

Krzysztof Burnecki, Joanna Nowicka-Zagrajek

Politechnika Wrocławska

SKŁADKA KWANTYLOWA W MODELU RYZYKA KOLEKTYWNEGO A DANE SZKODOWE Z OBCIĘCIEM DOLNYM

1. Wstęp

Jednym z możliwych podejść do problemu kalkulacji składki dla portfela polis jest ustalenie jej wysokości na poziomie odpowiedniego kwantyla rozkładu całkowitej wypłaty w portfelu. Do opisu całkowitej wypłaty w portfelu zwykle stosuje się model ryzyka kolektywnego. Rozkład wypłaty jest więc rozkładem złożonym, najczęściej Poissona. W związku z tym często nie jest możliwe otrzymanie prostej formuły analitycznej na składkę kwantylową i stosuje się różne przybliżenia.

W punkcie drugim opisujemy analizowane dane szkodowe. Dotyczą one katastrof naturalnych, które wystąpiły w USA w latach 1990-1999. Zbierała je firma Property Claim Services (PCS). Od 1997 r. notuje ona tylko szkody przekraczające 25 mln USD. W pracy [3] dopasowano proces zagregowanej straty do danych szkodowych, które są obcięte z dołu na poziomie 25 mln USD. Procesem liczącym szkody był niejednorodny proces Poissona. Rozważano tam dwa podejścia. W pierwszym – bezwarunkowym – ignoruje się istniejące obcięcie i traktuje się obserwowane dane jako całość. W drugim podejściu bierze się pod uwagę obcięcie na poziomie 25 mln USD i używa się warunkowych estymatorów największej wiarygodności, a następnie modyfikuje się dopasowaną do obserwowanych danych funkcję intensywności niejednorodnego procesu Poissona. Dopasowanie rozkładów sprawdzono za pomocą znanych testów zgodności. Najlepiej dopasowanym rozkładem w przypadku warunkowym okazał się rozkład Weibulla, który został wybrany do naszych analiz. Rozważamy więc dwa zestawy parametrów rozkładu Poissona oraz dwie funkcje intensywności odpowiadające bezwarunkowemu i warunkowemu podejściu.

W punkcie trzecim przedstawiamy podstawowe informacje o modelu ryzyka kolektywnego oraz najważniejszych składkach dla tego modelu, omawiamy także

składkę kwantylową. Opisujemy istniejące w literaturze aproksymacje rozkładu całkowitej wypłaty: rozkładem normalnym oraz przesuniętym rozkładem gamma. Rozpatrujemy także proponowane w literaturze przybliżenia składki kwantylowej dla przesuniętego rozkładu gamma.

W punkcie czwartym analizujemy wpływ wyboru podejścia (bezwarunkowe lub warunkowe) na wysokość składki kwantylowej, a także na możliwość zastosowania rozważanych aproksymacji i przybliżeń. Graficznie przedstawiamy porównanie składki kwantylowej otrzymanej numerycznie dla rozkładu dokładnego z oszacowaniami otrzymywanymi dla aproksymacji rozkładu całkowitej wypłaty rozkładem normalnym i przesuniętym rozkładem gamma.

2. Analizowane dane

Dane pochodzą od Property Claim Services (PCS), będącego jednostką Insurance Services Office Inc. (ISO). Opisują one straty w mieniu ubezpieczonym będące rezultatem katastrof naturalnych na terenie USA. Analizowane dane dotyczą lat 1990-1999.

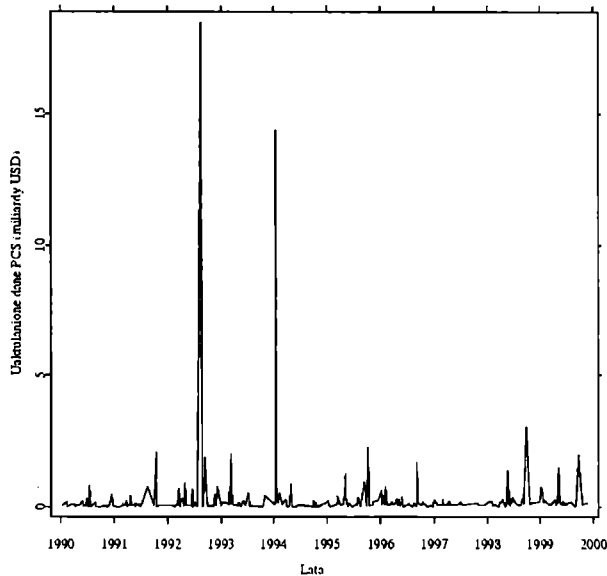
Zdarzenie nazywamy katastrofą wtedy, kiedy jest ono bardzo dotkliwe, dotyczy wielu ubezpieczycieli i posiadaczy polis oraz gdy żądania ubezpieczonych osiągną pewien ustalony poziom. Pierwotnie poziom ten wynosił 5 mln USD. Jednak w wyniku zmieniających się warunków ekonomicznych w 1997 r. ISO podwyższyło go do 25 mln USD. Na rysunku 1 przedstawiono wykres analizowanych danych, tzn. wysokości strat w mieniu ubezpieczonym będące rezultatem katastrof naturalnych na terenie USA w latach 1990-1999 po zaktualizowaniu na rok 2000. Dwie największe straty zdecydowanie odróżniające się od reszty to znany wszystkim huragan Andrew (1992 r.) oraz trzęsienie ziemi Northridge (1994 r.).

Analizując przedstawione dane, napotykamy problem polegający na tym, że brak jest informacji o stratach nieprzekraczających 25 mln USD po 1997 r. i nieprzekraczających 5 mln USD przed 1997 r. Nie mamy informacji ani o wysokości szkód, ani o ich liczbie poniżej tych progów.

W pracy [3] analizowano proces zagregowanej straty jako model opisujący wysokość strat do chwili t . Brano pod uwagę tylko dane powyżej 25 mln USD (wspólne obciążenie dla lat 1990-1999). Proces zagregowanej straty S_t dany jest wzorem:

$$S_t = \sum_{k=1}^{N_t} X_k, \quad S_t = 0, \quad \text{gdy } N_t = 0, \quad (1)$$

gdzie N_t jest liczbą strat do chwili t , a ciąg X_1, X_2, \dots opisuje wysokości poszczególnych strat.



Rys. 1. Wykres danych katastroficznych dostarczonych przez PCS, lata 1990-1999

Źródło: opracowanie własne.

Standardowo zakładamy, że:

- a) N_t jest procesem liczącym,
- b) X_1, X_2, \dots są zmiennymi o jednakowych rozkładach,
- c) zmienne losowe N_t, X_1, X_2, \dots są wzajemnie niezależne.

W pracy [3] rozważano następujące rozkłady szkód: wykładniczy, logarytmiczno-normalny, uogólniony Pareto, Burra, gamma, Weibulla oraz logarytmiczno-stabilny. Przyjęto, że proces liczący szkody jest niejednorodnym procesem Poissona z funkcją intensywności uwzględniającą okresowość pojawiania się szkód. Zmienna losowa S_t ma więc złożony rozkład Poissona.

Za [3] wprowadźmy teraz oznaczenia:

- F_γ – dystrybuanta X ,
- f_γ – gęstość X ,
- γ – wektor parametrów rozkładu,
- H – wysokość obciążenia dolnego,
- indeksy górne „o” i „p” odnoszą się odpowiednio do obserwowanych (dane niepełne, przypadek bezwarunkowy) i pełnych danych (przypadek warunkowy).

Parametry γ^o w przypadku bezwarunkowym zostały wyestymowane metodą największej wiarygodności (zob. np. [8]). W przypadku warunkowym użyto wa-

runkowych estymatorów największej wiarygodności (ENW), które otrzymuje się z następującego wzoru:

$$\hat{\gamma}_{ENW}^p = \arg \max_{\gamma} \log \left(\prod_{k=1}^n \frac{f_{\gamma}(x_k)}{1 - F_{\gamma}(H)} \right), \quad (2)$$

zob. [5]. Funkcja intensywności $\lambda^p(t)$ niejednorodnego procesu Poissona została wyestymowana poprzez dopasowanie funkcji wartości średniej procesu do zakumulowanej liczby szkód w kwartałach za pomocą metody najmniejszych kwadratów minimalizującej błąd średniokwadratowy. W przypadku warunkowym funkcja intensywności $\lambda^p(t)$ została określona w naturalny sposób jako:

$$\hat{\lambda}^p(t) = \frac{\hat{\lambda}^o(t)}{1 - \hat{F}_{\gamma^p}(H)}. \quad (3)$$

Podsumowując, w analizie danych obciążonych z lewej strony rozważamy dwa konkurencyjne podejścia.

Pierwsze podejście polega na znalezieniu estymatorów $\hat{\lambda}^p(t)$ i $\hat{\gamma}_{ENW}^p$ dla nieznanej funkcji $\lambda^p(t)$ i parametrów γ^p za pomocą wzorów (2) i (3) z użyciem metod optymalizacji numerycznej. Do celów symulacji straty są generowane z rozkładu z parametrami wyestymowanymi z pełnego zbioru danych i użyty jest estymator funkcji intensywności, także z pełnego zbioru danych.

Alternatywnym podejściem jest użycie estymatora obserwowanej funkcji intensywności $\hat{\lambda}^o(t)$ i dopasowanie bezwarunkowego rozkładu do obciążonych danych. Takie podejście jest często stosowane w praktyce.

Następnie w odniesieniu do rozważanych rozkładów strat dla przypadku zarówno bezwarunkowego, jak i warunkowego zostały przeprowadzone nieparametryczne testy zgodności. Brano pod uwagę statystyki Kołmogorowa-Smirnowa, Kuipera, Andersona-Darlinga i Craméra-von Misesa (zob. [2]). Dobrze dopasowanym rozkładem w przypadku warunkowym okazał się rozkład Weibulla. W tabeli 1 przedstawiono parametry tego rozkładu dla przypadku warunkowego i bezwarunkowego. Jak łatwo zauważyć, w przypadku warunkowym $F(H = 25 \text{ mln USD})$ wynosi ponad 80%, co informuje o tym, że mniej niż 1/5 szkód jest znana. Wynika z tego, że nie można nie uwzględniać informacji o stratach poniżej progu 25 mln USD.

W dalszej części pracy analizować będziemy oba te przypadki i wpływ ich wyboru na składkę ubezpieczyciela oraz możliwe metody aproksymacji składki kwantylowej.

Tabela 1. Wyestymowane parametry oraz $F(H)$ dla rozkładu dopasowanego do danych PCS, $H = 25$ mln USD

Rozkład	$\gamma, F(H)$	Przypadek bezwarunkowy	Przypadek warunkowy
Weibull (β, τ) o gęstości	β	$2,8091 \cdot 10^{-6}$	0,0187
$f_X(x) = \tau\beta x^{\tau-1} \exp(-\beta x^\tau)$,	τ	0,6663	0,2656
$x \geq 0, \beta, \tau > 0$	$F(H)$	21,23%	82,12%

Źródło: opracowanie własne.

Do danych o zagregowanej kwartalnej liczbie strat dopasowano funkcję wartości średniej niejednorodnego procesu Poissona $E(N)$. Przypomnijmy, że dla niejednorodnego procesu Poissona $E(N) = \int_0^t \lambda(s) ds$. Rozważano funkcję intensywności o postaci $\lambda(t) = a + 2b\pi \sin\{2\pi(t - c)\}$. Zastosowano metodę najmniejszych kwadratów minimalizującą błąd średniokwadratowy (MSE). Otrzymano następujące parametry: $a = 3,8750$, $b = 1,6840$, $c = 0,3396$, $MSE = 18,91$. W przypadku jednorodnego procesu Poissona ($\lambda(t) = \lambda = \text{const}$), błąd średniokwadratowy $MSE = 115,573$.

3. Składka kwantylowa w modelu ryzyka kolektywnego

Sposób podejścia do problemu modelowania danych obciążonych z dołu wpływa na wyniki otrzymywane w trakcie dalszych analiz. Szczególnie wybór metody implikuje różnice w uzyskiwanych składkach.

3.1. Model ryzyka kolektywnego

Załóżmy, że rozpatrujemy jeden okres ($t = 1$), czyli np. 1 rok. Wtedy proces zagregowanej straty redukuje się do modelu ryzyka kolektywnego, w którym całkowitą (zagregowaną) wypłatę w portfelu określa się jako losową sumę:

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_N, \quad \text{przy czym} \quad S = 0, \quad \text{gdy} \quad N = 0, \quad (4)$$

gdzie zmienna losowa N oznacza liczbę wypłat w portfelu w tym okresie, a X_1, X_2, \dots są zmiennymi losowymi opisującymi wielkości kolejnych wypłat. O rozkładzie zmiennej losowej S mówi się, że ma rozkład złożony, który określa się przez podanie rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej wyrażającej liczbę składników sumy oraz rozkładu prawdopodobieństwa pojedynczego składnika sumy. O modelu ryzyka kolektywnego można przeczytać np. w [4; 7; 10; 11].

Oznaczmy przez μ_S wartość oczekiwaną zmiennej S , a przez σ_S – jej odchylenie standardowe. Przypomnijmy, że do scharakteryzowania skośności rozkładu używa się współczynnika skośności danego wzorem:

$$\gamma_S = \frac{\mu_{3,S}}{\sigma_S^3} = \frac{E(S - ES)^3}{\sigma_S^3}, \quad (5)$$

który przyjmuje wartość zero dla rozkładów symetrycznych, wartości dodatnie dla rozkładów prawoskośnych, a wartości ujemne dla rozkładów lewoskośnych. Natomiast jako miarę grubości ogonów można stosować kurtozę:

$$\gamma_{2,S} = \frac{\mu_{4,S}}{\sigma_S^4} - 3 = \frac{E(S - ES)^4}{\sigma_S^4} - 3. \quad (6)$$

3.2. Wybrane rodzaje składek

Kalkulując składkę przeznaczoną na pokrycie wypłat (bez uwzględnienia kosztów działalności ubezpieczeniowej) za dany okres w modelu ryzyka kolektywnego, należy określić zmienną losową opisującą wielkość całkowitej wypłaty w portfelu w rozważanym okresie poprzez określenie rozkładów zmiennych występujących w modelu oraz wybrać zasadę wyznaczania składki (zob. np. [6; 9; 12; 13]).

Do najprostszych i najczęściej stosowanych składek należy składka netto równa wartości oczekiwanej $P = \mu_S$ oraz składki uwzględniające zmienność S , czyli składka opisana przez zasadę wariancji:

$$P_V(a) = \mu_S + a\sigma_S^2, \quad a \geq 0, \quad (7)$$

i składka wynikająca z zasady odchylenia standardowego, która zależy zarówno od wartości oczekiwanej całkowitej wypłaty S , jak i od jej odchylenia standardowego:

$$P_{SD}(b) = \mu_S + b\sigma_S, \quad b \geq 0. \quad (8)$$

Trudniejsza do wyliczenia jest składka wynikająca z zasady kwantyla, wyrażająca się wzorem:

$$P_Q(\varepsilon) = F_S^{-1}(1 - \varepsilon) = \inf \{x : F_S(x) \geq 1 - \varepsilon\}, \quad \varepsilon \in (0; 1), \quad (9)$$

gdzie $F_S(\cdot)$ oznacza dystrybuantę zmiennej losowej S . Oznacza to, że składkę kwantylową (*quantile premium*) kalkuluje się na poziomie kwantyla rzędu $(1 - \varepsilon)$ rozkładu S łącznej wypłaty z portfela, czyli liczby, którą łączna wartość wypłat przekroczy z zadaniem (bardzo małym) prawdopodobieństwem ε . Zatem prawdopodobieństwo poniesienia straty z portfela jest równe z góry ustalonej wartości ε :

$$P(S > P_Q(\varepsilon)) = \varepsilon, \quad \varepsilon \in (0; 1). \quad (10)$$

Zwykle w praktyce przyjmuje się, że $\varepsilon \in (0, 001; 0, 1)$, [10].

Problem z wyliczeniem składki kwantylowej w modelu ryzyka kolektywnego wynika z faktu, iż wyznaczenie prostej analitycznej postaci dystrybuanty zmiennej S jest w praktyce zagadnieniem trudnym, a często wręcz niemożliwym. W związku z tym w celu określenia rozkładu całkowitej wypłaty stosuje się metody oparte na wzorach rekurencyjnych, metody symulacyjne, a także metody przybliżone (zob. np. [1; 4]). Do wyliczania funkcji odwrotnej do dystrybuanty konieczne jest więc często użycie symulacji komputerowych lub wykorzystanie przybliżeń rozkładu S rozkładami, dla których dystrybuanta jest zadana analitycznie.

3.3. Aproksymacja rozkładu całkowitej wypłaty

W literaturze aktuarialnej najczęściej rekomenduje się dwie podstawowe metody aproksymacji rozkładu całkowitej wypłaty w modelu ryzyka kolektywnego znanym rozkładem, a mianowicie: rozkładem normalnym lub przesuniętym rozkładem gamma. W związku z tym, że rozkład normalny jest symetryczny, a rozkłady zagregowanych wypłat przeważnie charakteryzują się dość dużą skośnością, przyjmuje się, że aproksymację rozkładem normalnym można stosować tylko wówczas, gdy skośność rozkładu jest niewielka [4; 10].

Aproksymacja rozkładem normalnym

Aproksymacja rozkładem normalnym polega na przybliżeniu rozkładu całkowitej wypłaty S rozkładem normalnym o średniej μ_S i odchyleniu standardowym σ_S , zob. np. [1; 4]. Zatem aproksymacja ta nie ma wpływu na składki oparte na pierwszych dwóch momentach, natomiast znacznie upraszcza liczenie składki kwantylowej. Można pokazać, że w takim przypadku składka kwantylowa wyraża się wzorem ([6]):

$$P_Q^{norm}(\varepsilon) = \mu_S + u_\varepsilon \sigma_S, \quad \varepsilon \in (0; 1), \quad (11)$$

gdzie u_ε jest kwantylem rzędu $(1 - \varepsilon)$ standardowego rozkładu normalnego (o średniej zero i wariancji 1) opisanego dystrybuantą $\Phi(\cdot)$, tzn. $u_\varepsilon = \Phi^{-1}(1 - \varepsilon)$. Można zauważyć, że otrzymana składka jest równa składce wynikającej z zasady odchylenia standardowego z parametrem $b = u_\varepsilon$.

Aproksymacja przesuniętym rozkładem gamma

Ponieważ rozkład całkowitej wypłaty S jest w praktyce zwykle skośny prawostronnie, rozkład S często aproksymuje się przesuniętym rozkładem gamma o dystrybuancie danej wzorem:

$$G^{rs}(x; \alpha, \beta, x_0) = F(x - x_0; \alpha, \beta), \quad x, \alpha, \beta > 0, \quad (12)$$

gdzie $F(x, \alpha, \beta)$ oznacza dystrybuantę rozkładu gamma z parametrami α i β :

$$F(x; \alpha, \beta) = \int_0^x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt, \quad x, \alpha, \beta > 0. \quad (13)$$

Rozkład zmiennej S aproksymuje się przesuniętym rozkładem gamma z parametrami x_0, α, β takimi, żeby zachodziła równość trzech momentów: wartości oczekiwanej, wariancji i trzeciego momentu centralnego (o ile istnieją). Uzyskuje się wtedy następujące równania pozwalające wyliczyć szukane parametry:

$$\alpha = 4 \frac{(\sigma_s^2)^3}{\mu_{3,s}^2} = \frac{4}{\gamma_s^2}, \quad \beta = 2 \frac{\sigma_s^2}{\mu_{3,s}} = \frac{2}{\gamma_s \sigma_s}, \quad (14)$$

$$x_0 = \mu_s - 2 \frac{(\sigma_s^2)^2}{\mu_{3,s}} = \mu_s - 2 \frac{\sigma_s}{\gamma_s}. \quad (15)$$

Zatem jeśli zastosujemy przybliżenie rozkładu S przesuniętym rozkładem gamma, to składki wyrażone przez pierwsze dwa momenty nie zmieniają się, natomiast aby wyliczyć składkę kwantylową, musimy rozwiązać jedno z równań:

$$1 - G^{IRK}(P_Q^{IRK}; \alpha, \beta, x_0) = \varepsilon \quad \text{lub} \quad 1 - F(P_Q^{IRK} - x_0; \alpha, \beta) = \varepsilon. \quad (16)$$

Problemy z wyznaczeniem funkcji odwrotnej do dystrybuanty rozkładu gamma, a co za tym idzie przesuniętego rozkładu gamma, powodują, że składkę kwantylową oblicza się numerycznie lub też korzysta się z pewnych przybliżeń. Wybrane metody przybliżania składki kwantylowej dla przesuniętego rozkładu gamma omówione zostały w [10]. Wymieńmy tu cztery z nich:

– WH1 (Wilson-Hilferty):

$$P_Q^{IRK} \approx \mu_s + \sigma_s \sqrt{\alpha} \left(\left(1 - \frac{1}{9\alpha} + \frac{u_\varepsilon}{3\sqrt{\alpha}} \right)^3 - 1 \right), \quad (17)$$

– WH2 (Wilson-Hilferty):

$$P_Q^{IRK} \approx \mu_s + \sigma_s \left(u_\varepsilon + \frac{u_\varepsilon^2 - 1}{6} \gamma_s + \frac{u_\varepsilon^3 - 6u_\varepsilon}{108} \gamma_s^2 \right), \quad (18)$$

– FC1 (Fisher-Cornish):

$$P_Q^{IRK} \approx \mu_s + \sigma_s \left(u_\varepsilon + \frac{u_\varepsilon^2 - 1}{6} \gamma_s \right), \quad (19)$$

– FC2 (Fisher-Cornish):

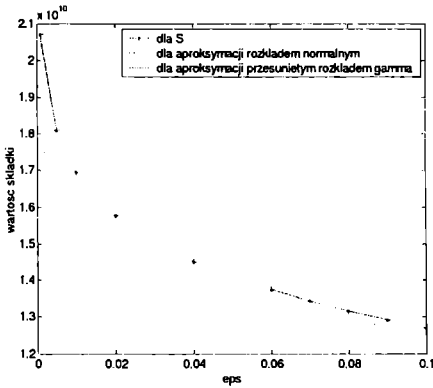
$$P_Q^{FC2} \approx \mu_S + \sigma_S \left(u_\epsilon + \frac{u_\epsilon^2 - 1}{6} \gamma_S + \frac{u_\epsilon^3 - 7u_\epsilon}{144} \gamma_S^2 \right). \quad (20)$$

Zauważmy, że przedstawione przybliżenia odpowiadają składce wynikającej z zasady odchylenia standardowego z różnymi współczynnikami b .

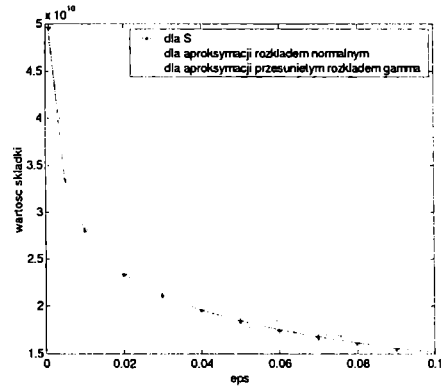
4. Zależność składki od wyboru podejścia do analizy danych PCS

Rozpatrzmy model ryzyka kolektywnego, w którym rozkład pojedynczej wypłaty dany jest rozkładem Weibulla, a rozkład liczby wypłat opisany jest rozkładem Poissona dla każdego z dwóch wcześniej opisanych podejść. Parametry rozkładu Weibulla dane są w tab. 1, natomiast parametr intensywności λ rozkładu Poissona równy jest 30,875 w przypadku bezwarunkowym i 172,68 w przypadku warunkowym. W zależności od wyboru sposobu podejścia do danych obciążonych z dołu otrzymamy różne wysokości rocznych składek (dotyczących wszystkich strat, również tych poniżej 25 mln USD) – zarówno składki netto, składek wynikających z zasady wariacji i z zasady odchylenia standardowego (zob. tab. 2), jak również składki kwantylowej – można to zaobserwować, porównując wykresy na rysunkach rys. 2a i rys. 2b.

a)



b)



Rys. 2. Składka kwantylowa: dla S (linia z „gwiazdkami”) otrzymana metodą symulacji oraz otrzymywana podczas aproksymacji rozkładem normalnym (linia przerywana) i przesuniętym rozkładem gamma (linia ciągła) w odniesieniu do przypadku bezwarunkowego (a) i przypadku warunkowego (b)

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2. Wysokość składki netto oraz składek wynikających z zasady wariacji i odchylenia standardowego dla modelu ryzyka kolektywnego dopasowanego do danych PCS w odniesieniu do przypadku bezwarunkowego i warunkowego

Składka roczna	Przypadek bezwarunkowy	Przypadek warunkowy
P	$8,8151 \cdot 10^9$	$9,3993 \cdot 10^9$
$P_V(a)$	$8,8151 \cdot 10^9 + a \cdot 8,5531 \cdot 10^{18}$	$9,3993 \cdot 10^9 + a \cdot 2,6602 \cdot 10^{19}$
$P_{SD}(b)$	$8,8151 \cdot 10^9 + b \cdot 2,9246 \cdot 10^9$	$9,3993 \cdot 10^9 + b \cdot 5,1577 \cdot 10^9$

Źródło: opracowanie własne.

Co więcej, sposób podejścia do niepełnych danych znacznie wpływa zarówno na możliwość zastosowania aproksymacji rozkładu S całkowitej wypłaty, jak i na jakość aproksymacji. Ponieważ podstawowym kryterium wyboru aproksymacji jest skośność i kurtoza, a dokładnie stosunek kurtozy do kwadratu skośności, w tab. 3 podano wartości tych charakterystyk. Łatwo zauważyć, że rozpatrywane przypadki mają zupełnie inny charakter. W przypadku bezwarunkowym skośność, mimo że nie jest bliska zeru (co wyklucza aproksymację rozkładem normalnym), jest mniejsza od 1, a stosunek kurtozy do kwadratu skośności nie różni się znacząco od 1,5 – takie wyniki sugerują, że można zastosować aproksymację przesuniętym rozkładem gamma (zob. [4; 10]). Natomiast w przypadku warunkowym na pewno nie można przybliżać całkowitej wypłaty rozkładem normalnym, a podczas aproksymacji przesuniętym rozkładem gamma należy zachować dużą ostrożność przy interpretacji wyników, gdyż skośność jest dużo większa od 1 i stosunek kurtozy do kwadratu skośności odbiega od 1,5 (tab. 3).

Tabela 3. Skośność, kurtoza oraz stosunek skośności do kwadratu kurtozy dla rozkładu całkowitej wypłaty S w odniesieniu do modelu ryzyka kolektywnego dopasowanego do danych PCS dla przypadku bezwarunkowego i warunkowego

Parametr	Przypadek bezwarunkowy	Przypadek warunkowy
Skośność	0,6415	3,4329
Kurtoza	0,6491	40,0097
Kurtoza/skośność ²	1,5772	3,3950

Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie uzyskanych charakterystyk w obu rozpatrywanych przypadkach przybliżyliśmy rozkład całkowitej wypłaty przesuniętym rozkładem gamma (parametry x_0 , α , β dopasowanego rozkładu dane są w tab. 4), a następnie porównaliśmy wartości składki kwantylowej dla S z wartościami otrzymywanymi przy aproksymacji rozkładu S przesuniętym rozkładem gamma, a także rozkładem normalnym dla $\varepsilon \in (0,001; 0,1)$.

Tabela 4. Parametry przesuniętego rozkładu gamma aproksymującego rozkład całkowitej wypłaty S dla modelu ryzyka kolektywnego dopasowanego do danych PCS w odniesieniu do przypadku bezwarunkowego i warunkowego

Parametr	Przypadek bezwarunkowy	Przypadek warunkowy
α	9,7195	0,3394
β	$1,0660 \cdot 10^{-9}$	$1,1296 \cdot 10^{-10}$
x_0	$-3,0256 \cdot 10^8$	$6,3945 \cdot 10^9$

Źródło: opracowanie własne.

Wykresy przedstawione na rys. 2a potwierdzają słuszność decyzji o zastosowaniu aproksymacji przesuniętym rozkładem gamma w przypadku bezwarunkowym, gdyż składka kwantylowa przy tej aproksymacji pokrywa się ze składką dla S , natomiast składka otrzymana przy aproksymacji rozkładem normalnym odbiega od składki dla S (błędy uzyskiwane przy zastosowanych przybliżeniach dane są w tab. 5). W podejściu warunkowym otrzymujemy, zgodnie z oczekiwaniami, nieco inne wyniki – zob. rys. 2b. Aproksymacja rozkładem normalnym daje złe wyniki, również aproksymacja przesuniętym rozkładem gamma powoduje, iż wyliczana składka kwantylowa różni się od składki kwantylowej dla S , szczególnie dla ε leżących na środku rozważanego przedziału.

Błędy otrzymane podczas liczenia składki kwantylowej przy aproksymacji rozkładu całkowitej wypłaty rozkładem normalnym i przesuniętym rozkładem gamma przedstawione zostały w tab. 5. Ponadto zamieszczono w niej również błędy popełnione po zastosowaniu analitycznych formuł (17)–(20).

Tabela 5. Błędy (w %) otrzymane podczas liczenia składki kwantylowej dla aproksymacji rozkładu całkowitej wypłaty rozkładem normalnym oraz przesuniętym rozkładem gamma, a także przy zastosowaniu formuł analitycznych dla przypadku bezwarunkowego i warunkowego

Aproksymacja		ε				
		0,001	0,005	0,01	0,05	0,1
Przypadek bezwarunkowy	normalnym	13,85	9,81	7,92	3,33	1,12
	przesuniętym gamma	0,64	0,07	-0,08	-0,06	-0,01
	WH1	0,50	0,10	-0,04	0,02	0,04
	WH2	0,36	-0,01	-0,12	-0,01	0,02
	FC1	0,95	0,09	-0,21	-0,45	-0,46
	FC2	0,63	0,14	-0,03	-0,03	-0,02
Przypadek warunkowy	normalnym	48,92	32,24	24,07	2,98	-6,03
	przesuniętym gamma	1,70	-8,36	-10,10	-6,26	-0,18
	WH1	-0,96	-7,85	-8,47	-3,20	2,34
	WH2	-14,38	-20,17	-19,40	-7,78	2,23
	FC1	-1,93	-17,42	-22,13	-24,33	-18,59
	FC2	-8,64	-16,24	-16,60	-8,15	0,60

Źródło: opracowanie własne.

5. Podsumowanie

Na przykładzie modelu ryzyka kolektywnego dopasowanego do danych PSC pokazano, że sposób podejścia do danych obciętych z dołu wpływa na wartości składek zarówno prostych opartych na pierwszych dwóch momentach, jak i na składkę kwantylową. W pracy zilustrowano ponadto, że wybór pomiędzy przypadkiem bezwarunkowym a warunkowym może implikować konieczność innego spojrzenia na aproksymacje rozkładu całkowitej wypłaty i ich jakość.

Literatura

- [1] Bowers N.L. Jr., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J., *Actuarial Mathematics*, 2nd edition, The Society of Actuaries, Schaumburg 1997.
- [2] Burnecki K., Misiorek A., Weron R., *Loss Distributions*, [w:] *Statistical Tools for Finance and Insurance*, red. P. Čížek, W. Härdle, R. Weron, Springer, Berlin 2005, s. 297-326.
- [3] Chernobai A., Burnecki K., Rachev S., Trück S., Weron R., *Modelling Catastrophe Claims with Left-Truncated Severity Distributions*, Computational Statistics, 2005, w druku.
- [4] Daykin C.D., Pentikäinen T., Pesonen M., *Practical Risk Theory for Actuaries*, Chapman & Hall, London 1994.
- [5] Dempster A.P., Laird N.M., Rubin D.B., *Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm*, „Journal of the Royal Statistical Society”, Series B (Methodological), 1977, vol. 39 (1), s. 1-38.
- [6] Iwanik J., Nowicka-Zagrajek J., *Premiums in the Individual and Collective Risk Models*, [w:] *Statistical Tools for Finance and Insurance*, red. P. Čížek, W. Härdle, R. Weron, Springer, Berlin 2005, s. 415-435.
- [7] *Modele aktuarialne*, red. W. Ostasiewicz, AE, Wrocław 2000.
- [8] Nowicka-Zagrajek J., Burnecki K., *Statystyczne metody oceny ryzyka ubezpieczeniowego. Część III. Estymacja parametrów rozkładów*, „Asekuracja&Re” 2001, nr 11 (58), s. 24-25.
- [9] Nowicka-Zagrajek J., Burnecki K., *Wybrane rodzaje składek w modelu ryzyka kolektywnego*, AE, Wrocław, w recenzji.
- [10] Otto W., *Ubezpieczenia majątkowe. Część I. Teoria ryzyka*, WNT, Warszawa 2002.
- [11] Panjer H.H., Willmot G.E., *Insurance Risk Models*, Society of Actuaries, Schaumburg 1992.
- [12] Straub E., *Non-Life Insurance Mathematics*, Springer, Berlin 1988.
- [13] Young V.R., *Premium Calculation Principles*, [w:] *Encyclopedia of Actuarial Science*, red. J.L. Teugels, B. Sundt, Wiley, Chichester 2004.

QUANTILE PREMIUM IN THE COLLECTIVE RISK MODEL WITH LEFT-TRUNCATED LOSS DISTRIBUTIONS

Summary

In the paper we discuss the quantile premium in the collective risk model framework. The model is fitted to incomplete insurance data. We study the influence of ignoring the threshold on the premium and the quality of various approximations presented in the literature.