (4.74) po uwzględnieniu zależności (4.75) oraz po uporządkowaniu można zapisać w postaci

$$S_i = \sum_{\nu=1}^{i} p_\nu + \sum_{\nu=1}^{i}(-m_\nu a_\nu) = c_1 x_i + \frac{k}{c_0}\left[(c_0 + c_1)\dot{x}_i - \sum_{\nu=1}^{i}\dot{p}_\nu + \sum_{\nu=1}^{i} m_\nu \dot{a}_\nu\right], \tag{4.76}$$

przez q_i oznaczono sumę wymuszeń działających na masy powyżej masy m_i, to jest

$$q_i = \sum_{\nu=1}^{i} p_\nu(t), \tag{4.77}$$

gdzie p_ν – dowolne wymuszenia okresowe przyłożone do poszczególnych mas $m_1, m_2, \ldots, m_i$.

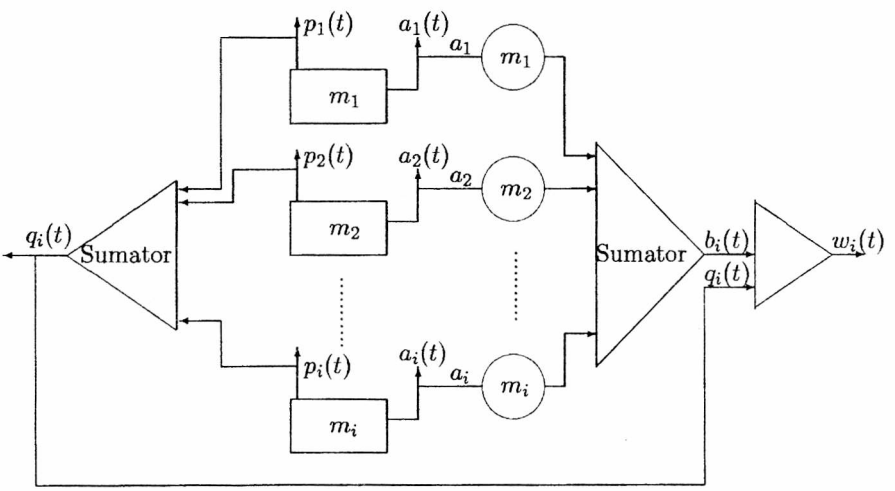
Drugi składnik lewej strony równania (4.76) przedstawia sumę sił bezwładności b_i działających na masy powyżej masy m_i, czyli

$$b_i = \sum_{\nu=1}^{i} (-m_\nu a_\nu). \tag{4.78}$$

Jeśli znane są wszystkie wymuszenia $p_1, p_2, \ldots, p_i$ oraz wartości mas m_1, $m_2, \ldots, m_i$, to znajomość (np. przez pomiar) przyspieszeń $a_1, a_2, \ldots, a_i$ umożliwia konstrukcję pseudowymuszenia $w_i(t)$ „działającego" na masę m_i postaci

$$w_i(t) = q_i(t) + b_i(t) = \sum_{\nu=1}^{i} p_\nu(t) + \sum_{\nu=1}^{i} (-m_\nu a_\nu). \tag{4.79}$$

Schemat eksperymentalnego wyznaczenia pseudowymuszenia $w_i(t)$ przedstawiono na rys. 4.11.



Rys. 4.11. Schemat ideowy pomiaru pseudowymuszenia $w_i(t)$ dla i-tej masy

Po uwzględnieniu oznaczenia (4.79), równanie (4.76) przyjmie postać

$$c_1 x_i + \frac{k}{c_0}[(c_0 + c_1)\dot{x}_i - \dot{w}_i] = w_i. \tag{4.80}$$

Równanie bilansu energii uzyskano przez wymnożenie równania (4.80) przez $\dot{x}_i dt$ i scałkowanie po okresie T

$$\int_0^T x_i \dot{x}_i dt = \int_{x_i(0)}^{x_i(T)} x_i dx_i = |x_i^2| \Big|_{x_i(0)}^{x_i(T)} = 0, \tag{4.81}$$

$$\int_0^T \dot{x}_i\dot{x}_i dt = \int_0^T v_i^2 dt = \int_{x_i(0)}^{x_i(T)} v_i dx_i = \alpha_{x_i}^{v_i}, \tag{4.82}$$

$$\int_0^T \dot{w}_i\dot{x}_i dt = w_i\dot{x}_i \Big|_{x_i(0)}^{x_i(T)} - \int_0^T w_i\ddot{x}_i dt = 0 - \int_{v_i(0)}^{v_i(T)} w_i dv_i = -\alpha_{v_i}^{w_i}, \tag{4.83}$$

$$\int_0^T w_i\dot{x}_i dt = \int_{x_i(0)}^{x_i(T)} w_i dx_i = \alpha_{x_i}^{w_i}. \tag{4.84}$$

Po uwzględnieniu wyników (4.81)÷(4.84) równanie bilansu energii przyjmie postać

$$\frac{k}{c_0}(c_0 + c_1)\alpha_{x_i}^{v_i} + \frac{k}{c_0}\alpha_{v_i}^{w_i} = \alpha_{x_i}^{w_i}. \tag{4.85}$$

Równanie (4.85) może służyć do wyznaczenia stałych k/c_0, $c_0 + c_1$.

W podobny sposób można wyprowadzić równanie bilansu mocy, które po odpowiednich podobnych wyprowadzeniach przyjmie postać

$$-c_1\alpha_{x_i}^{v_i} + \frac{k}{c_0}\alpha_{\dot{v}_i}^{w_i} = \alpha_{v_i}^{w_i}. \tag{4.86}$$

Równanie to umożliwia wyznaczenie stałej c_1, co w konsekwecji daje możliwość oszacowania stałych c_0, k.

Przykładowo badany element jest pierwszym z góry elementem układu (element najwyżej położony) z rys. 4.9 ($i = 1$), wówczas otrzymano

$$\begin{gathered} w_i\,|_{i=1} = p_1 - m_1 a_1, \\ \alpha_{v_i}^{w_i}\,|_{i=1} = \alpha_{v_1}^{w_1} = \int_{v_1(0)}^{v_1(T)} (p_1 - m_1 a_1) dv_1 \\ = \int_{v_1(0)}^{v_1(T)} p_1 dv_1 - m_1 \int_{v_1(0)}^{v_1(T)} m_1 a_1 dv_1 = \alpha_{v_1}^{p_1} - m_1\alpha_{v_1}^{a_1}, \\ \alpha_{x_i}^{w_i}\,|_{i=1} = \alpha_{x_1}^{w_1} = \alpha_{x_1}^{p_1} - m_1\alpha_{x_1}^{a_1}, \end{gathered} \tag{4.87}$$

co po uwzględnieniu równania (4.85) dla $i = 1$ daje postać

$$\frac{k}{c_0}(c_0 + c_1)\alpha_{x_1}^{v_1} + \frac{k}{c_0}\alpha_{v_1}^{p_1} - \frac{k}{c_0}m_1\alpha_{v_1}^{a_1} = \alpha_{x_1}^{p_1} - m_1\alpha_{x_1}^{a_1}. \tag{4.88}$$

Równanie (4.88) jest równaniem uzyskanym przez metodę bilansu energii. Jest ono spełnione w przypadku dowolnych wymuszeń i odpowiedzi okresowych.

Równanie (4.88) można zapisać w postaci przydatnej do identyfikacji w sposób

$$A_0 + A_1 X = Y,$$

gdzie

$$A_0 = \frac{k}{c_0}(c_0 + c_1), \qquad A_1 = \frac{k}{c_0},$$

$$X = \frac{\alpha_{v_1}^{p_1} - m_1 \alpha_{v_1}^{a_1}}{\alpha_{x_1}^{v_1}}, \qquad Y = \frac{\alpha_{x_1}^{p_1} - m_1 \alpha_{x_1}^{a_1}}{\alpha_{x_1}^{v_1}}.$$

Mierząc zmienne X, Y (masa m_1 jest znana) można, metodą analizy regresji, obliczyć stałe A_0, A_1. Pozostałe stałe układu wyznacza się z równania bilansu mocy, które dla $i = 1$ jest postaci

$$-c_1 \alpha_{x_1}^{v_1} + \frac{k}{c_0} \alpha_{\dot{v}_1}^{w_1} = \alpha_{v_1}^{w_1} \text{ [2)]}, \tag{4.89}$$

gdzie

$$\alpha_{\dot{v}_1}^{w_1} = \alpha_{\dot{v}_1}^{p_1} - m_1 \alpha_{\dot{v}_1}^{a_1}, \qquad \alpha_{v_1}^{w_1} = \alpha_{v_1}^{p_1} - m_1 \alpha_{v_1}^{a_1}.$$

Równanie to można zapisać dla oznaczeń

$$X = \alpha_{x_1}^{v_1}, \quad Y = \alpha_{v_1}^{w_1} - A_1 \alpha_{\dot{v}_1}^{w_1}$$

jako

$$-c_1 X = Y$$

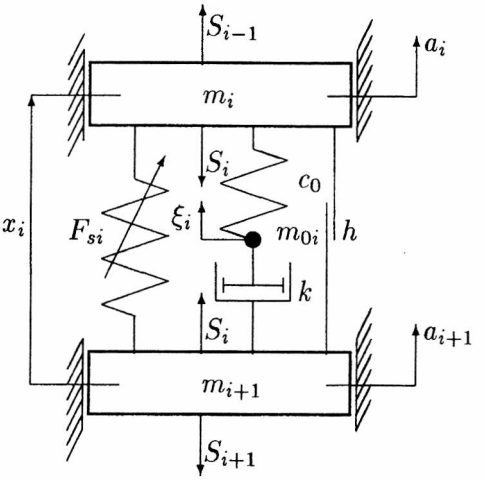
stąd dla zmierzonych X, Y można wyznaczyć c_1, a następnie stałe k, c_0.

Wpływ tarcia suchego oraz elementu sprężystego nieliniowego znajdującego się między masami m_i a m_{i+1} przeprowadzono na układzie pokazanym na rys. 4.12.

Podobną analizę wykonano dla układu pokazanego na rys. 4.12. Wyprowadzono równania ruchu oraz równania identyfikacyjne pozwalające wyznaczyć jego parametry. Związki te bez wyprowadzeń podajemy poniżej. Siłę oddziaływań elementu sprężysto–tłumiącego między masą m_i a masą m_{i+1} zapisuje się jako

$$S_i = F_{si} x_i + +c_0(x_i - \xi_i) + h \operatorname{sgn} \dot{x}_i, k\dot{\xi}_i = c_0(x_i - \xi_i). \tag{4.90}$$

[2)] Uwaga: $\dot{v}_1 \neq a_1$, lecz $\dot{v}_1 = \frac{d}{dt}(\dot{x}_1)$ – jest to przyspieszenie względne masy m_1 względem m_2.



Rys. 4.12. Struktura podukładu zdegenerowanego wybranego z układu kaskadowego elementu umieszczonego pomiędzy masą m_i a masą m_{i+1}

Wyrażenie na siłę S_i, po odpowiednich przekształceniach, przyjmie postać

$$S_i = F_{si}(x_i) + h \operatorname{sgn} \dot{x}_i + k\dot{x}_i$$
$$+\frac{k}{c_0}\left[\dot{F}_{si}(x_i) + h\frac{d}{dt}\operatorname{sgn}\dot{x}_i - \sum_{\nu=1}^{i}\dot{p}_\nu + \sum_{\nu=1}^{i} m_\nu \dot{a}_\nu\right]. \tag{4.91}$$

Po uwzględnieniu zależności (4.71), (4.75) oraz (4.79), równanie (4.91), opisujące dynamikę masy m_i, przyjmie postać

$$w_i = F_{si}(x_i) + h \operatorname{sgn}\dot{x}_i + k\dot{x}_i + \frac{k}{c_0}\left[\dot{F}_{si}(x_i) + h\frac{d}{dt}\operatorname{sgn}\dot{x}_i - \dot{w}_i\right]. \tag{4.92}$$

Wykonano mnożenie równania (4.92) przez elementarne przemieszczenie $dx = \dot{x}dt$ i elementarną prędkość $d\dot{x} = \ddot{x}dt$ oraz przyjęto, że funkcja sprężystości F_{si} jest dana równaniem (4.45), skorzystano z wcześniej wykonanych obliczeń (por. równania (4.81) ÷ (4.84)) po uwzględnieniu, że

$$\int_0^T \frac{d}{dt}F_{ti}(\dot{x}_i\dot{x}_i dt = 0, \quad \int_0^T \frac{d}{dt}(\operatorname{sgn}\dot{x}_i)\dot{x}_i dt = 0,$$

równanie bilansu energii przyjmie postać

$$h\alpha_{x_i}^{\operatorname{sgn} v_i} + k\alpha_{x_i}^{v_i} + \frac{k}{c_0}\left[-c_1\alpha_{v_i}^{x_i} - c_3\alpha_{v_i}^{x_i^3} - c_5\alpha_{v_i}^{x_i^5}\right] + \frac{k}{c_0}\alpha_{v_i}^{w_i} = \alpha_{x_i}^{w_i}, \tag{4.93}$$

a równanie bilansu mocy można zapisać jako

$$
\begin{gathered}
c_1\alpha_{v_i}^{x_i} + c_3\alpha_{v_i}^{x_i^3} + c_5\alpha_{v_i}^{x_i^5} - \frac{kh}{c_0}\alpha_{a_i}^{\operatorname{sgn} v_i} \\
+\frac{k}{c_0}\left[3c_3\alpha_{\dot{v}_i}^{x_i^2 v_i} + 5c_5\alpha_{\dot{v}_i}^{x_i^4 v_i}\right] + \frac{k}{c_0}\alpha_{\dot{v}_i}^{w_i} = \alpha_{v_i}^{w_i}.
\end{gathered}
\tag{4.94}
$$

Przykładowo, jeśli badany element jest najwyższym elementem układu (najwyżej położonym) z rys. 4.9 ($i = 1$) oraz $c_3 = c_5 = 0$, to równanie bilans energii jest postaci

$$
\frac{k}{c_0}(c_0 + c_1)\alpha_{x_1}^{v_1} + h\alpha_{x_1}^{\operatorname{sgn} v_1} + \frac{k}{c_0}\left(\alpha_{v_1}^{p_1} - m_1\alpha_{v_1}^{a_1}\right) = \alpha_{x_1}^{p_1} - m_1\alpha_{x_1}^{a_1}. \tag{4.95}
$$

Równanie (4.95) można też zapisać w postaci

$$
A_0 + A_1X_1 + A_2X_2 = Y,
$$

w której

$$
A_0 = \frac{k}{c_0}(c_0 + c_1), \qquad A_1 = h, \qquad A_2 = \frac{k}{c_0},
$$

$$
X_1 = \frac{\alpha_{x_1}^{\operatorname{sgn} v_1}}{\alpha_{x_1}^{v_1}}, \qquad X_2 = \frac{\alpha_{v_1}^{p_1} - m_1\alpha_{v_1}^{a_1}}{\alpha_{x_1}^{v_1}}, \qquad Y = \frac{\alpha_{x_1}^{p_1} - m_1\alpha_{x_1}^{a_1}}{\alpha_{x_1}^{v_1}}.
$$

Eksperymentalnie zmierzone zmienne X_1, X_2, Y (masa m_1 jest znana), pozwalają metodą analizy regresji wyznaczyć stałe A_0, A_1, A_2, co w konsekwencji umożliwia wyznaczenie parametrów $h, k/c_0, (c_0+c_1)$. Aby jednak wyznaczyć pozostałe stałe układu, skorzystano z równania bilansu mocy, które dla $i = 1$ będzie w postaci

$$
-c_1\alpha_{x_1}^{\dot{v}_1} + \frac{k}{c_0}\alpha_{\dot{v}_1}^{w_1} - \frac{kh}{c_0}\alpha_{a_1}^{\operatorname{sgn} v_1} = \alpha_{v_1}^{w_1}. \tag{4.96}
$$

Równanie to można dla oznaczeń

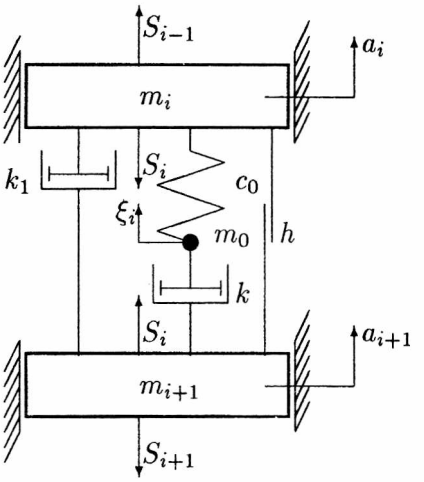
$$
X = \alpha_{x_1}^{v_1}, \quad Y = \alpha_{v_1}^{w_1} + A_1A_2\alpha_{a_1}^{\operatorname{sgn} v_1} - A_2\alpha_{\dot{v}_1}^{w_1}
$$

zapisać jako

$$
-c_1X = Y,
$$

po zmierzeniu X, Y można wyznaczyć c_1, a następnie stałe k, c_0.

Teraz przeprowadzimy analizę układu, w którym masa m_i z masą m_{i+1} jest połączona nie elementem sprężystym, lecz elementem tłumiącym o charakterystyce opisanej stałymi k_1 i h. Powtarzając podobną analizę otrzymano dla analizowanego układu w kolejności równania i związki matematyczne, które bez wyprowadzeń podano poniżej. Siłę oddziaływań elementu sprężysto–tłumiącego między masą m_i a masą m_{i+1} zapisano jako



Rys. 4.13. Struktura podukładu zdegenerowanego wybranego z układu kaskadowego elementu umieszczonego pomiędzy masą m_i a masą m_{i+1}

$$S_i = k_1\dot{x}_i + c_0(x_i - \xi_i) + h\,\mathrm{sgn}\,\dot{x}_i, k\dot{\xi}_i = c_0(x_i - \xi_i). \tag{4.97}$$

Po odpowiednich przekształceniach siłę S_i tego układu wyrazimy w postaci

$$\begin{aligned} S_i &= (k_1 + k)\dot{x}_i + h\,\mathrm{sgn}\,\dot{x}_i + \frac{kk_1}{c_0}\ddot{x}_i + \frac{kh}{c_0}\frac{d}{dt}\mathrm{sgn}\,\dot{x}_i \\ &\quad -\frac{k}{c_0}\left[\sum_{\nu=1}^{i}\dot{p}_\nu + \sum_{\nu=1}^{i}(-m_\nu\dot{a}_\nu)\right]. \end{aligned} \tag{4.98}$$

Po uwzględnieniu zależności (4.71), (4.75) oraz (4.79) równanie (4.98) przyjmie postać

$$w_i = (k_1 + k)\dot{x}_i + h\,\mathrm{sgn}\,\dot{x}_i + \frac{kk_1}{c_0}\ddot{x}_i + \frac{kh}{c_0}\frac{d}{dt}\mathrm{sgn}\,\dot{x}_i - \frac{k}{c_0}\dot{w}_i]. \tag{4.99}$$

Mnożymy równanie (4.99) przez elementarne przemieszczenie $dx = \dot{x}dt$ i elementarną prędkość $d\dot{x} = \ddot{x}dt$ po uwzględnieniu wcześniej wykonanych obliczeń

(patrz równania (4.81)÷(4.84)) równanie bilansu energii przyjmie postać

$$h\alpha_{x_i}^{\operatorname{sgn} v_i} + (k_1 + k)\alpha_{x_i}^{v_i} + \frac{k}{c_0}\alpha_{v_i}^{w_i} = \alpha_{x_i}^{w_i}, \tag{4.100}$$

równanie zaś bilansu mocy

$$-\frac{kh}{c_0}\alpha_{a_i}^{\operatorname{sgn} v_i} + \frac{kk_1}{c_0}\alpha_{v_i}^{a_i} + \frac{k}{c_0}\alpha_{\dot{v}_i}^{w_i} = \alpha_{v_i}^{w_i}. \tag{4.101}$$

Przykładowo, jeśli badany element jest najwyższym elementem układu (najwyżej położonym) z rys. 4.9 ($i = 1$), to równanie bilansu energii zapiszemy

$$(k_1 + k)\alpha_{x_1}^{v_1} + h\alpha_{x_1}^{\operatorname{sgn} v_1} + \frac{k}{c_0}\left[\alpha_{v_1}^{p_1} - m_1\alpha_{v_1}^{a_1}\right] = \alpha_{x_1}^{p_1} - m_1\alpha_{x_1}^{a_1}. \tag{4.102}$$

Równanie (4.102) można zapisać w postaci

$$A_0 + A_1X_1 + A_2X_2 = Y,$$

gdzie

$$A_0 = k_1 + k, \qquad A_1 = h, \qquad A_2 = \frac{k}{c_0},$$

$$X_1 = \frac{\alpha_{x_1}^{\operatorname{sgn} v_1}}{\alpha_{x_1}^{v_1}}, \qquad X_2 = \frac{\alpha_{v_1}^{p_1} - m_1\alpha_{v_1}^{a_1}}{\alpha_{x_1}^{v_1}}, \qquad Y = \frac{\alpha_{x_1}^{p_1} - m_1\alpha_{x_1}^{a_1}}{\alpha_{x_1}^{v_1}}.$$

Dokonując eksperymentu pozwalającego mierzyć zmienne X_1, X_2, Y (masa m_1 jest znana) można korzystając z analizy regresji obliczyć stałe A_0, A_1, A_2, co prowadzi do wyznaczenia parametrów $h, k/c_0, (k_1+k)$. Aby jednak wyznaczyć pozostałe stałe układu, musimy zastosować równanie bilansu mocy, które w przypadku gdy $i = 1$ będzie postaci

$$-\frac{kh}{c_0}\alpha_{a_1}^{\operatorname{sgn} v_1} + \frac{kk_1}{c_0}\alpha_{v_1}^{a_1} + \frac{k}{c_0}\alpha_{\dot{v}_1}^{w_1} = \alpha_{v_1}^{w_1}. \tag{4.103}$$

Równanie to można dla oznaczeń

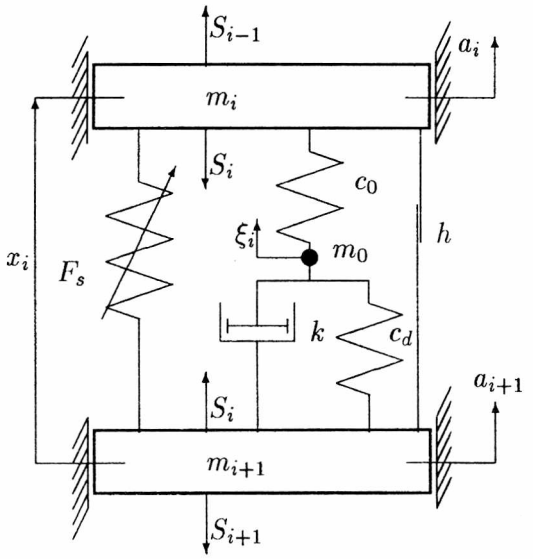
$$X = \alpha_{x_1}^{v_1}, \quad Y = \frac{1}{A_0}\alpha_{v_1}^{w_1} + A_1\alpha_{a_1}^{\operatorname{sgn} v_1} - \alpha_{\dot{v}_1}^{w_1}$$

zapisać również

$$k_1X = Y.$$

Dla znanych X, Y oraz wcześniej obliczonych stałych A_0, A_1 można wyznaczyć k_1, a następnie stałe k, c_0.

Podobną analizę wykonano dla układu o strukturze bardziej skomplikowanej, gdzie elementy tej struktury są dodatkowo nieliniowe (patrz rys. 4.14) w porównaniu z układami pokazanymi na rys. 4.12 lub 4.13.



Rys. 4.14. Struktura podukładu zdegenerowanego wybranego z układu kaskadowego elementu umieszczonego pomiędzy masą m_i a masą m_{i+1}

Siłę oddziaływań na masy układu elementu sprężysto-tłumiącego między masą m_i a masą m_{i+1} zapisano tym razem jako

$$\begin{gathered} S_i = F_{si} + c_0(x_i - \xi_i) + h \operatorname{sgn} \dot{x}_i, \\ c_d \xi_i + k\dot{\xi}_i = c_0(x_i - \xi_i). \end{gathered} \tag{4.104}$$

Po wyznaczeniu ξ_i z pierwszego równania (4.104) i zróżniczkowaniu, zmienne ξ_i i $\dot{\xi}_i$ podstawiono do drugiego równania (4.104) i otrzymano

$$\begin{gathered} \frac{c_d + c_0}{c_0} \left[c_0 x_i + h \operatorname{sgn} \dot{x}_i + F_{si}(x_i) - S_i\right] \\ + \frac{k}{c_0} \left[c_0 \dot{x}_i + h \frac{d}{dt} \operatorname{sgn} \dot{x}_i + \frac{d}{dt} F_{si}(x_i) - \dot{S}_i\right] = c_0 x_i. \end{gathered} \tag{4.105}$$

Po uporządkowaniu równania (4.105) i uwzględnieniu zależności (4.65), otrzymamy wyrażenie na siłę S_i w postaci

$$S_i = c_z x_i + h \operatorname{sgn} \dot{x}_i + \frac{kc_0}{c_0 + c_d} \dot{x}_i + F_{si}(x_i) + \left[\frac{k}{c_d + c_0}\right] h \frac{d}{dt} \operatorname{sgn} \dot{x}_i$$
$$+ \frac{k}{c_d + c_0} \frac{d}{dt} F_{si}(x_i) - \frac{k}{c_d + c_0} \left[\sum_{\nu=1}^{i} \dot{p}_\nu + \sum_{\nu=1}^{i} (-m_\nu \dot{a}_\nu)\right], \tag{4.106}$$

w której

$$c_z = \frac{c_0 c_d}{c_0 + c_d}.$$

Po uwzględnieniu zależności (4.71), (4.75) oraz (4.79) równanie (4.106), opisujące dynamikę masy m_i, można zapisać w postaci

$$w_i = c_z x_i + h \operatorname{sgn} \dot{x}_i + F_{si} + \frac{c_0 k}{c_0 + c_d} \dot{x}_i + \frac{kh}{c_d + c_0} \frac{d}{dt} \operatorname{sgn} \dot{x}_i$$
$$+ \frac{k}{c_d + c_0} \frac{d}{dt} F_{si} - \frac{k}{c_d + c_0} \dot{w}_i]. \tag{4.107}$$

Równanie bilansu energii wyprowadzono po wymnożeniu równania (4.107) przez elementarne przemieszczenie $dx = \dot{x}dt$ i elementarną prędkość $d\dot{x} = \ddot{x}dt$ oraz scałkowaniu po okresie T. Po uwzględnieniu równania (4.81)÷(4.84) i przyjęciu funkcji sprężystości $F_{si}(x_i)$ w postaci (4.57) równanie bilansu energii przyjmie postać

$$h\alpha_{x_i}^{\operatorname{sgn} v_i} + \frac{c_0 k}{c_d + c_0} \alpha_{x_i}^{v_i} + \frac{k}{c_d + c_0} \alpha_{v_i}^{w_i}$$
$$+ \frac{k}{c_0 + c_d} \left[c_1 \alpha_{x_i}^{v_i} + 3c_3 \alpha_{x_i}^{x_i^2 v_i} + 5c_5 \alpha_{x_i}^{x_i^4 v_i}\right] = \alpha_{x_i}^{w_i}, \tag{4.108}$$

równanie zaś bilansu mocy

$$c_z \alpha_{v_i}^{x_i} + c_3 \alpha_{v_i}^{x_i^3} + c_5 \alpha_{v_i}^{x_i^5} + \frac{k}{c_d + c_0} \alpha_{\dot{v}_i}^{w_i}$$
$$+ \frac{k}{c_0 + c_d} \left[3c_3(-\alpha_{x_i}^{x_i v_i^2}) + 5c_5(-2\alpha_{x_i}^{x_i^3 v_i^2})\right] = \alpha_{v_i}^{w_i}. \tag{4.109}$$

Jeśli badany element jest najwyższym (najwyżej położonym) elementem układu z rys. 4.9, to równanie bilansu energii, dla $i = 1$, przyjmie postać

$$h\alpha_{x_1}^{\operatorname{sgn} v_1} + \frac{c_0 k}{c_d + c_0} \alpha_{x_1}^{v_1} + \frac{k}{c_d + c_0} [\alpha_{v_1}^{p_1} - m_1 \alpha_{v_1}^{a_1}]$$
$$+ \frac{k}{c_0 + c_d} \left[c_1 \alpha_{x_1}^{v_1} + 3c_3 \alpha_{x_1}^{x_1^2 v_1} + 5c_5 \alpha_{x_1}^{x_1^4 v_1}\right] = \alpha_{x_1}^{p_1} - m_1 \alpha_{x_1}^{a_1}, \tag{4.110}$$

równanie zaś bilansu mocy jako

$$
\begin{aligned}
&c_z\alpha_{v_1}^{x_1} + c_3\alpha_{v_1}^{x_1^3} + c_5\alpha_{v_1}^{x_1^5} + \frac{k}{c_d + c_0}\left[\alpha_{\dot{v}_1}^{p_1} - m_1\alpha_{\dot{v}_1}^{a_1}\right] \\
&-\frac{k}{c_0 + c_d}\left[3c_3\alpha_{x_1}^{x_1 v_1^2} + 10c_5\alpha_{x_1}^{x_1^3 v_1^2}\right] = \alpha_{v_1}^{p_1} - m_1\alpha_{v_1}^{a_1}.
\end{aligned}
\tag{4.111}
$$

Z ostatnich dwóch równań (4.110) i (4.111) wyznaczono parametry układu, przy założeniu, że masa m_1 jest znana, a pseudowymuszenie w_1 jest mierzalne.

Równanie (4.108) możemy zapisać również w postaci

$$A_0 + A_1X_1 + A_2X_2 + A_3X_3 + A_4X_4 = Y,$$

w której

$$A_0 = \frac{c_0k + c_1k}{c_0 + c_d} = \frac{k}{c_0 + c_d}(c_0 + c_1), \qquad A_1 = h, \qquad A_2 = \frac{k}{c_0 + c_d},$$

$$A_3 = \frac{kc_3}{c_0 + c_d}, \qquad A_4 = \frac{kc_5}{c_0 + c_d},$$

$$X_1 = \frac{\alpha_{x_1}^{\operatorname{sgn} v_1}}{\alpha_{x_1}^{v_1}}, \qquad X_2 = \frac{\alpha_{v_1}^{p_1} - m_1\alpha_{v_1}^{a_1}}{\alpha_{x_1}^{v_1}},$$

$$X_3 = \frac{\alpha_{x_1}^{x_1^2 v_1}}{\alpha_{x_1}^{v_1}}, \qquad X_4 = \frac{\alpha_{x_1}^{x_1^4 v_1}}{\alpha_{x_1}^{v_1}}, \qquad Y = \frac{\alpha_{x_1}^{p_1} - m_1\alpha_{x_1}^{a_1}}{\alpha_{x_1}^{v_1}}.$$

Jeśli na podstawie eksperymentu zmierzymy zmienne X_1, X_2, X_3, X_4, Y (masa m_1 jest znana), to metodą analizy regresji da się obliczyć stałe A_0, A_1, A_2, A_3, A_4. Prowadzi to do wyznaczenia parametrów układu h, c_3, c_5, $k/(c_0 + c_d)$, $(c_0 + c_1)$. Ażeby jednak wyznaczyć pozostałe stałe układu, korzystamy z równania bilansu mocy (4.111). Równanie to można zapisać prościej

$$(c_z + c_1)X = Y,$$

gdzie

$$c_z = \frac{c_0c_d}{c_0 + c_d}, \qquad X = \alpha_{x_1}^{v_1},$$

$$Y = \alpha_{v_1}^{p_1} - m_1\alpha_{v_1}^{a_1} - A_2\left[\alpha_{\dot{v}_1}^{p_1} - m_1\alpha_{\dot{v}_1}^{a_1}\right] - \frac{1}{3}\frac{A_3}{A_2}\alpha_{v_1}^{x_1^3}$$

$$-\frac{1}{5}\frac{A_4}{A_2}\alpha_{v_1}^{x_1^5} + A_3\alpha_{x_1}^{x_1 v_1^2} + A_4\alpha_{x_1}^{x_1^3 v_1^2}.$$

Wykorzystamy wcześniej obliczone stałe $A_0, \ldots, A_4$ i wyznaczymy c_z, a następnie c_0, c_1 i k. W ten sposób wyznaczono wszystkie parametry badanego układu.

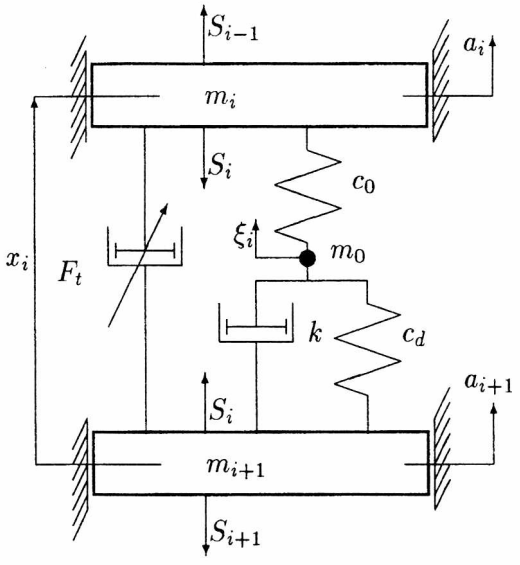
Innym układem dynamicznym jest układ, którego masy m_i i m_{i+1} są połączone elementem tłumiącym nieliniowym (patrz rys. 4.15), zamiast elementu sprężystego nieliniowego jak pokazano na rys. 4.14. Wykonano podobną analizę jak dla układu 4.14. Wyprowadzono podstawowe równania opisujące układ oraz równania identyfikacyjne pozwalające wyznaczyć jego parametry.

Siła oddziaływań elementu sprężysto–tłuniącego między masą m_i a masą m_{i+1} jest opisana zależnościami

$$\begin{aligned} S_i &= F_{ti}\dot{x}_i + c_0(x_i - \xi_i), \\ c_d\xi_i + k\dot{\xi}_i &= c_0(x_i - \xi_i). \end{aligned} \tag{4.112}$$

Wyznaczamy z pierwszego równania (4.112) ξ_i, a następnie różniczkujemy po czasie i podstawiamy do drugiego równania (4.112), otrzymujemy po uporządkowaniu wyrażenie na siłę S_i w postaci

$$\begin{aligned} S_i &= c_z x_i + F_{ti}(\dot{x}_i) + \frac{kc_0}{c_d + c_0}\dot{x}_i + \frac{k}{c_d + c_0}\frac{d}{dt}F_{ti}(\dot{x}_i) \\ &- \frac{k}{c_d + c_0}\left[\sum_{\nu=1}^{i}\dot{p}_\nu + \sum_{\nu=1}^{i}(-m_\nu\dot{a}_\nu)\right]. \end{aligned} \tag{4.113}$$



Rys. 4.15. Struktura podukładu zdegenerowanego wybranego z układu kaskadowego elementu umieszczonego pomiędzy masą m_i a masą m_{i+1}

Po uwzględnieniu zależności (4.71), (4.75) oraz (4.79) wyrażenie (4.113) przyjmie postać

$$w_i = c_z x_i + F_{ti}(\dot{x}_i) + \frac{kc_0}{c_d + c_0}\dot{x}_i + \frac{k}{c_d + c_0}\frac{d}{dt}F_{ti}(\dot{x}_i) - \frac{k}{c_d + c_0}\dot{w}_i. \tag{4.114}$$

Mnożymy (4.114) przez elementarne przemieszczenie $dx_i = \dot{x}_i dt$ i całkujemy po okresie T, przy założeniu, że funkcja tłumienia ma postać

$$F_{ti} = h \operatorname{sgn} \dot{x}_i + k_1 \dot{x}_i + k_3 \dot{x}_i^3 + k_5 \dot{x}_i^5 \tag{4.115}$$

oraz po uwzględnieniu wcześniej wykonanych obliczeń (patrz równania od (4.81) do (4.84)), równanie bilansu energii można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} &h\alpha_{x_i}^{\operatorname{sgn} v_i} + k_1 \alpha_{x_i}^{v_i} + k_3 \alpha_{x_i}^{v_i^3} + k_5 \alpha_{x_i}^{v_i^5} \\ &+ \frac{kc_0}{c_0 + c_d}\alpha_{x_i}^{v_i} + \frac{k}{c_0 + c_d}\alpha_{\dot{v}_i}^{w_i} = \alpha_{x_i}^{w_i}, \end{aligned} \tag{4.116}$$

a równanie bilansu mocy jako

$$\begin{aligned} &c_z \alpha_{v_i}^{x_i} + \frac{k}{c_0 + c_d}\alpha_{\dot{v}_i}^{w_i} \\ &- \frac{k}{c_0 + c_d}\left[h\alpha_{a_i}^{\operatorname{sgn} v_i} + k_1 \alpha_{a_i}^{v_i} + k_3 \alpha_{a_i}^{v_i^3} + k_5 \alpha_{a_i}^{v_i^5}\right] = \alpha_{v_i}^{w_i}. \end{aligned} \tag{4.117}$$

Przykładowo, jeśli badany element jest najwyżej położonym elementem układu z rys. 4.9 ($i = 1$), to po uwzględnieniu wcześniej wykonanych obliczeń równania bilansu energii i bilansu mocy przyjmą postać

$$\begin{aligned} &h\alpha_{x_1}^{\operatorname{sgn} v_1} + k_1 \alpha_{x_1}^{v_1} + k_3 \alpha_{x_1}^{v_1^3} + k_5 \alpha_{x_1}^{v_1^5} + \frac{kc_0}{c_0 + c_d}\alpha_{x_1}^{v_1} \\ &+ \frac{k}{c_0 + c_d}\alpha_{v_1}^{w_1} = \alpha_{x_1}^{w_1}. \end{aligned} \tag{4.118}$$

$$\begin{aligned} &c_z \alpha_{v_1}^{x_1} + \frac{k}{c_0 + c_d}\alpha_{\dot{v}_1}^{w_1} \\ &- \frac{k}{c_0 + c_d}\left[h\alpha_{a_1}^{\operatorname{sgn} v_1} + k_1 \alpha_{a_1}^{v_1} + k_3 \alpha_{a_1}^{v_1^3} + k_5 \alpha_{a_1}^{v_1^5}\right] = \alpha_{v_1}^{w_1}. \end{aligned} \tag{4.119}$$

Z dwóch ostatnich równań (zakłada się, że znana jest masa układu m_1) można oszacować parametry układu, w tym celu wyznaczamy z eksperymentu odpowiednie pola pętli histerezy α oraz wykorzystamy z analizy regresji. Procedura kolejności wyznaczania parametrów jest bardzo podobna do poprzedniego przykładu z rys. 4.14.

Przedstawione układy elementarne oraz wyprowadzone algorytmy identyfikacji przekonują, że struktury złożone i nieliniowe można identyfikować, choć w niektórych przypadach nie wszystkie parametry układu można wyznaczyć. Można ponadto budować bardzo złożone układy kaskadowe, składające się z zaproponowanych układów elementarnych w różnej konfiguracji (patrz rys. 4.2, 4.7÷4.10, 4.12÷4.15). Przyjęcie mniej lub bardziej złożonego modelu zależy od badanego układu rzeczywistego. Zaproponowane modele w dużym stopniu zapewniają możliwość identyfikacji rzeczywistych układów dynamicznych.

4.5. Identyfikacja układu zdegenerowanego dwumasowego

Na podstawie zaproponowanych modeli można zbudować dowolny układ kaskadowy wielomasowy. W celu weryfikacji wybrano układ dwumasowy o różnych strukturach każdy, górny jako podukład I zgodnie z rys. 4.10, dolny zaś zgodnie z rys. 4.15 jako podukład II. Dla tak zbudowanego układu dwumasowego (rys. 4.16) skorzystamy z wcześniej wyprowadzonych równań, aby pokazać jak należy z nich korzystać w konkretnym przypadku. Zgodnie z wprowadzonymi oznaczeniami układ składa się z dwóch podukładów: pierwszego (górny) $n = 2$, $i = 1$ oraz drugiego $n = 2$, $i = 2$.

Z równań (4.69) opisujących układ kaskadowy z rys. 4.9 oraz równań opisujących poszczególne podukłady (patrz np. rys. 4.12÷4.15) wyznaczono i sformułowano równania ruchu jak i równania identyfikacyjne układu dwumasowego (rys. 4.16)

Równania ruchu dla podukładu I (masa m_1) są następujące

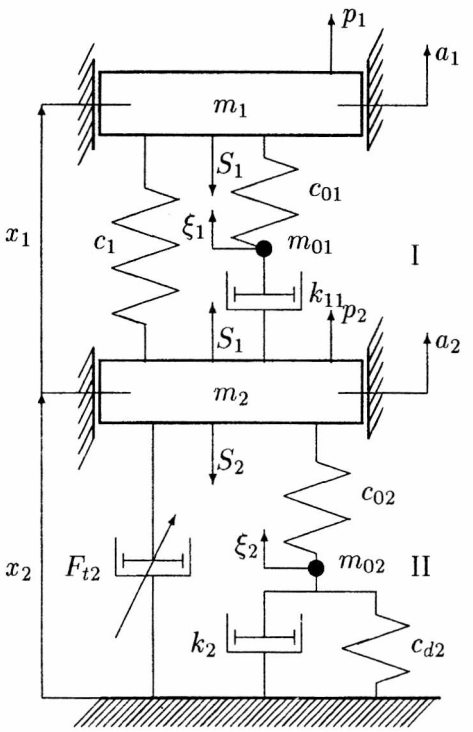
$$\begin{aligned} m_1 a_1 + c_1 x_1 + c_{01}(x_1 - \xi_1) &= p_1, \\ k_{11}\dot{\xi}_1 &= c_{01}(x_1 - \xi_1), \end{aligned} \tag{4.120}$$

podukładu II są postaci

$$\begin{aligned} m_2 a_2 + F_{t2}(\dot{x}_2) + c_{02}(x_2 - \xi_2) - c_1 x_1 - k_{11}\dot{\xi}_1 &= p_2, \\ k_2\dot{\xi}_2 = c_{02}x_2 - (c_{02} + c_{d2})\xi_2. \end{aligned} \tag{4.121}$$

Korzystamy z wcześniej wyprowadzonych równań podukładu I (rys. 4.10) w formie ogólnej (4.85) i (4.86) (lub szczegółowej zapisanych w postaci równań (4.88) i (4.89)), podukładu II zaś w postaci równań (4.116) i (4.117). W przypadku podukładu I wprowadzono oznaczenia: $c_0 = c_{01}$, $k = k_{11}$, $c_1 = c_1$, w przypadku zaś podukładu II oznaczenia: $k = k_2$, $c_d = c_{d2}$, $c_0 = c_{02}$, a funkcja tłumienia jest postaci

$$F_{t2} = h \operatorname{sgn} \dot{x}_2 + k_{21}\dot{x}_2.$$



Rys. 4.16. Schemat analizowanego układu zdegenerowanego dwumasowego

Równania bilansu energii obu podukładów przyjmą wówczas następującą postać

$$\begin{gathered}\frac{k_{11}}{c_{01}}(c_1 + c_{01})\alpha_{x_1}^{v_1} + \frac{k_{11}}{c_{01}}\alpha_{v_1}^{w_1} = \alpha_{x_1}^{w_1}, \\ \left[k_{21} + \frac{k_2 c_{02}}{c_{02} + c_{d2}}\right]\alpha_{x_2}^{v_2} + h\alpha_{x_2}^{\operatorname{sgn} v_2} + \frac{k_2}{c_{02} + c_{d2}}\alpha_{v_2}^{w_2} = \alpha_{x_2}^{w_2}.\end{gathered} \tag{4.122}$$

Równanie bilansu mocy otrzymano zaś w postaci

$$\frac{k_{11}}{c_{01}}\alpha_{\dot{v}_1}^{w_1} - c_1\alpha_{x_1}^{v_1} = \alpha_{v_1}^{w_1},$$
$$c_z\alpha_{v_2}^{x_2} + \frac{k_2}{c_{02}+c_{d2}}\alpha_{\dot{v}_2}^{w_2} - \frac{k_2}{c_{02}+c_{d2}}\left[h\alpha_{a_2}^{\operatorname{sgn} v_2} - k_1\alpha_{a_2}^{v_2}\right] = \alpha_{v_2}^{w_2}, \tag{4.123}$$

przy czym

$$w_1 = p_1 - m_1a_1, \quad w_2 = p_1 + p_2 - m_1a_1 - m_2a_2, a_1 = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2, \quad a_2 = \ddot{x}_2,$$

$$c_z = \frac{c_{02}c_{d2}}{c_{02}+c_{d2}}, \quad v_1 = \frac{dx_1}{dt}, \quad \dot{v}_1 = \frac{d}{dt}(\dot{x}_1), \quad v_2 = \frac{dx_2}{dt}, \quad \dot{v}_2 = \frac{d}{dt}(\dot{x}_2).$$

Równania bilasu energii i bilansu mocy zapisano dla podukładu I w postaci

$$A_1\alpha_{x_1}^{v_1} + A_2\alpha_{v_1}^{w_1} = \alpha_{x_1}^{w_1}$$
$$A_2\alpha_{\dot{v}_1}^{w_1} + A_3\alpha_{v_1}^{x_1} = \alpha_{v_1}^{w_1}, \tag{4.124}$$

przy oznaczeniach

$$A_1 = \frac{k_{11}}{c_{01}}(c_1 + c_{01}), \quad A_2 = \frac{k_{11}}{c_{01}}, \quad A_3 = -c_1.$$

Odpowiednie równania bilansu energii i bilansu mocy w przypadku podukładu II w postaci

$$B_1\alpha_{x_2}^{v_2} + B_2\alpha_{x_2}^{\operatorname{sgn} v_2} + B_3\alpha_{v_2}^{w_2} = \alpha_{x_2}^{w_2},$$
$$B_3\alpha_{\dot{v}_2}^{w_2} + B_4\alpha_{v_2}^{x_2} + B_5\alpha_{a_2}^{\operatorname{sgn} v_2} + B_6\alpha_{a_2}^{v_2} = \alpha_{v_2}^{w_2} \tag{4.125}$$

przy oznaczeniach

$$B_1 = k_{21} + \frac{k_2c_{02}}{c_{02}+c_{d2}}, \quad B_2 = h, \quad B_3 = \frac{k_2}{c_{02}+c_{d2}}, \quad B_4 = c_z,$$

$$B_5 = -\frac{k_2h}{c_{02}+c_{d2}} = -hB_3 = -B_2B_3, \quad B_6 = \frac{k_{21}k_2}{c_{02}+c_{d2}} = k_{21}B_3.$$

Na podstawie analizy regresji można wyznaczyć stałe równań (4.124) i (4.125) A_i $(i = 1, 2, 3)$ i B_j $(j = 1, \ldots, 6)$, co w konsekwencji pozwoli wyznaczyć parametry tego układu. W przypadku podukładu I otrzymano

$$\frac{k_{11}}{c_{01}} = A_2, \quad c_1 + c_{01} = \frac{A_1}{A_2},$$

$$c_1 = A_3, \quad c_{01} = \frac{A_1}{A_2} - A_3, \quad k_{11} = A_1 - A_2A_3,$$

zaś w przypadku podukładu II będzie

$$k_{21} = \frac{B_6}{B_3}, \quad h = -\frac{B_5}{B_3}, \quad c_z = \frac{c_{02}c_{d2}}{c_{02} + c_{d2}} = B_4,$$
$$c_{02} = \frac{B_1B_3 - B_6}{B_3^2}, \quad c_{d2} = \frac{B_4c_{02}}{c_{02} - B_4} = \frac{B_4(B_1B_3 - B_6)}{(B_1B_3 - B_6) - B_4B_3^2},$$
$$k_2 = B_3(c_{02} + c_{d2}).$$

Badania eksperymentalne przeprowadzono wykorzystując oprogramowanie *Simulink* [112]. Opracowany algorytm identyfikacji przetestowano układ dwumasowy o następujących wartościach stałych

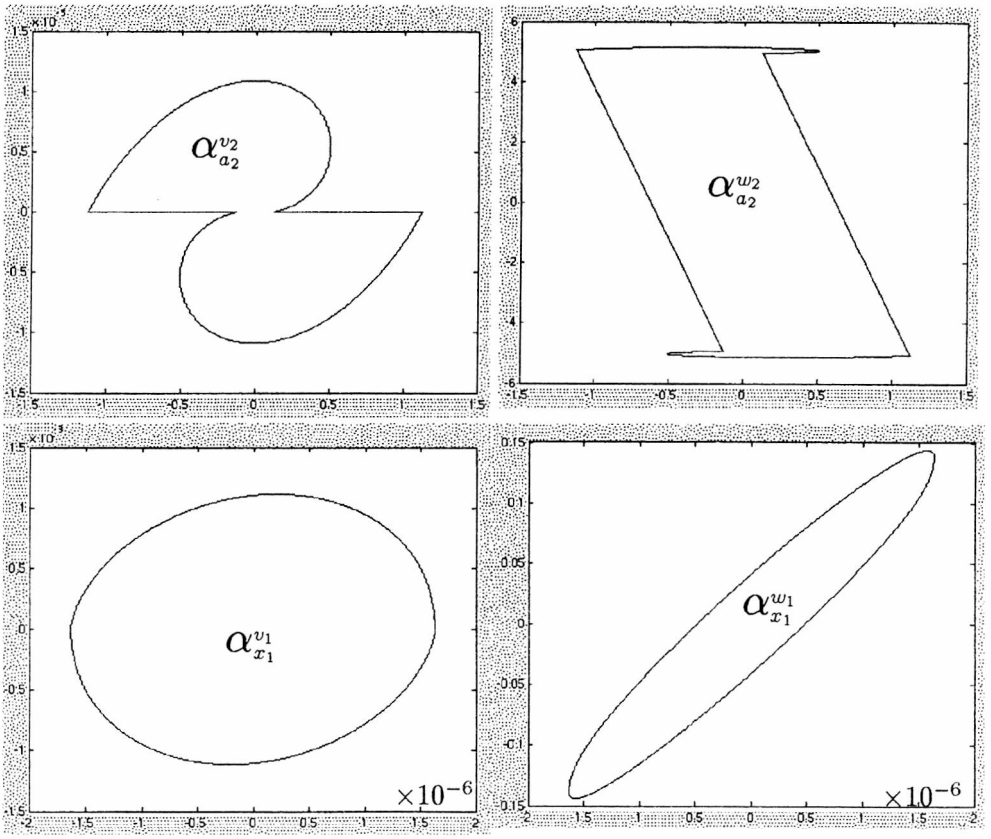
$$c_1 = 5 \cdot 10^4 \text{ kg/s}^2, \quad c_{01} = 5 \cdot 10^4 \text{ kg/s}^2, \quad c_{02} = 5 \cdot 10^4 \text{ kg/s}^2,$$
$$k_{11} = 100 \text{ kg/s}, \quad h = 5 \text{ kg/s}, \quad m_1 = 8 \text{ kg}, \quad c_{d2} = 5 \cdot 10^4 \text{ kg/s}^2,$$
$$k_{21} = 100 \text{ kg/s}, \quad k_2 = 100 \text{ kg/s}, \quad m_2 = 10 \text{ kg}.$$

Badania prowadzono dla dwóch wariantów. W pierwszym przyjęto wymuszenia sinusoidalne w taki sposób, że wymuszenie $p_1 \neq 0$, $p_2 = 0$; w drugim odwrotnie $p_1 = 0$, $p_2 \neq 0$. Zmieniano przy tym amplitudę wymuszenia oraz okres. Wyniki przeprowadzonych badań w postaci wyznaczonych pól $\widehat{\alpha}$ podano w tabeli 4.3, przykładowe zaś pętle histerezy przedstawiono na rys. 4.17.

Tabela. 4.3. Wybrane wartości α badanego układu

Lp.	$\alpha_{v_1}^{w_1}$	$\alpha_{x_2}^{v_2}$	$\alpha_{\dot{v}_1}^{w_1}$	$\alpha_{a}^{v_2}$	$\alpha_{v_2}^{w_2}$
1	$2{,}9707\times10^{8}$	$-2{,}4791\times10^{5}$	$4{,}9637\times10^{8}$	$2{,}0850\times10^{8}$	$6{,}20308\times10^{9}$
2	$4{,}5379\times10^{8}$	$-3{,}2376\times10^{5}$	$8{,}1103\times10^{8}$	$2{,}91402\times10^{8}$	$8{,}10134\times10^{9}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
29	$2{,}37719\times10^{13}$	$-6{,}1477\times10^{9}$	$6{,}4385\times10^{13}$	$8{,}41668\times10^{12}$	$1{,}53903\times10^{14}$
30	$1{,}93136\times10^{13}$	$-4{,}3587\times10^{9}$	$5{,}5144\times10^{13}$	$6{,}2943\times10^{12}$	$1{,}09125\times10^{14}$

Do wyznaczenia stałych badanego układu wykorzystano analizę regresji, sprowadzającą się do wyznaczenia stałych równań identyfikacyjnych A_i i B_i. Wartości tych stałych zestawiono w tabeli 4.4.



Rys. 4.17. Przykłady pętli histerezy otrzymane z eksperymentu

Tabela. 4.4. Wyznaczone parametry badanego układu

Parametry zadane dla badanego układu	Parametry wyznaczone z równań identyfikacyjnych
m_1=8,0, c_1=50 000, c_{01}=50 000 k_{11}=100,0,	c_1 = 50 000, c_{01}=50 000,3 k_{11}=100,0006
m_2=5, c_{d2}=50 000, c_{02}=50 000, k_2=100, h=5,0, k_{21}=100,	c_{d2}=53 802,07, c_{02}=46 700,2 k_2=100,502 h=4,9808, k_{21}=103,3

Oszacowane parametry na podstawie przeprowadzonego symulowanego eksperymentu potwierdzają skuteczność opracowanych algorytmów.

5. Podsumowanie. Aspekty zastosowań. Wnioski

W niniejszym rozdziale przedstawiono wnioski i uwagi dotyczące stosowania zaproponowanych wcześniej metod. Przyjmuje się, że w zadaniach identyfikacji

- najpierw proponuje się konkretną postać modelu matematycznego,
- następnie wyznacza się wartości jego parametrów.

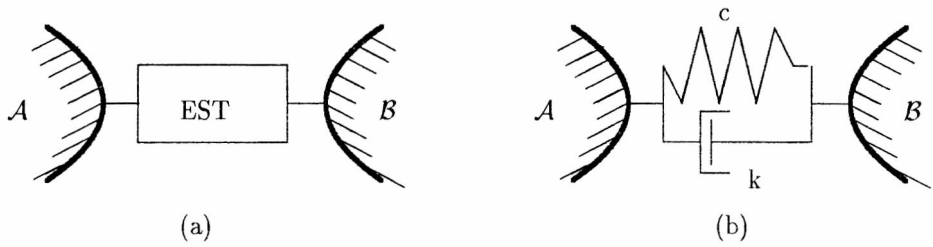
W realizacji zadania drugiego postępuje się ściśle według określonego algorytmu, w przypadku zaś zadania pierwszego nie można wytyczyć ścisłych reguł postępowania. Wybór postaci modelu odbywa się bowiem z zachowaniem intuicji z tego względu jest swego rodzaju sztuką [86]. Dla typowych drgających układów inżynierskich (maszyn) apriorycznie przyjmowanym modelem jest model liniowy. Jest to na ogół model postaci

$$M\ddot{\overline{q}} + K\dot{\overline{q}} + C\overline{q} = \overline{p}, \tag{5.1}$$

który wyznacza się albo na podstawie znajomości struktury układu rzeczywistego (tzw. modelowanie strukturalne), albo też na podstawie analizy mierzonej odpowiedzi $\widehat{\overline{q}}(t)$ na określony zbiór zadanych wymuszeń $\widehat{\overline{p}}(t)$ (np. analiza metodami eksperymentalnej analizy modalnej [4–6]). W obydwu przypadkach jednak konkretna postać modelu (wartości wyrazów macierzy M, K, C lub parametrów modalnych) zależy od badanego zakresu drgań (zakresu zmian częstości i amplitudy wymuszenia). Zmiana tego zakresu pociąga za sobą nie tylko potrzebę weryfikacji wartości parametrów modelu w obrębie tej samej klasy, ale także konieczność jego wzbogacenia o dodatkowe człony nieliniowe określonej postaci (np. dla drgań o większych amplitudach). Ustalenie ostateczne struktury modelu wymaga

zatem **ścisłego sprecyzowania zakresu i rodzaju wymuszeń dynamicznych działających na badany układ rzeczywisty**. Jest to ściśle związane z celem modelowania. Przejdziemy dalej do jego omówienia w kontekście modelowania elementów sprężysto-tłumiących maszyn i wykorzystania opracowanych i przedstawionych wcześniej w niniejszej pracy metod.

W układzie rzeczywistym element sprężysto-tłumiący przenosi obciążenia dynamiczne z jednej części układu $\mathcal{A}$ na drugą $\mathcal{B}$, sam doznaje przy tym zmiennych w czasie deformacji. Jego modelowanie w takich warunkach jest niezmiernie utrudnione i w zasadzie prawie zawsze przyjmuje się wtedy i wyznacza co najmniej dwa parametry związane z modelem liniowym o konfiguracji równoległej, to jest współczynnik sprężystości c oraz współczynnik tłumienia wiskotycznego k (patrz rys. 5.1). Wartości tych parametrów determinują ściśle tzw. parametry modalne układu, w celu zatem wyznaczenia konkretnych wartości tych parametrów stosuje się tzw. eksperymentalną analizę modalną.



Rys. 5.1. Stosowany powszechnie model (b) elementu sprężysto-tłumiącego (a)

Jednakże już zwykła próba statycznego obciążenia i odciążenia badanego elementu ukazuje pewną niedoskonałość takiego modelu, albowiem liniowa funkcja oddziaływania postaci

$$F(x, \dot{x}) = k\dot{x} + cx, \tag{5.2}$$

(gdzie x oznacza uogólnione przemieszczenie części $\mathcal{A}$ konstrukcji względem części $\mathcal{B}$) nie opisuje np. zjawiska histerezy. Jak wiadomo, najprostszy opis tego zjawiska wymaga wprowadzenia modelu tarcia suchego, oprócz liniowego tłumienia wiskotycznego. Prowadzi to w konswekwencji do **potrzeby stosowania modelowania nieliniowego**.

Mogą się także pojawić problemy ze złożonością układów rzeczywistych związaną z jego liczbą stopni swobody. Pełną identyfikację badanego elementu najłatwiej przeprowadzić w warunkach jego wyizolowania z maszyny, to jest budując takie stanowisko badawcze, w którym badany element działa w układzie dynamicznym o liczbie stopni swobody nie większej niż dwa (patrz rys. 5.2).

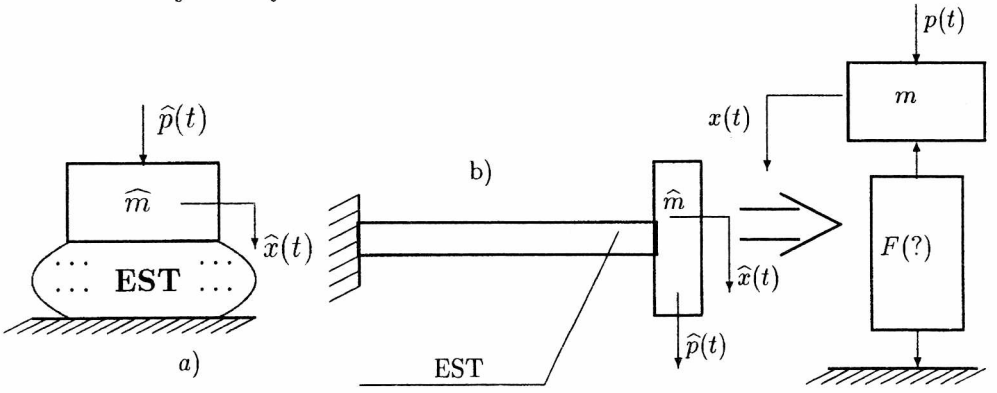
W przypadku wyizolowania badanego elementu, ogólne równanie opisujące ruch masy m przyjmuje postać

$$m\ddot{x} + F(?) = p(t), \tag{5.3}$$

gdzie $F(?)$ jest pewną nieznaną funkcją, opisującą siłę oddziaływania EST na masę $\widehat{m}$ badanego układu. W warunkach rzeczywistych badań byłaby to komfortowa sytuacja. Dlatego też w niniejszej pracy przedstawiono także uogólnienie na większą liczbę stopni swobody. Założenie, iż funkcja F zależy jedynie od prędkości $\dot{x}$ i przemieszczenia x, to jest

$$F(?) \equiv F(x, \dot{x}), \tag{5.4}$$

może być błędne. Pomijając już sam fakt, że w układzie rzeczywistym zachodzą na ogół nieodwracalne powolne zmiany jego dynamicznych właściwości, założenie (5.4) będzie błędne w przypadku układów o konfiguracji nierównoległego połączenia sprężyny z tłumikiem (patrz rys. 5.3), co wykazano podczas analizy układów zdegenerowanych. Założenie (5.4) jest błędne w przypadku układu, w którym EST jest zbudowany z realnie istniejących sprężyn w połączeniu, jak na rys. 5.3 z tłumikiem jest oczywiste.



Rys. 5.2. Przykłady układów rzeczywistych a) i b), w których elementy sprężysto-tłumiące determinują ruch masy skupionej $\widehat{m}$

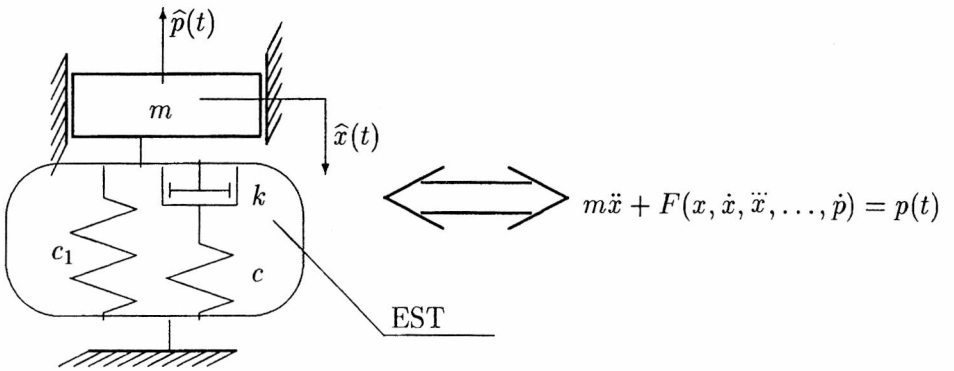
Świadczy o tym dokładnie przeprowadzona analiza równań różniczkowych ruchu takiego układu (sprowadzenie dwu równań do jednego równania postaci (5.4)) – co pokazano w rozdziale 4.

W sytuacji jednak, gdy EST wykonano z elasto-plastycznego materiału, dokładne zbudowanie równania postaci (5.3) (a także i określenie zbioru zmiennych niezależnych w funkcji $F(?)$) staje się problematyczne.

W celu określenia postaci funkcji F dla ustalonych zbiorów zmiennych niezależnych, procedura postępowania polega na ogół na apriorycznym założeniu określonego kształtu tej funkcji. Najczęściej przyjmuje się więc, że funkcja ta ma postać rozseperowaną na część czysto sprężystą $F_s(x)$ i część czysto dyssypatywną $F_t(\dot{x})$

$$F(?) = F(x, \dot{x}) = F_s(x) + F_t(\dot{x}), \tag{5.5}$$

gdzie $F_s(x)$, $F_t(\dot{x})$ są funkcjami jednego argumentu, a ich postacie są określone przez wielomiany dowolnego stopnia, co wykorzystano przy opracowaniu procedur identyfikacyjnych w rozdziale 2 i 3 niniejszej pracy.

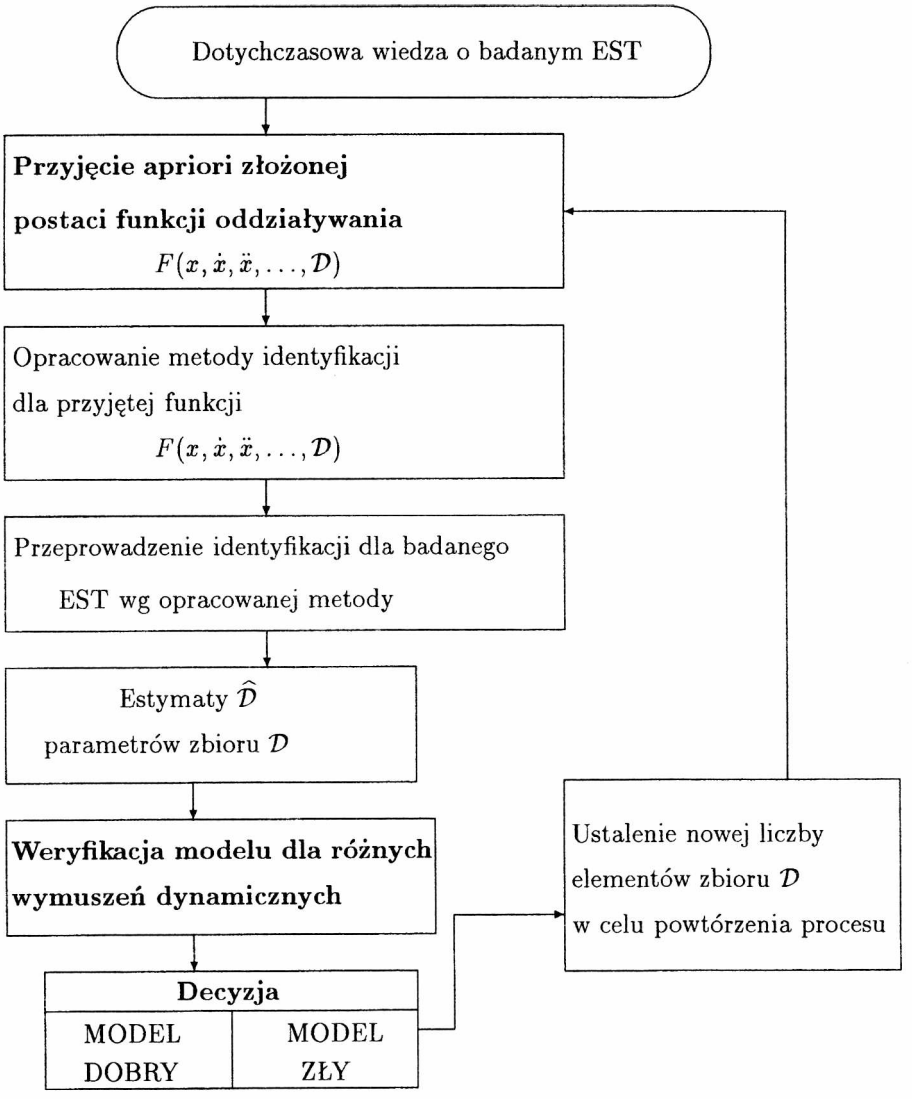


Rys. 5.3. Przykład EST, w którym założenie (5.4) jest błędne (tzw. układ o liczbie stopni swobody równej 1,5)

Postać rozseperowana (5.5) funkcji oddziaływania F może być właściwie przyjęta jedynie gdy wiadomo, że w funkcji tej nie występują tzw. człony mieszane typu $x^{\nu}\dot{x}^{\mu}$ oraz gdy oddziaływanie elementu sprężysto-tłumiącego nie ma postaci któregoś z analizowanych modeli zdegenerowanych. Podstawowym sygnałem informującym o możliwości występowania któregoś z tych przypadków jest prowadzenie badań układu rzeczywistego ze stosowaniem różnorakich wymuszeń dynamicznych (losowe, impulsowe, okresowe) i porównanie charakterystyk częstotliwościowych (FRF) dla tych wymuszeń.

W przypadku gdy funkcje $F_s(x)$ i $F_t(\dot{x})$ są liniowe i rozseperowane (bez członu mieszanego), określenie parametrów układu można prowadzić przez pomiar: dekrementu tłumienia drgań swobodnych, charakterystyk częstotliwościowych oraz przyspieszeń, prędkości, przemieszczeń i sił w tym samym czasie, jak również pomiar niektórych charakterystyk statycznych. Stosowanie tych ostatnich metod nawet w przypaku układów liniowych prowadzi bardzo często do różnych rezultatów w oszacowaniu wartości identyfikowanych parametrów [31, 33, 45, 124]. Opracowanie więc różnych metod wyznaczania stałych modelu (metod opartych

na różnych kryteriach) jest w takim przypadku istotne, albowiem rozrzuty wyników świadczą o trafności założenia dotyczącego klasy funkcji $F(?)$.

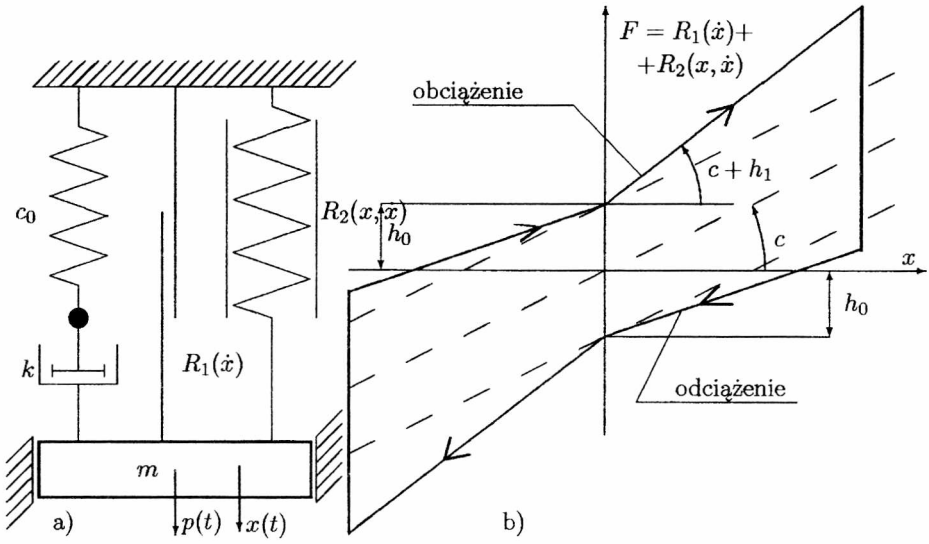


Rys. 5.4. Jedna z dróg poszukiwania modelu optymalnego funkcji $F(?)$

Dlatego jest potrzeba opracowania **metod identyfikacji układów dynamicznych dla różnych (niekoniecznie harmonicznych) wymuszeń dynamicznych** (np. wymuszeń losowych), co było między innymi przedmiotem niniejszej pracy.

Podano tu schematy postępowania (wynikające z przedstawionych w rozdziałach 2, 3 i 4 procedur identyfikacyjnych) przydatne w modelowaniu właściwości dynamicznych elementów sprężysto-tłumiących maszyn zakładając, że elementy te mogą mieć nieliniowe charakterystyki.

Jeśli model $F(?)$ funkcji oddziaływania elementu sprężysto-tłumiącego ma być dokładny zarówno w przypadku wymuszeń dynamicznych, jak i w warunkach obciążeń statycznych, to kryterium identyfikacji musi wykorzystywać informację z obydwu rodzajów obciążeń.



Rys. 5.5. Schemat modelu wyjściowego (a) i jego statyczna pętla histerezy (b)

Jeden ze sposobów poszukiwania postaci funkcji $F(?)$ polega na zastosowaniu algorytmu identyfikacji modelu wyjściowego, o apriorycznie przyjętej możliwie skomplikowanej konfiguracji, z silnie nieliniowymi członami dyssypatywno-sprężystymi, a następnie zweryfikowaniu hipotezy, że pewne stałe parametry zawarte w zbiorze $\mathcal{D}$ tak przyjętego modelu są równe zeru (patrz rys. 5.4). Podstawą jednak w tak przyjętym procesie postępowania jest **dysponowanie algorytmami identyfikacji szerokiej gamy nieliniowych układów dynamicznych.**

Typowym przykładem takiego ujęcia jest metoda opracowana w przypadku układu o konfiguracji uniwersalnej z uwzględnieniem tzw. sprężyny Reida (patrz punkt 2.3). W metodzie tej przyjmuje się apriori, że badany EST działa jak układ o konfiguracji złożonej, przedstawionej na rysunku 5.5. Układ ten jest modelem wyjściowym o zbiorze $\mathcal{D}$, zawierającym 6 stałych paramertów, to jest: m, k, c_0, h_0, h_1, c.

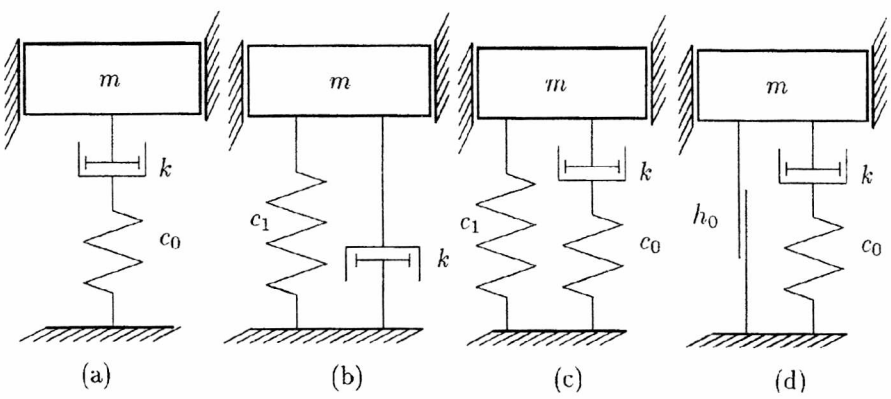
W układzie tym przyjęto dwa nieliniowe elementy opisane funkcjami

$$R_1(\dot{x}) = h_0 \operatorname{sgn} \dot{x}, \quad R_2(x, \dot{x}) = cx + h_1|x| \operatorname{sgn} \dot{x}, \tag{5.6}$$

gdzie funkcja $R_1(\dot{x})$ opisuje tzw. tarcie suche, funkcja $R_2(x, \dot{x})$ zaś jest tzw. sprężyną Reida [60, 74]. Zauważmy, że w wyniku przeprowadzenia procesu identyfikacji dla tego typu modelu mogą zaistnieć skrajne przypadki następujące:

- paramerty h_0, c, h_1 równe zeru, wówczas badany EST działa jak układ liniowy o konfiguracji Maxwella (rys. 5.6a)
- parametry h_0, h_1 równe zeru, parametr zaś $c_0 = \infty$, wówczas badany EST działa jak układ liniowy o konfiguracji równoległej (typu Kelvina–Voigta, rys. 5.6b)
- parametry h_0, h_1 równe zeru, wówczas badany EST działa jak układ liniowy o konfiguracji uniwersalnej (typ standardowy)(rys. 5.6c).

Możliwe są także inne przypadki, jak $c = 0, h_1 = 0$, wówczas model z rys. 5.5 redukuje się do układu z rys. 5.6d. W każdym z wymienionych przypadków proces identyfikacji powinien być powtórzony dla nowego zbioru parametrów $\mathcal{D}$, z zastosowaniem algorytmu opisanego w punkcie 2.3. W algorytmie tym przyjmuje się, że stałe c, h_0, h_1 są wyznaczone na podstawie odpowiedniej aproksymacji statycznej pętli histerezy (patrz rys. 5.5b), pozostałe zaś stałe (m, c_0, k) – na podstawie badań układu na pobudzenia periodyczne dowolnego kształtu.

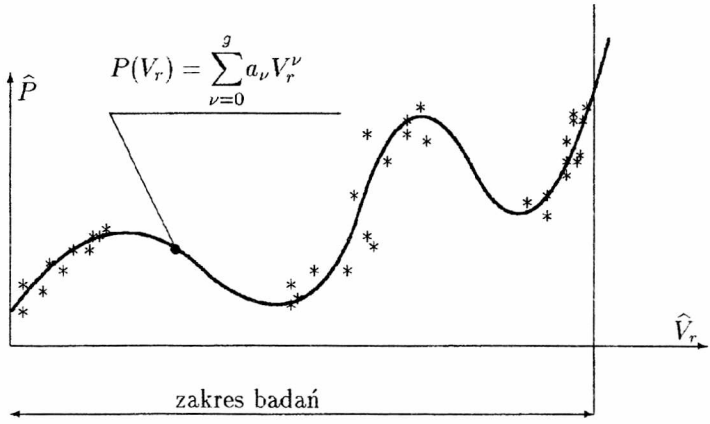


Rys. 5.6. Podstawowe modele wynikające z układu pokazanego na rys. 5.5

Na rysunku 5.8 przedstawiono schemat algorytmu identyfikacji badanego EST przy założeniu modelu wyjściwego z rys. 5.5. Na uwagę zasługuje fakt, że algorytm ten funkcjonuje dla wymuszeń okresowych dowolnego kształtu, dla których odpowiedź układu jest dowolną funkcją okresową. Rozwiązanie to może być zatem

wykorzystane do weryfikacji uzyskanego modelu w zakresie różnorakich wymuszeń (różnych warunków pracy badanego EST maszyny).

Wrócimy do problemu określenia funkcji dyssypacji w układach o konfiguracji równoległej. Jeśli badany element sprężysto-tłumiący może być opisany układem o konfiguracji równoległej ($c_0 = \infty$), to siła oddziaływania może być zapisana w postaci (5.5). W takim przypadku zadanie identyfikacji sprowadza się do wyznaczenia funkcji dyssypacji $F_t(\dot{x})$, której postać można wstępnie ustalić, stosując przykładowo metody rezonansowe [49, 60]. W przypadku metod rezonansowych wybór zbioru wyjściowego parametrów $\mathcal{D}$ jest dużo łatwiejszy, albowiem wykorzystuje zależność dwu zmiennych. Kształt tej zależności daje się wizualnie ocenić na odpowiednim wykresie.



Rys. 5.7. W metodzie rezonansowej liczby n, a_ν ustala się tak, aby zależność eksperymetalnie wyznaczona $\widehat{P}_1(\widehat{V}_r)$ była optymalnie przybliżona wyrażeniom potęgowym w badanym zakresie drgań

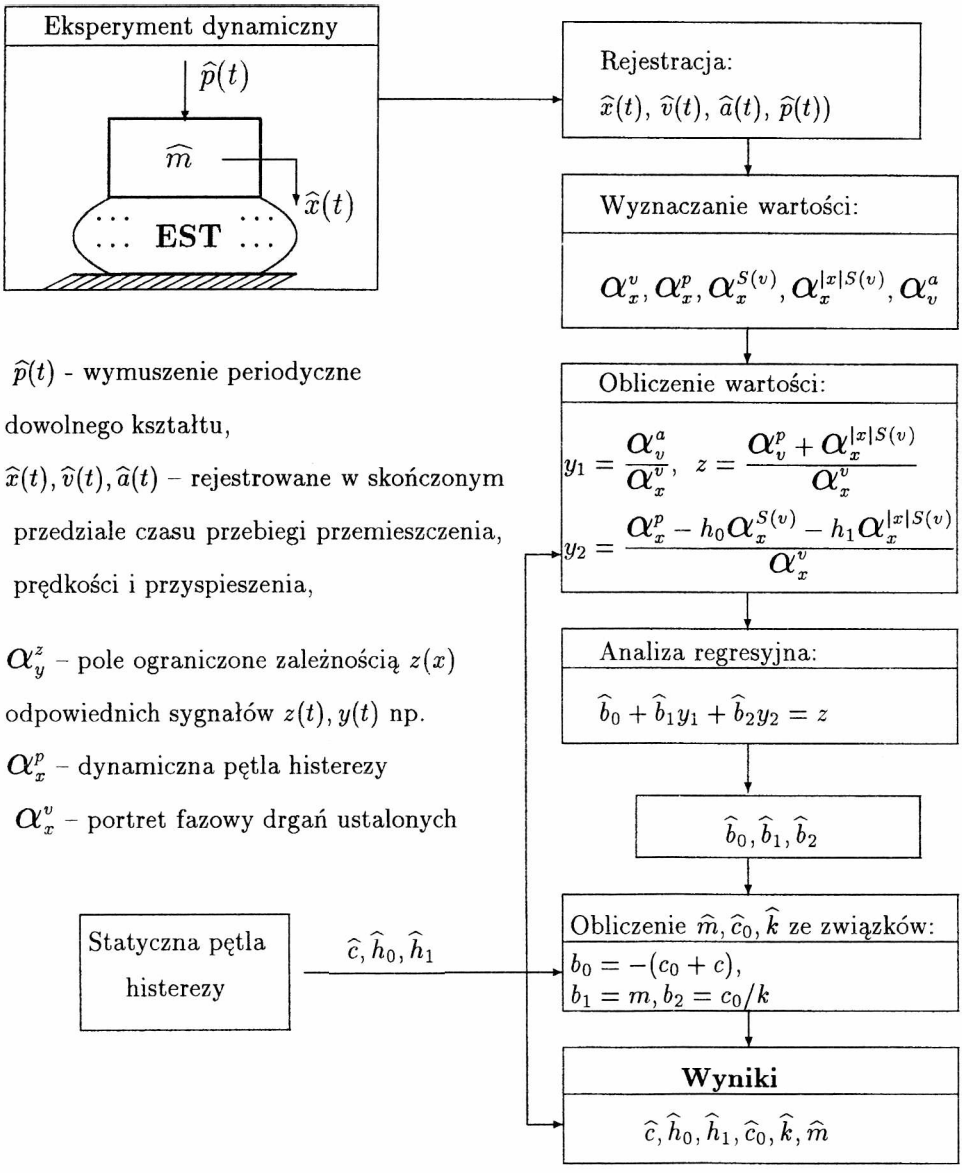
Przykładowo przyjmujemy, że funkcję dyssypatywną opisuje wyrażenie postaci

$$F_t(\dot{x}) = h\, Sgn\, \dot{x} + \sum_{\nu=1}^{g} k_\nu \dot{x}^\nu \tag{5.7}$$

gdzie h, k_ν – stałe nieznane parametry, ν, n – dowolne liczby nieparzyste, wartość liczby n nie musi być przyjmowana apriorycznie. Można ją bowiem ocenić na podstawie wyznaczonej eksperymentalnie zależności

$$\widehat{P}(\widehat{V}_r), \tag{5.8}$$

w której $\widehat{P}$ oznacza mierzoną amplitudę wymuszenia harmonicznego, $\widehat{V}_r$ – mierzona amplituda prędkości w rezonansie (patrz rys. 5.7).



Rys. 5.8. Schemat algorytmu identyfikacji modelu z rys. 5.5

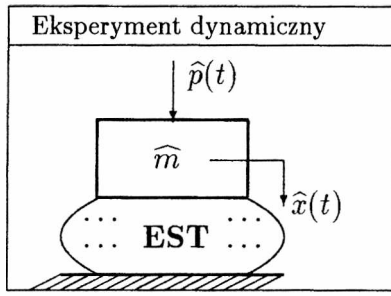
Zależność ta może być wizualnie przedstawiona w skończonym przedziale zmiennych $\widehat{P}$ i $\widehat{V}_r$ jako zbiór punktów na płaszczyźnie. Właśnie to zdecydowanie ułatwia określenie liczby n opisującej stopień wielomianu występującego w funkcji (5.7). Zastosowanie tej metody polega na obliczeniu stałych h, k_ν na podstawie aproksymacji wyznaczonej doświadczalnie zależności $\widehat{P}(\widehat{V}_r)$. Metody rezonansowe można wykorzystać do wstępnego wyznaczenia postaci funkcji oddziaływań $F(?)$, co jest bardzo przydatne do metod przedstawionych w niniejszej pracy.

Należy jednak pamiętać, że metody rezonansowe funkcjonują poprawnie w warunkach częstości rezonansowych, po spełnieniu założenia seperacji (5.5). Po wstępnym przyjęciu postaci funkcji $F(?)$ zasadniczym zadaniem jest dokładne wyznaczenie jej stałych parametrów. Rozumiemy przez to **wyznaczenie ich wartości optymalnych dla ustalonych wymuszeń dynamicznych**. Powinno być to **zweryfikowane w przypadku różnorakich wymuszeń dynamicznych zarówno co do postaci, jak i wartości amplitud, albowiem tylko takie postępowanie prowadzić może do pełnego testowania uzyskanego modelu**. Zauważmy, że równania bilansu energii i bilansu mocy są spełnione w przypadku dowolnych wymuszeń dynamicznych, opracowane metody mogą być wykorzystane w naturalnych warunkach pracy.

Przykładem rozwiązania w zakresie wykraczającym poza rezonans jest metoda wykorzystująca równanie bilansu energii i równanie bilansu mocy dla układów rozseperowanych, to jest dla układów, w których wstępnie ustalono, że funkcję oddziaływania $F(?)$ można zapisać w postaci (5.5). W wyniku badań statycznych oraz zastosowania wymuszeń harmonicznych i badaniu w rezonansie ustalono, że kształt funkcji sprężystości $F_s(x)$ i funkcji dyssypacji $F_t(\dot{x})$ opisuje się wyrażeniem

$$F_s(x) = \sum_{\mu=1}^{q} c_\mu x^\mu\,, \quad F_t(\dot{x}) = h \operatorname{sgn} \dot{x} + \sum_{\nu=1}^{g} k_\nu \dot{x}^\nu, \tag{5.9}$$

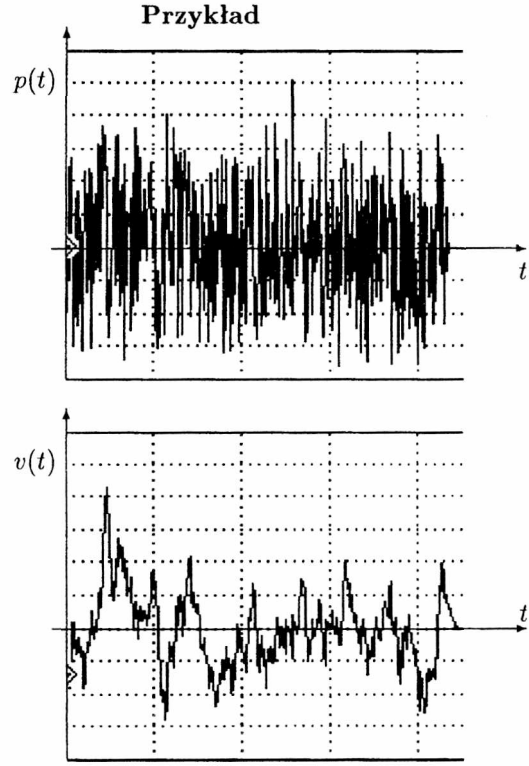
w których liczby q, g są już znane (wyznaczone) na podstawie stosowania wcześniejszych procedur identyfikacjnych. Obecne zadanie sprowadza się więc do ponownego ustalenia wartości parametrów c_μ, h, k_ν, ale dla innych (nieharmonicznych i nierezonansowych) wymuszeń dynamicznych. **Porównanie nowych wartości tych parametrów ze starymi umożliwi ocenę przydatności modelu do opisu badanego układu rzeczywistego w innych warunkach wymuszenia lub jego całkowitego odrzucenia, gdyby różnice okazały się nie do przyjęcia do budowanego modelu.**



$\widehat{p}(t)$ - przebieg wymuszenia w skończonym czasie T,

$\widehat{v}(t)$ – przebieg prędkości w tym samym czasie T,

Przykład



Rejestracja:
$\widehat{p}(t)$, $\widehat{v}(t)$ dla serii różnych wymuszeń $\widehat{p}_i(t)$

Utworzenie realizacji sygnałów
$|\widehat{v}_i|$, $\widehat{v}_i^{\nu+1}(t)$, $\widehat{p}_i\widehat{v}_i(t)$

Obliczenie wartości średnich
$\widehat{E}_i[|v|]$, $\widehat{E}_i[v^{\nu+1}]$, $\widehat{E}_i[pv]$

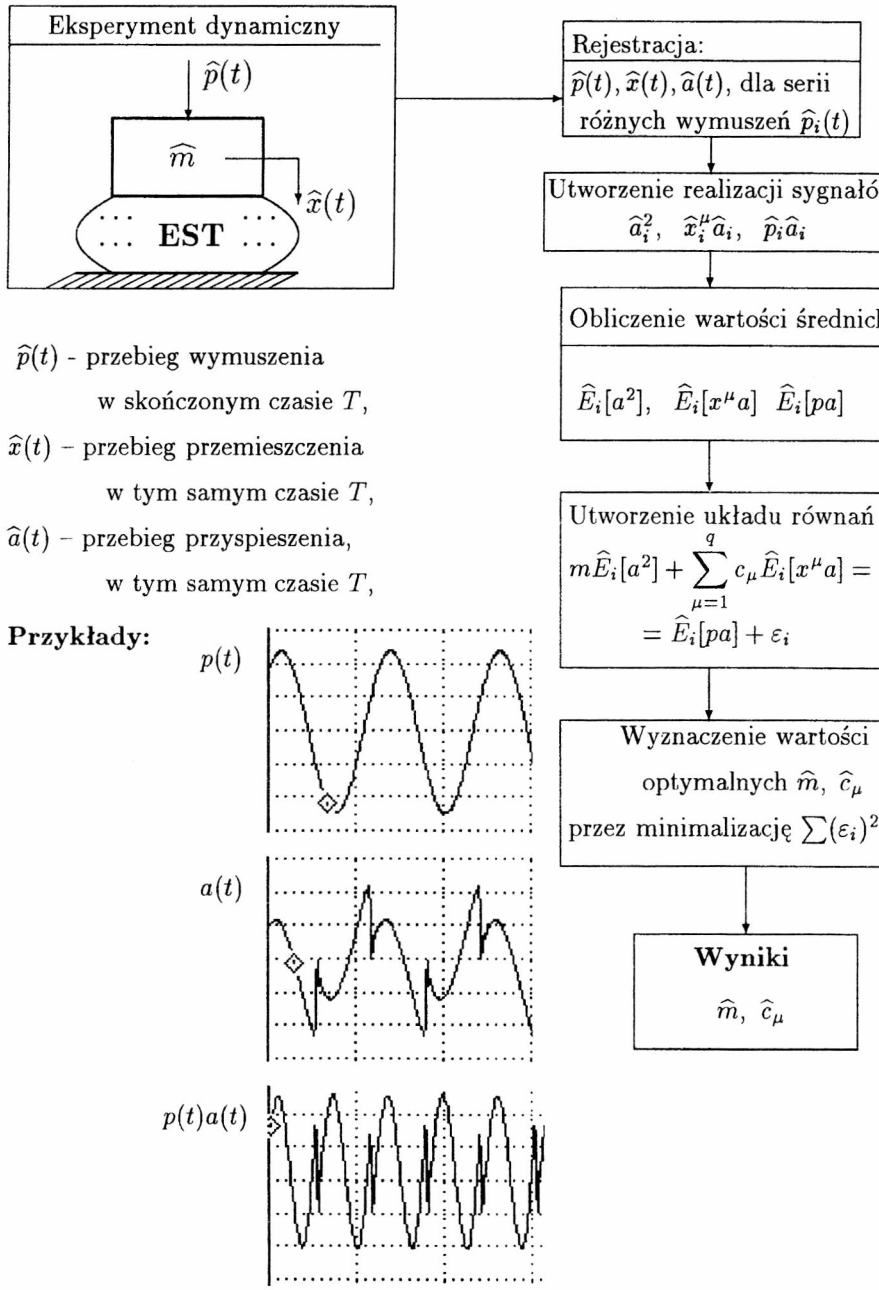
Utworzenie układu równań

$$h\widehat{E}_i[|v|] + \sum_{\nu=1}^{g} k_\nu \widehat{E}_i[v^{\nu+1}] = \widehat{E}_i[pv] + \delta_i$$

Wyznaczenie wartości optymalnych $\widehat{h}$, $\widehat{k}_\nu$ przez minimalizację $\sum(\delta_i)^2$

Wyniki
$\widehat{h}$, $\widehat{k}_\nu$

Rys. 5.9. Algorytm wyznaczania parametrów dowolnie nieliniowej funkcji dyssypacji przy dowolnym (stacjonarnym) wymuszeniu dynamicznym



Rys. 5.10. Algorytm wyznaczania parametrów dowolnie nieliniowej funkcji restytucyjnej oraz masy skupionej m przy dowolnym (stacjonarnym) wymuszeniu dynamicznym

W niniejszej pracy pokazano, że równania bilansu energii i bilansu mocy dla układów o konfiguracji równoległej oraz funkcji $F_s(x)$ i $F_t(\dot{x})$ postaci (5.9) można zapisać

$$hE[|v|] + \sum_{\nu=1}^{g} k_\nu E[v^{\nu+1}] = E[pv], \tag{5.10}$$

$$mE[a^2] + \sum_{\mu=1}^{q} c_\mu E[x^\mu a] = E[pa], \tag{5.11}$$

gdzie symbole E[...] oznaczają wartości średnie z odpowiednich sygnałów (np. $E[pv]$ – wartość średnia sygnału utworzonego z wymnożenia sygnałów wymuszenia i prędkości, $E[a^2]$ – wartość średnia sygnału przyspieszenia podniesionego do potęgi drugiej). Wykazano, że równania te są spełnione dla takich wymuszeń dynamicznych, dla których odpowiedź układu (funkcje $x(t), v(t), a(t)$) jest ustalona.

W przypadku układów rzeczywistych założenie to jest spełnione praktycznie dla dowolnych wymuszeń okresowych, a także wymuszeń losowych o ustalonym rozkładzie prawdopodobieństwa (stacjonarnych procesów losowych). Uwzględniwszy występujące rodzaje wprowadzonych członów nieliniowych do rozpatrywanych modeli, można się spodziewać, że rozwiązania układów nie będą spełniać tego założenia dla pewnych wymuszeń (quasiokresowość, stany nieustalone, chaos). W przypadku pojawienia się tego typu odpowiedzi należy zmienić częstość lub/i amplitudę wymuszenia, a tym samym ograniczyć zakres obciążeń stosowanych na badany układ.

Wyznaczenie wartości średnich $E[...]$ z odpowiednich sygnałów w drodze eksperymentalnej jest na obecnym poziomie rozwoju techniki (analizatory widmowe wielokanałowe) dość proste. Istotą jest jednak stosowanie w eksperymencie takich wymuszeń dynamicznych $p(t)$, dla których układy równań (5.10) i (5.11) nie byłyby liniowo zależne. Badania w tym zakresie były przeprowadzone dla kilku wymuszeń dynamicznych na silnie nieliniowym układzie. Identyfikację funkcji dyssypacji można wykonać niezależnie od funkcji restytucyjnej. Procedurę postępowania w pierwszym przypadku przedstawiono schematycznie na rys. 5.9 w drugim zaś – na rys. 5.10.

Ostatecznie więc, na podstawie przedstawionych metod, można określić argumenty funkcji $F(?)$, a także jej kształt (stopień nieliniowości). W końcowym etapie funkcję tę daje się określić z dokładnością do wartości stałych parametrów dla wymuszeń dynamicznych dowolnego kształtu. W procesie tym można wykorzystać oryginalne procedury opracowane dla modeli silnie nieliniowych.

Jeśli testowanie tak określonego modelu wykaże jego nieprzydatność, to dalsze poszukiwania muszą uwzględniać konieczność stosowania w identyfikacji modeli

zdegenerowanych, których metody identyfikacji przedstawiono w rozdziale 4.

Stosowanie opisanych procedur jest wygodne w przypadku układów jednomasowych (o jednym i półtora stopnia swobody). Budowa odpowiedniego stanowiska badawczego dla elementów pracujących już w określonym układzie złożonym może być kosztowna lub praktycznie niewykonalna. Stąd też dodatkowo opracowano odpowiednie procedury identyfikacji w przypadku układów wielomasowych, które przedstawiono w punkcie 4.4 niniejszej pracy.

Literatura

[1] Allemang R. J., Brown D. L., Mergay M., Zimmerman R., *Parameter estimation techniques for modal analysis*, SAE Technical Paper Series, No. 790221, 1979.

[2] Bekey G. A., *System identification, an introduction and a survey*, Similation, Vol. 15. Oct., 1970, 151–166.

[3] Beliveau J. G., *Identification of viscous damping in structures from modal information*, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 43, June 1976, 335–339.

[4] Bocian J., Piesiak St., Szata M., *Identification of non-linear elasto-damping characteristics under symmetrical and unsymmetrical excitations.* Off–Road Machines and Vehicles in Theory and Practice, Proceedings of the 1st International Conference, Wrocław, Poland, September 23–24, 1996, 339–346.

[5] Bocian J., Piesiak St., *Próba opisu dynamicznym modelem nieliniowym belki przekładkowej*, Mater. XVII Sympozjum Mechaniki Eksperymentalnej Ciała Stałego, Jachranka, 1996, 93–97.

[6] Bocian J., Piesiak St., *Metoda wyznaczania charakterystyk dyssypatywno-sprężystych w przypadku modeli wielomasowych*, Mater. III Konferencja Naukowa pt. Metody Doświadczalne w Budowie i Eksploatacji Maszyn, Szklarska Poręba, 1997. Wrocław, Instytut Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn PWr., 1997, 131–140.

[7] Bocian M., Piesiak St., *Identyfikacja charakterystyk dyssypatywno--sprężystych uwzględniających zjawisko „luzu"*, w: Pojazdy samochodowe. Problemy rozwoju, jakości i eksploatacji. Autoprogres '98. VI Międzynarodowa Konferencja Naukowo-Techniczna, Jachranka, 1998, 69–76.

[8] Bocian M., Piesiak St., *Analiza dynamiczna połączenia kołnierzowego*, w: Computer Aided Engineering. IV Międzynarodowa Konferencja Naukowa. Polanica Zdrój, 1998. Wrocław, Instytut Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn PWr., 1998, 49–56.

[9] Bocian M., Piesiak St., *Identyfikacja dwumasowego układu dynamicznego z luzem i tarciem suchym przy wymuszeniach okresowych.* w: Computer Aided Engineering. IV Międzynarodowa Konferencja Naukowa. Polanica Zdrój, 1998. Wrocław, Instytut Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn PWr., 1998, 57–66.

[10] Bocian M., Piesiak St., Wajda M., *Badania dynamiczne tłumienia drgań w połączeniach śrubowych z zastosowaniem rezonansowej metody identyfikacji*, w: Metody Doświadczalne w Budowie i Eksploatacji Maszyn, IV Konferencja Naukowa, Wrocław–Szklarska Poręba, 1999, T.1. Wrocław, Instytut Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn PWr., 1999, 163–170.

[11] Bocian M., Piesiak St., *Identyfikacja dwumasowego układu dynamicznego z luzem i tarciem suchym przy wymuszeniach okresowych.* Przegląd Mechaniczny Nr 10/1999, 19–22.

[12] Bocian M., Kulisiewicz M., Piesiak St., *Identyfikacja nieliniowych charakterystyk tłumienia drgań elementów sprężysto-tłumiących układów mechanicznych przy losowych wymuszeniach impulsowych*, w: Problemy Rozwoju Maszyn Roboczych, XIII Konferencja Naukowa. Zakopane, 2000, 39–46.

[13] Bocian M., Kulisiewicz M., Piesiak St., *Wykorzystanie nieliniowych metod identyfikacji do określenia zmian charakterystyk tłumienia w wybranych elementach gumowych*, w: 19th Symposium on Experimenal Mechanics of Solid Institute of Aeronautics and Applied Mechanics of Warsaw University of Technology. Jachranka, 2000, 139–144.

[14] Bocian M., Kulisiewicz M., Piesiak St., *Wykorzystanie nieliniowych modeli zdegenerowanych w identyfikacji elementów sprężysto-tłumiących maszyn*, w: Problemy Rozwoju Maszyn Roboczych, XIV Konferencja Naukowa. Zakopane 2001. Zeszyty Naukowe – Politechnika Opolska Nr 265, Mechanika, Z. 64, 37–44.

[15] Bubnicki Z., *Identyfikacja obiektów sterowania*, PWN, Warszawa 1974.

[16] Cannon R.H.jr., *Dynamics of physical systems*, McGraw-Hill, 1967.

[17] Caughey T. K., Vijayaraghavan A., *Free and forced oscillations of a dynamic system with „Linear Hysteretic Damping"*. Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 5, 1970.

[18] Cempel Cz., *Podstawy wibroakustycznej diagnostyki maszyn*, WNT, Warszawa 1982.

[19] Close C. M. Frederick D. K., *Modelling and analysis of dynamic systems*, John Wiley and Son. Inc. New York 1995.

[20] Cunningham W. J., *Introduction to nonlinear analysis*, McGraw-Hill Book Comany Inc., New York, Toronto, London 1958.

[21] Derski W., Ziemba S., Analiza modeli reologicznych. PWN, Warszawa 1968.

[22] Dossing Ole, *A method of determining the modal frequencies of structures with coupled mode*, Technical Review, No. 3, Bruel & Kjaer 1986.

[23] Dynamic Signal Analyzer HP 35665A, Concepts Guide, Hewlett--Packard Company, Washington 1991.

[24] Dudek D., *Modele statystyczne obciążeń eksploatacyjnych w procesie urabiania wielonaczyniowymi koparkami kołowymi*, Prace Nauk. IKEM PWr., Nr 53, Seria: Monografie Nr 12, Wrocław 1987.

[25] Dudek D., *Podstawy eksperymentalnej identyfikacji ustrojów nośnych maszyn roboczych metodą analizy modalnej*, Konferencja Naukowa pt. Metody Doświadczalne w Budowie i Eksploatacji Maszyn Roboczych, technologicznych oraz środków transportu, Szklarska Poręba 1993.

[26] Dudziak M., *Nonlinear modelling of elastic materials and new theory of creep*, Machne Dynamics Problems, Nr 29, Poznań 1990.

[27] Ewins D.J., Gleeson P.T., *A method for modal identification of lightly damped structures*, Mechanical Systems and Signal Processing, **3**(2), 1989, 173–193.

[28] Ewins J., *Modal testing: Theory, practice and aplication* Research studies press Ltd., Baldock, Hertfordshire, 2000.

[29] Geradin M., Rixen D., *Mechanical Vibrations, Theory and Applications to Structural Dynamicis*, Wiley&Masson, 1994.

[30] Gutowski R., Świetlicki W., *Dynamika i drgania układów mechanicznych*, PWN, Warszawa 1986.

[31] Giergiel J., Uhl T., *Identyfikacja układów mechanicznych.* PWN, Warszawa 1990.

[32] Graupe D., *Identification of systems.* Robert E. Krieger Publishing Company, New York 1975.

[33] Hayasihi C., *Nonlinear oscillations in physical systems*, McGraw-Hill, 1964.

[34] HP 35665A Dynamic Signal Analyzer. Hewlett–Packard Co, Singapore 8/91, 5091–2492E.

[35] Ibanez P., *Review of analytical and experimental techniques for improving structural dynamic model*, Weld. Re Louncil B., No. 249, 1979

[36] Ibanez P., *Identification of dynamic parameters of linear and nonlinear structural models from experimental data*, J. of Nuclear Eng. and Design, Vol. 25, 1973, 30–41.

[37] Irvine H.M., *Structural dynamics for the practising engineer*, Allen and Unwin Ltd. London 1986.

[38] Isermann R., *Identifikation dynamischer systeme* Bd. 2, Berlin Heidelberg New York (Springer), 1993. Plates by Means of a Layer, Leuven 1967.

[39] Iwankiewicz R., *World scientific, series on advances in mathematics for applied sciences*, Vol. **36**, Dynamic Mechanical Systems Under Random Impulses, 1995.

[40] Johnston J. J., *Econometric methods*, McGraw-Hill Book Company Inc, New York 1963.

[41] Kaleta J., *Doświadczalne podstawy formułowania energetycznych hipotez zmęczeniowych*, Pr. Nauk. Inst. Mater. PWr., Nr 59, Seria: Monografia Nr 24, Wrocław, 1998.

[42] Kamiński E., *Podstawowe metody identyfikacji i diagnostyki drganiowej maszyn*, Dynamika Maszyn, PAN, Ossolineum 1974.

[43] Kasprzak W. (pod red.), *Systemy komputerowe w laboratoriach badawczych i przemysłowych CAMAC-SM4 i CAMAC-MERA 60.* Wyd. PWr., Wrocław 1988.

[44] Kasprzak W., Piesiak St., Szata M., *System CAMAC - SM4 do obsługi eksperymentu w mechanice*, Mechanika i Komputer, T. 7, 17–25, Warszawa 1988.

[45] Kin N. Tong, *Theory of mechanical vibration*, John Wiley and Sons, New York 1960.

[46] Kononenko V.O., Plachtenko N.P., *Opredelenie charakteristik nelinejnych elementov kolebatelnych sistem iz analiza dviżenija*, Prikladnaja Mechanika, T. V, Kiev 1969, 1–7.

[47] Kononenko V.O., Plachtenko N.P., *Identifikacja nelinejnych kolebatelnych sistem*, Kiev, Naukowa Dumka 1976.

[48] Kulisiewicz M., *Metoda separacji wielowymiarowego zagadnienia parametrycznej identyfikacji obiektów dynamicznych w przypadku nieliniowego dyskretnego modelu o strukturze szeregowej*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, Nr 20, PAN, 1981, 247–282.

[49] Kulisiewicz M., *Konstrukcja metod identyfikacji dla wybranych struktur nieliniowych modeli dynamicznych układów mechanicznych*, Pr. Nauk. Inst. Mater. i Mech. Tech. PWr., Nr 44, seria: Monografie Nr 16, Wrocław 1985.

[50] Kulisiewicz M., *Identification method for the dynamic properties of the mechanical structures on the basis of the Duffing non-symmetrical model*, Nonlinear Vibration Problems, No. 20 Polish Ac. of Sc., 1981, 203–245.

[51] Kulisiewicz M., *An experimental technique of testing the parallel spring–damper configuration of the dynamic mechanical system with a single degree of freedom*, Modelling, Simulation, Control, B, AMSE Press, Vol. 11, No. 1, 1987, 15–28.

[52] Kulisiewicz M., *A Nonparametric method of identification of vibration damping in non-linear dynamic systems*, Int. J. Solids Structure, Vol. 19, No. 7, 1983, 601–609.

[53] Kulisiewicz M., Piesiak St., *Wybrane procedury postępowania przy empirycznej identyfikacji nieliniowych układów dynamicznych*, w: XIII Międzynarodowa Konferencja Dynamiki Maszyn. Interdynamics 81. IPPT PAN, Jadwiszyn k. Warszawy, T. 2, 265–274, 1981.

[54] Kulisiewicz M., Piesiak St., *Some concepts of modelling procedures for mechanical nonlinear dynamic systems*, SAMS, 1994, Vol. 14, 149–160.

[55] Kulisiewicz M., Piesiak St., *Szacowanie charakterystyk sprężysto-tłumiących w oparciu o równanie energii układów nieliniowych*, Zeszyty Naukowe PŚl., 1994 Nr 1230, Mechanika, Z. 115, 201–208. Referat wygłoszony na XXXIII Sympozjum Modelowanie w Mechanice, Wisła 1994.

[56] Kulisiewicz M., Piesiak St., *Identyfikacja własności dynamicznych konstrukcji mechanicznych*, Wyd. PWr., Wrocław 1975.

[57] Kulisiewicz M., Piesiak St., *Zastosowanie równania energii do identyfikacji układu zdegenerowanego z tarciem suchym*, w: Metody Doświadczalne w Budowie i Eksploatacji Maszyn Roboczych, Technologicznych oraz Środków Transportu, Konferencja Naukowa, Szklarska Poręba, 1993, Cz. 2. Wrocław, Wyd. PWr., 1993, 157–164.

[58] Kulisiewicz M., Piesiak St., *Application of the hysteresis loop in identification process of nonlinear dynamic systems,* Machine Dynamics Problems, Vol. 9, 1994, 59–70.

[59] Kulisiewicz M., Piesiak St., *Identyfikacja członów nieliniowych w układzie dwumasowym przy wymuszeniach periodycznych*, w: Górnictwo Odkrywkowe, 1994 R 36. Referat z VII Konferencji Naukowej pt. Problemy urabiania i przeróbki skał Szklarska Poręba 1994.

[60] Kulisiewicz M., Piesiak St., *Metodologia modelowania i identyfikacji mechanicznych układów dynamicznych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1994.

[61] Kulisiewicz M., Piesiak St., *Koncepcje identyfikacji charakterystyk elementów sprężysto-tłumiących układów wielomasowych przy arbitralnych wymuszeniach dynamicznych*, w: Metody Doświadczalne w Budowie i Eksploatacji Maszyn. II Konferencja Naukowa. Wrocław, Szklarska Poręba 1995, T. 2. Wrocław, Oficyna Wydawnicza PWr., 1995, 81–90.

[62] Kulisiewicz M., Piesiak St., *Procedura określania charakterystyk dyssypatywno-sprężystych elementów nieliniowych układów w arbitralnych warunkach wymuszeń dynamicznych*, w: Układy dynamiczne w aspekcie teorii i zastosowań. III Ogólnopolska Konferencja. Materiały konferencyjne. Zakład Automatyki i Biomechaniki Instytutu Maszyn Przepływowych Polit. Łódz. Łódź, 1995, 183–188.

[63] Kulisiewicz M., Piesiak St., Szata M., *Pewna procedura identyfikacji elementów sprężysto-tłumiących pojazdów samochodowych*, w: Pojazdy samochodowe, problemy rozwoju i eksploatacji. AUTOPROGRES'95. V Międzynarodowa Konferencja Naukowo-Techniczna. Materiały konferencyjne. Przemysłowy Instytut Motoryzacji, Wojskowy Instytut Techniki Pancernej i Samochodowej, Instytut Pojazdów Mechanicznych WAT. Jachranka 1995. Sekcja I. Teoria, konstrukcja i badania samochodów, 190–199.

[64] Kulisiewicz M., Piesiak St., *Szkic problematyki identyfikacji mechanicznych układów dynamicznych w aspekcie zastosowań modeli nieliniowych*, Pr. Nauk. Inst. Mater. PWr., Nr 55, Konferencje 4 (1995), 29–38.

[65] Kulisiewicz M., Piesiak St., *Określenie własności dynamicznych układów mechanicznych poddanych losowym wymuszeniom periodycznym*, w: IX Konferencja Problemy Rozwoju Maszyn Roboczych i VIII Konferencja Naukowa Problemy w Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn Hutniczych i Ceramicznych. Komitet Budowy Maszyn PAN. Zakopane 1996, 117–124.

[66] Kulisiewicz M., Piesiak St., Iwankiewicz R., *Application of power balance equation in identification of restoring force and mass in a non-linear dynamical system with dry friction*, w: Off-Road Machines and Vehicles in Theory and Practice, Proceedings of the 1st International Conference. ISTVS East European Office, Technical University of Wrocław. Faculty of Mechanical Engineering. Institute of Machine Design and Operation. Wrocław 1996, 367–375.

[67] Kulisiewicz M., Iwankiewicz R., Piesiak St., *An identification technique for non-linear dynamical systems under stochastic excitations*, Journal of Sound and Vibration (1997) 200(1), 31–40.

[68] Kulisiewicz M., Piesiak St., Iwankiewicz R., *Identyfikacja własności dynamicznych elementów sprężysto-tłumiących układów mechanicznych przy wymuszeniach losowych*, w: Problemy Rozwoju Maszyn Roboczych. X Konferencja Naukowa. KBN PAN Zakopane, 1997. Z. 2, Warszaw: Wyd. MET 1997, 201–208.

[69] Kulisiewicz M., Piesiak St., *Identyfikacja elementów sprężysto-tłumiących układów mechanicznych z zastosowaniem modeli nieliniowych*,. Problemy Maszyn Roboczych, Vol. 9, Z. 9, 1997, 65–85.

[70] Kulisiewicz M., Piesiak St., *Problemy identyfikacji członów dyssypatywno-sprężystych nieliniowych układów dynamicznych w warunkach stacjonarnych obciążeń losowych*, w: 4th Conference on Dynamical System Theory and Application Proceeding, Łódź 1997, 181–186.

[71] Kulisiewicz M., Piesiak St., *An identification method for determining arbitrarily nonlinear damping in some elements of complex dynamical systems under random excitations*, w: 7th European ISTVS Conference. Proceeding International Society for Terrain-vehicle Systems, Institute for Earthmoving Machinery and off-road Vehicles of the Italian National Research Council. Ferrara, Włochy, 1997, 311–318.

[72] Kulisiewicz M., Piesiak St., *Problemy identyfikacji nieliniowego tłumienia w elementach sprężysto-tłumiących układów mechanicznych przy poddanych losowym wymuszeniom impulsowym*, w: Problemy Rozwoju Maszyn Roboczych. XII Konferencja Naukowa. Zakopane, 1999, Cz. I, 195–204.

[73] Kulisiewicz M., Piesiak St., *Problemy identyfikacji układów dynamicznych z elementami zdegenerowanymi w warunkach złożonych obciążeń nieharmonicznych*, w: Mechanics and Mechanical Engineering, No. 3, 2002. Technical University of Łodz.

[74] Kulisiewicz M., Piesiak St., *Nonlinear Modelling of Dynamic Mechanical Systems.* Raporty PRE. Nr 7 Inst. Mater. i Mech. Tech., Wrocław 1999.

[75] M. Kulisiewicz, St. Piesiak, M. Wajda, *Identyfikacja nieliniowych układów dynamicznych przy losowych wymuszeniach impulsowych*, w: Układy Dynamiczne – Teoria i Zastosowania. V Konferencja, Łódź 608, 1999. Łódź, Polit. Łódz. 1999, 239–244.

[76] Kulisiewicz M., Piesiak St., Bocian M., Wajda M., *Identyfikacja nieliniowych charakterystyk tłumienia drgań w układach mechanicznych z wykorzystaniem oprogramowania HP VEE*, Komputerowe wspomaganie prac inżynierskich. V Międzynarodowa Konferencja Naukowa. Polanica Zdrój 2000, T. 2. Wrocław, Instytut Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn PWr., 2000, 59–66.

[77] Kulisiewicz M., Piesiak St., Wajda M., *Identification of nonlinear dynamical systems under random impulse excitations.* SAMS, 2002, Vol. 42(3), 463–472.

[78] Kulisiewicz M., Piesiak St., Bocian M., *Identification of nonlinear damping using energy balance method with random pulse excitation.* Journal of Vibration and Control, 7/2001.

[79] Kulisiewicz M., Piesiak St., Bocian M., *Energetyczny algorytm identyfikacji symulowanego komputerowo układu zdegenerowanego z tarciem suchym*, w: Systems 2002, Vol. 7, Nr 1, 47–53. Referat z VI Międzynarodowej Konferencji Naukowej pt. Computer aided engineering, Polanica Zdrój 2002.

[80] Kulisiewicz M., Piesiak St., *Wyznaczanie modelu tłumienia drgań belek stalowych i mosiężnych pewną metodą identyfikacji*, w: Sympozjum Modelowanie w Mechanice, PTMTS, Beskid Śląski, 1987, 223–230.

[81] Kulisiewicz M., Piesiak St., *Some analytical formulas to get the response of typical dynamic systems for arbitrary excitations*, Studia Geotechnica et Mechanica, Vol. XIII, No. 1/2, 1991, 3–19.

[82] Kulisiewicz M., Piesiak St., *A modelling procedure of the simple mechanical dynamic systems with using a nonlinear model*, Computational System Analysis 1992, A. Sydow (Editor), Elsevier Sc. Pub. B. V., 1992, 501–505.

[83] Kulisiewicz M., Piesiak St., *Zastosowanie równania energii do identyfikacji układu zdegenerowanego z tarciem suchym*, w: Metody doświadczalne w budowie i eksploatacji maszyn roboczych,

technologicznych oraz środków transportu, Konferencja naukowa., Wrocław–Szklarska Poręba, 1993, Cz. 2. Wrocław, Wyd. PWr., 1993, 157–164.

[84] Kulisiewicz M., Piesiak St., *A Modelling Procedure of the Simple Mechanical Dynamic Systems with Using a Nonlinear Model*, Proceedings of 4-th Int. Symp. on Systems Analysis and Simulation, Berlin, 25–28 August, 1992.

[85] Kurnik W., *Bifurkacje dywergentne i oscylacyjne*, WNT, Warszawa 1997.

[86] Kruszewski J., Wittbrodt E., *Drgania układów mechanicznych w ujęciu komputerowym, Zagadnienia liniowe*, T. I, WNT, Warszawa 1997.

[87] Morrsion F., *Sztuka modelowania układów dynamicznych, deterministycznych, chaotycznych, stochastycznych*, WNT, Warszawa 1996.

[88] Mańczak K., *Metody identyfikacji wielowymiarowych obiektów sterowania*, WNT, Warszawa 1971.

[89] Masri F., Caughey T.K., *A nonparametric identification technique for nonlinear dynamic problems*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 46, June 1979, 433–445.

[90] Masri F., Sassi H., *Identification and modeling of nonlinear systems*, Nuclear Engineering and Design, Vol. 72, No. 2, 1982.

[91] Minorski N., *Drgania nieliniowe*, PWN, Warszawa 1967.

[92] Natke H.G., *Einführung in theorie und praxis der zeitreihen und modalanalyse identifikation schwingungsfähiger elastomechanischer systeme*, Vieweg Verlag, Braunschweig, Wiesbaden 1993.

[93] Nayfeh A.H., *Parametric identification of nonlinear dynamic systems*, Computers & Structures 20, 487–493, 1985.

[94] Newland D. E., *Random vibrations and spectral analysis*, New York, Longman, second edition, 1984.

[95] Osiecki J., *Elementy modelowania w dynamice maszyn*, Dynamika Maszyn, PAN, Ossolineum, 1974.

[96] Osiński Z., *Teoria drgań mechanicznych*, PWN, Warszawa 1979.

[97] Osiński Z., *Hysteresis loops of the vibrating system*, Machine Dynamics Problems, Vol. 5, 1993.

[98] Oświęcimski W., Piesiak St., *Ocena trwałości zmęczeniowej próbek ze stali 10HA w losowym jednoosiowym stanie naprężenia.* Materiały konferencyjne XIV Sympozjum Mechaniki Doświadczalnej Ciała Stałego, Jachranka, 8–10 października 1992.

[99] Piesiak St., *Identification of vehicle suspension parameters by means of harmonic balance method based on lab test* Polsko-Czechosłowacka Konferencja Dynamiki Maszyn, Gliwice 1971.

[100] Piesiak St., *Identyfikacja układu o dwóch stopniach swobody metodą bilansu harmonicznych.* Pr. Nauk. Inst. Mater. PWr., Nr 15, SM Nr 10, 1974.

[101] Piesiak St., *Identyfikacja własności mechanicznych układu o n-stopniach swobody metodą bilansu harmonicznych.* Pr. nauk. Inst. Mater. PWr., Wrocław 1973.

[102] Piesiak St., *Identification of mechanical properties of a n-degree of freedom system by means of harmonic balance method.* Scientific Papers of the Institute of Materials Science and Appl. Mechanics of Wrocław Technical University, No 30, Studies and Research No 19, 77–93, 1976.

[103] Piesiak St., Szata M., *Computer support of experimental work system CAMAC-SM4.*, w: Proceedings of the Congress on Material Testing, Sc. Soc. Mech. Eng., Austrian Soc. Experim., Strain. Anal. Yug. Soc. Mech., Budapest 1986.

[104] Piesiak St., Szata M., *Fatigue life computing based on stand and exploitation testing*, w: Proceedings of the Congress on Material Testing, Sc. Soc. Mech. Eng., Austrian Soc. Experim., Strain. Anal. Yug. Soc. Mech., Budapest 1986.

[105] Pisarenko G. Jakowlew A.P. Matwiejew W.W., *Własności tłumienia drgań materiałów konstrukcyjnych*, WNT, Warszawa 1976.

[106] Proceeding IIIB of the 8th International Seminar on MODAL ANALYSIS, K.U. Leuven, Belgium, 12–16 September, 1983.

[107] Proceeding IIIB of the 12th International Seminar on MODAL ANALYSIS, K.U. Leuven, Belgium, September, 1987.

[108] Rice H.J., Fitzpatrick J.A., *The measurement of non-linear damping in single-degree-of-freedom systems*, ASME J. Vibration and Acoustics, **113** (1991) 132–140.

[109] Roberts J.B., Dunne J.F., Debonos A., *A spectral method for estimation of non-linear system parameters from measured response*, Probabilistic Engineering Mechanics, **10** (1995) 199–207.

[110] Roberts J.B., Spanos P.D., *Random vibration and statistical linearization*, Wiley, Chichester, UK, 1990.

[111] Sas P., Heylen W., Editors, Modal Analysis: Theory abd Practice, KU Leuven, PMA, 1993.

[112] Simulink, Dynamic System Simulation for MATLAB. Modeling Simulation Implementation. Using Simulink, Version 2, 1996.

[113] Skalmierski B., Tylikowski A., *Stochastic processes in dynamics*, PWN, Warsaw 1982.

[114] Skalmierski B., Tylikowski A., *Procesy stochastyczne w mechanice*, PWN, Warszawa 1972.

[115] Skudrzyk E., *Simple and complex vibratory systems*, Pennsylvania State, USA, 1968.

[116] Snoeys R., Roesems D., Vandeurzen U., Vanhonacker P., *Survey of modal analysis applications*, Annals of the CIRP, Vol. 28/2/1979.

[117] STATGRAPHICS Statistical Graphics System by Statistical Graphics Corporation, USERS GUIDE-SYSTEM, 1988 STSC.

[118] Struble R.H., *Nonlinear differential equations*, McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto, London 1962.

[119] Tylikowski A., Marowski W., *Vibration of a non-linear single degree of freedom system due to poissonian impulse excitation*, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 21, 1986.

[120] Tylikowski A., *Konstrukcje inteligentne*, Przegląd Mechaniczny, Vol. 55(1996), No. 16, 21–23.

[121] Tylikowski A., *Nowe materiały i ich zastosowanie w technice i inżynierii biomedycznej*, Waves Methods and Mechanices in Biomedical Engineering, Vol. IV, Polish Acoustical Society, Cracow, 1999, 113–120.

[122] Tutsim for IBM'S PC, Continuous dynamic systems simulation for microcomputers, Version 7, 1992.

[123] Wedig W., *Parameter estimation and process identification*, Proc. the Road-Vehicle-system and Related Mathematics (ed. by H. Neunzert) Teubner, Stuttgart 1985.

[124] Wicher J., *Identyfikacja parametrów tłumienia i sztywności układu o wymuszeniach stochastycznych.* Zagadnienia Drgań Nieliniowych, Nr 15, 1975.

[125] Wicher J., *Problemy identyfikacji systemów technicznych ze szczególnym uwzględnieniem układów mechanicznych*, IPPT PAN, Nr 67, 1975.

[126] Uhl R., *Analiza modalna i jej zastosowanie*, AGH, Kraków 1995.

[127] Yasuda K., Kawamura S., Watanabe K., *Identification of nonlinear multi-degree-of-freedom systems*, JSME International Journal, Series III **31**(1), 8–15, 1988.

[128] Yuan C.M., Feeny B.F., *Parametric identification of chaotic systems*, Journal of Vibration and Cotrol **4**(4), 405–426, 1998.

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA Biblioteka Główna

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
312433 W/3

Rzeczywisty układ fizyczny jest pos[illegible] racja wyróżnionych mas, punktów mat[illegible] połączonych między sobą elementami sprężystymi i dyssypatywnymi liniowymi lub nieliniowymi o różnorakiej konfiguracji. Obserwacje obiektu rzeczywistego, np. przez pomiar wielkości mierzalnych, takich jak przemieszczenie, prędkość i przyspieszenie, temperatura itp., których zmiany są wywoływane odpowiednimi wymuszeniami, umożliwiają zbudowanie modelu, który może być podstawą dogłębnej analizy.

Budowa więc modeli o strukturach złożonych charakteryzujących się niecałkowitą liczbą stopni swobody o oddziaływaniach sprężysto-tłumiących nieliniowych jest konieczna i ze wszech miar wskazana. Gwarantuje bowiem dokładniejszy opis zjawisk fizycznych w złożonych konstrukcjach mechanicznych, jak i w materiałach. Identyfikacja tak złożonych modeli zwanych zdegenerowanymi jest oparta na bilansie energii i bilansie mocy i weryfikowana przy różnorakich wymuszeniach okresowych, losowych i impulsowych. Możliwości aparaturowe *Laboratorium Dynamiki Instytutu Materiałoznawstwa i Mechaniki Technicznej Politechniki Wrocławskiej* ułatwiły weryfikację doświadczalną uzyskanych wyników.

Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej
są do nabycia w następujących księgarniach:
„Politechnika"
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław
bud. A-1 PWr., tel. (0-71) 320-25-34;
„Tech"
plac Grunwaldzki 13, 50-377 Wrocław
bud. D-1 PWr., tel. (0-71) 320-32-52
Prowadzimy sprzedaż wysyłkową

ISBN 83-7085-708-6