Na prawach rękopisu

I N S T Y T U T   M A T E M A T Y K I

P O L I T E C H N I K I   W R O C Ł A W S K I E J

Raport Serii PREPRINTY nr 32

WYBRANE PROBLEMY OPTYMALNEGO ZATRZYMYWANIA CIAGU ZMIENNYCH LOSOWYCH

Krzysztof Szajowski

Słowa kluczowe: reguła optymalnego zatrzymania,
problem sekretarki,
selekcja rangowa.

Wrocław 1979

Krzysztof Szajowski
Instytut Matematyki
Politechniki Wrocławskiej
50-370 Wrocław, pl.Grunwaldzki 7a
tel. 25-26

Praca doktorska wykonana w Instytucie Matematyki Politechniki Wrocławskiej.

Promotor: prof. dr hab. Stanisław Trybuła

Składam szczególne podziękowania
Panu Profesorowi Stanisławowi Trybule
za cenne uwagi zarówno merytoryczne jak
i redakcyjne oraz za życzliwą opiekę
i pomoc jakiej doświadczyłem przygotowując
niniejszą pracę.

SPIS TREŚCI

0. Wstęp.

Praca poświęcona jest wybranym zagadnieniom optymalnego zatrzymywania, gdy kryterium optymalności jest prawdopodobieństwem określonej sytuacji w momencie zatrzymania. Dwa pierwsze rozdziały zawierają rozwiązania pewnych problemów optymalnego wyboru. Problem optymalnego wyboru / " problem sekretarki "/ w ciągu ostatnich 10-ciu lat był burzliwie rozwijany i ma bogatą literaturę. Rozpatrywany w pierwszym rozdziale problem dotyczy wyboru z maksymalnym prawdopodobieństwem obiektu o absolutnej randze równej a. Podano algorytm pozwalający na wyznaczenie zbioru optymalnego zatrzymania w konkretnych sytuacjach i kilka szczegółowych przykładów.

W większości znanych w literaturze problemów optymalnego wyboru obiekt aktualnie badany musi być albo przyjęty albo odrzucony. W tym drugim przypadku jest tracony na zawsze. W rozdziale drugim rozważamy przypadek wyboru jednego z dwu najlepszych obiektów z możliwością powrotu. Metoda rozwiązania tego problemu oparta jest na rozwinięciu pomysłu Yanga [64] . Ten kierunek badań jest niedostatecznie rozwinięty w literaturze optymalnego zatrzymywania.

Trzeci rozdział poświęcony jest optymalnemu zatrzymaniu ciągu maksimów niezależnych zmiennych losowych z dyskontem. Problem ten jest naturalnym uogólnieniem " problemusekretarki ", gdy znany jest rozkład prawdopodobieństwa charakterystyki liczbowej obiektów. Literatura tego problemu [5,7,8,22,23,24,25,45] jest uboższa niż klasycznego problemu optymalnego wyboru. Najciekawsze rozwiązanie zawierają prace Bojdeckiego [7,8] .

W dalszej części pracy rozpatrzono zagadnienie zatrzymania procesu z czasem dyskretnym nad innym procesem z czasem dyskretnym z maksymalnym prawdopodobieństwem, gdy procesy są niezależne i obserwujemy tylko jeden proces.

Niech $U_1, U_2, \ldots$ oraz $V_1, V_2, \ldots$ będą ciągami zmiennych losowych o tym samym rozkładzie i f_n, $n = 1,2,\ldots$ będzie ciągiem funkcji określonych na R^n o wartościach w R. Oznaczmy przez $\xi_n = f_n(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ i $\eta_n = f_n(V_1, V_2, \ldots, V_n)$. W rozdziale czwartym rozpatrzono przypadek zatrzymania ciągu ξ_n nad η_n gdy $f_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \max(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ zarówno w przypadku ciągu skończonej długości, jak i ciągu nieskończonego.
W przypadku skończonym otrzymano strategię optymalną, a w przypadku nieskończonym postać strategii optymalnej i algorytm dla wyznaczenia ε-optymalnej strategii. Rozpatrzono również przypadek zatrzymania ciągu ξ_n nad η_n z dyskontem.

1. Optymalny wybór obiektu określonej rangi.

1.1. Wprowadzenie.

Dany jest N-elementowy zbiór obiektów. Każdy obiekt ma pewną charakterystykę liczbową x_i ,$i = 1,2,\ldots,N$. O charakterystykach zakładamy, że są różne i przed rozpoczęciem badania nieznane. Obserwujemy sekwencyjnie $X'_1, X'_2, \ldots, X'_N$, gdzie $X'_1, \ldots, X'_N$ jest permutacją charakterystyk $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Załóżmy, że wszystkie permutacje są jednakowo prawdopodobne.

Definicja 1.1.

Niech

$$z_r = \mathrm{card}\{1 \leqslant i \leqslant N: x_i \leqslant x_r\},$$

gdzie card A oznacza moc zbioru A.

Liczbę z_r nazywamy absolutną rangą obiektu o charakterystyce x_r .

Zamiast zmiennych losowych X'_r, $r = 1,2,\ldots, N$ wystarczy rozpatrywać zmienne losowe X_r całkowitoliczbowe, zdefiniowane następująco .

$$X_r = z_i \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy } X'_r = x_i .$$

Obserwator nie zna wartości zmiennych losowych X_j, $j = 1,2,\ldots,r$ w momencie r, a tylko X'_j , $j = 1,2,\ldots, r$.

Z sekwencyjną obserwacją obiektów ze zbioru N-elementowego związana jest więc przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie zdarzeniami elementarnymi są permutacje zbioru N-elementowego, a miara probabilistyczna jest określona jako rozkład jednostajny na Ω .

Definicja 1.2.

Niech

$$Y_r = \mathrm{card}\{1 \leqslant i \leqslant r: X_i \leqslant X_r\}.$$

Zmienną losową Y_r nazywamy relatywną rangą r-tego badanego obiektu

Ciąg Y_r, $r = 1,2,\ldots, N$ generuje ciąg σ - algebr $\mathcal{F}_r = \sigma\{Y_1,\ldots,Y_r\}$ $r = 1,2,\ldots,N$. Zmienne losowe Y_r są niezależne i $P\{Y_r = 1\} = \frac{1}{r}$. Oznaczmy przez $\mathfrak{M}^N$ zbiór wszystkich momentów Markowa τ względem rodziny σ - algebr $\{\mathcal{F}_r\}_{r=1}^{N}$. Niech $q(\cdot)$ będzie funkcją określoną na liczbach naturalnych o wartościach rzeczywistych. Funkcję $q(\cdot)$ nazywamy wypłatą. Niech

$$v_N = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}^N} Eq(X_\tau).$$

Problem optymalnego wyboru polega na wyznaczeniu $\tau^* \in \mathfrak{M}^N$ takiego, że

$$Eq(X_{\tau^*}) = v_N .$$

Ponieważ zbiór $\mathfrak{M}^N$ jest skończony więc takie τ^* istnieje i v_N jest skończone. Zadanie to, sprowadza się do tego, że na podstawie znajomości relatywnej rangi chcemy wybrać taki obiekt,aby oczekiwana wypłata, zależna od absolutnej rangi była maksymalna. W tak postawionym problemie obiekt aktualnie badany musi być albo wybrany, albo odrzucony. W tym ostatnim przypadku jest on już dla obserwatora stracony na zawsze.

Zagadnienie najlepszego wyboru występuje w literaturze pod wieloma nazwami. Najszerzej znane jest jako " problem sekretarki ". Autor tego problemu nie jest znany.Mosteller [31] utrzymuje, że po raz pierwszy słyszał o tym problemie w 1955 roku od Gleasona, który twierdził, że usłyszał go od kogoś. Bardzo podobny problem do " problemu sekretarki " postawił w 1874 roku Caley [11] . Dotyczył on loterii, w której gracz może wykorzystać tylko ostatni wyciągnięty przez siebie los. Wartość aktualnie wyciągniętego losu jest znana. Tak postawiony problem sprowadza siędo optymalnego zatrzymania ciągu zmiennych losowych zależnych. Przy założeniu niezależności zmiennych losowych rozwiązanie tego problemu podał

Moser [43] . Fox [26] postawił problem wyboru najlepszego obiektu w 1960 roku , a jego rozwiązanie uzyskał Moser [44] . Bissinger [6] w 1963 roku podał inne sformułowanie problemu optymalnego wyboru. Przegląd wyników dotyczących " problemu sekretarki " do roku 1966 znajduje się w pracy [31] . W pracy tej podano również wiele innych problemów pokrewnych. Za najbardziej klasyczny uważany jest przypadek, gdy $q(i) = 1$ dla $i = 1$ i 0 w innych przypadkach. Gilbert i Mosteller [31] prócz klasycznego, rozpatrywali również przypadek $q(i) = 1$ dla $i=1,2$ a 0 poza tym. Gusein-Zade [34] podjął próbę rozwiązania przypadku $q(i) = 1$ dla $i = 1,2,\ldots, d$ i 0 w innych przypadkach; uzyskał tylko pewne własności rozwiązania optymalnego. Pełne ε - optymalne rozwiązanie tego zadania podał Rasmussen [55,56] . Przypadek $q(i) = i$, $i = 1,2,\ldots, N$ badali Lindley [41], Dubuc [20] Chow, Robbins, Moriguti, Samuels [13] . Pełne rozwiązanie zawiera praca [13] . Problem optymalnego wyboru dla dowolnej monotonicznej funkcji $q(\cdot)$ rozwiązał Mucci [49,50] . Klasyczny " problem sekretarki " jest formułowany w wielu podręcznikach i monografiach rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej jak na przykład [14,17,21,36,45,59,63] .

Inne uogólnienia klasycznego problemu, to wybór najlepszego obiektu z dyskontem [58] oraz problem sekretarki z uwzględnieniem kosztu obserwacji [32] .

Arkin, Presman, Sonin [1] , Presman, Sonin [54] , Rasmussen, Robbins [57] , Cowan, Zabczyk [15,16] oraz Gianini [28] badali problem optymalnego wyboru, gdy liczba obiektów dostępnych do badania jest zmienną losową niezależną od relatywnych rang.

Ostatnio w pracach Rubin, Samuels [60] , Gianini, Samuels [30] , Gianini [29] , Lorenzen [42] sformułowano i badano tak zwany nieskończony " problem sekretarki "oraz związki przypadku skończonego z nieskończonym.

Problem optymalnego wyboru więcej niż jednego obiektu spotykamy w pracach Gilbert ,Mosteller [31] , Haggstrom [35] Nikolaev [51,52] , Henke, H. [36,37] , Müller, Platen [47,48] .

Bartoszyński [2,3] wykorzystał " problem sekretarki " dla dowodu probabilistycznego interesujących tożsamości kombinatorycznych.

Założenie, że obiekt aktualnie badany musi być albo wybrany albo odrzucony i w tym drugim przypadku jest już stracony dla obserwatora, zastąpiono bardziej realistycznym założeniem o możliwości powrotu do pewnych już przebadanych obiektów w pracach : Smith, Deelay [61] , Rubin, Samuels [60] , Karni, Schwartz [40] , Yang [64] i Gianini [29] .

Rozpatrywano również gry związane z problemem optymalnego wyboru w pracach [62,53,13] .

W niniejszej pracy zbadano dwa zagadnienia związane z " problemem sekretarki ". Pierwsze rozpatrzone w tym rozdziale sprowadza się do zadania optymalnego wyboru z funkcją wypłaty $q(i) = 1$ gdy $i = a$, a 0 w pozostałych przypadkach. Funkcja $q(i)$ zdefiniowana tutaj nie jest monotoniczna, co poważnie komplikuje uzyskanie strategii optymalnej. Przypadki niemonotoniczne w zadaniach optymalnego wyboru badanych dotąd są niemal nieznane.

W rozdziale drugim zbadano problem optymalnego wyboru jednego z dwu najlepszych obiektów z możliwością powrotu do wcześniej zbadanych,przy założeniu, że próba pozyskania wcześniej badanego obiektu ma tylko pewne prawdopodobieństwo powodzenia. Prawdopodobieństwo to maleje w miarę upływu czasu od chwili badania tego obiektu.

1.2. Równania rekursywne.

Niech funkcja wypłaty będzie następująca :

$$q(i) = \begin{cases} 1 \text{ , gdy } i = a, \\ 0 \text{ , gdy } i \neq a. \end{cases}$$

Mamy następujące zależności:

$$(1.1) \quad P\{X_\tau = a\} = Eq(X_\tau) = \sum_{r=1}^{N} \int_{\{\tau = r\}} q(X_r)\, dP =$$

$$= \sum_{r=1}^{N} \int_{\{\tau = r\}} P\{X_r = a | \mathcal{F}_r\}\, dP =$$

$$= \sum_{r=1}^{N} \int_{\{\tau = r\}} P\{X_r = a | Y_r\}\, dP = E\, g_a(\tau, Y_\tau) .$$

gdzie

$$(1.2) \quad g_a(r,l) = P\{X_r = a | Y_r = l\} = \frac{\binom{a-1}{l-1}\binom{N-a}{r-l}}{\binom{N}{r}} \quad \text{dla} \quad \begin{array}{l} a=1,2,\ldots,N, \\ l=1,2,\ldots,\min(a,r) \\ r=1,2,\ldots,N. \end{array}$$

Zależności (1.1) wynikają z definicji prawdopodobieństwa warunkowego i następującej równości :

$$(1.3) \quad P\{X_r = a | Y_r = l, Y_{r-1} = l_{r-1}, \ldots, Y_2 = l_2, Y_1 = 1\} = P\{X_r = a | Y_r = l\} .$$

Równość (1.3) wynika z bezpośrednich obliczeń. Wzór (1.2) otrzymujemy z następujących rozważań kombinatorycznych. r obiektów z N można wybrać na $\binom{N}{r}$ sposobów. Wszystkie rezultaty wyborów są jednakowo prawdopodobne z definicji rozkładu P. Jest a - 1 obiektów o absolutnej randze mniejszej niż a i N - a o absolutnej randzę większej niż a. Jeżeli relatywnie l - ty obiekt, pojawiający się w chwili r ma być absolutnie a - ty, to pojawiające się w chwilach 1,2,...,r-1 obiekty muszą być wybrane w ilości $l - 1$ z obiektów o absolutnej randze mniejszej niż a, a pozostałe obiekty w ilości $r - l$ z obiektów o absolutnej randze większej niż a.

Niech $\mathfrak{M}_r^N = \{\tau \in \mathfrak{M}^N : r \leqslant \tau \leqslant N\}$ i

$$v_N(r) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_r^N} E\, q(X_\tau).$$

Następująca technika rekursywna pozwala wyznaczyć v_N.

$$(1.4) \qquad v_N(N) = E\, q(X_N) = \frac{1}{N}$$

Niech

$$(1.5) \qquad v_N(N,l) = q(l) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } l = a, \\ 0, & \text{gdy } l \neq a, \end{cases}$$

$$(1.6) \qquad v_N(r,l) = \max\{g_a(r,l),\ E\, v_N(r+1, Y_{r+1})\}$$

i

$$(1.7) \qquad v_N(r) = E\, v_N(r, Y_r) = \frac{1}{r}\sum_{l=1}^{r} v_N(r,l).$$

Mamy stąd $v_N = v_N(1)$. Ta rekursywna technika zwana indukcją wsteczną definiuje optymalną regułę zatrzymania τ^* w następujący sposób : należy zatrzymać się na obserwacji $Y_r = l$ chyba, że $v_N(r,l) > g_a(r,l)$. Inaczej, optymalny moment zatrzymania można podać, zadając optymalny zbiór zatrzymania się, to znaczy zbiór stanów, po osiągnięciu którego przez ciąg niezależnych zmiennych losowych Y_r, niezwłocznie należy zatrzymać się. Jest to zbiór stanów (r,l) takich, że $g_a(r,l) \geqslant v_N(r+1)$.

W naszym przypadku funkcja $g_a(r, l)$ dane przez (1.2) jest równa 0 dla $l > \min(a,r)$ i dodatnia dla $l \leqslant \min(a,r)$. Oznacza to, że szansa na wybranie interesującego nas obiektu istnieje tylko w stanach (r,l), w których $l \leqslant \min(a,r)$.

Niech $W_0 = (1,Y_1) = (1,1)$, $\gamma_t = \inf\{r > \gamma_{t-1}: Y_r \leq \min(a,r)\}$ $(\inf \emptyset = \infty)$ i $W_t = (\gamma_t, Y_{\gamma_t})$. Jeśli $\gamma_t = \infty$, to umówimy się, że $W_t = (\infty,\infty)$. W_t jest łańcuchem Markowa o następujących prawdopodobieństwach przejścia w jednym kroku :

$$
(1.8) \quad p(r,s) = P\{W_{t+1} = (s,1_s) \mid W_t = (r,1_r)\} = \begin{cases} \frac{1}{s}, & \text{gdy } r < a, s = r+1, \\ \frac{(r)_a}{(s)_{a+1}}, & \text{gdy } a \leq r < s, \\ 0, & \text{gdy } r \geq s \text{ lub } \\ & r < a, s \neq r+1, \end{cases}
$$

gdzie $(s)_a = s(s-1)(s-2)\ldots(s-a+1)$; $(s)_0 = 1$; oraz

$$
p(\infty,\infty) = 1, \; p(r,\infty) = 1 - a\sum_{s=r+1}^{N} p(r,s).
$$

Oznaczmy przez $P_{(r,1)}(\cdot)$ miarę probabilistyczną związaną z łańcuchem Markowa W_t, którego realizacje zaczynają się w stanie $(r,1)$, a przez $E_{(r,1)}$ wartość oczekiwaną względem tej miary. Ze wzoru (1.8) widać, że prawdopodobieństwa przejścia nie zależą od relatywnych rang, a jedynie od momentów r pojawienia się relatywnych rang $1 \leq \min(a,r)$.

Lemat 1.1.

$$
(1.9) \quad E\, v_N(r+1, Y_{r+1}) = E_{(r,1)} v_N(W_1) \quad \text{dla każdego } 1 \leq \min(a,r)
$$

Dowód:

Dowód przeprowadzimy metodą indukcji wstecznej. Dla $r = N-1$ bezpośrednie sprawdzenie pokazuje prawdziwość równości (1.9).

Załóżmy, że

$$
E\, v_N(s+1, Y_{s+1}) = E_{(s,1)} v_N(W_1) \text{ dla } s = N-1, N-2, \ldots, r+1.
$$

Wówczas

$$
E\, v_N(r+1, Y_{r+1}) = \frac{1}{r+1}\sum_{m=1}^{r+1} v_N(r+1,m) =
$$

$$
= \frac{r+1-a}{r+1} v_N(r+2) + \frac{1}{r+1}\sum_{m=1}^{a} v_N(r+1,m) =
$$

$$= \frac{r+1-a}{r+1}\, E\, v_N(r+2, Y_{r+2}) + \frac{1}{r+1}\sum_{m=1}^{a} v_N(r+1,m) =$$

$$= \frac{r+1-a}{r+1}\sum_{m=1}^{a}\sum_{i=r+2}^{N} p(r+1,i)\, v_N(i,m) + \frac{1}{r+1}\sum_{m=1}^{a} v_N(r+1,m) =$$

$$= \sum_{m=1}^{a}\Big(\sum_{i=r+2}^{N} p(r,i)\, v_N(i,m) + p(r,r+1)\, v_N(r+1,m)\Big) =$$

$$= \sum_{m=1}^{a}\sum_{i=r+2}^{N} p(r,i)\, v_N(i,m) =$$

$$= E_{(r,l)}\, v_N(W_1),$$

co dowodzi równości (1,9) dla $r = 1,2,\ldots, N$.

Niech $\Gamma_r = \{(s,l):\ s > r,\ g_a(s,l) \geqslant E_{(s,l)}\, v_N(W_1)\}$ i $\sigma_r = \inf_t\{t: W_t \in \Gamma_r\}$. Momentowi σ_r w klasie $\mathfrak{M}_{r+1}^{N}$ odpowiada moment $\tau^*_{r+1} = \inf_{s>r}\{s: (s, Y_s) \in \Gamma_r\}$. Moment τ^*_{r+1} jest optymalny w $\mathfrak{M}_{r+1}^{N}$ co wynika z definicji zbioru Γ_r. Z równości (1.7) i (1.9) mamy:

$$v_N(r+1) = E_{(r,l)}\, v_N(W_1),$$

natomiast z równości (1.6) i optymalności τ^*_{r+1} w $\mathfrak{M}_{r+1}^{N}$ otrzymujemy:

$$v_N(r+1) = E\, g_a(\tau^*_{r+1}, Y_{\tau^*_{r+1}}) = E_{(r,l)}\, g_a(W_{\sigma_r}).$$

Zatem

$$(1.10)\quad E_{(r,l)}\, v_N(W_1) = E_{(r,l)}\, g_a(W_{\sigma_r}).$$

Przy korzystaniu z równości (1.10) potrzebna jest znajomość rozkładów zmiennych losowych W_ν, gdzie $\nu = \inf_t\{t: W_t \in \Gamma\}$, a Γ jest zadanym podzbiorem zbioru stanów łańcucha W_t. Szczególnie interesujące będą rozkłady zmiennych losowych W_ν dla pewnych typów zbiorów Γ. Wprowadźmy oznaczenia :

$$\Gamma_{r,s}(k) = \{(u,l):\ r < u \leqslant s,\ l = m_1, m_2, \ldots, m_k\}$$

dla $k \leqslant a$; $m_i \leqslant a$, $i=1,2,\dots,k$; $1 \leqslant r < s \leqslant N$.

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_{r_{i-1}, r_i}(k_i)$$

oraz

$$\Gamma(i) = \bigcup_{j=i}^{n} \Gamma_{r_{j-1}, r_j}(k_j) .$$

Niech $\nu_{r,s}(k) = \inf\limits_t \{t: W_t \in \Gamma_{r,s}(k)\}$ i $\nu(i) = \inf\limits_t \{t: W_t \in \Gamma(i)\}$.

Dla $r' \leqslant r$, $1 \leqslant l' \leqslant a$ mamy :

$$(1.11) \quad P_{(r',l')}\{W_{\nu_{r,s}(k)} = (u,m_i)\} = \frac{(r)_k}{(u)_{k+1}} \quad \text{dla } r < u \leqslant s, i=1,2,\dots,k.$$

$$(1.12) \quad P_{(r',l')}\{W_{\nu(i)} = (u,l)\} = \begin{cases} \dfrac{(r_{i-1})_{k_i}}{(r_i)_{k_i}} P_{(r',l')}\{W_{\nu(i+1)} = (u,l)\} & \text{dla } (u,l) \in \Gamma(i+1) \\[2ex] \dfrac{(r_{i-1})_{k_i}}{(r_i)_{k_i+1}} & \text{dla } (u,l) \in \Gamma_{r_{i-1}, r_i}(k_i) \end{cases}$$

Pokażemy najpierw równość (1.11)

$$P_{(r',l')}\{W_{\nu_{r,s}(k)} = (u,m_i)\} = \frac{P\{Y_u = m_i, Y_t \neq m_j, r<t<u, j=1,2,\dots,k, Y_{r'} = l'\}}{P\{Y_{r'} = l'\}}$$

$$= \frac{(r)_k}{(u)_{k+1}} .$$

Ze wzoru (1.11) wynika natychmiast wzór (1.12) dla $(u,l) \in \Gamma_{r_{i-1}, r_i}(k_i)$

Drugą część wzoru (1.12) otrzymujemy w następujący sposób.

$$P_{(r',l')}\{W_{\nu(i)} = (u,l)\} =$$

$$= \frac{P\{Y_u = l, (t,Y_t) \notin \Gamma(i+1), r_i < t < u; (t,Y_t) \notin \Gamma_{r_{i-1}, r_i}(k_i), r_{i-1} < t \leqslant r_i, Y_{r'} = l'\}}{P\{Y_{r'} = l'\}} =$$

$$= P\{(t,Y_t) \notin \Gamma_{r_{i-1}, r_i}(k_i), r_{i-1} < t \leqslant r_i\} \frac{P\{Y_u = l, (t,Y_t) \notin \Gamma(i+1), r_i < t < u, Y_{r'} = l'\}}{P\{Y_{r'} = l'\}} =$$

$$= P\{(t,Y_t)\in\Gamma_{r_{i-1},r_i}(k_i), r_{i-1}<t\leq r_i\} P_{(r',l')}\{W_{\gamma(i+1)}=(u,l)\} =$$

$$= \frac{(r_{i-1})k_i}{(r_i)k_i} P_{(r',l')}\{W_{\gamma(i+1)}=(u,l)\} .$$

Wzory (1.11) i (1.12) pokazują w jaki sposób można rekurencyjnie otrzymać rozkłady W_γ dla $\gamma = \inf_t\{t: W_t\in\Gamma\}$ dla dowolnych zbiorów Γ.

Korzystając z (1.2), (1.4) - (1.7) lematu 1 i wzorów (1.11) i (1.12) zbiór optymalnego zatrzymania Γ w problemie wyboru a-tego obiektu z maksymalnym prawdopodobieństwem wyznaczamy następująco :

(i) $(N,l)\in\Gamma$ dla każdego l; $(N-1,l)\in\Gamma$ dla $l= a,a-1$ i nie należy dla $l\neq a,a-1$:

(ii) Załóżmy, że $(s,l)\in\Gamma$ dla $l = a,a-1$, $s>r$ i oznaczmy przez

(1.13) $\Gamma_r=\{(s,l): l=a,a-1,\ s>r\}$ oraz $\sigma_r = \inf_t\{t: W_t\in\Gamma_r\}$.

Założenie to oznacza, że

(1.14) $g_a(s,l)\geqslant E_{(s,l)}g_a(W_{\sigma_r})$ dla $s>r$, $l=a,a-1$

oraz

(1.15) $g_a(s,l) < E_{(s,l)}g_a(W_{\sigma_r})$ dla $s>r, l\neq a,a-1$.

(iii) Założenie indukcyjne w postaci (ii) jest słuszne tak długo, dopóki prawdziwe są nierówności (1.14) i (1.15). Niech $r=r_o$ będzie największym r takim, dla którego nastąpiła zmiana znaku w nierówności (1.14) bądź (1.15).

a/. Jeśli zmiana znaku nierówności wystąpiła dla nierówności (1.14), to założenie indukcyjne dla $r=r_o$ zmieni się w następujący sposób : podzbiorem zbioru optymalnego zatrzymania będzie $\Gamma_{r_o-1}=\Gamma_{r_o-1,r_o}(1)\cup\Gamma_{r_o,N}(2)$, gdzie $\Gamma_{r_o-1,r_o}(1)=\{(r_o,l)\}$, a l jest numerem nierówności która nie zmieniła znaku ; $\Gamma_{r_o,N}(2)=\Gamma_{r_o}$ dane jest wzorem (1.13).

b/. Jeśli zmienią znak nierówności (1.15), to $\Gamma_{r_0-1} = \Gamma_{r_0-1,r_0}(k) \cup \cup \Gamma_{r_0,N}(2)$, gdzie k-2 jest liczbą tych nierówności (1.15) które zmieniły znak w r_0. Jeśli będą to nierówności o numerach $l = m_1, m_2, \dots, m_{k-2}$, to $\Gamma_{r_0-1,r_0}(k) = \{(r_0,l): l = a, a-1, m_1, m_2, \dots, m_{k-2}\}$.

c/. Jeśli w chwili r_0 nie zmienią znaku nierówności typu (1.14) o numerach $l = m_1', m_2', \dots, m_{k_1}'$ i zmienią znak nierówności typu (1.15) o numerach $l = m_1'', m_2'', \dots, m_{k_2}''$, to $\Gamma_{r_0-1} = \Gamma_{r_0-1,r_0}(k_1+k_2) \cup \Gamma_{r_0,N}(2)$, gdzie $\Gamma_{r_0-1,r_0}(k_1+k_2) = \{(r_0,l): l = m_1', m_2', \dots, m_{k_1}', m_1'', m_2'', \dots, m_{k_2}''\}$.

Traktując dalej jako początkowy punkt indukcji wstecznej (r_0,l) i iterując postępowanie podane w (ii) i (iii) wyznaczymy cały zbiór Γ w momencie osiągnięcia stanu (1.1). $E_{(s,l)} g_a(W_{\sigma_r})$ liczymy zgodnie z rozkładami prawdopodobieństwa danymi rekurencyjnie przez (1.11) i (1.12).

Przykład 1.1.

Niech a=1, wówczas $g_1(s,1) = \frac{s}{N}$ i prawdopodobieństwa przejścia dane są wzorem:

$$p(r,s) = \begin{cases} \frac{r}{s(s-1)} & \text{dla } s > r, \\ 0 & \text{dla } s \leq r, \end{cases}$$

$$p(r,\infty) = 1 - \sum_{s=r+1}^{N} \frac{r}{s(s-1)} \qquad p(\infty,\infty) = 1 .$$

Otrzymujemy zatem $v_N(N-1,1) = \frac{N-1}{N} = g_1(N-1,1)$ i wobec tego (N-1,1) należy do obszaru optymalnego zatrzymania. Załóżmy dla indukcji wstecznej, że obszar optymalnego zatrzymania zawiera $\Gamma_r = \{(s,1): s = r+1, r+2, \dots, N\}$ i $\sigma_r = \inf_t \{t: W_t \in \Gamma_r\}$. Ze wzoru (1.11) mamy

$$P_{(r,1)}\{W_{\sigma_r} = (u,1)\} = \frac{r}{u(u-1)} \quad \text{dla } (u,1) \in \Gamma_r$$

oraz

$$E_{(r,1)} g_1(W_{\sigma_r}) = \frac{r}{N} \sum_{u=r+1}^{N} \frac{1}{u-1}$$

Nierówność

$$g_1(r,1) \geqslant E_{(r,1)} g_1(W_{\sigma_r})$$

jest prawdziwa, gdy tylko

$$(1.16) \quad \sum_{u=r+1}^{N} \frac{1}{u-1} \leqslant 1 .$$

Niech r_α będzie najmniejszym r takim, dla którego (1.16) jest spełniony. $\Gamma_{r_\alpha - 1}$ jest obszarem optymalnego zatrzymania. Należy więc w optymalnym postępowaniu przepuścić $r_\alpha - 1$ obiektów nie wybierając żadnego i wybrać pierwszy relatywnie najlepszy, który pojawi się po obiekcie $r_\alpha - 1$. $\frac{r_\alpha}{N}$ dąży do e^{-1} gdy N dąży do nieskończoności. Również $\lim_{N\to\infty} v_N = e^{-1}$. Przykład ten, to klasyczny " problem sekretarki ".

Przykład 1.2.

Chcemy wybrać obiekt o absolutnej randze a = 2. W tym przypadku

$$g_2(r,l) = \begin{cases} \frac{r(N-r)}{N(N-1)} & \text{gdy } l = 1, \\ \frac{r(r-1)}{N(N-1)} & \text{gdy } l = 2 \end{cases}$$

oraz

$$p(r,s) = \begin{cases} \frac{1}{s} & \text{dla } r < 2,\ s = r+1, \\ \frac{r(r-1)}{s(s-1)(s-2)} & \text{dla } s > r, \\ 0 & \text{dla } r \leqslant s \text{ lub } s > r, r < 2, s \neq r+1. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że $v_N(N-1,l) = g_2(N-1,l)$ dla $l = 1,2$.

Załóżmy dla indukcji wstecznej, że obszar optymalnego zatrzymania zawiera $\Gamma_r = \{(s,l): l = 1,2;\ r < s \leqslant N\}$. Oznaczymy przez σ_r moment pierwszego osiągnięcia Γ_r przez W_t. Ze wzoru (1.11) otrzymujemy :

$$P_{(r,1)}\{W_{\delta_r} = (u,m)\} = p(r,u) \quad \text{dla} \quad u > r;\ 1,m = 1,2$$

oraz

$$E_{(r,1)} g_2(W_{\delta_r}) = \sum_{u=r+1}^{N} p(r,u)\left[g_2(u,1) + g_2(u,2)\right] =$$

$$= \frac{r(r-1)}{N} \sum_{u=r+1}^{N} \frac{1}{(u-1)(u-2)} = \frac{r(N-r)}{N(N-1)} = g_2(r,1)\ .$$

Wobec powyższych wzorów, jako pierwsza zmieni znak nierówność $v_N(r+1) \leqslant g_2(r,2)$, tzn. $\frac{r(N-r)}{N(N-1)} \leqslant \frac{r(r-1)}{N(N-1)}$, a więc $r \geqslant \frac{N+1}{2}$.

Niech $r_\alpha = \min\left\{r:\ r \geqslant \frac{N+1}{2}\right\}$. Dla $r \geqslant r_\alpha$, $v_N(r,1) = g_2(r,1), 1=1,2$

więc $\Gamma_{r_\alpha - 1}$ jest zawarte w obszarze optymalnego zatrzymania. Załóżmy dla indukcji wstecznej, że również zbiór

$$\Gamma_{r_1} = \Gamma_{r_\alpha - 1} \cup \{(s,1)\ :\ r_1 < s < r_\alpha\}$$

jest zawarty w obszarze optymalnego zatrzymania. Z (1.12) otrzymujemy

$$P_{(s,1)}\{W_{\delta_r} = (u,m)\} = \begin{cases} \dfrac{r_1}{u(u-1)} & \text{dla } r_1 < u < r_\alpha, s \leqslant r_1, m=1, \\[2ex] \dfrac{r_1(r_\alpha - 2)}{u(u-1)(u-2)} & \text{dla } r_\alpha \leqslant u \leqslant N, m=1,2; s \leqslant r_1, \end{cases}$$

oraz

$$E_{(s,1)} g_2(W_{\delta_{r_1}}) = \sum_{u=r_1+1}^{r_\alpha - 1} \frac{r_1}{u(u-1)} \frac{u(N-u)}{N(N-1)} + \sum_{u=r_\alpha}^{N} \frac{r_1(r_\alpha - 2)}{u(u-1)(u-2)} \frac{u}{N} =$$

$$= \frac{r_1}{N(N-1)} \sum_{u=r_1+1}^{r_\alpha - 1} \frac{N-u}{u-1} + \frac{r_1}{r_\alpha - 1} \frac{(r_\alpha - 1)(N - r_\alpha + 1)}{N(N-1)}\ .$$

Ponieważ $v_N(r_1+1) = E_{(r,1)} g_2(W_{\delta_{r_1}})$ jest nierosnącą funkcją r_1, a $g_2(r_1,2)$ jest funkcją rosnącą, to $v_N(r_1+1) > g_2(r_1,2)$ dla $r_1 < r_\alpha$ ponieważ $v_N(r_\alpha) > g_2(r_\alpha - 1, 2)$. $v_N(r_1 + 1) \leqslant g_2(r,1)$ dla $r_1 = r_\beta = r_\alpha - 1$ i $v_N(r_1+1) > g_2(r_1,1)$ dla $r_1 < r_\beta$. Stąd obszarem optymalnego zatrzymania jest $\Gamma_{r_\beta - 1}$. Zarówno $\frac{r_\alpha}{N}$ jak i $\frac{r_\beta}{N}$ dąży do $\frac{1}{2}$ gdy N dąży do nieskończoności i

$$\lim_{N\to\infty} v_N = \lim_{N\to\infty} \frac{(r_\beta-1)(N-r_\alpha+1)}{N(N-1)} = \frac{1}{4} .$$

1.3. Asymptotycznie optymalne rozwiązanie.

Już w przypadku a = 2 widać, że dla dużych a wyznaczenie dokładne zbioru optymalnego zatrzymania będzie uciążliwe. Celem dalszych rozważań będzie podanie możliwie prostego sposobu wyznaczenia asymptotycznie optymalnej strategii wyboru a-tego obiektu. W tym celu zamiast łańcucha $(W_t, \mathcal{F}_t, P_{(1,1)})$ o zbiorze stanów $\{1,2,\ldots, N\} \times \{1,2,\ldots, a\}$ rozpatrzymy równoważny mu łańcuch $(W'_t, \mathcal{F}'_t, P_{(\frac{1}{N},1)})$ ze zbiorem stanów $\{\frac{1}{N},\frac{2}{N},\ldots,1\}\times\{1,2,\ldots,a\}$ Funkcja wypłaty $g_a([Nx],l)$ dąży jednostajnie przy N dążącym do nieskończoności, do

$$(1.17)\qquad g_a(x,l) = \binom{a-1}{l-1} x^l (1-x)^{a-l} , \quad l= 1,2,\ldots,a .$$

Zatem jeżeli N dąży do nieskończoności i $\frac{r}{N}$ dąży do $x\in(0,1]$, to

$$E_{(\frac{r}{N},l')} g_a(W'_1) = \sum_{l=1}^{a} \sum_{s=r+1}^{N} p(r,s)\, g_a(s,l) , \quad r\geqslant a$$

dąży jednostajnie do $E_{(x,l')} g_a(W''_1)$, gdzie $(W''_t, \mathcal{F}_t, P_{(x,1)})$ jest łańcuchem Markowa o stanach $(0,1]\times\{1,2,\ldots, a\}$ i gęstości prawdopodobieństw przejścia

$$(1.18)\qquad p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^a}{y^{a+1}} & \text{dla } 0\quad x< y\leqslant 1 , \\ 0 & \text{dla } \quad x\geqslant y, \end{cases}$$

a

$$E_{(x,l')} g_a(W''_1) = \sum_{l=1}^{a} \int_x^1 p(x,y)\, g_a(y,l)\, dy$$

Równania rekursywne (1.4) - (1.7) zastąpimy teraz równaniami :

(1.19) $v(1) = 0$,

(1.20) $v(x,l) = \max\left\{g_a(x,l)\,,\ E_{(x,l)}\, v(W_1'')\right\}$,

(1.21) $v(x) = E_{(x,1)}\, v(W_1'')$,

gdzie $v(x,l)$ jest granicą $v_N(r,l)$ gdy $\frac{r}{N}$ dąży do $x \in (0,1]$, a $v(x)$ granicą $v_N([Nx])$, gdy N dąży do nieskończoności. Ponieważ funkcja $v_N(r)$ jest nierosnącą funkcją r, więc $v(x)$ jest nierosnącą funkcją $x \in (0,1)$. Wyznaczenie dsymptotycznie optymalnej strategii wyboru a- tego obiektu będzie polegało na rozwiązaniu równań rekursywnych (1.19)$\div$(1.21) . Wzory (1.11) i (1.12) uzyskane dla ustalonego N, gdy N dąży do nieskończoności i $\frac{r}{N}$ dąży do x przejdą w odpowiednie warunkowe gęstości.

(1.22) $f_{(x',l')}\big((y\ m_i)\big) = \dfrac{x^k}{y^{k+1}}$ dla $x' \leqslant x < y \leqslant 1$, $i = 1,2,\ldots,k$,

1.23 $$f_{(x',l')}\big((y,l)\big) = \begin{cases} \dfrac{x_{i-1}^{k_i}}{x_i^{k_i}}\, f_{(x',l')}\big((y,l)\big) & \text{dla } (y,l) \in \Gamma'(i+1)\ , \\[2ex] \dfrac{x_{i-1}^{k_i}}{y^{k_i+1}} & \text{dla } (y,l) \in \Gamma_{x_{i-1},x_i}(k_i)\ , \end{cases}$$

gdzie $\Gamma_{x,z}(k) = \{(y,l): x < y \leq z,\ l = m_1, m_2, \ldots, m_k\}$, $\Gamma'(i+1) = \bigcup_{j=i}^{n} \Gamma_{x_{j-1},x_j}(k_j)$.

Przykład 1.3.

Niech a = 3. Wówczas

$$g_3(x,l) = \begin{cases} x(1-x)^2 & \text{dla } l = 1, \\ 2x^2(1-x) & \text{dla } l = 2, \\ x^3 & \text{dla } l = 3. \end{cases}$$

Z równań (1.19)$\div$ 1.21 otrzymujemy, że $v(x,l) = g_3(x,l)$ dla $l = 2,3$ i $v(x,l) \neq g_3(x,l)$ w lewostronnym otoczeniu 1. Wynika to również z faktu, że dla $x < 1$ $v(x) > 0$, a funkcja $g_3(r,l)$ dla $r = N-1$ i $l = 1$ jest równa 0. Możemy zatem założyć, że obszar optymalnego zatrzymania zawiera $\Gamma_x^1 = \{(y,l): l = 2,3,\ x < y \leq 1\} = 2,3$

i $\sigma_1 = \inf\{t: W_t'' \in \Gamma_x^{\,1}\}$.

Ze wzoru (1.22) otrzymujemy :

$$f_{(x',l')}((y,l)) = \frac{x^2}{y^3} \quad \text{dla } (y,l)\in\Gamma_x^{\,1},\ x'\leqslant x$$

oraz

$$v(x) = -x^2\,(2\ln x + 1-x) .$$

Niech

$$h_l(x) = g_3(x,l) - v(x) \text{ dla } l=1,2,3.$$

$h_1(x)<0$ dla $x\in(0,1)$. Funkcja $h_2(x)$ jest nieujemna w $[x_2,1]$, gdzie x_2 jest pierwiastkiem równania $2\ln x = 3x-3$. Pierwiastek równania $h_3(x) = 0$ jest równy $x_3 = \alpha = e^{-\frac{1}{2}}$. Funkcja $h_3(x) \geqslant 0$ dla $x\geqslant x_3$ i $h_2(x_3) = \frac{1}{e}\,(2 - 3e^{-\frac{1}{2}})>0$ więc $x_3 > x_2$. Załóżmy dalej, że podzbiór

$$\Gamma_x^{\,2} = \Gamma_{x,\alpha^-}(1)\cup\Gamma_{\alpha^+,1}(2) = \{(y,l):\ x<y<\alpha,\ l=2;\ \alpha\leqslant y\leqslant 1,\ l=2,3\}$$

jest podzbiorem zbioru optymalnego zatrzymania i

$$\sigma_2 = \inf\{t: W_t''\in\Gamma_x^{\,2}\} .$$

((α^+) α^- w symbolu $\Gamma_{x,\alpha^-}(k)$ oznacza, że punkty (α,l) /należą/ nie należą do zbioru $\Gamma_{x,\alpha}(k)$) .

Ze wzoru (1.23) mamy :

$$f_{(x',l')}((y,l)) = \begin{cases} \dfrac{x}{y^2} & \text{dla } (y,l)\in\Gamma_{x,\alpha^-}(1) \\[2ex] \dfrac{x\cdot\alpha}{y^3} & \text{dla } (y,l)\in\Gamma_{\alpha^+,1}(2) , \end{cases}$$

i

$$v(x) = E_{(x,l)}\,g_3(W''_{\sigma_2}) = \int_x^{\alpha} \frac{x}{y^2}\,2y^2(1-y)\,dy \ +$$

$$+\int_{\alpha}^{1} \frac{\alpha\cdot x}{y^3}\left[y^3 + 2y^2(1-y)\right]dy = x\left[(\alpha - x)(2-\alpha-x) - \alpha(2\ln\alpha - \alpha + 1)\right] .$$

Zbadajmy różnicę

$$h_2(x) = g_3(x,2) - v(x) = x\left[2x(1-x) - (\alpha - x)(2-\alpha-x) + \alpha(2\ln\alpha - \alpha + 1)\right] =$$
$$= x\, l_2(x) .$$

Równanie $l_2(x) = 0$ ma pierwiastek $\beta = \frac{2-\sqrt{4-6\alpha}}{3} = 0{,}4664$ i $l_2(x) > 0$ dla $x \in (\beta,\alpha)$, $l_2(x) < 0$ dla $x \in (0,\beta)$. $h_1(x) < 0$ dla $x < \alpha$ ponieważ $E_{(x,1)} g_3(W''_{6_1}) \leqslant v(x)$ dla $x < \alpha$. Wobec tego Γ^2_β jest obszarem optymalnego zatrzymania i dla dużych N, asymptotycznie optymalne postępowanie przy wyborze absolutnie trzeciego obiektu będzie polegało na zatrzymaniu się przy osiągnięciu po raz pierwszy obszaru $\Gamma_{\tau_\beta - 1} = \Gamma_{\tau_\beta-1,\tau_\alpha-1}(1) \cup \Gamma_{\tau_\alpha-1,N}(2) = \{(s,l): \tau_\beta \leqslant s \leqslant \tau_\alpha, l=2;\ \tau_\alpha \leqslant s \leqslant N, l=2,3\}$,
gdzie $\tau_\alpha \cong \alpha \cdot N$, a $\tau_\beta \cong \beta N$

Graniczne prawdopodobieństwo otrzymania absolutnie trzeciego obiektu przy zastosowaniu asymptotycznie optymalnej strategii jest równe :

$$\lim_{N\to\infty} v_N(1) = v = E_{(x',1')} g_3(W''_{6_2}) = \beta\left[(\alpha-\beta)(2-\alpha-\beta) + \alpha^2\right] \cong 0{,}2322 .$$

Stąd widać, że przy optymalnym wyborze obiektu 3-go dla dużych N pod uwagę wystarczy brać tylko biekty o relatywnej randze 2 i 3. Do momentu badania $r_\beta - 1$ obiektu nie wybieramy żadnego obiektu, od chwili τ_β wybieramy pierwszy relatywnie drugi, który pojawi się, a od chwili τ_α również relatywnie trzeci, o ile wcześniej nie wybraliśmy żadnego obiektu i nasze postępowanie nie zakończyło się.

Dla bliższego poznania strategii optymalnej przy $a \geqslant 4$ zbadamy rodzinę funkcji $g_a(x,l)$, $l = 1,2,\ldots,a$, $x \in (0,1]$.

Lemat 1.2.

Rodzina funkcji $g_a(x,l)$, $l = 1,2,\ldots,a$, $x \in (0,1)$ określona przez (1.17) ma następujące własności :

(i) Funkcja $g_a(x,l)$ ma dokładnie jedno maksimum w $(0,1]$ w punkcie

$$x_l = \frac{l}{a} \quad \text{dla } l = 1,2,\dots,a$$

oraz

$$g_l(0) = g_l(1) = 0 \text{ dla } l=1,2,\dots,a-1 \text{ i } g_a(0) = 0, g_a(1) = 1.$$

(ii) Wartości maksimów funkcji z tej rodziny rosną wraz z l.

(iii) l - ta funkcja przecina się z $l+1$-wszą w $(0,1)$ w maksimum funkcji l-tej. Jest tojedyny punkt przecięcia tych funkcji w $(0,1)$.

Łatwy dowód lematu pomijamy.

Wniosek 1.

Z lematu 2 i tego, że $v(x)$ jest nierosnąca, ciągła i $v(x) \geq 0$ i istnieje taki punkt x_0, że dla $x < x_0$, $g_a(x,l) < v(x)$ dla każdego l. Oznacza to, że asymptotycznie optymalna strategia wymaga, aby nie wybierać żadnego obiektu, aż do chwili $k_0 \cong [Nx_0]$.

Niech

$$\Gamma_x^1 = \{(y,l) : l=a,a-1;\ x < y \leq 1\}$$

i $\sigma_1 = \inf\{t : W_t'' \in \Gamma_x^1\}$.

Ze wzoru (1.22) otrzymujemy :

$$E_{(x,l)} g_a(W''_{\sigma_1}) = \int_x^1 \frac{x^2}{y^3}\left[y^a + (a-1)y^{a-1}(1-y)\right]dy =$$

$$= x^2\left[\frac{2}{a-3} + x^{a-2} - \frac{a-1}{a-3}x^{a-3}\right].$$

Dla $a \geq 4$ w lewostronnym otoczeniu $x=1$ mamy / z wyłączeniem samej jedynki / $g_a(x,l) \geq E_{(x,l)} g_a(W''_\sigma)$ dla $l=a,a-1$ i $g_a(x,l) < E_{(x,l)} g_a(W''_{\sigma_1})$ dla $l \neq a,a-1$. Wynika stąd, że w pewnym otoczeniu jedynki Γ_x^1 jest podzbiorem zbioru optymalnego zatrzymania. Należało spodziewać się tego, ponieważ dla $a \geq 4$ $v_N(N-1,a) = g_a(N-1,a)$ i $v_N(N-1,a-1) = g_a(N-1,a-1)$ gdy $N > a$ i $v_N(N-1,l) \neq g_a(N-1,l)$ dla $l \neq a,a-1$. Rozpatrzmy rodzinę równań :

(1.24) $E_{(x,l)}g_a(W''_{\sigma_1}) - g_a(x,l) = 0,\ l = 1,2,\dots,a$

i oznaczmy przez α maksymalny pierwiastek równań (1.24) w $(0,1)$
Oznaczmy przez α_l maksymalny pierwiastek równania l-tego z (1.24) w $(0,1)$. Jeżeli równanie nie ma pierwiastka w $(0,1)$ przyjmujemy $\alpha_l = 0$.

Lemat 1.3.

(1.25) $\max\{\alpha_l\} = \max\{\alpha_a, \alpha_{a-2}\}$ dla $a \geqslant 4$.

Dowód :

Z lematu 2 i tego, że $E_{(1,l)}g_a(W''_{\sigma_1}) - g_a(1,l) = 0$ dla $l = 1,2,\dots, a-1$ mamy

$$\max_{1\leqslant l\leqslant a}\{\alpha_l\} = \max\{\alpha_a, \alpha_{a-1}, \alpha_{a-2}\},$$

ponieważ $v(x) \geqslant g_a(x,l)$ dla $l \neq a, a-1$ i $v(x) \leqslant g_a(x,l)$ dla $l = a, a-1$ i x należących do dostatecznie małego otoczenia $x=1$. Funkcja

(1.26) $E_{(x,l)}g_a(W''_{\sigma_1}) - g_a(x,a-1) =$
$$= x^2\left[\frac{2}{a-3} - \frac{(a-1)(a-2)}{a-3}x^{a-3} + ax^{a-2}\right] = x^2\, b(x)$$

ma następujące własności. Zmiana znaku (1.26) w $(0,1)$ jest równoważna zmianie znaku przez $b(x)$. Funkcja $b(x)$ ma jedyne minimum w $\frac{a-1}{a}$, $b(0) > 0$, $b(1) = 0$, więc $\alpha_{a-1} < \frac{a-1}{a}$. Dla $x > \alpha_{a-1}$, (1.26) jest ujemne. Ponieważ $g_a(x,a) > g_a(x,a-1)$ dla $x > \frac{a-1}{a} > \alpha_{a-1}$, więc $\alpha_a > \alpha_{a-1}$. To pokazuje (1.25).

Wniosek 2.

Na każdym etapie wyznaczania optymalnej procedury poszukiwania a-tego obiektu wystarczy badać co najwyżej trzy nierówności (1.14) i (1.15). Wynika to z lematu 2 i monotoniczności $v(x)$.

Przykład 1.4.

Niech $a = 4$. Wówczas $\alpha = \max\{\alpha_4, \alpha_2\} = \alpha_4 = \frac{2}{3}$.

Oznaczmy przez $\Gamma_x^2 = \Gamma_{x,\alpha^-}(1) \cup \Gamma_{\alpha^+,1}(2)$, gdzie $\Gamma_{x,\alpha^-}(1) = \{(y,l) : x < y < \alpha, l=3\}$, a $\Gamma_{\alpha^+,1}(2) = \{(y,l) : \alpha \leq y \leq 1, l=4,3\}$ oraz $\sigma_2 = \inf_t\{t : W_t'' \in \Gamma_x^2\}$.

Ze wzoru (1.23) mamy :

$$f_{(x,l)}((y,l)) = \begin{cases} \dfrac{x}{y^2} & \text{gdy } x < y < \alpha \text{ , } l=3 \text{ ,} \\ \dfrac{\alpha x}{y^3} & \text{gdy } \alpha \leq y \leq 1, \ l=4,3, \end{cases}$$

oraz

$$E_{(x,l)} g_a(W''_{\sigma_1}) = \frac{3}{2} x(\alpha^2 - x^2) + x^4 \overset{df}{=} d(x) \quad .$$

dla $x \in (0,\alpha)$, $d(x) > g_4(x , 4)$. Zbadajmy następujące różnice:

$$c_l(x) = d(x) - g_a(x,l) \text{ dla } x \in (0,\alpha), \ l = 2,3 \ .$$

Równanie $c_3(x) = 0$ ma w $(0,\alpha)$ pierwiastek $\beta = 0{,}5286$, a funkcja $c_2(x)$ ma dodatnie jedyne minimum w $(0,\alpha)$ w punkcie $x = \frac{1}{2}$, więc $c_2(x) > 0$ dla $x \in (0,\alpha)$. Stąd $\Gamma_{\beta^+}^2$ jest zbiorem optymalnego zatrzymania.

$$v = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \frac{r}{N} \to 0}} v_N(r) = d(\beta) = \frac{3}{2}\beta(\alpha^2 - \beta^2) + \beta^4 \cong 0{,}2089$$

W przypadku skończonym asymptotycznie optymalne postępowanie polega na zatrzymaniu się po osiągnięciu po raz pierwszy zbioru $\Gamma_{[N\beta]-1,[N\alpha]-1}(1) \cup \Gamma_{[N\alpha]-1,N}(2)$. Inaczej, należy przepuścić $[N\beta]$ obiektów, następnie wybrać pierwszy relatywnie trzeci, który pojawi się po obiekcie $[N\beta]$, a od obiektu $[N\alpha]$ również wybierać obiekt relatywnie czwarty.

Przykład 1.5.

Niech $a = 5$. / Rysunek 1 /. Wówczas $\alpha_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071$, a $\alpha_3 = \frac{5+\sqrt{5}}{10} = 0{,}7236$ i na podstawie lematu 3 $\alpha = \alpha_3$. Niech

$$\Gamma_x^{\,2} = \{(y,l) : \alpha < y \leqslant 1;\ l = 4,5\ ;\ x < y \leqslant \alpha,\ l = 3,4,5\}$$

i

$$\sigma_2 = \inf_t \{t:\ W''_t \in \Gamma_x^{\,2}\}\ .$$

Ze wzorów (1.22) i (1.23) mamy

$$f_{(x,l)}((y,l)) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{y^4} & \text{dla } x < y \leqslant \alpha, l = 3,4,5, \\ \dfrac{x^3}{\alpha^3}\dfrac{\alpha^2}{y^3} & \text{dla } \alpha < y \leqslant 1, l = 4,5, \end{cases}$$

i

$$E_{(x,l)}\, g_5(W''_{\sigma_2}) = x^3\left[\tfrac{5}{2}\alpha^2 - 10\alpha + \tfrac{1}{\alpha} + 6\ln\alpha + 8x - \tfrac{3}{2}x^2 - 6\ln x\right]$$

Niech

$$b_l(x) = E_{(x,l)}\, g_5\,(W''_{\sigma_2}) - g_5(x,l)\ ,\ l = 1,2,\dots,5.$$

Rozwiązując równania $b_l(x) = 0$ dla $l = 2,3$ i 5 w $(0,\alpha)$ otrzymujemy, że największy pierwiastek występuje dla $l=5$ i wynosi $\beta = 0{,}7071$, a $E_{(\beta,l)}\, g_5(W''_{\sigma_2}) = 0{,}1768$.

Niech teraz

$$\Gamma_x^{\,3} = \Gamma_\beta^{1} \cup \{(y,l) : x < y < \beta,\ l = 3,4\}$$

i

$$\sigma_3 = \inf\{t:\ W''_t \in \Gamma_x^{\,3}\}\ .$$

Ze wzorów (1.22) i (1.23) otrzymujemy :

$$f_{(x,l)}((y,l)) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{y^3} & \text{dla } x < y < \beta,\ l = 3,4\ , \\ \dfrac{x^2}{\beta^2}\dfrac{\beta^3}{y^4} & \text{dla } \beta \leqslant y \leqslant \alpha,\ l = 3,4,5, \\ \dfrac{x^2}{\beta^2}\dfrac{\beta^3}{\alpha^3}\dfrac{\alpha^2}{y^3} & \text{dla } \alpha < y \leqslant 1,\ l = 4,5, \end{cases}$$

i

$$E_{(x,l)}\, g_5(W''_{\sigma_3}) = x^2\left[-6x + 4x^2 - \tfrac{2}{3}\cdot x^3 + 6\beta - 4\beta^2 + \tfrac{2}{3}\beta^3 + \frac{E_{(\beta,l)} g_5(W''_{\sigma_2})}{\beta^2}\right]$$

Ponieważ

$$(1.27)\quad \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} g_5(x,2) < E_{(\beta,l)}\, g_5(W''_{\sigma_2})$$

więc należy zbadać następujące funkcje w $(0,\beta)$:

$$c_l(x) = E_{(x,l)} g_5(W''_{\sigma_3}) - g_5(x,l) \text{ dla } l = 3,4$$

aby wyznaczyć zbiór optymalnego zatrzymania. Funkcja $\frac{c_3(x)}{x^2}$ ma ujemne minimum w punkcie $x = 0,6$, jest ujemna w $x = \beta$, rosnąca w przedziale $(0,6, \beta)$, punkt $x = 0,6$ jest punktem przecięcia funkcji $g_5(x,3)$ i $g_5(x,4)$ /lemat 2 / i dlatego pierwiatek równania $c_3(x) = 0$ jest mniejszy niż pierwiastek równania $c_4(x) = 0$. Rozwiązaniem tego ostatniego równania jest $\gamma = 0,5809$, a $E_{(\gamma,1)} g_5(W''_{\sigma_3}) = 0,1909$.

Niech

$$\Gamma_x^4 = \Gamma^3_{\gamma+} \cup \{(y,3) : x < y < \gamma\}$$

i

$$\sigma_4 = \inf_{t} \{t: W''_t \in \Gamma_x^4\}.$$

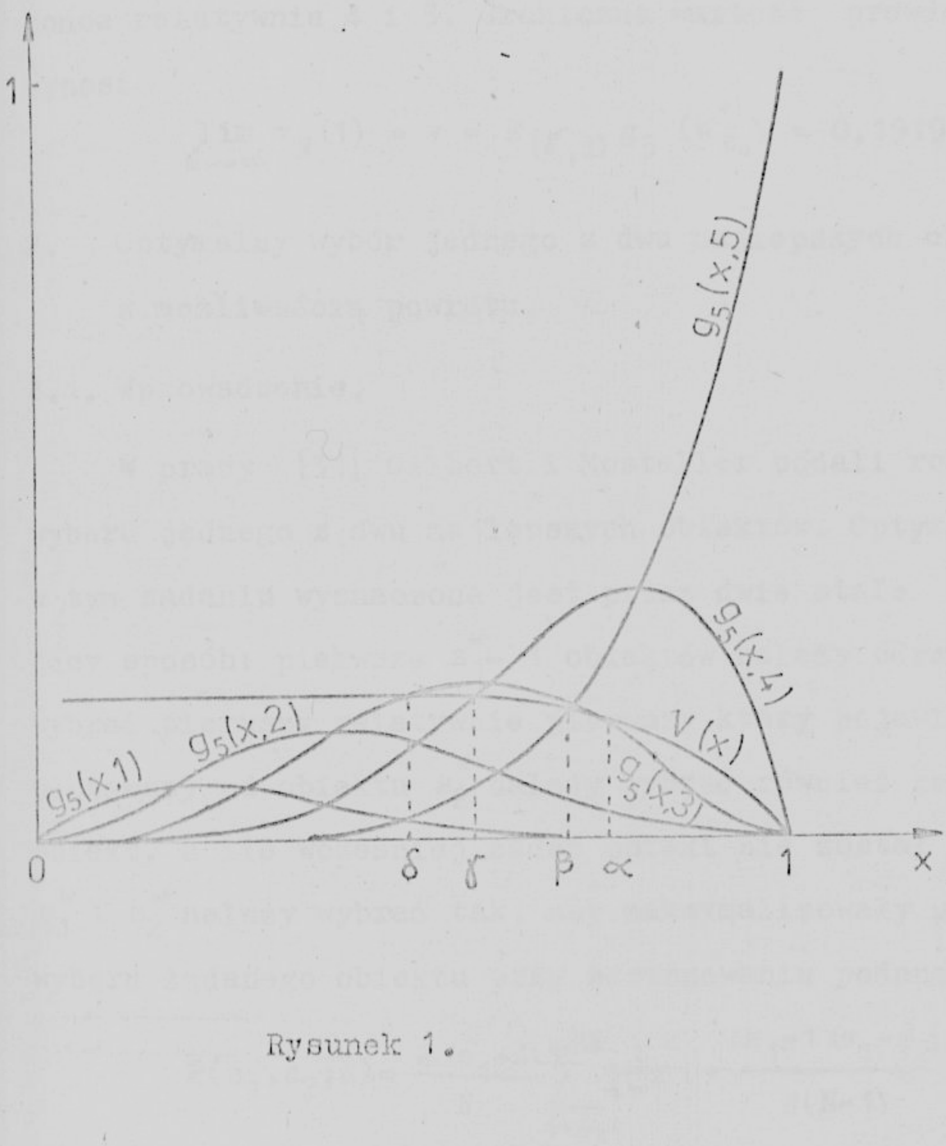
Ze wzorów (1.22) i (1.23) mamy

$$f_{(x,1)}((y,l)) = \begin{cases} \frac{x}{y^2} & \text{dla } x < y < \gamma,\ l = 3, \\ \frac{x}{\gamma}\frac{\gamma^2}{y^3} & \text{dla } \gamma \leq y < \beta,\ l = 3,4 \\ \frac{x}{\gamma}\frac{\gamma^2}{\beta^2}\frac{\beta^3}{y^4} & \text{dla } \beta \leq y \leq \alpha,\ l = 3,4,5, \\ \frac{x}{\gamma}\frac{\gamma^2}{\beta^2}\frac{\beta^3}{\alpha^3}\frac{\alpha^2}{y^3} & \text{dla } \beta < y \leq 1,\ l = 4,5 \end{cases}$$

i

$$E_{(x,1)} g_5(W''_{\sigma_4}) = x\left[-\frac{3}{2}x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 3\gamma^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 + \frac{E_{(\gamma,1)} g_5(W''_{\sigma_3})}{\gamma}\right]$$

Ponieważ funkcja $v(x)$ jest malejąca i mamy (1.27), $v(\beta) = E_{(\beta,1)} g_5(W''_{\sigma_2})$, więc wystarczy rozpatrzyć tylko rówanie $E_{(x,1)} g_5(W''_{\sigma_4}) - g_5(x,3) = 0$. Największy pierwiastek tego równania mniejszy od γ jest równy $\delta = 0,5124$ i $E_{(\delta,1)} g_5(W''_{\sigma_4}) = 0,1919$. Zatem zbiór optymalnego zatrzymania dla a = 5 to $\Gamma^3_{\delta+}$. Wynika stąd, że asymptotycznie optymalne postępowanie jest następujące : przepuszczamy $[N\delta]$ obiektów, następnie wybieramy pierwszy relatywnie trzeci obiekt jaki się pojawi ; od obiektu $[N\gamma]$ wybieramy również



Rysunek 1.

relatywnie czwarty obiekt, między obiektami $[N\beta]$ i $[N\alpha]$ wybieramy obiekty relatywnie trzeci, czwarty i piąty, a od obiektu $[N\alpha]$ do końca relatywnie 4 i 5. Graniczna wartość prawdopodobieństwa wynosi

$$\lim_{N\to\infty} v_N(1) = v = E_{(\delta,1)}\, g_5\,(W''_{\delta_4}) = 0{,}1919\ .$$

2. Optymalny wybór jednego z dwu najlepszych obiektów z możliwością powrotu.

2.1. Wprowadzenie.

W pracy [31] Gilbert i Mosteller podali rozwiązanie problemu wyboru jednego z dwu najlepszych obiektów. Optymalna strategia w tym zadaniu wyznaczona jest przez dwie stałe s_1^* i s_2^* w następujący sposób: pierwsze $s_1^* - 1$ obiektów należy odrzucić: następnie wybrać pierwszy relatywnie pierwszy który pojawi się po chwili s_1^*; począwszy od obiektu s_2^* należy wybrać również relatywnie drugi obiekt, o ile wcześniej żaden obiekt nie został wybrany. Stałe s_1^* i s_2^* należy wybrać tak, aby maksymalizowały prawdopodobieństwo wyboru żądanego obiektu przy zastosowaniu podanej strategii ($s_1^* \leqslant s_2^*$):

$$P(s_1, s_2; N) = \frac{2(s_1-1)}{N}\sum_{i=s_1}^{s_2}\frac{1}{i-1} + \frac{(s_1-1)(s_1-s_2)}{N(N-1)} + \frac{2(s_1-1)(s_2-2)}{N}\left(\frac{1}{s_2-1}-\frac{1}{N-1}\right).$$

Powyższe rozwiązanie uzyskano przy założeniu, że aktualnie badany obiekt musi być albo wybrany, albo odrzucony. W tym ostatnim przypadku jest on dla obserwatora stracony na zawsze. Obecnie dopuścimy możliwość powtórnego wybierania obiektu odrzuconego, nazwiemy to powtórnym wyborem, ale próba taka może zakończyć się niepowodzeniem. Taki model dla problemu wyboru najlepszego obiektu rozpatrzył Yang [64].

Definicja 2.1.

Niech

$$Y_j(k) = \mathrm{card}\,\{1 \leqslant i \leqslant k:\ X_i \leqslant X_j\}\ .$$

Zmienną losową $Y_j(k)$ nazywamy relatywną rangą j-tego badanego obiektu w chwili k. Niech $t_k^{(l)}$ oznacza relatywną pozycję aktualnie l-tego obiektu.

$$t_k^{(l)} = k - S_l\left(Y_1(k), Y_2(k), \ldots, Y_k(k)\right)$$

gdzie $S_l\left(Y_1(k), Y_2(k), \ldots, Y_k(k)\right) = j$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$j = \max\left\{1 \leqslant i \leqslant k : Y_i(k) = l\right\}$

W dalszym ciągu umówimy się, że raz powtórnie wybierany obiekt, którego wybór nie powiódł się, jest dalej nieosiągalny i oznaczymy jego relatywną pozycję przez $t_k^{(l)} = \infty$. Załóżmy również, że obiekt aktualnie badany można zawsze wybrać. Jak już zauważono w rozdziale pierwszym obiektów absolutnie pierwszych i drugich trzeba poszukiwać wśród relatywnie pierwszych i drugich.

Jeśli jesteśmy w sytuacji $(s, t_s^{(1)}, t_s^{(2)})$, to próba wybrania relatywnie pierwszego (drugiego) zakończy się sukcesem z prawdopodobieństwem $p\left(t_s^{(1)}\right)\left(p\left(t_s^{(2)}\right)\right)$. O prawdopodobieństwach $p(k)$ założymy, że $p(0) = 1$, $p(\infty) = 0$ i $p(k)$ jest nierosnącą funkcją k. Jeśli w chwili s próba wybrania relatywnie 1 (2) obiektu zakończy się niepowodzeniem, to można od razu próbować wybierać relatywnie 2 (1) obiekt. Poszukiwanie kończy się w chwili wybrania jakiegoś obiektu lub w chwili N.

2.2. Podstawowa formuła rekursywna.

Wykonano badania s obiektów i otrzymano $Y_1(s), Y_2(s), \ldots, Y_s(s)$, $t_s^{(1)} = k$, $t_s^{(2)} = l$ tak, że obserwator jest w sytuacji (s,k,l) . Niech $u_f(s,k,l)$ będzie prawdopodobieństwem tego, że otrzymamy żądany obiekt jeśli w sytuacji (s,k,l) przejdziemy do badania s+1 obiektu bez próby wyboru dotychczasowych kandydatów, tzn. dotychczas relatywnie pierwszego lub relatywnie drugiego obiektu.

Przez $u_b^1(s,k,l)$ oznaczymy prawdopodobieństwo otrzymania żądanego obiektu, jeśli w sytuacji (s,k,l) powracamy do aktualnie relatywnie pierwszego obiektu: przez $u_b^2(s,k,l)$ oznaczymy prawdopodobieństwo otrzymania żądanego obiektu, jeśli w sytuacji (s,k,l) powracamy do aktualnie relatywnie drugiego obiektu.

Niech

$$(2.1)\qquad u(s,k,l) = \max\left\{u_f(s,k,l), u_b^1(s,k,l), u_b^2(s,k,l)\right\}.$$

Z powyższej równości wynika następujący sposób optymalnego postępowania. Jeśli $u(s,k,l) = u_f(s,k,l)$, to przechodzimy do badania następnego obiektu bez próby wyboru relatywnie najlepszego lub drugiego; jeśli $u(s,k,l) = u_b^1(s,k,l)$, to powracamy do relatywnie pierwszego obiektu; jeśli $u(s,k,l) = u_b^2(s,k,l)$ to powracamy do relatywnie drugiego obiektu.

Z założenia o rozkładzie prawdopodobieństwa P (§ 1.1) otrzymujemy:

$$(2.2)\qquad u_f(s,k,l) = \frac{1}{s+1}\left[u(s+1,0,k+1) + u(s+1,k+1,0)\right] + \frac{s-1}{s+1}u(s+1,k+1,l+1)$$

$$(2.3)\qquad u_b^1(s,k,l) = p(k)\left[g_1(s,1) + g_2(s,1)\right] + \left(1-p(k)\right)u(s,\infty,l)$$

$$(2.4)\qquad u_b^2(s,k,l) = p(l)\; g_2(s,2) + \left(1-p(l)\right)u(s,k,\infty)$$

gdzie

$$g_a(s,j) = \frac{\binom{a-1}{j-1}\binom{N-a}{s-j}}{\binom{N}{s}}.$$

$$(2.5)\qquad u(N,k,l) = 1 - \left(1-p(k)\right)\left(1-p(l)\right).$$

Zależność (2.2) można uzasadnić następująco. Jeśli w sytuacji (s,k,l) przejdziemy do badania następnego obiektu, to obiekt ten będzie miał relatywną rangę Y_{s+1}. Zmienna losowa Y_{s+1} ma rozkład jednostajny i jeśli $Y_{s+1} = 1$, to nową sytuację można opisać jako $(s+1,0,k+1)$; jeśli $Y_{s+1}=2$, to jesteśmy w sytuacji $(s+1,k+1,0)$, a jeśli $Y_{s+1} \neq 1$ i 2, to jesteśmy w sytuacji $(s+1,k+1,l+1)$. Stąd i ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite otrzymujemy (2.2). Podobnie uzasadnia się wzory (2.3), (2.4) i (2.5)

Jeśli $t_s^{(1)} = \infty$, $t_s^{(2)} = \infty$, to z (2.2) indukcyjnie otrzymujemy

$$(2.6)\quad u(s,\infty,\infty) = s(s-1)\sum_{j=s+1}^{N} \frac{u(j,0,\infty) + u(j,\infty,0)}{j(j-1)(j-2)}$$

Dla $s=N-1$ z (2.2) mamy

$$u(N-1,\infty,\infty) = \frac{1}{N}\left[u(N,0,\infty) + u(N,\infty,0)\right] + \frac{N-2}{N}\, u(N,\infty,\infty) \overset{2.5}{=}$$
$$= \frac{1}{N}\left[u(N,0,\infty) + u(N,\infty,0)\right],$$

co daje wzór (2.6) dla $s=N-1$. Załóżmy, że (2.6) jest prawdziwy dla $t = N-1, N-2, \ldots, s+1$. Mamy wówczas z(2.2) i założenia indukcyjnego

$$u(s,\infty,\infty) = \frac{1}{s+1}\left[u(s+1,0,\infty) + u(s+1,\infty,0)\right] + \frac{s-1}{s+1}\, u(s+1,\infty,\infty) =$$
$$= \frac{1}{s+1}\left[u(s+1,0,\infty) + u(s+1,\infty,0)\right] + \frac{s-1}{s+1}(s+1)s\sum_{j=s+2}^{N}\frac{u(j,0,\infty)+u(j,\infty,0)}{j(j-1)(j-2)} =$$
$$= s(s-1)\sum_{j=s+1}^{N}\frac{u(j,0,\infty) + u(j,\infty,0)}{j(j-1)(j-2)}.$$

Układ równań (2.1) - (2.4) z warunkiem początkowym (2.5) może być rozwiązany rekursywnie i optymalna strategia zostanie w ten sposób wyznaczona, jeśli tylko funkcja $p(k)$, $k = 1,2,\ldots,N-1$, będzie zadana. Można pewne cechy strategii optymalnej pokazać nie rozwiązując tego układu.

2.3. Analiza równania rekursywnego.

Dalej załóżmy, że $N \geqslant 3$. Niech

$$b(s) = \frac{1}{N(N-1)} - \frac{1}{s(s-1)}\, u(s,\infty,\infty)$$

i $s_2 = \inf\{s: b(s)>0\}$.

Twierdzenie 2.1.

s_2 jest skończone i dla $s<s_2$ $u(s,\infty,l)=u_f(s,\infty,l)$ dla każdego l.

Dowód :

Niech

$$B(s,\infty,l)=u(s,\infty,l) - u_b^2(s,\infty,l) .$$

Wówczas dla skończonych l

$$u_f(s,\infty,l) - u_b^2(s,\infty,l) = \frac{s-1}{s+1}B(s+1,\infty,l+1)$$

$$+ \frac{1}{s+1}\left[u(s+1,0,\infty)+u(s+1,\infty,0)\right] + \frac{s(s-1)}{N(N-1)}p(l+1) +$$

$$+ \frac{s-1}{s+1}\left(1-p(l+1)\right)u(s+1,\infty,\infty) - p(l)\frac{s(s-1)}{N(N-1)}$$

$$- \left(1-p(l)\right)u(s,\infty,\infty).$$

Mamy zatem

$$u_f(s,\infty,l) - u_b^2(s,\infty,l) = \frac{s-1}{s+1}B(s+1,\infty,l+1) + \tag{2.7}$$

$$+ s(s-1)\left[p(l+1)b(s+1) - p(l)b(s)\right].$$

Funkcja $b(s)$ jest rosnącą funkcją s i $b(2)<0$ dla $N>3$, $b(N)>0$, więc istnieje skończone s_2 takie, że dla $s<s_2$, $b(s)<0$.

Z monotoniczności $p(k)$ i własności $b(s)$

$$p(l+1)b(s+1) - p(l)b(s)>0$$

dla $s<s_2$, więc

$$u_f(s,\infty,l) - u_b^2(s,\infty,l)>0 \text{ dla } s<s_2 .$$

Lemat 2.1.

Spełnione są następujące nierówności :

$$a/\ u(s,k,l) \geqslant u(s,k+1,l);\ u(s,k,l) \geqslant u(s,\infty,l)\ ,$$

$$(2.8)\quad b/\ u(s,k,l) \geqslant u(s,k,l+1);\ u(s,k,l) \geqslant u(s,k,\infty)\ ,$$

$$c/\ u_f(s,k,l) \geqslant u_f(s,k+1,l);\ u_f(s,k,l) \geqslant u_f(s,\infty,l)$$

$$d/\ u_f(s,k,l) \geqslant u_f(s,k,l+1);\ u_f(s,k,l) \geqslant u_f(s,k,\infty)$$

dla $s = 1,2,\ldots,N$, $k,l = 0,1,2,\ldots,s-1$.

Dowód :

Nierówność a) jest spełniona ponieważ zbiór strategii w obu sytuacjach jest taki sam, ale w sytuacji (s,k,l) prawdopodobieństwo uzyskania aktualnie relatywnie pierwszego jest większe niż w sytuacji $(s,k+1,l)$ z powodu monotoniczności $p(k)$. Pozostałe nierówności uzasadnia się analogicznie.

Niech

$$\varphi(s,l) = \frac{s(2N-s-1)}{N(N-1)} - u(s,\infty,l)$$

i $s_1 = \inf\{s: \varphi(s,\infty) \geqslant 0\}$.

Twierdzenie 2.2.

s_1 jest skończone i dla $s < s_1$ $u_f(s,k,l) > u_b^1(s,k,l)$.

Dowód :

Zbadajmy różnicę $u_f(s,k,l) - u_b^1(s,k,l)$. Ze wzorów (2.2) i (2.3) mamy :

$$u_f(s,k,l) - u_b^1(s,k,l) = u_f(s,k,l) - u(s,\infty,l)$$

$$- p(k)\left[\frac{s(2N-s-1)}{N(N-1)} - u(s,\infty,l)\right] = u_f(s,k,l) - u(s,\infty,l) - p(k)\varphi(s,l).$$

$\varphi(s,\infty)$ jest rosnącą funkcją s, $\varphi(1,\infty) < 0$, $\varphi(N,\infty) > 0$.

Z (2.8 b) mamy $\varphi(s,l) \leqslant \varphi(s,\infty) < 0$ dla $s < s_1$ i dlatego podana w twierdzeniu nierówność jest spełniona, jeśli tylko

$$(2.9) \qquad u_f(s,k,l) - u(s,\infty,l) \geqslant 0 .$$

Dla $u(s,\infty,l) = u_f(s,\infty,l)$ (2.9) jest prawdziwa z nierówności (2.8 c).

Dla $u(s,\infty,l) = u_b^2(s,\infty,l)$ i $s < s_1$

$$u_f(s,k,l) - u_b^2(s,\infty,l) = u_f(s,k,l) - u(s,\infty,\infty) -$$

$$p(l)\left[\frac{s(s-1)}{N(N-1)} - u(s,\infty,\infty)\right] \geqslant u_f(s,k,l) - u_f(s,\infty,\infty) - p(l)s(s-1)b(s)$$

i (2.9) jest spełniona ponieważ $s(s-1)b(s) \leqslant \varphi(s,\infty) < 0$ dla $s < s_1$.

To kończy dowód twierdzenia 2.2.

Twierdzenie 2.3.

Jeśli $u(s,k,l) \neq u_f(s,k,l)$ i $u(s,k,\infty) \neq u_f(s,k,\infty)$, to $u_b^2(s,k,l) \leqslant u_b^1(s,k,l)$.

Dowód:

Z (2.3) i (2.4) mamy

$$u_b^1(s,k,l) - u_b^2(s,k,l) = p(k)\ \frac{s(2N-s-1)}{N(N-1)} + \bigl(1-p(k)\bigr)u(s,\infty,l)$$
$$- p(l)\ \frac{s(s-1)}{N(N-1)} - \bigl(1-p(l)\bigr)\ u(s,k,\infty)$$

dla każdej sytuacji (s,k,l) . Jeśli $u(s,\infty,l) = u_b^2(s,\infty,l)$ i $u(s,k,\infty) = u_b^1(s,k,\infty)$, to z (2.3) i (2.4) otrzymujemy

$$u_b^1(s,k,l) - u_b^2(s,k,l) = p(k)\ p(l)\ \frac{2s(N-s)}{N(N-1)} \geqslant 0 .$$

Jeśli $u(s,\infty,l) = u_f(s,\infty,l)$ i $u(s,k,\infty) = u_b^1(s,k,\infty)$, to

$$u_b^1(s,k,l) - u_b^2(s,k,l) > p(k)\ p(l)\ \frac{2s(N-s)}{N(N-1)} \geqslant 0 ,$$

ponieważ w tym przypadku $u(s,\infty,l) > u_b^2(s,\infty,l)$. To kończy dowód twierdzenia 2.3.

Wniosek.

Przy optymalnym postępowaniu dla wyboru jednego z dwu najlepszych obiektów nie należy próbować wybierać kandydatów do pewnego momentu s_1, a relatywnie drugiego obiektu do chwili $s_2 \geqslant s_1$.

Dowód:

Jeśli $s < s_1$, to ponieważ $s(s-1)b(s) < \varphi(s,\infty) < 0$,

więc z (2.4)

$$(2.10)\quad u_f(s,k,1) - u_b^2(s,k,1) = u_f(s,k,1) - u(s,k,\infty)$$

$$- p(1)\left[\frac{s(s-1)}{N(N-1)} - u(s,k,\infty)\right] \geqslant u_f(s,k,\infty) - u(s,k,\infty)$$

$$- p(1)\, s(s-1)b(s) > 0$$

gdyż z twierdzenia 2.2 dla $s < s_1$ $u(s,k,\infty) = u_f(s,k,\infty)$. Stąd dla $s < s_1$ $u(s,k,1) = u_f(s,k,1)$.

Niech $s_1 \leqslant s < s_2$. Jeśli $u(s,k,\infty) = u_f(s,k,\infty)$, to z (2.10) i lematu 2.1

$$u_f(s,k,1) - u_b^2(s,k,1) \geqslant u_f(s,k,1) - u_f(s,k,\infty) - p(1)s(s-1)b(s) > 0$$

Jeśli $u(s,k,\infty) = u_b^1(s,k,\infty)$ i $u(s,k,1) \neq u_f(s,k,1)$, to z twierdzenia 2.3 $u_b^1(s,k,1) \geqslant u_b^2(s,k,1)$ i $u_f(s,k,1) > u_b^2(s,k,1)$.

Zatem dla $s < s_2$ $u(s,k,1) \geqslant u_b^2(s,k,1)$. To kończy dowód wniosku.

Oznaczmy

$$(2.11)\quad c(s) = \sum_{j=s}^{N} \frac{2(N-1)}{(j-1)(j-2)} = \frac{2(N-s+1)}{s-2}\ ;\ c(N+1) = 0\ .$$

Niech $s_o = \min\{s\colon c(s+2) > 1\}$.

Twierdzenie 2.4.

Niech $p(k) > 0$ dla każdego skończonego k. Jeśli istnieje τ takie, że τ jest najmniejszym $s > \max(s_o, s_2)$ spełniającym warunek :

$$(2.12)\quad \frac{p(k+1)}{p(k)} \leqslant \frac{1-c(s+1)}{1-c(s+2)} \quad \text{dla każdego } k<\infty,$$

to należy próbować wybrać aktualnie relatywnie pierwszy obiekt, a jeśli odmówi, to również relatywnie drugi, jeśli poszukiwanie nie zostało zakończone wcześniej.

Dowód :

Ponieważ $\frac{1-c(s+1)}{1-c(s+2)}$ jest dla $s > s_0$ rosnącą funkcją s, więc (2.12) jest spełniony dla $s \geqslant \tau$. Przez bezpośrednie sprawdzenie otrzymujemy

$$u_f(N-1,k,l) \leqslant u_b^1(N-1,k,l) .$$

Wprowadzimy oznaczenie :

$$(2.13)\quad u_b(s,k,l) = p(k)\,\frac{s(2N-s-1)}{N(N-1)} + \big(1-p(k)\big)\,p(l)\,\frac{s(s-1)}{N(N-1)} + \big(1-p(k)\big)\big(1-p(l)\big)\;u(s,\infty,\infty).$$

$u_b(s,k,l)$ jest prawdopodobieństwem tego, że otrzymamy żądany obiekt, jeśli w sytuacji (s,k,l) usiłujemy wybrać relatywnie pierwszy obiekt, a jeśli odmówi, to aktualnie relatywnie drugi obiekt. Dla dowodu twierdzenia należy pokazać, że $u_f(s,k,l) \leqslant u_b(s,k,l)$. Udowodnimy tę nierówność stosując indukcję wsteczną. Dla $s=N-1$ otrzymujemy tezę bezpośrednio z (2.13), (2.2), (2.11) i (2.12).

$$u_f(N-1,k,l) - u_b(N-1,k,l) = \frac{2}{N}\big(1-p(k)\big) + \frac{N-4}{N}\big(1-p(k)\big)\big(1-p(l)\big) - \frac{N-2}{N}\big(1-p(k+1)\big)\big(1-p(l+1)\big) \leqslant$$

$$\leqslant \big(1-p(k)\big)\,\frac{N-2}{N}\Big[\big(1-c(N+1)\big)p(l+1) - \big(1-c(N)\big)p(l)\Big] \leqslant 0 .$$

Załóżmy dla indukcji, że

$$(2.14)\quad u_f(s,k,l) \leqslant u_b(s,k,l) \qquad \text{dla każdego } k,l \text{ i}$$

$s = N-1, N-2, \ldots, t+1$.

Z (2.2) i (2.13) mamy :

$$u_f(t,k,l) - u_b(t,k,l) = \frac{1}{t+1}\left[u(t+1,0,k+1) + u(t+1,k+1,0)\right]$$
$$+ \frac{t-1}{t+1} u(t+1,k+1,l+1) - p(k)\frac{t(2N-t-1)}{N(N-1)} - (1-p(k))p(l)\frac{t(t-1)}{N(N-1)}$$
$$-(1-p(k))(1-p(l))\, u(t,\infty,\infty).$$

Z założenia (2.14) mamy : $u(s,k,l) = u_b(s,k,l)$ dla $s \geqslant t+1$ i każdego k,l , więc

$$u_f(t,k,l) - u_b(t,k,l) = \frac{2}{N} + \frac{2t(N-t-1)}{N(N-1)}\; p(k+1)$$
$$- p(k)\,\frac{2t(N-t)}{N(N-1)} + \frac{t(t-1)}{N(N-1)}(1-p(k))(1-p(l))\left[1 - \frac{N(N-1)}{t(t-1)}\, u(t,\infty,\infty)\right].$$

Dla $t > \max(s_0, s_2)$

$$\frac{2t(N-t-1)}{N(N-1)}\,\frac{(1-c(t+1))}{(1-c(t+2))} - \frac{2t(N-t)}{N(N-1)} \leqslant -\frac{2}{N}$$

Istotnie lewa strona powyższej nierówności jest rosnącą funkcją t i dla $t = N-1$ jest równa $-\frac{2}{N}$. Z założenia indukcyjnego $u(s,k,l) = u_b(s,k,l)$ dla $s > t$, a więc $u(t,\infty,\infty) = \frac{t(t-1)}{N(N-1)}\, c(t+1)$. Stąd i z monotoniczności $p(k)$, (2.11) i (2.12)

$$u_f(t,k,l) - u_b(t,k,l) \leqslant \frac{2}{N} + \frac{2t(N-t-1)}{N(N-1)}\,\frac{(1-c(t+1))}{(1-c(t+2))}\, p(k)$$
$$- p(k)\frac{2t(N-t)}{N(N-1)} + \frac{t(t-1)}{N(N-1)}(1-p(k))\Big[(1-p(l))(1-c(t+1))$$
$$-(1-p(l+1))(1-c(t+2))\Big] \leqslant (1-p(k))\left\{\frac{2}{N} + \frac{t(t-1)}{N(N-1)}\Big[(1-c(t+1)) - (1-c(t+2))\Big]\right.$$
$$\left. + \frac{t(t-1)}{N(N-1)}\Big[p(l+1)\,(1-c(t+2)) - p(l)\,(1-c(t+1))\Big]\right\} < 0 .$$

Indukcja ta jest słuszna do $t = \tau$. Twierdzenie 2.4 zostało udowodnione.

Twierdzenie 2.5.

Jeśli

(2.15) $\frac{p(l+1)}{p(l)} > \frac{N-4}{N-2}$ dla każdego $l < \infty$

i relatywnie pierwszy obiekt jest nieosiągalny / odrzucił ofertę /, to optymalnie jest nie wybierać aktualnie relatywnie drugiego obiektu aż do chwili zbadania wszystkich obiektów.

Dowód :

Twierdzenie będzie udowodnione jeśli pokażemy, że dla każdego $l < \infty$, $s = 3,4,\ldots, N-1$ $u_f(s,\infty,l) > u_b^2(s,\infty,l)$.

Z (2.15) , (2.2) i (2.4) mamy :

$$u_f(N-1,\infty,l) - u_b^2(N-1,\infty,l) = \frac{N-2}{N} p(l+1) - \frac{N-4}{N} p(l) > 0 .$$

Załóżmy dla indukcji wstecznej, że $u_f(s,\infty,l) > u_b^2(s,\infty,l)$ dla każdego $l<\infty$ i $s = N-1, N-2,\ldots,t+1$. Z (2.2) i (2.6) i założenia indukcyjnego mamy :

$$u_f(t,\infty,l) - u_b^2(t,\infty,l) = \sum_{j=t+1}^{N} \frac{t(t-1)}{j(j-1)(j-2)}\left[u(j,0,\infty) + u(j,\infty,0)\right]$$

$$+ \frac{t(t-1)}{N(N-1)} p(l+N-t) - p(l)\frac{t(t-1)}{N(N-1)}$$

$$-(1-p(l))\sum_{j=t+1}^{N} \frac{t(t-1)}{j(j-1)(j-2)}\left[u(j,0,\infty) + u(j,\infty,0)\right] =$$

$$= - p(l)\, t(t-1)\left[\frac{1}{N(N-1)} - \sum_{j=t+1}^{N} \frac{u(j,0,\infty) + u(j,\infty,0)}{j(j-1)(j-2)}\right]$$

$$+ \frac{t(t-1)}{N(N-1)} p(l+N-t) .$$

Wprowadzimy oznaczenie:

$$f(t) = \frac{u_f(t,\infty,l) - u_b^2(t,\infty,l)}{\frac{t(t-1)}{N(N-1)} p(l)}$$

$$f(t) = \frac{p(l+N-t)}{p(l)} - 1 + N(N-1)\sum_{j=t+1}^{N} \frac{u(j,0,\infty) + u(j,\infty,0)}{j(j-1)(j-2)} .$$

$f(t)$ jest funkcją malejącą .

$$f(t+1) - f(t) = \frac{p(l+N-t-1)}{p(l)} - \frac{p(l+N-t)}{p(l)}$$

$$- \frac{N(N-1)}{t(t-1)(t+1)} \left[u(t+1,0,\infty) + u(t+1,\infty,0)\right].$$

Z (2.15) i tego, że

$$u(t+1,0,\infty) + u(t+1,\infty,0) \geqslant u_b^1(t+1,0,\infty) + u_b^2(t+1,\infty,0) = \frac{2(t+1)}{N}$$

otrzymujemy :

$$f(t+1) - f(t) \leqslant \frac{p(l+N-t-1)}{p(l)}\left(1 - \frac{N-4}{N-2}\right) - \frac{2(N-1)}{t(t-1)} \leqslant 0$$

Co kończy dowód twierdzenia 2.5.

2.4. Przykład.

Dokładniej zajmiemy się przypadkiem $p(k) = p = \text{const}$, dla $k \neq 0, \infty$.

Twierdzenie 2.6.

Przy powyższym założeniu o $p(k)$ optymalna strategia jest następująca : należy przepuścić $s_1 - 1$ obiektów bez próby ich wybrania, wybrać relatywnie pierwszy obiekt, który pojawił się po obiekcie $s_1 - 1$ i ponadto począwszy od chwili s_2, gdy pojawi się obiekt relatywnie drugi, należy próbować wybrać relatywnie pierwszy obiekt, a gdy odmówi- wybrać relatywnie drugi obiekt. Jeśli do momentu N żaden obiekt nie został wybrany , należy próbować wybrać obiekt absolutnie pierwszy, a gdy odmówi, absolutnie drugi. Wartości s_1 i s_2 należy wybrać tak, aby maksymalizowały

$$(2.16) \quad P(s_1,s_2;N) = \frac{s_1-1}{N(N-1)} \sum_{j=s_1}^{s_2-1} \frac{2N-j-1}{j-1} + \frac{(s_1-1)(s_2-2)}{N(N-1)} \sum_{j=s_2}^{N} \frac{2N-j-1}{(j-1)(j-2)} +$$

$$+ \frac{(s_1-1)(s_2-2)}{N(N-1)} \sum_{j=s_2}^{N} \left[p\,\frac{2N-j-1}{(j-1)(j-2)} + (1-p)\,\frac{1}{j-2}\right] +$$

$$+ \frac{(s_1-1)(s_2-2)}{N(N-1)} \left[1 - (1-p)^2\right], \quad s_1 \leq s_2 ,$$

gdzie $P(s_1, s_2; N)$ jest prawdopodobieństwem uzyskania żądanego obiektu przy stosowaniu podanej strategii.

Dowód :

Dla dowodu pokażemy, że istnieją s_1 i s_2, $s_1 \leq s_2$ takie, że

(2.17) $u_f(s,k,l) \geq u_b^1(s,k,l)$ dla $k \neq 0, l \neq 0$, $3 \leq s \leq N-1$,

(2.18) $u_f(s,0,l) \geq u_b^1(s,0,l)$ dla każdego l wtedy i tylko wtedy, gdy $s \leq s_1$,

(2.19) $u_f(s,k,0) \geq u_b^2(s,k,0)$ dla każdego $k \neq 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy $s < s_1$,

(2.20) $u_f(s,k,0) \leq u_b^1(s,k,0)$ dla $k \neq \infty$, wtedy i tylko wtedy, gdy $s > s_2$,

(2.21) $u_f(s,\infty,0) \leq u_b^2(s,\infty,0)$ dla $s \geq s_2$.

Przede wszystkim pokażemy, że

(2.22) $u_f(s,\infty,l) > u_b^2(s,\infty,l)$ dla $l \neq 0$, $3 \leq s \leq N-1$.

Dla $s = N-1$

$$u_f(N-1,\infty,l) - u_b^2(N-1,\infty,l) = \frac{2}{N}\, p > 0 .$$

Dla indukcji wstecznej załóżmy, że $u_f(s,\infty,l) > u_b^2(s,\infty,l)$ dla $s = N-1, N-2, \ldots, t+1$. Z (2.2), (2.4) i (2.6) otrzymujemy :

$$u_f(t,\infty,l) - u_b^2(t,\infty,l) = t(t-1)\sum_{j=t+1}^{N} \frac{u(j,0,\infty) + u(j,\infty,0)}{j(j-1)(j-2)} +$$

$$+ \frac{t(t-1)}{N(N-1)}\, p - p\,\frac{t(t-1)}{N(N-1)} - (1-p)\, u(s,\infty,\infty) =$$

$$= p\, t(t-1) \sum_{j=t+1}^{N} \frac{u(j,0,\infty) + u(j,\infty,0)}{j(j-1)(j-2)} .$$

Zatem nierówność (2.17) dla $k = \infty, l \neq 0$, $3 \leq s \leq N-1$ jest udowodniona. Niech $k \neq 0$, $l \neq 0$, $s = N-1$.

$$u_f(N-1,k,l) - u_b^1(N-1,k,l) = \frac{2}{N} + \frac{N-2}{N}\left[1-(1-p)^2\right] - p$$

$$- (1-p)\left[\frac{2}{N} + \frac{N-2}{N}\right] p = 0 .$$

Załóżmy, że (2.17) jest spełniony dla $s = N-1, N-2, \ldots, t+1$.

Z (2.2) i (2.3) oraz (2.22) mamy :

$$u_f(t,k,l) - u_b^1(t,k,l) = t(t-1) \sum_{j=t+1}^{N} \frac{u(j,0,k+j-t) + u(j,k+j-t,0)}{j(j-1)(j-2)}$$

$$+ \frac{t(t-1)}{N(N-1)}\left[1-(1-p)^2\right] - p\,\frac{t(2N-t-1)}{N(N-1)}$$

$$-(1-p)\,t\,(t-1)\sum_{j=t+1}^{N}\frac{u(j,0,\infty)+u(j,\infty,0)}{j(j-1)(j-2)}$$

$$-\,p(1-p)\,\frac{t(t-1)}{N(N-1)}\,.$$

Z (2.1)

$$u(j,0,k+j-t) \geqslant u_b^2(j,0,k+j-t) = p\,\frac{j(j-1)}{N(N-1)} + (1-p)u(j,0,\infty)$$

oraz

$$u(j,k+j-t,0) \geqslant u_b^1(j,k+j-t,0) = p\,\frac{j(2N-j-1)}{N(N-1)} + (1-p)\,u(j,\infty,0),$$

a stąd

$$u_f(t,k,l) - u_b^1(t,k,l) \geqslant \frac{t(t-1)}{N(N-1)}\,p\left[\sum_{j=t+1}^{N}\frac{2(N-1)}{(j-1)(j-2)} - \frac{2(N-t)}{t-1}\right] = 0\,.$$

Zatem $u_f(s,k,l) \geqslant u_b^1(s,k,l)$ dla $l \neq 0, k \neq 0$, $3 \leqslant s \leqslant N-1$.

Pokażemy teraz, że warunek (2.18) jest spełniony. Z (2.2), (2.3) i (2.4)

$$u_f(s,0,l) - u_b^1(s,0,l) = s(s-1)\sum_{j=s+1}^{N}\frac{u(j,0,j-s)+u(j,j-s,0)}{j(j-1)(j-2)}$$

$$+ \frac{s(s-1)}{N(N-1)}\left[1-(1-p)^2\right] - \frac{s(2N-s-1)}{N(N-1)}\,.$$

Oznaczmy

$$g(s) = \frac{u_f(s,0,l) - u_b^1(s,0,l)}{\frac{s(s-1)}{N(N-1)}}$$

$$g(s) = N(N-1)\sum_{j=s+1}^{N}\frac{u(j,0,j-s)+u(j,j-s,0)}{j(j-1)(j-2)} + \left[1-(1-p)^2\right]$$

$$-\,\frac{2N-s-1}{s-1}\,.$$

Funkcja $g(s)$ jest malejąca dla $3 \leq s \leq N-1$,

$$g(s) - g(s+1) = N(N-1)\frac{u(s+1,0,1) + u(s+1,1,0)}{(s+1)s(s-1)} - \frac{2(N-1)}{s(s-1)}$$

Z (2.1) mamy

$$u(s+1,0,1) + u(s+1,1,0) \geq u_b^1(s+1,0,1) + u_b^2(s+1,1,0) = \frac{2(s+1)}{N}$$

i stąd

$$g(s) - g(s+1) > 0.$$

$g(N-1) = -(1-p)^2 < 0$, więc istnieje s_1 takie, że warunek (2.18) jest spełniony.

Dla pokazania (2.19) zauważmy, że dla $s < s_1$ z (2.2) i (2.4) mamy :

$$u_f(s,k,0) - u_b^2(s,k,0) = s(s-1)\sum_{j=s+1}^{N}\frac{u(j,0,j-s) + u(j,j-s,0)}{j(j-1)(j-2)}$$

$$+\left[1-(1-p)^2\right]\frac{s(s-1)}{N(N-1)} - \frac{s(s-1)}{N(N-1)} > u_f(s,0,1) - u_b^1(s,0,1) > 0,$$

co wynika z dowodu warunku (2.18).

Pokażemy nierówność (2.21). Z (2.2), (2.5) i (2.17)

$$u_f(s,\infty,0) - u_b^2(s,\infty,0) = s(s-1)\sum_{j=s+1}^{N}\frac{u(j,0,\infty) + u(j,\infty,0)}{j(j-1)(j-2)} - \frac{s(s-1)}{N(N-1)}(1-p).$$

Wprowadzimy oznaczenie

$$w(s) = N(N-1)\sum_{j=s+1}^{N}\frac{u(j,0,\infty) + u(j,\infty,0)}{j(j-1)(j-2)} - (1-p).$$

$w(s)$ jest malejącą funkcją s, $w(N) < 0$ i z warunków (2.17) - (2.19) wynika, że $w(s_1) \geq 0$. Istnieje więc s_2' takie, że $u_f(s,\infty,0) < u_b^2(s,\infty,0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $s \geq s_2'$ i ponadto $s_2' \geq s_1$.

Zbadajmy następującą różnicę

$$(2.23)\quad u_f(s,k,0) - u_b^1(s,k,0) = s(s-1)\sum_{j=s+1}^{N}\frac{u(j,0,k+j-s)+u(j,k+j-s,0)}{j(j-1)(j-2)}$$

$$+\frac{s(s-1)}{N(N-1)}\left[1-(1-p)^2\right] - p\,\frac{s(2N-s-1)}{N(N-1)} - (1-p)u(s,\infty,0)\ .$$

Jeśli $s \leqslant s_2'$, to $u(s,\infty,0) = u_f(s,\infty,0)$ i wówczas

$$u_f(s,k,0) - u_b^1(s,k,0) = s(s-1)\left[\sum_{j=s+1}^{N}\frac{u(j,0,k+j-s)-u(j,0,\infty)}{j(j-1)(j-2)}\right.$$

$$\left.+\sum_{j=s+1}^{N}\frac{u(j,k+j-s,0)-u(j,\infty,0)}{j(j-1)(j-2)}\right] +$$

$$+\,p\left[s(s-1)\sum_{j=s+1}^{N}\frac{u(j,0,\infty)+u(j,\infty,0)}{j(j-1)(j-2)} - \frac{2\,s(N-s)}{N(N-1)}\right] \geqslant$$

$$\geqslant s(s-1)\left[\sum_{j=s+1}^{N}\frac{u(j,0,k+j-s)-u(j,0,\infty)}{j(j-1)(j-2)} + \sum_{j=s+1}^{N}\frac{u(j,k+j-s,0)+u(j,0,k+j-s)}{j(j-1)(j-2)}\right]$$

$$+\,p\,\frac{s(s-1)}{N(N-1)}\left[\sum_{j=s+1}^{N}\frac{2(N-1)}{(j-1)(j-2)} - \frac{2(N-s)}{s-1}\right] \geqslant 0.$$

Z (2.21) wynika, że dla $s \geqslant s_2'$ $u(s,\infty,0) = u_b^2(s,\infty,0)$,

a więc na podstawie (2.23)

$$u_f(s,k,0) - u_b^1(s,k,0) = s(s-1)\sum_{j=s+1}^{N}\frac{u(j,0,k+j-s)+u(j,k+j-s,0)}{j(j-1)(j-2)}$$

$$-\frac{s(s-1)}{N(N-1)}(1-p)^2 - p\,\frac{2s(N-s)}{N(N-1)}\ .$$

Niech

$$h(s) = \frac{u_f(s,k,0) - u_b^1(s,k,0)}{\frac{s(s-1)}{N(N-1)}}\ .$$

Dla $s \geqslant s_2'$ funkcja $h(s)$ jest malejąca.

$$h(s) - h(s+1) = N(N-1)\frac{u(s+1,0,k+1)+u(s+1,k+1,0)}{(s+1)s(s-1)} - p\,\frac{2(N-1)}{s(s-1)} \geqslant$$

$$\geqslant N(N-1)\frac{u(s+1,0,k+1)+u(s+1,k+1,0)}{(s+1)s(s-1)} - \frac{2(N-1)}{s(s-1)} = g(s)-g(s+1) \geqslant 0$$

Z (2.23) wynika, że $h(s_2') \geqslant 0$. Ponadto $h(N-1) = (1-p)\left[p - \frac{N-4}{N-2}\right] < 0$ jeśli $p < \frac{N-4}{N-2}$. W konsekwencji, jeśli $p < \frac{N-4}{N-2}$, to istnieje $s_2 \geqslant s_1 (s_2 \geqslant s_2')$ takie, że (2.19) jest spełniony.

Prawdopodobieństwo uzyskania absolutnie pierwszego lub drugiego obiektu $P(s_1, s_2; N)$ przy zastosowaniu opisanej strategii otrzymujemy następująco :

$$P(s_1, s_2; N) = \sum_{j=s_1}^{s_2-1} P\{Y_j = 1 \mid Y_i \neq 1, s_1 \leqslant i < j\}\left[P\{X_j = 1 \mid Y_j = 1\} + P\{X_j = 2 \mid Y_j = 1\}\right]$$

$$+ \sum_{j=s_2}^{N} P\{Y_j = 1 \mid Y_i \neq 1, s_1 \leqslant i < j \;; Y_i \neq 2, s_2 \leqslant i < j\}\left[P\{X_j = 1 \mid Y_j = 1\} + P\{X_j = 2 \mid Y_j = 1\}\right]$$

$$+ \sum_{j=s_2}^{N} P\{Y_j = 2 \mid Y_i \neq 1, s_1 \leqslant i < j \;\; Y_i \neq 2, s_2 \leqslant i < j\}\Big[\Big(P\{X_{j-t_j^{(1)}} = 1 \mid Y_{j-t_j^{(1)}} = 1\} +$$

$$+ P\{X_{j-t_j^{(1)}} = 2 \mid Y_{j-t_j^{(1)}} = 1\}\Big) p + P\{X_j = 2 \mid Y_j = 2\} \; (1-p)\Big] +$$

$$+ P\{Y_j \neq 1, s_1 \leqslant j \leqslant N \;; Y_j \neq 2, s_2 \leqslant j \leqslant N\}\left[1 - (1-p)^2\right] =$$

$$= \sum_{j=s_1}^{s_2-1} \left[g_1(j,1) + g_2(j,1)\right]\frac{s_1-1}{j(j-1)} + \sum_{j=s_2}^{N}\left[g_1(j,1) + g_2(j,1)\right]\frac{(s_1-1)(s_2-2)}{j(j-1)(j-2)} +$$

$$+ \sum_{j=s_2}^{N}\{p\left[g_1(j,1) + g_2(j,1)\right] + (1-p)\, g_2(j,2)\}\frac{(s_1-1)(s_2-2)}{j(j-1)(j-2)} +$$

$$+ \frac{(s_1-1)(s_2-2)}{N(N-1)}\left[1 - (1-p)^2\right] .$$

Stąd otrzymujemy (2.16) .

Jeśli $\lim_{N \to \infty} \frac{s_1}{N} = \alpha$, $\lim_{N \to \infty} \frac{s_2}{N} = \beta$, to

$$\lim_{N \to \infty} P(s_1, s_2; N) = 2\alpha \ln \frac{\beta}{\alpha} + \alpha(\alpha - \beta) + 2\alpha(1-\beta)(1+p) - 2p\alpha\beta \ln \frac{1}{\beta}$$
$$+ \alpha\beta\left[1 - (1-p)^2\right] .$$

Można pokazać, że dla $0 \leqslant p \leqslant 1$ jedyne rozwiązanie $0 < \alpha^* < \beta^* < 1$ układu równań :

$$\frac{2}{\beta} - 2 + 2p\ln\beta - (1-p)^2 = 0$$

$$2(1+p\beta)\ln\beta - 2\ln\alpha + 2\alpha + 2p - 2(1+p)\beta - \beta(1-p)^2 = 0$$

maksymalizuje graniczne prawdopodobieństwo. Jeżeli $p = 0$, to powyższe rozwiązanie pokrywa się z rozwiązaniem podanym w [31] , a cytowanym przeze mnie we wprowadzeniu do rozdziału 2.

3. Wybór maksimum niezależnych zmiennych losowych z dyskontem.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_N$ będzie skończonym ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie typu ciągłego o dystrybuancie $F(x)$, określonych na ustalonej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Oznaczmy przez $\mathcal{F}_n$ σ- algebrę generowaną przez zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ a przez $\mathfrak{M}_N$ zbiór wszystkich momentów Markowa τ względem $\{\mathcal{F}_m\}_{m=1}^N$. Umówimy się pisać $\tau = +\infty$ jeśli wogóle nie zatrzymujemy się. Niech $\{\alpha_n\}_{n=1}^N$ będzie ciągiem malejącym takim, że $0 < \alpha_n < 1$ dla każdego n. Poszukujemy $\tau^* \in \mathfrak{M}_N$ takiego, że

$$(3.1)\quad E\alpha_{\tau^*}\chi_{\{\tau^*<\infty,\ X_{\tau^*} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_N)\}} = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}_N} E\alpha_\tau \chi_{\{\tau<\infty,\ X_\tau = \max(X_1, X_2, \ldots, X_N)\}}$$

Problem (3.1) bez dyskonta był badany w [8] .

Dla ciągłej dystrybuanty $F(x)$ zmienna losowa $F(X_n)$ ma rozkład jednostajny na $[0,1]$ i $P\{X_m \geq X_n \Longleftrightarrow F(X_m) \geq F(X_n)\} = 1$, więc można założyć, że X_i mają rozkład jednostajny na $[0,1]$.

Niech

$$Y_n = \alpha_n P\{X_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_N) | \mathcal{F}_n\},\ n = 1,2,\ldots,N.$$

$$(3.2)\quad Y_n = \chi_{\{X_n = \max X_1, X_2, \ldots, X_n\}}\, \alpha_n X_n^{N-n}$$

gdzie $\chi_{\{X_n = \max(X_1,\ldots,X_n)\}}$ jest oznaczeniem funkcji charakterystycznej zdarzenia $\{X_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)\}$. Zakładając, że $Y_\infty = 0$ otrzymujemy

$$EY_\tau = E\alpha_\tau \chi_{\{\tau<\infty,\ X_\tau = \max(X_1,X_2,\dots,X_N)\}} .$$

W ten sposób problem (3.1) sprowadzony został do optymalnego zatrzymania pewnego łańcucha Markowa. Niech $\mathfrak{M}_N^0 \subset \mathfrak{M}_N$ będzie zbiorem tych $\tau \in \mathfrak{M}_N$, że

(3.3) $X_n = \max(X_1,X_2,\dots,X_n)$ na zbiorze $\{\omega: \tau(\omega) = n\}$ dla $n=1,2,\dots,N$.

Niech $\tau_1 = 1$, $\tau_{k+1} = \inf\{n: \tau_k < n \leq N, X_n = \max(X_1,X_2,\dots,X_n)\}$ dla $k = 1,2,\dots,N-1$. $\tau_1,\tau_2,\dots \in \mathfrak{M}_N^0$.

Zdefiniujemy ciąg zmiennych losowych ξ_k w następujący sposób:

(3.4) $\xi_k = (\tau_k, X_k)$ na $\{\omega: \tau_k < +\infty\}$, $\xi_k = \partial$ na $\{\omega: \tau_k = +\infty\}$,

gdzie ∂ jest oznaczeniem " stanu pochłaniającego " $\{\xi_k\}_{k=1}^N$ jest łańcuchem Markowa względem $\{\mathcal{F}_k\}_{k=1}^N$ z przestrzenią stanów $(\{1,2,\dots,N\} \times [0,1]) \cup \{\partial\}$ i prawdopodobieństwami przejścia:

(3.5) $$p(m,x;n,B) = P\{\tau_{k+1} = n, X_n \in B \mid \tau_k = m, X_m = x\} =$$

$$= \begin{cases} x^{n-m-1} \, |(x,1] \cap B| & \text{gdy } m < n , \\ 0 & \text{gdy } m \geq n , \end{cases}$$

dla $m,n = 1,2,\dots,N$, $x \in [0,1]$, B-borelowski podzbiór odcinka $[0,1]$, a $|\ |$ oznacza miarę Lebesque'a.

Niech $\tau \in \mathfrak{M}_N^0$. Określimy zmienną losową $\sigma = k$ na zbiorze $\{\omega: \tau(\omega) = \tau_k(\omega) < \infty\}$, $k = 1,2,\dots,N$ i $\sigma = +\infty$ na $\{\tau(\omega) = +\infty\}$.

σ - jest momentem Markowa względem $\{\mathcal{F}_{\tau_k}\}_{k=1}^N$ i ze wzoru (3.2) wynika

(3.6) $$Y_\tau = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_\tau X_\tau^{N-\tau} & \text{gdy } \tau < +\infty \\ 0 & \text{gdy } \tau = +\infty \end{array} \right\} \stackrel{df}{=} f(\xi_\sigma),$$

gdzie

$$f(n,x) = \alpha_n x^{N-n} \ ; \ f(\partial) = 0 .$$

Problem (3.1) został zatem sprowadzony do optymalnego zatrzymania łańcucha Markowa $\{\xi_k\}_{k=1}^{N}$ z funkcją wypłaty $f(n,x)$. W celu znalezienia rozwiązania posłużymy się następującym lematem.

Lemat 3.1 [8] .

Niech ξ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa z przestrzenią stanów S. Niech $f:S \longrightarrow R$ będzie funkcją ograniczoną.

Oznaczmy

$$Z = \{s \in S : Tf(s) \leqslant f(s)\},$$

gdzie $Tf(s) = E_s f(\xi_1)$.

Załóżmy, że

(i) $P_s\{\text{istnieje } k \text{ takie, że } \xi_k \in Z\} = 1$ dla $s \in S$,

(ii) $P_s\{\text{istnieje } k \text{ takie, że } \xi_k \notin Z\} = 0$ dla $s \in Z$.

Wówczas $\sigma^* = \inf \{k : \xi_k \in Z\}$ jest rozwiązaniem problemu optymalnego zatrzymania ξ z funkcją wypłaty f.

W problemie (3.1) założenia lematu są spełnione. Mianowicie

$$Tf(\partial) = 0 = f(\partial),$$

$$Tf(N,x) = f(\partial) = 0 < \alpha_N = f(N,x)$$

więc $\partial \in Z$ i $(N,x) \in Z$ dla każdego $x \in [0,1]$.

$$Tf(m,x) = \sum_{n=m+1}^{N} \int_{[0,1]} f(n,y)\, p(m,x;n,dy) =$$

$$= \sum_{n=m+1}^{N} \alpha_n \frac{x^{n-m-1} - x^{N-m}}{N-n+1}$$

dla $m = 1,2,\ldots,N-1$.

Nierówność

$$Tf(m,x) \leqslant f(m,x)$$

jest równoważna w tym przypadku nierówności :

$$\sum_{n=m+1}^{N} \alpha_n \frac{x^{n-m-1} - x^{N-m}}{N-n+1} \leqslant \alpha_m x^{N-m}$$

czyli

$$\sum_{n=m+1}^{N} \frac{\alpha_n}{\alpha_m} \frac{x^{-N+n-1} - 1}{N-n+1} \leqslant 1 .$$

Oznaczmy lewą stronę powyższej nierówności przez $h_m(x)$.

$$(3.7) \quad h_m(x) = \sum_{n=m+1}^{N} \frac{\alpha_n}{\alpha_m} \frac{x^{-N+n-1} - 1}{N-n+1} .$$

Funkcja $h_m(x)$ jest malejącą funkcją x . $h_m(0+) = +\infty$, $h_m(1-) = 0$.
Stąd istnieje x_m takie, że $h_m(x) \leqslant 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \geqslant x_m$, gdzie x_m jest pierwiastkiem równania $h_m(x) = 1$.

Ponadto

$$h_{m+1}(x) = \sum_{n=m+2}^{N} \frac{\alpha_n}{\alpha_{m+1}} \frac{x^{-N+n-1} - 1}{N-n+1} =$$

$$= \frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}} h_m(x) - \frac{x^{-N+m} - 1}{N-m} .$$

Niech

$$k_m(x) = h_{m+1}(x) - h_m(x) .$$

$$k_m(x) = \frac{\alpha_m - \alpha_{m+1}}{\alpha_{m+1}} \left(h_m(x) - \frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_m - \alpha_{m+1}} \frac{x^{-N+m} - 1}{N-m} \right)$$

$$= \frac{\alpha_m - \alpha_{m+1}}{\alpha_m} g_m(x) .$$

Funkcja $g_m(x)$ ma następujące własności: $g_m(1-) = 0$,

$$g_m'(x) = x^{-N+m-1} \left(- \sum_{n=m+1}^{N} \frac{\alpha_n}{\alpha_m} x^{n-m-1} + \frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_m - \alpha_{m+1}} \right) .$$

Stąd jeżeli ciąg $\{\alpha_n\}_{n=1}^{N}$ spełnia warunek :

$$(3.8)\qquad \sum_{n=m+1}^{N} \alpha_n \leqslant \frac{\alpha_m \alpha_{m+1}}{\alpha_m - \alpha_{m+1}} ,$$

to $g_m'(x) \geqslant 0$, a stąd $h_{m+1}(x) < h_m(x)$.

Zatem przy warunku (3.8) dla $x \in (0,1)$ $h_{m+1}(x) < h_m(x)$ i $h_{m+1}(x_{m+1}) = 1 < h_m(x_{m+1})$, więc $x_{m+1} < x_m$ dla $m = 1,2,\ldots,N-1$ gdzie $x_N = 0$.

Niech

$$\mathcal{Z} = \{\partial\} \cup \bigcup_{m=1}^{N} (\{m\} \times [x_m, 1])$$

Łańcuch Markowa $\{\xi_k\}_{k=1}^{N}$ ma realizacje niemalejące, ciąg x_m , $m = 1,2,\ldots, N$ jest malejący, więc założenia lematu są spełnione. Otrzymaliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.1.

Jeżeli ciąg $\{\alpha_m\}_{m=1}^{N}$ jest malejący, $0 < \alpha_m < 1$, oraz

$$\sum_{n=m+1}^{N} \alpha_n \leqslant \frac{\alpha_m \alpha_{m+1}}{\alpha_m - \alpha_{m+1}} \qquad m = 1,2,\ldots, N-1$$

to problem (3.1) ma następujące rozwiązanie. Optymalnym momentem zatrzymania $\tau^* \in \mathfrak{M}_{\mathcal{L}_N}$ jest moment

$$\tau^* = \inf \{ n \in N : X_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \text{ i } F(X_n) \geqslant x_n$$

gdzie $x_N = 0$, x_n dla $n < N$ jest jednoznacznym rozwiązaniem równania

$$h_n(x) = 1 ,$$

a funkcja $h_n(x)$ dana jest wzorem (3.7) .

Przykład.

Przykładem ciągu $\{\alpha_m\}_{m=1}^{N}$ spełniającego warunek (3.8) jest ciąg malejący i taki, że

$$(3.9)\qquad \frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_m} \leqslant \frac{\alpha_m}{\alpha_{m-1}}$$

Istotnie, dla $m = N - 1$ warunek (3.8) jest spełniony dla każdego ciągu malejącego o wyrazach nieujemnych.
Załóżmy dla indukcji, że dla $m = N - 1$, $N - 2, \ldots, r$

$$\sum_{n=r+1}^{N} \alpha_n \leq \frac{\alpha_r \, \alpha_{r+1}}{\alpha_r - \alpha_{r+1}}$$

Wówczas

$$\sum_{n=r}^{N} \alpha_n = \sum_{n=r+1}^{N} \alpha_n + \alpha_r \leq \frac{\alpha_r \, \alpha_{r+1}}{\alpha_r - \alpha_{r+1}} + \alpha_r =$$

$$= \frac{\alpha_r^2}{\alpha_r - \alpha_{r+}} \leq \frac{\alpha_{r-1} \, \alpha_r}{\alpha_{r-1} - \alpha_r}$$

z warunku (3.9).

Warunek (3.9) spełnia ciąg geometryczny o ilorazie

$0 < \alpha < 1$

4. Optymalne reguły zatrzymania ciągu zmiennych losowych przy wybranym kryterium optymalności.

4.1. Wprowadzenie.

Niech $X_1, X_2, \ldots$ i $Y_1, Y_2, \ldots$ będą ciągami niezależnych zmiennych losowych określonych na ustalonej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ o wartościach rzeczywistych. Załóżmy, że te dwa ciągi są wzajemnie niezależne i X_i, Y_i mają ten sam rozkład typu ciągłego o dystrybuancie $F(x)$. Niech $f_n : R^n \longrightarrow R$, $n = 1, 2, \ldots$ będzie ciągiem funkcji i określimy $\xi_i = f_i(X_1, X_2, \ldots, X_i)$ oraz $\eta_i = f_i(Y_1, Y_2, \ldots, Y_i)$. Obserwujemy tylko ciąg X_i, $i = 1, 2, \ldots$. Chcemy zatrzymać się w momencie, gdy ξ_i będzie większe od η_i.

Dodkładnie, niech $F_i = \sigma\{X_1, X_2, \ldots, X_i\}$, a $\mathfrak{M}$ będzie zbiorem wszystkich momentów markowskich τ względem F_i, $i = 1, 2, \ldots$ oraz $\mathfrak{M}^N = \{ \tau \in \mathfrak{M} : 0 \leq \tau \leq N \}$. Rozpatrzymy następujące problemy :

Niech $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_i) = \max(x_1, x_2, \ldots, x_i)$.

a/ Poszukujemy $\tau^* \in \mathfrak{M}^N$ takiego, że

$$(4.1)\quad P\{\xi_{\tau^*} > \eta_{\tau^*}\} = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}^N} P\{\xi_\tau > \eta_\tau\} .$$

b/ Trzeba wyznaczyć $\tau^* \in \mathfrak{M}$ takie, że $P\{\tau^* < \infty\} = 1$ i

$$(4.2)\quad P\{A \geq \xi_{\tau^*} > \eta_{\tau^*}\} = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}} P\{A \geq \xi_\tau > \eta_\tau\} .$$

c/ Poszukujemy $\tau^* \in \mathfrak{M}$ takiego, że $P\{\tau^* < \infty\} = 1$ i

$$(4.3)\quad P\{\min(A, \xi_{\tau^*}) > \eta_{\tau^*}\} = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}} P\{\min(A, \xi_\tau) > \eta_\tau\} .$$

Problemy jednoczesnego zatrzymywania dwóch ciągów zmiennych losowych, gdy jeden jest obserwowany, nie były dotąd spotykane w literaturze.

Zatrzymanie ciągu ξ_n nad ciągiem η_n, gdy obserwujemy tylko ciąg ξ_n, w następujący sposób sprowadza się do klasycznego problemu optymalnego zatrzymania pewnego ciągu zmiennych losowych.

Niech

$$Z_n = P\{\xi_n > \eta_n \mid \mathcal{F}_n\} \quad , n = 1, 2, \ldots .$$

Otrzymujemy

$$P\{\xi_\tau > \eta_\tau\} = EZ_\tau$$

dla $\tau \in \mathfrak{M}$ takich, że $P\{\tau < \infty\} = 1$.

Jeśli $Z_n = g(n, \xi_n)$, a $\xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty}$ względem $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ jest łańcuchem Markowa, wyjściowy problem sprowadza się do optymalnego zatrzymania łańcucha Markowa z funkcją wypłaty $g(n, \cdot)$ [63] .

Niech $\xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty}$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa względem $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ określonym na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ o wartościach w przestrzeni stanów $(E, \mathcal{B})$ i $P_x(B) = P\{\xi_{n+1} \in B \mid \xi_n = x\}$ dla każdego $B \in \mathcal{B}$. Oznaczmy przez E_x wartość oczekiwaną względem miary P_x .

Niech $g(n,\cdot)$ będzie funkcją wypłaty określoną na przestrzeni stanów łańcucha o wartościach rzeczywistych, zależną w sposób istotny od n. Problem optymalnego zatrzymania łańcucha Markowa z funkcją wypłaty $g(n,\cdot)$ polega na wyznaczeniu

$$v(x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}} E_x\, g(\tau, \xi_\tau),$$

gdzie x jest stanem początkowym i znalezieniu $\tau^* \in \mathfrak{M}$ takiego, że $P\{\tau^* < \infty\} = 1$ i

$$E_x g(\tau^*, \xi_{\tau^*}) = v(x) .$$

W przypadku skończonego łańcucha Markowa $\xi = (\xi_m)_{m=0}^N$ problem optymalnego zatrzymania ma następujące rozwiązanie

Niech $\xi_n = x$,

$$\mathfrak{M}_m^N = \{\tau \in \mathfrak{M}^N : \tau \geq m\}$$

$$v_N(n,x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_m^N} E_x g(\tau, \xi_\tau),$$

oraz

$$Tg(n,x) = E_x\, g(n+1, \xi_1)$$

i

$$Qg(n,x) = \max\{g(n,x), Tg(n,x)\}.$$

Lemat 4.1 ([63] , str. 106 - 108).

Niech $\xi = (\xi_m)_{m=0}^N$ będzie jednorodnym skończonym łańcuchem Markowa z przestrzenią stanów E i $g: \{1,2,\dots, N\} \times E \to R$ będzie nieujemną, ograniczoną funkcją. Wówczas $v_N(n,x)$ spełnia następujące równanie :

$$v_N(n,x) = \max\{g(n,x) , Tv_N(n,x)\} = Q^{N-n}\, g(n,x)$$

i

$$\tau_n^{*N} = \min\{n \leq k \leq N : v_N(k, \xi_k) = g(k, \xi_k)\}$$

jest optymalnym momentem zatrzymania w $\mathfrak{M}_m^N$. $v(x) = v_N(0,x)$ i optymalnym momentem zatrzymania jest τ_0^{*N}.

Niech $\xi_n = x$,

$$\mathfrak{M}_n = \{\tau \in \mathfrak{M} : \tau \geqslant n\}$$

i

$$v(n,x) = \sup E_x\, g(\tau, \xi_\tau).$$

Lemat 4.2 ([63] str. 106 - 108),

Niech $\xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty}$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa z przestrzenią stanów E i $g: \{0,1,2,\dots\} \times E \longrightarrow R$ będzie nieujemną funkcją, ograniczoną, to funkcja $v(n,x)$ spełnia następujące równanie

$$v(n,x) = \max\{g(n,x),\ Tv(n,x)\}$$

i

$$v(n,x) = \lim_{N\to\infty} Q^N g(n,x) ,$$

a moment

$$\tau^*_{n,\varepsilon} = \inf\{m \geqslant n :\ v(m,\xi_m) \leqslant g(m,\xi_m) + \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0$$

jest ε - optymalny w klasie $\mathfrak{M}_n$ tzn.

$$v(n,x) \leqslant E_x g\,(\tau^*_{n,\varepsilon}, \xi_{\tau^*_{n,\varepsilon}}) + \varepsilon .$$

Jeśli $P_x\{\tau^*_{0,0} < \infty\} = 1$, to $\tau^*_{0,0}$ jest optymalnym momentem zatrzymania i $v(x) = v\ (0,x)$.

4.2. Optymalne zatrzymanie skończonego ciągu maksimów.

Niech $f_i(x_1,x_2,\dots,x_i) = \max\,(x_1,x_2,\dots,x_i)$. Ponieważ $F(X_i)$ ma rozkład jednostajny w $[0,1]$ i $P\{X_i > Y_i \Longleftrightarrow F(X_i) > F(Y_i)\} = 1$ zatem bez straty ogólności możemy dodatkowo założyć, że X_i oraz Y_i, $i = 1,2,\dots, N$ mają rozkład jednostajny. Mamy zatem :

$$Z_n = P\{\xi_n > \eta_n \mid \mathcal{F}_n\} = \xi_n^n = g(n, \xi_n)$$

a więc funkcja wypłaty $g(n,x) = x^n$.

$\xi = (\xi_n)_{n=0}^N$ jest łańcuchem Markowa względem $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ z przestrzenią stanów $[0,1]$ i funkcją prawdopodobieństw przejścia

$$(4.4)\quad P(n,x;n+1,B) = P\{\xi_{n+1} \in B | \xi_n = x\} = \begin{cases} x + |B \cap (x,1)| & \text{jeśli } x \in B, \\ |B \cap (x,1]| & \text{jeśli } x \notin B, \end{cases}$$

dla $n = 0,1,\dots, N-1$: $x \in [0,1]$, B - borelowski podzbiór odcinka $[0,1]$, a $|\cdot|$ oznacza miarę Lebesque'a .

Z lematu 4.1 otrzymujemy następujące twierdzenie :

Twierdzenie 4.1.

Istnieje ciąg liczb $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_{N-1}$, $x_N = 0$ taki, że

$$\tau^* = \min\{1 \leqslant n \leqslant N : \xi_n \geqslant x_n\}$$

spełnia warunek

$$P\{\xi_{\tau^*} > \eta_{\tau^*}\} = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}^N} P\{\xi_\tau > \eta_\tau\}.$$

gdzie
$$P\{\xi_{\tau^*} > \eta_{\tau^*}\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2N-1} x_1^{2N} - x_1^2 + 1\right] + \psi_1(x_2)\, x_1$$

$$\psi_{N-1}(x_N) = \frac{1}{N+1}$$

$$\psi_{N-i}(x_{N-i+1}) = \frac{N}{(N+i)(N+i-1)} x_{N-i+1}^{N+i} - \frac{1}{N-i+2} x_{N-i+1}^{N-i+2} + \psi_{N-i+1}(x_{N-i+2})x_{N-i+1} + \frac{1}{N-i+2}, \quad i = 2,3,\dots,N-1.$$

x_{N-1} jest jedynym pierwiastkiem równania

$$\frac{N}{N+1} x^{N+1} + \frac{1}{N+1} - x^{N-1} = 0 \quad w(0,1),$$

a x_{N-i} jedynym pierwiastkiem równania

$$\frac{N}{N+i} x^{N+i} + \psi_{N-i}(x_{N-i+1}) - x^{N-i} = 0$$

w przedziale $(0, x_{N-i+1})$.

Dla dowodu pokażemy najpierw następujący lemat.

Lemat 4.3.

Równanie

$$(4.5)\quad E_x\, g(n+1, \xi_1) = g(n,x)$$

ma w $(0,1)$ jedyne rozwiązanie x_n^0 dla $n = 1,2,\ldots, N-1$ i $x_n^0 \leqslant x_{n+1}^0$, $E_x\, g(n+1, \xi_1) \leqslant g(n,x)$ dla $x \geqslant x_n^0$.

Dowód :

Mamy :

$$E_x\, g(n+1, \xi_1) = x^{n+2} + \int_x^1 y^{n+1}\, dy = \frac{n+1}{n+2} x^{n+2} + \frac{1}{n+2} .$$

Niech

$$h(n,x) = E_x\, g(n+1, \xi_1) - g(n,x) .$$

Funkcja $h(n,x)$ ma następujące własności w $[0,1]$:

(i) $h(n,0) = \frac{1}{n+2}$; $h(n,1) = 0$.

(ii) Funkcja $h(n,x)$ ma jedyne minimum w punkcie $\alpha_1^n = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$.

Stąd istnieje w $(0,1)$ jedyny pierwiastek x_n^0 równania (4.5) i $x_n^0 < \alpha_1^n$.

Niech

$$\varphi_n(x) = \frac{(n+2)\,h(n,x)}{1-x} .$$

Otrzymujemy

$$\varphi_n(x) = -(n+1)x^{n+1} - (n+1)x^n + \sum_{i=0}^{n-1} x^i$$

oraz

$$\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x) = -x^n\left[(n+2)x^2 + x - (n+2)\right] .$$

Mamy więc $\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x) > 0$ dla $x \in (0, \alpha_2^n)$, $n = 1,2,\ldots,N-1$, gdzie α_2^n jest pierwiastkiem równania $\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x) = 0$ należącym do $(0,1)$. Łatwo sprawdzić, że $\alpha_1^n < \alpha_2^n$. Stąd $h(n+1, \alpha_2^n) < 0$ i $x_{n+1}^0 > x_n^0$. To kończy dowód lematu 4.3.

Udowodnimy teraz twierdzenie 4.1. Z lematu 4.1 i 4.3 mamy :

$$v_N(N-1,x) = \max\{\, g(N-1,x) , E_x\, g(N, \xi_1)\} = \begin{cases} x^{N-1} & \text{dla } x \geqslant x_{N-1} , \\ \frac{N}{N+1} x^{N+1} + \frac{1}{N+1} & \text{dla } x < x_{N-1} , \end{cases}$$

gdzie $x_{N-1} = x^{o}_{N-1}$ (określone w lemacie 4.3).

Pokażemy teraz, że

$$(4.6)\quad v_N(N-2,x) = \begin{cases} x^{N-2} & \text{dla } x \geqslant x_{N-2}, \\ \frac{N}{N+2}\, x^{N+2} + \psi_{N-2}\, x_{N-1} & \text{dla } x < x_{N-2}, \end{cases}$$

gdzie

$$\psi_{N-2}(x_{N-1}) = \frac{N}{(N+1)(N+2)}\, x^{N+2}_{N-1} - \frac{1}{N}\, x^{N}_{N-1} + \frac{1}{N+1}\, x_{N-1} + \frac{1}{N}$$

i x_{N-2} jest jedynym rozwiązaniem równania

$$\frac{N}{N+2}\, x^{N+2} + \psi_{N-2}(x_{N-1}) - x^{N-2} = 0$$

należącym do $(0, x_{N-1})$.

Z lematu 4.1 mamy

$$v_N(N-2,x) = \max\{g(N-2,x), E_x v_N(N-1,\xi_1)\}.$$

Niech $x < x_{N-1}$. Wówczas

$$E_x v_N(N-1,\xi_1) = \frac{N}{N+2}\, x^{N+2} + \frac{N}{(N+1)(N+2)}\, x^{N+2}_{N-1} - \frac{1}{N}\, x^{N}_{N+1} +$$

$$+ \frac{1}{N+1}\, x_{N-1} + \frac{1}{N} = \frac{N}{N+2}\, x^{N+2} + \psi_{N-2}(x_{N-1})$$

a dla $x \geqslant x_{N-1}$

$$E_x v_N(N-1,\xi_1) = \frac{N-1}{N}\, x^{N} + \frac{1}{N}.$$

Niech

$$l(N-j,x) = E_x v_N(N-j+1,\xi_1) - x^{N-j}, \quad j = 2,3,\ldots,N-1.$$

Funkcja $l(N-2,x)$ ma następujące własności :

(i) $l(N-2,x)$ jest funkcją ciągłą w $(0,1)$.

(ii) $l(N-2,x_{N-1}) < 0$ ponieważ $h(N-2,x)$ ma w $(0,1)$ pierwiastek równy $x^{0}_{N-2} < x^{0}_{N-1} = x_{N-1}$; $h(N-2,x) < 0$ dla $x > x^{0}_{N-2}$ i $l(N-2,x) = h(N-2,x)$ dla $x \in [x_{N-1}, 1]$.

(iii) $l(N-2,x) > h(N-2,x)$ dla $x < x_{N-1}$ ponieważ $v(N-1,x) > g(N-1,x)$ dla $x < x_{N-1}$.

(iv) Funkcja $l(N-2,x)$ jest malejąca w $(0, x_{N-1})$.

Z (i) - (iv) mamy, że $l(N-2,x) = 0$ ma w $(0,x_{N-1})$ dokładnie jedno rozwiązanie x_{N-2}, $x^0_{N-2} < x_{N-2} < x_{N-1}$ i $l(N-2,x) > 0$ dla $x < x_{N-2}$. Wobec tego $v_N(N-2,x)$ dane jest wzorem (4.6).

Załóżmy dla indukcji, że otrzymaliśmy $x_{N-1} > x_{N-2} > \ldots > x_{N-i+1} > x^0_{N-i+1}$, $i < N-1$, oraz

$$
(4.7) \qquad v_N(N-j,x) = \begin{cases} x^{N-j} & \text{dla } x \geq x_{N-j}, \\ \frac{N}{N+j}\, x^{N+j} + \psi_{N-j}(x_{N-j+1}) & \text{dla } x < x_{N-j}, \end{cases}
$$

dla $j=1,2,\ldots,i-1$, gdzie $\psi_{N-1}(0) = \frac{1}{N+1}$

$$
\psi_{N-j}(x_{N-j+1}) = \frac{N}{(N+j)(N+j-1)}\, x^{N+j}_{N-j+1} - \frac{1}{N-j+2}\, x^{N-j+2}_{N-j+1} + {}
$$

$$
+ \psi_{N-j+1}(x_{N-j+2})\, x_{N-j+1} + \frac{1}{N-j+2}
$$

a x_{N-j} jest pierwiastkiem równania $l(N-j,x) = 0$ w $(0,x_{N-j+1})$. Wyznaczymy teraz x_{N-i} i obliczymy $v_N(N-i,x)$.

Jeżeli $x < x_{N-i+1}$, to

$$
E_x v_N(N-i+1, \xi_1) = \frac{N}{N+i-1}\, x^{N+i-1} \cdot x + \psi_{N-i+1}(x_{N-i+2})\, x + {}
$$

$$
+ \int_x^{x_{N-i+1}} \left[\frac{N}{N+i-1}\, y^{N+i-1} + \psi_{N-i+1}(x_{N-i+2})\right] dy + {}
$$

$$
+ \int_{x_{N-i+1}}^{1} y^{N-i+1}\, dy = \frac{N}{N+i}\, x^{N+i} + \psi_{N-i}(x_{N-i+1}) .
$$

Jeśli $x \geq x_{N-i+1}$, to

$$
E_x v_N(N-i+1, \xi_1) = x^{N-i+2} \cdot x + \int_x^1 y^{N-i+1}\, dy = \frac{N-i+1}{N-i+2}\, x^{N-i+2} + \frac{1}{N-i+2}
$$

Funkcja $l(N-i,x) = E_x v_N(N-i+1, \xi_1) - x^{N-i}$ jest ciągła w $(0,1)$ oraz

(i) Dla $x \geq x_{N-i+1}$, $l(N-i,x)<0$ ponieważ $h(N-i+1,x)=0$ ma pierwiastek x^0_{N-i+1}, $x^0_{N-i+1} < x_{N-i+1}$; $h(N-i,x) < 0$ dla $x > x^0_{N-i}$, $x^0_{N-i} < x^0_{N-i+1} < x_{N-i+1}$ oraz dla $x \geq x_{N-i+1}$ $l(N-i,x) = h(N-i,x) < 0$.

(ii) Dla $x < x_{N-i+1}$, $l(N-i,x) > h(N-i,x)$ ponieważ dla $x < x_{N-i+1}$ $v_N(N-i+1,x) > g(N-i+1,x)$.

(iii) Funkcja $l(N-i,x)$ dla $x < x_{N-i+1}$ jest malejąca.

Te fakty sprawiają, że istnieje jedyne rozwiązanie równania $l(N-i,x) = 0$ w $(0,1)$, $x^0_{N-i} < x_{N-i} < x_{N-i+1}$ i $l(N-i,x) > 0$ dla $x < x_{N-i}$. Zatem $v_N(N-i,x)$ dane jest wzorem (4.7) dla $i = 1,2,\dots,N-1$.

Zakładając, że $P\{\xi_0=0\} = 1$ otrzymujemy

$$v(0,0) = E_0 v_N(1,\xi_1) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2N-1} x_1^{2N} - x_1^2 + 1\right] + \psi_1(x_2)\, x_1 .$$

To kończy dowód twierdzenia 4.1.

4.3. Optymalne zatrzymanie nieskończonego ciągu maksimów.

Niech $f_i(x_1,x_2,\dots,x_i) = \max(x_1,x_2,\dots,x_i)$. Z powodów podanych poprzednio, zakładamy, że X_i, Y_i mają rozkład jednostajny w $[0,1]$. Niech $0<A<1$. Poszukujemy $\tau^* \in \mathfrak{M}$ takiego, że

$$(4.8) \qquad P\{A \geq \xi_{\tau^*} > \eta_{\tau^*}\} = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}} P\{A \geq \xi_\tau > \eta_\tau\} .$$

Niech

$$Z_n = P\{A \geq \xi_n > \eta_n \mid \mathcal{F}_n\} = g(n,\xi_n) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \xi_n > A \\ \xi_m^n & \text{gdy } \xi_n \leq A \end{cases}$$

$\xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty}$ jest łańcuchem Markowa względem $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ z przestrzenią stanów $[0,1]$ i funkcją prawdopodobieństw przejścia (4.4).

Twierdzenie 4.2.

Istnieje ciąg stałych $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ taki, że

1/ $\tau^* = \inf\{n: \xi_n \geq \alpha_n\}$ jest optymalnym momentem zatrzymania, to znaczy realizuje (4.8) .

2/ $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = A$, $\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}$ dla każdego $n \in N$.

3/ Ciąg α_n spełnia równanie rekurencyjne :

$$\alpha_n^n = \frac{n+1}{n+2}\,\alpha_{n+1}^{n+2} + \frac{A^{n+2}}{n+2}$$

4/ Wyrazy ciągu α_n można obliczyć jako granicę ciągu jedynych rozwiązań $\beta_n^l \in (0, \beta_{n+1}^{l-1})$ równań

$$\frac{n+l}{n+2l}\left[x^{n+2l} - (\beta_{n+1}^{l-1})^{n+2l}\right] + \frac{n+1}{n+2}(\beta_{n+1}^{l-1})^{n+2} + \frac{A^{n+2}}{n+2} - x^n = 0,$$

gdy l dąży do nieskończoności.

5/ Wartość $v = v(0,0) = P\{A \geqslant \xi_{\tau^*} > \eta_{\tau^*}\} = \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + A^2)$

Dowód :

Z lematu 4.2 mamy

$$v(n,x) = \lim_{N\to\infty} Q^N g(n,x)$$

gdzie $Qg(n,x) = \max\{g(n,x), Tg(n,x)\}$, a

$$Tg(n,x) = E_x g(n+1,\xi_1) = x^{n+1}\cdot x + \int_x^A y^{n+1}\,dy = \begin{cases} \frac{n+1}{n+2}x^{n+2} + \frac{A^{n+2}}{n+2} & \text{dla } x \leqslant A, \\ 0 & \text{dla } x > A. \end{cases}$$

$$Q\,g(n,x) = \begin{cases} \frac{n+1}{n+2}x^{n+2} + \frac{A^{n+2}}{n+2}, & \text{gdy } x < \beta_n^1, \\ x^n, & \text{gdy } \beta_n^1 \leqslant x \leqslant A, \\ 0, & \text{gdy } x > A, \end{cases}$$

gdzie β_n^1 jest pierwiastkiem równania :

$$(4.9)\qquad \frac{n+1}{n+2}x^{n+2} + \frac{A^{n+2}}{n+2} - x^n = 0 \quad w\ (0,A)\ .$$

Równanie (4.9) ma w $(0,A)$ dokładnie jedno rozwiązanie, ponieważ funkcja

$$\varphi_1(n,x) = \frac{n+1}{n+2}x^{n+2} + \frac{A^{n+2}}{n+2} - x^n$$

ma następujące własności :

(i) $\varphi_1(n,0)>0$, $\varphi_1(n,A) = A^n(1-A) < 0$.

(ii) $\varphi_1(n,x)$ ma / rozpatrywana w $(0,1)$/ w $x=\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ jedyne minimum.

Ponieważ

$$\varphi_1(n+1,x) = \frac{n+2}{n+3}x^{n+3} + \frac{A^{n+3}}{n+3} - x^{n+1} =$$

$$= x\varphi_1(n,x) + \frac{1}{(n+3)(n+2)}x^{n+3} - \frac{A^{n+2}}{n+2}x + \frac{A^{n+3}}{n+3} =$$

$$\stackrel{df}{=} x\varphi_1(n,x) + q(n,x)$$

i $q(n,x)>0$ dla $x\in(0,A)$, więc $\varphi_1(n+1,\beta_n^1)>0$ i stąd $\beta_n^1 < \beta_{n+1}^1$.

Wyznaczymy teraz $Q^N g(n,x)$ indukcyjnie.

$$(4.10)\quad Q^N g(n,x) = \max\left\{Q^{N-1}g(n,x)\ ,\ TQ^{N-1}g(n,x)\right\} = \max\left\{g(n,x), TQ^{N-1}g(n,x)\right\} .$$

Oznaczmy przez

$$(4.11)\quad \varphi_N(n,x) = TQ^{N-1}g(n,x) - g(n,x).$$

Niech $N=2$. Wówczas dla $x<\beta_{n+1}^1$

$$TQg(n,x) = E_x Qg(n+1,\xi_1) = \frac{n+2}{n+4}\left[x^{n+4} - (\beta_{n+1}^1)^{n+4}\right] + \frac{n+1}{n+2}(\beta_{n+1}^1)^{n+2} + \frac{A^{n+2}}{n+2}$$

i

$$(4.12)\quad \varphi_2(n,x) = \frac{n+2}{n+4}\left[x^{n+4} - (\beta_{n+1}^1)^{n+4}\right] + \frac{n+1}{n+2}(\beta_{n+1}^1)^{n+2} + \frac{A^{n+2}}{n+2} - x^n .$$

Funkcja $\varphi_2(n,x)$ ma następujące własności :

(i) $\varphi_2(n,x) = TQg(n,x) - g(n,x) = Tg(n,x) - g(n,x) = \varphi_1(n,x) < 0$ dla $x \geqslant \beta^1_{n+1} > \beta^1_n$.

(ii) $\varphi_2(n,x) > \varphi_1(n,x) \geqslant 0$ dla $x \leqslant \beta^1_n$.

(iii) Wielomian określony wzorem (4.12) ma w $(0,1)$ dokładnie jedno minimum w tym przedziale.

Z (i) - (iii) wynika, że równanie $\varphi_2(n,x) = 0$ ma jedyny pierwiastek β^2_n i

(4.13) $\beta^1_n < \beta^2_n < \beta^1_{n+1}$ dla $n = 1,2,\dots$

Z (4.13) wynika, że $\beta^1_{n+1} < \beta^2_{n+1} < \beta^1_{n+2}$, więc $\beta^2_n < \beta^2_{n+1}$.

Załóżmy, że istnieją jednoznaczne rozwiązania β^k_n równań $\varphi_k(n,x) = 0$ w $(0,A)$ dla $k = 1,2,\dots,l$ $\beta^1_n < \beta^2_n < \dots < \beta^l_n$, $\beta^k_n < \beta^k_{n+1}$ dla $k = 1,2,\dots,l$, $n = 1,2,\dots$ oraz

$$Q^l g(n,x) = \begin{cases} \frac{n+l}{n+2l}\left[x^{n+2l} - (\beta^{l-1}_{n+1})^{n+2l}\right] + \frac{n+1}{n+2}(\beta^{l-1}_{n+1})^{n+2} + \frac{A^{n+2}}{n+2}, & \text{gdy } x < \beta^l_n, \\ x^n, & \text{gdy } \beta^l_n \leqslant x \leqslant A, \\ 0, & \text{gdy } x > A. \end{cases}$$

Mamy wówczas dla $x < \beta^l_{n+1}$

$$TQ^l g(n,x) = x\left\{\frac{n+l+1}{n+2l+1}\left[x^{n+2l+1} - (\beta^{l-1}_{n+2})^{n+2l+1}\right] + \frac{n+2}{n+3}(\beta^{l-1}_{n+2})^{n+3} + \frac{A^{n+3}}{n+3}\right\}$$

$$+ \int_x^{\beta^l_{n+1}} \left\{\frac{n+l+1}{n+2l+1}\left[y^{n+2l+1} - (\beta^{l-1}_{n+2})^{n+2l+1}\right] + \frac{n+2}{n+3}(\beta^{l-1}_{n+2})^{n+3} + \frac{A^{n+3}}{n+3}\right\}dy$$

$$+ \int_{\beta^l_{n+1}}^{A} y^{n+1}\,dy = \frac{n+l+1}{n+2(l+1)}\left[x^{n+2(l+1)} - (\beta^l_{n+1})^{n+2(l+1)}\right] + \frac{n+1}{n+2}(\beta^l_{n+1})^{n+2} + \frac{A^{n+2}}{n+2}$$

$$+ (\beta^l_{n+1})\left\{\frac{n+l+1}{n+2l+1}\left[(\beta^l_{n+1})^{n+2l+1} - (\beta^{l-1}_{n+2})^{n+2l+1}\right] + \frac{n+2}{n+3}(\beta^{l-1}_{n+2})^{n+3} + \frac{A^{n+3}}{n+3} - (\beta^l_{n+1})^{n+1}\right\} =$$

$$= \frac{n+l+1}{n+2(l+1)}\left[x^{n+2(l+1)} - (\beta^l_{n+1})^{n+2(l+1)}\right] + \frac{n+1}{n+2}(\beta^l_{n+1})^{n+2} + \frac{A^{n+2}}{n+2} +$$

$$+(\beta^l_{n+1})\varphi_l(n+1,\beta^l_{n+1}) \quad =$$

$$= \frac{n+l+1}{n+2(l+1)}\left[x^{n+2(l+1)}-(\beta^l_{n+1})^{n+2(l+1)}\right] + \frac{n+1}{n+2}(\beta^l_{n+1})^{n+2} + \frac{A^{n+2}}{n+2} .$$

Zatem dla $x<\beta^l_{n+1}$ funkcja $\varphi_{l+1}(n,x)$ dana jest wzorem

$$(4.14)\quad \varphi_{l+1}(n,x) = \frac{n+l+1}{n+2(l+1)}\left[x^{n+2(l+1)}-(\beta^l_{n+1})^{n+2(l+1)}\right] + \frac{n+1}{n+2}(\beta^l_{n+1})^{n+2}+\frac{A^{n+2}}{n+2} - x^n.$$

Funkcja $\varphi_{l+1}(n,x)$ ma następujące własności :

(i) $\varphi_{l+1}(n,x) = TQ^l g(n,x) - g(n,x) = Tg(n,x) - g(n,x) = \varphi_l(n,x) < 0$ dla $x \geq \beta^l_{n+1} > \beta^l_n$.

(ii) $\varphi_{l+1}(n,x) > \varphi_l(n,x) \geq 0$ dla $x \leq \beta^l_n$. Dla $x<\beta^l_n$ $Q^l g(n,x) > g(n,x)$, $Q^{l+1} g(n,x) \geq Q^l g(n,x)$ więc dla $x<\beta^l_n$ $Q^{l+1}g(n,x) > g(n,x)$. Stąd i z (4.10) wynika (ii) .

(iii) Wielomian określony wzorem (4.14) ma w $(0,1)$ dokładnie jedno minimum.

Z (i) - (iii) wynika, że równanie $\varphi_{l+1}(n,x) = 0$ ma jedyny pierwiastek β^{l+1}_n i

$$(4.15)\quad \beta^l_n < \beta^{l+1}_n < \beta^l_{n+1} \quad \text{dla } n = 1,2,\ldots$$

Z (4.15) wynika, że $\beta^l_{n+1} < \beta^{l+1}_{n+1} < \beta^l_{n+2}$, więc $\beta^{l+1}_n < \beta^{l+1}_{n+1}$.

Ponadto

$$Q^{l+1}g(n,x) = \begin{cases} \frac{n+l+1}{n+2(l+1)}\left[x^{n+2(l+1)}-(\beta^l_{n+1})^{n+2(l+1)}\right] + \frac{n+1}{n+2}(\beta^l_{n+1})^{n+2} + \frac{A^{n+2}}{n+2}, & \text{gdy } x<\beta^{l+1}_n \\ x^n , & \text{gdy } \beta^{l+1}_n \leq x \leq A, \\ 0 & \text{gdy } x > A. \end{cases}$$

Ciąg $(\beta_n^l)_{l=1}^{\infty}$ jest monotoniczny i ograniczony przez A, więc istnieje

$$\lim_{l\to\infty}\beta_n^l = \alpha_n .$$

Stąd

$$v(n,x)=\lim_{l\to\infty} Q^l g(n,x)=\begin{cases}\frac{n+1}{n+2}\alpha_{n+1}^{n+2}+\frac{A^{n+2}}{n+2}, & \text{gdy } x<\alpha_n,\\ x^n, & \text{gdy } \alpha_n\leqslant x\leqslant A,\\ 0, & \text{gdy } x>A.\end{cases}$$

Udowodnimy, że funkcja $v(n,x)$ jest ciągła w punkcie $x=\alpha_n$.

Załóżmy, że tak nie jest i

$$(4.16)\quad \alpha_n^n > \frac{n+1}{n+2}\alpha_{n+1}^{n+2}+\frac{A^{n+2}}{n+2} .$$

Wówczas istnieje stała $\alpha'_n < \alpha_n$ taka, że

$$v_1(n,x)=\begin{cases}\frac{n+1}{n+2}\alpha_{n+1}^{n+2}+\frac{A^{n+2}}{n+2}, & \text{gdy } x<\alpha'_n,\\ x^n, & \text{gdy } \alpha'_n\leqslant x\leqslant A,\\ 0, & \text{gdy } x>A,\end{cases}$$

i $v_1(n,x) > v(n,x) = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}_n} E_x g(\tau,\xi_\tau)$ dla $x\in(\alpha'_n,\alpha_n)$, wbrew definicji $v(n,x)$.

W przypadku, gdy w (4.16) jest nierówność przeciwna, dowód przebiega analogicznie. Mamy więc

$$\alpha_n^n = \frac{n+1}{n+2}\alpha_{n+1}^{n+2} + \frac{A^{n+2}}{n+2},$$

$$\frac{A\sqrt[n]{A^2}}{\sqrt[n]{n+2}} < \alpha_n < A\sqrt[n]{A^2} .$$

Zatem

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = A .$$

Z lematu (4.2) mamy zatem, że

$$\tau_0^* = \inf\{n: \xi_n \geqslant \alpha_n\}$$

jest optymalnym momentem zatrzymania, o ile $P\{\tau_0^* < \infty\} = 1$.

$$P\{\tau^* < \infty\} = P\Big\{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\xi_n \geqslant \alpha_n\}\Big\} \geqslant P\Big\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\xi_n \geqslant A\}\Big\} = \lim_{n\to\infty} P\{\xi_n \geqslant A\} = 1$$

Załóżmy, że $P\{\xi_0 = 0\} = 1$. Mamy wówczas

$$v = v(0,0) = E_0 v(1,\xi_1) = P\{A \geqslant \xi_{\tau^*} > \eta_{\tau^*}\} =$$

$$= \int_0^{\alpha}\Big(\frac{2}{3}\alpha_2^3 + \frac{A^3}{3}\Big)\,dy + \int_{\alpha_1}^{A} y\,dy = \alpha_1\Big(\frac{2}{3}\alpha_2^3 + \frac{A^3}{3} - \alpha_1\Big) +$$

$$+ \frac{1}{2}\big(\alpha_1^2 + A^2\big) = \frac{1}{2}\big(\alpha_1^2 + A^2\big) .$$

To kończy dowód twierdzenie (4.2) .

Niech $0 < A < 1$. Wyznaczymy teraz $\tau \in \mathfrak{M}$ takie, że

(4.17) $P\{\min(A, \xi_{\tau^*}) > \eta_{\tau^*}\} = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}} P\{\min(A,\xi_\tau) > \eta_\tau\}$.

Niech

$$Z_n = P\{\min(A,\xi_n) > \eta_n \mid \mathcal{F}_n\} = g(n,\xi_n) = \begin{cases} A^n, & \text{gdy } \xi_n > A \\ \xi_n^n, & \text{gdy } \xi_n \leqslant A. \end{cases}$$

Twierdzenie 4.3.

Istnieje ciąg stałych $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ taki, że

1/ $\tau^* = \inf\{n: \xi_n \geqslant \gamma_n\}$ jest optymalnym momentem zatrzymania w (4.17) .

2/ $\lim_{n\to\infty}\gamma_n = A$. $\gamma_n \leqslant \gamma_{n+1}$ dla każdego $n \in N$.

3/ Ciąg γ_n spełnia równanie rekurencyjne

$$\gamma_n^n = \frac{n+1}{n+2}\big(\gamma_{n+1}^{n+2} - A^{n+2}\big) + A^{n+1}$$

4/ Wyrazy ciągu γ_n można obliczyć jako granicę ciągu jedynych rozwiązań $\tilde{\delta}_n^l \in (0, \tilde{\delta}_{n+1}^{l-1})$ równań:

$$\frac{n+1}{n+2l}\left[x^{n+2l} - (\tilde{\delta}_{n+1}^{l-1})^{n+2l}\right] + \frac{n+1}{n+2}\left[(\tilde{\delta}_{n+1}^{l-1})^{n+2} - A^{n+2}\right] + A^{n+1} - x^n = 0$$

gdy l dąży do nieskończoności.

5/ Wartość

$$v(0,0) = P\left\{\min(A, \xi_{\tau^*}) > \eta_{\tau^*}\right\} = \frac{1}{2}\left(\gamma_1^2 + A^2\right) + A(1-A) .$$

Dowód :

Z lematu 4.2 mamy

$$v(n,x) = \lim_{N \to \infty} Q^N g(n,x).$$

Mamy

$$Tg(n,x) = \begin{cases} \frac{n+1}{n+2}\left[x^{n+2} - A^{n+2}\right] + A^{n+1}, & \text{gdy } x \leqslant A, \\ A^{n+1}, & \text{gdy } x > A. \end{cases}$$

Dla $x > A$, $Tg(n,x) < g(n,x)$. W przedziale $(0,A)$ funkcja

$$\varphi_1(n,x) = Tg(n,x) - g(n,x) = \frac{n+1}{n+2}\left[x^{n+2} - A^{n+2}\right] + A^{n+1} - x^n$$

ma następujące własności :

(i) $\varphi_1(n,0) = \frac{A^{n+2}}{n+2} + A^{n+1}(1-A) > 0$, $\varphi_1(n,A) = A^n(A-1) < 0$.

(ii) $\varphi_1(n,x)$ (rozpatrywana w $(0,1)$) ma dokładnie jedno minimum .

Z (i) i (ii) wynika, że równanie $\varphi_1(n,x) = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie $\tilde{\delta}_n^1 \in (0,A)$ i

$$Qg(n,x) = \begin{cases} \frac{n+1}{n+2}\left[x^{n+2} - A^{n+2}\right] + A^{n+1}, & \text{gdy } x < \tilde{\delta}_n^1, \\ x^n, & \text{gdy } \tilde{\delta}_n^1 \leqslant x \leqslant A, \\ A^n, & \text{gdy } x > A. \end{cases}$$

Pokażemy teraz, że $\tilde{\delta}_n^1 < \tilde{\delta}_{n+1}^1$.

$$\varphi_1(n+1,x) = x\,\varphi_1(n,x) + \frac{1}{(n+2)(n+3)}x^{n+3} + \left(\frac{n+1}{n+2}A^{n+2} - A^{n+1}\right)x$$

$$- \frac{n+2}{n+3}A^{n+3} + A^{n+2} \stackrel{df}{=} x\,\varphi_1(n,x) + q(n,x) .$$

$\varphi_1(n+1, \tilde{\delta}_n^1) = q(n, \tilde{\delta}_n^1)$

Funkcja $q(n,x)$ jest nieujemna, więc pierwiastek równania $\varphi_1(n+1,x) = 0$ jest większy niż δ_n^1, czyli $\delta_{n+1}^1 > \delta_n^1$.

Niech $x < \delta_{n+1}^1$. Wówczas

$$TQg(n,x) = x\left[\frac{n+2}{n+3}\left(x^{n+3} - A^{n+3}\right) + A^{n+2}\right] + \int_x^{\delta_{n+1}^1}\left(\frac{n+2}{n+3}\,y^{n+3} - \frac{n+2}{n+3}A^{n+3} + A^{n+2}\right)dy$$

$$+\int_{\delta_{n+1}^1}^{A} y^{n+1}dy + \int_A^1 A^{n+1}dy = \frac{n+2}{n+4}\left[x^{n+4} - \left(\delta_{n+1}^1\right)^{n+4}\right] +$$

$$+\left\{\frac{n+2}{n+3}\left[\left(\delta_{n+1}^1\right)^{n+3} - A^{n+3}\right] + A^{n+2} - \left(\delta_{n+1}^1\right)^{n+1}\right\}\left(\delta_{n+1}^1\right) + \frac{n+1}{n+2}\left[\left(\delta_{n+1}^1\right)^{n+2} - A^{n+2}\right]$$

$$+ A^{n+1} = \frac{n+2}{n+4}\left[x^{n+4} - \left(\delta_{n+1}^1\right)^{n+4}\right] + \frac{n+1}{n+2}\left[\left(\delta_{n+1}^1\right)^{n+2} - A^{n+2}\right] + A^{n+1}.$$

Oznaczmy przez

$$\varphi_N(n,x) = TQ^{N-1}g(n,x) - g(n,x).$$

Niech $N = 2$. Dla $x < \delta_{n+1}^1$

$$(4.17)\quad \varphi_2(n,x) = \frac{n+2}{n+4}\left[x^{n+4} - \left(\delta_{n+1}^1\right)^{n+4}\right] + \frac{n+1}{n+2}\left[\left(\delta_{n+1}^1\right)^{n+2} - A^{n+2}\right] + A^{n+1} - x^n.$$

Funkcja $\varphi_2(n,x)$ ma następujące własności :

(i) $\varphi_2(n,x) = TQg(n,x) - g(n,x) = Tg(n,x) - g(n,x) = \varphi_1(n,x) < 0$

dla $x \geq \delta_{n+1}^1 > \delta_n^1$.

(ii) $\varphi_2(n,x) > \varphi_1(n,x) \geq 0$ dla $x \leq \delta_n^1$.

(iii) Wielomian określony wzorem (4.17) ma w (0,1) dokładnie jedno mimimum w tym przedziale.

Z (i) - (iii) wynika, że równanie $\varphi_2(n,x) = 0$ ma jedyny pierwiastek δ_n^2 i $\delta_n^1 < \delta_n^2 < \delta_{n+1}^1$ dla $n = 1,2,\ldots$

Stąd

$$Q^2 g(n,x) = \begin{cases} \frac{n+2}{n+4}\left[x^{n+4} - (\delta^1_{n+1})^{n+4}\right] + \frac{n+1}{n+2}\left[(\delta^1_{n+1})^{n+2} - A^{n+2}\right] + A^{n+1}, & \text{gdy } x < \delta^2_n \\ x^n, & \text{gdy } \delta^2_n \leqslant x \leqslant A, \\ A^n, & \text{gdy } x > A. \end{cases}$$

Załóżmy dla indukcji, że istnieją jednoznaczne rozwiązania δ^k_n równań $\varphi_k(n,x) = 0$ w $(0,A)$ dla $k = 1,2,\dots,l$; $\delta^1_n < \delta^2_n < \dots < \delta^l_n$; $\delta^k_n < \delta^k_{n+1}$ dla $k = 1,2,\dots,l$ i $n = 1,2,\dots$ oraz

$$Q^l g(n,x) = \begin{cases} \frac{n+l}{n+2l}\left[x^{n+2l} - (\delta^{l-1}_{n+1})^{n+2l}\right] + \frac{n+1}{n+2}\left[(\delta^{l-1}_{n+1})^{n+2} - A^{n+2}\right] + A^{n+1}, & \text{gdy } x < \delta^l_n \\ x^n, & \text{gdy } \delta^l_n \leqslant x \leqslant A, \\ A^n, & \text{gdy } x > A, \end{cases}$$

Mamy wówczas dla $x < \delta^l_{n+1}$

$$TQ^l g(n,x) = \frac{n+l+1}{n+2(l+1)}\left[x^{n+2(l+1)} - (\delta^l_{n+1})^{n+2(l+1)}\right] + \frac{n+1}{n+2}\left[(\delta^l_{n+1})^{n+2} - A^{n+2}\right]$$

$$+ A^{n+1} + \left\{\frac{n+l+1}{n+2l+1}\left[(\delta^l_{n+1})^{n+2l+1} - (\delta^{l-1}_{n+2})^{n+2l+1}\right] + \frac{n+2}{n+3}\left[(\delta^{l-1}_{n+2})^{n+3} - A^{n+3}\right] +\right.$$

$$\left. + A^{n+2} - (\delta^l_{n+1})^{n+1}\right\}(\delta^l_{n+1}) =$$

$$= \frac{n+l+1}{n+2(l+1)}\left[x^{n+2(l+1)} - (\delta^l_{n+1})^{n+2(l+1)}\right] + \frac{n+1}{n+2}\left[(\delta^l_{n+1})^{n+2} - A^{n+2}\right] + A^{n+1}$$

Zatem dla $x < \delta^{l}_{n+1}$ funkcja $\varphi_{l+1}(n,x)$ dana jest wzorem :

$$(4.18)\quad \varphi_{l+1}(n,x) = \frac{n+l+1}{n+2(l+1)}\left[x^{n+2(l+1)} - (\delta^{l}_{n+1})^{n+2(l+1)}\right] + $$
$$+ \frac{n+1}{n+2}\left[(\delta^{l}_{n+1})^{n+2} - A^{n+2}\right] + A^{n+1} - x^{n} .$$

Funkcja $\varphi_{l+1}(n,x)$ ma następujące własności :

(i) $\varphi_{l+1}(n,x) = TQ^{l}g(n,x) - g(n,x) = Tg(n,x) - g(n,x) = \varphi_{l}(n,x) < 0$

dla $x \geqslant \delta^{l}_{n+1} > \delta^{l}_{n}$.

(ii) $\varphi_{l+1}(n,x) > \varphi_{l}(n,x) \geqslant 0$ dla $x \leqslant \delta^{l}_{n}$.

Dla $x < \delta^{l}_{n}$ $Q^{l}g(n,x) > g(n,x)$, $Q^{l+1}g(n,x) \geqslant Q^{l}g(n,x)$ więc dla

$x < \delta^{l}_{n}$, $Q^{l+1}g(n,x) > g(n,x)$. Stąd wynika (ii) .

(iii) Wielomian określony wzorem (4.18) na $(0,1)$ ma dokładnie jedno minimum w tym przedziale.

Z (i) - (iii) wynika, że równanie $\varphi_{l+1}(n,x) = 0$ ma jedyny pierwiastek δ^{l+1}_{n} i $\delta^{l}_{n} < \delta^{l+1}_{n} < \delta^{l}_{n+1}$ dla $n = 1,2,\ldots$ oraz

$$Q^{l+1}g(n,x) = \begin{cases} \frac{n+l+1}{n+2(l+1)}\left[x^{n+2(l+1)} - (\delta^{l}_{n+1})^{n+2(l+1)}\right] + \frac{n+1}{n+2}\left[(\delta^{l}_{n+1})^{n+2} - A^{n+2}\right] + A^{n+1} & \text{gdy } x < \delta^{l+1}_{n} \\ x^{n} & \text{, gdy } \delta^{l+1}_{n} \leqslant x \leqslant A , \\ A^{n} & \text{, gdy } x > A . \end{cases}$$

Wynika stąd również, że $\delta^{l+1}_{n} < \delta^{l+1}_{n+1}$.

Ponieważ ciąg δ^{l}_{n} , $l = 1,2,\ldots$ jest monotoniczny i ograniczony, więc istnieje

$$\lim_{l \to \infty} \delta^{l}_{n} = \gamma_{n} , \quad \gamma_{n} \leqslant \gamma_{n+1} \quad \text{i}$$

$$v(n,x) = \begin{cases} \frac{n+1}{n+2}\left[\gamma^{n+2}_{n+1} - A^{n+2}\right] + A^{n+1} & \text{, gdy } x < \gamma_{n} , \\ x^{n} & \text{, gdy } \gamma_{n} \leqslant x \leqslant A , \\ A^{n} & \text{, gdy } x > A . \end{cases}$$

Podobnie jak w twierdzeniu 4.2 dowodzi się, że γ_n spełnia równanie

$$\gamma_n^n = \frac{n+1}{n+2}\left(\gamma_{n+1}^{n+2} - A^{n+2}\right) + A^{n+1} \quad \text{dla } n = 1,2,\ldots$$

i

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = A$$

oraz

$$\tau_0^* = \inf\{n: \xi_n \geq \gamma_n\}$$

jest skończony.

Załóżmy, że $P\{\xi_0=0\}=1$. Mamy wówczas

$$v = v(0,0) = E_0 v(1,\xi_1) = P\{\min(A,\xi_{\tau^*}) > \eta_{\tau^*}\} =$$

$$= \int_0^{\gamma_1} \left[\frac{2}{3}\left(\gamma_2^3 - A^3\right) + A^2\right] dy + \int_{\gamma_1}^{A} y\,dy + A(1-A) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\gamma_1^2 + A^2\right) + A(1-A).$$

4.4 Optymalne zatrzymanie nieskończonego ciągu maksimów z dyskontem.

Niech $f_i(x_1,x_2,\ldots,x_i) = \max(x_1,x_2,\ldots,x_i)$. Z powodów podanych poprzednio, zakładamy, że X_i i Y_i mają rozkład jednostajny w $[0,1]$. Niech $0<\alpha<1$. Poszukujemy $\tau^*\in\mathfrak{M}$ takiego, że:

$$(4.19)\quad E\alpha^{\tau^*}\chi\{\xi_{\tau^*} > \eta_{\tau^*}\} = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}} E\alpha^{\tau}\chi\{\xi_\tau > \eta_\tau\}.$$

Niech

$$Z_n = \alpha^n P\{\xi_n > \eta_n \mid \mathcal{F}_n\} = g(n,\xi_n) = \alpha^n \xi_n^n.$$

$\xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty}$ jest łańcuchem Markowa względem $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ z przestrzenią stanów $[0,1]$ i funkcją prawdopodobieństw przejścia (4.4).

Twierdzenie 4.4 .

Istnieje ciąg stałych $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ taki , że

1) $\tau^* = \inf\{n: \xi_n \geq \lambda_n\}$ jest optymalnym momentem zatrzymania, to znaczy realizuje (4.19).

2) Ciąg λ_n spełnia równanie rekurencyjne

$$\lambda_n^n = \alpha\left(\frac{n+1}{n+2}\,\lambda_{n+1}^{n+2} + \frac{1}{n+2}\right).$$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n^n = 0$, $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$ dla każdego $n\in N$.

4) Wyrazy ciągu λ_n można obliczyć jako granicę ciągu jedynych rozwiązań $\mu_n^l \in (0, \mu_{n+1}^{l-1})$ równań :

$$\frac{n+1}{n+2l}\,\alpha^{n+l}\left[x^{n+2l} - (\mu_{n+1}^{l-1})^{n+2l}\right] + \frac{n+1}{n+2}\alpha^{n+1}(\mu_{n+1}^{l-1})^{n+2} + \frac{\alpha^{n+1}}{n+2} - (\alpha x)^n = 0,$$

gdy l dąży do nieskończoności .

5) Wartość $v = v(0,0) = \alpha^{\tau^*} P\{\xi_{\tau^*} > \eta_{\tau^*}\} = \frac{\alpha}{2}\left(1 + \lambda_1^2\right)$.

Dowód:

Z lematu 4.2 mamy

$$v(n,x) = \lim_{N\to\infty} Q^N g(n,x) .$$

Mamy

$$Tg(n,x) = \alpha^{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2}\,x^{n+2} + \frac{1}{n+2}\right).$$

Funkcja

$$\varphi_1(n,x) = Tg(n,x) - g(n,x) = \alpha^n\left(\frac{n+1}{n+2}\alpha\, x^{n+2} + \frac{\alpha}{n+2} - x^n\right)$$

rozpatrywana w $[0,1]$ ma następujące własności:

(i) $\varphi_1(n,0) = \frac{\alpha^{n+1}}{n+2} > 0$, $\varphi_1(n,1) = \alpha^n(\alpha - 1) < 0$.

(ii) $\varphi_1(n,x)$ ma dokładnie jedno minimum w $[0,1]$.

Z (i) i (ii) wynika , że równanie $\varphi_1(n,x) = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie μ_n^1 i

$$Qg(n,x) = \begin{cases} \frac{n+1}{n+2}\alpha^{n+1} x^{n+2} + \frac{\alpha^{n+1}}{n+2}, & \text{dla } x<\mu_n^1, \\ (\alpha x)^n, & \text{dla } x \geq \mu_n^1. \end{cases}$$

Pokażemy teraz, że $\mu_n^1 < \mu_{n+1}^1$.

$$\varphi_1(n+1,x) = \alpha x\, \varphi_1(n,x) + \frac{1}{(n+2)(n+3)}\alpha^{n+2} x^{n+3} - \frac{\alpha^{n+2}}{n+2}x + \frac{\alpha^{n+2}}{n+3} =$$

$$\stackrel{df}{=} \alpha x\, \varphi_1(n,x) + q(n,x).$$

$$\varphi_1(n+1,\mu_n^1) = q(n,\mu_n^1).$$

Funkcja $q(n,x)$ jest dodatnia w $[0,1)$, więc pierwiastek równania $\varphi_1(n+1,x)=0$ jest większy niż μ_n^1, czyli $\mu_n^1 < \mu_{n+1}^1$.

Niech $x<\mu_{n+1}^1$. Wówczas

$$TQg(n,x) = \left(\frac{n+2}{n+3}\alpha^{n+2} x^{n+3} + \frac{\alpha^{n+2}}{n+3}\right)x +$$

$$+ \int_x^{\mu_{n+1}^1}\left(\frac{n+2}{n+3}\alpha^{n+2} y^{n+3} + \frac{\alpha^{n+2}}{n+3}\right)dy + \int_{\mu_{n+1}^1}^{1}(\alpha y)^{n+1}\,dy =$$

$$= \frac{n+2}{n+4}\alpha^{n+2}\left[x^{n+4} - (\mu_{n+1}^1)^{n+4}\right] + \frac{n+1}{n+2}\alpha^{n+1}(\mu_{n+1}^1)^{n+2} +$$

$$+ \frac{\alpha^{n+1}}{n+2} + (\mu_{n+1}^1)\left[\frac{n+2}{n+3}\alpha^{n+2}(\mu_{n+1}^1)^{n+3} + \frac{\alpha^{n+2}}{n+3} - (\alpha\mu_{n+1}^1)^{n+1}\right] =$$

$$= \frac{n+2}{n+4}\alpha^{n+2}\left[x^{n+4} - (\mu_{n+1}^1)^{n+4}\right] + \frac{n+1}{n+2}\alpha^{n+1}(\mu_{n+1}^1)^{n+2} + \frac{\alpha^{n+1}}{n+2}.$$

Oznaczmy przez

$$\varphi_N(n,x) = TQ^{N-1}g(n,x) - g(n,x).$$

Niech $N=2$. Dla $x<\mu_{n+1}^1$

$$(4.20)\quad \varphi_2(n,x) = \frac{n+2}{n+4}\alpha^{n+2}\left[x^{n+4} - (\mu^1_{n+1})^{n+4}\right] + \frac{n+1}{n+2}\alpha^{n+1}(\mu^1_{n+1})^{n+2} + \frac{\alpha^{n+1}}{n+2} - (\alpha x)^n .$$

Funkcja $\varphi_2(n,x)$ ma następujące własności:

(i) $\varphi_2(n,x) = TQg(n,x) - g(n,x) = Tg(n,x) - g(n,x) = \varphi_1(n,x) < 0$ dla $x \geqslant \mu^1_{n+1} > \mu^1_n$.

(ii) $\varphi_2(n,x) > \varphi_1(n,x) \geqslant 0$ dla $x \leqslant \mu^1_n$.

(iii) Wielomian określony wzorem (4.20) ma w $[0,1]$ dokładnie jedno minimum w tym przedziale.

Z (i) - (iii) wynika, że równanie $\varphi_2(n,x) = 0$ ma jedyny pierwiastek μ^2_n i $\mu^1_n < \mu^2_n < \mu^1_{n+1}$ dla $n=1,2,\ldots$

Stąd

$$Q^2 g(n,x) = \begin{cases} \frac{n+2}{n+4}\alpha^{n+2}\left[x^{n+4} - (\mu^1_{n+1})^{n+4}\right] + \frac{n+1}{n+2}\alpha^{n+1}(\mu^1_{n+1})^{n+2} + \frac{\alpha^{n+1}}{n+2}, & \text{dla } x < \mu^2_n, \\ (\alpha x)^n, & \text{dla } x \geqslant \mu^2_n. \end{cases}$$

Załóżmy dla indukcji, że istnieją jednoznaczne rozwiązania μ^k_n równań $\varphi_k(n,x) = 0$ w $[0,1]$ dla $k=1,2,\ldots,l$; $\mu^1_n < \mu^2_n < \ldots < \mu^l_n$, $\mu^k_n < \mu^k_{n+1}$ dla $k = 1,2,\ldots,l$; $n = 1,2,\ldots$ oraz

$$Q^l g(n,x) = \begin{cases} \frac{n+l}{n+2l}\alpha^{n+l}\left[x^{n+2l} - (\mu^{l-1}_{n+1})^{n+2l}\right] + \frac{n+1}{n+2}\alpha^{n+1}(\mu^{l-1}_{n+1})^{n+2} + \frac{\alpha^{n+1}}{n+2}, & \text{dla } x < \mu^l_n, \\ (\alpha x)^n, & \text{dla } x \geqslant \mu^l_n. \end{cases}$$

Mamy wówczas dla $x < \mu^{l}_{n+1}$

$$TQ^{l}g(n,x) = E_x Q^{l} g(n+1,\xi_1) =$$

$$= x\left\{\frac{n+l+1}{n+2l+1}\alpha^{n+l+1}\left[x^{n+2l+1} - (\mu^{l-1}_{n+2})^{n+2l+1}\right] +\right.$$

$$\left. + \frac{n+2}{n+3}\alpha^{n+2}(\mu^{l-1}_{n+2})^{n+3} + \frac{\alpha^{n+2}}{n+3}\right\} +$$

$$+ \int_x^{\mu^{l}_{n+1}} \left\{\frac{n+l+1}{n+2l+1}\alpha^{n+l+1}\left[y^{n+2l+1} - (\mu^{l-1}_{n+2})^{n+2l+1}\right] + \frac{n+2}{n+3}\alpha^{n+2}(\mu^{l-1}_{n+2})^{n+3} + \frac{\alpha^{n+2}}{n+3}\right\} dy$$

$$+ \int_{\mu_{n+1}}^{1} (\alpha y)^{n+1}\, dy =$$

$$= \frac{n+l+1}{n+2l+1}\alpha^{n+l+1}\left[x^{n+2l+2} - (\mu^{l-1}_{n+2})^{n+2l+1} x\right] + \frac{n+2}{n+3}\alpha^{n+2}(\mu^{l-1}_{n+2})^{n+3} x + \frac{\alpha^{n+2}}{n+3} x +$$

$$+ \frac{n+l+1}{(n+2l+1)(n+2l+2)}\alpha^{n+l+1}(\mu^{l}_{n+1})^{n+2l+2} - \frac{n+l+1}{(n+2l+1)(n+2l+2)}\alpha^{n+l+1} x^{n+2l+2} +$$

$$+ \frac{n+l+1}{n+2l+1}\alpha^{n+l+1}(\mu^{l-1}_{n+2})^{n+2l+1} x - \frac{n+l+1}{n+2l+1}\alpha^{n+l+1}(\mu^{l-1}_{n+2})^{n+2l+1}\mu^{l}_{n+1} +$$

$$+ \left[\frac{n+2}{n+3}\alpha^{n+2}(\mu^{l-1}_{n+2})^{n+3} + \frac{\alpha^{n+2}}{n+3}\right](\mu^{l}_{n+1} - x) + \alpha^{n+1}\,\frac{1-(\mu^{l}_{n+1})^{n+2}}{n+2}$$

$$-(\mu^{l}_{n+1})\left\{\frac{n+l+1}{n+2l+1}\alpha^{n+l+1}\left[(\mu^{l}_{n+1})^{n+2l+1} - (\mu^{l-1}_{n+2})^{n+2l+1}\right] + \frac{n+2}{n+3}\alpha^{n+2}(\mu^{l-1}_{n+2})^{n+3} + \frac{\alpha^{n+2}}{n+3} - (\alpha\mu^{l}_{n+1})^{n+1}\right\} =$$

$$= \frac{n+l+1}{n+2(l+1)}\alpha^{n+l+1}\left[x^{n+2(l+1)} - (\mu^{l}_{n+1})^{n+2(l+1)}\right] + \frac{n+1}{n+2}\alpha^{n+1}(\mu^{l}_{n+1})^{n+2} + \frac{\alpha^{n+1}}{n+2}\,.$$

Zatem dla $x < \mu^{l}_{n+1}$ funkcja $\varphi_{l+1}(n,x)$ dana jest wzorem:

$$(4.21)\quad \varphi_{l+1}(n,x)=\frac{n+l+1}{n+2(l+1)}\alpha^{n+l+1}\left[x^{n+2(l+1)}-(\mu_{n+1}^{l})^{n+2(l+1)}\right]+\frac{n+1}{n+2}\alpha^{n+1}(\mu_{n+1}^{l})^{n+2}+$$

$$+\frac{\alpha^{n+1}}{n+2}-(\alpha x)^{n}.$$

Funkcja $\varphi_{l+1}(n,x)$ ma następujące własności:

(i) $\varphi_{l+1}(n,x) = TQ^{l}g(n,x)-g(n,x)=Tg(n,x)-g(n,x)=\varphi_{l}(n,x)<0$

dla $x \geqslant \mu_{n+1}^{l} > \mu_{n}^{l}$.

(ii) $\varphi_{l+1}(n,x) > \varphi_{l}(n,x) \geqslant 0$ dla $x \leq \mu_{n}^{l}$.

Dla $x < \mu_{n}^{l}$ $Q^{l}g(n,x) > g(n,x)$; $Q^{l+1}g(n,x) \geqslant Q^{l}g(n,x)$ więc dla $x < \mu_{n}^{l}$ $Q^{l+1}g(n,x) > g(n,x)$. Stąd i z (4.10) wynika (ii).

(iii) Wielomian określony wzorem (4.21) ma w $[0,1]$ dokładnie jedno minimum.

Z (i) - (iii) wynika, że równanie $\varphi_{l+1}(n,x)=0$ ma jedyny pierwiastek μ_{n}^{l+1} i

$$(4.22)\quad \mu_{n}^{l} < \mu_{n}^{l+1} < \mu_{n+1}^{l} \quad \text{dla } n=1,2,\dots .$$

Z (4.22) wynika, że $\mu_{n+1}^{l} < \mu_{n+1}^{l+1} < \mu_{n+2}^{l}$, więc $\mu_{n}^{l+1} < \mu_{n+1}^{l+1}$.

Ponadto

$$Q^{l+1}g(n,x)=\begin{cases}\dfrac{n+l+1}{n+2(l+1)}\alpha^{n+l+1}\left[x^{n+2(l+1)}-(\mu_{n+1}^{l})^{n+2(l+1)}\right]+ \\ \qquad +\dfrac{n+1}{n+2}(\mu_{n+1}^{l})^{n+2}\alpha^{n+1}+\dfrac{\alpha^{n+1}}{n+2}, & \text{dla } x < \mu_{n}^{l+1} \\ (\alpha x)^{n}, & \text{dla } x \geqslant {}_{n}^{l+1}.\end{cases}$$

Ciąg $(\mu_{n}^{l})_{l=1}^{\infty}$ jest monotoniczny i ograniczony przez 1, więc istnieje

$$\lim_{l\to\infty} u_n^l = \lambda_n .$$

Stąd

$$v(n,x) = \lim_{l\to\infty} Q^l g(n,x) = \begin{cases} \frac{n+1}{n+2}\,\alpha^{n+1}\lambda_{n+1}^{n+2} + \frac{\alpha^{n+1}}{n+2}, & \text{dla } x<\lambda_n, \\ (\alpha x)^n, & \text{dla } x\geq\lambda_n. \end{cases}$$

Podobnie jak w twierdzeniu 4.2 pokazuje się, że $v(n,x)$ jest ciągła w $x=\lambda_n$, to znaczy λ_n spełnia równanie rekurencyjne

$$(4.23)\quad (\alpha\lambda_n)^n = \frac{n+1}{n+2}\alpha^{n+1}\lambda_{n+1}^{n+2} + \frac{\alpha^{n+1}}{n+2}, \quad n=1,2,\dots$$

Stąd

$$\frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{n+2}} < \lambda_n < \sqrt[n]{\alpha}$$

Zatem

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n = 1 .$$

Równanie (4.23) można zapisać w następujący równoważny sposób:

$$\lambda_n^n = \frac{n+1}{n+2}\alpha\lambda_{n+1}^{n+2} + \frac{\alpha}{n+2}$$

Pokażemy teraz, że dla każdego naturalnego k

$$\lambda_n^n \leq \alpha^k + \frac{1}{n+2}\,\frac{\alpha(1-\alpha^{k-1})}{1-\alpha}$$

(i) $\lambda_n^n \leq \alpha$,

(ii) $\lambda_n^n \leq \alpha \lambda_{n+1}^{n+2} + \frac{\alpha}{n+2}$.

Załóżmy dla indukcji, że

$$\lambda_n^n \leq \alpha^k + \frac{1}{n+2}(\alpha^{k-1}+\alpha^{k-2}+\ldots+\alpha) = \alpha^k + \frac{1}{n+2}\alpha\frac{1-\alpha^{k-1}}{1-\alpha}$$

dla każdego naturalnego n .

Wówczas

$$\lambda_{n+1}^{n+2} \leq \alpha^k + \frac{1}{n+2}(\alpha^{k-1}+\alpha^{k-2}+\ldots+\alpha) .$$

Zatem z (ii)

$$\lambda_n^n \leq \left[\alpha^k + \frac{1}{n+2}(\alpha^{k-1}+\alpha^{k-2}+\ldots+\alpha)\right]\alpha + \frac{\alpha}{n+2} =$$

$$= \alpha^{k+1} + \frac{1}{n+2}(\alpha^k+\alpha^{k-1}+\ldots+\alpha).$$

Stąd dla każdego n i każdego k

$$\lambda_n^n \leq \alpha^k + \frac{1}{n+2}\frac{\alpha}{1-\alpha} .$$

Zatem dla każdego naturalnego n

$$\lambda_n^n \leq \inf_k \left\{\alpha^k + \frac{1}{n+2} \frac{\alpha}{1-\alpha}\right\} = \frac{1}{n+2} \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

i

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n^n = 0 .$$

Pokażemy teraz, że

$$\tau^* = \inf\{n: \xi_n \geq \lambda_n\}$$

jest skończony z prawdopodobieństwem 1.

$$P\{\tau^* < \infty\} = P\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\xi_n \geq \lambda_n\}\} = \lim_{N\to\infty} P\{\bigcup_{n=1}^{N}\{\xi_n \geq \lambda_n\}\} \geq$$

$$\geq \lim_{N\to\infty} P\{\xi_N \geq \lambda_N\} = \lim_{N\to\infty} P\{\xi_N^N \geq \lambda_N^N\} = \lim_{N\to\infty}(1 - \lambda_N^N) = 1,$$

ponieważ ξ_n^n ma rozkład jednostajny na odcinku $[0,1]$.

Załóżmy, że $P\{\xi_0 = 0\} = 1$. Mamy wówczas

$$v = v(0,0) = E_0 v(1,\xi_1) = \int_0^{\lambda_1}\left(\tfrac{2}{3}\alpha^2\lambda_2^3 + \tfrac{\alpha^2}{3}\right)dy + \int_{\lambda_1}^{1}\alpha y\,dy =$$

$$= \left(\tfrac{2}{3}\alpha^2\lambda_2^3 + \tfrac{\alpha^2}{3}\right)\lambda_1 + \alpha\frac{1-\lambda_1^2}{2} - \lambda_1\left(\tfrac{2}{3}\alpha^2\lambda_2^3 + \tfrac{\alpha^2}{3} - \alpha\lambda_1\right) = \frac{\alpha}{2}(1+\lambda_1^2).$$

To kończy dowód twierdzenia 4.4 .

Literatura .

[1] В.И.Аркин, Э.Л.Пресман, И.М.Сонин, Оптимальный выбор в условиях неполнноты информаций, Экономика и математические методы, 11(1975), str.439-452.

[2] R. Bartoszyński, On certain combinatorial identities, Coll. Math. 30(1974), str.289-293.

[3] R. Bartoszyński, Some remarks on the secretary problem, Comment. Math. Prace Mat. 19(1976), str.15-22.

[4] M.J.Beckmann, Note on: The optimum strategy for choosing the maximum of N independent real random variables, Unternehmensforschung 15(1971), str.58-59.

[5] M.J.Beckmann, Uber Stoppregelprobleme, Oper.Res.Verfahren 10(1970). str 6-15.

[6] B.H.Bissinger, C.Siegel, Problem 5086, Advanced Problems and Solutions, Amer.Math.Monthly, 70(1963).

[7] T.Bojdecki, A note on the optimal stopping of sums of independent random variables, Bull.Acad.Polon.Sci.Sér.Sci.Math.Astronom.Phys. 25(1977), str.833-837.

[8] T.Bojdecki, On optimal stopping of a sequence of independent random variables-probability maximizing approach, Stoch.Proc. and Their Appl.6(1978), str.153-163.

[9] A.J.Bosch, Solution to Problem 5086: Optimum strategy in a gussing game, Advanced Problems and Solutions, Amer.Math.Monthly 71(1964).

[10] L.Breiman, Stopping rule problems, w Applied Combinatorial Mathematics ed.E.Beckenbach, J.Wiley Sons, N.Y.1964.

[11] A.Caley, Mathematical questions and their solutions, Educational Times 22(1875) str.18-19.

[12] G.Campbell,The maximum of a sequence with prior information IMS Bull. 6(2)31(1977), str.89.

[13] Y.S.Chow,S.Moriguti,H.Robbins,S.M.Samuels,Optimum selection based on relative rank(the "Secretary Problem"),Israel J.Math. 2(1964),str.81-90.

[14] Y.S.Chow,H.Robbins,D.Siegmund,Great expectations:The theory of optimal stopping,Houghton Mifflin Company,Boston,Mass.,1971.

[15] R.Cowan,J.Zabczyk,A new version of the best choice problem, Bull.Acad.Polon.Sci.Sér.Sci.Math.Astronom.Phys. 24(1976), str.773-778.

[16] R.Cowan,J.Zabczyk,An optimal selection problem associated with the Poisson process,Теория вер. и её прим. 23(1978), str.606-614.

[17] M.H.DeGroot,Optimal statistical decisions,McGrow Hill Comp. N.Y.,1970,roz.13.

[18] В.К.Доманский,Г.Н.Дюбин,Игры на случайных процесах,Усп. Теории Игр."Минтис" ,Вильнюс 1973,str.36-43.

[19] В.К.Доманский,О некоторых играх, связаных с последовательностю испитаний Бернулли,Техническая кибернетика, 4 (1974), str.35-39.

[20] S.Dubuc,Solutions asymptotiques ou probleme des secretaires, Can.J.Math. 25(1973),str.495-505.

[21] Е.Б.Дынкин,А.А.Юшкевич,Теоремы и задачи о процессах Маркова, Изд."Наука",Москва,1967,roz. 3.

[22] E.G.Enns,The optimum strategy for choosing the maximum of N independent random variables,Unternehmensforschung 14(1970), str.89-96.

[23] E.G.Enns,Selection the maximum of a sequence with imperfect information,JASA 70(1975),str.540-643.

[24] E.G.Enns,The role of information in a sequential decision problem, w druku.

[25] E.G.Enns,Reply to M.J.Beckmann's "Note on: The optimum strategy for choosing the maximum of N independent random variables", Unternehmensforschung 15(1971),str.60-61.

[26] J.H.Fox,L.G.Marnie,Martin Gardner's column on "Mathematical games", Scientific American, 202(1960),str.150-156.

[27] М.И.Фрейдлин,В.М.Фрейдлина,Одна задача оптимальной остановки при неполной информаций,Вестник Московского Университета, 1(1977),str.9-16.

[28] J.Gianini,The secretary problem with random namber of individuals, w druku.

[29] J.Gianini,The infinite secretary problem as the limit of the finite problem,Ann.Prob. 5(1977),str.636-644.

[30] J.Gianini,S.M.Samuels,The infinite secretary problem,Ann.Prob. 4(1976),str.418-432.

[31] J.P.Gilbert,F.Mosteller,Recognizing the maximum of a sequence, JASA 61(1966),str.35-73.

[32] Z.Govindarajulu,The secretary problem:Optimal selection with interview cost,Proc. of the Symp. on Stat. and Related Topics (Carleton Univ. Ottawa,Ont.) 1974.

[33] I.Gutman,On a problem of L.Moser,Can.Math.Bull.3(1960),str.35-39.

[34] С.М.Гусейн-Заде,Задача выбора и оптимальное правило остановки последовательности независимых испытаний,Теория вер. и её при

11 (1966), str.534-537.

[35] G.W.Haggstrom, Optimal sequential procedures when more than one stop is required, Ann.Math.Stat. 38 (1967), str.1618-1626.

[36] H.Henke, Sequentialle Auswahlprobleme bei Unsichereit, Meisenheim, 1970.

[37] H.Henke, Generalle Nutzenrelationen in Rang-Auswahl-Prozessen, Unternehmensforschung 15 (1971), str 45-54.

[38] M.Henke, Optimale Stopp- und-Auswahlregeln für eine klasse stochastischer Entscheidungs prozesse, Oper.Res.-Verfarhren 7 (1970), str.83-121.

[39] M.Henke, Expectations and variances of stopping variables in sequential selection processes, J.Appl.Prob. 10 (1973), str.786-806.

[40] E.Karni, A.Schwartz, Two theorems on optimal stopping with backward solicitation, J.Appl.Prob. 14 (1978), str.869-875.

[41] D.V.Lindley, Dynamic programming and decision theory, Appl.Stat. 10 (1961), str.39-51.

[42] T.J.Lorenzen, Generalizing the secretary problem, General Motors Reports, 1978.

[43] L.Moser, On a problem of Caley, Scripta Math. 22 (1956), str.289-292.

[44] L.Moser, J.R.Pounder, Martin Gardner's column on " Mathematical games, Scientific American, 202 (1960), str.172-182.

[45] Ф.Мостеллер, Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями, "Наука" Москва, 1975, zad.47

[46] D.Morgenstern, Einfuhrung in die Wahrscheinlichkeitsrechung und mathematische Statistik, Berlin 1964.

[47] P.H.Müller, E.Platen, Rangstrategien bei sequentiallen Auswahlproblemen, Wiss.Z.Techn.Univ.Dresden, 23 (1974), str.1069-1076.

[48] P.H.Müller,E.Platen,Das asymptotische Verhalten optimaler Rangstrategien bein "Probleme der best Wahl" ,Wiss.Z.Tech.Univ. Dresden, 24 (1975) ,str.933-937.

[49] A.G.Mucci,Differential equations and optimal choice problem, Ann.Stat. 1 (1973) ,str.104-113.

[50] A.G.Mucci,On a class of secretary problems,Ann.Prob. 1 (1973) , str.417-427.

[51] М.Л.Николаев,Об одном обобщении задачи наилучшего выбора, Теория вер. и её прим. 22 (1977),str.191-194.

[52] М.Л.Николаев,Задача выбора двух обектов с минимальным сумарным рангом,Изв.Высших Учеб. Зав. Математика 3 (1976) ,str.33-42.

[53] Э.Л.Пресман,И.М.Сонин,Точки равновесия в обобщенной игровой задаче наилучшего выбора,Теория вер. и её прим. 20 (1975) str.785-796.

[54] Э.Л.Пресман,И.М.Сонин,Задача наилучшего выбора при случайном числе обектов,Теория вер. и её прим. 7 (1972), str.695-706.

[55] W.T.Rassmussen,A generalized secretary problem: choosing any of the d-best from a sequence of independent values,Ph.D.thesis, Stanford Univ. 1972.

[56] W.T.Rassmussen,A generalized choice problem,J.Opt.Th.Appl. 15 (1975), str.311-325.

[57] W.T.Rassmussen,H.Robbins,The candidate problem with unknown population size,J.Appl.Prob. 12 (1975) ,str.692-701.

[58] W.T.Rassmussen,S.R.Pliska,Choosing the maximum from sequence with discount factor,Appl.Math.Opt.2 (1975/76) ,str.279-289.

[59] Ю.А.Розанов,Лекции по теорий вероятностей,"Наука",Москва 1968.

[60] H.Rubin,S.M.Samuels,The finite memory secretary problem, Ann.Prob. 5(1977),str.627-635.

[61] H.H.Smith,J.J.Deely,A secretary problem with finite memory, JASA, 70(1975),str.357-361.

[62] И.М.Сонин,Игровые задачи, связанные с наилучшим выбором, Кибернетика 2 (1976) , str.70-75.

[63] А.Н.Ширяев,Статистический последовательный анализ,"Наука" Москва 1969,гоz.2.

[64] M.C.K.Yang,Recognizing the maximum of a random sequence based on relative rank with backward solicitation,J.Appl.Prob. 11(1974),str.504-512.