

**INSYTUT INFORMATYKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKA WROCŁAWSKA**

RAPORT SERII PRE NR 2/2005

**REKURENCYJNE ALGORYTMY
IDENTYFIKACJI DWUSTOPNIOWEJ
OBIEKTÓW DYNAMICZNYCH**

(Rozprawa doktorska)

Marcin Gieracha

Słowa kluczowe: identyfikacja, estymacja, systemy złożone, adaptacja.

Promotor:

Dr hab. inż. Jerzy Świątek, prof. nadzw.

Wrocław, 2005

Dziękuję mojemu Promotorowi
dr. hab. inż. Jerzemu Świątkowi,
prof. nadzw. za okazaną pomoc w
trakcie realizacji pracy.

Marcin Gieracha

Zawartość

Zawartość	I
Streszczenie	IV
Wykaz oznaczeń	V
Rozdział 1. Rekurencyjne algorytmy identyfikacji dwustopniowej obiektów dynamicznych – sformułowanie problemu	1
1.1. Wstęp	1
1.2. Identyfikacja obiektów sterowania	5
1.2.1. Algorytm identyfikacji	5
1.2.2. Rekurencyjny algorytm identyfikacji	10
1.3. Identyfikacja dwustopniowa	13
1.4. Sformułowanie problemu pracy	18
Rozdział 2. Modelowanie i identyfikacja dwustopniowego obiektu dynamicznego	23
2.2. Identyfikacja dwustopniowa obiektu dynamicznego	23
2.3. Algorytm identyfikacji dwustopniowej metody najmniejszych kwadratów	25
2.3.1. Algorytm identyfikacji na pierwszym stopniu	28
2.3.2. Algorytm identyfikacji na drugim stopniu	28
2.4. Algorytm identyfikacji dwustopniowej metody zmiennych instrumentalnych	29
2.4.1. Algorytm identyfikacji na pierwszym stopniu	30
2.4.2. Algorytm identyfikacji na drugim stopniu	31
Rozdział 3. Algorytmy identyfikacji na bieżąco dwustopniowego obiektu dynamicznego	32
3.1. Wprowadzenie	32
3.2. Algorytmy dwustopniowej identyfikacji na bieżąco	32
3.2.1. Pierwsza metoda organizacji pomiarów	32
3.2.2. Druga metoda organizacji pomiarów	36
3.3. Rekurencyjne algorytmy dwustopniowej identyfikacji na bieżąco	44
3.3.1. Pierwsza metoda organizacji pomiarów	44
3.3.2. Druga metoda organizacji pomiarów	50
Rozdział 4. Zasady wyboru metod organizacji pomiarów oraz dobór parametrów algorytmu identyfikacji	55
4.1. Wprowadzenie	55

4.2. Metodyka wyznaczania rekomendacji	55
4.2.1. Błąd metody pomiarowej	55
4.2.2. Sformułowanie problemu rekomendacji	57
4.2.3. Własności obiektu dwustopniowego	59
4.2.4. Modele pomiarów	61
4.2.5. Rekomendacje na podstawie badań symulacyjnych	66
4.3. Analityczna metoda wyznaczenia rekomendacji	69
4.3.1. Modele pomiarów	69
4.3.2. Ciągi błędów pomiarowych metody	80
4.3.3. Ograniczenie ciągów błędów metody pomiarowej	88
4.3.4. Rekomendacje na podstawie ograniczenia ciągów błędów	91
4.3.5. Rekomendacje – szczególny przypadek	92
Rozdział 5. Badania symulacyjne	100
5.1. Wprowadzenie	100
5.2. Symulator systemu identyfikacji dwustopniowej	101
5.2.1. Wejście systemu identyfikacji	101
5.2.2. Wyjście systemu identyfikacji	102
5.2.3. Budowa systemu identyfikacji	103
5.2.4. Działanie	104
5.3. Plan badań symulacyjnych	106
5.4. Badania rekurencyjnego algorytmu identyfikacji dwustopniowej	113
5.5. Omówienie wyników	145
5.5.1. Stała czasowa obiektu na 1. stopniu	145
5.5.2. Wzmocnienie statyczne obiektu na 2. stopniu	148
5.5.3. Szybkość sygnału wejściowego na 1. stopniu	151
5.5.4. Szybkość sygnału wejściowego na 2. stopniu	154
5.5.5. Parametr N pierwszej metody organizacji pomiarów	156
5.5.6. Parametr K drugiej metody organizacji pomiarów	157
Rozdział 6. Wnioski końcowe	159
6.1. Podsumowanie	159
6.2. Rekomendacje dalszych badań	160

Literatura 162

Streszczenie

W pracy rozpatruje się problem identyfikacji dwustopniowego obiektu dynamicznego. Pierwsza część poświęcona jest algorytmom identyfikacji. Zaproponowano algorytmy identyfikacji pozwalające na przeprowadzenie estymacji parametrów obiektu dwustopniowego dla organizacji pomiarów z powtarzaniem sygnału wejściowego na drugim stopniu oraz organizacji pomiarów na bieżąco. Algorytmy identyfikacji opracowano w dwóch wariantach: dla metody najmniejszych kwadratów oraz metody zmiennych instrumentalnych. Na potrzeby organizacji pomiarów na bieżąco zaproponowano dwie różne metody organizacji pomiarów. Dla obu metod organizacji pomiarów przygotowano rekurencyjne algorytmy identyfikacji. Zaproponowane algorytmy poddano szczegółowym badaniom symulacyjnym.

W drugiej części pracy sformułowano rekomendacje wyboru każdej z metod organizacji pomiarów na bieżąco, biorące pod uwagę posiadaną wiedzę a priori o identyfikowanym obiekcie dwustopniowym oraz charakter sygnałów wejściowych na obu stopniach.

Dodatkowo, przygotowano rekomendacje wyboru optymalnych parametrów eksperymentu pomiarowego. Zaproponowano dwa podejścia do formułowania rekomendacji wyboru.

Pierwsze wymaga przeprowadzenia badań symulacyjnych. W drugim podejściu rekomendacje są formułowane na podstawie wyników rozważań analitycznych. Trafność przygotowanych rekomendacji poddano ocenie w trakcie badań symulacyjnych.

Wykaz oznaczeń

I MOP	pierwsza metoda organizacji pomiarów
II MOP	druga metoda organizacji pomiarów
a	wyjście obiektu na 2. stopniu
$a(k), a(i)$	wartość wyjścia obiektu na 2. stopniu odpowiednio w chwili k, i
$\bar{a}(t)$	rzeczywisty sygnał na wyjściu obiektu na 2. stopniu
$A(q^{-1})$	wielomian zmiennej zespolonej q , licznik transmitancji
$A_1(q^{-1})$	wielomian zmiennej zespolonej q , licznik transmitancji obiektu na 1. st.
$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n_1}$	współczynniki wielomianu $A_1(q^{-1})$
$A_2(q^{-1})$	wielomian zmiennej zespolonej q , licznik transmitancji obiektu na 2. st.
$a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n_2}$	współczynniki wielomianu $A_2(q^{-1})$
$\hat{\hat{a}}(k)$	estymata wyjścia obiektu na 2. stopniu w chwili k MZI
$\hat{a}(k)$	estymata wyjścia obiektu na 2. stopniu w chwili k MNK
$\hat{A}(q^{-1})$	wielomian $A(q^{-1})$ z parametrami wyznaczonymi MNK
$B(q^{-1})$	wielomian zmiennej zespolonej q , mianownik transmitancji
$B_1(q^{-1})$	wielomian zmiennej zespolonej q , mianownik transmitancji obiektu na 1. st.
$b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1m_1}$	współczynniki wielomianu $B_1(q^{-1})$
$B_2(q^{-1})$	wielomian zmiennej zespolonej q , mianownik transmitancji obiektu na 2. st.
$b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2m_2}$	współczynniki wielomianu $B_2(q^{-1})$
$\hat{B}(q^{-1})$	wielomian $B(q^{-1})$ z parametrami wyznaczonymi MNK
$e_{I,i}(k)$	błąd metody pomiarowej popełniony podczas wykonywania k -tego pomiaru w i -tej serii pomiarowej dla I MOP
$e_{II,i}(k)$	błąd metody pomiarowej popełniony podczas wykonywania k -tego pomiaru w i -tej serii pomiarowej dla II MOP
$\tilde{e}_{I,i}(\tilde{k})$	pomocniczy ciąg błędów metody pomiarowej popełnianych podczas wykonywania i -tej serii pomiarowej dla I MOP
$\tilde{e}_{II}(\tilde{k})$	pomocniczy ciąg błędów metody pomiarowej popełnianych podczas wykonywania pomiarów dla II MOP
$\overline{\overline{E}}_{I,i}(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n_1})$	funkcja ograniczenia wartości bezwzględnych wyrazów ciągu błędów metody pomiarowej popełnianych podczas wykonywania i -tej serii pomiarowej dla I MOP
$\overline{\overline{E}}_{II}(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n_1})$	funkcja ograniczenia wartości bezwzględnych wyrazów ciągu błędów metody pomiarowej popełnianych podczas wykorzystania II MOP
F_1, F_2	opisy obiektów odpowiednio na 1. i 2. stopniu; zadanie statyczne
$f(k), h(k), g(k)$	ciągi liczb rzeczywistych
$F(q), H(q), G(q)$	transformaty Z ciągów $f(k), h(k), g(k)$

$$h_I(k) = \{1, 0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots\}$$

$$h_{II}(k) = \{0, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1, 2, 2, \dots\}$$

I	liczba serii pomiarowych
i	numer serii pomiarowej; numer taktu identyfikacji na 1. stopniu w zadaniu statycznym
j	numer taktu identyfikacji na 2. stopniu; zadanie statyczne
k	dyskretna chwila czasowa, numer pomiaru w serii pomiarowej
\tilde{k}	dyskretna chwila czasowa dla taktu τ_1
K	liczba pomiarów w serii pomiarowej
K_2	współczynnik wzmocnienia statycznego obiektu na 2. stopniu
λ_2	parametr pobudzenia liniowego na 2. stopniu
N	współczynnik wyznaczający zależność pomiędzy czasami τ_1 oraz τ_2
n_1	rzęd wielomianu $A_1(q^{-1})$
n_2	rzęd wielomianu $A_2(q^{-1})$
m_1	rzęd wielomianu $B_1(q^{-1})$
m_2	rzęd wielomianu $B_2(q^{-1})$
M_1	liczba taktów identyfikacji na 1. stopniu; zadanie statyczne
M_2	liczba taktów identyfikacji na 2. stopniu; zadanie statyczne
MNK	metoda najmniejszych kwadratów
MZI	metoda zmiennych instrumentalnych
O_1	obiekt na 1. stopniu
O_2	obiekt na 2. stopniu
p	indeks zmiennego parametru $A_1(q^{-1})$ lub $B_1(q^{-1})$
q, z	zmiennie zespolone transmitancji obiektów dyskretnych
Q	kryterium jakości identyfikacji
R_f	promień zbieżności szeregu definiującego transformatę Z ciągu $f(k)$
r	promień okręgu krzywej całkowania
s	zmienna zespolona transmitancji obiektów ciągłych
t	chwila czasowa czasu ciągłego
τ_1	takt pomiarowy na 1. stopniu
τ_2	takt pomiarowy na 2. stopniu
τ_p	takt pomiarowy dla badań symulacyjnych
T_r	czas trwania eksperymentu dla rekomendacji na podstawie badań symulacyjnych
T_1, T_2	czasy trwania eksperymentów pomiarowych odpowiednio na 1. i 2. stopniu
$\tilde{T}_I, \tilde{T}_{II}$	parametry filtra
θ_1	parametr obiektu na 1. stopniu; zadanie statyczne
θ_2	parametr obiektu na 2. stopniu; zadanie statyczne
$\hat{\theta}_1(j)$	wynik identyfikacji na 1. stopniu dla j -tego taktu na 2. st.; zadanie statyczne
$\hat{\theta}_2$	wynik identyfikacji na 2. stopniu; zadanie statyczne

$\hat{\Theta}_1$	sekwencja wartości $\hat{\theta}_1(j)$; zadanie statyczne
Θ	wektor parametrów obiektu
Θ_1	wektor parametrów obiektu na 1. stopniu, bez $a(k)$
Θ_2	wektor parametrów obiektu na 2. stopniu
$\hat{\Theta}$	estymata wektora parametrów MNK
$\hat{\Theta}_1$	estymata wektora parametrów obiektu na 1. stopniu, bez $a(k)$ MNK
$\hat{\Theta}_2$	estymata wektora parametrów obiektu na 2. stopniu MNK
$\hat{\hat{\Theta}}$	estymata wektora parametrów MZI
$\hat{\hat{\Theta}}_1$	estymata wektora parametrów obiektu na 1. stopniu, bez $a(k)$ MZI
$\hat{\hat{\Theta}}_2$	estymata wektora parametrów obiektu na 2. stopniu MZI
$\tilde{\Theta}_2$	wektor parametrów filtra dla identyfikacji rekurencyjnej na 2. stopniu
u	wejście obiektu
u_1	wejście obiektu na 1. stopniu
u_2	wejście obiektu na 2. stopniu
$\bar{u}_1(t)$	rzeczywisty sygnał wejściowy na 1. stopniu
$\bar{u}_{1i}(t)$	rzeczywisty sygnał wejściowy na 1. stopniu dla i -tej serii
$u_{1i}(k)$	k -ty pomiar wejścia na 1. stopniu w i -tej serii
$u_{1,j}(i), y_j(i)$	odpowiednio wartości u_1 i y w i -tym takcie identyfikacji na 1. stopniu oraz j -tym momencie identyfikacji na 2. stopniu; zadanie statyczne
$\tilde{u}_1(\tilde{k}), \tilde{u}_2(\tilde{k})$	ciągi poddanych dyskretyzacji z taktem τ_1 sygnałów $\bar{u}_1(t)$ i $\bar{u}_2(t)$
$\bar{u}_2(t)$	rzeczywisty sygnał wejściowy na 2. stopniu
$u_2(j), \hat{\theta}_1(j)$	odpowiednio wartości u_2 i $\hat{\theta}_1$ w j -tym takcie identyfikacji
$\mathbf{U}_{1,j}$	sekwencja wejściowa na 1. stopniu w j -tym momencie identyfikacji na 2. stopniu; zadanie statyczne
\mathbf{U}_2	sekwencja wejściowa na 2. stopniu; zadanie statyczne
y	wyjście obiektu, wyjście obiektu dwustopniowego
$\bar{y}(t)$	rzeczywisty sygnał wyjściowy obiektu dwustopniowego
$\tilde{y}(\tilde{k})$	ciąg poddanego dyskretyzacji z taktem τ_1 sygnału $\bar{y}(t)$
$y_i(k)$	k -ty pomiar wyjścia obiektu dwustopniowego w i -tej serii
$\tilde{y}_{I,i}(\tilde{k})$	ciąg odpowiedzi obiektu dwustopniowego pobudzonego przesuniętym o i taktów ciągiem $\tilde{u}_1(\tilde{k})$
$y_{I,i}(k)$	pozbawiony błędów metody pomiarowej k -ty pomiar wyjścia obiektu dwustopniowego w i -tej serii dla I MOP
$y_{II,i}(k)$	pozbawiony błędów metody pomiarowej k -ty pomiar wyjścia obiektu dwustopniowego w i -tej serii dla II MOP

\mathbf{Y}_j	sekwencja wyjściowa w j -tym takcie identyfikacji na 2. stopniu; zadanie statyczne na 2. stopniu;
Ψ_R	rekurencyjny algorytm identyfikacji
Ψ_1	algorytm identyfikacji na 1. stopniu; zadanie statyczne
Ψ_2	algorytm identyfikacji na 2. stopniu; zadanie statyczne
δ_h	eksponent ciągu $h(k)$
$Z(k)$	wektor k -tego pomiaru wejść zastępczych obiektu
$Z_{1i}(k)$	wektor k -tego pomiaru wejść zastępczych obiektu na 1. stopniu wykonany w i -tej serii pomiarowej
$Z_2(k)$	wektor k -tego pomiaru wejść zastępczych obiektu na 2. stopniu
$\bar{\bar{Z}}(k)$	wektor zmiennych instrumentalnych w chwili k
$\bar{\bar{Z}}_{1i}(k)$, $\bar{\bar{z}}_{1i}(k)$	zmienne instrumentalne dla k -tego pomiaru obiektu na 1. stopniu wykonanego w i -tej serii pomiarowej

Rozdział 1. Rekurencyjne algorytmy identyfikacji dwustopniowej obiektów dynamicznych – sformułowanie problemu

1.1. Wstęp

Zrozumienie istoty różnych zjawisk i procesów pociąga często za sobą konieczność ustalenia związków pomiędzy wyróżnionymi wielkościami charakteryzującymi badany proces. Dysponowanie analitycznym opisem tych związków w postaci zestawu formuł matematycznych pozwala na dokładną analizę rozpatrywanego procesu oraz zaprojektowanie urządzeń bądź systemów gdzie badany proces będzie zachodził charakteryzując się oczekiwanymi własnościami.

Zestaw formuł matematycznych opisujących pewien proces nazywany jest jego *modelem matematycznym*. Metody wyznaczania modeli matematycznych procesów na podstawie danych zebranych w wyniku badań eksperymentalnych noszą nazwę *identyfikacji procesu*. Koncentrując się na identyfikacji procesów, które dzięki identyfikacji będą mogły zostać poddane działaniom mającym na celu przeprowadzenie ich przebiegu w pewien zadany sposób – sterowanie – będziemy mówić o identyfikacji *obiektów sterowania*.

Nowe problemy identyfikacji wiążą się przede wszystkim z aktualnymi problemami zautomatyzowanych systemów sterowania (zdecentralizowane sterowanie złożonymi obiektami i elastycznymi procesami produkcji, adaptacyjne systemy sterowania, sterowanie obiektami o parametrach rozproszonych). Jednakże, ciągle wzrasta również rola metod i technik identyfikacji w zadaniach praktycznych, których bezpośrednim celem nie jest sterowanie obiektem eksperymentu. Dotyczy to wielu dziedzin, między innymi diagnozowania i wykrywania uszkodzeń, przetwarzania sygnałów, modelowania procesów biologicznych i biomedycznych. Współczesne zastosowania metod identyfikacji obejmują bardzo wiele dziedzin. Począwszy od zastosowań w szerokiej dziedzinie procesów przemysłowych przez systemy telekomunikacyjne, problemy ekonometrii finansowej aż po systemy modelujące środowisko naturalne.

Wspólną cechą zdecydowanej większości aktualnych problemów identyfikacji jest ich bardzo wysoki poziom skomplikowania. Niniejsza praca dotyczy obszernej problematyki związanej ze złożonymi zadaniami i obiektami identyfikacji systemów złożonych.

Przegląd pewnych prac z tego zakresu można znaleźć w pracach [15] i [83]. W zagadnieniach identyfikacji systemów złożonych przewijają się dwa podstawowe nurty: pierwszy, w którym do rozwiązania zadania identyfikacji nie wykorzystuje się dekompozycji i drugi gdzie dekompozycja jest stosowana.

Do najważniejszych koncepcji mieszczących się w pierwszym nurcie zagadnień identyfikacji systemów złożonych należy identyfikacja globalna. Sformułowana i rozwinięta przez Bubnickiego [16], [17], [18], [19] i innych, koncepcja zakładając znajomość struktury systemu złożonego i możliwość przeprowadzenia pomiarów wejść i wyjść obiektów wchodzących w jego skład problem identyfikacji sprowadza do wyznaczenia takich modeli składowych, że model całego systemu jest globalnie optymalny w pewnym sensie. Koncepcja ta obecnie bywa stosowana do rozwiązywania wielu różnych zadań identyfikacji począwszy od zastosowań dla systemów nieliniowych [34], przez modele rozmyte [2] aż po złożone systemy dynamiczne [71], [72], [73], [74]. Kolejną koncepcją identyfikacji systemów złożonych, w której nie przeprowadza się dekompozycji jest identyfikacja przy ograniczonych możliwościach pomiarowych [22], [23], [24], [63]. Koncepcja dotyczy sytuacji, w której nie jest możliwe wykonanie pomiarów wszystkich wejść i wyjść obiektów składających się na system złożony. Drugi nurt zagadnień identyfikacji systemów złożonych koncentruje się wokół wykorzystania szeroko rozumianego pojęcia dekompozycji. Wprowadzenie dekompozycji może być uzasadnione wieloma względami. Możliwe jest zastosowanie dekompozycji do redukcji stopnia złożoności modeli (m.in. [41], [79], [82],[6]), rozdziału skomplikowanego zadania identyfikacji na zadania prostsze bądź wynikać z wewnętrznej struktury obiektu, metody przeprowadzania eksperymentu lub ograniczonych możliwości pomiarowych.

Ważna koncepcja należąca do tego nurtu – dekompozycja sekwencyjna [59] , [4], [30]– redukuje nakład pracy niezbędny do uzyskania rozwiązania problemów systemów złożonych dokonując dekompozycji podstawowego zadania identyfikacji na szereg zadań prostszych. W efekcie otrzymujemy zdecentralizowane algorytmy identyfikacji działające na wielu poziomach. Dla większości przypadków można wówczas zastosować teorię systemów hierarchicznych i uzyskać hierarchiczne algorytmy identyfikacji, dla działania których niezbędne jest opracowanie procedur dokonujących koordynacji rozwiązań otrzymywanych na poszczególnych poziomach. Aktualne problemy do rozwiązania

których wykorzystano koncepcję hierarchicznych algorytmów identyfikacji obejmują m.in. zagadnienia przetwarzania obrazów [56], [53] oraz rozpoznawania języka naturalnego[28].

Kolejna koncepcja zakłada wykonanie pewnej dekompozycji obiektu złożonego uzasadnionej albo przez wewnętrzną strukturę obiektu albo metodę przeprowadzania eksperymentu lub ograniczone możliwości pomiarowe. Niniejsza praca poświęcona jest właśnie tej koncepcji, wprowadzonej wstępnie przez Bubnickiego [20], występującej następnie w pracach: [13], [14], [33], [1], [44], [25], [39]. Należy zwrócić uwagę na pracę [64] stanowiącą monografię systematyzującą podejście dwustopniowe i wskazującą na liczne zastosowania tej metody.

Istota koncepcji wielostopniowej jest następująca. Dla pewnego obiektu (procesu, zjawiska, urządzenia) badamy zależność wielkości wyjściowej y od wielkości wejściowej u_1 i wyznaczamy parametr θ_1 w opisie tej zależności. Jest to identyfikacja na pierwszym stopniu. Następnie zwracamy uwagę na pewną wielkość u_2 , która w czasie identyfikacji na pierwszym stopniu była stała, zmieniamy wartość tej wielkości i powtarzamy identyfikację na pierwszym stopniu, uzyskując na ogół inną wartość θ_1 . Powtarzając wielokrotnie identyfikację na pierwszym stopniu dla różnych wartości u_2 możemy zbadać zależność θ_1 od u_2 , a dokładniej – wyznaczyć parametr θ_2 w opisie tej zależności. Jest to identyfikacja na drugim stopniu. Jeżeli obiekty na obu stopniach są dynamiczne pojawia się problem odpowiedniej organizacji eksperymentu odpowiadającego podejściu dwustopniowemu. Dla takiego typu obiektów nie jest możliwe utrzymywanie stałej wartości wyjścia obiektu na 2. stopniu. Możliwe do zastosowania w takim przypadku są dwie koncepcje organizacji pomiarów spełniające wymagania podejścia dwustopniowego. Pomiaru otrzymywane przy wykorzystaniu każdej z tych koncepcji obarczone są niestety pewnymi błędami, które w różny sposób dla każdej z metod zależą od właściwości obiektów na obu stopniach oraz charakteru sygnałów wejściowych. Stajemy wówczas przed problemem wyboru jednej z dwu możliwych koncepcji organizacji pomiarów, dysponując wiedzą a priori o właściwościach obiektów oraz sygnałów. Jeżeli założymy dodatkowo, że wartości parametrów obiektów na obu stopniach ulegają ciągłym zmianom, algorytmy identyfikacji przetwarzające serie pomiarowe muszą przyjąć odpowiednie postaci.

Praktyczne znaczenie przedstawionego problemu skłoniło autora do postawienia sobie za cel opracowanie rekomendacji wyboru jednej z dwu metod organizacji pomiarów w zależności od posiadanej wiedzy a priori o identyfikowanych obiektach oraz sygnałach wejściowych. Jako równorzędny cel przyjęto konieczność opracowania dwustopniowych algorytmów identyfikacji spełniających stawiane im wymagania wynikające z niestacjonarności obiektów na obu stopniach.

Realizacja postawionych celów dała następujące rezultaty:

1. Na potrzeby przeprowadzenia procesu identyfikacji na bieżąco dokonano analizy dwóch metod organizacji pomiarów.
2. Dla obu metod organizacji pomiarów opracowano algorytmy identyfikacji, zarówno rekurencyjne jak i przetwarzające kompletne serie pomiarowe. Każdy z zaproponowanych algorytmów został zrealizowany w dwóch wariantach: wykorzystujący metodę najmniejszych kwadratów oraz metodę zmiennych instrumentalnych.
3. Opracowane algorytmy identyfikacji poddano badaniom symulacyjnym.
4. Sformułowano rekomendacje wyboru jednej z dwu koncepcji organizacji pomiarów biorąc pod uwagę posiadaną wiedzę a priori o identyfikowanym obiekcie dwustopniowym oraz charakter sygnałów wejściowych na obu stopniach.

Niniejsza praca stanowi usystematyzowanie wymienionych wyników badań. Obejmuje ona wyniki przedstawione we wcześniejszych pracach autora [76 i 77] oraz dotychczas nie publikowane, dotyczące zagadnień rekomendacji wyboru metod organizacji pomiarów.

1.2. Identyfikacja obiektów sterowania

1.2.1. Algorytm identyfikacji

Celem identyfikacji jest ustalenie relacji pomiędzy charakteryzującymi badany proces wyróżnionymi zmiennymi. Proces, dla którego ustala się zależność pewnych zmiennych $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(v_Y)}$ od innych zmiennych $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(v_U)}$ jest nazywany *obiektem identyfikacji*. Zmienne $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(v_U)}$ i $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(v_Y)}$ są nazywane odpowiednio *zmiennymi wejściowymi* oraz *zmiennymi wyjściowymi* obiektu identyfikacji.

Uporządkowane zbiory tych zmiennych mogą być zapisane w postaci wektorów:

$$U^T = [u^{(1)} \quad u^{(2)} \quad \dots \quad u^{(v_U)}],$$
$$Y^T = [y^{(1)} \quad y^{(2)} \quad \dots \quad y^{(v_Y)}],$$

gdzie: U jest wektorem wejściowym obiektu, $U \in D_U$ (przestrzeń v_U - wymiarowa) a Y jest wektorem wyjściowym obiektu, $Y \in D_Y$ (przestrzeń v_Y - wymiarowa).

Podstawą wyznaczenia modelu matematycznego obiektu – identyfikacji – jest dysponowanie ciągiem pomiarów wejścia i wyjścia obiektu, wykonanych w kolejnych momentach w czasie:

$$\mathbf{U} = [U(1) \quad U(2) \quad \dots \quad U(K)],$$
$$\mathbf{Y} = [Y(1) \quad Y(2) \quad \dots \quad Y(K)],$$

gdzie:

\mathbf{U} - macierz kolejnych pomiarów U ,

\mathbf{Y} - macierz kolejnych pomiarów Y ,

K - długość ciągu pomiarów.

Niech model obiektu jest opisany zależnością

$$\hat{Y} = \Phi(U), \tag{1.1}$$

która przyporządkowuje wektor zmiennych wyjściowych modelu $\hat{Y} \in D_Y$ wektorowi wejściowemu $U \in D_U$. Wyróżniając pewien zestaw zmiennych parametrów funkcji Φ równanie modelu można zapisać następująco

$$\hat{Y} = \Phi(U, \hat{\Theta}), \tag{1.2}$$

gdzie

$$\hat{\Theta} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}^{(1)} & \hat{\theta}^{(2)} & \dots & \hat{\theta}^{(v_\theta)} \end{bmatrix}$$

jest wektorem parametrów modelu, $\hat{\Theta} \in D_\theta$ (przestrzeń v_θ - wymiarowa).

Przez *klasę modeli* będziemy rozumieli zbiór relacji $\Phi(U, \hat{\Theta})$ dla wszystkich $\hat{\Theta} \in \bar{D}_\theta \subset D_\theta$, gdzie \bar{D}_θ jest dziedziną w przestrzeni D_θ . Klasa modeli jest określona przez postać funkcji Φ oraz dziedzinę \bar{D}_θ . Wybór modelu z zadanej klasy polega na nadaniu wartości liczbowych parametrom $\hat{\theta}^{(1)}, \hat{\theta}^{(2)}, \dots, \hat{\theta}^{(v_\theta)}$.

Klasa modeli może zostać uporządkowana dzięki wprowadzeniu *kryterium jakości identyfikacji* Q , które pozwala na porównanie dwóch różnych modeli. Kryterium Q ocenia w pewien wybrany sposób odległość pomiędzy wyjściem obiektu \mathbf{Y} a wyjściem modelu $\hat{\mathbf{Y}}$ dla tego samego sygnału wejściowego \mathbf{U} .

Kryterium lokalne ocenia odległość pomiędzy punktami $Y(k)$ i $\hat{Y}(k)$ przestrzeni D_Y przy użyciu wybranej normy $\|Y(k) - \hat{Y}(k)\|$, np. normy Euklidesowej

$$\|Y(k) - \hat{Y}(k)\| = \sqrt{(Y(k) - \hat{Y}(k))^T (Y(k) - \hat{Y}(k))}.$$

Kryterium globalne ocenia odległość sekwencji $\|Y(1) - \hat{Y}(1)\|, \|Y(2) - \hat{Y}(2)\|, \dots, \|Y(K) - \hat{Y}(K)\|$ od sekwencji zerowej. Może to zostać przeprowadzone na wiele sposobów, np.

$$Q = \sum_{k=1}^K \|Y(k) - \hat{Y}(k)\|^2. \quad (1.3)$$

Celem identyfikacji jest wybór najlepszego modelu z zadanej klasy, to znaczy wybór takiego wektora $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}^*$, dla którego Q osiąga minimum. Następująca zależność pomiędzy $\hat{\Theta}^*$ a wynikami pomiarów \mathbf{U} i \mathbf{Y} :

$$\hat{\Theta}^* = \Psi(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) \quad (1.4)$$

będzie nazywana *algorytmem identyfikacji* a jego realizacja *identyfikatorem*. Dla zadań identyfikacji gdzie obiekt znany jest z dokładnością do parametrów a pomiary obarczone

są błędami pomiarowymi będziemy mówić również o *algorytmie estymacji* oraz jego realizacji *estymatorze*.

Rozważmy liniowy obiekt dynamiczny o wejściu $u(k)$ i wyjściu $y(k)$ opisany równaniem

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k), \quad (1.5)$$

gdzie: k reprezentuje numer chwili czasowej działania obiektu, q^{-1} jest operatorem opóźnienia ($q^{-1}y(k) = y(k-1)$) a wielomiany $A(q^{-1})$ i $B(q^{-1})$ operatora q^{-1} są postaci:

$$\left. \begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_{n_1}q^{-n_1}, \\ B(q^{-1}) &= b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_{m_1}q^{-m_1}. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Równanie (1.5) opisujące obiekt może zostać zapisane następująco:

$$y(k) = Z^T(k)\Theta, \quad (1.7)$$

gdzie:

$$\Theta^T = [a_1 \quad \dots \quad a_{n_1} \quad b_1 \quad \dots \quad b_{m_1}], \quad (1.8)$$

$$Z^T(k) = [-y(k-1) \quad \dots \quad -y(k-n_1) \quad u(k-1) \quad \dots \quad u(k-m_1)], \quad (1.9)$$

T oznacza transpozycję.

Opis wyrażony równaniem (1.5) odzwierciedla wiedzę o badanym obiekcie. Bardzo często jednak wiedza ta może być niepełna a obiekt rzeczywisty zachowuje się w nieco odmienny sposób. Możliwe jest też, że pomiary uzyskiwane na potrzeby identyfikacji mierzone są w sposób niedoskonały i w efekcie otrzymujemy ciągi wartości wejść i wyjść obiektu obarczone błędami pomiarowymi. Zakładając, że błędy pomiarowe popełniane są wyłącznie na wyjściu obiektu, oba wspomniane czynniki wpływające na uzyskiwane pomiary mogą zostać uwzględnione poprzez pewną modyfikację opisu obiektu. Zamiast równania (1.7) proponuje się opis

$$y(k) = Z^T(k)\Theta + \varepsilon(k), \quad (1.10)$$

gdzie

$\varepsilon(k)$ – jest błędem pomiaru popełnianym w chwili k .

Wektor Z , $Z \in D_{\bar{v}}$ (przestrzeń $[n_1 + m_1]$ - wymiarowa) może być traktowany jak pewnego rodzaju wektor wejściowy i nosi nazwę tzw. *wektora wejść zastępczych*. Wówczas dla rozpatrywanego przypadku macierze pomiarów wejścia i wyjścia przyjmują postaci:

$$\mathbf{U} = [Z(1) \quad Z(2) \quad \dots \quad Z(K)],$$

$$\mathbf{Y} = [y(1) \quad y(2) \quad \dots \quad y(K)].$$

Przyjmując dla obiektu (1.10) model

$$\hat{y}(k) = Z^T(k)\hat{\Theta} \quad (1.11)$$

oraz kwadratowe kryterium jakości identyfikacji (1.3) do wyznaczenia oceny (estymaty) $\hat{\Theta}$ wektora parametrów Θ na podstawie ciągu pomiarów wejścia i wyjścia możemy zastosować algorytm identyfikacji (1.4) metody najmniejszych kwadratów [46]

$$\hat{\Theta} = (\mathbf{U}\mathbf{U}^T)^{-1}(\mathbf{U}\mathbf{Y}^T), \quad (1.12)$$

który może zostać zapisany również następująco:

$$\hat{\Theta} = \left[\sum_{k=1}^K Z(k)Z^T(k) \right]^{-1} \sum_{k=1}^K Z(k)y(k), \quad (1.13)$$

gdzie

K oznacza całkowitą liczbę pomiarów wejścia i wyjścia obiektu.

Dla dyskretnych obiektów dynamicznych wartości wyjść w poprzednich chwilach czasowych mają charakter wartości wejściowych. Mówimy wówczas o wektorze wejść zastępczych. Jeżeli wartości wyjścia mierzone są z błędami pomiarowymi, dla obiektów dynamicznych mamy do czynienia z sytuacją, w której nie znamy dokładnych wartości podawanych na wejście obiektu. Sytuacja ta została przedstawiona m.in. w pracy [31] przy okazji analizy *modelu strukturalnego* i znana jest pod nazwą *błędów w zmiennych*¹ [85]. Występowanie błędów w zmiennych, co jest nieuniknione dla obiektów dynamicznych, powoduje otrzymywanie w wyniku użycia metody najmniejszych kwadratów estymatorów parametrów z obciążeniem zależnym od stosunku mierzonych wartości sygnału na wyjściu obiektu do wartości błędów pomiarowych w kolejnych chwilach pomiaru.

¹ ang. errors-in-variables

Jedną z metod pozwalającą na rozwiązanie problemu błędów w zmiennych i w efekcie otrzymywanie estymatorów zgodnych jest metoda zmiennych instrumentalnych [37], [38]. Pionierskie prace w dziedzinie zastosowania metody zmiennych instrumentalnych na potrzeby identyfikacji w teorii sterowania to [89], [51]. Bardziej aktualne i szczegółowe omówienie metod zmiennych instrumentalnych znajduje się w książce [61]. Podstawową zaletą tej prostej metody, będącej pewnym uogólnieniem metody najmniejszych kwadratów [87], jest uzyskiwanie asymptotycznie nieobciążonych estymatorów bez konieczności dostarczenia szczegółowej informacji a priori o charakterze zakłóceń. Metoda ta do wyznaczenia rozwiązania wymaga określenia tzw. wektora *zmiennych instrumentalnych*, silnie skorelowanego (asymptotycznie) z wyjściem obiektu bez zakłóceń i jednocześnie asymptotycznie nieskorelowanego z zakłóceniami. Dysponując wektorem zmiennych instrumentalnych estymator metody zmiennych instrumentalnych $\hat{\hat{\Theta}}$ przyjmuje postać

$$\hat{\hat{\Theta}} = \left[\sum_{k=1}^K \bar{\bar{Z}}(k) Z^T(k) \right]^{-1} \sum_{k=1}^K \bar{\bar{Z}}(k) y(k), \quad (1.14)$$

gdzie

$\bar{\bar{Z}}(k)$ – wektor zmiennych instrumentalnych.

Wybór wektora zmiennych instrumentalnych jest kluczowym zagadnieniem dla efektywnego zastosowania tej metody [38]. W [87] wskazano na wykorzystanie jako bardzo dobrego źródła zmiennych instrumentalnych wartości uzyskiwanych na wyjściu pewnego *obektu pomocniczego* o analogicznej budowie jak identyfikowany obiekt, którego parametry wyznaczone są w wyniku wstępnego przetwarzania z wykorzystaniem metody najmniejszych kwadratów. W pracy [60] przedstawiono również szereg innych propozycji uzyskiwania wektora zmiennych instrumentalnych.

W związku z powyższym wektor zmiennych instrumentalnych może zostać określony następująco:

$$\bar{\bar{Z}}^T(k) = [-\bar{y}(k-1) \quad \dots \quad -\bar{y}(k-n_1) \quad u(k-1) \quad \dots \quad u(k-m_1)], \quad (1.15)$$

przy czym $\bar{y}(k)$ jest wyznaczany na podstawie zależności

$$\hat{A}(q^{-1})\bar{y}(k) = \hat{B}(q^{-1})u(k), \quad (1.16)$$

gdzie: $\hat{A}(q^{-1})$ i $\hat{B}(q^{-1})$ są wielomianami $A(q^{-1})$ i $B(q^{-1})$ z parametrami wyznaczonymi przez algorytm identyfikacji metody najmniejszych kwadratów (1.13).

Dla tak określonego wektora zmiennych instrumentalnych uzyskanie estymaty parametrów z wykorzystaniem metody zmiennych instrumentalnych składa się z następujących kroków:

Krok 1. Wyznaczenie parametrów wielomianów $\hat{A}(q^{-1})$ i $\hat{B}(q^{-1})$ w wyniku zastosowania algorytmu (1.13).

Krok 2. Generacja wektora zmiennych instrumentalnych $\bar{Z}(k)$, $k = 1, \dots, K$, przy użyciu (1.16) dla uzyskanych w Kroku 1 $\hat{A}(q^{-1})$ i $\hat{B}(q^{-1})$.

Krok 3. Przeprowadzenie identyfikacji obiektu za pomocą algorytmu metody zmiennych instrumentalnych (1.14) z zastosowaniem wyników generacji otrzymanych w Kroku 2.

1.2.2. Rekurencyjny algorytm identyfikacji

W wielu sytuacjach praktycznych wyznaczanie estymat parametrów obiektu musi się odbywać podczas działania systemu. Jest tak wówczas, gdy decyzje o stanie systemu trzeba podejmować na bieżąco, w czasie rzeczywistym. W przypadku problemów sterowania są to decyzje, jaką wartość sygnału sterującego należy podać na wejście obiektu w każdym takcie działania urządzenia sterującego. Na polu medycznym prognoza pewnych wartości charakteryzujących stan pacjenta wspomaga efektywną decyzję o dalszej terapii. Problem filtracji wymaga dostrojenia parametrów filtra w sposób zapewniający oczekiwane własności sygnału wyjściowego. W systemach nadzoru i monitorowania konieczna jest lokalizacja nagłych zmian badanego systemu wskazujących na ewentualne uszkodzenia.

Przedstawione w punkcie 1.2.1. algorytmy identyfikacji przetwarzają kompletną serię pomiarową wejścia i wyjścia obiektu. W sytuacji, kiedy dokonamy kolejnego pomiaru pary wejście – wyjście cała procedura identyfikacji musi zostać powtórzona. W praktycznych zastosowaniach wykorzystanie tego typu algorytmów do identyfikacji parametrów na bieżąco okazuje się kłopotliwe. Konieczne staje się wówczas użycie algorytmów wyznaczających oszacowania parametrów obiektu w miarę dostępności kolejnych pomiarów, korzystających równocześnie z dotychczasowych wyników identyfikacji. Tego typu algorytmy znane są w literaturze pod nazwą *rekurencyjnych*

algorytmów identyfikacji lub *algorytmów identyfikacji na bieżąco*. Inne określenia tych algorytmów obejmują terminy: algorytmy adaptacyjne, strojonego modelu lub estymacji sekwencyjnej.

Rekurencyjne metody identyfikacji charakteryzują się następującymi właściwościami:

- odgrywają kluczową rolę w systemach adaptacyjnych (stosowanych w sterowaniu i przetwarzaniu sygnałów), gdzie działanie (sterowanie [21], [8],[9], [10] i [54], filtracja [3] i [81]) jest podejmowane na podstawie najbardziej aktualnego modelu,
- mogą być stosowane jako pierwszy krok w algorytmach wykrywania uszkodzeń i gwałtownych zmian systemu [11], [57],
- nie potrzebują dużej ilości zasobów informatycznych (w szczególności pamięci), gdyż nie wymagają gromadzenia wszystkich danych doświadczalnych,
- mogą być łatwo dostosowane do identyfikacji zmieniających się w czasie parametrów systemu [29].

W rekurencyjnych algorytmach identyfikacji identyfikacja parametrów następuje rekurencyjnie w czasie tzn., jeżeli jest znana estymata $\hat{\Theta}(k-1)$, wyznaczona do chwili $k-1$ włącznie, to $\hat{\Theta}(k)$ jest obliczane przez pewną modyfikację $\hat{\Theta}(k-1)$. Ogólna formuła algorytmu rekurencyjnego ma postać

$$\hat{\Theta}(k) = \Psi_R[\hat{\Theta}(k-1), u(k), y(k)], \quad (1.17)$$

gdzie:

$\hat{\Theta}(k)$ – estymata parametrów w chwili k ,

Ψ_R – rekurencyjny algorytm identyfikacji,

$u(k)$ – pomiar wejścia w chwili k ,

$y(k)$ – pomiar wyjścia w chwili k .

Algorytmy rekurencyjne otrzymuje się różnymi metodami [49], wśród których należy wymienić:

1. Modyfikację algorytmów przetwarzających kompletną serię pomiarową.
2. Filtrację nieliniową.
3. Aproksymację stochastyczną (metodę gradientu stochastycznego).
4. Techniki wykorzystujące model odniesienia.

Metodom rekurencyjnym poświęcono wiele miejsca w literaturze. Szczególnie istotne są tu monografie: [49], [12],[9] i [32] oraz prace przeglądowe: [36] i [48] w całości traktujące o tej tematyce. Aktualnie algorytmy rekurencyjne znajdują szerokie zastosowanie m.in. w problemach rozpoznawania i przetwarzania obrazów: [52], [7].

Należy również zwrócić uwagę na podobieństwo rekurencyjnych algorytmów identyfikacji do metod kompresji danych. Do wyznaczenia kolejnej oceny parametru nie jest konieczne pamiętanie całej wykonanej serii pomiarów a jedynie pewnych wielkości charakteryzujących zachowanie działania algorytmu. Różne szczególne realizacje algorytmu będą posługiwały się różnym zbiorem tych wielkości.

Przyjmując kwadratowe kryterium jakości identyfikacji przykładowy rekurencyjny algorytm identyfikacji parametrów obiektu o równaniu (1.5) może zostać zapisany następująco:

$$\hat{\Theta}(k) = \hat{\Theta}(k-1) + K(k)[y(k) - Z^T(k)\hat{\Theta}(k-1)], \quad (1.18)$$

$$K(k) = \mathbf{P}(k-1)Z(k)[1 + Z^T(k)\mathbf{P}(k-1)Z(k)]^{-1}, \quad (1.19)$$

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{P}(k-1) - \mathbf{P}(k-1)Z(k)[1 + Z^T(k)\mathbf{P}(k-1)Z(k)]^{-1}Z^T(k)\mathbf{P}(k-1), \quad (1.20)$$

gdzie

$$Z^T(k) = [-y(k-1) \quad \dots \quad -y(k-n_1) \quad u(k-1) \quad \dots \quad u(k-m_1)].$$

W trakcie obliczeń za pomocą przedstawionego algorytmu wystarczy pamiętać poprzednią wartość $\hat{\Theta}(k-1)$ oraz macierz $\mathbf{P}(k-1)$.

Do rozpoczęcia działania należy przyjąć pewne wartości początkowe $\hat{\Theta}(0)$ oraz $\mathbf{P}(0)$.

Ogólnie znane są dwie metody wyznaczenia tej wartości. Pierwsze podejście zakłada wykorzystanie wyniku identyfikacji dla pewnej niedużej serii pomiarowej. Druga metoda proponuje przyjąć według znanych reguł pewną arbitralnie wybraną wartość początkową $\hat{\Theta}(0)$. W pracy [88] wykazano, że hiperpowierzchnia funkcji kryterium jest unimodalna i dla pewnego skończonego $\hat{\Theta}(0)$ (np. $\hat{\Theta}(0) = 0$) oraz $\mathbf{P}(0)$ z dużymi wartościami na diagonalu (np. 10^6) algorytm zbiegnie się do pewnego rozwiązania wykazując zadawalającą efektywność.

1.3. Identyfikacja dwustopniowa

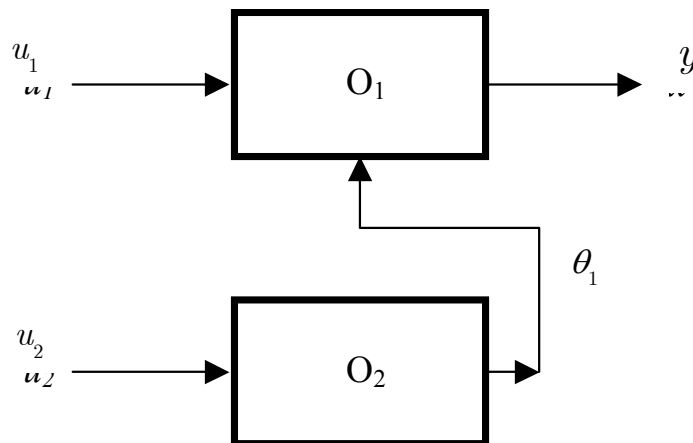
Identyfikacja dwustopniowa reprezentuje jedną z koncepcji rozwiązywania problemów związanych z wyznaczaniem modeli systemów złożonych.

Dla przypadku statycznego [20] idea identyfikacji dwustopniowej została przedstawiona w punkcie 1.1. Obecnie rozważymy pewien dwustopniowy obiekt identyfikacji przedstawiony na Rys. 1.1, który posiada dwa wejścia u_1 i u_2 oraz wyjście y . Parametr θ_1 obiektu na pierwszym stopniu O_1 jest wyjściem obiektu O_2 na drugim stopniu. System ten może zostać opisany zależnościami:

$$y = F_1(u_1, \theta_1), \quad (1.21)$$

$$\theta_1 = F_2(u_2, \theta_2), \quad (1.22)$$

charakteryzującymi odpowiednio obiekty na pierwszym oraz drugim stopniu. Interesuje nas wyznaczenie parametrów θ_1 i θ_2 w opisach na obu stopniach. Dwustopniowa struktura obiektu implikuje określony sposób organizacji eksperymentu pomiarowego. Zakładając, że obiekt na drugim stopniu O_2 jest statyczny, eksperyment jest przeprowadzany w następujący sposób. Dla stałej wartości $u_2(j)$ uzyskujemy sekwencję



Rys. 1. 1. Dwustopniowy obiekt identyfikacji.

pomiarów wejść i wyjść na pierwszym stopniu $\mathbf{U}_{1,j}$ oraz \mathbf{Y}_j o postaciach:

$$\mathbf{U}_{1,j} = \begin{bmatrix} u_{1,j}(1) & u_{1,j}(2) & \dots & u_{1,j}(M_{1j}) \end{bmatrix}, \quad (1.23)$$

$$\mathbf{Y}_j = \begin{bmatrix} y_j(1) & y_j(2) & \dots & y_j(M_{1j}) \end{bmatrix}. \quad (1.24)$$

Stosując odpowiedni algorytm identyfikacji Ψ_1 dla pierwszego stopnia wyznaczamy oszacowanie $\hat{\theta}_1$ dla stałego $u_2(j)$

$$\hat{\theta}_1(j) = \Psi_1(\mathbf{U}_{1,j}, \mathbf{Y}_j). \quad (1.25)$$

Powtarzanie identyfikacji na pierwszym stopniu dla $j = 1, 2, \dots, M_2$ oznacza kolejne takty identyfikacji na drugim stopniu, w wyniku których uzyskujemy sekwencję wejściową i wyjściową dla drugiego stopnia:

$$\mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} u_2(1) & u_2(2) & \dots & u_2(M_2) \end{bmatrix}, \quad (1.26)$$

$$\hat{\Theta}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1(1) & \hat{\theta}_1(2) & \dots & \hat{\theta}_1(M_2) \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

a następnie oszacowanie $\hat{\theta}_2$ z zastosowaniem odpowiedniego algorytmu identyfikacji Ψ_2

$$\hat{\theta}_2 = \Psi_2(\mathbf{U}_2, \hat{\Theta}_1). \quad (1.28)$$

Warto zauważyć, że w identyfikacji dwustopniowej $\hat{\theta}_1(j)$ nie jest wynikiem bezpośredniego pomiaru wyjścia na drugim stopniu, lecz wynikiem j -tej identyfikacji na pierwszym stopniu.

Jeżeli interesuje nas tylko wartość θ_2 w zależności y od u_1 , u_2 i nie jest potrzebne wyodrębnienie pierwszego stopnia, to można bezpośrednio badać tę zależność.

Zastosowanie koncepcji dwustopniowej, czyli rozróżnianie dwóch stopni, oznacza pewnego rodzaju dekompozycję. W pracy [64] porównano podejście dwustopniowe i bezpośrednie oraz sprecyzowano pewne wystarczające warunki równoważności.

Idea identyfikacji dwustopniowej znajduje wiele zastosowań opisanych w literaturze. Na polu biomedycznym koncepcja dwustopniowa została wykorzystana do modelowania wpływu działania leków i czynników środowiskowych na układ oddechowy [78].

Uzyskany model okazuje się bardzo przydatny do przeprowadzania racjonalnej terapii w warunkach klinicznych. Przykłady zastosowań biomedycznych można znaleźć również w pracach [66] i [67]. W pracy [68] przedstawiono zastosowanie identyfikacji dwustopniowej do modelowania systemu silnika prądu stałego. W tym przypadku system został poddany dekompozycji, gdzie stopień pierwszy jest opisany równaniem różniczkowym z pobudzeniem w postaci napięcia na tworniku i prędkością obrotową na wyjściu a stopień drugi posiada charakterystykę statyczną z rezystancją twornika na

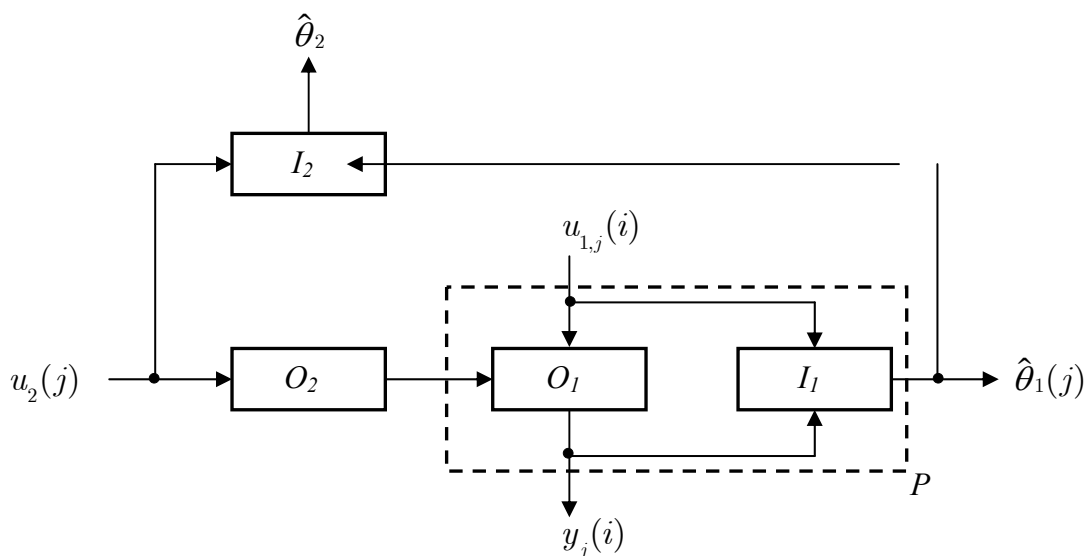
wejściu. Problem identyfikacji polega tu na znalezieniu relacji pomiędzy napięciem twornika, jego rezystancją a prędkością obrotową silnika. Zastosowania chemiczne koncepcji dwustopniowej obejmują jej wykorzystanie do identyfikacji i modelowania procesów absorpcji [69] oraz kolumny destylacyjnej z pulsatorem [70]. Inne zastosowania techniczne i biomedyczne zostały przedstawione w pracy [64].

Można podać następujące powody uzasadniające wprowadzenie i opracowanie koncepcji dwustopniowej:

1. Na pierwszym stopniu identyfikujemy oddzielne realne obiekty o tej samej naturze (urządzenia, procesy), charakteryzujące się różnymi stałymi wartościami u_2 . Wielkości u_1 i y są te same dla wszystkich obiektów. Jest to częsta sytuacja w badaniach doświadczalnych a poszczególne obiekty mogą być nawet badane w różnych pomieszczeniach (laboratoriach). Dzieje się tak np. w sytuacji przeprowadzania badania odkształceń y od naprężeń u_1 w płytach o różnej grubości u_2 . W populacyjnych badaniach biomedycznych badać można zależność y od u_1 dla różnych osobników z różnymi parametrami u_2 . Celem identyfikacji na drugim stopniu jest zbadanie wpływu u_2 na parametr θ_1 , wyznaczany w wyniku identyfikacji na stopniu pierwszym. Ogólnie rozpatrywany przypadek można określić jako dekompozycję przestrzenną, w której celem identyfikacji na drugim stopniu jest zbadanie zbioru realnych obiektów identyfikowanych na stopniu pierwszym, przy czym zmiana u_2 w jednym realnym obiekcie jest niewygodna lub wręcz niemożliwa (np. u_2 jest parametrem konstrukcyjnym urządzenia lub wiekiem osobnika w badaniach biomedycznych).
2. Równoczesna zmiana u_1 i u_2 w celu wyznaczenia θ_2 jest niewygodna lub niemożliwa nawet, jeśli oba stopnie dotyczą tego samego realnego obiektu. Na przykład w przypadku identyfikacji układu krążenia jest nierealne i wręcz bezsensowne zmienianie dawki leku tak szybko, jak zmieniają się i są mierzone wielkości u_1 i y , charakteryzujące dynamikę układu krążenia. Podobnie, jeśli np. badamy wpływ dawki katalizatora na stałą czasową pewnego procesu chemicznego, to identyfikacja na pierwszym stopniu w celu wyznaczenia tej stałej, tj. θ_1 , musi być szybka, natomiast identyfikacja na drugim stopniu wolna, tzn. u_2 musi być stałe w jednym cyklu

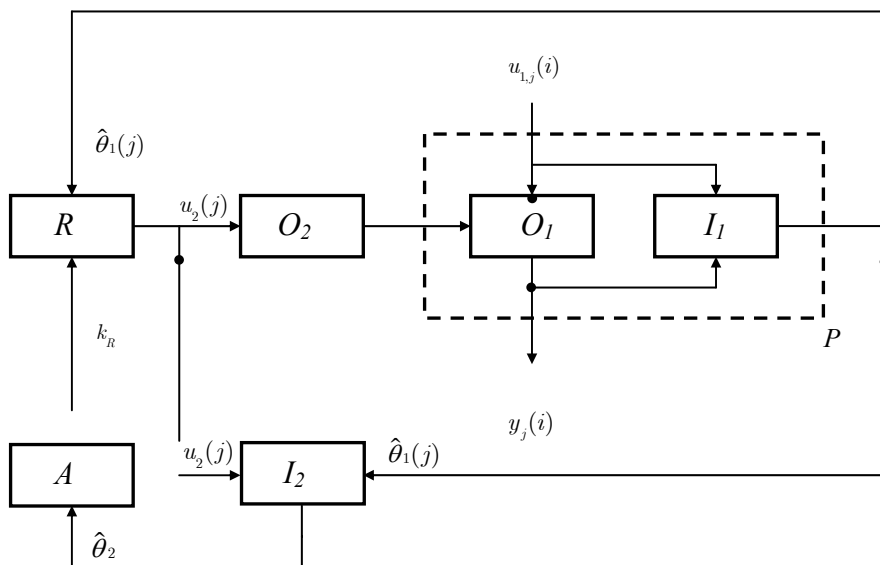
wyznaczania θ_1 . Ogólnie rozpatrywany przypadek można scharakteryzować jako dekompozycję czasową, w której z konieczności lub dla wygody eksperyment zorganizowany jest tak, że utrzymywana jest stała wartość u_2 w kolejnych cyklach, w których zmieniają się u_1 i y .

3. Zarówno przy jednoczesnej zmianie u_1 i u_2 , jak i przy szybkiej zmianie u_1 i wolnej u_2 , możliwe jest bezpośrednie wyznaczenie θ_2 . Wyodrębnienie pierwszego stopnia, czyli zastosowanie dekompozycji może być wówczas uzasadnione względami obliczeniowymi, tzn. ułatwieniami w wyznaczaniu i realizacji algorytmów identyfikacji. Aktualne jest wówczas porównanie podejścia dwustopniowego i bezpośredniego [64].
4. W sytuacji takiej jak poprzednio wyodrębnienie pierwszego stopnia może być również podyktowane jego samoistnym znaczeniem praktycznym, uzasadniającym wprowadzenie i wyznaczenie θ_1 , np. stałej czasowej badanego procesu chemicznego, co jest potrzebne do zaprojektowania odpowiedniego regulatora tego procesu. Co więcej, podczas identyfikacji realnego obiektu, której celem jest wyznaczenie θ_1 , drugi stopień może jeszcze nie być zaplanowany.
5. Wyodrębnienie pierwszego stopnia jest koniecznością, ponieważ θ_1 nie może być bezpośrednio mierzone. W tym przypadku podstawowym celem identyfikacji jest zbadanie zależności θ_1 od u_2 , czyli wyznaczenie θ_2 , natomiast identyfikacja na



Rys. 1. 2. Schemat blokowy rozpatrywanego systemu identyfikacji.

pierwszym stopniu pełni rolę pomocniczą jako pewnego rodzaju układ pomiarowy, w



Rys. 1. 3. System z adaptacją na 1. stopniu i identyfikacją dwustopniową.

którym mierzy się pomocnicze wielkości u_1 i y oraz wylicza θ_1 . Schemat blokowy takiego systemu identyfikacji (Rys. 1.2) zawiera wówczas pomocniczy system identyfikacji na pierwszym stopniu, który potraktować można jak układ pomiarowy P . Symbole $\hat{\theta}_2$ oraz $\hat{\theta}_1(j)$ oznaczają kolejno estymatę parametru θ_2 oraz estymatę parametru θ_1 przy zadanej j -tej wartości u_2 . Omawiany przypadek wiąże się ściśle z zastosowaniem identyfikacji dwustopniowej na potrzeby sterowania adaptacyjnego. Taki system sterowania przedstawiono ogólnie na Rys. 1.3. Obiekt sterowania O_2 znajduje się na drugim stopniu. Dzięki identyfikacji realizowanej przez identyfikator I_2 adaptator A zmienia parametr k_R regulatora R . Wynik identyfikacji na stopniu pierwszym $\hat{\theta}_1$ pozwala na przeprowadzenie identyfikacji na stopniu drugim oraz wyznaczenie przez regulator R wielkości sterującej u_2 .

Analogiczną procedurę identyfikacji dwustopniowej jak dla obiektów statycznych można zaproponować dla obiektów dynamicznych z tym, że w miejsce stałej wartości u_2 należy

sterującej przez algorytm sterowania na drugim stopniu. Równocześnie identyfikacja na stopniu pierwszym ma na celu dostarczenie aktualnej oceny parametrów obiektu O_1 w celu modyfikacji działania algorytmu sterowania R_1 . Adaptacyjny algorytm sterowania na stopniu drugim R_2 wymaga dostarczania na bieżąco ocen parametrów sterowanego obiektu. Zadanie to realizuje algorytm identyfikacji I_2 na stopniu drugim.

Kolejne założenie dotyczy charakteru obiektów na obu stopniach. Niech zarówno na pierwszym jak i na drugim stopniu występują obiekty dynamiczne. Ponieważ dla przedstawionego problemu konieczne jest wyznaczanie ocen parametrów na obu stopniach na bieżąco, znana procedura identyfikacji dwustopniowego obiektu identyfikacji, polegająca na powtarzaniu sygnału wejściowego na drugim stopniu w tym przypadku nie może być zastosowana. Przy pewnych założeniach dotyczących obiektu na drugim stopniu oraz częstotliwości pomiarów na pierwszym i drugim stopniu, można odpowiednio zorganizować eksperyment pomiarowy tak, aby uzyskane serie pomiarowe odpowiadały podejściu dwustopniowemu. W pierwszej koncepcji zakłada się, że wejście i wyjście na pierwszym stopniu może być mierzone z większą częstotliwością niż wejście na stopniu drugim. Wówczas pomiary przesunięte o takt próbkowania na pierwszym stopniu traktowane są jako kolejne serie pomiarowe przy tym samym sygnale na stopniu drugim. Koncepcja druga zakłada, że sygnały na stopniu drugim są wolnozmiennie i dlatego można przyjąć, że w czasie dokonywania pomiarów w pewnej serii pomiarowej na stopniu pierwszym nie zmieniają się. Obie koncepcje są pewnym przybliżeniem sytuacji, w której dochodzi do powtarzania sygnału wejściowego na stopniu drugim, czyli gdzie uzyskiwane na stopniu pierwszym pomiary wyjścia w pewnej chwili czasowej są otrzymywane dla tej samej wartości wyjścia obiektu na stopniu drugim. Ponieważ w rzeczywistych zastosowaniach obu koncepcji w czasie uzyskiwania pomiarów na stopniu pierwszym wyjście obiektu na stopniu drugim podlega zmianom, pojawiają się – specyficzne dla każdej z metod – pewne niedokładności pomiarowe związane z dynamiką obiektów na obu stopniach oraz charakterem zmian sygnałów wejściowych. Aktualny staje się wówczas problem wyboru jednej z dwóch koncepcji organizacji pomiarów na bieżąco.

Dla opisanego dwustopniowego systemu sterowania adaptacyjnego możliwe jest obecnie sformułowanie celu rozprawy. Celem niniejszej pracy było opracowanie metod i algorytmów identyfikacji dwustopniowej przydatnych do przeprowadzenia sterowania

adaptacyjnego w dwustopniowym obiekcie dynamicznym z uwzględnieniem dwóch koncepcji organizacji pomiarów na bieżąco.

Tak postawiony cel może zostać osiągnięty przez realizację następujących zadań:

1. Analizę obu koncepcji organizacji pomiarów.
2. Opracowanie algorytmów identyfikacji dwustopniowej dla obiektów dynamicznych na obu stopniach przy założeniu, że identyfikacja jest przeprowadzana rekurencyjnie.
3. Sformułowanie zasad wyboru koncepcji organizacji pomiarów wykonywanych na bieżąco na podstawie posiadanej wiedzy o identyfikowanym obiekcie dwustopniowym oraz charakterze zmian sygnałów wejściowych.

Pierwsza część pracy poświęcona jest problemowi identyfikacji obiektu dwustopniowego. Problem ten początkowo rozważany jest dla organizacji pomiarów z powtarzaniem sygnału wejściowego na 2. stopniu. Dla tak przeprowadzanego eksperymentu rozwiązuje się problem dwustopniowej estymacji parametrów obiektu dynamicznego, w którym oba stopnie opisane są równaniami różnicowymi. Rozwiązanie polega na zaproponowaniu dwóch różnych dwustopniowych algorytmów identyfikacji wykorzystujących metodę najmniejszych kwadratów oraz metodę zmiennych instrumentalnych. Następnie rozważa się identyfikację dwustopniową w przypadku uzyskiwania pomiarów na bieżąco.

Przedstawione zostają dwie metody organizacji pomiarów, dla których proponuje się algorytmy identyfikacji najmniejszych kwadratów oraz zmiennych instrumentalnych. Propozycja algorytmów dla obu metod obejmuje zarówno algorytmy, dla których oceny nieznanymi parametrów uzyskuje się po zgromadzeniu całej serii pomiarowej jak i algorytmy rekurencyjne. Ilustrację działania zaproponowanych algorytmów stanowią badania symulacyjne, których wyniki zostały zawarte w pracy.

Druga część pracy poświęcona jest zasadom wyboru przedstawionych metod organizacji pomiarów na bieżąco. Wprowadza się pojęcie błędu pomiarowego wynikającego z zastosowania obu metod, który służy później jako kryterium podczas formułowania rekomendacji. Na koniec, po uściśleniu pojęcia posiadanej wiedzy a priori o właściwościach identyfikowanego obiektu dwustopniowego formułuje się rekomendacje wyboru metody organizacji pomiarów oraz parametrów eksperymentu pomiarowego. Zaproponowane zostają dwa podejścia do problemu sformułowania rekomendacji.

Pierwsze wymaga przeprowadzenia badań symulacyjnych. Drugie formułuje rekomendacje na drodze rozważań analitycznych. Zastosowanie zaproponowanych rekomendacji zostało zbadane w trakcie badań symulacyjnych, których wyniki zawarto w pracy.

Symulacje komputerowe przeprowadzone na potrzeby niniejszej pracy wykonano pod kontrolą środowiska MATLAB w wersji 5.2 [47].

Rozprawa składa się z niniejszego, formułującego problem pracy rozdziału oraz pięciu kolejnych.

Rozdział 2. Rozdział dotyczy problemów modelowania i identyfikacji dwustopniowego obiektu dynamicznego. W rozdziale przedstawia się rozważany w pracy dynamiczny obiekt dwustopniowy oraz ogólną metodę przeprowadzania jego identyfikacji wraz z planem przebiegu eksperymentu pomiarowego. Rozdział zawiera opis algorytmów identyfikacji na obu stopniach przygotowanych z wykorzystaniem metody najmniejszych kwadratów oraz zmiennych instrumentalnych.

Rozdział 3. Rozdział omawia tematykę przeprowadzania identyfikacji dwustopniowej na bieżąco. Zostają przedstawione oraz omówione dwie koncepcje przeprowadzania dwustopniowego eksperymentu pomiarowego dla trybu wykonywania pomiarów na bieżąco. Dla obu koncepcji proponuje się algorytmy identyfikacji dwustopniowej wykorzystujące metodę najmniejszych kwadratów oraz metodę zmiennych instrumentalnych. Algorytmy identyfikacji zostają przygotowane zarówno w wersji przetwarzającej kompletną serię pomiarową jak i wersji rekurencyjnej.

Rozdział 4. Treścią rozdziału są rekomendacje zastosowania koncepcji organizacji pomiarów na potrzeby przeprowadzania eksperymentu na bieżąco. Jako kryterium formułowania rekomendacji wprowadza się pojęcie błędu metody pomiarowej. Podaje się podstawowe informacje a priori o identyfikowanych obiektach na obu stopniach. Formułuje się rekomendacje wyboru metody

organizacji pomiarów na bieżąco w zależności od posiadanej wiedzy a priori o obiektach i sygnałach.

Rozdział 5. Rozdział zawiera wyniki oraz omówienie badań symulacyjnych proponowanych algorytmów i rekomendacji. Opisano wykorzystany plan badań symulacyjnych. Przedstawiono badane obiekty, sygnały i parametry eksperymentu. Omówiono uzyskane wyniki badań odnosząc się do sformułowanych w treści pracy rekomendacji stosowania metod organizacji pomiarów.

Rozdział 6. W rozdziale przedstawiono końcowe wnioski rozprawy oraz rekomendacje dalszych badań.

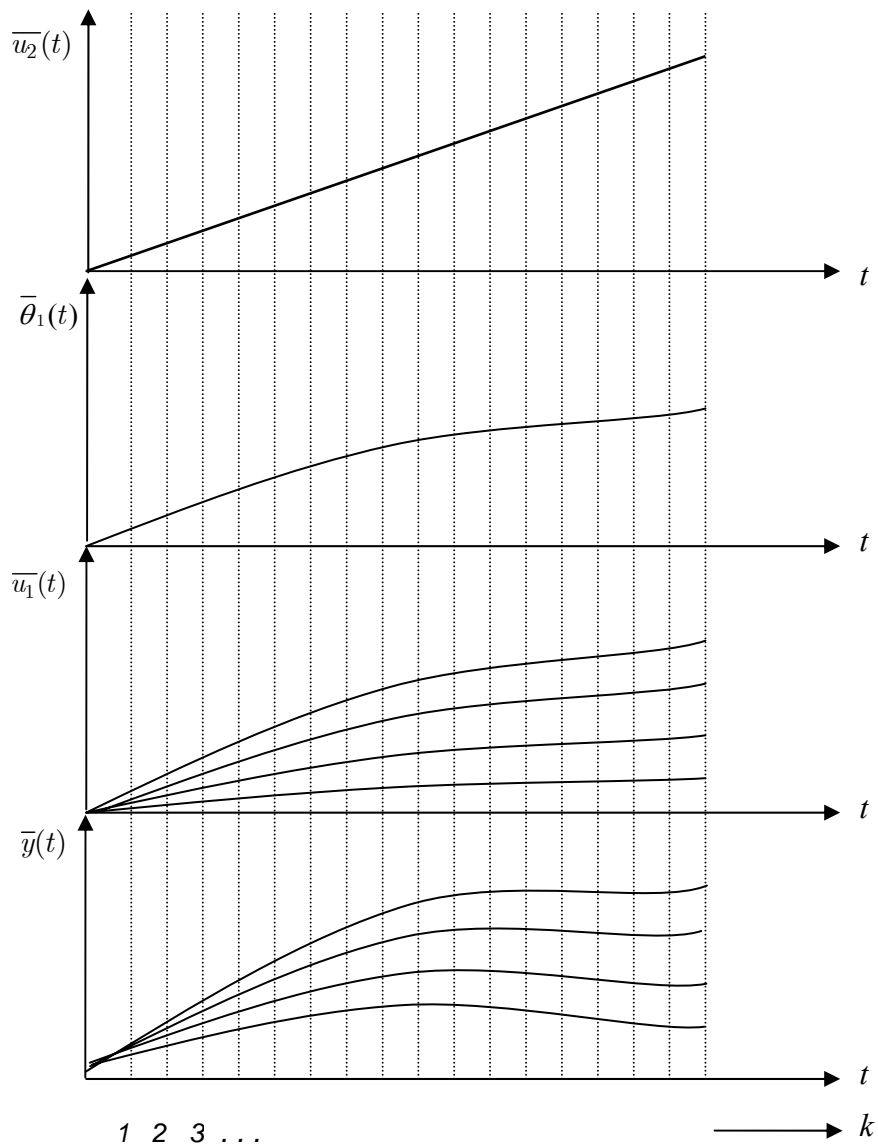
Rozdział 2. Modelowanie i identyfikacja dwustopniowego obiektu dynamicznego

2.1. Wprowadzenie

W rozdziale zaprezentowano podstawowe pojęcia związane z modelowaniem i identyfikacją dynamicznego dwustopniowego obiektu sterowania. Przedstawiając istotę procedury identyfikacji zwrócono uwagę na specyfikę obiektów dynamicznych w ujęciu dwustopniowym. W rozdziale zaproponowano również dwie propozycje algorytmów identyfikacji obiektów dwustopniowych wykorzystujące metodę najmniejszych kwadratów oraz metodę zmiennych instrumentalnych. Wyniki uzyskane w niniejszym rozdziale stanowią podstawę późniejszych rozważań nad identyfikacją dwustopniową prowadzonych w dalszych rozdziałach pracy.

2.2. Identyfikacja dwustopniowa obiektu dynamicznego

Uzasadnienie modelowania złożonych systemów sterowania z wykorzystaniem metodologii dwustopniowej jak i zastosowanie samej identyfikacji dwustopniowej omówiono w punkcie 1.3. Przedstawiona tam procedura stanowi podstawę identyfikacji dwustopniowej [64]. Zakłada się w niej, że podczas identyfikacji na pierwszym stopniu wielkość u_2 jest stała w czasie całego procesu wyznaczania parametrów obiektu na stopniu pierwszym. Przyjmuje się również, że eksperyment jest czynny, co najmniej dla drugiego stopnia, a parametr θ_2 wyznacza się powtarzając wielokrotnie identyfikację na stopniu pierwszym dla różnych wartości u_2 . W rzeczywistych problemach identyfikacji założenia takie nie zawsze mogą być spełnione. Dotyczy to w szczególności przypadku identyfikacji obiektu dynamicznego na stopniu drugim, dla którego utrzymywanie niezmiennego w czasie wejścia u_2 wcale nie musi oznaczać braku zmian na wyjściu θ_1 . Problem ten może zostać rozwiązany dzięki odpowiedniej organizacji eksperymentu pomiarowego, w którym stałej wartości u_2 odpowiada powtarzalny sygnał $\bar{u}_2(t)$ [1]. Ilustrację przebiegu takiego eksperymentu stanowi Rys. 2.1.



Rys. 2. 1. Ilustracja eksperymentu pomiarowego.

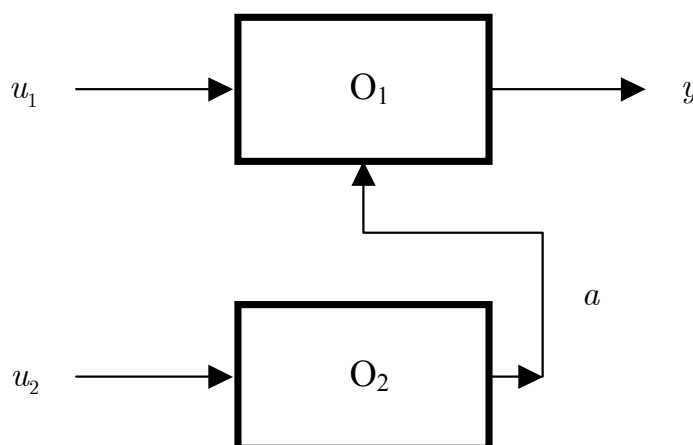
Dla ustalonego, powtarzanego sygnału $\bar{u}_2(t)$ podawanego na wejście obiektu na 2. stopniu, na wejście obiektu na stopniu pierwszym podaje się kolejne, różne sygnały $\bar{u}_1(t)$ otrzymując za każdym razem na wyjściu kolejne sygnały $\bar{y}(t)$. Sygnały wejściowe $\bar{u}_1(t)$ i $\bar{u}_2(t)$ oraz wyjściowy $\bar{y}(t)$ mierzy się w chwilach $k = 1, 2, 3, \dots$ uzyskując ciągi pomiarów służące do celów identyfikacji. Powtarzanie sygnału $\bar{u}_2(t)$ zapewnia, że pomiary kolejnych $\bar{u}_1(t)$ i $\bar{y}(t)$ odbywają się dla tego samego, wewnętrznego sygnału na wyjściu obiektu na 2. stopniu $\bar{\theta}_1(t)$. Oznacza to, że w dowolnej chwili k pomiary kolejnych $\bar{u}_1(t)$ i $\bar{y}(t)$ są wykonywane

dla tej samej wartości sygnału $\bar{\theta}_1(t)$ w chwili k . Dysponując w chwili k pomiarami kolejnych $\bar{u}_1(t)$ i $\bar{y}(t)$, dzięki identyfikacji na 1. stopniu możliwe staje się uzyskanie oszacowania wartości wyjścia obiektu na 2. stopniu w chwili k a w konsekwencji dla kolejnych k wyznaczenie przybliżenia niemierzalnego sygnału wewnętrznego $\bar{\theta}_1(t)$ na wyjściu obiektu na 2. stopniu. Tak wyznaczone przybliżenie sygnału na wyjściu obiektu na 2. stopniu wraz z pomiarami sygnału wejściowego na stopniu drugim zostanie wykorzystane do przeprowadzenia identyfikacji na 2. stopniu.

Podejście takie wymaga odpowiedniej organizacji pomiarów, polegającej na powtarzaniu sygnału $\bar{u}_2(t)$ na wejściu stopnia drugiego. Z tego powodu pojawia się dodatkowy problem organizacji pomiarów na bieżąco.

2.3. Algorytm identyfikacji dwustopniowej metody najmniejszych kwadratów

Rozważmy dwustopniowy liniowy obiekt dynamiczny (Rys. 2.2) o wejściach u_1 , u_2 i wyjściu y , w którym wybrany parametr opisu a na pierwszym stopniu w chwili k zależy od wejścia stopnia drugiego, tj. $a(k)$ zależy od $u_2(k)$.



Rys. 2. 2. Dwustopniowy obiekt identyfikacji.

Obiekt dwustopniowy będzie wówczas opisany równaniami:

$$A_1(q^{-1})y(k) = B_1(q^{-1})u_1(k), \quad (2.1)$$

$$A_2(q^{-1})a(k) = B_2(q^{-1})u_2(k), \quad (2.2)$$

gdzie k reprezentuje numer chwili czasowej działania obiektu a q^{-1} jest operatorem opóźnienia ($q^{-1}y(k) = y(k-1)$). Wielomiany $A_1(q^{-1})$, $A_2(q^{-1})$, $B_1(q^{-1})$, $B_2(q^{-1})$ przyjmują postać:

$$\left. \begin{aligned} A_1(q^{-1}) &= 1 + a_{11}q^{-1} + a_{12}q^{-2} + \dots + a_{1n_1}q^{-n_1}, \\ B_1(q^{-1}) &= b_{11}q^{-1} + b_{12}q^{-2} + \dots + b_{1m_1}q^{-m_1}, \\ A_2(q^{-1}) &= 1 + a_{21}q^{-1} + a_{22}q^{-2} + \dots + a_{2n_2}q^{-n_2}, \\ B_2(q^{-1}) &= b_{21}q^{-1} + b_{22}q^{-2} + \dots + b_{2m_2}q^{-m_2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

gdzie dla ustalonego k , $a(k)$ jest wartością wybranego parametru opisu obiektu na stopniu pierwszym

$$a(k) \in \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n_1}, b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1m_1}\}.$$

W celu wyznaczenia parametrów opisu (2.1) i (2.2) przeprowadzono następujący pomiarowy. Dla ustalonego ciągu podawanego na wejście obiektu na drugim stopniu $u_2(k)$, $k = 0, \dots, K-1$, na wejście pierwszego stopnia podano ciąg $u_{1i}(k)$, $k = 0, \dots, K-1$ i zmierzono wyjście obiektu $y_i(k)$, $k = 0, \dots, K-1$, gdzie K jest długością ciągu pomiarów. Eksperyment powtórzono podając na wejście pierwszego stopnia różne ciągi $u_{1i}(k)$, $i = 0, \dots, I-1$, gdzie I jest liczbą powtórzeń eksperymentu na pierwszym stopniu dla tych samych warunków początkowych obiektów i pomiarów. W wyniku otrzymano następujące serie pomiarowe:

$$\{u_{1i}(k)\}, \quad (2.4)$$

$$\{y_i(k)\}, \quad (2.5)$$

$$\{u_2(k)\}, \quad (2.6)$$

$$k = 0, \dots, K-1, \quad i = 0, \dots, I-1.$$

Założenie identycznych warunków początkowych dla każdego i , $i = 0, \dots, I - 1$, oraz powtarzanie ciągu $u_2(k)$, $k = 0, \dots, K - 1$, oznacza, że przedstawiony w tym rozdziale eksperyment pomiarowy nadaje się wyłącznie do zastosowania w algorytmach identyfikacji przetwarzających kompletną serię pomiarową.

Równania różnicowe opisujące obiekty na obu stopniach (2.1) i (2.2) dla uzyskanych serii pomiarowych: (2.4), (2.5) i (2.6) można zapisać w postaci:

$$y_i(k) = Z_{1i}^T(k)\Theta_1 + z_{1i}(k)a(k), \quad (2.7)$$

$$a(k) = Z_2^T(k)\Theta_2, \quad (2.8)$$

gdzie:

$$\Theta_1^T = \begin{cases} [a_{11} \ \dots \ a_{1p-1} \ a_{1p+1} \ \dots \ a_{1n_1} \ b_{11} \ \dots \ b_{1m_1}] & \text{dla } a(k) = a_{1p}, p = 1 \dots n_1, \\ [a_{11} \ \dots \ a_{1n_1} \ b_{11} \ \dots \ b_{1p-1} \ b_{1p+1} \ \dots \ b_{1m_1}] & \text{dla } a(k) = b_{1p}, p = 1 \dots m_1, \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\Theta_2^T = [a_{21} \ \dots \ a_{2n_2} \ b_{21} \ \dots \ b_{2m_2}], \quad (2.10)$$

$$z_{1i}(k) = \begin{cases} -y_i(k-p) & \text{dla } a(k) = a_{1p}, \\ u_{1i}(k-p) & \text{dla } a(k) = b_{1p}. \end{cases} \quad (2.11)$$

$$Z_{1i}^T(k) = \begin{cases} [-y_i(k-1) \ \dots \ -y_i(k-p-1) \ -y_i(k-p+1) \ \dots \\ \quad -y_i(k-n_1) \ u_{1i}(k-1) \ \dots \ u_{1i}(k-m_1)] & \text{dla } a(k) = a_{1p} \\ [-y_i(k-1) \ \dots \ -y_i(k-n_1) \ u_{1i}(k-1) \ \dots \\ \quad u_{1i}(k-p-1) \ u_{1i}(k-p+1) \ \dots \ u_{1i}(k-m_1)] & \text{dla } a(k) = b_{1p}, \end{cases} \quad (2.12)$$

$$Z_2^T(k) = [-a(k-1) \ \dots \ -a(k-n_2) \ u_2(k-1) \ \dots \ u_2(k-m_2)]. \quad (2.13)$$

Dla przedstawionego obiektu problem identyfikacji dwustopniowej polega na wyznaczeniu estymaty wektora parametrów $\hat{\Theta}_1$ oraz przebiegu sygnału $\hat{a}(k)$ dla $k = 0, \dots, K - 1$, na pierwszym stopniu oraz estymaty wektora parametrów $\hat{\Theta}_2$ na stopniu drugim. Wektor $\hat{\Theta}_2$ będzie wyznaczany na podstawie ciągu wyliczonych wartości $\hat{a}(k)$ dla $k = 0, \dots, K - 1$, oraz ciągu pomiarów wejścia na drugim stopniu $u_2(k)$, $k = 0, \dots, K - 1$. Rozwiązanie problemu identyfikacji zostanie obecnie uzyskane z wykorzystaniem metody najmniejszych kwadratów.

2.3.1. Algorytm identyfikacji na pierwszym stopniu

Na pierwszym stopniu algorytm identyfikacji metody najmniejszych kwadratów wyznacza estymaty wektora parametrów $\hat{\Theta}_1$ oraz przebiegu sygnału $\hat{a}(k)$ dla $k = 0, \dots, K - 1$ minimalizując sumę kwadratów błędów dla serii pomiarów (2.4) i (2.5). Pomiary wejścia i wyjścia obiektu na pierwszym stopniu uzyskiwane są dla różnych serii wejściowych na pierwszym stopniu $u_{1i}(k)$, $k = 0, \dots, K - 1$, dla $i = 0, \dots, I - 1$ oraz tego samego, powtarzanego w każdej serii i , $i = 0, \dots, I - 1$, ciągu $u_2(k)$, $k = 0, \dots, K - 1$, podawanego na wejście obiektu na drugim stopniu.

Minimalizując kryterium

$$Q_1 = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{k=0}^{K-1} [y_i(k) - Z_{1i}^T(k)\hat{\Theta}_1 - z_{1i}(k)\hat{a}(k)]^2 \quad (2.14)$$

poprzez zróżniczkowanie względem $\hat{\Theta}_1$ oraz $\hat{a}(k)$ dla $k = 0, \dots, K - 1$ i przyrównanie wyniku różniczkowania do zera otrzymujemy następujące algorytmy identyfikacji na pierwszym stopniu:

$$\hat{\Theta}_1 = \left\{ \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{k=0}^{K-1} [Z_{1i}(k)Z_{1i}^T(k) - Z_{1i}(k)z_{1i}(k) \left(\sum_{i=0}^{I-1} z_{1i}^2(k) \right)^{-1} \sum_{i=0}^{I-1} z_{1i}(k)Z_{1i}^T(k)] \right\}^{-1} \times \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{k=0}^{K-1} [Z_{1i}(k)y_i(k) - Z_{1i}(k)z_{1i}(k) \left(\sum_{i=0}^{I-1} z_{1i}^2(k) \right)^{-1} \sum_{i=0}^{I-1} z_{1i}(k)y_i(k)], \quad (2.15)$$

$$\hat{a}(k) = \left(\sum_{i=0}^{I-1} z_{1i}^2(k) \right)^{-1} \sum_{i=0}^{I-1} [z_{1i}(k)y_i(k) - z_{1i}(k)Z_{1i}^T(k)\hat{\Theta}_{1i}]. \quad (2.16)$$

2.3.2. Algorytm identyfikacji na drugim stopniu

Na drugim stopniu algorytm identyfikacji przetwarzając ciąg pomiarów wejścia $u_2(k)$, $k = 0, \dots, K - 1$, oraz ciąg wyznaczony w wyniku identyfikacji na stopniu pierwszym $\hat{a}(k)$, $k = 0, \dots, K - 1$, wylicza estymatę wektora parametrów obiektu na stopniu drugim $\hat{\Theta}_2$.

Minimalizując kryterium

$$Q_2 = \sum_{k=0}^{K-1} [\hat{a}(k) - \hat{Z}_2^T(k)\hat{\Theta}_2]^2 \quad (2.17)$$

względem $\hat{\Theta}_2$ otrzymujemy poszukiwany algorytm identyfikacji na drugim stopniu

$$\hat{\Theta}_2 = \left[\sum_{k=0}^{K-1} \hat{Z}_2(k)\hat{Z}_2^T(k) \right]^{-1} \sum_{k=0}^{K-1} \hat{Z}_2(k)\hat{a}(k), \quad (2.18)$$

gdzie

$$\hat{Z}_2^T(k) = [-\hat{a}(k-1) \quad \dots \quad -\hat{a}(k-n_2) \quad u_2(k-1) \quad \dots \quad u_2(k-m_2)].$$

2.4. Algorytm identyfikacji dwustopniowej metody zmiennych instrumentalnych

Ponieważ używany do identyfikacji na drugim stopniu ciąg $\hat{a}(k)$, $k = 0, \dots, K-1$, jest wyznaczany w wyniku identyfikacji na stopniu pierwszym może on zostać zapisany następująco:

$$\hat{a}(k) = a(k) + \varepsilon_I(k) \quad \text{dla } k = 0, \dots, K-1,$$

gdzie:

$a(k)$ – jest rzeczywistą wartością wyjścia obiektu na drugim stopniu w chwili k ,

$$k = 0, \dots, K-1,$$

$\varepsilon_I(k)$ – jest błędem identyfikacji na pierwszym stopniu popełnianym w chwili k ,

$$k = 0, \dots, K-1.$$

Dla dyskretnych obiektów dynamicznych wartości wyjść w poprzednich chwilach czasowych mają charakter wartości wejściowych (zgodnie np. z (2.13)). Mówimy wówczas o tzw. wektorze wejść zastępczych. Jeżeli wartości wyjścia mierzone są z błędami, co jest nieuniknione dla rozpatrywanego obiektu na stopniu drugim, otrzymujemy ciągi pomiarów wyjścia oraz wejść zastępczych obciążone błędami pomiarowymi. W wyniku użycia metody najmniejszych kwadratów dla takich ciągów algorytm identyfikacji dostarcza wówczas rozwiązania z obciążeniem zależnym od popełnionych błędów pomiarowych.

Jedną z metod pozwalającą na rozwiązanie problemu błędów w zmiennych i w efekcie otrzymywanie estymatorów zgodnych jest metoda zmiennych instrumentalnych [87].

Zakładając, że pomiary wyjścia obiektu na pierwszym stopniu również obciążone są błędami pomiarowymi, co będzie miało miejsce dla rozpatrywanych w dalszej części rozprawy przypadków organizacji pomiarów na bieżąco, metoda zmiennych instrumentalnych zostanie zastosowana do rozwiązania problemu identyfikacji obiektów na obu stopniach. Przydatność metody zmiennych instrumentalnych do identyfikacji podobnego do rozpatrywanego w niniejszej pracy obiektu dwustopniowego wykazano w pracy [1].

2.4.1. Algorytm identyfikacji na pierwszym stopniu

Oznaczając przez $\hat{\Theta}_1$ oraz $\hat{a}(k)$ estymatory parametrów na pierwszym stopniu otrzymane w wyniku zastosowania metody zmiennych instrumentalnych, algorytmy identyfikacji dla tej metody przyjmują postać:

$$\hat{\Theta}_1 = \left\{ \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{k=0}^{K-1} [\bar{Z}_{1i}(k) Z_{1i}^T - \bar{Z}_{1i}(k) \bar{z}_{1i}(k) \left(\sum_{i=0}^{I-1} \bar{z}_{1i}(k) z_{1i}(k) \right)^{-1} \sum_{i=0}^{I-1} \bar{z}_{1i}(k) Z_{1i}^T(k)] \right\}^{-1} \times \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{k=0}^{K-1} [\bar{Z}_{1i}(k) y_i(k) - \bar{Z}_{1i}(k) \bar{z}_{1i}(k) \left(\sum_{i=0}^{I-1} \bar{z}_{1i}(k) z_{1i}(k) \right)^{-1} \sum_{i=0}^{I-1} \bar{z}_{1i}(k) y_i(k)], \quad (2.19)$$

$$\hat{a}(k) = \left(\sum_{i=0}^{I-1} \bar{z}_{1i}(k) z_{1i}(k) \right)^{-1} \sum_{i=0}^{I-1} [\bar{z}_{1i}(k) y_i(k) - \bar{z}_{1i}(k) Z_{1i}^T(k) \hat{\Theta}_1], \quad (2.20)$$

gdzie: $\bar{Z}_{1i}(k)$ oraz $\bar{z}_{1i}(k)$ są wektorami zmiennych instrumentalnych.

Wybór zmiennych instrumentalnych ma podstawowe znaczenie [38] dla praktycznego zastosowania tej metody. Podobnie jak w pracach [86] i [60] do uzyskania zmiennych instrumentalnych użyjemy wartości otrzymywanych na wyjściu pewnego dynamicznego obiektu pomocniczego o takim samym równaniu jak identyfikowany obiekt, którego parametry wyznaczane są za pomocą metody najmniejszych kwadratów.

Pozwala nam to na zapisanie:

$$\bar{Z}_{1i}^T(k) = \begin{cases} [-\bar{y}_i(k-1) \quad \dots \quad -\bar{y}_i(k-p-1) \quad -\bar{y}_i(k-p+1) \quad \dots \\ \quad \quad \quad -\bar{y}_i(k-n_1) \quad u_{1i}(k-1) \quad \dots \quad u_{1i}(k-m_1)] \text{ dla } a(k) = a_{1p}, \\ [-\bar{y}_i(k-1) \quad \dots \quad -\bar{y}_i(k-n_1) \quad u_{1i}(k-1) \quad \dots \\ \quad \quad \quad u_{1i}(k-p-1) \quad u_{1i}(k-p+1) \quad \dots \quad u_{1i}(k-m_1)] \text{ dla } a(k) = b_{1p}, \end{cases} \quad (2.21)$$

$$\bar{z}_{1i}(k) = \begin{cases} -\bar{y}_i(k-p) & \text{dla } a(k) = a_{1p}, \\ u_{1i}(k-p) & \text{dla } a(k) = b_{1p}. \end{cases} \quad (2.22)$$

Przy czym $\bar{y}_i(k)$ wyznaczamy na podstawie zależności

$$\hat{A}_1(q^{-1})\bar{y}_i(k) = \hat{B}_1(q^{-1})u_{1i}(k) \quad (2.23)$$

dla zadanego ciągu wejść (2.4), gdzie: $\hat{A}_1(q^{-1})$ i $\hat{B}_1(q^{-1})$ są wielomianami $A_1(q^{-1})$ i $B_1(q^{-1})$ z parametrami wyznaczonymi w wyniku działania (2.15) oraz ciągu uzyskanego dzięki (2.16).

2.4.2. Algorytm identyfikacji na drugim stopniu

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie jak dla stopnia pierwszego, estymator parametrów metody zmiennych instrumentalnych na stopniu drugim przyjmuje postać

$$\hat{\Theta}_2 = \left[\sum_{k=0}^{K-1} \bar{Z}_2(k) \hat{Z}_2^T(k) \right]^{-1} \sum_{k=0}^{K-1} \bar{Z}_2(k) \hat{a}(k), \quad (2.24)$$

gdzie

$$\hat{Z}_2^T(k) = [-\hat{a}(k-1) \quad \dots \quad -\hat{a}(k-n_2) \quad u_2(k-1) \quad \dots \quad u_2(k-m_2)]$$

a $\bar{Z}_2(k)$ jest wektorem zmiennych instrumentalnych o postaci

$$\bar{Z}_2^T(k) = [-\bar{a}(k-1) \quad \dots \quad -\bar{a}(k-n_2) \quad u_2(k-1) \quad \dots \quad u_2(k-m_2)] \quad (2.25)$$

przy czym $\bar{a}(k)$ wyznaczamy na podstawie zależności

$$\hat{A}_2(q^{-1})\bar{a}(k) = \hat{B}_2(q^{-1})u_2(k), \quad (2.26)$$

dla zadanego ciągu wejść (2.6), gdzie $\hat{A}_2(q^{-1})$ i $\hat{B}_2(q^{-1})$ są wielomianami $A_2(q^{-1})$ i $B_2(q^{-1})$ z parametrami (2.18).

Rozdział 3. Algorytmy identyfikacji na bieżąco dwustopniowego obiektu dynamicznego

3.1. Wprowadzenie

Podstawowa zasada identyfikacji dwustopniowej zakłada powtarzanie sygnału wejściowego na drugim stopniu podczas wykonywania identyfikacji na stopniu pierwszym. W wielu sytuacjach praktycznych jest to bardzo trudne bądź nawet niemożliwe. Przy pewnych założeniach dotyczących obiektu na drugim stopniu oraz częstotliwości pomiaru sygnałów na pierwszym oraz drugim stopniu, można tak zorganizować eksperyment pomiarowy, że mimo odstępstwa od powtarzania sygnału na drugim stopniu uzyskane serie pomiarowe będą odpowiadały założeniom podejścia dwustopniowego.

W rozdziale zaproponowano wykorzystanie dwóch alternatywnych metody organizacji pomiarów pozwalających na wykonanie eksperymentu pomiarowego zgodnego z podejściem dwustopniowym. Pierwsza metoda zakłada, że pomiary na pierwszym stopniu mogą być mierzone ze znacznie większą częstotliwością niż na stopniu drugim. Propozycja druga zakłada zdecydowanie wolniejsze zmiany na wejściu obiektu na drugim stopniu w stosunku do zmian sygnału na wejściu obiektu na stopniu pierwszym.

Dla obu metod organizacji pomiarów zaproponowano algorytmy identyfikacji przetwarzające kompletne serie pomiarowe oraz algorytmy rekurencyjne. Algorytmy przetwarzające kompletne serie pomiarowe wykorzystują rozwiązania opracowane dla organizacji pomiarów z powtarzaniem sygnału wejściowego na 2. stopniu. Algorytmy rekurencyjne przygotowano w oparciu o rekurencyjną metodę najmniejszych kwadratów oraz rekurencyjną metodę zmiennych instrumentalnych.

3.2. Algorytmy dwustopniowej identyfikacji na bieżąco

3.2.1. Pierwsza metoda organizacji pomiarów

Algorytm identyfikacji dwustopniowego obiektu dynamicznego wymaga określonej metody przeprowadzenia eksperymentu. W celu zapewnienia powtarzalności parametru $a(k)$ podczas wykonywania kolejnych serii pomiarowych na pierwszym stopniu konieczne staje się powtarzanie ciągu wejściowego $u_2(k), k = 0, \dots, K - 1$. W wielu sytuacjach

rzeczywistych jest to niemożliwe. Aby pokonać tę trudność i zapewnić równocześnie uzyskanie serii pomiarowych zgodnych z założeniami identyfikacji dwustopniowej proponuje się wykorzystać następujący eksperyment pomiarowy. Zakłada się, że wejście i wyjście na pierwszym stopniu może być mierzone z większą częstotliwością jak na stopniu drugim. Pomiary na pierwszym stopniu dokonywane są z taktom τ_1 natomiast na drugim stopniu z taktom τ_2 , zakładając równocześnie, że takt τ_1 jest zdecydowanie krótszy od τ_2 . Wprowadzając całkowity współczynnik N wymaganą relację pomiędzy τ_1 a τ_2 można zapisać jako

$$\tau_2 = N\tau_1, \quad (3.1)$$

gdzie

$$N \gg 0.$$

Niech dyskretny obiekt dwustopniowy, którego parametry wyznaczone są w wyniku estymacji działa z taktom τ_2 . Serię pomiarową na 1. stopniu można wówczas uzyskać wybierając co N - tą wartość mierzonego na 1. stopniu wejścia i wyjścia. Ponieważ w czasie τ_1 zmiana u_2 oraz w konsekwencji zmiana a może zostać pominięta w stosunku do zmiany tych sygnałów w czasie τ_2 pozwala to przyjąć, że kolejne serie pomiarowe sygnałów na 1. stopniu przesunięte o takt próbkowania τ_1 traktowane mogą być jako różne serie wejść i wyjść na pierwszym stopniu przy tym samym wejściu na stopniu drugim.

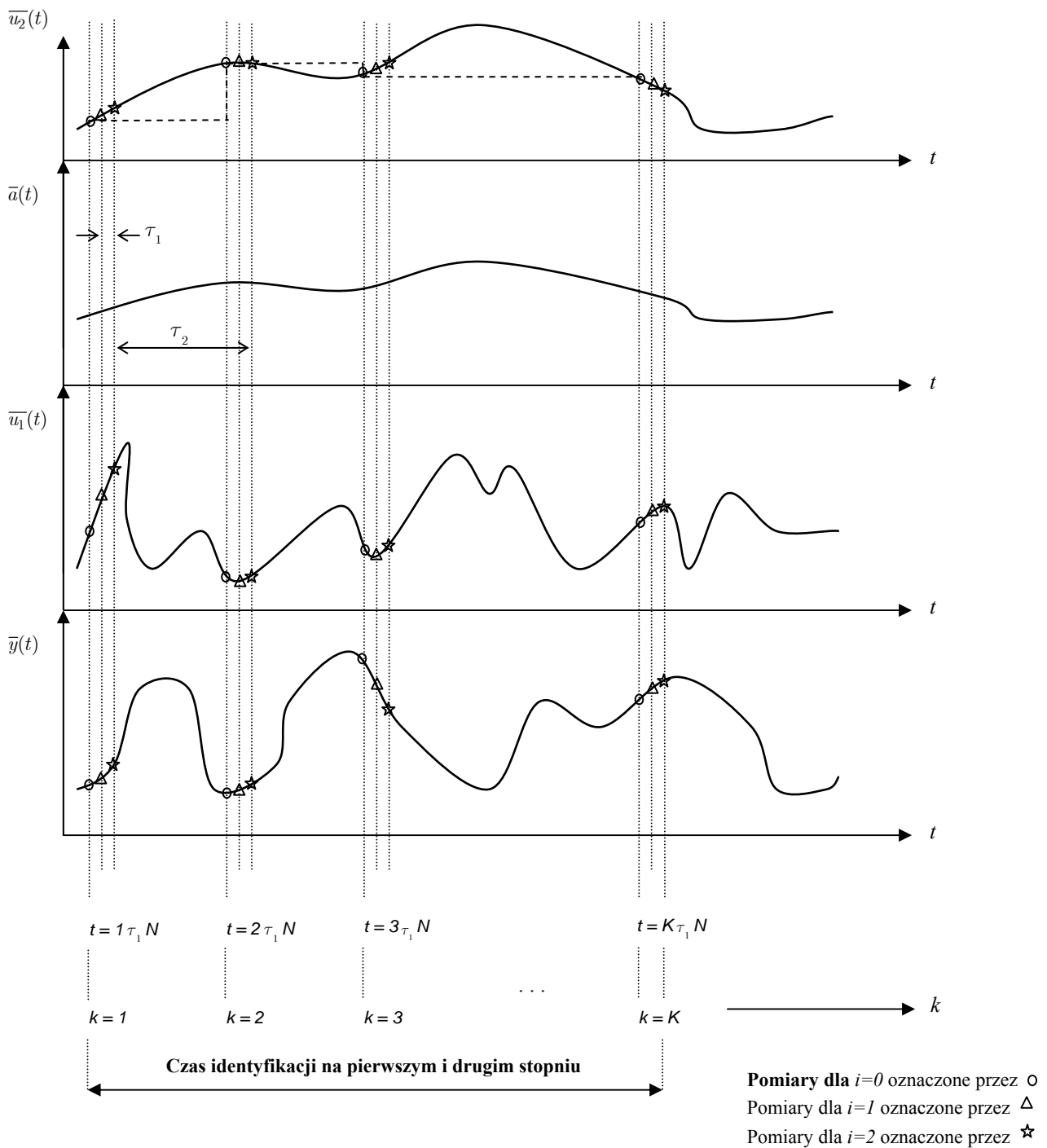
Aby możliwe było użycie proponowanej organizacji pomiarów musi zachodzić

$$N \geq I, \quad (3.2)$$

gdzie

I – oznacza ilość serii pomiarowych.

Rys. 3. 1 ilustruje eksperyment pomiarowy przeprowadzony z wykorzystaniem proponowanej metody organizacji pomiarów dla $I = 3$.



Rys. 3. 1. Ilustracja eksperymentu pomiarowego wykonanego przy użyciu pierwszej metody organizacji pomiarów.

Pomiary wejścia i wyjścia na pierwszym stopniu są dokonywane z taktem τ_1 . Na rysunku przedstawiono jedynie te pomiary, które zostaną wykorzystane w procesie identyfikacji parametrów obiektu dwustopniowego. Dla $i = 0$ pomiary wejść i wyjścia obiektu

dwustopniowego oznaczono przez \bigcirc . Biorąc pod uwagę takt działania obiektu na pierwszym i drugim stopniu, odległość pomiędzy dwoma kolejnymi pomiarami oznaczonymi przez \bigcirc wynosi τ_2 . Dla kolejnej serii pomiarowej $i = 1$ pomiary oznaczone przez \triangle są przesunięte względem pomiarów serii $i = 0$ o τ_1 w celu uzyskania nowych wartości przeznaczonych na potrzeby identyfikacji. W tym przypadku również odległość pomiędzy kolejnymi pomiarami wynosi τ_2 . Ostatnia seria pomiarowa $i = 2$ została oznaczona przez \star .

W proponowanej organizacji pomiarów przeznacza się na identyfikację parametrów obiektu na pierwszym i drugim stopniu ten sam odcinek czasu. Należy tu jednak zwrócić uwagę na fakt konieczności wykonania znacznie większej ilości obliczeń na potrzeby identyfikacji na pierwszym stopniu w stosunku do identyfikacji przeprowadzanej na stopniu drugim. Dzieje się tak dlatego, że liczba pomiarów na stopniu pierwszym jest I razy większa od liczby pomiarów przetwarzanych przez algorytm identyfikacji na stopniu drugim.

Jeżeli zostanie spełniona założona relacja pomiędzy τ_1 a τ_2 , przedstawiana organizacja pomiarów będzie odpowiednia nawet dla szybkozmiennych sygnałów $\bar{u}_2(t)$ oraz $\bar{a}(t)$.

Zastosowanie proponowanej metody organizacji pomiarów pozwala na uzyskanie następujących serii pomiarowych:

$$u_{1i}(k) = \bar{u}_1(k\tau_2 + i\tau_1), \quad (3.3)$$

$$y_i(k) = \bar{y}(k\tau_2 + i\tau_1), \quad (3.4)$$

$$u_2(k) = \bar{u}_2(k\tau_2), \quad (3.5)$$

$$k = 0, \dots, K - 1, \quad i = 0, \dots, I - 1,$$

gdzie:

$\bar{u}_1(t)$ – rzeczywisty przebieg sygnału na wejściu na pierwszym stopniu,

$\bar{u}_2(t)$ – rzeczywisty przebieg sygnału na wejściu na drugim stopniu,

$\bar{y}(t)$ – rzeczywisty przebieg sygnału na wyjściu na pierwszym stopniu,

τ_1 – takt pomiaru wejścia i wyjścia na pierwszym stopniu,

τ_2 – takt pomiaru wejścia na drugim stopniu,

K – liczba pomiarów w serii pomiarowej,

I – liczba serii pomiarowych.

Dla tej organizacji pomiarów identyfikacja parametrów na stopniu pierwszym wymaga czasu

$$T_1 = (K - 1)\tau_2. \quad (3.6)$$

Podobnie, identyfikacja na stopniu drugim T_2 dokonuje się w czasie

$$T_2 = (K - 1)\tau_2. \quad (3.7)$$

Oznacza to, że eksperyment pomiarowy na pierwszym i drugim stopniu dla pierwszej metody organizacji pomiarów wymaga tego samego czasu $T_1 = T_2$.

Algorytm identyfikacji

Równania opisujące działanie obiektów na pierwszym i drugim stopniu dla pomiarów uzyskanych dzięki zastosowaniu: (3.3), (3.4), (3.5) przyjmują znaną postać (2.7) – (2.8).

Należy również zwrócić uwagę na fakt, że dla tej metody organizacji pomiarów obiekty, dla których przeprowadzamy estymację na pierwszym i drugim stopniu działają z tym samym taktem równym τ_2 .

Dlatego też, do przeprowadzenia identyfikacji obiektu dwustopniowego, dysponując pomiarami uzyskanymi w wyniku zastosowania pierwszej metody organizacji pomiarów można zastosować algorytmy identyfikacji otrzymane w Rozdziale 2: (2.19), (2.20) i (2.24).

3.2.2. Druga metoda organizacji pomiarów

Obecnie zakłada się, że sygnał podawany na wejście obiektu na stopniu drugim u_2 charakteryzuje się bardzo wolnymi zmianami [75], pozostając w szczególnym przypadku stały. Ponadto dynamika obiektu na drugim stopniu pozwala przyjąć, że czasie wykonywania serii pomiarów na pierwszym stopniu wyjście a na drugim stopniu nie zmienia się. Pozwala to na następującą propozycję eksperymentu pomiarowego. Zakłada się, że w czasie trwania pewnego interwału T_2 sygnał na wejściu u_2 w przybliżeniu pozostaje stały a sygnał na wyjściu obiektu na drugim stopniu a podlega niewielkim zmianom. Odcinek czasowy T_2 może zostać podzielony na I odcinków o długości T_1 . W czasie trwania T_1 wykonuje się K pomiarów wejścia i wyjścia obiektu na pierwszym stopniu. Ponieważ sygnał na wyjściu a w czasie T_2 podlega niewielkim zmianom można założyć, że podczas trwania interwału o długości T_1 sygnał ten pozostaje stały. Obecnie możliwe staje się wykonanie w czasie

i -tego odcinka T_1 identyfikacji na stopniu pierwszym i uzyskanie estymat parametrów: $\hat{\Theta}_1(i)$ oraz $\hat{a}(i)$. Powtarzając procedurę identyfikacji na stopniu pierwszym dla $i = 0, \dots, I - 1$ otrzymujemy ciągi wartości: $\hat{\Theta}_1(0), \hat{\Theta}_1(1), \dots, \hat{\Theta}_1(I - 1)$ oraz $\hat{a}(0), \hat{a}(1), \dots, \hat{a}(I - 1)$, gdzie wartości $\hat{\Theta}_1(i), i = 0, \dots, I - 1$, pozostają praktycznie na tym samym poziomie. Wyliczone wartości $\hat{a}(i)$ wraz z odpowiadającymi im $u_2(i)$ zostaną użyte do wyznaczenia estymaty parametrów na stopniu drugim $\hat{\Theta}_2$. Należy tutaj zwrócić uwagę na fakt, że wyznaczenie pojedynczej wartości $\hat{a}(i)$ wymaga wykonania w czasie T_1 pełnej procedury identyfikacji na stopniu pierwszym. Przeprowadzenie procesu identyfikacji na stopniu drugim wymaga już znacznie dłuższego czasu $T_2 = IT_1$. W praktyce oznacza to, że identyfikacja na stopniu pierwszym musi być wykonywana szybciej w stosunku do identyfikacji na stopniu drugim. Jeżeli możliwe jest przeprowadzenie eksperymentu pomiarowego w zaproponowany powyżej sposób uzyskanie serii pomiarowych może zostać zapisane następująco:

$$u_{1i}(k) = \bar{u}_1(k\tau_1 + i\tau_2), \quad (3.8)$$

$$y_i(k) = \bar{y}(k\tau_1 + i\tau_2), \quad (3.9)$$

$$u_2(k) = \bar{u}_2(k\tau_2), \quad (3.10)$$

$$k = 0, \dots, K - 1, \quad i = 0, \dots, I - 1,$$

gdzie:

$\bar{u}_1(t)$ – rzeczywisty przebieg sygnału na wejściu na pierwszym stopniu,

$\bar{u}_2(t)$ – rzeczywisty przebieg sygnału na wejściu na drugim stopniu,

$\bar{y}(t)$ – rzeczywisty przebieg sygnału na wyjściu na pierwszym stopniu,

τ_1 – takt pomiaru wejścia i wyjścia na pierwszym stopniu,

τ_2 – takt pomiaru wejścia na drugim stopniu, równy czasowi identyfikacji na stopniu pierwszym,

K – liczba pomiarów w serii pomiarowej,

I – liczba serii pomiarowych.

Uwzględniając warunki początkowe dla i -tej serii na pierwszym stopniu dla

$$k - p < 0$$

przyjmujemy:

$$u_{1i}(k - p) = u_{1i-1}(K - k + p), \quad (3.11)$$

$$y_i(k - p) = y_{i-1}(K - k + p). \quad (3.12)$$

Dla tej organizacji pomiarów identyfikacja parametrów na stopniu pierwszym T_1 wymaga czasu

$$T_1 = (K - 1)\tau_1. \quad (3.13)$$

Identyfikacja na stopniu drugim T_2 możliwa jest w czasie

$$T_2 = (I - 1)\tau_2 = (I - 1)(K - 1)\tau_1. \quad (3.14)$$

Oznacza to, że eksperymenty pomiarowe na pierwszym i drugim stopniu odbywają się w różnym czasie. Podejście to jest zbliżone do sytuacji, w której mamy do czynienia ze statycznym obiektem na stopniu drugim kiedy u_2 i a są stałe podczas wykonywania identyfikacji na pierwszym stopniu. W konsekwencji obiekty na pierwszym oraz drugim stopniu muszą mieć różne opisy, z dwoma różnymi taktami działania dla obu stopni. Niech k oraz i reprezentują indeksy związane z taktami dyskretyzacji odpowiednio τ_1 oraz τ_2 .

Wówczas równania obiektów przyjmują poniższą postać.

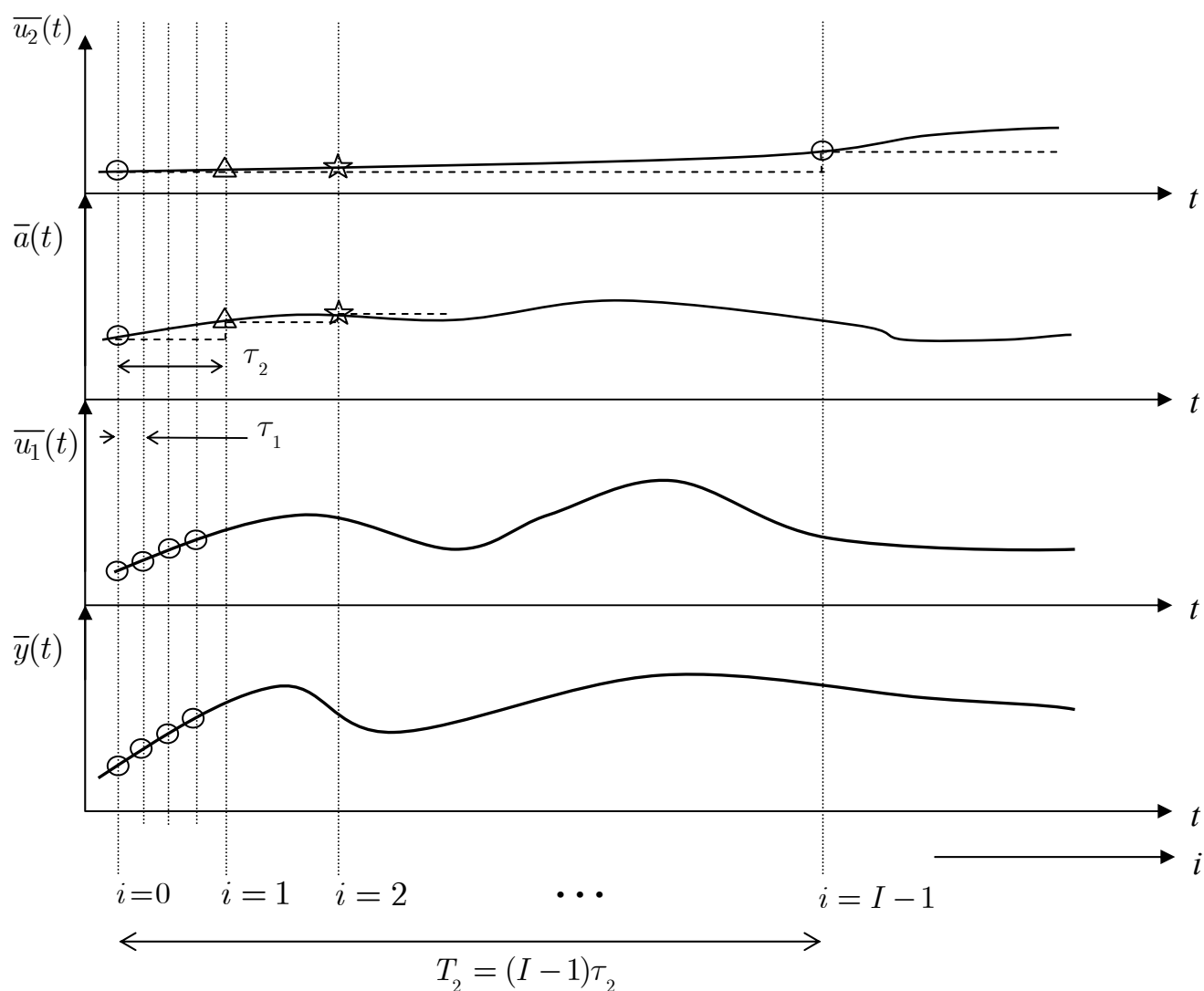
Na pierwszym stopniu

$$A_1(q^{-1})y(k) = B_1(q^{-1})u_1(k), \quad (3.15)$$

oraz na stopniu drugim

$$A_2(q^{-1})a(i) = B_2(q^{-1})u_2(i), \quad (3.16)$$

gdzie: $A_1(q^{-1}), A_2(q^{-1}), B_1(q^{-1}), B_2(q^{-1})$ są wielomianami jak w (2.3).



Rys. 3. 2. Ilustracja eksperymentu pomiarowego wykonanego przy użyciu drugiej metody organizacji pomiarów.

Przebieg eksperymentu pomiarowego dla drugiej metody organizacji pomiarów został zilustrowany na Rys. 3. 2. Niewielkim zmianom sygnału na wejściu drugiego stopnia w czasie T_2 odpowiada utrzymujący się na stałym poziomie w czasie τ_2 sygnał na wyjściu a pozwalający na przeprowadzenie identyfikacji na pierwszym stopniu.

Algorytm identyfikacji

Równania różnicowe opisujące obiekty na obu stopniach (3.15) i (3.16) mogą zostać zapisane następująco:

$$y_i(k) = Z_{1i}^T(k)\Theta_1 + z_{1i}(k)a(i), \quad (3.17)$$

$$a(i) = Z_2^T(i)\Theta_2, \quad (3.18)$$

gdzie:

$$\Theta_1^T = \begin{cases} [a_{11} \ \dots \ a_{1p-1} \ a_{1p+1} \ \dots \ a_{1n_1} \ b_{11} \ \dots \ b_{1m_1}] \text{ dla } a(i) = a_{1p}, p = 1 \dots n_1, \\ [a_{11} \ \dots \ a_{1m_1} \ b_{11} \ \dots \ b_{1p-1} \ b_{1p+1} \ \dots \ b_{1m_1}] \text{ dla } a(i) = b_{1p}, p = 1 \dots m_1, \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\Theta_2^T = [a_{21} \ \dots \ a_{2n_2} \ b_{21} \ \dots \ b_{2m_2}], \quad (3.20)$$

$$z_{1i}(k) = \begin{cases} -y_i(k-p) \text{ dla } a(i) = a_{1p}, \\ u_{1i}(k-p) \text{ dla } a(i) = b_{1p}, \end{cases}$$

$$Z_{1i}^T(k) = \begin{cases} [-y_i(k-1) \ \dots \ -y_i(k-p-1) \ -y_i(k-p+1) \ \dots \\ \quad -y_i(k-n_1) \ u_{1i}(k-1) \ \dots \ u_{1i}(k-m_1)] \text{ dla } a(i) = a_{1p}, \\ [-y_i(k-1) \ \dots \ -y_i(k-n_1) \ u_{1i}(k-1) \ \dots \\ \quad u_{1i}(k-p-1) \ u_{1i}(k-p+1) \ \dots \ u_{1i}(k-m_1)] \text{ dla } a(i) = b_{1p}, \end{cases}$$

$$Z_2^T(i) = [-a(i-1) \ \dots \ -a(i-n_2) \ u_2(i-1) \ \dots \ u_2(i-m_2)].$$

Do rozwiązania problemu estymacji parametrów obiektu dwustopniowego proponuje się wykorzystanie metody zmiennych instrumentalnych. Metoda ta wymaga przeprowadzenia wstępnego przetwarzania w celu uzyskania wektora zmiennych instrumentalnych. Do tego celu zostanie użyta metoda najmniejszych kwadratów. Pamiętając, że $\hat{\Theta}_1(i)$ oraz $\hat{a}(i)$ stanowią estymaty parametrów na pierwszym stopniu: $\Theta_1(i)$ i $a(i)$ minimalizujące sumę kwadratów błędów K pomiarów wykonanych podczas i -tej serii, ich wyznaczenie może zostać zrealizowane w wyniku minimalizacji kryterium

$$Q_{1i} = \sum_{k=0}^{K-1} [y_i(k) - Z_{1i}^T(k)\hat{\Theta}_{1i} - z_{1i}(k)\hat{a}(i)]^2. \quad (3.21)$$

Ponieważ przyjęto, że w czasie trwania i -tej serii pomiarowej τ_2 parametr $\hat{a}(i)$ nie podlega zmianom, minimalizacja kryterium może zostać zrealizowana poprzez zróżniczkowanie kryterium (3.21) względem $\hat{\Theta}_{1i}$ oraz $\hat{a}(i)$ i przyrównanie wyniku różniczkowania do zera.

W efekcie otrzymujemy następujące algorytmy identyfikacji na pierwszym stopniu:

$$\hat{\Theta}_{1i} = \left\{ \sum_{k=0}^{K-1} [Z_{1i}(k)Z_{1i}^T(k) - Z_{1i}(k)z_{1i}(k) \left(\sum_{k=0}^{K-1} z_{1i}^2(k) \right)^{-1} \sum_{k=0}^{K-1} z_{1i}(k)Z_{1i}^T(k)] \right\}^{-1} \times \sum_{k=0}^{K-1} [Z_{1i}(k)y_i(k) - Z_{1i}(k)z_{1i}(k) \left(\sum_{k=0}^{K-1} z_{1i}^2(k) \right)^{-1} \sum_{k=0}^{K-1} z_{1i}(k)y_i(k)], \quad (3.22)$$

$$\hat{a}(i) = \left(\sum_{k=0}^{K-1} z_{1i}^2(k) \right)^{-1} \sum_{k=0}^{K-1} [z_{1i}(k)y_i(k) - z_{1i}(k)Z_{1i}^T(k)\hat{\Theta}_{1i}]. \quad (3.23)$$

Identyfikacja na drugim stopniu polega na wyznaczeniu estymaty $\hat{\Theta}_2$. Realizuje się to wykorzystując ciąg pomiarów wejścia $u_2(i)$, $i = 0, \dots, I-1$, oraz ciąg wartości uzyskanych w wyniku identyfikacji na pierwszym stopniu $\hat{a}(i)$, $i = 0, \dots, I-1$. W tym celu minimalizując kryterium

$$Q_2 = \sum_{i=0}^{I-1} [\hat{a}(i) - \hat{Z}_2^T(i)\hat{\Theta}_2]^2 \quad (3.24)$$

względem $\hat{\Theta}_2$ otrzymujemy poszukiwany algorytm identyfikacji na drugim stopniu

$$\hat{\Theta}_2 = \left[\sum_{i=0}^{I-1} \hat{Z}_2(i)\hat{Z}_2^T(i) \right]^{-1} \sum_{i=0}^{I-1} \hat{Z}_2(i)\hat{a}(i), \quad (3.25)$$

gdzie

$$\hat{Z}_2^T(i) = [-\hat{a}(i-1) \quad \dots \quad -\hat{a}(i-n_2) \quad u_2(i-1) \quad \dots \quad u_2(i-m_2)].$$

Otrzymane algorytmy estymacji parametrów obiektu na obu stopniach wykorzystujące metodę najmniejszych kwadratów zostaną użyte do przeprowadzenia identyfikacji obiektu metodą zmiennych instrumentalnych. Podobnie jak w punkcie 2.4. wyniki identyfikacji metody najmniejszych kwadratów posłużą do utworzenia wektora zmiennych instrumentalnych.

Oznaczając przez $\widehat{\Theta}_{1i}$ oraz $\widehat{a}(i)$ estymatory parametrów na pierwszym stopniu otrzymywane w wyniku zastosowania metody zmiennych instrumentalnych, algorytmy identyfikacji dla tej metody przyjmują postać:

$$\widehat{\Theta}_{1i} = \left\{ \sum_{k=0}^{K-1} [\overline{\overline{Z}}_{1i}(k) Z_{1i}^T - \overline{\overline{Z}}_{1i}(k) \overline{\overline{z}}_{1i}(k) \left(\sum_{k=0}^{K-1} \overline{\overline{z}}_{1i}(k) z_{1i}(k) \right)^{-1} \sum_{k=0}^{K-1} \overline{\overline{z}}_{1i}(k) Z_{1i}^T(k)] \right\}^{-1} \times \quad (3.26)$$

$$\sum_{k=0}^{K-1} [\overline{\overline{Z}}_{1i}(k) y_i(k) - \overline{\overline{Z}}_{1i}(k) \overline{\overline{z}}_{1i}(k) \left(\sum_{k=0}^{K-1} \overline{\overline{z}}_{1i}(k) z_{1i}(k) \right)^{-1} \sum_{k=0}^{K-1} \overline{\overline{z}}_{1i}(k) y_i(k)],$$

$$\widehat{a}(i) = \left(\sum_{k=0}^{K-1} \overline{\overline{z}}_{1i}(k) z_{1i}(k) \right)^{-1} \sum_{k=0}^{K-1} [\overline{\overline{z}}_{1i}(k) y_i(k) - \overline{\overline{z}}_{1i}(k) Z_{1i}^T(k) \widehat{\Theta}_{1i}]. \quad (3.27)$$

Na drugim stopniu, oznaczając przez $\widehat{\Theta}_2$ estymator parametrów metody zmiennych instrumentalnych otrzymujemy algorytm identyfikacji

$$\widehat{\Theta}_2 = \left[\sum_{i=0}^{I-1} \overline{\overline{Z}}_2(i) \widehat{\overline{\overline{Z}}}_2^T(i) \right]^{-1} \sum_{i=0}^{I-1} \overline{\overline{Z}}_2(i) \widehat{a}(i), \quad (3.28)$$

gdzie

$$\widehat{\overline{\overline{Z}}}_2^T(i) = [-\widehat{a}(i-1) \quad \dots \quad -\widehat{a}(i-n_2) \quad u_2(i-1) \quad \dots \quad u_2(i-m_2)]$$

a $\overline{\overline{Z}}_{1i}(k)$, $\overline{\overline{z}}_{1i}(k)$ oraz $\overline{\overline{Z}}_2(i)$ są wektorami zmiennych instrumentalnych:

$$\overline{\overline{Z}}_{1i}^T(k) = \begin{cases} [-\overline{\overline{y}}_i(k-1) \quad \dots \quad -\overline{\overline{y}}_i(k-p-1) \quad -\overline{\overline{y}}_i(k-p+1) \quad \dots \\ \quad \quad \quad -\overline{\overline{y}}_i(k-n_1) \quad u_{1i}(k-1) \quad \dots \quad u_{1i}(k-m_1)] \text{ dla } a(i) = a_{1p}, \\ [-\overline{\overline{y}}_i(k-1) \quad \dots \quad -\overline{\overline{y}}_i(k-n_1) \quad u_{1i}(k-1) \quad \dots \\ \quad \quad \quad u_{1i}(k-p-1) \quad u_{1i}(k-p+1) \quad \dots \quad u_{1i}(k-m_1)] \text{ dla } a(i) = b_{1p}, \end{cases} \quad (3.29)$$

$$\overline{\overline{z}}_{1i}(k) = \begin{cases} -\overline{\overline{y}}_i(k-p) \text{ dla } a(i) = a_{1p}, \\ u_{1i}(k-p) \text{ dla } a(i) = b_{1p}, \end{cases} \quad (3.30)$$

$$\overline{\overline{Z}}_2^T(i) = [-\overline{\overline{a}}(i-1) \quad \dots \quad -\overline{\overline{a}}(i-n_2) \quad u_2(i-1) \quad \dots \quad u_2(i-m_2)], \quad (3.31)$$

przy czym: $\overline{\overline{y}}_i(k)$ oraz $\overline{\overline{a}}(i)$ wyznaczamy na podstawie zależności:

$$\widehat{A}_1(q^{-1}) \overline{\overline{y}}_i(k) = \widehat{B}_1(q^{-1}) u_{1i}(k), \quad (3.32)$$

$$\widehat{A}_2(q^{-1})\bar{\bar{a}}(i) = \widehat{B}_2(q^{-1})u_2(i), \quad (3.33)$$

dla zadanych ciągów wejść (3.8) oraz (3.10), gdzie: $\widehat{A}_1(q^{-1})$, $\widehat{B}_1(q^{-1})$, $\widehat{A}_2(q^{-1})$, $\widehat{B}_2(q^{-1})$ są wielomianami: $A_1(q^{-1})$, $B_1(q^{-1})$, $A_2(q^{-1})$, $B_2(q^{-1})$ z parametrami (3.22), (3.23) na 1. stopniu oraz (3.25) na stopniu drugim, przy uwzględnieniu warunków początkowych (3.11) i (3.12), gdzie w miejscu $y_i(k)$ należy użyć $\bar{\bar{y}}_i(k)$.

3.3. Rekurencyjne algorytmy dwustopniowej identyfikacji na bieżąco

Wyniki dostarczane przez procedury identyfikacji dwustopniowej mogą być z powodzeniem wykorzystane do projektowania algorytmów sterowania złożonymi procesami z pewnymi niemierzalnymi wielkościami wewnętrznymi wpływającymi na działanie całego systemu [1], [65]. Te niemierzalne wprost wielkości w podejściu dwustopniowym utożsamiane są z sygnałami na wyjściu obiektu na drugim stopniu. Specyfika zadań sterowania dla tego typu procesów wymaga nie tylko ustalenia przebiegu wspomnianej niemierzalnej wielkości, ale również znajomości estymaty parametrów obiektów na obu stopniach w każdej chwili wyznaczania decyzji sterującej. Do tego celu możliwe jest wykorzystanie procedur rekurencyjnych pozwalających na otrzymywanie kolejnych przybliżeń rzeczywistych wartości parametrów obiektów na obu stopniach.

Pewną koncepcję uzyskiwania rekurencyjnych algorytmów wyznaczających estymaty parametrów obiektu dwustopniowego zaprezentowano w pracy [25]. Przedstawiona tam koncepcja różni się od rozpatrywanej w niniejszej pracy i do uzyskania algorytmów wykorzystuje podejście bezpośrednie.

Obie przedstawione w punktach 3.2.1. oraz 3.2.2. metody organizacji eksperymentu pomiarowego wykonywanego na bieżąco pozwalają na uzyskanie serii pomiarowych, które mogą być użyte do przeprowadzenia identyfikacji rekurencyjnej. Dla obu metod wyznaczmy obecnie poszukiwane procedury rekurencyjne.

3.3.1. Pierwsza metoda organizacji pomiarów

Obecnie przedstawione zostaną rekurencyjne algorytmy identyfikacji na obu stopniach możliwe do zastosowania dla pierwszej metody organizacji pomiarów.

Rekurencyjny algorytm identyfikacji na pierwszym stopniu

Przedstawiony w 2.3.1. algorytm metody najmniejszych kwadratów rozwiązując problem identyfikacji na 1. stopniu przetwarza kompletną serię pomiarową wejścia i wyjścia obiektu na 1. stopniu. W sytuacji, kiedy dokonamy kolejnego pomiaru pary wejście – wyjście cała procedura identyfikacji musi zostać powtórzona. W praktycznych zastosowaniach okazuje się to kłopotliwe. Konieczne staje się więc zaproponowanie algorytmu wyznaczającego parametry obiektu w sposób rekurencyjny w miarę dostępności kolejnych pomiarów, który

do wyznaczenia najbardziej aktualnej estymaty parametrów będzie w stanie korzystać z dotychczasowych wyników identyfikacji. Jedną z wielu metod pozwalających wyznaczyć algorytm rekurencyjny jest procedura oparta na modyfikacji znanego wcześniej algorytmu przetwarzającego kompletną serię pomiarową [49].

Dla obiektu dynamicznego o postaci (1.5) algorytm identyfikacji przetwarzający kompletną serię pomiarową metody najmniejszych kwadratów przyjmuje znaną postać (1.13) [46].

Dokonując odpowiednich modyfikacji tego algorytmu otrzymuje się rekurencyjny algorytm metody najmniejszych kwadratów [49]:

$$\hat{\Theta}(k) = \hat{\Theta}(k-1) + K(k)[y(k) - Z^T(k)\hat{\Theta}(k-1)], \quad (3.34)$$

$$K(k) = \mathbf{P}(k-1)Z(k)[1 + Z^T(k)\mathbf{P}(k-1)Z(k)]^{-1}, \quad (3.35)$$

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{P}(k-1) - \mathbf{P}(k-1)Z(k)[1 + Z^T(k)\mathbf{P}(k-1)Z(k)]^{-1} Z^T(k)\mathbf{P}(k-1), \quad (3.36)$$

gdzie:

$\hat{\Theta}(k)$ – estymata wektora parametrów w chwili k ,

$$Z^T(k) = [-y(k-1) \quad \dots \quad -y(k-n_1) \quad u(k-1) \quad \dots \quad u(k-m_1)].$$

W trakcie obliczeń za pomocą przedstawionego algorytmu wystarczy pamiętać poprzednią wartość $\hat{\Theta}(k-1)$ oraz macierz $\mathbf{P}(k-1)$.

Do rozpoczęcia działania algorytmu rekurencyjnego konieczne jest wyznaczenie początkowych wartości $\hat{\Theta}(0)$ oraz $\mathbf{P}(0)$. Możliwe jest przyjęcie wartości początkowych $\hat{\Theta}(0)$ oraz $\mathbf{P}(0)$ w sposób arbitralny. Na potrzeby opracowanych w tej pracy algorytmów przyjęto $\hat{\Theta}(0) = 0$ oraz $\mathbf{P}(0)$ z dużymi wartościami na diagonalu (rzędu 10^6).

Równania różnicowe obiektu dwustopniowego, dla których opracowano algorytmy identyfikacji na bieżąco dla pierwszej metody organizacji pomiarów zapisano w (2.7)–(2.8). Zastosowanie pierwszej metody organizacji pomiarów przybliży sytuację, w której podczas wykonywania k -tego pomiaru w kolejnych seriach pomiarowych i , $i = 0, \dots, I-1$, wartość sygnału a nie zmienia się. Oznacza to, że równanie obiektu na 1. stopniu dla dowolnego k może przyjąć postać

$$y_i(k) = Z_{1i}^T(k)\Theta_1 + z_{1i}(k)a(k) \quad \text{dla } i = 0 \dots I-1, \quad (3.37)$$

gdzie

$a(k)$ – jest stałą wartością a dla k -tego pomiaru w kolejnych seriach $i = 0, \dots, I - 1$.

Wprowadzając oznaczenie

$$\tilde{\Theta}_1^T(k) = \begin{cases} [a_{11} \dots a_{1p-1} a(k) a_{1p+1} \dots a_{1n_1} b_{11} \dots b_{1m_1}] \text{ dla } a(k) = a_{1p}, p = 1 \dots n_1, \\ [a_{11} \dots a_{1n_1} b_{11} \dots b_{1p-1} a(k) b_{1p+1} \dots b_{1m_1}] \text{ dla } a(k) = b_{1p}, p = 1 \dots m_1, \end{cases} \quad (3.38)$$

równanie obiektu na 1. stopniu (3.37) dla dowolnego, ustalonego k oraz $i = 0, \dots, I - 1$

może zostać zapisane następująco:

$$y_i(k) = \tilde{Z}_{1i}^T(k) \tilde{\Theta}_1(k), \quad (3.39)$$

gdzie:

$$\tilde{Z}_{1i}^T(k) = \begin{cases} [-y_i(k-1) \dots -y_i(k-p) \dots \\ \dots -y_i(k-n_1) u_{1i}(k-1) \dots u_{1i}(k-m_1)] \text{ dla } a(k) = a_{1p} \\ [-y_i(k-1) \dots -y_i(k-n_1) u_{1i}(k-1) \dots \\ \dots u_{1i}(k-p) \dots u_{1i}(k-m_1)] \text{ dla } a(k) = b_{1p}, \end{cases} \quad (3.40)$$

$y_i(k)$ oraz $u_{1i}(k)$ są pomiarami serii pomiarowych (3.3. –(3.4).

Mając na uwadze otrzymany algorytm (3.34) – (3.36), równanie (3.39) oraz (3.40) obecnie możliwe staje się zaproponowanie rekurencyjnego algorytmu metody najmniejszych kwadratów na 1. stopniu o postaci:

$$\hat{\Theta}_{1,i}(k) = \hat{\Theta}_{1,i-1}(k) + K_i(k) \left[y_i(k) - \tilde{Z}_{1i}^T(k) \hat{\Theta}_{1,i-1}(k) \right], \quad (3.41)$$

$$K_i(k) = \mathbf{P}_{i-1}(k) \tilde{Z}_{1i}(k) \left[1 + \tilde{Z}_{1i}^T(k) \mathbf{P}_{i-1}(k) \tilde{Z}_{1i}(k) \right]^{-1}, \quad (3.42)$$

$$\mathbf{P}_i(k) = \mathbf{P}_{i-1}(k) - \mathbf{P}_{i-1}(k) \tilde{Z}_{1i}(k) \left[1 + \tilde{Z}_{1i}^T(k) \mathbf{P}_{i-1}(k) \tilde{Z}_{1i}(k) \right]^{-1} \tilde{Z}_{1i}^T(k) \mathbf{P}_{i-1}(k), \quad (3.43)$$

gdzie

$\hat{\Theta}_{1,i}(k)$ jest wynikiem identyfikacji wektora $\tilde{\Theta}_1(k)$ w chwili k dla kolejnej, i -tej serii pomiarowej, $i = 0 \dots I - 1$.

Estymaty $\hat{\Theta}_1$ oraz $\hat{a}(k)$ otrzymujemy wykorzystując $\hat{\Theta}_{1,i}(k)$ dla $i = I - 1$ oraz zależności (2.9) i (3.38).

Dla zaproponowanego algorytmu identyfikacji (3.41) –(3.43) konieczne jest podanie warunków początkowych $\widehat{\Theta}_{1,i}(k)$ oraz $\mathbf{P}_i(k)$ dla $i = 0$ w kolejnych k , $k = 0, \dots, K - 1$.

Zakładając $\widehat{\Theta}_{1,0}(0) = 0$ oraz $\mathbf{P}_0(0)$ z dużymi wartościami na diagonalu (rzędu 10^6) warunki początkowe dla kolejnych k można podać w różny sposób w zależności od etapu, na którym aktualnie znajduje się algorytm identyfikacji (3.41) –(3.43).

W początkowej fazie działania algorytmu identyfikacji jako warunki początkowe dla $i = 0$ w k -tym kroku (pomiarze) proponuje się przyjąć wynik identyfikacji kroku $k - 1$

$$\widehat{\Theta}_{1,i-1}(k) = \widehat{\Theta}_{1,i-1}(k - 1)$$

oraz $\mathbf{P}_{i-1}(k)$ z dużymi wartościami na diagonalu.

Dla bliskich rzeczywistym wartościom wyniku identyfikacji na 2. stopniu w postaci estymaty wektora parametrów $\widehat{\Theta}_2$ – co odpowiada końcowej fazie działania algorytmu identyfikacji, czyli stosunkowo dużym wartościom k – możliwe jest wyznaczenie wartości początkowej $\hat{a}_i(k)$ będącej składową wektora $\widehat{\Theta}_{1,i}(k)$ na podstawie predykcji

$$\hat{a}_{i-1}(k) = \widehat{Z}_2^T(k) \widehat{\Theta}_2(k - 1),$$

gdzie:

$\hat{a}_{i-1}(k)$ – jest wartością początkową składowej $\hat{a}_i(k)$ wektora $\widehat{\Theta}_{1,i}(k)$ dla identyfikacji w k -tym kroku, dla $i = 0$,

$$\widehat{Z}_2^T(k) = [-\hat{a}(k - 1) \quad \dots \quad -\hat{a}(k - n_2) \quad u_2(k - 1) \quad \dots \quad u_2(k - m_2)].$$

Pozostałe składowe wektora $\widehat{\Theta}_{1,i}(k)$, za wyjątkiem $\hat{a}_i(k)$, są wyznaczane analogicznie jak w początkowym etapie działania algorytmu identyfikacji. Podobnie proponuje się postąpić z wartością początkową $\mathbf{P}_{i-1}(k)$ dla $i = 0$.

Rekurencyjny algorytm identyfikacji metody najmniejszych kwadratów na drugim stopniu

Algorytm identyfikacji metody najmniejszych kwadratów parametrów obiektu na 2. stopniu dany jest otrzymaną w punkcie 2.3.2. zależnością (2.18). Podobnie jak dla poprzedniego punktu obecnie można otrzymać rekurencyjny algorytm identyfikacji metody najmniejszych kwadratów obiektu na drugim stopniu:

$$\hat{\Theta}_2(k) = \hat{\Theta}_2(k-1) + K(k) \left[\hat{a}(k) - \hat{Z}_2^T(k) \hat{\Theta}_2(k-1) \right], \quad (3.44)$$

$$K(k) = \mathbf{P}(k-1) \hat{Z}_2(k) \left[1 + \hat{Z}_2^T(k) \mathbf{P}(k-1) \hat{Z}_2(k) \right]^{-1}, \quad (3.45)$$

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{P}(k-1) - \mathbf{P}(k-1) \hat{Z}_2(k) \left[1 + \hat{Z}_2^T(k) \mathbf{P}(k-1) \hat{Z}_2(k) \right]^{-1} \hat{Z}_2^T(k) \mathbf{P}(k-1), \quad (3.46)$$

gdzie:

$\hat{a}(k)$ – jest wynikiem identyfikacji na pierwszym stopniu w chwili k ,

$$\hat{Z}_2^T(k) = [-\hat{a}(k-1) \quad \dots \quad -\hat{a}(k-n_2) \quad u_2(k-1) \quad \dots \quad u_2(k-m_2)].$$

Jako warunki początkowe przyjmuje się $\hat{\Theta}_2(0) = 0$ oraz $\mathbf{P}(0)$ z dużymi wartościami na diagonalu (rzędu 10^6).

Rekurencyjny algorytm identyfikacji metody zmiennych instrumentalnych na drugim stopniu

Wykorzystując uzyskany rekurencyjny algorytm metody najmniejszych kwadratów opisany równaniami (3.44)–(3.46) proponujemy obecnie rekurencyjną procedurę pozwalającą wyznaczać parametry obiektu na drugim stopniu za pomocą metody zmiennych instrumentalnych.

Proponowany algorytm wyznacza estymaty parametrów obiektu korzystając z wektora zmiennych instrumentalnych. Uzyskiwane estymaty używane są następnie do poprawy parametrów obiektu pomocniczego o znanej strukturze (3.33) działającego z taktem k .

Proponuje się następującą postać rekurencyjnego algorytmu identyfikacji metody zmiennych instrumentalnych obiektu na drugim stopniu $\widehat{\Theta}_2(k)$ dla pierwszej metody organizacji pomiarów:

$$\widehat{\Theta}_2(k) = \widehat{\Theta}_2(k-1) + \overline{K}(k) \left[\hat{a}(k) - \widehat{Z}_2^T(k) \widehat{\Theta}_2(k-1) \right], \quad (3.47)$$

$$\overline{K}(k) = \overline{P}(k-1) \overline{Z}_2(k) \left[1 + \widehat{Z}_2^T(k) \overline{P}(k-1) \overline{Z}_2(k) \right]^{-1}, \quad (3.48)$$

$$\overline{P}(k) = \overline{P}(k-1) - \overline{P}(k-1) \overline{Z}_2(k) \left[1 + \widehat{Z}_2^T(k) \overline{P}(k-1) \overline{Z}_2(k) \right]^{-1} \widehat{Z}_2^T(k) \overline{P}(k-1), \quad (3.49)$$

gdzie:

$$\widehat{Z}_2^T(k) = [-\hat{a}(k-1) \quad \dots \quad -\hat{a}(k-n_2) \quad u_2(k-1) \quad \dots \quad u_2(k-m_2)],$$

$\hat{a}(k)$ – jest wynikiem identyfikacji na pierwszym stopniu przy użyciu (3.41)–(3.43) w chwili k ,

$\overline{Z}_2(k)$ – jest wektorem zmiennych instrumentalnych o postaci

$$\overline{Z}_2^T(k) = [-\overline{a}(k-1) \quad \dots \quad -\overline{a}(k-n_2) \quad u_2(k-1) \quad \dots \quad u_2(k-m_2)],$$

przy czym $\overline{a}(k)$ jest wyznaczone z zależności

$$\widetilde{A}_2(q^{-1}) \overline{a}(k) = \widetilde{B}_2(q^{-1}) u_2(k), \quad (3.50)$$

gdzie: $\widetilde{A}_2(q^{-1})$, $\widetilde{B}_2(q^{-1})$ są wielomianami postaci $A_2(q^{-1})$, $B_2(q^{-1})$ z parametrami uaktualnianymi w każdym kroku k .

Aby zapewnić odpowiednie zachowanie się obiektu pomocniczego (3.50) w czasie działania proponowanego algorytmu, poprawy jego parametrów powinny przebiegać możliwie ostrożnie [84], [85]. W tym celu proponuje się wykorzystać dyskretny filtr dolnoprzepustowy o strukturze

$$\widetilde{\Theta}_2(k) = \widetilde{\Theta}_2(k-1) + \frac{1}{T_I} (\widehat{\Theta}_2(k) - \widetilde{\Theta}_2(k-1)), \quad (3.51)$$

gdzie:

$\widetilde{\Theta}_2(k)$ – wektor parametrów obiektu (3.50) w chwili k o postaci

$$\tilde{\Theta}_2^T(k) = [\tilde{a}_{21}(k) \quad \dots \quad \tilde{a}_{2n_2}(k) \quad \tilde{b}_{21}(k) \quad \dots \quad \tilde{b}_{2m_2}(k)],$$

\tilde{T}_I – wykładnicza stała wygładzająca wyrażona w ilości próbek.

Filtr (3.51) ma na celu zapobieżenie gwałtownym zmianom parametrów obiektu pomocniczego w trakcie przebiegu procesu identyfikacji na drugim stopniu. Przyjmuje się zerowe warunki początkowe działania filtra.

W każdym kroku k , $k = 0, \dots, K - 1$, algorytm działa w następujący sposób:

1. Dla aktualnych: $\bar{K}(k)$, $\hat{a}(k)$, $\hat{Z}_2^T(k)$ oraz poprzedniego $\hat{\Theta}_2(k-1)$ wyznaczana jest estymata $\hat{\Theta}_2(k)$.
2. Wyznaczona estymata $\hat{\Theta}_2(k)$ zostaje podana na wejście filtra (3.51) pozwalając na uzyskanie nowego wektora parametrów $\tilde{\Theta}_2(k)$, który następnie zostanie użyty do wyznaczenia $\bar{a}(k)$.

Rekurencyjna metoda zmiennych instrumentalnych wymaga przeprowadzenia znacznie większej ilości obliczeń w stosunku do rekurencyjnej metody najmniejszych kwadratów. Ma to szczególne znaczenie zwłaszcza dla identyfikacji na pierwszym stopniu, która musi być wykonywana zdecydowanie szybciej jak identyfikacja na stopniu drugim. Z tego też względu, w zastosowaniach praktycznych przeprowadzenie identyfikacji na pierwszym stopniu za pomocą rekurencyjnej metody zmiennych instrumentalnych może nie być możliwe. Wówczas na potrzeby identyfikacji na drugim stopniu jako wystarczająca musi zostać uznana estymata na wyjściu a otrzymana dzięki zastosowaniu rekurencyjnej metody najmniejszych kwadratów. Takie podejście przyjęto dla zaproponowanych w pracy rekurencyjnych algorytmów identyfikacji dwustopniowej.

3.3.2. Druga metoda organizacji pomiarów

Podobnie jak dla pierwszej metody organizacji pomiarów również w tym przypadku proponujemy procedury rekurencyjne, które posłużą do identyfikacji parametrów obiektów na obu stopniach.

Rekurencyjny algorytm identyfikacji na pierwszym stopniu

Równania różnicowe obiektu dwustopniowego, którego parametry podlegają estymacji z wykorzystaniem drugiej metody organizacji pomiarów określają zależności (3.17) – (3.18).

W szczególności, równanie obiektu na 1. stopniu przyjmuje postać

$$y_i(k) = Z_{1i}^T(k)\Theta_1 + z_{1i}(k)a(i), \quad (3.52)$$

gdzie

$a(i)$ w czasie trwania i -tej serii pomiarowej, dla $k = 0, \dots, K - 1$ nie zmienia się.

Wprowadzając oznaczenie

$$\tilde{\Theta}_{1,i}^T = \begin{cases} [a_{11} \dots a_{1p-1} a(i) a_{1p+1} \dots a_{1n_1} b_{11} \dots b_{1m_1}] \text{ dla } a(i) = a_{1p}, p = 1 \dots n_1, \\ [a_{11} \dots a_{1n_1} b_{11} \dots b_{1p-1} a(i) b_{1p+1} \dots b_{1m_1}] \text{ dla } a(i) = b_{1p}, p = 1 \dots m_1, \end{cases} \quad (3.53)$$

równanie obiektu na 1. stopniu dla dowolnego ustalonego i oraz $k = 0, \dots, K - 1$ może zostać zapisane następująco:

$$y_i(k) = \tilde{Z}_{1i}^T(k)\tilde{\Theta}_{1,i}, \quad (3.54)$$

gdzie:

$$\tilde{Z}_{1i}^T(k) = \begin{cases} [-y_i(k-1) \dots -y_i(k-p) \dots \\ \dots -y_i(k-n_1) u_{1i}(k-1) \dots u_{1i}(k-m_1)] \text{ dla } a(i) = a_{1p}, \\ [-y_i(k-1) \dots -y_i(k-n_1) u_{1i}(k-1) \dots \\ \dots u_{1i}(k-p) \dots u_{1i}(k-m_1)] \text{ dla } a(i) = b_{1p}, \end{cases} \quad (3.55)$$

$y_i(k)$ oraz $u_{1i}(k)$ są pomiarami serii pomiarowych (3.8) – (3.9).

Przywołując rekurencyjny algorytm (3.34) – (3.36), równanie (3.54) oraz (3.55) można zaproponować rekurencyjny algorytm metody najmniejszych kwadratów na 1. stopniu o postaci:

$$\hat{\Theta}_{1,i}(k) = \hat{\Theta}_{1,i}(k-1) + K_i(k) \left[y(k) - \tilde{Z}_{1i}^T(k)\hat{\Theta}_{1,i}(k-1) \right], \quad (3.56)$$

$$K_i(k) = \mathbf{P}_i(k-1)\tilde{Z}_{1i}(k) \left[1 + \tilde{Z}_{1i}^T(k)\mathbf{P}_i(k-1)\tilde{Z}_{1i}(k) \right]^{-1}, \quad (3.57)$$

$$\mathbf{P}_i(k) = \mathbf{P}_i(k-1) - \mathbf{P}_i(k-1)\tilde{Z}_{1i}(k) \left[1 + \tilde{Z}_{1i}^T(k)\mathbf{P}_i(k-1)\tilde{Z}_{1i}(k) \right]^{-1} \tilde{Z}_{1i}^T(k)\mathbf{P}_i(k-1), \quad (3.58)$$

gdzie

$\widehat{\Theta}_{1,i}(k)$ jest wynikiem identyfikacji wektora $\widetilde{\Theta}_{1,i}$ w serii i dla kolejnego, k -tego pomiaru, $k = 0, \dots, K - 1$.

Estymaty $\widehat{\Theta}_1$ oraz $\widehat{a}(i)$ otrzymujemy wykorzystując $\widehat{\Theta}_{1,i}(k)$ dla $k = K - 1$ oraz zależności (3.19) i (3.53).

Podobnie jak dla pierwszej metody organizacji pomiarów, dla zaproponowanego algorytmu identyfikacji (3.56)–(3.58) konieczne jest podanie warunków początkowych $\widehat{\Theta}_{1,i}(k)$ oraz $\mathbf{P}_i(k)$ dla $k = 0$ w kolejnych i , $i = 0, \dots, I - 1$. Zakładając $\widehat{\Theta}_{1,0}(0) = 0$ oraz $\mathbf{P}_0(0)$ z dużymi wartościami na diagonalu (rzędu 10^6), jako warunki początkowe dla $k = 0$ w każdej i -tej serii proponuje się przyjąć wynik identyfikacji z kroku $i - 1$

$$\widehat{\Theta}_{1,i}(k - 1) = \widehat{\Theta}_{1,i-1}(K - 1)$$

oraz $\mathbf{P}_i(k - 1)$ z dużymi wartościami na diagonalu.

Rekurencyjny algorytm identyfikacji metody najmniejszych kwadratów na drugim stopniu

Przeprowadzając analogiczne działania jak te prowadzące do wyznaczenia rekurencyjnego algorytmu metody najmniejszych kwadratów na drugim stopniu dla pierwszej metody organizacji pomiarów otrzymujemy następujący algorytm dla drugiej metody organizacji pomiarów:

$$\widehat{\Theta}_2(i) = \widehat{\Theta}_2(i - 1) + K(i) \left[\widehat{a}(i) - \widehat{Z}_2^T(i) \widehat{\Theta}_2(i - 1) \right], \quad (3.59)$$

$$K(i) = \mathbf{P}(i - 1) \widehat{Z}_2(i) \left[1 + \widehat{Z}_2^T(i) \mathbf{P}(i - 1) \widehat{Z}_2(i) \right]^{-1}, \quad (3.60)$$

$$\mathbf{P}(i) = \mathbf{P}(i - 1) - \mathbf{P}(i - 1) \widehat{Z}_2(i) \left[1 + \widehat{Z}_2^T(i) \mathbf{P}(i - 1) \widehat{Z}_2(i) \right]^{-1} \widehat{Z}_2^T(i) \mathbf{P}(i - 1), \quad (3.61)$$

gdzie:

$\widehat{a}(i)$ – wynik identyfikacji na 1. stopniu w chwili i przy użyciu (3.56)–(3.58),

$$\widehat{Z}_2^T(i) = [-\widehat{a}(i - 1) \quad \dots \quad -\widehat{a}(i - n_2) \quad u_2(i - 1) \quad \dots \quad u_2(i - m_2)].$$

Zaproponowany algorytm posiada analogiczne właściwości jak algorytm opisany równaniami (3.44)–(3.46). Podobnie, stosują się do niego wskazówki dotyczące wyboru początkowych wartości $\hat{\Theta}_2(0) = 0$ oraz $\mathbf{P}(0)$ z dużymi wartościami na diagonalu (rzędu 10^6).

Rekurencyjny algorytm identyfikacji metody zmiennych instrumentalnych na drugim stopniu

Wykorzystując uzyskany rekurencyjny algorytm metody najmniejszych kwadratów (3.59)–(3.61) oraz działając analogicznie jak dla pierwszej metody organizacji pomiarów zostanie obecnie zaproponowany rekurencyjny algorytm metody zmiennych instrumentalnych działający na stopniu drugim.

Podobnie jak dla algorytmu przygotowanego dla pierwszej metody organizacji pomiarów proponowany algorytm wykorzystuje otrzymywane estymaty do ciągłej poprawy parametrów obiektu pomocniczego o strukturze (3.33) pozwalającego wyznaczyć wektor zmiennych instrumentalnych.

Dla drugiej metody organizacji pomiarów proponuje się następującą postać rekurencyjnego algorytmu identyfikacji metody zmiennych instrumentalnych obiektu na drugim stopniu

$\hat{\Theta}_2(i)$:

$$\hat{\Theta}_2(i) = \hat{\Theta}_2(i-1) + \bar{K}(i) \left[\hat{a}(i) - \hat{Z}_2^T(i) \hat{\Theta}_2(i-1) \right], \quad (3.62)$$

$$\bar{K}(i) = \bar{\mathbf{P}}(i-1) \bar{Z}_2(i) \left[1 + \hat{Z}_2^T(i) \bar{\mathbf{P}}(i-1) \bar{Z}_2(i) \right]^{-1}, \quad (3.63)$$

$$\bar{\mathbf{P}}(i) = \bar{\mathbf{P}}(i-1) - \bar{\mathbf{P}}(i-1) \bar{Z}_2(i) \left[1 + \hat{Z}_2^T(i) \bar{\mathbf{P}}(i-1) \bar{Z}_2(i) \right]^{-1} \hat{Z}_2^T(i) \bar{\mathbf{P}}(i-1), \quad (3.64)$$

gdzie:

$$\hat{Z}_2^T(i) = [-\hat{a}(i-1) \quad \dots \quad -\hat{a}(i-n_2) \quad u_2(i-1) \quad \dots \quad u_2(i-m_2)],$$

$\hat{a}(i)$ – wynik identyfikacji na 1. stopniu w chwili i przy użyciu (3.56)–(3.58),

$\bar{Z}_2(i)$ – jest wektorem zmiennych instrumentalnych o postaci

$$\bar{Z}_2^T(i) = [-\bar{a}(i-1) \quad \dots \quad -\bar{a}(i-n_2) \quad u_2(i-1) \quad \dots \quad u_2(i-m_2)],$$

przy czym $\bar{a}(i)$ jest wyznaczone z zależności

$$\tilde{A}_2(q^{-1})\bar{a}(i) = \tilde{B}_2(q^{-1})u_2(i), \quad (3.65)$$

gdzie: $\tilde{A}_2(q^{-1})$, $\tilde{B}_2(q^{-1})$ są wielomianami postaci $A_2(q^{-1})$, $B_2(q^{-1})$ z parametrami uaktualnianymi w każdym kroku i .

Dla tych samych powodów jak w przypadku pierwszej metody organizacji pomiarów proponuje się wykorzystanie filtra o strukturze

$$\tilde{\Theta}_2(i) = \tilde{\Theta}_2(i-1) + \frac{1}{\tilde{T}_II}(\hat{\Theta}_2(i) - \tilde{\Theta}_2(i-1)), \quad (3.66)$$

gdzie:

$\tilde{\Theta}_2(i)$ – wektor parametrów obiektu (3.65) w chwili i o postaci

$$\tilde{\Theta}_2^T(i) = [\tilde{a}_{21}(i) \quad \dots \quad \tilde{a}_{2n_2}(i) \quad \tilde{b}_{21}(i) \quad \dots \quad \tilde{b}_{2m_2}(i)],$$

\tilde{T}_II – wykładnicza stała wygładzająca wyrażona w ilości próbek.

Przyjmuje się zerowe warunki początkowe działania filtra.

W każdym kroku i , $i = 0, \dots, I-1$, algorytm działa w następujący sposób:

1. Dla aktualnych: $\bar{K}(i)$, $\hat{a}(i)$, $\hat{Z}_2^T(i)$ oraz poprzedniego $\hat{\Theta}_2(i-1)$ wyznaczana jest estymata $\hat{\Theta}_2(i)$.
2. Wyznaczona estymata $\hat{\Theta}_2(i)$ zostaje podana na wejście filtra (3.66) pozwalając na uzyskanie nowego wektora parametrów $\tilde{\Theta}_2(i)$, który następnie zostanie użyty do wyznaczenia $\bar{a}(i)$.

Rozdział 4. Zasady wyboru metod organizacji pomiarów oraz dobór parametrów algorytmu identyfikacji

4.1. Wprowadzenie

Zaproponowane w poprzednim rozdziale metody organizacji pomiarów na bieżąco mają na celu dostarczenie serii pomiarowych odpowiadających podejściu dwustopniowemu. Metody te jednak zapewniają jedynie przybliżenie sytuacji, w której parametr a podczas wykonywania pomiarów na 1. stopniu nie zmienia się. W rzeczywistości parametr a zmienia się, a obie metody wprowadzają niedokładności mające wpływ na wynik pomiarów.

Niedokładności te utożsamiane mogą być z błędami metody pomiarowej.

Przedmiotem rozdziału jest sformułowanie zasad wyboru jednej z metod organizacji pomiarów w zależności od posiadanej wiedzy a priori o identyfikowanym obiekcie. Zostało to zrealizowane poprzez zbadanie wpływu parametrów systemu dwustopniowego na popełniane podczas stosowania przygotowanych metod organizacji pomiarów błędy metody pomiarowej. Dodatkowo przygotowano rekomendacje doboru parametrów zastosowanych algorytmów identyfikacji.

4.2. Metodyka wyznaczania rekomendacji

Stosowanie obu metod organizacji pomiarów na bieżąco przybliża jedynie sytuację, w której parametr a pozostaje stały podczas wykonywania pomiarów na 1. stopniu. Zmiana wartości parametru a podczas wykonywania pomiarów na 1. stopniu - wpływając na wyjście obiektu dwustopniowego - powoduje zmierzenie innej wartości wyjścia niż ta, która zostałaby zmierzona przy niezmiennym a . Różnica pomiędzy wartościami wyjść stanowić będzie błąd pomiarowy mający wpływ na wyniki identyfikacji.

4.2.1. Błąd metody pomiarowej

Przez *błąd metody pomiarowej* dla k -tego pomiaru w i -tej serii rozumie się różnicę pomiędzy pomiarem wyjścia obiektu dwustopniowego wykonanym z zastosowaniem wybranej metody organizacji pomiarów na bieżąco a pomiarem wyjścia obiektu wykonanym z niezmiennym parametrem a dokonując następującego rozróżnienia:

- a) dla I metody organizacji pomiarów – parametr a pozostaje niezmienny w czasie wykonywania i -tej serii pomiarowej, $i = 0, \dots, I - 1$, dla wybranego $k = k_0$,
- b) dla II metody organizacji pomiarów – parametr a pozostaje niezmienny w czasie wykonywania k -tego pomiaru, $k = 0, \dots, K - 1$, dla wybranego $i = i_0$.

Jako przyczynę powstawania błędu metody pomiarowej wskazuje się zmianę parametru a podczas wykonywania pomiarów na pierwszym stopniu obiektu dwustopniowego.

Aby wyznaczyć błąd metody pomiarowej konieczne staje się więc rozwiązanie dwóch problemów. Po pierwsze konieczne jest dysponowanie pomiarami wykonanymi na bieżąco dla każdej z obu metod organizacji pomiarów przy założeniu, że parametr a obiektu podczas wykonywania pomiarów na 1. stopniu zmienia się. Po drugie niezbędne jest posiadanie pomiarów, które zostaną wykonane gdy parametr a obiektu w tej sytuacji nie ulega zmianie. Obie metody organizacji pomiarów w różny sposób realizują założenie o niezmienności parametru a podczas wykonywania pomiarów na 1. stopniu. Pierwsza metoda organizacji pomiarów zakłada wykorzystanie znacznie krótszego czasu próbkowania na 1. stopniu w stosunku do czasu próbkowania na stopniu drugim. Niezmiennosc parametru a zapewniona zostałaby w tym przypadku, jeżeli czas próbkowania na 1. stopniu byłby nieskończenie mały w stosunku do czasu próbkowania na 2. stopniu, czyli jeżeli pomiary na 1. stopniu dla kolejnych serii pomiarowych $i = 0, \dots, I - 1$ odbywałyby się dla wybranego k -tego pomiaru w tej samej chwili czasowej. Jest to możliwe jedynie przy wykorzystaniu odpowiedniej organizacji pomiarów. Wykonywanie pomiarów na 1. stopniu dla powtarzanego sygnału wejściowego na 2. stopniu zapewnia oczekiwany brak zmienności parametru a dla k -tego pomiaru w kolejnych seriach pomiarowych. Odpowiada to organizacji pomiarów wykorzystywanej na potrzeby zastosowania algorytmów identyfikacji dwustopniowej obiektów dynamicznych przedstawionych w Rozdziale 2.

Z kolei druga metoda organizacji pomiarów zakłada szczególne właściwości obiektu na 2. stopniu oraz jego sygnału wejściowego. Niezmiennosc parametru a zapewniona zostałaby w tym przypadku, jeżeli podczas wykonywania pomiarów na 1. stopniu w i -tej serii wyjście obiektu na 2. stopniu nie zmieniałoby się. Jest to możliwe jedynie dla obiektów o szczególnych właściwościach: obiektów statycznych pobudzanych odpowiednim sygnałem

wejściowym bądź dyskretnych obiektów dynamicznych z możliwością powtarzania wartości wyjścia na 2. stopniu.

Różne warunki dla obu metod organizacji pomiarów, których spełnienie zapewnia uzyskiwanie ciągów pomiarów wolnych od błędów metody pomiarowej sprawia, że błędy pomiarowe popełniane przy wykorzystaniu każdej z nich w różny sposób zależą od własności identyfikowanego obiektu dwustopniowego i własności sygnałów wejściowych. Oznacza to, że przeprowadzenie eksperymentu pomiarowego obiektu dwustopniowego przy zastosowaniu pierwszej oraz drugiej metody organizacji pomiarów spowoduje popełnienie różnych błędów metody pomiarowej dla każdej z metod, zależnych od właściwości obiektów na obu stopniach oraz sygnałów pobudzeń.

Wykonanie analizy zależności popełnianych błędów metody pomiarowej od własności obiektów na obu stopniach oraz sygnałów wejściowych pozwoli na sformułowanie zasad wyboru jednej z metod organizacji pomiarów. O potrzebie opracowania takich zasad wspomina się w literaturze ([1],[62]), wskazując na błędy popełniane podczas wykonywania eksperymentu pomiarowego jako potencjalne kryterium oceny [77]. Dodatkowo zależność uzyskiwanych wyników identyfikacji parametrów obiektu dwustopniowego od właściwości obiektów na obu stopniach wykazano w pracy [76].

4.2.2. Sformułowanie problemu rekomendacji

Popełniane błędy metody pomiarowej w różny sposób zależą od własności obiektów na obu stopniach oraz własności pobudzeń dla każdej z metod organizacji pomiarów. Posiadając pewną wiedzę a priori o badanym obiekcie dwustopniowym oraz sygnałach wejściowych możliwy staje się wybór lepszej z dwu przedstawionych metod organizacji pomiarów ze względu na wybrane kryterium oceny, zależne od popełnianych błędów metody organizacji pomiarów. Podobnemu wyborowi podlegają parametry eksperymentu pomiarowego. Wskazanie na jedną z dwu metod organizacji pomiarów na podstawie posiadanej wiedzy a priori o własnościach obiektów na obu stopniach identyfikowanego obiektu dwustopniowego oraz postaci pobudzeń nazywać będziemy *rekomendacją wyboru metody*. Dla wybranej metody dodatkowo można zaproponować wartości parametrów eksperymentu: czasy próbkowania na obu stopniach bądź przynajmniej ich wzajemną relację oraz liczbę serii

pomiarowych I i liczbę pomiarów w każdej z serii K . Propozycję wartości parametrów nazwiemy *rekomendacją wyboru parametrów*.

Obie rekomendacje muszą zostać wykonane ze względu na wybrane kryterium oceny. Dla obu proponuje się przyjąć jako kryterium popełniane błędy pomiarowe. Rekomendować będziemy taki wybór metody bądź parametrów, dla którego zostaną popełnione mniejsze błędy pomiarowe. Ponieważ w ramach eksperymentu pomiarowego mamy do czynienia w rzeczywistości z pewnymi ciągami błędów pomiarowych, ocena popełnianych błędów może przebiegać na wiele sposobów. W szczególności ocenie może podlegać górne ograniczenie ciągu wartości bezwzględnych popełnianych błędów. Tak określone kryterium jest szczególnie wygodne do zastosowania, jeżeli dysponujemy opisami ciągów błędów pomiarowych w postaci transformacji, co zostanie przedstawione w dalszej części rozdziału. Z tego też względu właśnie to kryterium zdecydowano się przyjąć na potrzeby sformułowania rekomendacji wyboru parametrów oraz wyboru metody organizacji pomiarów na bieżąco.

Podstawą do skorzystania z obu rekomendacji będzie posiadana wiedza a priori o identyfikowanym obiekcie dwustopniowym. W przypadku rozpatrywanych w pracy obiektów dynamicznych wiedza o obiekcie przekłada się na znajomość właściwości dynamicznych i statycznych obiektów na obu stopniach. Własności dynamiczne obiektu są związane są m.in. z jego odpowiedzią impulsową. Własnościom statycznym odpowiada zachowanie obiektu po ustaniu składowych przejściowych i własności te mogą być opisane przez wielkość zwaną wzmocnieniem statycznym. Pamiętając o strukturze dwustopniowego obiektu dynamicznego, stanowiącego w rzeczywistości system dwóch zależnych od siebie obiektów dynamicznych, można dodatkowo mówić o wzajemnej zależności pomiędzy rozpatrywanymi własnościami obiektów na obu stopniach.

Możemy obecnie uściślić pojęcie wiedzy a priori wykorzystywanej przez rekomendacje. Przez znane przed rozpoczęciem procesu identyfikacji własności dwustopniowego obiektu dynamicznego – czyli przez posiadaną wiedzę a priori – będziemy rozumieć dostarczone przez eksperta informacje o własnościach statycznych oraz dynamicznych obiektów na obu stopniach.

Obecnie zajmiemy się bardziej formalnym opisem własności dynamicznych i statycznych obiektów na pierwszym oraz drugim stopniu obiektu dwustopniowego.

4.2.3. Własności obiektu dwustopniowego

Ważnym opisem własności dynamicznych obiektów dynamicznych jest charakterystyka odpowiedzi impulsowej. Wyznaczenie charakterystyki odpowiedzi impulsowej jest szczególnie łatwe dla obiektów, dla których dysponujemy opisem w postaci transmitancji. Charakterystyka ta stanowi wówczas – dla obiektów dyskretnych – wynik działania operatora odwrotnego przekształcenia Z

$$p_D(k) = Z^{-1}\{T_D(q)\},$$

gdzie:

$p_D(k)$ – charakterystyka impulsowa obiektu dynamicznego,

$T_D(q)$ – transmitancja obiektu dynamicznego.

W dalszej analizie własności dynamicznych obiektu na 1. stopniu ograniczymy się do badania obiektu o transformacie

$$T_{D,1}(q) = \frac{1}{A_1(q)},$$

gdzie

$$A_1(q) = q^{n_1} + a_{11}q^{n_1-1} + a_{12}q^{n_1-2} + \dots + a_{1n_1}$$

dla którego wyznaczymy jego odpowiedź impulsową

$$p_1(k) = Z^{-1}\{T_{D,1}(q)\}.$$

Jedną z wielkości charakteryzujących obiekt dynamiczny, mogącą być wyznaczoną za pomocą analizy odpowiedzi impulsowej jest jego czas odpowiedzi. W przypadku obiektów dynamicznych wielkość ta związana jest ciągiem geometrycznym będącym składową odpowiedzi impulsowej, którego tempo zmniejszania jest najmniejsze. Inaczej mówiąc, biegun transmitancji, którego moduł jest najbliższy jedności odgrywa decydującą rolę przy wyznaczaniu czasu odpowiedzi obiektu. Mówimy wtedy o *głównej stałej czasowej* [43]. Oceniając rozpatrywane w pracy obiekty dynamiczne, możemy zaproponować pewną ich klasyfikację biorąc pod uwagę wielkość głównej stałej czasowej. Dokonamy rozróżnienia

między dwoma klasami obiektów: klasy obiektów z małą stałą czasową oraz klasy obiektów z dużą stałą czasową.

W szczególnym przypadku zakładając, że na 1. stopniu mamy do czynienia z obiektem I rzędu, główna stała czasowa zostanie związana z wartością parametru a_{11} wielomianu $A_1(q)$.

Za obiekty z dużą stałą czasową będziemy więc uważali obiekty o module parametru a_{11} bliskim jedności. Obiekty z małą stałą czasową będą miały moduł parametru a_{11} bliski zeru.

Transmitancja $T_D(q)$ dowolnego dyskretnego obiektu dynamicznego może zostać zapisana następująco [43]:

$$T_D(q) = \frac{K_D P_D(q)}{(z-1)^{p_0} Q_D(q)},$$

gdzie:

K_D – współczynnik wzmocnienia statycznego obiektu,

$P_D(q)$, $Q_D(q)$ – wielomiany zmiennej q o własności

$$\frac{P_D(1)}{Q_D(1)} = 1,$$

p_0 – liczba integratorów obiektu.

Wzmocnienie statyczne określa zależność statyczną między sygnałem wejściowym a wyjściowym obiektu. Ponieważ

$$Y_D(q) = T_D(q)U_D(q),$$

gdzie:

U_D – transformata sygnału wejściowego obiektu,

Y_D – transformata sygnału wyjściowego obiektu,

oznacza to, że współczynnik wzmocnienia statycznego skaluje poziom sygnału wyjściowego obiektu dynamicznego. Poziom sygnału na wyjściu obiektu będzie więc bezpośrednio zależał od wartości tego współczynnika. W szczególności zmiany sygnału wejściowego obiektu zostaną również poddane K_D – krotnemu skalowaniu co oznacza, że współczynnik wzmocnienia statycznego będzie w pewnym stopniu stanowił o szybkości zmian sygnału na

wyjściu obiektu. Na potrzeby rekomendacji wyboru metod organizacji pomiarów dokonamy klasyfikacji obiektów ze względu na wartość współczynnika wzmocnienia statycznego.

Wyróżnimy klasę obiektów o dużym oraz małym wzmocnieniu statycznym.

Z definicji, współczynnik wzmocnienia statycznego określa się następująco:

$$K_D = \lim_{q \rightarrow 1} (q - 1)^{p_0} T_D(q),$$

gdzie:

T_D – transmitancja obiektu,

p_0 – liczba integratorów obiektu.

Ograniczając się do analizy transformat obiektów na 2. stopniu o postaci

$$T_{D,2}(q) = B_2(q),$$

gdzie

$$B_2(q) = b_{21}q^{m_2-1} + b_{22}q^{m_2-2} + \dots + b_{2m_2}$$

oraz zakładając, że obiekt na 2. stopniu nie zawiera integratorów, współczynnik wzmocnienia statycznego obiektu przyjmuje wartość

$$K_2 = b_{21} + b_{22} + \dots + b_{2m_2}.$$

4.2.4. Modele pomiarów

Wyznaczenie błędów metody pomiarowej, niezbędnych przy formułowaniu rekomendacji wyboru, wymaga znajomości pomiarów wyjścia obiektu dwustopniowego wykonanych z zastosowaniem każdej z metod organizacji pomiarów. Konieczne staje się dysponowanie zarówno pomiarami obciążonymi błędami metody jak i pomiarami wolnymi od tych błędów. O ile uzyskanie pomiarów obciążonych błędami metody sprowadza się do ich wykonania przy zastosowaniu każdej z metod, o tyle otrzymanie pomiarów pozbawionych błędów jest już zadaniem znacznie trudniejszym. W szczególności dla drugiej metody organizacji pomiarów, pomiary wolne od błędów metody pomiarowej wymagają znajomości wyjścia obiektu dwustopniowego o szczególnych właściwościach. Wyjście obiektu na 2. stopniu takiego obiektu powinno pozostawać niezmiennie w trakcie wykonywania i -tej serii pomiarowej na 1. stopniu. Ponieważ rzeczywisty obiekt nie spełnia tego wymagania

konieczne jest wykorzystanie do tego celu innego obiektu, dzięki któremu możliwe będzie stworzenie pewnego modelu pomiarów. Stosunkowo łatwo zorganizować niezmiennosc wyjścia obiektu na 2. stopniu przez powtarzanie jego sygnału wyjściowego, jeżeli dysponujemy obiektem z czasem dyskretnym. Ze względu na konieczność zapewnienia jednolitego podejścia do obu metod organizacji pomiarów dla każdej z nich zostaną zaproponowane dyskretne modele pomiarów.

Pierwsza metoda organizacji pomiarów

Przedstawiona w punkcie 3.2.1. pierwsza metoda organizacji pomiarów wykorzystuje dwa różne takty wykonywania pomiarów na pierwszym oraz drugim stopniu, odpowiednio τ_1 oraz τ_2 , zakładając równocześnie, że takt τ_1 jest zdecydowanie krótszy od τ_2 .

Przeprowadzane w ten sposób pomiary wyjścia obiektu na pierwszym stopniu mogą być traktowane jako odpowiedzi $\tilde{y}(\tilde{k})$ dyskretnego obiektu dwustopniowego działającego z taktem τ_1 , pobudzonego dyskretnymi ciągami: $\tilde{u}_1(\tilde{k})$ oraz $\tilde{u}_2(\tilde{k})$. Ciągi $\tilde{u}_1(\tilde{k})$ i $\tilde{u}_2(\tilde{k})$ otrzymuje się w tym przypadku próbując z taktem τ_1 rzeczywiste ciągłe pobudzenia $\bar{u}_1(t)$ oraz $\bar{u}_2(t)$. Do wyznaczenia ciągu $\tilde{y}(\tilde{k})$ można wykorzystać równania obiektu dwustopniowego (2.1) – (2.2). Dyskretny ciąg odpowiedzi $\tilde{y}(\tilde{k})$ stanowi wówczas odpowiednik ciągłego sygnału $\bar{y}(t)$, mierzonego z taktem τ_1 podczas wykonywania pomiarów za pomocą pierwszej metody organizacji pomiarów. Pamiętając o tym, że pierwsza metoda organizacji pomiarów wykorzystuje jedynie niektóre z dostępnych wartości zmierzonych na 1. stopniu, możliwe jest zastąpienie pomiarów wyjścia obiektu wykonywanych na bieżąco wyborem niektórych wyrazów ciągu odpowiedzi $\tilde{y}(\tilde{k})$.

Eksperyment pomiarowy odpowiadający pierwszej metodzie organizacji pomiarów opisują równania pomiarów przedstawione w punkcie 3.2.1. W rozważanej sytuacji, kiedy ciągłym sygnałom: $\bar{u}_1(t)$, $\bar{u}_2(t)$ oraz $\bar{y}(t)$ odpowiadają dyskretne ciągi: $\tilde{u}_1(\tilde{k})$, $\tilde{u}_2(\tilde{k})$ oraz $\tilde{y}(\tilde{k})$ równania pomiarów dla pierwszej organizacji pomiarów przyjmą postać:

$$\begin{aligned} u_{1i}(k) &= \tilde{u}_1(kN + i), \\ y_i(k) &= \tilde{y}(kN + i), \\ u_2(k) &= \tilde{u}_2(kN), \end{aligned} \tag{4.1}$$

gdzie:

$$k = 0, \dots, K - 1,$$

$$i = 0, \dots, I - 1$$

oraz N stanowi pewien całkowity współczynnik równania

$$\tau_2 = N\tau_1. \quad (4.2)$$

Z przedstawionych powyżej rozważań wynika, że próbkowaniu ciągłych sygnałów: $\bar{u}_1(t)$, $\bar{u}_2(t)$ oraz $\bar{y}(t)$ w proponowanym opisie pomiarów wykonywanych na bieżąco odpowiadać będzie wybór niektórych wyrazów ciągów: $\tilde{u}_1(\tilde{k})$, $\tilde{u}_2(\tilde{k})$ oraz $\tilde{y}(\tilde{k})$, realizowany zgodnie z równaniami (4.1).

Dysponując pomiarami wykonanymi na bieżąco kolejnym krokiem w kierunku wyznaczenia ciągu błędów pomiarowych będzie konieczność zapewnienia sobie możliwości wykonania pomiarów wyjścia obiektu dwustopniowego na 1. stopniu przy niezmiennym parametrze a dla k -tego pomiaru, gdzie $i = 0, \dots, I - 1$. Pomiary takie można otrzymać stosując omówioną w Rozdziale 2 metodę organizacji pomiarów z powtarzaniem sygnału wejściowego na 2. stopniu. Przedstawiona w punkcie 2.2. metoda organizacji pomiarów zakłada podawanie na wejście obiektu na 1. stopniu kolejnych, różnych sygnałów $\bar{u}_1(t)$ dla tego samego, powtarzanego sygnału $\bar{u}_2(t)$ podawanego na wejście obiektu na 2. stopniu. Zakładając takt działania obiektu dwustopniowego równy τ_1 , sygnałom tym odpowiadać będą ciągi $\tilde{u}_1(\tilde{k})$ oraz $\tilde{u}_2(\tilde{k})$.

Proponowana metoda otrzymywania pomiarów z powtarzaniem sygnału wejściowego na 2. stopniu musi pozwalać na wykonanie porównania z pomiarami uzyskanymi przy zastosowaniu organizacji pomiarów na bieżąco. Takie porównanie będzie podstawą późniejszej analizy wpływu własności obiektów na obu stopniach, parametrów eksperymentu pomiarowego oraz charakteru sygnałów wejściowych na popełniany błąd metody pomiarowej. Ponieważ pomiary $y_i(k)$ otrzymywane na bieżąco uzyskano przetwarzając ciąg $\tilde{y}(\tilde{k})$ pojawiający się na wyjściu obiektu dyskretnego pobudzanego przez $\tilde{u}_1(\tilde{k})$ oraz $\tilde{u}_2(\tilde{k})$ dlatego też, aby porównanie obu ciągów pomiarowych mogło mieć zastosowanie w późniejszej analizie konieczne jest wykorzystanie dla pomiarów

wykonywanych z powtarzaniem sygnału wejściowego na 2. stopniu tych samych $\tilde{u}_1(\tilde{k})$ oraz $\tilde{u}_2(\tilde{k})$. Takie ograniczenie stanowi pewien problem, bowiem organizacja pomiarów z powtarzaniem sygnału wejściowego na 2. stopniu zakłada wykorzystanie różnych ciągów wejściowych na 1. stopniu dla $i = 0, \dots, I - 1$ dla pewnego powtarzanego ciągu $\tilde{u}_2(\tilde{k})$. Problem ten rozwiązano proponując jako ‘różne’ ciągi wejściowe na 1. stopniu – wymagane przez organizację pomiarów z powtarzaniem sygnału wejściowego na 2. stopniu – przesuwany w czasie ciąg $\tilde{u}_1(\tilde{k})$.

Odpowiada to sytuacji, w której przeprowadzanie pomiarów z powtarzaniem sygnału wejściowego na 2. stopniu polega na podawaniu w każdej i -tej, $i = 0, \dots, I - 1$, serii na wejście obiektu na 1. stopniu przesuniętego o $i\tau_1$ sygnału $\bar{u}_1(t)$ przy równoczesnym powtarzaniu sygnału $\bar{u}_2(t)$ podawanego na wejście obiektu na 2. stopniu

$$\bar{u}_{1i}(t) = \bar{u}_1(t + i\tau_1), \quad (4.3)$$

co dla ciągów dyskretnych powinno to zostać zapisane jako

$$\tilde{u}_{1i}(\tilde{k}) = \tilde{u}_1(\tilde{k} + i), \quad (4.4)$$

gdzie $\bar{u}_{1i}(t)$ stanowi sygnał podawany na wejście obiektu na 1. stopniu w i -tej serii.

Taka procedura zapewnia uzyskiwanie pomiarów wyjścia obiektu w chwili czasowej k dla niezmiennej wartości parametru a obiektu na 1. stopniu w każdej serii pomiarów i , $i = 0, \dots, I - 1$.

Równanie pomiarów pozbawionych błędu metody pomiarowej wyjścia obiektu przyjmuje następującą postać:

$$y_{I,i}(k) = \tilde{y}_{I,i}(kN), \quad (4.5)$$

gdzie:

$y_{I,i}(k)$ – pozbawiony błędu I metody organizacji pomiarów k -ty pomiar wykonany w i -tej serii,

$\tilde{y}_{I,i}(\tilde{k})$ – odpowiedź obiektu pobudzonego przez $\tilde{u}_{1i}(\tilde{k})$ i $\tilde{u}_2(\tilde{k})$ w chwili \tilde{k} ,

$k = 0, \dots, K - 1$,

$i = 0, \dots, I - 1$

oraz N stanowi pewien całkowity współczynnik równania

$$\tau_2 = N\tau_1.$$

Druga metoda organizacji pomiarów

Założmy, że podobnie jak dla pierwszej metody organizacji pomiarów dysponujemy ciągiem odpowiedzi $\tilde{y}(\tilde{k})$ dyskretnego obiektu dwustopniowego działającego z taktem τ_1 , pobudzonego dyskretnymi ciągami $\tilde{u}_1(\tilde{k})$ oraz $\tilde{u}_2(\tilde{k})$. Ciągi $\tilde{u}_1(\tilde{k})$ i $\tilde{u}_2(\tilde{k})$ otrzymuje się tak jak dla pierwszej metody organizacji pomiarów próbując taktem τ_1 rzeczywiste, ciągłe pobudzenia $\bar{u}_1(t)$ oraz $\bar{u}_2(t)$. Do wyznaczenia ciągu $\tilde{y}(\tilde{k})$ można wykorzystać równania obiektu dwustopniowego (2.1)–(2.2).

Eksperyment pomiarowy odpowiadający drugiej metodzie organizacji pomiarów opisują równania pomiarów zaproponowane w punkcie 3.2.2. W rozważanej sytuacji, kiedy ciągłym sygnałom: $\bar{u}_1(t)$, $\bar{u}_2(t)$ oraz $\bar{y}(t)$ odpowiadają dyskretne ciągi: $\tilde{u}_1(\tilde{k})$, $\tilde{u}_2(\tilde{k})$ oraz $\tilde{y}(\tilde{k})$, równania pomiarów dla drugiej metody organizacji pomiarów przyjmują postać:

$$\begin{aligned} u_{1i}(k) &= \tilde{u}_1(k + iK), \\ y_i(k) &= \tilde{y}(k + iK), \\ u_2(i) &= \tilde{u}_2(iK), \end{aligned} \tag{4.6}$$

gdzie:

$$k = 0, \dots, K - 1,$$

$$i = 0, \dots, I - 1$$

oraz K stanowi pewien całkowity współczynnik równania

$$\tau_2 = K\tau_1.$$

Podobnie jak dla pierwszej metody organizacji pomiarów dysponując pomiarami wykonanymi na bieżąco kolejnym krokiem będzie uzyskanie możliwości wykonania pomiarów wyjścia obiektu dwustopniowego wolnego od błędów metody pomiarowej. Zależy nam obecnie na przeprowadzeniu pomiarów na 1. stopniu dla niezmiennego w czasie trwania pewnej i -tej serii pomiarowej wyjścia obiektu na stopniu drugim, czyli niezmiennego parametru a .

Oczekiwane pomiary można otrzymać mierząc wyjście pewnego dyskretnego obiektu dwustopniowego o zmodyfikowanym w stosunku do obiektu opisanego równaniami (2.1) – (2.2) działaniu. Niech obiekty na obu stopniach opisane równaniami (2.1) i (2.2) działają z taktom τ_1 . Dodatkowo założymy, że jesteśmy w stanie powtarzać K -krotnie, gdzie K jest ilością pomiarów serii pomiarowej, wartości pojawiające się co K taktów na wyjściu obiektu na 2. stopniu. Niech ta powtarzana wielkość będzie stanowiła wartość parametru a obiektu na 1. stopniu. Pobudzając obiekt o takim działaniu ciągami $\tilde{u}_1(\tilde{k})$, $\tilde{u}_2(\tilde{k})$ otrzymamy na jego wyjściu ciąg $\tilde{y}_{II}(\tilde{k})$, stanowiący poszukiwaną odpowiedź obiektu dwustopniowego z niezmiennym przez K taktów parametrem a obiektu na 1. stopniu. Jeżeli kolejne serie pomiarów na 1. stopniu zostaną przeprowadzone odpowiadając okresom K -krotnego powtarzania wyjścia obiektu na 2. stopniu, pozwoli nam to na uzyskanie pomiarów wyjścia $y_{II,i}(k)$ obiektu dwustopniowego wolnych od błędów metody pomiarowej.

Równanie pomiarów pozbawionych błędów metody pomiarowej wyjścia obiektu przyjmuje następującą postać:

$$y_{II,i}(k) = \tilde{y}_{II}(k + iK), \quad (4.7)$$

gdzie:

$y_{II,i}(k)$ – pozbawiony błędów drugiej metody organizacji pomiarów k -ty pomiar wykonany w i -tej serii,

$\tilde{y}_{II}(\tilde{k})$ – odpowiedź obiektu z powtarzaniem K -krotnie wyjściem na 2. stopniu, pobudzonego przez $\tilde{u}_1(\tilde{k})$ i $\tilde{u}_2(\tilde{k})$ w chwili \tilde{k} ,

$$k = 0, \dots, K - 1,$$

$$i = 0, \dots, I - 1$$

oraz K stanowi pewien całkowity współczynnik równania

$$\tau_2 = K\tau_1.$$

4.2.5. Rekomendacje na podstawie badań symulacyjnych

Przedstawione w poprzednim punkcie modele pozwalają na uzyskanie pomiarów obiektu dwustopniowego zarówno obciążonych błędami jak i wolnych od błędów metody pomiarowej. W efekcie możliwe staje się wyznaczenie błędów pomiarowych popełnianych

przez każdą z metod organizacji pomiarów i na podstawie przyjętego kryterium wskazanie lepszej z nich.

Jedną z możliwości otrzymania pomiarów jest przeprowadzenie badań symulacyjnych. W tym celu konieczne jest dysponowanie odpowiednimi obiektami dyskretnymi, których budowa odpowiada zaproponowanym modelom pomiarów. Jako podstawę należy przyjąć równania dyskretnego obiektu dwustopniowego (2.1)–(2.2), pamiętając równocześnie o konieczności modyfikacji działania obiektu dwustopniowego dla drugiej metody organizacji pomiarów. Parametry symulowanych obiektów dwustopniowych należy dobrać tak, aby odpowiadały badanym właściwościom obiektów. Konieczne jest również przyjęcie wartości parametrów eksperymentu pomiarowego: liczby serii pomiarowych I oraz liczby pomiarów w każdej serii K , wartości parametru N , długości czasu próbkowania τ_1 . Następnie należy wybrać sygnały wejściowe na obu stopniach i dokonać ich dyskretyzacji ze względu na czas próbkowania τ_1 . Dysponując poddanymi dyskretyzacji pobudzeniami w postaci ciągów $\tilde{u}_1(\tilde{k})$ i $\tilde{u}_2(\tilde{k})$ możliwe staje się wyznaczenie ciągów odpowiedzi symulowanych obiektów i w rezultacie przeprowadzenie pomiarów zgodnych z przedstawionymi równaniami pomiarów dla obu metod, zapisanych w poprzedniej części rozdziału. Ciągi pomiarów posłużą następnie do wyznaczenia ciągów błędów pomiarowych popełnianych przy wykorzystaniu każdej z metod organizacji pomiarów.

Analizę wyliczonych błędów metody proponuje się przeprowadzić dla pewnego przyjętego przedziału czasowego T_r , który zostanie przeznaczony na przeprowadzenie eksperymentu pomiarowego. Ponieważ ciągi pomiarów mierzone są z taktem pomiarowym τ_1 , przedział T_r może zostać również wyrażony w postaci ilości wyrazów tych ciągów. Ograniczenie analizy błędów do przedziału T_r oznacza, że rekomendacja wyboru jednej z metod organizacji pomiarów zostanie sformułowana na podstawie przyjętego kryterium zastosowanego do pewnej liczby wyrazów ciągów błędów wynikającej z relacji T_r do τ_1 .

Przyjęte kryterium oceny bada górne ograniczenie wartości bezwzględnych błędów popełnianych przez każdą z metod organizacji pomiarów. Pamiętając o ograniczeniu analizy do czasu przeznaczonego na eksperyment pomiarowy interpretacja tak przyjętego kryterium jest następująca: jako lepszą z punktu widzenia jakości identyfikacji należy przyjąć tę metodę organizacji pomiarów, dla której istnieje pewność, że popełniane przez nią błędy

metody nie przekroczą pewnego maksymalnego poziomu, który będzie niższy w stosunku do maksymalnego poziomu błędów drugiej metody.

Kroki prowadzące do sformułowania rekomendacji są następujące:

1. Przyjmij właściwości obiektu, dla którego mają zostać sformułowane rekomendacje. Przyjęte właściwości obiektu zapisz za pomocą jego parametrów.
2. Przyjmij sygnały wejściowe $\bar{u}_1(t)$ i $\bar{u}_2(t)$ dla których mają zostać sformułowane rekomendacje.
3. Przyjmij parametry eksperymentu: I , K , N , T_r i τ_1 .
4. Dokonaj dyskretyzacji z taktom τ_1 sygnałów $\bar{u}_1(t)$ i $\bar{u}_2(t)$ otrzymując ciągi $\tilde{u}_1(\tilde{k})$ i $\tilde{u}_2(\tilde{k})$.
5. Przeprowadź symulacje działania obiektów przyjętych w Kroku 1 i wykonaj pomiary zgodnie z równaniami pomiarów: (4.1), (4.5) oraz (4.6) i (4.7).
6. Na podstawie otrzymanych ciągów pomiarów wylicz ciągi błędów metody dla obu metod organizacji pomiarów, których wyrazy określono następująco:

$$e_{I,i}(k) = y_i(k) - y_{I,i}(k), \quad (4.8)$$

$$e_{II,i}(k) = y_i(k) - y_{II,i}(k), \quad (4.9)$$

gdzie:

$e_{I,i}(k)$ – błąd I metody organizacji pomiarów popełniany w k -tym pomiarze w i -tej serii,

$e_{II,i}(k)$ – błąd II metody organizacji pomiarów popełniany w k -tym pomiarze w i -tej serii.

7. Znajdź górne ograniczenia wartości bezwzględnych wyrazów obu ciągów błędów metody.
8. Rekomenduj do zastosowania tę metodę, której górne ograniczenie wartości bezwzględnych wyrazów ciągów błędów metody przyjmuje mniejszą wartość.

Tak sformułowane rekomendacje mogą służyć dwóm celom. Po pierwsze możliwe jest wskazanie jednej z dwu metod organizacji pomiarów w pewnej szczególnej sytuacji, kiedy znamy właściwości obiektu dwustopniowego oraz znamy pobudzenia na obu stopniach dla przyjętych parametrów eksperymentu. Po drugie możliwe jest przy zastosowaniu

przedstawionej procedury zaproponowanie pewnych bardziej ogólnych rekomendacji stosowania metod organizacji pomiarów. W tym celu należy przeprowadzić szereg badań symulacyjnych w wyniku, których zostaną sformułowane rekomendacje dla obiektów o różnych właściwościach, sygnałów o różnej postaci oraz różnych parametrów eksperymentu.

4.3. Analityczna metoda wyznaczenia rekomendacji

W trakcie dotychczasowych rozważań przedstawiono pewną ogólną metodologię formułowania rekomendacji wyboru metody organizacji pomiarów oraz parametrów eksperymentu na podstawie posiadanej wiedzy o właściwościach obiektów i sygnałów. Sformułowanie rekomendacji wedle tego podejścia wymagało jednak przeprowadzenia badań symulacyjnych. Obecnie tematem dalszych rozważań będzie problem formułowania rekomendacji bez konieczności przeprowadzania badań symulacyjnych.

4.3.1. Modele pomiarów

Aby możliwe było sformułowanie rekomendacji konieczne jest dysponowanie modelami pomiarów dla obu metod organizacji pomiarów. Modele takie pozwalają na otrzymywanie pomiarów zarówno obciążonych jak i wolnych od błędów metody organizacji pomiarów. Dysponowanie formalnymi opisami dyskretnych obiektów użytych do modelowania pomiarów, otrzymywanych przy użyciu obu metod organizacji pozwoli na przeprowadzenie analiz i sformułowanie rekomendacji bez konieczności wykorzystania badań symulacyjnych. Ze względu na poziom skomplikowania formalizmów dla przypadku ogólnego, konieczne będzie dokonanie pewnych uproszczeń w konstrukcji rozpatrywanych obiektów oraz poczynienie pewnych założeń dotyczących pobudzeń.

Pierwsza metoda organizacji pomiarów

Obecnie zajmiemy się wyznaczeniem dla zadanych pobudzeń wartości wyjścia obiektu dwustopniowego w dowolnej chwili czasowej k przy założeniu, że parametr $a(k)$ obiektu 1. stopniu ulega zmianom. W tym celu wykorzystamy znane równania obiektu dwustopniowego (2.1) – (2.2). Opis taki umożliwi wyznaczenie wyjścia obiektu dwustopniowego mierzonego w trakcie pomiarów na bieżąco, czyli wyjścia obciążonego błędem metody pomiarowej.

Na potrzeby dalszych rozważań analitycznych ograniczymy się do pewnej szczególnej postaci równania obiektu na 2. stopniu oraz szczególnego pobudzenia na stopniu drugim. Przyjęte założenia stanowią pewne uproszczenie w stosunku do ogólnego przypadku rozpatrywanego w części poświęconej metodyce wyznaczania rekomendacji.

Niech obiekt dwustopniowy będzie opisany równaniami:

$$A_1(q^{-1})y(k) = B_1(q^{-1})u_1(k), \quad (4.10)$$

$$a(k) = B_2(q^{-1})u_2(k), \quad (4.11)$$

gdzie:

$$A_1(q^{-1}) = 1 + a_{11}q^{-1} + a_{12}q^{-2} + \dots + a_{1n_1}q^{-n_1},$$

$$B_1(q^{-1}) = b_{11}q^{-1} + b_{12}q^{-2} + \dots + b_{1m_1}q^{-m_1},$$

$$B_2(q^{-1}) = b_{21}q^{-1} + b_{22}q^{-2} + \dots + b_{2m_2}q^{-m_2},$$

dla ustalonego k , $a(k)$ jest wartością wybranego parametru opisu obiektu na stopniu pierwszym

$$a(k) \in \{b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1m_1}\}.$$

Dokonując złożenia (4.10) i (4.11) otrzymujemy nieliniowe równanie dyskretnego obiektu dynamicznego

$$\begin{aligned} y(k) + a_{11}y(k-1) + \dots + a_{1n_1}y(k-n_1) = & b_{11}u_1(k-1) + b_{12}u_1(k-2) + \dots + \\ & (b_{21}u_2(k-1) + b_{22}u_2(k-2) + \dots + \\ & b_{2m_2}u_2(k-m_2))u_1(k-p) + \dots + b_{1m_1}u_1(k-m_1). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Zakładając liniową postać sygnału wejściowego na 2. stopniu $\bar{u}_2(t)$

$$\bar{u}_2(t) = \lambda_2 t \quad (4.13)$$

po wykonaniu dyskretyzacji sygnałów wejściowych wyrażenia

$$b_{2l}u_2(k-l)u_1(k-p), \quad l = 1, \dots, m_2,$$

przyjmują postać

$$\lambda_2 b_{2l}(k-l)u_1(k-p), \quad l = 1, \dots, m_2.$$

W efekcie (4.12) uzyskuje postać równania liniowego

$$\begin{aligned}
y(k) + a_{11}y(k-1) + \dots + a_{1n_1}y(k-n_1) = & b_{11}u_1(k-1) + b_{12}u_1(k-2) + \dots + \\
& (b_{21}\lambda_2(k-1) + b_{22}\lambda_2(k-2) + \dots + \\
& b_{2m_2}\lambda_2(k-m_2))u_1(k-p) + \dots + b_{1m_1}u_1(k-m_1).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Zakładając dalej:

$$\bar{u}_1(t) = 0, \text{ dla } t < 0,$$

$$\bar{u}_2(t) = 0, \text{ dla } t < 0,$$

możliwe jest zastosowanie transformaty Z dla równania obiektu (4.14)

$$\begin{aligned}
Z\{y(k)\} + a_{11}Z\{y(k-1)\} + \dots + a_{1n_1}Z\{y(k-n_1)\} = & \\
& b_{11}Z\{u_1(k-1)\} + b_{12}Z\{u_1(k-2)\} + \dots + \\
& b_{1p-1}Z\{u_1(k-p+1)\} + \\
& \lambda_2 b_{21}Z\{(k-1)u_1(k-p)\} + \\
& \lambda_2 b_{22}Z\{(k-2)u_1(k-p)\} + \dots + \\
& \lambda_2 b_{2m_2}Z\{(k-m_2)u_1(k-p)\} + \\
& b_{1p+1}Z\{u_1(k-p-1)\} + \dots + \\
& b_{1m_1}Z\{u_1(k-m_1)\}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Korzystając z następującej własności transformaty Z

$$Z\{kf(k)\} = -q \frac{d}{dq} F(q), \tag{4.16}$$

gdzie $f(k)$ jest dowolnym ciągiem, dla którego istnieje transformata $F(q)$,

możliwe jest wyznaczenie transformat wyrażeń $(k-l)u_1(k-p)$, $l = 1, 2, \dots, m_2$, równania (4.15).

Korzystając z liniowości transformaty Z

$$Z\{(k-l)f(k-p)\} = Z\{kf(k-p)\} - lZ\{f(k-p)\}$$

oraz znając transformatę ciągu przesuniętego

$$Z\{f(k-p)\} = q^{-p} F(q)$$

wyznaczenie poszukiwanych transformat elementów równania (4.15) sprowadza się do znalezienia transformaty $Z\{kf(k-p)\}$. Odwołując się do definicji transformaty Z wyrażenie $Z\{kf(k-p)\}$ może zostać zapisane jako

$$Z\{kf(k-p)\} = \sum_{k=0}^{\infty} kf(k-p)q^{-k}.$$

Przyjmując $m = k - p$ suma przybierze postać

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} kf(k-p)q^{-k} &= \sum_{m=-p}^{\infty} (m+p)f(m)q^{-(m+p)} \\ &= q^{-p} \sum_{m=-p}^{\infty} mf(m)q^{-m} + pq^{-p} \sum_{m=-p}^{\infty} f(m)q^{-m}. \end{aligned}$$

Ponieważ zgodnie z założeniem

$$f(m) = 0 \text{ dla } m < 0$$

czyli

$$f(k-p) = 0 \text{ dla } k-p < 0.$$

Ciąg $f(k-p)$ oznacza opóźniony o p taktów ciąg $f(k)$. Wynika z tego, że

$$f(k-p) = 0 \text{ dla } k < p$$

czyli

$$\sum_{m=-p}^{\infty} mf(m)q^{-m} = \sum_{m=0}^{\infty} mf(m)q^{-m}.$$

Korzystając z własności (4.16) wyliczamy

$$q^{-p} \sum_{m=0}^{\infty} mf(m)q^{-m} = -q^{-p}q \frac{d}{dq} F(q) = -q^{-p+1} \frac{d}{dq} F(q) \quad (4.17)$$

oraz

$$pq^{-p} \sum_{m=-p}^{\infty} f(m)q^{-m} = pq^{-p} F(q).$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$Z\{(k-l)f(k-p)\} = q^{-p+1} \frac{d}{dq} F(q) + (p-l)q^{-p} F(q). \quad (4.18)$$

Uzyskana powyżej własność pozwala na wyznaczenie równania (4.15) w dziedzinie transformaty Z . Równanie przyjmuje obecnie postać

$$\begin{aligned}
Y(q) + a_{11}q^{-1}Y(q) + \dots + a_{1n_1}q^{-n_1}Y(q) = & \\
& b_{11}q^{-1}U_1(q) + \dots + b_{1p-1}q^{-p+1}U_1(q) + \\
& \lambda_2 b_{21}(q^{-p+1} \frac{d}{dq} U_1(q) + (p-1)q^{-p}U_1(q)) + \dots + \\
& \lambda_2 b_{2m_2}(q^{-p+1} \frac{d}{dq} U_1(q) + (p-m_2)q^{-p}U_1(q)) + \\
& b_{1p+1}q^{-p-1}U_1(q) + \dots + b_{1m_1}q^{-m_1}U_1(q) ,
\end{aligned} \tag{4.19}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
U_1(q) &= Z\{u_1(k)\}, \\
Y(q) &= Z\{y(k)\}.
\end{aligned}$$

Po uporządkowaniu wyrazów otrzymujemy

$$\begin{aligned}
Y(q)(1 + a_{11}q^{-1} + \dots + a_{1n_1}q^{-n_1}) = U_1(q)(b_{11}q^{-1} + \dots + b_{1p-1}q^{-p+1} + \\
\lambda_2(b_{21}(p-1) + \dots + b_{2m_2}(p-m_2))q^{-p} + \\
b_{1p+1}q^{-p-1} + \dots + b_{1m_1}q^{-m_1}) - \\
\lambda_2 q^{-p+1} (b_{21} + \dots + b_{2m_2}) \frac{d}{dq} U_1(q).
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Za pomocą powyższego równania możliwe staje się wyznaczenie transformaty sygnału wyjściowego obiektu dwustopniowego w sytuacji zmiany parametru $a(k)$ w kolejnych chwilach k obiektu na 1. stopniu dla zadanych sygnałów wejściowych.

Zakładając, że obiekt opisany równaniem (4.20) działa z taktiem τ_1 i jest pobudzany dyskretnymi ciągami $\tilde{u}_1(\tilde{k})$ oraz $\tilde{u}_2(\tilde{k})$ wyznaczenie poszukiwanego ciągu odpowiedzi $\tilde{y}(\tilde{k})$ może zostać przeprowadzone z następującej zależności:

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}(q)(1 + a_{11}q^{-1} + \dots + a_{1n_1}q^{-n_1}) = \tilde{U}_1(q)(b_{11}q^{-1} + \dots + b_{1p-1}q^{-p+1} + \\
\lambda_2(b_{21}(p-1) + \dots + b_{2m_2}(p-m_2))q^{-p} + \\
b_{1p+1}q^{-p-1} + \dots + b_{1m_1}q^{-m_1}) - \\
\lambda_2 q^{-p+1} (b_{21} + \dots + b_{2m_2}) \frac{d}{dq} \tilde{U}_1(q),
\end{aligned} \tag{4.21}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\tilde{U}_1(q) &= Z\{\tilde{u}_1(\tilde{k})\}, \\ \tilde{Y}(q) &= Z\{\tilde{y}(\tilde{k})\}.\end{aligned}$$

Ciąg odpowiedzi $\tilde{y}(\tilde{k})$ zostanie wykorzystany zgodnie z równaniami (4.1) do uzyskania ciągów pomiarów $y_i(k)$, $i = 0, \dots, I - 1$, $k = 0, \dots, K - 1$, jakie dostarcza pierwsza metoda organizacji pomiarów.

Na koniec należy zwrócić uwagę na elementy charakterystyczne otrzymanego równania. Za cenę poczynionego założenia (4.13) dotyczącego liniowej postaci sygnału wejściowego obiektu na 2. stopniu otrzymano stosunkowo proste do analizy liniowe równanie różnicowe w dziedzinie zmiennej zespolonej, umożliwiające wyznaczenie odpowiedzi obiektu dwustopniowego dla dowolnego sygnału wejściowego, dla którego istnieje jego transformata Z , dla pewnej klasy obiektów na 2. stopniu oraz dla obiektów na 1. stopniu o ogólnej postaci przyjętej w punkcie 2.3.

Zajmiemy się obecnie równaniem pozwalającym wyznaczyć ciąg odpowiedzi $\tilde{y}_{I,i}(\tilde{k})$. Niech $\tilde{Y}_{I,i}(q)$ oznacza transformatę ciągu odpowiedzi obiektu dwustopniowego pobudzonego przesuniętym o i taktów ciągiem $\tilde{u}_1(\tilde{k})$ oraz ustalonym $\tilde{u}_2(\tilde{k})$. Wówczas biorąc transformatę przesuniętego ciągu $\tilde{u}_1(\tilde{k} + i)$ poszukiwane równanie przyjmuje postać

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_{I,i}(q)(1 + a_{11}q^{-1} + \dots + a_{1n_1}q^{-n_1}) &= q^i \tilde{U}_1(q)(b_{11}q^{-1} + \dots + b_{1p-1}q^{-p+1} + \\ &\quad \chi_0 q^{-p} + b_{1p+1}q^{-p-1} + \dots + b_{1m_1}q^{-m_1}) - \quad (4.22) \\ &\quad \chi_1 q^{-p+1} \frac{d}{dq}(q^i \tilde{U}_1(q)),\end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\chi_0 &= \lambda_2(b_{21}(p-1) + \dots + b_{2m_2}(p-m_2)), \\ \chi_1 &= \lambda_2(b_{21} + \dots + b_{2m_2}).\end{aligned}$$

Wyznaczony z równania (4.22) ciąg $\tilde{y}_{I,i}(\tilde{k})$ pozwala na znalezienie pozbawionego błędu pierwszej metody organizacji pomiarów ciągu pomiarów $y_{I,i}(k)$, $i = 0, \dots, I - 1$, $k = 0, \dots, K - 1$, który otrzymuje się wykorzystując do tego celu równanie pomiarów (4.5).

Druga metoda organizacji pomiarów

Dysponując rozwiązaniem równania (4.21) w postaci ciągu odpowiedzi $\tilde{y}(\tilde{k})$ uzyskanie ciągu pomiarów $y_i(k)$, $i = 0, \dots, I - 1$, $k = 0, \dots, K - 1$, dla drugiej metody organizacji pomiarów sprowadza się do wykorzystania równania (4.6).

Druga metoda organizacji pomiarów zakłada, że sygnał $\bar{u}_2(t)$, podawany na wejście na 2. stopniu jest wolnozmienny a w szczególności pozostaje stały. Ponadto dynamika obiektu na drugim stopniu pozwala przyjąć, że w czasie pomiarów na pierwszym stopniu wyjście na drugim stopniu a nie zmienia się. Można wówczas założyć, że obiekty na pierwszym i drugim stopniu działają z różnymi taktami dyskretyzacji, odpowiednio τ_1 oraz τ_2 .

Równania obiektu przyjmują wówczas postać:

$$A_1(q^{-1})y_{II}(k) = B_1(q^{-1})u_1(k), \quad (4.23)$$

$$a(i) = B_2(q^{-1})u_2(i), \quad (4.24)$$

gdzie $u_2(i)$ to poddany dyskretyzacji z taktiem τ_2 sygnał $\bar{u}_2(t)$.

Zakładając, że zwiększeniu indeksu i o 1 odpowiada zwiększenie indeksu k o K to ciąg $y_{II}(k)$ na wyjściu obiektu opisanego (4.23) – (4.24) jest poszukiwanym ciągiem pomiarów wyjścia obiektu dwustopniowego z niezmiennym parametrem a podczas wykonywania pomiarów w i -tej serii pomiarowej.

Podobnie jak podczas konstrukcji złożonego obiektu ze zmiennym parametrem $a(k)$ (4.12), złożenie równań (4.23) – (4.24) prowadzi do otrzymania nieliniowego równania dyskretnego dwustopniowego obiektu dynamicznego z dwoma taktami dyskretyzacji skojarzonymi z indeksami k oraz i

$$\begin{aligned}
y_{II}(k) + a_{11}y_{II}(k-1) + \dots + a_{1n_1}y_{II}(k-n_1) = & b_{11}u_1(k-1) + b_{12}u_1(k-2) + \dots + \\
& (b_{21}u_2(i-1) + b_{22}u_2(i-2) + \dots + \\
& b_{2m_2}u_2(i-m_2))u_1(k-p) + \dots + \\
& b_{1m_1}u_1(k-m_1).
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Mając na względzie analogiczne powody jak podczas konstrukcji złożonego obiektu ze zmiennym parametrem $a(k)$ decydujemy się na przyjęcie liniowej postaci sygnału wejściowego na 2. stopniu $\bar{u}_2(t)$

$$\bar{u}_2(t) = \lambda_2 t.$$

Dokonując dyskretyzacji sygnałów wejściowych wyrażenia

$$b_{2l}u_2(i-l)u_1(k-p), \quad l = 1, \dots, m_2,$$

przyjmują postać

$$\lambda_2 b_{2l}(i-l)u_1(k-p), \quad l = 1, \dots, m_2.$$

W wyniku złożenia otrzymujemy równanie obiektu o postaci

$$\begin{aligned}
y_{II}(k) + a_{11}y_{II}(k-1) + \dots + a_{1n_1}y_{II}(k-n_1) = & b_{11}u_1(k-1) + b_{12}u_1(k-2) + \dots + \\
& (b_{21}\lambda_2(i-1) + b_{22}\lambda_2(i-2) + \dots + \\
& b_{2m_2}\lambda_2(i-m_2))u_1(k-p) + \dots + \\
& b_{1m_1}u_1(k-m_1).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Podobnie jak podczas analizy obiektu złożonego w pierwszej metodzie organizacji

pomiarów do znalezienia rozwiązania równania obiektu (4.26) zastosujemy transformatę Z :

$$\begin{aligned}
Z\{y_{II}(k)\} + a_{11}Z\{y_{II}(k-1)\} + \dots + a_{1n_1}Z\{y_{II}(k-n_1)\} = & b_{11}Z\{u_1(k-1)\} + b_{12}Z\{u_1(k-2)\} + \dots + \\
& b_{1p-1}Z\{u_1(k-p+1)\} + \\
& \lambda_2 b_{21}Z\{(i-1)u_1(k-p)\} + \\
& \lambda_2 b_{22}Z\{(i-2)u_1(k-p)\} + \dots + \\
& \lambda_2 b_{2m_2}Z\{(i-m_2)u_1(k-p)\} + \\
& b_{1p+1}Z\{u_1(k-p-1)\} + \dots + \\
& b_{1m_1}Z\{u_1(k-m_1)\}.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Konieczne staje się więc wyliczenie wyrażeń

$$Z\{(i-l)u_1(k-p)\}, \quad l = 1, \dots, m_2, \tag{4.28}$$

które mogą zostać zapisane jako

$$Z\{iu_1(k-p)\} - lZ\{u_1(k-p)\}, \quad l = 1, \dots, m_2, \quad (4.29)$$

gdzie:

i jest indeksem taktu obiektu na 2. stopniu,

k jest indeksem taktu obiektu na 1. stopniu.

W czasie trwania i -tego taktu na drugim stopniu, indeks k obiektu na stopniu pierwszym zmienia się K razy, czyli w trakcie K zmian indeksu k indeks i pozostaje niezmienny.

Oznacza to, że wyrażenie $iu_1(k-p)$ będące elementem zależności (4.29) może zostać zapisane jako iloczyn przesuniętego ciągu wejściowego $u_1(k-p)$ oraz ciągu

$h_{II}(k) = \{0, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1, 2, 2, \dots\}$, w którym liczba wyrazów równych sobie wynosi K

$$iu_1(k-p) = h_{II}u_1(k-p). \quad (4.30)$$

Wyznaczenie transformaty iloczynu ciągów (4.30) wiąże się z zastosowaniem znanego twierdzenia.

Twierdzenie 4.1.

Niech $H(q)$ i $G(q)$ stanowią transformaty Z ciągów $h(k)$ i $g(k)$ o eksponentach δ_h i δ_g .

Wówczas transformata Z ciągu $f(k) = \{h(k)g(k)\}$ wynosi

$$F(q) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=r} H(z)G\left(\frac{q}{z}\right)\frac{dz}{z} \quad \text{dla } |q| > \exp(\delta_h + \delta_g), \quad (4.31)$$

gdzie krzywa całkowania jest dodatnio skierowanym okręgiem o promieniu r spełniającym nierówność $\exp(\delta_h) < r < |q| \exp(-\delta_g)$.

Do wyznaczenia transformaty ciągu $h_{II}(k)$ przydatna okazuje się następująca własność transformaty Z .

Jeżeli $F(q)$ jest transformatą ciągu $\{f(0), f(1), f(2), \dots\}$ to transformata Z ciągu ‘rozrzedzonego’ $h(k) = \{f(0), 0, \dots, 0, f(1), 0, \dots, 0, f(2), \dots\}$ gdzie liczba wyrazów równych 0 pomiędzy kolejnymi dwoma wyrazami $f(k)$ i $f(k+1)$ jest równa $N-1$, wynosi

$$H(q) = f(0) + f(1)q^{-N} + f(2)q^{-2N} + \dots = F(q^N). \quad (4.32)$$

Biorąc pod uwagę (4.32) oraz transformatę ciągu $\{0, 1, 2, \dots\}$

$$Z\{0, 1, 2, \dots\} = \frac{q}{(q-1)^2} \quad (4.33)$$

transformata ciągu $h_{II}(k)$ wynosi

$$H_{II}(q) = \sum_{k=0}^{K-1} q^{-k} \frac{q^K}{(q^K - 1)^2}. \quad (4.34)$$

Korzystając z transformaty iloczynu ciągów (4.31) transformata Z ciągu (4.30) zostanie zapisana następująco:

$$Z\{h_{II}(k)u_1(k-p)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=r} z^{-p-1} U_1(z) H_{II}\left(\frac{q}{z}\right) dz \quad (4.35)$$

$$\text{dla } |q| > \exp(\delta_u + \delta_{h_{II}}),$$

gdzie:

$$\exp(\delta_u) < r < |q| \exp(-\delta_{h_{II}}),$$

$$\delta_u - \text{eksponent ciągu } \tilde{u}_1(k),$$

$$\delta_{h_{II}} - \text{eksponent ciągu } h_{II}(k).$$

Po dokonaniu przekształceń zależność (4.35) przyjmuje postać

$$Z\{h_{II}(k)u_1(k-p)\} = \frac{1}{2\pi j} \sum_{k=0}^{K-1} q^{-k} \oint_{|z|=r} z^{K+k-p-1} U_1(z) \frac{q^K}{(q^K - z^K)^2} dz \quad (4.36)$$

$$\text{dla } |q| > \exp(\delta_u + \delta_{h_{II}}),$$

gdzie

$$\exp(\delta_u) < r < |q| \exp(-\delta_{h_{II}}).$$

Znalezienie poszukiwanej transformaty ciągu (4.30) zapisanej zależnością (4.36) dla dowolnej transformaty ciągu na wejściu obiektu na 1. stopniu $U_1(z)$ jest bardzo trudne.

Zakładając pewną szczególną postać transformaty ciągu na wejściu obiektu na 1. stopniu $U_1(z)$ wyznaczenie (4.36) znacznie się upraszcza.

Przez Ξ oznaczymy zbiór funkcji zmiennej zespolonej o zadanej postaci

$$\Xi = \left\{ F(z) : \frac{\bar{U}(z)}{(z-1)^n} \right\}, \quad (4.37)$$

gdzie:

$\bar{U}(z)$ – wielomian zmiennej zespolonej z ,

$n \in \{1, 2, \dots\}$.

Niech $U_1(z)$ należy do klasy Ξ opisanej przez (4.37). Wówczas zależność (4.36) może zostać zapisana jako

$$Z\{h_{II}(k)u_1(k-p)\} = \frac{1}{2\pi j} \sum_{k=0}^{K-1} q^{-k} \oint_{|z|=r} \frac{z^{K+k-p-1} \bar{U}(z)}{(z-1)^n} \frac{q^K}{(q^K - z^K)^2} dz \quad (4.38)$$

dla $|q| > \exp(\delta_u + \delta_{h_{II}})$.

Oznaczając

$$F_{II,k}(z) = z^{K+k-p-1} \bar{U}(z) \frac{q^K}{(q^K - z^K)^2}, \quad (4.39)$$

(4.38) przyjmuje postać

$$Z\{h_{II}(k)u_1(k-p)\} = \frac{1}{2\pi j} \sum_{k=0}^{K-1} q^{-k} \oint_{|z|=r} \frac{F_{II,k}(z)}{(z-1)^n} dz \quad (4.40)$$

dla $|q| > \exp(\delta_u + \delta_{h_{II}})$.

Rozwijając $F_{II,k}(z)$ w szereg Taylor'a

$$F_{II,k}(z) = \beta_{0,k} + \beta_{1,k}(z-1) + \beta_{2,k}(z-1)^2 + \dots$$

otrzymujemy

$$\oint_{|z|=r} \frac{F_{II,k}(z)}{(z-1)^n} dz = 2\pi j \beta_{n-1,k}, \quad (4.41)$$

gdzie

$$\beta_{n-1,k} = \frac{\partial^{(n-1)}}{\partial z^{(n-1)}} \frac{F_{II,k}(1)}{(n-1)!}. \quad (4.42)$$

Zależność (4.40) może być wówczas zapisana jako

$$Z\{h_{II}(k)u_1(k-p)\} = \sum_{k=0}^{K-1} q^{-k} \beta_{n-1,k}, \quad (4.43)$$

gdzie

$\beta_{n-1,k}$ jest funkcją zmiennej zespolonej q zadaną przez (4.42).

Dokonując oznaczenia

$$H_U(q) = \sum_{k=0}^{K-1} q^{-k} \beta_{n-1,k} \quad (4.44)$$

oraz zakładając, że rozpatrywany obiekt dwustopniowy jest pobudzany dyskretnymi ciągami $\tilde{u}_1(\tilde{k})$ oraz $\tilde{u}_2(\tilde{k})$ równanie obiektu (4.27) w dziedzinie transformaty Z otrzyma postać

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{II}(q)(1 + a_{11}q^{-1} + \dots + a_{1n_1}q^{-n_1}) = & \tilde{U}_1(q)(b_{11}q^{-1} + \dots + b_{1p-1}q^{-p+1} + \\ & -\lambda_2(b_{21} + 2b_{22} + \dots + m_2b_{2m_2})q^{-p} + \\ & b_{1p+1}q^{-p-1} + \dots + b_{1m_1}q^{-m_1}) + \\ & \lambda_2(b_{21} + b_{22} + \dots + b_{2m_2})H_U(q). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Rozwiązanie równania (4.45) stanowi ciąg $\tilde{y}_{II}(\tilde{k})$.

Poszukiwany ciąg $y_{II,i}(k)$, $k = 0, \dots, K-1$, oznaczający pozbawiony błędu metody pomiarowej ciąg pomiarów wyjścia obiektu dwustopniowego wykonywany w i -tej serii może wówczas zostać utworzony z wyrazów ciągu $\tilde{y}_{II}(\tilde{k})$ dzięki wykorzystaniu równania pomiarów (4.7).

4.3.2. Ciągi błędów pomiarowych metody

Obecnie zajmiemy się wyznaczeniem oceny ciągu błędów pomiarowych popełnianych podczas wykonywania pomiarów przy wykorzystaniu obu metod organizacji pomiarów na bieżąco.

Pierwsza metoda organizacji pomiarów

Niech $e_{I,i}(k)$ oznacza błąd metody pomiarowej popełniany podczas wykonywania k -tego pomiaru w i -tej serii pomiarowej przeprowadzanej z wykorzystaniem pierwszej metody organizacji pomiarów. Błąd ten określa się następująco:

$$e_{I,i}(k) = y_i(k) - y_{I,i}(k), \quad (4.46)$$

gdzie:

$y_i(k)$ – k -ty pomiar w i -tej serii wykonany na bieżąco, zgodnie z (4.1),

$y_{I,i}(k)$ – k -ty pomiar w i -tej serii wykonany z powtarzaniem sygnału wejściowego na drugim stopniu, zgodnie z (4.5).

Podczas rzeczywistego eksperymentu pomiarowego, w i -tej serii zostanie wykonane K pomiarów. Oznacza to, że również ciąg błędów metody pomiarowej popełnionych w i -tej serii będzie zawierał K wyrazów. Zachowanie ogólności wymaga jednak od nas posługiwania się rozwiązaniami równań (4.21) oraz (4.22), czyli ciągami nieskończonymi. Założymy również, że do dalszych rozważań wystarczy nam znajomość pewnego ciągu nieskończonego, który stanowić będzie satysfakcjonującą ocenę ciągu błędów metody pomiarowej. Obecnie wyznaczmy nieskończony ciąg $\tilde{e}_{I,i}(\tilde{k})$, który będzie zawierał wszystkie wyrazy $e_{I,i}(k)$ ciągu błędów pierwszej metody pomiarowej dla dowolnie dużego K .

Wyznaczenie ciągu błędów $\tilde{e}_{I,i}(\tilde{k})$ zostanie zrealizowane z wykorzystaniem równań (4.21) oraz (4.22). Rozważmy zależność

$$\tilde{E}_{I,i}^*(q) = q^i \tilde{Y}(q) - \tilde{Y}_{I,i}(q), \quad (4.47)$$

w której $\tilde{E}_{I,i}^*(q)$ stanowi transformatę nieskończonego ciągu $\tilde{e}_{I,i}^*(\tilde{k})$ różnic pomiędzy wyjściem obiektu ze zmieniającym się co τ_1 parametrem a (obiekt mierzony na bieżąco) a wyjściem obiektu pobudzonym przesuniętym w i -tej serii o i taktów $\tilde{u}_1(\tilde{k})$ dla powtarzanego $\tilde{u}_2(\tilde{k})$ (obiekt mierzony z powtarzaniem sygnału wejściowego na 2. stopniu). Wybierając niektóre, odpowiadające pomiarom k , $k = 0 \dots K - 1$, wyrazy ciągu $\tilde{e}_{I,i}^*(\tilde{k})$

możliwe jest wyznaczenie ciągu błędów pomiarowych $e_{I,i}(k)$, $k = 0 \dots K - 1$, popełnianych w i -tej serii podczas wykonywania pomiarów za pomocą pierwszej metody organizacji pomiarów. Zgodnie z przyjętą zależnością pomiędzy czasami próbkowania $\tau_2 = N\tau_1$, wybór odpowiednich wyrazów ciągu $\tilde{e}_{I,i}^*(\tilde{k})$, którego transformatą jest $\tilde{E}_{I,i}^*(q)$ powinien zostać zrealizowany analogicznie jak w (4.5)

$$e_{I,i}(k) = \tilde{e}_{I,i}^*(kN). \quad (4.48)$$

Analogiczny wybór wyrazów możliwy jest również dla nieskończonego K , co w efekcie pozwala otrzymać poszukiwany ciąg $\tilde{e}_{I,i}(\tilde{k})$.

Dokonując podstawienia równań (4.21) oraz (4.22) do zależności (4.47) otrzymujemy

$$\tilde{E}_{I,i}^*(q)A_1(q) = \chi_1 i q^{n_1+i-p} \tilde{U}_1(q), \quad (4.49)$$

gdzie:

$$A_1(q) = q^{n_1} + a_{11}q^{n_1-1} + a_{12}q^{n_1-2} + \dots + a_{1n_1},$$

$$\chi_1 = \lambda_2(b_{21} + \dots + b_{2m_2}).$$

Dokonanie wyboru co N -tego wyrazu ciągu $\tilde{e}_{I,i}^*(\tilde{k})$ reprezentowanego przez $\tilde{E}_{I,i}^*(q)$ w przypadku ogólnym jest bardzo trudne. Z powodu nieznaności współczynników wielomianu $A_1(q^{-1})$ nie jest możliwe wyznaczenie transformaty odwrotnej $\tilde{E}_{I,i}^*(q)$, czyli ciągu $\tilde{e}_{I,i}^*(\tilde{k})$, która pozwoliłaby na łatwe wyznaczenie poszukiwanego ciągu $\tilde{e}_{I,i}(\tilde{k})$. Z tego względu konieczne staje się przeprowadzenie dalszych rozważań w dziedzinie zmiennej zespolonej q . Zadanie wyznaczenia ciągu błędów $\tilde{e}_{I,i}(\tilde{k})$ sprowadzamy obecnie do zadania wyznaczenia jego transformaty $\tilde{E}_{I,i}(q)$ przy znajomości transformaty $\tilde{E}_{I,i}^*(q)$. Ogólna metoda wyznaczenia transformaty ciągu powstałego przez wybór co N -tego wyrazu innego ciągu, przy znajomości wyłącznie transformaty tego innego ciągu nie jest znana. Ale możliwe jest wyznaczenie transformaty pewnego ciągu podobnego do powstałego przez wybór co N -tego wyrazu, który posiada oczekiwane właściwości.

Niech $f(k)$ stanowi ciąg, którego wszystkie niezerowe wyrazy powstały przez wybór co N -tego wyrazu innego ciągu $g(k)$ oraz niech jedyną wiedzę o ciągu $g(k)$ stanowi jego

transformata $G(q) = Z\{g(k)\}$. Biorąc pod uwagę ciąg $h_I(k) = \{1, 0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots\}$, w którym liczba wyrazów równych 0 pomiędzy dwoma kolejnymi wyrazami równymi 1 wynosi $N - 1$ możliwe będzie utworzenie ciągu $f(k)$ jako iloczynu ciągów $h_I(k)$ i $g(k)$: $f(k) = \{h_I(k)g(k)\}$. Zakładając, że dysponujemy transformatą Z ciągu $h_I(k)$ $H_I(q) = Z\{h_I(k)\}$ problem wyznaczenia transformaty Z ciągu $f(k)$ można więc sprowadzić do wyznaczenia transformaty Z ciągu będącego iloczynem ciągów $h_I(k)$ i $g(k)$. Transformatę iloczynu ciągów określa wykorzystywana już wcześniej zależność (4.31). Kolejnym krokiem będzie wyznaczenie transformaty ciągu $h_I(k)$.

Ponieważ

$$Z\{1, 1, 1, \dots\} = \frac{q}{q-1} \quad (4.50)$$

to korzystając z (4.32) poszukiwana transformata $H_I(q)$ jest równa

$$H_I(q) = \frac{q^N}{q^N - 1}. \quad (4.51)$$

Obecnie możliwe staje się wyznaczenie transformaty $\tilde{E}_{I,i}(q)$ ciągu $\tilde{e}_{I,i}(\tilde{k})$, który stanowić będzie ‘rozrzedzony’ ciąg błędów pomiarowych popełnianych w i -tej serii podczas wykonywania pomiarów za pomocą pierwszej metody organizacji pomiarów, w którym liczba wyrazów 0 pomiędzy kolejnymi dwoma wyrazami $e_{I,i}(k)$ i $e_{I,i}(k+1)$ jest równa $N - 1$

$$\tilde{E}_{I,i}(q) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=r} \tilde{E}_{I,i}^*(z) H_I\left(\frac{q}{z}\right) \frac{dz}{z} \quad \text{dla } |q| > \exp(\delta_e + \delta_{h_I}), \quad (4.52)$$

gdzie:

$$\exp(\delta_e) < r < |q| \exp(-\delta_{h_I}),$$

$$\delta_e - \text{eksponent ciągu } \tilde{e}_{I,i}^*(k),$$

$$\delta_{h_I} - \text{eksponent ciągu } h_I(k).$$

Wyznamy teraz eksponent ciągu $h_I(k)$. Eksponent dowolnego ciągu $f(k)$ może zostać wyznaczony z zależności

$$\delta_f = \ln(R_f), \quad (4.53)$$

gdzie

R_f – promień zbieżności szeregu definiującego transformatę Z ciągu $f(k)$.

Zależność promienia R_f od wyrazów ciągu $f(k)$ określona jest wzorem Cauchy'ego-Hadamarda [40]

$$R_f = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|f(k)|}. \quad (4.54)$$

Zgodnie z (4.54) promień zbieżności ciągu $h_I(k)$ wynosi

$$R_{h_I} = 1, \quad (4.55)$$

czyli biorąc pod uwagę (4.53)

$$\delta_{h_I} = 0. \quad (4.56)$$

Dokonując podstawienia (4.49) do (4.52) oraz pamiętając o (4.56) otrzymujemy

$$\tilde{E}_{I,i}(q) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=r} \chi_1 \frac{iz^{n_1+i-p-1} \tilde{U}_1(z)}{A_1(z)} \frac{q^N}{q^N - z^N} dz \quad \text{dla } |q| > \exp(\delta_e), \quad (4.57)$$

gdzie:

$$\exp(\delta_e) < r < |q|,$$

$$A_1(z) = z^{n_1} + a_{11}z^{n_1-1} + a_{12}z^{n_1-2} + \dots + a_{1n_1},$$

$$\chi_1 = \lambda_2(b_{21} + \dots + b_{2m_2}).$$

Wyliczenie $\tilde{E}_{I,i}(q)$ z zależności (4.57) w przypadku ogólnym jest bardzo trudne. Zakładając pewną szczególną postać transformaty ciągu pojawiającego się na wejściu obiektu na 1. stopniu $\tilde{U}_1(z)$ wyznaczenie $\tilde{E}_{I,i}(q)$ znacznie się upraszcza.

Niech $\tilde{U}_1(z)$ należy do klasy Ξ opisanej przez (4.37) wówczas zależność (4.57) może być zapisana jako

$$\tilde{E}_{I,i}(q) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=r} \chi_1 \frac{iz^{n_1+i-p-1} \bar{U}_1(z)}{A_1(z)(z-1)^n} \frac{q^N}{q^N - z^N} dz \quad \text{dla } |q| > \exp(\delta_e). \quad (4.58)$$

Oznaczając

$$F_{I,i}(z) = iz^{n_1+i-p-1} \frac{\bar{U}(z)}{A_1(z)} \frac{q^N}{q^N - z^N} \quad (4.59)$$

zależność (4.58) przyjmuje postać

$$\tilde{E}_{I,i}(q) = \frac{\chi_1}{2\pi j} \oint_{|z|=r} \frac{F_{I,i}(z)}{(z-1)^n} dz \quad \text{dla } |q| > \exp(\delta_e). \quad (4.60)$$

Dokonajmy rozwinięcia funkcji $F_{I,i}(z)$ w szereg Taylor'a

$$F_{I,i}(z) = \beta_{0,i} + \beta_{1,i}(z-1) + \beta_{2,i}(z-1)^2 + \dots$$

Wówczas

$$\oint_{|z|=r} \frac{F_{I,i}(z)}{(z-1)^n} dz = 2\pi j \beta_{n-1,i}, \quad (4.61)$$

gdzie

$$\beta_{n-1,i} = \frac{\partial^{(n-1)}}{\partial z^{(n-1)}} \frac{F_{I,i}(1)}{(n-1)!}. \quad (4.62)$$

Równanie (4.58) może obecnie zostać przedstawione jako

$$\tilde{E}_{I,i}(q) = \chi_1 \beta_{n-1,i}, \quad (4.63)$$

gdzie

$\beta_{n-1,i}$ jest funkcją zmiennej q zadaną przez (4.62).

Przedstawiona metoda umożliwia wyznaczenie w stosunkowo prosty sposób transformaty $\tilde{E}_{I,i}(q)$ ciągu $\tilde{e}_{I,i}(\tilde{k})$ dla pewnej klasy transformat $\tilde{U}_1(z)$ ciągów wejściowych obiektu na 1. stopniu (4.37). Wyznaczenie oceny ciągu błędów pomiarowych $\tilde{e}_{I,i}(\tilde{k})$ sprowadza się – dla znanych: $\tilde{U}_1(z)$, $A_1(z)$ oraz parametrów eksperymentu – do znalezienia transformaty odwrotnej funkcji $\tilde{E}_{I,i}(q)$.

Nieskończony ciąg $\tilde{e}_{I,i}(\tilde{k})$, którego transformata jest $\tilde{E}_{I,i}(q)$, zawiera wszystkie wyrazy ciągu błędów pierwszej metody organizacji pomiarów $e_{I,i}(k)$, $k = 0, \dots, K-1$, dla dowolnie dużego K oraz wyrazy zerowe. Stanowi on poszukiwaną ocenę ciągu błędów pierwszej metody organizacji pomiarów $e_{I,i}(k)$, $k = 0, \dots, K-1$, dla dowolnie dużego K .

Zajmiemy się teraz kolejno interpretacją poczynionych założeń.

Rozważmy transformatę ciągu $\phi_0(k) = \{1, 1, 1, \dots\}$

$$Z\{\phi_0(k)\} = \Phi_0(q) = \frac{q}{q-1}.$$

Łatwo zauważyć, że transformata $\Phi_0(q)$ należy do klasy Ξ , dla $n = 1$ oraz $\bar{U}(q) = q$.

Ciąg $\phi_1(k) = k$ można utworzyć z wyrazów ciągu $\phi_0(k)$ w następujący sposób:

$$\phi_1(k) = k\phi_0(k).$$

W dziedzinie transformaty Z związek ten został określony przez (4.16) i wynosi

$$\Phi_1(q) = -q \frac{d}{dq} \Phi_0(q). \quad (4.64)$$

Podobnie może zostać wyznaczona transformata dowolnego ciągu $\phi_m(k) = k^m$

$$\Phi_m(q) = -q \frac{d}{dq} \left(-q \frac{d}{dq} \dots \left(-q \frac{d}{dq} \Phi_0(q) \right) \dots \right), \quad (4.65)$$

gdzie ilość operacji różniczkowania względem q będzie równa m .

Biorąc pod uwagę postać transformaty $\Phi_0(q)$, zależność (4.65) oraz własności pochodnej funkcji wymiernej widać, że dowolna funkcja $\Phi_m(q)$, $m = 1, 2, 3, \dots$, zmiennej zespolonej q należy do Ξ . Wynika z tego wniosek, że klasa funkcji Ξ zawiera w sobie klasę funkcji zmiennej zespolonej Ξ_m – transformat Z ciągów potęgowych $\phi_m(k) = k^m$. Prowadzi to do ważnego wniosku praktycznego. Wyliczenie transformaty $\tilde{E}_{I,i}(q)$ ciągu błędów pomiarowych $\tilde{e}_{I,i}(\tilde{k})$ przy użyciu (4.63) możliwe jest dla funkcji pobudzenia obiektu na 1. stopniu, która może być przedstawiona za pomocą ciągu w postaci wielomianowej

$$u_1(k) = c_m k^m + c_{m-1} k^{m-1} + \dots + c_0, \quad (4.66)$$

gdzie

c_m – parametry wielomianu.

Druga metoda organizacji pomiarów

Dysponując opisami ciągów pomiarów wykonanych przy zmieniającym się oraz niezmiennym a w trakcie i -tej serii pomiarowej, możliwe staje się obecnie wyznaczenie

oceny ciągu błędów pomiarowych popełnianych podczas wykonywania pomiarów z wykorzystaniem drugiej metody organizacji pomiarów na bieżąco.

Niech $e_{II,i}(k)$ oznacza błąd metody pomiarowej popełniany podczas wykonywania k -tego pomiaru w i -tej serii pomiarowej przeprowadzanej z wykorzystaniem drugiej metody organizacji pomiarów. Błąd ten określa się następująco:

$$e_{II,i}(k) = y_i(k) - y_{II,i}(k), \quad (4.67)$$

gdzie:

$y_i(k)$ – k -ty pomiar w i -tej serii wykonany na bieżąco, zgodnie z (4.6),

$y_{II,i}(k)$ – k -ty pomiar wykonany w i -tej serii wykonany z powtarzaniem wyjścia obiektu na 2. stopniu, zgodnie z (4.7).

Z tych samych powodów jak dla pierwszej metody organizacji pomiarów do oceny ciągu błędów metody popełnianych przy użyciu drugiej metody organizacji pomiarów zostanie wykorzystany pewien ciąg nieskończony o oczekiwanych własnościach. Poszukiwany jest taki ciąg $\tilde{e}_{II}(\tilde{k})$, który zawierać będzie wszystkie wyrazy ciągu błędów drugiej metody organizacji pomiarów $e_{II,i}(k)$, $i = 0, \dots, I - 1$, $k = 0, \dots, K - 1$, dla dowolnie dużych K i I .

Wyznaczenie ciągu błędów $\tilde{e}_{II}(\tilde{k})$ zostanie zrealizowane z wykorzystaniem równań (4.21) oraz (4.45) transformacjami ciągów odpowiednio $\tilde{y}(\tilde{k})$ oraz $\tilde{y}_{II}(\tilde{k})$. W zależności

$$\tilde{E}_{II}(q) = \tilde{Y}(q) - \tilde{Y}_{II}(q), \quad (4.68)$$

$\tilde{E}_{II}(q)$ stanowi transformacjami nieskończonego ciągu różnic pomiędzy wyjściem obiektu ze zmieniającym się parametrem a (obiekt mierzony na bieżąco) a wyjściem obiektu z niezmiennym w czasie wykonywania i -tej serii parametrem a . Wybierając dla pewnego i odpowiadające pomiarom k , $k = 0, \dots, K - 1$, wyrazy ciągu $\tilde{e}_{II}(\tilde{k})$, możliwe będzie wyznaczanie ciągu błędów pomiarowych $e_{II,i}(k)$, $k = 0, \dots, K - 1$, popełnianych w i -tej serii podczas wykonywania pomiarów za pomocą drugiej metody organizacji pomiarów. Zgodnie z przyjętą zależnością pomiędzy czasami próbkowania dla drugiej metody

organizacji pomiarów $\tau_2 = K\tau_1$, wybór odpowiednich wyrazów ciągu $\tilde{e}_{II}(\tilde{k})$ powinien zostać zrealizowany analogicznie jak (4.7)

$$e_{II,i}(k) = \tilde{e}_{II}(k + iK). \quad (4.69)$$

Podstawiając a następnie porządkując wyrazy otrzymujemy

$$\tilde{E}_{II}(q)A_1(q) = \chi_1 q^{n_1} (pq^{-p}\tilde{U}_1(q) - q^{-p+1} \frac{d}{dq}\tilde{U}_1(q) + H_U(q)), \quad (4.70)$$

gdzie:

$$H_U(q) = \sum_{k=0}^{K-1} q^{-k} \beta_{n-1,k},$$

$$A_1(q) = q^{n_1} + a_{11}q^{n_1-1} + a_{12}q^{n_1-2} + \dots + a_{1n_1},$$

$$\chi_1 = \lambda_2(b_{21} + \dots + b_{2m_2}),$$

$$\beta_{n-1,k} - \text{dane zależnością (4.42).}$$

Ciąg $\tilde{e}_{II}(\tilde{k})$ stanowi rozwiązanie równania różnicowego zapisanego w dziedzinie transformaty Z . Rozwiązanie równania tego typu sprowadza się do znalezienia transformaty odwrotnej funkcji zmiennej zespolonej $\tilde{E}_{II}(q)$

$$\tilde{E}_{II}(q) = \chi_1 q^{n_1} \frac{pq^{-p}\tilde{U}_1(q) - q^{-p+1} \frac{d}{dq}\tilde{U}_1(q) + H_U(q)}{A_1(q)} \quad (4.71)$$

dla $U_1(q) \in \Xi$.

Nieskończony ciąg $\tilde{e}_{II}(\tilde{k})$ zawiera wszystkie wyrazy ciągu błędów drugiej metody organizacji pomiarów $e_{II,i}(k)$, $i = 0, \dots, I - 1$, $k = 0, \dots, K - 1$. Stanowi on poszukiwaną ocenę ciągu błędów drugiej metody organizacji pomiarów $e_{II,i}(k)$, $i = 0, \dots, I - 1$, $k = 0, \dots, K - 1$, dla dowolnie dużych K i I .

4.3.3. Ograniczenie ciągów błędów metody pomiarowej

Ustalenie poszukiwanego górnego ograniczenia wartości bezwzględnych wyrazów ciągów $\tilde{e}_{I,i}(\tilde{k})$ i $\tilde{e}_{II}(\tilde{k})$ stanowiących oszacowania ciągów błędów metody pomiarowej przy

założeniu, że znane są wyłącznie ich transformaty w przypadku ogólnym jest trudne. Oznacza bowiem konieczność wyznaczenia ich transformat odwrotnych, co przy nieznajomości wszystkich parametrów transformat $\tilde{E}_{I,i}(q)$ oraz $\tilde{E}_{II}(q)$ może okazać się niemożliwe.

Korzystając z teorii funkcji zmiennej zespolonej możliwe jest jednak znalezienie pewnego ograniczenia wyrazów ciągów bez konieczności wyznaczania transformaty odwrotnej Z^{-1} . Wiadomo, że wyrazy pewnego ciągu $f(k)$, dla którego dysponujemy jego transformata $Z F(q)$ są współczynnikami szeregu Laurent'a funkcji zmiennej zespolonej $F(q)$ w obszarze $|q| > R$, gdzie R jest najmniejszym promieniem koła na zewnątrz którego funkcja $F(q)$ jest analityczna. Wobec tego można je wyrazić wzorem całkowym Cauchy'ego [45]

$$f(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{k-1} F(z) dz, \quad (4.72)$$

gdzie gładka, dodatnio skierowana krzywa C jest brzegiem ograniczonego obszaru zawierającego w sobie koło $|q| \leq R$.

W szczególnym przypadku, jeżeli C jest okręgiem $z = re^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$ o promieniu $r > R$, to

$$f(k) = r^k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(re^{jt}) e^{jkt} dt. \quad (4.73)$$

Stąd, biorąc pod uwagę ograniczoność całki krzywoliniowej funkcji zmiennej zespolonej ze względu na ograniczoność samej funkcji na krzywej całkowania [45] otrzymujemy ważne oszacowanie

$$|f(k)| \leq r^k \max_{|q|=r} |F(q)|, \text{ dla } r > R, \quad (4.74)$$

gdzie R jest promieniem koła, na zewnątrz którego funkcja $F(q)$ jest analityczna.

Zależność (4.74) pozwalającą dokonać oszacowania wartości bezwzględnych ciągu na podstawie wartości maksymalnej modułu funkcji będącej transformata tego ciągu wykorzystamy do analizy ciągów błędów metody pomiarowej. Po pierwsze należy ustalić obszar, na którym obie funkcje $\tilde{E}_{I,i}(q)$ oraz $\tilde{E}_{II}(q)$ są analityczne. Zakładając:

a.) obiekt na 1. stopniu jest stabilny i wszystkie bieguny jego transmitancji leżą wewnątrz okręgu jednostkowego,

b.) transformata Z pobudzenia na 1. stopniu spełnia warunek $U_1(q) \in \Xi$,

wówczas obie funkcje będą analityczne dla dowolnego $|q| > 1$.

Biorąc dla funkcji $\tilde{E}_{I,i}(q)$ i $\tilde{E}_{II}(q)$ ten sam promień okręgu $r_0 > 1$ otrzymujemy

oszacowania:

$$|\tilde{e}_{I,i}(k)| \leq r_0^k \max_{|q|=r_0} |\tilde{E}_{I,i}(q)|, \quad (4.75)$$

$$|\tilde{e}_{II}(k)| \leq r_0^k \max_{|q|=r_0} |\tilde{E}_{II}(q)| \quad (4.76)$$

wyrazów ciągów błędów $\tilde{e}_{I,i}(k)$ oraz $\tilde{e}_{II}(k)$. Przyjęcie dla obu oszacowań tego samego promienia r_0 ma istotne znaczenie praktyczne. W takim przypadku bowiem, o wzajemnej relacji górnego ograniczenia wartości bezwzględnych ciągów błędów pomiarowych stanowić będzie wyłącznie wzajemna relacja wielkości skalarnych $\max_{|q|=r_0} |\tilde{E}_{I,i}(q)|$ oraz $\max_{|q|=r_0} |\tilde{E}_{II}(q)|$.

Większa wartość funkcji maksimum modułu jednej z transformat oznacza, że wyrazy ciągu błędów, którego jest transformatą muszą być ograniczone z góry przez większą wartość. Czyli popelniane przez metodę pomiarową, z którą związana jest ta transformata błędy metody mogą być większe od błędów popelnianych podczas wykorzystania metody, dla której maksimum modułu transformaty przyjmuje mniejszą wartość. Rekomendacja wyboru jednej z dwu metod organizacji pomiarów zostanie udzielona tej metodzie, dla której wartość funkcji maksimum modułu transformaty związanej z metodą jest mniejsza. Pamiętając o zależności modułów funkcji $\tilde{E}_{I,i}(q)$ i $\tilde{E}_{II}(q)$ od ich parametrów, będących równocześnie parametrami obiektów na obu stopniach, parametrami sygnałów wejściowych oraz parametrami eksperymentu pomiarowego, rekomendacja może zostać sformułowana na podstawie znajomości własności obiektów, sygnałów oraz przebiegu eksperymentu. Jest to możliwe dlatego, że własności obiektów, sygnałów i przebieg eksperymentu mogą zostać wyrażone przez wartości właściwych im parametrów.

Uzmienniając względem parametrów wielomianu $A_1(q^{-1})$ możliwe będzie wyznaczenie funkcji:

$$\overline{\overline{E}}_{I,i}(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n_1}) = \max_{|q|=r_0} |\tilde{E}_{I,i}(q, a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n_1})|, \text{ dla } r_0 > 1, \quad (4.77)$$

$$\overline{\overline{E}}_{II}(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n_1}) = \max_{|q|=r_0} |\tilde{E}_{II}(q, a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n_1})|, \text{ dla } r_0 > 1, \quad (4.78)$$

pozwalających znaleźć ograniczenia modułów błędów pomiarowych obu metod organizacji pomiarów w funkcji parametrów wielomianu $A_1(q^{-1})$ obiektu na pierwszym stopniu. Pamiętając o parametrze K_2 funkcji $\tilde{E}_{I,i}(q)$ i $\tilde{E}_{II}(q)$, będącym współczynnikiem wzmocnienia statycznego obiektu na drugim stopniu oraz powołując się na rozważania przeprowadzone w punkcie 4.2.3., miary $\overline{\overline{E}}_{I,i}(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n_1})$ i $\overline{\overline{E}}_{II}(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n_1})$ ograniczenia modułów błędów pomiarowych zostają uzależnione od wartości stałej czasowej obiektu dynamicznego oraz współczynnika wzmocnienia statycznego. Dodatkowo, zwracając uwagę na zależność $\tilde{E}_{I,i}(q)$ i $\tilde{E}_{II}(q)$ od transformaty sygnału wejściowego $\tilde{U}_1(q)$ oraz parametrów eksperymentu N i K analiza funkcji (4.77) oraz (4.78) pozwoli sformułować oczekiwane rekomendacje wyboru metody i wyboru parametrów eksperymentu.

4.3.4. Rekomendacje na podstawie ograniczenia ciągów błędów

Dysponując funkcjami ograniczeń modułów wyrazów ciągów szacujących błędy metod pomiarowych obecnie możliwe jest sformułowanie postępowania mającego na celu wskazanie metody, która gwarantować będzie popełnianie mniejszych błędów metody pomiarowej, czyli sformułowanie rekomendacji wyboru metody pomiarowej.

Kroki prowadzące do sformułowania rekomendacji są następujące:

1. Przyjmij właściwości obiektu, dla którego mają zostać sformułowane rekomendacje. Przyjęte właściwości obiektu zapisz za pomocą jego parametrów.
2. Przyjmij sygnał wejściowy $\bar{u}_1(t)$ i parametr λ_2 dla których mają zostać sformułowane rekomendacje.
3. Przyjmij parametry eksperymentu: I, K, N, r_0 .
4. Dokonaj dyskretyzacji z taktiem τ_1 sygnału $\bar{u}_1(t)$ otrzymując ciąg $\tilde{u}_1(\tilde{k})$ a następnie wyznacz jego transformatę $\tilde{U}_1(z)$.

5. Wyznacz wartości funkcji (4.77) i (4.78).
6. Rekomenduj tę metodę organizacji pomiarów, której wyliczone w Kroku 5. ograniczenie przyjmuje mniejszą wartość.

Podobnie jak dla rekomendacji sformułowanych na podstawie badań symulacyjnych tak sformułowane rekomendacje mogą służyć dwóm celom. Po pierwsze możliwe jest wskazanie jednej z dwu metod organizacji pomiarów w pewnej szczególnej sytuacji, kiedy znamy właściwości obiektu dwustopniowego oraz znamy pobudzenia na obu stopniach dla przyjętych parametrów eksperymentu. Po drugie możliwe jest przy zastosowaniu przedstawionej procedury zaproponowanie bardziej ogólnych rekomendacji stosowania metod organizacji pomiarów. W tym celu należy przeprowadzić badania funkcji $\bar{E}_{I,i}(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n_1})$ i $\bar{E}_{II}(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n_1})$ dla różnych parametrów obiektów, sygnałów i eksperymentu.

4.3.5. Rekomendacje – szczególny przypadek

Obecnie zajmiemy się wyznaczeniem przebiegu zmienności funkcji (4.77) oraz (4.78) przy założeniu, że obiekt na 1. stopniu jest I rzędu. Rozważania przeprowadzimy dla dwóch różnych pobudzeń na 1. stopniu.

Niech

$$\bar{u}_1(t) = t$$

wówczas po dyskretyzacji

$$\tilde{U}_1(z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

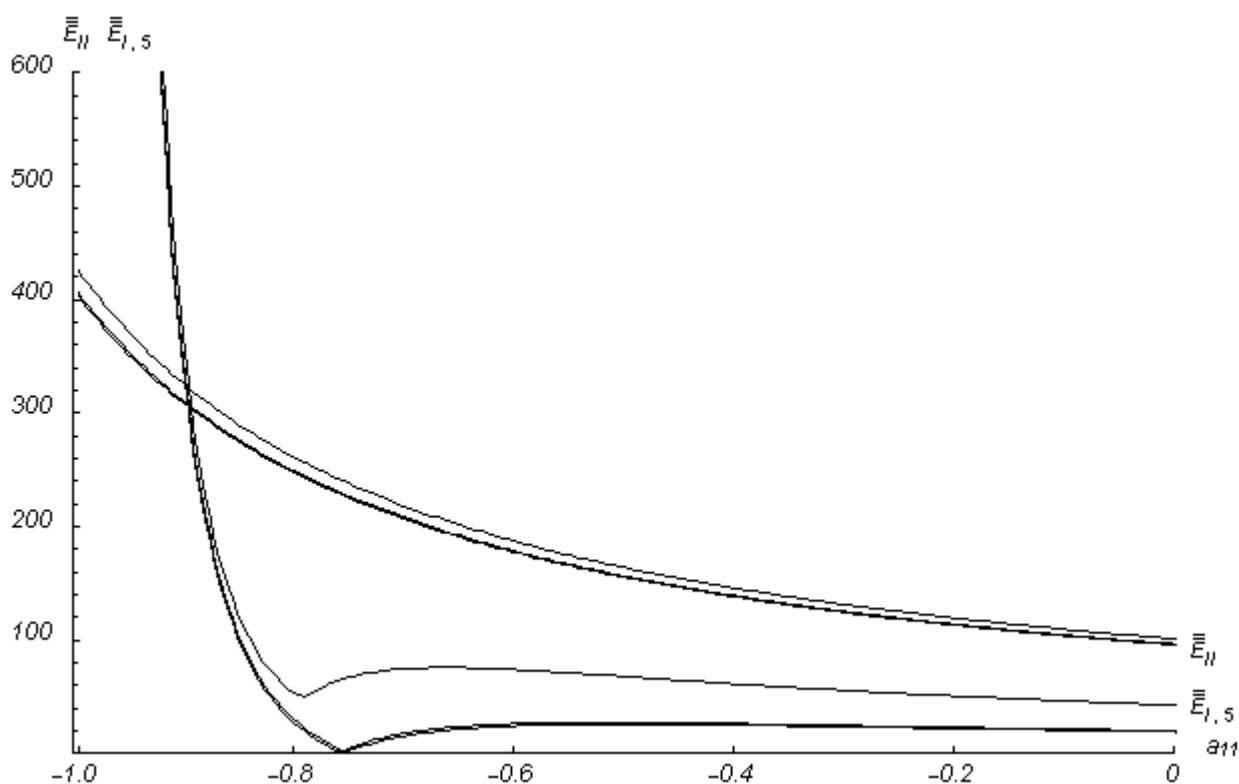
Funkcja $\tilde{U}_1(z)$ należy do klasy Ξ co oznacza, że do wyznaczenia transformat $\tilde{E}_{I,i}(q)$ i $\tilde{E}_{II}(q)$ można zastosować metodę przedstawioną w punkcie 4.3.2. Dysponując $\tilde{E}_{I,i}(q)$ oraz $\tilde{E}_{II}(q)$ kolejnym krokiem będzie wyznaczenie maksimów modułów tych transformat w funkcji parametru a_{11} dla zadanego $|q| = r_0$. Operację tę zrealizowano numerycznie przyjmując pewną wartość parametru r_0 . W nierównościach (4.75) – (4.76) wartość r_0 wpływa na dokładność przyjętego oszacowania, gdzie zwiększanie r_0 powoduje zmniejszanie dokładności. Ponieważ zależy nam, aby dokładność oszacowania na podstawie

którego formułujemy rekomendacje była jak największa, wartość parametru r_0 powinna zostać przyjęta możliwie mała, spełniając równocześnie warunek analityczności badanych funkcji. Obie rozpatrywane funkcje są analityczne dla dowolnego $|q| > 1$, z tego też względu do obliczeń przyjęto $r_0 = 1,05$ uzyskując poszukiwane przebiegi zmienności funkcji $\overline{\overline{E}}_{I,i}(a_{11})$ oraz $\overline{\overline{E}}_{II}(a_{11})$.

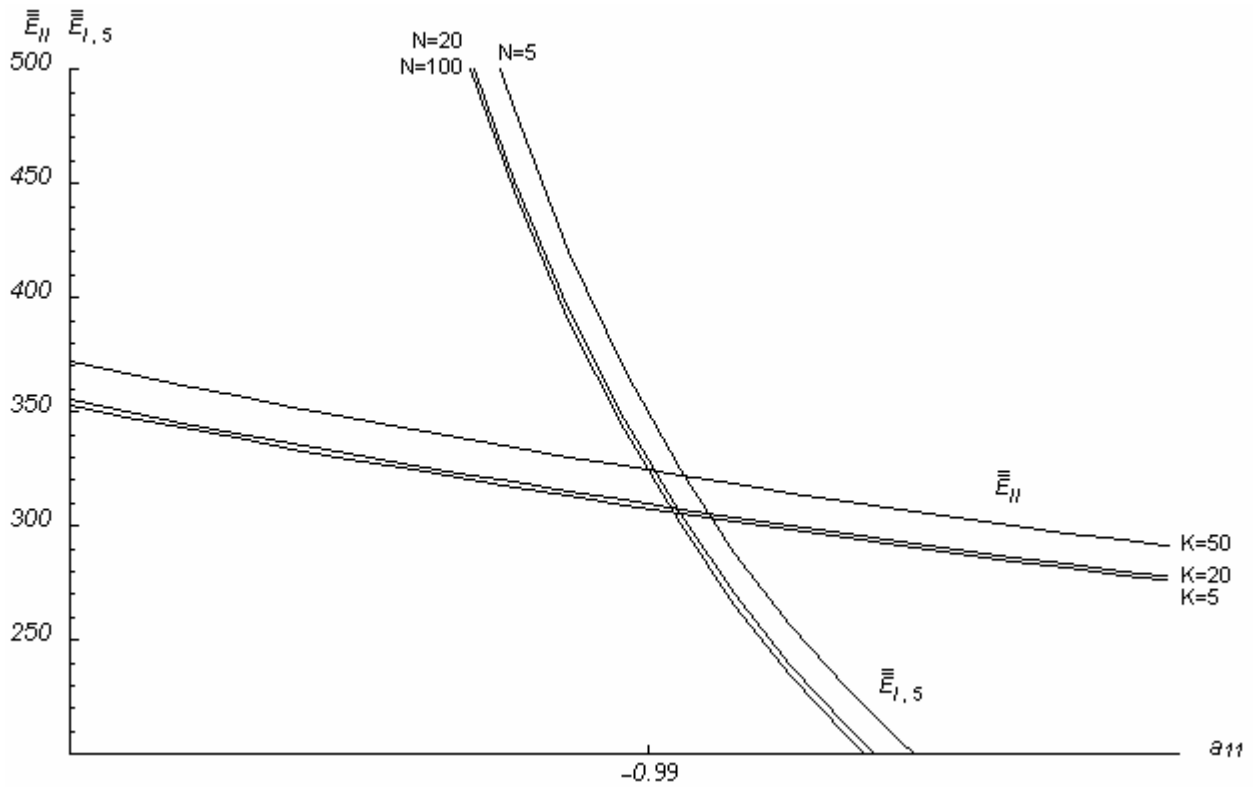
W podobny sposób wyznaczono przebiegi zmienności funkcji $\overline{\overline{E}}_{I,i}(a_{11})$ oraz $\overline{\overline{E}}_{II}(a_{11})$ dla pobudzenia

$$\bar{u}_1(t) = t^3.$$

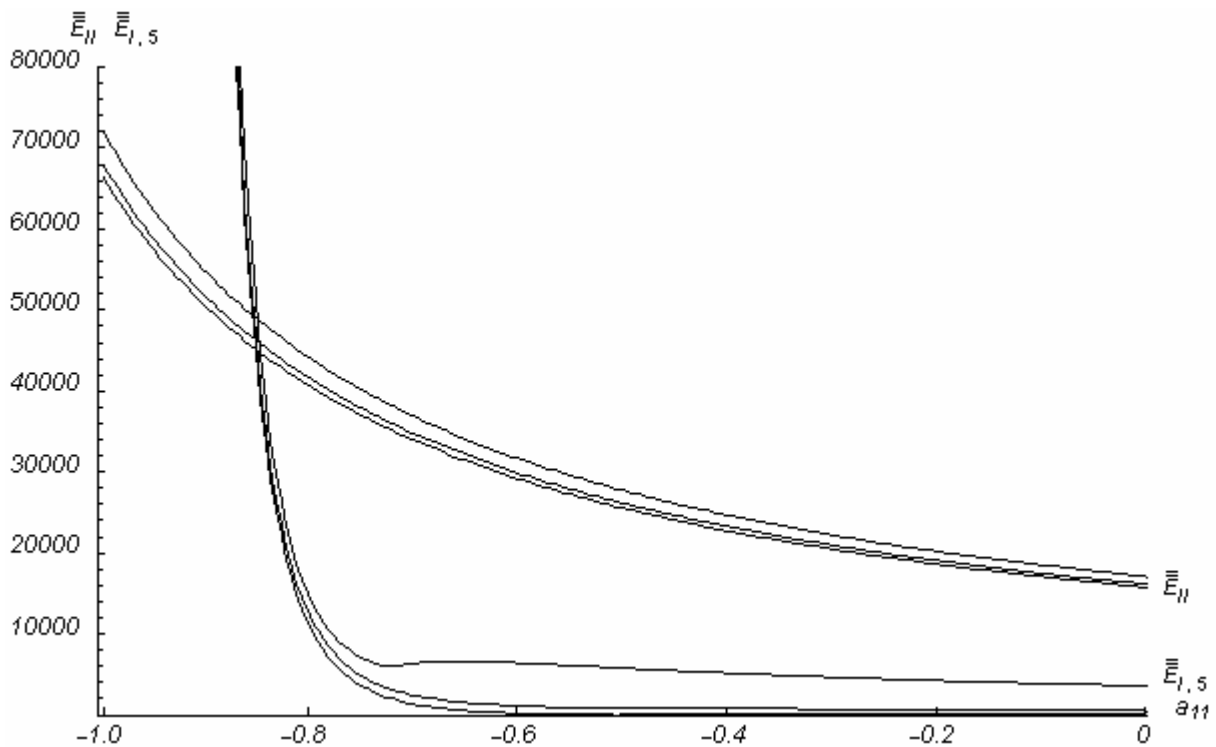
Poniżej przedstawiono uzyskane przebiegi zmienności funkcji $\overline{\overline{E}}_{I,i}(a_{11})$ oraz $\overline{\overline{E}}_{II}(a_{11})$. Dla funkcji $\overline{\overline{E}}_{I,i}(a_{11})$ przyjęto $i = 5$.



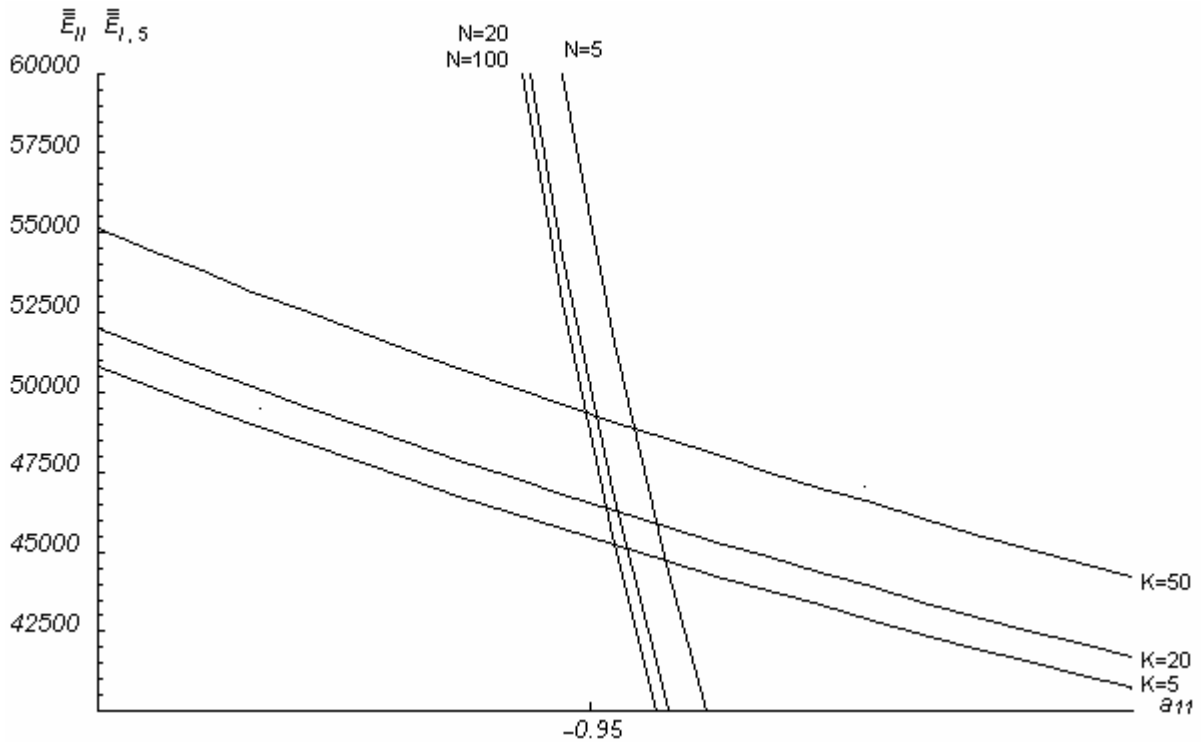
Rys. 4.1. Przebiegi: $\overline{\overline{E}}_{I,i}(a_{11})$, $\overline{\overline{E}}_{II}(a_{11})$ **dla:** $\bar{u}_1(t) = t$, $a_{11} \in (-1,0)$, $i = 5$.



Rys. 4.2. Przebiegi: $\bar{E}_{I,i}(a_{11}), \bar{E}_{II}(a_{11})$ dla: $\bar{u}_1(t) = t$, $a_{11} \in (-0.995, -0.985)$, $i = 5$.



Rys. 4.3. Przebiegi: $\bar{E}_{I,i}(a_{11}), \bar{E}_{II}(a_{11})$ dla: $\bar{u}_1(t) = t^3$, $a_{11} \in (-1, 0)$, $i = 5$.



Rys. 4.4. Przebiegi: $\bar{E}_{I,i}(a_{11}), \bar{E}_{II}(a_{11})$ **dla:** $\bar{u}_1(t) = t^3$, $a_{11} \in (-1.0, -0.9)$, $i = 5$

Uzyskane wyniki badania funkcji $\overline{\overline{E}}_{I,i}(a_{11})$ oraz $\overline{\overline{E}}_{II}(a_{11})$ prowadzą do następujących obserwacji:

1. Ograniczenie ciągu błędów pomiarowych obu metod organizacji $\overline{\overline{E}}_{I,i}(a_{11})$ oraz $\overline{\overline{E}}_{II}(a_{11})$ zależy od wartości parametru a_{11} obiektu na 1. stopniu. Dla obu metod zbliżanie się wartości parametru a_{11} do 0 – czyli zmniejszanie stałej czasowej obiektu na 1. stopniu – powoduje zmniejszenie ograniczenia błędów pomiarowych dając nadzieję na popełnianie mniejszych błędów.
Znacznie łagodniejszą zależnością od wartości parametru a_{11} charakteryzuje się ograniczenie ciągu błędów drugiej metody pomiarów. Pierwsza metoda organizacji pomiarów zależy od a_{11} w znacznie większym stopniu.
2. Począwszy od pewnej wartości progowej, w zależności od funkcji pobudzającej jest to około -0.99 dla pobudzenia $\overline{u}_1(t) = t$ oraz -0.95 dla pobudzenia $\overline{u}_1(t) = t^3$, zbliżanie się wartości parametru a_{11} do 0 powoduje uzyskiwanie znacznie mniejszych wartości przez funkcję $\overline{\overline{E}}_{I,i}(a_{11})$ w stosunku do $\overline{\overline{E}}_{II}(a_{11})$ (Rys. 4.1 i Rys. 4.3). Oznacza to, że dla obiektów o małej stałej czasowej na 1. stopniu należy się spodziewać dużo mniejszych błędów pomiarowych dla pierwszej metody organizacji pomiarów w odniesieniu do błędów popełnianych przy wykorzystaniu drugiej metody organizacji pomiarów.
3. Dla tej samej wartości progowej, zbliżanie wartości parametru a_{11} do -1 , co odpowiada zwiększaniu stałej czasowej obiektu na 1. stopniu, powoduje bardzo szybki wzrost wartości funkcji $\overline{\overline{E}}_{I,i}(a_{11})$ w stosunku do znacznie mniejszego wzrostu wartości funkcji $\overline{\overline{E}}_{II}(a_{11})$ (Rys. 4.1 i Rys. 4.3). Fakt ten należy interpretować jako oczekiwanie popełniania dużo mniejszych błędów przy zastosowaniu drugiej metody organizacji pomiarów dla obiektów na 1. stopniu o dużej wartości stałej czasowej.
4. Ogólnie, należy spodziewać się wysokiego poziomu błędów pomiarowych dla tych wartości parametru a_{11} , dla których funkcje $\overline{\overline{E}}_{I,i}(a_{11})$ i $\overline{\overline{E}}_{II}(a_{11})$ osiągają duże wartości. Pamiętając o współczynniku skalującym $\lambda_2 K_2$ występującym w obu funkcjach stosowanie pierwszej metody organizacji pomiarów dla obiektu na 1.

stopniu o dużej stałej czasowej będzie uzasadnione wyłącznie dla bardzo małych wartości iloczynu $\lambda_2 K_2$. W przypadku drugiej metody organizacji pomiarów, w całym przedziale zmienności parametru a_{11} funkcji $\overline{\overline{E}}_{II}(a_{11})$, należy oczekiwać wysokiego poziomu błędów pomiarowych dla obiektów na 2. stopniu o dużym wzmocnieniu statycznym.

5. Funkcja $\overline{\overline{E}}_{I,i}(a_{11})$ przyjmuje mniejsze wartości w stosunku do $\overline{\overline{E}}_{II}(a_{11})$ dla znacznie większego przedziału zmienności parametru a_{11} (Rys. 4.1 i Rys. 4.3). Świadczy to o większej uniwersalności pierwszej metody organizacji pomiarów.
6. Zwiększanie parametru N , czyli zwiększanie czasu próbkowania τ_2 w stosunku do czasu próbkowania τ_1 dla pierwszej metody organizacji pomiarów powoduje otrzymywanie mniejszych wartości funkcji $\overline{\overline{E}}_{I,i}(a_{11})$ dla dowolnej wartości parametru a_{11} . Spadek ten jest wyraźny do pewnej wartości progowej, dla badanych pobudzeń na 1. stopniu jest to wartość $N = 20$, po przekroczeniu której staje się bardzo niewielki.
7. Zwiększanie parametru K , czyli zwiększanie czasu próbkowania τ_2 na drugim stopniu w stosunku do czasu próbkowania τ_1 na stopniu pierwszym, dla drugiej metody organizacji pomiarów powoduje wzrost wartości funkcji ograniczenia błędów metody pomiarowej $\overline{\overline{E}}_{II}(a_{11})$. Dla pobudzenia $\bar{u}_1(t) = t$ na 1. stopniu wzrost ten jest pomijalnie mały aż do pewnej wartości progowej $K = 20$. Obserwowany wzrost jest jednak znacznie silniejszy dla szybko rosnącego sygnału wejściowego $\bar{u}_1(t) = t^3$ na 1. stopniu (Rys. 4.2 i Rys. 4.4).
8. Szybko rosnący sygnał wejściowy na 1. stopniu $\bar{u}_1(t) = t^3$ powoduje znaczne zwiększenie poziomu ograniczenia błędów pomiarowych popełnianych podczas wykorzystania drugiej metody organizacji pomiarów w stosunku do poziomu dla sygnału $\bar{u}_1(t) = t$. Równocześnie szybko rosnący sygnał $\bar{u}_1(t) = t^3$ nie spowodował równie dużego wzrostu ograniczenia błędów pomiarowych popełnianych w pierwszej metodzie organizacji pomiarów dla obiektów o odpowiednich dla tej metody wartości stałej czasowej na 1. stopniu. Jedynie w niewielkim stopniu

zwiększyła się wrażliwość (Rys. 4.1 i Rys. 4.3) tej metody pomiarowej na wydłużenie czasu próbkowania τ_2 względem czasu próbkowania τ_1 .

Nastąpiło również nieznaczące przesunięcie wartości progowej parametru a_{11} , po której następuje silna zmiana zachowania funkcji $\overline{\overline{E}}_{I,i}(a_{11})$, w stronę obiektów na pierwszym stopniu o mniejszej stałej czasowej (Rys. 4.2 i Rys. 4.4).

Rekomendacje wyboru metody oraz rekomendacje wyboru parametrów

Na podstawie powyższych obserwacji możliwe staje się obecnie sformułowanie następujących rekomendacji wyboru metod organizacji pomiarów na bieżąco:

1. Mniejsze błędy pomiarowe zostaną popełnione podczas wykorzystania pierwszej metody organizacji pomiarów, jeżeli na pierwszym stopniu obiektu dwustopniowego znajduje się obiekt o małej stałej czasowej.
2. Mniejsze błędy pomiarowe zostaną popełnione podczas wykorzystania drugiej metody organizacji pomiarów, jeżeli na pierwszym stopniu obiektu dwustopniowego znajduje się obiekt o dużej stałej czasowej. Należy tu zwrócić uwagę, że rekomendacja ta jest prawdziwa wyłącznie dla obiektów na pierwszym stopniu o bardzo dużej wartości stałej czasowej.
3. Wykorzystanie drugiej metody organizacji pomiarów jest uzasadnione w przypadku obiektu o małym współczynniku wzmocnienia statycznego na drugim stopniu i wolnozmiennego sygnału wejściowego na drugim stopniu.
4. Szybkozmienny sygnał na wejściu obiektu na pierwszym stopniu $\bar{u}_1(t)$ będzie powodował większe błędy pomiarowe podczas wykorzystania drugiej metody organizacji pomiarów.
5. Ze względu na uzyskiwanie mniejszych błędów pomiarowych w szerszym zakresie wartości stałej czasowej obiektu na pierwszym stopniu, w przypadku nikłej wiedzy a priori o własnościach tego obiektu proponuje się stosowanie pierwszej metody organizacji pomiarów.
6. Poleca się zwiększanie czasu próbkowania τ_2 w stosunku czasu próbkowania τ_1 dla pierwszej metody organizacji pomiarów.

7. Zwiększanie długości czasu τ_2 względem τ_1 dla drugiej metody organizacji pomiarów powoduje zwiększanie poziomu popełnianych błędów pomiarowych.

Rozdział 5. Badania symulacyjne

5.1. Wprowadzenie

Przedstawione w Rozdziale 4. rekomendacje wyboru metod organizacji pomiarów na bieżąco zostały sformułowane na podstawie analizy błędów pomiarowych popełnianych przez obie metody. Ponieważ rekomendacje przygotowano przy pewnych założeniach dotyczących postaci obiektu dwustopniowego oraz sygnałów wejściowych, konieczne jest ich skonfrontowanie z wynikami identyfikacji otrzymanymi podczas rzeczywistych eksperymentów pomiarowych. Z tego też względu zdecydowano się na przeprowadzenie szczegółowych badań symulacyjnych. Badania przeprowadzono dla różnych wartości stałej czasowej oraz wzmocnienia statycznego obiektów odpowiednio na pierwszym i drugim stopniu, szybkości zmian sygnałów wejściowych oraz różnych parametrów eksperymentu. Zbadano również działanie algorytmów identyfikacji dla innych sygnałów wejściowych niż użytych podczas formułowania rekomendacji.

Punkt 5.2. zawiera opis opracowanego na potrzeby badań symulacyjnych systemu identyfikacji.

W punkcie 5.3. opisano wykorzystany plan badań symulacyjnych. Przedstawiono badane obiekty, sygnały i parametry eksperymentu.

W punkcie 5.4. przedstawiono wyniki badań symulacyjnych działania rekurencyjnych algorytmów identyfikacji wykorzystujących pierwszą oraz drugą metodę organizacji pomiarów.

Punkt 5.5. zawiera omówienie wyników badań wraz z odniesieniami do zaproponowanych w Rozdziale 4 rekomendacji.

5.2. Symulator systemu identyfikacji dwustopniowej

Na potrzeby badań opracowano symulator dwustopniowego obiektu dynamicznego, pozwalający na przeprowadzenie eksperymentów pomiarowych odpowiadających zaproponowanym podejściom organizacji pomiarów. Uzyskane w wyniku eksperymentów pomiary posłużyły następnie do przeprowadzenia identyfikacji dwustopniowej badanych obiektów, realizowanej przez opracowany w tym celu identyfikator implementujący zaproponowane w pracy algorytmy identyfikacji. Symulator obiektu dwustopniowego wraz z identyfikatorem stanowi dwustopniowy system identyfikacji, którego obserwacja działania pozwala na szczegółową ocenę opracowanych algorytmów identyfikacji oraz sformułowanych rekomendacji wyboru metody organizacji pomiarów i parametrów eksperymentu.

5.2.1. Wejście systemu identyfikacji

Pobudzenia właściwe każdemu ze stopni symulowanego obiektu dwustopniowego są wynikiem kompozycji elementów pewnego zestawu podstawowych funkcji składowych czasu ciągłego. Dozwolone są m.in. następujące funkcje podstawowe: funkcja stała, funkcja liniowa, funkcja skoku jednostkowego, funkcja sinusoidalna, funkcja impulsowa o zadanych parametrach, funkcja stanowiąca realizację ciągłego procesu stochastycznego o zadanych własnościach. Kompletny zestaw funkcji pobudzeń zawiera biblioteka `simulink/Sources` środowiska symulacyjnego Simulink MATLAB 5.0.

Kompozycja jest przeprowadzana przy wykorzystaniu elementów zestawu operacji liniowych (m.in. sumy, mnożenia przez zadaną stałą) oraz nieliniowych (m.in. iloczynu, wartości bezwzględnej). Kompletnie zestawy zawierają odpowiednio biblioteki środowiska Simulink MATLAB 5.0 `simulink/Linear` oraz `simulink/Nonlinear`.

Opisy **obiektów dynamicznych na obu stopniach** podawane są w postaci transmitancji operatorowej zmiennej zespolonej. Transmitancja określana jest przez zestaw współczynników wielomianów licznika i mianownika transmitancji. Zakłada się, że transmitancje opisują obiekty czasu ciągłego, dla których w wyniku identyfikacji wyznaczane są modele dyskretne.

Dodatkowo, określa się następujące **parametry** systemu symulacji:

τ_p – czas próbkowania pobudzeń na obu stopniach,

τ_1 – takt pomiarowy na 1. stopniu,

τ_2 – takt pomiarowy na 2. stopniu,

T_r – czas trwania eksperymentu pomiarowego,

I – liczba serii pomiarowych pierwszej metody organizacji pomiarów, zadanej przy spełnionym warunku

$$I\tau_1 < \tau_2,$$

p – indeks współczynnika wielomianu równania obiektu na 1. stopniu, którego wartość stanowi wyjście obiektu na 2. stopniu.

Zakłada się, że wartości: τ_1 , τ_2 i T_r stanowią wielokrotność τ_p .

Identyfikacja przeprowadzana jest z wykorzystaniem wskazanej **metody organizacji pomiarów**.

5.2.2. Wyjście systemu identyfikacji

Opracowany identyfikator dostarcza estymaty parametrów identyfikowanych obiektów na obu stopniach w postaci wyliczonych współczynników wielomianów równań obiektów:

$A_1(q^{-1})$, $B_1(q^{-1})$, $A_2(q^{-1})$, $B_2(q^{-1})$. Dodatkowo, prezentowany jest przebieg wyliczanego w kolejnych taktach identyfikacji na 1. stopniu zmiennego parametru $\hat{a}(k)$.

Podstawę do oceny przeprowadzanej identyfikacji stanowią prezentowane wartości rzeczywistych współczynników równań obiektów na obu stopniach. Ponieważ symulator zakłada opis symulowanego obiektu dwustopniowego w dziedzinie czasu ciągłego, konieczna była dla uzyskania możliwości porównania dyskretyzacja ciągłych opisów na obu stopniach. Dyskretyzację przeprowadzono przy użyciu metody aproksymacji sygnału wejściowego stosując interpolator zerowego rzędu. Czasy dyskretyzacji na każdym ze stopni obiektu dwustopniowego są równe taktom pomiarowym na odpowiednich stopniach. Dodatkowo, prezentowany jest otrzymany w wyniku symulacji, podlegający estymacji, przebieg zmienności parametru $a(k)$.

Opracowany system identyfikacji pozwala również na przeprowadzenie porównania własności symulowanych obiektów z własnościami wyznaczonych w wyniku identyfikacji

modeli. Możliwe jest porównanie rozkładu zer i biegunów oraz porównanie odpowiedzi na pobudzenie skokowe obiektu i modelu na 2. stopniu.

5.2.3. Budowa systemu identyfikacji

Dwustopniowy system identyfikacji zaimplementowano w środowisku obliczeniowym pakietu MATLAB 5.0. Do budowy wykorzystano środowisko symulacyjne Simulink oraz zestaw funkcji 'Identification Toolbox'.

Pobudzenia symulowanych obiektów na obu stopniach są przygotowywane jako wynik symulacji modelu środowiska Simulink. Model może zostać zbudowany z dowolnych elementów bibliotek środowiska Simulink. Jedynym warunkiem wykorzystania przygotowanych pobudzeń na potrzeby symulacji działania obiektu dwustopniowego jest zapis uzyskanych przebiegów w zmiennych wektorowych u_1 i u_2 odpowiednio dla pierwszego i drugiego stopnia. Do tego celu używa się elementu `To_Workspace` standardowej biblioteki `simulink/Sinks`. W zmiennych u_1 i u_2 zapisuje się pobudzenia poddane dyskretyzacji z taktem τ_p .

Implementację symulatora oraz identyfikatora obiektu dwustopniowego zapisano z podziałem na pliki źródłowe.

Plik `startSimu.m` stanowi moduł startowy systemu identyfikacji. Jego uruchomienie z poziomu okna komend środowiska MATLAB spowoduje wykonanie symulacji oraz identyfikacji obiektu dwustopniowego dla przyjętych pobudzeń, postaci obiektów na obu stopniach, parametrów oraz wybranej metody organizacji pomiarów.

Plik `inputSimu.m` zawiera opisy symulowanych obiektów na obu stopniach, przyjęte parametry oraz wybór metody organizacji pomiarów.

Plik `plantSimu.m` stanowi zapis implementacji symulatora obiektu dwustopniowego. Ze względu na przejrzystość oraz łatwość implementacji symuluje się działanie dyskretnego obiektu dwustopniowego. W kontekście dysponowania wyłącznie ciągłymi opisami obiektów na obu stopniach konieczne jest przeprowadzenie ich dyskretyzacji, do której wykorzystuje się metodę aproksymacji sygnału wejściowego wykonywaną z taktem τ_p .

W pliku `identSimu.m` zapisano zaproponowane algorytmy rekurencyjnej identyfikacji dwustopniowej. Plik zawiera również równania pomiarów właściwe każdej z metod

organizacji pomiarów oraz implementację prezentacji otrzymanych wyników estymacji wraz z porównaniem własności obiektu oraz modelu na 2. stopniu.

5.2.4. Działanie

Działanie opracowanego systemu identyfikacji zostało podzielone na następujące kolejno po sobie etapy.

Przygotowanie pobudzeń. W wyniku przeprowadzenia tego etapu w zmiennych u_1 i u_2 powinny zostać zapisane, poddane dyskretyzacji z taktem τ_p , pobudzenia obiektów na obu stopniach.

Dyskretyzacja. Na tym etapie ciągle opisy poddawanych symulacji obiektów na obu stopniach zostają przekształcone do postaci opisów czasu dyskretnego. Dyskretyzacji dokonuje się z taktem τ_p .

Symulacja. Dla otrzymanych w poprzednich etapach dyskretnych pobudzeń oraz opisów obiektów na obu stopniach przeprowadza się symulację działania obiektu dwustopniowego. W jej wyniku otrzymuje się dyskretne odpowiedzi obiektów na pierwszym oraz drugim stopniu, zapisane odpowiednio w zmiennych y oraz a . Ciąg odpowiedzi obiektu na 2. stopniu stanowi dyskretny odpowiednik niemierzalnego w obiekcie rzeczywistym, ciągłego sygnału wewnętrznego $\bar{a}(t)$, który reprezentuje wpływ obiektu na 2. stopniu na działanie obiektu na stopniu pierwszym. Zapisany odpowiednio z taktem τ_2 będzie podlegającym estymacji na pierwszym stopniu przebiegiem zmiennego parametru $a(k)$.

Pomiary. Przetwarzając zgodnie z równaniami pomiarów (4.1) i (4.6) zawartości zmiennych: u_1 , u_2 i y otrzymuje się na tym etapie pomiary stanowiące podstawę działania algorytmów identyfikacji na obu stopniach.

Równania pomiarów wymagają określenia parametrów: N , K i I . Parametry te wyznaczone są w różny sposób dla każdej z obu metod organizacji pomiarów.

Dla pierwszej metody organizacji pomiarów:

$$K = \left\lceil \frac{T_r}{\tau_2} \right\rceil + 1,$$

$$N = \left\lceil \frac{\tau_2}{\tau_p} \right\rceil + 1,$$

gdzie $\lceil \cdot \rceil$ jest operacją wyznaczenia części całkowitej.

Wartość I jest zadana.

Dla drugiej metody organizacji pomiarów:

$$K = \left\lceil \frac{\tau_2}{\tau_1} \right\rceil + 1,$$

$$I = \left\lceil \frac{T_r}{\tau_2} \right\rceil + 1.$$

Dodatkowo, na potrzeby oceny działania algorytmu identyfikacji na 1. stopniu przetwarza się zawartość zmiennej wektorowej \mathbf{a} , uzyskując stanowiący odniesienie przebieg zmienności parametru $a(k)$.

Identyfikacja. Otrzymane pomiary wejścia i wyjścia symulowanego obiektu dwustopniowego zostają na tym etapie wykorzystane do przeprowadzenia identyfikacji obiektu dwustopniowego. Identyfikacja jest przeprowadzana przez zaproponowane w punktach 3.3.1. i 3.3.2. algorytmy rekurencyjnej identyfikacji dwustopniowej.

Prezentacja. Wyniki estymacji parametrów obiektów na obu stopniach wraz z wartościami parametrów obiektów poddanych symulacji są prezentowane na tym etapie. Przedstawione zostają przebiegi zmienności parametru $a(k)$: estymowany na pierwszym stopniu oraz wyznaczony w wyniku symulacji. Prezentacja obu przebiegów może zostać przeprowadzona dla danego przedziału czasowego lub zadanej liczby taktów identyfikacji na stopniu pierwszym.

Dodatkowo, prezentowany jest rozkład zer i biegunów oraz odpowiedzi na pobudzenie skokowe symulowanego obiektu i wyznaczonego modelu na 2. stopniu.

5.3. Plan badań symulacyjnych

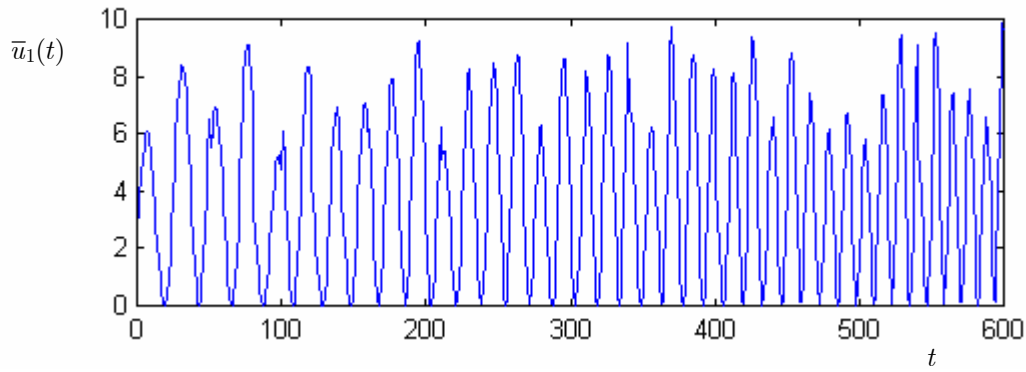
Badania symulacyjne wykonano badając wpływ szeregu własności obiektów, pobudzeń oraz parametrów eksperymentu pomiarowego na wyniki identyfikacji przeprowadzanej na obu stopniach. Wyniki identyfikacji poddano badaniom ze względu na wpływ:

1. Szybkości zmian sygnału wejściowego na 1. stopniu.
2. Szybkości zmian sygnału wejściowego na 2. stopniu.
3. Wartości stałej czasowej obiektu na 1. stopniu.
4. Wartości współczynnika wzmocnienia statycznego obiektu na 2. stopniu.
5. Metody organizacji pomiarów.
6. Parametrów eksperymentu pomiarowego: N dla pierwszej metody organizacji pomiarów oraz K dla drugiej metody organizacji pomiarów.

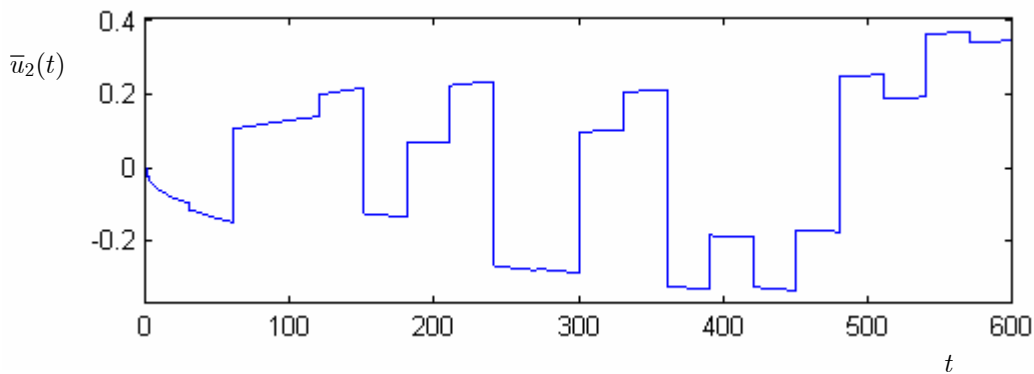
Wyniki identyfikacji oceniano oddzielnie dla obu stopni. Ze względu na różne ilości pomiarów wykonywane w ramach przeprowadzanych badań oraz różne takty działania otrzymanych modeli konieczne było zapewnienie odpowiedniej metody porównania działania algorytmów identyfikacji. Na 1. stopniu oceny dokonano ze względu na otrzymywane estymaty parametrów oraz zgodność wyliczanego przebiegu $\hat{a}(k)$ względem przebiegu rzeczywistego $a(k)$. Na 2. stopniu oprócz estymat parametrów badano zgodność własności otrzymanego w wyniku identyfikacji modelu – obiektu z estymatami parametrów – z własnościami obiektu z parametrami rzeczywistymi. Zbadano rozkład zer i biegunów modelu (oznaczonych na rysunkach jaśniejszym odcieniem) i obiektu (oznaczonych na rysunkach ciemniejszym odcieniem) oraz odpowiedzi na pobudzenie skokowe modelu (oznaczone jaśniejszym odcieniem) oraz obiektu (oznaczone ciemniejszym odcieniem). Pozwoliło to na szczegółową ocenę wpływu badanych własności i parametrów na otrzymywane w wyniku identyfikacji modele.

Aby móc przeprowadzić porównanie obu metod, do symulacji użyto tych samych pobudzeń oraz obiektów na pierwszym i drugim stopniu. Użyto ciągłych obiektów oraz ciągłych pobudzeń, które następnie na potrzeby porównań przedstawiono w dziedzinie czasu dyskretnego.

Do przeprowadzenia badań użyto następujących pobudzeń na 1. i 2. stopniu.



Rys. 5. 1. Przebieg sygnału $\bar{u}_1(t)$.



Rys. 5. 2. Przebieg sygnału $\bar{u}_2(t)$.

Sygnał $\bar{u}_1(t)$ stanowi przebieg uzyskany w wyniku wyznaczenia iloczynu funkcji sinusoidalnej ze zwiększającą się częstotliwością i ciągłego, stacjonarnego procesu stochastycznego o rozkładzie jednostajnym w obszarze $(3;5)$. Częstotliwość sygnału sinusoidalnego zmieniała się w zakresie $(0,04;0,08)$ [Hz].

Zwiększenie szybkości zmian sygnału na 1. stopniu zrealizowano przez zmniejszenie czasu po którym sygnał osiągał częstotliwość maksymalną. Przebiegowi szybkozmiennemu odpowiadał czas $\tau_{\max} = 1500$ [s]. Przebiegowi wolnozmiennemu odpowiadał czas $\tau_{\max} = 4500$ [s].

$$\bar{u}_1(t) = \bar{u}_{1,1}(t)\bar{u}_{1,2}(t), \quad (5.1)$$

gdzie:

$$\bar{u}_{1,1}(t) = \sin(\omega_{1,1}(t)) + 1,$$

$$\omega_{1,1}(t) = \begin{cases} \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\tau_{\max}} t^2 + \omega_{\min} t, & \text{dla } t < \tau_{\max}, \\ \omega_{\max} t, & \text{dla } t \geq \tau_{\max}, \end{cases}$$

$$\omega_{\max} = 2,512,$$

$$\omega_{\min} = 0,0628,$$

$$\tau_{\max} \in \{1500; 4500\},$$

$\bar{u}_{1,2}(t)$ – realizacja stacjonarnego ciągłego procesu stochastycznego $U_{1,2}(t)$ o gęstości prawdopodobieństwa $f_{u_{1,2}}(x)$,

$$f_{u_{1,2}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{l_{\max} - l_{\min}}, & \text{dla } l_{\min} < x < l_{\max}, \\ 0, & \text{dla pozostałych } x, \end{cases}$$

$$l_{\min} = 3,$$

$$l_{\max} = 5.$$

Sygnal $\bar{u}_2(t)$ stanowi przebieg uzyskany w wyniku wyznaczenia iloczynu funkcji liniowej o współczynniku proporcjonalności 0,3 i funkcji aproksymującej dyskretny, stacjonarny proces stochastyczny o rozkładzie jednostajnym w obszarze $(-1;1)$. Aproksymację funkcją ciągłą dyskretnego procesu stochastycznego uzyskano z wykorzystaniem interpolacji zerowego rzędu. Czas τ_{int} , w którym aproksymujący sygnał prostokątny nie ulegał zmianie posłużył do uzyskiwania sygnałów o pożądanej szybkości zmian. Jako sygnał szybkozmienny przyjęto taki, w którym czas ten wynosił $\tau_{\text{int}} = 30$ [s]. Sygnał wolnozmienny odpowiadał czasowi $\tau_{\text{int}} = 60$ [s].

$$\bar{u}_2(t) = \bar{u}_{2,1}(t)\bar{u}_{2,2}(t), \quad (5.2)$$

gdzie:

$$\bar{u}_{2,1}(t) = A_{2,1}t,$$

$$A_{2,1} = 0,3,$$

$$\bar{u}_{2,2}(t) = u_{2,2}(k)(\mathbf{1}(t - k\tau_{\text{int}}) - \mathbf{1}(t - (k+1)\tau_{\text{int}})),$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\tau_{\text{int}} \in \{50; 100\},$$

$u_{2,2}(k)$ – realizacja stacjonarnego dyskretnego procesu stochastycznego $U_{2,2}(k)$ o gęstości prawdopodobieństwa $f_{u_{2,2}}(x)$,

$$f_{u_{2,2}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{l_{\max} - l_{\min}}, & \text{dla } l_{\min} < x < l_{\max}, \\ 0, & \text{dla pozostałych } x, \end{cases}$$

$$l_{\min} = -1,$$

$$l_{\max} = 1.$$

Ciągłe sygnały $\bar{u}_1(t)$ oraz $\bar{u}_2(t)$ zmierzono dla każdej z metod z takim samym taktem pomiarowym $\tau_p = 0,3$ [s]. Czasy próbkowania właściwe metodom organizacji pomiarów stanowią wielokrotności taktu pomiarowego. Dla pierwszej metody organizacji pomiarów: $\tau_1 = \tau_p$, $\tau_2 = N\tau_p$, $N \in \{20; 30\}$. Dla drugiej metody organizacji pomiarów: $\tau_1 = 5\tau_p$, $\tau_2 = 5K\tau_p$, $K \in \{10; 20\}$. Dla obu metod organizacji pomiarów przyjęto czas trwania eksperymentu $T_r = 600$ [s].

Dodatkowo, ilość serii pomiarowych na 1. stopniu dla pierwszej metody organizacji pomiarów została ustalona na poziomie $I = 10$.

Dla pierwszej metody organizacji pomiarów, mając na uwadze zapewnienie czytelności, prezentację przebiegów $\hat{a}(k)$ i $a(k)$ ograniczono do 50 taktów identyfikacji na stopniu pierwszym. Dla drugiej metody organizacji pomiarów przebiegi $\hat{a}(k)$ i $a(k)$ prezentowane są w całym przedziale czasowym eksperymentu T_r .

Dla obu metod użyto tych samych obiektów na obu stopniach.

Obiekt na 1. stopniu o dużej stałej czasowej:

$$W_{1,w}(s) = \frac{-0,02218s + 0,005549}{s^2 + 0,1084s + 0,001187},$$

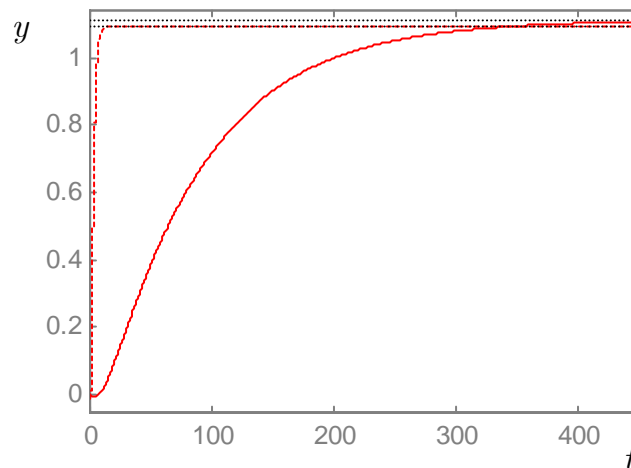
$$T_D = 0,9285.$$

Obiekt na 1. stopniu o małej stałej czasowej:

$$W_{1,s}(s) = \frac{-0,1836s + 0,5984}{s^2 + 1,502s + 0,5454},$$

$$T_D = 0,0640.$$

Własności dynamiczne obu obiektów reprezentuje reakcja na pobudzenie skokowe. Linia przerywana odpowiada $W_{1,s}(s)$. Linia ciągła odpowiada $W_{1,w}(s)$.



Rys. 5. 3. Odpowiedź na pobudzenie skokowe obiektów na 1. stopniu.

Obiekt na 2. stopniu o małym współczynniku wzmocnienia statycznego:

$$W_{2,w}(s) = \frac{s + 22,03}{s + 10,8},$$

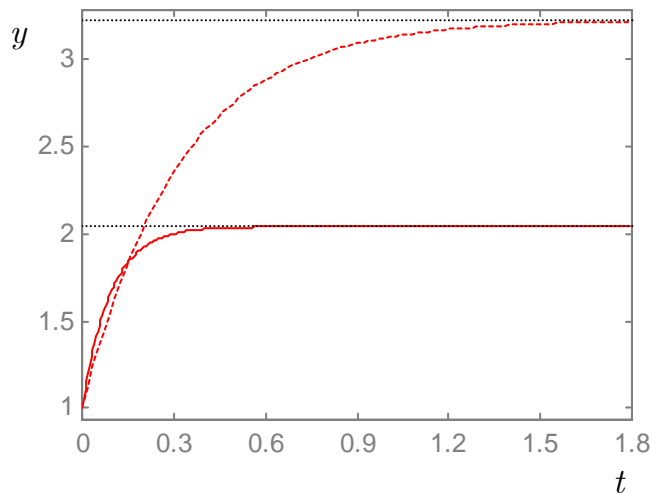
$$K_M = 2,1855.$$

Obiekt na 2. stopniu o dużym współczynniku wzmocnienia statycznego:

$$W_{2,s}(s) = \frac{s + 10,07}{s + 3,121},$$

$$K_M = 3,2265.$$

Własności dynamiczne obu obiektów reprezentuje reakcja na pobudzenie skokowe. Linia przerywana odpowiada $W_{2,s}(s)$. Linia ciągła odpowiada $W_{2,w}(s)$.



Rys. 5. 4. Odpowiedź na pobudzenie skokowe obiektów na 2. stopniu.

Podstawę kwalifikacji stałej czasowej oraz współczynnika wzmocnienia statycznego jako dużego bądź małego stanowią uzyskiwane zmiany sygnału na wyjściu obiektu w odniesieniu do długości taktu pomiarowego.

Poniżej przedstawiono przykładową zawartość pliku `inputSimu.m` konfigurującego działanie opracowanego systemu identyfikacji dla pierwszej metody organizacji pomiarów, obiektu na pierwszym stopniu z małą stałą czasową, obiektu na drugim stopniu z dużą wartością współczynnika wzmocnienia statycznego oraz taktów pomiarowych $\tau_1 = 0,3$ [s] i $\tau_2 = 6$ [s]. Czas próbkowania ustalony na poziomie $\tau_p = 0,3$ [s] oraz czas trwania eksperymentu $T_r = 600$ [s].

Plik `inputSimu.m`:

```
tau_p = 0.3;           tau_1 = 0.3;
tau_r = 600;          tau_2 = 6;
A_1 = [-0.1836 0.5984];   B_1 = [1 1.502 0.5454];
A_2 = [1 10.07];         B_2 = [1 3.121];
MOP = 1;
```

Zestawienie przeprowadzonych badań symulacyjnych.

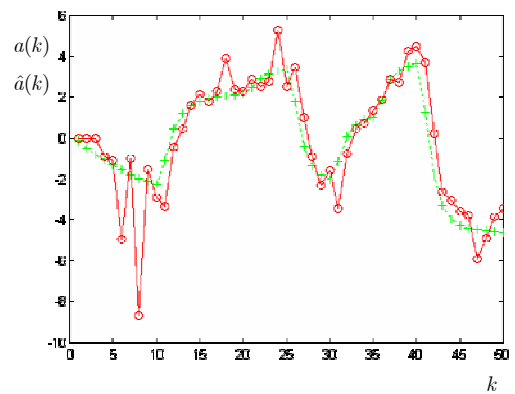
SYGNAŁ WEJ. OB. 1.ST.	SYGNAŁ WEJ. OB. 2.ST.	METODA POMIARÓW	N	K	STAŁA CZAS. OB. 1.ST.	WZM. STAT. OB. 2.ST.	NR STRONY
S	W	I	20	-	M	D	113
S	W	I	20	-	M	M	114
S	W	I	20	-	D	D	115
S	W	I	20	-	D	M	116
S	W	I	30	-	M	D	117
S	W	I	30	-	M	M	118
S	W	I	30	-	D	D	119
S	W	I	30	-	D	M	120
S	W	II	-	10	M	D	121
S	W	II	-	10	M	M	122
S	W	II	-	10	D	D	123
S	W	II	-	10	D	M	124
S	W	II	-	20	M	D	125
S	W	II	-	20	M	M	126
S	W	II	-	20	D	D	127
S	W	II	-	20	D	M	128
S	S	I	20	-	M	D	129
S	S	I	20	-	M	M	130
S	S	I	20	-	D	D	131
S	S	I	20	-	D	M	132
W	W	I	20	-	M	D	133
W	W	I	20	-	M	M	134
W	W	I	20	-	D	D	135
W	W	I	20	-	D	M	136
W	W	II	-	20	M	D	137
W	W	II	-	20	M	M	138
W	W	II	-	20	D	D	139
W	W	II	-	20	D	M	140
S	S	II	-	20	M	D	141
S	S	II	-	20	M	M	142
S	S	II	-	20	D	D	143
S	S	II	-	20	D	M	144

Tablica 5. 1. Wykonane badania symulacyjne.

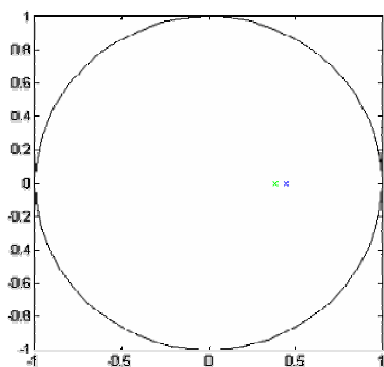
5.4. Badania rekurencyjnego algorytmu identyfikacji dwustopniowej

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-0.0689	0.0003	1.2314	0.1089
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-0.0434	0.0251	0.2810	-0.2338
$\tau_{o,1}$			
6			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}	b_{21}		
-0.4494	5.5071		
\hat{a}_{21}	\hat{b}_{21}		
-0.3842	6.4004		
$\tau_{o,2}$			
6			

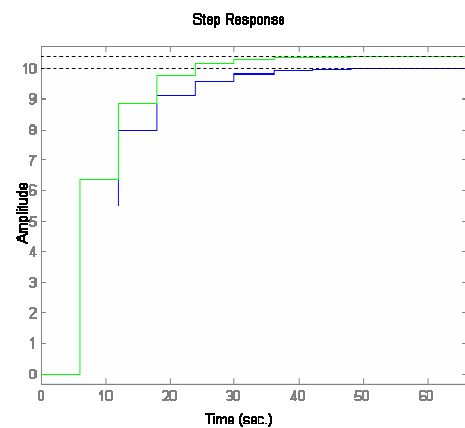
Tablica 5. 1.



Rys. 5. 1.



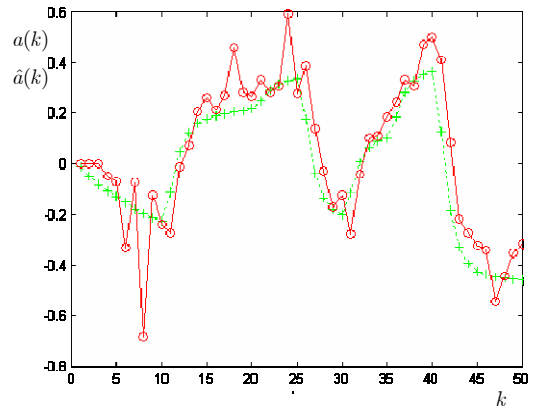
Rys. 5. 3.



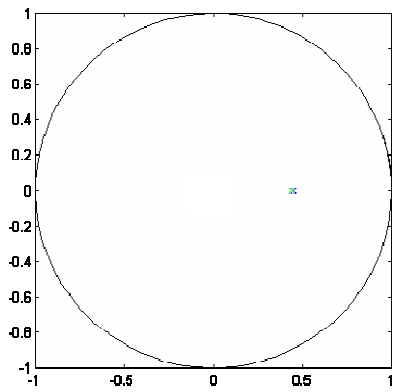
Rys. 5. 2.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-0.0689	0.0003	1.2314	0.1089
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-0.0414	0.0224	0.0284	-0.0176
$\tau_{o,1}$			
6			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.4494		0.5507	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
-0.4382		0.5995	
$\tau_{o,2}$			
6			

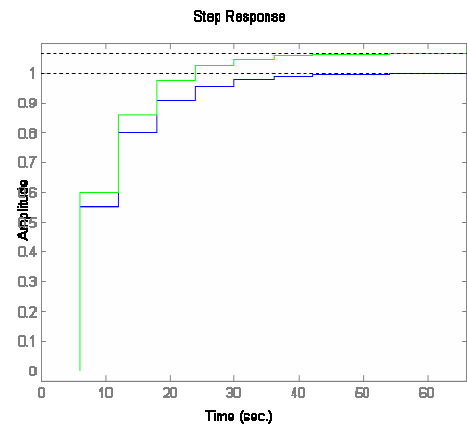
Tablica 5. 2.



Rys. 5. 4.



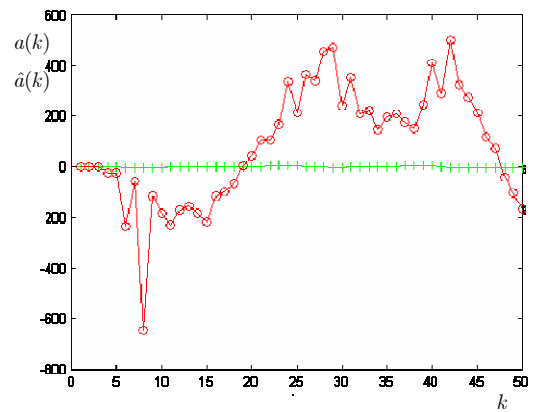
Rys. 5. 6.



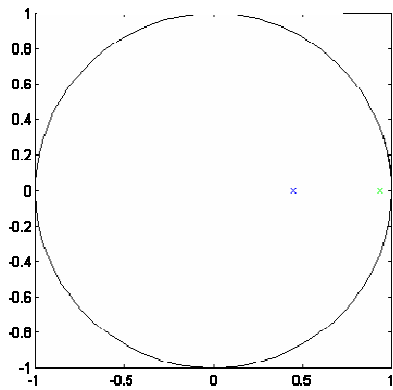
Rys. 5. 5.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-1.4906	0.5219	-0.0161	0.1624
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-0.0415	0.0145	-1.0581	13.1726
$\tau_{o,1}$			
6			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.4494		5.5071	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
-0.9333		144.0611	
$\tau_{o,2}$			
6			

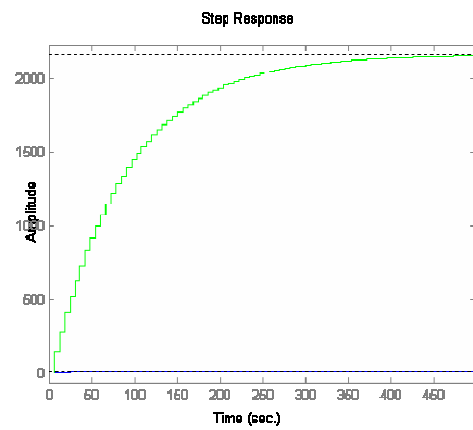
Tablica 5. 3.



Rys. 5. 8.



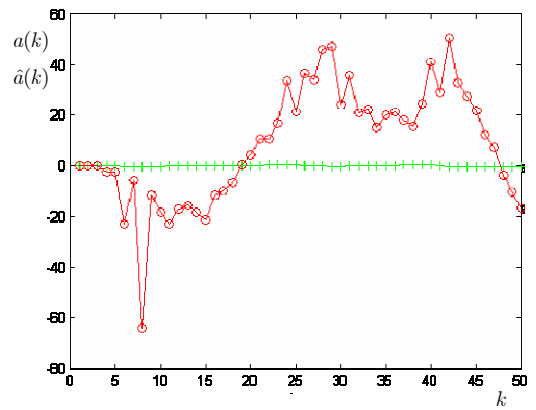
Rys. 5. 7.



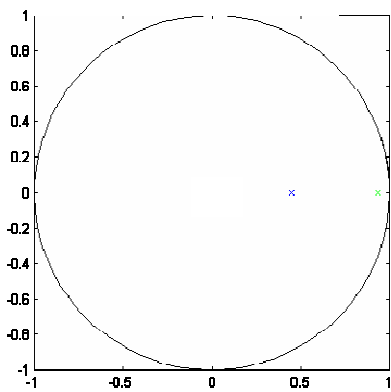
Rys. 5. 9.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-1.4906	0.5219	-0.0161	0.1624
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-0.0416	0.0146	-0.1067	1.3169
$\tau_{o,1}$			
6			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.4494		0.5507	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
-0.9335		14.4063	
$\tau_{o,2}$			
6			

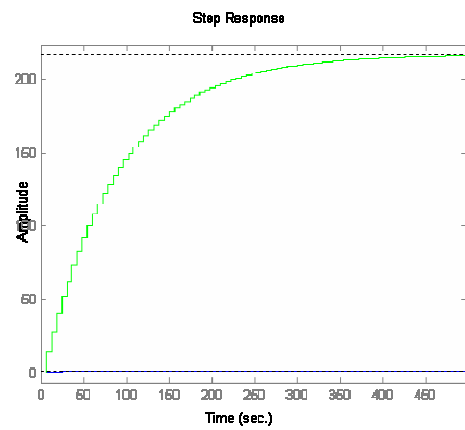
Tablica 5. 4.



Rys. 5. 11.



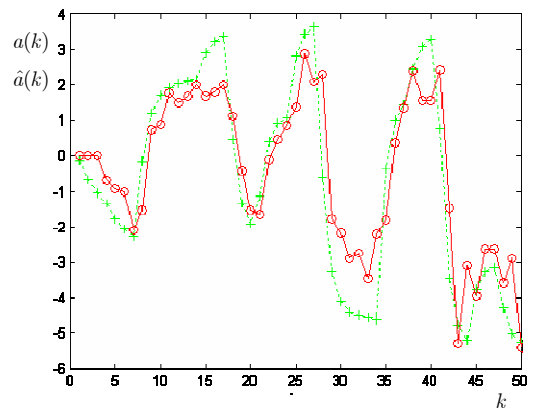
Rys. 5. 12.



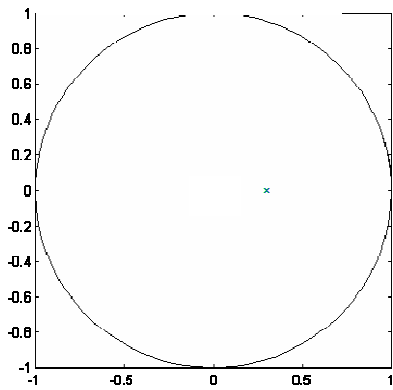
Rys. 5. 10.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-0.0165	0.0001	1.3848	0.0305
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-0.0091	0.0074	0.1145	-0.3160
$\tau_{o,1}$			
9			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.3013		6.9888	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
-0.2983		5.2483	
$\tau_{o,2}$			
9			

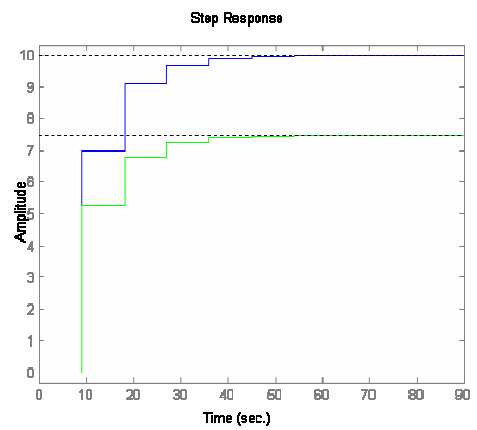
Tablica 5. 5.



Rys. 5. 15.



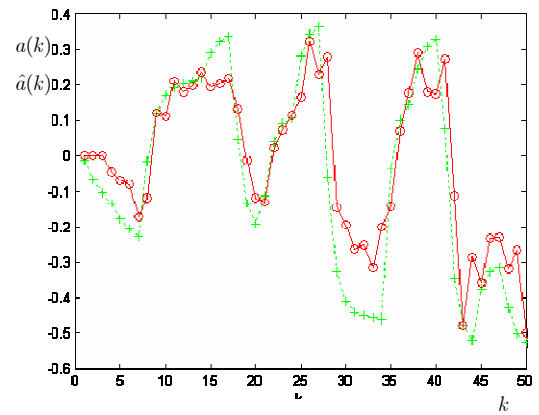
Rys. 5. 14.



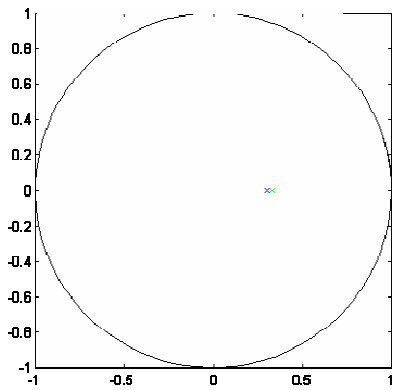
Rys. 5. 13.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-0.0165	0.0001	1.3848	0.0305
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-0.0078	0.0063	0.0072	-0.0342
$\tau_{o,1}$			
9			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.3013		0.6989	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
-0.3296		0.5106	
$\tau_{o,2}$			
9			

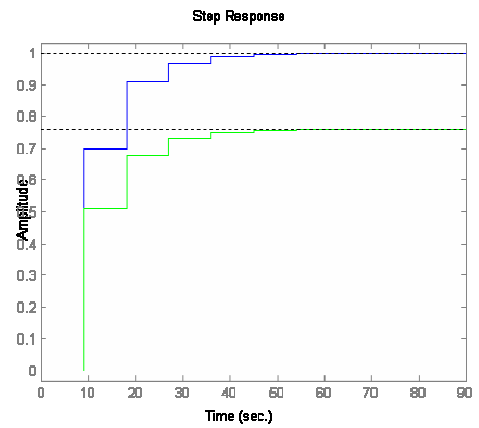
Tablica 5. 6.



Rys. 5. 18.



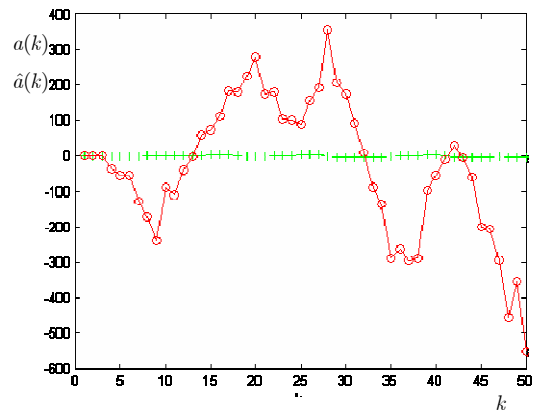
Rys. 5. 17.



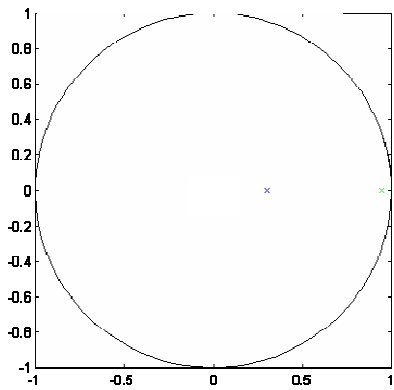
Rys. 5. 16.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-1.3161	0.3770	0.0398	0.2450
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-0.0096	0.0052	-20.4488	-49.996
$\tau_{o,1}$			
9			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.3013		6.9888	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
-0.9458		159.3735	
$\tau_{o,2}$			
9			

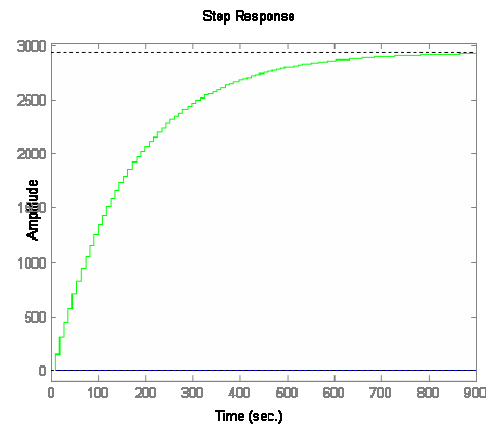
Tablica 5. 7.



Rys. 5. 21.



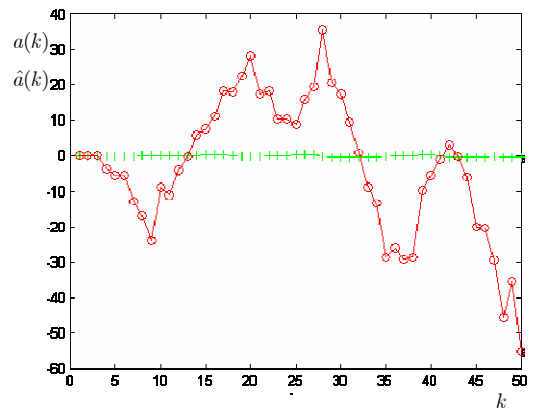
Rys. 5. 20.



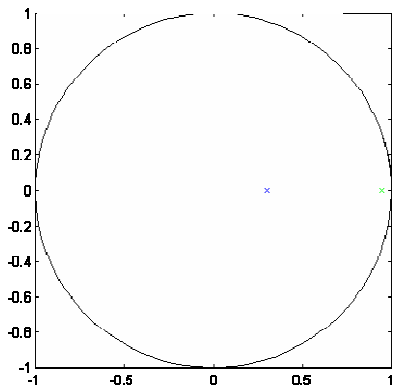
Rys. 5. 19.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-1.3161	0.3770	0.0398	0.2450
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-0.0096	0.0052	-2.0555	-5.0040
$\tau_{o,1}$			
9			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.3013		0.6989	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
-0.9458		15.9404	
$\tau_{o,2}$			
9			

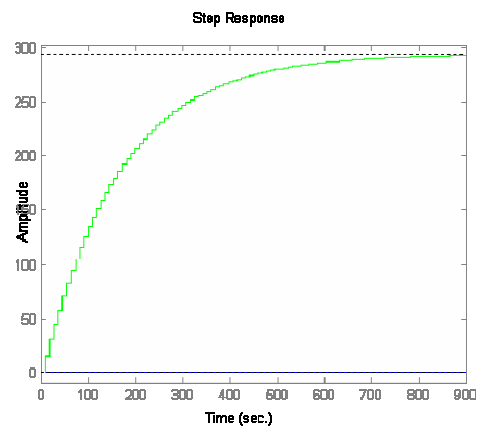
Tablica 5. 8.



Rys. 5. 24.



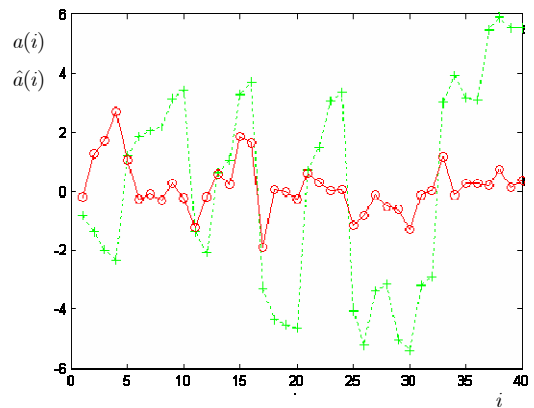
Rys. 5. 23.



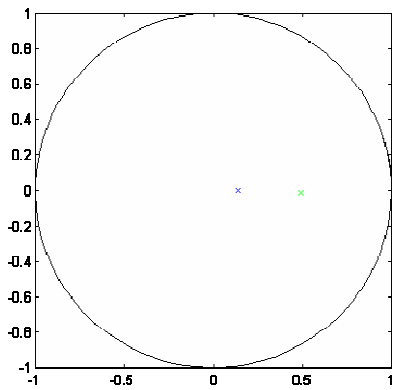
Rys. 5. 22.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-0.7673	0.1329	0.2490	0.2771
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-1.4501	0.4551	0.0254	-0.0750
$\tau_{o,1}$			
1.5			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.1354		8.6481	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
-0.4748		-12.5820	
$\tau_{o,2}$			
15.0			

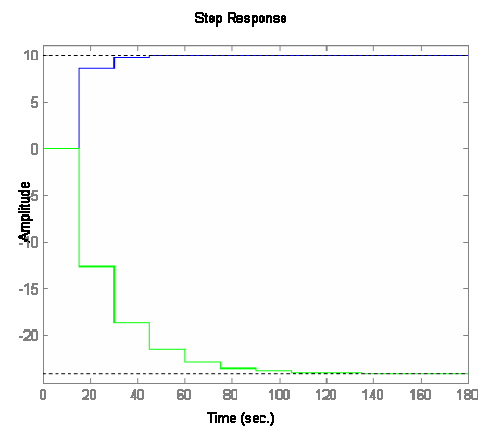
Tablica 5. 9.



Rys. 5. 27.



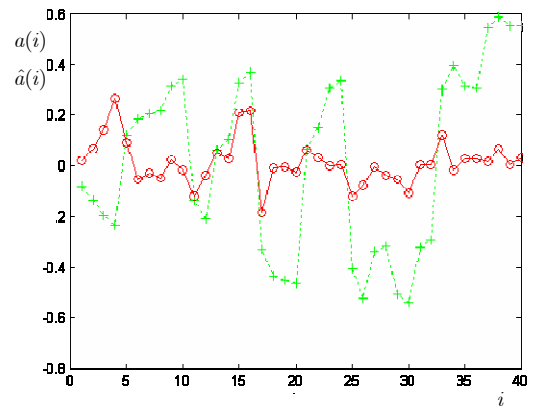
Rys. 5. 25.



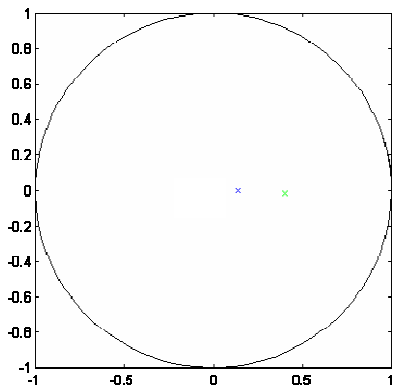
Rys. 5. 26.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-0.7673	0.1329	0.2490	0.2771
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-1.4263	0.4289	0.0057	-0.0087
$\tau_{o,1}$			
1.5			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.1354		0.8648	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
-0.4100		-1.1441	
$\tau_{o,2}$			
15.0			

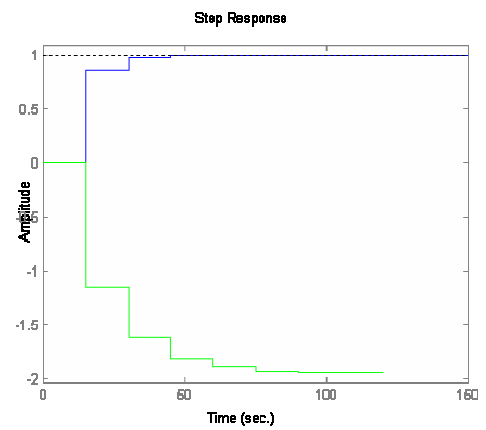
Tablica 5. 10.



Rys. 5. 30.



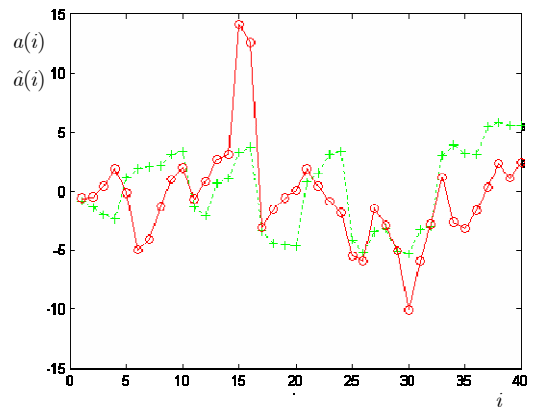
Rys. 5. 29.



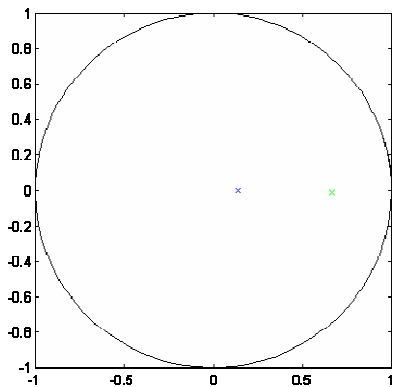
Rys. 5. 28.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-1.8475	0.8499	-0.0248	0.0363
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-2.0033	1.0047	-0.0819	-0.0465
$\tau_{o,1}$			
1.5			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.1354		8.6481	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
-0.6163		-6.4981	
$\tau_{o,2}$			
15.0			

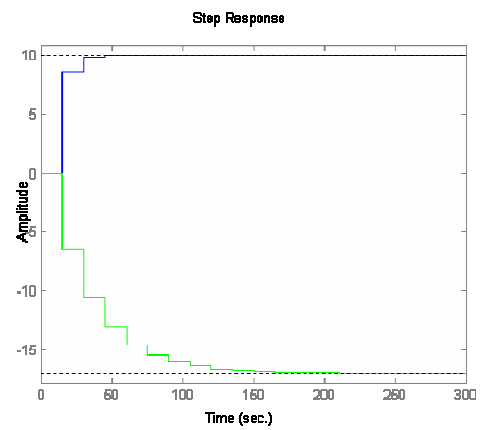
Tablica 5. 11.



Rys. 5. 33.



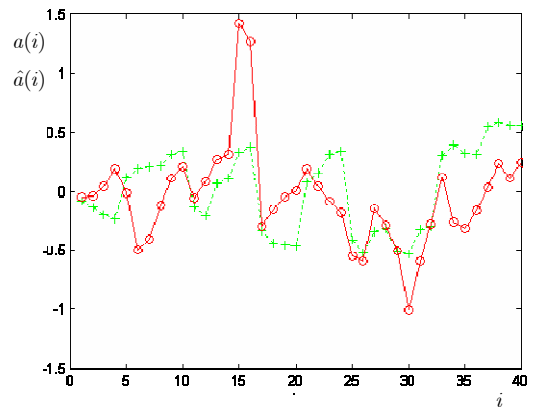
Rys. 5. 32.



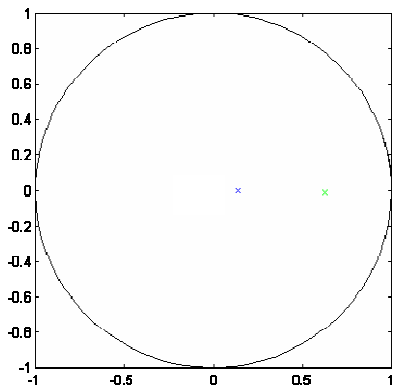
Rys. 5. 31.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-1.8475	0.8499	-0.0248	0.0363
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-2.0032	1.0046	-0.0083	-0.0043
$\tau_{o,1}$			
1.5			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.1354		0.8648	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
-0.6149		-0.5880	
$\tau_{o,2}$			
15.0			

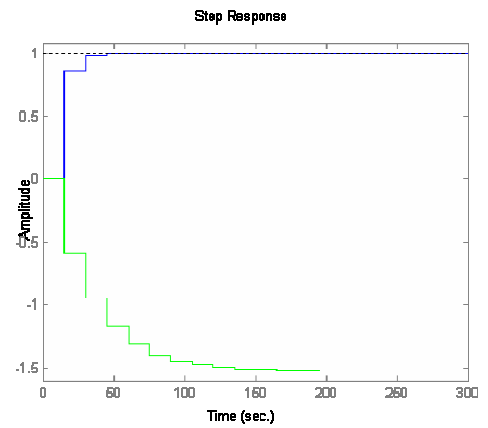
Tablica 5. 12.



Rys. 5. 36.



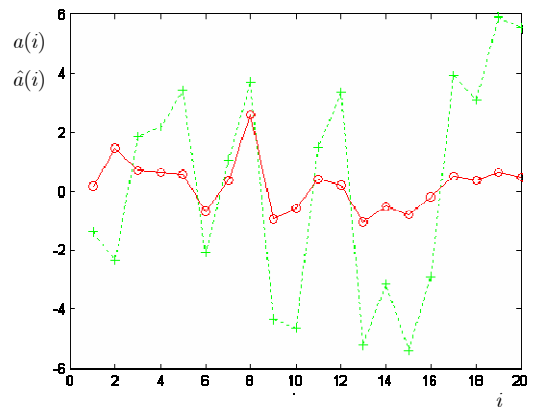
Rys. 5. 35.



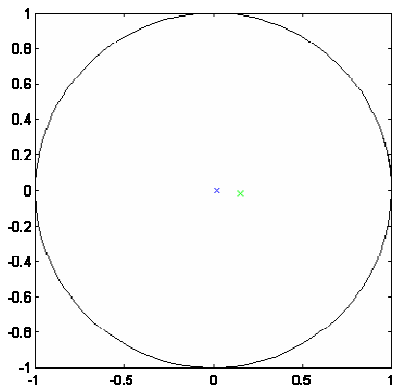
Rys. 5. 34.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-0.7673	0.1329	0.2490	0.2771
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-1.4832	0.5002	0.0091	-0.0627
$\tau_{o,1}$			
1.5			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.0183		9.8191	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
-0.1580		-2.6335	
$\tau_{o,2}$			
30.0			

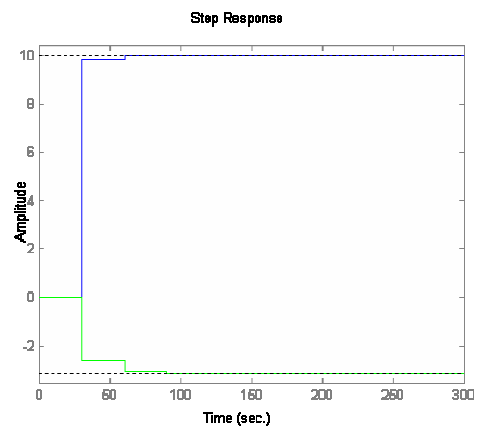
Tablica 5. 13.



Rys. 5. 39.



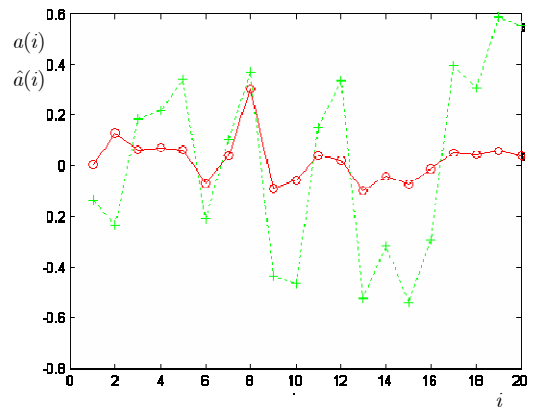
Rys. 5. 38.



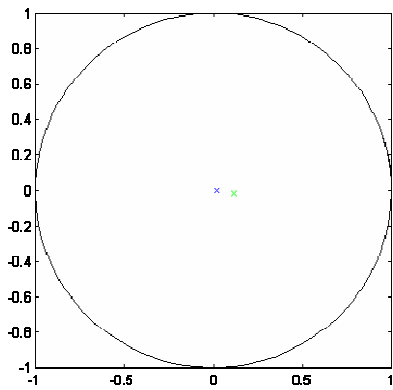
Rys. 5. 37.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-0.7673	0.1329	0.2490	0.2771
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-1.4631	0.4789	0.0042	-0.0072
$\tau_{o,1}$			
1.5			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.0183		0.9819	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
-0.0823		0.0069	
$\tau_{o,2}$			
30.0			

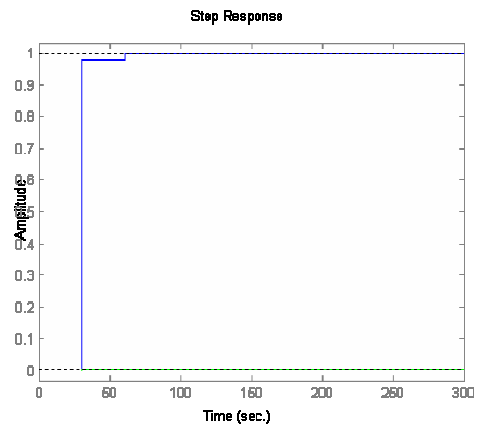
Tablica 5. 14.



Rys. 5. 42.



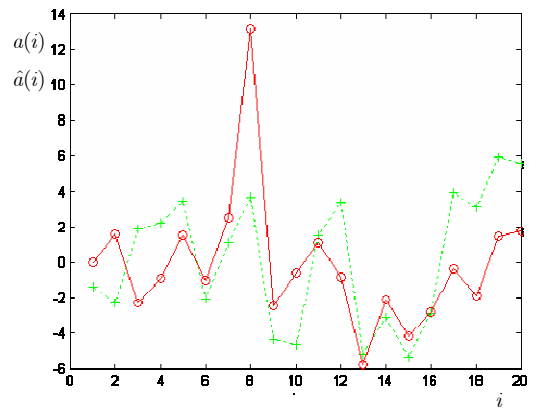
Rys. 5. 41.



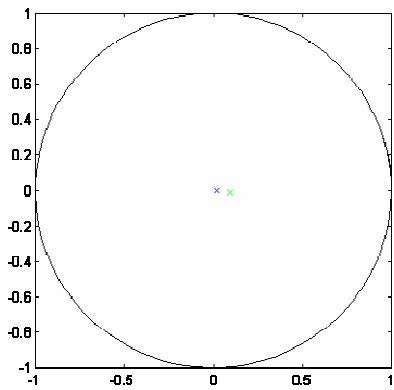
Rys. 5. 40.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-1.8475	0.8499	-0.0248	0.0363
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-1.9992	1.0005	-0.0855	-0.0299
$\tau_{o,1}$			
1.5			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.0183		9.8191	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
-0.0929		14.5390	
$\tau_{o,2}$			
30.0			

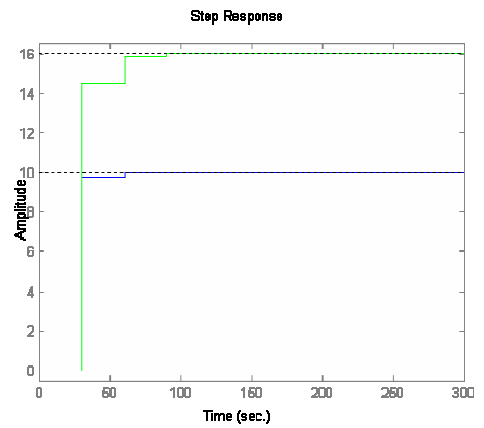
Tablica 5. 15.



Rys. 5. 45.



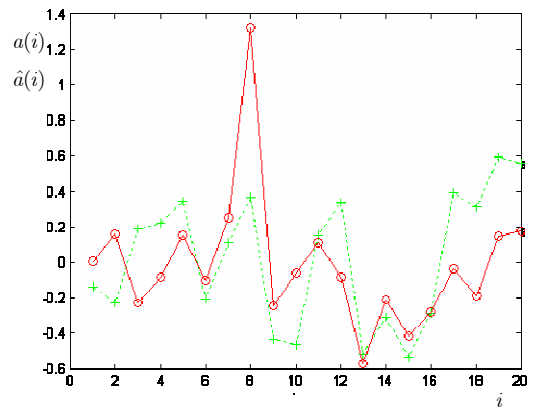
Rys. 5. 44.



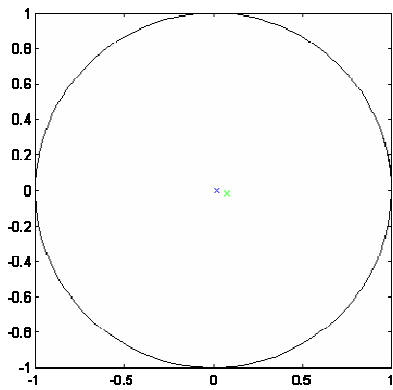
Rys. 5. 43.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-1.8475	0.8499	-0.0248	0.0363
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-1.9992	1.0005	-0.0087	-0.0027
$\tau_{o,1}$			
1.5			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.0183		0.9819	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
-0.0914		1.5158	
$\tau_{o,2}$			
30.0			

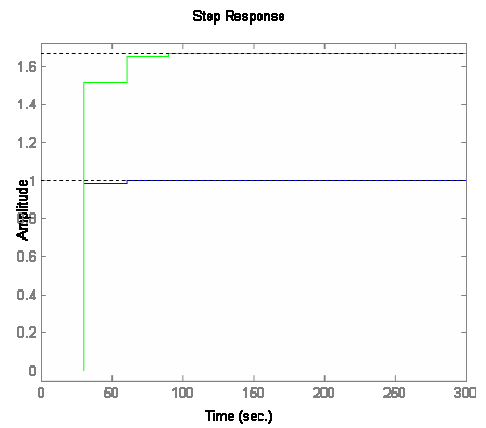
Tablica 5. 16.



Rys. 5. 48.



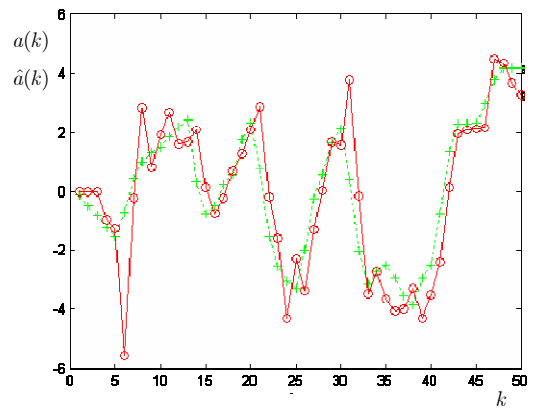
Rys. 5. 47.



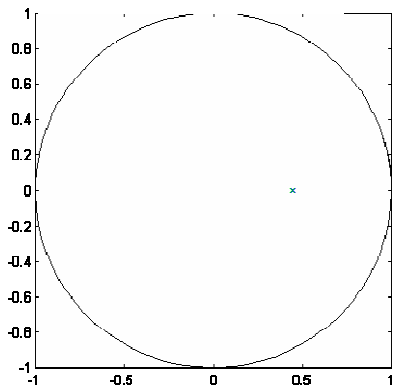
Rys. 5. 46.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-0.0689	0.0003	1.2314	0.1089
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-0.0377	0.0312	0.4163	-0.6776
$\tau_{o,1}$			
6.0			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.4494		5.5071	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
-0.4408		5.5926	
$\tau_{o,2}$			
6.0			

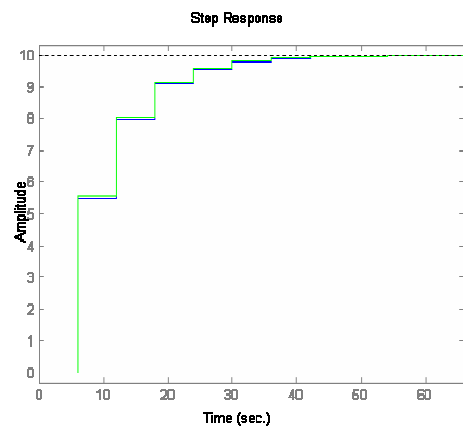
Tablica 5. 17.



Rys. 5. 51.



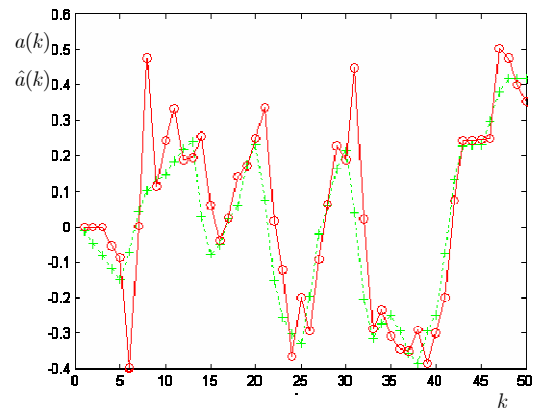
Rys. 5. 50.



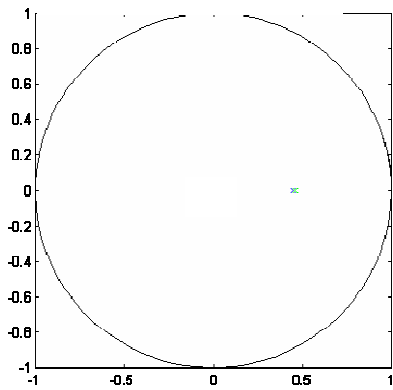
Rys. 5. 49.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-0.0689	0.0003	1.2314	0.1089
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-0.0370	0.0302	0.0461	-0.0570
$\tau_{o,1}$			
6.0			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.4494		0.5507	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
-0.4611		0.5598	
$\tau_{o,2}$			
6.0			

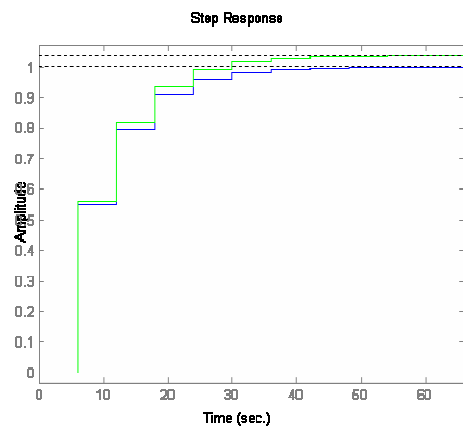
Tablica 5. 18.



Rys. 5. 54.



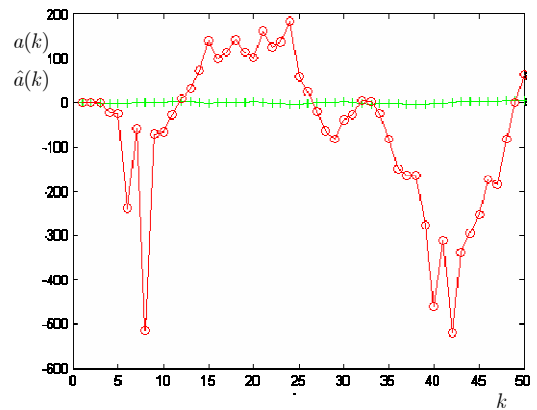
Rys. 5. 53.



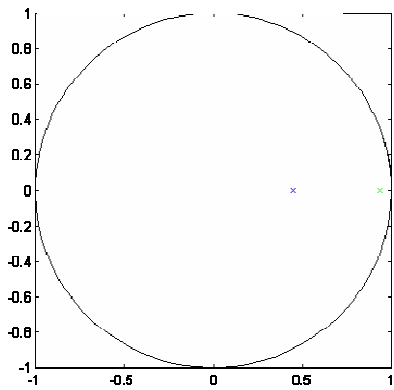
Rys. 5. 52.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-1.4906	0.5219	-0.0161	0.1624
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-0.1006	0.0722	17.4359	-14.7398
$\tau_{o,1}$			
6.0			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.4494		5.5071	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
-0.9349		87.8568	
$\tau_{o,2}$			
6.0			

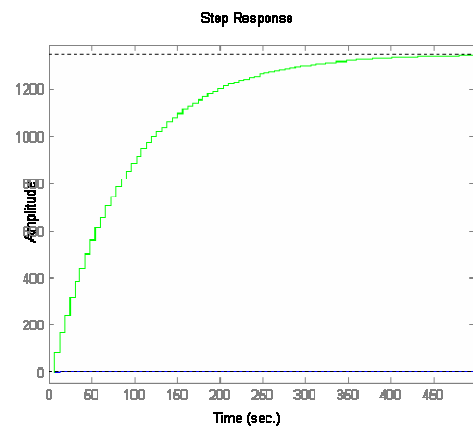
Tablica 5. 19.



Rys. 5. 57.



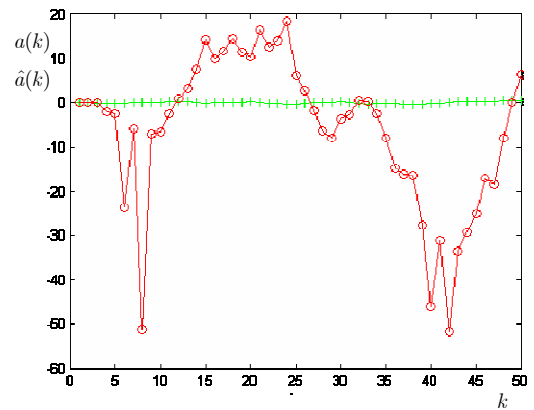
Rys. 5. 56.



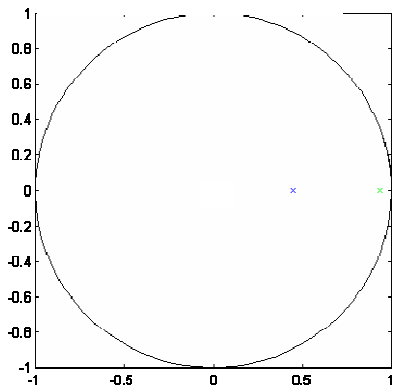
Rys. 5. 55.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-1.4906	0.5219	-0.0161	0.1624
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-0.1005	0.0721	1.7392	-1.4798
$\tau_{o,1}$			
6.0			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.4494		0.5507	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
-0.9356		8.7950	
$\tau_{o,2}$			
6.0			

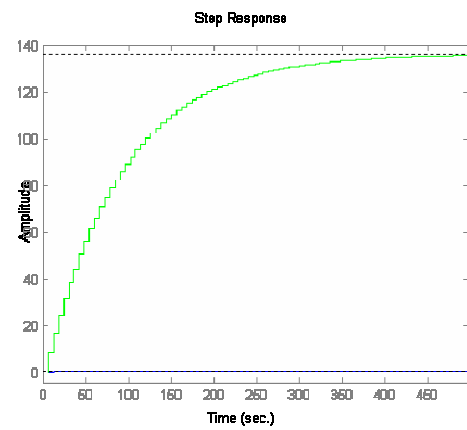
Tablica 5. 20.



Rys. 5. 60.



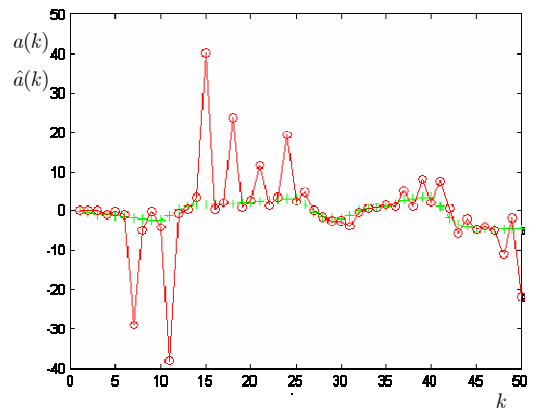
Rys. 5. 59.



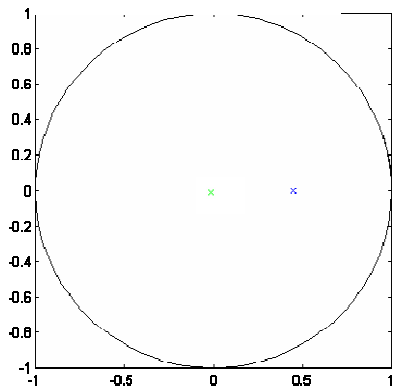
Rys. 5. 58.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-0.0689	0.0003	1.2314	0.1089
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-0.0990	-0.0012	0.4814	0.2770
$\tau_{o,1}$			
6.0			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.4494		5.5071	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
-0.0241		14.2690	
$\tau_{o,2}$			
6.0			

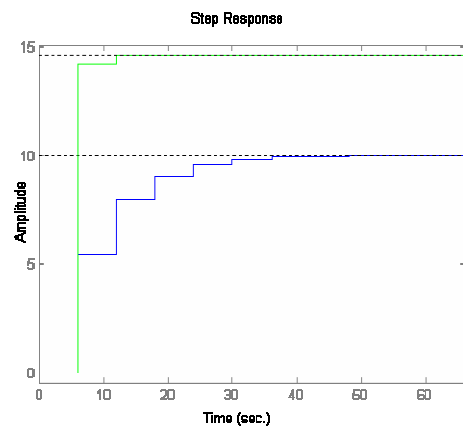
Tablica 5. 21.



Rys. 5. 63.



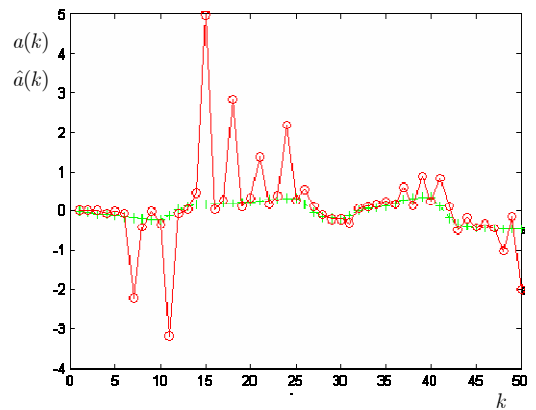
Rys. 5. 62.



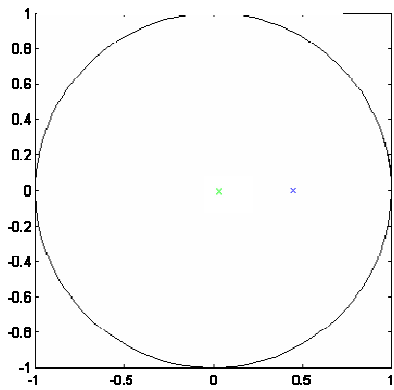
Rys. 5. 61.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-0.0689	0.0003	1.2314	0.1089
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-0.0859	-0.0112	0.0913	0.0305
$\tau_{o,1}$			
6.0			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.4494		0.5507	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
-0.0217		1.4484	
$\tau_{o,2}$			
6.0			

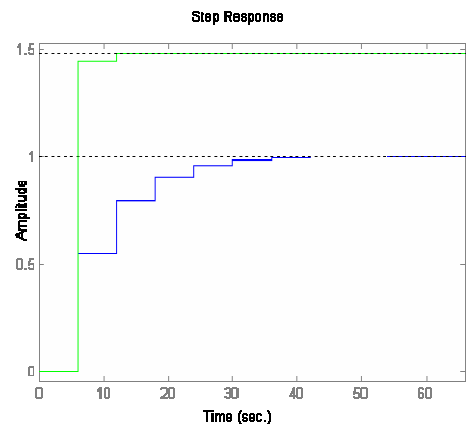
Tablica 5. 22.



Rys. 5. 65.



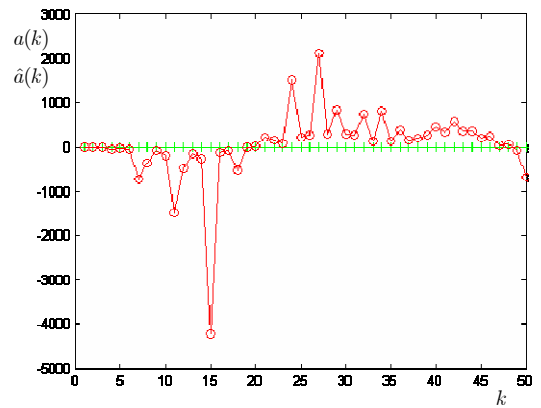
Rys. 5. 64.



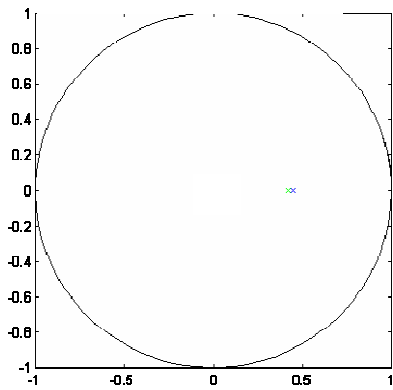
Rys. 5. 66.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-1.4906	0.5219	-0.0161	0.1624
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-0.2354	0.1065	382.7627	-176.533
$\tau_{o,1}$			
6.0			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.4494		5.5071	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
-0.4200		210.1991	
$\tau_{o,2}$			
6.0			

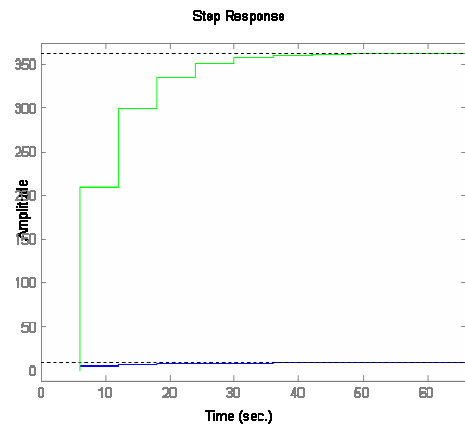
Tablica 5. 23.



Rys. 5. 69.



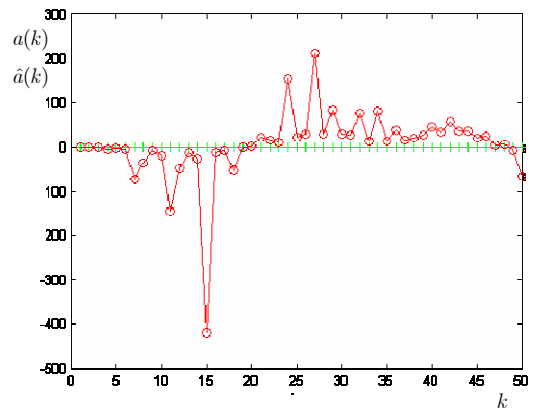
Rys. 5. 68.



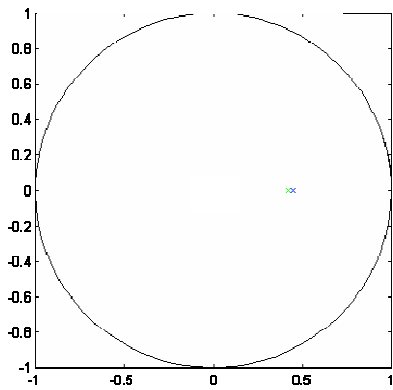
Rys. 5. 67.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-1.4906	0.5219	-0.0161	0.1624
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-0.2354	0.1064	38.3631	-17.7148
$\tau_{o,1}$			
6.0			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.4494		0.5507	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
-0.4204		21.0357	
$\tau_{o,2}$			
6.0			

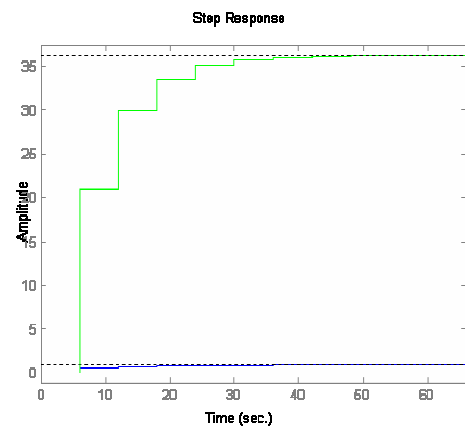
Tablica 5. 24.



Rys. 5. 72.



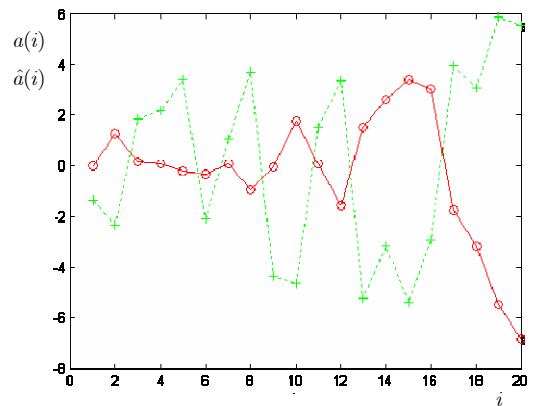
Rys. 5. 71.



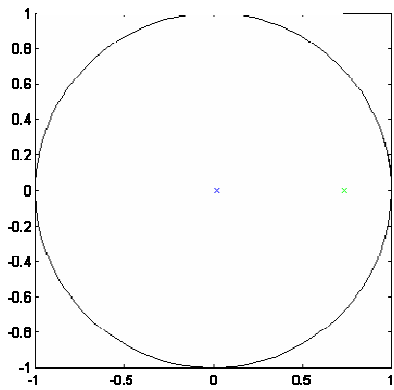
Rys. 5. 70.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-0.7673	0.1329	0.2490	0.2771
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-1.7006	0.5737	0.2363	-0.2614
$\tau_{o,1}$			
1.5			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.0183		9.8191	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
-0.7381		-35.6924	
$\tau_{o,2}$			
30.0			

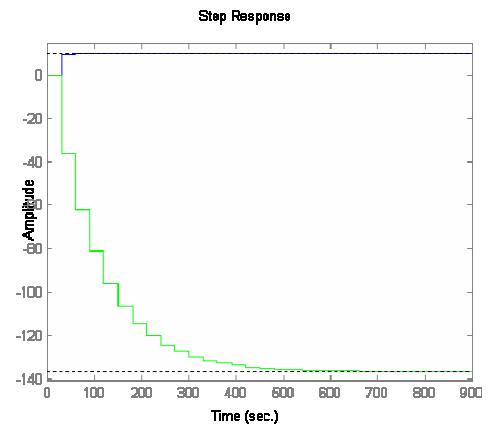
Tablica 5. 25.



Rys. 5. 75.



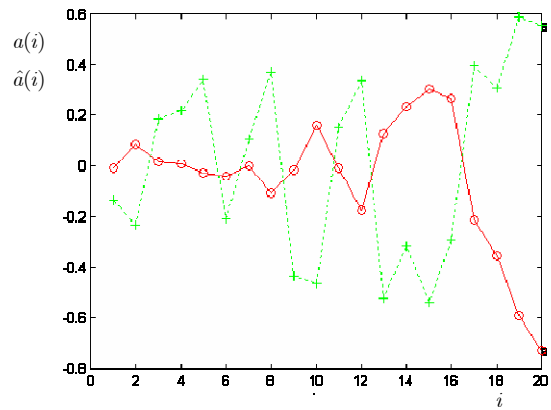
Rys. 5. 73.



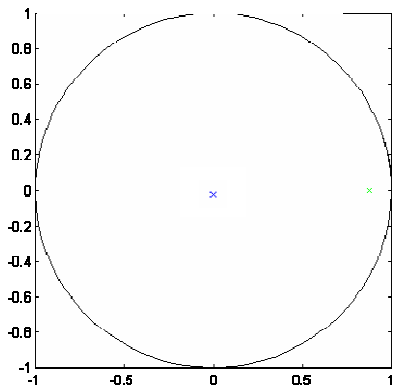
Rys. 5. 74.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-0.7673	0.1329	0.2490	0.2771
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-1.6973	0.5709	0.0355	-0.0314
$\tau_{o,1}$			
1.5			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.0183		0.9819	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
-0.8744		-2.0108	
$\tau_{o,2}$			
30.0			

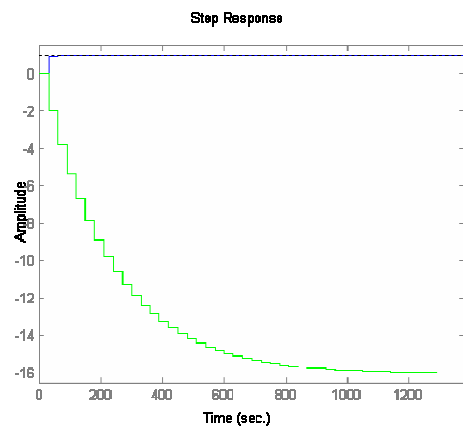
Tablica 5. 26.



Rys. 5. 78.



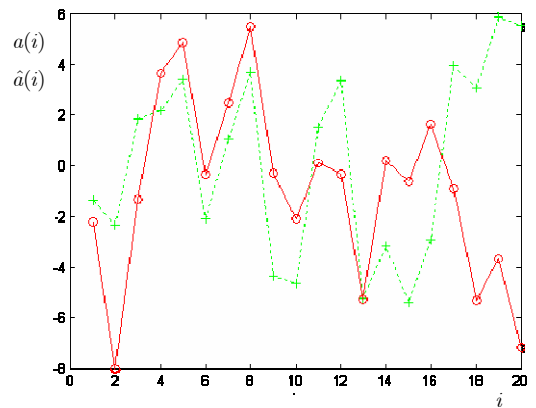
Rys. 5. 77.



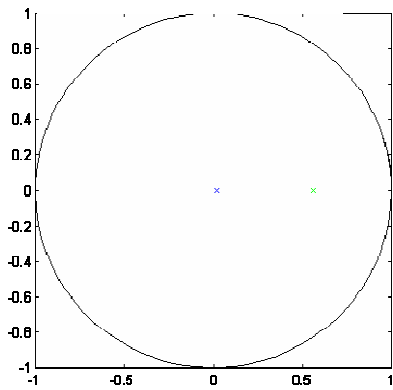
Rys. 5. 76.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-1.8475	0.8499	-0.0248	0.0363
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-2.0253	1.0257	-0.0455	0.3021
$\tau_{o,1}$			
1.5			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.0183		9.8191	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
-0.5620		-96.5062	
$\tau_{o,2}$			
30.0			

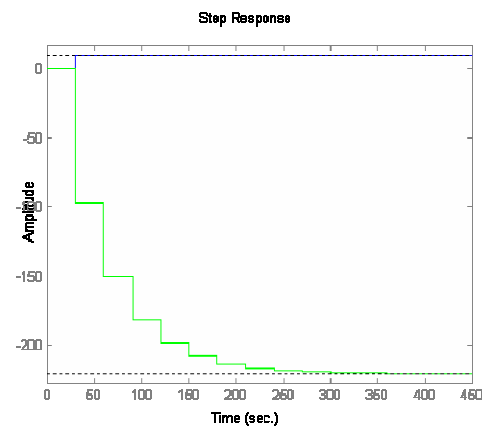
Tablica 5. 27.



Rys. 5. 81.



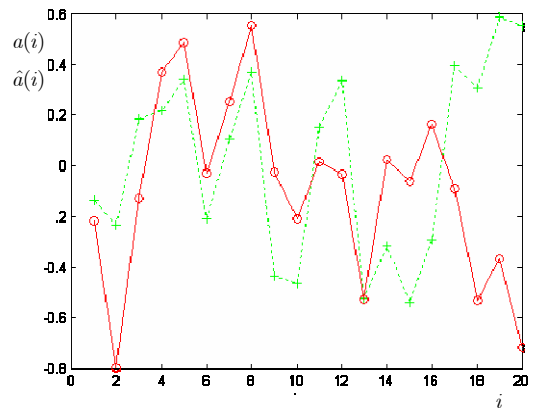
Rys. 5. 80.



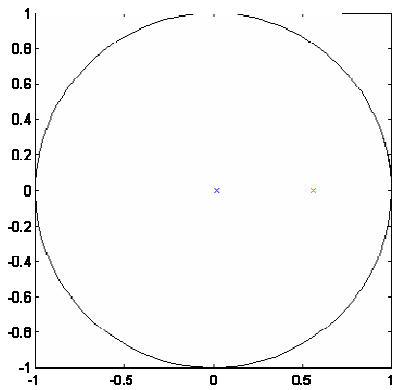
Rys. 5. 79.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-1.8475	0.8499	-0.0248	0.0363
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-2.0254	1.0257	-0.0055	0.0320
$\tau_{o,1}$			
1.5			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.0183		0.9819	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
-0.5617		-9.6492	
$\tau_{o,2}$			
30.0			

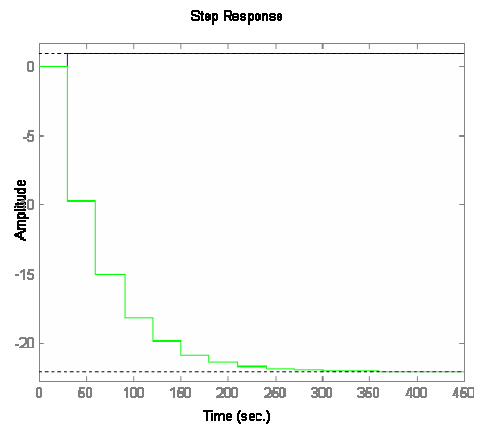
Tablica 5. 28.



Rys. 5. 84.



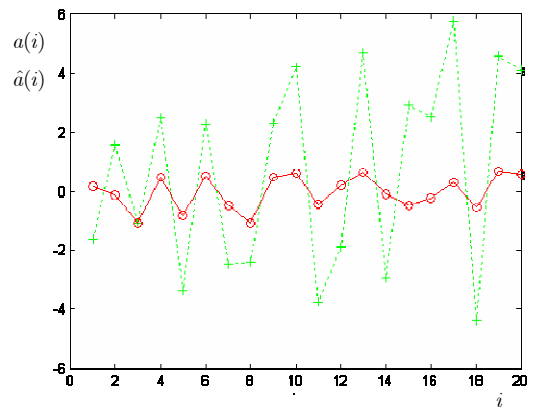
Rys. 5. 83.



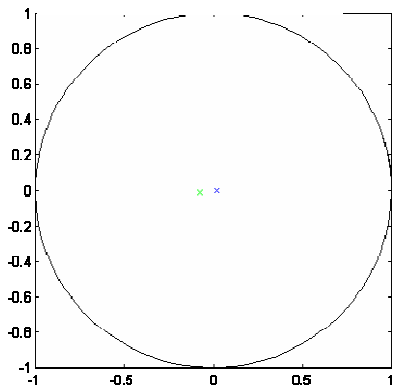
Rys. 5. 82.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-0.7673	0.1329	0.2490	0.2771
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-1.6952	0.7266	0.0587	-0.0150
$\tau_{o,1}$			
1.5			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.0183		9.8191	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
0.1103		-8.9446	
$\tau_{o,2}$			
30.0			

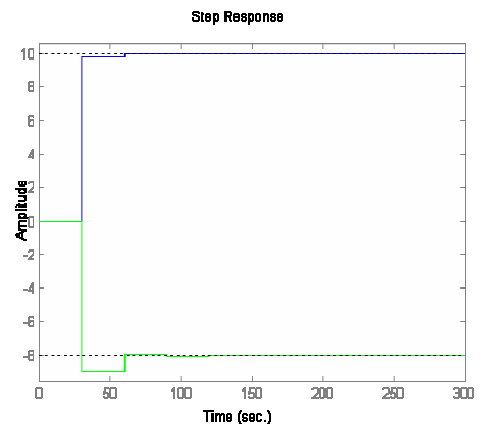
Tablica 5. 29.



Rys. 5. 86.



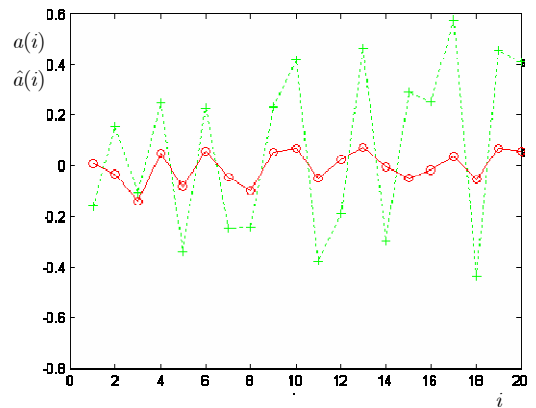
Rys. 5. 85.



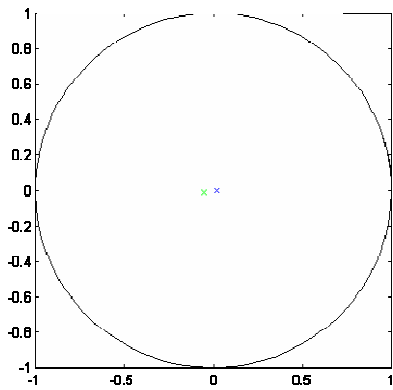
Rys. 5. 87.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-0.7673	0.1329	0.2490	0.2771
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-1.6626	0.6933	0.0093	-0.0025
$\tau_{o,1}$			
1.5			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.0183		0.9819	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
0.0755		-1.0376	
$\tau_{o,2}$			
30.0			

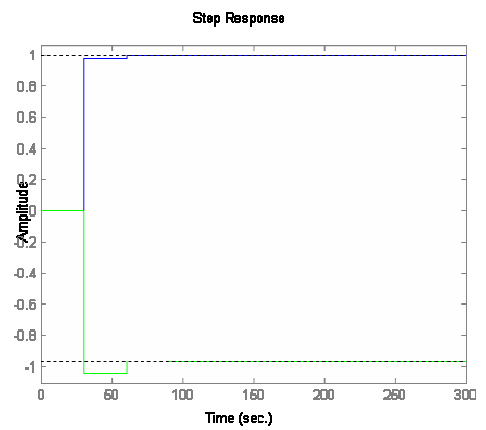
Tablica 5. 30.



Rys. 5. 90.



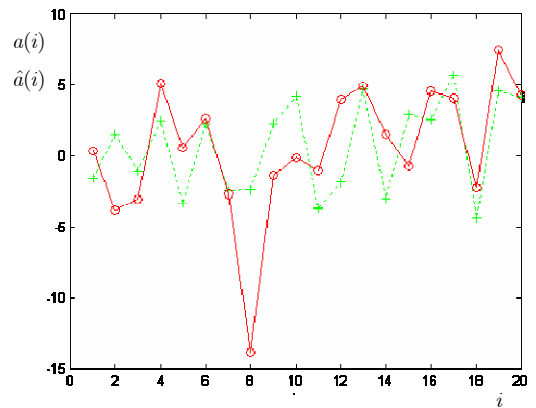
Rys. 5. 89.



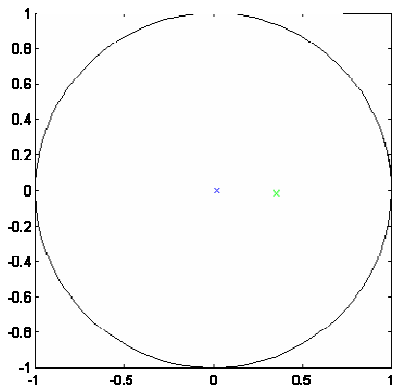
Rys. 5. 88.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-1.8475	0.8499	-0.0248	0.0363
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-1.9938	0.9970	0.1030	0.3077
$\tau_{o,1}$			
1.5			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.0183		9.8191	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
-0.3023		-50.1132	
$\tau_{o,2}$			
30.0			

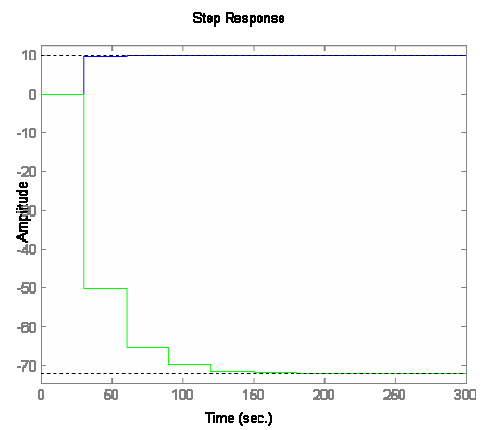
Tablica 5. 31.



Rys. 5. 93.



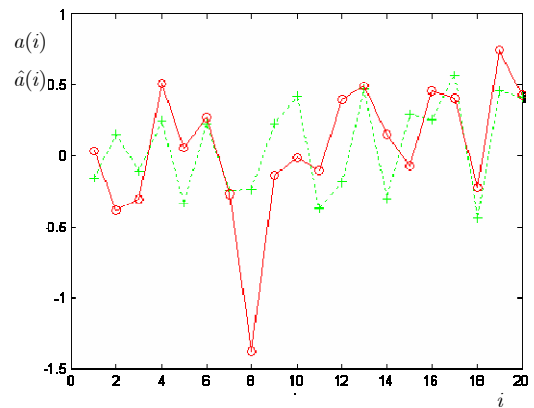
Rys. 5. 92.



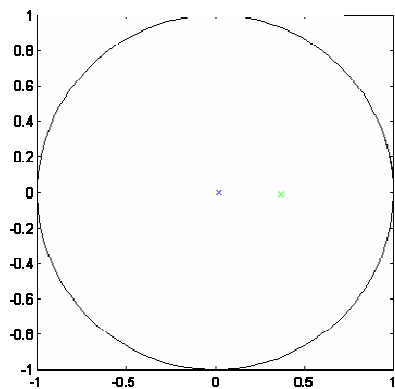
Rys. 5. 91.

Obiekt 1. stopień			
a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
-1.8475	0.8499	-0.0248	0.0363
\hat{a}_{11}	\hat{a}_{12}	\hat{b}_{11}	\hat{b}_{12}
-1.9938	0.9970	0.0102	0.0311
$\tau_{o,1}$			
1.5			
Obiekt 2. stopień			
a_{21}		b_{21}	
-0.0183		0.9819	
\hat{a}_{21}		\hat{b}_{21}	
-0.3023		-5.0011	
$\tau_{o,2}$			
30.0			

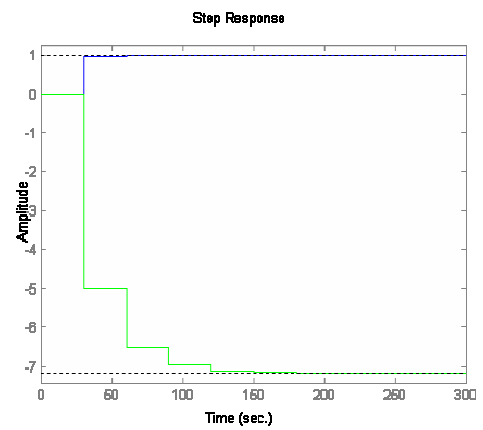
Tablica 5. 32.



Rys. 5. 96.



Rys. 5. 95.



Rys. 5. 94.

5.5. Omówienie wyników

Na podstawie uzyskanych wyników badań symulacyjnych możliwe jest sformułowanie następujących wniosków dotyczących wpływu właściwości obiektów, sygnałów i parametrów algorytmów na wyniki identyfikacji.

5.5.1. Stała czasowa obiektu na 1. stopniu

Pierwsza metoda organizacji pomiarów wykazuje silną zależność od wartości stałej czasowej obiektu na 1. stopniu. Wyniki identyfikacji na 1. stopniu w postaci wyliczonych parametrów oraz wyznaczonego przebiegu $\hat{a}(k)$ różnią się od siebie znacznie dla obiektów na 1. stopniu o różnej wartości stałej czasowej. Różnica ta jest widoczna zarówno dla obiektów na 2. stopniu z dużym wzmocnieniem statycznym (Rys. 5.5 oraz Rys. 5.12) jak i małym (Rys. 5.8 oraz Rys. 5.16). Pogarszanie wyników identyfikacji na 1. stopniu dla obiektów z dużą stałą czasową na 1. stopniu nasila się wraz ze wzrostem długości taktu pomiarowego τ_2 . Widać to wyraźnie dla zwiększonego N z wartości 20 – jak w omówionych powyżej przypadkach – do $N = 30$ (Rys. 5.19 oraz Rys. 5.25). Jeszcze większe pogorszenie wyników identyfikacji na 1. stopniu otrzymujemy dla szybkozmiennych sygnałów wejściowych na 2. stopniu (Rys. 5.55 oraz Rys. 5.61). W wyniku niskiej jakości identyfikacji na 1. stopniu – dla obiektów na stopniu pierwszym z dużą stałą czasową – identyfikacja na 2. stopniu również dostarcza modele o właściwościach bardzo odbiegających od właściwości obiektów rzeczywistych. Widać to zarówno dla obiektów na 2. stopniu z dużym wzmocnieniem statycznym (Rys. 5.7 oraz Rys. 5.12 i Rys. 5.6 oraz Rys. 5.11) jak i małym (Rys. 5.10 oraz Rys. 5.15 i Rys. 5.9 oraz Rys. 5.14). Podobnie jak dla identyfikacji na 1. stopniu pogorszenie identyfikacji na 2. stopniu nasila się wraz ze wzrostem długości taktu pomiarowego τ_2 (Rys. 5.54 oraz Rys. 5.60 i Rys. 5.53 oraz Rys. 5.59). Dla wszystkich wskazanych przypadków identyfikacji na stopniu drugim, wyznaczone przez algorytmy modele mają odmienne w porównaniu z obiektami rzeczywistymi własności wyrażone przez odpowiedzi na pobudzenie skokowe oraz rozkłady zer i biegunów.

Estymacja parametrów obiektu dwustopniowego przeprowadzana z wykorzystaniem pierwszej metody organizacji pomiarów osiąga zdecydowanie lepsze rezultaty dla obiektów

na 1. stopniu z małą stałą czasową. Wyniki identyfikacji zarówno na 1. stopniu jak i na stopniu 2. są bardzo dobre praktycznie bez względu na pozostałe parametry algorytmów i właściwości sygnałów i obiektów. Najlepsze wyniki uzyskano dla przypadku szybkozmiennych sygnałów wejściowych na pierwszym oraz drugim stopniu, pobudzających obiekt z małą stałą czasową na 1. stopniu oraz obiekt z dużym współczynnikiem wzmocnienia statycznego na 2. stopniu. Zarówno wyliczony przebieg $\hat{a}(k)$ (Rys. 5.55), parametry modelu na 1. stopniu oraz parametry i właściwości modelu na 2. stopniu (Rys. 5.54, Rys. 5.53) bardzo dobrze odpowiadają obiektowi rzeczywistemu. Przedstawione obserwacje zgadzają się z przewidywaniami zachowania algorytmów identyfikacji dwustopniowej, sformułowanymi w punkcie 4.3.5. na podstawie analizy błędu pomiarowego popełnianego podczas wykorzystania pierwszej metody organizacji pomiarów.

Druga metoda organizacji pomiarów wykazuje pewną zależność od wartości stałej czasowej obiektu na 1. stopniu. Wyniki identyfikacji na 1. stopniu w postaci wyliczonych parametrów oraz wyznaczonego przebiegu $\hat{a}(k)$ różnią się od siebie dla obiektów o różnej wartości stałej czasowej na 1. stopniu. Różnica ta jest widoczna zarówno dla obiektów na 2. stopniu z dużym wzmocnieniem statycznym (Rys. 5.43 oraz Rys. 5.49) jak i dla obiektów na 2. stopniu z małym wzmocnieniem (Rys. 5.46 oraz Rys. 5.52), gdzie zwiększenie wartości stałej czasowej obiektu na 1. stopniu powoduje polepszenie wyników identyfikacji na 1. stopniu. Nieco mniej wyraźnie właściwość tą widać dla małych wartości K . Zmniejszając K z 20 do 10 wpływ zmiany wartości stałej czasowej obiektu na 1. stopniu (Rys. 5.34 oraz Rys. 5.40) traci na znaczeniu na rzecz pogorszenia jakości identyfikacji ze względu na skrócenie serii pomiarowej.

Polepszenie identyfikacji na 1. stopniu dla obiektów z dużą stałą czasową na stopniu pierwszym powoduje wzrost jakości identyfikacji na stopniu drugim. Widać to zarówno dla obiektów na 2. stopniu z dużym wzmocnieniem statycznym (Rys. 5.42 oraz Rys. 5.48 i Rys. 5.41 oraz Rys. 5.47) jak i z małym wzmocnieniem (Rys. 5.45 oraz Rys. 5.51 i Rys. 5.44 oraz Rys. 5.50). Wzrost jakości identyfikacji na stopniu drugim przejawia się w otrzymywaniu modeli o zbliżonych do obiektów rzeczywistych własnościach statycznych i dynamicznych wyrażonych przez odpowiedzi na pobudzenie skokowe oraz rozkłady zer i biegunów.

Estymacja parametrów obiektu dwustopniowego przeprowadzana z wykorzystaniem drugiej metody organizacji pomiarów osiąga nieco lepsze rezultaty dla obiektów na 1. stopniu z dużą stałą czasową. Najlepsze wyniki uzyskano dla obiektu na 1. stopniu z dużą stałą czasową oraz obiektu na 2. stopniu z małym współczynnikiem wzmocnienia statycznego, gdzie pobudzenie na stopniu drugim było wolnozmiennie (Rys. 5.51 oraz Rys. 5.50).

Obserwacja ta nie zgadza się w pełni z przewidywaniami sformułowanymi w części 4.3.5. na podstawie analizy błędu pomiarowego właściwego drugiej metodzie organizacji pomiarów. Z rozważań teoretycznych wynika, że zmniejszanie stałej czasowej obiektu na 1. stopniu powinno nieznacznie poprawić działanie algorytmów identyfikacji dla drugiej metody organizacji pomiarów. Należy jednak pamiętać, że rozważania teoretyczne dotyczą zmniejszenia górnego ograniczenia popełnianych błędów metody pomiarowej co może nie wykluczać obserwowanego w tym przypadku zachowania algorytmów identyfikacji.

Stosowanie pierwszej metody organizacji pomiarów dla obiektów na 1. stopniu z małą stałą czasową gwarantuje znacznie lepsze działanie algorytmów identyfikacji w stosunku do działania algorytmów identyfikacji dla drugiej metody. Zarówno na 1. stopniu – wyliczone parametry modelu oraz przebieg $\hat{a}(k)$ (Rys. 5.55 oraz Rys. 5.43) – jak i na 2. stopniu – bliższe sobie odpowiedzi na pobudzenie skokowe obiektu i modelu (Rys. 5.53 oraz Rys. 5.41) – widoczne są znaczne różnice pomiędzy obiema metodami. Bez względu na wartość współczynnika wzmocnienia statycznego obiektu na 2. stopniu oraz na czasy próbkowania τ_1 i τ_2 lepsze rezultaty identyfikacji osiągamy dla pierwszej metody organizacji pomiarów.

Obiekty na 1. stopniu z dużą stałą czasową przy wykorzystaniu pierwszej metody organizacji pomiarów w znaczny sposób pogarszają działanie algorytmów identyfikacji na pierwszym (Rys. 5.25) oraz na drugim stopniu (Rys. 5.24, Rys. 5.23). Uzyskiwane wyniki identyfikacji przez pierwszą metodę organizacji pomiarów są wówczas zdecydowanie gorsze niż te uzyskane z wykorzystaniem drugiej metody (Rys. 5.49, Rys. 5.48 i Rys. 5.47).

Takie zachowanie algorytmów identyfikacji jest zgodne z przewidywaniami sformułowanymi na podstawie teoretycznej analizy błędu pomiarowego przeprowadzonej w punkcie 4.3.5.

5.5.2. Wzmocnienie statyczne obiektu na 2. stopniu

Dla pierwszej metody organizacji pomiarów zmiana wartości współczynnika wzmocnienia statycznego obiektu na 2. stopniu pozostaje praktycznie bez wpływu na estymowane parametry wielomianu $A_1(q^{-1})$. Wyniki estymacji parametrów $A_1(q^{-1})$ nie ulegają zmianie zarówno dla obiektów na 1. stopniu z małą stałą czasową (Tablica 5.2 oraz Tablica 5.3) jak i z dużą stałą czasową (Tablica 5.4 oraz Tablica 5.5). Brak wpływu zmiany wartości wzmocnienia obiektu na 2. stopniu jest również widoczny dla krótkiego oraz długiego czasu τ_2 (Tablica 5.2 oraz Tablica 5.3 i Tablica 5.6 oraz Tablica 5.7). Zmiana wartości współczynnika wzmocnienia statycznego obiektu na 2. stopniu wpływa jednak w pewien sposób na wyniki estymacji parametrów wielomianu $B_1(q^{-1})$. Obserwowana zależność sprowadza się do zmiany wartości współczynnika wzmocnienia statycznego obiektu na 1. stopniu proporcjonalnie do zmiany wartości współczynnika wzmocnienia statycznego obiektu na 2. stopniu. Na zależność tą nie wpływają pozostałe czynniki, od których mogą zależeć wyniki identyfikacji: wartość stałej czasowej obiektu na 1. stopniu oraz długość taktu pomiarowego τ_2 (Tablica 5.2 oraz Tablica 5.3, Tablica 5.4 oraz Tablica 5.5 i Tablica 5.6 oraz Tablica 5.7). Takie zachowanie algorytmów identyfikacji wykazuje pewien związek z rozważaniami teoretycznymi prowadzonymi w części 4.3.5. Wskazano tam na liniową zależność błędu pomiarowego od wartości wzmocnienia statycznego obiektu na 2. stopniu poprzez współczynnik K_2 .

Podobnie jak podczas przeprowadzania identyfikacji na 1. stopniu przy wykorzystaniu pierwszej metody organizacji pomiarów, również na 2. stopniu wyniki estymacji parametrów wielomianu $A_2(q^{-1})$ bardzo słabo zależą od współczynnika wzmocnienia statycznego obiektu na 2. stopniu. Widać to między innymi dla obiektów o różnych wartościach stałej czasowej na 1. stopniu (Tablica 5.2 oraz Tablica 5.3 i Tablica 5.4 oraz Tablica 5.5). Tak jak to miało miejsce podczas identyfikacji na 1. stopniu, zmiana wzmocnienia statycznego obiektu na 2. stopniu wpływa na wyniki estymacji parametrów wielomianu $B_2(q^{-1})$. W odróżnieniu jednak od przypadku wyliczania parametrów na 1. stopniu, dla obiektów na 2. stopniu o różnych wartościach współczynnika wzmocnienia statycznego relacja pomiędzy współczynnikami wzmocnienia statycznego modeli i rzeczywistych obiektów na stopniu drugim nie ulega zmianie (Tablica 5.4 oraz Tablica 5.5 i Tablica 5.6 oraz Tablica 5.7).

Estymacja parametrów z wykorzystaniem pierwszej metody organizacji pomiarów uzyskuje najlepsze wyniki dla obiektów na 2. stopniu z dużym wzmocnieniem statycznym, gdzie zarówno obiekt na 1. stopniu z małą stałą czasową oraz obiekt na stopniu drugim jest pobudzany szybkozmiennym sygnałem wejściowym. Wówczas wyliczony przebieg $\hat{a}(k)$ (Rys. 5.55), parametry modelu na 1. stopniu oraz parametry i właściwości modelu na 2. stopniu (Rys. 5.54 i Rys. 5.53) dobrze odpowiadają obiektowi rzeczywistemu.

Estymacja parametrów obiektu dwustopniowego realizowana z wykorzystaniem drugiej metody organizacji pomiarów wykazuje zależność od wartości wzmocnienia statycznego obiektu na 2. stopniu. Dla identyfikacji przeprowadzanej na 1. stopniu zależność ta jest nie jest szczególnie wyraźna biorąc pod uwagę parametry wielomianu $A_1(q^{-1})$ (Tablica 5.10 oraz Tablica 5.10, Tablica 5.14 oraz Tablica 5.15 i Tablica 5.32 oraz Tablica 5.33). Pewną poprawę wyników identyfikacji dla obiektów na 2. stopniu o małym wzmocnieniu statycznym można jednak zaobserwować dla parametrów wielomianu $B_1(q^{-1})$. Widać to dla obiektu na 1. stopniu z małą stałą czasową bez względu na szybkość pobudzenia na stopniu drugim (Tablica 5.14 oraz Tablica 5.15 i Tablica 5.30 oraz Tablica 5.31). Zdecydowanie bardziej istotna zmiana w jakości identyfikacji zachodzi na stopniu drugim. W tych sytuacjach, gdzie identyfikacja na 2. stopniu przebiega w miarę poprawnie – dzieje się to dla szybkozmiennego pobudzenia na stopniu pierwszym oraz wolnozmiennego pobudzenia na stopniu drugim oraz obiektu na 1. stopniu z małą stałą czasową – zmniejszenie wartości wzmocnienia statycznego obiektu na 2. stopniu wpływa na poprawę identyfikacji na 2. stopniu. Zarówno parametry (Tablica 5.14 oraz Tablica 5.15) jak i właściwości modelu na stopniu drugim zbliżają się do parametrów i właściwości obiektu rzeczywistego (Rys. 5.41 oraz Rys. 5.44). Należy jednocześnie zwrócić uwagę na zachowanie algorytmu identyfikacji dla wolnozmiennego pobudzenia na stopniu drugim. W takiej sytuacji – dzięki zapewnieniu niewielkich wartości pobudzenia – zdecydowanie maleje wpływ wartości wzmocnienia statycznego obiektu na 2. stopniu na wyniki identyfikacji na 2. stopniu (Rys. 5.48 oraz Rys. 5.51 i Rys. 5.47 oraz Rys. 5.50). Obserwowany wpływ zmniejszania wzmocnienia statycznego obiektu na 2. stopniu na poprawę wyników identyfikacji potwierdza wnioski płynące z rozważań teoretycznych poświęconych badaniom ograniczenia popełnianych błędów pomiarowych przy wykorzystaniu drugiej metody organizacji pomiarów.

W kontekście wartości współczynnika wzmocnienia statycznego obiektu na 2. stopniu druga metoda organizacji pomiarów osiąga najlepsze rezultaty dla obiektów na stopniu drugim o małym wzmocnieniu statycznym, gdzie obiekt na 1. stopniu o dużej stałej czasowej jest pobudzany przez szybkozmienny sygnał oraz pobudzenie na stopniu drugim jest wolnozmiennie (Rys. 5.50, Rys. 5.51, Rys. 5.52 i Tablica 5.17).

Pierwsza metoda organizacji pomiarów w mniejszym stopniu zależy od wartości współczynnika wzmocnienia statycznego obiektu na 2. stopniu w stosunku do drugiej metody organizacji pomiarów. Wystarczy, że obiekt na stopniu pierwszym ma wystarczająco małą stałą czasową – co stanowi gwarancję poprawnego działania algorytmów identyfikacji wykorzystujących tę metodę – aby wpływ wzmocnienia statycznego obiektu na stopniu drugim na wyniki identyfikacji nie był wyraźny. Inaczej sprawa wygląda jednak dla drugiej metody organizacji pomiarów. Warunkiem poprawnego działania identyfikacji korzystającej z tej metody organizacji pomiarów jest odpowiednio wolnozmienny sygnał $a(t)$. Jedną z metod uzyskania sygnału $a(t)$ o pożądanym własnościach jest właśnie istnienie obiektu na 2. stopniu o małym wzmocnieniu statycznym. Zwiększenie wzmocnienia statycznego tego obiektu pociąga za sobą pogorszenie jakości identyfikacji na obu stopniach. Dla obiektu na stopniu drugim o małym wzmocnieniu statycznym wyznaczone parametry (Tablica 5.15) oraz własności modelu (Rys. 5.44) są lepsze jak te wyznaczone dla obiektu o dużym wzmocnieniu (Tablica 5.14 i Rys. 5.41). Widać to zwłaszcza dla estymacji parametrów wielomianu $B_2(q^{-1})$.

Porównanie wyników identyfikacji uzyskiwanych przez obie metody organizacji pomiarów ze względu na wartość wzmocnienia statycznego obiektów na 2. stopniu należy uzależnić od wartości stałej czasowej obiektu na 1. stopniu. Dla obiektów na 2. stopniu o dużym wzmocnieniu statycznym pierwsza metoda organizacji pomiarów gwarantuje lepsze wyniki identyfikacji w stosunku do drugiej metody organizacji pomiarów wyłącznie dla obiektów na stopniu pierwszym z małą wartością stałej czasowej. Obiekt na 1. stopniu o dużej wartości stałej czasowej powoduje, że identyfikacja wykorzystująca pierwszą metodę organizacji pomiarów dostarcza bardzo złe modele bez względu na wzmocnienie statyczne obiektu na 2. stopniu. W takiej sytuacji stosowanie pierwszej metody organizacji pomiarów jest nieuzasadnione. Również dla obiektów na 2. stopniu o małym wzmocnieniu statycznym –

przy obiekcie na stopniu pierwszym z małą stałą czasową – pierwsza metoda organizacji pomiarów dostarcza lepsze wyniki identyfikacji. Na fakt ten zwrócono już uwagę przy okazji omawiania wpływu wartości stałej czasowej obiektu na 1. stopniu na identyfikację z wykorzystaniem obu metod organizacji pomiarów. Godna odnotowania jest również obserwacja, że wpływ wzmocnienia statycznego obiektu na stopniu drugim jest zdecydowanie słabszy w stosunku do wpływu wartości stałej czasowej obiektu na stopniu pierwszym dla obu metod organizacji pomiarów.

Przedstawione porównanie wyników identyfikacji znajduje swoje potwierdzenie w teoretycznej analizie ograniczeń ciągów błędów pomiarowych. Z rozważań tych wynika m. in., że wykorzystanie pierwszej metody organizacji pomiarów dla obiektów na pierwszym stopniu o małej stałej czasowej powinno gwarantować mniejsze błędy pomiarowe w stosunku do drugiej metody organizacji pomiarów nawet dla obiektów na stopniu drugim o stosunkowo dużym wzmocnieniu statycznym, ze względu na bardzo niewielką wartość ograniczenia ciągu błędów pierwszej metody pomiarowej skalowaną przez współczynnik wzmocnienia statycznego obiektu na stopniu drugim wyrażony przez K_2 .

5.5.3. Szybkość sygnału wejściowego na 1. stopniu

Identyfikacja na stopniu pierwszym przeprowadzana z wykorzystaniem pierwszej metody organizacji pomiarów wykazuje niewielką zależność od szybkości zmian sygnału wejściowego na stopniu pierwszym. Dla obiektów na 1. stopniu o małej stałej czasowej widoczne jest nieznaczne polepszenie wyników identyfikacji dla wolnozmiennych sygnałów na stopniu pierwszym (Tablica 5.2 i Rys. 5.5 oraz Tablica 5.22 i Rys. 5.67). Ze względu na złe wyniki identyfikacji uzyskiwane na 1. stopniu dla obiektów o dużej stałej czasowej bardzo trudno wskazać na zależność pomiędzy wynikami identyfikacji a szybkością zmienności sygnału na 1. stopniu. W większym stopniu od szybkości pobudzenia na 1. stopniu uzależniona jest identyfikacja na stopniu drugim. Dla wszystkich zbadanych przypadków, bez względu na własności obiektów na obu stopniach, zauważalne było pewne pogorszenie wyników estymacji parametrów wielomianu $B_2(q^{-1})$ na stopniu drugim wraz ze zmniejszeniem szybkości zmian sygnału wejściowego na 1. stopniu. Widoczne jest to na przykład dla obiektów na 1. stopniu o małej stałej czasowej (Tablica 5.2, Rys. 5.6 i

Rys. 5.7 oraz Tablica 5.22, Rys. 5.65 i Rys. 5.66). Równocześnie wyniki estymacji parametrów wielomianu $A_2(q^{-1})$ na stopniu drugim nie wykazywały ścisłej zależności od szybkości zmian pobudzenia na 1. stopniu. Wraz ze spadkiem szybkości zmian sygnału na 1. stopniu wyniki identyfikacji raz ulegały nieznacznemu polepszeniu raz pogorszeniu. Niewielka zależność wyników identyfikacji przeprowadzanej z wykorzystaniem pierwszej metody organizacji pomiarów od szybkości zmian pobudzenia na 1. stopniu znajduje swoje potwierdzenie we wnioskach płynących z rozważań teoretycznych dotyczących błędu pomiarowego popełnianego podczas użycia tej metody. Ze względu na różną zależność wyników identyfikacji uzyskiwanych na obu stopniach od szybkości zmian pobudzenia na 1. stopniu bardzo trudno w sposób jednoznaczny wskazać taki charakter szybkości zmian pobudzenia na 1. stopniu – wolnozmienny bądź szybkozmienny – dla danych własności obiektów na obu stopniach i pozostałych parametrów eksperymentu, dla którego wyniki estymacji parametrów obiektu dwustopniowego byłyby najlepsze.

Estymacja parametrów przeprowadzana na 1. stopniu z wykorzystaniem drugiej metody organizacji pomiarów wykazuje pewną zależność od szybkości zmian sygnału pobudzenia obiektu na stopniu pierwszym. W większości przebadanych przypadków zaobserwowano niewielką poprawę identyfikacji na 1. stopniu wraz ze zwiększeniem szybkości zmian sygnału. Widać to zarówno dla obiektów na 1. stopniu o małej stałej czasowej i obiektów na 2. stopniu o małym wzmocnieniu statycznym (Tablica 5.3 , Rys. 5.8 oraz Tablica 5.23, Rys. 5.69) jak i dla obiektów na 1. stopniu z dużą stałą czasową i obiektów na stopniu drugim o dużym wzmocnieniu statycznym (Tablica 5.4, Rys. 5.12 oraz Tablica 5.24, Rys. 5.73). Analogiczna zależność widoczna jest również dla identyfikacji przeprowadzonej na 2. stopniu. Tu również bez względu na własności obiektów na pierwszym i drugim stopniu identyfikacja ulega poprawie wraz ze wzrostem szybkości zmian pobudzenia na 1. stopniu. Jest to widoczne na przykład dla obiektów o dużej stałej czasowej na 1. stopniu i małym wzmocnieniu statycznym na stopniu drugim (Tablica 5.5, Rys. 5.14 i Rys. 5.16 oraz Tablica 5.25, Rys. 5.74 i Rys. 5.75). Takie zachowanie algorytmów identyfikacji nie znajduje swojego uzasadnienia w wynikach rozważań poświęconych analizie błędu pomiarowego popełnianego przy wykorzystaniu drugiej metody organizacji pomiarów.

Przeprowadzone wówczas rozważania prowadziły do wniosku, że zwiększenie szybkości zmian pobudzenia na 1. stopniu spowoduje wzrost ograniczenia ciągu błędów pomiarowych, powodując możliwe pogorszenie uzyskiwanych w wyniku identyfikacji modeli dwustopniowych. Wyniki eksperymentu wskazują na odwrotną zależność: zwiększenie szybkości zmian sygnału na 1. stopniu powoduje polepszenie wyników identyfikacji. Należy jednak pamiętać, że wniosek mówiący o wpływie szybkości zmian sygnału na 1. stopniu został sformułowany w oparciu o uproszczenie wiążące szybkość zmian sygnału z wartościami, które ten sygnał osiąga. Do rozważań teoretycznych jako szybkozmienny sygnał przyjęto funkcję potęgową o wykładniku 3 w stosunku do przyjętego jako wolnozmienny sygnału liniowego. Na potrzeby badań symulacyjnych szybkość pobudzenia na 1. stopniu zrealizowano zwiększając częstotliwość zmian sygnału pozostawiając równocześnie jego amplitudę bez zmian. Obserwacja zachowania się algorytmów identyfikacji wykorzystujących drugą metodę organizacji pomiarów pozwala obecnie na sprecyzowanie rekomendacji wyboru tej metody w zależności od szybkości zmian pobudzenia na 1. stopniu. Zwiększenie samej szybkości zmian sygnału wejściowego na 1. stopniu bez zmiany jego amplitudy nie prowadzi do pogorszenia wyników identyfikacji dla drugiej metody organizacji pomiarów. Zgodnie z przeprowadzonymi rozważaniami nad błędem pomiarowym, pogorszenia takiego można się spodziewać przy równoczesnym zwiększeniu wartości osiągniętych przez pobudzenie.

Dla drugiej metody organizacji pomiarów najlepsze wyniki identyfikacji na obu stopniach uzyskiwano dla szybkozmiennych pobudzeń na 1. stopniu, wolnozmiennych pobudzeń na stopniu drugim oraz obiektu na 1. stopniu o małym wzmocnieniu statycznym i obiektu na stopniu drugim o małej wartości stałej czasowej (Tablica 5.16, Rys. 5.47, Rys. 5.48 i Rys. 5.49).

Pierwsza metoda organizacji pomiarów w mniejszym stopniu zależy od szybkości zmian sygnału na 1. stopniu w stosunku do drugiej metody organizacji pomiarów. Jest to szczególnie widoczne dla identyfikacji z wykorzystaniem pierwszej metody na 1. stopniu, gdzie zmiana szybkości pobudzenia pozostaje praktycznie bez wpływu na uzyskiwane wyniki. Nieco inaczej zachowują się algorytmy identyfikacji wykorzystujące drugą metodę

organizacji pomiarów. Dla tej metody widoczne jest pewne polepszenie identyfikacji wraz ze zwiększeniem szybkości zmian pobudzenia na 1. stopniu.

5.5.4. Szybkość sygnału wejściowego na 2. stopniu

Wyniki identyfikacji na stopniu pierwszym, uzyskiwane dzięki zastosowaniu pierwszej metody organizacji pomiarów w niewielkim stopniu zależą od szybkości zmian pobudzenia na stopniu drugim. Dla obiektów na 1. stopniu z małą stałą czasową, bez względu na wartość współczynnika wzmocnienia statycznego obiektu na 2. stopniu widoczna jest niewielka poprawa wyników identyfikacji wraz ze zmniejszeniem szybkości zmian pobudzenia na drugim stopniu (Tablica 5.2 oraz Tablica 5.18 i Tablica 5.3 oraz Tablica 5.19). Z kolei dla obiektów na 1. stopniu z dużą stałą czasową wyniki identyfikacji na stopniu pierwszym są na tyle złe, że bardzo trudno wskazać ich zależność od szybkości zmian pobudzenia na 2. stopniu. Nieco mocniejszy wpływ zmian szybkości zmienności pobudzenia na stopniu drugim jest zauważalny dla identyfikacji na 2. stopniu. Widać to zwłaszcza wyraźnie dla obiektu na 1. stopniu z małą stałą czasową, obiektu na 2. stopniu z dużym wzmocnieniem statycznym oraz szybkozmiennego pobudzenia na stopniu pierwszym. Wyniki identyfikacji na stopniu drugim są wówczas lepsze dla wolnozmiennego sygnału na 2. stopniu (Tablica 5.2 oraz Tablica 5.18 i Rys. 5.6, Rys. 5.7 oraz Rys. 5.53, Rys. 5.54).

Najlepsze – w kontekście szybkości pobudzenia na 2. stopniu – wyniki identyfikacji przeprowadzonej przy pomocy pierwszej metody organizacji pomiarów uzyskano dla szybkozmiennego sygnału na 1. stopniu, obiektu na 1. stopniu z małą wartością stałej czasowej oraz obiektu na stopniu drugim z małym wzmocnieniem statycznym, pobudzanego wolnozmiennym sygnałem wejściowym. Uzyskane wówczas parametry oraz własności modeli na obu stopniach bardzo dobrze odpowiadają parametrom i właściwościom obiektów rzeczywistych (Tablica 5.3, Rys. 5.9 i Rys. 5.10). Obserwacja taka potwierdza wnioski płynące z analizy teoretycznej ograniczenia błędów pomiarowych. Szybkość zmian sygnału wejściowego na 2. stopniu została na potrzeby tych rozważań wyrażona przez współczynnik λ_2 skalujący ograniczenie błędów pomiarowych.

Działanie algorytmów identyfikacji przetwarzających pomiary uzyskane z użyciem drugiej metody organizacji pomiarów wykazuje wyraźną zależność od zmian szybkości pobudzenia

na 2. stopniu. Dla wszystkich przebadanych przypadków, wyniki identyfikacji na 1. stopniu okazywały się lepsze przy wolnozmiennych pobudzeniach na stopniu drugim. Widać to – zwłaszcza dla współczynników wielomianu $A_1(q^{-1})$ – dla obiektów o różnych własnościach na 1. i 2. stopniu (Tablica 5.14 oraz Tablica 5.30, Tablica 5.15 oraz Tablica 5.31, Tablica 5.16 oraz Tablica 5.32 i Tablica 5.17 oraz Tablica 5.33). Wpływ ten utrzymuje się również dla identyfikacji na 2. stopniu i jest bardzo wyraźny dla obiektów na stopniu pierwszym o dużej stałej czasowej (Tablica 5.16 oraz Tablica 5.32, Tablica 5.17 oraz Tablica 5.33, Rys. 5.47 i Rys. 5.48 oraz Rys. 5.59 i Rys. 5.96).

Biorąc pod uwagę szybkość zmian pobudzenia na 2. stopniu najlepsze wyniki identyfikacji na 1. stopniu uzyskano dla obiektu na 1. stopniu o dużej stałej czasowej, obiektu na 2. stopniu o małym wzmocnieniu statycznym, długiego czasu próbkowania τ_2 ($K = 20$) oraz szybkozmiennego pobudzenia na stopniu pierwszym i wolnozmiennego na stopniu drugim (Tablica 5.17 i Rys. 5.52). Dla tego samego przypadku uzyskano również najlepsze wyniki identyfikacji na 2. stopniu.

Pierwsza metoda organizacji pomiarów charakteryzuje się zdecydowanie mniejszą wrażliwością na zmiany szybkości sygnału na 2. stopniu w stosunku do drugiej metody organizacji pomiarów. Zarówno dla szybkozmiennych jak i wolnozmiennych przebiegów na 2. stopniu – tam, gdzie pierwsza metoda organizacji pomiarów może być stosowana, czyli dla obiektów na stopniu pierwszym o małej stałej czasowej – wyniki uzyskiwane dla pierwszej metody są do siebie zbliżone. Zupełnie inaczej zachowują się algorytmy identyfikacji wykorzystujące drugą metodę organizacji pomiarów. Dla tej metody widoczne jest wyraźne polepszenie identyfikacji wraz ze zmniejszeniem szybkości zmian pobudzenia na 2. stopniu. Odpowiada to rozważaniom teoretycznym.

Porównując wyniki identyfikacji otrzymane z wykorzystaniem pierwszej metody organizacji pomiarów w stosunku do wyników otrzymanych z wykorzystaniem drugiej metody, dla wolnozmiennego pobudzenia na 2. stopniu lepsze wyniki na obu stopniach uzyskuje pierwsza metoda organizacji pomiarów (Tablica 5.3, Rys. 5.8, Rys. 5.9 i Rys. 5.10 oraz Tablica 5.17, Rys. 5.50, Rys. 5.51 i Rys. 5.52). Różnica ta staje się jeszcze bardziej wyraźna dla szybkozmiennego pobudzenia na 2. stopniu (Tablica 5.18, Rys. 5.53,

Rys. 5.54 i Rys. 5.55 oraz Tablica 5.33, Rys. 5.98, Rys. 5.99 i Rys. 5.100). Warunkiem jest tu jednak ogólna zasada stosowania pierwszej metody organizacji pomiarów – obiekt na 1. stopniu powinien posiadać odpowiednio małą stałą czasową.

5.5.5. Parametr N pierwszej metody organizacji pomiarów

Podstawowa idea pierwszej metody organizacji pomiarów, przedstawiona w części 3.2.1. zakłada dwa różne takty pomiarowe na 1. stopniu τ_1 oraz τ_2 , gdzie takt τ_2 odpowiada taktowi działania otrzymanego w wyniku identyfikacji dyskretnego modelu dwustopniowego. Na potrzeby przeprowadzonych rozważań wprowadzono relację (3.1) wiążącą oba takty pomiarowe za pomocą parametru N . W badaniach przyjęto, że długiemu taktowi τ_2 odpowiada $N = 30$ a krótkiemu τ_2 odpowiada $N = 20$. Poniżej przedstawiono omówienie wyników badań wpływu wartości parametru N na uzyskiwane wyniki identyfikacji przeprowadzonej z wykorzystaniem pierwszej metody organizacji pomiarów. Dla wszystkich zbadanych przypadków identyfikacja 1. stopniu przeprowadzona przy użyciu pierwszej metody organizacji pomiarów wykazywała zależność od wartości parametru N . Wraz ze zmniejszaniem parametru N – co odpowiada zmniejszaniu taktu próbkowania τ_2 względem taktu τ_1 – wyniki identyfikacji nieznacznie poprawiały się. Działo się to zarówno dla obiektu 1. stopniu o małej stałej czasowej oraz obiektu na 2. stopniu o dużym wzmocnieniu statycznym (Tablica 5.2 i Rys. 5.5 oraz Tablica 5.6 i Rys. 5.19) jak i obiektu 1. stopniu o małej stałej czasowej oraz obiektu na 2. stopniu o małym wzmocnieniu statycznym (Tablica 5.3 i Rys. 5.8 oraz Tablica 5.7 i Rys. 5.22). Również dla obiektu 1. stopniu o dużej stałej czasowej, mimo bardzo złych wyników identyfikacji, widoczna była nieznaczna poprawa identyfikacji na 1. stopniu. Obserwowany fakt nie zgadza się z wnioskami sformułowanymi na podstawie analizy wpływu parametru N na popełniane błędy pomiarowe. Analiza teoretyczna przewidywała bowiem pewne zmniejszenie ograniczenia błędów pomiarowych – a co za tym idzie możliwe polepszenie wyników identyfikacji – wraz ze wzrostem długości taktu τ_2 względem τ_1 , czyli wraz ze wzrostem wartości parametru N . Również dla identyfikacji na 2. stopniu zmniejszenie wartości N powodowało polepszenie wyników identyfikacji. Miało to miejsce dla wszystkich zbadanych przypadków z wyjątkiem konfiguracji: obiekt na 1. stopniu o małej stałej czasowej, obiekt na 2. stopniu o dużym

wzmocnieniu statycznym, gdzie wraz ze wzrostem wartości N własności dynamiczne (określone przez rozkład biegunów – Rys. 5.7 oraz Rys. 5.18) otrzymanego modelu na 2. stopniu poprawiły się, przy równoczesnym pogorszeniu własności statycznych wyrażonych przez współczynnik wzmocnienia statycznego.

Najlepsze wyniki identyfikacji na 1. stopniu w kontekście wartości parametru N uzyskano dla małych wartości $N = 20$, obiektu na 1. stopniu o małej stałej czasowej oraz obiektu na 2. stopniu o dużym wzmocnieniu statycznym przy szybkozmiennym pobudzeniu na stopniu pierwszym i wolnozmiennym na stopniu drugim. Na 2. stopniu model o najlepszych własnościach dynamicznych otrzymano dla przypadku $N = 30$ (Tablica 5.18), natomiast najlepsze własności statyczne posiadał model dla $N = 20$ (Rys. 5.6).

5.5.6. Parametr K drugiej metody organizacji pomiarów

Druga metoda organizacji pomiarów, przedstawiona w części 3.2.2., zakłada istnienie obiektu o dwóch różnych taktach działania: τ_1 na 1. stopniu oraz τ_2 na 2. stopniu. Dla takiego obiektu konieczne jest zastosowanie różnych taktów pomiarowych, równych taktom działania obiektów na obu stopniach. Relacja wiążąca oba takty pomiarowe za pomocą parametru K została określona jako

$$\tau_2 = K\tau_1.$$

W badaniach przyjęto, że długiemu taktowi τ_2 odpowiada $K = 20$ a krótkiemu τ_2 odpowiada $K = 10$. Poniżej przedstawiono omówienie wyników badań wpływu wartości parametru K na uzyskiwane wyniki identyfikacji przeprowadzonej z wykorzystaniem drugiej metody organizacji pomiarów.

Na uzyskiwane przy użyciu drugiej metody organizacji pomiarów wyniki identyfikacji na 1. stopniu zmiana parametru K – czyli zmiana taktu pomiarowego τ_2 – pozostaje praktycznie bez wpływu. Dla tych przypadków, gdzie uzyskiwano satysfakcjonujące wyniki identyfikacji na 1. stopniu, czyli dla obiektów na stopniu pierwszym o dużej stałej czasowej bez względu na wielkość wzmocnienia statycznego obiektu na 2. stopniu, zmiana wartości K nie wpływała w sposób widoczny na wyniki identyfikacji (Tablica 5.12, Rys. 5.37 oraz Tablica 5.16, Rys. 5.49). Wpływ parametru K stawał się jednak wyraźny dla identyfikacji przeprowadzanej na 2. stopniu. W przypadkach, w których wyniki identyfikacji mogą być porównane czyli dla obiektów na stopniu pierwszym o dużej stałej czasowej, widoczna była

poprawa identyfikacji parametrów wraz ze zwiększeniem wartości K , co odpowiadało zwiększeniu długości taktu pomiarowego τ_2 . Mimo popełniania większych błędów metody wydłużenie serii pomiarowej miało w tym przypadku decydujący wpływ na wyniki identyfikacji. Tym należy tłumaczyć brak zgodności z rekomendacją wyboru parametru, sformułowaną na podstawie rozważań nad błędami pomiarowymi popełnianymi podczas wykorzystania drugiej metody organizacji pomiarów.

Używając do estymacji parametrów obiektu dwustopniowego drugą metodę organizacji pomiarów, najlepsze w kontekście wartości parametru K wyniki identyfikacji na obu stopniach uzyskano dla dużych wartości $K = 20$, co odpowiada długiemu taktowi pomiarowemu τ_2 . Wówczas, równie dobre wyniki identyfikacji otrzymano dla szybkich pobudzeń na 1. stopniu, wolnych na stopniu drugim, obiektu na 1. stopniu o dużej stałej czasowej bez względu na wartość wzmocnienia statycznego obiektu na 2. stopniu (Tablica 5.16, Rys. 5.47, Rys. 5.48 i Rys. 5.49 oraz Tablica 5.17, Rys. 5.50, Rys. 5.51 i Rys. 5.52).

Rozdział 6. Wnioski końcowe

6.1. Podsumowanie

W pracy zbadano możliwość wykorzystania rekurencyjnych algorytmów identyfikacji do wyznaczania estymat parametrów dwustopniowych obiektów dynamicznych. Rozważania rozpoczęto od przypadku identyfikacji dwustopniowej wykorzystującej organizację pomiarów z powtarzaniem sygnału wejściowego na 2. stopniu a zakończono na dwustopniowej identyfikacji rekurencyjnej przeprowadzanej na bieżąco. W celu przeprowadzenia procesu identyfikacji na bieżąco zaproponowano dwie metody organizacji pomiarów. Dla obu metod opracowano algorytmy identyfikacji, zarówno rekurencyjne jak i przetwarzające kompletne serie pomiarowe. Każdy z zaproponowanych algorytmów został zrealizowany w dwóch wariantach: wykorzystujący metodę najmniejszych kwadratów oraz metodę zmiennych instrumentalnych. Sformułowano rekomendacje wyboru każdej z koncepcji organizacji pomiarów, biorące pod uwagę posiadaną wiedzę a priori o identyfikowanym obiekcie dwustopniowym oraz charakter sygnałów wejściowych na obu stopniach. Dodatkowo, sformułowano rekomendacje wyboru optymalnych parametrów eksperymentu. Działanie zaproponowanych algorytmów identyfikacji oraz trafność sformułowanych rekomendacji zbadano w trakcie badań symulacyjnych do przeprowadzenia których opracowano odpowiedni symulator.

Szczegółowe rezultaty pracy są następujące:

1. W przypadku przeprowadzania eksperymentu pomiarowego na bieżąco, dla obiektów dynamicznych na pierwszym stopniu o małej wartości stałej czasowej wykazano zdecydowanie lepsze działanie algorytmów identyfikacji wykorzystujących pierwszą metodę organizacji pomiarów.
2. Dla eksperymentu pomiarowego przeprowadzanego na bieżąco, wykazano przydatność drugiej metody organizacji pomiarów dla obiektów na drugim stopniu o dużej wartości stałej czasowej oraz małą wartością współczynnika wzmocnienia statycznego.
3. Dla eksperymentu przeprowadzanego na bieżąco wykazano, że poprawne działanie algorytmów wykorzystujących pierwszą metodę organizacji pomiarów w niewielkim stopniu zależy od szybkości zmian sygnału na wejściu obiektu na pierwszym stopniu

dla obiektów na pierwszym stopniu z odpowiednio małą wartością stałej czasowej. Również szybkość zmian sygnału na stopniu drugim ma niewielkie znaczenie dla obiektów na pierwszym stopniu o odpowiednio małej stałej czasowej.

4. Wykazano, że dla eksperymentu przeprowadzanego na bieżąco wyniki identyfikacji uzyskane przy wykorzystaniu drugiej metody organizacji pomiarów w niewielkim stopniu zależą od szybkości zmian sygnału na pierwszym stopniu. Równocześnie, szybkozmienne sygnały na wejściu stopnia drugiego powodują znaczne pogorszenie działania algorytmów identyfikacji na obu stopniach.

6.2. Rekomendacje dalszych badań

Propozycje dalszych prac można podzielić na dwa zakresy tematyczne. Pierwszy dotyczyć będzie analiz i badań rekurencyjnych procedur identyfikacji dwustopniowej. Drugi rozwoju metodyki formułowania rekomendacji wyboru metody organizacji pomiarów i parametrów eksperymentu.

Propozycje dalszych badań nad rekurencyjnymi algorytmami identyfikacji dwustopniowej:

1. Konieczność wykonania analiz zbieżności działania algorytmów. Jest to szczególnie istotne dla rekurencyjnej identyfikacji na 2. stopniu.
2. Analiza działania zaproponowanych algorytmów dla przypadku identyfikacji w warunkach losowych.
3. Zbadanie możliwości wykorzystania na potrzeby rekurencyjnej identyfikacji dwustopniowej innych procedur niż metody oparte na MNK.

Propozycje dalszych prac nad metodyką formułowania rekomendacji wyboru metody obejmują:

1. Opracowanie w ramach zaproponowanej metodologii analitycznej rekomendacji dla obiektów i sygnałów o innych postaciach. W szczególności dotyczy to:
 - a.) sformułowania rekomendacji dla ogólnego założenia dotyczącego wartości parametru $a(k)$

$$a(k) \in \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n_1}, b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1m_1}\},$$

- b.) sformułowania rekomendacji dla obiektów o wyższych rzędach na obu stopniach,
- c.) sformułowania rekomendacji dla dowolnego sygnału na 2. stopniu.

2. Ocenę możliwości wykorzystania na potrzeby formułowania rekomendacji wyboru analizy wrażliwości obiektów dynamicznych.

Literatura

- [1] Abdel ghany A. M., Two-stage identification algorithms and its application in computer adaptive control (Ph. D. Thesis), Report ICSE Ser. PRE. No. 1, Technical University of Wrocław, Wrocław, 1994.
- [2] Abonyi J., Babuska R., Local and global identification and interpretation of parameters in Takagi-Sugeno fuzzy models, The Pennsylvania State University, 2000.
- [3] Andersen B.D.O., Moore J.B., Filtracja optymalna, WNT, Warszawa, 1984.
- [4] Arafah S.A., Sage A.P., Multilevel discrete time systems identification for large scale systems, Int. Journal on Systems Science, vol. 5, 1974, pp. 753-783.
- [5] Arafah S.A., Sage A.P., Hierarchical systems identification of states and parameters in interconnected power systems, Int. Journal on Systems Science, vol. 14, 1978, pp. 817-865.
- [6] Astrid P., Weiland S., Twerda A., Reduced order modeling of an industrial glass feeder model, Proc. of 13th IFAC Symposium on System Identification, Rotterdam, Netherlands, 2003, pp. 1437-1441.
- [7] Azarbayejani, A., Pentland, A., Recursive estimation of motion, structure, and focal length, IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, 17(6), 1995.
- [8] Åstrom K.J., Theory and applications of adaptive control – a survey, Automatica, 19, 1983, pp. 471-486.
- [9] Åstrom K.J., Wittenmark B., Computer-Controlled Systems, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1996.
- [10] Åstrom K.J., Wittenmark B., Adaptive Control, New York, USA, Addison-Wesley, 1989.
- [11] Baseville M., Detecting Changes in Signals and Systems – a Survey, Automatica, 24, 1988, pp. 309-326.
- [12] Bierman G.J., Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation, Academic Press Inc., New York, 1977.

- [13] Borzemski L., Koszałka L., Kurzyński M., Lebidiewa S., Funkcje i zastosowanie komputerowego systemu eksperymentowania z rozproszoną bazą danych, Raport ISiTS serii SPR 62/63, Politechnika Wrocławska, Wrocław, 1983.
- [14] Borzemski L., Lebidiewa S., Data base organization in the multistage experiment, Proc. of IFAC Workshop on Scientific Experiments and Laboratory Procedures Automation (SELPA) Smolenice, 1980, pp.79-100.
- [15] Bubnicki Z., Optimization problems in large scale systems modeling and identification, Staszak Ed. Large Scale Systems, Pergamon Press, Oxford, 1984, pp. 411-416.
- [16] Bubnicki Z., Identification of Control Plants, PWN-Elsevier, Warszawa-Amsterdam-Oxford-New York, 1980.
- [17] Bubnicki Z., Global and local identification of complex systems with cascade structure, Systems Science, vol. 1, no. 1, 1975, pp. 55-65.
- [18] Bubnicki Z., Global modeling and identification of complex systems, Proc. of 7th IFAC/IFORS Symp., York, UK, 1985, Identification and Systems Parameter Estimation, Pergamon Press, Oxford-New York-Toronto-Sydney-Frankfurt, 1985, pp. 261-263.
- [19] Bubnicki Z., Optimal model of complex operation systems, 6^e Congress International de Cybernetique et de Systemique, College de Systemique de l'AFCET, Paris 1984, pp. 871-876.
- [20] Bubnicki Z., On the multistage identification, Systems Science, vol. 3, no. 2, 1977, pp. 207-210.
- [21] Bubnicki Z., Teoria i algorytmy sterowania, PWN, Warszawa, 2002.
- [22] Bubnicki Z., Świątek J., Separability and estimation problem in the identification of complex system, Proc. of 5th Polish-Italian Symposium: Application of Systems Theory to Economics, Management and Technology, Toruń 1980, PWN, Warszawa-Łódź 1980, pp. 128-137.
- [23] Bubnicki Z., Świątek J., On the parameter estimation in the identification of complex static system, Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, Serie des sciences techniques, vol. 29, no. 1-2, 1981, pp. 35-44.

- [24] Bubnicki Z., Świątek J., Separowalność i estymacja parametrów w identyfikacji złożonych systemów statycznych, *Archiwum Automatyki i Telemekhaniki*, t. 26, z. 3, 1981, s. 349-363.
- [25] Cichosz J., Komputerowe algorytmy złożonej identyfikacji rekurencyjnej (Rozprawa doktorska), Raporty WZSSK Seria PRE nr 1, Politechnika Wroclawska, Wroclaw, 2000.
- [26] Cichosz J., On two-stage recursive identification, 10th International Conference on System Modeling Control, Proceedings, Ed. P. Szczepanik, pp.129-134, Zakopane, 2001.
- [27] Cichosz J., Two-stage approach to the recursive identification, 2nd Conference on Computer Recognition Systems – KOSYR 2001, Eds M. Kurzyński, E. Puchała, M. Woźniak, Miłków, 2001, pp. 475-479.
- [28] Chung-hsien Wu, Jau-hung Chen, Text-Independent Speaker Identification Based on Small Training Data and Fast Search Algorithms, Institute of Information Engineering, National Cheng Kung University, Tainan, Taiwan, 1997.
- [29] Fortescue T.R., Kershenbaum L.S., Ydstie B.E., Implementation of self-tuning regulators with variable forgetting factors, *Automatica*, 17, 1981, pp. 831-835.
- [30] Fresewinkel T., Unbehauen H., On the identification of subsystems of decomposed large scale systems, Proc. Of 7th IFAC/IFORS Sym., York, UK, 1985, Identification and Systems Parameter Estimation, Pergamon Press, Oxford-New York-Toronto-Sydney-Frankfurt, 1985, pp. 267-272.
- [31] Gaybill F.A., An introduction to Linear Statistical Models, McGraw Hill, New York, 1961.
- [32] Goodwin G.C., Payne R.L., Dynamic System Identification: Experiment Design and Data Analysis, Academic Press Inc., New York, 1977.
- [33] Hasiewicz Z., Stankiewicz A., Two-stage scheme for global identification of interconnected steady-state systems, *International Journal of Systems Science*, Vol. 17, No. 11, 1986.
- [34] Haynes B. R., Global analysis and model validation in nonlinear system identification, *Journal of Nonlinear Dynamics*, 1991.

- [35] Hägglund T., Adaptive control of systems subject to large parameters changes, Proc. IFAC 9th World Congress, Budapest, 1984.
- [36] Hunt J.K., A Survey of Recursive Identification Algorithms, *Tras. Inst. MC*, 8, no.5, 1996, pp. 273-278.
- [37] Joseph P., Lewis J., Tou J., Plant identification in the presence of disturbances and application to digital adaptive systems, *Trans. AIEE Applications and Industry*, Vol. 80, 1961, pp.18-24.
- [38] Kendall M.G., Stuart A., *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. 2, Griffin, London, 1961.
- [39] Ko J.M., Sun Z.G., Ni Y.Q., Multi-stage identification scheme for detecting damage in cable-stayed Kap Shui Mun Bridge, *Engineering Structures*, Vol. 24, No. 7, 2002, pp. 857-868.
- [40] Kuderewicz J., *Przekształcenie Z i równania różnicowe*, PWN, Warszawa, 2000.
- [41] Kunisch K., Volkwein S., Model reduction of nonlinear dynamical systems utilizing proper orthogonal decomposition, *Proc. of 13th IFAC Symposium on System Identification*, Rotterdam, Netherlands, 2003, pp. 1423-1425.
- [42] Kurzyński M., Wielostopniowa identyfikacja obiektów statycznych w warunkach probabilistycznych, *Prace Naukowe Instytutu Cybernetyki Technicznej, PWn nr 46*, Politechnika Wrocławska, Wrocław, 1975, s. 47-58.
- [43] Larmant P., Dethonasy P., *Automatyka – układy liniowe*, Warszawa, 1983.
- [44] Lebiebiewa S., Problemowo zorientowana baza danych IDEN przeznaczona do wspomaganie procesu wielostopniowej identyfikacji, *Materiały XII Krajowej Konferencji Automatyki '99*, Opole, 1999.
- [45] Leja F., *Funkcje zespolone*, PWN, Warszawa, 1973.
- [46] Ljung L., *Systems Identification Theory for the User*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1999.
- [47] Ljung L., *System Identification Toolbox*, The MathWorks Inc., Natick, 1997.

- [48] Ljung L., Gunnarson S., Adaptation and Tracing in System Identification – a Survey, *Automatica*, 26, no. 1, 7-21, 1990.
- [49] Ljung L., Söderstrom T., *Theory and Practice of Recursive Identification*, MIT Press, Cambridge Mass., 1987.
- [50] Mahmoud M.S., Singh M.G., *Discrete Systems*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1984.
- [51] Marne D.Q., A method for estimating discrete time transfer function, *Advances of Control*, 2nd UKAC Control Convention, University of Bristol, 1967.
- [52] McLauchlan P., A batch/recursive algorithm for 3d scene reconstruction, *Conf. Computer Vision and Pattern Recognition*, volume 2, Hilton Head SC, USA, 2000, pp. 738-743.
- [53] Mitter S., Casadei S., *A Recursive Algorithm for the Complete Representation of Salient Contour Paths in a Graph*, MIT, 1998.
- [54] Nieredliński A., Mościński J., Ogonowski Z., *Regulacja adaptacyjna*, PWN, Warszawa, 1995.
- [55] Niu S. S., Ljung L., Bjock A., *Decomposition methods for least-squares parameter estimation*, Technical report, Department of Electrical Engineering, Linkoping University, Linkoping, S58183, Sweden, 1994.
- [56] Park J., Inoue S., Acquisition of sharp depth map from multiple cameras, *Processing: Image Commun.*, vol. 14, pp. 7-19, 1998.
- [57] Roumeliotis S., Sukhatme G., Bekey G., Sensor fault detection and identification in a mobile robot, *Proceedings of the 1998 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 1998.
- [58] Sage A.P., Melsa J.L., *Estimation Theory with Applications to Communications and Control*, McGraw-Hill, New York, 1971.
- [59] Sage A.P., Hierarchical estimation and identification method for large scale systems, Singh M., Tittli A., Ed., *Handbook of Large Scale Systems, Engineering Applications*, North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1979.

- [60] Söderström T., Stoica P., The instrumental variable methods for identification of dynamic system, Proc. of 7th IFAC/IFORS Symp., York, UK, Identification and Systems Parameter Estimation, Pergamon Press, Oxford-New York-Toronto-Sydney-Frankfurt, 1985, pp. 17-28.
- [61] Söderström T., Stoica P., Instrumental Variable Methods for System Identification, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 57, Springer Verlag, Berlin, 1983.
- [62] Świątek J., Rekurencyjne algorytmy identyfikacji dwustopniowej, Materiały XII Krajowej Konferencji Automatyki '99, Opole, 1999.
- [63] Świątek J., Parameter identification of complex systems with limited measurement possibilities, Proc. of International Conference on Systems Engineering, Coventry (Lanchester) Polytechnic, Coventry 1980, pp. 249-255.
- [64] Świątek J., Identyfikacja dwustopniowa oraz jej zastosowania techniczne i biomedyczne, Prace Naukowe Instytutu Sterowania i Techniki Systemów PWr, Politechnika Wrocławska, Wrocław, 1987.
- [65] Świątek J., Problems of complex systems identification for adaptive control, Proc. of 9th International Conference on Systems Engineering, Las Vegas, 1993, pp. 280-284.
- [66] Świątek J., Mathematical model and identification of haemodynamical process in cardiovascular system, Proc. of International Conference on Systems Engineering, Coventry (Lanchester) Polytechnic, Coventry, 1980, pp. 216-228.
- [67] Świątek J., Identification and sensitivity analysis for pulmonary circuit in the cardiovascular system, Riccardi L., Scott A., Ed., Biomathematics in 1980, North-Holland Pub. Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1982, pp. 265-279.
- [68] Świątek J., On the two-stage identification of dynamic system, Proc. of 5th International Conference on Systems Engineering, Dayton USA, IEEE Aeros. And Electr. Syst. Soc., Dayton, 1987, pp. 49-52.
- [69] Świątek J., Application of the multistage identification to modeling of absorption process, Proc. of 3rd International Conference on Systems Engineering, Wright State University, Dayton, 1984, pp. 205-208.

- [70] Świątek J., Application of the two stage identification to the modeling of packed distillation column with pulsator, Proc. 4th of International Conference on Systems Engineering, Coventry (Lanchester) Polytechnic, Coventry, 1985, pp. 251-258.
- [71] Świątek J., Global and local modeling of complex input output systems, International Conference on System Engineering XVI, Proceedings, Coventry, 2003.
- [72] Świątek J., Identyfikacja globalna systemów złożonych z modelem lokalnie optymalnym, Inżynieria wiedzy i systemy ekspertowe, pod red. Z. Bubnickiego i A. Grzecha, Wrocław, 2003, s. 367-374.
- [73] Świątek J., Global identification of complex systems with cascade structure. Identyfikacja globalna systemów złożonych o strukturze szeregowej, Proceedings of 7th International Conference Artificial Intelligence and Soft Computing - ICAISC 2004, Zakopane, 2004. pp. 990-995.
- [74] Świątek J., Global identification of complex systems, Proceedings of the Ninth International Symposium on Artificial Life and Robotics (AROB 9th '04), Oita, 2004, pp. 291-294.
- [75] Świątek J., Abel Ghany A. M., On-line identification algorithm for two stage dynamic system, Proc. of XI International Conference on System Science, Wrocław, 1992, pp. 164-168.
- [76] Świątek J., Gieracha M., Recursive two-stage estimation algorithms – simulation study, International Conference on System Engineering IX, Coventry, 2000.
- [77] Świątek J., Gieracha M., Estimation error as a measure for on-line two-stage experiment design, International Conference on Systems Science XIV, Wrocław, 2001.
- [78] Świątek J., Reynolds D., Two-stage approach to the modeling of the influence of drugs on the respiratory system, Proc. of 3rd International Conference on Systems Engineering, Wright State University, Dayton 1984, pp. 209-212.
- [79] Vermeulen P.T.M., Heemink A.W., Reduction of large-scale groundwater flow models via the Galerkin projection, Proc. of 13th IFAC Symposium on System Identification, Rotterdam, Netherlands, 2003, pp. 1425-1430.

- [80] Watanabe S., Tzafestas G., A hierarchical multiple model adaptive control of discrete-time stochastic systems for sensor and actuator uncertainties, *Automatica* Vol. 26, 5, September, 1990, pp. 875-886.
- [81] Widrow B., Stearns S. D., *Adaptive Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1985.
- [82] Willcox K.E., Megretski A., Model reduction for large-scale linear applications, Proc. of 13th IFAC Symposium on System Identification, Rotterdam, Netherlands, 2003, pp. 1431-1436.
- [83] Wilfert H.-H., Decentralized structures for state estimation in large scale systems, Proc. Of IFAC/IFORS Symposium Large Scale Systems: Theory and Applications, Polish Academy of Sciences, Warszawa 1983.
- [84] Wong K.Y., Polak E., Identification of linear discrete-time systems using instrumental variables, *IEEE Trans. Auto. Control*, 12, 1967, pp.707.
- [85] Young P., *Recursive Estimation and Time-Series Analysis*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokio, 1984.
- [86] Young P., Process parameter estimation and self adaptive control, Proc. IFAC Symp. Teddington, *Theory of Self Adaptive Control Systems*, Plenum Press, New York, 1966.
- [87] Young P., The instrumental variable method: A practical approach to identification of system parameters, Proc. of 7th IFAC/IFORS Symp., York, UK, *Identification and Systems Parameter Estimation*, Pergamon Press, Oxford-New York-Toronto-Sydney-Frankfurt, 1985, pp. 1-15.
- [88] Young P., The determination of the parameters of a dynamic process, *Radio Electron., Engineer (J. Brit. IERE)*, 29, pp. 345-362.
- [89] Young, P.C., An instrumental variable method for real-time identification of a noisy process, *Automatica*, 6, 1976, pp. 271-287.