

na prawach rękopisu

INSTYTUT GEOTECHNIKI  
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ  
Raport serii PRE  
nr 54

ANALIZA STATYCZNA  
- MES - OŚRODKA MODELUJĄCEGO  
EKSPLOATOWANE PODŁOŻE BUDOWLI

Krystyna Szcześniak  
Praca doktorska

Promotor:  
Prof.dr inż. IGOR KISIEL

Wrocław, 1979

# SPIS TREŚCI

	str.
Rozdział 1 . . . . .	4 .
CEL I ZAKRES PRACY . . . . .	4 .
Rozdział 2	
ZAGADNIENIE BRZEGOWE DLA PÓŁPŁASZCZYZNY PODDANEJ	
WYBIERANIU . . . . .	11 .
2.1. Uwagi wstępne . . . . .	11 .
2.2. Definicja zadania . . . . .	12 .
2.3. Możliwości rozwiązania . . . . .	15 .
2.4. Rozwiązanie numeryczne . . . . .	17 .
2.4.1. Rozwiązanie dla modelu ciała liniowo- sprężystego . . . . .	18 .
2.4.2. Rozwiązanie dla modelu nieliniowo-sprężystego . . . . .	19 .
2.4.3. Rozwiązanie dla modelu ciała liniowo-lepko- sprężystego . . . . .	23 .
Rozdział 3	
ALGORYTM ROZWIĄZANIA . . . . .	27 .
Rozdział 4	
STOSOWANE ELEMENTY ORAZ ICH CHARAKTERYSTYKI . . . . .	31 .
4.1. Uwagi wstępne . . . . .	31 .
4.2. Element czworokątny . . . . .	32 .
4.3. Element trójkątny . . . . .	38 .
Rozdział 5	
ANALIZA NUMERYCZNA . . . . .	43 .
5.1. Przebieg obliczeń . . . . .	43 .
5.2. Podstawowe problemy numeryczne . . . . .	44 .
5.3. Charakterystyka istniejących systemów obliczeniowych . . . . .	45 .
Rozdział 6	
DYSKRETYZACJA PÓŁPŁASZCZYZNY PODDANEJ WYBIERANIU ORAZ WYNIKI OBLICZEŃ . . . . .	49 .
6.1. Kształt i wymiary zdyskretyzowanej półpłaszczyzny . . . . .	49 .
6.2. Dyskretyzacja racjonalna: podział na elementy . . . . .	53 .
6.3. Wyniki obliczeń . . . . .	54 .



	str.
6.3.1. Dane do obliczeń . . . . .	55 . .
6.3.2. Analiza i porównanie wyników dla PROBLEMU 1 . . . . .	58 . .
6.3.3. Analiza i porównanie wyników dla PROBLEMU 2 . . . . .	64 . .

Rozdział 7

WNIOSKI I UWAGI KOŃCOWE . . . . .	70 . .
WYKAZ LITERATURY . . . . .	72 . .

## R O Z D Z I A Ł 1

## CEL I ZAKRES PRACY

W pracy rozpatrzono zagadnienie wyznaczenia przemieszczeń, stanu odkształcenia i naprężenia w ośrodku modelującym uwarstwione podłoże budowli, w którym prowadzona jest eksploatacja warstw węgla. Przeprowadzono analizę stanu przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia wokół wyrobisk chodnikowych o przekroju prostokątnym oraz wpływu eksploatacji głębinowej na powierzchnię.

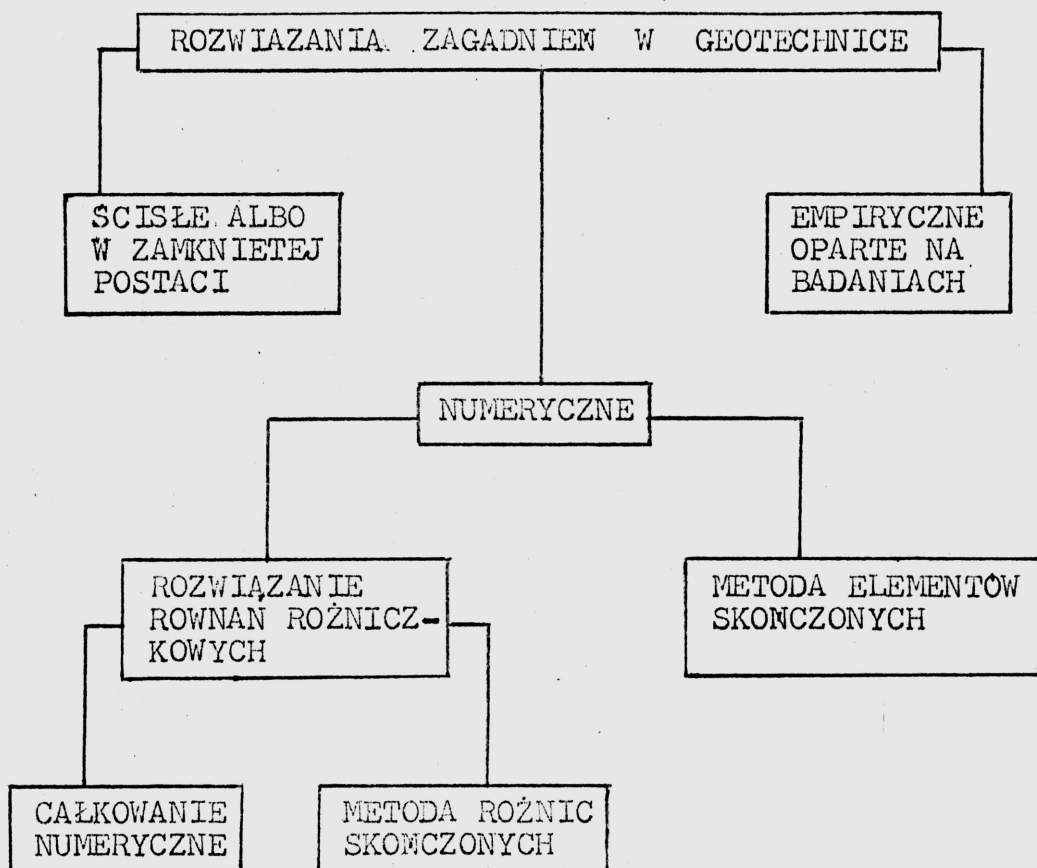
Zachowanie się górotworu wraz z wyrobiskiem reprezentowane jest przez trzy modele mechaniczne. Celem korzystania z modelu jest jak najściślejsze określenie zachowania się analizowanej struktury poddanej obciążeniom górniczym /wybieraniu/. Określenie to będzie tym ściślejsze im bliższe rzeczywistości będą wartości charakterystyk wybranych modeli.

Wyniki rozwiązania zadania, dla wspomnianych wyżej modeli eksploataowanego górotworu, pozwoliły wyciągnąć wnioski, dotyczące zakresu stosowania modeli oraz przeprowadzić porównania otrzymanych rezultatów. W pracy porównano również wyniki obliczeń przemieszczeń dla jednego z przyjętych modeli z wartościami przemieszczeń otrzymanymi z pomiarów geodezyjnych.

Wykonanie wyrobiska podziemnego [20,27] lub konstrukcji podziemnej, tak aby zapewnione było ich bezpieczeństwo i bezpieczeństwo konstrukcji na powierzchni, wymaga coraz precyzyjniejszego określenia zachowania się górotworu nie tylko w momencie drążenia ale i w kilka lat później. Rozwiązane zagadnienie jest jednym z podstawowych w geotechnice. Spośród wielu sposobów rozwiązywania tego typu zagadnień /rys.1.1./ wybrano rozwiązanie numeryczne metodą elementów skończonych. Ścisłe rozwiązanie zagadnienia przy przyjętych założeniach nie istnieje. Badania na modelach zastępczych [6,50] nie dają takich wyników ilościowych, które można byłoby bezpośrednio wykorzystać w praktyce.

Badania i pomiary geodezyjne oraz geofizyczne prowadzone są

w pewnym tylko zakresie [13,34]. W pracy wykorzystano mierzone metodami geodezyjnymi, wartości przemieszczeń pionowych chodnika pomiarowego porównując je z wartościami przemieszczeń otrzymanymi z obliczeń numerycznych [53].



Rys.1.1 Metody rozwiązywania zagadnień w geotechnice.

Analiza numeryczna continuum, która jest połączeniem najnowszych teorii reologii i nowoczesnych metod numerycznych, okazała się najskuteczniejszym narzędziem rozwiązania zagadnienia rozpatrywanego w pracy. Zagadnienie to, przy przyjęciu szeregu różnych założeń było już przedmiotem badań numerycznych wielu autorów [1,3,4,8,12,13,16,17,19,21+25,28,31+39,41,43,48,49, 51+55]. W prezentowanej pracy podstawę obliczeń metodą elementów skończonych w ujęciu przemieszczeniowym stanowią założenia,

które sprowadzają się do przyjęcia określonych wartości pewnej liczby charakterystyk. Tymi charakterystykami są:

- geometria warstw górotworu oraz wyrobiska: poziomy układ spójnych na kontakcie warstw, wyrobiska prostokątne ; geometria jest często uproszczona,
- sposób eksploatacji /obciążenie górnicze/: wybieranie z podsadzką,
- stan naprężeń wstępnych tektonicznych i grawitacyjnych w masywie przed wybraniem,
- parametry określające masyw: właściwości fizyczne na podstawie rozpoznania geologicznego i sondażu, wyniki pomiarów właściwości fizycznych i mechanicznych górotworu na próbkach w laboratorium,
- model reologiczny mniej lub bardziej przybliżający zachowanie się górotworu - przyjęto:
  - model ciała liniowo-sprężystego,
  - model ciała nieliniowo-sprężystego,
  - model ciała lepko-sprężystego.

Ponadto:

- nie uwzględniono spękania ośrodka skalnego, jest on rozważany jako ciągły, izotropowy,
- przyjęto, że naprężenia i odkształcenia w kierunku równoległym do osi wyrobiska chodnikowego nie mają wpływu na naprężenia i odkształcenia w płaszczyźnie prostopadłej do tej osi - przeprowadzono rozwiązanie dla tarczy w płaskim stanie odkształcenia.

Podstawowym celem pracy jest:

- zbudowanie algorytmu obliczeń przedstawionego zadania przy podanych wyżej założeniach,
- przedstawienie wyników obliczeń dla różnych modeli reologicznych,

- analiza stanu przemieszczenia i naprężenia dla różnych modeli; im prostszy jest model, tym mniej liczne są parametry, które wpływają na wyniki obliczeń i łatwiejsza jest ich interpretacja oraz wyciąganie ogólniejszych wniosków,
- porównanie części wyników obliczeń z wynikami pomiarów geodezyjnych.

Cel ten realizowany jest w kolejnych sześciu rozdziałach. Wyniki rozwiązań mogą być wykorzystane w opracowaniach projektowych dotyczących eksploatacji kopalni, zabezpieczeń przed szkodami górniczymi, budownictwie podziemnym i budownictwie na terenach podlegających wpływom eksploatacji.

Jak już wspomniano wyżej, zagadnieniem które jest przedmiotem badań numerycznych metodą elementów skończonych, zajmowało się wielu autorów. Przeprowadzili oni rozwiązania różnymi metodami przy szeregu różnych założeniach.

G.Barla w pracy [3] określił stan naprężenia i odkształcenia wokół pojedynczego wyrobiska w masywie gruntowym. Wyrobisko miało następujące kształty: okręgu, elipsy, kwadratu, prostokąta i prostokąta o jednym boku w postaci łuku okręgu. Modelem masywu gruntowego było ciało liniowo-sprężyste. Ten sam model reologiczny dla zdyskretyzowanej półpłaszczyzny poddanej wybieraniu, przyjmowali kolejni autorzy. J.Walaszczyk [51] wyznaczył siły wewnętrzne wokół wyrobiska prostokątnego w górotworze uwarstwionym.

Różniczkowe równania równowagi metodą różnic skończonych rozwiązywał M.Dejean w pracy [12]. Zbudował on pewien model /ciała liniowo-sprężystego/, którego celem było umożliwienie wprowadzenia do obliczeń nachylenia i układu warstw górotworu oraz różnej geometrii wyrobisk. Wyniki obliczeń pozwoliły autorowi zinterpretować pewne zjawiska występujące "in situ" - między innymi wpływ już istniejących wyrobisk na prowadzone aktualnie chodniki. W pracy [16] Dejean prezentuje /dla modelu ciała liniowo-sprężystego/ rozwiązanie metodą elementów skończonych dwóch zagadnień: określenie statyki górotworu eksploatowanego systemem filarowo-komorowym i eksploatacji pokładów o bardzo dużym nachyleniu. W pierwszym przypadku, celem pracy było wyznaczenie stateczności

dawnych wyrobisk rud żelaza, usytuowanych poniżej terenu zabudowanego, w przypadku drugim przedmiotem studium było określenie optymalnego usytuowania wybieranych pokładów. M.Dejean analizuje również i porównuje przemieszczenia powierzchni terenu obliczone metodą elementów skończonych i metodą Knothego z przemieszczeniami otrzymanymi z pomiarów geodezyjnych [12].

M.Gryczmański przeprowadzając /MES/ analizę statyczną podłoża dowolnie uwarstwionego [22] podaje możliwości rozszerzenia stosowanej techniki do badania sprężystego, ważkiego podłoża uwarstwionego poddanego ciągłym odkształceniom górniczym.

R.Izbicki i K.Wnętrzak rozpatrzyli [24] stan naprężenia i odkształcenia w górotworze, w którym prowadzona jest eksploatacja pokładu węgla systeme z podsadzką.

Pewną metodę interpolacji przemieszczeń w przestrzeni na podstawie przemieszczeń uzyskanych z rozwiązania zadania dwuwymiarowego /MES/ podał H.Kratzch [31]. Uwzględnił on również wpływ pola temperatur za ścianą wydobywczą na zachowanie się górotworu.

Nieliniowo-sprężyste modele ciał były przyjmowane do opisu zachowania się górotworu /lub gruntu/ przez autorów następujących prac: [8,14,19,23,41,53,55]. Prace te pokazują, że istnieje tendencja do sprowadzania zagadnień nieliniowych do zadań liniowo-sprężystych. Stosuje się dwa sposoby wprowadzenia nieliniowej zależności naprężenie-odkształcenie do programu MES. Pierwszy sposób polega na analitycznym zapisie krzywej otrzymanej z badań jednoosiowych lub trójosiowych oraz analitycznym wyrażeniu koniecznych w obliczeniach parametrów. Drugi sposób polega na wprowadzeniu do programu wyników badań zależności naprężenie-odkształcenie w postaci tabel. Bardziej szczegółowe prace te będą omówione w rozdziale 2 p. 2.4.2.

Sprężysto-plastyczne modele reologiczne przyjęli do opisu górotworu autorzy następujących prac: [1,2,24,25,33,35,36,39,43,56]. O.C.Zienkiewicz przeanalizował w pracy [56] kilka procesów iteracyjnych, służących dla rozwiązań zagadnień sprężysto-plastycznych w kontekście ogólnego sformułowania, które obejmowało: stowarzyszone i niestowarzyszone związki plastyczności, wzmocnienie i osłabienie materiału. Autor podkreślił zalety sposobu naprężeń początkowych do rozwiązania szerokiego wachla-

rza zagadnień.

Z. Mróz i L. Winnicki rozpatrzyli zagadnienie określenia sił wewnętrznych w górotworze w sąsiedztwie eksploatacji z zawałem [35]. Przyjęli oni, że górotwór jest materiałem sprężysto-plastycznym spełniającym warunek Coulomba. Rozwiązanie przeprowadzili metodą iteracyjną początkowych naprężeń. J. Kaczmarek [25] określił stan naprężeń i zakres stref plastycznych oraz zniszczonych wokół wyrobiska chodnikowego o przekroju prostokątnym. W zakresie sprężystym materiał opisują związki liniowej sprężystości, a powyżej zakresu sprężystego - związki teorii plastycznego płynięcia w ujęciu przyrostowym. Zastosowano dwuparametrowy warunek plastyczności bez parametru wzmocnienia wynikający z hipotezy niezmienników Burzyńskiego. W związkach Misesa przyjęto równanie potencjału wyrażone przez liniową funkcję drugiego niezmiennika stanu naprężenia.

Modele ciał lepko-sprężysto-plastycznych do opisu odkształcającego się górotworu przyjęli autorzy prac [28,34,37,43,48]. Prace te szczegółowo omówione zostaną w rozdziale 2 p. 2.4.3. Podstawy i ogólne sformułowanie metody elementów skończonych podają monografie [17,38,57].

Bardzo ogólne możliwości rozwiązania metodą elementów skończonych zagadnień w geotechnice, których podstawową trudność stanowią: równania stanu, geometria problemu oraz statyczna niewyznaczalność, zostały omówione przez J. Telegę w pracy [49].

Istniejące systemy obliczeniowe bardzo uniwersalne, krajowe i zagraniczne, przy pomocy których można byłoby badać numerycznie postawione na początku tego rozdziału zagadnienie zostały omówione w pracy [4]. Uniwersalizm systemów nie łączy się jednak z prostotą i ekonomią korzystania z nich. Każdy system ma określone wymagania odnośnie wyposażenia elektronicznego, nie w każdym ośrodku dostępnego.

W pracy korzystano częściowo z programu systemu KM-74 [45], programu LΦ3F [15] oraz programów własnych.

Prezentowana praca składa się z siedmiu rozdziałów. Po pierwszym rozdziale, w którym omówiono cel pracy, stosowane założenia oraz wykorzystaną literaturę przedstawiono rozwiązywane zagadnienie brzegowe dla półpłaszczyzny poddanej wybieraniu. Omówiono

problem możliwości rozwiązania oraz stosowane w pracy sposoby i procedury.

Rozdział trzeci podaje algorytm rozwiązania, czwarty stosowane elementy i ich charakterystyki. W rozdziale piątym omówiono wykorzystane programy obliczeń numerycznych. Rozdział szósty zawiera dyskretyzację i podział na elementy modelu półpłaszczyzny podanej wybieraniu oraz omówienie wyników rozwiązań. W rozdziale siódmym podano wnioski i uwagi końcowe.



## R O Z D Z I A Ł 2

## ZAGADNIENIE BRZEGOWE DLA PÓŁPŁASZCZYZNY Poddanej Wybieraniu

2.1. Uwagi wstępne

Drażone w górotworze wyrobiska naruszają jego pierwotną równowagę, powodując ruch i deformację, zmierzają do wytworzenia nowego stanu równowagi z rozkładem naprężeń odmiennym niż w górotworze nienaruszonym. Wielkość i charakter odkształceń zależy od rodzaju górotworu i tektoniki, głębokości eksploatacji, grubości eksploatowanego pokładu, sposobu wybierania oraz wielu innych czynników naturalnych i górniczych [7,20]. Badacze i inżynierowie zajmują się wyjaśnieniem, teoretycznym ujęciem oraz praktycznymi rozwiązaniami zwłaszcza dwóch grup zagadnień:

- sposobów określania deformacji górotworu i powierzchni terenu,
- sposobów określenia wpływów eksploatacji /deformacji i sił/ w bezpośrednim sąsiedztwie wyrobiska.

Jeśli chodzi o pierwszą grupę zagadnień to wpływy eksploatacji mogą wystąpić w postaci zjawisk nieregularnych, np. zawałisk trudnych do przewidzenia co do czasu i rozmiarów, lub też w postaci bardziej prawidłowych deformacji górotworu i powierzchni. Te ostatnie występują przy większych głębokościach eksploatacji i dają się przewidzieć z pewną dokładnością przy zastosowaniu odpowiedniej metody obliczeniowej. Przyjmuje się przy tym najczęściej, że nadkład jest jednorodny a podawane wzory określają wartości odkształceń powierzchni terenu przy wystąpieniu niecki statycznej, co zachodzi w przypadku zatrzymania frontu eksploatacji. Metody określania wielkości i rodzajów deformacji powierzchni terenu stworzone głównie przez badaczy polskich zostały

przedstawione w pracach [7,30,32,42]; przegląd i krytykę innych metod podano w pracy [50]. Są to metody empiryczne, które opierają się na danych uzyskanych z pomiarów geodezyjnych, danych doświadczalnych oraz rozważaniach geometrycznych. Odpowiednie są one jedynie dla warunków, w których były prowadzone obserwacje; nie dają także informacji odnośnie do wielkości działających naprężeń. Inne metody fenomenologiczne wywodzą się z rozwiązań dla modeli matematycznych opisujących górotwór. Wydają się one być bardziej wszechstronne - zajmowało się nimi wielu autorów /rozdział 1/.

Druga grupa zagadnień obejmuje głównie rozwiązania dotyczące stanu naprężenia i odkształcenia w eksploatowanym górotworze, szczególnie w obrębie wyrobisk, określenia zasięgu stref spękań i wielkości ciśnień na obudowy oraz filary i ustalenia wielkości ciśnień eksploatacyjnych na pokład. Zazwyczaj rozpatruje się stosunkowo niewielki obszar ośrodka wokół wyrobiska, zastępując oddziaływanie pozostałego górotworu przez przyłożenie na brzegach naprężeń rozłożonych w sposób ciągły [25,35,48,51].

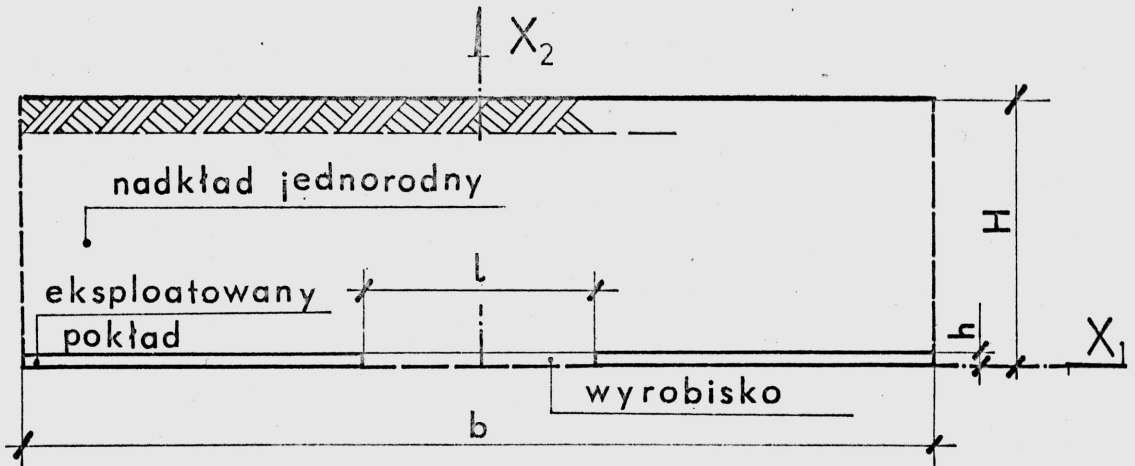
W niniejszej pracy rozpatruje się oba te zagadnienia nierozłącznie rozwiązując jeden problem określenia stanu odkształcenia i stanu naprężenia w górotworze i na powierzchni. W przypadku rozwiązania konkretnego problemu brzegowego, preferując podejście fenomenologiczne, za najkorzystniejsze uważa się analizę wyników metod empirycznych i fenomenologicznych [13,53]. W pracy przeprowadzono próbę takiej analizy, porównując wartości przemieszczeń pionowych chodnika pomiarowego uzyskane z pomiarów geodezyjnych z wartościami przemieszczeń uzyskanych MES. Zgodność wyników obu metod zależy od dokładności przyjętej idealizacji i zbieżności zachowania się modelu fizycznego z zachowaniem górotworu.

## 2.2. Definicja zadania

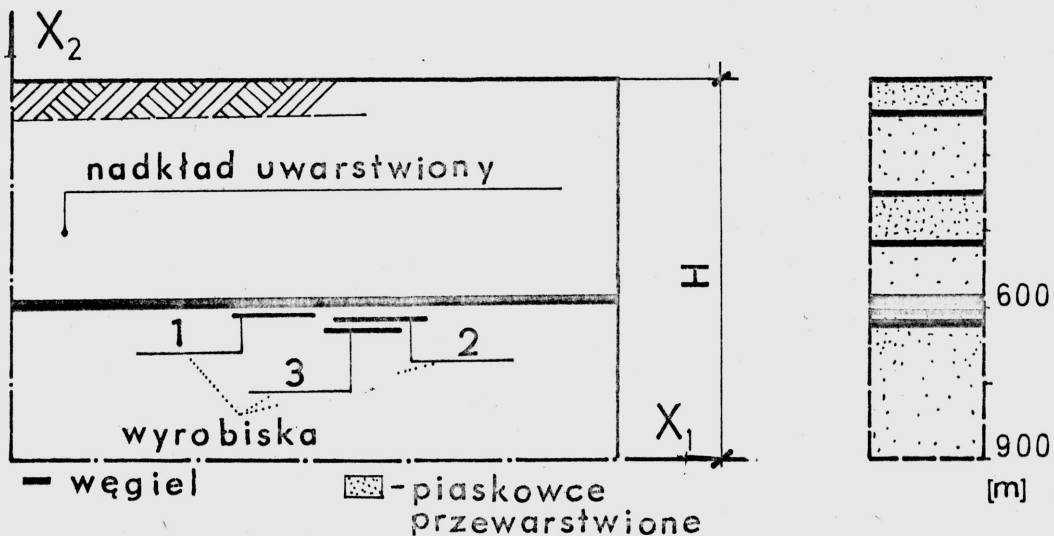
Wyznaczenie stanu przemieszczenia i naprężenia w górotworze, w którym prowadzone są na pewnej głębokości dostatecznie długie wyrobiska chodnikowe, może być traktowane jako rozwiązanie równań równowagi tarczy wyciętej z górotworu prostopadle do osi

wyrobiska, znajdującej się w płaskim stanie odkształcenia.

Schemat zadania /dla PROBLEMU 1 i PROBLEMU 2/ przedstawiono na rys. 2.1. i rys. 2.2.



Rys.2.1. Schemat PROBLEMU 1



Rys.2.2. Schemat PROBLEMU 2.

Rys.2.3. Przekrój geologiczny.

W PROBLEMIE 1 rozpatrzono górotwór o grubości  $H$  spoczywającej na pokładzie o miąższości  $h$ , w którym prowadzone jest wyrobisko chodnikowe o szerokości  $l$ .

W PROBLEMIE 2 rozpatrzono trzy wyrobiska o szerokości  $l_i$  i miąższości  $h_i$  w górotworze o grubości  $H$ .

W obu przypadkach geometrię rozważanej zdyskretyzowanej półpłaszczyzny ustalono na podstawie testów numerycznych.

Podział na warstwy determinował przekrój geologiczny. W PROBLE-

MIE 1 przyjęto, że nadkład jest jednowarstwowy. Przekrój geologiczny do PROBLEMU 2 podano na rys. 2.3.

Pozostałe założenia:

- przyjęto poziomy układ spójnych na kontakcie warstw,
- nie uwzględniono spękań ośrodka skalnego, jest on rozważany jako ciągły, izotropowy,
- przyjęto stan naprężeń wstępnych przed wybraniem od sił ciężkości,
- obciążenie górnicze: wybieranie z podsadzką, która umożliwia przemieszczenie się stropu wyrobiska w kierunku pionowym o wartości  $\Delta_i$ ,
- zachowanie się górotworu modelują ciała:
  - liniowo-sprężyste ,
  - nieliniowo-sprężyste ,
  - lepko-sprężyste ,
- parametry określające ośrodek: parametry fizyczne na podstawie rozpoznania geologicznego i sondażu, wyniki pomiarów własności górotworu na próbkach w laboratorium.

Mamy więc dane:

- obszar  $S(X_1, X_2)$  ,
- własności reologiczne obszaru ,
- układ obciążeń i przemieszczeń zewnętrznych ,
- siły masowe.

Szukanymi są: przemieszczenia  $\{\delta\}$  punktów obszaru  $S$ , ciągłe i spełniające warunki równowagi.

Przemieszczenia  $\{\delta\}$  są podstawą do określenia stanu odkształcenia i stanu naprężenia w obszarze  $S$ .

Metodyka określania szukanych wielkości polega na:

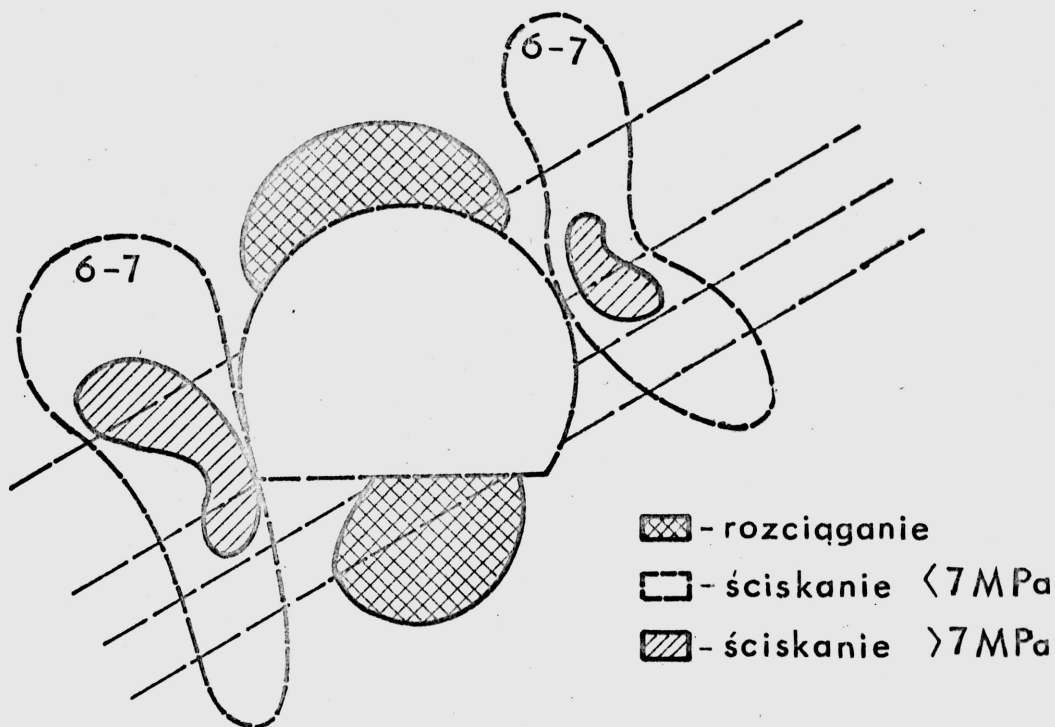
- dyskretyzacji układu elementów ,
- analizie elementu ,

- analizie układu elementów

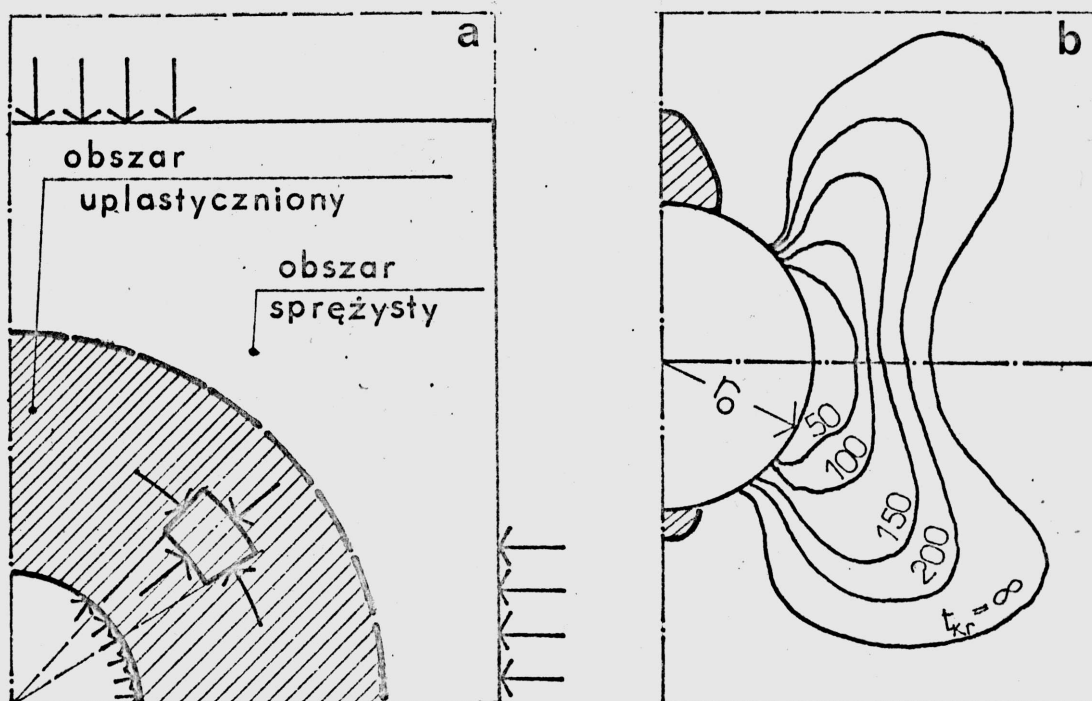
oraz na wykorzystaniu jednej z podstawowych technik przeprowadzania rozwiązań zagadnień dla rozważanego modelu reologicznego.

### 2.3. Możliwości rozwiązania

Rysunek 1.1. przedstawia różne możliwości rozwiązania zadania, które zdefiniowano powyżej. Wybrano podejście numeryczne metodą elementów skończonych, uważając analizę numeryczną tą metodą, przy obecnym rozwoju ETO, za najskuteczniejszą. Biorąc pod uwagę inne możliwości rozwiązania, prześledzono wyniki otrzymane sposobem analitycznym i metodą różnic skończonych przeprowadzonych przez: Dejean a M., Kisiela I., Lombardiego E. i Rechsteinerja F. oraz Osmanagić'a M. i Jasarewić'a I. Przykłady wyników tych rozwiązań dla różnej geometrii wyrobisk oraz różnych modeli fizycznych górotworu przedstawiają rysunki: 2.4. i 2.5.



Rys.2.4. Określenie metodą różnic skończonych rozkładu naprężeń normalnych do układu warstw /Dejean M. [12]/.



Rys.2.5. Analityczne określenie obszarów plastycznych wokół wyrobiska kołowego a/ dla modelu ciała sprężysto-plastycznego /Lombardi G., [33] b/ dla modelu ciała sprężysto-lepko-plastycznego /Kisiel I., [28].

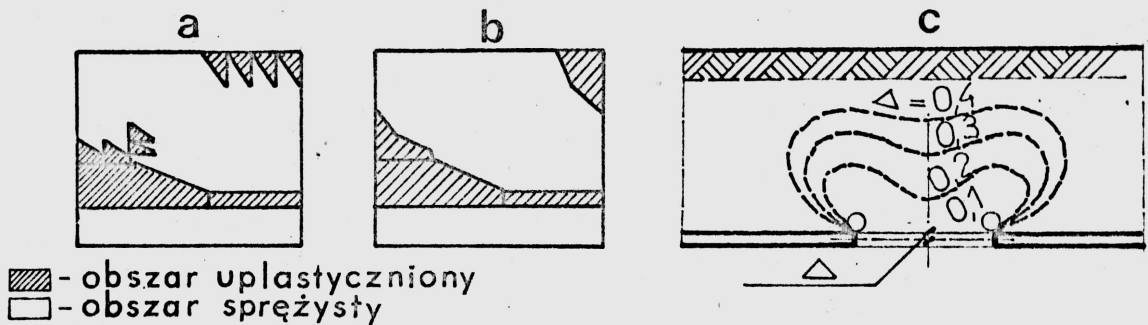
Zdaniem autorki oczywisty jest wybór możliwości i metody rozwiązania zadania. Natomiast do późniejszego porównania wyników rozwiązań należałoby jeszcze do rozważanych modeli fizycznych dołączyć model ciała sprężysto-plastyczny, dość dobrze opisującego górotwór. Wymagałoby to jednak zbudowania nowego algorytmu oraz programu na EMC.

Rozwiązanie dla modelu sprężystego o ograniczonej nośności, przy przyjętym zmodyfikowanym warunku Coulomba, było przedmiotem badań numerycznych autorki oraz Izbickiego R.J. [24]. Rysunek 2.6. przedstawia zasięg określonych obszarów, dla których warunek Coulomba został spełniony. Danymi w tym zadaniu z wyjątkiem modelu fizycznego były dane PROBLEMU 1.

Modelem sprężysto-plastycznym zajęli się Mróz Z. i Winnicki L. [35], którzy napisali program w języku ALGOL z przeznaczeniem na EMC Odra 1204. Program przeprowadzał analizę sprężysto-plastyczną sposobem iteracyjnym.

Określony przez autorów zasięg obszarów uplastycznionych w pobli-

zu wyrobiska dla systemu eksploatacji z zawalem pokazano na rys. 2.6a, b.



Rys.2.6. Określenie MES obszarów uplastycznionych a/ wynikających z rozwiązania sprężystego, b/ wynikających z rozwiązania sprężysto-plastycznego /Mróz Z., Winnicki L. [35] / c/ wynikających z rozwiązania sprężystego /Izbicki R.J., Wnętrzak K. [24] /.

Analizę sprężysto-plastyczną umożliwiają również istniejące systemy obliczeniowe omówione przez autorkę i Bauera J. w [4] oraz program zbudowany przez Kaczmarka J. [25].

Aby rozszerzyć przeprowadzaną analizę o model sprężysto-plastyczny, celowym byłoby skorzystanie z któregoś z tych programów. Jednakże ze względu na ograniczony dostęp do odpowiednich EMC i ich urządzeń peryferyjnych oraz określone wymagania i możliwości programów związane z ich adaptacją zrezygnowano z takiej próby.

#### 2.4. Rozwiązanie numeryczne

Podstawowe równania metody elementów skończonych dla poszczególnych rozważanych fizycznych modeli, podane zostaną w kolejnych podpunktach.

Metoda elementów skończonych jest metodą pozwalającą na aproksymację funkcji ciągłej dyskretnym modelem, który zawiera szereg wartości danej funkcji w skończonej liczbie punktów znajdujących się w obszarze tej funkcji. Dyskretny model obejmuje również odcinki aproksymowanej funkcji w skończonej liczbie podobszarów. Podobszary są nazywane elementami skończonymi.

Lokalna aproksymacja funkcji w każdym elemencie jest definiowana



wyłącznie przy pomocy jej dyskretnej wartości w skończonej liczbie wybranych punktów w obszarze.

W celu zbudowania dyskretnego modelu danej funkcji ciągłej postępuje się następująco:

- w obszarze funkcji określa się skończoną liczbę punktów nazywanych węzłowymi oraz wartości funkcji w tych punktach,
- obszar funkcji jest reprezentowany w przybliżeniu przez zespół skończonej liczby podobszarów zwanych elementami skończonymi /elementy łączą się w węzłach i na granicach obszarów/,
- dana funkcja jest aproksymowana lokalnie w każdym elemencie skończonym przez funkcje ciągłe definiowane wyłącznie w zależności od ich wartości /lub wartości ich pochodnych/ w punktach węzłowych należących do elementu.

Funkcją ciągłą, dla której buduje się dyskretny model, jest funkcja przemieszczeń. Wartości tej funkcji w skończonej liczbie punktów węzłowych są podstawowymi niewiadomymi układu równań MES. Niewiadome te określa się poprzez minimalizację całkowitej energii potencjalnej, zdefiniowanej jako funkcjonal na przemieszczeniach węzłów elementów, na które został podzielony obszar funkcji [38].

#### 2.4.1. Rozwiązanie dla modelu ciała liniowo-sprężystego

Sposób rozwiązywania zagadnień brzegowych liniowej teorii sprężystości opisany został między innymi w monografiach [17, 38, 57].

Przy założeniu małych przemieszczeń i odkształceń rozwiązanie problemów liniowych sprowadza się do rozwiązania następującego układu równań:

$$[K] \{\delta\} = \{R\}$$



Liniowość opisują dwa następujące związki:

$$\{\varepsilon\} = [B] \{\delta\} - \{\varepsilon_0\}$$

$$\{\sigma\} - \{\sigma_0\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\})$$

W przypadku ośrodka liniowo-sprężystego modelującego uwarstwiony eksploatowany górotwór, indywidualne podejście polega na odpowiednim przyjęciu:

- geometrii zdyskretyzowanego obszaru, podziału na elementy i założeniu niewiadomego wektora  $\{\delta\}$  w węzłach układu,
- warunków brzegowych: kinetycznych  $\{R\}$  i kinematycznych  $\{\delta\}$ ,
- wektora naprężeń początkowych  $\{\sigma_0\}$  oraz wektora odkształceń początkowych  $\{\varepsilon_0\}$ ,
- właściwości fizycznych czyli wartości  $E$  i  $\nu$  determinujących macierz sprężystości  $[D]$ ,
- funkcji kształtu  $N$ , których pochodne są wyrazami macierzy odkształceń  $[B]$

oraz zapisaniu algorytmu rozwiązania umożliwiającego zbudowanie programu i podprogramów obliczeń.

#### 2.4.2. Rozwiązanie dla modelu ciała nieliniowo-sprężystego

Spośród trzech kategorii problemów nieliniowych: nieliniowości fizycznej, nieliniowości geometrycznej i występujących równocześnie nieliniowości fizycznej i geometrycznej rozważono tylko problem nieliniowości fizycznej.

Dla modelu ciała nieliniowego fizycznie związek odkształcenie-przemieszczenie jest liniowy i wyraża się równaniami Cauchy'ego w zapisie macierzowym przyjmującymi postać:

$$\{\varepsilon\} = [B] \{\delta\}$$

natomiast związek naprężenie-odkształcenie jest funkcją nieliniową:

$$f(\{\varepsilon\}, \{\sigma\}) = 0$$

Funkcja  $f(\{\varepsilon\}, \{\sigma\})$  możliwa jest do określenia metodą

doświadczalną w aparacie jednoosiowego lub trójosiowego ściskania. Dla ciała sprężystego izotropowego prawo zmiany objętości i prawo zmiany postaci wyrażone przy pomocy stałych  $E, \nu$  określonych w badaniach jednoosiowych, wyraża się następująco:

$$\sigma_0 = \frac{E}{1-2\nu} \varepsilon_0 \quad \tau_{ij} = \frac{E}{2(1+\nu)} \nu_{ij}$$

gdzie:  $\sigma_0, \varepsilon_0, \tau_{ij}, \nu_{ij}$  są częściami kulistymi i dewiatorowymi odpowiednio tensora stanu naprężenia  $\{\sigma\}$  i odkształcenia  $\{\varepsilon\}$ .

W celu wykorzystania w obliczeniach dla problemu nieliniowego programu obliczeń dla modelu ciała izotropowego liniowo-sprężystego, należy zapisać  $E$  i  $\nu$  jako funkcje stanu naprężenia. Wówczas:

$$\sigma_0 = \frac{E(\sigma_0, \tau_{ij})}{1-2\nu(\sigma_0, \tau_{ij})} \varepsilon_0 \quad \tau_{ij} = \frac{E(\sigma_0, \tau_{ij})}{2(1+\nu(\sigma_0, \tau_{ij}))} \nu_{ij}$$

Funkcja  $f(\{\varepsilon\}, \{\sigma\})$ , zapisana jako prawo zmiany objętości i prawo zmiany postaci wraz z funkcjami  $E(\sigma_0, \tau_{ij})$  oraz  $\nu(\sigma_0, \tau_{ij})$ ,

pozwala przy wykorzystaniu programu obliczeń dla ciała liniowo-sprężystego i jednego ze sposobów analizy nieliniowej, rozwiązać zadanie brzegowe dla ciała nieliniowo-sprężystego.

Funkcje  $E(\sigma_0, \tau_{ij})$  oraz  $\nu(\sigma_0, \tau_{ij})$  w zależności od przyjętych założeń i przeprowadzonych badań może przyjmować różną postać. Pierwszym przybliżeniem jest zapisanie  $E$  jako funkcji naprężenia średniego:  $E = K(\sigma_3)^n$ , gdzie  $K$  i  $n$  są stałymi określonymi doświadczalnie. Współczynnik  $\nu$  jest w tym przypadku przyjmowany jako stały. Wielkości  $E$  i  $\nu$  zapisane jako funkcje naprężenia średniego i dewiatora stanu naprężenia dokładniej przybliżają właściwości górotworu. Duncan [18] podaje wyrażenia na  $E$  i  $\nu$  zależne od stanu naprężenia oraz siedmiu parametrów, które można określić w klasycznych badaniach trójosiowych. Podane przez Duncana wyrażenia na  $E$  i  $\nu$  oraz aproksymacja krzywej naprężenie-odkształcenie równaniem hiperboli są w pewnym zakresie szczególnie przydatne do analizy modeli opisujących ośrodek gruntowy.

Podane przez W. Fürstera funkcje  $E$  i  $\nu$ , [19] zapisane na podstawie rodziny krzywych  $\sigma = \sigma_0(\epsilon_0)$  i  $\nu_{ij} = \nu_{ij}(\tau_{ij})$

otrzymanych w wyniku badań przeprowadzonych w aparacie trójosiowego ściskania ze stałą wielkością ciśnienia bocznego dobrze przybliżają właściwości gruntów i skał. Inną niż W. Forster postać funkcji  $E, \nu$  podaje W. Hüls [23]. Jeden z bardziej prostych zapisów wyrażen dla  $E$  i  $\nu$  dotyczących ciała "dwuliniowego" aproksymującego ciało nieliniowe podał M. Dejean [14], przyjmując dwie pary wartości  $E$  i  $\nu$  dla całego cyklu obciążenia. Przejście od jednej wartości do drugiej uwarunkowane jest pewnym przyjętym kryterium. Próbę ustalenia postaci funkcji dla modelu anizotropowego ośrodka sprężysto-plastycznego przeprowadził Z. Borowiec w pracy [8].

Zapis analityczny wyników badań jest jedną z możliwości wprowadzenia nieliniowej zależności naprężenie-odkształcenie do programu obliczeń MES. Druga możliwość polega na wprowadzeniu do programu obliczeń wyników badań w postaci tabelarycznej [19,53].

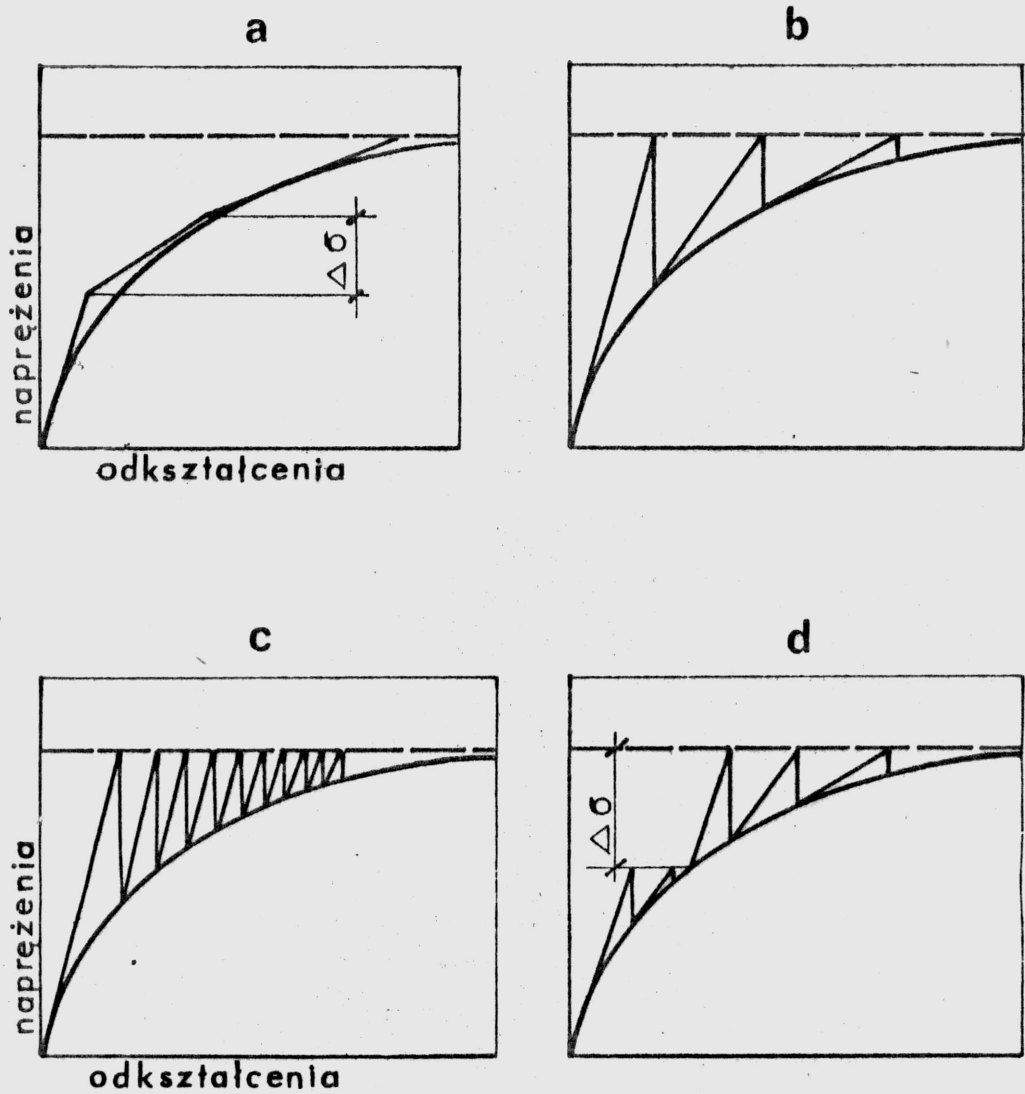
Istnieją trzy podstawowe sposoby rozwiązań zagadnień nieliniowych:

- przyrostowy /krokowy/,
- iteracyjny,
- przyrostowo-iteracyjny /mieszany/,

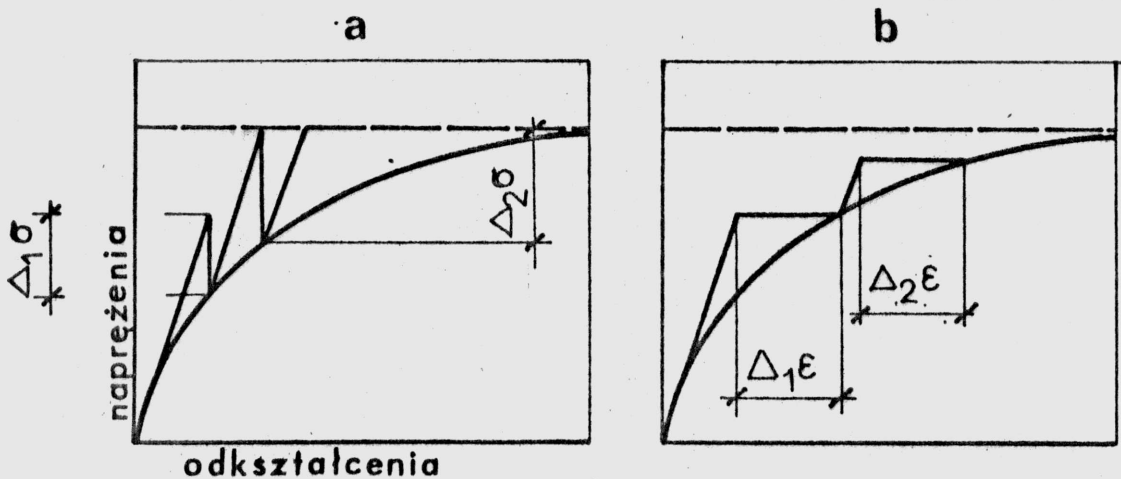
omówione w pracach [17,38,41,57]. Graficznie ideę tych rozwiązań przedstawiono na rys. 2.7.

Wymienione sposoby w połączeniu z metodami analizy nieliniowej jak np. metoda naprężeń początkowych lub metoda odkształceń początkowych /rys.2.8./ pozwalają po zalgorytmizowaniu i zapisaniu w autokodzie EMC rozwiązywać zadania nieliniowej teorii sprężystości.

W pracy posłużono się tabelarycznym zapisem wyników badań jednoosiowych zależności naprężenie-odkształcenie dla rozważanego ośrodka. Stan odkształcenia określono przez interpolację dla obliczonego stanu naprężenia, korzystając ze sposobu naprężeń początkowych i procedury iteracyjnej.



Rys.2.7. Procedury analizy nieliniowej a/ procedura przyrostowa, b/ procedura iteracyjna dla zmiennej macierzy  $k$ , c/ procedura iteracyjna dla stałej  $k$ , d/ procedura mieszana.



Rys.2.8. Graficzne przedstawienie metody naprężeń początkowych i metody odkształceń początkowych.

### 2.4.3. Rozwiązanie dla modelu ciała liniowo-lepko-sprężystego

W podrozdziałach 2.4.1. i 2.4.2. przedstawiono sposób rozwiązania dla modeli ciał, które posiadają pamięć prostą - pamiętają tylko bezodkształceniowy stan początkowy.

Górotwór, jak wykazują obserwacje i badania [27,37], można opisać reologicznym modelem ciała, które posiada pamięć zachowującą liniowość między obciążeniem i przemieszczeniem zależną od czasu, przy czym stan odkształcenia możliwy jest do określenia w momencie, gdy znana jest historia obciążenia. Ogólne równania stanu dla ciała liniowo-lepko-sprężystego podał L. Boltzman. Prezentację modeli wywodzących się z założeń ciała Boltzmana wraz z własną propozycją modelu przybliżającego właściwości fizyczne gruntu i górotworu podał I. Kisiel [26].

W celu rozwiązania MES zadania /przedstawionego w p. 2.2./ dla modelu liniowo-lepko-sprężystego przeanalizowano różne modele reologiczne. P.M. Stremsoerfer [43] dokonał wyboru modelu ciała liniowo-lepko-sprężystego najogólniej opisującego stan fizyczny górotworu. Wybrany przez Stremsoerfera model jest szeregowym połączeniem kilku modeli Hooke'a i Kelvina-Voigta /określenie w dowolnej chwili  $t$  stanu odkształcenia i naprężenia możliwe jest dzięki zastosowanej funkcji pełzania/. Stremsoerfer określił stateczność wyrobiska w eksploatowanym głębinowo pokładzie soli posługując się algorytmem podanym przez Zienkiewicza. W algorytmie wykorzystano procedurę iteracyjną dla macierzy o zmiennej

sztywności oraz metodę odkształceń początkowych. A. Tajduś w pracy [48] przyjął do opisu stanu naprężenia w górotworze lepko-sprężystym, niejednorodnym, pofałdowanym model ciała Kelvina i rozwiązał MES zadanie określenia stanu odkształcenia i naprężenia w fałdzie oraz wokół wyrobisk o różnych kształtach.

Zastosowanie modeli sprężysto-lepko-plastycznych /Kisiela i Loonen'a - Szwedowa/ do opisu eksploatowanego górotworu przedstawiono w pracach [28,34,37]. Wyniki rozwiązań /przeprowadzonych sposobem analitycznym/ zagadnień brzegowych podanych w tych pracach wskazują na potrzebę budowy algorytmu obliczeń MES

uwzględniającego właściwości plastyczne modelu.

Dla modelu ciała liniowo-lepko-sprężystego rozwiązanie przeprowadza się sposobem przyrostowym bądź iteracyjnym rozważając odpowiednio małe przedziały czasu. W każdym przedziale czasu, korzystając z funkcji pełzania lub relaksacji, aktualnego stanu odkształcenia i naprężenia oraz historii obciążenia można obliczyć przyrosty odkształcenia i naprężenia. Służą temu celowi, metoda odkształceń początkowych i naprężeń początkowych.

Wygodnie jest wyrazić /podobnie jak w podrozdziale 2.4.2./ funkcję  $f(\{\sigma(t)\}, \{\epsilon(t)\})$  przez prawo zmiany objętości i prawo zmiany postaci i do rozwiązania zagadnienia skorzystać z zasady odpowiedniości /analogii Alfrey'a /.

Ogólna postać funkcji jest następująca:

$$\sigma_0 = 3K(0) \epsilon_0(t) + 3 \int \epsilon_0(t-\tau) \frac{\partial K(\tau)}{\partial \tau} d\tau$$

$$\tau_{ij} = 2G(0) \bar{v}_{ij}(t) + 2 \int \bar{v}_{ij}(t-\tau) \frac{\partial G(\tau)}{\partial \tau} d\tau$$

gdzie:  $K(t)$  i  $G(t)$  funkcjami relaksacji wszechstronnego rozciągania i relaksacji ścinania

Funkcje relaksacji dla przyjętych modeli określa się doświadczalnie.

Korzystając przy rozwiązywaniu konkretnych zagadnień brzegowych z metody transformacji całkowych z wykorzystaniem analogii Alfrey'a i uwzględniając warunki początkowe w prawach zmiany objętości i postaci otrzymuje się:

$$\bar{\sigma}_0 = 3K(s) \bar{\epsilon}_0$$

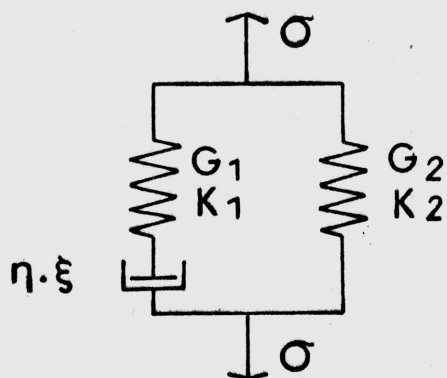
$$\bar{\tau}_{ij} = 2G(s) \bar{v}_{ij}$$

Wielkości z kreską są transformatami Laplace'a tensorów naprężenia i odkształcenia a  $K(s)$  i  $G(s)$  reprezentują obrazy funkcji relaksacji  $G(t)$  i  $K(t)$  w przestrzeni transformat. Postać  $G(s)$  i  $K(s)$  jest zależna od przyjętego modelu reologicznego prawa zmiany objętości i postaci.

Dla przyjętego w pracy modelu Zenera, postać tych funkcji jest następująca:

$$G(s) = \frac{G_1 G_2 (1 + s \Gamma_1)}{G_1 + s \eta}$$

$$K(s) = \frac{K_1 K_2 (1 + s \Gamma_1)}{K_1 + s \xi}$$



Rys.2.9. Model Zenera

Stałe:  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  należy określić doświadczalnie. Pomocną do wyznaczenia tych parametrów opisujących model jest metoda regresji [5].

Przy założeniu, że prawo zmiany postaci opisane jest modelem ciała standardowego Zenera a prawo zmiany objętości jest prawem sprężystości liniowej obrazy funkcji relaksacji przyjmują następującą postać:

$$K(s) = K \quad G(s) = \frac{G_1 G_2 (1 + s\Gamma)}{G_1 + s\eta}$$

Dla stałego w czasie naprężenia  $\sigma(t)$  przy warunku początkowym:

$$\varepsilon(t)_{t=0} = \sigma(t) / \left( K + \frac{4}{3} G_1 + \frac{4}{3} G_2 \right)$$

otrzymuje się następujące wyrażenie na odkształcenie w czasie:

$$\varepsilon(t)_t = \frac{\sigma(t)_{t=0}}{K + \frac{4}{3} G_2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right) \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) \right]$$

gdzie:

$$T_1 = \frac{\eta \left( K + \frac{4}{3} G_1 + \frac{4}{3} G_2 \right)}{G_1 \left( K + \frac{4}{3} G_2 \right)}, \quad T_2 = \frac{\eta}{G_1}, \quad \Gamma = \eta \frac{G_1 + G_2}{G_1 G_2}$$

Uwzględniając zapis przyrostowy i pamiętając, że w czasie  $t$  i  $t + \Delta t$  odkształcenia ośrodka wywołane naprężeniami zawierają część sprężystą i część zależną od pełzania:

$$\Delta \varepsilon(I) = \Delta \varepsilon(I)_{spr} + \Delta \varepsilon(I)_{peIz}$$

$\Gamma$  i  $\Gamma_1$  są następującymi funkcjami  $G_1, G_2, K_1, K_2$ :

$$\Gamma = \eta \frac{G_1 + G_2}{G_1 G_2}, \quad \Gamma = \xi \frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2}$$

gdzie:

$\xi$  - lepkość objętościowa

$\eta$  - lepkość postaciowa.

założono, że analizę przeprowadza się w małych przedziałach czasu  $\Delta t$ , takich w których prędkość pełzania jest stała.

Rozwiązanie problemu metodą elementów skończonych sprowadza się do wykorzystania sposobu naprężeń początkowych i procedury iteracyjnej.



## R O Z D Z I A Ł 3

## ALGORYTM ROZWIĄZANIA

Podstawą rozwiązania jest algorytm zagadnienia liniowo-sprężystego. Przyjmując ten algorytm jako procedurę w procesie iteracyjnym /o stałej macierzy sztywności [K] oraz wykorzystując metodę naprężeń początkowych, przeprowadzono badania numeryczne dwóch modeli bardziej złożonych, a tym samym badania złożonych zjawisk reologicznych zachodzących w górotworze poddanym wybieraniu. Zbudowany algorytm pozwala na badanie nieliniowo i liniowo-sprężystych odkształceń oraz odkształceń liniowo-lepko-sprężystych. Szczegółowa adaptacja algorytmu i wykorzystanych programów, do analizy zjawisk takich jak:

- nieliniowe odkształcenia sprężysto-plastyczne,
- nieliniowe lub "dwuliniowe" pełzanie; dwuliniowe pełzanie tzn. pełzanie opisane inaczej przed i po przekroczeniu granicy plastyczności /tak jak np. w modelu ciała M/V/

przekracza zakres niniejszej pracy i stanowić będzie cel dalszych rozważań autorki.

Ogólny schemat rozwiązania zagadnień liniowo-sprężystych podał O.C. Zienkiewicz [57].

W pracy natomiast podano algorytm ogólniejszy. Algorytm obejmuje następujące etapy rozwiązania:

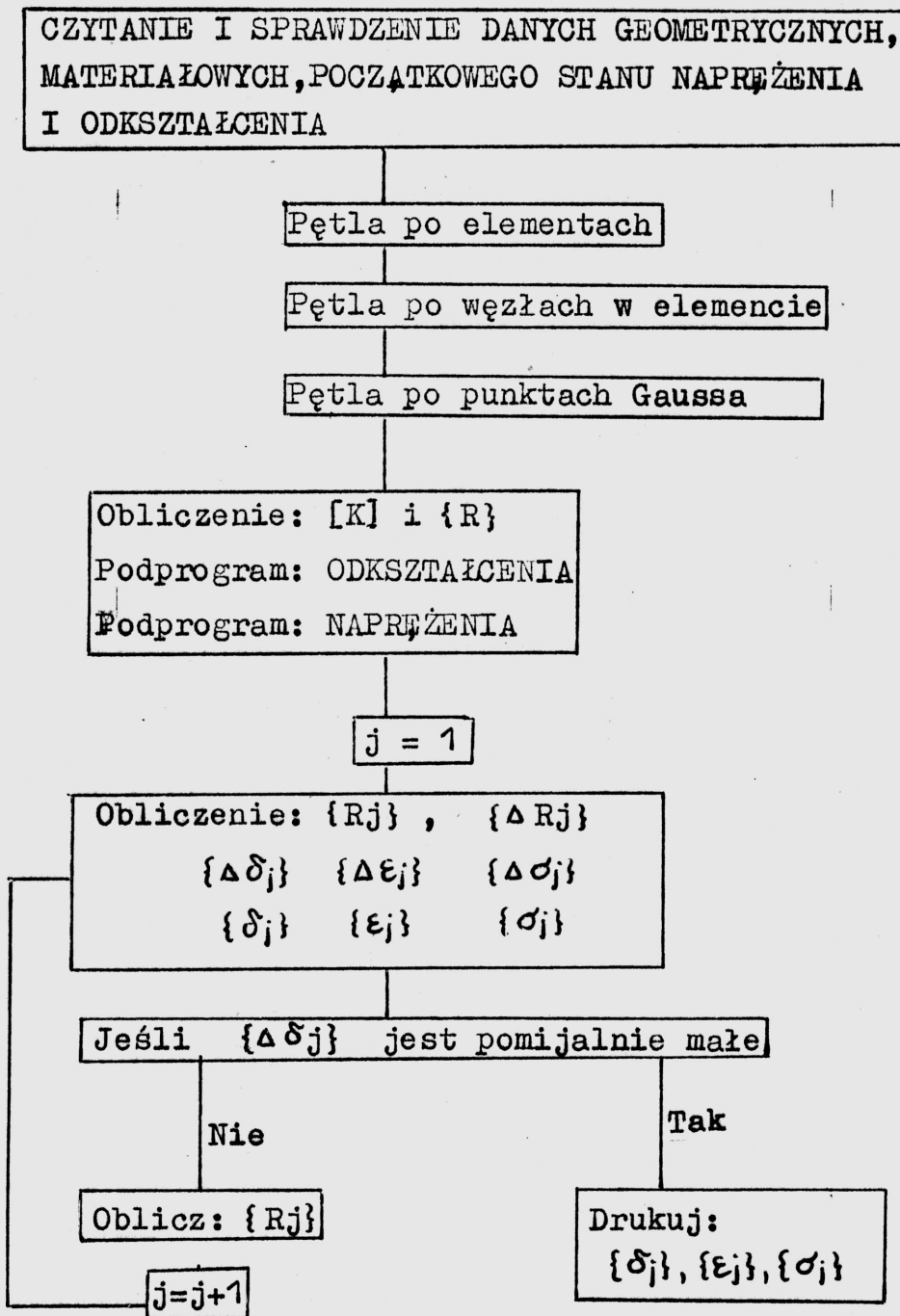
- I. Tworzenie macierzy sztywności elementu
- II. Składanie macierzy sztywności układu elementów
- III. Rozwiązanie układu równań równowagi w procesie iteracyjnym.

Ogólny schemat blokowy zawierający procedurę iteracyjną podaje rys. 3.1.

Potrzebne do rozwiązania zadania dane zawierają:

1. Geometrię rozważanego układu warstw i wyrobisk.
2. Listę numerów stopni swobody węzłów rozważanego układu elementów.

OGÓLNY SCHEMAT BLOKOWY ZAWIERAJĄCY  
PROCEDURĘ ITERACYJNĄ



Rys.3.1. Ogólny schemat blokowy zawierający procedurę iteracyjną.

3. Typ materiałowy elementów
4. Typ geometryczny elementów
5. Obciążenie rozważanego układu.

Dane do utworzenia listy numerów stopni swobody przygotowuje podprogram generujący siatkę podziału rozważanego obszaru na elementy, numerujący węzły i elementy. Lista numerów stopni swobody podawana jest zgodnie z opisem #PROBLEM PŁASKI i #LΦZF.

Typ materiałowy TM zawiera numer rozważanego modelu.

TM(I) dla  $I = 1, 2, 3$  decyduje o wyborze podprogramów czytania danych materiałowych, obliczania przemieszczeń, obliczania odkształceń i naprężeń.

TM(1) wybiera dane dla modelu ciała liniowo-sprężystego opisanego równaniami fizycznymi wyrażonymi w formie prawa zmiany objętości i prawa zmiany postaci:

$$\sigma_0 = \frac{E}{1-2\nu} \varepsilon_0, \quad \tau_{ij} = \frac{E}{2(1+\nu)} \nu_{ij}$$

Danymi dla każdej warstwy rozważanego górotworu są stałe  $E$  i  $\nu$ .

TM(2) wybiera dane dla modelu ciała nieliniowo-sprężystego opisanego równaniami fizycznymi:

$$\sigma_0 = \frac{E(\sigma_0, \tau_{ij})}{1-2\nu(\sigma_0, \tau_{ij})} \varepsilon_0, \quad \tau_{ij} = \frac{E(\sigma_0, \tau_{ij})}{2(1+\nu(\sigma_0, \tau_{ij}))} \nu_{ij}$$

Danymi dla każdej warstwy rozważanego górotworu są tabele wartości podające punktowo zależność między stanem naprężenia a stanem odkształcenia.

TM(3) wybiera dane dla modelu ciała liniowo-lepko-sprężystego opisanego równaniami:

$$\sigma_0 = 3K \varepsilon_0, \quad \tau_{ij} = 2G_1 \Psi_s \nu_{ij}$$

gdzie:

$$\Psi_s = \frac{T_s}{1+T_s} + \frac{G_2}{G_1}, \quad T = \frac{\eta}{G_1}, \quad \nu_{ij}(0) = \frac{\tau_{ij}(0)}{2(G_1+G_2)}$$

Prawo zmiany objętości jest prawem sprężystości liniowej a prawo zmiany postaci jest opisane modelem ciała standardowego. Danymi dla każdej warstwy rozważanego górotworu są stałe:  $G_1, G_2, \eta, K$ .

Typ materiałowy TM uwzględnia związki fizyczne dla rozważanych modeli. Typ geometryczny TG geometrię elementu przyjętego do podziału continuum.

TG ( I ) dla  $I = 1, 2, 3$  oznacza odpowiednio element czworokątny, trójkątny o trzech i trójkątny o sześciu węzłach. W zależności od TG dobierane są charakterystyki elementu. Geometrię rozważanego układu warstw i wyrobisk określają współrzędne na płaszczyźnie  $(X_1, X_2)$ .

Obciążenie rozważanego układu elementów stanowią siły masowe, których dwie składowe przyłożone są w węzłach wierzchołkowych elementu oraz obciążenie górnicze, którym są przemieszczenia pionowe węzłów stropów wyrobisk.

## R O Z D Z I A Ł 4

## STOSOWANE ELEMENTY ORAZ ICH CHARAKTERYSTYKI

4.1. Uwagi wstępne

Analiza elementów skończonych, wykorzystanych do podziału zdyskretyzowanego continuum, obejmuje element czworokątny oraz element trójkątny. Przyjęto element czworokątny z rodziny Serendipa o czterech węzłach i ośmiu stopniach swobody oraz element trójkątny o trzech węzłach i sześciu stopniach swobody. Są to jedne z najprostszych elementów stosowanych do analizy płaskiego stanu naprężenia i odkształcenia [17,57]. Funkcje kształtu przyjmowane do opisu pola przemieszczeń w tych elementach są wielomianami stopnia pierwszego. Istnieje możliwość udoskonalenia tych elementów przez zastosowanie dodatkowych węzłów rozmieszczonych na krawędziach elementów. Skorzystano z tej możliwości przeprowadzając częściowe obliczenia programem  $L\bar{D}3F$ , który umożliwia przejście od elementu trójkątnego o trzech węzłach do elementu trójkątnego o sześciu węzłach. Dla elementów z dodatkowymi węzłami rozmieszczonymi na krawędziach liniowe funkcje kształtu przechodzą w wielomiany algebraiczne wyższego stopnia. Inna możliwość udoskonalenia najprostszych elementów polega na zwiększeniu liczby stopni swobody w węzłach /Szmelter i inni:[46]. W przypadku zwiększenia liczby stopni swobody w węzłach rozważa się wektory uogólnionych przemieszczeń węzłowych zawierające wartości pierwszych pochodnych. Funkcjami kształtu w tym przypadku mogą być np. wielomiany Hermite'a. Udoskonalone elementy są najczęściej stosowane do analizy elementów konstrukcyjnych bardziej złożonych niż tarcze, to znaczy do analizy płyt i powłok. Zalety przyjętych najprostszych elementów skończonych w porównaniu z udoskonalonymi elementami są następujące:

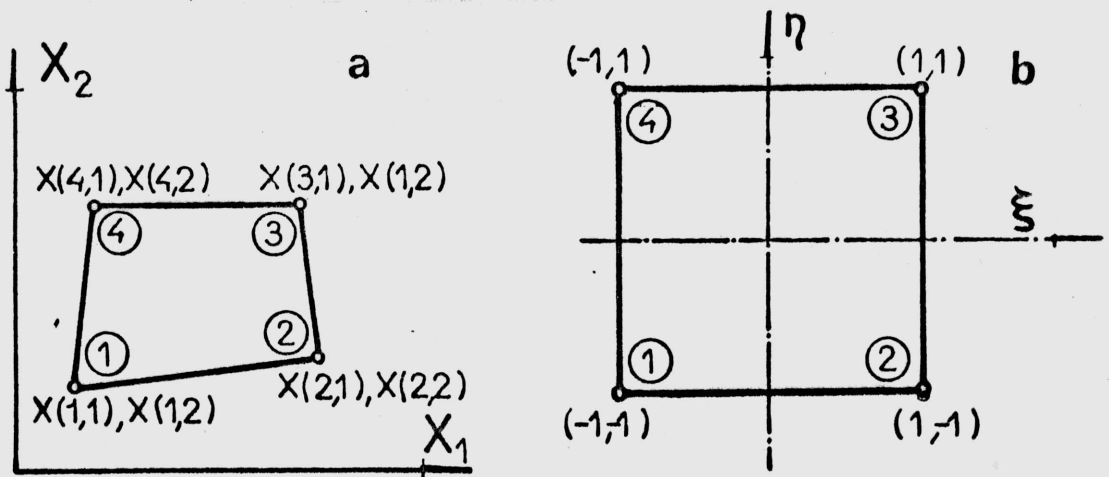
- redukcja wymiarów macierzy sztywności układu,

- bardziej proste sformułowanie charakterystyk elementu wraz z jego macierzą sztywności a tym samym prostota zapisu w autokodzie EMC,
- łatwość dostosowania podziału do dowolnego układu warstw, wyrobisk i krawędzi rozważanego obszaru,
- możliwość lokalnego zagęszczenia podziału.

Pierwsza z wymienionych zalet może być dyskusyjna, ponieważ stosowanie elementów czworokątnych o czterech i trójkątnych o trzech węzłach wymaga często większego zagęszczenia siatki podziału co prowadzi do wzrostu wymiarów macierzy układu.

Wadą podziału na przyjęte elementy jest mniejsza zdolność aproksymacyjna i wolniejsza zbieżność do ścisłego rozwiązania [57]. Mniejsza dokładność przybliżenia dotyczy przede wszystkim stanu naprężenia, który wyraża się przez wielomiany stopnia o jeden niższego niż stan przemieszczenia. Wadę tę starano się zmniejszyć wykorzystując punkty całkowania / w metodzie Gaussa / do określenia w nich wartości naprężeń.

#### 4.2. Element czworokątny



Rys.4.1. Element czworokątny z rodziny Serendipa.

Rozważono dowolny czworokąt o  $i = 1, 2, 3, 4$  węzłach w układzie współrzędnych  $(X_1, X_2)$  rys.4.1a. Współrzędne węzłów elementu oznaczono przez  $X(J, K)$  gdzie:

$J$  - oznacza nr węzła,  $K = 1$  - oznacza współrzędną w kierunku osi  $X_1$ ,  $K = 2$  - współrzędną w kierunku osi  $X_2$ .

Przemieszczenia węzłów mają po dwie składowe:

$$\{U(I)\} = \begin{Bmatrix} U(I,1) \\ U(I,2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_i(1) \\ U_i(2) \end{Bmatrix} \quad \text{gdzie: } \begin{array}{l} I, i - \text{ numer węzła} \\ 1, 2 - \text{ kierunki odpowiednio} \\ \text{ osi } X_1, X_2. \end{array}$$

Składowe przemieszczenia punktów elementu wyrażone przez funkcje kształtu są odpowiednio równe:

$$\{U(K)\} = \sum_{i=1}^4 U_i(K) N_i(X_1, X_2) \quad \text{gdzie: } \begin{array}{l} K = 1 - \text{ kierunek osi } X_1 \\ K = 2 - \text{ kierunek osi } X_2 \end{array}$$

Odształcenia w dowolnym punkcie elementu wynoszą:

$$\begin{aligned} \varepsilon(1) &= \frac{\partial U(1)}{\partial X_1} = \sum_{i=1}^4 U_i(1) \frac{\partial N_i}{\partial X_1} \\ \varepsilon(2) &= \frac{\partial U(2)}{\partial X_2} = \sum_{i=1}^4 U_i(2) \frac{\partial N_i}{\partial X_2} \\ \varepsilon(12) &= \sum_{i=1}^4 \left( U_i(1) \frac{\partial N_i}{\partial X_2} + U_i(2) \frac{\partial N_i}{\partial X_1} \right) \end{aligned}$$

Przyjęto do opisu stanu przemieszczenia funkcje kształtu  $N_i$  są wielomianami spełniającymi następujące warunki:

- zapewniona jest ciągłość przemieszczeń liniowych między elementami,
- nie jest wymagana ciągłość pierwszej pochodnej funkcji  $N_i$ ,
- funkcja  $N_i$  spełnia kryterium stałego odkształcenia /stałej pierwszej pochodnej/

Przy przejściu do układu  $(\xi, \eta)$  /rys.4.1b/ funkcje kształtu oraz ich pochodne mają następującą postać:

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi + \eta_i \eta + \xi_i \eta_i \xi \eta)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{1}{4} (\xi_i + \xi_i \eta_i \eta)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{1}{4} (\eta_i + \xi_i \eta_i \xi)$$

Wartości funkcji kształtu i jej pochodnych w układzie  $(\xi, \eta)$  dla  $\xi = 0$  i  $\eta = 0$ :

i	N	$N_{i, \xi}$	$N_{i, \eta}$
1	$+\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
2	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
3	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{4}$
4	$+\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{4}$

Pochodne funkcji kształtu w układzie  $(X_1, X_2)$ :

$$N_{i, X_1} = N_{i, 1} = \frac{X_{2, \eta} N_{i, \xi} - X_{2, \xi} N_{i, \eta}}{JAC}$$

$$N_{i, X_2} = N_{i, 2} = \frac{X_{1, \xi} N_{i, \eta} - X_{1, \eta} N_{i, \xi}}{JAC}$$



gdzie współrzędne transformowane:

$$X_{1,\xi} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} X_{1i}$$

$$X_{2,\xi} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} X_{2i}$$

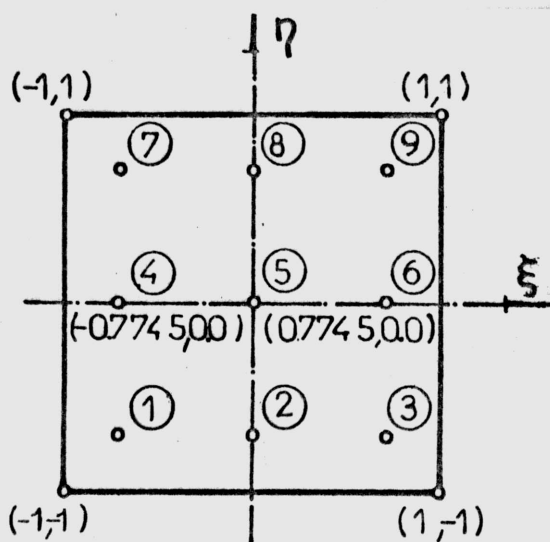
$$X_{1,\eta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} X_{1i}$$

$$X_{2,\eta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} X_{2i}$$

oraz Jakobian przejścia od układu  $(X_1, X_2)$  do układu  $(\xi, \eta)$  :

$$JAC = X_{1,\xi} X_{2,\eta} - X_{1,\eta} X_{2,\xi}$$

W pracy całkowanie przeprowadza się metodą Gaussa. Dla obranych dziesięciu punktów całkowania /rys.4.2./ wartości pochodnych funkcji kształtu podaje tab.4.1.



$N(I, J, K)$   $N_{IJK}$

K=1	POCHODNA PO
	K=2
NUMER WĘZŁA	
NUMER PUNKTU GAUSSA	

Tab.4.1.

1	$N_{1,1}$	$N_{1,2}$	$N_{2,1}$	$N_{2,2}$	$N_{3,1}$	$N_{3,2}$	$N_{4,1}$	$N_{4,2}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-0.4436	-0.4436	0.4436	-0.0563	0.0563	0.0563	-0.0563	0.4436
2	-0.4436	-0.25	0.4436	-0.25	0.0563	0.25	-0.0563	0.25
3	-0.4436	-0.0563	0.4436	-0.4436	0.0563	0.4436	-0.0563	0.0563
4	-0.25	-0.4436	0.25	-0.0563	0.25	0.0563	-0.25	0.4436
5	-0.25	-0.25	0.25	-0.25	0.25	0.25	-0.25	0.25
6	-0.25	-0.0563	0.25	-0.4436	0.25	0.4436	-0.25	0.0563
7	-0.0563	-0.4436	0.0563	-0.0563	0.4436	0.0563	-0.4436	0.4436
8	-0.0563	-0.25	0.0563	-0.25	0.4436	0.25	-0.4436	0.25
9	-0.0563	-0.0563	0.0563	-0.4436	0.4436	0.4436	-0.4436	0.0563

Pochodne  $N_{IJK}$  tworzą macierz odkształceń  $[B]$ . Pełną postać transformowanej macierzy  $[B]^T$  dla czworokąta z dziewięcioma punktami Gaussa podaje tab. 4.2.

Tab.4.2.

$N_{111}$	0	$N_{112}$	$N_{121}$	0	$N_{122}$	$N_{131}$	0	$N_{132}$	$N_{141}$	0	$N_{142}$
0	$N_{112}$	$N_{111}$	0	$N_{122}$	$N_{121}$	0	$N_{132}$	$N_{131}$	0	$N_{142}$	$N_{141}$
$N_{211}$	0	$N_{212}$	$N_{221}$	0	$N_{222}$	$N_{231}$	0	$N_{232}$	$N_{241}$	0	$N_{242}$
0	$N_{212}$	$N_{211}$	0	$N_{222}$	$N_{221}$	0	$N_{232}$	$N_{231}$	0	$N_{242}$	$N_{241}$
$N_{311}$	0	$N_{312}$	$N_{321}$	0	$N_{322}$	$N_{331}$	0	$N_{332}$	$N_{341}$	0	$N_{342}$
0	$N_{312}$	$N_{311}$	0	$N_{322}$	$N_{321}$	0	$N_{332}$	$N_{331}$	0	$N_{342}$	$N_{341}$
$N_{411}$	0	$N_{412}$	$N_{421}$	0	$N_{422}$	$N_{431}$	0	$N_{432}$	$N_{441}$	0	$N_{442}$
0	$N_{412}$	$N_{411}$	0	$N_{422}$	$N_{421}$	0	$N_{432}$	$N_{431}$	0	$N_{442}$	$N_{441}$
$N_{511}$	0	$N_{512}$	$N_{521}$	0	$N_{522}$	$N_{531}$	0	$N_{532}$	$N_{541}$	0	$N_{542}$
0	$N_{512}$	$N_{511}$	0	$N_{522}$	$N_{521}$	0	$N_{532}$	$N_{531}$	0	$N_{542}$	$N_{541}$
$N_{611}$	0	$N_{612}$	$N_{621}$	0	$N_{622}$	$N_{631}$	0	$N_{632}$	$N_{641}$	0	$N_{642}$
0	$N_{612}$	$N_{611}$	0	$N_{622}$	$N_{621}$	0	$N_{632}$	$N_{631}$	0	$N_{642}$	$N_{641}$
$N_{711}$	0	$N_{712}$	$N_{721}$	0	$N_{722}$	$N_{731}$	0	$N_{732}$	$N_{741}$	0	$N_{742}$
0	$N_{712}$	$N_{711}$	0	$N_{722}$	$N_{721}$	0	$N_{732}$	$N_{731}$	0	$N_{742}$	$N_{741}$
$N_{811}$	0	$N_{812}$	$N_{821}$	0	$N_{822}$	$N_{831}$	0	$N_{832}$	$N_{841}$	0	$N_{842}$
0	$N_{812}$	$N_{811}$	0	$N_{822}$	$N_{821}$	0	$N_{832}$	$N_{831}$	0	$N_{842}$	$N_{841}$
$N_{911}$	0	$N_{912}$	$N_{921}$	0	$N_{922}$	$N_{931}$	0	$N_{932}$	$N_{941}$	0	$N_{942}$
0	$N_{912}$	$N_{911}$	0	$N_{922}$	$N_{921}$	0	$N_{932}$	$N_{931}$	0	$N_{942}$	$N_{941}$

Celowym jest obliczanie tylko niezerowych wyrazów macierzy [B] i jednokrotnie wartości wyrazów powtarzających się. Wymiar macierzy w takim przypadku ulegnie zmianie. Macierz o dwunastu wierszach i osiemnastu kolumnach stanie się macierzą o dziewięciu wierszami i ośmiu kolumnami.

Przyporządkowanie elementów tabeli 4.2. wyrazom macierzy [B] jest następujące: pierwszy wiersz macierzy [B] stanowią wyrazy niezerowe dwóch pierwszych wierszy tabeli  $N_{IJK}$ , następny wiersz macierzy [B] wyrazy niezerowe dwóch kolejnych wierszy  $N_{IJK}$  itd:

$$B(1,1) = N_{111}, B(1,2) = N_{112} \dots\dots B(1,8) = N_{142}$$

$$B(2,1) = N_{211}, B(2,2) = N_{212} \dots\dots B(2,8) = N_{242}$$

$$B(9,1) = N_{911}, B(9,2) = N_{912} \dots\dots B(9,8) = N_{942}$$

W skład charakterystyk rozważanego elementu wchodzi również wektor iloczynów  $WJ(I)$  Jakobianu  $JAC$  przekształcenia układu współrzędnych  $(X_1, X_2)$  na układ  $(\xi, \eta)$  oraz wartości wagowych  $W(I)$  dla obranych  $I = 9$  punktów całkowania. Całkowanie przeprowadzono na podstawie przybliżonej kwadratury określonej wzorem:

$$C = \int_{-1}^{+1} f(\xi) ds = \sum_{j=1}^m w_j f(\xi_j)$$

gdzie  $w_j$  oraz  $\xi_j$  są to odpowiednio wagi i współrzędne punktów Gaussa. Całkowanie funkcji  $f(X_1, X_2)$  w elemencie czworokątnym /rys.4.2/ polega na wyrażeniu funkcji we współrzędnych krzywoliniowych  $(\xi, \eta)$  i wykonania całkowania dwukrotnego w elemencie kwadratu. Jeśli funkcję podcałkową  $f(X_1, X_2)$  we współrzędnych  $(\xi, \eta)$  oznaczy się przez  $F(\xi, \eta)$  to przez dwukrotne zastosowanie kwadratury Gaussa dla trzech punktów całkowania w każdym kierunku, wyrażenie na poszukiwaną wartość całki ma następującą postać:

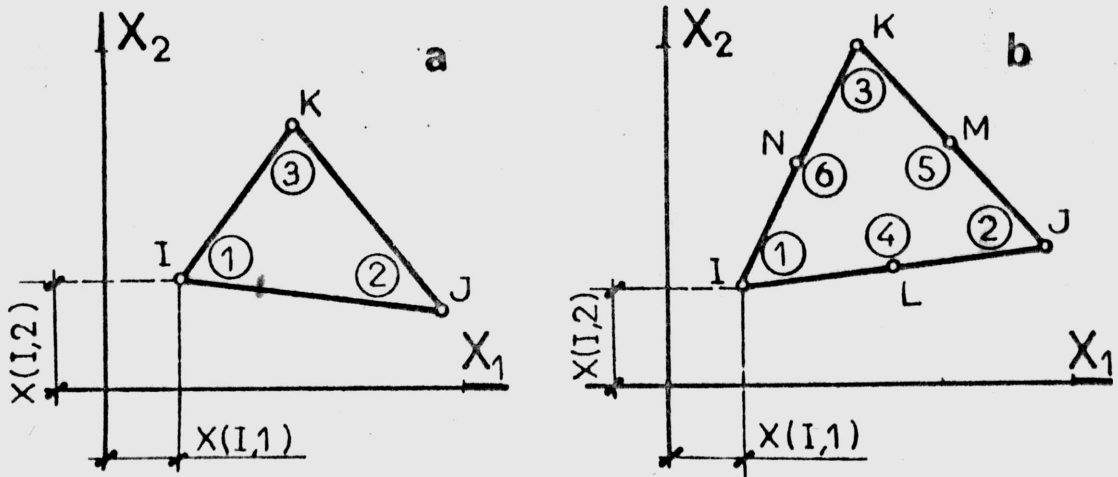
$$C = \int_{-1}^{+1} d\xi \int_{-1}^{+1} d\eta F(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_i w_j F(\xi_i, \eta_j)$$

Liczba punktów całkowania nie musi być taka sama w każdym z kierunków. Po przetestowaniu  $I$  /dla  $I = 1, 2, 3, 4$ / punktów całkowania

stwierdzono, że przyjęcie większej niż  $I = 3$  liczby punktów nie zwiększa dokładności obliczeń.

#### 4.3. Element trójkątny

Rozważono element trójkątny o trzech węzłach rys.4.3a. Do rozwiązania PROBLEMU 2 wykorzystano również element trójkątny o sześciu węzłach rys.4.3b.



Rys.4.3. Element trójkątny o trzech i sześciu węzłach.

W prostokątnym układzie współrzędnych  $(X_1, X_2)$  węzły elementu mają następujące współrzędne:  $X(I, K)$  gdzie:  $I$  jest numerem węzła,  $K = 1$  oznacza współrzędną w kierunku osi  $X_1$ ,  $K = 2$  współrzędną w kierunku osi  $X_2$ .

Przemieszczenia węzłów określa wektor:

$$\{U(I)\} = \begin{Bmatrix} U(I,1) \\ U(I,2) \end{Bmatrix}$$

Wektor przemieszczeń elementu jest zależny od przemieszczeń węzłów  $I, J, K$ :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U(I) \\ U(J) \\ U(K) \end{Bmatrix}$$

Przemieszczenia dowolnego punktu elementu w zależności od sześciu

składowych wektora  $\{U\}$  można zapisać w następującej postaci standardowej:

$$\begin{Bmatrix} U(1) \\ U(2) \end{Bmatrix} = [IN(I), IN(J), IN(K)] \{U\}$$

gdzie:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad N(I) = \frac{1}{2P} (A(I) + B(J)X(1) + C(K)X(2))$$

$P$  - pole trójkąta,  $X(1) = X_1$ ,  $X(2) = X_2$

Zależność tę otrzymuje się przyjmując, że przemieszczenia w dowolnym punkcie elementu są liniową funkcją współrzędnych jego węzłów:

$$U(1) = \alpha_1 + \alpha_2 X(1) + \alpha_3 X(2)$$

$$U(2) = \alpha_4 + \alpha_5 X(1) + \alpha_6 X(2)$$

Nieznane wartości  $\alpha_i$  określa się z układu sześciu równań przyjmując jednostkowe przemieszczenia i podstawiając współrzędne węzłów elementu do wyrażen określających przemieszczenia tych węzłów:

$$U(I,1) = \alpha_1 + \alpha_2 X(I,1) + \alpha_3 X(I,2)$$

$$U(J,1) = \alpha_1 + \alpha_2 X(J,1) + \alpha_3 X(J,2)$$

$$U(K,1) = \alpha_1 + \alpha_2 X(K,1) + \alpha_3 X(K,2)$$

$$U(I,2) = \alpha_4 + \alpha_5 X(I,1) + \alpha_6 X(I,2)$$

$$U(J,2) = \alpha_4 + \alpha_5 X(J,1) + \alpha_6 X(J,2)$$

$$U(K,2) = \alpha_4 + \alpha_5 X(K,1) + \alpha_6 X(K,2)$$

Określając składowe przemieszczenia dowolnego punktu elementu wyrażeniem

$$U(K) = \frac{1}{2P} \left( \sum_{L=I,J,K} (A(L) + B(L)X(1) + C(L)X(2)) \right)$$

gdzie:  $A(L) = X(J,1)X(K,2) - X(K,1)X(J,2)$

$$B(L) = X(J,2) - X(K,2)$$

$$C(L) = X(K,1) - X(J,1)$$

macierz odkształceń  $[B]$  elementu zapisze się następująco:

$$[B] = \frac{1}{2P} \begin{bmatrix} B(I) & 0 & B(J) & 0 & B(K) & 0 \\ 0 & C(I) & 0 & C(J) & 0 & C(K) \\ C(I) & B(I) & C(J) & B(J) & C(K) & B(K) \end{bmatrix}$$

Oblicza się niezerowe wyrazy macierzy a wyrazy powstające się tylko jednokrotnie.

Prowadzi to do zmniejszenia wymiarów macierzy [B]. Po przyporządkowaniu:

$$B(1) = B(I), \quad B(2) = C(I), \quad B(3) = B(J), \quad B(4) = C(J), \quad B(5) = B(K), \\ B(6) = C(K);$$

Macierz o osiemnastu wyrazach została zastąpiona wektorem o sześciu wyrazach. Siódmą składową wektora stanowi pole trójkąta:

$$B(7) = P.$$

$$[B] = \frac{1}{2B(6)} \begin{bmatrix} B(1) & 0 & B(3) & 0 & B(5) & 0 \\ 0 & B(2) & 0 & B(4) & 0 & B(6) \\ B(2) & B(1) & B(4) & B(3) & B(6) & B(5) \end{bmatrix}$$

Wektor odkształceń elementu:  $\{\epsilon\} = [B]\{U\}$

Chcąc określić wektor naprężeń elementu:  $\{\sigma\} = [S]\{U\}$  należy określić macierz naprężeń [S].

$$[S] = [D][B]$$

gdzie: [D] jest macierzą współczynników materiałowych.

Dla płaskiego stanu odkształcenia:

$$[D] = D(4) \begin{bmatrix} D(1) & D(2) & 0 \\ D(2) & D(1) & 0 \\ 0 & 0 & D(3) \end{bmatrix}$$

$$[S] = \frac{D(4)}{2B(7)} \begin{bmatrix} D(1) & D(2) & 0 & B(1) & 0 & B(3) & 0 & B(5) & 0 \\ D(2) & D(1) & 0 & 0 & B(2) & 0 & B(4) & 0 & B(6) \\ 0 & 0 & D(3) & B(2) & B(1) & B(4) & B(3) & B(6) & B(5) \end{bmatrix}$$

$$[S] = \frac{D(3)}{2B(6)} [S]$$

Macierz sztywności elementu o grubości H wynosi:

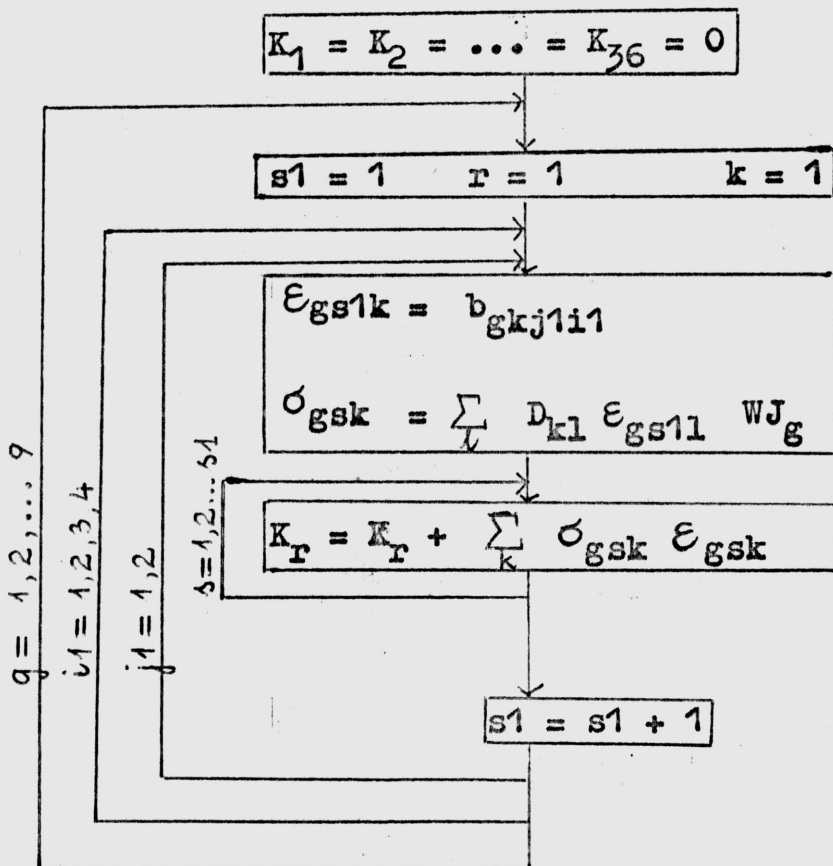
$$[K] = [B] [S] HP$$

po podstawieniu:

$$[K] = D(3) H B(6) \begin{bmatrix} B(1) & 0 & B(2) \\ 0 & B(2) & B(1) \\ B(3) & 0 & B(4) \\ 0 & B(4) & B(3) \\ B(5) & 0 & B(6) \\ 0 & B(6) & B(5) \end{bmatrix} [S]$$

Macierz współczynników materiałowych  $[D]$  obliczana jest w zależności od danych dla rozważanego modelu fizycznego.

Schemat blokowy tworzenia macierzy sztywności  $[K]$   
(wskaźniki dla elementu czworokątnego)



$$K_{j1i1j1} = \sum_{g,k,l} W J_g b_{gkj1i1} D_{kl} b_{glj1}$$

Porządek ustawienia wyrazów macierzy sztywności [K]  
(dla elementu czworokątnego)

$K_1$	$K_2$	$K_4$	$K_7$	$K_{11}$	$K_{16}$	$K_{22}$	$K_{29}$
	$K_3$	$K_5$	$K_8$	$K_{12}$	$K_{17}$	$K_{23}$	$K_{30}$
		$K_6$	$K_9$	$K_{13}$	$K_{18}$	$K_{24}$	$K_{31}$
			$K_{10}$	$K_{14}$	$K_{19}$	$K_{25}$	$K_{32}$
				$K_{15}$	$K_{20}$	$K_{26}$	$K_{33}$
					$K_{21}$	$K_{27}$	$K_{34}$
						$K_{28}$	$K_{35}$
							$K_{36}$

Ustawienie wyrazów macierzy sztywności dla elementu trójkątnego jest podobne. Macierz sztywności elementu i układu elementów obliczana jest jednokrotnie.



## R O Z D Z I A Ł 5

## ANALIZA NUMERYCZNA

5.1. Przebieg obliczeń

Obliczenia zrealizowano za pomocą kilku programów. Podstawą do obliczeń na EMC ZAM-41 był program #PROBLEM PŁASKI napisany w języku SAKO przez Zespół prof. J.Szmeltera. Możliwości tego programu podano w opisie programów dla ZAM-41 oraz przy omawianiu systemu KM-74 w podrozdziale 5.3.

Program # PROBLEM PŁASKI pozwala określić stan odkształcenia i naprężenia w tarczy o znanej grubości, danym module odkształcenia postaciowego i liczbie Poissona, obciążonej siłami skupionymi, podpartej punktowo oraz modelowanej przez ciało liniowo-sprężyste. W celu przeprowadzenia rozwiązania dla tarczy opisanej modelem ciała nieliniowo-sprężystego i liniowo-lepko-sprężystego zbudowano program # SPR-LIN-NLIN-LEP. Program # SPR-LIN-NLIN-LEP wykorzystuje podprogramy programu # PROBLEM PŁASKI oraz podprogramy autorki. W rozdziale 3 i 4 podano zapis wyrażen na kształtu, macierz odkształceń, macierz naprężeń, macierz sztywności elementu oraz wyrażenia na odkształcenia i naprężenia. Wyrażenia te były podstawą do budowy przez autorkę podprogramów: # MOE, #MNE, #MSE, #NAPR, #ODKSZT. Zbudowano również podprogram # APROX służący do aproksymacji krzywej otrzymanej z wyników badań przy pomocy szeregów ortogonalnych lub szeregów Czebyszewa. Programy # PROBLEM PŁASKI i # SPR-LIN-NLIN-LEP wykorzystują 15 K pamięci operacyjnej oraz taśmową pamięć zewnętrzną.

Obliczenia na EMC IRIS 80 przeprowadzono przy pomocy adaptowanego programu # LQ3F. Program zapisany w FORTRANIE wymaga 32 K pamięci operacyjnej oraz zewnętrzną pamięć dyskową. Adaptacja LQ3F wymagała zgodnie z algorytmem podanym w rozdz. 3. wprowadzenia podprogramów # NAPR, # ODKSZT, # APROX, uzupełniającego podprogramu czytania danych oraz zastosowania procedury iteracyjnej.

## 5.2. Podstawowe problemy numeryczne

Z trzech etapów rozwiązania zagadnień MES: tworzenia charakterystyk elementu, składania macierzy sztywności dla zbioru elementów oraz rozwiązanie układu równań równowagi - etap trzeci stwarza podstawowe problemy numeryczne. Rozwiązanie układu równań równowagi, szczególnie w procesie iteracyjnym, wymaga ekonomicznego zapisu algorytmu rozwiązania. Wykorzystano podprogram zbudowany na podstawie algorytmu opisanego w [47] dla programu PROBLEM PŁASKI, zrealizowanego na EMC ZAM-41 dla 2000 stopni swobody. Przy założeniu, że znane są macierze sztywności elementów podprogram pozwala na rozwiązanie dowolnego zagadnienia równowagi MES. Algorytm rozwiązania układu równań stanowią równania "metody frontальной" opisanej przez B.Ironsa dla układu równań, których macierz jest symetryczna i dodatnio określona /jak to ma miejsce w MES/. Zaletą metody frontальной jest to, że macierzy układu nie trzeba zapamiętywać w całości a jedynie niewielki jej fragment. Dzięki wymienionej zalecie rozwiązanie układu równań dla kilku wariantów obciążeń i przemieszczeń przebiega kilkadziesiąt razy szybciej niż samo przekształcenie macierzy układu. Testy numeryczne wykazały, że czas rozwiązania układu równań zespołu elementów zależy od kolejności ich numeracji. Można przyspieszyć rozwiązanie numerując elementy rozważanego prostokątnego obszaru w kierunku mniejszego wymiaru. "Metoda frontальная" jest również wykorzystana do rozwiązania układu równań MES w programie # LQ3F co, między innymi, pozwoliło zaadaptować ten program do procesu iteracyjnego. Stosowany proces iteracyjny jest najekonomiczniejszy /ze względu na czas pracy EMC/ ponieważ przeprowadzany jest dla jednego tylko obciążenia. Wadą procesu iteracyjnego jest brak pewności czy rozwiązanie jest zbieżne do dokładnego [38] przy czym konieczne jest każdorazowe przeprowadzenie dyskusji otrzymanych wyników.

Problemy numeryczne wynikające w trakcie ustalania charakterystyk elementu związane są głównie z całkowaniem numerycznym. Koniecznym warunkiem efektywności bardzo czasochłonnego procesu

całkowania jest ustalenie minimalnej wystarczającej liczby punktów całkowania Gaussa. Jak wspomniano w rozdziale 4 przeprowadzone testy numeryczne pozwoliły ustalić trzy punkty całkowania w każdym kierunku zapewniające dokładność obliczeń charakterystyk dla elementu czworokątnego.

Uzyskanie wyników obliczeń w postaci map przemieszczeń, naprężeń i odkształceń możliwe jest przy korzystaniu z #PROBLEM PIASKI. Korzystając z #LQZF można uzyskać wydruki wyników w postaci wykresów. Jednakże adaptowane przez autorkę programy nie mają takich możliwości i konieczna jest analiza wyników oraz pracochłonne wykonanie wykresów na podstawie tabelarycznych wydruków.

### 5.3. Charakterystyka istniejących systemów obliczeniowych

Duże systemy obliczeniowe powstały w oparciu o autokody ułatwiające i skracające skomplikowane i pracochłonne programowanie [4]. Szczególnie użyteczne do programowania obliczeń naukowo technicznych okazały się obok języków FORTRAN i ALGOL rozszerzone języki programowania takie jak np. ICETTRAN, SAPROTRAN, GENETTRAN oraz języki problemowo zorientowane takie jak np. STRESS, COGO, STRUDL, SEPOL, BRIDGE, OPTECH i inne.

Do dużych systemów tzn. takich, które mają co najmniej kilka podsystemów, własny język programowania - rozszerzony język algorytmiczny oraz język do opisu rozkazów inżynierskich czyli rozkazów języka problemowo zorientowanego - zaliczyć można:

- amerykańskie ICES /Integrated Civil Engineering System/ oraz POLO /Problem Oriented Language Organizer/,
- brytyjski GENESYS /GENERal Engineering SYSTEM/,
- czeskosłowacki SAPRO /System Automatizovaného PROjektování/.

Jedną z największych zalet omawianych systemów jest ich kompleksowość. W ramach obliczeń przeprowadzanych dla jednego zagadnienia można korzystać z kilku podsystemów. System zapewnia wewnętrzną transmisję danych nie tylko pomiędzy programami jednego podsystemu, lecz również pomiędzy podsystemami.

Informacja o elementach	Pręty	Belki	Płaski stan naprężenia	Płaski stan odkształcenia	Płyty	Powłoki	Problemy trójwymiarowe
1	2	3	4	5	6	7	8
Liczba dostępnych typów element.	1	1	1	1	1	1	elementy i nadelementy
Liczba węzłów w elemencie	2	2	4 i 3	4 i 3	4	4 i 2	8 do 20
Liczba stopni swobody elementu	6	12	8 i 6	8 i 6	12	6 do 24	16 do 60
Model fizyczny ciała	ciało sprężyste izotropowe						
Kształt elementu	prostoliniowy	prostoliniowy	prostoliniowy	prostoliniowy	prostoliniowy	krzywoliniowy	krzywoliniowy
Przekrój elementu	dowolny wypukły						
Warunki brzegowe	dowolne przemieszczenia						
Dane w przekroju	powierzchnia przekroju	powierzchnia przekroju $I_x, I_y, I_s$	powierzchnia grubość	powierzchnia grubość	powierzchnia grubość	powierzchnia grubość	powierzchnia grubość

1	2	3	4	5	6	7	8
Dane materia- łowe	G,	G,	G, $E_i$ ,	G, $E_i$ ,	G,	G,	G,
Obciążenie zewnętrzne	Siły uogólnione w węzłach						
Naprężenia początkowe	Można zadawać jedynie przemieszczenia początkowe w węzłach						
Macierz sztywności	Dostosowana	Dostosowana	Dostosowana	Niedostosowana			
Kod programu	Język SAKO, SAS						
EMC	ZAM-41						
Wymagania pa- mięci opera- cyjnej	15800 15 K						
Możliwość re- zerwacji dyna- micznej	BRAK						
Wymagania pa- mięci zewne- trznej	TAŚMOWA BĘBNOWA						
Sposoby WEJ- ŚCIA WYJŚCIA	TP TM Dane WE-WY mogą być generowane przez systemy TP, PM, DW						
Wykrywanie błędów	Istnieją dwa testy wykrywające błędy: pierwszy na etapie czyta- nia danych drugi na etapie liczenia macierzy sztywności.						

Spośród wymienionych wyżej systemów został importowany do kraju amerykański ICES. Jest on wykorzystywany w ośrodkach posiadających komputery serii IBM 360. Częściowo wykorzystywany jest również w ośrodkach wyposażonych w komputery ICL importowany norweski system SESAM.

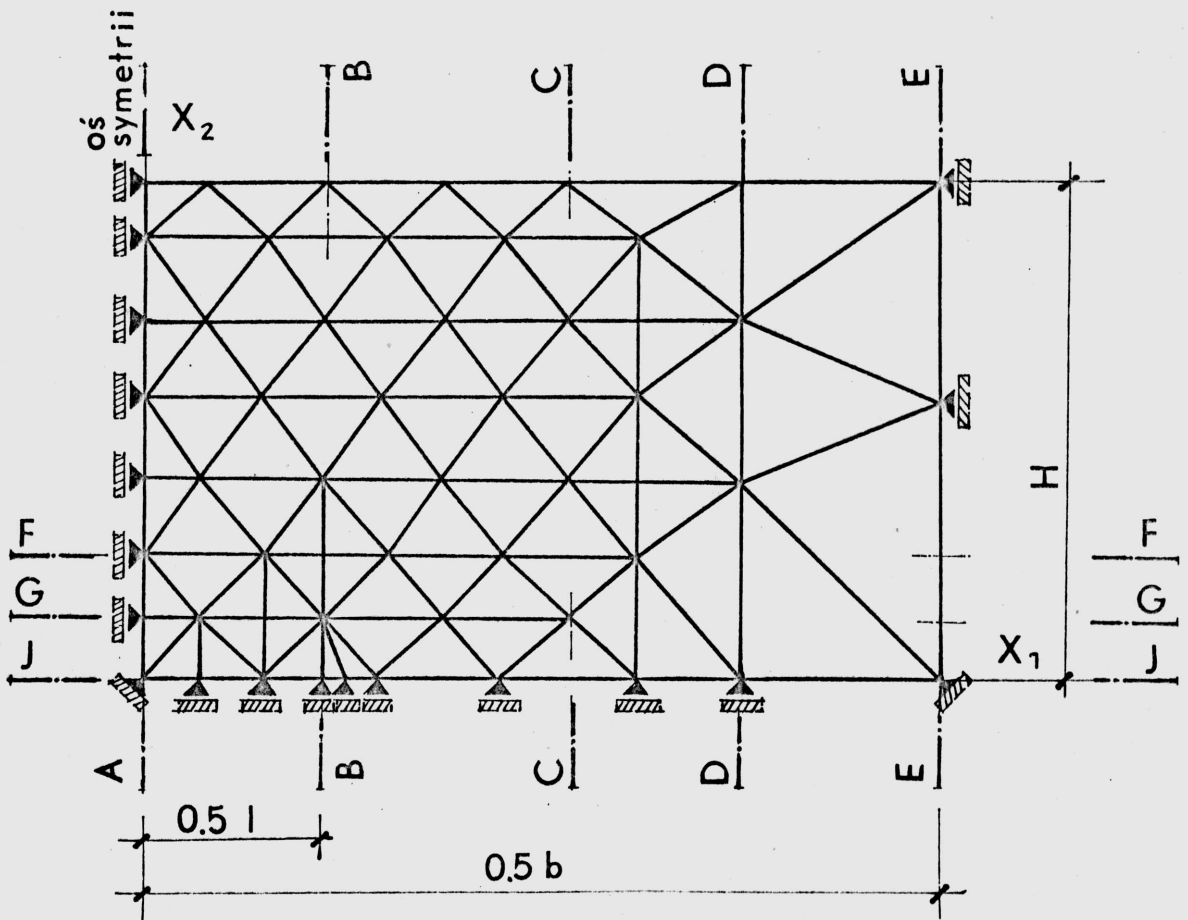
Przystępując do rozwiązania zadania postawionego w pracy interesowano się szczególnie istniejącymi systemami, w których podstawą analizy numerycznej jest metoda elementów skończonych. Jedyny w tym okresie opracowany w Polsce system KM-74 - system opracowany przez zespół prof.dr inż. Jana Szmeltera z Katedry Mechaniki Teoretycznej i Wytrzymałości Materiałów Wojskowej Akademii Technicznej - dostępny był dla użytkowników EMC ZAM-41. Dokumentacja KM-74 zawierała instrukcje programów wraz z komentarzami i tabulogramami. Możliwości systemu sprowadzały się do rozwiązania zadań statycznych i dynamicznych liniowej teorii sprężystości. Szczegółowo możliwości systemu podaje tab. 5.1. Uruchamiany przez autorkę program w języku SAKO dla EMC ZAM-41 rozwiązujący zadania nieliniowej teorii sprężystości nie wszedł w skład KM-74. Powodem było rozpoczęcie adaptacji systemu do możliwości EMC serii ODRA 1300. Aktualnie system rozszerzony i wzbogacony o nowe możliwości jest dostępny użytkownikom EMC serii ODRA 1300.

W opracowaniu Bauera J. i autorki [4] opisano około dwudziestu systemów obliczeniowych zbudowanych w ośrodkach zagranicznych. Podano nazwę systemu, ośrodek opracowujący dokumentację, metody analizy, rozwiązywane problemy oraz użytkowników. Przy dużych możliwościach wspólną cechą systemów, istotną dla autorki, była niemożność skorzystania z nich. Dlatego zdecydowano się na przeprowadzenie obliczeń mniej doskonałym programem własnym oraz programami # PROBLEME PLASKI /z systemu KM-74/ i # LΦ3F [15]. Program LΦ3F /Elements Finis à 3types d'éléments à résolution Frontale/ nie wchodzi w skład żadnego z systemów. Program został napisany przez Zespół Laboratoire de Mecanique des Terrains Houillers z Ecole des Mines de Nancy. Za pomocą programu można rozwiązać zagadnienia dwuwymiarowe dla modelu ciała liniowo-sprężystego. Przyjętymi do analizy elementami, poza wykorzystanymi przez autorkę elementami trójkątnymi, są elementy prętowe o trzech węzłach i elementy łączące o sześciu węzłach. Program został zapisany w FORTRANIE na EMC IRIS 80.

## R O Z D Z I A Ł 6

DYSKRETYZACJA PÓŁPŁASZCZYZNY Poddanej WYBIERANIU  
ORAZ WYNIKI OBLICZEŃ6.1. Kształt i wymiary zdyskretyzowanej półpłaszczyzny

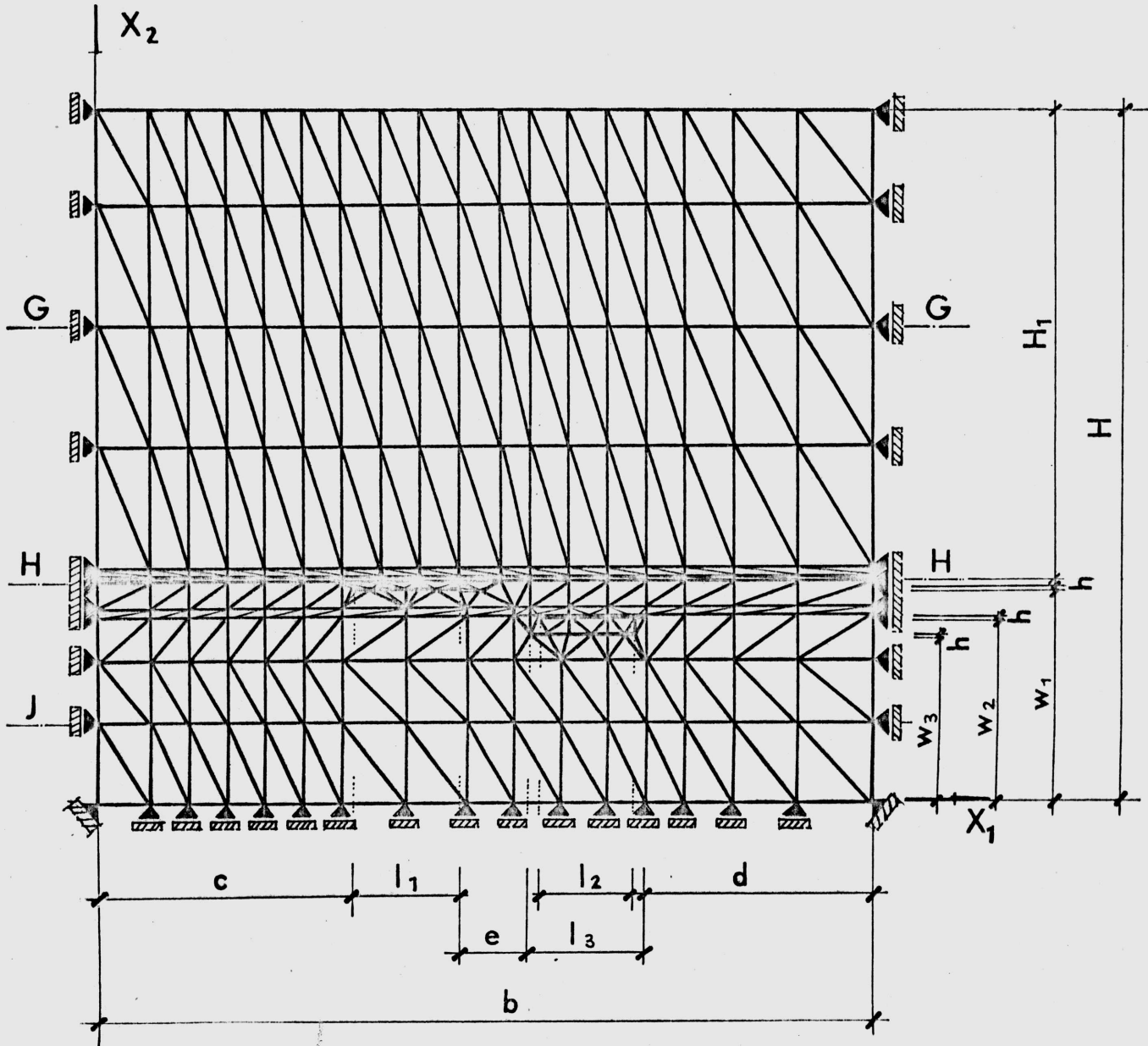
Kształt przyjętego do analizy obszaru półpłaszczyzny poddanej wybieraniu zależy od budowy geologicznej górotworu i rozmieszczenia wyrobisk. Najczęściej rozważa się obszar prostokątny tak jak w PROBLEMIE 1 i PROBLEMIE 2 /rys. 6.1. i rys.6.2./. Rzadziej przyjmuje się kształt trapezowy lub inny wieloboczny [16].



Rys.6.1. Dyskretyzacja i podział na elementy - PROBLEM 1.



Wymiary rozważanego obszaru w kierunku osi  $X_1$  oraz osi  $X_2$  ustala się zwykle za pomocą badań numerycznych. Jako kryterium odpowiedniego doboru wymiarów przyjmuje się kryterium przemieszczeń lub kryterium naprężeń lub oba te kryteria równocześnie.



Rys.6.2. Dyskretyzacja i podział na elementy - PROBLEM 2.

Spełnienie kryterium przemieszczeń polega na znalezieniu takich wymiarów rozważanego obszaru górotworu, których zwiększenie nie powoduje już wzrostu wartości przemieszczeń brzegowych /przemieszczeń wywołanych obciążeniem górnictwem/. M.Gryczmański, omawiając to kryterium w zastosowaniu do zagadnienia dyskretyzacji uwarstwionego podłoża gruntowego obciążonego budowlą, zwrócił



uwagę na warunek uzyskania realnego /nie przesadnie dużego obszaru/. Warunkiem tym jest analiza podłoża wałkiego. W pracy, ustalając wymiary  $H$ ,  $b$  zarówno dla PROBLEMU 1 jak i PROBLEMU 2, spełniono ten warunek. Spełnienie kryterium naprężeń polega na znalezieniu wymiarów rozważanego obszaru, dla którego wpływ niedokładności warunków na brzegu na stan naprężenia jest mały i może być pominięty w pewnym wydzielonym podobszarze. Istotny dla spełnienia tego kryterium jest odpowiedni dobór rodzaju podpór w węzłach na brzegu rozważanego obszaru. W rozwiązaniach przeprowadzonych dla PROBLEMU 1 i 2 za najodpowiedniejsze uważa się przyjęcie w węzłach na brzegu podpór odbierających tylko jeden stopień swobody.

Właściwy dobór kształtu i wymiarów zdyskretyzowanego obszaru półpłaszczyzny poddanej wybieraniu jest ważny z powodu konieczności ustalenia ekonomicznego schematu obliczeniowego zadania. Liczba elementów i węzłów zależy od wymiarów obszaru. Stwierdzono, że dla dokładności obliczeń, analiza wpływu zaburzeń w stanach odkształcenia i naprężenia, spowodowanych warunkami na brzegu, jest bardziej celowa niż zwiększanie wymiarów. Korzystnym jest sprawdzenie naprężeń i kryterium odkształceń programem dla zadania, dla którego istnieje rozwiązanie analityczne. Sprawdzenie przy pomocy zadania Flamanta dla obciążonego uwarstwionego podłoża przeprowadził M.Gryczmański [22], który podał propozycje stosunków krawędzi rozważanego obszaru dla błędów związanych z przybliżeniem warunków brzegowych równych 1 % oraz 2 %. Według Gryczmańskiego wyniki analizy dla nieważkiego podłoża liniowo-sprężystego mogą być przeniesione na modele wałkie i nieliniowe; proponowane wymiary odnoszą się do podłoża dowolnie uwarstwionego, gdyż rozkłady przemieszczeń i naprężeń na brzegu w podłożu uwarstwionym i jednorodnym różnią się od siebie nieznacznie. Badania [22] wykazały, że dla modeli nieliniowych, dla których uwzględniono ciężar własny i uwarstwienie podłoża, zanik przemieszczeń i naprężeń jest intensywniejszy a więc i błędy wynikłe z przyjętych wymiarów powinny być odpowiednio mniejsze. Dyskusyjnym wydaje się być uogólnianie propozycji wymiarów na wszystkie zadania przy złożoności charakterystyk podłoża i obciążenia. Propozycje Gryczmańskiego mogą być cenną wskazówką do indywidualnego testowania każdego zadania brzegowego.

Ustalając do analizy wymiary obszarów PROBLEMU 1 i PROBLEMU 2 /rys.6.1. , 6.2./ dla danych fizycznych górotworu, geometrii wyrobisk oraz głębokości i sposobu eksploatacji kierowano się podstawowymi wiadomościami z mechaniki górotworu dotyczącymi zasięgu wpływu eksploatacji. W przypadku PROBLEMU 1, w którym dany jest jednorodny jednowarstwowy nadkład, eksploatacja wyrobiska o szerokości  $2l$  na głębokości  $H$  pozwala oczekiwać regularnej niecki osiadania na powierzchni. Przyjęta wartość  $b=4l$  /w przypadku testowania modelu ciała liniowo-sprężystego/ dla warunków podparcia jak na rys. 6.1. jest wystarczająca. Wartość  $b=4l$  przyjęli również, w rozważanym w pracy [21] zadaniu, Getzler Z., Gellert M. i Eitan R. Przy zwiększeniu wartości  $b$  do  $b=5l$  naprężenia główne w obszarze przyległym do wyrobiska zmieniają się o 3 % co przyjmuje się za wartość pomijalnie małą. Nie zmieniając warunków podparcia dla obszaru górotworu modelowanego przez ciała nieliniowo-sprężyste i lepko-sprężyste do analizy przyjęto te same wymiary co dla ciała liniowo-sprężystego. Wykorzystano wyniki badań wskazujących, że zanik przemieszczeń i naprężeń w tych modelach jest intensywniejszy a więc i błędy powinny być mniejsze.

W przyjętych przez innych autorów /rozdział 1/ schematach zdyskretyzowanej półpłaszczyzny wymiary w kierunkach osi  $X_1$  i  $X_2$  są różne i nie przeprowadza się szczegółowej analizy <sup>wplywu</sup> tych wymiarów na wyniki obliczeń. Często też dyskretyzację dzieli się na dwa etapy, z których pierwszy służy do ustalenia wartości wielkości brzegowych przyjmowanych do obliczeń w drugim etapie /dla obszaru będącego podobszarem przyjętego na wstępie/. Testy numeryczne, za pomocą kryterium przemieszczeń, przeprowadzone dla PROBLEMU 2 obejmowały ustalenie wartości  $c$ ,  $d$  oraz  $w_3$  /rys.6.2./. Znane były głębokość zalegania wyrobisk, ich szerokość oraz wzajemne usytuowanie. W odróżnieniu od PROBLEMU 1 zdecydowano się rozszerzyć rozważany obszar w głąb górotworu poniżej spągu najbliższego położonego wyrobiska trzeciego w celu obserwacji mogącego ewentualnie wystąpić zjawiska wypierania spągów wyrobisk. Przyjęcie  $w_3 = 1/3 H_1$  dawało już wartości zerowe przemieszczeń pionowych dla  $X_2=0$ . W PROBLEMIE 2 nie istnieje możliwość wykorzystania symetrii tak jak w PROBLEMIE 1. Dla trzech rozpatrywanych wyrobisk głębinyowych przyjęty wstępnie zasięg wpływu eksploatacji  $b = 4(l_1 + e + l_3)$  okazał

się za duży. Wymagał ponadto uwzględnienia, występującego w odległości  $d$  od wyrobiska trzeciego, prawie pionowego uskoku geologicznego. Uskok ten przy przyjętym założeniu spójności warstw na kontakcie i nie uwzględnieniu w rozważaniach elementów z węzłami podwójnymi umożliwiającymi poślizgi jest trudny do modelowania. Przyjęcie  $3l_1 > c, d > 2l_1$  oraz następujących warunków podparcia: dla  $X_1=0$ ,  $X_1=b$  umożliwiającą przemieszczenia węzłów w kierunku osi  $X_2$ , dla  $X_2=0$  umożliwiającą przemieszczenia węzłów w kierunku osi  $X_1$ , spełnia kryterium przemieszczeń. Na przykładzie PROBLEMU 2, w którym można zauważyć złożoność zjawisk geotechnicznych, widać jak ważną jest dyskretyzacja indywidualna dla każdego zadania.

## 6.2. Dyskretyzacja racjonalna; podział na elementy

Podstawowym kryterium racjonalnej dyskretyzacji i racjonalnego podziału na elementy jest uzyskanie żądanej dokładności wyników dla możliwie najmniejszej liczby węzłów. Liczba węzłów determinuje wymiary macierzy układu równań, które wraz z przyjętą metodą Gaussa-Seidela [45] czy metodą frontalną [15], mają zasadniczy wpływ na czas rozwiązania.

Dla możliwie najmniejszej liczby węzłów bardzo ważne jest ich rozmieszczenie. W cytowanych pracach /rozdział 1/ prawie wszystkie przykłady wskazują na znaczne zagęszczenie węzłów w pobliżu wyrobiska /powierzchni obciążonych/ oraz wyraźne rozrzedzenie w kierunku brzegu rozważanego obszaru. Znaczniejsze zagęszczenie lub rozrzedzenie węzłów w pewnych obszarach uzyskuje się dzięki:

- zwiększeniu wymiarów siatki elementów w miarę oddalania się od wyrobiska,
- stosowanie w pobliżu wyrobiska elementów rzędu wyższego niż w pozostałych obszarach siatki,
- łączeniu różnych geometrycznych typów elementów.

Zwiększenie wymiarów siatki elementów w miarę oddalania się od wyrobiska jest bardzo skutecznym środkiem racjonalizacji podziału na elementy [14]. Z tego powodu oraz z powodu stosowanych w pracy elementów i ich charakterystyk /rozdział 4/ wykorzystano sposób pierwszy /rys.6.1., rys. 6.2./. Wykorzystanie w pracy pozostałych sposobów /ograniczone stosowaniem, poza liniowymi, tylko jednym typem elementu wyższego rzędu - trójkątem o sześciu węzłach/ było również możliwe. Jednak testy numeryczne potwierdzające celowość stosowania tych sposobów dla rozwiązywanego zadania są bardzo nieekonomiczne. Zdaniem autorki dopiero wprowadzenie do analizy elementów wyższych rzędów powinno być związane z testowaniem konfiguracji różnego typu elementów dla tak dużych zadań. Byłoby to tym bardziej celowe gdyby, mając katalog elementów wyższych rzędów i analizując różne ich układy można byłoby wyciągnąć wnioski ogólne dotyczące: dokładności rozwiązania, przydatności poszczególnych elementów oraz wielkości zysków wynikających z ich stosowania.

W PROBLEMIE 1 zastosowano siatki podziału na elementy trójkątne o trzech węzłach /rys.6.1./ i elementy czworokątne o czterech węzłach i dziesięciu punktach całkowania /rys.6.3./. W PROBLEMIE 2 wykorzystano elementy trójkątne o sześciu węzłach /rys.6.2./. W obu przypadkach zagęszczono siatkę podziału w obszarach intensywnych zmian stanu przemieszczenia i naprężenia / w pobliżu wyrobisk/. Oznacza to dostosowanie się do przebiegu funkcji oraz ich rozkładów.

### 6.3. Wyniki obliczeń

Wyniki obejmują dane do obliczeń oraz następujące wydruki:

- sprawdzenia danych,
- przemieszczeń węzłowych,
- naprężeń w węzłach elementów,
- naprężeń w punktach Gaussa /dla elementów czworokątnych/.

Dla PROBLEMU 1 dane dla trzech fizycznych modeli przyjęto na podstawie rozważań teoretycznych i badań literaturowych.

Danymi PROBLEMU 2 była dokumentacja służb geologiczno-geodezyjno-górnicznych Zagłębia HBL (Les Houillers du Bassin de Lorraine - Freyming - Merlebach) we Francji.

Wydruków wyników w postaci tabulogramów, ze względów objętościowych w pracy nie zamieszczono. Wyniki obliczeń przedstawiono w postaci wykresów na rys. 6.3. - rys. 6.14.

Do analizy i porównania wyników obliczeń wykorzystano wartości w wybranych przekrojach i obszarach rozważanej tarczy modelującej eksploatowany górotwór.

### 6.3.1. Dane do obliczeń

- Geometrię rozważanego obszaru opisują następujące wielkości:

#### PROBLEM 1 /rys.6.1./

$H = 200 \text{ m}$ ,  $l = 200 \text{ m}$ ,  $b = 800 \text{ m}$

164 elementy trójkątne połączone w 102 węzłach lub 140 elementy czworokątne połączone w 168 węzłach.

#### PROBLEM 2 /rys.6.2./

$H = 900 \text{ m}$ ,  $H_1 = 600 \text{ m}$ ,  $w_1 = 290 \text{ m}$ ,  $w_2 = 246 \text{ m}$ ,  $w_3 = 224 \text{ m}$ ,

$h = 3,0 \text{ m}$ ,  $b = 1000 \text{ m}$ ,  $c = 350 \text{ m}$ ,  $d = 300 \text{ m}$ ,  $e = 90 \text{ m}$ ,

$l_1 = 130 \text{ m}$ ,  $l_2 = 120 \text{ m}$ ,  $l_3 = 130 \text{ m}$ .

728 elementów trójkątnych posiadających ogółem 1133 węzłów /wierzchołkowych i pośrednich/.

Rozmieszczenie reperów w chodniku pomiarowym /usytuowanym prostopadle do wyrobisk na głębokości  $H_1$ / stacje pomiarowe nr 1 - 9 co 25 m, nr 9 + 22, 22b, 23, 23b, 24 co 12,5 m, nr 24 + 33 co 25 m

- Właściwości poszczególnych przyjętych do rozważań warstw górotworu, opisanych różnymi modelami reologicznymi, charakteryzują następujące przyjęte do obliczeń wielkości:

## PROBLEM 1

Warstwa nadkładu - skała płonna:

$E = 10000 \text{ MPa}$

$\nu = 0,25$

$\gamma_{\text{obj.}} = 2,0 \text{ kN/m}^3$

Naprężenia [MPa]	14	29	42	46,5	48	48,5	49
Wydłużenia [m]	0,002	0,004	0,006	0,007	0,008	0,009	0,01

$G_1 = 20 \text{ MPa},$

$G_2 = 10 \text{ MPa},$

$\eta = 3 \cdot 10^5 \text{ MPa dni}, K = 11 \text{ MPa}$

## PROBLEM 2

Piaskowce przewarstwione:

$E = 18000 \text{ MPa}$

$\nu = 0,25$

$\gamma_{\text{obj.}} = 2,0 \text{ kN/m}^3$

Naprężenia [MPa]	7,5	24	45	70	75	85	94	98
Wydłużenia [m]	0,002	0,004	0,006	0,008	0,009	0,01	0,011	0,012

$G_1 = 30 \text{ MPa},$

$G_2 = 25 \text{ MPa},$

$\eta = 6 \cdot 10^5 \text{ MPa dni}, K = 17 \text{ MPa}$

Węgiel:

$E = 2000 \text{ MPa}$

$\nu = 0,25$

$\gamma_{\text{obj.}} = 1,8 \text{ kN/m}^3$

Naprężenia [MPa]	14	28	43	56	61	64	65
Wydłużenia [m]	0,005	0,01	0,015	0,02	0,022	0,024	0,025

$G_1 = 16 \text{ MPa},$

$G_2 = 14 \text{ MPa},$

$\eta = 4 \cdot 10^4 \text{ MPa}, K = 12 \text{ MPa}$

- Obciążenie górnicze:

Przy przyjętym sposobie eksploatacji: wybieraniu z podsadz-  
ką, obciążenie górnicze modeluje przemieszczenie stropu wyrobis-  
ka o wielkość  $\Delta$ .

W PROBLEMIE 1 przyjęto:  $\Delta = 0,4$  m

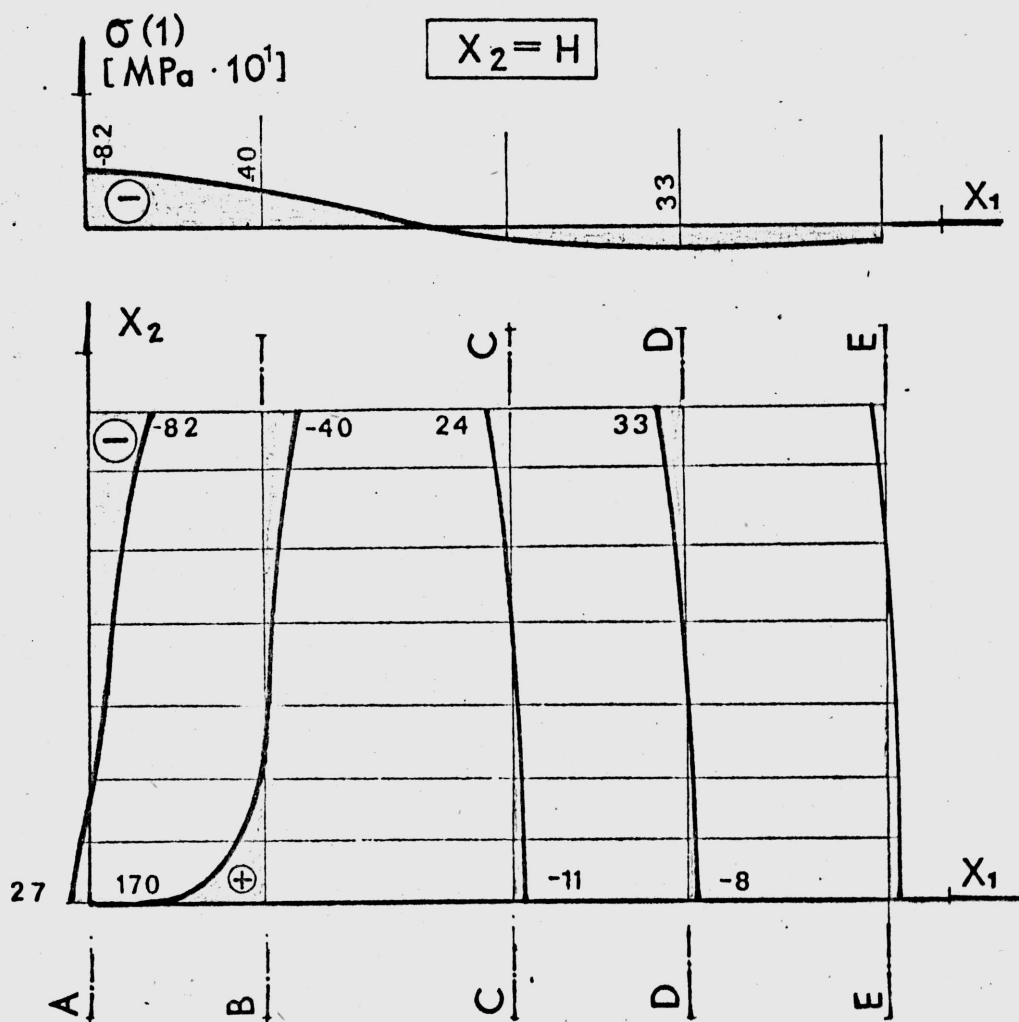
W PROBLEMIE 2 przyjęto:  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0,3$  m.







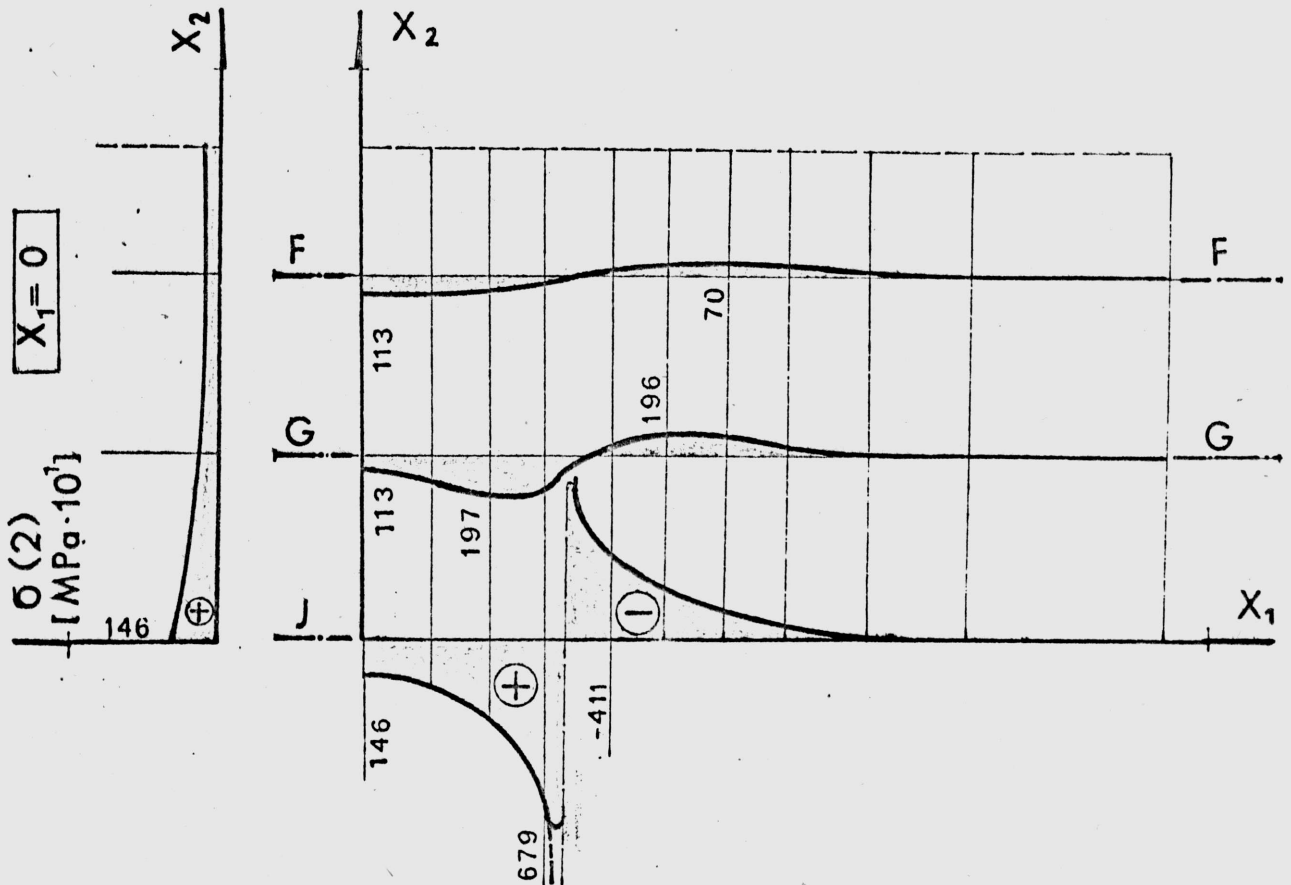
U(2) dla  $X_1 = 0$  na osi symetrii siatki podziału oraz przemieszczeń poziomych U(1) dla  $X_2 = H$  na powierzchni. Na wykresie przemieszczeń poziomych zaznaczono strefy spełzania i rozpełzania powierzchni. Strefy te pokrywają się z przedstawionymi na rys. 6.4. zakresami poziomych naprężeń ściskających i rozciągających.



Rys.6.4. Wykresy naprężeń  $\sigma(1)$

Przekroje A,B,C,D,E,F,G,J. dla których wykonano wykresy naprężeń, zaznaczono na rys. 6.1. Na powierzchni terenu, w środkowej części niecki, naprężenia poziome są ściskające, natomiast na zewnątrz wyrobiska rozciągające. W pobliżu wyrobiska, przekrój A-A, B-B dla  $X_2=0$ , występują znaczne naprężenia rozciągające, których wartości są szczególnie ważne w przypadku projektowania obudowy wyrobiska lub ustalenia zasięgu strefy zniszczenia. Na wykresach naprężeń pionowych  $\sigma(2)$ , przedstawionych na rys. 6.5. w przekroju

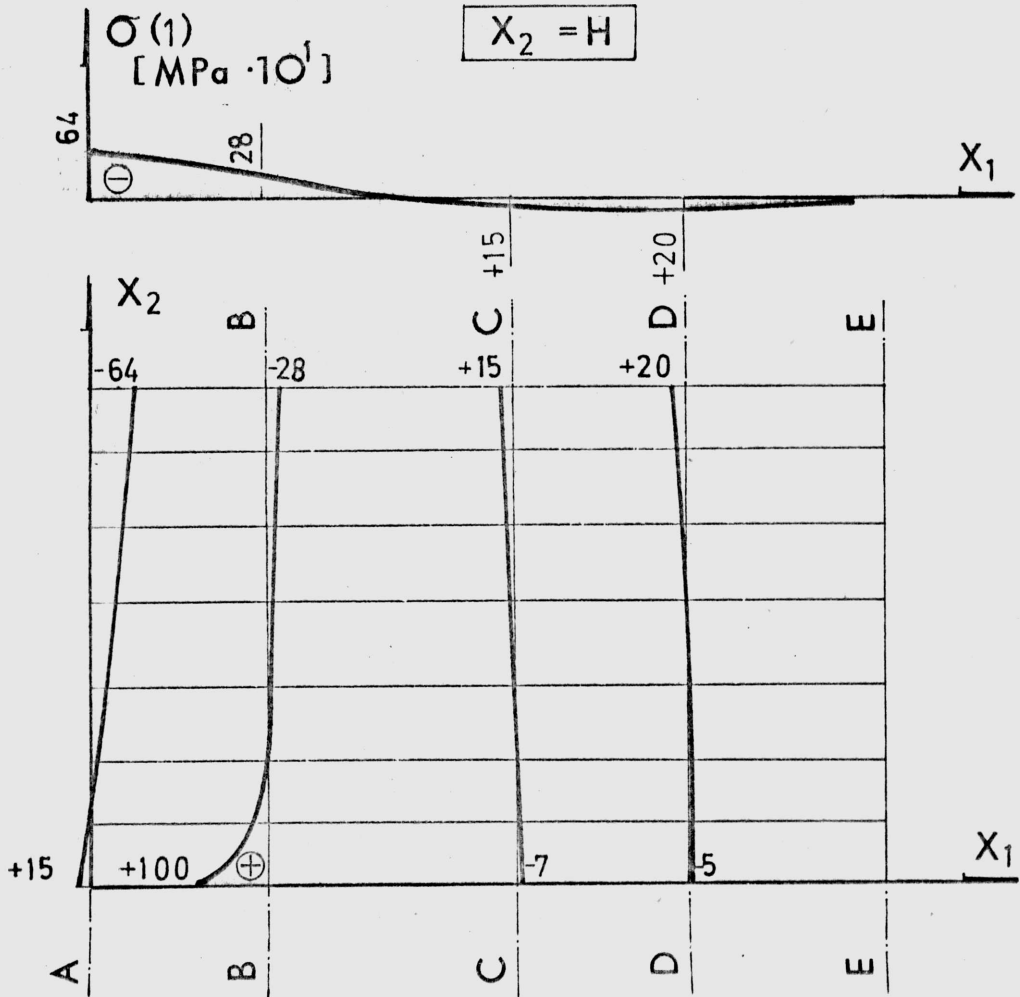
J-J na krawędzi stropu i ociosu wyrobiska linią przerywaną przeprowadzono korektę otrzymanych wartości.



Rys.6.5. Wykresy naprężeń  $\sigma(2)$ .

Na rys. 6.7. , który przedstawia wykres naprężeń  $\sigma(2)$  w wybranych przekrojach /dla modelu ciała nieliniowo-sprężystego/ podobnie jak na rys. 6.5. linią przerywaną zaznaczono wartości skorygowane. W przekroju przechodzącym przez ocios wyrobiska niemożliwa była obserwacja skoku naprężeń, zaznaczonego linią przerywaną, ze względu na przyjętą idealizację geometryczną i fizyczną. Rysunki 6.4., 6.5., 6.6. oraz 6.7. przedstawiające wykresy naprężeń  $\sigma(1)$  i  $\sigma(2)$  pozwalają zauważyć różnice ilościowe tych wielkości dla dwóch przypadków rozwiązania zadania. W wyniku rozwiązania dla modelu ciała liniowo-sprężystego otrzymano wartości większe niż w przypadku rozwiązania dla modelu nieliniowo-sprężystego. Dla przyjętych danych, w poszczególnych przekrojach i węzłach różnice wartości  $\sigma(1)$  dla tych dwóch modeli sięgają rzędu jednostek MPa. Przykładowo: na powierzchni terenu /dla  $X_2 = H$ / różnica wartości naprężeń ściskających w

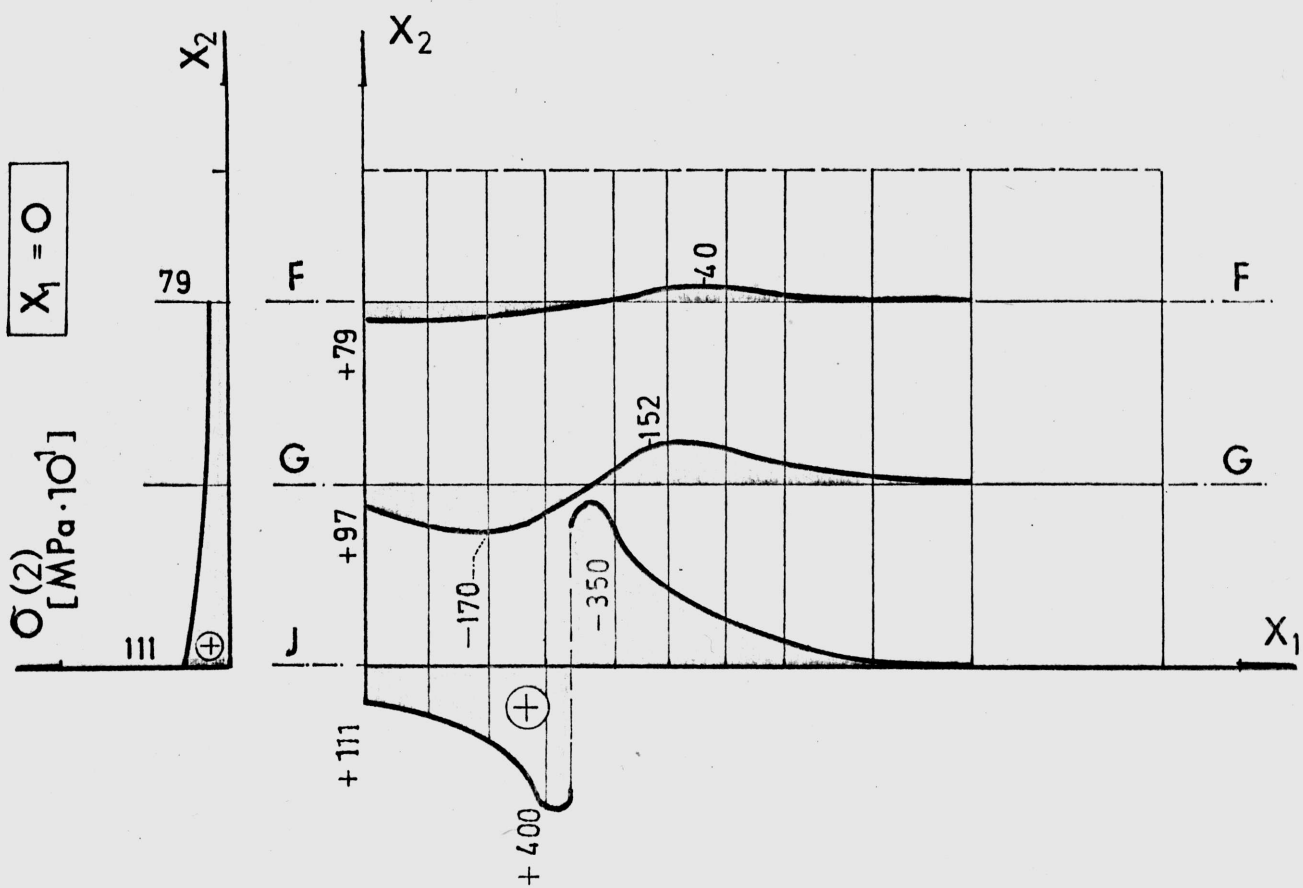
przekroju A-A wynosi 1,8 MPa a różnica naprężeń rozciągających w przekroju D-D 1,3 MPa. Mogą to być wartości istotne dla projektanta konstrukcji, tym bardziej że mogą one się zwiększać w zależności od charakterystyk podłoża i głębokości eksploatacji.



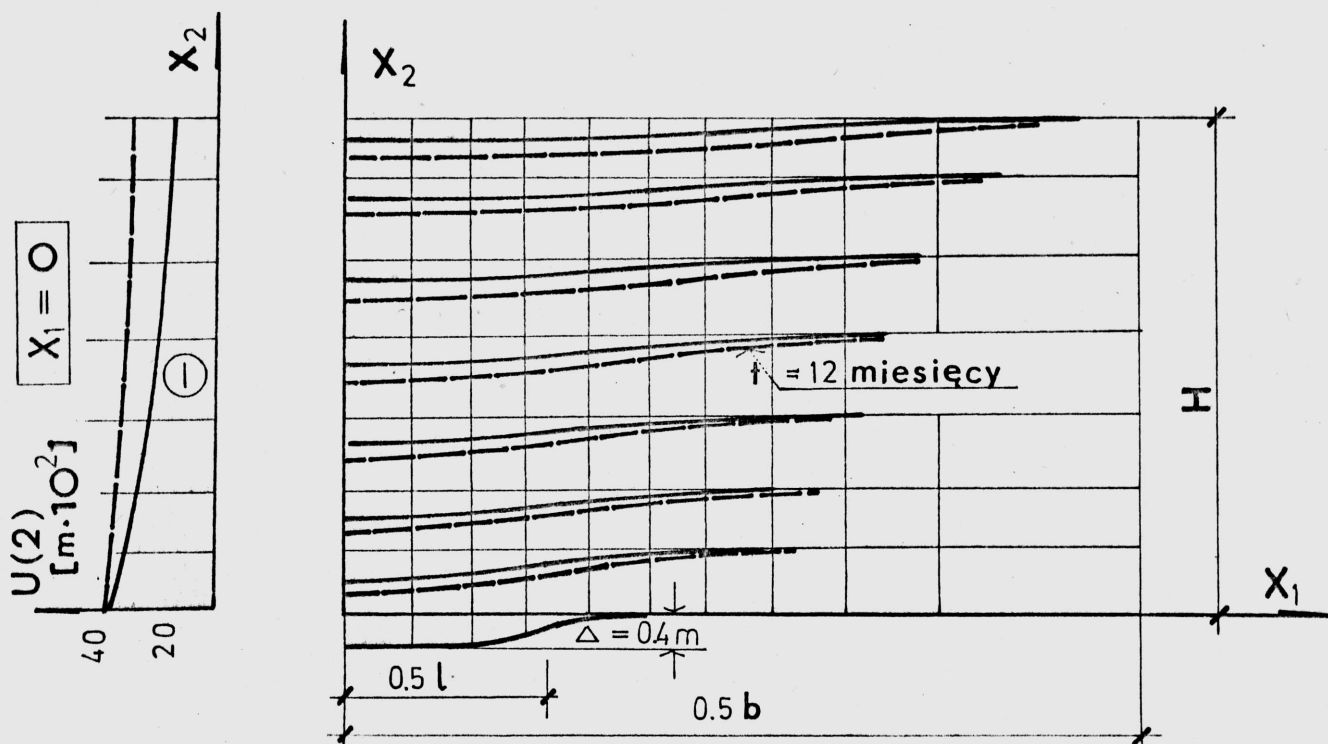
Rys.6.6. Wykres naprężeń  $\sigma(1)$  w wybranych przekrojach /dla modelu ciała nieliniowo-sprężystego/.

Różnice wartości  $\sigma(2)$  są nieco większe i sięgają rzędu dziesiątek MPa. Przykładowo: w połowie rozpiętości wyrobiska w przekroju J-J różnica wartości naprężeń rozciągających wynosi 3,5 MPa, różnica obliczonych wartości naprężeń rozciągających w ociosie w tym samym przekroju wynosi 27,9 MPa natomiast naprężeń ściskających 6,4 MPa.

Analiza stanu przemieszczenia /przemieszczeń pionowych/ węzłów siatki podziału dla modeli ciał liniowo-sprężystego oraz lepko-sprężystego, której wyniki przedstawia rys. 6.8. pozwala podać



Rys.6.7. Wykres naprężeń  $\sigma(2)$  w wybranych przekrojach / dla modelu ciała nieliniowo-sprężystego/.



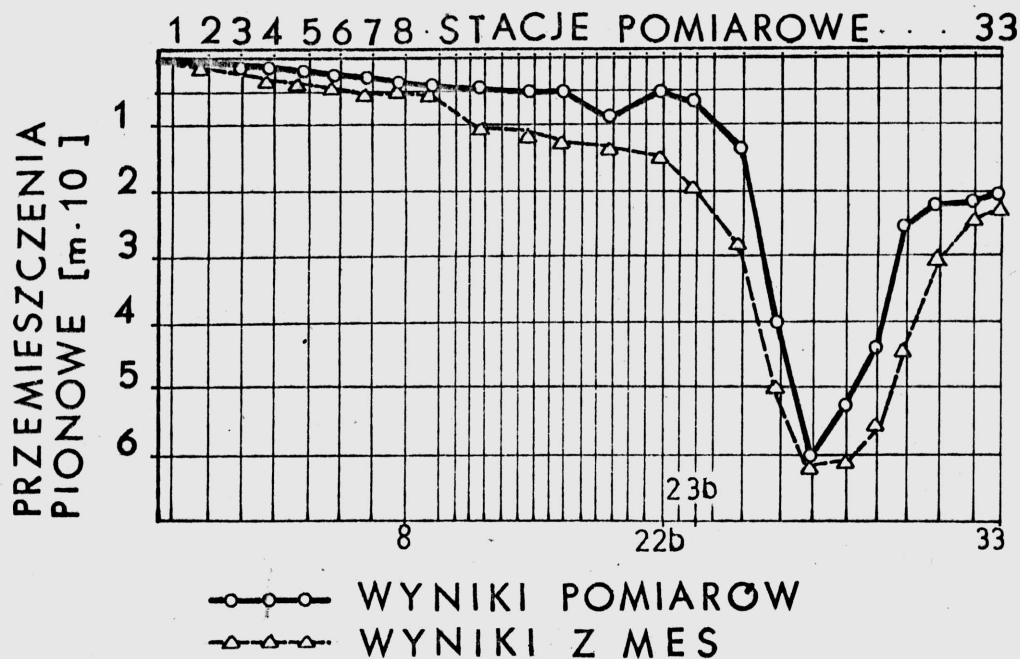
Rys.6.8. Przemieszczenia pionowe węzłów siatki podziału dla modelu ciała liniowo-sprężystego oraz lepko-sprężystego po czasie  $t = 12$  miesięcy.

ilościowy wzrost przemieszczeń w czasie. Dla czasu  $t = 12$  miesięcy wartość max przemieszczeń pionowych na powierzchni zwiększa się prawie dwukrotnie. Tym samym geometryczny profil utworzonej niecki osiadania ulegnie wyraźnej zmianie. Uwzględnienie tej zmiany w procesie projektowania konstrukcji powinno być zadaniem ważnym dla projektanta.

## 6.3.3. Analiza i porównanie wyników dla PROBLEMU 2

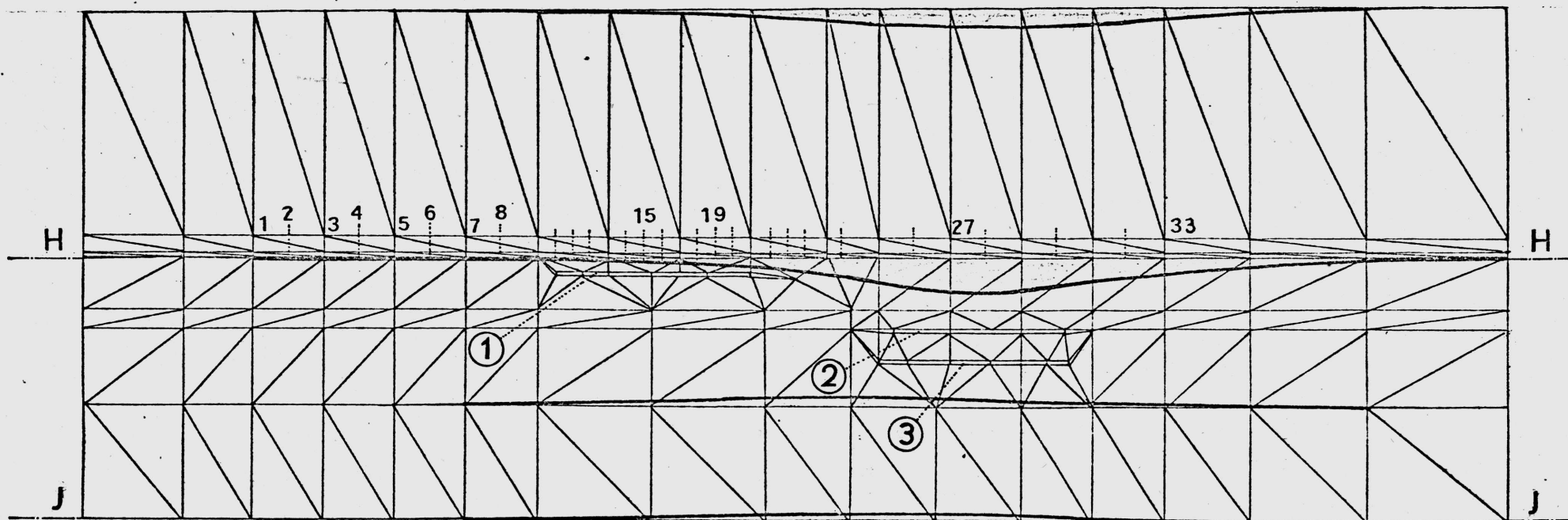
Analizę rozpoczęto porównaniem wartości przemieszczeń uzyskanych z rozwiązania dla modelu ciała liniowo-sprężystego z wartościami przemieszczeń uzyskanymi z pomiarów geodezyjnych. Wybrane przekroje oraz ograniczone nimi obszary, dla których wykonano wykresy interesujących wielkości, pokazano na rys. 6.2. Na rys. 6.10. przedstawiającym przemieszczenia węzłów siatki poszłału w obszarze ograniczonym przekrojami H-H i J-J można zauważyć, że podział na elementy dobrano tak, aby węzły wierzchołkowe lub pośrednie pokrywały się z położeniem stacji pomiarowych /oznaczonych numerami od 1 do 33/. Umożliwia to bez dodatkowych przeliczeń, porównanie wartości obliczonych przemieszczeń pionowych węzłów z pomierzonymi wartościami przemieszczeń.

Wyniki porównania ilustruje rys. 6.9.



Rys. 6.9. Porównanie przemieszczeń pionowych.

Przemieszczenia chodnika pomiarowego wyznaczone MES przyjmują wartości większe od przemieszczeń mierzonych geodezyjnie za pomocą umocowanych w ociosach chodnika reperów. Przebieg krzywych



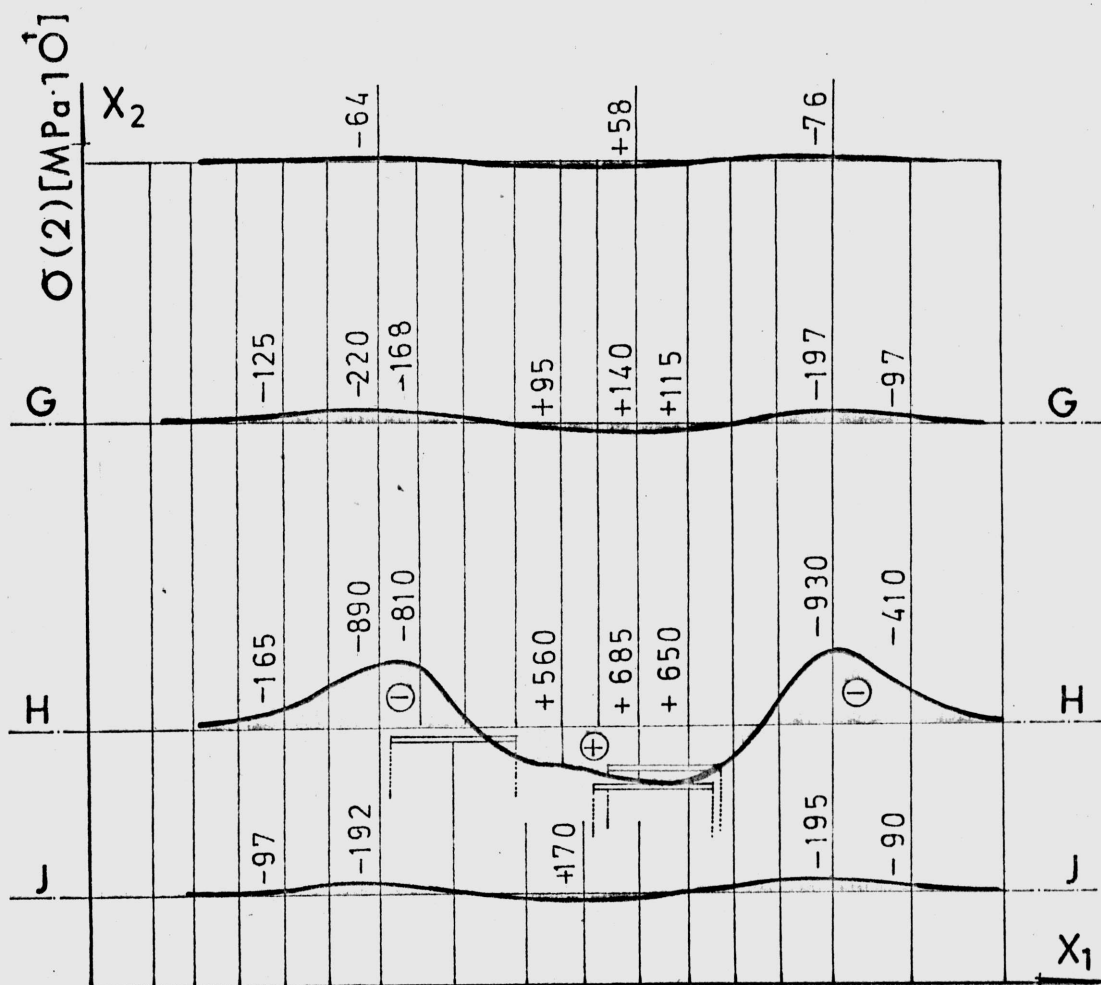
Rys.6.10. Przemieszczenia węzłów siatki podziału w obszarze najbliższym trzem wyrobiskom;  
 1,2...33 - numery stacji pomiarowych, ①, ②, ③ - numery wyrobisk.

przemieszczeń pionowych ma podobny charakter jakościowy. Największe odchylenie wartości obliczonej od wartości zmierzonej wynosi, 200 % /dla stacji 22b/. Powodem tak dużej różnicy jest przyjęta w zadaniu idealizacja geometryczna i fizyczna. W szczególności przyjęcie poziomego usytuowania wyrobisk /w rzeczywistości są one nachylone pod kątem  $< 10^\circ$  do osi chodnika pomiarowego/ oraz modelowanie sposobu eksploatacji może powodować różnice w wynikach. Rys. 6.10. pozwala zauważyć zjawisko wypierania /przemieszczenia pionowe w kierunku dodatnim osi  $X_2$ / warstw leżących poniżej spągów wyrobisk. Ilościowe ujęcie tego zjawiska jest szczególnie ważne przy projektowaniu i zabezpieczaniu wyrobisk.



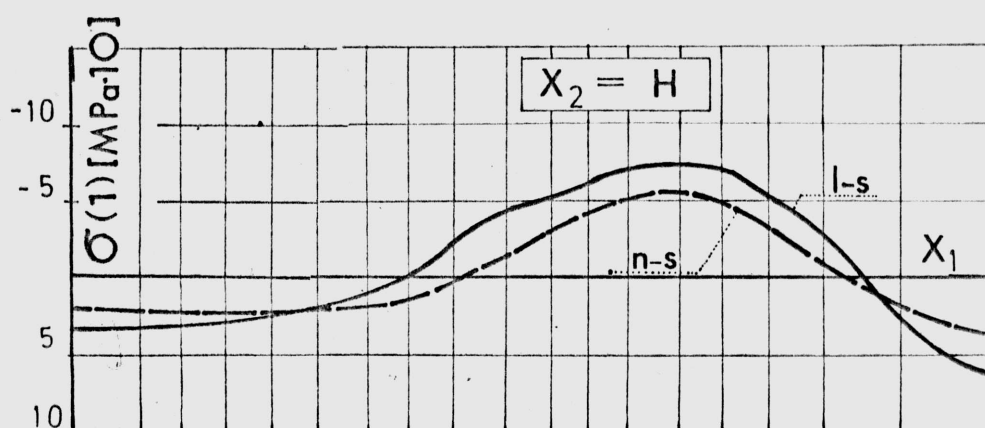
Rys.6.11. Wykres naprężeń  $\sigma(2)$  w wybranych przekrojach dla modelu ciała liniowo-sprężystego.





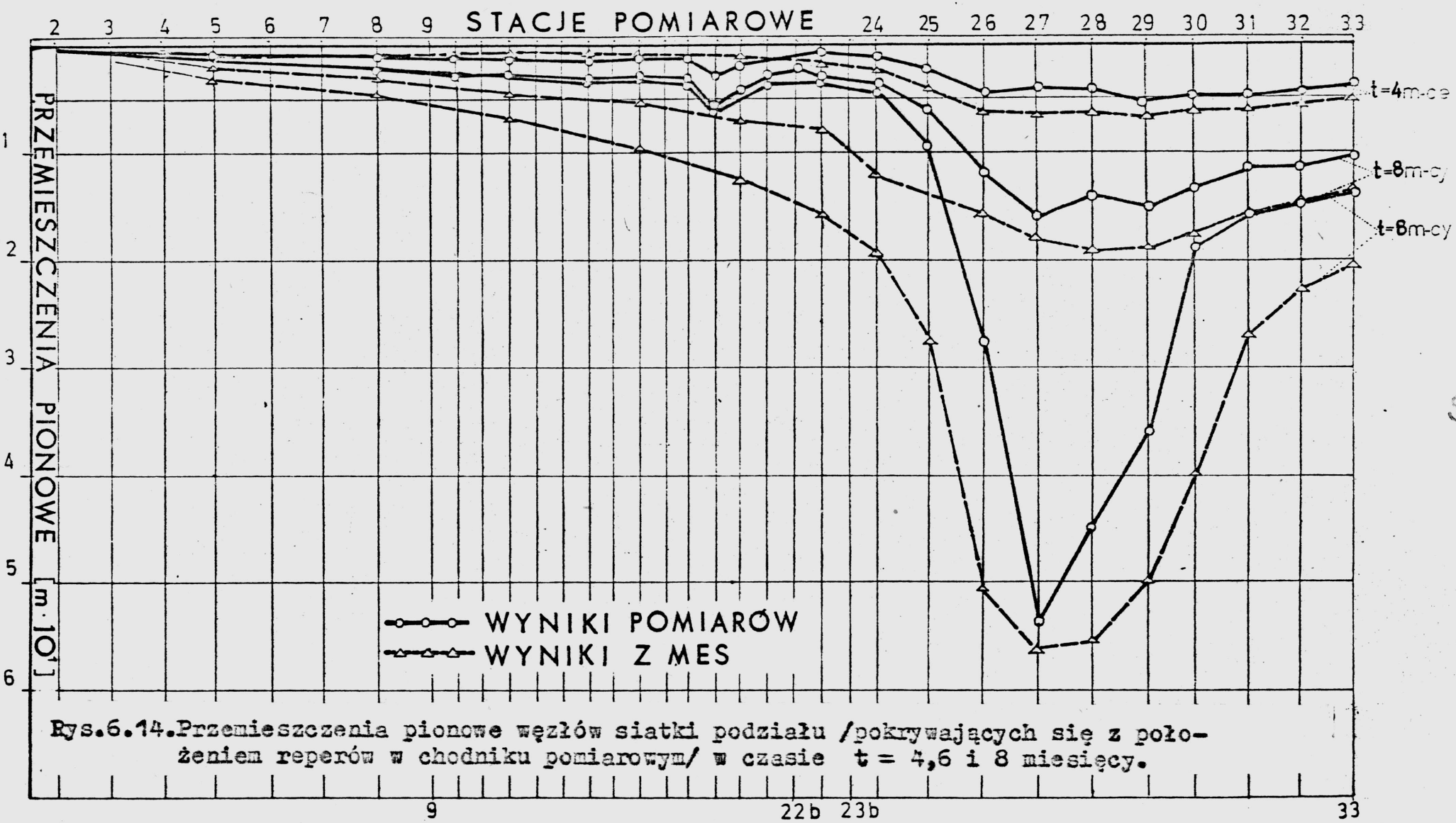
Rys. 6.12. Wykres naprężeń  $\sigma(2)$  w wybranych przekrojach dla modelu ciała nieliniowo-sprężystego.

Przedstawione na rys. 6.11. i rys. 6.12. wykresy wartości naprężeń pionowych  $\sigma(2)$  w wybranych przekrojach pozwalają zauważyć ich jednakowy jakościowy przebieg. Wartości naprężeń  $\sigma(2)$  dla modelu nieliniowo-sprężystego są w każdym węźle mniejsze od wartości dla modelu liniowo-sprężystego. W przekroju H-H można przeanalizować wzajemny wpływ wyrobisk na stan naprężenia w najbliższym ich sąsiedztwie. Nad stropem wyrobiska pierwszego /rys.6.10. wystąpi w pewnym obszarze strefa naprężeń rozciągających /rys. 6.11./ . Wzajemny wpływ wyrobisk uwidoczni się również na powierzchni gdzie strefa pionowych naprężeń rozciągających wystąpi nad usytuowanymi nad sobą wyrobiskami drugim i trzecim. W przypadku naprężeń poziomych  $\sigma(1)$  , których wykres na powierzchni przedstawia rys. 6.13. wzajemne usytuowanie wyrobisk, wpływa na



Rys.6.13. Wykres naprężeń  $\sigma(1)$  na powierzchni /l-s: wynik rozwiązania dla modelu ciała liniowo-sprężystego, n-s: wynik rozwiązania dla ciała nieliniowo-sprężystego/.

niesymetryczny przebieg krzywych. Naprężenia  $\sigma(1)$  ściskające osiągają większe wartości i większy jest ich zakres /na osi  $X_1$ / dla modelu ciała liniowo-sprężystego. Większy zakres naprężeń  $\sigma(1)$  rozciągających /pokrywających się ze strefą rozpełzań/ dla modelu ciała nieliniowo-sprężystego /rys. 6.13./ zwraca uwagę na konieczność uwzględnienia właściwości nieliniowych w analizie statycznej eksploatowanego podłoża budowli. Równie ważne w analizie jest uwzględnienie właściwości lepkich. Rys. 6.14. przedstawia wzrost przemieszczeń pionowych węzłów siatki podziału w czasie, przemieszczeń mierzonych oraz obliczonych MES dla przyjętego modelu ciała liniowo-lepko-sprężystego. Pomiary geodezyjne były prowadzone co dwa miesiące w okresie ośmiu miesięcy i dla takich też czasów przeprowadzono obliczenia. Wyniki pomiarów i obliczeń otrzymano przy założeniu, że front eksploatacji został zatrzymany i rozważane wyrobiska wywołują statyczną nieckę osiadania.



Rys.6.14. Przeszyczenia pionowe węzłów siatki podziału /pokrywających się z położeniem reperów w chodniku pomiarowym/ w czasie t = 4,6 i 8 miesięcy.

## R O Z D Z I A Ł 7

## WNIOSKI I UWAGI KOŃCOWE

Postawione na wstępie pracy zagadnienie analizy statycznej ośrodka modelującego eksploatowane podłoże budowli, zostało zdaniem autorki rozwiązane.

Z przeprowadzonej analizy można wyciągnąć nieco ogólniejsze wnioski niż ze znanych dotąd rozwiązań ponieważ:

- dotyczy ona równoczesnego rozwiązania dla trzech modeli fizycznych eksploatowanego górotworu; przyjęcie do obliczeń modelu bardziej złożonego nie oznacza jeszcze otrzymania dokładniejszych wyników natomiast pozwala prześledzić sposób zachowania się górotworu przy założeniu różnych jego właściwości,
- oprócz zadania przykładowego /PROBLEM 1/, mającego służyć jako ilustracja metody rozwiązania, zbadano także konkretne zadanie przedstawiające wyrobiska w określonej kopalni /PROBLEM 2/.

Uzyskane rozwiązanie pozwoliło wyjaśnić następujące zjawiska zachodzące w górotworze eksploatowanym:

- wypieranie górotworu w kierunku spągu wyrobisk,
- wzajemny wpływ trzech wyrobisk na stan naprężenia i odkształcenia w najbliższym ich sąsiedztwie,
- wpływ czasu na stan przemieszczenia /w przypadku zatrzymania się frontu eksploatacji i powstania niecki statycznej/.

Pierwotny zamysł budowy programu ograniczono do budowy podprogramów oraz adaptacji programów już uruchomionych. Skonstruowano, możliwie bliski optimum, algorytm obliczeń, który jest podstawą do budowy programów umożliwiających badania teoretyczne.

Kierowano się chęcią uzyskania ekonomicznego algorytmu i schematu

obliczeniowego wykorzystującego indywidualne cechy modelu. Dostosowano siatki podziału na elementy do spodziewanego rozkładu naprężeń - nie intuicyjnie, jak to ma miejsce w większości prac - ale za pomocą testów numerycznych. Obliczono wartości interesujących wielkości w węzłach wierzchołkowych i pośrednich oraz w punktach całkowania, co pozwoliło określić dokładniej pole naprężeń i przemieszczeń.

Modele ciał nieliniowo-sprężystego i liniowo-lepko-sprężystego są pewnym etapem w procesie wierniejszego opisu zachowania się górotworu. Zapis związków fizycznych dla górotworu napotyka na szereg trudności głównie z powodu złożoności oraz niekompletnej i przybliżonej znajomości jego właściwości fizycznych. Metoda obliczeń stosowana do rozwiązania konkretnych zadań brzegowych powinna posiadać możliwości wykorzystania wszelkich dostępnych informacji. Uważa się, że metoda elementów skończonych, za pomocą której przeprowadzono rozwiązanie przedstawionego zadania brzegowego, spełnia ten warunek.

Szersze wykorzystanie metody ograniczone zostało zakresem przedstawionej pracy oraz możliwościami programów obliczeń numerycznych. Ograniczenie to stwarza szczególne trudności interpretacji wyników, wobec braku podprogramów wyjścia, pozwalających na przetwarzanie tabelarycznych wyników na wykresy i mapy.

Korzystanie z kilku programów o różnych możliwościach, jak to ma miejsce w przypadku przedstawionej pracy, stwarza dodatkowe trudności związane między innymi z językami programowania, przystosowaniem się do możliwości EMC oraz jej urządzeń WEJŚCIA-WYJŚCIA.

Autorka pracowała okresowo w Zespole Katedry Mechaniki WAT tworzącym program systemu KM-74 oraz w Zespole Laboratoire de Mecanique des Terrains tworzącym program LQ3F i skorzystała z możliwości adaptacji programów do założeń rozwiązywanego zadania /zbudowanego algorytmu/.

Tworzony od lat w Instytucie Geotechniki Podsystem Projektowania w Geotechnice prezentuje niewielkie możliwości w zakresie pakietu PPG2 /programów i podprogramów rozwiązujących zagadnienia geotechniczne metodą elementów skończonych/.

Najbliższym etapem pracy autorki będzie uruchomienie programu # SPR-LIN-NLIN-LEP na EMC serii RIAD, które w Centrum Obliczeniowym Politechniki Wrocławskiej zastępują EMC serii ODRA 1300.

## WYKAZ LITERATURY

- [1] Amberg W.A., Lombardi G., Une methode de calcul elasto-plastique de l'état de tension et de deformation autour d'une cavite souterraine, Symposium Zurich, 1977.
- [2] Argyris J.H., Scharpf D.W., Methods of elasto-plastic analysis, University of Stuttgart, 1971.
- [3] Barla G., Stresses around a single underground opening near a traction - free surface, Int.J.Rock Mech. and Mining Sci., 1,9, 1972.
- [4] Bauer J., Wnętrzak K., Podsystem projektowania w geotechnice, Raport nr 93, IGPW, 1974.
- [5] Bauer J., Szcześniak K., Zastosowanie regresji liniowej do wyznaczania kohezji i kąta tarcia wewnętrzznego próbek poddanych badaniu w aparacie trójosiowego ściskania. Materiały VI Zimowej Szkoły Mech. Górniczej, 1979.
- [6] Biernatowski K., Sarniak W., Badania modelowe dotyczące pracy sztywnego fundamentu na odkształcającym się ośrodku sypkim i małospoistym, KIGPW, nr 5,6, 1971.
- [7] Borecki M., Chudek M., Mechanika górotworu, Katowice 1972.
- [8] Borowiec Z., Zastosowanie nieliniowego modelu podłoża do komputerowej analizy konstrukcji posadowionej na terenach eksploatacji górniczej, III Konf. Metody Komputerowe w Mech. Konstr., Opole 1977.
- [9] Boulon M., Chambon R., Darve F., Loi rheologique incrementale pour les sols et application par la methode des elements finis, Annales de L'ITBTP, 1977.
- [10] Chambon R., Application de la methode des elements finis et d'une loi rheologique incrementale aux calculs de mecanique des sols, Praca doktorska, Grenoble, 1975.

- [11] Chwała S., Gładysz L., Kurczabiński Z., Możliwości wykorzystania MES w mechanice górotworu, Przegląd Górniczy, nr 4, 1972.
- [12] Dejean M., Contribution a l'etude de la mécanique des terrains par une methode de differences finies, Praca doktorska, Nancy, 1970.
- [13] Dejean M., Amplitude de l'affaissement des ouvrages miniers soumis à l'influence d'une exploitation sous-jacente, Industrie Minerale, no 2, 1973.
- [14] Dejean M., Programme BILIN, Elasticite bilineaire en deformations planes, CERCHAR - Ecole des Nines de Nancy, 1973.
- [15] Dejean M., L $\Phi$ 3F - documents nr: 1,2,5 LMT - CERCHAR, 1976.
- [16] Dejean M., Les models dans la mécanique des terrains. L'exemple des models mathematiques, KIGPW, nr 261, 1978.
- [17] Desai S., Abel J.F., Introduction to the finite element method - a numerical method for engineering analysis, VNR, 1972.
- [18] Duncan, Chang, Non linear analysis of stress and strain in soils, IJSMF, no 5, 1970.
- [19] Forster W., Możliwości rozwiązywania problemów naprężeniowo-odkształceniowych w geomechanice za pomocą metody elementów skończonych, KIGPW, nr 67, 1974.
- [20] Gergowicz Z., Geotechnika górnicza, Skrypty PWr., 1975.
- [21] Getzler Z., Gellert M., Eitan R., Analysis of arching pressures in ideal elastic soil, Proceed. ASCE, no 4, 1970.
- [22] Gryczmański M., Analiza statyczna dowolnie uwarstwionego podłoża budowli metodą elementów skończonych, Praca doktorska, Gliwice, 1973.



- [23] Hüls W., Beitrag zur Berechnung von Spannungs - und Verformungsfeldern für Boden mit nichtlinearen Stoffeigenschaften mittels der Methode finiter Elemente, Praca doktorska, Freiberg 1978.
- [24] Izbicki R.J., Wnętrzak K., Wpływ eksploatacji górniczej na stan naprężenia i odkształcenia w górotworze oraz na powierzchni terenu, KIGPW, nr 20, 1973.
- [25] Kaczmarek J., Określenie stanu naprężenia, rozwoju stref plastycznych i zniszczonych wokół wyrobiska chodnikowego o przekroju prostokątnym, Praca doktorska, Polit.Wrocł., 1978.
- [26] Kisiel I., Reologia w budownictwie, Arkady, 1967.
- [27] Kisiel I., Dociekania z reologii gruntów i skał, PAN, Ossolineum, 1970.
- [28] Kisiel I., Development of plastic zones around a hole in a half-plane. Proc. 4th Conf. on Soil Mechanics, Budapest 1971.
- [29] Kisiel I., Metoda elementów skończonych, Inż.i Bud.nr 11, 1970.
- [30] Knothe S., Profil définitif de la cuvette des affaissements, Archiwum Górnictwa, nr 1, 1953.
- [31] Kratz H., Zastosowanie MES do rozwiązywania problemu szkód górniczych.
- [32] Liwtiniszyn J., Theories des mouvements de terrains et recherche de modeles, Congres européen sur les mouvements de terrains, Leeds, 1957.
- [33] Lombardi G., Rechsteiner G., An elasto-plastic analysis of the stress-strain state around an underground opening, Symposium Zurich, 1977.



- [34] Lombardi G., Long term measurements in underground openings and their interpretation with special consideration to the rheological behaviour of the Rock. Symposium Zurich, 1977.
- [35] Mróz Z., Winnicki L., Sprężysto-plastyczna analiza stanu naprężenia w górotworze w sąsiedztwie wyrobiska górniczego, Archiwum Górnictwa, t XXII, z. 1, 1977.
- [36] Nair K., Chang Y., Finite element analysis of excavations in rocks. Proc. of Symp. on Application FEM in Geot. Engin., 1972.
- [37] Osmanagić M., Jasarević I., Stresses and strains around underground openings in rock with viscous-elasto-plastic properties, Praca doktorska, Belgrad 1975.
- [38] Oden J.T. Finite elements of nonlinear continua, McGraw-Hill, 1972.
- [39] Reyes S.F., Deer Don V., Elasto-plastic analysis of underground openings by the finite element method. Proc. 1th Congress of the International Society of Rock Mechanics, Lisboa 1966.
- [40] Ricard A., Resolution des problemes d'elastoplasticite par la methode des elements finis, Rapport Labo. Central des Ponts et chaussees, 1973.
- [41] Ricard A., Etude des massifs continus a comportement nonlineaire, Rapport Labo. P. et. Ch. 1974.
- [42] Sałustowicz A., Mechanika górotworu, Górnictwo t. III, Katowice, 1955.
- [43] Stremsoefer P.M., Resolution par la methode des elements finis des problemes viscoelastiques et elastoplastiques poses par les cavites souterraines, Praca doktorska, Paryż, 1972.

- [44] Stremsoefer P.M. Analyse par la methode des elements finis du comportement elastoplastique des milieus continus, Industrie minerale, cahier 6, 1974.
- [45] Szmelter J., Dacko M., Dobrociński S., Wieczorek M., Programy metody elementów skończonych, Arkady 1973.
- [46] Szmelter J., Dobrociński S., Pyrak S., Wieczorek M., Analiza statyczna płaskiego stanu naprężenia metodą elementów skończonych. Inż. i Bud. nr 5, 1972.
- [47] Szmelter J., Dobrociński S., Program rozwiązujący równania metody elementów skończonych, Biul. WAT, 1971.
- [48] Tajduś A., Numeryczne określenie naprężeń w górotworze lepkosprężystym, niejednorodnym, pofałdowanym, Praca doktorska, AGH, Kraków 1977.
- [49] Telega J.J., Metoda elementów skończonych w mechanice gruntów i mechanice górotworu, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 3, 11, 1973.
- [50] Veigt B., Pariseau W., State of predicative art in subsidence engineering, Proceed. ASCE, Vol. 96, No 2, 1970.
- [51] Walaszczyk J., Rozkład naprężeń i odkształceń wokół wyrobiska, Praca doktorska, AGH, Kraków 1972.
- [52] Watwood W.B., En equilibrium stress field model for FEM solutions of two-dimensional elastic problems, IJSS, no 4, 1968.
- [53] Wnętrzak K., Osiedlenia chodnika pomiarowego usytuowanego powyżej eksploatacji górniczej, PNIGPW, nr 26, 1978.
- [54] Zienkiewicz O.C., Cheung Y.K., Application of FEM to problems of rock mechanics, Proc. 1st Congr. Int.Soc. for Rock Mechanics, Lisbon, vol.1, 1966.

- [55] Zienkiewicz O.C., Numerical methods of art in rock and soil mechanics - non linear material models, University of Wales, Swansea, Report No C/R/131, 1970.
  
- [56] Zienkiewicz O.C., Nayak G.C., Elasto-plastic stress analysis. A generalization for various constitutive relations including strain softening, vol 5, 1972.
  
- [57] Zienkiewicz O.C. Metoda elementów skończonych, Arkady, 1972.