

Na prawach rękopisu
do użytku wewnętrznego

INSTYTUT GEOTECHNIKI
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA DRGAŃ
ZAMKNIĘĆ KŁAPOWYCH
Z ZASTOSOWANIEM METODY
ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Praca doktorska

Stanisław Kostecki

Promotor

Doc. dr hab. inż. Ryszard Rogala

Słowa kluczowe: budownictwo wodne,
zamknięcie kłapowe, drgania, meto-
da elementów skończonych

WROCŁAW 1983

Panu Docentowi
dr hab. inż. Ryszardowi Rogali
serdecznie dziękuję za pomoc
i życzliwość okazaną mi w czasie
pisanie niniejszej pracy

autor

SPIS TREŚCI

	str.
WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ	4
1. WPROWADZENIE	6
2. PRZEGLĄD LITERATURY	9
3. TEZA, CEL I ZAKRES PRACY	14
4. OKREŚLENIE DRGAŃ WŁASNYCH ZAMKNIĘCIA Z ZASTOSOWANIEM METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH	16
4.1. Wprowadzenie do metody elementów skończonych	16
4.2. Wybór rodzaju elementów oraz przyjęcie rodzajów przemieszczeń węzłowych. Układy współrzędnych	18
4.3. Funkcje kształtu oraz macierz sztywności elementu powłoki	20
4.4. Funkcje kształtu oraz macierz sztywności elementów belkowych	33
4.5. Macierz mas elementu powłoki	38
4.6. Macierz mas elementu belkowego	39
4.7. Transformacja układu współrzędnych	42
4.8. Obliczenie częstości i postaci drgań własnych zam- knięcia	44
4.9. Obliczenie częstości drgań z diagonalną macierzą mas	46
4.10. Budowa programu na EMC	49
5. OKREŚLENIE DRGAŃ WŁASNYCH ZAMKNIĘCIA ZANURZONEGO W WO- DZIE	55
5.1. Uwagi ogólne	55
5.2. Podstawowe równania opisujące wzajemne oddziaływa- nie konstrukcji i wody	56

	str.
5.3. Wybór rodzajów elementów i funkcji opisujących rozkład ciśnienia w wodzie	64
5.4. Określenie macierzy dodanej masy wody	75
5.5. Budowa programów na EMC	78
6. PRZYKŁADY OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH	82
6.1. Opis konstrukcji	82
6.2. Opis konstrukcji w ujęciu metody elementów skoń- czonych i wyniki obliczeń numerycznych	85
7. WERYFIKACJA METODY W OPARCIU O BADANIA DOŚWIADCZALNE .	101
7.1. Uwagi ogólne	101
7.2. Zastosowana aparatura i dokładność przeprowadzo- nych badań	101
7.3. Zakres pomiarów i opis stanowisk badawczych	107
7.4. Wyniki pomiarów	110
7.5. Porównanie wyników obliczeń i pomiarów	116
7.6. Wnioski wynikające z porównania	119
8. UWAGI I WNIOSKI KOŃCOWE	121
9. BIBLIOGRAFIA	124
10. ZAŁĄCZNIKI	133

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

Litery łacińskie

[B]	- macierz odkształceń
[B] ^T	- macierz odkształceń transponowana
[D]	- macierz sprężystości
E	- moduł sprężystości podłużnej [N/m ²]
f	- częstość drgań w [Hz]
{f}	- wektor przemieszczeń wewnątrz elementu [m]
G	- moduł sprężystości poprzecznej [N/m ²]
g	- przyspieszenie ziemskie [m/s ²]
[H]	- macierz ciśnienia
[H ₁₁ [*]]	- macierz ciśnienia przekształcona do wymiarów odpowiadających węzłom wspólnym dla wody i konstrukcji
[K]	- macierz sztywności całej konstrukcji
[K] ^e	- macierz sztywności elementu
[K] ⁻¹	- odwrócona macierz sztywności
K _{Θz}	- fikcyjna sztywność skręcania
L _i , L _j , L _m	- współrzędne powierzchniowe elementu trójkątnego
[M]	- macierz mas całej konstrukcji
[M] ^e	- macierz mas elementu
[\tilde{M}]	- diagonalna macierz mas konstrukcji
[M _w]	- macierz dodanej masy wody
[\tilde{M}_w]	- diagonalna macierz dodanej masy wody
[N]	- macierz funkcji kształtu
{p}	- wektor ciśnień wody [N/m ²]
{p ₁ }	- wektor ciśnień działających na węzły wspólne dla wody i konstrukcji [N/m ²]
t	- czas [s]

t_1	- grubość elementu [m]
u	- przemieszczenie liniowe węzła w kierunku osi x [m]
v	- przemieszczenie liniowe węzła w kierunku osi y [m]
w	- przemieszczenie liniowe węzła w kierunku osi z [m]

Litery greckie

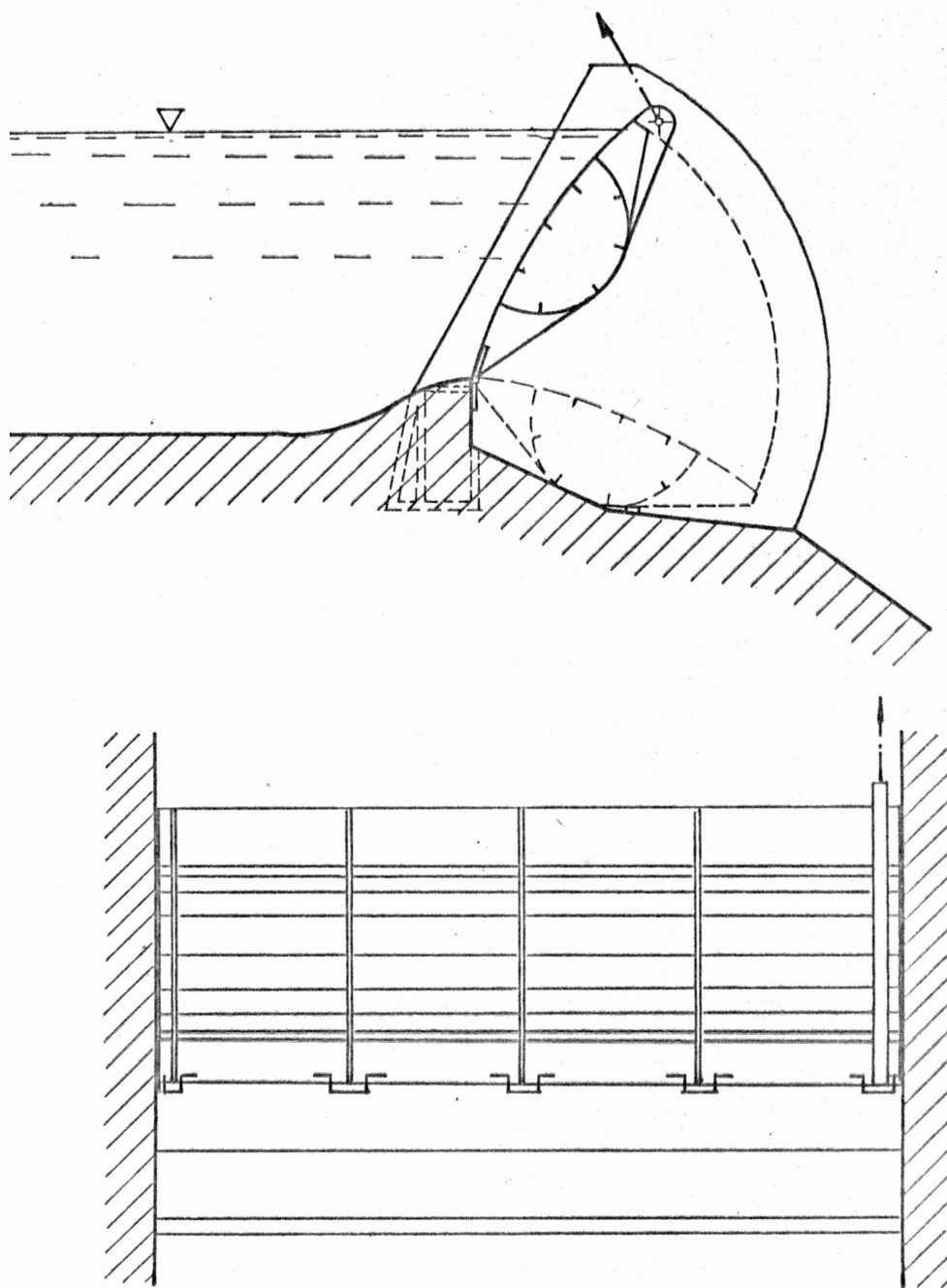
β	- kąt nachylenia kłapy w [°]
$\{\delta\}$	- wektor przemieszczeń węzłowych konstrukcji [m]
$\{\delta\}^e$	- wektor przemieszczeń węzłowych elementu [m]
Δ	- pole powierzchni elementu trójkątnego [m ²]
Θ_x	- kąt obrotu węzła względem osi x [rad]
Θ_y	- kąt obrotu węzła względem osi y [rad]
Θ_z	- kąt obrotu węzła względem osi z [rad]
ν	- współczynnik Poissona
ρ	- gęstość cieczy [kg/m ³]
ω	- kątowa częstość drgań w [rad/sek]

1. WPROWADZENIE

W budownictwie wodnym stosowanych jest szereg typów stalowych zamknięć klapowych różniących się między sobą kształtem, konstrukcją elementu nośnego i sposobem napędu. Niniejsza praca dotyczy jednego typu - klapy soczewkowej, której łożyska oparte są bezpośrednio na wysokim progu. Konstrukcja klapy składa się z dwóch blach o kształcie walcowym, podłużnie od wewnątrz uźebrowanych i usztywnionych przeponami. Klapy soczewkowe napędzane są zazwyczaj jednostronnie przez przyłożenie siły napędu do skrajnej przepony, ale istnieje też szereg innych rozwiązań opisanych w literaturze [18,34,96]. Typowa konstrukcja takiej klapy przedstawiona jest na rysunku 1.1.

Zamknięcie klapowe posiada wiele zalet, do których zaliczyć należy mały ciężar konstrukcji, łatwość montażu, możliwość dokładnej regulacji przepływu wody i inne. Wymienione walory sprawiły, że klapa soczewkowa jest obecnie w Polsce często stosowana, zwykle jako samodzielne zamknięcie jazów i przelewów zapór [15,33]. Oprócz zalet klapa soczewkowa posiada również wady, wśród których najistotniejszą jest podatność na drgania, które pojawiają się w czasie eksploatacji obiektu i mogą być przyczyną awarii konstrukcji [9,18,47].

Mechanizm powstawania drgań konstrukcji klapowych nie jest zjawiskiem dostatecznie rozpoznany, szczególnie pod względem ilościowym. W istniejącej, specjalistycznej literaturze podaje się kilka czynników mogących wymuszać drgania konstrukcji przelewowych. Są nimi: zmienne podciśnienie w przestrzeni podklapowej, pulsacja ciśnienia hydrodynamicznego działającego na zamknięcie i sfalowanie strumienia spadającego z klapy.



Rys 1.1. Przekrój poprzeczny i widok od strony wody dolnej na kłapę soczewkową.

Niezależnie od tego, który z wymienionych czynników powoduje drgania, istotne jest, aby ich częstość nie była bliska częstości własnej zamknięcia. W przeciwnym razie może dojść do rezonansu, któremu towarzyszy znaczny wzrost amplitud przemieszczeń powodujący zniszczenie konstrukcji kłapy. Uniknięcie drgań rezo-

nansowych jest możliwe albo przez usunięcie czynnika wzbudzającego, albo przez zmianę sztywności kłapy. Ponieważ w czasie eksploatacji nie można wykluczyć pojawienia się jednego lub nawet kilku z wymienionych czynników, jedynym skutecznym zabiegiem byłaby zmiana sztywności kłapy. Oznacza to praktycznie wymianę całego zamknięcia. Aby uniknąć tej konieczności należy w fazie projektowania przeprowadzać oprócz obliczeń statycznych, także obliczenia dynamiczne mające na celu wykluczenie drgań rezonansowych. Ponieważ dotychczas nie została opracowana metoda takiego traktowania zamknięć kłapowych, niniejsza praca stanowi próbę rozwiązania omówionego problemu.

2. PRZEGLĄD LITERATURY

Problematyka zamknięć klapowych, a ich drgań w szczególności, zajmuje niewiele miejsca w literaturze fachowej. Na ogół omawia się w niej następujące zagadnienia: rozwiązania konstrukcyjne, sposoby wyznaczania obciążeń oraz obliczenia wytrzymałościowe. W piśmiennictwie polskim, w zakresie konstruowania i projektowania zamknięć klapowych do najbardziej znanych należą prace Boretiego [6,7,8], Fantiego [18], Smoleńskiego [79], Peilerta [63], Żmigrodzkiego [96] i inne [13,95], a z pozycji obcojęzycznych Čabelki [9], Jermařa [34], Schoklitscha [75], Kulki [45], Knappa [36] i Leliavsky'ego [47]. W niektórych z tych opracowań podany jest także sposób obliczania obciążeń hydrostatycznych oraz hydrodynamicznych, które z reguły wyznaczone są w oparciu o badania modelowe. Do najistotniejszych, poświęconych temu zagadnieniu prac, należą znane w świecie wyniki badań firmy MAN cytowane m.in. przez Fantiego [18] i Jermařa [34], jak również prowadzone w latach 1965-70 w Politechnice Wrocławskiej badania modelowe klap soczewkowych [67,68,69], operat Hydroprojektu [32] oraz badania opisane przez Kulkę [45] i Gsaengera [26].

Na szczególną uwagę zasługują prace omawiające czynniki, które mogą być przyczyną drgań zamknięć klapowych. Jednym z nich, stosunkowo najlepiej opisanym, jest ciśnienie panujące w niedostatecznie napowietrzonej przestrzeni podklapowej. Tworzące się na skutek porywania powietrza przez spadającą wodę podciśnienie wywołuje dodatkową siłę działającą na klapę w kierunku wody dolnej. Gdy podciśnienie przekroczy wartość krytyczną następuje przerwanie spadającego strumienia, wyrównanie ciśnień i klapa

uwolniona zostaje spod działania tej dodatkowej siły. Efektem zjawiska jest impulsowe wzbudzenie drgań kłapy. Częstość tych impulsów zależy od wielu warunków, m.in. od kształtu zamknięcia, wielkości przepływu, wysokości i kąta spadania strugi, głębokości dolnej wody itp. Zapobieganie temu zjawisku polega na zamocowaniu na klapie przerywaczy strug i zwiększaniu wydajności systemu napowietrzającego. Problem wpływu zmiennego podciśnienia w przestrzeni podklapowej na zachowanie się konstrukcji kłapy opisywali najpierw Jermař [34], Čabelka [9], Boretti [6], a następnie Gsaenger [26], Fanti [18] i Kolkman [37]. Do najbardziej interesujących prac poruszających ten problem należą: praca Hartunga [29], omawiająca różnorodne sposoby napowietrzania przestrzeni pod spadającym strumieniem oraz prace Rogali [70,71,72,73], poświęcone metodzie obliczeń ilości powietrza potrzebnego do pełnego napowietrzania przestrzeni podklapowej.

Oprócz podciśnienia, przyczyną drgań konstrukcji może być zmienne ciśnienie hydrodynamiczne, którym to zagadnieniem zajmowali się wspomniani wcześniej Hartung [29], Gsaenger [26] i Grčić [25] oraz Fanti [19], badający zjawisko odrywania się strugi na powierzchni kłapy i Winter [89], który prowadził pomiary częstości pulsacji ciśnienia hydrodynamicznego.

Innym czynnikiem powodującym drgania jest sfalowanie strumienia spadającego z kłapy, występujące przy niedużej grubości warstwy przelewowej i znacznej wysokości spadania. Dla takich warunków stwierdzono występowanie intensywnych drgań zamknięcia, będące wynikiem wzajemnego oddziaływania przelewającego się strumienia, powietrza zamkniętego pod klapą i samej konstrukcji. Zajmujący się tym przypadkiem drgań Petrikat [64]

tłumaczy je w sposób następujący: jeżeli na skutek zadziałania przypadkowej przyczyny (np. wiatru) odcinek strumienia został odchylony od swojego naturalnego toru, nastąpi pod klapą zmiana ciśnienia, która wpływa na dalszą zmianę geometrii strumienia, aż do jego pełnego sfalowania. Pełne sfalowanie jest skutkiem pojawiających się wówczas drgań zamknięcia, a jednocześnie jego przyczyną poprzez zmianę ciśnienia powietrza zamkniętego pod przelewającym się strumieniem. Zjawisko to zachodzi także wtedy, gdy przestrzeń podklapowa napowietrzana jest przewodami o dużych przekrojach i utrzymuje się tak długo, aż zmienione zostaną warunki przepływu wody ponad zamknięciem. Na podstawie przeprowadzonych na modelu pomiarów Petrikat wyprowadził zależność pomiędzy zmianą ciśnienia w przestrzeni podklapowej, a częstością falowania strumienia przelewowego. W późniejszym czasie podobne obliczenia przy zastosowaniu e.t.o. wykonał Partensky [61,62]. Należy podkreślić, że obaj autorzy zajmowali się tylko jednym z możliwych schematów wymuszania drgań, wynikających z falowania strumienia, a nie rozpatrywali drgań samej konstrukcji kłapy. Zbliżoną problematyką, dotyczącą tylko samego falowania strumienia zajmowali się także Schwartz [76, 77] i Pariset [59].

Z dotychczasowego przeglądu literatury wynika, że mówi się w niej wiele o czynnikach powodujących drgania, ale nikt drganiami samej kłapy soczewkowej się nie zajął. Istnieją natomiast opracowania poświęcone drganiom innych typów zamknięć. Duża liczba prac dotyczy drgań zasuw płaskich. Są to prace Naudaschera [55], Keira [35] i Szelocha [83], omawiające dwuwymiarowe zagadnienie płaskiego zamknięcia o przepływie dołem, a z późniejszych, zawierających model matematyczny wymuszonych drgań

o jednym stopniu swobody, prace Naudaschera [51,52], Swaina [82], Hardwicka [27] i Kolkmana [38]. Problemem drgań belek zakładanych pod kątem optymalizacji ich kształtu zajmowali się Coxon [14] i Naudascher [53], a sposobem obliczania częstości pulsacji obciążenia i drgań - Tarnowski [86] oraz Flagestad [20]. Określenie częstości drgań cylindrów w zależności od wielkości przepływu wody było tematem prac Toebesa [87], Di Silvo [16], Price'a [65], Franke'a [22] i Hartlena [28]. Oprócz wyżej wymienionych rozpatrywane były także drgania innych typów zamknięć, np. walcowych, opisane przez Petrikata [64] i Leliavsky'ego [47] oraz segmentowych, badanych przez Schmidgalla [74] pod kątem optymalizacji kształtu dolnej, opływanej krawędzi zamknięcia.

Zainteresowanie problematyką drgań zamknięć hydrotechnicznych doprowadziło do powstania szeregu prac o charakterze teoretycznym, zajmujących się sposobem rozwiązania podstawowego równania dynamiki w zależności od przyjętego modelu wymuszania drgań. Do najciekawszych należą: monografia Kolkmana [37], praca Parkinsona [60], Gonczarowa [24], Naudaschera [50] i inne [1,2,5,10,28,48,54,88].

Odmianą próbę rozwiązania problemu drgań konstrukcji stanowią prace poświęcone modelowaniu hydrosprężystemu, dzięki którym istnieje możliwość obliczenia drgań rzeczywistych konstrukcji na podstawie badań modelowych. Aktualny stan wiedzy w tej dziedzinie prezentują prace Haxpry [30,31], a z wcześniejszych opracowania Leliarsky'ego [47] i Prinsa [66].

Analiza literatury dotyczącej zarówno klap jak i innych zamknięć hydrotechnicznych pozwala na wyciągnięcie wniosku, że wprawdzie istnieje szereg prac omawiających różnorakie sposoby

obliczeń drgań wymuszonych przepływem wody, to jednak rozważania te dotyczą prostych konstrukcji, które mogą być traktowane jako układy drgające o jednym stopniu swobody. Zamknięcie klapowe, będące przedmiotem pracy, stanowi przykład konstrukcji, która nie może być potraktowana w ten sposób. Analiza drgań wymuszonych klapy soczewkowej wymaga przyjęcia złożonego modelu matematycznego. Jego rozwiązanie aktualnie nie jest możliwe z uwagi na brak metody, która pozwoliłaby wykonać poprawne obliczenia drgań własnych zamknięcia klapowego oraz określić wpływ masy wody na częstość drgań własnych klapy.

Niniejsza praca stanowi próbę rozwiązania wymienionych zagadnień poprzez zastosowanie metody elementów skończonych (MES).

3. TEZA, CEL I ZAKRES PRACY

Na podstawie dokonanego przeglądu literatury oraz badań własnych, autor sformułował następującą tezę niniejszej rozprawy:

Istnieje możliwość określenia częstości drgań własnych kłapy przy zastosowaniu metody elementów skończonych.

Celem prezentowanej pracy jest:

1. Adaptacja metody elementów skończonych do obliczenia częstości i postaci drgań własnych kłapy soczewkowej w powietrzu.
2. Zastosowanie MES do określenia dodanej masy wody oraz jej wpływu na drgania konstrukcji.
3. Przeprowadzenie obliczeń numerycznych stanowiących przykład zastosowania metody.
4. Przeprowadzenie badań modelowych i pomiarów w naturze, aby uzyskać informację o poprawności przyjętych algorytmów i dokładności metody.

Praca składa się z czterech części. W pierwszej, obejmującej rozdział 4 omówiono ogólne równania MES, przedstawiono sposób adaptacji metody do rozwiązania zagadnienia drgań własnych kłapy soczewkowej i zaprezentowano opracowane przez autora programy służące do realizacji obliczeń numerycznych.

Część druga (rozdział 5) zawiera przedstawienie założeń i równań hydrodynamiki odnoszących się do zjawisk zachodzących na styku konstrukcje-woda oraz ich bezpośredni zapis w metodologii skończonych elementów. W części tej podano ostateczne sformułowania pozwalające na obliczenie dodanej masy wody oraz opisano ułożony do tego celu program numeryczny.

Część trzecia (rozdział 6) zawiera opis zastosowania opracowanych programów do obliczeń drgań dwóch wybranych konstrukcji - modelu i istniejącej w naturze kłapy soczewkowej.

W części czwartej (rozdział 7) przedstawiono opis przeprowadzonych pomiarów drgań obu konstrukcji, analizę błędu pomiaru, oraz porównanie wyników badań i obliczeń.

Praca kończy się wnioskami wynikającymi z przeprowadzonych rozważań i doświadczeń.

4. OKREŚLENIE DRGAŃ WŁASNYCH ZAMKNIĘCIA Z ZASTOSOWANIEM METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

4.1. Wprowadzenie do metody elementów skończonych

Zapoczątkowana w połowie lat pięćdziesiątych przez Turnera a rozwinięta i usystematyzowana przez Zienkiewicza [90], metoda elementów skończonych (MES) pozwala obecnie na przeprowadzenie skomplikowanych obliczeń statycznych i dynamicznych dzięki zastosowaniu coraz to doskonalszych maszyn cyfrowych.

Metoda elementów skończonych polega na podziale continuum sprężystego na skończoną ilość odkształcalnych elementów. W punktach zwanych węzłami, w których zbiegają się krawędzie elementów, zakłada się istnienie nieznanych przemieszczeń tzw. stopni swobody węzła. Dla każdego elementu ustala się funkcje aproksymujące przemieszczenia wewnątrz elementu w zależności od przemieszczenia węzłów. Następnie, wykorzystując związki pomiędzy przemieszczeniami i odkształceniami oraz właściwościami sprężystymi materiału, układa się równania równowagi wszystkich sił odniesionych do węzłów elementu. Połączenie poszczególnych elementów w układ odpowiadający całej konstrukcji realizuje się przez sumowanie sił względem nieznanych przemieszczeń węzłowych. Dla każdego kolejnego stopnia swobody węzła dodaje się tylko te wartości sił, które pochodzą od elementów zbiegających się w rozpatrywanym węźle. W efekcie otrzymuje się:

- a) dla zagadnień statyki konstrukcji - układ równań algebraicznych, w którym niewiadomymi są przemieszczenia poszczególnych węzłów, co jednoznacznie określa również i stan napięcia,

- b) w problemach związanych z dynamiką - układ równań różniczkowych, którego rozwiązanie prowadzi do znalezienia częstości i postaci drgań konstrukcji.

Bliższe szczegóły dotyczące MES znaleźć można m.in. w pracach Zienkiewicza [90] i Gallaghery [23].

W rozpatrywanym przez autora zagadnieniu drgań własnych zamknięcia klapowego odpowiedni układ równań różniczkowych można zapisać w postaci macierzowej [90]:

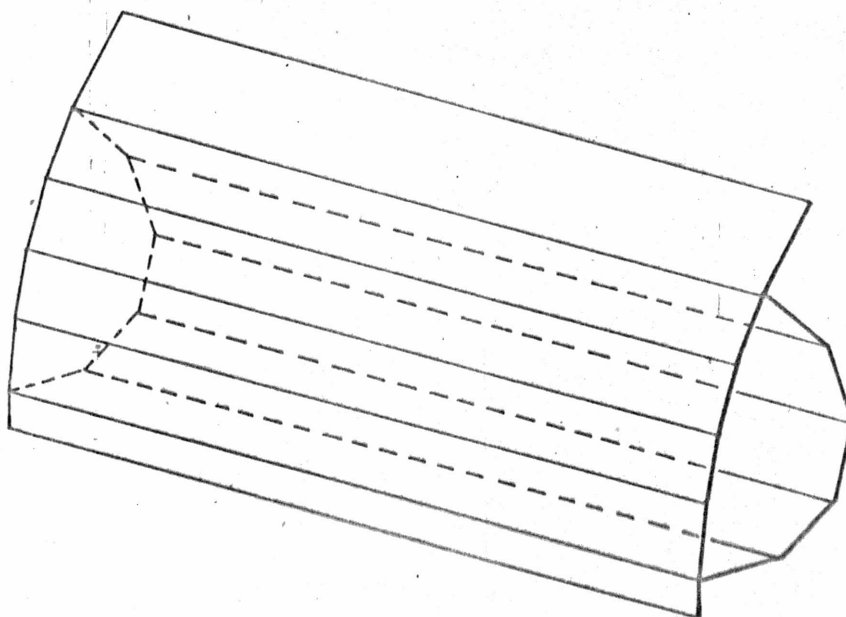
$$[M] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\delta\} + [K] \{\delta\} = 0 \quad (4.1)$$

a jego rozwiązanie wymaga wykonania następujących czynności:

- a) podziału obszaru konstrukcji na elementy skończone,
- b) wyboru funkcji kształtu stanowiących przybliżone rozwiązanie przemieszczeń wewnątrz elementu w zależności od nieznanymi przemieszczeń węzłowych,
- c) sformułowania związków pozwalających na obliczenie macierzy sztywności i macierzy mas dla poszczególnych elementów,
- d) utworzenia z macierzy elementów, macierzy sztywności i mas dla całej konstrukcji,
- e) rozwiązania układu równań i wyznaczenia poszukiwanych wielkości fizycznych, którymi są częstości własne i odpowiadające im postaci drgań rozpatrywanej konstrukcji.

4.2. Wybór rodzaju elementów oraz przyjęcie rodzajów przemieszczeń węzłowych. Układy współrzędnych

Ze względu na skomplikowany kształt zamknięcia wybrano do jego dyskretyzacji płaskie elementy trójkątne zarówno dla przepon jak i powłok. Konstrukcję kłapy posiadającą w rzeczywistości powierzchnie zakrzywione w sposób ciągły zastąpiono ustrojem złożonym z płaskich pasm płytowych (rys. 4.1) zwanym tarczownicą [21].



Rys.4.1. Zamiana powłoki zewnętrznej i wewnętrznej na tarczownicę.

Na tak przyjętą geometrię zamknięcia nałożono następnie siatkę skończonych elementów.

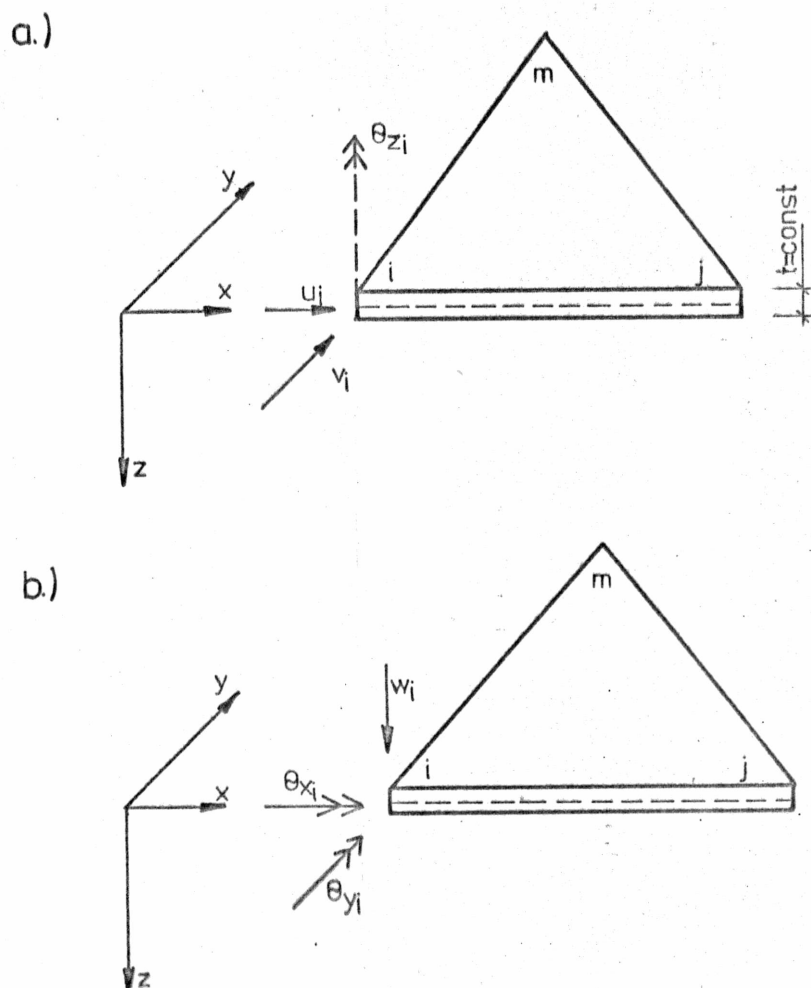
Powstała tarczownica, mimo że składa się z elementów płaskich zachowuje się pod dowolnym obciążeniem jak powłoka, a więc występują w niej siły normalne, ścinające i momenty, oraz odpowiadające im odkształcenia i przemieszczenia. Przy założeniu, że odkształcenia elementu są małe, można traktować rozłącznie odkształcenia od sił normalnych oraz odkształcenia od sił ści-

nających i momentów. Wówczas element trójkątny można rozpatrywać dwojako: albo jako tarczę, albo jako płytę, co znacznie ułatwia formułowanie związków ważnych dla tego elementu.

Na rysunku 4.2 pokazane zostały siły i przemieszczenia występujące w węzłach elementu trójkątnego, z rozróżnieniem na tarczę i płytę.

Do pełnego opisu przemieszczenia węzła wystarczy pięć stopni swobody w węźle, a mianowicie: u , v , w , Θ_x , Θ_y . Jednakże, gdy zbiegające się w węźle elementy nie są współpłaszczyznowe (np. w miejscu połączenia powłoki zewnętrznej i przepony) kąt skręcenia Θ_x lub Θ_y krawędzi jednego elementu nie miałby swojego odpowiednika w elemencie doń prostopadłym. Dlatego istnieje uzasadniona konieczność przyjęcia wszystkich kątów obrotu, w tym także Θ_z , w celu prawidłowego przeprowadzenia transformacji przy ustalaniu równań dla całej konstrukcji.

W obliczeniach prowadzonych metodą elementów skończonych należy posłużyć się dwoma kartezjańskimi układami współrzędnych. Pierwszy, tzw. układ globalny jest przyjmowany dla całej konstrukcji w celu określenia w nim współrzędnych wszystkich węzłów oraz kierunków poszukiwanych przemieszczeń. Drugi tzw. lokalny jest przyjmowany dla każdego elementu oddzielnie. W układzie tym formułowane będą wszystkie związki potrzebne do uzyskania macierzy sztywności i macierzy mas elementu, zgodnie z kierunkami przemieszczeń węzłowych, pokazanych na rys. 4.2. Dla elementów, w których kierunki przemieszczeń węzłów w układzie lokalnym nie będą pokrywać się z kierunkami przemieszczeń tych samych węzłów w układzie globalnym, należy dokonać transformacji do układu globalnego. Szczegółowy opis transformacji zamieszczony jest w p-cie 4.7.



Rys. 4.2. Kierunki przemieszczeń węzłów elementów
 a.) tarczy
 b.) płyty

4.3. Funkcje kształtu oraz macierz sztywności elementu powłoki

Elementem powłoki nazwano płaski trójkąt będący fragmentem rozpatrywanej konstrukcji. Element ten w zależności od przyjętego stanu odkształcenia i naprężenia będzie traktowany albo jako tarcza, albo jako płyta i dla tych dwóch przypadków omówione zostaną sposoby otrzymania macierzy sztywności i macierzy mas,

a następnie przedstawiony sposób ich połączenia w jedną macierz elementu powłoki.

Wszystkie związki dla elementu trójkątnego wyprowadzone będą przy założeniu, że:

- obowiązuje prawo sprężystości Hooke'a
- grubość elementu jest stała
- materiał elementu jest izotropowy.

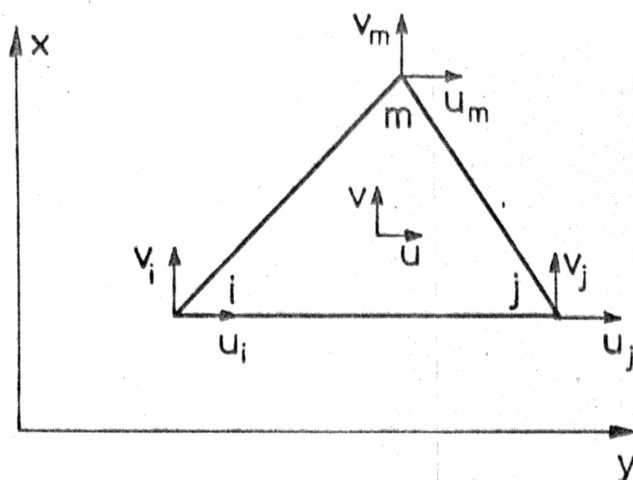
Macierz sztywności tarczy.

Przed przystąpieniem do wyznaczania macierzy sztywności elementu tarczy, należy dokonać wyboru funkcji kształtu łączących przemieszczenia u, v wewnątrz elementu z przemieszczeniami jego węzłów u_i, v_i . Zgodnie z monografią [90] przyjęto, że związek ten jest liniowy, a wówczas przy dodatkowym założeniu, że element położony jest w lokalnym układzie współrzędnych kartezjańskich w płaszczyźnie x, y oraz, że kierunek osi x pokrywa się z kierunkiem jednego boku trójkąta (rys. 4.3), funkcje kształtu można określić z zależności (4.2)

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y) u_i + (a_j + b_j x + c_j y) u_j + (a_m + b_m x + c_m y) u_m \\
 v &= \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y) v_i + (a_j + b_j x + c_j y) v_j + (a_m + b_m x + c_m y) v_m
 \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned}
 \text{gdzie: } a_i &= x_j y_m - x_m y_j \\
 b_i &= y_j - y_m = y_{jm} \\
 c_i &= x_m - x_j = x_{mj}
 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Pozostałe współczynniki równań (4.2) uzyskuje się przez cykliczną zamianę wskaźników i, j, m ; Δ oznacza pole powierzchni trójkątnego elementu.



Rys.4.3. Położenie trójkąta względem lokalnego układu współrzędnych. Kolejność numeracji węzłów przebiega odwrotnie do ruchu wskazówek zegara.

Równania (4.2) można zapisać również jako:

$$u = L_i u_i + L_j u_j + L_m u_m \quad (4.4)$$

$$v = L_i v_i + L_j v_j + L_m v_m$$

gdzie: L_i, L_j, L_m nazywane są współrzędnymi powierzchniowymi i określone wzorami:

$$\begin{aligned} L_i &= (a_i + b_i x + c_i y) / 2 \\ L_j &= (a_j + b_j x + c_j y) / 2 \\ L_m &= (a_m + b_m x + c_m y) / 2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Współrzędne powierzchniowe związane są z kartezjańskim układem współrzędnych w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
 x &= L_i x_i + L_j x_j + L_m x_m \\
 y &= L_i y_i + L_j y_j + L_m y_m \\
 1 &= L_i + L_j + L_m
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

Wprowadzając oznaczenia dla przemieszczeń wewnątrz elementu:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}
 \tag{4.7}$$

i dla przemieszczeń węzłowych:

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix}, \text{ gdzie } \{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}
 \tag{4.8}$$

równania (4.2) i (4.4) można przedstawić w typowym dla MES zapisie

$$\{f\} = [N] \{\delta\}^e
 \tag{4.9}$$

gdzie $[N]$ oznacza macierz funkcji kształtu, której elementami są odpowiednie współczynniki równań (4.4). Ostateczna postać tej macierzy jest następująca:

$$[N] = \begin{bmatrix} L_i & 0 & L_j & 0 & L_m & 0 \\ 0 & L_i & 0 & L_j & 0 & L_m \end{bmatrix}
 \tag{4.10}$$

Otrzymane funkcje kształtu są potrzebne do określenia macierzy sztywności elementu danej wzorem (4.11). Wyprowadzenie tego równania można znaleźć w literaturze [23,84,90].

$$[K]^e = [B]^T [D][B] t_1 \Delta
 \tag{4.11}$$

gdzie:

- [B] - macierz odkształceń
 [D] - macierz sprężystości
 t_1 - grubość elementu.

Macierz odkształceń [B] otrzymuje się przez różniczkowanie równania (4.9) względem x i y . Odkształcenia elementu definiuje wektor:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} =$$

$$= [B] \{\delta\}^e \quad (4.12)$$

Macierz sprężystości [D] określa własności materiału. Dla materiału izotropowego jej postać jest następująca:

$$[D] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Obliczona wg wzoru (4.11) macierz sztywności elementu ma wymiar 6×6 co odpowiada liczbie przemieszczeń węzłów opisanych zależnościami (4.7) i (4.8). Zgodnie z rysunkiem 4.2 należy uwzględnić dodatkowo sztywność odpowiadającą kątowi Θ_z . Ponieważ wartość kąta Θ_z nie jest sprzężona z odkształceniami w kierunku u i v - sztywność K_{Θ_z} można przyjąć dowolnie jako sztywność zewnętrzną.

W niniejszej pracy przyjęto zgodnie z [90] siłę współczynników sztywności skręcania w płaszczyźnie xy tworzących macierz 3×3 wg wzoru:

$$K_{\Theta z}^{rs} = \alpha E t_1 \Delta \begin{cases} 1 & \text{dla } r = s \\ -0,5 & \text{dla } r \neq s \end{cases} \quad (4.14)$$

gdzie α - jest współczynnikiem o dowolnej, mniejszej od 1 wartości.

Macierz sztywności elementu płytowego

Przemieszczenia i odkształcenia płyty wg klasycznej teorii cienkich płyt są jednoznacznie określone przez ugięcie jej powierzchni "w" [21,23,56,90].

Rozpatrując trójkątny element płyty należy, zgodnie z rysunkiem 4.2 założyć w jego węzłach występowanie przemieszczeń w, Θ_x , Θ_y zdefiniowanych za pomocą wektora $\{\delta\}$:

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\text{gdzie } \{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \Theta_{x_i} \\ \Theta_{y_i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_i \\ -\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

Zależność pomiędzy przemieszczeniem "w" wewnątrz elementu, a przemieszczeniami węzłowymi określona jest poprzez funkcje kształtu [N] w następujący sposób:

$$w = [N] \{\delta\}^e \quad (4.17)$$

Zalecana w [90] postać tych funkcji jest następująca:

$$\begin{aligned}
W = & \alpha_1 L_i + \alpha_2 L_j + \alpha_3 L_m + \alpha_4 (L_j^2 L_i + \frac{1}{2} L_i L_j L_m) + \\
& + \alpha_5 (L_i^2 L_j + \frac{1}{2} L_i L_j L_m) + \alpha_6 (L_j^2 L_m + \frac{1}{2} L_i L_j L_m) + \\
& + \alpha_7 (L_m^2 L_j + \frac{1}{2} L_i L_j L_m) + \alpha_8 (L_i^2 L_m + \frac{1}{2} L_i L_j L_m) + \\
& + \alpha_9 (L_m^2 L_i + \frac{1}{2} L_i L_j L_m)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

gdzie: L_i - współrzędne powierzchniowe określone wzorem (4.5)
 α_i - współczynniki wyznaczone z warunków brzegowych.

Obliczenie współczynników α_i polega na podstawianiu do zależności (4.18) współrzędnych kolejnych wierzchołków trójkąta i wówczas wartość funkcji będzie równa przemieszczeniom tych węzłów. Np. po podstawieniu współrzędnych węzła "i", tj. $L_i = 1$, $L_j = L_m = 0$, wartość funkcji w musi być równa w_i , a stąd:

$$\alpha_1 = w_i$$

Podobnie można wyznaczyć $\alpha_2 = w_j$ i $\alpha_3 = w_m$, natomiast pozostałe α_i oblicza się różniczkując zależność (4.18) po x i y oraz wykorzystując pozostałe warunki brzegowe:

$$\left(-\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i = \Theta_{x_i}, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i = \Theta_{y_i} \quad \text{itp.}$$

W rezultacie funkcje kształtu mają następującą macierzową postać:

$$[N]^e = [A_i \ B_i \ C_i \ A_j \ B_j \ C_j \ A_m \ B_m \ C_m] \tag{4.19}$$

Współczynniki A,B,C zdefiniowane są następująco:

$$\begin{aligned}
A_i &= L_i + L_i^2 L_j + L_i^2 L_m - L_i L_j^2 - L_i L_m^2 \\
B_i &= b_m(L_i^2 L_j + \frac{1}{2} L_i L_j L_m) - b_j(L_m L_i^2 + \frac{1}{2} L_i L_j L_m) \\
C_i &= c_m(L_i^2 L_j + \frac{1}{2} L_i L_j L_m) - c_j(L_m L_i^2 + \frac{1}{2} L_i L_j L_m) \\
A_j &= L_j + L_j^2 L_m + L_j^2 L_i - L_j L_m^2 - L_j L_i^2 \\
B_j &= b_i(L_j^2 L_m + \frac{1}{2} L_i L_j L_m) - b_m(L_i L_j^2 + \frac{1}{2} L_i L_j L_m) \\
C_j &= c_i(L_j^2 L_m + \frac{1}{2} L_i L_j L_m) - c_m(L_i L_j^2 + \frac{1}{2} L_i L_j L_m) \\
A_m &= L_m + L_m^2 L_i + L_m^2 L_j - L_m L_i^2 - L_m L_j^2 \\
B_m &= b_j(L_m^2 L_i + \frac{1}{2} L_i L_j L_m) - b_i(L_j L_m^2 + \frac{1}{2} L_i L_j L_m) \\
C_m &= c_j(L_m^2 L_i + \frac{1}{2} L_i L_j L_m) - c_i(L_j L_m^2 + \frac{1}{2} L_i L_j L_m)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Macierz sztywności elementu płytowego otrzymuje się ze znanej zależności [17,23,90]

$$[K]^e = \int_{\Delta} [B]^T [D] [B] t d\Delta \tag{4.21}$$

gdzie, podobnie jak w równaniu (4.11), $[B]$ jest macierzą odkształceń, a $[D]$ macierzą sprężystości, które jednak mają inną postać. Odkształcenia wyrażone są tym razem przez drugie pochodne ugięcia "w":

$$\{\epsilon\} = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x y} \end{array} \right\} \tag{4.22}$$

W_1 Θ_{X_1} Θ_{y_1}

$(4 b_1 b_2 + 4 b_1 b_3 - 2 b_2^2 - 2 b_3^2) L_1 + (2 b_1^2 - 4 b_1 b_2) L_2 +$ $(2 b_1^2 - 4 b_1 b_3) L_3$	$(b_2 b_3^2 - b_2^2 b_3) L_1 + (2 b_1^2 b_3 + b_1 b_3^2 - b_1 b_2 b_3) L_2 +$ $(-2 b_1^2 b_2 - b_1 b_2^2 + b_1 b_2 b_3) L_3$	$(4 b_1 b_2 c_3 + b_2 b_3 c_3 - 4 b_1 b_3 c_2 - b_2 b_3 c_2) L_1 + (2 b_1^2 c_3 + b_1 b_3 c_3 - b_1 b_3 c_2) L_2 +$ $(b_1 b_2 c_3 - 2 b_1^2 c_2 - b_1 b_2 c_2) L_3$
$(4 c_1 c_2 + 4 c_1 c_3 - 2 c_2^2 - 2 c_3^2) L_1 + (2 c_1^2 - 4 c_1 c_2) L_2 +$ $(2 c_1^2 - 4 c_1 c_3) L_3$	$(4 b_3 c_1 c_2 + b_3 c_2 c_3 - 4 b_2 c_1 c_3 - b_2 c_2 c_3) L_1 + (2 b_3 c_1^2 + b_3 c_1 c_3 - b_2 c_1 c_3) L_2 +$ $(b_3 c_1 c_2 - 2 b_2 c_1^2 - b_2 c_1 c_2) L_3$	$(c_2 c_3^2 - c_2^2 c_3) L_1 + (2 c_1^2 c_3 + c_1 c_3^2 - c_1 c_2 c_3) L_2 +$ $(-2 c_1^2 c_2 - c_1 c_2^2 + c_1 c_2 c_3) L_3$
$[2 b_2 (c_1 - c_2) + 2 b_3 (c_1 - c_3) + 2 b_1 (c_2 - c_3)] L_1 +$ $[2 b_1 (c_1 - c_2) - 2 b_2 c_1] L_2 +$ $[2 b_1 (c_1 - c_3) - 2 b_3 c_1] L_3$	$[2 b_1 (b_3 c_2 - b_2 c_3) + \frac{1}{2} b_2 b_3 (c_3 - c_2) + \frac{1}{2} b_3^2 c_2 - \frac{1}{2} b_2^2 c_3] L_1 +$ $[b_1 b_3 (2 c_1 + \frac{1}{2} c_3) - \frac{1}{2} b_3 c_1 (b_3 - b_2) - \frac{1}{2} b_1 b_2 c_3] L_2 +$ $[b_1 b_2 (2 c_1 + \frac{1}{2} c_3) + \frac{1}{2} b_2 c_1 (b_3 - b_2) - \frac{1}{2} b_1 b_3 c_2] L_3$	$[2 c_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - \frac{1}{2} c_2 c_3 (b_3 - b_2) + \frac{1}{2} b_2 c_3^2 - \frac{1}{2} b_3 c_2^2] L_1 +$ $[c_1 c_3 (2 b_1 + \frac{1}{2} b_3) + \frac{1}{2} b_1 c_3 (c_3 - c_2) - \frac{1}{2} b_3 c_1 c_2] L_2 +$ $[c_1 c_2 (2 b_1 + \frac{1}{2} b_2) + \frac{1}{2} b_1 c_2 (c_3 - c_2) - \frac{1}{2} b_2 c_1 c_3] L_3$

Rys. 4.4. Macierz odkształceń [B] elementu płytowego

W_2 Θ_{X_2} Θ_{Y_2}

$(4b_2b_3 + 4b_1b_2 - 2b_3^2 - 2b_1^2)L_2 + (2b_2^2 - 4b_2b_3)L_3 +$ $(2b_3^2 - 4b_1b_2)L_4$	$(b_1^2b_3 - b_1b_3^2)L_2 + (2b_1b_2^2 + b_1^2b_2 - b_1b_2b_3)L_3 +$ $(-2b_2^2b_3 - b_2b_3^2 + b_1b_3b_3)L_4$	$(4b_2b_3c_1 + b_1b_3c_1 - 4b_1b_2c_3 - b_1b_3c_3)L_2 + (2b_2^2c_1 + b_1b_2c_1 - b_1b_2c_3)L_3 +$ $(b_2b_3c_1 - 2b_2^2c_3 - b_2b_3c_3)L_4$
$(4c_2c_3 + 4c_1c_2 - 2c_1^2 - 2c_3^2)L_2 + (2c_2^2 - 4c_2c_3)L_3 +$ $(2c_3^2 - 4c_1c_2)L_4$	$(4b_1c_1c_3 + b_1c_1c_3 - 4b_3c_1c_2 - b_3c_1c_3)L_2 + (2b_1c_2^2 + b_1c_1c_2 - b_3c_1c_2)L_3 +$ $(b_1c_2c_3 - 2b_3c_2^2 - b_3c_2c_3)L_4$	$(c_1^2c_3 - c_1c_3^2)L_2 + (2c_1c_2^2 + c_1^2c_2 - c_1c_2c_3)L_3 +$ $(-2c_2^2c_3 - c_2c_3^2 + c_1c_2c_3)L_4$
$[2b_3(c_2 - c_3) + 2b_1(c_2 - c_1) + 2b_2(c_1 + c_3)]L_2 +$ $[2b_2(c_2 - c_3) - 2b_3c_2]L_3 +$ $[2b_2(c_2 - c_1) - 2b_1c_2]L_4$	$[2b_2(b_1c_3 - b_3c_1) + \frac{1}{2}b_1b_3(c_1 - c_3) + \frac{1}{2}b_1^2c_3 - \frac{1}{2}b_3^2c_1]L_2 +$ $[b_1b_2(2c_2 + \frac{1}{2}c_1) + \frac{1}{2}(b_1c_2(b_1 - b_3) - \frac{1}{2}b_2b_3c_1)]L_3 +$ $[-b_2b_3(2c_2 + \frac{1}{2}c_3) + \frac{1}{2}b_3c_2(b_1 - b_3) + \frac{1}{2}b_1b_2c_3]L_4$	$[2c_2(b_3c_1 - b_1c_3) + \frac{1}{2}c_1c_3(b_1 - b_3) + \frac{1}{2}b_3c_1^2 - \frac{1}{2}b_1c_3^2]L_2 +$ $[c_1c_2(2b_2 + \frac{1}{2}b_1) + \frac{1}{2}b_2c_1(c_1 - c_3) - \frac{1}{2}b_1c_2c_3]L_3 +$ $[c_2c_3(2b_2 + \frac{1}{2}b_3) + \frac{1}{2}b_2c_3(c_1 - c_3) + \frac{1}{2}b_3c_1c_2]L_4$

W_3 ΘX_3 Θy_3

$(4b_1b_3 + 4b_2b_3 - 2b_1^2 - 2b_2^2)L_3 + (2b_3^2 - 4b_1b_3)L_4 +$ $(2b_3^2 - 4b_2b_3)L_2$	$(b_1b_2^2 - b_1^2b_2)L_3 + (2b_2b_3^2 + b_2^2b_3 - b_1b_2b_3)L_4 +$ $(-2b_1b_3^2 - b_1^2b_3 + b_1b_2b_3)L_2$	$(4b_1b_3c_2 + b_1b_2c_2 - 4b_2b_3c_1 - b_1b_2c_4)L_3 + (2b_3^2c_2 + b_2b_3c_2 - b_2b_3c_4)L_4 +$ $(b_1b_3c_2 - 2b_3^2c_1 - b_1b_3c_4)L_2$
$(4c_1c_3 + 4c_2c_3 - 2c_2^2 - 2c_1^2)L_3 + (2c_3^2 - 4c_1c_3)L_4 +$ $(2c_3^2 - 4c_2c_3)L_2$	$(4b_2c_1c_3 + b_2c_4c_2 - 4b_1c_2c_3 - b_1c_1c_2)L_3 + (2b_2c_3^2 + b_2c_2c_3 - b_1c_2c_3)L_4 +$ $(b_2c_1c_3 - 2b_1c_3^2 - b_1c_1c_3)L_2$	$(c_1c_2^2 - c_1^2c_2)L_3 + (2c_2c_3^2 + c_2^2c_3 - c_1c_2c_3)L_4 +$ $(-2c_1c_3^2 - c_1^2c_3 + c_1c_2c_3)L_2$
$[2b_1(c_3 - c_1) - 2b_2(c_3 - c_2) + 2b_3(c_2 + c_4)]L_3 +$ $[2b_3(c_3 - c_1) - 2b_1c_2]L_4 +$ $[2b_3(c_3 - c_2) - 2b_2c_3]L_2$	$[2b_3(b_2c_1 - b_1c_2) + \frac{1}{2}b_1b_2(c_2 - c_4) + \frac{1}{2}b_2^2c_1 - \frac{1}{2}b_1^2c_2]L_3 +$ $[b_2b_3(2c_3 + \frac{1}{2}c_2) + \frac{1}{2}b_2c_3(b_2 - b_1) - \frac{1}{2}b_1b_3c_2]L_4 +$ $[-b_1b_3(2c_3 + \frac{1}{2}c_4) + \frac{1}{2}b_1c_3(b_2 - b_4) + \frac{1}{2}b_2b_3c_4]L_2$	$[2c_3(b_1c_2 - b_2c_1) + \frac{1}{2}c_1c_2(b_2 - b_1) + \frac{1}{2}b_1c_2^2 - \frac{1}{2}b_2c_1^2]L_3 +$ $[c_2c_3(2b_3 + \frac{1}{2}b_2) + \frac{1}{2}b_3c_2(c_2 - c_4) - \frac{1}{2}b_2c_1c_3]L_4 +$ $[-c_1c_3(2b_3 + \frac{1}{2}b_1) + \frac{1}{2}b_3c_1(c_2 - c_4) + \frac{1}{2}b_1c_2c_3]L_2$

Rys. 4.4.c.d.

a dla otrzymania macierzy [B] należy dwukrotnie zróżniczkować wyrażenia (4.19). W efekcie uzyskuje się macierz o wymiarach 3×9 , której elementami są wyrażenia zależne liniowo od L_i, L_j, L_m . Macierz ta przedstawiona jest na rysunku 4.4.

Macierz [D] ma następującą postać:

$$[D] = \frac{E t^3}{12(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Całkowanie równania (4.21) przebiega po powierzchni elementu i można go dokonać w oparciu o wzór [90]:

$$\int_{L_i}^{a} \int_{L_j}^{b} \int_{L_m}^{c} dx dy = \frac{a! b! c!}{(a+b+c+2)!} 2 \Delta \quad (4.24)$$

Macierz elementu powłoki

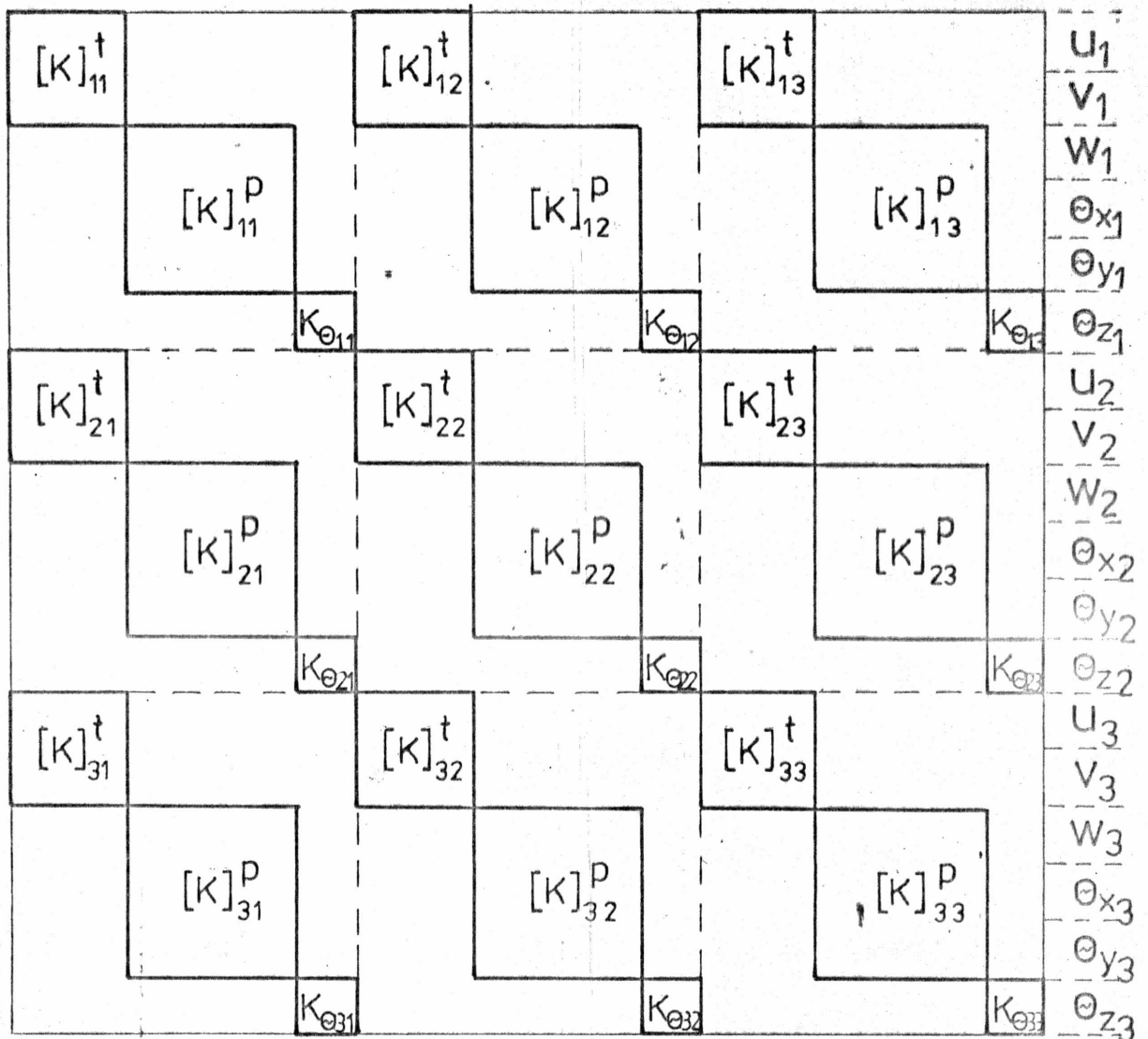
Dysponując macierzami sztywności elementu traktowanego jako tarcza i jako płyta można przystąpić do utworzenia macierzy sztywności elementu powłoki. Zgodnie z zasadami omówionymi w punkcie 4.2 wektor przemieszczeń węzłowych tego elementu przedstawia się następująco:

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

gdzie:

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \ominus x_i \\ \ominus y_i \\ \ominus z_i \end{Bmatrix}$$

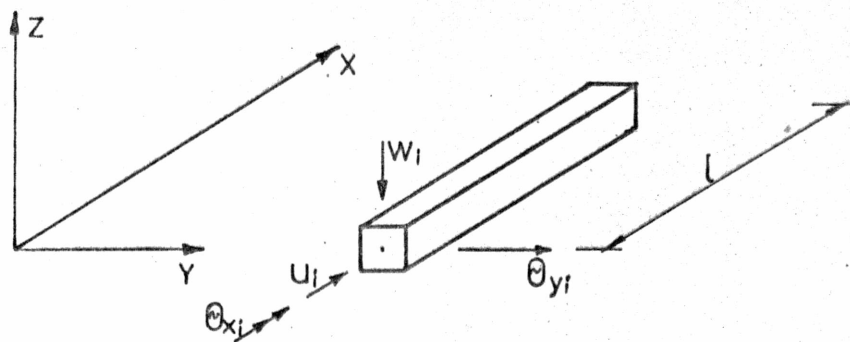
przy czym zakłada się, że zarówno "tarczowe" przemieszczenia i -tego węzła u_i, v_i jak i "płytkowe" $w_i, \ominus x_i, \ominus y_i$ oraz kąt skręcenia $\ominus z_i$ są wzajemnie niezależne. Wynikająca stąd struktura macierzy sztywności elementu powłoki jest rezultatem rozmieszczenia podmacierzy opisanych równaniami (4.11), (4.14) i (4.21) w macierzy o wymiarach 18×18 , odpowiednio do przyjętego wektora przemieszczeń węzłowych. Macierz sztywności elementu powłoki o węzłach 1, 2, 3 przedstawiona jest na rysunku 4.5.



Rys. 4.5. Postać macierzy sztywności elementu powłoki.
t – tarcza, p – płyta

4.4. Funkcje kształtu oraz macierz sztywności elementów belkowych

Z uwagi na to, że w zamknięciu klapowym, przedstawionym na rysunku 1.1 występują żebra podłużne, należy w numerycznym modelu konstrukcji wprowadzić ich odpowiedniki w postaci elementów belkowych. Ich schemat pokazano na rysunku 4.6.



Rys.4.6. Przemieszczenie węzła elementu belkowego.

W konstrukcji klapy połączenie żeber podłużnych z blachą poszycia jest zrealizowane przez spoinę pachwinową na całej długości żebra. Taki charakter zamocowania narzuca konieczność nadania odpowiedniej postaci funkcji kształtu elementu belkowego w modelu matematycznym. Mianowicie przemieszczenia na jej długości muszą być takie same jak przemieszczenia krawędzi elementu powłokowego. Wynika to z przyjętego sposobu podziału, w którym elementy belkowe przebiegają wzdłuż krawędzi elementu powłoki. Zależność pomiędzy przemieszczeniem na długości belki a przemieszczeniami jej węzłów $\{\delta\}$ wyraża się wzorem:

$$\{w\}^e = [N] \{\delta\}^e = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

Do opisu funkcji kształtu żebra przyjęto wielomian trzeciego stopnia jednej zmiennej ($\xi = \frac{x}{l}$):

$$N_i = a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^2 + a_4 \xi^3 \quad (4.27)$$

Funkcja N_1 powinna spełniać następujące warunki brzegowe:

$$\text{a) dla } x = 0 \quad N_1 = 1 \quad \text{i} \quad \frac{\partial N_1}{\partial x} = 0$$

$$\text{b) dla } x = l \quad N_1 = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial N_1}{\partial x} = 0$$

które uwzględniając otrzymuje się równania określające wartości u_i :

$$\text{z warunku a) } \begin{cases} a_1 = 1 \\ \frac{a_2}{l} = 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

$$\text{z warunku b) } \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ \frac{a_2}{l} + \frac{2a_3}{l} + \frac{3a_4}{l} = 0 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań będzie:

$$N_1 = 1 - 3 \xi^2 + 2 \xi^3 \quad (4.29a)$$

Podobnie otrzymuje się pozostałe funkcje:

$$\begin{aligned} N_2 &= -x(\xi - 1)^2 \\ N_3 &= 3 \xi^2 - 2 \xi^3 \\ N_4 &= -x(\xi^2 - \xi) \end{aligned} \quad (4.29b)$$

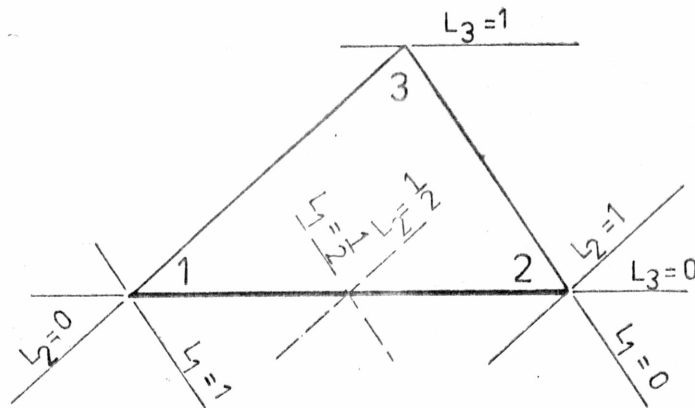
Wyrażenia (4.29a) i (4.29b) znane są pod nazwą wielomianów Hermita [23,90].

Przyjęta postać funkcji kształtu jest poprawna, gdy zachodzi, jak to wcześniej powiedziano, zgodność przemieszczeń krawędzi elementu powłokowego i połączonej z nim belki. Równość przemieszczeń u i Θx przedstawionych na rysunkach 4.2 oraz 4.6 nie ulega wątpliwości, ponieważ przemieszczenia te są liniowe wzdłuż krawędzi równoległej do osi x . Natomiast równość przemieszczeń Θy oraz w , przedstawionych na tych samych rysunkach wykazać można w następujący sposób:

niech przemieszczenie "w" krawędzi 1-2 elementu płytowego od przemieszczenia węzła nr 1. dane będzie przez czynnik A_1 zapisany we wzorach (4.20) jako:

$$w = L_1 + L_1^2 L_2 + L_1^2 L_3 + L_1 L_2^2 - L_1 L_3^2 \quad (4.30)$$

Zgodnie z rysunkiem 4.7 współrzędne powierzchniowe na krawędzi 1-2 mają wartości: $L_3 = 0$ oraz $L_1 + L_2 = 1$.



Rys. 4.7. Współrzędne powierzchniowe elementu trójkątnego.

Podstawiając je do wzoru (4.30) otrzymamy:

$$w = L_1 + L_1^2(1-L_1) - L_1(1-L_1)^2 = 3L_1^2 - 2L_1^3 \quad (4.31)$$

Analizując wyrażenia (4.31) i (4.29a) łatwo stwierdzić, że gdy L_1 rośnie, to ξ maleje i dlatego można zapisać, że $L_1 = 1 - \xi$,

a po podstawieniu do zależności (4.31) otrzymuje się wyrażenie analogiczne do (4.29a), a mianowicie:

$$w = 3(1-\xi)^2 - 2(1-\xi)^3 = (1+2\xi)(1-\xi) = 1-3\xi^2 + 2\xi^3$$

Podobnie można wykazać zgodność przemieszczeń od pozostałych parametrów obu węzłów.

Dla określonych równaniami (4.29a) i (4.29b) funkcji kształtu można wyznaczyć macierz sztywności zginanego elementu belkowego podobnie jak dla elementu powłoki. Należy więc określić macierz odkształceń [B] i sprężystości [D] jako:

$$[B] = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} [N]$$

(4.32)

$$[D] = EIy$$

a wówczas macierz sztywności przyjmie następującą postać:

$$[K]^e = EIy \int_0^1 [B]^T [B] dx =$$

$$= \begin{bmatrix} N_1'' & N_1'' & N_1'' & N_2'' & N_1'' & N_3'' & N_1'' & N_4'' \\ & & N_2'' & N_2'' & N_2'' & N_3'' & N_2'' & N_4'' \\ \text{symetria} & & & & N_3'' & N_3'' & N_3'' & N_4'' \\ & & & & & & N_4'' & N_4'' \end{bmatrix} dx =$$

$$= \frac{2EIy}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3L & -6 & 3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & L^2 \\ -6 & -3L & 6 & -3L \\ 3L & L^2 & -3L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_1 \\ \Theta_1 \\ w_2 \\ \Theta_2 \end{matrix}$$

(4.33)

We wzorze tym N_i'' oznacza $\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2}$

$\frac{EA}{L}$						$-\frac{EA}{L}$						u_i
												v_i
		$\frac{12EI_y}{L^3}$		$\frac{6EI_y}{L^2}$				$-\frac{12EI_y}{L^3}$		$\frac{6EI_y}{L^2}$		w_i
			$\frac{GI_o}{L}$						$-\frac{GI_o}{L}$			θ_{x_i}
		$\frac{6EI_y}{L^2}$		$\frac{4EI_y}{L}$				$-\frac{6EI_y}{L^2}$		$\frac{2EI_y}{L}$		θ_{y_i}
												θ_{z_i}
$-\frac{EA}{L}$						$\frac{EA}{L}$						u_j
												v_j
		$-\frac{12EI_y}{L^3}$		$-\frac{6EI_y}{L^2}$				$\frac{12EI_y}{L^3}$		$-\frac{6EI_y}{L^2}$		w_j
			$-\frac{GI_o}{L}$						$\frac{GI_o}{L}$			θ_{x_j}
		$\frac{6EI_y}{L^2}$		$\frac{2EI_y}{L}$				$-\frac{6EI_y}{L^2}$		$\frac{4EI_y}{L}$		θ_{y_j}
												θ_{z_j}

Rys. 4.8. Macierz sztywności elementu belkowego.

Macierze sztywności dla skręcania i ściskania belki określa się analogicznie. Macierze te mają postać

- dla przypadku ściskania:

$$[K]^e = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

- dla przypadku skręcania:

$$[K]^e = \frac{GI_0}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Pełna macierz sztywności elementu zebra pokazana jest na rys.

4.8.

4.5. Macierz mas elementu powłoki

Macierz mas elementu zdefiniowana jest przez związek [90]:

$$[M_{ij}]^e = \int_{V^e} [N_i]^T \rho [N_j] dV \quad (4.36)$$

Dla elementu tarczy, którego funkcje kształtu opisane są wzorem (4.10) macierz mas można zapisać jako:

$$[M_{ij}]^e = t_1 [I] \iint L_i L_j dx dy \quad (4.37)$$

gdzie: $[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Po scałkowaniu, zgodnie ze wzorem (4.24) otrzymujemy:

$$[M]^e = \frac{\rho t_1 \Delta}{3} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Dla elementu płyty macierz mas określona jest zależnością:

$$[M]^e = \rho t_1 \iint [N]^T [N] dx dy \quad (4.39)$$

przy czym $[N]$ przyjmuje się jak we wzorze (4.19).

Po wykonaniu mnożenia i całkowania otrzymuje się macierz w zależności od wartości $b_i, b_j, b_m, c_i, c_j, c_m$ danych wzorami (4.3). Jawną postać tej macierzy dla elementu o węzłach i, j, m przedstawia rysunek 4.9.

Cała macierz mas dla elementu powłoki musi być ułożona analogicznie jak macierz sztywności przedstawiona na rys. 4.5, tylko w miejscach odpowiadających fikcyjnej sztywności K_{Θ_z} należy wstawić zero.

4.6. Macierz mas elementu belkowego

Macierz mas elementu belkowego wyprowadza się tak samo, jak dla elementu powłoki podstawiając do wzoru (4.36) funkcje kształtu opisane równaniami (4.29). Tak jak poprzednio, osobno wyprowadza się podmacierze mas dla zginania, a osobno dla skręcania i ściskania. Pełna macierz mas dla węzłów i, j przedstawiona jest na rys. 4.10.

RO-TA
10 080

1936	$208(b_m - b_j)$	$208(c_m - c_j)$	712	$76 b_i - 136 b_m$	$76 c_i - 136 c_m$	712	$136 b_j - 76 b_i$	$136 c_j - 76 c_i$
	$31(b_j^2 + b_m^2) - 38 b_j b_m$	$31(b_m c_m + b_j c_j) - 19(b_m c_j + b_j c_m)$	$136 b_m - 76 b_j$	$13 b_m (b_i + b_j) - 25 b_m^2 - 11 b_i b_j$	$13(b_m c_i + b_j c_m) - 25 b_m c_m - 11 b_i c_j$	$76 b_m - 136 b_j$	$13 b_j (b_i + b_m) - 25 b_j^2 - 11 b_i b_m$	$13(b_m c_j + b_j c_i) - 25 b_j c_j - 11 b_m c_i$
		$31(c_j^2 + c_m^2) - 38 c_j c_m$	$136 c_m - 76 c_j$	$13(b_i c_m + b_m c_j) - 25 c_m b_m - 11 b_i c_j$	$13 c_m (c_i + c_j) - 25 c_m^2 - 11 c_i c_j$	$76 c_m - 136 c_j$	$13(b_j c_m + b_i c_j) - 25 b_j c_j - 11 b_i c_m$	$13 c_j (c_i + c_m) - 25 c_j^2 - 11 c_i c_m$
			1936	$208(b_i - b_m)$	$208(c_i - c_m)$	712	$76 b_j - 136 b_i$	$76 c_j - 136 c_i$
				$31(b_i^2 + b_m^2) - 38 b_i b_m$	$31(b_i c_i + b_m c_m) - 19(b_i c_m + b_m c_i)$	$136 b_i - 76 b_m$	$13 b_i (b_j + b_m) - 25 b_i^2 - 11 b_j b_m$	$13(b_i c_j + b_m c_i) - 25 b_i c_i - 11 b_m c_j$
			Symetria		$31(c_i^2 + c_m^2) - 38 c_i c_m$	$136 c_i - 76 c_m$	$13(b_j c_i + b_i c_m) - 25 c_i b_i - 11 b_j c_m$	$13 c_i (c_j + c_m) - 25 c_i^2 - 11 c_j c_m$
						1936	$208(b_j - b_i)$	$208(c_j - c_i)$
							$31(b_i^2 + b_j^2) - 38 b_i b_j$	$31(b_j c_j + b_i c_i) - 19(b_j c_i + b_i c_j)$
								$31(c_i^2 + c_j^2) - 38 c_i c_j$

Rys. 4.9. Macierz mas dla elementu płytowego

	140					70						u_i
												v_i
		156		22L				54		-13L		w_i
			$140 \frac{I_0}{A}$						$70 \frac{I_0}{A}$			θ_{x_i}
		22L		$4L^2$				13L		$-3L^2$		θ_{y_i}
												θ_{z_i}
$\frac{q \cdot A \cdot L}{420}$	70					140						u_i
												v_i
		54		13L				156		-22L		w_i
			$70 \frac{I_0}{A}$						$140 \frac{I_0}{A}$			θ_{x_i}
		-13L		$-3L^2$				-22L		$4L^2$		θ_{y_i}
												θ_{z_i}

Rys. 4.10. Macierz mas elementu belkowego.

4.7. Transformacja układu współrzędnych

Wyprowadzone wcześniej macierze sztywności i mas odnoszą się do lokalnych układów współrzędnych. W celu połączenia wszystkich elementów w całość, należy wymienione wielkości sprowadzić do układu globalnego. Dokonuje się tego przez transformację współrzędnych.

Jeżeli wektory przemieszczeń węzłowych w układzie lokalnym oznaczymy przez $\{\delta\}$, a odpowiadające im wielkości w układzie globalnym przez $\{\delta'\}$ wówczas zamiany układu współrzędnych możemy dokonać za pomocą macierzy transformacji $[\Lambda]$:

$$\{\delta\} = [\Lambda_1] \{\delta'\} \quad (4.40)$$

gdzie:

$$[\Lambda_1] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{xx'} & \lambda_{xy'} & \lambda_{xz'} \\ \lambda_{yx'} & \lambda_{yy'} & \lambda_{yz'} \\ \lambda_{zx'} & \lambda_{zy'} & \lambda_{zz'} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Współczynniki macierzy $[\lambda]$ określają wartości kosinusów kąta zawartego pomiędzy odpowiednimi osiami układu lokalnego i globalnego.

Macierze sztywności i mas transformuje się do układu globalnego w sposób następujący:

$$\begin{aligned} [K'] &= [\Lambda]^T [K] [\Lambda] \\ [M'] &= [\Lambda]^T [M] [\Lambda] \end{aligned} \quad (4.43)$$

Korzystne jest aby węzły konstrukcji opisane były we współrzędnych globalnych, a przyporządkowanie elementom układów lokalnych odbywało się automatycznie w trakcie obliczeń.

Realizuje się to według następującego wzoru:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [\lambda] \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} \quad (4.44)$$

Potrzebną do tej operacji macierz kosinusów kierunkowych można otrzymać przy spełnieniu pewnych założeń i zasad algebry wektorów [90].

W niniejszej pracy założono, że oś x układu lokalnego przebiegać będzie równoległe do jednej z krawędzi elementu (punkt 4.3, rysunek 4.3). Dla elementu o węzłach i, j, m współczynniki macierzy λ obliczane są z następujących zależności

$$\begin{Bmatrix} \lambda_{xx'} \\ \lambda_{xy'} \\ \lambda_{xz'} \end{Bmatrix} = \frac{1}{l_{ij}} \begin{Bmatrix} x_{ji} \\ y_{ji} \\ z_{ji} \end{Bmatrix} \quad (4.45a)$$

$$\begin{Bmatrix} \lambda_{zx'} \\ \lambda_{zy'} \\ \lambda_{zz'} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{Bmatrix} y_{ji} z_{mi} - y_{mi} z_{ji} \\ x_{mi} z_{ji} - x_{ji} y_{mi} \\ x_{ji} y_{mi} - x_{mi} y_{ji} \end{Bmatrix} \quad (4.45b)$$

$$\begin{Bmatrix} \lambda_{yx'} \\ \lambda_{yy'} \\ \lambda_{yz'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda_{xz'} \lambda_{zy'} - \lambda_{xy'} \lambda_{zz'} \\ \lambda_{xx'} \lambda_{zz'} - \lambda_{xz'} \lambda_{zx'} \\ \lambda_{xy'} \lambda_{zx'} - \lambda_{xx'} \lambda_{zy'} \end{Bmatrix} \quad (4.45c)$$

gdzie $x_{ji} = x_j - x_i$

$$l_{ij} = \sqrt{x_{ji}^2 + y_{ji}^2 + z_{ji}^2}$$

Transformacja macierzy sztywności i mas belki odbywa się wspólnie z elementem, do którego została ona przypisana w procesie wprowadzania danych.

Po wykonaniu powyższych transformacji można przystąpić do budowy macierzy sztywności i mas ze wzoru (4.1) dla całego zamknięcia klapowego, zgodnie z zasadą, że składowe przemieszczeń danego elementu odpowiadają składowym przemieszczeń konstrukcji. W ten sposób macierz sztywności lub mas całego ustroju jest sumą macierzy jego elementów, a wymiar tej macierzy jest równy liczbie wszystkich stopni swobody.

4.8. Obliczenie częstości i postaci drgań własnych zamknięcia

Równanie (4.1) $[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = 0$ jest jak wiadomo [42] równaniem drgań własnych konstrukcji o n -stopniach swobody. Rozwiązania równania (4.1) mają następującą postać:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{01} \\ \delta_{02} \\ \vdots \\ \delta_{0n} \end{Bmatrix} \sin(\omega_0 t + \varphi) = \{\delta_0\} \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (4.46)$$

a po ich zróżniczkowaniu otrzymuje się:

$$\{\ddot{\delta}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\delta}_n \end{Bmatrix} = -\omega_0^2 \begin{Bmatrix} \delta_{01} \\ \delta_{02} \\ \vdots \\ \delta_{0n} \end{Bmatrix} \sin(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 \{\delta_0\} \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (4.47)$$

Po podstawieniu (4.46) oraz (4.47) do (4.1) uzyskuje się następujące wyrażenie:

$$([K] - \omega_0^2 [M])\{\delta_0\} \sin(\omega_0 t + \varphi) = 0 \quad (4.48)$$

Ponieważ związek ten powinien być spełniony dla dowolnej chwili t , stąd:

$$([K] - \omega_0^2 [M]) \{\delta_0\} = 0 \quad (4.49)$$

Rozwiązanie tego równania polega [42] na obliczeniu następującego wyznacznika:

$$\det([K] - \omega_0^2 [M]) = 0 \quad (4.50)$$

którego pierwiastkami są częstości własne $\omega_{01} < \omega_{02} < \dots < \omega_{0n}$.

Rozwiązanie równania (4.50) można uzyskać przez znalezienie inwersji macierzy $[K]$ i pomnożenie jej przez obie strony równania (4.49)

$$[K]^{-1} [M] \{\delta_0\} = \frac{1}{\omega_0^2} \{\delta_0\} \quad (4.51)$$

Każdej częstości własnej ω_{0i} odpowiada wektor $\{\delta_0\}^i$ nazywany postacią i -tego drgania głównego. Składowe tego wektora określone są z dokładnością do stałego mnożnika, w związku z tym, aby uzyskać możliwość łatwego porównywania poszczególnych wektorów, przeprowadza się ich normalizację polegającą na ich odpowiednim przekształceniu. W tym celu wystarczy podzielić każdy wektor przez jeden jego wyraz, ale o jednakowym dla wszystkich wektorów wskaźniku. W ten sposób otrzymuje się macierz modalną układu drgającego $[W]$ daną wzorem (4.52).

Elementami macierzy modalnej są przemieszczenia konstrukcji znormalizowane w procesie drgań.

$$[W] = \begin{bmatrix} \delta_{o1}^{(1)} & \delta_{o1}^{(2)} & \dots & \delta_{o1}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{ok-1}^{(1)} & \delta_{ok-1}^{(2)} & \dots & \delta_{ok-1}^{(n)} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{on}^{(1)} & \delta_{on}^{(2)} & \dots & \delta_{on}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

4.9. Obliczenia częstości drgań z diagonalną macierzą mas

Zgodnie z przyjętymi wcześniej założeniami (punkt 4.2) kąt obrotu Θ_z w płaszczyźnie elementu przyjęty został jako wielkość fikcyjna, niezależna od pozostałych rodzajów przemieszczeń. Na tej podstawie, do macierzy sztywności wprowadzona została wielkość zastępczej sztywności K_{Θ_z} (rys. 4.5) odpowiadająca temu kątowi, i która dana jest wzorem (4.14). Jak wynika z pracy Zienkiewicza [90] wartość K_{Θ_z} jest zależna od parametru α przyjmowanego dowolnie (w szczególnym przypadku, kiedy zbiegające się w każdym węźle elementy nie są współpłaszczyznowe może być równa zero) i nie powinna mieć wpływu na rozwiązanie równań metody elementów skończonych.

Przeprowadzając własne obliczenia licznych przykładów autor stwierdził, że rzeczywiście rozwiązanie układu równań jest niezależne od wartości K_{Θ_z} , ale "dla zagadnień dotyczących statyki konstrukcji, natomiast sztywność ta ma znaczny wpływ

na wyniki obliczeń dotyczących zagadnień dynamiki, szczególnie w przypadku powłok o dużej krzywiznie.

Po wielu próbach mających na celu znalezienie sposobu uniknięcia tej niedogodności, zdecydowano się na wprowadzenie do obliczeń macierzy mas o strukturze diagonalnej, co całkowicie uniezależniło rozwiązania równań dynamiki od wprowadzonej zastępczej sztywności $K_{\theta z}$.

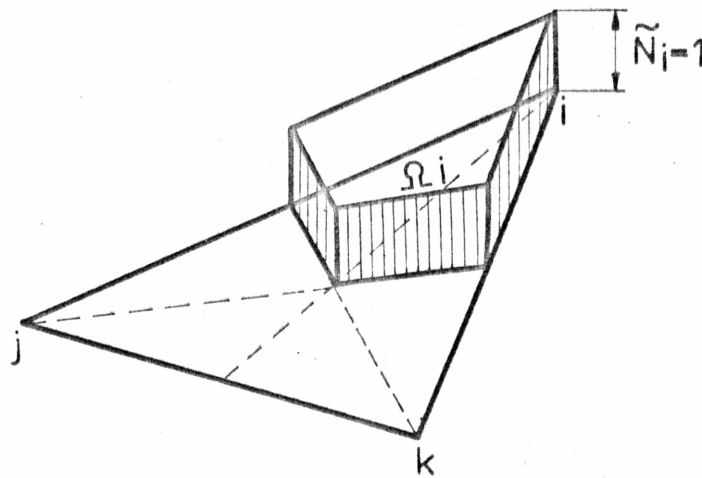
Utworzenie diagonalnej macierzy mas jest możliwe jeśli w zależności (4.36) przyjęte zostaną odpowiednie funkcje kształtu, opisujące przemieszczenia wewnątrz elementu w zależności od przemieszczeń węzłowych. Funkcje te mogą być stałe, gdyż w wyrażeniach (4.37) i (4.39) nie występuje różniczkowanie, ale muszą mieć taką postać, aby masa elementu była zachowana, jeżeli zbieżność rozwiązania (4.1) przy zagęszczeniu podziału na elementy, prowadzi do wyników poprawnych. Warunek zachowania masy zostanie zapewniony, gdy przyjęte funkcje kształtu spełniają będą następujące równanie [93]:

$$\sum_i N_i = 1 \quad (4.53)$$

stąd:
$$\rho \int_{\Omega} \sum_i N_i d\Omega = \rho \int_{\Omega} d\Omega$$

Przyjęto następujące, odcinkowo-stałe funkcje kształtu dla przemieszczeń u, v, w elementu powłoki, których ilustrację podano na rys. 4.11:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_i &= 1 \text{ w obszarze } \Omega_i \\ \tilde{N}_i &= 0 \text{ w pozostałym polu trójkąta} \end{aligned} \quad (4.54)$$



Rys.4.11. Odcinkowo stała funkcja kształtu węzła „i”.

Podstawiając (4.54) do (4.36) otrzymuje się wzory na obliczenie wyrazów macierzy mas elementu powłoki:

$$\int_{V^e} [N_i]^T \rho [N_j] dV = \int_{\Omega} [\tilde{N}_i]^T \rho [\tilde{N}_j] t d\Omega = \frac{\rho t_1 \Delta}{3} = \frac{W}{3} \quad (4.55)$$

Wyprowadzona z tych zależności diagonalna macierz mas dla węzła przyjmuje następującą postać (4.56)

$$[\tilde{M}_{ii}] = \frac{\rho t_1 \Delta}{3} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \Theta_{x_i} \\ \Theta_{y_i} \\ \Theta_{z_i} \end{matrix} \quad (4.56)$$

W podobny sposób przeprowadzono również diagonalizację macierzy mas elementu belkowego. Postać tej macierzy dana jest wzorem (4.57)

$$[M_{ii}] = \frac{\rho A l}{2} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & & \\ & & & & & 0 & & & & & \\ & & & & & & 0 & & & & \\ & & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots u_i \\ \dots v_i \\ \dots w_i \\ \dots \Theta_{x_i} \\ \dots \Theta_{y_i} \\ \dots \Theta_{z_i} \end{matrix} \quad (4.57)$$

Obie macierze po transformacji przedstawiają się jako macierze pięciodiagonalne, utworzone z bloków o wymiarach 3×3 położonych na głównej przekątnej.

4,10. Budowa programu na EMC

Przedstawiony opis zastosowania metody elementów skończonych do określenia drgań własnych konstrukcji, stał się podstawą do opracowania odpowiedniego algorytmu obliczeń, a następnie programu o nazwie PROMES. Program został ułożony w języku FORTRAN i służy do obliczania częstości i odpowiadających im postaci drgań własnych.

Program PROMES składa się z programu głównego i kilkunastu podprogramów, co sprawia, że ewentualne zmiany procedury są łatwe do przeprowadzenia. Organizacja programu przedstawiona jest na rysunku 4.12.

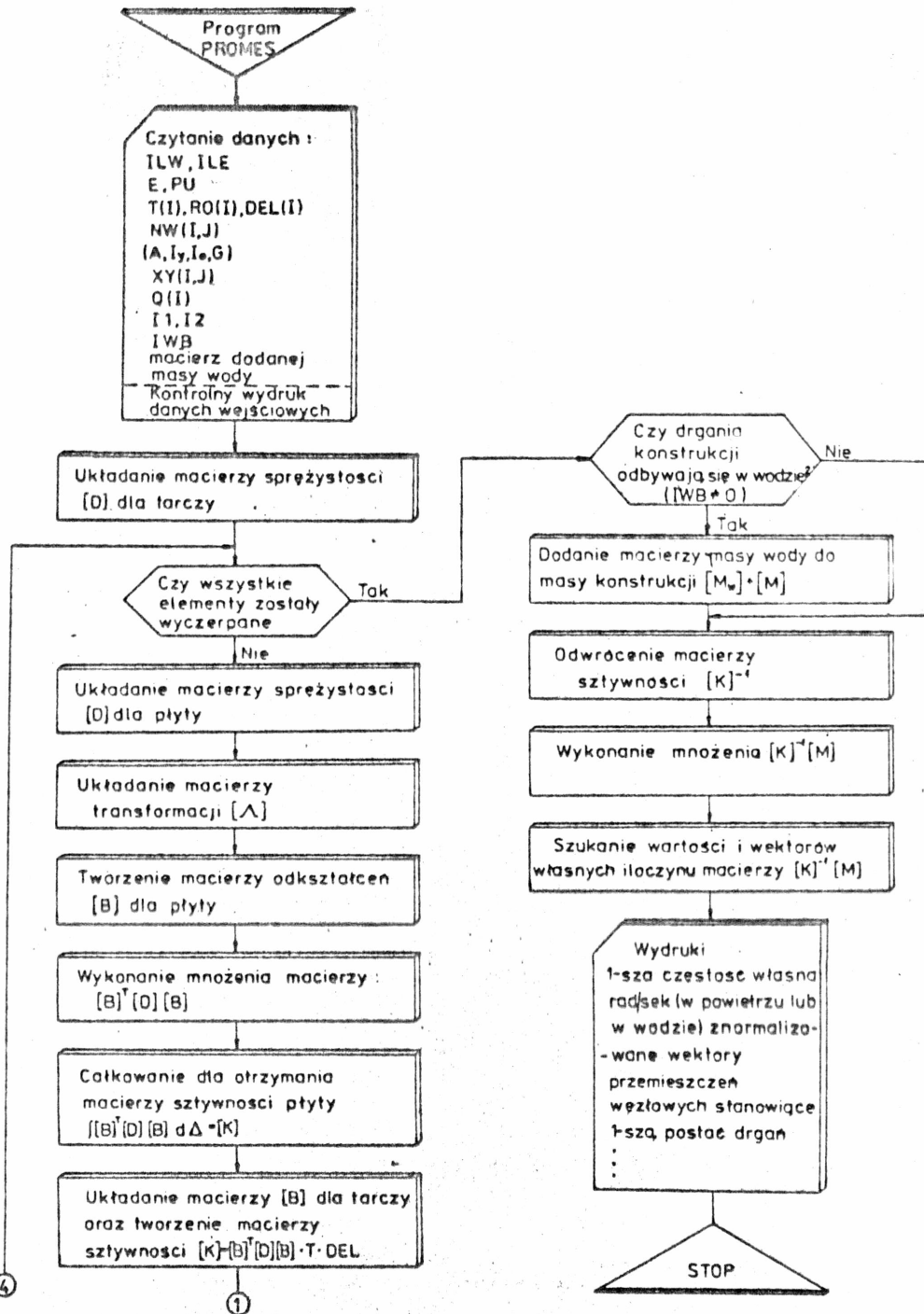
Jako dane do programu wprowadza się następujące liczby:

- ilość węzłów, ilość elementów - ILW, ILE,
- moduł sprężystości Younga, współczynnik Poissona - E, PU,
- kolejno dla każdego elementu: grubość, gęstość, pole powierzchni - T, RO, DEL,
- dla każdego elementu pięć liczb - NW, z których trzy pierwsze stanowią numery węzłów elementu, a dwie pozostałe są zerami, jeżeli na krawędzi elementu nie ma belki.

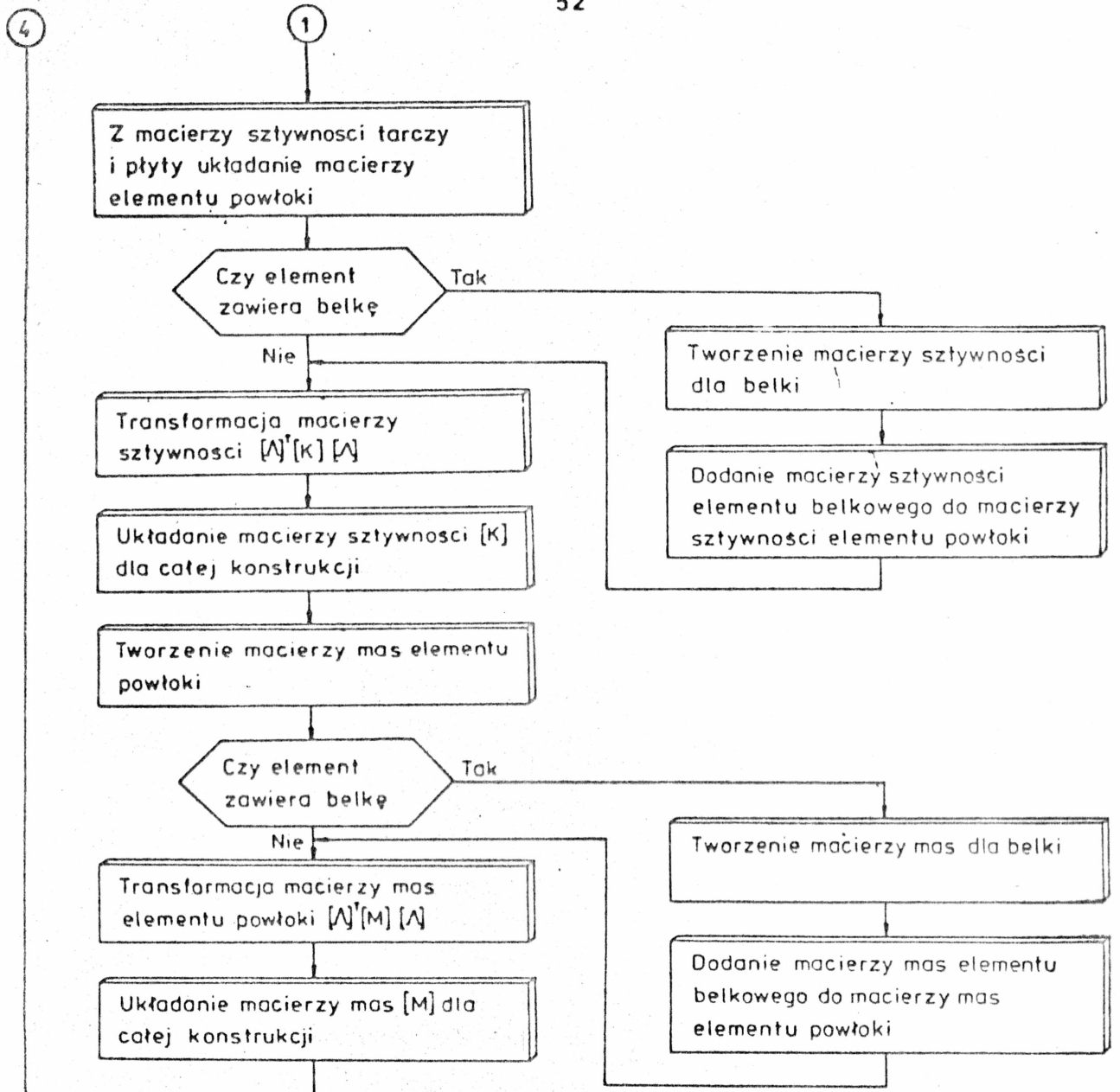
- Jeśli belka istnieje- liczby te są numerami węzłów, pomiędzy którymi belka przebiega. Dla każdej belki wczytuje się następujące dane: pole przekroju poprzecznego, moment bezwładności na zginanie, moment bezwładności na skręcanie, moduł sprężystości Kirchoffa,
- dla każdego węzła jego współrzędne x, y, z , w układzie globalnym,
 - numer węzła i numer stopnia swobody, który został unieruchomiony; stopnie swobody mają numery od 1 do 6 odpowiadające przemieszczeniom $u, v, w, \ominus x, \ominus y, \ominus z$,
 - wartość α dla określenia fikcyjnego kąta skręcania (ze wzoru (4.14),
 - numer węzła i numer stopnia swobody względem którego odbywać się będzie normalizacja wektorów własnych.

Wszystkie dane należy wprowadzić w jednolitym układzie jednostek np. układzie SI.

W trakcie wykonywania obliczeń, program analizuje kolejno każdy element, układając dla niego macierz sztywności i macierz mas, przeprowadza transformację oraz pamięta utworzone macierze w postaci bloków. Pamiętane są tylko bloki niezerowe, odpowiadające incydentnym węzłom oraz ze względu na symetrię, bloki górnego trójkąta macierzy. W osobnej macierzy pamiętane są adresy (wskaźniki) wspomnianych bloków, potrzebne do rozmieszczenia poszczególnych bloków w całej macierzy sztywności. Oczywiście pamiętany jest tylko górny trójkąt macierzy wskaźnikowej. Taka organizacja programu pozwoliła na przechowywanie w pamięci operacyjnej stosunkowo dużych macierzy, wymagała ona jednak odręb-



Rys. 4.12. Uproszczony schemat blokowy programu PROMES.



Rys.4.12. c.d.

nego rozwiązania, które zostało dokonane przez autora i opisane w publikacji [40].

Następnym etapem obliczeń jest odwrócenie macierzy sztywności metodą Gaussa-Jordana. Po odwróceniu następuje pomnożenie inwersji tej macierzy przez macierz mas i znalezienie kilku podstawowych częstości i postaci drgań własnych metodą iteracyjną.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że przy rozwiązywaniu omawianego zagadnienia trzeba uwzględnić warunki brzegowe związane z podporami, którymi są łożyska i napęd kłapy. Uwzględnienie warunków brzegowych polega na eliminowaniu z układu równań wyrazów zawierających zerowe przemieszczenia węzła konstrukcji, co jest równoznaczne z opuszczeniem w macierzach sztywności i mas wiersza oraz kolumny odpowiadających temu zerowemu przemieszczeniu. Powoduje to zmniejszenie wymiarów macierzy komplikujące algorytm wykonywanych obliczeń. Aby tego uniknąć stosuje się mnożenie odpowiedniego wyrazu na przekątnej macierzy sztywności przez dużą liczbę. Na przykład Zienkiewicz w swojej monografii proponuje stosować liczbę równą 10^8 . Autor zastosował odmienną metodę eliminacji zbędnych równań polegającą na przeglądaniu binarnego wektora $\{q_i\}$ zdefiniowanego następująco:

$$\{q_i\} = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } i\text{-te równanie ma być eliminowane} \\ 1 & \text{jeżeli } i\text{-te równanie należy do układu} \\ & \text{równań} \end{cases} \quad (4.58)$$

Opisany sposób eliminacji zmniejsza czas pracy komputera przez pomijanie operacji trywialnych, które nie mają wpływu na rezultat obliczeń.

W wyniku realizacji programu otrzymuje się:

- kontrolny wydruk danych wejściowych,

- dla każdej wartości własnej częstość drgań oraz znormalizowane przemieszczenia węzłów U, V, W, TX, TY, TZ.

Dla sprawdzenia poprawności przedstawionego algorytmu oraz zilustrowania funkcjonowania opracowanego programu wykonano obliczenia częstości i postaci drgań własnych dwóch zamknięć klapowych: modelu klapy oraz istniejącej w naturze konstrukcji. Opis tych zamknięć oraz wyniki obliczeń numerycznych przedstawiono w rozdziale 6.

5. OKREŚLENIE DRGAŃ WŁASNYCH ZAMKNIĘCIA ZANURZONEGO W WODZIE

5.1. Uwagi ogólne

W niniejszym rozdziale głównym przedmiotem rozważań jest sposób obliczenia dodanej masy wody, której znajomość pozwala na określenie częstości i postaci drgań własnych konstrukcji w wodzie.

W piśmiennictwie polskim niewiele jest informacji na temat sposobów obliczania dodanej masy wody. Jedyną znaną autorowi pozycją jest opublikowana niedawno praca Sobierajskiego [80], w której przedstawiono sposób obliczenia tej masy w przypadku drgań sztywnej, pionowej budowli, posadowionej na sprężystym podłożu i obciążonej wodą.

W literaturze obcojęzycznej zagadnieniem masy dodanej jako pierwsi zajmowali się Westergard [90], a następnie Lamb [46] badając przypadek poruszającej się pod wpływem trzęsienia ziemi pionowej ściany z przylegającą do niej wodą. Podobne doświadczenia przeprowadził Allersma [3] obliczając masę dodaną dla ściany pionowej lub pochylonej, otoczonej z jednej lub obu stron wodą. W rozwiązaniu teoretycznym zagadnienie to sprowadzali oni do układu drgającego o jednym stopniu swobody, a masa dodana była określona wzorem:

$$m_w = \eta \rho_w b d^2 \quad (5.1)$$

gdzie: η - współczynnik proporcjonalności wyznaczany na podstawie badań

- ρ_w - gęstość wody
- b - długość ściany
- d - głębokość wody.

Następne prace, prowadzone przez Kruppę [43] i innych dotyczyły głównie zagadnienia drgań kadłubów okrętów, przy czym analityczne obliczenia masy m_w różniły się od poprzednich sposobem określenia współczynnika η , który przedstawiony został w postaci iloczynu dwóch wartości C i J, zależnych przede wszystkim od formy drgań konstrukcji kadłuba. Sam statek traktowany był jako ciało sprężyste o 2÷3 stopniach swobody. W ostatnich latach ukazały się opracowania, w których proponuje się zastosowanie także metod numerycznych do obliczenia dodanej masy wody w zagadnieniach drgań kadłubów statków. Są to: metoda całek brzegowych opisana m.in. przez Orsero [57] oraz metoda elementów skończonych, której możliwości stosowania sygnalizują Orsero [57], Morice [49], Kruszewski [44] i Ando [4]. Analityczne rozwiązanie problemu drgań wywołanych trzęsieniem ziemi w przypadku drgań zapór ciężkich, obciążonych wodą podaje Chopra [11,12], a zastosowanie MES do obliczania masy dodanej w zagadnieniach drgań zapór łukowych proponują Zienkiewicz [92] i Tahbildar [85].

Z uwagi na to, że obliczenia drgań własnych konstrukcji kłapy soczewkowej zostały przeprowadzone w niniejszej pracy w oparciu o MES, do obliczenia masy wody związanej z konstrukcją w procesie drgań, autor wybrał również tę metodę, przedstawiając jej zarysy na XX Kongresie IAHR [39].

5.2. Podstawowe równania opisujące wzajemne oddziaływanie konstrukcji i wody

Jak wykazały doświadczenia [3] dodana masa wody może kilkakrotnie przekraczać masę konstrukcji, co powoduje znaczne ob-

niżenie częstości drgań powstałego układu. Natomiast wielkość tej masy zależy od gęstości cieczy, częstości i formy drgań oraz geometrii zamknięcia zwanego dalej brzegiem ruchomym, poziomemu zwierciadła wody oraz kształtu pozostałych brzegów. Wyznaczenie masy dodanej, konieczne do zbadania częstości drgań konstrukcji w wodzie, nie może być oparte o metody analityczne, gdyż te nie uwzględniają wszystkich wymienionych czynników. Z tych samych względów nie można obliczać masy wody tylko dla obszaru o jednostkowej szerokości, tzn. jako zagadnienie dwuwymiarowe. Metodą, która umożliwia spełnienie tych wszystkich wymogów jest metoda elementów skończonych.

Obliczenie masy dodanej z zastosowaniem MES odbywa się przez połączenie powstałego w wodzie ciśnienia z ruchem drgającym kłapy i wymaga spełnienia pewnych warunków, które można sformułować następująco:

1. Ciecz pozostaje w spoczynku i jest ograniczona od góry przez powierzchnię swobodną, na której ciśnienie jest równe zero, dno, oraz ściany boczne kanału. Interesuje nas tylko ciśnienie powstałe wskutek ruchu kłapy stanowiącej w tym przypadku brzeg ruchomy. Oznacza to, że wpływ sił grawitacyjnych zostaje pominięty.
2. Medium jest cieczą jednorodną, nieściśliwą i nielepką. Ponieważ rozpatrujemy zachowanie się konstrukcji w wodzie, to warunek jednorodności jest spełniony; również siły lepkości są do pominięcia wobec wielokrotnie przekraczającego je ciśnienia. Niemniej zakłada się, że na styku z ruchomym brzegiem ciecz posiada tą samą prędkość co poruszająca się konstrukcja. Warunek ten pozwala na sprzężenie równań ruchu konstrukcji i cieczy. Ściśliwość

cieczy należy uwzględnić w tych zagadnieniach, w których brzeg ograniczający obszar cieczy znajduje się w niewielkiej odległości od konstrukcji i może to być przyczyną powstania fali stojącej ciśnienia. Z uwagi na fakt, że w rozpatrywanym przez autora przypadku obszar cieczy był dostatecznie duży, aby rozchodząca się fala ciśnienia zanikała (co zostało wykazane w punkcie 5.3) pominięcie ścisłości jest w pełni uzasadnione.

3. Konstrukcja drga z wysoką częstotliwością i małą amplitudą, co powoduje, że na powierzchni cieczy nie występuje falowanie. Zostało to stwierdzone na podstawie przeprowadzonych badań doświadczalnych i obserwacji. Tym samym spełniony zostaje warunek swobodnej powierzchni cieczy.

Takie same założenia przyjęli w swoich opracowaniach Zienkiewicz [84], Tahbildar [85], Ando [4].

Ogólne równanie opisujące rozkład ciśnienia w cieczy, spełniające powyższe założenia, można wyprowadzić z równania Eulera (5.2) i równania ciągłości (5.3):

$$\frac{dv}{dt} = F - \frac{1}{\rho_0} \text{grad } p \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0 \quad (5.3)$$

przy czym przez pominięcie sił masowych $F = 0$ i ścisłości cieczy $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ i $\rho = \rho_0 = \text{const}$ równania te redukują się do postaci:

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{1}{\rho_0} \text{grad } p \quad (5.4)$$

$$\operatorname{div} v = 0 \quad (5.5)$$

Po obliczeniu dywergencji równania (5.4) i zróźniczkowaniu równania (5.5) po czasie otrzymuje się układ równań, które można odjąć stronami, co w efekcie prowadzi do równania Laplace'a względem ciśnienia p :

$$\Delta p = 0 \quad (5.6)$$

Analogiczny wynik można otrzymać zakładając, że zmiany ciśnienia w cieczy mają charakter fali akustycznej, której równanie przedstawia się następująco:

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \int_0 \operatorname{div} F \quad (5.7)$$

c - jest prędkością fali akustycznej w rozpatrywanym ośrodku obliczoną ze wzoru:

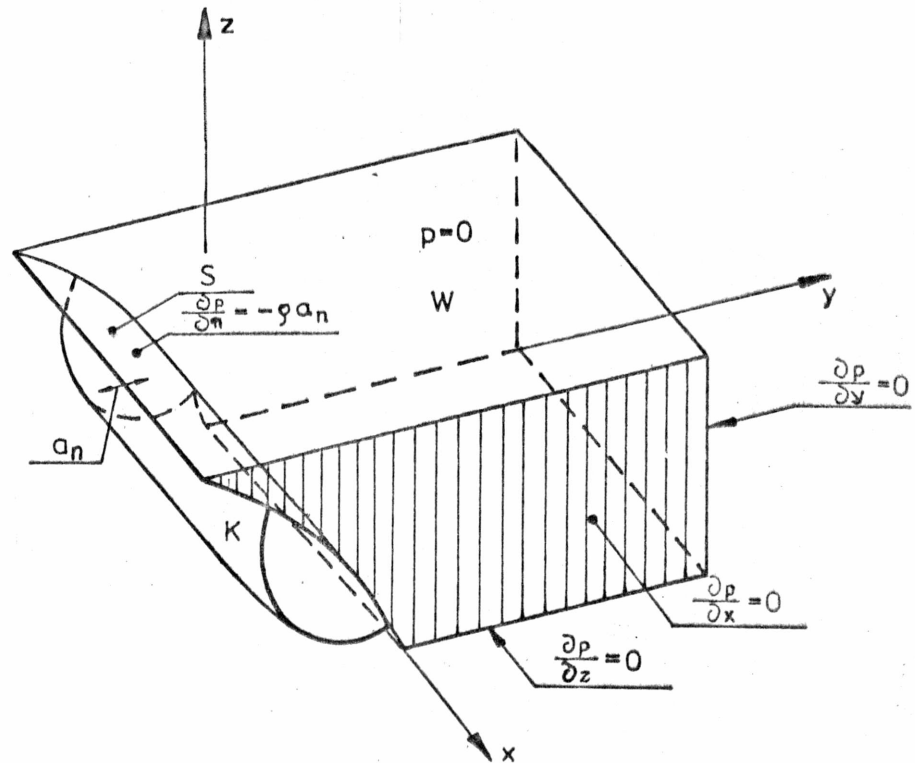
$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} \quad (5.8)$$

K - moduł ściśliwości (moduł Helmholtza)

ρ_0 - gęstość średnia cieczy.

We wzorach (5.7), (5.8), zgodnie z początkowymi założeniami, należy przyjąć $F = 0$ i $K = \infty$ co prowadzi do równania Laplace'a $\Delta p = 0$.

Na rys. 5.1 pokazana jest konstrukcja K z przylegającą do niej wodą W . Powierzchnia styku kłapy i wody oznaczona jest przez S .



Rys.5.1: Warunki brzegowe dla wody.

Równanie Laplace'a (5.6) musi być spełnione w obszarze W oraz funkcja $p(x,y,z,t)$ musi spełniać następujące zagadnienie brzegowe:

$p = 0$ na powierzchni swobodnej wody

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ na brzegach stacjonarnych} \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho a_n \text{ na brzegu ruchomym S}$$

gdzie a_n - przyspieszenie konstrukcji.

Rozważmy w obszarze W funkcjonal V o następującej postaci:

$$V(p) = \frac{1}{2} \iiint_W (\nabla p)^2 dW - \int \iint_S p a_n dS \quad (5.10)$$

Można udowodnić [78], że dla funkcji $p(x,y,z,t)$, dla której funkcjonal przyjmuje wartość ekstremalną, równanie (5.6) jest równaniem Eulera i funkcja $p(x,y,z,t)$ spełnia warunki brzegowe (5.9). Funkcjonał V osiąga ekstremum w przypadku zerowania się jego pierwszej wariacji δV

$$\delta V = \iiint_W \Delta p \delta p dW - \int \iint_S \delta p a_n dS \quad (5.11)$$

Jeżeli do tak sformułowanego zagadnienia zastosować metodologię elementów skończonych, to funkcja $p(x,y,z,t)$ musi być określona wewnątrz każdego elementu w zależności od wartości ciśnienia w węzłach:

$$p = [N_i, N_j, \dots, N_r] \begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \\ \vdots \\ p_r \end{Bmatrix} = [N] \{p\}^e \quad (5.12)$$

Wstawiając p do równania (5.10) można dokonać przybliżonej minimalizacji funkcjonału [90] obliczając pochodną $\frac{\partial V}{\partial p_i}$ jako sumę po wszystkich elementach. Równanie to w zapisie MES przedstawia się dla elementu następująco:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^e}{\partial p_i} = & \iiint_{W^e} \left[\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \right] dW - \\ & - \int \iint_{S^e} \frac{\partial p}{\partial p_i} a_n dS = 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Na podstawie (5.12) można napisać, że:

$$\frac{\partial P}{\partial p_i} = N_i \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [N] \{p\}^e = \left[\frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial N_j}{\partial \mathbf{x}}, \dots, \frac{\partial N_r}{\partial \mathbf{x}} \right] \{p\}^e$$

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}} \right) = \frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{x}}$$

Wstawiając (5.14) do (5.13) otrzymuje się równanie macierzowe, które dla całego układu przedstawić można wzorem:

$$[H] \{p\} + \{F\} = 0 \quad (5.15)$$

oraz na podstawie (5.13)

$$H_{ij}^e = \iiint_{W^e} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (5.16)$$

Siłę $\{F\}$ w równaniu (5.15) można zdefiniować w następujący sposób:

$$F_i^e = - \int \iint_{S^e} N_i a_n dS \quad (5.17)$$

co odpowiada warunkowi ruchomego brzegu, lub:

$$\{F\}^e = - \int \iint_{S^e} [N]^T a_n dS \quad (5.18)$$

Przyspieszenie elementu konstrukcji a_n można przedstawić w postaci kombinacji wektorów normalnych przemieszczeń węzłowych $\{\hat{\delta}\}$:

$$a_n = \frac{\partial^2}{\partial t^2} ([\hat{N}] \{\hat{\delta}\}) \quad (5.19)$$

gdzie: $[\hat{N}]$ są odpowiednimi funkcjami kształtu. W związku z tym wzór (5.18) zapisać można następująco:

$$\{F\}^e = - \rho \iint_{S^e} [N]^T [\hat{N}] dS \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\hat{\delta}\} = - \rho [L] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\hat{\delta}\} \quad (5.20)$$

Równanie (5.15) przedstawiające zależność pomiędzy przyspieszeniem konstrukcji a ciśnieniem powstałym w cieczy można już zapisać w jego ostatecznej postaci:

$$[H]\{p\} = \rho [L] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\hat{\delta}\} \quad (5.21)$$

Wszystkie dotychczasowe rozważania dotyczyły zagadnienia, w którym wektory przemieszczeń węzłów konstrukcji są prostopadłe do płaszczyzny elementu. W ogólnym przypadku tak nie jest, ponieważ kierunki osi układu lokalnego współrzędnych nie muszą się pokrywać z kierunkami osi w układzie globalnym, w którym obliczone są wektory $\{\delta\}$. Należy więc dokonać odpowiedniej transformacji układu współrzędnych podobnej jak opisana w punkcie 4.7. Macierz tej transformacji zawierać będzie odpowiednio kosinusy kierunkowe i zera, a równanie (5.21) przybierze następującą postać:

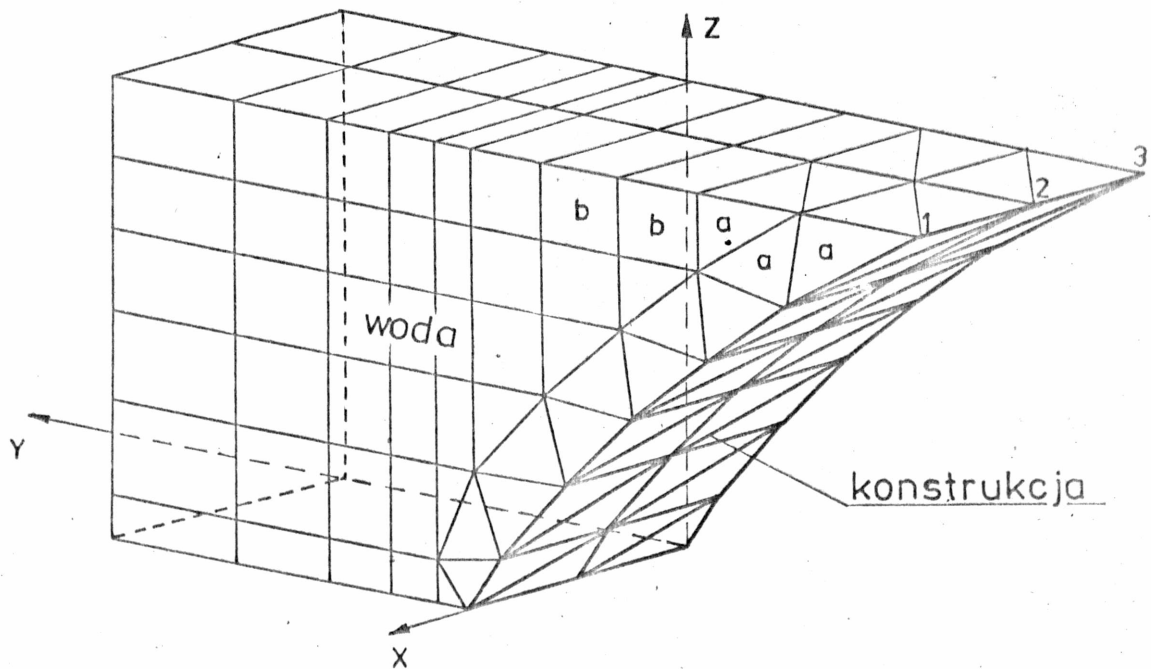
$$[H]\{p\} = \rho [L][T] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\delta\} \quad (5.22)$$

5.3. Wybór rodzajów elementów i funkcji opisujących rozkład ciśnienia w wodzie

Istnieją dwa zasadnicze typy elementów za pomocą których można aproksymować obszar wody otaczający konstrukcję. Są to czworościany lub sześciiany (prostokątne).

Elementy czworościenne są najprostszymi elementami objętościowymi, które dają wyniki z dobrym przybliżeniem. Nie są one jednak najwygodniejsze w stosowaniu, ponieważ duża ich liczba przy zadanej siatce węzłów znacznie wydłuża czas obliczeń, stwarza duże trudności z ich rozróżnieniem i opisaniem w procesie wprowadzenia danych. Elementy sześciennie są pod tym względem znacznie korzystniejsze i również dają dobre wyniki obliczeń [90]. W proponowanej metodzie autor zastosował elementy w postaci graniastolupów o podstawie trójkątnej oraz elementy czworościenne (rys. 5.2), ponieważ rozpatrywana konstrukcja kłapy soczewkowej jest dyskretyzowana elementami trójkątnymi i elementy konstrukcji oraz wody muszą do siebie na powierzchni S przylegać. Dzięki temu transformacja macierzy $[L]$ z równania (5.21) może być otrzymana wprost z macierzy transformacji $[\Lambda]$ opisanej w punkcie 4.7, co znacznie upraszcza obliczenia.

Jeśli założyć, że w obrębie elementu, pomiędzy dwoma sąsiednimi węzłami zmiana ciśnienia jest liniowa, to funkcje kształtu dla danego elementu również muszą być wyrażone wielomianem liniowym w zależności od x, y, z . Funkcje te będą więc spełniać kryterium ciągłości na granicy elementu i mieć stałą wartość pierwszej pochodnej.



Rys.5.2. Sposób podziału wody na elementy czorościenne (a) i graniastosłupowe (b).

Funkcje kształtu dla elementów czworosciennych (rys. 5.3) wyprowadza się podobnie jak dla płaskich trójkątów, stosując tym razem współrzędne objętościowe [91]. Postać tych funkcji jest następująca:

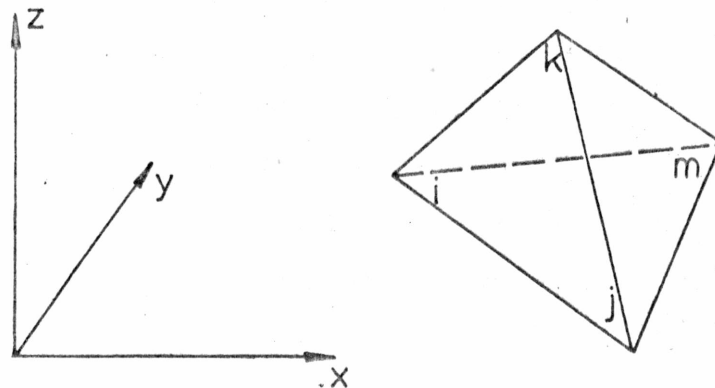
$$L_i = (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) / 6 W^e \quad (5.23)$$

a współczynniki w tym wzorze są określone przez wyznaczniki:

$$\begin{aligned}
 a_i &= \begin{bmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_k & y_k & z_k \end{bmatrix} \\
 b_i &= \begin{bmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_k & z_k \end{bmatrix} \\
 c_i &= \begin{bmatrix} 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_m & z_m \\ 1 & x_k & z_k \end{bmatrix} \\
 d_i &= \begin{bmatrix} 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \\
 6W^e &= \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_k & y_k & z_k \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Równanie (5.12) można zapisać teraz w postaci:

$$p = [N]\{p_i\} = [L_i p_i + L_j p_j + L_k p_k + L_m p_m] / 6W^e \tag{5.25}$$

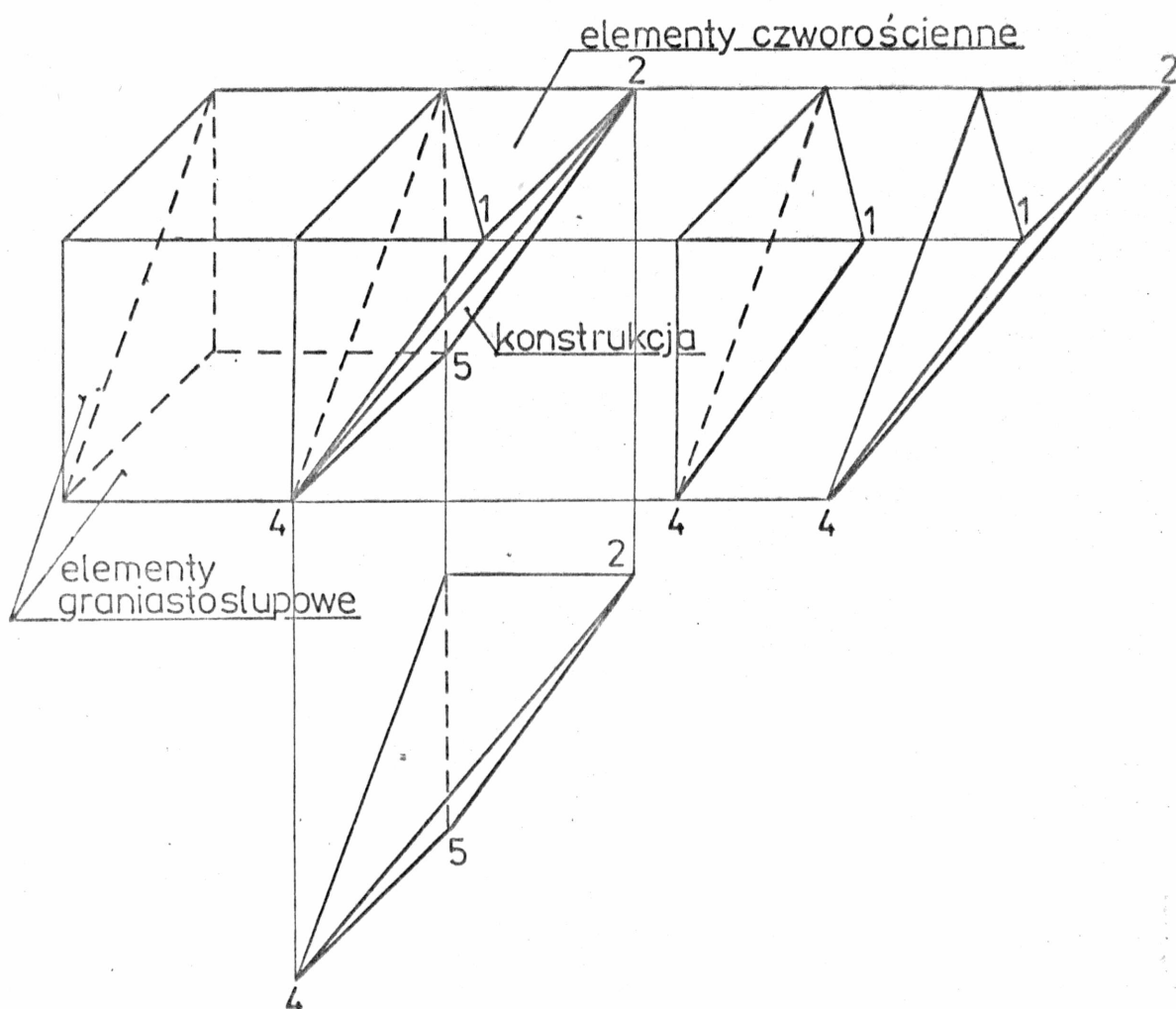


Rys.5.3. Element czworoscienny i sposób numeracji jego węzłów.

Po wstawieniu wartości funkcji kształtu $[N]$ do równania (5.16) otrzymuje się wzór, na podstawie którego można określić elementy macierzy ciśnienia w zależności od współrzędnych x, y, z węzłów danego elementu czworosciennego:

$$H_{rs}^e = (b_r b_s + c_r c_s + d_r d_s) / 36W^e \quad (5.24)$$

Wzory (5.24) są słuszne, jeśli trzy pierwsze węzły numerowane są lewoskrętnie, a czwarty leży z tyłu poza nimi. Rysunek 5.4 przedstawia sposób połączenia elementów konstrukcji leżących na brzegu S z trzema elementami czworosciennymi i dalej, z dwoma elementami graniastosłupowymi wraz z wyrzuceniem elementów czworosciennych.

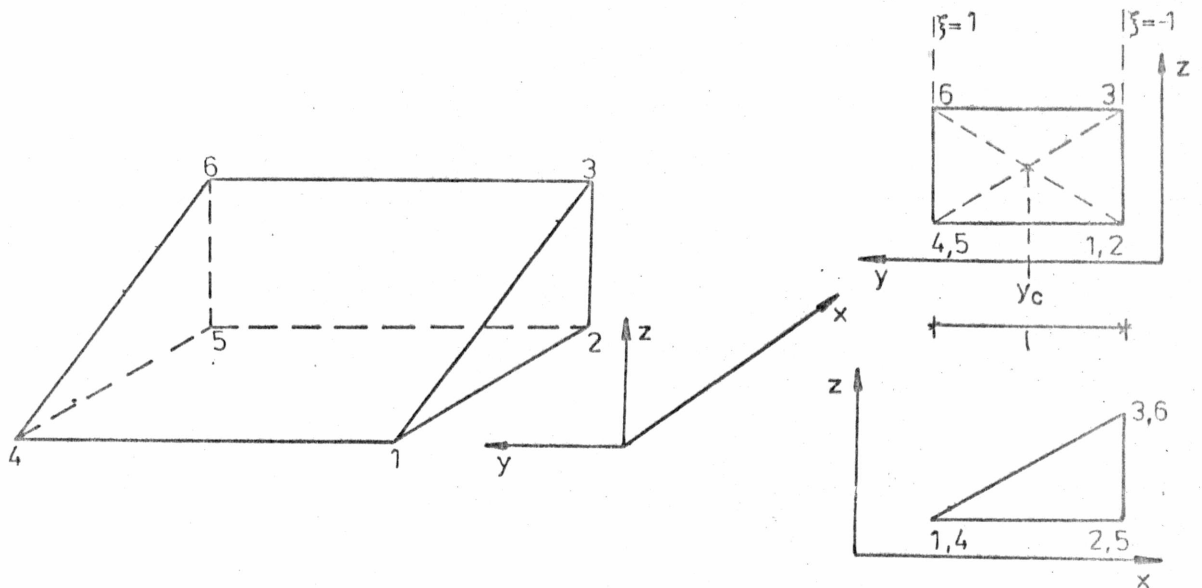


Rys.5.4. Połączenie elementów czworościennych i graniastosłupowych.

Drugą grupę elementów zastosowanych przez autora (rys.5.5) stanowią graniastosłupy o podstawie trójkątnej. Również i w tym przypadku jest wymagane aby elementy były pierwszego rzędu (liniowe); dokonano więc połączenia funkcji kształtu L_i jak dla prostego trójkąta i liniowej funkcji dla prostokąta z rodziny serendipowskiej [90]:

$$N_i = \frac{1}{2} L_i \left(1 + \xi_i \frac{2(y-y_c)}{l} \right) \quad (5.27)$$

oraz:
$$p = [N]\{p_i\} = [N_i \ N_j \ N_k \ N_l \ N_m \ N_n] \begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \\ p_k \\ p_l \\ p_m \\ p_n \end{Bmatrix} \quad (5.28)$$



Rys. 5.5. Element wody w postaci graniastostupa.

Utworzenie macierzy ciśnienia H_{ij} ze wzoru (5.16) wymaga zróżniczkowania funkcji kształtu po x, y i z :

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{1}{4\Delta} b_i \left(1 + \xi_i \frac{2(y-y_c)}{l} \right)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{L_i \xi_i}{l}$$

(5.29)

$$\frac{\partial N_i}{\partial z} = \frac{1}{4\Delta} c_i \left(1 + \xi_i \frac{2(y-y_c)}{l} \right)$$

Po wstawieniu (5.29) do równania (5.16) i wykonaniu niezbędnego dla elementu całkowania otrzymuje się wzory na obliczenie macierzy $[H]$

$$H_{ij}^e = \iiint_{W^e} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dW =$$

$$\begin{aligned}
&= \iiint_{w^e} \left\{ \frac{1}{16\Delta^2} (b_i b_j + c_i c_j) \left[1 + \xi_j \frac{2(y-y_c)}{1} + \xi_i \frac{2(y-y_c)}{1} + \right. \right. \\
&+ \left. \left. \xi_i \xi_j \frac{4(y-y_c)^2}{1^2} \right] + \frac{L_i L_j}{1^2} \xi_i \xi_j \right\} dx dy dz = \\
&= \frac{b_i b_j + c_i c_j}{16\Delta} \int_{y_1}^{y_2} \left[1 + (\xi_i + \xi_j) \frac{2(y-y_c)}{1} + \xi_i \xi_j \frac{4(y-y_c)^2}{1^2} \right] dy + \\
&+ \frac{\xi_i \xi_j}{1} \int_{\Delta} L_i L_j dx dz = \frac{b_i b_j + c_i c_j}{16} \frac{1}{\Delta} \left(1 + \frac{1}{3} \xi_i \xi_j \right) + \frac{\xi_i \xi_j \Delta}{12} \frac{1}{1} \\
& \hspace{20em} (5.30) \\
H_{ii}^e &= \frac{b_i^2 + c_i^2}{12} \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{6} \frac{\Delta}{1} \\
& \hspace{20em} (5.31)
\end{aligned}$$

Sposób tworzenia pełnej macierzy ciśnienia polega na sumowaniu macierzy poszczególnych elementów niezależnie od ich typu.

Wartość $\{F\}$ w równaniu (5.20) można określić po dokonaniu wyboru funkcji $[N]$ opisującej zmianę ciśnienia pomiędzy węzłami leżącymi na powierzchni S oraz funkcji $[\hat{N}]$ określającej zmianę przyspieszenia w obrębie elementu kłapy. Autor przyjął liniową postać obu tych funkcji $N_i = L_i = (a_i + b_i x + c_i z)/2\Delta$. Stąd $[L]$ można wyrazić następującymi równaniami całkowymi:

$$L_{ij}^e = \iint_{S^e} L_i L_j dx dz \quad (5.32)$$

lub dla całego elementu:

$$[L]^e = \iint_{S^e} \left(\begin{Bmatrix} L_i \\ L_j \\ L_k \end{Bmatrix} \{L_i \ L_j \ L_k\} \right) dx dz = \frac{\Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

Przy obliczaniu $[L]$ skorzystano ze wzoru (4.24).

Przechodząc do sposobu wyznaczania ciśnienia w wodzie należy podkreślić, że będzie to ciśnienie wywołane ruchem klapy i jego określenie będzie możliwe, gdy dane są macierze $[H]$ i $[L]$ oraz macierz modalna układu drgającego, czyli wektory przemieszczeń $\{\delta\}$. Wtedy ciśnienie można obliczyć rozwiązując następujące macierzowe równanie, wynikające ze wzoru (5.21).

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ \emptyset \end{Bmatrix} \quad (5.34)$$

Indeksem 1 w tym równaniu oznaczone są węzły wspólne dla wody i konstrukcji a indeksem 2 - węzły należące do obszaru W. Siła $\{F\}$ w tym równaniu (5.34) określona jest wzorami (5.20) i (5.22). Równanie to można zapisać w postaci rozwiniętej:

$$\begin{aligned} [H_{11}]\{p_1\} + [H_{12}]\{p_2\} &= \{F\} & a) \\ [H_{21}]\{p_1\} + [H_{22}]\{p_2\} &= 0 & b) \end{aligned} \quad (5.35)$$

W układzie równań (5.35) należy wyznaczyć ciśnienie $\{p_2\}$ z wiersza b) i podstawić do wiersza a), otrzymuje się wówczas następujące wyrażenia:

$$[H_{11}^{\bar{x}}]\{p_1\} = \{F\} \quad (5.36)$$

$$[H_{11}^{\bar{x}}] = [H_{11}] - [H_{12}][H_{22}]^{-1}[H_{21}] \quad (5.37)$$

Obliczenie wartości $\{p_1\}$ polega na rozwiązaniu równania (5.36) aby następnie można było policzyć $\{p_2\}$ ze wzoru:

$$\{p_2\} = -[H_{22}]^{-1}[H_{21}]\{p_1\} \quad (5.38)$$

Gdy przemieszczenia $\{\delta_0\}$ są znormalizowane, jak w przypadku obliczeń drgań własnych (punkt 4.8), wówczas można wyznaczyć jedynie ciśnienie znormalizowane $\{\bar{p}\}$:

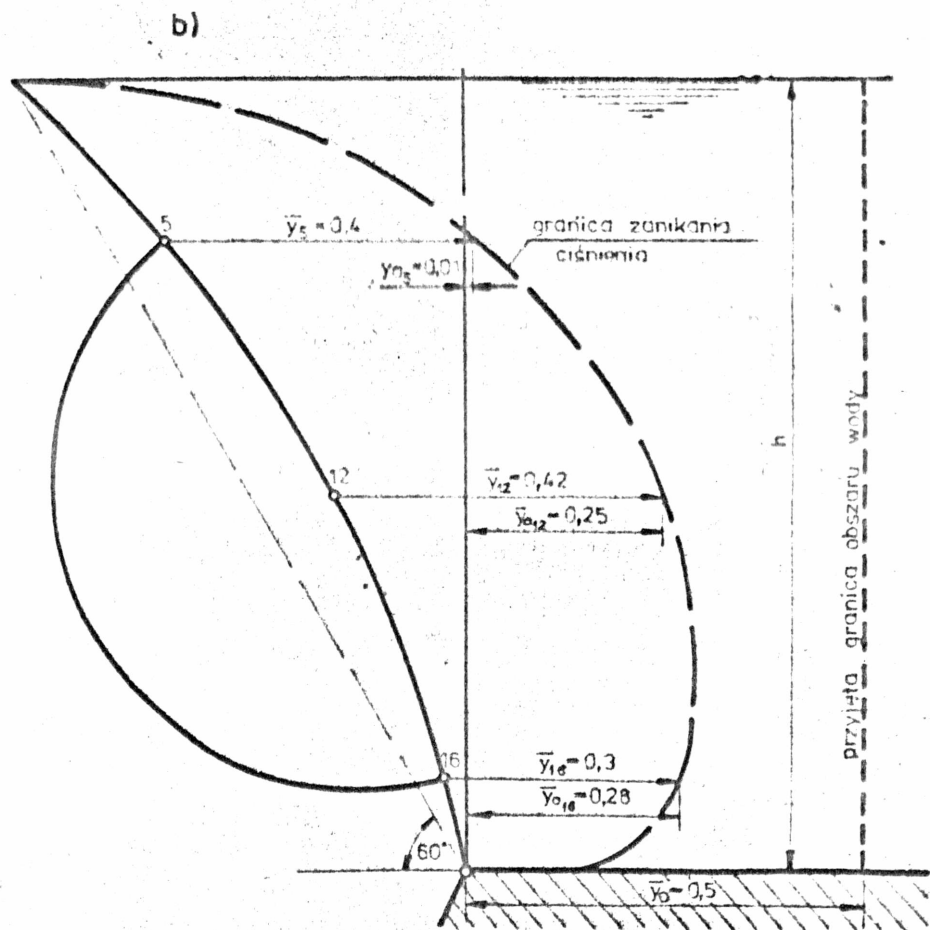
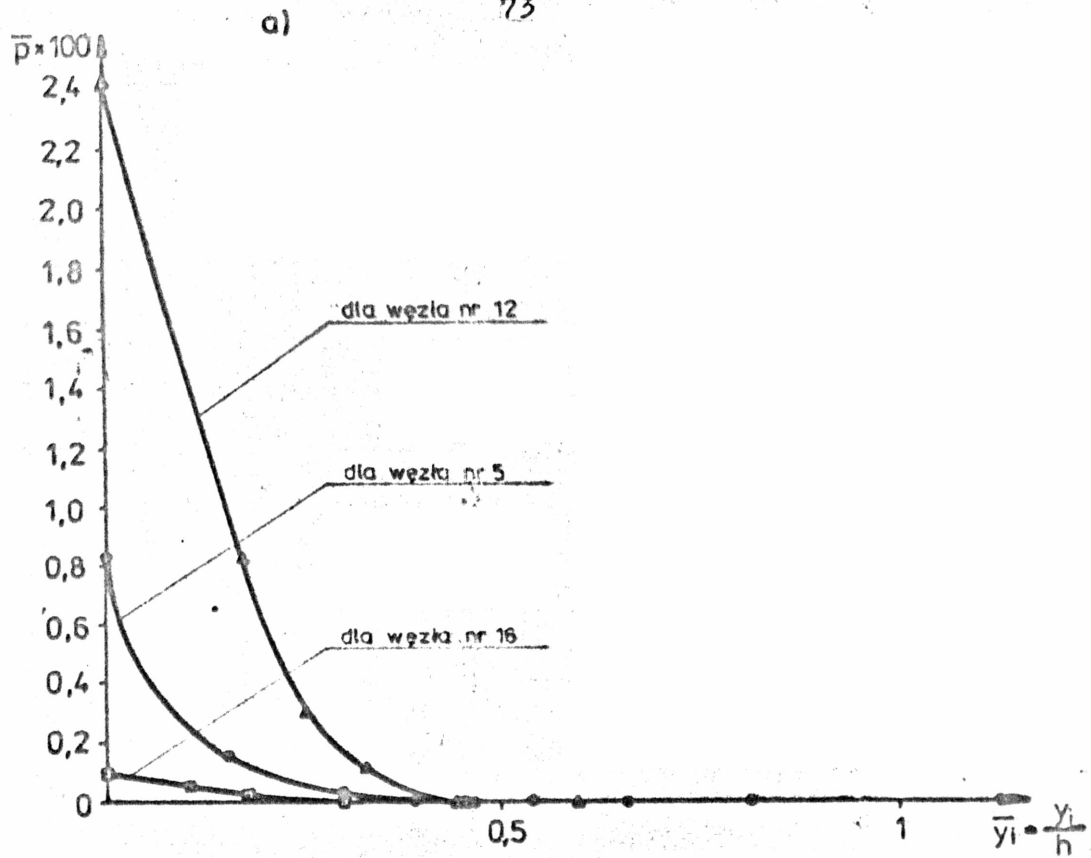
$$\{\bar{p}\} = \{p\} / \rho \{\delta_0\} \omega^2 b \quad (5.39)$$

gdzie: b – charakterystyczny wymiar geometryczny, np. długość klapy

ω – częstość drgań zamknięcia w wodzie.

Obliczenie masy dodanej wymaga podzielenia obszaru wody na skończone elementy, przy czym obszar ten powinien mieć wyraźnie określoną granicę, według założeń omówionych w punkcie 4.2. Jako granicę uznano linię łączącą punkty, w których zanika ciśnienie wywołane ruchem klapy. Dla jej wyznaczenia obliczono ciśnienia $\{p_1\}$ i $\{p_2\}$ w obszarze wody, którego ograniczenie przyjmowano wstępnie w postaci pionowej ściany, w odległościach 0,5, 1,5, 2,5 głębokości wody od punktu obrotu klapy. Ponieważ otrzymane wyniki różniły się między sobą o wartość mniejszą od 1%, w dalszych obliczeniach przyjęto pionową ścianą usytuowaną w odległości równej 0,5 głębokości wody od osi obrotu zamknięcia, jako właściwą granicę obszaru wody, uwzględnioną w obliczeniach masy dodanej. Wyniki obliczeń ilustruje rysunek 5.6. Przedstawiono na nim (rys. 5.6a) krzywe zmiany ciśnienia w wodzie dla trzech węzłów konstrukcji oraz (rys. 5.6b) granicę zanikania ciśnienia powstałą przez połączenie punktów, w których ciśnienie, mierzone poziomo od węzłów klapy przyjmowało wartość bliską zero.

Biorąc pod uwagę, że położenie granicy zanikania ciśnienia będzie różne dla różnych położów klapy i poziomów zwierciadła wody, wprowadzono jako miarę odległości tej granicy wartość:



Rys.5.6 a.) Zależność ciśnienia od odległości od zamknięcia.
 b.) Granica zanikania ciśnienia.

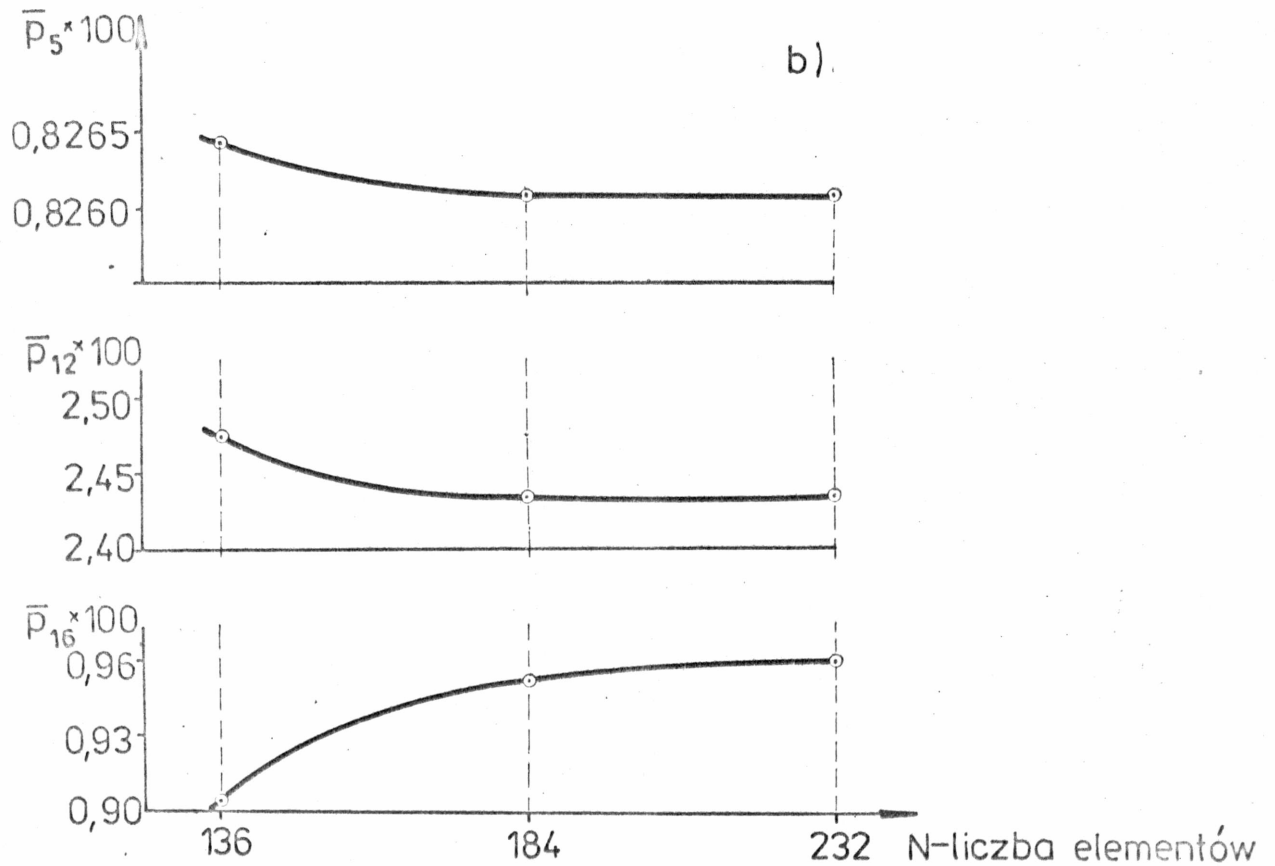
$$\bar{y}_0 = \frac{y_0}{h} \quad (5.40)$$

gdzie: y_0 - odległość pozioma punktu zerowego ciśnienia od osi obrotu kłapy

h - głębokość wody.

Dla rozpatrywanego położenia zamknięcie ($\beta = 60^\circ$) wartość \bar{y}_0 osiągnęła maksymalnie 0,3 i nie była także przekroczona przy innych położeniach kłapy i poziomach zwierciadła wody.

O dokładności wyznaczenia ciśnienia oraz dodanej masy wody decyduje nie tylko zasięg, ale także gęstość podziału na elementy. Sprawdzenie, w jaki sposób gęstość podziału rzutuje na wyniki obliczeń można przeprowadzić analizując ciśnienie powstałe na powierzchni kłapy w zależności od liczby elementów obszaru wody. Na rys. 5.7. przedstawiono tę zależność dla trzech węzłów zamknięcia. Z otrzymanych krzywych wynika, że różnice w wartości ciśnienia są największe dla węzła nr 16 i wynoszą: 5% pomiędzy podziałem na 136 a 184 elementy oraz 1% pomiędzy podziałem 184 a 232 elementy. Przyjęto, że dokładność obliczeń będzie wystarczająca dla obszaru wody utworzonego ze 184 czworościennej i graniastosłupowych elementów w przypadku zamknięcia nachylonego pod kątem 60° i przy statycznym poziomie zwierciadła wody. Przyjętą siatkę elementów uznano za wyjściową przy podziale obszaru wody dla innych położeniach kłapy i poziomów zwierciadła wody.



Rys.5.7. Zależność ciśnienia od liczby elementów.

5.4. Określenie macierzy dodanej masy wody

Jak to zostało wykazane w poprzednim rozdziale, na wodę przylegającą do konstrukcji działa siła zależna od przyspieszenia klapy, które wynika z jej ruchu oscylacyjnego. Powstałe wskutek działania tej siły ciśnienie będzie oczywiście oddziaływać na drgającą konstrukcję. Z twierdzenia Pascala wynika, że siła P działająca na element powierzchniowy dS pod wpływem ciś-

nienia p jest do niego proporcjonalna i wynosi $P = p dS$. Zgodnie z koncepcją MES wartość P opisana jest wektorem wielkości węzłowych P_i odpowiadającym przemieszczeniom normalnym $\hat{\delta}_i$.

$$[P]^e = \begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \\ P_m \end{Bmatrix} \quad (5.41)$$

Korzystając z zasady pracy wirtualnej [90] siły te uzależnić można od rozłożonego ciśnienia (które oznaczac będziemy zgodnie ze wzorem (5.34) jako p_1) w poniższy sposób:

$$\{P\}^e = \iint_S [\hat{N}]^T p_1 dS = \iint_S [\hat{N}]^T [N] \{p_1\} dS \quad (5.42)$$

Wyrażenia $[\hat{N}]$, $[N]$ są tymi samymi funkcjami, które występują we wzorze (5.33) a więc:

$$\{P\}^e = [L]^e \{p_1\}^e \quad (5.43)$$

oraz dla całej powierzchni S :

$$\{P\} = [L]^T \{p_1\} \quad (5.44)$$

Jeśli kierunek siły P działającej prostopadle do elementu konstrukcji nie zgadza się z kierunkiem przemieszczeń węzłowych w układzie globalnym należy dokonać transformacji macierzy $[L]$ w sposób podobny do omawianego w punkcie 5.2:

$$\{P\} = [T]^T [L]^T \{p_1\} \quad (5.45)$$

Wartość tej siły należy wprowadzić do równania ruchu konstrukcji zapisanego w MES wzorem (4.1)

$$[M] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\delta\} + [K] \{\delta\} + [T]^T [L]^T \{p_1\} = 0 \quad (5.46)$$

Równanie to jest sprzężone z równaniem (5.36) przez zmienną wartość ciśnienia p_1 . Oba równania różniczkowe tworzą układ równań dobrze opisujący zagadnienie wspólnych drgań konstrukcji i wody. Rozwiązanie tego układu uzyskuje się po wyznaczeniu ciśnienia z równania (5.36):

$$\{p_1\} = \rho [H_{11}^*]^{-1} [L] [T] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\delta\} \quad (5.47)$$

i wstawieniu uzyskanej zależności do równania ruchu konstrukcji:

$$[M] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\delta\} + [K] \{\delta\} + \rho [T]^T [L]^T [H_{11}^*]^{-1} [L] [T] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\delta\} = 0 \quad (5.48)$$

Wyrażenie $[T]^T [L]^T [H_{11}^*]^{-1} [L] [T]$ oznaczane dalej $[M_w]$ stanowi poszukiwaną macierz masy dodanej wody, którą trzeba dodać do macierzy mas konstrukcji.

Macierz $[M_w]$ jest kwadratowa i symetryczna, a jej wymiar zależy od ilości węzłów na powierzchni S i postaci macierzy $[T]$. Należy ją jednak, z powodów przedstawionych w rozdziale 4, doprowadzić do postaci blokowo-diagonalnej, którą posiada również macierz $[\tilde{M}]$:

$$[\tilde{M}_w] = \text{diag}([M_{w1}], [M_{w2}], \dots, [M_{wn}]), \quad (5.49)$$

gdzie $[M_{wi}]$ jest podmacierzą (blokiem), której wymiar zależy od postaci macierzy transformacji i maksymalnie może wynosić 3×3 . W rozpatrywanym przypadku drgań kłapy założono, że zasadnicze drgania odbywają się w płaszczyźnie prostopadłej do osi podłużnej zamknięcia, wobec czego, wymiar podmacierzy $[M_{wi}]$ wynosi 2×2 i odpowiada przemieszczeniom węzła w kierunku v i w .

Diagonalizację przeprowadzono przez sumowanie wyrazów - bloków $[M_{ij}]$ macierzy $[M_w]$ według następującego wzoru:

$$[M_{wi}] = \sum_{j=1}^n [M_{wij}] \quad (5.50)$$

gdzie j oznacza numer węzła połączonego krawędzią elementu z węzłem i (węzły incydentne), a n - liczbę wszystkich węzłów brzegu S .

Ten sposób diagonalizacji zapewnia spełnienie kryterium zachowania dodanej masy wody.

Gdy dodamy macierz masy wody do macierzy masy konstrukcji, uwzględniając numerację węzłów i zachowując zgodność przemieszczeń węzłowych, uzyskamy równanie:

$$([\tilde{M}] + [\tilde{M}_w]) \frac{\partial^2 \{\delta\}}{\partial t^2} + [K] \{\delta\} = 0 \quad (5.51)$$

którego rozwiązanie polega na wyznaczeniu częstości własnych i wektorów własnych w sposób omówiony w rozdziale 4.8.

5.5. Budowa programów na EMC

Na podstawie przedstawionych rozważań ułożono następujące dwa programy numeryczne w języku FORTRAN: pierwszy o nazwie MASTES służący do obliczania dodanej masy wody i drugi o nazwie HYDRO wykorzystywany do analizy ciśnienia hydrodynamicznego, powstającego w wodzie wskutek drgań konstrukcji. Przy opracowywaniu tych programów wykorzystano kilka algorytmów użytych w programie PROMES, między innymi sposób uwzględnienia warunku brzegowego swobodnej powierzchni wody, dla której ciśnienie $p = 0$,

przez dynamiczną eliminację niepotrzebnych równań oraz podprogram odwracania macierzy.

Uproszczony schemat blokowy programu MASTES przedstawiony został na rysunku 5.8.

Jako dane do programu wprowadza się następujące liczby:

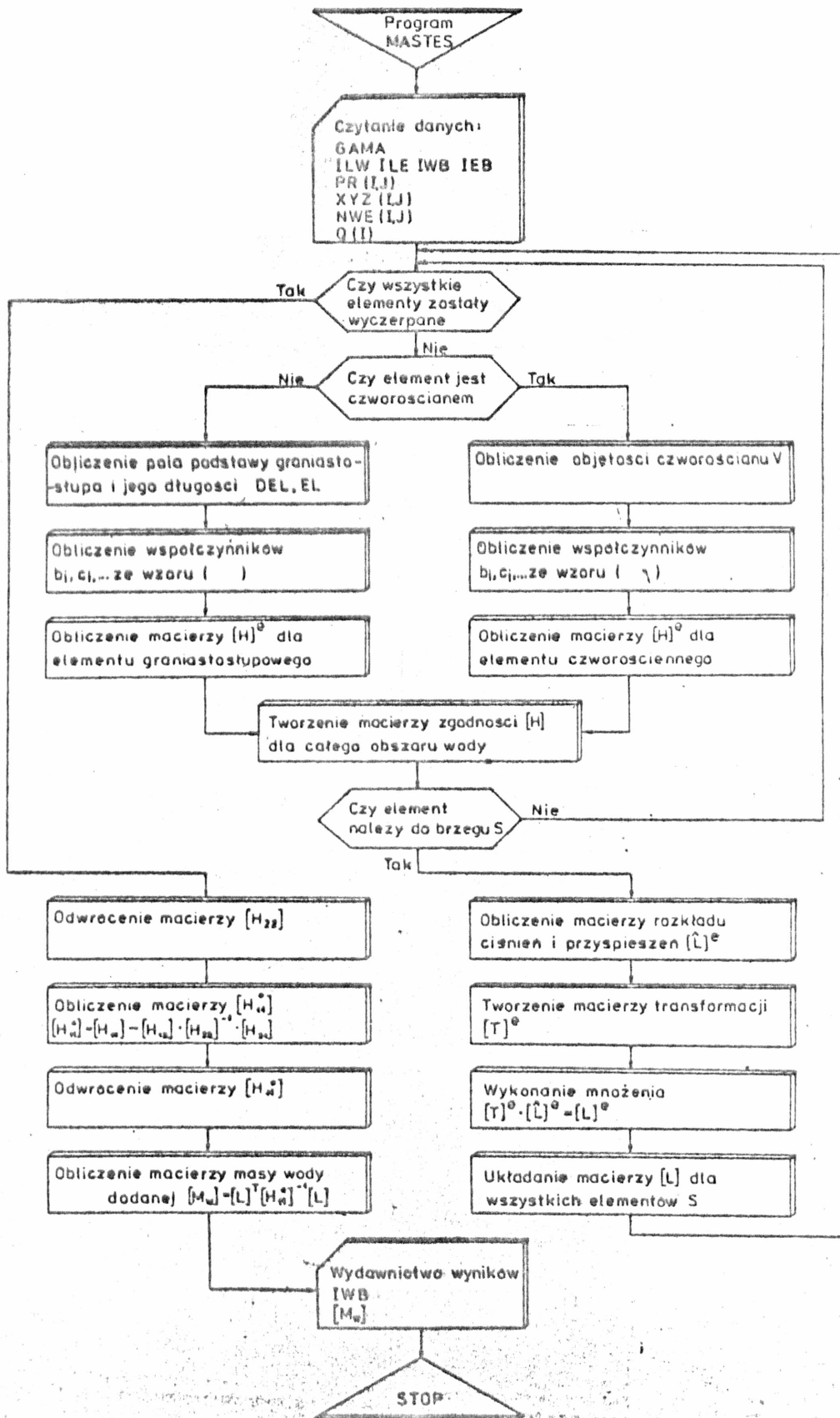
- gęstość wody - GAMA
- ilość węzłów, ilość elementów, ilość węzłów brzegowych, ilość elementów brzegowych - ILW, ILE, IWB, IEB
- współrzędne wszystkich węzłów należących do brzegu S w układzie współrzędnych globalnych konstrukcji, wczytując najpierw Y potem Z
- współrzędne wszystkich węzłów obszaru wody (łącznie z brzegowymi) kolejno X, Y, Z
- dla każdego elementu sześć liczb stanowiących numery węzłów. W przypadku elementów czworosiennych dwie ostatnie liczby są zerami
- numery węzłów leżących na swobodnej powierzchni wody.

Po wykonaniu obliczeń następuje drukowanie ilości węzłów brzegowych (IWB) oraz macierzy masy dodanej.

Obliczenie drgań konstrukcji kłapy w wodzie wymagało wprowadzenia do programu PROMES wyników obliczeń masy wody w sposób następujący:

- ilość węzłów położonych na brzegu S oznaczonych przez IWB
- masa dodana uzyskana z obliczeń programu MASTES wczytana w postaci macierzy.

Jeśli program analizować ma drgania konstrukcji w powietrzu wystarczy podstawić wartość IWB równą zero.



Rys. 5.8. Uproszczony schemat blokowy programu MASTES.

W ten sposób PROMES w połączeniu z programem MASTES stanowią narzędzie do obliczania częstości i postaci drgań własnych konstrukcji w wodzie. Obydwa programy odznaczają się dużą uniwersalnością, tzn. nadają się do obliczania drgań dowolnych konstrukcji pod warunkiem, że konstrukcja ta oraz obszar wody można aproksymować opisanymi wcześniej elementami. Ułożone przez autora programy charakteryzują się relatywnie krótkim czasem obliczeń i co jest bardzo ważne w stosowaniu MES, zajmowaniem stosunkowo niewielkiego obszaru pamięci, a także przejrzystym sposobem wprowadzania danych i czytelnymi wydrukami.

Wszystkie obliczenia zawarte w dalszej części pracy zostały przeprowadzone na maszynie cyfrowej ODRA 1305 w Centrum Obliczeniowym Politechniki Wrocławskiej.

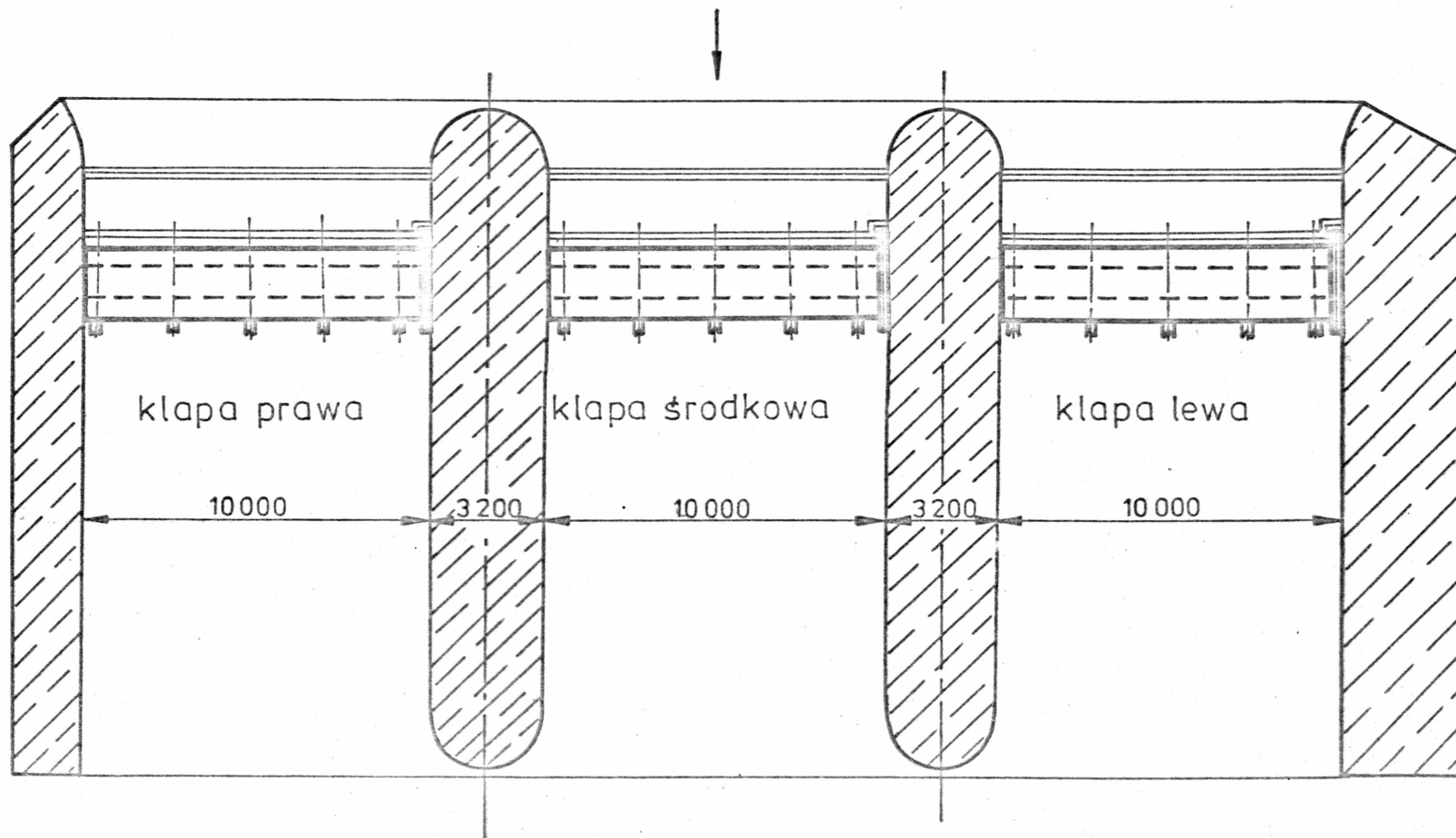
6. PRZYKŁADY OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

6.1. Opis konstrukcji

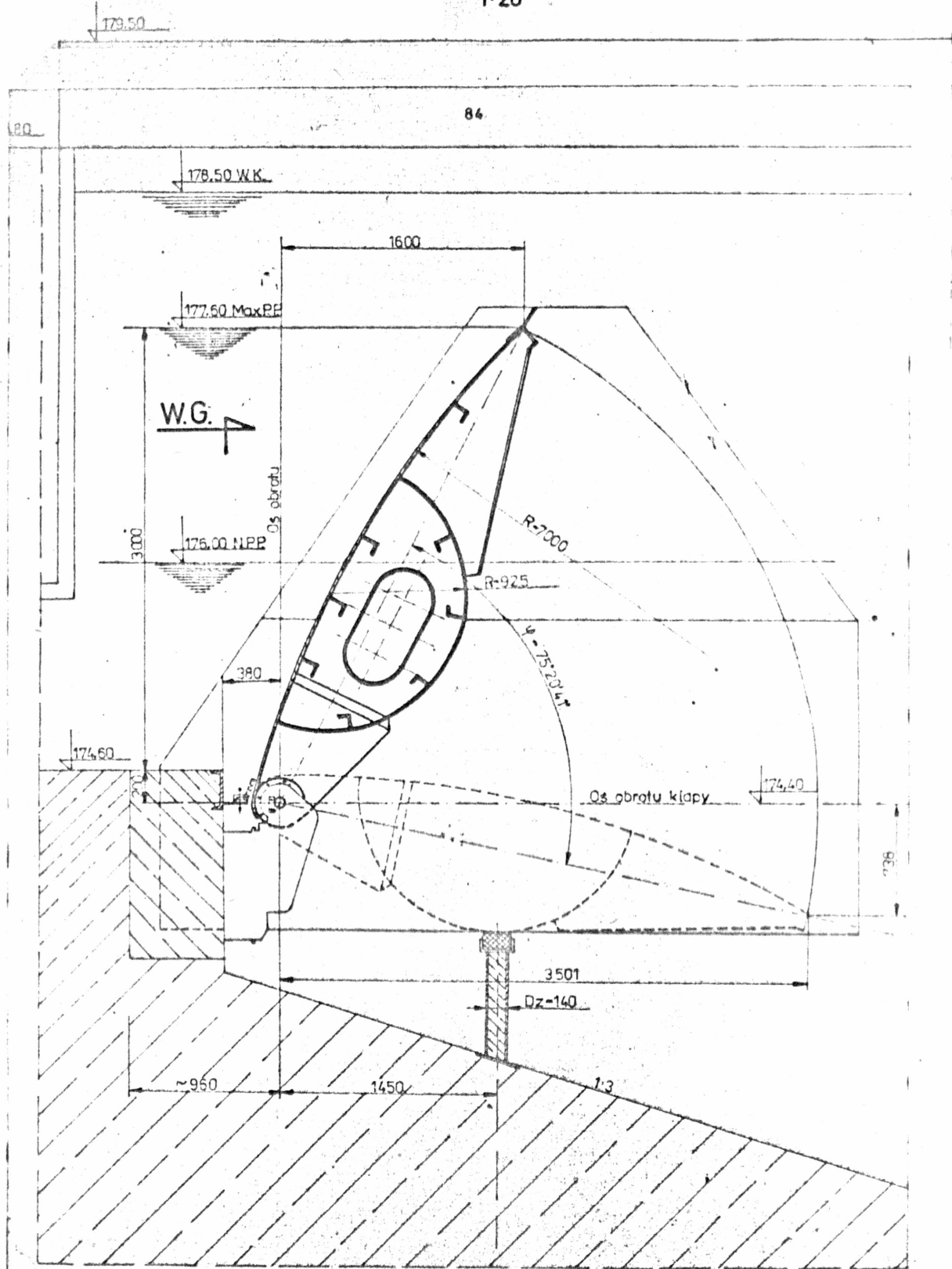
W celu sprawdzenia poprawności funkcjonowania opisanych w poprzednich rozdziałach algorytmów oraz opracowanych na ich podstawie programów, przeprowadzono obliczenia częstości drgań dwóch zamknięć klapowych. Pierwszym obiektem była klapa soczewkowa stanowiąca zamknięcie przelewu zapory zbiornika retencyjnego Słup na rzece Nysie Szalonej. Konstrukcja ta o rozpiętości 10 m i wysokości 3 m została wykonana jako spawana z cylindrycznych blach stalowych o grubości 10 mm, usztywnionych pięcioma przeponami, których grubość w górnej części wynosi 10 mm, a w okolicy łożyska 36 mm. Żebra wzmacniające powłoki wykonane zostały z kątowników 120 x 50 x 8 i 120 x 80 x 8. Klapa napędzana jest silnikiem elektrycznym przez przekładnię ślimakową. Siła napędowa przekazywana jest za pośrednictwem ramienia umieszczonego w filarze oraz krótkiego, o dużej średnicy wału na skrajną przeponę kłapy. Widok ogólny kłapy i jej przekrój poprzeczny przedstawione są na rysunku 6.1 i 6.2.

Obiektem drugim była specjalnie w tym celu wykonana klapa, której kształty i proporcje autor przyjął według najczęściej wykonanych zamknięć tego typu. Omawiana klapa o długości 98 cm i wysokości 36 cm posiadała pięć przepon o rozstawie 24,5 cm oraz żebra usztywniające obie powłoki. Wszystkie elementy konstrukcji sporządzone zostały z płyty winidurowej o grubości 0,3 cm, a następnie zespawane. Tylko żebra, o przekroju poprzecznym 0,3 x 0,6 cm zostały przyklejone do zewnętrznej i wewnętrznej powłoki. Własności użytego winiduru przebadane zostały w laboratorium Instytutu Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej i są one następujące:

Rys.6.1. Widok przelewu stokowego zapory zbiornika w Stupie



A-A
1:20



Rys. 6.2. Przekrój poprzeczny zamknięcia kłapowego w Słupie.

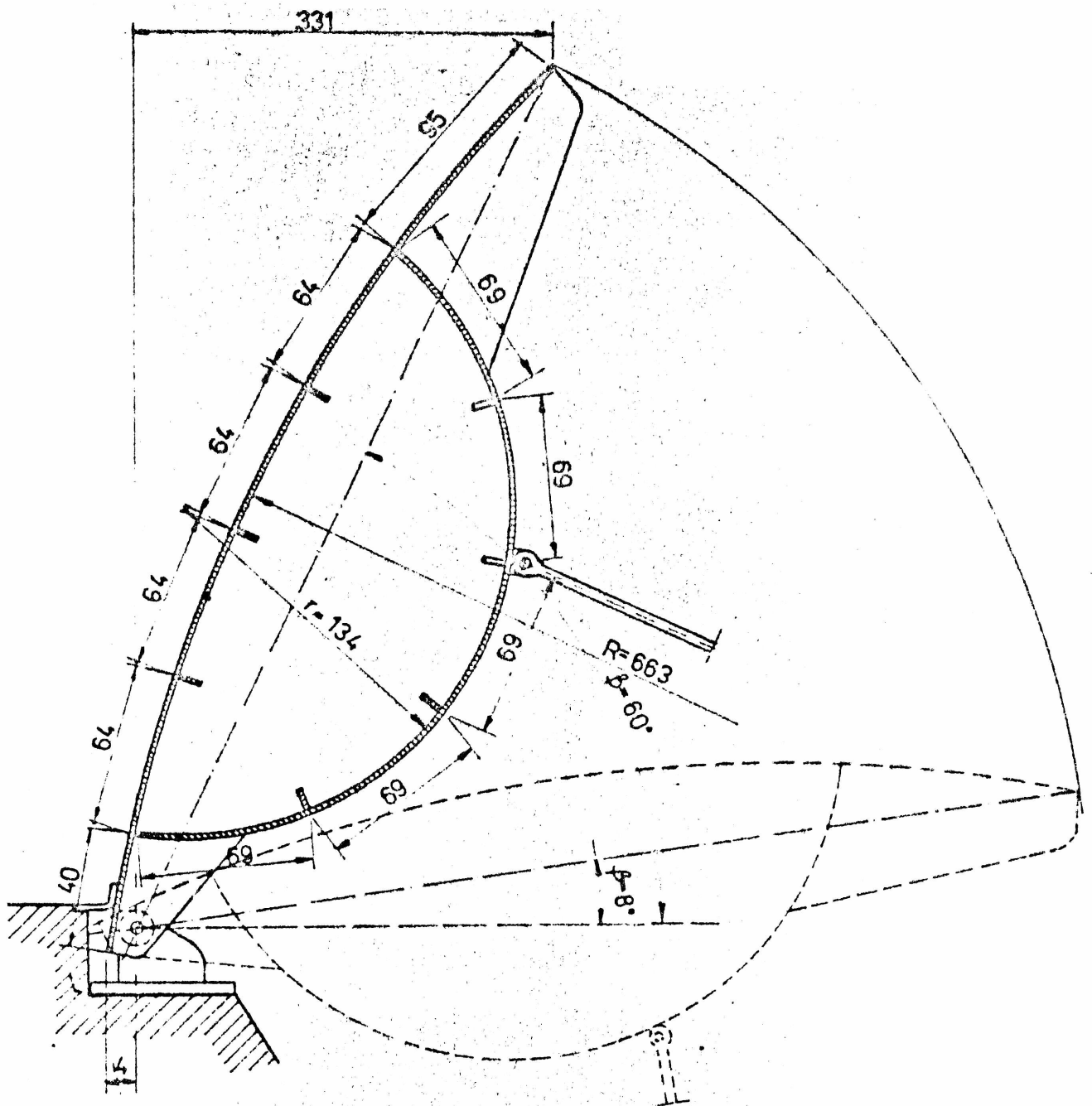
- moduł sprężystości podłużnej $E = 4290 \text{ MPa}$
- współczynnik Poissona $\nu = 0,371$
- gęstość $\rho = 1,427 \text{ g/cm}^3$.

Oparcie kłapy zostało wykonane w postaci łożysk występujących pod drugą i czwartą przeponą, oraz podpór zamocowanych przegubowo do zewnętrznego obrysu przepony. Konstrukcja podpór umożliwia zmianę położenia kłapy, co wykorzystano prowadząc badania dla sześciu różnych pochyleń zamknięcia o kątach pomiędzy cięciwą powłoki zewnętrznej a poziomem: 60° , 50° , 40° , 30° , 17° , 8° . Przekrój poprzeczny tej kłapy pokazany jest na rysunku 6.3.

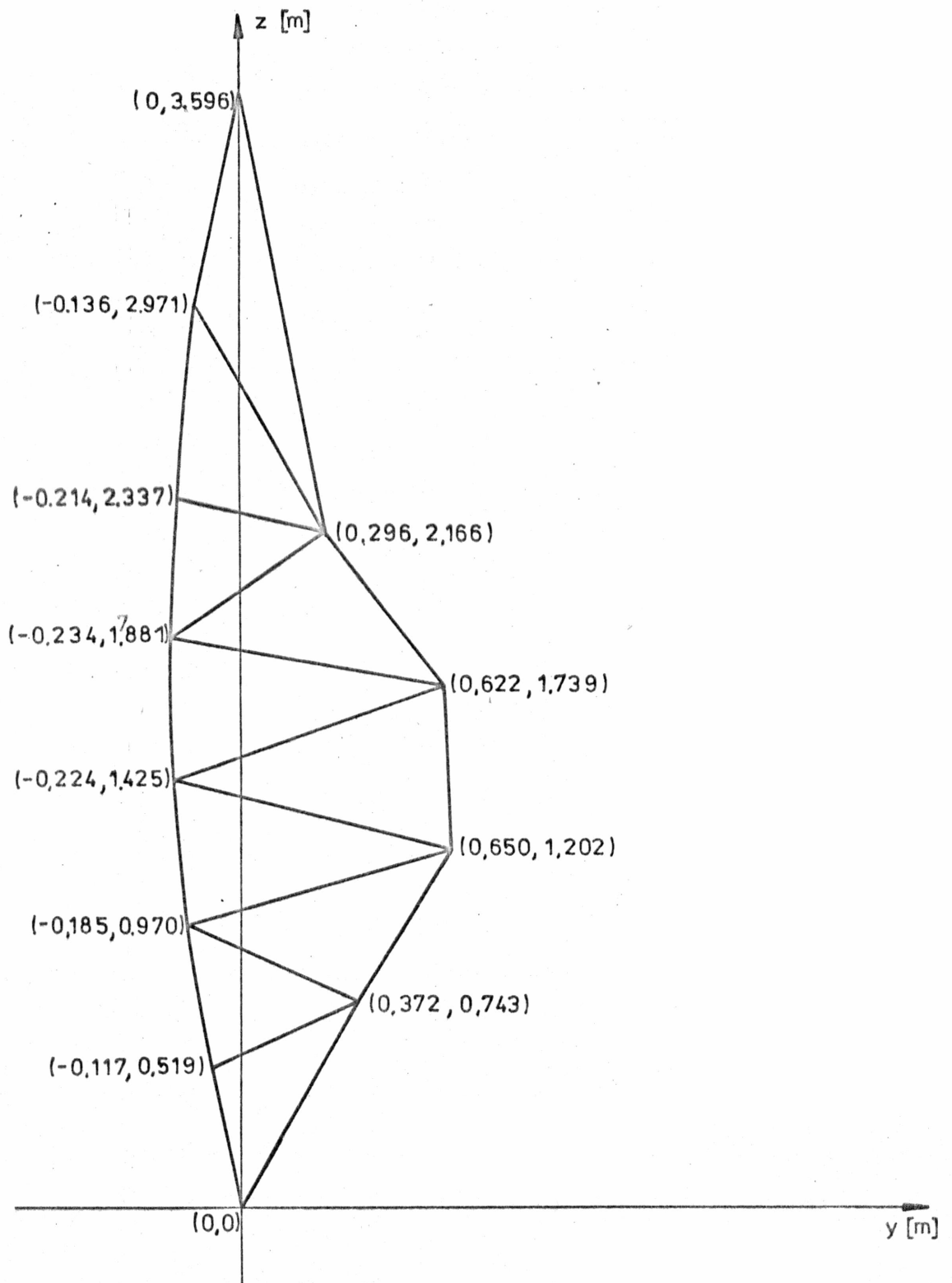
6.2. Opis konstrukcji w ujęciu metody elementów skończonych i wyniki obliczeń numerycznych

Konstrukcja kłapy w Słupie zastąpiona została modelem obliczeniowym, który zawiera 180 elementów powłokowych i 56 belkowych połączonych w 72 węzłach. Model ten przedstawiono na rysunkach 6.4, 6.5, 6.6, 6.7.

Węzły o numerach 8, 20, 32, 44, 56 będące odpowiednikami łożysk mają zadane zerowe przemieszczenia we wszystkich kierunkach z wyjątkiem θ_x (rys. 6.5). Węzły o numerach 67, 68 leżące na skrajnej przeponie w miejscu, w którym w rzeczywistej konstrukcji istnieje połączenie z wałem napędowym, zostały całkowicie unieruchomione, co dobrze odpowiada rzeczywistemu schematowi podparcia tej konstrukcji. Ponadto wyzerowane zostały stopnie swobody u i θ_y wszystkich węzłów, ponieważ przemieszczenie liniowe w kierunku osi x oraz kąt obrotu względem osi y są prostopadłe do płaszczyzny drgań zasadniczych, to znaczy y z i jak



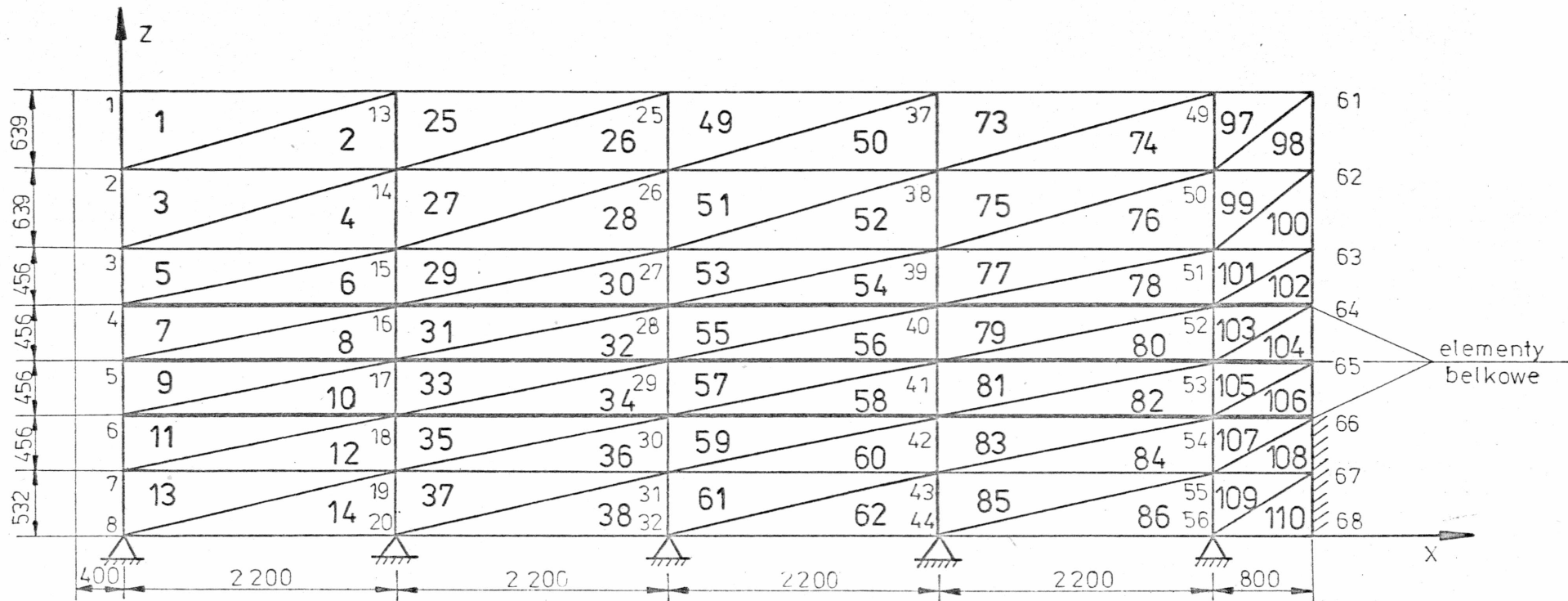
Rys.6.3. Przekrój poprzeczny klapy z winiduru.



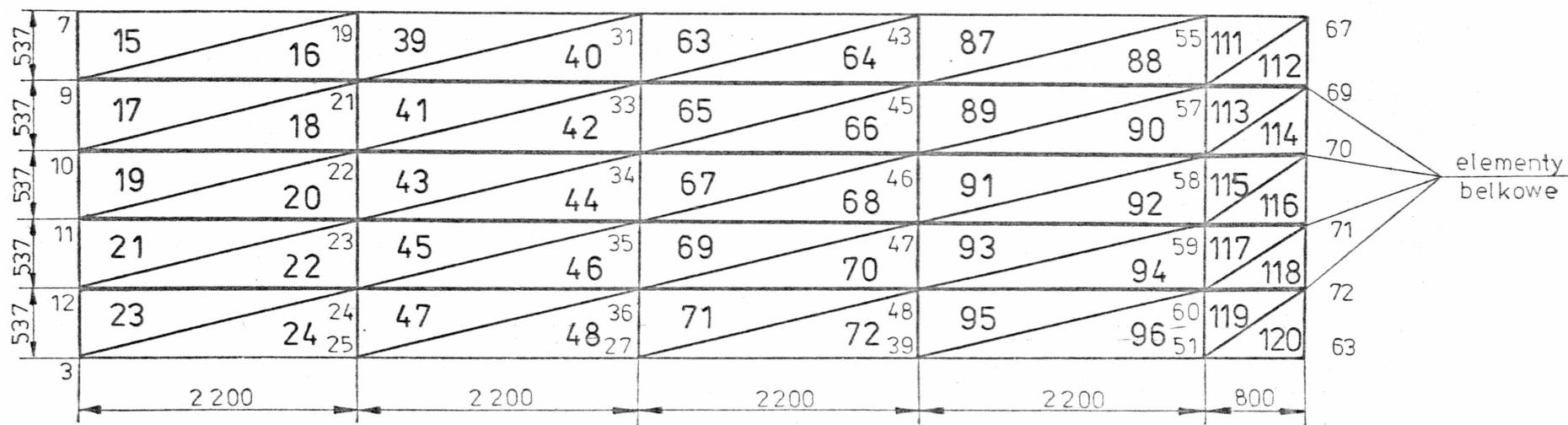
Rys.6.4. Kłapa w Słupie.

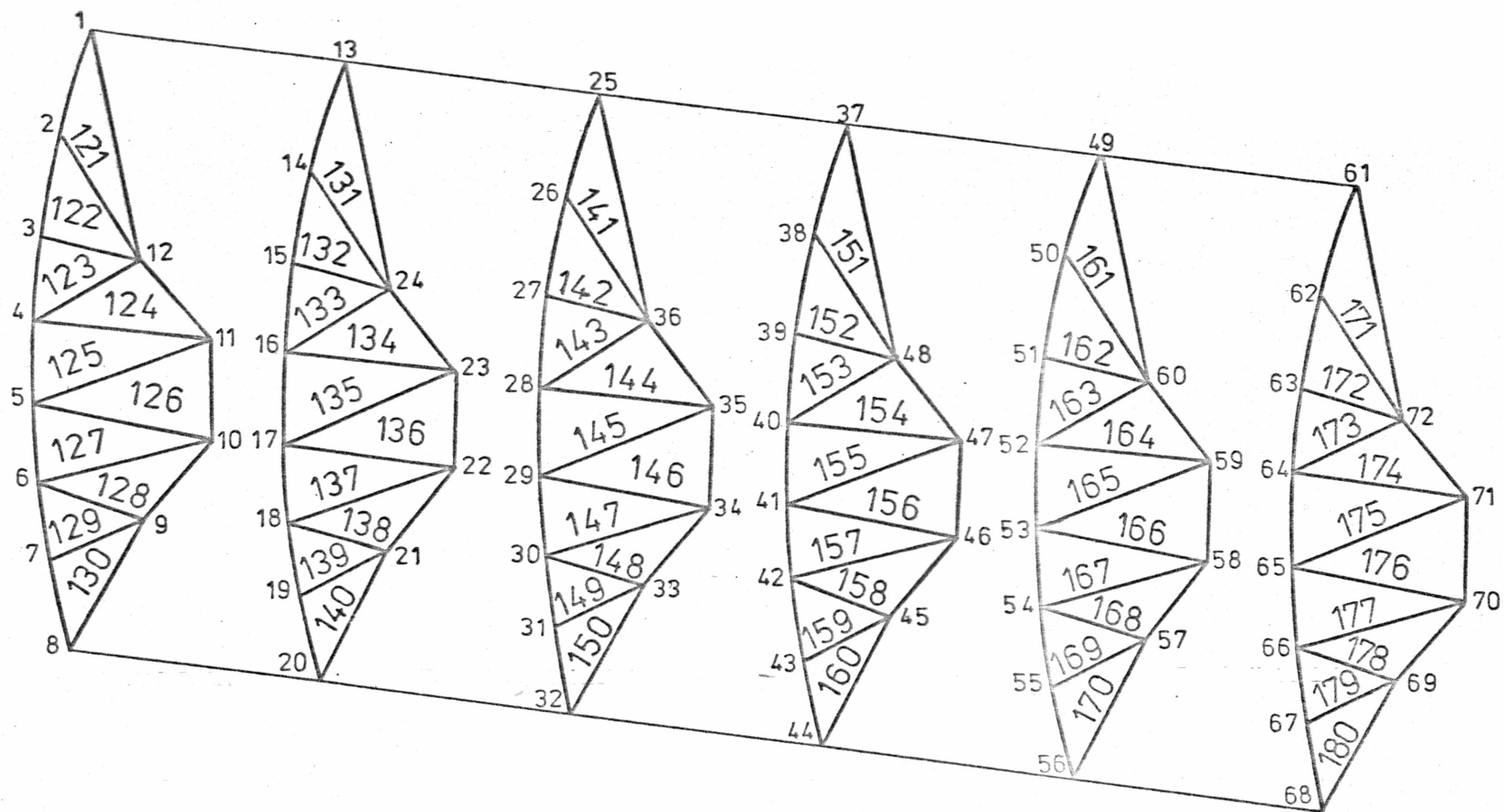
Współrzędne węzłów konstrukcji w przekroju poprzecznym w przyjętym układzie współrzędnych globalnych.

Rys.6.5. Kłapa w Stupie. Podział na elementy, powłoka zewnętrzna – rozwinięcie



Rys. 6.6. Kłapa w Stupie. Podział na elementy, powłoka wewnętrzna – rozwinięcie





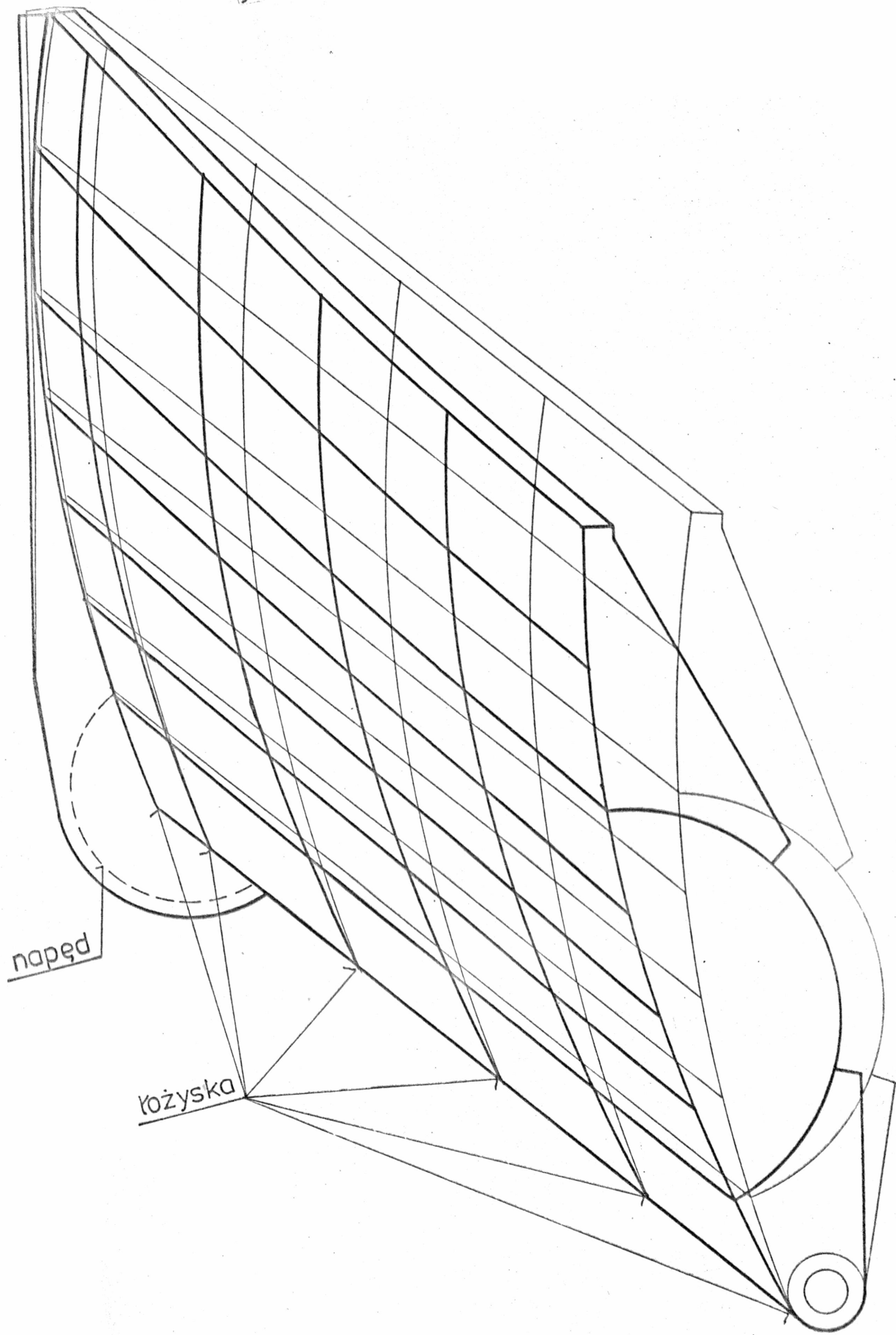
06

Rys.6.7. Kłapa w Słupie. Podział przepon na elementy.

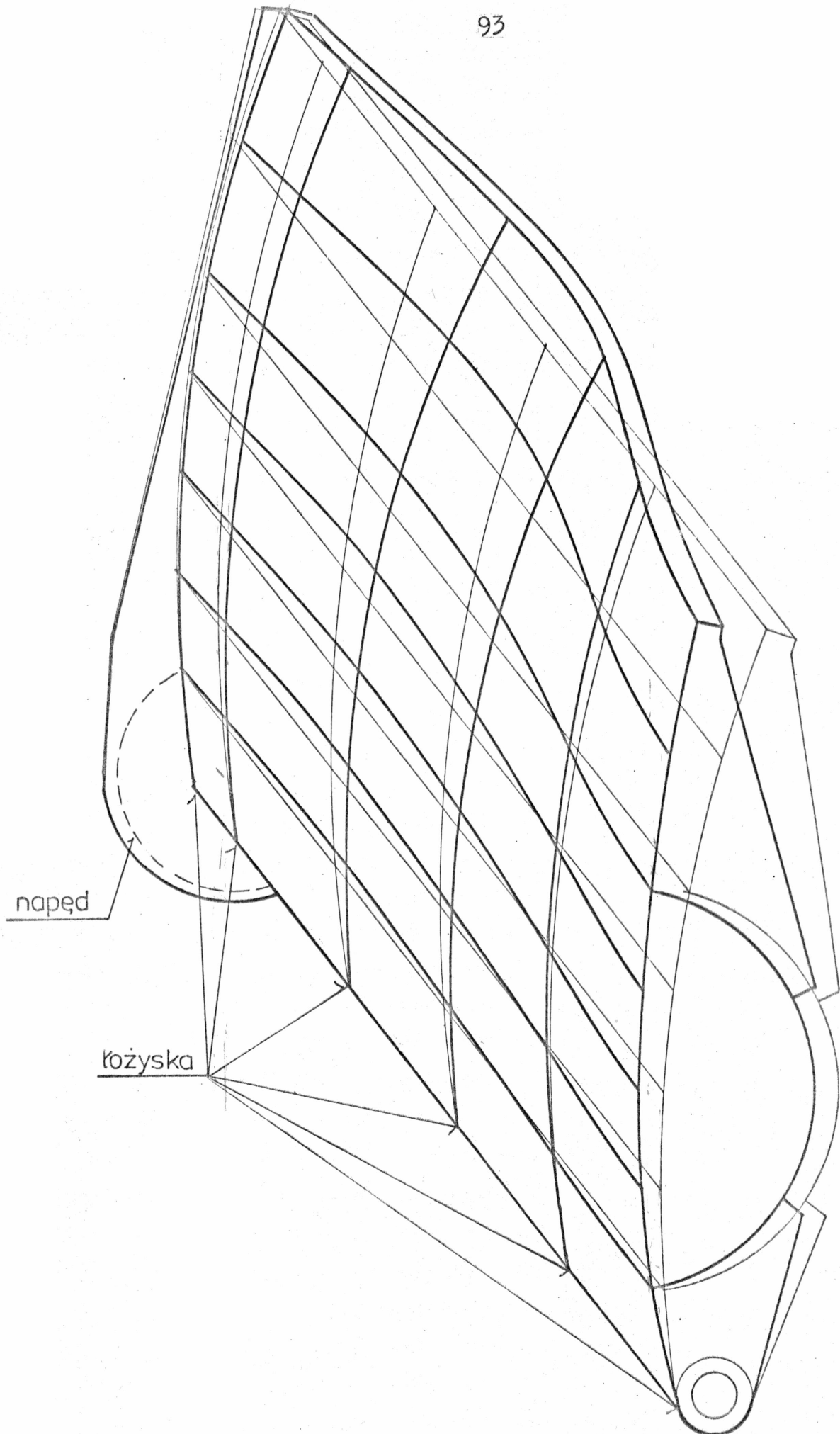
wykazały osobne obliczenia, nie mają one wpływu na rozwiązanie równań ruchu. Cała konstrukcja posiada zatem $65 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 265$ stopni swobody.

Za pomocą programu PROMES obliczono pięć pierwszych częstości i postaci drgań własnych. Pierwsza i druga częstość mają wartości 22,035 Hz i 53,346 Hz, a odpowiadające im postacie drgań przedstawiono w formie graficznej na rysunkach 6.8 i 6.9. Wydruk programu zamieszczony został w załączniku 1.

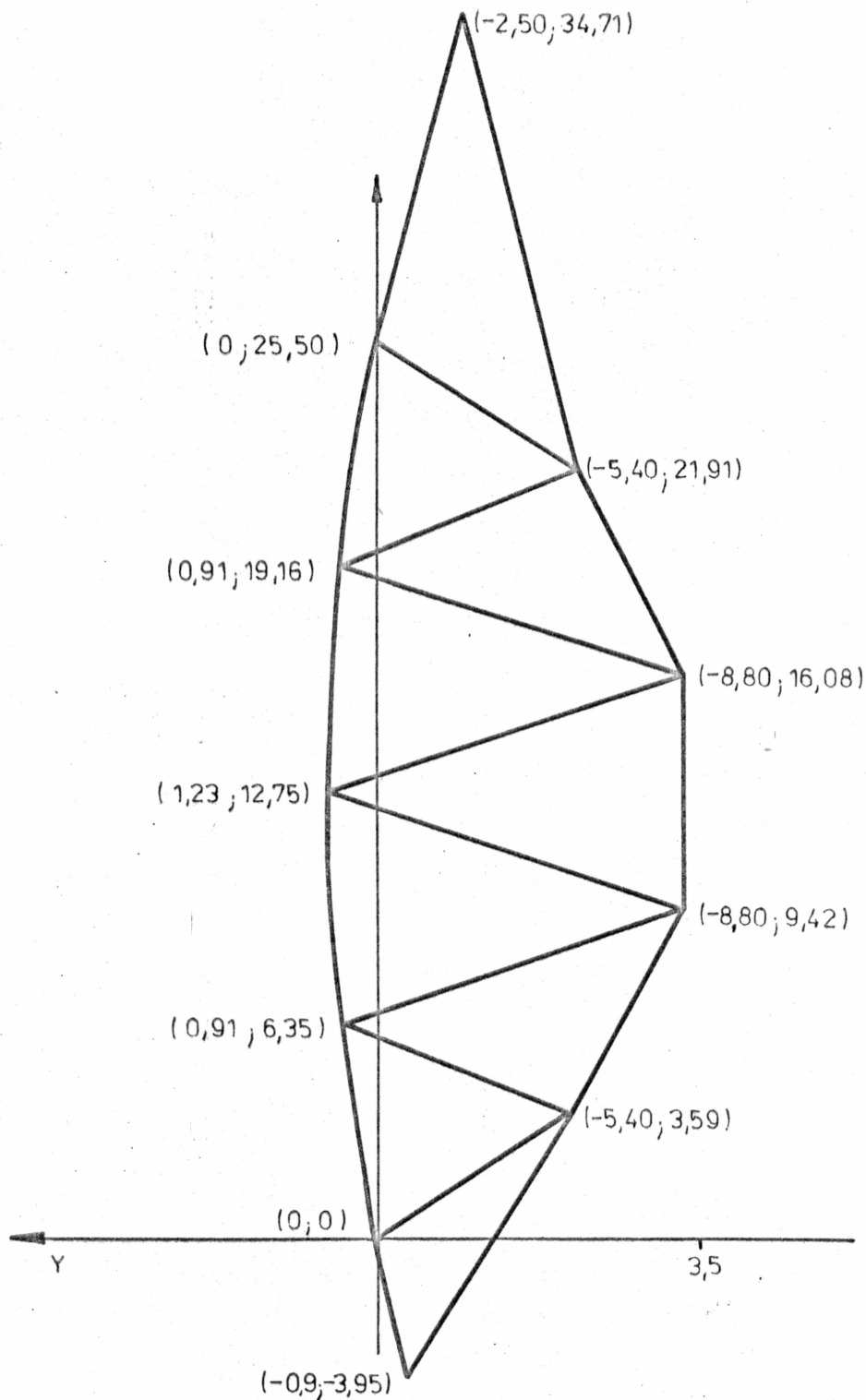
Podczas rozpatrywania drgań własnych kłapy wykonanej z winiduru przyjęto nieco inny sposób postępowania. Przystępując do budowy modelu obliczeniowego, przeprowadzono podział na elementy tylko do płaszczyzny symetrii zamknięcia, a w obliczeniach rozpatrzono dwa przypadki - drgania o postaci symetrycznej i antysymetrycznej. Otrzymano zatem nowy układ drgający, składający się z 68 elementów powłokowych, 14 elementów belkowych i 33 węzłów. Model ten przedstawiono na rysunkach 6.10, 6.11, 6.12. W węźle 29, który lokalizacją odpowiada punktowi przyłożenia siły napędowej założono istnienie zerowego przemieszczenia w kierunku osi y (rys. 6.11), a w węźle 20 - w łożysku - przyjęto zerowe stopnie swobody z wyjątkiem Θ_x . W płaszczyźnie podziału, dla węzłów o numerach 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30 i 33 przyjęto, zgodnie z ogólnymi zasadami, istnienie więzi ograniczających odpowiednie stopnie swobody. Dla drgań symetrycznych są to zerowe przemieszczenia u , Θ_y , Θ_z , natomiast dla drgań antysymetrycznych u , v , w , Θ_x . Przeprowadzone obliczenia dla obu rodzajów drgań wykazały, że częstość drgań symetrycznych jest częstością podstawową i obliczenia w dalszych etapach ograniczono tylko do drgań o postaci symetrycznej.



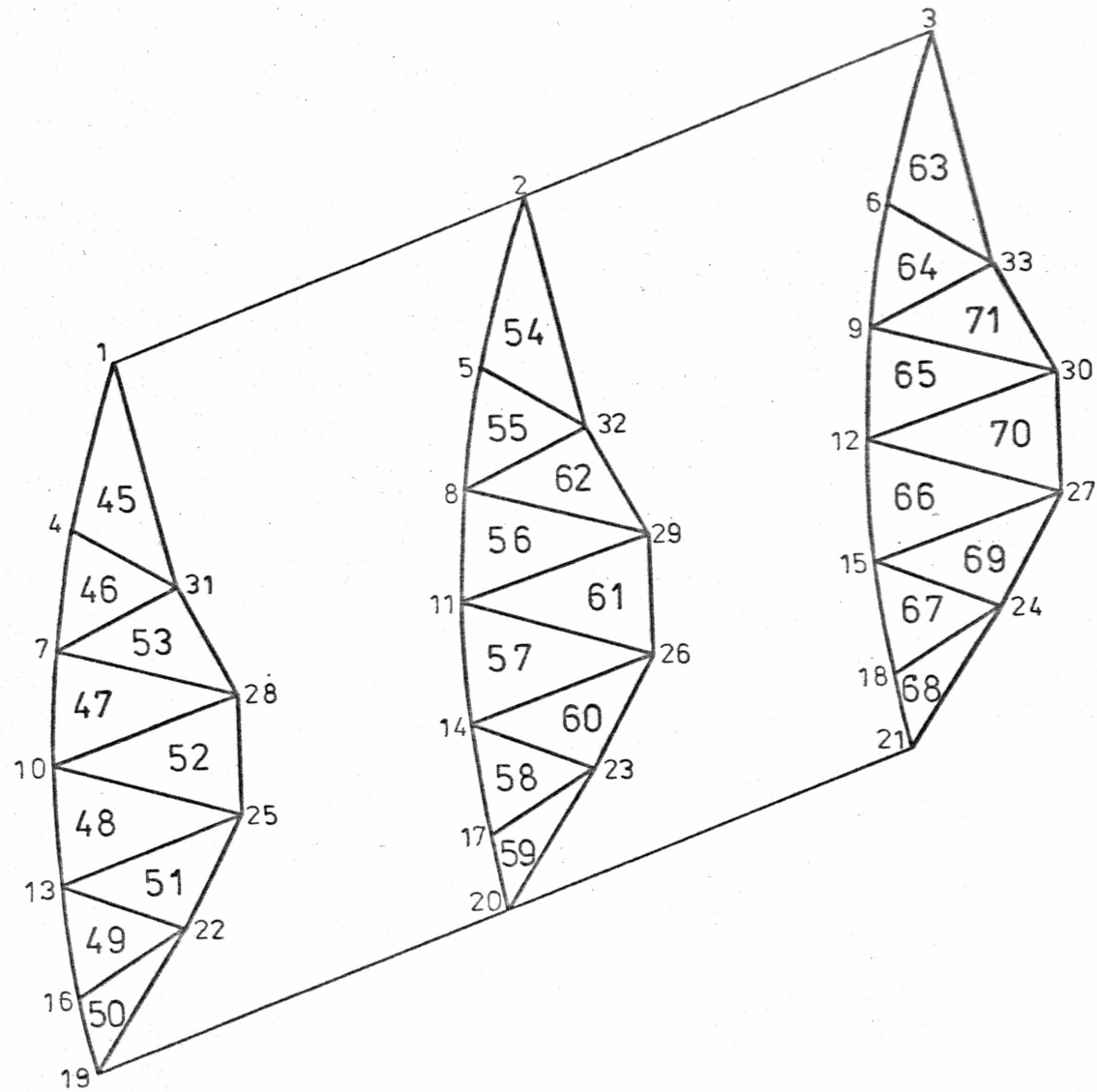
Rys. 68. Postać 1. drgań własnych klapy w Słupie; częstotać 22,0 Hz



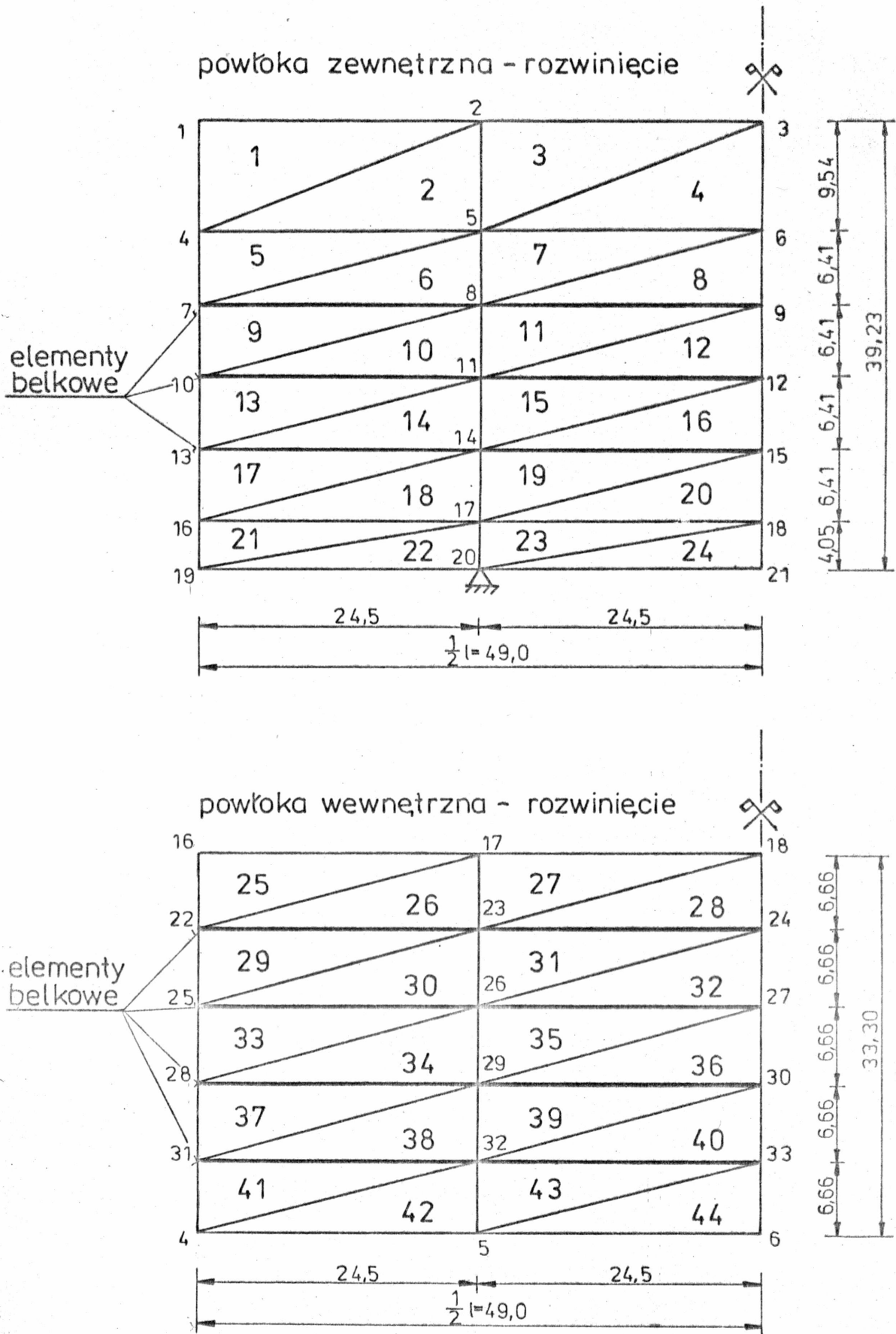
Rys.6.9. Postać 2. drgań własnych kłapy w Słupie ; częstość 53,3 Hz



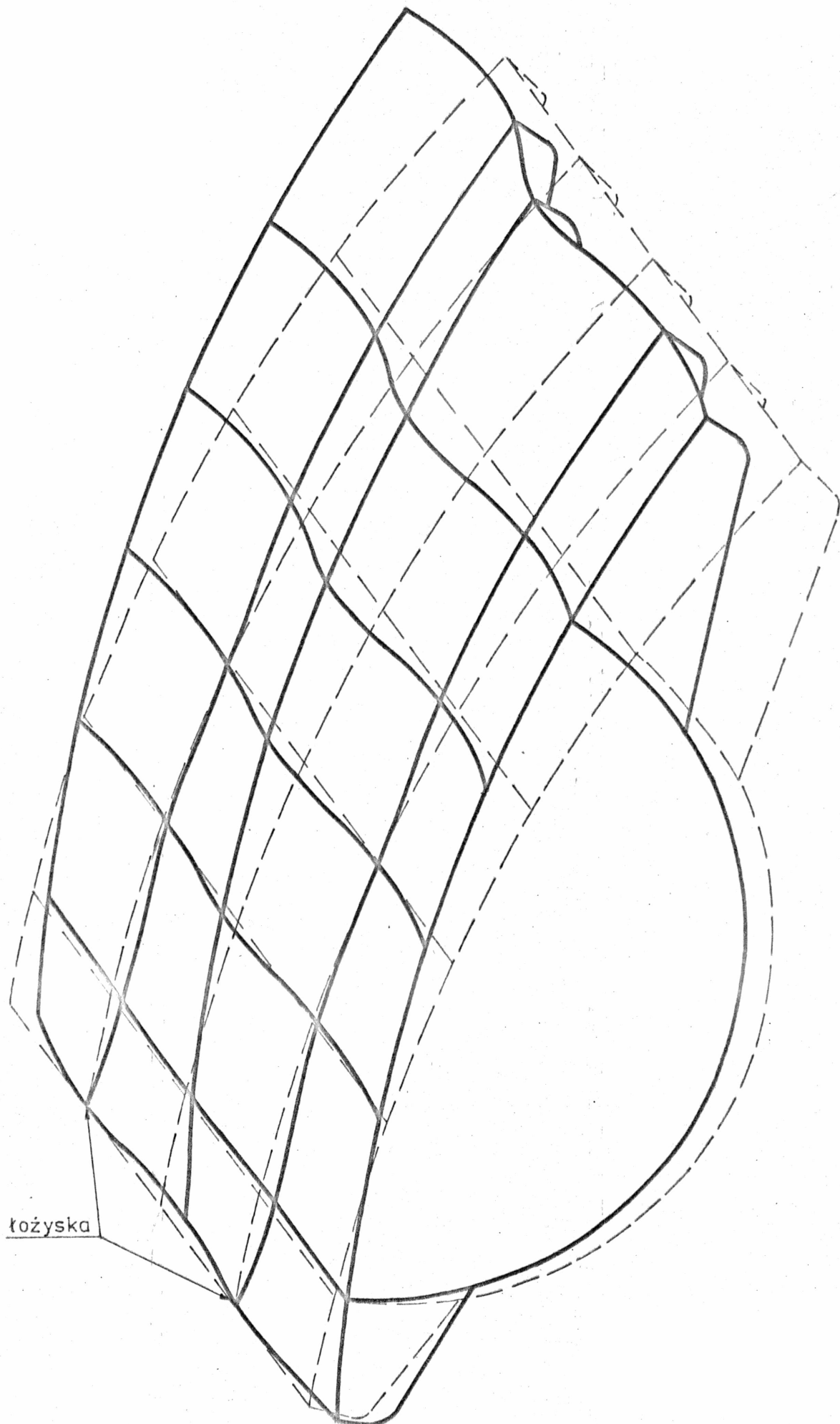
Rys.6.10. Kłapa winidurowa. Współrzędne węzłów konstrukcji w przekroju poprzecznym w przyjętym układzie współrzędnych globalnych.



Rys. 6.11. Kłapa winidurowa. Podział przepon na elementy.



Rys. 6.12. Kłapa winidurowa. Podział powłoki zewnętrznej i wewnętrznej na elementy.



łożyska

Rys. 6.13. Postać 1. drgań własnych klapy winidurowej; częstość 1679Hz

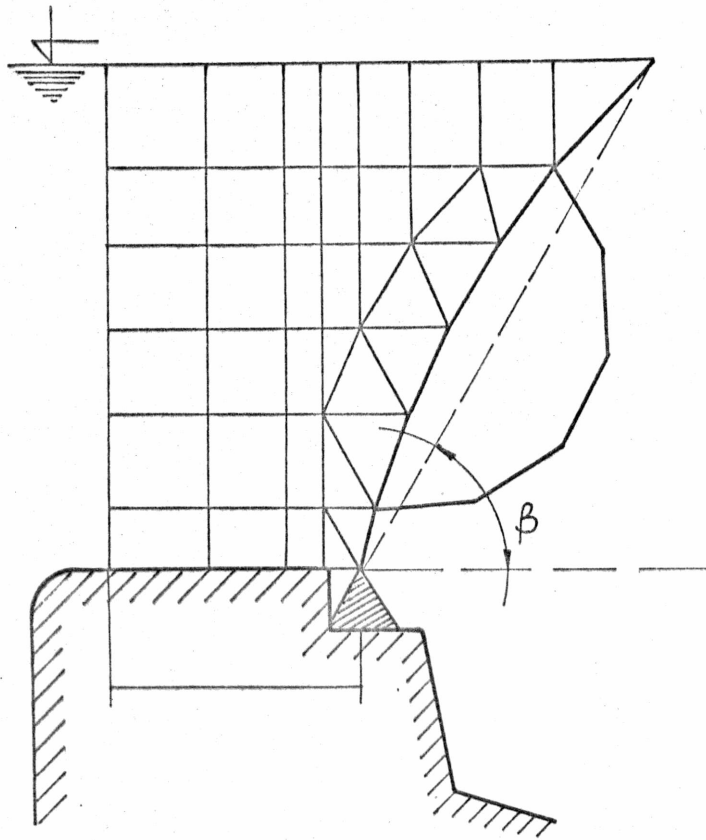
Wartość obliczonej częstości podstawowej wynosi 167,940 Hz, a odpowiadającą jej postać drgań opracowano graficznie na rys. 6.13. Wydruk wyników z obliczeń przedstawiony został w załączniku 2.

Dla omawianego obiektu określono także drgania w wodzie w przypadku, gdy woda sięgała krawędzi klapy dla wszystkich kątów pochylenia oraz kiedy klapa była nachylona pod kątem $\beta = 8^\circ$, a zmieniała się grubość warstwy przelewowej (odpowiednio do przepływów $Q = 5, 15, 30, 45, 60$ l/s).

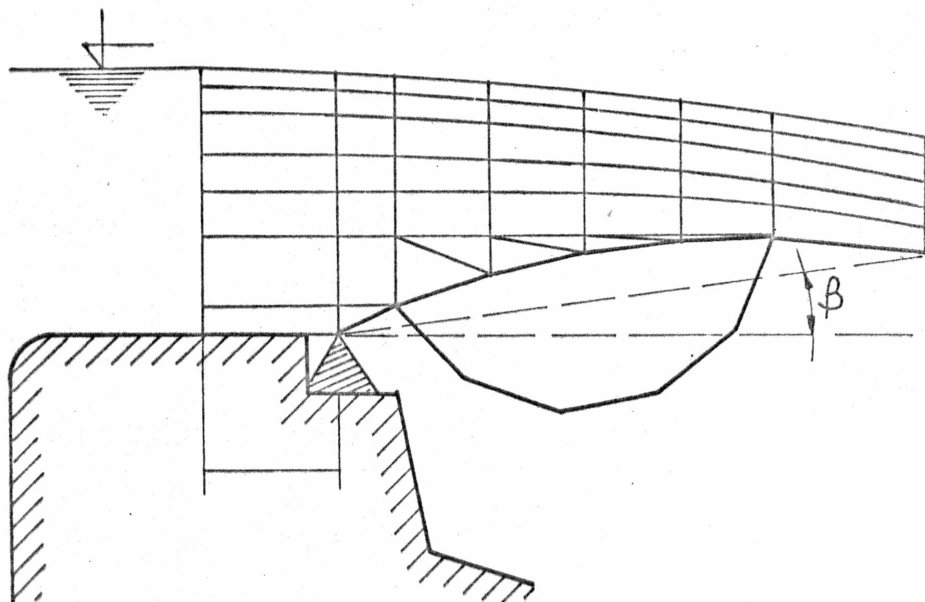
Zgodnie z metodologią skończonych elementów obszar wody aproksymowano zbiorem elementów przestrzennych. Zasięg podziału na elementy był stały dla wszystkich rozpatrywanych przypadków i wynosił $0,5 \bar{y}_0$ (punkt 5.3), natomiast ilość elementów i węzłów zmieniała się w zależności od kąta pochylenia zamknięcia i położenia zwierciadła wody. Np. dla $\beta = 60^\circ$ i statycznego poziomu wody przyjęto podział na 84 elementy czworościenne, 100 elementów graniastosłupowych, połączonych w 135 węzłach (rys. 6.14a), zaś dla $\beta = 8^\circ$ i $Q = 60$ l/s w wyniku podziału otrzymano 48 elementów czworościennych, 152 graniastosłupowe i 168 węzłów (rys. 6.14b).

Obliczone częstości drgań własnych klapy w wodzie stojącej zestawione zostały w tabeli 1, a podczas przepływu wody w tabeli 2.

a.)



b.)



Rys.6.14. Podział obszaru wody na elementy.

a.) $\beta = 60^\circ$ b.) $\beta = 8^\circ$ $Q = 60 \text{ l/s}$

Tabela 1. Obliczone i pomierzone czę-
- łości drgań własnych kłapy wini-
- durowej obciążonej statycznie wodą
przy różnych kątach pochylenia β .

β [°]	f [Hz]		Δf [%]
	MES	pomiary	
60	57,982	54,54	6,3
50	59,676	56,25	6,1
40	62,912	59,09	6,5
30	67,489	64,12	5,2
17	93,121	85,10	9,4
8	119,997	107,84	11,3

Tabela 2. Obliczone i pomierzone czę-
- łości drgań własnych kłapy wini-
- durowej nachylonej pod
kątem $\beta = 8^\circ$ dla różnych wartości natężenia
przepływu Q

Q [1/s]	f [Hz]		Δf [%]
	MES	pomiary	
0	119,997	107,84	11,3
5	58,076	51,55	12,7
15	46,927	42,13	11,4
30	41,369	37,50	10,4
45	39,835	35,09	13,6
60	39,413	35,00	12,7

7. WERYFIKACJA METODY W OPARCIU O BADANIA DOŚWIADCZALNE

7.1. Uwagi ogólne

W celu sprawdzenia poprawności metody analitycznego wyznaczania drgań zamknięcia klapowego przeprowadzono pomiary drgań dwóch opisanych w punkcie 6 konstrukcji. Badania te uznano za konieczne z tego względu, że chociaż metoda elementów skończonych zmodyfikowana o diagonalną macierz mas jest zbieżna, to jej dokładności nie można było sprawdzić w sposób, w jaki najczęściej jest stosowany, to znaczy przez stopniowe zagęszczanie podziału na elementy i porównywanie rezultatów obliczeń. W rozpatrywanym przypadku zagęszczanie podziału prowadziłoby do powstania macierzy o tak dużych wymiarach, że dokonanie obliczeń wymagałoby zastosowania maszyny cyfrowej o znacznie większych możliwościach niż dostępna autorowi.

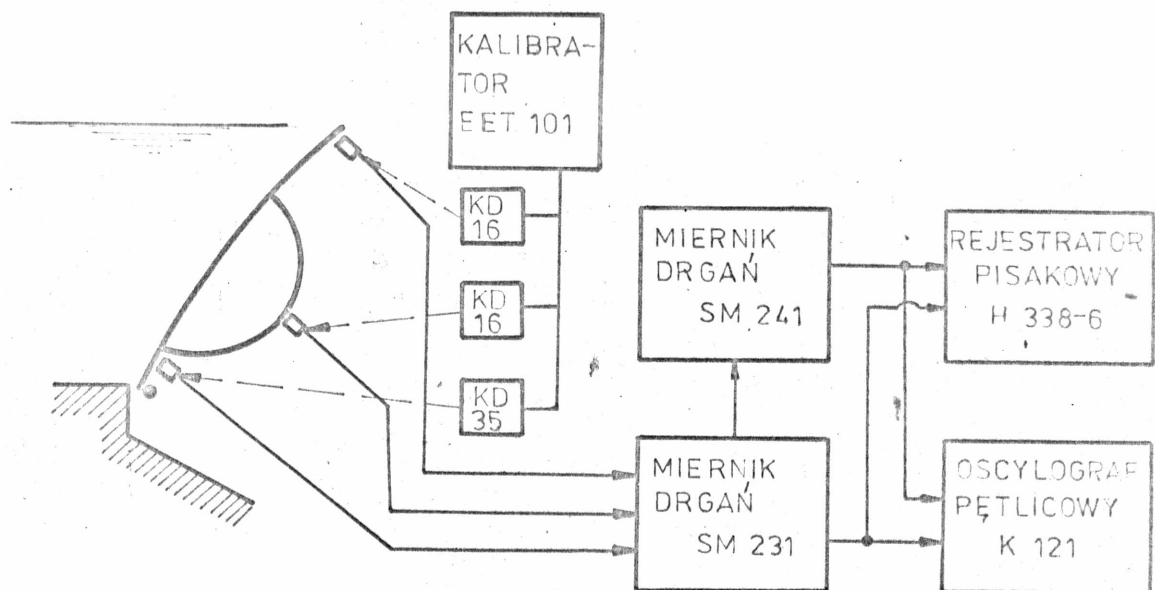
7.2. Zastosowana aparatura i dokładność przeprowadzonych badań

Przeprowadzone badania zamknięcia w Słupie obejmowały pomiary częstotliwości i amplitudy jego drgań w powietrzu. W przypadku modelu wykonanego z winiduru wykonano pomiary tych samych parametrów dla klapy drgającej w powietrzu, a także w wodzie stojącej i podczas przepływu. Drgania w powietrzu i w stojącej wodzie generowane były albo przez przyłożenie obciążenia dynamicznego, albo przez uwolnienie konstrukcji spod działania siły statycznej. Pomiary przeprowadzono za pomocą czujników umieszczonych w wybranych punktach konstrukcji i połączonych z aparaturą wzmacniającą i rejestrującą. Przed wykonaniem pomiarów

każdy z czujników został wytarowany aby umożliwić liczbowe określenie amplitudy. Sprawdzone również, czy drgania zamknięcia nie są zakłócone przez czynniki zewnętrzne.

Do pomiaru parametrów drgań użyta została następująca aparatura, której schemat połączenia pokazany jest na rysunku 7.1:

- wzmacniacze całkujące miernika drgań produkcji RFN typu SM231 i SM241,
- piezoelektryczne czujniki drgań produkcji NRD typu KD16 i KD35, o zakresie pomiarowym częstotliwości 5 - 10 000 Hz oraz przyspieszeń 0,01 - 10 000 ms⁻²,
- oscylograf pętlicowy produkcji ZSRR typ K121 z zapisem na taśmie fotograficznej o szerokości 12 cm,
- rejestrator pisakowy H338-6 produkcji ZSRR,
- stolik wzorcujący (kalibrator) EET101.



Rys.7.1. Schemat połączenia aparatury pomiarowej.

Wytworzone przez piezoelektryczne czujniki sygnały pomiarowe wzmocnione następnie przez wzmacniacze całkujące miernika, rejestrowane były głównie na oscylografie pętlicowym K121. Rejestrator H338-6 stosowany był dla zapisu niskich częstotliwości od 0 do 60 Hz, gdyż w tym zakresie jego charakterystyka jest liniowa.

Ocenę dokładności badań przeprowadzono dla modelu kłapy wykonanego z winiduru, którą to oceną objęto błędy aparatury przy pomiarze częstotliwości i amplitudy oraz błędy wynikające z niedokładności wykonania kłapy, mające wpływ na oba wyżej wymienione parametry.

Błąd względny aparatury określony został na podstawie gwarantowanych przez wytwórców, granicznych wartości błędów poszczególnych przyrządów i wynosi:

1. Przy pomiarze częstotliwości $\varepsilon_1 = \pm 5\%$,
2. Przy pomiarze amplitudy $\varepsilon_2 = \pm \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \varepsilon'''^2 + \varepsilon^{IV^2} + \varepsilon^V^2} = 6\%$

gdzie:

$$\varepsilon' = \pm 2\% - \text{błąd czujnika KD16, KD35}$$

$$\varepsilon'' = \pm 1\% - \text{błąd wzmocnienia napięcia przez wzmacniacz SM231(241)}$$

$$\varepsilon''' = \pm 2\% - \text{błąd przesunięcia fazowego na wzmacniaczu}$$

$$\varepsilon^{IV} = \pm 5\% - \text{błąd kolibratora EET101}$$

$$\varepsilon^V = \pm 2\% - \text{błąd pętliczki rejestratora.}$$

Niedokładności wykonania kłapy są kolejnym źródłem błędów, a ich wartości, wyznaczone drogą wielokrotnych, bezpośrednich pomiarów, są następujące:

$$\varepsilon_l = \pm 0,3\% - \text{błąd wymiarów zewnętrznych kłapy } 387 \times 980 \pm 1 \text{ mm}$$

$$\varepsilon_t = \pm 2,8\% - \text{błąd grubości powłok i przepon } 3,5 \pm 0,1 \text{ mm}$$

$\varepsilon_E = \pm 2,3\%$ - błąd modułu Younga 4290 ± 100 Pa

$\varepsilon_\nu = \pm 0,5\%$ - błąd współczynnika Poissona $0,371 \pm 0,002$

$\varepsilon_\rho = \pm 0,1\%$ - błąd gęstości materiału kłapy $1,427 \pm 0,002$ g/cm³.

Określenie wpływu błędów wynikających z niedokładności wykonania kłapy na wartość błędu granicznego częstości i amplitudy należy przeprowadzić w oparciu o równanie drgań konstrukcji.

Ponieważ równanie to istnieje tylko w zapisie macierzowym metody elementów skończonych, zastosowano do oszacowania poszukiwanych błędów wzory i macierze opisane w rozdziale 4. Postępowanie to wymagało oszacowania błędów powstałych w wyrazach macierzy sztywności i mas, a następnie przeanalizowania w jakim stopniu wykonywane na tych macierzach operacje: odwracania, mnożenia i obliczania wartości własnych mają wpływ na wartość błędu rozwiązania, tj. częstości i amplitudy drgań.

Do wymienionych obliczeń wykorzystano przede wszystkim pojęcie normy macierzy $\| [A] \|$ zdefiniowanej następująco [81]:

$$\| [A] \| = \max_{i,j} |a_{ij}| \quad (7.1)$$

oraz wprowadzono następujące oznaczenia:

$[\Delta A]$ - macierz błędów bezwzględnych macierzy $[A]$

$[F_A] = \left[\frac{\Delta A}{A} \right]$ - macierz błędów względnych spełniająca warunek

$$\| [F_A] \| < 1 \quad (7.2)$$

Błędy macierzy sztywności określono dla wyrazów leżących na głównej przekątnej, odpowiadających przemieszczeniom v i w , które mają największy wpływ na rozwiązanie macierzowego równania drgań. Skorzystano więc ze wzorów (4.11) i (4.21) opisujących sztywność tarczy i płyty i w oparciu o znane z teorii pomiaru zależności [58] obliczono, że maksymalny błąd względny

macierzy sztywności $\| [F_k] \| = \pm 13,8\%$. W podobny sposób oszacowano błąd macierzy mas $\| [F_M] \| = \pm 3,5\%$.

Odwracanie macierzy sztywności powoduje narastanie błędu, który można obliczyć w oparciu o następujące wzory:

$$\begin{aligned} [K] + [\Delta K] &= [K] ([I] + [F_k]) = [B] \\ ([K] + [\Delta K])^{-1} &= [K]^{-1} ([I] + [F_k])^{-1} = [B]^{-1} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Korzystając następnie z lematu podanego w [81]:

$$\| ([I] + [F])^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - \| [F] \|} \quad (7.4)$$

można zapisać, że błąd względny macierzy odwróconej wyrażony jest zależnością:

$$\begin{aligned} \frac{\| [B]^{-1} - [K]^{-1} \|}{\| [K]^{-1} \|} &= \frac{\| [B]^{-1} [K]^{-1} ([K] - [B]) \|}{\| [K]^{-1} \|} \leq \\ &\leq \frac{\| [K]^{-1} \| \| [B]^{-1} ([K] - [B]) \|}{\| [K]^{-1} \|} = \| [B]^{-1} ([K] - [B]) \| = \\ &= \| [K]^{-1} ([I] + [F_k])^{-1} ([K] - [K]([I] + [F_k])) \| = \\ &= \| ([I] + [F_k])^{-1} [K]^{-1} ([K] - [K] + [K][F_k]) \| = \\ &= \| ([I] + [F_k])^{-1} [F_k] \| \leq \| ([I] + [F_k])^{-1} \| \| [F_k] \| \leq \\ &\leq \frac{\| [F_k] \|}{1 - \| [F_k] \|} = \| [F_{1/k}] \| \end{aligned} \quad (7.5)$$

Dla $\| [F_k] \| = 0,138$ obliczony na podstawie wzoru (6.25) błąd względny wyniesie $\| [F_{1/k}] \| = 0,16 = 16\%$.

Pomnożenie odwróconej macierzy sztywności przez macierz mas powiększy ten błąd zgodnie z następującym równaniem:

$$\begin{aligned} [K]^{-1}([I] + [F_{1/k}]) [M]([I] + [F_M]) &= \\ &= [K]^{-1}[M]([I] + [F_{1/k}] + [F_M]) \end{aligned} \quad (7.6)$$

a więc błąd iloczynu jest równy sumie błędów poszczególnych elementów obu macierzy. W omawianym przypadku wyniesie on $\| [F_{1/k}] \| + \| [F_M] \| = 16\% + 3,5\% = 19,5\%$.

Obliczenie wartości własnych metodą iteracyjną polega na wykonywaniu następujących operacji:

$$[A]\{X\}_{n-1} = \{X\}_n \quad (7.7)$$

i sprawdzeniu warunku:

$$\frac{\| \{X\}_n - \{X\}_{n-1} \|}{\| \{X\}_n \|} \leq 0.001 \quad (7.8)$$

gdzie $[A]$ jest iloczynem $[K]^{-1}[M]$, a $\{X\}_n$ wektorem przemieszczeń $\{\delta_0\}$ konstrukcji, obliczonym w n -tej operacji, zaś $\{X\}_n$ tym samym wektorem po znormalizowaniu. Jeśli warunek zostanie spełniony, wówczas zgodnie z rozdziałem 4 określony element wektora $\{X\}_n$ jest wartością własną λ , natomiast częstość własna równa jest $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Ze wzorów (7.7) i (7.8) wynika, że błąd wektora $\{X\}_n$ jest niezależny od ilości iteracji, a wprost zależy od błędu macierzy $[A]$. Oznacza to, że mierzone parametry drgań mają następujące błędy względne, pochodzące z niedokładnego wykonania konstrukcji:

- błąd wektorów amplitud $\varepsilon_2 = \pm 19,5\%$
- błąd częstości $\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_2 = \pm 9,8\%$.

Graniczny (maksymalny) błąd pomiarów drgań modelu kłapy uzyskuje się przez dodanie do obliczonych wartości, błędów granicznych aparatury pomiarowej. W rezultacie otrzymuje się:

1. W pomiarach częstości $\varepsilon_{\omega} = \pm (\varepsilon_1 + \varepsilon_1') = \pm 14,8\%$
2. W pomiarach postaci drgań $\varepsilon_a = \pm (\varepsilon_2 + \varepsilon_2') = \pm 25,5\%$

Opisana metoda zastosowana została również do określenia błędu pomiaru drgań kłapy zamykającej przelew zapory w Słupie. Ze względu na znacznie większą dokładność wykonania tej konstrukcji błędy pomiaru są niższe i wynoszą:

1. W pomiarach częstości drgań $\varepsilon_{\omega} = \pm 8,8\%$
2. W pomiarach amplitudy $\varepsilon_a = \pm 13,6\%$.

7.3. Zakres pomiarów i opis stanowisk badawczych

Jak wspomniano, badania przeprowadzono dla obiektu rzeczywistego na zaporze w Słupie i modelu kłapy wykonanego z winiduru.

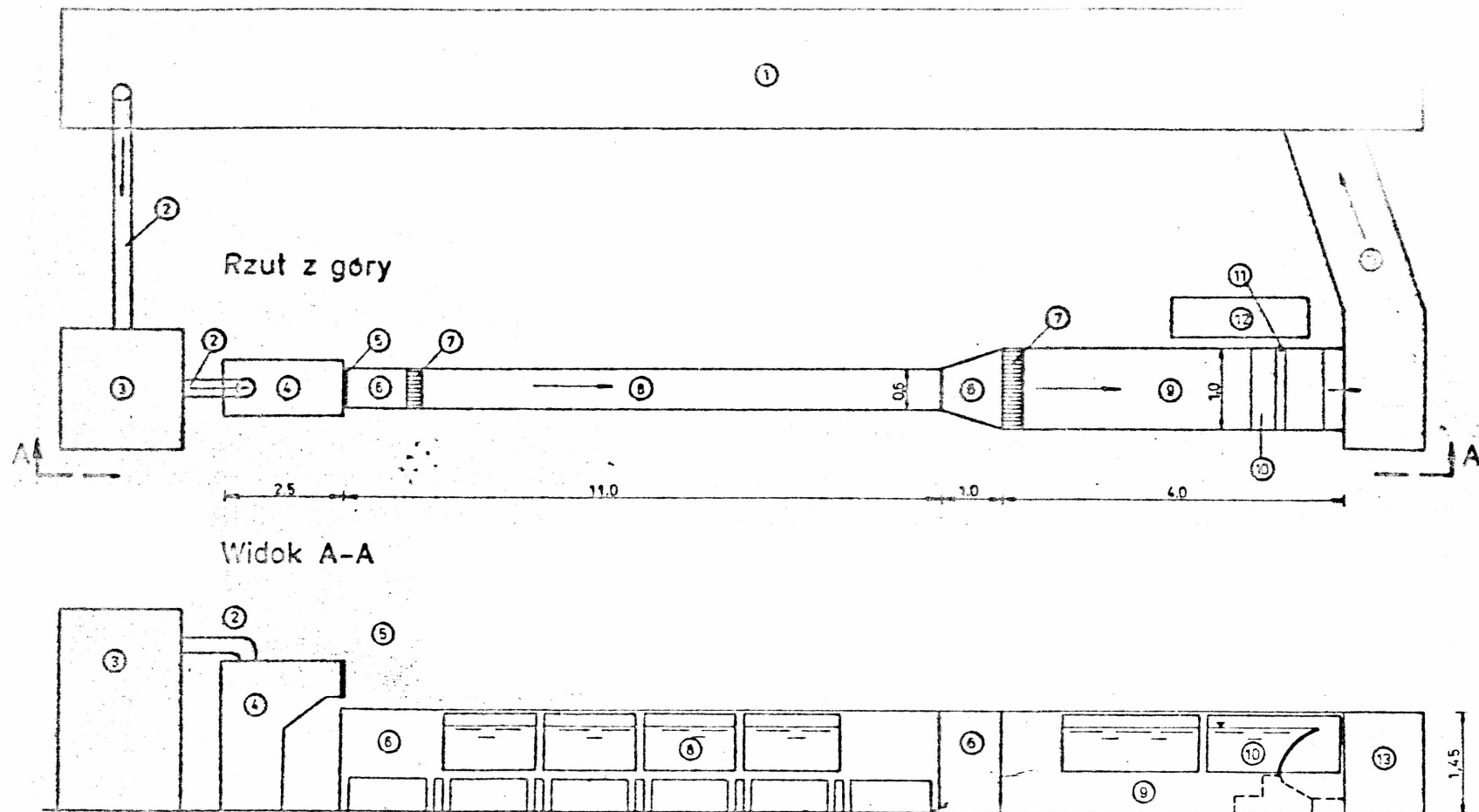
Wykonane w Słupie badania obejmowały rejestrację drgań zamknięcia, gdy zwierciadło wody układało się znacznie poniżej krawędzi progu przelewu. Pomierzono więc drgania swobodne wywołane w sposób uprzednio opisany oraz występujące w tej konstrukcji drgania samowzbudne, wywołane wiatrem.

Czujniki do pomiaru drgań rozmieszczono w dwóch rzędach: na krawędzi przelewowej w miejscach połączenia powłoki zewnętrznej z przeponami i w połowie wysokości kłapy. Badania dotyczyły dwóch położenia kłapy, tj. dla kątów nachylenia 60° oraz 30° i w obu przypadkach uzyskano takie same, niezależne od położenia zamknięcia, częstości i amplitudy drgań.

Badania drugiej konstrukcji, którą stanowiła kłapa wykonana z winiduru przeprowadzone zostały w laboratorium hydrotechnicznym Zespołu Budownictwa Wodnego Instytutu Geotechniki Politechniki Wrocławskiej. Program badań istotnie różnił się od poprzedniego, gdyż mierzono częstość i amplitudę drgań zamknięcia nie tylko w powietrzu, ale także obciążonego wodą statycznie i dynamicznie podczas przepływu. Przy obciążeniu statycznym pomiary przeprowadzono dla sześciu pochyłeń konstrukcji przyjmując położenie zwierciadła wody na poziomie krawędzi kłapy. Ten etap badań posłużył do sprawdzenia dokładności MES w obliczeniach dodanej masy wody.

Następnie pomierzono drgania przy przelewaniu się strumienia wody nad zamknięciem dla jednego kąta pochylenia kłapy i zmieniającego się wydatku wody. Ten etap miał na celu sprawdzenie czy proponowana MES może służyć do obliczania drgań własnych konstrukcji w przypadku dynamicznego jej obciążenia strumieniem wody.

Kłapa winidurowa umieszczona została w korycie żelbetowym (rys. 7.2) o szerokości 99 cm i odpowiednio uszczelniona. Uszczelnienie dolne stanowiła taśma gumowa przyklejona do progu, a uszczelnienie boczne - listwy przymocowane wzdłuż krawędzi bocznych zamknięcia. Aby nie występowały zakłócenia w procesie drgań w wyniku tarcia listew o ściany koryta pozostawiono prześwit wynoszący 0,2 mm. Wysoki prób, na którym umieszczono kłapę zabezpieczał przed bezpośrednim działaniem wody dolnej na konstrukcję. Ze względu na możliwość występowania pod kłapą podciśnienia mogącego zmienić współczynnik wydatku, a także spowodować dodatkowe drgania konstrukcji, uzupełniano prób powietrza przewodem o średnicy 6 cm. Czujniki na kłapie umoco-



1-zbiornik dolny, 2-rurociąg \varnothing 250, 3-stacja pomp, 4-skrzynia pomiarowa, 5-przetew mierniczy, 6-komora uspokajająca, 7-urządzenia uspokajające, 8-koryto hydrauliczne cz.1, 9-koryto hydrauliczne cz.2, 10-sekcja pomiarowa z modelem klapy, 11-otwory do wyprowadzenia przewodów elektrycznych, 12-stanowisko aparatury pomiarowej, 13-kanat odprowadzający.

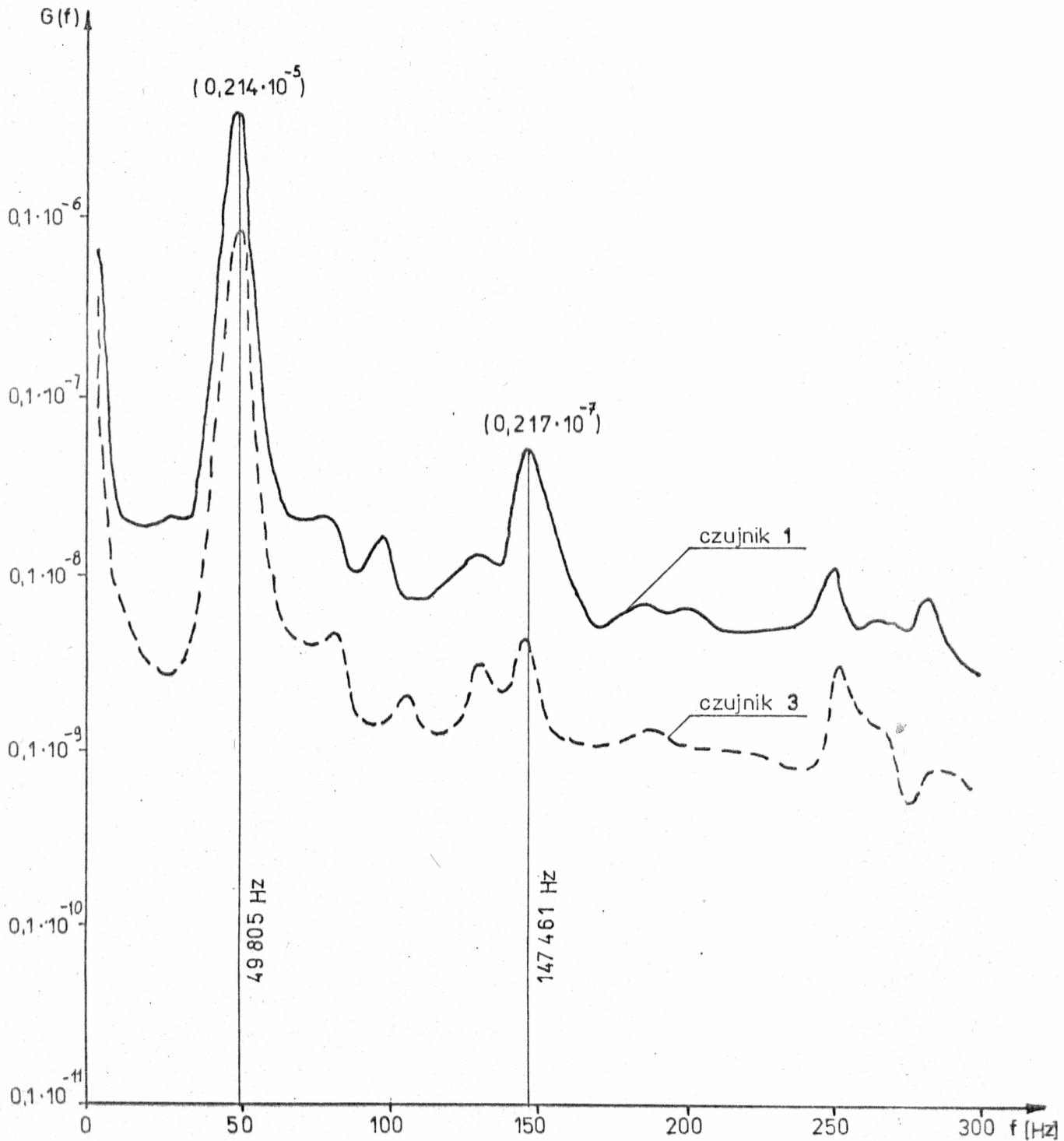
Rys.7.2. Schemat stanowiska badawczego klapy w iniekturowej.

wano od strony wody dolnej w trzech rzędach - na krawędzi górnej i dolnej oraz w środku wysokości zamknięcia. W omawianych pomiarach stosowano wyłącznie czujniki KD16 ze względu na ich nieznaczny ciężar wynoszący 9 G.

7.4. Wyniki pomiarów

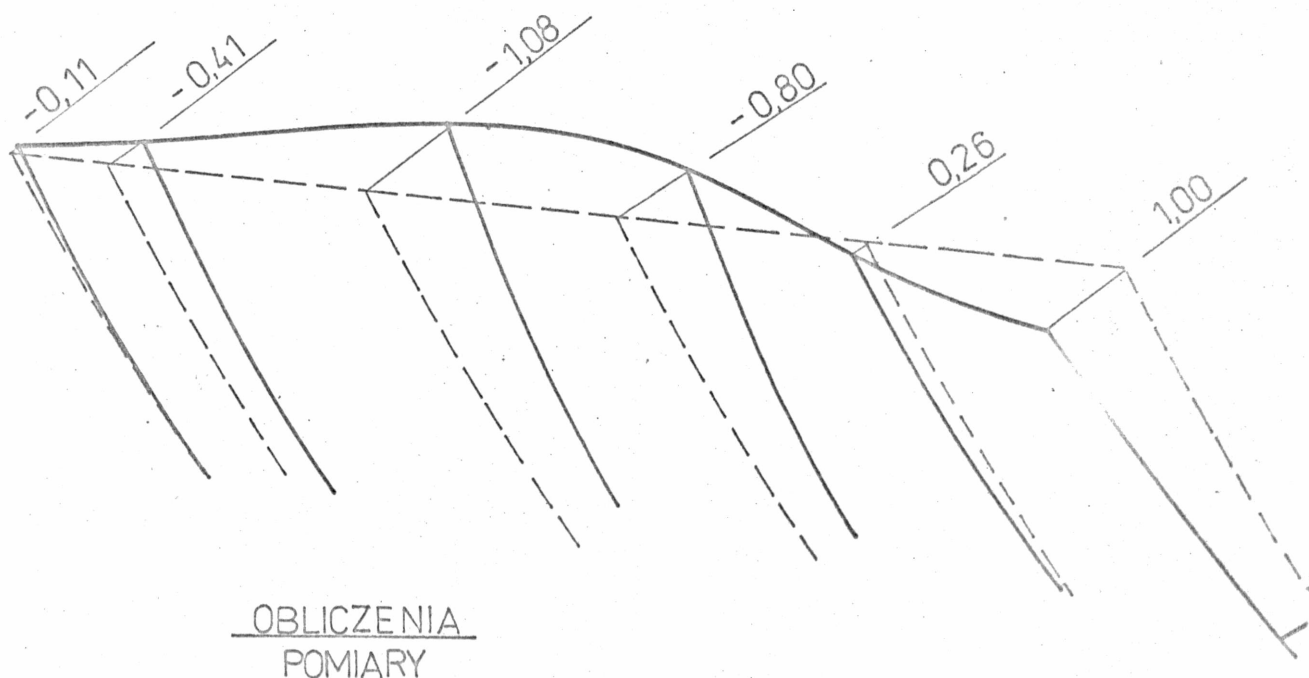
Wyniki pomiarów otrzymane z rejestratora w postaci taśm fotograficznych z przebiegami drgań poddano obróbce numerycznej wykorzystując do tych obliczeń program PULS opisany w [14]. W tym celu zamieniono czasowe przebiegi drgań w ciąg wartości liczbowych o odstępnie próbkowania 0,025 s. Wyniki będące analizą częstotliwościową (harmoniczną) drgań przedstawiono na wykresach funkcji widmowej gęstości mocy (rysunki 7.3, 7.5, 7.6). Na osi odciętych tych wykresów znajdują się częstotliwości od 0 do 300 Hz, a na osi rzędnych znormalizowane wartości funkcji gęstości mocy po wygładzeniu. Omówiony sposób opracowania wyników badań zastosowano do obu konstrukcji klapowych.

Analiza drgań zamknięcia na zaporze w Słupie, przedstawiona na rysunku 7.3 wykazała, iż konstrukcja ta posiada dwie składowe drgań harmoniczných, z których pierwsza ma częstotliwość równą 49,805 Hz, a druga 147,461 Hz charakteryzuje się znacznie niższą - bo około 10 razy - amplitudą. Stosunek amplitud dla obu składowych drgań określono na podstawie wartości gęstości mocy przed wygładzeniem wykresu, stanowiących kwadraty znormalizowanych amplitud. Wartości te podane zostały na rysunku 7.3 w nawiasach. Porównując przemieszczenia pomierzone równocześnie w wybranych punktach klapy, otrzymano przybliżoną postać drgań



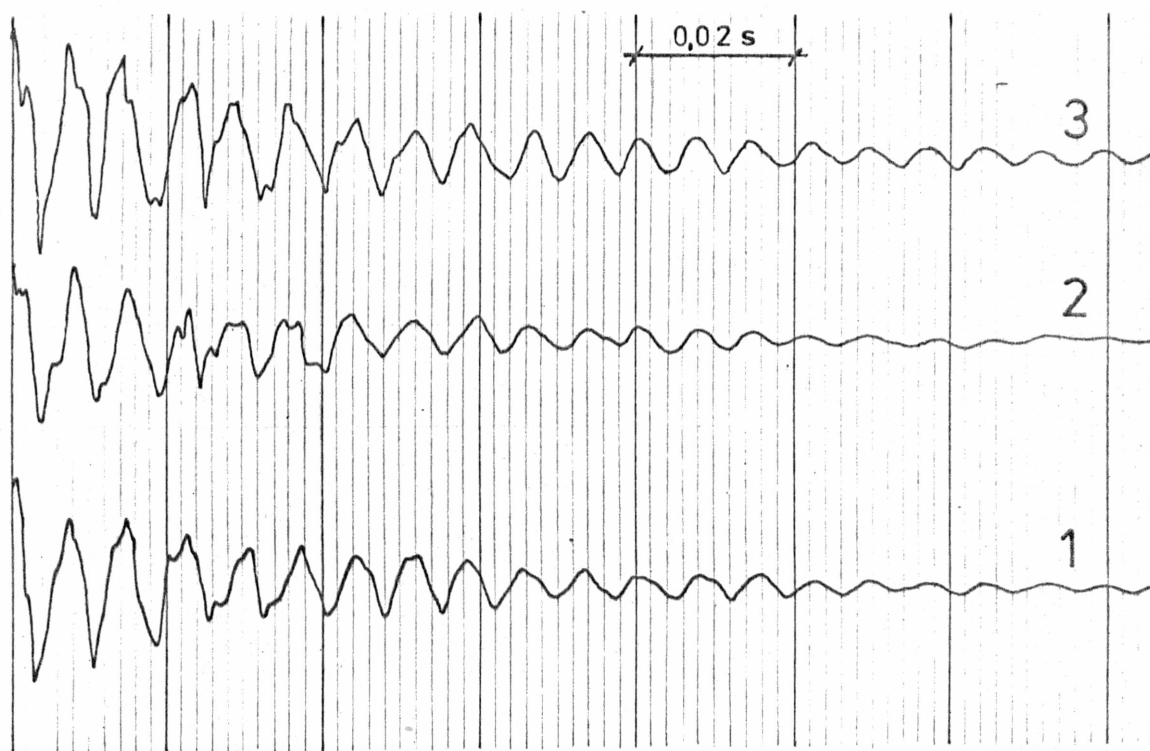
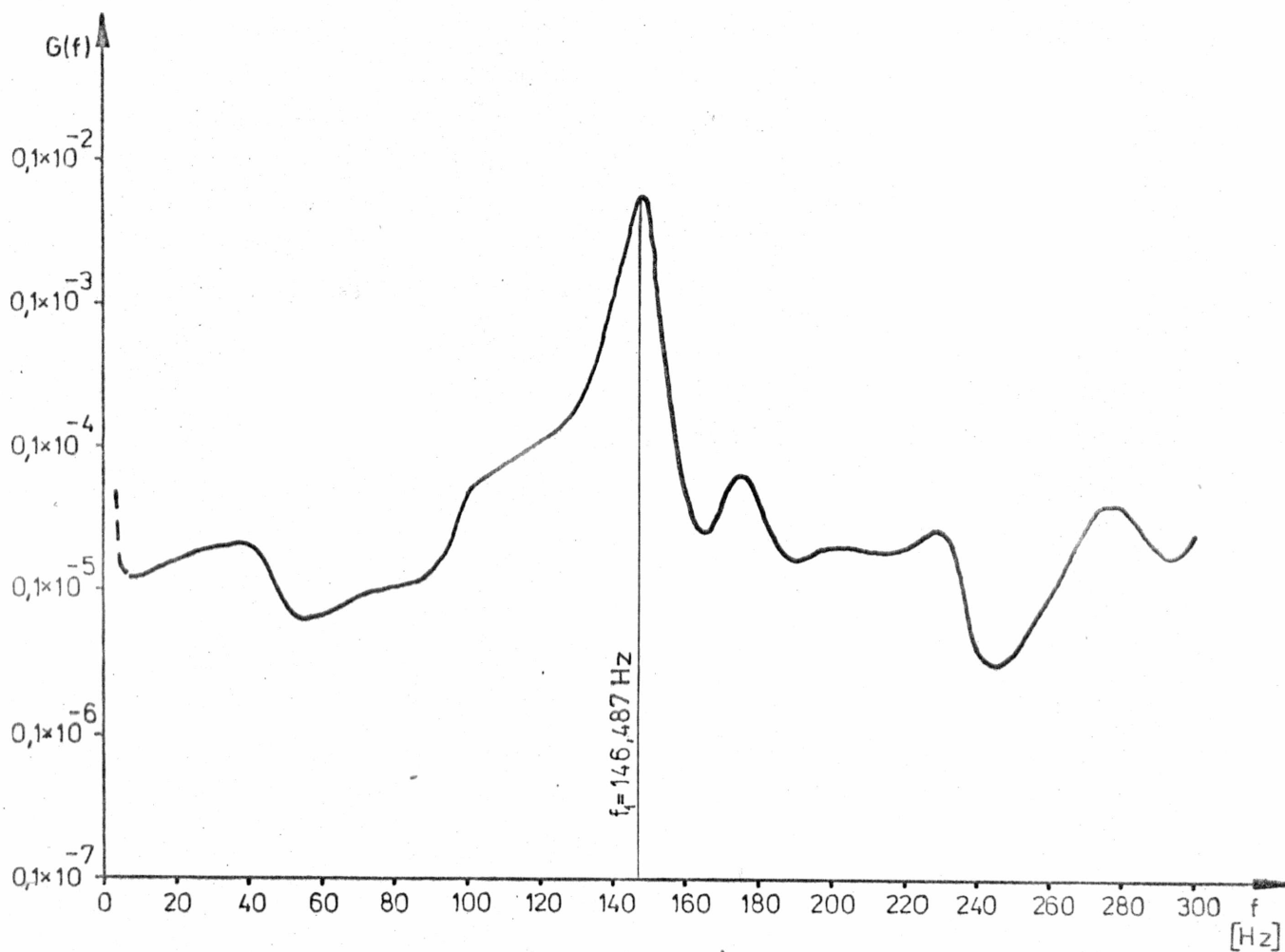
Rys. 7.3. Analiza widmowa drgań własnych zamknięcia w Słupie.

tej konstrukcji. Na rysunku 7.4 przedstawione zostały przemieszczenia górnej krawędzi klapy, prostopadłe do jej powłoki zewnętrznej. Wartości te są wprawdzie sumą wektorów amplitud dla obu składowych drgań, jednakże amplitudy odpowiadające wyższej częstotliwości są stosunkowo małe, a zatem postać drgań krawędzi można uznać za właściwą dla pierwszej częstotliwości drgań (49,805 Hz).

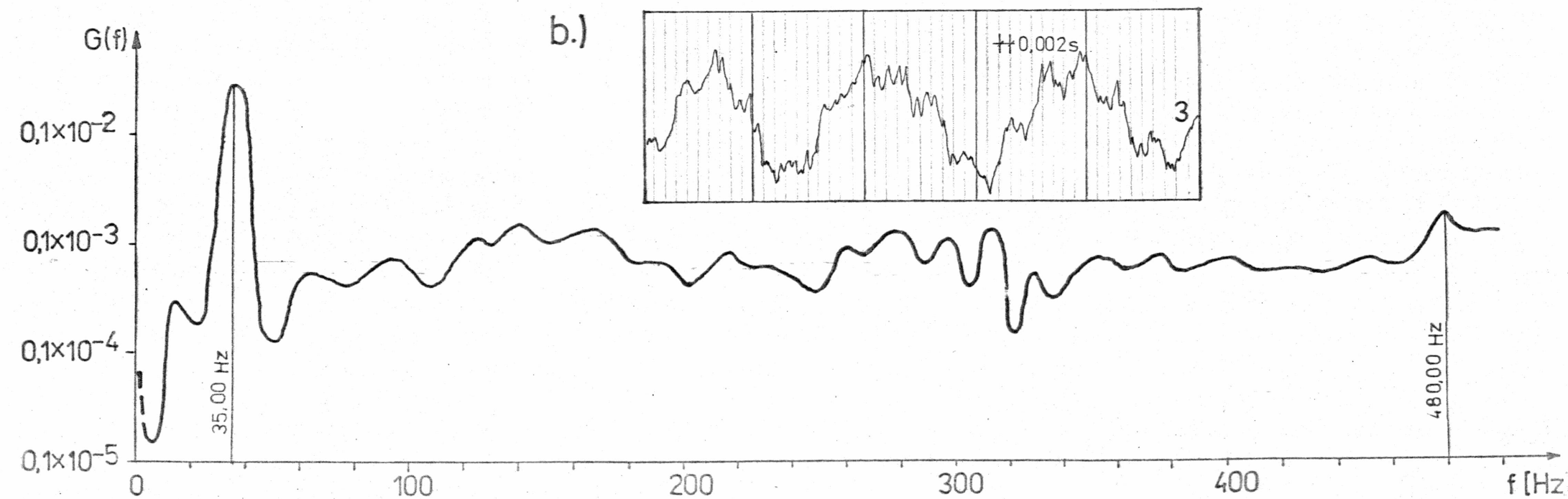
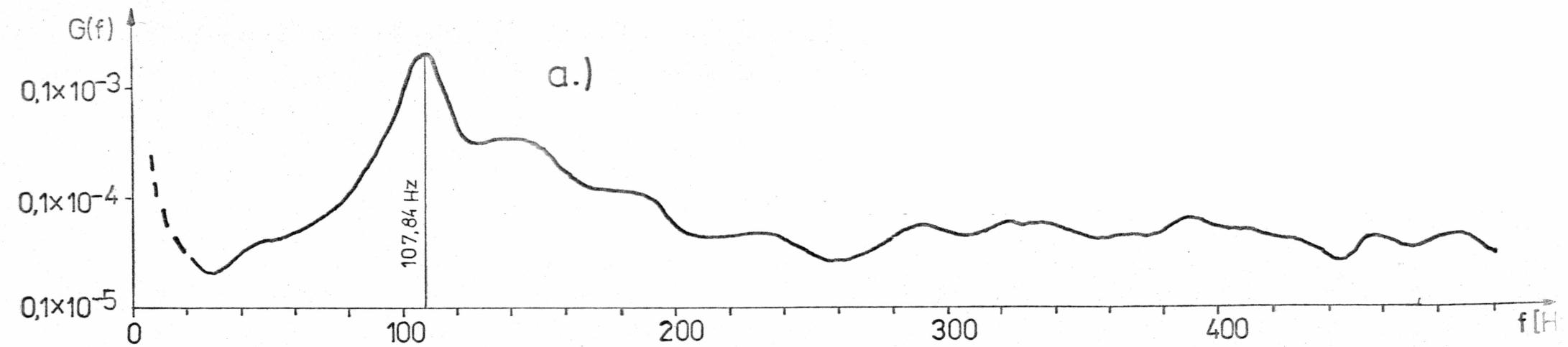


Rys.7.4. Amplitudy przemieszczeń górnej krawędzi klapy w Skupie.

Opracowanie rezultatów pomiarów drgań klapy winidurowej polegało również na sporządzeniu wykresów widmowej gęstości mocy, z których otrzymana dla drgań w powietrzu częstota wynosi 146,49 Hz (rys. 7.5). W wodzie stojącej, z wykresów sporządzonych dla wszystkich położeń zamknięcia, otrzymano drgania w przedziale od 54 do 108 Hz (tabela 1). Przykład wykresu widmowej gęstości mocy dla klapy w wodzie stojącej przy $\beta = 8^\circ$ przedstawiono na rysunku 7.6a.

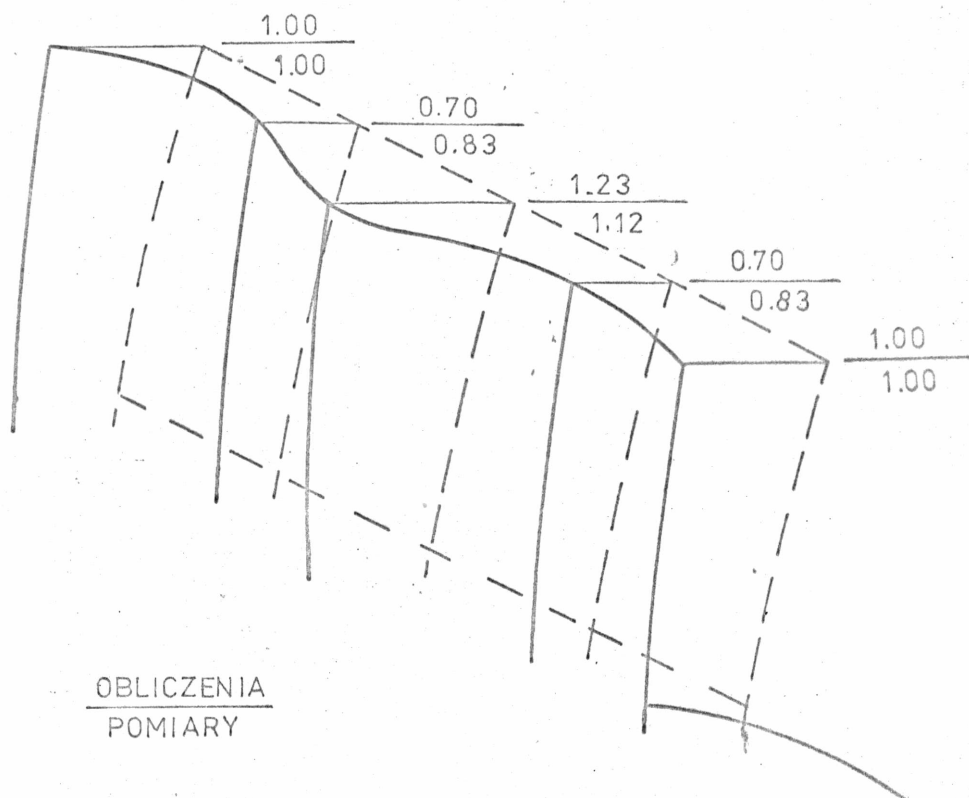


Rys.75. Analiza widmowa drgań klapy winidurowej w powietrzu; fragment zarejestrowanych drgań.



Rys.76. Analiza widmowa drgań kłapy winidurowej
 a.) drgania w wodzie $\phi = 8^\circ$;
 b.) drgania wymuszone przepływem wody; fragment zarejestrowanych drgań.

Podobne wykresy sporządzono dla wszystkich badanych przepływów wody przy ustalonym kącie nachylenia konstrukcji $\beta = 8^\circ$. Tym razem drgania zmieniały się w przedziale od 35 do 52 Hz, tabela 2, a ilustrację jednego z rozkładów częstościowych dla $\beta = 8^\circ$ i $Q = 60$ l/s stanowi rysunek 7.6b. Postacie drgań kłapy winidurowej są symetryczne, podobne dla wszystkich niezerowych przypadków drgań, tj. w powietrzu, w wodzie stojącej i podczas przepływu. Niewielkie różnice istnieją tylko w liczbowych wartościach wektorów amplitud. Charakterystyczne dla wszystkich postaci drgań, przemieszczenie górnej krawędzi kłapy przedstawiono na rysunku 7.7 na przykładzie drgań konstrukcji w powietrzu.



Rys. 7.7. Amplitudy przemieszczeń górnej krawędzi kłapy winidurowej.

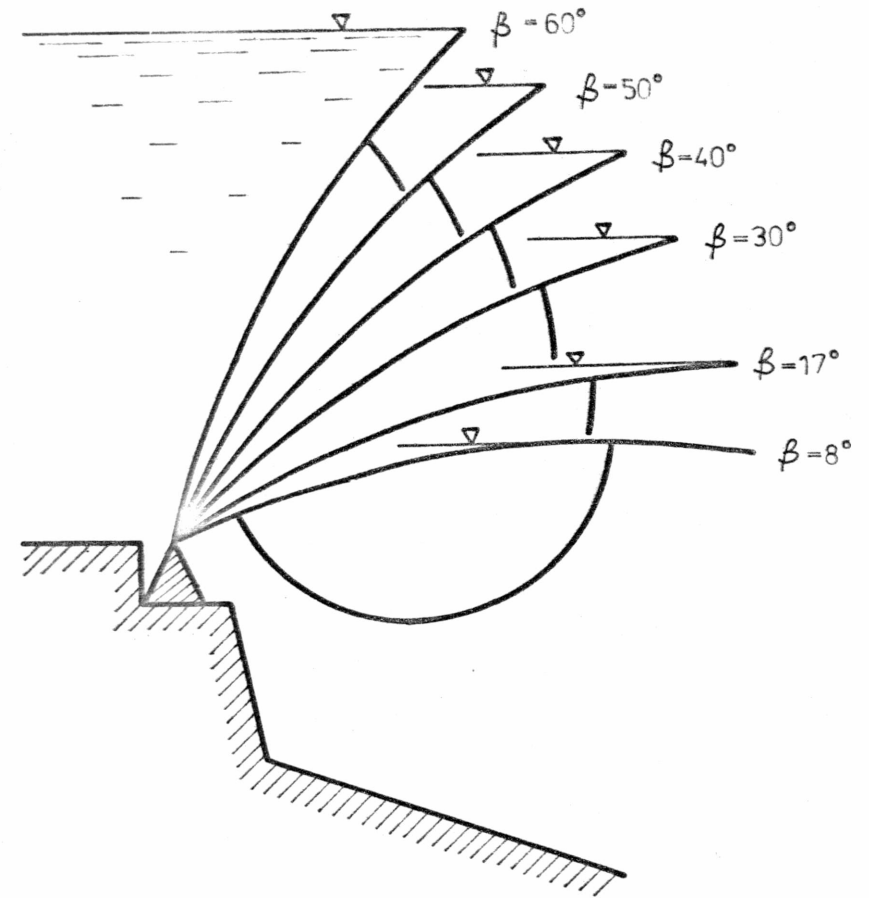
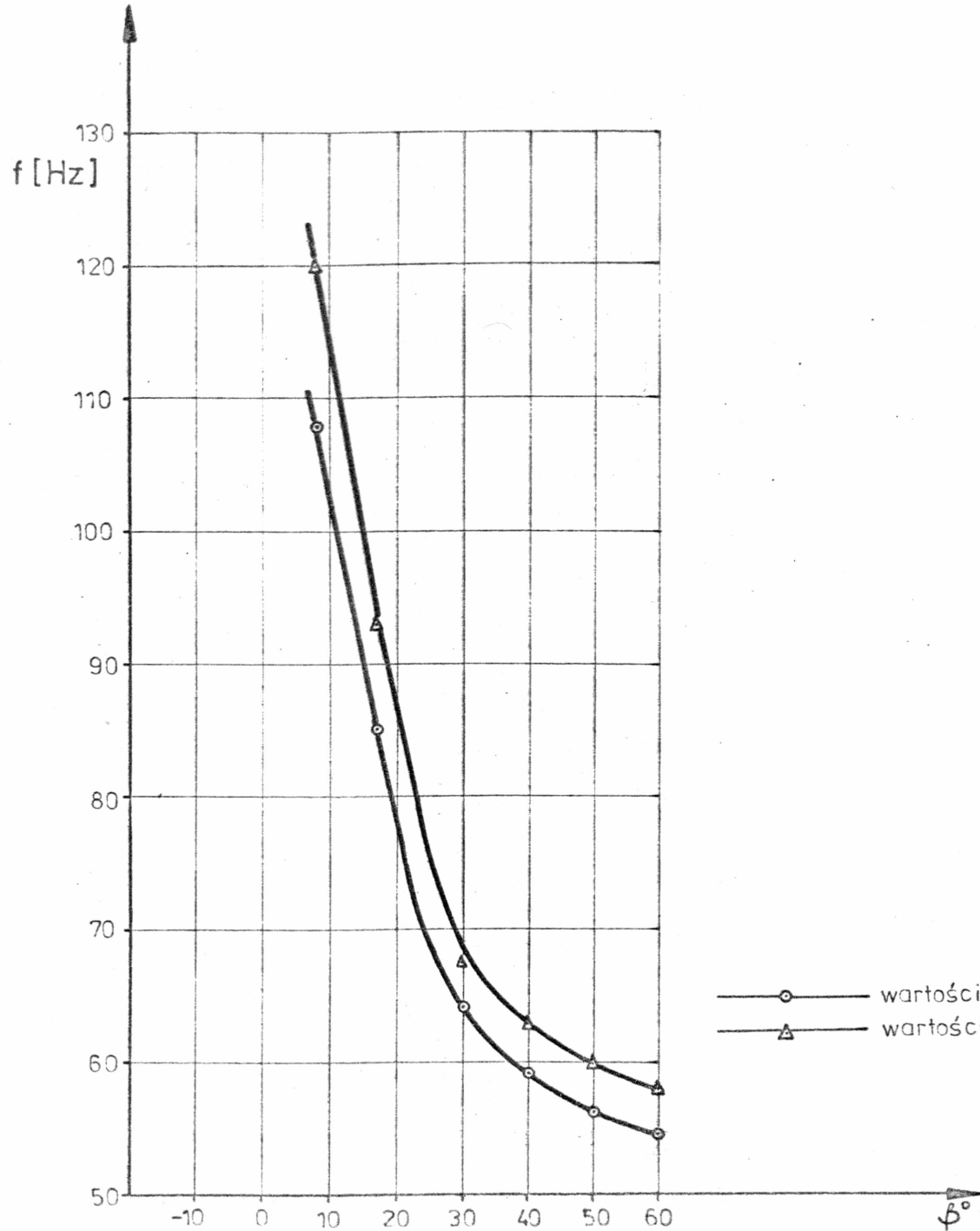
7.5. Porównanie wyników obliczeń i pomiarów

Porównanie wyników dla kłapy stanowiącej zamknięcie przelewu zapory Słup rozpoczęto od sprawdzenia zgodności postaci drgań tej konstrukcji otrzymanej z pomiarów (rys. 7.4) z postaciami drgań obliczonymi metodą elementów skończonych (załącznik 1), aby następnie porównać odpowiadające tym postaciom częstości. Wyniki okazały się zgodne z otrzymaną z MES drugą postacią drgań, której fragment odpowiadający przemieszczeniu krawędzi przedstawiono również na rys. 7.4, i dla której częstość drgań wynosi 53,35 Hz. Różnica pomiędzy wartością tej częstości, a częstością pomierzoną (49,81 Hz) wynosi 7,1% i mieści się w granicach błędu pomiaru.

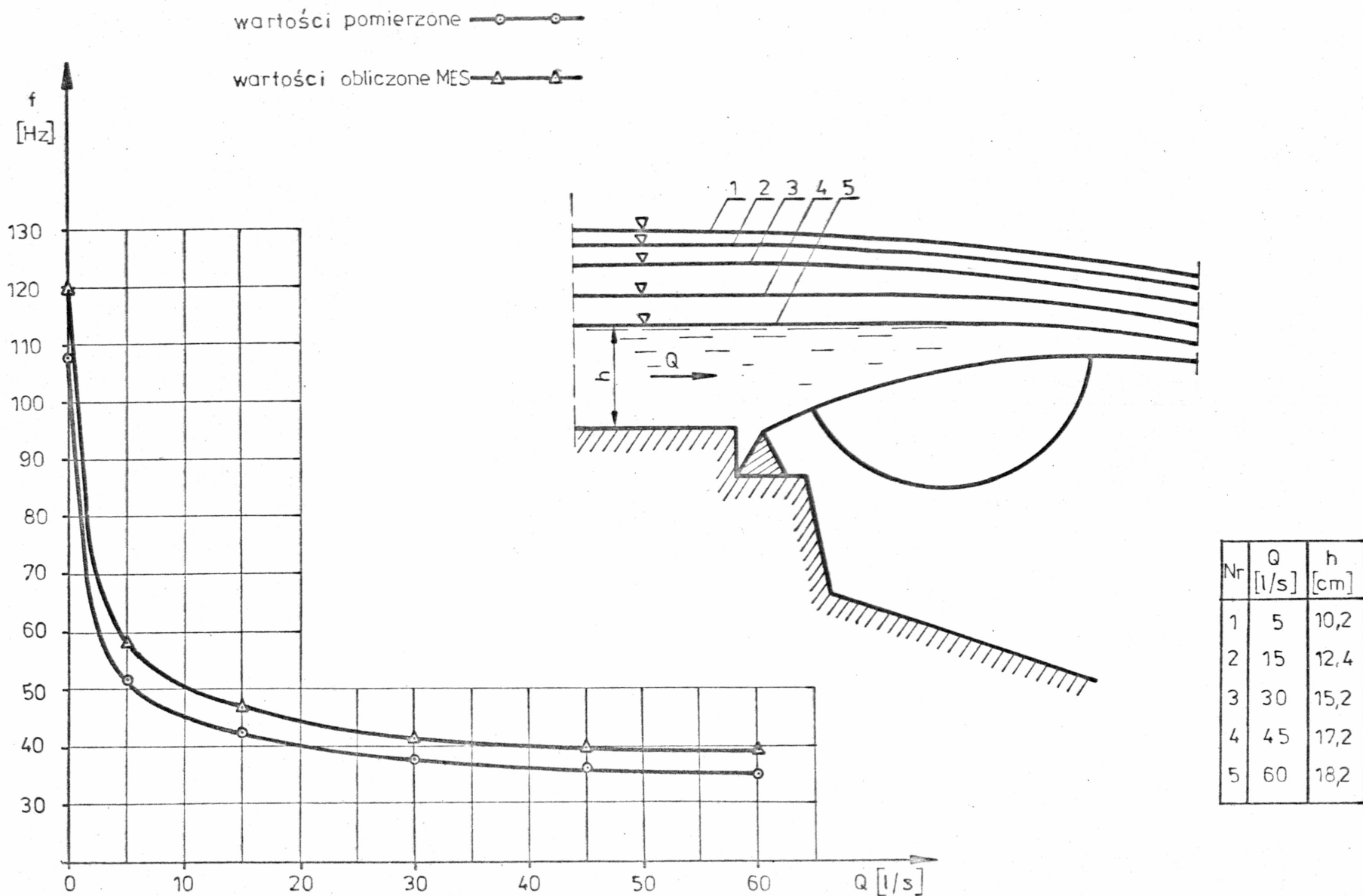
Podobny schemat postępowania zastosowano w odniesieniu do kłapy winidurowej, dla której obliczone i pomierzone przemieszczenia górnej krawędzi kłapy przedstawiono na rys. 7.7. Zgodność wyników otrzymano dla pierwszej częstości drgań z pomiarów wynoszącej 146,49 Hz i podstawowej częstości drgań (drgania symetryczne) obliczonej numerycznie i równej 167,94 Hz. Błąd pomiędzy wartością obliczoną a pomierzoną wynosi 14,4% i mieści się w granicach błędu pomiaru.

Porównanie drgań kłapy obciążonej wodą w sposób statyczny, dla wszystkich jej położań, przedstawiono w tabeli 1, w której podano także procentową różnicę pomiędzy rezultatami badań, a obliczeniami metodą elementów skończonych. Ponadto wyniki porównania przedstawiono w formie graficznej na wykresie częstości drgań w zależności od kąta pochylenia kłapy (rys. 7.8).

W podobny sposób przeprowadzono porównanie wyników drgań dla przepływu wody przez zamknięcie. Wartości pomierzonych



Rys.7.8. Zależność częstości drgań kłapy obciążonej statycznie wodą od kąta pochylenia β .



Rys. 7.9. Zależność częstości drgań kłapy od natężenia przepływu dla kąta pochylecia $\beta = 8^\circ$.

i obliczonych częstości oraz różnicę pomiędzy nimi podaną w procentach, zestawiono w tabeli 2. Sporządzono także wykres ilustrujący zmienność częstości pomierzonych i obliczonych jako funkcję natężenia przepływu wody (rys. 7.9) dla kąta pochylenia klapy $\beta = 8^\circ$.

7.6. Wnioski wynikające z porównania

Porównanie wyników obliczeń numerycznych i badań doświadczalnych pozwoliło na sformułowanie kilku szczegółowych wniosków:

1. Różnice jakie zanotowano pomiędzy obliczonymi, a pomierzonymi wartościami parametrów drgań dla obu rozpatrywanych konstrukcji mieszczą się w granicach błędu pomiaru, a zatem można uznać, że metoda elementów skończonych jest metodą wystarczająco dokładną w obliczeniach częstości i amplitud drgań klapy soczewkowej.
2. Wpływ wody współdrzającej z konstrukcją zaznacza się bardzo wyraźnym obniżeniem częstości drgań zamknięcia. Masa dodana wody współdrzającej z konstrukcją maleje wraz ze zmniejszaniem kąta pochylenia zamknięcia, a rośnie ze wzrostem grubości warstwy przelewowej.
3. Wzbudzone w powietrzu drgania klapy stanowiącej zamknięcie przelewu zapory w Słupie posiadają dwie składowe harmoniczne drgań, z których pierwsza odpowiada drugiej częstości własnej, obliczonej programem PROMAN. Stwierdzono podczas badań występowanie drgań o podstawowej, najniższej częstości wynoszącej 22 Hz otrzymanej z metody elementów skończonych.

4. Jak wynika z rozkładu częstościowego, model kłapy wykonany z winiduru posiada praktycznie tylko jedną, podstawową częstość drgań zarówno w powietrzu, jak i w wodzie stojącej (rys. 7.5).
5. W pomiarach drgań wymuszonych przepływem wody otrzymano oprócz podstawowej, również inną składową drgań, charakteryzującą się wysoką częstością wynoszącą ok. 480 Hz i bardzo małą amplitudą (rys. 7.6b). Pojawienie się tych drgań jest wynikiem działania siły wymuszającej, którą w tym przypadku był przepływ wody.

8. UWAGI I WNIOSKI KOŃCOWE

Praca jest pierwszą próbą określenia drgań własnych klapowego zamknięcia soczewkowego. Do rozwiązania tego zagadnienia zastosowana została, z opisanymi w pracy modyfikacjami, metoda elementów skończonych. Obiektami, na których sprawdzono działanie metody i które poddano opisanym w pracy badaniom doświadczalnym były - zamknięcie stalowe przelewu zapory w Słupie oraz winidurowa klapa soczewkowa.

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń i pomiarów można przedstawić następujące wnioski końcowe.

1. Potwierdzona została teza o możliwości zastosowania metody elementów skończonych do obliczania drgań własnych klapy soczewkowej zarówno w powietrzu jak i obciążonej strumieniem przelewającej się wody.

2. Przedstawione w rozdziale czwartym macierze sztywności i mas umożliwiają rozwiązanie zagadnienia drgań własnych konstrukcji w powietrzu.

3. Diagonalizacja macierzy mas, przeprowadzona zgodnie z równaniem (4.55), jest skutecznym sposobem uniknięcia trudności związanych z występowaniem fikcyjnej sztywności skręcania K_z w macierzach elementów powłoki. Jej wprowadzenie prawie dwukrotnie zmniejsza wymagania dotyczące obszaru pamięci maszyny cyfrowej przy realizacji obliczeń programem PROMES.

4. Analiza zmian ciśnienia powstającego w wodzie wskutek drgań konstrukcji wykazała, że ciśnienie maleje bardzo szybko i zanika zupełnie w odległości mniejszej niż 0,5 całkowitej głębokości wody.

5. Określenie macierzy dodanej masy wody, a następnie połączenie jej z macierzą masy konstrukcji umożliwiło wyprowadzenie równania dobrze opisującego wspólne drgania konstrukcji i wody

$$([\tilde{M}] + [\tilde{M}_W]) \frac{\partial^2 \{\delta\}}{\partial t^2} + [K]\{\delta\} = 0$$

Rozwiązanie tego równania prowadzi do otrzymania częstości i postaci drgań własnych konstrukcji kłapy obciążonej statycznie lub dynamicznie wodą.

6. Masa wody współdrzającej z zamknięciem wyraźnie wpływa na drgania obniżając kilkakrotnie ich częstość.

7. Programy służące do obliczania częstości i postaci drgań konstrukcji w powietrzu i w wodzie to jest PROMES i MASTES nadają się do obliczania drgań własnych nie tylko zamknięć kłapowych, ale także innych typów zamknięć pod warunkiem, że daną konstrukcję czy też obszar wody można przedstawić za pomocą opisanych w pracy elementów.

8. Weryfikacja przedstawionej metody, przeprowadzona na podstawie pomiarów w naturze i na modelu wykazała, że metoda ta umożliwia obliczenie częstości i amplitudy drgań własnych kłapy z wystarczającą dla praktyki dokładnością.

9. Porównywanie drgań własnych zamknięcia, określanych przedstawioną metodą, z częstością siły wymuszającej stwarza możliwość takiego projektowania konstrukcji, aby jej drgania odbywały się poza strefą rezonansową.

10. Należy w dalszym ciągu kontynuować prace badawcze mające na celu określenie charakterystyk wszystkich rodzajów sił wzbudzających, których znajomość umożliwi obliczanie drgań wymuszonych zamknięcia klapowego.

9. BIBLIOGRAFIA

- [1] Abelev, A.S., Dolnikov, L.L.: Investigation of Nonstationary Hydrodynamic Forces Induced by a Plate Oscillating in Liquid Flow (Two-Dimensional Problem), XIV Congress IAHR, Paris 1971.
- [2] Abelev, A.S., Dolnikov, L.L.: Experimental Investigations of Vertical Lift Gates. IUTAM/IAHR Symposium on Flow Induced Structural Vibrations, Karlsruhe 1972.
- [3] Allersma, E.: Virtual Mass of a Submerged Sluice Gate, Delft Hydraulics Laboratory Publication, No.18, Delft 1959.
- [4] Ando, A.: Vibration Analysis Program of Submerged Structure by Finite Element Method, Japan Shipbuilding and Marine Engineering, Vol. 12, No.3, 1978.
- [5] Appel, D.W., Stanford, Ch., Uppal, H.: Vibration Problems in Hydraulic Structures. Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, Nov. 1961.
- [6] Boretti, Z.: Konstrukcje stalowe w budownictwie wodnym. Arkady, Warszawa 1968.
- [7] Boretti, Z.: Cienkościennie konstrukcje stalowe zamknięć budowli wodnych w Polsce, Archiwum Hydrotechniki 2/62.
- [8] Boretti, Z.: Obliczenie i badania modelowe kłapy kolankowej. Gospodarka Wodna 3/61.
- [9] Čabelka, J., Kunstatsky, J.: Jezy, Praha 1966.
- [10] Campbell, F.B.: Vibration Problems in Hydraulic Structures. Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, Mar. 1961.
- [11] Chopra, A.K.: Earthquake Analysis of Complex Structures. Applied Mechanics in Earthquake Engineering, AMD, Vol. 8, 1974.

- [12] Chopra, A.K.: Hydrodynamic Pressures on Dams during Earthquakes. Proc ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division, EM6, Dec. 1967.
- [13] Chudzikiewicz, A.: Statyka klap napędzanych jednostronnie, Archiwum Hydrotechniki 2/54.
- [14] Coxon, R.E., Angelin, S.V., Wardle, D.G.: Stoplog Closure-Model Prototype Correlation, Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, HY2, 1973.
- [15] Czaja, E.: Jazy klapowe, ich zalety i wady, możliwość stosowania w warunkach rzek polskich. Seminarium SITWM nt. Optymalne rozwiązania jazów na dużych i średnich rzekach, Warszawa 22 listopada 1976.
- [16] Di Silvo, G.: Self-Controlled Vibration of Cylinder in Fluid Stream. Proc. ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division, EM2, April 1969.
- [17] Dungar, R., Severn, R.T., Taylor, P.R.: Vibration of Plate and Shell Structures using Triangular Finite Elements. Journal of Strain Analysis, Vol. 2, No. I, 1967.
- [18] Fanti, K. i inni: Budowle Piętrzące. Arkady, Warszawa 1972.
- [19] Fanti, K.: Analiza niektórych zjawisk występujących przy przepływie wody przez zamknięcie klapowe. Politechnika Warszawska 1973 r., Instytut Zaopatrzenia w Wodę Budownictwa Wodnego. Ujęcia Wody i wybrane zagadnienia hydrotechniczne.
- [20] Flagestad, K., Angelin, S.: Vibration of Arched Stop-Logs Immersed in Streaming Water. IARH IX, Dubrovnik 1961.
- [21] Flügge, W.: Powłoki - obliczenia statyczne. Arkady, Warszawa 1972.

- [22] Franke, P.G., Valentin, F.: Amplitude-Dependent Frequency of an Oscillating Cylinder in a High-Velocity Flow. XIV Congress IAHR, Paris 1971.
- [23] Gallagher, R.H.: Finite-Element-Analysis. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg 1976.
- [24] Goncharov, L.A., Semenov, V.M.: Field Investigations of Dam and Gate Vibrations, IUTAM/IAHR Symposium of Flow-Induced Structural Vibrations, Karlsruhe 1972.
- [25] Grčić, J.: Predetermination of Vibration Positions of a Flap Gate. X Congress IAHR, London 1963.
- [26] Gsaenger, A., Bretschneider, H.: Die Fischbauchklappe der Lechstaustufe 2 - Prem. Wasserwirtschaft, 62. Jahrgang, Heft 12, Dezember 1972.
- [27] Hardwick, J.D.: Flow-Induced Vibration of Vertical-Lift Gate. Journal of the Hydraulics Division, Proc. ASCE, HY5, 1974.
- [28] Hartlen, R.T., Currie, I.G.: Lift-Oscillator Model of Vortex-Induced Vibration. Proc. ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division, EM5. Oct. 1970.
- [29] Hartung, F.: Gedanken zur Gestaltung von Klappenwehren. Wasserwirtschaft 65, Nr 9, 1975.
- [30] Haszpra, O.: Modeling Hydroelastic Vibrations, Akademia Kiado, Budapest 1978,
- [31] Haszpra, O.: Verification of Hydroelastic Similitude Criteria. Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, April 1976.
- [32] HYDROPROJEKT CBS i PBW: Laboratoryjne badania modelowe klap niezatopionych. Maszynopis, Warszawa 1978..

- [33] HYDROPROJEKT CBS i PBW: Założenia dla kłapy: Mietków, Jeziorsko, Niedzica, Klimówka. Rękopis, Warszawa 1975.
- [34] Jermař, F.: Jezy hydrostatické a jezy automatické s vyvaženim. SNTL Praha 1956.
- [35] Keir, G., Unny, T., Hill, H.: Pressure Fluctuations on Submerged Sluice Gate. Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, HY6, Nov. 1969.
- [36] Knapp, F.H.: Ausfluss, Überfall und Durchfluss im Wasserbau. G.Braun, Karlsruhe 1960.
- [37] Kolkman, P.A.: Flow-Induced Gate Vibrations. Prevention of Self-excitation. Computation of dynamic gate behaviour and the use of models, Hydraulics Laboratory Publications, No. 164, Delft 1976.
- [38] Kolkman, P.A.: Analysis of Vibration Measurements on an Underflow Type of Gate. X Congress IAHR, London 1963.
- [39] Kostecki, S.: Coupled Vibrations of the Tilting Gate and Surrounding Water. XX Congress IAHR, Moscow 1983.
- [40] Kostecki, S.; Szczepanik, R.: Rozwiązywanie dużych układów równań z blokowymi macierzami rzadkimi. Informacje i Komunikaty ZETO, Nr 3, Wrocław 1981.
- [41] Kostecki, S., Winter, J.: Dynamika niezatopionych soczewkowych zamknięć kłapowych. Raport ser. SPR nr 139, Politechnika Wrocławska, Instytut Geotechniki, Wrocław 1981.
- [42] Kowalczyk, B.: Macierze i ich zastosowanie. Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa 1976.
- [43] Kruppa, C.: Beitrag zum Problem der Hydrodynamischen Tragheitsgrössen bei Elastischen Schiffschwingungen. Schiffstechnik, Jan. 1962.

- [44] Kruszewski, J. i inni: Drgania giętkie kadłubów okrętowych. Mechanika i Komputer, tom 1, PAN, Warszawa 1978.
- [45] Kulka, H.: Der Eisenwasserbau. Verlag W. Ernst., Berlin 1928.
- [46] Lamb, H.: Hydrodynamics. Cambridge University Press, 6th Edition, 1932.
- [47] Leliavsky, S.: Irrigation and Hydraulic Design, Vol. 3, Chapman and Hall Ltd., London 1960.
- [48] Ljatcher, V.M., Skladniev, M.F., Sejnin, N.S.: Issledovanija v oblasti dinamičeskoj gidrouprugosti gidrotechničeskich sooruzenij. Hidrotechničeskije sooruzenija, Nr 8, 1971.
- [49] Morice, C.: Quelques Applications de la Méthode des Eléments Finis au Calcul de la Tenue d'un Navire à la Mer. Bulletin de l'Association Technique Maritime et Aeronautique, No 76, 1976.
- [50] Naudascher, E.: On the Role of Eddies in Flow-Induced Vibrations. X Congress IAHR, London 1963.
- [51] Naudascher, E.: Entwurfskriterien für Schwingungssichere Talsperrenverschlüsse. Wasserwirtschaft, 1-2, 1972.
- [52] Naudascher, E., Locher, F.: Flow-Induced Forces on Protruding Walls. Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, HY2, 1974.
- [53] Naudascher, E.: Stoplog Closure-Model Prototype Correlation Discussion by R.E.Coxon, Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, HY2, 1974.
- [54] Naudascher, E.: From Flow Instability to flow-induced excitation. Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, HY4, July 1967.

- [55] Naudascher, E.; Kobus, H.; Rao, R.: Hydrodynamic Analysis for High-Head Leaf Gates. Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, HY3, May 1964.
- [56] Nowacki, W.: Dynamika budowli, Arkady, Warszawa 1972.
- [57] Orsero, P.: Détermination de la Masse Hydrodynamique Entraînée Technique Maritime et Aeronautique, No. 77, 1977.
- [58] Orzeszkowski, Z.: Wybrane działy z teorii pomiaru. Skrypt Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1974.
- [59] Pariset, E.: Etude Sur la Vibration des Lames Deversantes. VI. Congress IAHR, Hague 1955.
- [60] Parkinson, G.V.: Mathematical Models of Flow-Induced Vibrations of Bluff. IUTAM/IAHR Symposium of Flow-Induced Structural Vibrations, Karlsruhe 1972.
- [61] Partensky, H.W.: Theoretical Study on Flap Gate Oscillation. XIV Congress IAHR, Paris 1971.
- [62] Partensky, H.W., Khloeung, I.S.: Oscillations de Lames Déversantes non Aérées. XII Congress IAHR, 11-14 Sept. 1967.
- [63] Peilert, F.W.: Zamknięcia jazowe o napędzie mechanicznym. Arkady, Warszawa 1957.
- [64] Petrikał, K.: Vibration Tests on Weirs and Bottom Gates. Water Power, Febr.-May 1958.
- [65] Price, P.: Suppression of the Fluid Induced Vibration of Circular Cylinders. Proc. ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division, EM6, Dec. 1967.
- [66] Prins, J.E.: Phenomena related to turbulent flow in water control structures. Polish Academy of Sciences. Jablonna 1969.
- [67] Rogala, R.: Operat badań modelowych zamknięcia klapowego w Bochońnicy. Opracowanie Zakładu Bud. Wodnego, Politechn. Wrocł., styczeń 1965.

- [68] Rogala, R.: Badania modelowe jazu klapowego na rzece Wieprz w Nieliszu. Opracowanie Zakładu Bud. Wodnego Politechniki Wrocławskiej, sierpień 1966.
- [69] Rogala, R.: Badania stopnia wodnego w Januszkowicach na Odrze, Jaz klapowy, Opracowanie Zespołu Budownictwa Wodnego Politechniki Wrocławskiej, lipiec 1970.
- [70] Rogala, R.: Wyznaczanie ilości powietrza porywanego przez strumień przelewowy. Gospodarka Wodna, Nr 6, czerwiec 1983.
- [71] Rogala, R.: Entrainement d'air par lame deversante, La Houille Blanche. No 1/1981.
- [72] Rogala, R.: Przyrost obciążeń zamknięcia klapowego wywołany brakiem napowietrzenia przestrzeni podklapowej. III Sesja Nauk. Wydz. Bud. Łąd. Politechniki Wrocławskiej, październik 1968.
- [73] Rogala, R.: Wyznaczanie dynamicznych obciążeń zamknięć klapowych, Pr. Nauk. Inst. Inż. Sanit. i Wodnej PWr, nr 5/1970.
- [74] Schmidgall, T.: Spillway Gate Vibrations on Arkansas River Dams. Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, HY1, 1972.
- [75] Schoklitsch, A.: Handbuch des Wasserbaues. Springer Verlag, Wien 1952.
- [76] Schwartz, I.: Nappe Oscillation. Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, HY6, Nov. 1964.
- [77] Schwartz, I.; Nutt, L.: Projected nappes subject to Transverse Pressure. Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, HY4, July 1963.
- [78] Smirnow, W.I.: Matematyka Wyższa, t.4, cz.1, Wyd.1, PWN, Warszawa 1962.

- [79] Smoleński, J.: Stalowe zamknięcia wodne. PWN Łódź-Poznań 1958.
- [80] Sobierajski, E.: Drgania falochronów o dowolnym rozkładzie masy poddanych oddziaływaniu falowania regularnego. Arch. Hydr. 3/78
- [81] Stoer, J.: Wstęp do metod numerycznych, t.1, PWN, Warszawa 1979.
- [82] Swain, A., Tzou, K.T.S., Palmer, H.D.: Flow-Induced Forces on Protruding Walls. Discussion to Paper Naudascher E. and Locher F., Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division HY7, July 1975.
- [83] Szloch, L.: Badania doświadczalne wpływu niektórych hydraulicznych warunków przepływu na drgania poprzeczne modelu zasuw płaskiej. Archiwum Hydrotechniki, t. XVII, zeszyt 2, PWN, Warszawa 1970.
- [84] Szmelter, J.: Metody komputerowe w mechanice, Bibl. Nauk. Inżyniera, Warszawa 1980.
- [85] Tahbildar, U.C., Tottenham, H.: Earthquake Response of Arch Dams. Proc. ASCE, Journal of the Structural Division, ST11, Nov. 1970.
- [86] Tarnowski, A.: Charakterystyki pionowego obciążenia hydrodynamicznego zamknięć płaskich w swobodnym strumieniu. Praca doktorska, Gdańsk 1974, IBW-PAN.
- [87] Toebes, H.: Fluidelastic Forces on Circular Cylinders, Proc. ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division EM6, Dec. 1967.
- [88] Uppal, H.: Vibration Problems in Hydraulic Structures Discussion, Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, Nov. 1961.

- [89] Winter, J.: Ciśnienie hydrodynamiczne działające na zamknięcie klapowe. Praca doktorska, Politechnika Wrocławska, Instytut Geotechniki, Wrocław 1982.
- [90] Zienkiewicz, O.C.: Metoda elementów skończonych, Arkady, Warszawa 1972.
- [91] Zienkiewicz, O.C.; Bahrani, A.K.; Arlett, P.L. and M.Sc.: Solution of Three-Dimensional Field Problems by the Finite Element Method, The Engineer, Oct., 27, 1967.
- [92] Zienkiewicz, O.C.: Earthquake Behavior Reservoir-Dam System, Proc. ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division, June 1969.
- [93] Zienkiewicz, O.C.: The Finite Element Method. McGraw Hill 1978.
- [94] Zienkiewicz, O.C.: Hydrodynamic Pressures Due to Earthquakes. Water Power, September 1964.
- [95] Żbikowski, A.: Małe budowle wodne, część I, wyd. IV, PWN, Warszawa 1969.
- [96] Żmigrodzki, Z. i inni: Budowle Piętrzące, t.I i II, BA, Warszawa 1957.

1-CZESTOTLIWOSC WLASNA= 0.22035E 02 HZ

K= 6 ZAŁĄCZNIK 1

ZNORMALIZOWANE PRZEMIESZCZENIA WEZLOW

	LINIOWE			OBROTY		
	U	V	W	TX	TY	TZ
1	0.00000E 00	0.10000E 01	-0.16536E-01	0.27236E 00	0.00000E 00	-0.25149E-01
2	0.00000E 00	0.83192E 00	0.27524E-01	0.27198E 00	0.00000E 00	-0.22764E-01
3	0.00000E 00	0.66113E 00	0.54927E-01	0.26903E 00	0.00000E 00	-0.24870E-01
4	0.00000E 00	0.54061E 00	0.63770E-01	0.27562E 00	0.00000E 00	-0.13839E-01
5	0.00000E 00	0.41141E 00	0.62514E-01	0.28066E 00	0.00000E 00	-0.11035E-01
6	0.00000E 00	0.28258E 00	0.52819E-01	0.28503E 00	0.00000E 00	-0.70287E-02
7	0.00000E 00	0.15274E 00	0.34608E-01	0.28793E 00	0.00000E 00	-0.60037E-03
8	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.28902E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
9	0.00000E 00	0.21793E 00	-0.10471E 00	0.28718E 00	0.00000E 00	-0.12324E-02
10	0.00000E 00	0.34512E 00	-0.17867E 00	0.28135E 00	0.00000E 00	-0.11945E-01
11	0.00000E 00	0.49626E 00	-0.16814E 00	0.27928E 00	0.00000E 00	-0.14239E-01
12	0.00000E 00	0.61838E 00	-0.72803E-01	0.27207E 00	0.00000E 00	-0.19778E-01
13	0.00000E 00	0.91913E 00	-0.10562E-01	0.25095E 00	0.00000E 00	-0.50612E-01
14	0.00000E 00	0.76176E 00	0.27948E-01	0.25122E 00	0.00000E 00	-0.45328E-01
15	0.00000E 00	0.60140E 00	0.51434E-01	0.24535E 00	0.00000E 00	-0.38131E-01
16	0.00000E 00	0.49025E 00	0.58360E-01	0.25325E 00	0.00000E 00	-0.32353E-01
17	0.00000E 00	0.37220E 00	0.56877E-01	0.25653E 00	0.00000E 00	-0.23432E-01
18	0.00000E 00	0.25563E 00	0.47866E-01	0.25818E 00	0.00000E 00	-0.15629E-01
19	0.00000E 00	0.13917E 00	0.31311E-01	0.26109E 00	0.00000E 00	-0.46880E-02
20	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.26491E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
21	0.00000E 00	0.19759E 00	-0.93915E-01	0.26078E 00	0.00000E 00	-0.67308E-02
22	0.00000E 00	0.31210E 00	-0.16169E 00	0.25606E 00	0.00000E 00	-0.21510E-01
23	0.00000E 00	0.44965E 00	-0.15314E 00	0.25664E 00	0.00000E 00	-0.24600E-01
24	0.00000E 00	0.56161E 00	-0.66630E-01	0.25011E 00	0.00000E 00	-0.29243E-01
25	0.00000E 00	0.74085E 00	-0.89410E-02	0.20471E 00	0.00000E 00	-0.10098E 00
26	0.00000E 00	0.61216E 00	0.22531E-01	0.20394E 00	0.00000E 00	-0.86558E-01
27	0.00000E 00	0.48092E 00	0.41581E-01	0.19903E 00	0.00000E 00	-0.61201E-01
28	0.00000E 00	0.39178E 00	0.46962E-01	0.20329E 00	0.00000E 00	-0.57648E-01
29	0.00000E 00	0.29752E 00	0.45678E-01	0.20545E 00	0.00000E 00	-0.42615E-01
30	0.00000E 00	0.20438E 00	0.38390E-01	0.20634E 00	0.00000E 00	-0.26480E-01
31	0.00000E 00	0.11126E 00	0.25082E-01	0.20973E 00	0.00000E 00	-0.10150E-01
32	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.21187E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
33	0.00000E 00	0.15795E 00	-0.75048E-01	0.20730E 00	0.00000E 00	-0.12816E-01
34	0.00000E 00	0.24951E 00	-0.12926E 00	0.20415E 00	0.00000E 00	-0.35610E-01

35	0.00000E 00	0.35945E 00	-0.12246E 00	0.20527E 00	0.00000E 00	-0.41627E-01
36	0.00000E 00	0.44879E 00	-0.53488E-01	0.20144E 00	0.00000E 00	-0.45532E-01
37	0.00000E 00	0.47391E 00	-0.52546E-02	0.13121E 00	0.00000E 00	-0.11885E 00
38	0.00000E 00	0.39263E 00	0.14611E-01	0.12724E 00	0.00000E 00	-0.10644E 00
39	0.00000E 00	0.30977E 00	0.26686E-01	0.13066E 00	0.00000E 00	-0.66106E-01
40	0.00000E 00	0.25251E 00	0.30204E-01	0.12794E 00	0.00000E 00	-0.63714E-01
41	0.00000E 00	0.19167E 00	0.29398E-01	0.12988E 00	0.00000E 00	-0.51117E-01
42	0.00000E 00	0.13161E 00	0.24714E-01	0.13355E 00	0.00000E 00	-0.38312E-01
43	0.00000E 00	0.71657E-01	0.16157E-01	0.13815E 00	0.00000E 00	-0.12924E-01
44	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.13600E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
45	0.00000E 00	0.10172E 00	-0.48262E-01	0.13178E 00	0.00000E 00	-0.13693E-01
46	0.00000E 00	0.16067E 00	-0.83135E-01	0.12990E 00	0.00000E 00	-0.44452E-01
47	0.00000E 00	0.23155E 00	-0.78729E-01	0.12944E 00	0.00000E 00	-0.53254E-01
48	0.00000E 00	0.28924E 00	-0.34171E-01	0.12574E 00	0.00000E 00	-0.50383E-01
49	0.00000E 00	0.15440E 00	-0.99294E-03	0.36318E-01	0.00000E 00	-0.18267E 00
50	0.00000E 00	0.13088E 00	0.48449E-02	0.39327E-01	0.00000E 00	-0.14931E 00
51	0.00000E 00	0.10724E 00	0.84890E-02	0.43678E-01	0.00000E 00	-0.61497E-01
52	0.00000E 00	0.87653E-01	0.99742E-02	0.40939E-01	0.00000E 00	-0.98739E-01
53	0.00000E 00	0.66090E-01	0.98261E-02	0.45612E-01	0.00000E 00	-0.73585E-01
54	0.00000E 00	0.44757E-01	0.83146E-02	0.47667E-01	0.00000E 00	-0.31944E-01
55	0.00000E 00	0.24288E-01	0.54937E-02	0.47949E-01	0.00000E 00	-0.13953E-02
56	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.45276E-01	0.00000E 00	0.00000E 00
57	0.00000E 00	0.34600E-01	-0.16205E-01	0.45574E-01	0.00000E 00	-0.44443E-02
58	0.00000E 00	0.55137E-01	-0.27803E-01	0.45926E-01	0.00000E 00	-0.53916E-01
59	0.00000E 00	0.80457E-01	-0.26192E-01	0.42941E-01	0.00000E 00	-0.50121E-01
60	0.00000E 00	0.10072E 00	-0.10879E-01	0.39143E-01	0.00000E 00	-0.37582E-01
61	0.00000E 00	0.43914E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
62	0.00000E 00	0.40712E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
63	0.00000E 00	0.37990E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
64	0.00000E 00	0.30599E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
65	0.00000E 00	0.21615E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
66	0.00000E 00	0.11768E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
67	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
68	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
69	0.00000E 00	0.62902E-02	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
70	0.00000E 00	0.17105E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
71	0.00000E 00	0.28181E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
72	0.00000E 00	0.36296E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00

2-CZESTOTLIWOSC WLASNA= 0.53346E 02 HZ

K= 14

ZNORMALIZOWANE PRZEMIESZCZENIA WEZLOW

	LINIOWE			OBROTY		
	U	V	W	TX	TY	TZ
1	0.00000E 00	0.10000E 01	-0.50776E-01	0.29932E 00	0.00000E 00	-0.25478E 00
2	0.00000E 00	0.77579E 00	0.11879E-01	0.29596E 00	0.00000E 00	-0.20388E 00
3	0.00000E 00	0.54103E 00	0.49348E-01	0.25579E 00	0.00000E 00	-0.13357E 00
4	0.00000E 00	0.44320E 00	0.52695E-01	0.24221E 00	0.00000E 00	-0.12904E 00
5	0.00000E 00	0.34763E 00	0.51888E-01	0.22869E 00	0.00000E 00	-0.75962E-01
6	0.00000E 00	0.24499E 00	0.44774E-01	0.23597E 00	0.00000E 00	-0.50129E-01
7	0.00000E 00	0.13302E 00	0.30112E-01	0.24220E 00	0.00000E 00	-0.54259E-02
8	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.24701E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
9	0.00000E 00	0.18945E 00	-0.87909E-01	0.24419E 00	0.00000E 00	-0.80004E-02
10	0.00000E 00	0.29138E 00	-0.14342E 00	0.22919E 00	0.00000E 00	-0.88870E-01
11	0.00000E 00	0.40960E 00	-0.13298E 00	0.23320E 00	0.00000E 00	-0.10123E 00
12	0.00000E 00	0.49688E 00	-0.66151E-01	0.26260E 00	0.00000E 00	-0.98654E-01
13	0.00000E 00	0.25520E 00	-0.12995E-01	0.56819E-01	0.00000E 00	-0.41955E 00
14	0.00000E 00	0.19553E 00	0.23670E-02	0.74120E-01	0.00000E 00	-0.34896E 00
15	0.00000E 00	0.13240E 00	0.11746E-01	0.55309E-01	0.00000E 00	-0.16408E 00
16	0.00000E 00	0.10833E 00	0.12748E-01	0.59954E-01	0.00000E 00	-0.21111E 00
17	0.00000E 00	0.84842E-01	0.12591E-01	0.57075E-01	0.00000E 00	-0.15872E 00
18	0.00000E 00	0.59774E-01	0.10867E-01	0.56787E-01	0.00000E 00	-0.10213E 00
19	0.00000E 00	0.32926E-01	0.73174E-02	0.52911E-01	0.00000E 00	-0.31860E-01
20	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.64305E-01	0.00000E 00	0.00000E 00
21	0.00000E 00	0.46472E-01	-0.21165E-01	0.65337E-01	0.00000E 00	-0.32674E-01
22	0.00000E 00	0.71211E-01	-0.35277E-01	0.61151E-01	0.00000E 00	-0.11732E 00
23	0.00000E 00	0.10048E 00	-0.33205E-01	0.62327E-01	0.00000E 00	-0.13534E 00
24	0.00000E 00	0.12153E 00	-0.17299E-01	0.65459E-01	0.00000E 00	-0.11782E 00
25	0.00000E 00	-0.79567E 00	0.43708E-01	-0.26961E 00	0.00000E 00	-0.35292E 00
26	0.00000E 00	-0.59576E 00	-0.73832E-02	-0.27068E 00	0.00000E 00	-0.28004E 00
27	0.00000E 00	-0.38417E 00	-0.37455E-01	-0.22821E 00	0.00000E 00	-0.14247E 00
28	0.00000E 00	-0.31154E 00	-0.39093E-01	-0.17316E 00	0.00000E 00	-0.15397E 00
29	0.00000E 00	-0.24403E 00	-0.37823E-01	-0.16151E 00	0.00000E 00	-0.12704E 00
30	0.00000E 00	-0.17110E 00	-0.32034E-01	-0.16815E 00	0.00000E 00	-0.83443E-01
31	0.00000E 00	-0.93262E-01	-0.21034E-01	-0.17735E 00	0.00000E 00	-0.24046E-01
32	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	-0.17873E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
33	0.00000E 00	-0.13211E 00	0.61514E-01	-0.16971E 00	0.00000E 00	-0.30001E-01
34	0.00000E 00	-0.20488E 00	0.10347E 00	-0.15912E 00	0.00000E 00	-0.10639E 00

35	0.00000E 00	-0.28994E 00	0.97832E-01	-0.16174E 00	0.00000E 00	-0.96882E-01
36	0.00000E 00	-0.34960E 00	0.53293E-01	-0.20432E 00	0.00000E 00	-0.80712E-01
37	0.00000E 00	-0.10812E 01	0.52781E-01	-0.35272E 00	0.00000E 00	0.11047E 00
38	0.00000E 00	-0.82391E 00	-0.12900E-01	-0.34637E 00	0.00000E 00	0.88351E-01
39	0.00000E 00	-0.55139E 00	-0.52228E-01	-0.29872E 00	0.00000E 00	0.42323E-02
40	0.00000E 00	-0.44993E 00	-0.55467E-01	-0.23910E 00	0.00000E 00	0.18495E-01
41	0.00000E 00	-0.35149E 00	-0.53976E-01	-0.22766E 00	0.00000E 00	0.33539E-01
42	0.00000E 00	-0.24633E 00	-0.45912E-01	-0.24192E 00	0.00000E 00	0.36717E-01
43	0.00000E 00	-0.13478E 00	-0.30393E-01	-0.25408E 00	0.00000E 00	0.12770E-01
44	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	-0.25617E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
45	0.00000E 00	-0.19057E 00	0.87532E-01	-0.24603E 00	0.00000E 00	0.46360E-02
46	0.00000E 00	-0.29419E 00	0.14686E 00	-0.22910E 00	0.00000E 00	0.16387E-01
47	0.00000E 00	-0.41668E 00	0.13829E 00	-0.23014E 00	0.00000E 00	0.34405E-01
48	0.00000E 00	-0.50483E 00	0.71723E-01	-0.27441E 00	0.00000E 00	0.89554E-02
49	0.00000E 00	-0.40916E 00	0.13749E-01	-0.12302E 00	0.00000E 00	0.49055E 00
50	0.00000E 00	-0.32768E 00	-0.76240E-02	-0.12599E 00	0.00000E 00	0.37265E 00
51	0.00000E 00	-0.24285E 00	-0.20616E-01	-0.12327E 00	0.00000E 00	0.77634E-01
52	0.00000E 00	-0.19934E 00	-0.22932E-01	-0.96786E-01	0.00000E 00	0.22037E 00
53	0.00000E 00	-0.15370E 00	-0.22674E-01	-0.10153E 00	0.00000E 00	0.16608E 00
54	0.00000E 00	-0.10641E 00	-0.19522E-01	-0.10945E 00	0.00000E 00	0.73192E-01
55	0.00000E 00	-0.58130E-01	-0.13162E-01	-0.11176E 00	0.00000E 00	0.30845E-02
56	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	-0.10634E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
57	0.00000E 00	-0.82573E-01	0.37425E-01	-0.10626E 00	0.00000E 00	0.75267E-02
58	0.00000E 00	-0.12795E 00	0.61798E-01	-0.10066E 00	0.00000E 00	0.10944E 00
59	0.00000E 00	-0.18371E 00	0.57566E-01	-0.95578E-01	0.00000E 00	0.99139E-01
60	0.00000E 00	-0.22536E 00	0.26513E-01	-0.10551E 00	0.00000E 00	0.38169E-01
61	0.00000E 00	-0.11248E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
62	0.00000E 00	-0.10322E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
63	0.00000E 00	-0.94855E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
64	0.00000E 00	-0.77096E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
65	0.00000E 00	-0.55032E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
66	0.00000E 00	-0.30131E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
67	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
68	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
69	0.00000E 00	-0.16068E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
70	0.00000E 00	-0.43690E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
71	0.00000E 00	-0.71039E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
72	0.00000E 00	-0.90491E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00

3-CZESTOTLIWOSC WLASNA= 0.75884E 02 HZ

K= 26

ZNORMALIZOWANE PRZEMIESZCZENIA WEZLOW

	LINIOWE			OBROTY		
	U	V	W	TX	TY	TZ
1	0.00000E 00	0.10000E 01	-0.93706E-01	0.28465E 00	0.00000E 00	-0.83328E 00
2	0.00000E 00	0.70637E 00	-0.85121E-02	0.29609E 00	0.00000E 00	-0.63503E 00
3	0.00000E 00	0.39420E 00	0.40602E-01	0.22678E 00	0.00000E 00	-0.18569E 00
4	0.00000E 00	0.31660E 00	0.37644E-01	0.19876E 00	0.00000E 00	-0.34418E 00
5	0.00000E 00	0.25868E 00	0.37128E-01	0.16934E 00	0.00000E 00	-0.20835E 00
6	0.00000E 00	0.18726E 00	0.32796E-01	0.17267E 00	0.00000E 00	-0.11647E 00
7	0.00000E 00	0.10129E 00	0.22342E-01	0.17877E 00	0.00000E 00	-0.12754E-01
8	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.18780E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
9	0.00000E 00	0.14449E 00	-0.66920E-01	0.18578E 00	0.00000E 00	-0.10456E-01
10	0.00000E 00	0.21796E 00	-0.10464E 00	0.17331E 00	0.00000E 00	-0.17286E 00
11	0.00000E 00	0.29851E 00	-0.96909E-01	0.18314E 00	0.00000E 00	-0.20479E 00
12	0.00000E 00	0.34696E 00	-0.64109E-01	0.23836E 00	0.00000E 00	-0.10821E 00
13	0.00000E 00	-0.89342E 00	0.85470E-01	-0.41681E 00	0.00000E 00	-0.70564E 00
14	0.00000E 00	-0.60468E 00	0.10345E-01	-0.37371E 00	0.00000E 00	-0.52213E 00
15	0.00000E 00	-0.29291E 00	-0.33227E-01	-0.26698E 00	0.00000E 00	-0.12663E 00
16	0.00000E 00	-0.23039E 00	-0.30820E-01	-0.15476E 00	0.00000E 00	-0.19315E 00
17	0.00000E 00	-0.18678E 00	-0.29172E-01	-0.12431E 00	0.00000E 00	-0.19709E 00
18	0.00000E 00	-0.13072E 00	-0.24266E-01	-0.13226E 00	0.00000E 00	-0.13602E 00
19	0.00000E 00	-0.68303E-01	-0.15012E-01	-0.14147E 00	0.00000E 00	-0.37352E-01
20	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	-0.13387E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
21	0.00000E 00	-0.98431E-01	0.50160E-01	-0.12926E 00	0.00000E 00	-0.24148E-01
22	0.00000E 00	-0.15713E 00	0.83894E-01	-0.11369E 00	0.00000E 00	-0.10216E 00
23	0.00000E 00	-0.22089E 00	0.80208E-01	-0.12527E 00	0.00000E 00	-0.13106E 00
24	0.00000E 00	-0.25298E 00	0.59592E-01	-0.23280E 00	0.00000E 00	-0.80971E-01
25	0.00000E 00	-0.12010E 01	0.13020E 00	-0.52051E 00	0.00000E 00	0.71965E 00
26	0.00000E 00	-0.78543E 00	0.21701E-01	-0.55357E 00	0.00000E 00	0.50515E 00
27	0.00000E 00	-0.33872E 00	-0.40243E-01	-0.39815E 00	0.00000E 00	0.15571E 00
28	0.00000E 00	-0.25830E 00	-0.35581E-01	-0.19867E 00	0.00000E 00	0.22311E 00
29	0.00000E 00	-0.21193E 00	-0.33284E-01	-0.14880E 00	0.00000E 00	0.19696E 00
30	0.00000E 00	-0.14790E 00	-0.27390E-01	-0.16171E 00	0.00000E 00	0.12052E 00
31	0.00000E 00	-0.75809E-01	-0.16391E-01	-0.16668E 00	0.00000E 00	0.23663E-01
32	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	-0.15733E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
33	0.00000E 00	-0.11040E 00	0.59776E-01	-0.15480E 00	0.00000E 00	0.30735E-01
34	0.00000E 00	-0.18097E 00	0.10139E 00	-0.13857E 00	0.00000E 00	0.14986E 00

35	0.00000E 00	-0.25431E 00	0.98596E-01	-0.14008E 00	0.00000E 00	0.94317E-01
36	0.00000E 00	-0.29419E 00	0.82878E-01	-0.31144E 00	0.00000E 00	0.30122E-01
37	0.00000E 00	0.12510E 01	-0.11953E 00	0.35645E 00	0.00000E 00	0.54149E 00
38	0.00000E 00	0.85513E 00	-0.15929E-01	0.44441E 00	0.00000E 00	0.47043E 00
39	0.00000E 00	0.42781E 00	0.45169E-01	0.33683E 00	0.00000E 00	0.12112E 00
40	0.00000E 00	0.34047E 00	0.43113E-01	0.20511E 00	0.00000E 00	0.25874E 00
41	0.00000E 00	0.27779E 00	0.41835E-01	0.17407E 00	0.00000E 00	0.16173E 00
42	0.00000E 00	0.19796E 00	0.35875E-01	0.19140E 00	0.00000E 00	0.81821E-01
43	0.00000E 00	0.10665E 00	0.23422E-01	0.19934E 00	0.00000E 00	0.17203E-01
44	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.21137E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
45	0.00000E 00	0.15177E 00	-0.72006E-01	0.20577E 00	0.00000E 00	0.16849E-01
46	0.00000E 00	0.23456E 00	-0.11861E 00	0.18895E 00	0.00000E 00	0.10582E 00
47	0.00000E 00	0.32630E 00	-0.11282E 00	0.18976E 00	0.00000E 00	0.96547E-01
48	0.00000E 00	0.37297E 00	-0.82494E-01	0.28615E 00	0.00000E 00	0.48965E-01
49	0.00000E 00	0.66762E 00	-0.46041E-01	0.28681E 00	0.00000E 00	-0.83094E 00
50	0.00000E 00	0.49534E 00	0.77552E-03	0.26335E 00	0.00000E 00	-0.59629E 00
51	0.00000E 00	0.31209E 00	0.28531E-01	0.18950E 00	0.00000E 00	-0.50409E-01
52	0.00000E 00	0.25482E 00	0.29242E-01	0.15522E 00	0.00000E 00	-0.25644E 00
53	0.00000E 00	0.20226E 00	0.29032E-01	0.13649E 00	0.00000E 00	-0.22315E 00
54	0.00000E 00	0.14293E 00	0.25465E-01	0.14576E 00	0.00000E 00	-0.98855E-01
55	0.00000E 00	0.77963E-01	0.17324E-01	0.14837E 00	0.00000E 00	-0.39793E-02
56	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.14280E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
57	0.00000E 00	0.11081E 00	-0.49930E-01	0.14343E 00	0.00000E 00	-0.42099E-02
58	0.00000E 00	0.16838E 00	-0.79305E-01	0.13031E 00	0.00000E 00	-0.10746E 00
59	0.00000E 00	0.23759E 00	-0.73474E-01	0.13238E 00	0.00000E 00	-0.90208E-01
60	0.00000E 00	0.28263E 00	-0.41693E-01	0.19063E 00	0.00000E 00	0.92740E-02
61	0.00000E 00	0.17137E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
62	0.00000E 00	0.15530E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
63	0.00000E 00	0.14001E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
64	0.00000E 00	0.11507E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
65	0.00000E 00	0.63153E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
66	0.00000E 00	0.45779E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
67	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
68	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
69	0.00000E 00	0.24268E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
70	0.00000E 00	0.66212E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
71	0.00000E 00	0.10610E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
72	0.00000E 00	0.13331E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00

4-CZESTOTLIWOSC WLASNA= 0.86811E 02 HZ

K= 28

ZNORMALIZOWANE PRZEMIESZCZENIA WEZLOW

	LINIOWE			OBROTY		
	U	V	W	TX	TY	TZ
1	0.00000E 00	0.10000E 01	-0.11853E 00	0.78466E-01	0.00000E 00	-0.19620E 01
2	0.00000E 00	0.68617E 00	-0.20463E-01	0.17962E 00	0.00000E 00	-0.16192E 01
3	0.00000E 00	0.31001E 00	0.35084E-01	0.19943E 00	0.00000E 00	-0.26951E 00
4	0.00000E 00	0.24007E 00	0.28732E-01	0.12709E 00	0.00000E 00	-0.63509E 00
5	0.00000E 00	0.20188E 00	0.28179E-01	0.11354E 00	0.00000E 00	-0.52168E 00
6	0.00000E 00	0.14807E 00	0.25133E-01	0.12106E 00	0.00000E 00	-0.27443E 00
7	0.00000E 00	0.79375E-01	0.16972E-01	0.13237E 00	0.00000E 00	-0.25324E-01
8	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.14471E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
9	0.00000E 00	0.11366E 00	-0.54103E-01	0.14151E 00	0.00000E 00	-0.33497E-02
10	0.00000E 00	0.17177E 00	-0.83741E-01	0.13367E 00	0.00000E 00	-0.21983E 00
11	0.00000E 00	0.23210E 00	-0.78910E-01	0.13282E 00	0.00000E 00	-0.27632E 00
12	0.00000E 00	0.26032E 00	-0.65310E-01	0.15260E 00	0.00000E 00	-0.65134E-01
13	0.00000E 00	-0.19325E 01	0.23703E 00	-0.54909E 00	0.00000E 00	0.32903E 00
14	0.00000E 00	-0.12261E 01	0.51277E-01	-0.75650E 00	0.00000E 00	0.44860E 00
15	0.00000E 00	-0.45991E 00	-0.56362E-01	-0.56998E 00	0.00000E 00	0.22284E-01
16	0.00000E 00	-0.34376E 00	-0.47276E-01	-0.24775E 00	0.00000E 00	0.21096E 00
17	0.00000E 00	-0.29125E 00	-0.44539E-01	-0.17820E 00	0.00000E 00	0.11362E 00
18	0.00000E 00	-0.20616E 00	-0.37169E-01	-0.20762E 00	0.00000E 00	0.31114E-01
19	0.00000E 00	-0.10536E 00	-0.22317E-01	-0.22091E 00	0.00000E 00	-0.91223E-02
20	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	-0.22022E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
21	0.00000E 00	-0.15369E 00	0.83434E-01	-0.22055E 00	0.00000E 00	-0.14637E-01
22	0.00000E 00	-0.25074E 00	0.13989E 00	-0.20064E 00	0.00000E 00	0.21453E-01
23	0.00000E 00	-0.34807E 00	0.13691E 00	-0.19955E 00	0.00000E 00	0.56724E-02
24	0.00000E 00	-0.37235E 00	0.13224E 00	-0.41907E 00	0.00000E 00	-0.51630E-01
25	0.00000E 00	0.15683E 01	-0.21987E 00	0.80875E 00	0.00000E 00	0.58805E 00
26	0.00000E 00	0.93932E 00	-0.54539E-01	0.91255E 00	0.00000E 00	0.37461E 00
27	0.00000E 00	0.26128E 00	0.38453E-01	0.59100E 00	0.00000E 00	0.75084E-01
28	0.00000E 00	0.16998E 00	0.27448E-01	0.23262E 00	0.00000E 00	0.12625E 00
29	0.00000E 00	0.14786E 00	0.23935E-01	0.13517E 00	0.00000E 00	0.11355E 00
30	0.00000E 00	0.97839E-01	0.17987E-01	0.14431E 00	0.00000E 00	0.66964E-01
31	0.00000E 00	-0.41705E-01	0.78109E-02	0.13238E 00	0.00000E 00	0.93846E-02
32	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.10801E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
33	0.00000E 00	0.66725E-01	-0.52865E-01	0.12314E 00	0.00000E 00	0.13988E-01
34	0.00000E 00	0.13291E 00	-0.95065E-01	0.10758E 00	0.00000E 00	0.90089E-01

35	0.00000E 00	0.19017E 00	-0.97592E-01	0.10984E 00	0.00000E 00	0.39133E-01
36	0.00000E 00	0.18709E 00	-0.11521E 00	0.44650E 00	0.00000E 00	-0.14320E-01
37	0.00000E 00	-0.42579E 00	0.50930E-01	0.55345E-01	0.00000E 00	-0.82017E 00
38	0.00000E 00	-0.27657E 00	0.11341E-01	-0.11373E 00	0.00000E 00	-0.67920E 00
39	0.00000E 00	-0.11466E 00	-0.12268E-01	-0.12001E 00	0.00000E 00	-0.11127E 00
40	0.00000E 00	-0.89685E-01	-0.11103E-01	-0.37971E-01	0.00000E 00	-0.23497E 00
41	0.00000E 00	-0.77141E-01	-0.11141E-01	-0.36780E-01	0.00000E 00	-0.19114E 00
42	0.00000E 00	-0.57715E-01	-0.10085E-01	-0.53437E-01	0.00000E 00	-0.10661E 00
43	0.00000E 00	-0.32338E-01	-0.70702E-02	-0.59331E-01	0.00000E 00	-0.17895E-01
44	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	-0.65250E-01	0.00000E 00	0.00000E 00
45	0.00000E 00	-0.45324E-01	0.19506E-01	-0.62666E-01	0.00000E 00	-0.69588E-02
46	0.00000E 00	-0.66642E-01	0.31033E-01	-0.59902E-01	0.00000E 00	-0.84629E-01
47	0.00000E 00	-0.89629E-01	0.29773E-01	-0.43812E-01	0.00000E 00	-0.86294E-01
48	0.00000E 00	-0.96209E-01	0.27549E-01	-0.56790E-01	0.00000E 00	-0.24851E-01
49	0.00000E 00	-0.41349E 00	0.37647E-01	-0.22632E 00	0.00000E 00	0.52809E 00
50	0.00000E 00	-0.29205E 00	0.41713E-02	-0.19429E 00	0.00000E 00	0.37961E 00
51	0.00000E 00	-0.16195E 00	-0.15488E-01	-0.11306E 00	0.00000E 00	0.25615E-01
52	0.00000E 00	-0.13074E 00	-0.14897E-01	-0.97014E-01	0.00000E 00	0.12085E 00
53	-0.00000E 00	-0.10615E 00	-0.14871E-01	-0.78460E-01	0.00000E 00	0.12518E 00
54	0.00000E 00	-0.76138E-01	-0.13253E-01	-0.79191E-01	0.00000E 00	0.57702E-01
55	0.00000E 00	-0.41487E-01	-0.90763E-02	-0.79123E-01	0.00000E 00	0.25303E-02
56	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	-0.76990E-01	0.00000E 00	0.00000E 00
57	0.00000E 00	-0.59010E-01	0.26570E-01	-0.78040E-01	0.00000E 00	-0.31276E-04
58	0.00000E 00	-0.88706E-01	0.41276E-01	-0.71639E-01	0.00000E 00	0.40204E-01
59	0.00000E 00	-0.12364E 00	0.38349E-01	-0.77017E-01	0.00000E 00	0.27610E-01
60	0.00000E 00	-0.14327E 00	0.25783E-01	-0.13038E 00	0.00000E 00	-0.20347E-01
61	0.00000E 00	-0.99929E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
62	0.00000E 00	-0.89863E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
63	0.00000E 00	-0.80039E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
64	0.00000E 00	-0.66237E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
65	0.00000E 00	-0.48218E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
66	0.00000E 00	-0.26629E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
67	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
68	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
69	0.00000E 00	-0.14061E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
70	0.00000E 00	-0.38461E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
71	0.00000E 00	-0.61102E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
72	0.00000E 00	-0.76119E-01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00

5-CZESTOTLIWOSC WLASNA= 0.99910E 02 HZ

K= 55

ZNORMALIZOWANE PRZEMIESZCZENIA WEZLOW

	LINIOWE			OBROTY		
	U	V	W	TX	TY	TZ
1	0.00000E 00	0.10000E 01	-0.13374E 00	-0.20203E 01	0.00000E 00	-0.91813E 01
2	0.00000E 00	0.63089E 00	-0.24953E-01	-0.11113E 01	0.00000E 00	-0.89738E 01
3	0.00000E 00	0.23619E 00	0.35150E-01	-0.12631E 00	0.00000E 00	-0.81186E 00
4	0.00000E 00	0.17075E 00	0.25006E-01	-0.40585E 00	0.00000E 00	-0.35918E 01
5	0.00000E 00	0.14923E 00	0.23288E-01	-0.30107E 00	0.00000E 00	-0.42638E 01
6	0.00000E 00	0.11240E 00	0.20230E-01	-0.57158E-01	0.00000E 00	-0.20643E 01
7	0.00000E 00	0.60292E-01	0.13379E-01	0.35194E-01	0.00000E 00	-0.12008E 00
8	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.56454E-01	0.00000E 00	0.00000E 00
9	0.00000E 00	0.86306E-01	-0.40592E-01	0.32015E-01	0.00000E 00	0.70273E-01
10	0.00000E 00	0.12956E 00	-0.62515E-01	-0.69483E-01	0.00000E 00	-0.24425E 00
11	0.00000E 00	0.17209E 00	-0.60618E-01	-0.21707E 00	0.00000E 00	-0.30537E 00
12	0.00000E 00	0.18385E 00	-0.63205E-01	-0.64225E 00	0.00000E 00	0.34429E 00
13	0.00000E 00	-0.30106E 01	0.43079E 00	0.48232E 01	0.00000E 00	0.14427E 02
14	0.00000E 00	-0.18418E 01	0.12047E 00	0.26727E 00	0.00000E 00	0.12699E 02
15	0.00000E 00	-0.57002E 00	-0.62649E-01	-0.13295E 01	0.00000E 00	0.22098E 01
16	0.00000E 00	-0.39763E 00	-0.48524E-01	0.68187E 00	0.00000E 00	0.46260E 01
17	0.00000E 00	-0.34381E 00	-0.46601E-01	0.13019E 00	0.00000E 00	0.48546E 01
18	0.00000E 00	-0.23569E 00	-0.38483E-01	-0.34159E 00	0.00000E 00	0.19151E 01
19	0.00000E 00	-0.11123E 00	-0.20456E-01	-0.36110E 00	0.00000E 00	0.12960E 00
20	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	-0.29226E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
21	0.00000E 00	-0.16932E 00	0.11117E 00	-0.35120E 00	0.00000E 00	-0.36907E-01
22	0.00000E 00	-0.30247E 00	0.19046E 00	-0.34125E 00	0.00000E 00	0.50418E 00
23	0.00000E 00	-0.42950E 00	0.19046E 00	0.24848E 00	0.00000E 00	0.55729E 00
24	0.00000E 00	-0.43356E 00	0.21637E 00	0.63306E 00	0.00000E 00	0.40982E 00
25	0.00000E 00	0.13856E 02	-0.24092E 01	0.10736E 02	0.00000E 00	-0.40803E 02
26	0.00000E 00	0.76469E 01	-0.75172E 00	0.14834E 02	0.00000E 00	-0.23923E 02
27	0.00000E 00	0.94009E 00	0.19626E 00	0.69597E 01	0.00000E 00	-0.31471E 01
28	0.00000E 00	0.29173E 00	0.85502E-01	0.36674E 01	0.00000E 00	-0.98364E 01
29	0.00000E 00	0.51999E 00	0.80611E-01	0.18303E 01	0.00000E 00	-0.69994E 01
30	0.00000E 00	0.49273E 00	0.80794E-01	0.13773E 01	0.00000E 00	-0.22005E 01
31	0.00000E 00	0.27742E 00	0.55351E-01	0.94820E 00	0.00000E 00	0.10396E 00
32	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.75331E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
33	0.00000E 00	0.40072E 00	-0.21530E 00	0.92226E 00	0.00000E 00	-0.12040E 00
34	0.00000E 00	0.64286E 00	-0.38085E 00	0.53076E 00	0.00000E 00	-0.28422E 01

35	0.00000E 00	0.75156E 00	-0.45295E 00	0.87740E 00	0.00000E 00	0.95671E-01
36	0.00000E 00	0.29169E 00	-0.10014E 01	0.63373E 01	0.00000E 00	0.30058E 01
37	0.00000E 00	-0.71295E 02	0.11240E 02	-0.26726E 02	0.00000E 00	0.71174E 02
38	0.00000E 00	-0.46303E 02	0.31047E 01	-0.40597E 02	0.00000E 00	0.33840E 02
39	0.00000E 00	-0.66389E 01	-0.14336E 01	-0.22984E 02	0.00000E 00	0.90433E 01
40	0.00000E 00	-0.26029E 01	-0.75664E 00	-0.93418E 01	0.00000E 00	0.15776E 02
41	0.00000E 00	-0.24625E 01	-0.51999E 00	-0.43680E 01	0.00000E 00	0.14411E 02
42	0.00000E 00	-0.94415E 00	-0.22081E 00	-0.38696E 01	0.00000E 00	0.74130E 01
43	0.00000E 00	0.39234E 00	0.17880E 00	-0.23318E 01	0.00000E 00	0.13406E 01
44	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	-0.10363E 01	0.00000E 00	0.00000E 00
45	0.00000E 00	-0.33444E-01	0.16966E 01	-0.28344E 01	0.00000E 00	0.14886E 01
46	0.00000E 00	-0.25385E 01	0.34912E 01	-0.35173E 01	0.00000E 00	0.65600E 01
47	0.00000E 00	-0.42271E 01	0.36187E 01	-0.42259E 01	0.00000E 00	0.56930E 01
48	0.00000E 00	-0.31088E 01	0.55639E 01	-0.18615E 02	0.00000E 00	0.55539E 01
49	0.00000E 00	0.11147E 03	-0.12416E 02	0.16296E 02	0.00000E 00	-0.81928E 02
50	0.00000E 00	0.75406E 02	-0.23546E 01	0.31114E 02	0.00000E 00	-0.33754E 02
51	0.00000E 00	0.36576E 02	0.35632E 01	0.26129E 02	0.00000E 00	0.13223E 02
52	0.00000E 00	0.29107E 02	0.32145E 01	0.14365E 02	0.00000E 00	-0.27156E 01
53	0.00000E 00	0.24314E 02	0.32658E 01	0.13226E 02	0.00000E 00	-0.58584E 01
54	0.00000E 00	0.17830E 02	0.29996E 01	0.16289E 02	0.00000E 00	-0.38946E 01
55	0.00000E 00	0.97473E 01	0.20950E 01	0.17455E 02	0.00000E 00	0.92498E 00
56	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.17680E 02	0.00000E 00	0.00000E 00
57	0.00000E 00	0.13862E 02	-0.61530E 01	0.17434E 02	0.00000E 00	-0.64889E 00
58	0.00000E 00	0.20465E 02	-0.92434E 01	0.15430E 02	0.00000E 00	-0.95168E 00
59	0.00000E 00	0.28095E 02	-0.86055E 01	0.14030E 02	0.00000E 00	0.56659E 01
60	0.00000E 00	0.31470E 02	-0.69168E 01	0.20303E 02	0.00000E 00	0.93922E 01
61	0.00000E 00	0.28217E 02	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
62	0.00000E 00	0.24957E 02	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
63	0.00000E 00	0.21859E 02	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
64	0.00000E 00	0.18083E 02	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
65	0.00000E 00	0.13310E 02	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
66	0.00000E 00	0.73833E 01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
67	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
68	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
69	0.00000E 00	0.38711E 01	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
70	0.00000E 00	0.10633E 02	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
71	0.00000E 00	0.16675E 02	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
72	0.00000E 00	0.20524E 02	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00

1-CZESTOSC WLASNA= 0.16794E 03

K= 79

ZAŁĄCZNIK 2

ZNORMALIZOWANE PRZEMIESZCZENIA WEZLOW

	U	V	W	TX	TY	TZ
1	0.00000E 00	0.10000E 01	0.10367E 00	0.31034E-01	-0.17927E-01	0.41272E-01
2	-0.32230E-02	0.70198E 00	0.92263E-01	0.44838E-01	0.89665E-02	-0.15982E-01
3	0.00000E 00	0.12293E 01	0.12534E 00	0.45543E-01	0.00000E 00	0.00000E 00
4	0.00000E 00	0.67307E 00	0.10903E-01	0.31271E-01	0.90148E-02	0.35394E-01
5	-0.98435E-02	0.37350E 00	0.53091E-02	0.29449E-01	-0.40061E-02	-0.20613E-01
6	0.00000E 00	0.81458E 00	0.82616E-02	0.40831E-01	0.00000E 00	0.00000E 00
7	0.00000E 00	0.47782E 00	-0.15719E-01	0.27234E-01	-0.18997E-01	0.38452E-01
8	-0.75338E-02	0.17597E 00	-0.10312E-01	0.29511E-01	0.80798E-02	-0.22847E-01
9	0.00000E 00	0.59278E 00	-0.17596E-01	0.36457E-01	0.00000E 00	0.00000E 00
10	0.00000E 00	0.27805E 00	-0.25657E-01	0.31913E-01	0.21612E-02	0.36404E-01
11	-0.26553E-02	0.27497E-01	0.34809E-02	0.14656E-01	0.19728E-02	-0.20140E-01
12	0.00000E 00	0.37525E 00	-0.27152E-01	0.40121E-01	0.00000E 00	0.00000E 00
13	0.00000E 00	0.71676E-01	-0.14941E-01	0.30998E-01	0.11059E-01	0.27394E-01
14	-0.39014E-03	-0.47629E-01	0.17056E-01	0.16115E-01	-0.28013E-02	-0.14945E-01
15	0.00000E 00	0.14944E 00	-0.15239E-01	0.32183E-01	0.00000E 00	0.00000E 00
16	0.00000E 00	-0.13384E 00	0.14577E-01	0.32650E-01	0.20464E-02	0.63131E-02
17	0.29244E-02	-0.13020E 00	0.39026E-01	-0.54318E-02	-0.52213E-04	0.24228E-02
18	0.00000E 00	-0.75730E-01	0.16780E-01	0.46675E-01	0.00000E 00	0.00000E 00
19	0.00000E 00	-0.26273E 00	0.44425E-01	0.35009E-01	-0.71472E-02	-0.19565E-01
20	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	-0.49116E-01	0.00000E 00	0.00000E 00
21	0.00000E 00	-0.21397E 00	0.48278E-01	0.14315E-01	0.00000E 00	0.00000E 00
22	0.00000E 00	-0.18589E-01	0.19164E 00	0.31876E-01	-0.10931E-03	-0.55142E-03
23	0.61058E-02	-0.87037E-01	0.15362E 00	0.26277E-01	0.23632E-02	-0.20701E-02
24	0.00000E 00	0.50003E-01	0.21177E 00	0.28478E-01	0.00000E 00	0.00000E 00
25	0.00000E 00	0.16797E 00	0.28999E 00	0.33420E-01	-0.11076E-01	0.14613E-01
26	0.73651E-02	0.18502E-01	0.23864E 00	0.14959E-02	0.91805E-02	-0.91750E-02
27	0.00000E 00	0.25462E 00	0.32058E 00	0.37945E-01	0.00000E 00	0.00000E 00
28	0.00000E 00	0.37757E 00	0.28578E 00	0.36676E-01	0.13425E-01	0.29595E-01
29	0.54992E-02	0.00000E 00	0.26172E 00	0.17791E-01	0.67130E-02	-0.19536E-01
30	0.00000E 00	0.48402E 00	0.31708E 00	0.27036E-01	0.00000E 00	0.00000E 00
31	0.00000E 00	0.55683E 00	0.18518E 00	0.28940E-01	0.29358E-01	0.16823E-01
32	-0.22989E-02	0.26157E 00	0.15360E 00	0.42274E-01	-0.14552E-01	-0.14455E-01
33	0.00000E 00	0.67833E 00	0.20914E 00	0.32232E-01	0.00000E 00	0.00000E 00

2-CZESTOSC WLASNA= 0.17785E 03

K= 46

ZNORMALIZOWANE PRZEMIESZCZENIA WEZLOW

	U	V	W	TX	TY	TZ
1	0.00000E 00	0.10000E 01	0.49297E-01	0.15574E-01	-0.61718E-02	0.17385E-01
2	-0.17811E-01	0.40985E-01	-0.56666E-02	-0.68834E-03	-0.10987E-01	0.57658E-01
3	0.00000E 00	-0.74304E 00	-0.13366E-01	-0.11402E-01	0.00000E 00	0.00000E 00
4	0.00000E 00	0.88831E 00	0.83992E-02	0.81874E-02	-0.17883E-02	0.15108E-01
5	0.59310E-01	0.29556E-01	0.53775E-03	0.63133E-03	0.51582E-03	0.51251E-01
6	0.00000E 00	-0.66100E 00	0.31730E-02	-0.54195E-02	0.00000E 00	0.00000E 00
7	0.00000E 00	0.85138E 00	0.91463E-02	0.42080E-02	-0.72714E-02	0.14522E-01
8	0.52817E-01	0.21076E-01	-0.21159E-03	0.13553E-02	-0.14629E-01	0.49778E-01
9	0.00000E 00	-0.65192E 00	-0.13581E-02	-0.27386E-02	0.00000E 00	0.00000E 00
10	0.00000E 00	0.81906E 00	0.94523E-02	0.53927E-02	-0.16485E-02	0.13943E-01
11	0.48435E-01	0.77996E-02	0.12665E-02	-0.98923E-03	-0.10022E-03	0.48826E-01
12	0.00000E 00	-0.63704E 00	-0.23767E-02	-0.29290E-02	0.00000E 00	0.00000E 00
13	0.00000E 00	0.77766E 00	0.13144E-01	0.35060E-02	0.73393E-02	0.14273E-01
14	0.43141E-01	0.58576E-02	0.15988E-02	0.42862E-02	0.13133E-01	0.47024E-01
15	0.00000E 00	-0.61581E 00	-0.48356E-02	-0.12455E-01	0.00000E 00	0.00000E 00
16	0.00000E 00	0.71897E 00	0.25189E-01	0.18723E-01	-0.48565E-02	-0.12203E-02
17	0.37308E-01	0.54075E-02	0.96501E-03	-0.87063E-02	0.33400E-02	0.56435E-01
18	0.00000E 00	-0.59537E 00	-0.10534E-01	0.27632E-01	0.00000E 00	0.00000E 00
19	0.00000E 00	0.69930E 00	0.31459E-01	-0.15474E-01	0.95063E-02	0.20739E-01
20	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	-0.84760E-03	0.00000E 00	0.00000E 00
21	0.00000E 00	-0.58664E 00	-0.11763E-01	-0.83513E-01	0.00000E 00	0.00000E 00
22	0.00000E 00	0.74756E 00	0.56731E-01	0.53981E-02	-0.11694E-02	0.60833E-02
23	-0.53878E-01	0.53800E-02	0.14797E-01	0.74247E-02	-0.20826E-01	0.29488E-01
24	0.00000E 00	-0.60022E 00	-0.26060E-01	-0.10267E-01	0.00000E 00	0.00000E 00
25	0.00000E 00	0.78538E 00	0.68141E-01	0.59039E-02	-0.95995E-02	0.15457E-01
26	-0.99493E-01	0.10103E-01	0.24114E-01	-0.15817E-02	-0.10903E-01	0.43825E-01
27	0.00000E 00	-0.61546E 00	-0.34583E-01	-0.29179E-03	0.00000E 00	0.00000E 00
28	0.00000E 00	0.82256E 00	0.62176E-01	0.48961E-02	0.13232E-02	0.16625E-01
29	-0.97620E-01	0.00000E 00	0.27142E-01	0.23587E-02	0.10479E-01	0.46352E-01
30	0.00000E 00	-0.63671E 00	-0.31841E-01	-0.33244E-02	0.00000E 00	0.00000E 00
31	0.00000E 00	0.85561E 00	0.44198E-01	0.60422E-02	0.65441E-02	0.86454E-02
32	-0.46078E-01	0.28741E-01	0.12141E-01	0.45399E-02	0.16755E-01	0.32362E-01
33	0.00000E 00	-0.64909E 00	-0.20522E-01	0.25213E-03	0.00000E 00	0.00000E 00

3-CZESTOSC WLASNA= 0.19864E 03

K= 20

ZNORMALIZOWANE PRZEMIESZCZENIA WEZLOW

	U	V	W	TX	TY	TZ
1	0.00000E 00	0.10000E 01	0.66562E 00	0.14102E 00	0.53533E-01	-0.59062E-01
2	0.52775E-02	0.13133E 01	0.62803E 00	0.90625E-01	-0.30142E-01	0.38195E-01
3	0.00000E 00	0.47330E 00	0.64925E 00	0.13608E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
4	0.00000E 00	-0.24721E 00	0.32889E 00	0.13882E 00	-0.41561E-01	-0.95133E-01
5	0.25897E-01	0.46725E 00	0.38632E 00	0.72201E-01	0.15194E-01	0.55042E-01
6	0.00000E 00	-0.72231E 00	0.32344E 00	0.12785E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
7	0.00000E 00	-0.10975E 01	0.21932E 00	0.14524E 00	0.71500E-01	-0.11770E 00
8	0.20466E-01	0.46673E-01	0.32181E 00	0.63073E-01	-0.27534E-01	0.73987E-01
9	0.00000E 00	-0.15441E 01	0.21687E 00	0.11133E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
10	0.00000E 00	-0.19110E 01	0.18614E 00	0.14211E 00	-0.11684E-03	-0.16676E 00
11	0.12534E-01	-0.42962E 00	0.27424E 00	0.76382E-01	-0.12559E-01	0.92787E-01
12	0.00000E 00	-0.23193E 01	0.18743E 00	0.10955E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
13	0.00000E 00	-0.26608E 01	0.22924E 00	0.76930E-01	-0.79258E-01	-0.18110E 00
14	0.10744E-01	-0.10649E 01	0.30275E 00	0.13646E 00	0.42405E-01	0.11706E 00
15	0.00000E 00	-0.30261E 01	0.23157E 00	0.18280E-01	0.00000E 00	0.00000E 00
16	0.00000E 00	-0.33369E 01	0.32419E 00	0.17922E 00	0.14102E-01	-0.37729E 00
17	0.21786E-01	-0.12615E 01	0.36580E 00	-0.16344E 00	0.31194E-01	0.26054E 00
18	0.00000E 00	-0.36397E 01	0.32098E 00	0.29977E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
19	0.00000E 00	-0.38423E 01	0.44657E 00	0.40756E-01	-0.17853E 00	-0.42516E 00
20	0.00000E 00	0.00000E 00	0.00000E 00	-0.44967E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
21	0.00000E 00	-0.40545E 01	0.41887E 00	-0.39585E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
22	0.00000E 00	-0.29255E 01	0.95538E 00	0.77947E-01	0.21378E 00	0.10164E-01
23	-0.32722E-01	-0.12688E 01	0.59902E 00	0.11709E 00	-0.81626E-01	0.20453E-01
24	0.00000E 00	-0.32683E 01	0.90468E 00	0.64614E-01	0.00000E 00	0.00000E 00
25	0.00000E 00	-0.22643E 01	0.13530E 01	0.11733E 00	0.51856E-01	-0.13972E 00
26	-0.43582E-01	-0.71744E 00	0.94277E 00	0.11257E 00	-0.61394E-01	0.62939E-01
27	0.00000E 00	-0.26431E 01	0.12854E 01	0.13244E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
28	0.00000E 00	-0.14584E 01	0.13970E 01	0.10973E 00	-0.72647E-01	-0.16586E 00
29	-0.33558E-01	0.00000E 00	0.94230E 00	0.71931E-01	-0.15861E-01	0.10480E 00
30	0.00000E 00	-0.18796E 01	0.13327E 01	0.13681E 00	0.00000E 00	0.00000E 00
31	0.00000E 00	-0.72194E 00	0.10382E 01	0.12921E 00	-0.12979E 00	-0.90485E-01
32	-0.53035E-02	0.20713E 00	0.79469E 00	0.42394E-01	0.55653E-01	0.65430E-01
33	0.00000E 00	-0.11782E 01	0.99792E 00	0.13052E 00	0.00000E 00	0.00000E 00

Weryfikacją zaproponowanej metody były pomiary obu rozpatrywanych konstrukcji. Różnice jakie zanotowano pomiędzy obliczonymi, a pomierzonymi wartościami parametrów drgań mieszczą się w granicach błędu pomiaru, a zatem można uznać, że zaproponowana metoda nadaje się w pełni do obliczania częstości i amplitud drgań własnych klapy soczewkowej.

STRESZCZENIE

Przedmiotem rozprawy jest opracowanie metody umożliwiającej określenie drgań własnych zamknięć klapowych z uwzględnieniem wpływu wody na parametry tych drgań. Porównanie częstości wyznaczonych w ten sposób drgań własnych z częstością siły wymuszającej stwarzałoby możliwość takiego projektowania konstrukcji, aby jej drgania odbywały się poza strefą rezonansową.

Poszukiwaną metodę określania drgań własnych zamknięcia opracowano poprzez odpowiednią adaptację metody elementów skończonych /MES/. Zastosowana modyfikacja MES polegała na zapisaniu macierzy masy konstrukcji w postaci blokowo-diagonalnej umożliwiającej poprawne obliczenie drgań własnych zamknięcia klapowego.

Analizę dynamiczną zamknięcia rozszerzono następnie na drganie konstrukcji obciążonej wodą. W tym celu przedstawiono założenia i równania hydrodynamiki odnoszące się do zjawisk zachodzących na styku konstrukcja-woda oraz ich bezpośredni zapis w metodologii skończonych elementów. Otrzymane równanie układu drgającego z dodatkowym członem bezwładnościowym, pochodzącym od oddziaływania ośrodka wodnego na konstrukcję, nazywanym dodaną masą wody, dobrze opisuje drgania konstrukcji w wodzie.

Na bazie opracowanych algorytmów ułożone zostały programy numeryczne. Poprawność algorytmów i działanie programów sprawdzono dokonując obliczeń drgań istniejącej w naturze klapy soczewkowej oraz wykonanego z winiduru modelu zamknięcia.

SOLUTION OF THE FLAP GATES VIBRATION PROBLEM

BY FINITE ELEMENT METHOD

A b s t r a c t

The subject of the dissertation is a feasible method developed for determining the free vibrations of flap gates, with allowance being made for the affect of water on the vibration parameters. A comparison of the frequency of vibrations determined in this way with that of the exciting force would make it possible to design the construction so as to make the vibrations occur outside the resonance zone.

The method in question was developed by way of a suitable adaptation of the finite element method /FEM/. The applied modification of FEM consisted in recording the matrix of the construction mass in block-diagonal form, which facilitated a correct calculation of the free vibrations of the flap gate.

The dynamic analysis of the gate was then extended to the vibration of the water-loaded construction. For this purpose those assumptions and equations of hydrodynamics are presented that relate to phenomena taking place at the construction-water contact point. Their direct notation in the methodology of finite elements is also given. The vibrations of the construction in water are well described by the equation obtained of the vibrating system with an additional, inertial element derived from the water medium effect /added water mass/ on the construction.

The algorithms defined served as a basis for arranging numerical programs. The correctness of the algorithms as well as the functioning of the programs were checked by calculating the vibrations of the fishbelly flap existing in nature and also those of the polyvinyl chloride gate model.

The proposed method was verified by measurements of both investigated constructions. Since the differences between the calculated and the measured values of the vibration parameters were noted to be within the limit of admissible measurement errors, the method presented may be accepted as being fully adequate for calculations of the frequencies and amplitudes of the free vibrations of the fishbelly flap.

WYKAZ ODBIORCÓW

1. Doc. dr hab. inż. Ryszard Rogala	1 egz.
2. Recenzenci	2 egz.
3. Biblioteka Instytutu Geotechniki Politechniki Wrocławskiej	1 egz.
4. Biblioteka Główna Politechniki Wrocławskiej	1 egz.
5. Autor	4 egz.

Razem: 9 egz.