

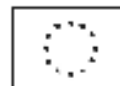


KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Politechnika Wrocławska

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Praktyczne wprowadzenie do opisu, analizy i symulacji dynamiki obiektów

Anna Czemplik

„Wzrost liczby absolwentów w Politechnice Wrocławskiej
na kierunkach o kluczowym znaczeniu dla gospodarki opartej na wiedzy”

”

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Recenzenci:

dr hab. inż. Iwona Karcz-Dulęba

© Copyright by Politechnika Wroclawska

OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCLAWSKIEJ
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50 – 370 Wrocław

ISBN 978-83-7493-689-7

Spis treści

WPROWADZENIE	5
CZĘŚĆ I: BADANIA ANALITYCZNE I MODELOWANIE DYNAMIKI.....	7
1. PODSTAWOWE POJĘCIA.....	7
1.1. Funkcje i równania	7
1.2. Opis statyczny i dynamiczny.....	8
1.3. Układy jedno- i wielowymiarowe.....	9
1.4. Dziedzina zmiennych zespolonych.....	11
2. SKŁADOWE ROZWIĄZANIA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWEGO LINIOWEGO	12
2.1. Klasyczna metoda rozwiązania	12
2.2. Bieguny układu a własności dynamiki.....	14
2.3. Układy liniowe i zlinearyzowane.....	15
3. METODY ANALIZY NA PRZYKŁADZIE MODELU DRUGIEGO RZĘDU	16
3.1. Model drugiego rzędu	16
3.2. Równanie oscylacyjne	16
3.3. Analiza i projektowanie układów drugiego rzędu	17
4. PORTRETY FAZOWE	19
4.1. Portrety fazowe układów liniowych	19
4.2. Portrety układów nieliniowych.....	20
5. RÓWNAŃ STANU.....	21
5.1. Układ równań różniczkowych	21
5.2. Przekształcenie równania n-tego rzędu do układu równań 1. rzędu	22
6. TRANSMITANCJE.....	24
6.1. Transmitancja i jej podstawowe własności	24
6.2. Transmitancje układów wielowymiarowych.....	25
6.3. Schematy blokowe (strukturalne).....	27
7. PODSTAWOWE OBIEKTY DYNAMIKI	29
7.1. Parametry i odpowiedzi członów dynamiki.....	29
7.2. Podstawowe człony w przekształceniach.....	31
7.3. Identyfikacja dynamiki metodą charakterystyk czasowych	32
8. CHARAKTERYSTYKI CZĘSTOTLIWOŚCIOWE	33
8.1. Transmitancja Fouriera i jej interpretacja	33
8.2. Rodzaje charakterystyk częstotliwościowych	33
8.3. Asymptoty charakterystyk Bodego.....	34
8.4. Identyfikacja dynamiki metodą charakterystyk częstotliwościowych	37
9. PODSUMOWANIE ANALITYCZNYCH METOD BADANIA DYNAMIKI	38
9.1. Wybrane własności układu liniowego	38
9.2. Analiza układów nieliniowych.....	38
10. KONSTRUKCJA I ANALIZA MODELI DYNAMIKI OBIEKTÓW	40
10.1. Zbiorniki – otwarte układy hydrauliczne.....	40
10.2. Obiekty cieplne – układy termokinetyczne	43
10.3. Obiekty mechaniczne liniowe.....	45
10.4. Układy elektryczne	47
10.5. Analogie.....	50
CZĘŚĆ II: BADANIA SYMULACYJNE.....	52
1. ZMIENNE, WYKRESY, SKRYPTY.....	52
1.1. Wprowadzenie – elementy.....	52
1.2. Przykłady – podstawowe funkcje i operacje.....	53
1.3. Zadania – zastosowanie macierzy i wykresów	53
2. CHARAKTERYSTYKI STATYCZNE	54
2.1. Wprowadzenie – parametry opisu statycznego	54
2.2. Przykład – statyczny układ sprzężony.....	54
2.3. Zadanie – generowanie charakterystyk statycznych	55
3. FUNKCJE CZASU – WYKRESY ROZWIĄZAŃ ANALITYCZNYCH	56
3.1. Wprowadzenie.....	56
3.2. Przykład – funkcje eksponencjalne.....	56
3.3. Zadania – badanie przebiegu złożonych funkcji.....	56
4. SYMULACYJNE ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH	58
4.1. Wprowadzenie – rozwiązanie analityczne i symulacyjne	58
4.2. Przykład – konstrukcja schematu symulacyjnego	58
4.3. Zadania – badanie układu 1. rzędu.....	59

5.	LINIOWY MODEL DRUGIEGO RZĘDU	60
5.1.	<i>Wprowadzenie – zastosowanie i forma modeli drugiego rzędu</i>	60
5.2.	<i>Przykład – poprawność charakterystyk czasowych i punkty pracy</i>	60
5.3.	<i>Zadania – charakterystyki czasowe modelu oscylacyjnego</i>	61
6.	PORTRETY FAZOWE	62
6.1.	<i>Wprowadzenie – warunki generowania portretów</i>	62
6.2.	<i>Przykład – automatyzacja badań</i>	62
6.3.	<i>Zadania – portrety układów liniowych</i>	63
6.4.	<i>Portrety układów nieliniowych</i>	63
7.	BADANIE OBIEKTÓW RZECZYWISTYCH (NA PRZYKŁADZIE ZBIORNIKÓW)	64
7.1.	<i>Wprowadzenie – założenia i ograniczenia modeli</i>	64
7.2.	<i>Przykład – weryfikacja poprawności schematu</i>	64
7.3.	<i>Zadania – badanie własności kaskad zbiorników</i>	65
8.	ALTERNATYWNE METODY SYMULACJI MODELI	66
8.1.	<i>Wprowadzenie – różne sposoby definiowania modeli</i>	66
8.2.	<i>Przykład – definicja modeli w blokach, funkcjach i plikach</i>	66
8.3.	<i>Zadania – program badania kaskady liniowej zapisany w skrypcie</i>	67
9.	PLANOWANIE BADAŃ (PROJEKT NA PRZYKŁADZIE OBIEKTÓW CIEPLNYCH)	68
9.1.	<i>Wprowadzenie – wybór metod</i>	68
9.2.	<i>Przykład – podstawowy program badań</i>	68
9.3.	<i>Zadania – badanie własności obiektu cieplnego</i>	69
10.	PODSTAWOWE CZŁONY DYNAMIKI W DZIEDZINIE CZASU	70
10.1.	<i>Wprowadzenie – człony dynamiki i rzeczywiste obiekty</i>	70
10.2.	<i>Przykład – definicja i badanie układów opartych na członach</i>	70
10.3.	<i>Zadania – definicje i odpowiedzi czasowe modeli</i>	71
11.	PODSTAWOWE CZŁONY DYNAMIKI W DZIEDZINIE CZĘSTOTLIWOŚCI	72
11.1.	<i>Wprowadzenie</i>	72
11.2.	<i>Przykłady – generowanie charakterystyk częstotliwościowych</i>	72
11.3.	<i>Zadania – dokładne i asymptotyczne charakterystyki Bodego</i>	72

+

Wprowadzenie

Podręcznik jest adresowany głównie do studentów kierunku automatyka i robotyka, i ma na celu praktyczne wprowadzenie do opisu, analizy i symulacji dynamiki prostych układów fizycznych. Zakres materiału ogranicza się do przedstawienia podstawowych metod, które wprowadzają Czytelnika w typowe problemy automatyki, czyli badanie reakcji obiektów na zachodzące zmiany w celu przygotowania do projektowania odpowiednich układów sterowania. Duży nacisk położono na fizyczną interpretację i praktyczne zastosowanie opisywanych metod w odniesieniu do zjawisk, które zachodzą w typowych procesach technologicznych. Poprzez studium prostych przypadków Czytelnik ma szansę nabyć pewnego doświadczenia, które pomoże zdefiniować napotykanne problemy, wybrać najbardziej skuteczną metodę postępowania i rozwiązywać bardziej złożone zadania.

Zakłada się, że Czytelnik posiada podstawowe wiadomości¹ na temat równań algebraicznych i różniczkowych, przekształcenia Laplace'a, zjawisk z fizyki klasycznej oraz pewne doświadczenie w pisaniu prostych programów. Do uzupełnienia wiedzy lub przy samodzielnym realizowaniu materiału pomocne będzie wykorzystanie specjalistycznych podręczników z fizyki, algebry, analizy, teorii sterowania, dokumentacji do programów symulacyjnych lub monografii łączącej te działy, na przykład „Modele dynamiki obiektów fizycznych dla inżynierów” [3]. W odnośnikach ze znakiem ⓘ znajdują się wskazania do konkretnych pozycji z literatury lub słowa kluczowe do poszukiwania odpowiedzi w słownikach czy poradnikach.

Podręcznik zawiera szereg zadań i pytań, często bez podawania odpowiedzi², co jest zaproszeniem do interaktywnej lektury, która ułatwia zrozumienie i zapamiętywanie. Czytelnik może jednak sprawdzić poprawność swoich odpowiedzi, realizując zadania różnymi sposobami i dochodząc do tego samego wyniku, np. analitycznie i symulacyjnie lub dwoma różnymi metodami analitycznymi. Przy okazji rozwijają się cenne umiejętności:

- samodzielnej weryfikacji przeprowadzonych analiz,
- doświadczenia w wyborze najprostszycy metod rozwiązywania zadanego problemu,
- oceny wiarygodności uzyskanych wyników symulacyjnych (zgodność z obliczeniami lub przewidywaniami),
- planowania badań (wybór interesujących problemów, pomijanie banalnych wyników).

Podręcznik został podzielony na dwie zasadnicze części. Pierwszą stanowią ćwiczenia analityczne z zakresu analizy własności modeli dynamiki a także konstrukcji takich modeli. Część druga to badania symulacyjne w środowisku Matlab, Scilab i/lub Octave przygotowane i weryfikowane na podstawie modeli dynamiki. Uzupełnieniem całości jest syntetyczne podsumowanie poruszanych zagadnień, pytania sprawdzające i zadania projektowe. Materiał można realizować w tej kolejności (czyli najpierw teoria, potem praktyka) lub równolegle (Tab.1), łącząc teorię i praktykę, w czym pomogą odnośniki (⇒) umieszczone w tekście i na marginesie. Studiując punkty z zakresu analizy ⓘ, modelowania ⓘ i symulacji ⓘ warto ciągle zaglądać do podsumowania i zadań w aneksach ⓘ

¹ w zakresie szkoły średniej i pierwszego roku studiów technicznych

² czasem tylko podpowiedzi – na końcu książki (oznaczone odnośnikiem z gwiazdką)

Tab.1. Połączenie badań analitycznych i symulacyjnych

I. Badania analityczne i modelowanie	II. Badania symulacyjne
I.1. Pojęcia: opis statyczny i dynamiczny, klasyfikacja, wielomiany, macierze, liczby zespolone	II.1. Wykresy, wektory, macierze: operacje na macierzach, rysowanie wykresów II.2. Charakterystyki statyczne
I.2. Rozwiązanie równania różniczkowego: składowa swoboda i wymuszone, położenie biegunów a odpowiedź skokowa/impulsowa (rozwiązanie analityczne i symulacyjne)	II.3. Funkcje czasu: złożenia funkcji eksponencjalnych i sinusoidalnych II.4. Symulacyjne rozwiązanie równania różniczkowego: tworzenie schematu i rozwiązanie równania 1. rzędu
I.3. Równanie oscylacyjne: postać równania, dwie metody analizy modeli 2 rzędu.	II.5. Liniowy model 2 rzędu: położenie biegunów i przebiegi czasowe dla różnych wartości ξ
I.4. Portrety fazowe (układy liniowe i nieliniowe)	II.6. Portrety fazowe: podstawowe typy portretów układów liniowych, przykład układu nieliniowego
I.10.1. Zbiorniki: zasady konstrukcji modeli, identyfikacja parametrów	II.7. Obiekty rzeczywiste 1. i 2 rzędu – liniowe i nieliniowe wersje modeli zbiorników
I.5. Równania stanu (analiza układu równań, przekształcenie do układu równań) I.6. Transmitancje (przekształcenie do transmitancji, układy wielowymiarowe, analiza)	II.8. Alternatywne metody symulacji modeli: bloki State-Space i Transfer Fcn, funkcje ss i tf oraz pliki funkcyjne
I.10.2. Obiekty cieplne: zasady konstrukcji, identyfikacja parametrów	II.9. Planowanie badań – na przykładzie obiektów cieplnych
I.7. Podstawowe obiekty dynamiki I.8. Charakterystyki częstotliwościowe	II.10. Człony dynamiki w dziedzinie czasu II.11. Człony dynamiki w dziedzinie częstotliwości
I.10.3. Układy mechaniczne I.10.4. Układy elektryczne	

Oznaczenia i symbole

- oznaczenia w ogólnych wzorach:

t – czas, s
 $u, u(t)$ – funkcja wejściowa (wejście/pobudzenie)
 $x, x(t)$ – rozwiązanie r. różniczkowego (odpowiedź układu)
 $x, x(t)$ – zmienna stanu (czasem także wyjście)
 $y, y(t)$ – wyjście
 $1(t)$ – skok jednostkowy
 $\delta(t)$ – impuls Diraca
 $h(t)$ – odpowiedź skokowa (reakcja na $1(t)$)
 $g(t)$ – odpowiedź impulsowa (reakcja na $\delta(t)$)

j – jednostka urojona
 s – zmienna zespolona
 K – wzmacnienie
 T, T_l – stałe czasowe, s
 T_d – czas różniczkowania, s
 T_i – czas całkowania, s
 α – część rzeczywista pierwiastka
 β – część urojona liczby zespolonej
 φ – przesunięcie fazowe, rad lub $^\circ$
 λ – biegun układu, pierwiastek wielomianu
 ξ – tłumienie (współczynnik tłumienia)
 ω – pulsacja ($2\pi f$), rad lub $^\circ$

- oznaczenia parametrów fizycznych:

A – powierzchnia, m^2
 b – współczynnik tłumienia (tarcia), Ns/m
 C – pojemność elektryczna, F=C/V
 C_v – pojemność cieplna, W/K
 c – współczynnik sztywności, N/m
 c_p – ciepło właściwe materiału, J/(kg·K)
 F – siła, N
 f – przepływ objętościowy, m^3/s
 g – przyspieszenie ziemskie, $9,81m/s^2$
 h – wysokość, m
 i – natężenie prądu, A
 K_c – współczynnik przewodzenia, W/K
 L – indukcyjność, H

m – masa, kg
 p – ciśnienie, Pa
 Q – ciepło, J=Ws
 q – strumień ciepła, moc, W
 R – rezystancja, $\Omega=V/A$
 T – temperatura, K lub $^\circ C$
 u – napięcie, V
 V – objętość, m^3
 v – prędkość, m/s
 x – przesunięcie, m
 Z – impedancja, $\Omega=V/A$
 ρ – gęstość materiału, kg/m^3

Ponieważ w programach symulacyjnych nie ma możliwości dokładnego odwzorowania wszystkich nazw zmiennych (nie ma indeksów), więc przyjęto następującą zasadę, że symbol główny jest pisany dużą literą a indeks – małymi literami. Na przykład zmiennej T_{wew} we wzorze odpowiada zmienna Twew w programie symulacyjnym.

Część I: Badania analityczne i modelowanie dynamiki

Przedmiotem opisywanych badań jest matematyczny opis układu fizycznego – obiektu (procesu) technologicznego, który będzie można wykorzystać do projektowania lub analizy samego obiektu lub sposobu sterowania tym obiektem.

1. Podstawowe pojęcia

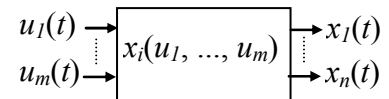
1.1. Funkcje i równania

Opis i badanie dynamiki obiektów wymaga pewnych podstawowych umiejętności z różnych działów matematyki elementarnej i analizy matematycznej. Zakres tych umiejętności wyznaczają na przykład stosowane pojęcia ¹. Wśród nich często pojawiają się funkcje elementarne:

- algebraiczne (wielomiany, funkcje wymierne i niewymierne),
- przestępne (funkcje wykładnicze i logarytmiczne, trygonometryczne i cyklometryczne),
- funkcje otrzymane przez działania algebraiczne i złożenia funkcji podstawowych.

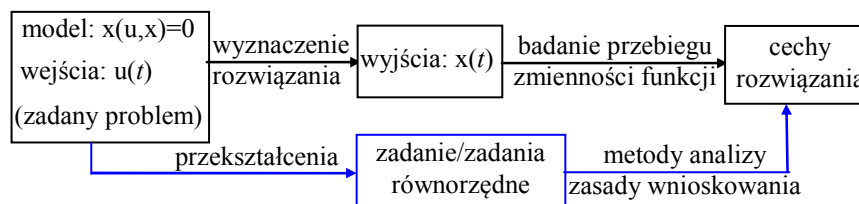
Pozostałe funkcje (nieelementarne) mogą być opisywane za pomocą na przykład kilku wzorów, [równań różniczkowych](#), [całek oznaczonych](#), [szeregów nieskończonych](#).

Wymienione typy funkcji są podstawą konstrukcji modeli (czyli zależności pomiędzy zmiennymi wejściowymi i wyjściowymi obiektów) ale służą również do opisu przebiegu zmian na wejściach i wyjściach obiektu (zależność zmiennych od czasu) – Rys. I-1.



Rys. I-1. Funkcje w opisie obiektu

W analizowanych dalej problemach dynamiki funkcje będą występować w [postaci analitycznej](#) lub [uwikłanej](#). Typowe zadanie z dziedziny polega na wyznaczeniu rozwiązania (to znaczy funkcji opisujących przebieg zmiennych wyjściowych obiektu) na podstawie znanej (założonej) funkcji opisującej stany/zmiany zmiennych wejściowych i modelu w postaci układu równań algebraicznych i/lub różniczkowych (często w postaci uwikłanej). Wzór, który jest rozwiązaniem tego zadania po pierwsze ma złożoną postać a po drugie może być bardzo trudny lub wręcz niemożliwy do wyznaczenia. Tymczasem w praktyce inżynierskiej zazwyczaj wzór nie jest potrzebny bo wystarczy znajomość charakterystycznych cech rozwiązania, które można określić w prostszy sposób, stosując przekształcenia i własności funkcji znane na przykład z algebry czy trygonometrii (Rys. I-2).



Rys. I-2. Analiza własności dynamicznych obiektu

Prosta klasyfikacja typu równań (funkcji) jest jednym z pierwszych elementów analizy własności, który pozwala określić od razu niektóre cechy obiektu i wybrać metodę dalszych badań. Podstawowa klasyfikacja dotyczy [liniowości](#) funkcji bowiem zdecydowana większość metod analitycznych jest przeznaczona dla modeli liniowych.

W badaniach dynamiki, poza pojęciem funkcji i jej analizą, stosowane są również [rozwinęcia funkcji w szeregi funkcyjne](#), które są z nią zbieżne. Typowym przykładem jest szereg Taylora, wykorzystywany do linearyzowania funkcji nieliniowych, czy szereg Fouriera stosowany w analizie częstotliwościowej układów ².

¹ Patrz: np. wstęp do analizy matematycznej. Rozdział I.1 jest swoistym zestawem słów kluczowych do zweryfikowania i uzupełnienia potrzebnej wiedzy

² Patrz: szereg (potęgowy) Taylora (szereg Maclaurina), szereg (trygonometryczny) Fouriera



1° Określ typ następujących funkcji elementarnych:

a) $y = ax^4 + 2x + 5$

d) $y = a^x$

g) $y = \log_a x$

b) $y = \frac{x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_2x^2 + b_1x + b_0}$

e) $y = \sqrt{\frac{x^2 + a_1x - 1}{2x + 1}}$

h) $y = 3e^{2x} \sin x$

c) $y = \arctg x$

f) $y = \sin x$

i) $y = \sqrt{ax^2 + b}$

j) $y = \sqrt{x^2 + \sin x}$

2° Przedstawione poniżej równania należą do różnych działów matematyki (jakich?) i mogą się być przykładem opisu własności obiektów

a) $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + bx(t) = u(t) + \dot{u}(t)$

d) $3x^3 + 2x^2 + 5x = ku$

b) $\ddot{x}(t) + a^2x(t) = au(t) + \dot{u}(t)$

e) $3ax(t) = ku(t)$

c) $\dot{x}(t) + x(t)u(t) = au(t)$

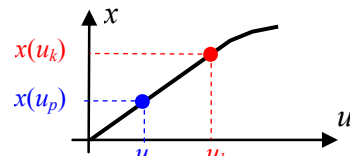
f) $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + b\sqrt{x(t)} = u(t)$

- Określ typ równania (algebraiczne/różniczkowe)
- Określ rząd (lub stopień), liniowość, stacjonarność
- Czym jest rozwiązanie równania – zbiorem, wartością, funkcją, ...?
- Jak nazywa się procedura wyznaczania tego rozwiązania?

1.2. Opis statyczny i dynamiczny

Matematyczny opis układów fizycznych można ogólnie podzielić na modele statyczne i dynamiczne¹.

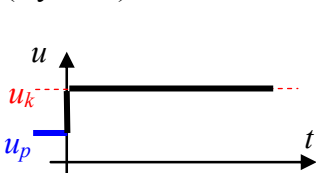
Model statyczny opisuje zależność pomiędzy zmiennymi wejściowymi i wyjściowymi układu w warunkach równowagi, czyli gdy nie ma zmian ani na wejściu, ani na wyjściu. Reprezentacją graficzną tego typu modeli jest **charakterystyka statyczna** (Rys. I-3), pozwalająca odczytać wartości wyjść na podstawie wartości wejść, np. $x(u_p)$, $x(u_k)$.



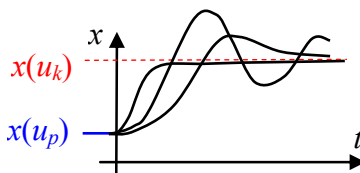
Rys. I-3. Charakterystyka statyczna

W najprostszych przypadkach wyjście jest liniową funkcją wejścia (np.: $x=Au$). W rzeczywistych warunkach zależności liniowe praktycznie nie występują, ale są stosowane jako przybliżenie opisu rzeczywistych obiektów.

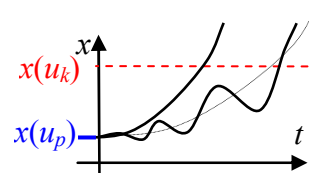
Model dynamiczny opisuje sposób reakcji układu na zmianę sygnału wejściowego. W badaniach stosuje się bardzo proste sygnały wejściowe, na przykład wymuszenie skokowe (Rys. I-4). Własności dynamiczne obiektu sprawiają, że jego reakcja nie jest natychmiastowa, czasem może mieć charakter oscylacyjny, a co najważniejsze nie zawsze kończy się dojściem do stanu równowagi (brak stabilności) – stąd wynika konieczność badania dynamiki obiektów. Najprostszą reprezentacją graficzną opisu dynamiki są **charakterystyki czasowe**, przedstawiające reakcje obiektu na określone wymuszenie, na przykład odpowiedzi skokowe (Rys. I-5).



Rys. I-4. Wymuszenie skokowe



Rys. I-5. Reakcje układu stabilnego i niestabilnego na wymuszenie skokowe



I.2

Podstawową analityczną formą modelu dynamiki jest równanie różniczkowe (najczęściej zwyczajne \Leftrightarrow), gdzie zmienną niezależną jest czas. Funkcja, która jest rozwiązaniem tego równania dla określonego wymuszenia i określonych warunków początkowych odpowiada charakterystyce czasowej. Powstaje pytanie – skąd wziąć taki model dla rzeczywistego obiektu \Leftrightarrow , czyli jak skonstruować model i zidentyfikować wartości parametrów?

I.10

Charakterystyki statyczne i czasowe (dynamiczne) obiektu można wyznaczyć na podstawie modelu matematycznego (jeśli jest znany) lub pomiarów na rzeczywistym obiekcie.

¹ bardziej precyzyjnie należałoby powiedzieć: model/opis własności statycznych i dynamicznych układu



- 1° Jak praktycznie zrealizować eksperyment mający na celu wyznaczenie charakterystyk statycznych i dynamicznych dla pomieszczenia ogrzewanego grzejnikiem elektrycznym o regulowanej mocy? Zmienną wyjściową jest temperatura wewnątrz pomieszczenia.
- 2° Podaj inne przykłady obiektów (procesów), dla których można by zdjąć charakterystyki statyczne i dynamiczne. Opisz odpowiedni eksperyment – sposób przeprowadzenia, potrzebne przyrządy.

1.3. Układy jedno- i wielowymiarowe

1.3.1. Wielomiany

Z pośród różnych obszarów matematyki szczególną rolę w analizie dynamiki obiektów pełnią zagadnienia algebraiczne opisujące własności wielomianów ¹ i metody wyznaczania ich miejsc zerowych, czyli pierwiastków równania:

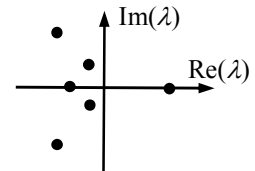
$$x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (I-1)$$

Pierwiastki wielomianu są liczbami rzeczywistymi (λ) lub sprzężonymi parami liczb zespolonych ($\alpha \pm j\omega$). Wielomian rzeczywisty n -tego stopnia ma n pierwiastków, przy czym mogą to być pierwiastki wielokrotne. Jeśli pierwiastki wielomianu są znane, to można go przedstawić w postaci iloczynu wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej drugiego:

$$(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x^2 + b_1 x + b_2) = 0 \quad (I-2)$$

gdzie czynniki pierwszego stopnia są związane z pierwiastkami rzeczywistymi λ_i , a czynniki drugiego stopnia z parami pierwiastków zespolonych². Na podstawie równoważności postaci (I-1) i (I-2) można na przykład sprawdzić poprawność wyznaczonych pierwiastków lub zastosować do obliczania pierwiastków ³. Dostępne są różne metody rozwiązywania równań wielomianowych. Pierwiastki wielomianów stopnia od 1 do 4 można wyznaczyć algebraicznie – za pomocą ogólnych wzorów na pierwiastki ⁴. Jeśli współczynniki wielomianu mają postać liczbową, to pierwiastki można wyznaczyć metodami numerycznymi (stosowane w programach symulacyjnych) ⁵.

Poza różnymi metodami wyznaczania wartości pierwiastków stosowane są również tak zwane **kryteria położenia pierwiastków** na płaszczyźnie zespolonej (Rys. I-6). Kryteria (np. Hurwitza, Routha) pozwalają na podstawie prostych operacji na współczynnikach wielomianu stwierdzić czy wszystkie pierwiastki leżą w lewej półpłaszczyźnie.



Rys. I-6. Płaszczyzna zespolona

Według **kryterium Routha** wszystkie pierwiastki równania $a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$ leżą w lewej półpłaszczyźnie jeśli wszystkie współczynniki wielomianu są różne od zera i mają jednakowy znak a wszystkie współczynniki pierwszej kolumny tablicy Routha są dodatnie:

$$\begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}; \quad b_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}, \quad b_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}, \quad b_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}} \quad (I-3)$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{-b_1}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{-b_1}, \quad \dots$$

$$d_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{-c_1}, \quad \dots$$

Jeśli warunki kryterium nie są spełnione, to można wyznaczyć ilość pierwiastków w prawej półpłaszczyźnie – jest ona równa liczbie zmian znaku w pierwszej tablicy Routha.

¹ Patrz: równania algebraiczne, wielomiany z parametrami rzeczywistymi,

² para zespolona $\alpha \pm j\omega$ odpowiada wielomianowi drugiego stopnia o ujemnym wyróżniku Δ – można go rozłożyć na czynniki pierwszego stopnia o zespolonych współczynnikach $(x - (\alpha + j\omega))(x - (\alpha - j\omega))$

³ Patrz: kanoniczna postać wielomianu, wzory Viète’ a

⁴ Patrz: wielomian stopnia drugiego/trzeciego/czwartego. Powyżej stopnia 4 wzory na pierwiastki nie istnieją

⁵ Patrz: metody numeryczne



1° Wyznacz pierwiastki następujących wielomianów:

a) $(x+1)(x-5)(x+2)$, b) $(x+a)(2x^2-2x+1)$, c) $2x^2+8x+8$.

2° Wybierz dowolne wartości współczynników wielomianu $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$. Określ położenie pierwiastków na płaszczyźnie zespolonej (zastosuj kryterium). Wyznacz wartości pierwiastków analitycznie (sprawdź symulacyjnie ⇨).

II.1

3° Przedstaw wielomian, który: a) ma jeden podwójny pierwiastek = 1, b) ma pierwiastki zespolone. Podaj współczynniki wielomianu (I-1) oraz jego rozkład na czynniki (I-2).

1.3.2. Układy równań

Pełny opis dynamiki układu często obejmuje kilka równań, które pozwalają wyznaczyć kilka niezależnych zmiennych wyjściowych. Modele w postaci układu równań liniowych są zapisywane przy pomocy wektorów i macierzy, i analizowane metodami z zakresu algebry liniowej ¹. Sformułowanie problemu w postaci macierzowej jest szczególnie preferowane podczas stosowania metod symulacyjnych (⇨). Podstawą metod są operacje algebraiczne na macierzach oraz obliczanie **wyznacznika** i **wartości własnych** macierzy.

II.1

Analiza własności modeli wielowymiarowych wymaga często rozwiązywania układów równań liniowych typu:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (I-4)$$

co można przedstawić też w zapisie macierzowym:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (I-5)$$

lub wektorowym:

$$\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \dots + \mathbf{a}_nx_n = \mathbf{b} \quad (I-6)$$

gdzie wektory/macierze współczynników i zmiennych mają postać:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \dots \\ a_{in} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Metody rozwiązywania są różne, na przykład przez operacje na macierzach:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}, \quad \text{gdzie } \mathbf{A}^{-1} = [y_{kj}], \quad y_{kj} = (-1)^{j+k} \frac{\det A_{j,\bar{k}}}{\det A} \quad (I-7)$$

lub wzory Cramera:

$$x_{i0} = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)} \quad (I-8)$$

Jeśli rozwiązanie jest wyznaczane ręcznie, to czasem najprostszą metodą rozwiązania jest metoda podstawiania i eliminowania kolejnych zmiennych, na przykład gdy ilość równań jest niewielka (2÷3) a współczynniki równań są parametrami układu (symbole lub wyrażenia).



1° Zapisz podany model w postaci macierzowej, wektorowej. Podaj wektor rozwiązań \mathbf{x} .

$$\text{a) } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = u_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = u_2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = u_1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = u_2 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

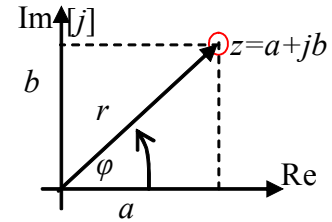
2° Wybierz dowolną macierz kwadratową \mathbf{A} . Oblicz wyznacznik, odwróć macierz i podaj wartości własne macierzy.

¹ Patrz: układy równań liniowych, własności macierzy, ...

1.4. Dziedzina zmiennych zespolonych

1.4.1. Interpretacje i funkcje zmiennych zespolonych

Liczbę zespoloną $a+jb$ stanowi uporządkowana para liczb rzeczywistych (a, b) zapisywana z użyciem jednostki urojonej j . Dwie podstawowe postacie liczb zespolonych – kanoniczna i trygonometryczna – wynikają wprost z interpretacji geometrycznej liczby na płaszczyźnie zespolonej (Rys. I-7). Są to postaci równoważne, które można stosować zamiennie:



Rys. I-7. Płaszczyzna zespolona

postać kartezjańska (kanoniczna) (część rzeczywista a i urojona b)	postać trygonometryczna (moduł r i argument φ)	postać wykładnicza
$z = a + jb$	$z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$	$z = re^{j\varphi}$
$a = r \cos \varphi, b = r \sin \varphi$	$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \cos \varphi = \frac{a}{r}, \sin \varphi = \frac{b}{r}$	

Korzystając z tych postaci i interpretacji geometrycznej łatwo jest zilustrować podstawowe działania na liczbach zespolonych:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

$$z_1 * z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$

$$z_1 / z_2 = r_1 / r_2 [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Definiowane są również funkcje elementarne na zmiennych zespolonych ¹. Wśród nich interesują nas szczególnie funkcje wykładnicze i trygonometryczne, które będą się pojawiać w rozwiązaniach równań różniczkowych (\Rightarrow). Pomiędzy tymi funkcjami istnieje następujący związek, zwany wzorem Eulera, z którego wynika wykładnicza postać liczby zespolonej:

$$e^{\pm j\varphi} = \cos \varphi \pm j \sin \varphi \quad (I-9)$$

Na podstawie własności liczb zespolonych można wykonać następujące przekształcenia:

$$A_1 e^{(\alpha + j\omega)t} + A_2 e^{(\alpha - j\omega)t} = e^{\alpha t} (B_1 \cos \omega t + j B_2 \sin \omega t) = A e^{\alpha t} \sin(\omega t + \varphi) \quad (I-10)$$

gdzie: $B_1 = A_1 + A_2, B_2 = A_1 - A_2$

$$A = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}, \varphi = \arctg \frac{B_1}{B_2}$$

1.4.2. Przekształcenia Laplace'a i Fourier'a

Jednym z bardzo znaczących obszarów zastosowania zmiennych zespolonych w badaniach dynamiki są **przekształcenia całkowite Laplace'a** (\mathcal{L}) i **Fourier'a** (\mathcal{F}), które danej funkcji $f(t)$ zmiennej rzeczywistej t przyporządkowują odpowiednią **transformatę** $F(s)$ to znaczy funkcję zmiennej zespolonej s ². Transformaty są stosowane do przekształcenia modelu dynamiki opisanego za pomocą równań różniczkowych liniowych w model zawierający równania algebraiczne (\Rightarrow). Własności przekształceń Laplace'a i Fourier'a ³ znacznie upraszczają analizowanie dynamiki obiektu. Natomiast ograniczony zestaw funkcji wykorzystywanych do opisu przebiegu zmiennych i modeli obiektów sprawiają, że w praktyce inżynierskiej nie ma potrzeby wyznaczania transformat z definicji (czyli na podstawie wyrażenia całkowego) a korzysta się z gotowych tablic ⁴.

1° Przedstaw podstawowe własności przekształcenia Laplace'a i Fourier'a

2° Podaj transformaty funkcji skokowej, impulsowej i sinusoidalnej.



¹ Wielomiany i funkcje wymierne zmiennych zespolonych są określane analogicznie jak dla zmiennych rzeczywistych. Natomiast do określenia innych funkcji stosuje się rozwinięcie w szereg Taylora. To pozwala m.in. pokazać związki pomiędzy funkcjami np. wykładniczymi i trygonometrycznymi

² Patrz: rachunek operatorowy, definicje i własności przekształceń Laplace'a i Fourier'a, np. [3/r.13,C]

³ Patrz: m.in. twierdzenie o liniowości, o transformacie całki i pochodnej, o zmianie skali, ...

⁴ Patrz: tablice oryginałów i transformat wybranych funkcji

2. Składowe rozwiązania równania różniczkowego liniowego

Jeśli równanie różniczkowe opisujące dynamikę obiektu jest liniowe, to do jego rozwiązywania można zastosować klasyczną metodę opartą na **zasadzie superpozycji**, która głosi, że rozwiązanie $x(t)$ składa się z rozwiązania swobodnego $x_s(t)$ i wymuszonego $x_w(t)$:

$$x(t) = x_s(t) + x_w(t) \quad (I-11)$$

Obie części rozwiązania uzyskuje się stosując ogólne procedury ¹, które jednak w podstawowych badaniach dynamiki można znacznie uprościć.

2.1. Klasyczna metoda rozwiązania

2.1.1. Rozwiązanie swobodne

Założmy, że badany obiekt jest opisany równaniem różniczkowym liniowym n -ego rzędu:

$$a_n x^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t) \quad (I-12)$$

Rozwiązanie swobodne wynika z równania jednorodnego (nie zależy od funkcji wymuszenia $u(t)$ na wejściu układu):

$$a_n x^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = 0 \quad (I-13)$$

a jego ogólna postać jest znana:

$$x_s(t) = Ae^{\lambda t} \quad (I-14)$$

Można ją więc podstawić do równania (I-13), otrzymując równanie postaci:

$$a_n \lambda^n Ae^{\lambda t} + \dots + a_1 \lambda Ae^{\lambda t} + a_0 Ae^{\lambda t} = 0, \quad (I-15)$$

które po obustronnym podzieleniu przez $Ae^{\lambda t}$ przechodzi w wielomian nazywany **równaniem charakterystycznym**:

$$a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (I-16)$$

Rozwiązanie równania różniczkowego (I-13) sprowadza się więc do wyznaczenia **pierwiastków równania charakterystycznego** (I-16), tak zwanych **biegunów układu**. Ilość biegunów jest taka jak stopień wielomianu (**rzęd modelu**), a każdy z nich wnosi do rozwiązania swobodnego swoją składową o postaci (I-14) – rozwiązanie swobodne układu jest sumą składowych wszystkich biegunów.

Ponieważ pierwiastki wielomianu mogą być dodatnie/ujemne, rzeczywiste/pary zespolone, pojedyncze/ wielokrotne, stąd wynikają szczególne postaci składowych:

- dla pierwiastków rzeczywistych ($\lambda_i = \alpha$) występuje podstawowa postać funkcji (I-14):

$$A_i e^{\lambda_i t} \quad (I-17)$$

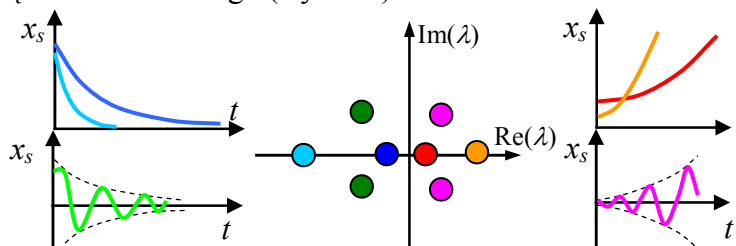
- jeśli pierwiastek λ_k jest m -krotny, to pojawia się wyrażenie:

$$(A_k + A_{k+1}t + A_{k+2}t^2 + \dots + A_{k+m-1}t^{m-1})e^{\lambda_k t} \quad (I-18)$$

- dla każdej pary pierwiastków zespolonych $\lambda_{1,2} = \alpha + j\omega$, składowa jest postaci:

$$A_1 e^{(\alpha+j\omega)t} + A_2 e^{(\alpha-j\omega)t} = Ae^{\alpha t} \sin(\omega t + \varphi) \quad (I-19)$$

Analizując własności funkcji (I-17), (I-18), (I-19) łatwo można zauważyć związek pomiędzy położeniem biegunów układu na płaszczyźnie zespolonej a własnościami składowych rozwiązania swobodnego (Rys. I-8).



Rys. I-8. Położenie biegunów a składowe rozwiązania

¹ Patrz: klasyczna metoda rozwiązania równania różniczkowego, rozwiązanie swobodne i wymuszone (rozwiązanie równania jednorodnego i niejednorodnego, składowa swobodna i wymuszona), np. [3/D1]

Część rzeczywista bieguna λ ma wpływ na to jak szybko się zmienia składowa z nim związana i czy zanika z czasem, natomiast część urojona ma wpływ na występowanie oscylacji i ich częstotliwość (\Leftrightarrow).

Mówimy, że układ liniowy jest **stabilny** jeśli rozwiązanie swobodne zanika z czasem, co ma miejsce wówczas gdy wszystkie bieguny układu leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej. Jest to własność samego układu – niezależna od wymuszenia.

- 1° Podaj różne sformułowania warunku stabilności układu (*¹)
- 2° Co decyduje czasie zanikania rozwiązania swobodnego – która składowa? (*²)
- 3° Które składowe mają najmniejszy wpływ na rozwiązanie swobodne? (*³)
- 4° Jaki wpływ na reakcję układu mają zespolone pary biegunów?
- 5° Od czego zależy częstotliwość oscylacji a od czego szybkość zmiany amplitudy w odpowiedzi układu?
- 6° Skąd wiadomo, że stabilność układu liniowego nie zależy od wymuszenia?



2.1.2. Rozwiązanie wymuszone

Analogicznie jak dla rozwiązania swobodnego istnieje również ogólna procedura wyznaczania **rozwiązania wymuszonego** dla dowolnej ciągłej funkcji wymuszającej $u(t)$. Podstawowa analiza dynamiki układu wykonywana jest zwykle dla stałego wymuszenia, co pozwala zastosować uproszczoną procedurę rozwiązania. Sprowadza się ona do operacji wyznaczania **równania statycznego**, w którym wszystkie pochodne zmiennych wejściowych i wyjściowych są równe zero (nie ma zmian w układzie), to znaczy, że równanie dynamiki (I-12) zostaje sprowadzone do równania statycznego:

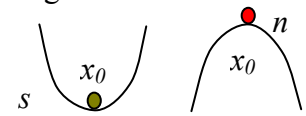
$$a_0 x(t) = b_0 u(t), \quad (I-20)$$

Jeśli więc funkcja wymuszająca $u(t)$ w czasie $t > 0$ ma stałą wartość u_0 , to rozwiązanie wymuszone $x_w(t)$ też ma stałą wartość x_0 :

$$x_0 = \frac{b_0}{a_0} u_0 \quad (I-21)$$

Mówimy wówczas, że układ znajduje się w **stanie równowagi**, a współrzędne (u_0, x_0) nazywamy **punktem równowagi**. Ponieważ analiza zachowania układów dotyczy zazwyczaj reakcji na niewielkie zakłócenia wokół tego stanu, nazywa się go również **punktem pracy**. Układ liniowy może mieć tylko jeden punkt równowagi (jest jedno rozwiązanie równania statycznego). Stabilny układ liniowy zawsze dąży do punktu równowagi.

Układ niestabilny może trwać w punkcie równowagi tylko wówczas jeśli jest to jego stan początkowy – najmniejsze zakłócenie powoduje oddalenie od punktu (Rys. I-9). Dla każdego układu można wyznaczyć punkt równowagi niezależnie od tego czy układ jest stabilny czy nie.



Rys. I-9. Idea punktu równowagi stabilnej (s) i niestabilnej (n)

2.1.3. Rozwiązanie ogólne

Rozwiązanie ogólne równania (I-12) jest sumą składowych swobodnych i rozwiązania wymuszonego. W przypadku wymuszenia skokowego czy impulsowego¹ rozwiązanie ogólne ma więc postać:

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + A_n e^{\lambda_n t} + x_0 \quad (I-22)$$

Wartości $\lambda_1 \div \lambda_n$ i x_0 są znane, ale we wzorze (I-22) występują jeszcze parametry $A_1 \div A_n$. Można je wyznaczyć dla konkretnych warunków początkowych, to znaczy jeśli jest znane n wartości spośród zmiennych $x(t)$, $\dot{x}(t)$, ..., $x^{(n)}(t)$, określanych zwykle w chwili $t=0$.

Załóżmy, że równanie (I-12) jest drugiego rzędu, jego bieguny są rzeczywiste a warunki początkowe wynoszą $x(0) = c$, $\dot{x}(0) = 0$. W rozwiązaniu ogólnym wystąpią dwa parametry A_1 i A_2 , a ich wartości można wyznaczyć z układu równań:

¹ Zarówno wymuszenie skokowe jak i impulsowe w czasie $t > 0$ mają stałą wartość (odpowiednio 1 lub 0)

$$\begin{cases} c = A_1 e^{\lambda_1 0} + A_2 e^{\lambda_2 0} + x_0 \\ 0 = \lambda_1 A_1 e^{\lambda_1 0} + \lambda_2 A_2 e^{\lambda_2 0} + x_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = A_1 + A_2 + x_0 \\ 0 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + x_0 \end{cases} \quad (I-23)$$

co prowadzi do rozwiązania:

$$A_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad A_2 = \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (I-24)$$

W ten sposób wyznaczono rozwiązanie szczególne dla zadanych warunków początkowych.



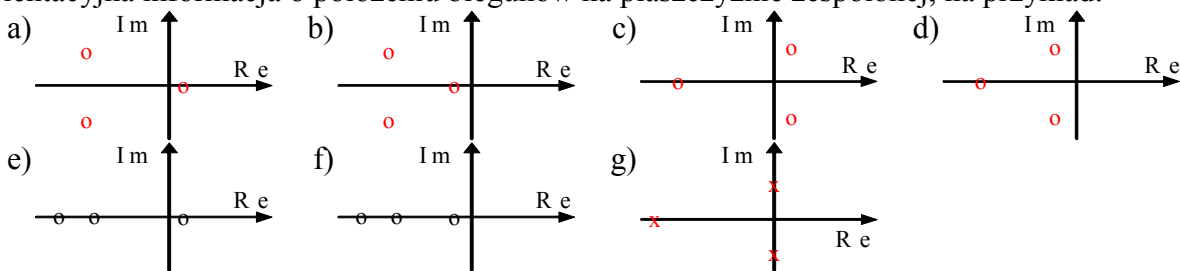
- 1° Wybierz inne warunki początkowe i wyznacz rozwiązanie szczególne (stałe A_1 i A_2).
- 2° Przyjmij dowolne wartości współczynników w równaniu (I-12) i określ stabilność układu. Wyznacz (analitycznie) i narysuj rozwiązanie dla stałego wymuszenia (\Rightarrow)

II.3

2.2. Bieguny układu a własności dynamiki

2.2.1. Położenie biegunów na płaszczyźnie zespolonej a składowe rozwiązania

Znając bieguny układu można przewidzieć charakterystyczne cechy jego rozwiązania swobodnego, a tym samym reakcji obiektu na zmiany wymuszenia. Wystarczy nawet orientacyjna informacja o położeniu biegunów na płaszczyźnie zespolonej, na przykład:



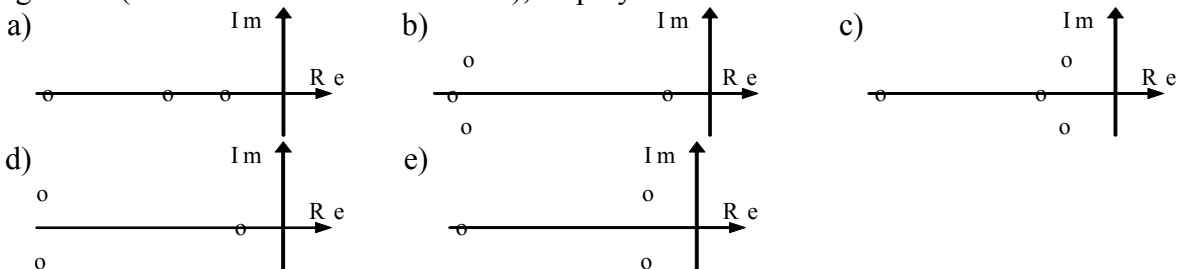
- 1° Naskicuj składowe rozwiązania swobodnego każdego z układów a-g (*⁴).
- 2° Naskicuj przykładową odpowiedź skokową oraz impulsową układu (*⁵).
- 3° Czy układ jest stabilny?

Odpowiedzi na pytania 1÷3 można sprawdzić symulacyjnie rysując wykresy składowych swobodnych z odpowiednio dobranymi parametrami λ (\Rightarrow)

II.3

2.2.2. Waga (znaczenie) biegunów

Nawet pojedynczy dodatni biegun¹ układu determinuje niestabilność układu. Natomiast bieguny ujemne mają różny wpływ na postać rozwiązania swobodnego – nie wszystkie są tak samo ważne. Stąd wynikają możliwości **uproszczenia modeli** przez pomijanie nieistotnych biegunów $\textcircled{1}$ ², co obniża rząd układu i ułatwia analizę. Można również nie zmieniać modelu tylko zastosować **ograniczenie analizy** do najbardziej istotnych biegunów. Przedstawienie biegunów układu na płaszczyźnie zespolonej pomaga zauważyć relacje jakościowe pomiędzy biegunami (blisko/daleko od osi/od siebie), na przykład.:



- 1° Która składowa w rozwiązaniu swobodnym zaniknie najszybciej? Uzasadnij.
- 2° Który biegun ma decyduje o czasie zanikania rozwiązania swobodnego? Uzasadnij.
- 3° Które z biegunów są najbardziej znaczące?
- 4° Które bieguny można by pominąć przy analizie układu?

¹ tzn. leżący w dodatniej półpłaszczyźnie zespolonej (o dodatniej części rzeczywistej)

$\textcircled{1}$ ² Patrz: metody upraszczania modeli, np. [10], [3/r.5.4]

2.2.3. Podstawowe elementy analizy dynamiki układu

Równanie różniczkowe jest ogólną formą modelu obiektu (układu), która zawiera pełny opis własności statycznych i dynamicznych. Znając równanie różniczkowe można je próbować rozwiązać, choć to nie zawsze jest konieczne lub możliwe. Funkcja rozwiązania nawet dla układów liniowych może być dość złożona. Tymczasem już najprostsze elementy analizy dostarczają informacji o spodziewanych własnościach obiektu. Na przykład:

a) $a\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + bx(t) = 2u(t)$

d) $4\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + \dot{x}(t) + x^2(t) = u(t)$

b) $3\dot{x}(t) + 4\dot{u}(t) = bx(t) + 2u(t)$

c) $\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = au(t)$

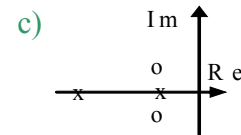
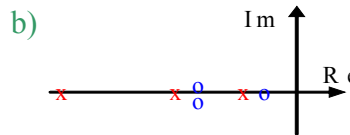
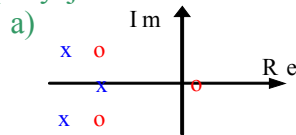
1° Napisz równanie statyczne i charakterystyczne układu. (*⁶)

2° Naskicuj charakterystykę statyczną układu.

3° Ile punktów równowagi ma układ? Wyznacz je dla $u(t) = u_0$.4° Ile biegunów ma układ? Wyznacz je – analitycznie lub symulacyjnie. (*⁷)**2.2.4. Projektowanie własności dynamicznych przez zmianę położenia biegunów**

Ścisły związek między rozwiązaniem swobodnym a biegunami układu jest wykorzystywany do projektowania własności dynamicznych na podstawie położenia biegunów układu na płaszczyźnie zespolonej. Idea polega na rysowaniu na płaszczyźnie zespolonej tak zwanych **linii pierwiastkowych**, które ilustrują zmianę położenia biegunów w zależności od wybranego parametru układu ¹.

Załóżmy, że zmiana pewnego parametru układu spowodowała przesunięcie biegunów z pozycji ‘o’ na ‘x’:



Jak zmieniła się reakcja obiektu?

**2.3. Układy liniowe i zlinearyzowane**

Własności dynamiczne układów liniowych zależą jedynie od ich biegunów (składowej swobodnej rozwiązania). W układach nieliniowych nie można zastosować zasady superpozycji, a tym samym nie podziału rozwiązania na składowe swobodne i wymuszone. W efekcie bardzo trudno jest znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego nieliniowego. Poza tym własności dynamiczne, takie jak choćby stabilność, mogą zależeć od warunków początkowych i od funkcji wymuszającej na wejściu.

W układach nieliniowych można jednak w prosty sposób określić równanie statyczne (zerując pochodne zmiennych wejściowych i wyjściowych) i wyznaczyć punkt równowagi układu dla danej wartości na wejściu. Równania nieliniowe mogą mieć jednak więcej niż jeden punkt równowagi, jeśli równanie statyczne ma więcej niż jedno rozwiązanie, na przykład w przypadku układu $\dot{x}(t) + x^2(t) = u(t)$ równanie statyczne $x_0^2 = u_0$ ma dwa pierwiastki $x_0 = \pm\sqrt{u_0}$.

Analityczne metody badania dynamiki układów nieliniowych są bardzo ograniczone i złożone. Stosuje się więc różne zabiegi aby sprowadzić problem do przypadku liniowego, czyli zlinearyzować (\Rightarrow). Taki zlinearyzowany opis można stosować (badać) w pewnym ograniczonym zakresie zmian wielkości, na przykład w otoczeniu punktu równowagi. Do badania modeli liniowych i zlinearyzowanych stosuje się te same metody, jednak wnioski z analizy modelu zlinearyzowanego są poprawne tylko w ograniczonym zakresie.

I.9.2

¹ Patrz: linie pierwiastkowe, metoda Evansa (np. [1]). W zasadzie jest to metoda przeznaczona do projektowania układów sterowania, ale można ją rozszerzyć na dowolny liniowy obiekt

3. Metody analizy na przykładzie modelu drugiego rzędu

3.1. Model drugiego rzędu

W badaniach dynamiki szczególną rolę odgrywają modele drugiego rzędu, ponieważ są to najprostsze układy, w których mogą wystąpić wszystkie przypadki położenia biegunów, a więc i typy składowych swobodnych (\Leftrightarrow). Dla tego modelu opracowano więc wiele metod projektowania obiektów i układów sterowania. Modele drugiego rzędu są zazwyczaj efektem różnego rodzaju uproszczeń zastosowanych na etapie konstrukcji modelu (\Leftrightarrow) lub podczas analizy (\Leftrightarrow).

II.5

I.10

I.2.2.2

Podstawowy sposób badania własności dynamicznych równania drugiego rzędu¹:

$$a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = u_1(t) \quad (I-25)$$

polega na analizie równania charakterystycznego:

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (I-26)$$

za pomocą klasycznej metody wyznaczenia wyróżnika Δ i pierwiastków $\lambda_{1,2}$:

$$\Delta = a_1^2 - 4a_2 a_0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2a_2} \quad (I-27)$$

Osiągnięcie założonego celu badań nie zawsze wymaga wyliczenia biegunów układu. Czasem wystarczy sprawdzenie warunków, które determinują własności układu. Jeśli $\Delta > 0$ układ może być stabilny lub nie, ale na pewno nie będzie generował drgań. Jeśli $\Delta < 0$, to warunkiem stabilności jest $-a_1 / a_2 < 0$, czyli ten sam znak parametrów a_1 i a_2 .

W ten sposób można nie tylko badać własności istniejących obiektów, ale także projektować własności nowych układów. Przykładowe zadania:

- 1° Dobierz parametr a_1 obiektu opisanego równaniem (I-25) w ten sposób aby obiekt nie reagował oscylacjami. Pozostałe parametry są określone, np. $a_2=1, a_0=10$.
- 2° Wiadomo, że a_2 i a_1 są dodatnie. Jakie warunki musi spełniać wartość a_0 , aby układ był stabilny – z oscylacjami lub bez?
- 3° Przy skoku jednostkowym układ (I-25) stabilizuje się na poziomie 10. Jeden z parametrów jest znany, np. $a_2=2$. Dobierz wartości pozostałych parametrów. (*⁸)



3.2. Równanie oscylacyjne

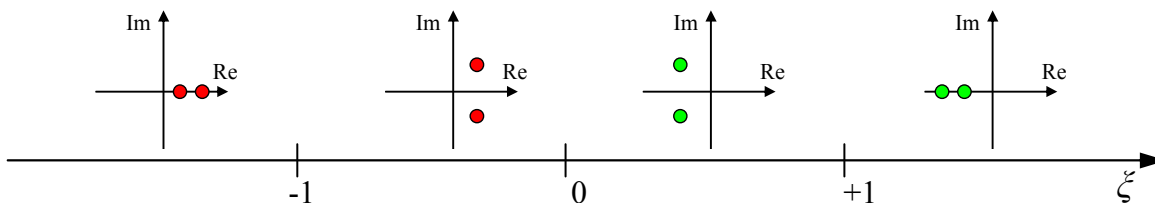
Każde liniowe równanie drugiego rzędu można przekształcić do jednej z dwu postaci – albo do **równania oscylacyjnego**:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = b_0 u(t), \quad \omega_n > 0 \quad (I-28)$$

albo do równania postaci:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n \dot{x}(t) - \omega_n^2 x(t) = b_0 u(t), \quad \omega_n > 0 \quad (I-29)$$

gdzie: ξ - współczynnik tłumienia, ω_n – pulsacja drgań własnych². W zasadzie interesujące jest tylko równanie oscylacyjne (I-28), które w zależności od wartości tłumienia ξ ma parę biegunów ujemnych lub dodatnich, rzeczywistych lub zespolonych (Rys. I-10), a tym samym jego rozwiązanie jest stabilne lub niestabilne, aperiodyczne lub oscylacyjne.



Rys. I-10. Zależność biegunów układu oscylacyjnego od tłumienia

Natomiast równanie (I-29) niezależnie wartości parametrów zawsze ma jeden biegun ujemny i jeden dodatni – zawsze jest niestabilne.

¹ Równanie drugiego rzędu jest jedną z form modeli drugiego rzędu. Inną formą jest układ równań – p. I.5

² pulsacja własna $\omega = 2\pi f$, gdzie f to częstotliwość własna



Udowodnij opisane własności układów (I-28) i (I-29):

- 1° Wyznacz wzory na pierwiastki równania charakterystycznego;
- 2° Udowodnij zależności pomiędzy parametrem ζ i położeniem biegunów układu oscylacyjnego (Rys. I-10);
- 3° Określ położenie pierwiastków równania charakterystycznego dla $\zeta = -1; 0; 1$;
- 4° Udowodnij niestabilność układu (I-29);
- 5° Kiedy równanie (I-28) jest równaniem oscylacyjnym *sensu stricto* – to znaczy, że ma rozwiązanie oscylacyjne (w jego odpowiedziach występują składowe sinusoidalne)?

3.3. Analiza i projektowanie układów drugiego rzędu

3.3.1. Analiza własności dynamiki na podstawie tłumienia układu

Z własności równania oscylacyjnego wynika druga metoda badania własności układów drugiego rzędu. Należy najpierw sprowadzić badane równanie do jednej z postaci (I-28) lub (I-29), wyznaczyć współczynnik tłumienia ζ i określić przedział jego wartości. Tak więc dowolne równanie drugiego rzędu:

$$a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = u_1(t) \quad / : a_2$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{a_1}{a_2} \dot{x}(t) + \frac{a_0}{a_2} x(t) = \frac{1}{a_2} u_1(t) \quad (I-30)$$

po przekształceniu do postaci:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n \dot{x}(t) \pm \omega_n^2 x(t) = b_0 u(t), \quad \omega_n > 0 \quad (I-31)$$

obejmuje dwa przypadki zależnie od znaku składnika $\pm \omega_n^2$.

- 1) Jeśli $a_0/a_2 > 0$ to jest to równanie oscylacyjne (I-28), a jego parametry można wyznaczyć z układu równań:

$$\begin{cases} \omega_n^2 = \frac{a_0}{a_2} \\ 2\xi\omega_n = \frac{a_1}{a_2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} \\ \xi = \frac{a_1}{2a_2} \sqrt{\frac{a_2}{a_0}} = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} \end{cases}, \quad (I-32)$$

Wyrażenie pod pierwiastkiem $\sqrt{a_0 a_2}$ jest zawsze dodatnie, co wynika z wcześniejszego warunku $a_0/a_2 > 0$. Zatem znak tłumienia ξ , a tym samym stabilność układu, zależy od znaku współczynnika a_1 . Natomiast oscylacyjny charakter odpowiedzi ma miejsce jeśli

$$\frac{|a_1|}{2\sqrt{a_2 a_0}} < 1 \rightarrow \frac{a_1^2}{4a_2 a_0} < 1 \rightarrow a_1^2 < 4a_2 a_0 \quad (I-33)$$

- 2) Jeśli $a_0/a_2 < 0$ to równanie ma postać (I-29), więc jest zawsze niestabilne (niezależnie od wartości ξ).

Wynik analizy układu za pomocą wyróżnika Δ lub współczynnika tłumienia ζ musi być oczywiście ten sam, co można wykorzystać do sprawdzenia poprawności uzyskanych wyników, albo do wybrania metody, która w danym przypadku będzie prostsza.

W podanych równaniach:

- a) $\ddot{x}(t) - 10 \dot{x}(t) + a x(t) = u(t)$, b) $4\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + 2x(t) = 2u(t)$, c) $\ddot{x}(t) - a x(t) = u(t)$

- 1° Sprawdź stabilność i występowanie oscylacji na dwa sposoby (wyznaczając Δ oraz ζ), przy założeniu, że parametry układu są dodatnie.
- 2° Dobierz parametry układu, tak aby był on stabilny
- 3° Określ warunki, które muszą spełniać parametry układu aby nie powstawały oscylacje.



3.3.2. Sprawdzenie wyznaczonych biegunów

1.1.3.1

Wykorzystując własności wielomianu (\Leftrightarrow) można sprawdzić poprawność wyznaczonych biegunów układu (λ_i). Jeśli współczynnik przy najwyższej potędze równania charakterystycznego jest równy 1, to zachodzi równoważność:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \leftrightarrow (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 \quad (I-34)$$

a stąd (wzory Viéte'a dla wielomianu drugiego stopnia):

$$-(\lambda_1 + \lambda_2) = a_1 \text{ oraz } \lambda_1\lambda_2 = a_0 \quad (I-35)$$

1° Wyznacz bieguny i sprawdź poprawność wyznaczonych wzorów dla:

- a) dowolnego równania drugiego rzędu (I-25),
- b) równania oscylacyjnego (I-28),
- c) równania komplementarnego do równania oscylacyjnego (I-29).

2° Układ ma dwa ujemne bieguny: -10 i -2. Odtwórz model obiektu. Czy ten model jest jednoznaczny? Co można powiedzieć o współczynniku tłumienia tego układu? (*⁹)

3° Współczynnik tłumienia układu oscylacyjnego wynosi -2. Co można powiedzieć o biegunach tego układu?

3.3.3. Rozpoznawanie członu oscylacyjnego i jego własności

Zakładając, że współczynniki równań różniczkowych 1÷8 są dodatnie ($a, b, c > 0$), poniższa tabela zawiera wszystkie przypadki równań drugiego rzędu:

		O/N	ζ	$\zeta > 0$, gdy ...	Re(λ), Im(λ)
1	$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = u(t)$				
2	$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) - cx(t) = u(t)$				
3	$a\ddot{x}(t) - b\dot{x}(t) + cx(t) = u(t)$				
4	$a\ddot{x}(t) - b\dot{x}(t) - cx(t) = u(t)$				
5	$-a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = u(t)$				
6	$-a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) - cx(t) = u(t)$				
7	$-a\ddot{x}(t) - b\dot{x}(t) + cx(t) = u(t)$				
8	$-a\ddot{x}(t) - b\dot{x}(t) - cx(t) = u(t)$				

1° Uzupełnij informacje w tabeli. Podziel równania na dwa typy (O/N) w zależności od możliwości przedstawienia w postaci równania oscylacyjnego (I-28). Wyznacz współczynnik tłumienia ζ i określ znak ζ (czy jest zawsze > 0 lub < 0 , albo warunek kiedy $\zeta > 0$). Określ położenie biegunów λ układu.

2° Czy wniosek o stabilności układu na podstawie położenia biegunów zgadza się z wnioskiem o stabilności na podstawie wartości ζ ?

3° Czy na podstawie postaci równań 1÷8 można przewidzieć (podać regułę), które z nich:

- a) są równaniami oscylacyjnymi, b) są stabilne (*¹⁰)?

1.1.3.1

4° Zastosuj kryterium Routha (\Leftrightarrow) by określić położenie biegunów równań 1÷8.

3.3.4. Odpowiedzi skokowe i impulsowe członów oscylacyjnych

Rozwiązanie równania drugiego rzędu jest na tyle proste, że można wyznaczyć dokładny wzór funkcji i przeprowadzić jego analizę, wykorzystując typowe operacje badania przebiegu funkcji. Uzyskane wnioski są podstawą dla różnych metod projektowania własności dynamicznych obiektów i układów sterowania.

1° Wyznacz wzór na odpowiedź skokową i impulsową obiektu oscylacyjnego o współczynniku tłumienia: a) 0.5, b) 2, c) -0.01, d) -1.5. Przyjmij dowolną pulsację i warunki początkowe. (*¹¹)

2° Wyznacz wzór pochodnej odpowiedzi skokowej i porównaj go ze wzorem na odpowiedź impulsową. (*¹²)

3° Wyznacz maksimum i minimum odpowiedzi skokowej.

4. Portrety fazowe

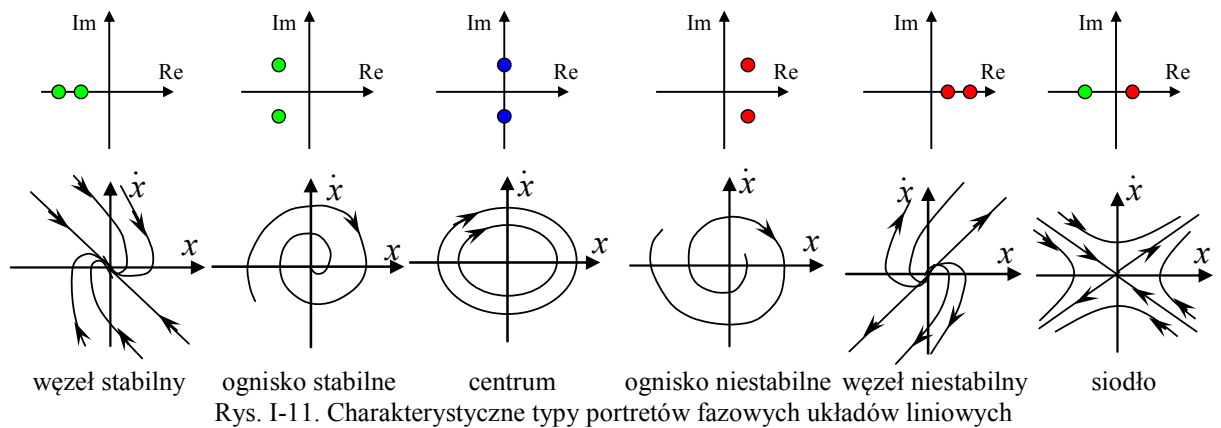
Portret fazowy to rodzina trajektorii w układzie współrzędnych $[x, \dot{x}]$, przedstawiających zachowanie obiektu obserwowane przy stałym wymuszeniu ale dla różnych warunków początkowych, które są wówczas jedyną przyczyną zmian obserwowanych w układzie. Jest to graficzny sposób zobrazowania własności dynamicznych obiektów 1. lub 2 rzędu liniowych i nieliniowych ¹. Portrety fazowe najłatwiej jest uzyskać metodami symulacyjnymi na podstawie równań różniczkowych (\Rightarrow). Ilość trajektorii koniecznych do odtworzenia portretu można znacznie ograniczyć ze względu na jedną z podstawowych własności – trajektorie nie przecinają się ponieważ badane są **układy deterministyczne**².

II.6

4.1. Portrety fazowe układów liniowych

4.1.1. Typy portretów

W układach liniowych można wyróżnić sześć charakterystycznych typów portretów, związanych położeniem biegunów układu (Rys. I-11).



Każda trajektoria portretu reprezentuje ewolucję stanu obiektu od określonego warunku początkowego. Jeśli układ jest stabilny to dąży do punktu równowagi, a jeśli jest niestabilny to się oddala od tego punktu. Kierunek zmian (strzałkę czasu na trajektorii) określa się jednoznacznie na podstawie własności funkcji pochodnej – jeśli pochodna jest dodatnia to funkcja rośnie ($\dot{x} > 0 \Rightarrow x \uparrow$), jeśli pochodna jest ujemna to funkcja maleje ($\dot{x} < 0 \Rightarrow x \downarrow$), pochodna równa 0 oznacza maksimum lub minimum funkcji.

Portrety fazowe układów liniowych dobrze ilustrują własność **globalnej stabilności** lub niestabilności tych układów. Ponieważ w układzie liniowym jest możliwy tylko jeden punkt równowagi (\Rightarrow), więc układ stabilny dąży do tego punktu niezależnie od warunków początkowych (jest stabilny globalnie).

I.1.3.1

Na podstawie przedstawionych własności portretów fazowych wyjaśnij następujące spostrzeżenia praktyczne, dlaczego:



- 1° trajektorie przecinają oś x pod kątem 90° ,
- 2° punkt równowagi znajduje się na osi x ,
- 3° przy wymuszeniu zerowym punkt równowagi leży w środku układu współrzędnych,
- 4° z trajektorii można odczytać amplitudy przebiegu rozwiązania swobodnego. (*¹³)

4.1.2. Rozpoznawanie portretu fazowego układu liniowego

Poniższa tabela zawiera wszystkie przypadki równań drugiego rzędu, przy założeniu, że współczynniki $a, b, c > 0$ (analogicznie jak w p.3.3.3):

¹ Portrety fazowe mają szczególne zastosowanie w przypadku występowania nieliniowości typu nasycenie, strefa nieczułości, przekaźnik, ... , czyli funkcji nieróżniczkowalnych. Więcej np. w [3/r.2.4]

² przejście z jednego punktu przestrzeni do kolejnego jest określone (nie ma możliwości wyboru)

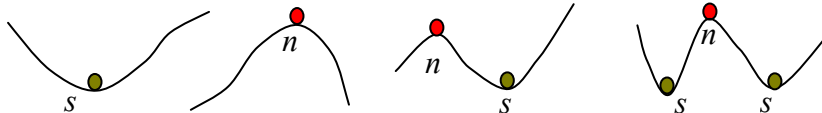
		O/N	portret fazowy (nazwa, szkic)	S/N
1	$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = u(t)$			
2	$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) - cx(t) = u(t)$			
3	$a\ddot{x}(t) - b\dot{x}(t) + cx(t) = u(t)$			
4	$a\ddot{x}(t) - b\dot{x}(t) - cx(t) = u(t)$			
5	$-a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = u(t)$			
6	$-a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) - cx(t) = u(t)$			
7	$-a\ddot{x}(t) - b\dot{x}(t) + cx(t) = u(t)$			
8	$-a\ddot{x}(t) - b\dot{x}(t) - cx(t) = u(t)$			

- 1° Określ typ równania (oscylacyjne lub nie) oraz typ portretu fazowego
 2° Jaki wpływ na portret fazowy układu ma wartość wymuszenia u ? (*¹⁴)

4.2. Portrety układów nieliniowych

4.2.1. Własności portretów układów nieliniowych

Portrety fazowe układów nieliniowych mogą mieć jeden lub więcej punktów równowagi – w zależności od rozwiązania równania statycznego. Układ nieliniowy może być stabilny/niestabilny globalnie, ale jeśli układ ma więcej punktów równowagi, to może być stabilny w jednych a niestabilny w innych punktach, i wówczas rozróżniamy stabilność/niestabilność lokalną i globalną (Rys. I-12). Wyznaczenie portretu fazowego układu nieliniowego w odpowiednio dużym otoczeniu punktów równowagi umożliwia określenie obszarów stabilnych warunków początkowych (obszarów stabilności).



Rys. I-12. Idee stabilności/niestabilności globalnej/lokalnej

W pobliżu punktów równowagi portrety układów nieliniowych ale różniczkowalnych¹ są zbliżone do liniowych wzorców (stabilne/niestabilne węzły, ogniska, siodła). To spostrzeżenie potwierdza możliwość analizy stabilności układu nieliniowego w ograniczonym zakresie wokół punktów równowagi za pomocą linearyzacji modelu w otoczeniu tych punktów (⇔). W ten sposób można również zidentyfikować punkty równowagi na portretach układów nieliniowych.

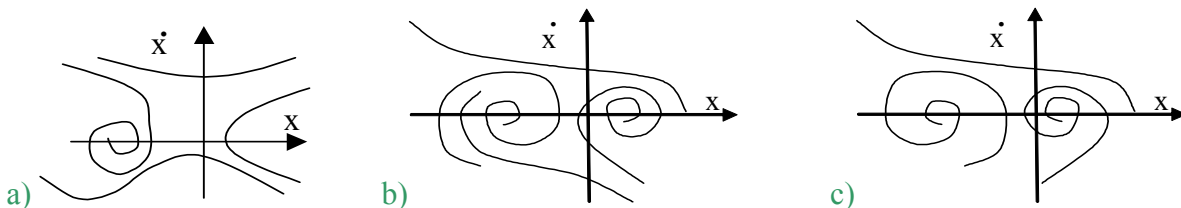
I.1.3

4.2.2. Wyznaczanie portretów

Eksperymentalne wyznaczanie portretu fazowego wymaga przemyślanego wybierania warunków początkowych i czasu trwania eksperymentu (początku i długości trajektorii), tak aby można było jednoznacznie wnioskować o globalnej i lokalnej stabilności badanego obiektu. Informacje na o ilości punktów równowagi czy o charakterze nieliniowości znacznie ułatwiają zadanie (⇔).

II.6.4

Załóżmy, że przedstawione poniżej portrety zawierają wszystkie charakterystyczne trajektorie. Co można powiedzieć o modelach, które mają takie portrety fazowe?



- 1° Zaznacz kierunki trajektorii.
 2° Ile punktów równowagi ma model? Określ ich typ i stabilność.
 3° Czy model jest liniowy?
 4° Czy układ jest stabilny globalnie? Uzasadnij.



¹ bez elementów typu przekaźnik, strefa nieczułości, ...

5. Równania stanu

5.1. Układ równań różniczkowych

Modele dynamiki układów analizowane w poprzednich punktach (I.2÷4) miały postać pojedynczych równań różniczkowych z jednym wejściem i jednym wyjściem (ang. SISO¹). Na ich podstawie można w prosty sposób określić:

- liniowość modelu,
 - rząd modelu, który odpowiada rzędowi równania różniczkowego,
 - równanie statyczne, które powstaje po wyzerowaniu pochodnych i pozwala wyznaczyć charakterystykę statyczną i punkt równowagi (stan ustalony),
- a dla układów liniowych – równanie charakterystyczne i jego pierwiastki (bieguny układu), które decydują o stabilności.

Analogiczne możliwości wykazują modele w postaci **równań stanu** ², to znaczy układu równań różniczkowych pierwszego rzędu, liniowych lub nieliniowych. Układy tego typu powstają jako rezultat zastosowania pewnych metod konstrukcji modeli (\Rightarrow) lub zamierzony  cel przetwarzania (opisany w kolejnym punkcie I.5.2). Jeśli równania stanu modelu są równaniami liniowymi, to można je uporządkować:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + b_{11}u_1(t) + \dots + b_{1m}u_m(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) + b_{21}u_1(t) + \dots + b_{2m}u_m(t) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + b_{n1}u_1(t) + \dots + b_{nm}u_m(t) \end{cases} \quad (I-36)$$

i zapisać w postaci macierzowej:


$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) \quad (I-37)$$

gdzie:

- $\mathbf{x}(t)$ jest nazywany wektorem n **zmiennych stanu** – poszukiwane rozwiązanie układu,
- $\mathbf{u}(t)$ reprezentuje wektor m zmiennych wejściowych – funkcje wymuszające na wejściach,
- \mathbf{A} – **macierz stanu** (fundamentalna) – podstawowa macierz układu o wymiarze $n \times n$,
- \mathbf{B} – macierz o wymiarze $n \times m$.

Równania stanu zawierają całą informację o dynamice obiektu, ale bywają uzupełniane przez **równania wyjściowe**:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t), \quad (I-38)$$

które na podstawie wektora rozwiązań \mathbf{x} i zmiennych wejściowych \mathbf{u} pozwalają na zdefiniowanie dowolnego zestawu zmiennych wyjściowych \mathbf{y} ³.

Metoda i postać rozwiązania układu równań (I-37) jest analogiczna jak dla pojedynczego równania n -tego rzędu (\Rightarrow). O własnościach dynamicznych decyduje więc równanie charakterystyczne⁴, które w tym przypadku, w zapisie macierzowym ma postać:


$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad (I-39)$$


Jest to równanie n -tego stopnia, a jego pierwiastki (bieguny układu⁵) decydują o stabilności układu⁶, ponieważ są współczynnikami w wykładnikach funkcji eksponencjalnych, które tworzą składowe rozwiązania swobodnego każdej ze zmiennych stanu $x_{si}(t)$:

$$x_{si}(t) = A_{1i}e^{\lambda_{1i}t} + \dots + A_{ni}e^{\lambda_{ni}t}, \quad i=1..n \quad (I-40)$$

Układ n równań różniczkowych pierwszego rzędu jest modelem o wielu wejściach i wyjściach (ang. MIMO⁷). **Rząd modelu** wynosi n , co wynika z ilości zmiennych stanu,

¹ Single Input Single Output

² Patrz: zmienne stanu, przestrzeń zmiennych stanu, ..., np. [3/r.I2]

³ zastosowanie równań wyjściowych jest różnorodne, m.in. w projektowaniu układów sterowania obiektami. Patrz.: sterowalność, obserwowalność (np. [7],[8]).

⁴ równanie charakterystyczne powstaje w trakcie rozwiązywania układu równań różniczkowych metodą klasyczną (analogicznie jak w przypadku pojedynczego równania n -tego rzędu)

⁵ bieguny układu (I-37) odpowiadają wartościom własnym macierzy \mathbf{A} (w terminologii algebraicznej)

⁶ układ jest stabilny jeśli wszystkie bieguny układu leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej

⁷ Multi Input Multi Output

a tym samym ze stopnia równania charakterystycznego, ilości biegunów i składowych rozwiązań swobodnego. Wielowymiarowy jest więc też opis statyczny – układ równań algebraicznych (\Leftrightarrow), otrzymany po wyzerowaniu pochodnych; w zapisie macierzowym:

$$0 = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \quad (\text{I-41})$$

lub po rozwiązaniu:

$$\mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Bu}, \quad (\text{I-42})$$

Opis statyczny (I-41) jest podstawą do wyprowadzenia wzorów¹ na charakterystyki statyczne poszczególnych zmiennych x_i :

$$x_i = f_i(u_1, \dots, u_m) \quad (\text{I-43})$$

oraz do wyliczenia wartości w stanie ustalonym (punktu równowagi) x_{10}, \dots, x_{n0} dla zadanych wartości wymuszeń u_{10}, \dots, u_{m0} .

Zapis modeli i operacji w postaci macierzowej (I-37), (I-39), (I-41) jest wykorzystywany szczególnie przy stosowaniu komputerowych programów obliczeniowych, przygotowanych do przetwarzania macierzy (\Leftrightarrow). Jest to wygodna forma prowadzenia badań szczególnie wówczas gdy macierze mają duży wymiar i nie ma potrzeby przedstawienia rozwiązania w postaci analitycznej (wszystkie współczynniki modelu są podane w postaci wartości i oczekiwane wyniki też mają być wartościami). Nie zawsze jednak model jest aż tak złożony, żeby rezygnować z przekształceń na wzorach, które można wykonać ręcznie i co ważniejsze – także dla modeli nieliniowych. Oczywiście można również skorzystać z programów, które realizują obliczenia symboliczne, na przykład Mathematica (również Matlab ale w mniejszym stopniu). Inną drogą do rozwiązania bardzo złożonych problemów może być uproszczenie badanego modelu, na przykład przez zweryfikowanie przyjętych założeń (\Leftrightarrow).

Założmy, że przedstawione poniżej układy równań są modelami dynamiki pewnych obiektów fizycznych:

$$\text{a) } \begin{cases} m\dot{x}_1(t) + x_1(t) + cx_2(t) + m\dot{x}_2(t) = u(t) \\ dx_1(t) + c\dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} a_1\dot{x}_1(t) + a_2x_1(t) + x_2(t) - c_1u_1(t) + c_2u_2(t) = 0 \\ b_1\dot{x}_2(t) - b_2x_2(t) + b_3x_1(t) - u_2(t) = 0 \end{cases}$$

1° Przedstaw układ w postaci równań macierzowych (w postaci równań stanu).

2° Określ zmienne stanu, zmienne wejściowe, rząd, liniowość modelu.

3° Napisz równanie charakterystyczne.

4° Wyprowadź wzory na charakterystyki statyczne modelu. Naszkicuj wykresy dla wybranych wartości parametrów. Ile punktów równowagi ma układ? (*¹⁵)

5.2. Przekształcenie równania n -tego rzędu do układu równań 1. rzędu

5.2.1. Algorytm przekształcenia

Postać modelu wynika zwykle ze sposobu jego konstrukcji (\Leftrightarrow), ale można być też efektem przekształcenia. Wśród różnych operacji (\Leftrightarrow) bardzo użyteczne jest przekształcenie równania różniczkowego n -tego rzędu do układu n równań pierwszego rzędu. Algorytm przekształcenia zostanie przedstawiony na przykładzie następującego równania:

$$a_3\ddot{x}(t) + a_2\dot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = u(t) \quad (\text{I-44})$$

Ponieważ w równaniu występuje pochodna trzeciego rzędu zmiennej x , to zamiast zmiennej x zostaną wprowadzone trzy nowe zmienne x_1, x_2, x_3 , zdefiniowane według schematu:

$$\begin{aligned} x &= x_1 && = x \\ \dot{x}_1 &= x_2 && = \dot{x} \\ \dot{x}_2 &= x_3 && = \ddot{x} \\ &\dot{x}_3 && = \ddot{\ddot{x}} \end{aligned} \quad (\text{I-45})$$

¹ stosując dowolną metodę rozwiązywania układu równań (operacje macierzowe, metodę eliminacji kolejnych zmiennych z układu równań)

Nowe zmienne należy podstawić do równania (I-44) zamiast x, \dot{x}, \ddot{x} , a zamiast najwyższej pochodnej x – pierwszą pochodną ostatniej zmiennej (\dot{x}_3). Równoważny układ równań zawiera to równanie z nowymi zmiennymi i dwa równania wskazane na schemacie (I-45):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = [u(t) - a_2 x_3(t) - a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t)] / a_3 \end{cases} \quad (\text{I-46})$$

Przekształcony model można uporządkować i zapisać w postaci macierzowych równań stanu. Zmiana formy nie wpływa na własności modelu – rząd, bieguny, stabilność, punkt równowagi.

- 1° Zapisz model (I-46) w postaci macierzowych równań stanu i wyznacz równanie charakterystyczne modelu.
- 2° Zmień kolejność równań (I-46), zapisz w postaci macierzowej i wyznacz równanie charakterystyczne modelu. (*16)
- 3° Porównaj równania charakterystyczne wyznaczone w 1° i 2° z równaniem charakterystycznym modelu (I-44). (*17)
- 4° Przekształć równanie oscylacyjne (I-28) do postaci równań stanu. Wyznacz równanie charakterystyczne układu.

5.2.2. Przekształcenie modelu do równań stanu

Pojedyncze równanie n -tego rzędu i układ równań 1. rzędu są dwoma formami modelu, na podstawie których można wyznaczyć równanie charakterystyczne. Trzecią formą, która to umożliwi będzie transmitancja omówiona w kolejnym punkcie (I.6).

Jeśli więc skonstruowany model zawiera równania różnych zmiennych i różnych rzędów, to analityczne badanie jego stabilności wymaga przekształcenia modelu do jednej z form umożliwiających wyznaczenie równania charakterystycznego, przy czym zazwyczaj najprostsze jest doprowadzenie modelu do równań stanu. Typowe przykłady tego typu modeli występują w układach mechanicznych ze sprężynami, tłumikami i masami (\Rightarrow).

Założmy, że układy równań poniżej opisują pewne układy mechaniczne, dla których należy przeprowadzić analizę podstawowych własności.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} m\ddot{x}_1(t) + b_3\dot{x}_1(t) - b_1x_2(t) = u_1(t) \\ b_1\dot{x}_2(t) - b_1\dot{x}_1(t) + cx_1(t) = u_1(t) + u_2(t) \end{cases} & \text{b)} \quad & \begin{cases} m\ddot{x}_1(t) + b_2\dot{x}_1(t) + 4x_1(t) - cx_2(t) = u_1(t) \\ b_1\dot{x}_2(t) + cx_2(t) - 2x_1(t) = u_1(t) + u_2(t) \end{cases} \\ \text{c)} \quad & \begin{cases} m\ddot{x}_1(t) + b\dot{x}_1(t) - b\ddot{x}_2(t) + c_3x_1(t) = u_1(t) \\ b\dot{x}_2(t) - b\dot{x}_1(t) + c_1x_2(t) = u_1(t) + u_2(t) \end{cases} \end{aligned}$$

- 1° Którego rzędu jest układ? Którego stopnia będzie wielomian charakterystyczny?
- 2° Wyznacz równania statyczne modelu.
- 3° Jakie rozwiązanie ma układ przy stałych wymuszeniach $u_1(t)=u_{10}$ i $u_2(t)=u_{20}$?
- 4° Zapisz w postaci równań stanu i wyznacz równanie charakterystyczne.
- 5° Po przeanalizowaniu kolejnego punktu (I.6) wróć do podanych modeli, przekształć je do postaci transmitancji i wyznacz równania charakterystyczne. (*18)

6. Transmitancje

6.1. Transmitancja i jej podstawowe własności

Modele opisane liniowymi równaniami lub układami równań różniczkowych można przekształcić do algebraicznych modeli operatorowych ¹. Najpopularniejsze z nich to transmitancje, oparte na **przekształceniach całkowych** Laplace'a (\mathcal{L}) i Fourier'a (\mathcal{F}) (\Leftrightarrow). Zastosowanie całkowego operatora Laplace'a \mathcal{L} powoduje że funkcje zależne od czasu zostają przekształcone w funkcje zmiennej s (**transformaty funkcji**), a zamiast pochodnych funkcji występują potęgi zmiennej s , czyli funkcje algebraiczne. W praktyce przejście od modelu różniczkowego do operatorowego odbywa się przez podstawienie symboli:

$$\frac{d^k}{dt^k} \leftrightarrow s^k \quad (I-47)$$

Tak więc równanie różniczkowe:

$$a_n x^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t) \quad (I-48)$$

można przekształcić do algebraicznego równania operatorowego:

$$a_n s^n x(s) + \dots + a_1 s x(s) + a_0 x(s) = b_m s^m u(s) + \dots + b_1 s u(s) + b_0 u(s) \quad (I-49)$$

Na podstawie (I-49) można wyznaczyć **transmitancję** układu $G(s)$, definiowaną jako stosunek transformaty funkcji wyjściowej $x(s)$ do transformaty funkcji wejściowej $u(s)$:

$$\frac{x(s)}{u(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} = G(s) \quad (I-50)$$

Procedura przejścia od równania różniczkowego (I-48) do transmitancji (I-50) opiera się na zastosowaniu twierdzenia o liniowości:

$$\mathcal{L}\{af_1(t) + bf_2(t)\} = af_1(s) + bf_2(s) \quad (I-51)$$

oraz twierdzenia o transformacie pochodnej funkcji z założeniem zerowych warunków początkowych $f(0_+) = 0$:

$$\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = sf(s) - f(0_+) = sf(s) \quad (I-52)$$

Powyższe twierdzenia wyznaczają ograniczenia zastosowania transmitancji – liniowość modelu i zerowe warunki początkowe. Transmitancje powstające na podstawie równań różniczkowych mają postać funkcji wymiernych, przy czym w większości rzeczywistych obiektów stopień licznika jest mniejszy niż stopień mianownika².

Na podstawie transmitancji $G(s)$ i transformaty funkcji wejściowej $u(s)$ można wyznaczyć transformatę funkcji wyjściowej:

$$x(s) = G(s)u(s), \quad (I-53)$$

a stąd można odtworzyć oryginał funkcji wyjściowej $x(t)$ ³ – jeśli istnieje taka potrzeba. Zazwyczaj nie jest to konieczne, bo podstawowe badania własności obiektu (stabilność, punkt równowagi) można wykonać na podstawie transmitancji. O stabilności układu decydują **bieguny** transmitancji, czyli pierwiastki równania charakterystycznego układu wyznaczonego przez przyrównanie do zera mianownika transmitancji (I-50) (pierwiastki mianownika):

$$a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (I-54)$$

Jest to takie samo równanie jak to wyznaczone na podstawie pierwotnego równania różniczkowego⁴ (\Leftrightarrow). Taki same są warunki stabilności układu – wszystkie bieguny muszą mieć ujemną część rzeczywistą. **Zera** transmitancji (pierwiastki wielomianu w liczniku) nie mają wpływu na stabilność układu.

¹ Patrz: rachunek operatorowy, przekształcenia całkowe i ich własności (twierdzenia) np. [3/r.I3]

² Stąd też istnieje wiele metod analizy i projektowania układów opracowanych przy założeniu, że transmitancja obiektu spełnia takie warunki.

³ Cały proces przekształceń od równania różniczkowego do odtworzenia funkcji $x(t)$ nazywa się operatorową metodą rozwiązywania liniowych równań różniczkowych. Patrz: przekształcenie odwrotne \mathcal{L}^{-1} , metody wyznaczania oryginałów funkcji (metoda rozkładu na ułamki proste, metoda residuów), np. [Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.], [3/D2].

⁴ poprawne przekształcenia modelu nigdy nie zmieniają stopnia wielomianu charakterystycznego ani jego pierwiastków (można to wykorzystać do sprawdzenia poprawności wykonanych przekształceń)

Aby wyznaczyć **punkt równowagi** (\Leftrightarrow) na podstawie transmitancji należy skorzystać z własności przekształcenia Laplace'a – twierdzenia o wartości końcowej: I.2.1.1

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)u(s), \quad (I-55)$$

które jest prawdziwe pod warunkiem, że granica $x(t)$ przy $t \rightarrow \infty$ istnieje. Problem istnienia granicy trzeba rozstrzygnąć w inny sposób, na przykład na podstawie znajomości rozwiązania równania różniczkowego dla typowych funkcji wymuszających¹. W praktyce często wykorzystuje się to twierdzenie do obliczenia wyjścia przy stałym wymuszeniu u_0 , przy czym zakłada się wówczas, że stałe wymuszenie jest reprezentowane przez funkcję skokową o takiej samej wartości².

1° Napisz poniższe równania w postaci operatorowej i wyznacz transmitancję. (*¹⁹)

a) $2\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + a_0x(t) = b_0u_1(t),$ c) $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 2x(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0u(t)$
 b) $4\dot{x}(t) + a_0x(t) = 4u_1(t).$ d) $\dot{x}(t) + a_0x(t) = b_0u^2(t)$



2° Na podstawie wyznaczonych transmitancji ustal równanie charakterystyczne oraz punkt równowagi jeśli na wejściu podawana jest stała wartość k .

3° Dla podanych transmitancji określ rząd, bieguny, stabilność i stan ustalony zakładając, że parametry są dodatnie a funkcja wejściowa $u(t) = 2 \cdot 1(t)$

a) $G(s) = \frac{1}{k(Ts + 1)};$ b) $G(s) = \frac{ks}{(bs + a)^2};$ (*²⁰) c) $G(s) = \frac{a}{0.5s^2 + 2.5s + 3}.$

4° Podaj transmitancję, która ma bieguny: -2, -1, oraz punkt równowagi $(u_0, x_0) = (2, 6)$.

5° Podane modele przekształć do końcowej postaci transmitancji, która pozwoli określić rząd modelu, równanie charakterystyczne oraz bieguny i zera transmitancji

a) $u(s) = ax(s) + bsx(s) + \frac{c}{s}x(s);$ b) $G(s) = \frac{2s + 1}{as + c + \frac{1}{sb}};$ c) $u(s) = asx(s) + bs^2x(s)$ (*²¹)

6.2. Transmitancje układów wielowymiarowych

Transmitancja z definicji opisuje układ typu SISO. Jeśli układ ma wiele wejść i wiele wyjść (MIMO), to można wyznaczyć wiele transmitancji. Transformata każdej zmiennej wyjściowej jest wyrażona jako suma składowych od poszczególnych wejść:

$$x_i(s) = G_{i1}(s)u_1(s) + \dots + G_{im}(s)u_m(s) \quad (I-56)$$

Można również zastosować pojęcie transmitancji macierzowej, które wynika z przekształcenia równań stanu (I-37) do postaci operatorowej:

$$s\mathbf{x}(s) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s) \quad (I-57)$$

i wykonania operacji macierzowych:

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{u}(s) \quad (I-58)$$

Jest to więc rodzaj operatora macierzowego $\mathbf{G}(s)$, który opisuje związek pomiędzy transformatą wektora wejściowego $\mathbf{u}(s)$ i wyjściowego $\mathbf{x}(s)$.

Na przykład układ równań:

$$\begin{cases} m_1\dot{x}_1(t) + a_1x_1(t) - a_2x_2(t) = u_1(t) \\ m_2\dot{x}_2(t) - b_1x_1(t) + b_2x_2(t) = u_2(t) \end{cases} \quad (I-59)$$

można zapisać kolejno w postaci macierzowej (I-57) i (I-58), czyli:

$$s \begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & a_2 \\ b_1 & -b_2 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + \frac{a_1}{m_1} & \frac{-a_2}{m_1} \\ -\frac{b_1}{m_2} & s + \frac{b_2}{m_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} \quad (I-60)$$

¹ Jeśli funkcja wejściowa ma stałą wartość, to rozwiązanie wymuszone też ma stałą wartość – granica istnieje. Jeśli na wejściu jest funkcja sinusoidalna, to na wyjściu wystąpi sinus przeskalowany i przesunięty – nie ma granicy (funkcja okresowa).

² to założenie pozwala wyznaczyć transformatę funkcji wejściowej: $u(t) = u_0 \rightarrow u_0 \cdot 1(t) \rightarrow \mathcal{L}\{u(t)\} = u_0/s$

Wykorzystując ogólny wzór na elementy macierzy odwrotnej (I-7) mamy:

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\det\left(\frac{m_2s+b_2}{m_2}\right)}{(-1)^{1+1} \det(sI-A)} & \frac{\det\left(\frac{-a_2}{m_a}\right)}{(-1)^{2+1} \det(sI-A)} \\ \frac{\det\left(\frac{-b_1}{m_2}\right)}{(-1)^{1+2} \det(sI-A)} & \frac{\det\left(\frac{m_1s+a_1}{m_2}\right)}{(-1)^{2+2} \det(sI-A)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} \quad (\text{I-61})$$

gdzie wyrażenie w mianowniku jest wyznacznikiem $\det(sI-A) = \left(\frac{m_1s+a_1}{m_1}\right)\left(\frac{m_2s+b_2}{m_2}\right) - \frac{b_1a_2}{m_1m_2}$

Ostatecznie po uproszczeniu wyrażen mamy:

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_2s+b_2}{M(s)} & \frac{a_2}{M(s)} \\ \frac{b_1}{M(s)} & \frac{m_1s+a_1}{M(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} \quad (\text{I-62})$$

gdzie: $M(s) = (m_1s+a_1)(m_2s+b_2) - b_1a_2$

Zastosowanie operatora macierzowego w przekształceniach analitycznych ma dwie wady: wymaga odwracania macierzy (co jest uciążliwe gdy dotyczy operacji na wyrażeniach, podobnie jak w przypadku równań stanu \Rightarrow) i mianownik wszystkich transmitancji układu jest obliczany na podstawie jednego wyznacznika (trudno więc wykryć ewentualny błąd w przekształceniach).

I.5.1

Alternatywny sposób wyznaczania transmitancji układów wielowymiarowych polega na przekształceniu równania/równań do postaci operatorowej i eliminowaniu z układu kolejnych zmiennych. Można go zastosować do każdego układu równań bez eliminowania pochodnych wyższego rzędu i sprowadzania do postaci równań stanu.

Na przykład układ równań (I-59) przekształcony do postaci operatorowej i uporządkowany ma postać:

$$\begin{cases} (m_1s+a_1)x_1(s) = a_2x_2(s) + u_1(s) \\ (m_2s+b_2)x_2(s) = b_1x_1(s) + u_2(s) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_1(s)x_1(s) = a_2x_2(s) + u_1(s) \\ M_2(s)x_2(s) = b_1x_1(s) + u_2(s) \end{cases} \quad (\text{I-63})$$

gdzie robocze symbole $M_1(s)$ i $M_2(s)$ mają na celu skrócić zapis kolejnych operacji.

Wyznaczając z układu (I-63) jedną ze zmiennych wyjściowych, na przykład x_1 :

$$x_1(s) = \frac{a_2x_2(s) + u_1(s)}{M_1(s)} \quad (\text{I-64})$$

i podstawiając do drugiego równania, otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą x_2 :

$$M_2(s)x_2(s) = b_1 \frac{a_2x_2(s) + u_1(s)}{M_1(s)} + u_2(s) \quad | \cdot M_1(s) \quad (\text{I-65})$$

Obustronne mnożenie przez $M_1(s)$ pozwala wyeliminować wyrażenia ułamkowe:

$$M_1(s)M_2(s)x_2(s) = b_1a_2x_2(s) + b_1u_1(s) + M_1(s)u_2(s) \quad (\text{I-66})$$

ponieważ ostateczna postać transmitancji powinna mieć postać funkcji wymiernej (bez piętrowych ułamków):

$$x_2(s) = \frac{b_1u_1(s) + M_1(s)u_2(s)}{M_1(s)M_2(s) - b_1a_2} \quad (\text{I-67})$$

Podstawiając wyznaczoną wartość x_2 (I-67) do wyrażenia (I-64) uzyskujemy równanie z niewiadomą x_1 :

$$x_1(s) = \frac{a_2}{M_1(s)} \frac{b_1u_1(s) + M_1(s)u_2(s)}{M_1(s)M_2(s) - b_1a_2} + \frac{u_1(s)}{M_1(s)}, \quad (\text{I-68})$$

które po sprowadzeniu do wspólnego mianownika:

$$x_1(s) = \frac{a_2b_1u_1(s) + a_2M_1(s)u_2(s) + (M_1(s)M_2(s) - b_1a_2)u_1(s)}{M_1(s)(M_1(s)M_2(s) - b_1a_2)} \quad (\text{I-69})$$

można uprościć i otrzymać wyrażenie postaci:

$$x_1(s) = \frac{M_2(s)u_1(s) + a_2u_2(s)}{M_1(s)M_2(s) - b_1a_2} \quad (\text{I-70})$$

Transmitancje (I-67) i (I-70) mają taki sam mianownik, co oznacza z dużym prawdopodobieństwem, że są one poprawne¹ i mają postać:

$$x_1(s) = \frac{m_2s+b_2}{M(s)}u_1(s) + \frac{a_2}{M(s)}u_2(s) \quad \text{oraz} \quad x_1(s) = \frac{b_1}{M(s)}u_1(s) + \frac{m_1s+a_1}{M(s)}u_2(s) \quad (\text{I-71})$$

gdzie: $M(s) = (m_1s+a_1)(m_2s+b_2) - b_1a_2$

¹ wynik został otrzymany na dwa sposoby

Nie tylko końcowy wynik (I-71) ale cały ciąg przekształceń (I-63)÷(I-70) pozwala kontrolować poprawność wykonania operacji na podstawie charakterystycznych etapów¹.

Różne transmitancje tego samego obiektu mają taki sam mianownik jeśli obiekt jest tak zwanym **układem współdziałającym**, co można stwierdzić także na podstawie współzależności równań różniczkowych opisujących obiekt² – pomiędzy zmiennymi stanu występują wzajemne sprzężenia. W **układzie niewspółdziałającym** sprzężenia występują tylko w jednym kierunku – zależności są unilateralne. Typ sprzężeń można ocenić na podstawie znajomości zjawisk występujących na obiekcie (⇒).

I.10.1.3

- 1° Wyznacz równanie charakterystyczne transmitancji (I-71) i porównaj z równaniem wyznaczonym z układu równań (I-59). Wyznacz punkt (punkty?) równowagi układu. (*²²)
- 2° Wyznacz transmitancje i sprawdź poprawność przekształceń dla układu równań:



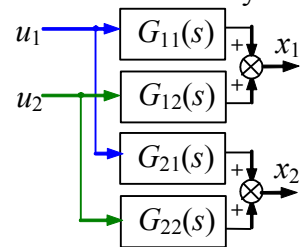
$$\begin{cases} m\ddot{x}_1(t) + b_1\dot{x}_1(t) - c_2x_2(t) = u_1(t) \\ b_2\dot{x}_2(t) - b_3\dot{x}_1(t) - c_1x_1(t) = u_2(t) \end{cases} \quad (*^{23})$$

- 3° Wyznacz transmitancje układów z punktu 5.2.2. (*²⁴)

6.3. Schematy blokowe (strukturalne)

Modele opisane transmitancjami można przedstawić w postaci schematów blokowych.

Na przykład model (I-71) składa się z czterech transmitancji, opisujących związki pomiędzy dwoma wejściami i dwoma wyjściami obiektu i można go przedstawić w postaci schematu (Rys. I-13). Schemat ten jest ilustracją modelu a nie odwzorowaniem wewnętrznej struktury obiektu. W obiektach współdziałających zmienne wpływają na siebie nawzajem i każda transmitancja zawiera w sobie informację o dynamice całego obiektu (wspólny mianownik). W badaniach stabilności



Rys. I-13. Schemat blokowy (I-71)

można więc ograniczyć się do wyznaczenia i badania jednej wybranej transmitancji. Ponadto podstawowe badania dynamiki polegają na analizowaniu reakcji obiektu na wybrane, pojedyncze zakłócenia³, można więc transmitancje obiektu badać oddzielnie (⇒).

II.8

Istotną zaletą stosowania transmitancji do opisu dynamiki obiektów jest prosta interpretacja iloczynu i sumy transmitancji jako szeregowego i równoległego połączenia bloków (Rys. I-14).

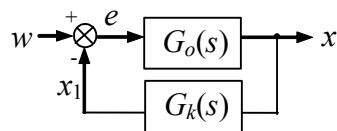


$$x_2(s) = G_1(s)G_2(s)u(s)$$

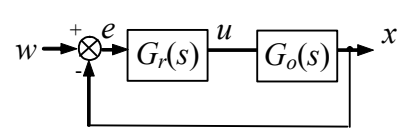
$$x(s) = (G_1(s) + G_2(s))u(s)$$

Rys. I-14. Graficzna interpretacja iloczynu (a) i sumy (b) transmitancji

Za pomocą transmitancji oraz węzłów sumacyjnych i rozdzielających można konstruować schematy złożonych układów (obiektów). Typowy dla automatyki jest układ ze sprzężeniem zwrotnym, stosowany na przykład jako układ korekcji⁴ (Rys. I-15) lub regulacji⁵ (Rys. I-16)



Rys. I-15. Układ korekcji



Rys. I-16. Układ regulacji

¹ W równaniach (I-63) występują nawiasy ze zmienną s , które zostaną zastąpione symbolami M_i . Symbole te pojawią się w mianownikach wyznaczonych transmitancji. W równaniu (I-65) pojawia się możliwość wyeliminowania wyrażenia ułamkowego (obustronne pomnożenie przez jeden z symboli M_i), a w równaniu (I-69) – skrócenia ułamka (skrócenie wyrażen w liczniku i M_i jako wspólny dzielnik licznika i mianownika).

² w równaniu pochodnej x_1 występuje zmienna x_2 i odwrotnie

³ typowe badanie to skokowa zmiana wartości na jednym wejściu (powtarzane dla wybranych wejść)

⁴ stosowany do korekcji własności dynamicznych obiektu G_o za pomocą członu korekcyjnego G_k

⁵ przeznaczony do sterowania obiektem G_o za pomocą regulatora G_r w celu uzyskania na wyjściu obiektu wartości zadanej w

Wyznaczenie modeli zastępczych złożonych obiektów opiera się prostych działaniach arytmetycznych ¹. Punktem wyjścia jest skompletowanie układu niezależnych równań, które opisują związki pomiędzy sygnałami na schemacie. Transmitancja zastępcza obiektu, jako związek pomiędzy jednym wejściem i jednym wyjściem, powstaje po wyeliminowaniu nadmiarowych zmiennych i uporządkowaniu otrzymanego wyrażenia.

Na przykład na schemacie układu korekcji (Rys. I-15) występują cztery sygnały w , e , x i x_1 , w tym jeden wejściowy i trzy wyjściowe. Pełny układ równań zawiera więc trzy równania i pozwala wyznaczyć na przykład wzór na transmitancję $x(s)/w(s)$:

$$\begin{cases} e(s) = w(s) - x_1(s) \\ x(s) = G_o(s)e(s) \\ x_1(s) = G_k(s)x(s) \end{cases} \rightarrow x(s) = \frac{G_o(s)}{G_o(s)G_k(s) + 1} w(s) \quad (I-72)$$

Po podstawieniu transmitancji $G_o(s)$ i $G_k(s)$ można uporządkować wyrażenie (I-72) tak by określić rząd transmitancji zastępczej, wyznaczyć równanie charakterystyczne i bieguny złożonego układu.

Problem konstrukcji schematu może mieć charakter syntetyczny – schemat powstaje przez łączenie określonych bloków transmitancji, a celem jest wyznaczenie modelu zastępczego i zbadanie jego własności (np. stabilności²). Natomiast próba przedstawienia układu fizycznego w postaci schematu blokowego ma charakter analityczny, a punktem wyjścia jest zwykle podział na mniejsze fragmenty (np. urządzenia) dla których można określić wejścia i wyjścia, i wyznaczyć model, o ile to możliwe typu SISO.

Proste zasady przekształcania schematów znajdują szczególne zastosowanie w metodach konstrukcji modeli opisujących liniowe układy elektryczne. Można je tworzyć według ogólnych zasad konstrukcji modeli, polegających na układaniu równań różniczkowych, które potem można w określonych warunkach przekształcić na transmitancje. W liniowych układach elektrycznych jednak zazwyczaj już na etapie konstrukcji modelu stosowany jest operatorowy opis własności elementów (\Leftrightarrow).

I.10.4



- 1° Wyznacz i porównaj wzory na transmitancje układów korekcji (Rys. I-15) i regulacji (Rys. I-16), przyjmując jako sygnał wyjściowy: a) zmienną x , b) zmienną e . (*²⁵)
- 2° Zapisz zestaw transmitancji dla układu korekcji i regulacji w postaci macierzy zakładając, że w dalsze badania będą dotyczyć tylko sygnału wyjściowego x i sygnału błędu e .
- 3° Określ rząd transmitancji zastępczej połączenia szeregowego i równoległego (Rys. I-14) oraz układu korekcji (Rys. I-15) i regulacji (Rys. I-16) zakładając, że transmitancje składowe są funkcjami wymiernymi i że znany jest stopień wielomianów.
- 4° Podaj warunki zapewniające stabilność następujących transmitancji:

$$\text{a) } G(s) = G_1(s)G_2(s); \quad \text{b) } G(s) = G_1(s) + G_2(s)G_3(s); \quad \text{c) } G(s) = \frac{1}{G_1(s)G_3(s) + 1}$$

$$\text{gdzie: } G_1(s) = \frac{a}{(3s + a)}, \quad G_2(s) = \frac{1}{(s + a)^2}, \quad G_3(s) = k.$$

Jakie dodatkowe warunki muszą spełniać parametry aby układ osiągał stan równowagi bez przeregulowania (oscylacji)? Jak są połączone elementy składowe transmitancji $G(s)$ – narysuj schemat, oznacz składniki, wskaż wejście i wyjście związane z transmitancją $G(s)$.

¹ czasem warto przekształcić schemat na równoważną, prostszą postać - patrz: przekształcanie schematów blokowych, np. [3/r.3.2.3, 5.2]

² połączenie stabilnych elementów nie musi oznaczać stabilności układu

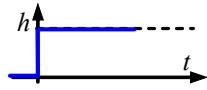

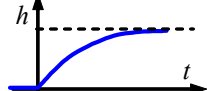
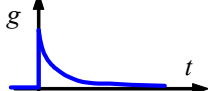
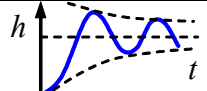

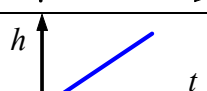
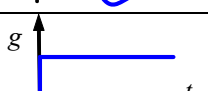


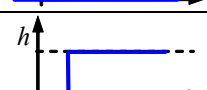
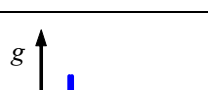
7. Podstawowe obiekty dynamiki

7.1. Parametry i odpowiedzi członów dynamiki

Najprostsze przypadki transmitancji nazywane są **podstawowymi członami dynamiki**. Służą one do opisu najprostszych obiektów i jako składniki złożonych schematów, ale również do uogólnienia różnych metod badania i projektowania własności dynamicznych układów ¹.

Wykorzystuje się praktycznie jedynie stabilne warianty tych członów, to znaczy przy założeniu określonych ograniczeń na wartości parametrów (Tab. I-1).

Tab. I-1. Podstawowe człony dynamiki i ich odpowiedzi czasowe ²

człon	transmitancja $G(s)$	parametry	odp.skokowa $h(t)$	odp.impulsowa $g(t)$
proporcjonalny	K	K – wzmacnienie		
inercyjny	$\frac{K}{Ts + 1}$	K – wzmacnienie T – stała czasowa, $T > 0$		
oscylacyjny	$\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	ζ – tłumienie ω_n – pulsacja własna, $\omega_n > 0$		
całkujący	$\frac{1}{T_i s}$	T_i – czas całkowania		
różniczkujący	$T_d s$	T_d – czas różniczkowania		
opóźniający	e^{-sT_0}	T_0 – czas opóźnienia, $T_0 > 0$		

Transmitancje podstawowych członów dynamiki (poza opóźnieniem) mają postać funkcji wymiernych, która wynika z transformaty odpowiednich równań różniczkowych (\Rightarrow). Wśród parametrów członów dynamiki część z nich to parametry czasowe, które mają swoją interpretację geometryczną na podstawowych charakterystykach czasowych (\Rightarrow), a szczególnie w odpowiedzi skokowej i impulsowej³. Można ją wykazać na podstawie znanego rozwiązania odpowiedniego równania różniczkowego przy danym wymuszeniu. Własności te są wykorzystywane do identyfikacji modelu na podstawie charakterystyk czasowych uzyskanych na drodze eksperymentalnej (\Rightarrow).

Człon proporcjonalny (wzmacniający, bezinercyjny) to proste wzmacnienie sygnału wejściowego – bez opóźnienia i zniekształcenia. Tak prosty opis obiektu stosuje się wówczas gdy jego reakcja na zmiany jest bardzo szybka⁴ (\Rightarrow). Dla porządku zalicza się go do członów dynamiki choć jest to jednocześnie statyczny opis prostych obiektów.

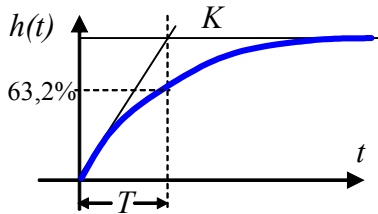
Człon inercyjny z dodatnią stałą czasową T odpowiada stabilnemu obiektowi pierwszego rzędu, który w aperiodyczny sposób osiąga stan ustalony (Rys. I-17). Analizując wzór na odpowiedź skokową układu (\Rightarrow) można wykazać, że styczna w punkcie $t=0$ przecina poziom stanu ustalonego po czasie równym stałej czasowej T , natomiast wartość rozwiązania w chwili $t=T$ wynosi 63,2% wartości stanu ustalonego.

¹ Różne metody projektowania układów opracowuje się często dla określonej postaci transmitancji, a jeśli jest to prosta postać (np. typowy człon dynamiki lub złożenie członów) to zadanie jest łatwiejsze a opracowana metoda prostsza w zastosowaniu – patrz: podstawy do teorii sterowania, metody projektowania np. [5]

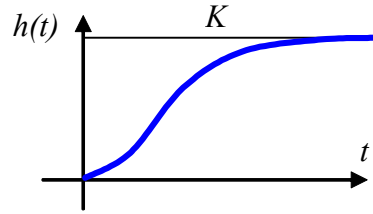
² Więcej o charakterystykach czasowych podstawowych członów dynamiki np. [3/r.2.2.6, 3.2.5]

³ odpowiedź skokowa i impulsowa są reakcjami układu na standardowe sygnały: odpowiedź skokowa $h(t)$ = reakcja na skok jednostkowy $1(t)$; odpowiedź impulsowa $g(t)$ = reakcja na idealny impuls $\delta(t)$

⁴ następuje prawie natychmiast (tzn. w porównaniu do innych obserwowanych procesów)



Rys. I-17. Interpretacja parametrów członu inercyjnego dla odpowiedzi skokowej



Rys. I-18. Odpowiedź skokowa członu inercyjnego rzędu większego niż 1

Szeregowe połączenie n członów inercyjnych przedstawione w postaci:

$$\frac{K}{(T_1s + 1) \dots (T_ns + 1)} \text{ lub } \frac{K}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad (I-73)$$

nazywa się członem inercyjnym n -tego rzędu. Jeśli stałe czasowe są dodatnie, to układ osiąga stan ustalony a odpowiedź skokowa (Rys. I-18) ma aperiodyczny przebieg z punktem przegięcia¹. Człony inercyjne są podstawowym sposobem opisu własności dynamicznych większości obiektów technologicznych (\Rightarrow), stąd też znajdują szczególne zastosowanie w eksperymentalnych metodach identyfikacji modelu (\Rightarrow).

I.10.4
I.10.4
I.7.2

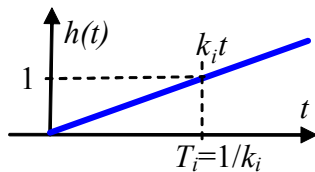
Człon oscylacyjny opisuje układy 2 rzędu i jest przedstawiany w dwóch wariantach:

$$\frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \text{ lub } \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}, \text{ gdzie } T = \frac{1}{\omega_n} > 0 \quad (I-74)$$

z zastosowaniem pulsacji ω_n lub okresu T drgań własnych członu oscylacyjnego. Transmitancja (I-74) dla $\xi \geq 1$ ma dwa rzeczywiste bieguny, więc można ją przedstawić jako człon inercyjny drugiego rzędu (\Rightarrow). Natomiast człon oscylacyjny *sensu stricto* występuje w przypadku gdy wartość współczynnika tłumienia $|\xi| < 1$, to znaczy że układ ma parę biegunów zespolonych, a więc rozwiązanie oscylacyjne (tzn. w reakcji na zakłócenia faktycznie pojawiają się oscylacje).

I.3.2

Człon całkujący realizuje operację idealnego całkowania (Rys. I-19) i w zapisie operatorowym ma postać:



Rys. I-19. Interpretacja parametrów członu całkującego dla odpowiedzi skokowej

$$\frac{1}{T_i s} \text{ lub } \frac{k_i}{s} \quad (I-75)$$

gdzie: T_i – czas całkowania, k_i – wzmacnienie.

Stosuje się również człony całkujące n -tego rzędu:

$$\frac{1}{T_i s^n} \text{ lub } \frac{k_i}{s^n} \quad (I-76)$$

Specyficzną cechą transmitancji (I-75), (I-76) są bieguny o wartości zero, leżące na osi Im , czyli na granicy stabilności. Członu całkującego nie można zaliczyć do obiektów stabilnych, ponieważ przetwarza stały sygnał wejściowy na nieograniczony sygnał na wyjściu². Można wskazać proste obiekty fizyczne o własnościach całkujących (\Rightarrow), ale szczególne znaczenie ma ten człon w konstrukcji urządzeń sterujących $\text{\textcircled{I}}$ ³.

I.10.1
I.10.4

Podobne zastosowanie ma idealny **człon różniczkujący**, reprezentowany za pomocą transmitancji:

$$T_d s \text{ lub } k_d s \quad (I-77)$$

z parametrem nazywanym czasem różniczkowania (T_d) lub wzmacnieniem (k_d). W układach fizycznych idealne różniczkowanie praktycznie nie występuje (\Rightarrow) – zawsze jest związane z występowaniem pewnej (niewielkiej) inercji, co opisuje **rzeczywisty człon różniczkujący**:

I.10.4

$$\frac{T_d s}{T_s + 1} \text{ lub } \frac{k_d s}{T_s + 1} \quad (I-78)$$

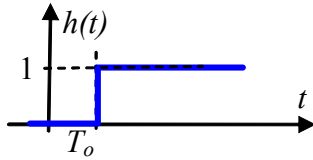
¹ Zależnie od zróżnicowania stałych czasowych punkt przegięcia może być bardziej lub mniej widoczny

² Jedną z definicji stabilności mówi, że sygnał na wyjściu układu stabilnego jest ograniczony, jeśli tylko pobudzenie było ograniczone.

$\text{\textcircled{I}}$ ³ Patrz: regulator PID, PI

Uzupełnieniem kolekcji podstawowych członów dynamiki jest **opóźnienie** (Rys. I-20), które przenosi sygnał wejściowy bez zmian, tylko przesunięty w czasie (\Rightarrow).

I.10.4



Rys. I-20. Odpowiedź skokowa członu opóźniającego

Transmitancja członu opóźniającego jest funkcją liniową ale niewymierną. Jeśli to konieczne można ją przybliżyć za pomocą funkcji wymiernej, stosując aproksymację Padé, zwykle pierwszego rzędu \textcircled{i}^1 :

$$e^{-sT_0} \approx \frac{1 - sT_0/2}{1 + sT_0/2} \quad (I-79)$$

Podstawowe człony dynamiki opisujące nawet najprostsze obiekty fizyczne są tylko przybliżeniem rzeczywistości, ale często są stosowane w praktyce inżynierskiej.

- 1° Znane są stałe czasowe układu: T_1 i T_2 . Przedstaw transmitancję i podaj bieguny układu. Co można powiedzieć o stabilności układu?
- 2° Układ ma dwa bieguny: -5 i -1 . Podaj stałe czasowe.
- 3° Równanie charakterystyczne układu ma parę pierwiastków zespolonych $-3 \pm jb$. Określ jaki to człon dynamiki i jakie ma parametry.
- 4° Przedstaw szeregowe połączenie dwóch członów inercyjnych w postaci członu oscylacyjnego i wyznacz jego parametry. Co można powiedzieć na temat wartości ξ ?
- 5° Podaj typ i parametry członu dynamiki, który spełnia następujące warunki:
 - a) stała czasowa wynosi 10s, a przy wymuszeniu o wartości 10 na wyjściu jest wartość 2,
 - b) obiekt ma 2 bieguny: -2 , -1 , a stan ustalony w odpowiedzi skokowej wynosi 3.
- 6° Określ warunki równoważności następujących transmitancji: (\ast^{26})
 - a) dwóch postaci członu oscylacyjnego (I-74),
 - b) członu inercyjnego 2 rzędu zdefiniowanego za pomocą stałych czasowych T_1 i T_2 oraz za pomocą biegunów układu s_1 i s_2 .



7.2. Podstawowe człony w przekształceniach

7.2.1. Równania różniczkowe a podstawowe człony dynamiki

Transmitancje podstawowych obiektów dynamiki są związane z prostymi równaniami różniczkowymi (Tab. I-2). W trakcie przekształcania jednych modeli w drugie można zauważyć, że w transmitancjach pojawiają się możliwości uproszczenia modelu, jednak zastosowane uproszczenia nie mogą zmieniać rzędu układu \textcircled{i}^2 .

Tab. I-2. Równania różniczkowe a podstawowe człony dynamiki

	$G(s)$	K	T	T_i	T_d	ξ	bieguny
$c\ddot{x} + b\dot{x} = mu$							
$c\ddot{x} + ax = mu$							
$b\dot{x} + ax = mu$							
$c\ddot{x} = mu$							
$b\dot{x} = mu$							
$ax = mu$							
$c\ddot{x} + b\dot{x} = n\dot{u}$							
$c\ddot{x} + ax = n\dot{u}$							
$b\dot{x} + ax = n\dot{u}$							
$c\ddot{x} = n\dot{u}$							
$b\dot{x} = n\dot{u}$	$\frac{ns}{bs}$	$\frac{n}{b}$		1	1		
$ax = n\dot{u}$							

\textcircled{i}^1 przybliżenie wyniku z rozwinięcia funkcji e^{-sT} w szereg potęgowy – patrz: aproksymacja Padé, np. [3/r.3.2]

\textcircled{i}^2 Patrz: hipoteza skracalności, np. [8], [3/r.4.4.3]



- 1° Uzupełnij Tab. I-2 – zamień równania różniczkowe na transmitancje i przekształć do postaci podstawowych członów lub iloczynu takich członów. Wyznacz bieguny układu.
- 2° Sprawdź uzupełnioną tabelę pod kątem zgodności rzędów równania różniczkowego i odpowiadającej jej transmitancji. Wskaż transmitancje, które po uproszczeniu miałyby inny rząd niż równanie różniczkowe i zinterpretuj to uproszczenie na podstawie równania różniczkowego (*27).

7.2.2. Rozkładanie transmitancji na człony podstawowe

Jednym z typowych zadań wykonywanych podczas analizy transmitancji obiektów jest przekształcenie jej do równoważnego wyrażenia zawierającego człony podstawowe. W szczególności transmitancje można rozłożyć na:

- a) człony podstawowe, czyli przedstawić w postaci iloczynu prostych transmitancji,
- b) ułamki proste, czyli wyrazić transmitancję za pomocą sumy transmitancji

Iloczyn członów podstawowych znajduje bardzo praktyczne zastosowanie podczas tworzenia i wykorzystywania charakterystyk częstotliwościowych (co jest przedmiotem

1.6.18

rozważań w kolejnym punkcie ⇨). Natomiast suma ułamków prostych jest wykorzystywana przy wyznaczaniu transformaty odwrotnej, czyli przejścia od funkcji zmiennej s do funkcji czasu t ①.

7.3. Identyfikacja dynamiki metodą charakterystyk czasowych

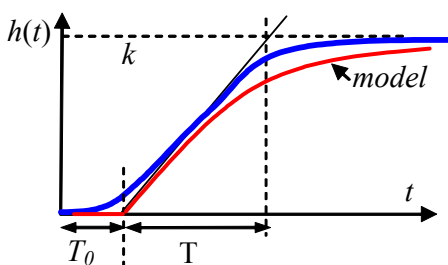
Graficzna interpretacja parametrów podstawowych członów dynamiki na charakterystykach czasowych jest wykorzystywana jako jedna z metod identyfikacji modelu na podstawie reakcji obiektu na skokową zmianę sygnału wejściowego.

Zazwyczaj identyfikowany obiekt ma charakter inercyjny – w najprostszym przypadku jest to inercja pierwszego rzędu, którą łatwo rozpoznać na podstawie reakcji obiektu i wyznaczyć wartości parametrów (Rys. I-17). Dla obiektów inercyjnych drugiego rzędu i wyższych stosuje się modele przybliżone o trzech parametrach:

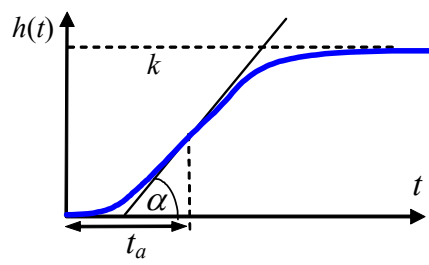
- model Kūpfmüllera o transmitancji $\frac{K}{Ts + 1} e^{-sT_0}$ (I-80)

- model Strejca o transmitancji $\frac{K}{(Ts + 1)^n}$ (I-81)

Wartości parametrów wyznacza się na podstawie pomiaru parametrów prostej stycznej w punkcie przegięcia – dla modelu (I-80) są to wprost wartości parametrów modelu² (Rys. I-21), natomiast dla modelu (I-81) konieczne są dodatkowe obliczenia (Rys. I-22) ③.



Rys. I-21. Identyfikacja modelu Kūpfmüllera



Rys. I-22. Identyfikacja modelu Strejca

Poza tymi najprostszymi przypadkami znane są także inne sposoby identyfikacji parametrów modelu, na przykład metoda momentów ④. Niektóre z metod są wykorzystywane do automatycznej identyfikacji modelu w urządzeniach automatyki.



- 1° Na czym polega inercyjny charakter obiektu (jak rozpoznać obiekt inercyjny)?
- 2° Zaproponuj algorytm automatycznego obliczenia parametrów modelu Kūpfmüllera na podstawie zarejestrowanej odpowiedzi skokowej.
- 3° Znajdź w literaturze jeden ze sposobów wyznaczania parametrów modelu Strejca.

① Patrz: transformata odwrotna, rozwiązywanie równań różniczkowych metodą operatorową, np. [3/r.3.2.2,D2]

² jeśli wymuszenie skokowe ma wartość a różną od 1, to wzmocnienie $K = k/a$

③ Patrz: model Strejca, np. [11], [3/r.5.3.2]

④ Patrz: identyfikacja parametrów modelu, metoda momentów, np. [6], [3/r.5.3.2]

8. Charakterystyki częstotliwościowe

8.1. Transmitancja Fouriera i jej interpretacja

Transmitancję Fouriera można w praktyce traktować jako szczególny przypadek transmitancji Laplace'a (\Rightarrow), ze względu na prosty związek pomiędzy zmienną s w przekształceniu \mathcal{L} i pulsacją¹ ω w przekształceniu \mathcal{F} : I.6.1

$$s = j\omega \quad (I-82)$$

Stosując powyższe podstawienie do transmitancji $G(s)$ uzyskuje się wyrażenia na liczbach zespolonych. W przypadku transmitancji wymiernej można wykonać następujące przekształcenia, które prowadzą do różnych postaci transmitancji:

$$G(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{M(j\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \quad (I-83)$$

Można wykazać ², że wielkości występujące w przekształceniach (I-83) mają następującą interpretację fizyczną – jeśli na wejściu układu jest podawane wymuszenie sinusoidalne o pulsacji ω , to na wyjściu układu występuje przebieg sinusoidalny o tej samej pulsacji ω , przesunięty w fazie i o wzmacnionej amplitudzie. Dynamiczne własności układu przejawiają się w tym, że współczynnik wzmacnienia amplitudy (A) i kąt przesunięcia fazowego (φ) zależą od częstotliwości sygnału.

1° Zastosuj przekształcenia (I-83) do transmitancji wyznaczonych w tabeli (Tab. I-2).

2° Wybierz dowolną transmitancję o postaci funkcji wymiernej i wyznacz zależność amplitudy i przesunięcia fazowego od pulsacji. 

8.2. Rodzaje charakterystyk częstotliwościowych

Interpretacja zmiennej ω i różne postacie transmitancji Fouriera (I-83) są podstawą do konstrukcji kilku typów charakterystyk częstotliwościowych:

- charakterystyki części rzeczywistej $P(\omega)$ i części urojonej $Q(\omega)$ transmitancji,
- charakterystyka amplitudowo-fazowa $P(Q)$ – wykres Nyquista,
- charakterystyka amplitudowa $A(\omega)$,
- charakterystyka fazowa $\varphi(\omega)$,
- logarytmiczna charakterystyka modułu $M(\omega) = 20 \lg A(\omega)$,
- logarytmiczna charakterystyka amplitudowo-fazowa $M(\varphi)$.

Charakterystyki częstotliwościowe zwykle są wyznaczone dla szerokich zakresów częstotliwości więc na osi ω stosowana skala logarytmiczna. Charakterystyki powstają na podstawie znanej transmitancji (\Rightarrow) lub na drodze eksperymentalnej wynikającej z interpretacji fizycznej transmitancji Fouriera. II.11

W analizie własności układów dynamiki często wykorzystuje się szeregowe połączenie kilku członów, czyli iloczyn transmitancji (\Rightarrow), który najłatwiej jest wyznaczyć z postaci wykładniczej transmitancji: I.6.1

$$G(j\omega) = \prod_{i=1}^n G_i(j\omega) = \prod [A_i(\omega)e^{j\varphi_i(\omega)}] = \prod [A_i(\omega)]e^{\sum j\varphi_i(\omega)} \quad (I-84)$$

Stąd wynika sposób konstrukcji wykresów dla szeregowego połączenia członów:

- charakterystyka amplitudowa: $A(\omega) = \prod A_i(\omega)$,
- charakterystyka fazowa: $\varphi(\omega) = \sum \varphi_i(\omega)$,
- logarytmiczna charakterystyka modułu: $M(\omega) = 20 \lg(\prod A_i(\omega)) = \sum M_i(\omega)$.

Najłatwiej jest wykonać (zwłaszcza odręcznie) operację dodawania wykresów, dlatego do analizy dynamiki układów często stosuje się logarytmiczne charakterystyki modułu $M(\omega)$ i fazy $\varphi(\omega)$, nazywane charakterystykami Bodego.

¹ Pulsacja (częstotliwość kątowna) $\omega=2\pi f$

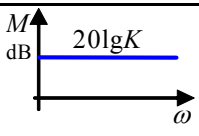
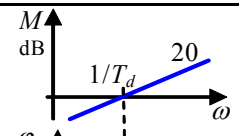
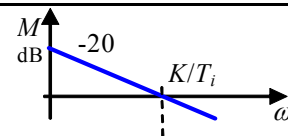

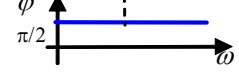
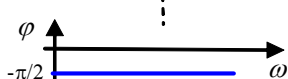
² Patrz: przekształcenie Fouriera i symboliczna metoda badania stanów ustalonych, np. **[Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.]**, [3/r.3.3.1]

8.3. Asymptoty charakterystyk Bodego

8.3.1. Charakterystyki najprostszych członów

Najprostsze logarytmiczne charakterystyki amplitudy i fazy występują dla trzech członów: proporcjonalnego, różniczkującego i całkującego (Tab. I-3). Podstawą wykresów jest transmitancja Laplace'a $G(s)$, którą przekształca się stosując podstawienie $s = j\omega$ i operacje na liczbach zespolonych, prowadzące najpierw do określenia części rzeczywistej i urojonej transmitancji Fouriera $G(j\omega)$, a następnie do wyznaczenia wzmocnienia amplitudy $A(\omega)$ i przeliczenia jej na skalę logarytmiczną $M(\omega) = 20\lg A(\omega)$.

Tab. I-3. Charakterystyki Bodego członu proporcjonalnego, różniczkującego i całkującego

Transmitancja	cz. proporcjonalny	cz. różniczkujący	cz. całkujący
$G(s) =$	K	sT_d	$\frac{K}{sT_i}$
$G(j\omega) =$	K	$j\omega T_d$	$\frac{K}{j\omega T_i} = -j \frac{K}{\omega T_i}$
$M(\omega) = 20\lg A(\omega)$	$20\lg K $	$20\lg \omega T_d $	$20\lg\left \frac{K}{\omega T_i}\right = 20\lg\frac{K}{T_i} - 20\lg\omega$
log. ch. amplitudy			
log. ch. fazy			

Funkcja $M(\omega)$ dla członu proporcjonalnego jest stała (nie zależy od ω), natomiast dwie pozostałe funkcje są proporcjonalne do $\lg \omega$ (czyli do pulsacji w skali logarytmicznej) – są to proste, które można określić wyznaczając punkt przecięcia z osią ω^1 :

cz. różniczkujący	cz. całkujący
$M(\omega) = 0 \rightarrow \omega T_d = 1 \rightarrow \omega = \frac{1}{T_d}$	$M(\omega) = 0 \rightarrow \frac{K}{\omega T_i} = 1 \rightarrow \omega = \frac{K}{T_i}$
i nachylenie – przyrost modułu $\Delta M(\omega)$ przypadający na zmianę pulsacji o jedną dekadę $\Delta\omega$:	
cz. różniczkujący	cz. całkujący
$\frac{\Delta M}{\Delta\omega} = 20\lg(10\omega_1) - 20\lg(\omega_1) = 20\lg\frac{10\omega_1}{\omega_1} = 20 \frac{dB}{dek}$	$\frac{\Delta M}{\Delta\omega} = -20\lg(10\omega_1) + 20\lg(\omega_1) = 20\lg\frac{\omega_1}{10\omega_1} = -20 \frac{dB}{dek}$

Nachylenie charakterystyk $M(\omega)$ jest stałe i wynosi dla członu różniczkującego $+20\text{dB/dek}$ a członu całkującego -20dB/dek , zawsze niezależnie od parametrów członów.

Na podstawie tych trzech prostych charakterystyk można wyznaczyć asymptoty kolejnych dwóch członów: inercyjnego i forsującego (Tab. I-4). Konstrukcja asymptot opiera się na spostrzeżeniu, że dla bardzo małych pulsacji transmitancje obu członów są prawie takie jak dla członu proporcjonalnego², natomiast dla bardzo dużych pulsacji transmitancje zbliżają się do członu całkującego lub różniczkującego. Punktem granicznym jest pulsacja $\omega=1/T$, przy której następuje przecięcie asymptot i największa różnica (3dB) pomiędzy asymptotami i dokładnymi charakterystykami $M(\omega)$. Asymptoty charakterystyk fazowych $\varphi(\omega)$ nie takiej własności – pozwalają jedynie określić graniczne wartości przesunięć fazowych ($-\pi/2$ lub $\pi/2$).

¹ na osi ω wartość $M(\omega) = 0$, to znaczy, że $20\lg A(\omega) = 0 \rightarrow A(\omega) = 1$, tzn. wzmocnienie sygnału wynosi 1

² im mniejsza pulsacja, tym mniejsze znaczenie $j\omega T$ w transmitancji

Tab. I-4. Asymptoty charakterystyk Bodego członu inercyjnego i forsującego

Transmitancja	cz.inercyjny	cz.forsujący
$G(s) =$	$\frac{K}{1+sT}$	$1+sT$
$G(j\omega) =$	$\frac{K}{1+j\omega T}$	$1+j\omega T$
dla $\omega \ll 1/T$	$G(j\omega) \approx K$	$G(j\omega) \approx 1$
dla $\omega \gg 1/T$	$G(j\omega) \approx \frac{K}{j\omega T}$	$G(j\omega) \approx j\omega T$
log.ch.amplitudy		
log.ch.fazy		

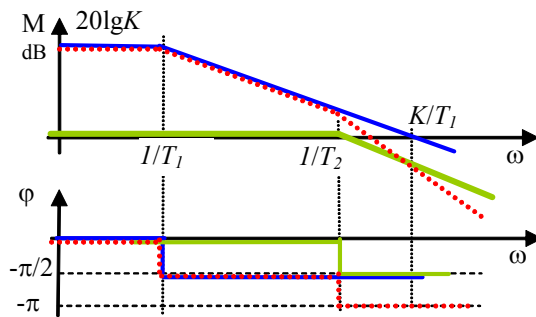
Do analizy i projektowania własności dynamicznych układów wystarcza zastosowanie asymptot charakterystyk $M(\omega)$ – dla członu inercyjnego asymptotami są charakterystyki członu proporcjonalnego i całkującego, a dla członu forsującego – charakterystyki członu proporcjonalnego i różniczkującego.

8.3.2. Charakterystyki członów złożonych

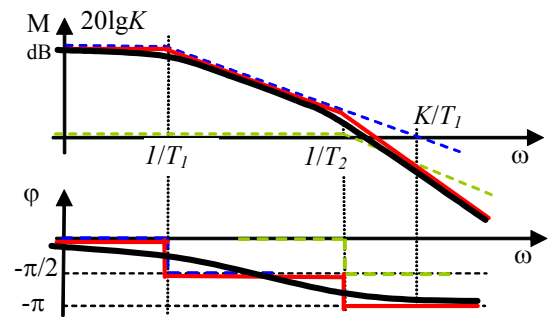
Wyznaczenie logarytmicznej charakterystyki modułu złożonej transmitancji jest dość proste jeśli ta transmitancja zostanie przedstawiona jako iloczyn członów podstawowych (Tab. I-3; Tab. I-4). Na przykład charakterystyka członu inercyjnego drugiego rzędu:

$$\frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)} = \frac{k}{(T_1s+1)} \cdot \frac{1}{(T_2s+1)} \quad (I-85)$$

powstaje przez zsumowanie (Rys. I-23) asymptot członu inercyjnego o stałej czasowej T_1 i wzmacnieniu K (niebieskie) i drugiego członu inercyjnego o stałej czasowej T_2 i wzmacnieniu 1 (zielone). Wynikiem dodawania jest asymptotyczna charakterystyka modułu (czerwona), która pozwala narysować charakterystykę układu z dokładnością do 3dB (Rys. I-24). Asymptoty charakterystyki $\varphi(\omega)$ mają jedynie charakter poglądowy, ale asymptoty $M(\omega)$ zmieniają nachylenie dokładnie o -20dB w kolejnych punktach związanych z biegunami układu.



Rys. I-23. Asymptoty charakterystyk $M(\omega)$ składników transmitancji (I-85)

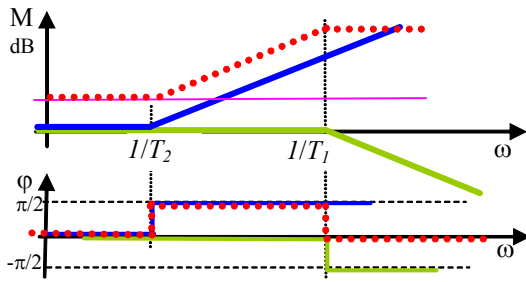


Rys. I-24. Asymptoty charakterystyki $M(\omega)$ transmitancji (I-85)

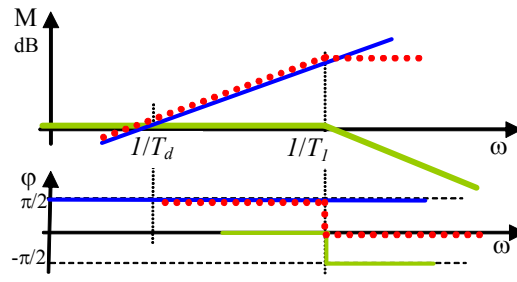
Także zera układu mają istotny wpływ na asymptoty $M(\omega)$, powodując zmianę nachylenia o 20dB, co można zilustrować na przykład wyznaczając asymptoty transmitancji:

$$K \frac{T_2s+1}{T_1s+1} \quad (I-86)$$

Można ją potraktować (Rys. I-25) jako iloczyn członu proporcjonalnego (fiolet), inercyjnego (zielony) i forsującego (niebieski). Asymptota wynikowa (czerwona) wykazuje zmianę nachylenia o 20dB związaną z zerem układu oraz zmianę o -20dB odpowiadającą biegunowi układu.



Rys. I-25. Asymptoty charakterystyk $M(\omega)$ składników i transmitancji (I-86)



Rys. I-26. Asymptoty charakterystyk $M(\omega)$ składników i transmitancji (I-87)

W przypadku szeregowego połączenia członu różniczkującego i inercyjnego¹:

$$\frac{sT_d}{T_1s + 1} = sT_d \cdot \frac{1}{T_1s + 1} \quad (I-87)$$

asymptoty (Rys. I-26) powstają z połączenia z charakterystyki członu różniczkującego (niebieska) i asymptoty członu inercyjnego o stałej czasowej T_1 i wzmacnieniu 1 (zielona). Asymptotyczna charakterystyka Bodego układu złożonego (czerwona) wykazuje tylko jedną zmianę nachylenia o -20dB związaną z biegunem układu, natomiast zero układu powoduje, że od najmniejszych pulsacji asymptota ma nachylenie 20dB .

Asymptoty mają zastosowanie w przypadku transmitancji o biegunach ujemnych, rzeczywistych. Mogą to być bieguny wielokrotne – wówczas nachylenie asymptot zmieni się o wielokrotność -20dB/dek , ale nie mogą to być bieguny zespolone. Ilustrują to różne przypadki członu oscylacyjnego (Tab. I-5).

Tab. I-5. Charakterystyk Bodego członu oscylacyjnego

cz.oscylacyjny ($\xi > 1$) = cz.inercyjny 2.rzędu		cz.oscylacyjny ($0 < \xi < 1$)
K	K	K
$(T_1s + 1)(T_2s + 1)$	$(Ts + 1)^2$	$T^2s^2 + 2\xi Ts + 1$

W przypadku biegunów zespolonych można wyznaczyć łamaną, która w punkcie załamania zmieni nachylenie o -40dB/dek , ale błąd w stosunku do charakterystyki dokładnej przekracza 3dB ponieważ występuje tak zwany szczyt rezonansowy (im mniejsze ξ , tym większe wzmacnienie przebiegów o pulsacji $\omega = 1/T$).



- 1° Asymptoty $M(\omega)$ transmitancji (I-86) powstały przy założeniu, że $T_1 < T_2$ (Rys. I-25). Wyznacz asymptoty jeśli $T_1 > T_2$.
- 2° Jak się zmieni charakterystyka $M(\omega)$ układu jeśli wzrośnie (lub zostanie dodane) wzmacnienie układu?
- 3° Wyznacz asymptoty $M(\omega)$ dla typowych urządzeń sterujących:

a) regulator PI (proporcjonalno-całkujący) - $G_R(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$

b) regulator PD (proporcjonalno-różniczkujący) - $G_R(s) = K_p (1 + T_d s)$

c) regulator PID - $G_R(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$

¹ tzw. człon różniczkujący rzeczywisty

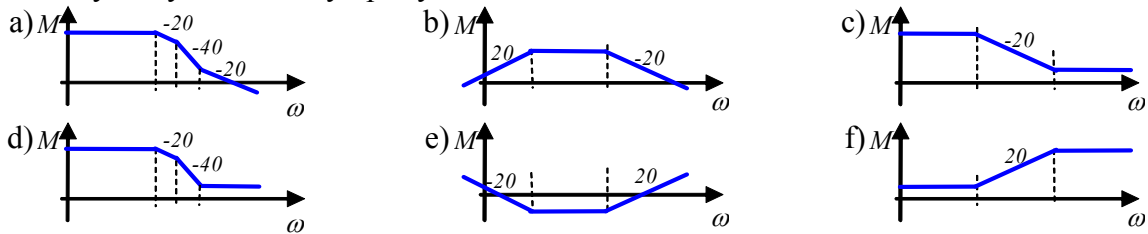
8.4. Identyfikacja dynamiki metodą charakterystyk częstotliwościowych

Logarytmiczne charakterystyki modułu i fazy są często wykorzystywane do rozwiązywania różnych zadań ze względu na następujące własności:

- charakterystyki członów połączonych szeregowo sumują się,
- asymptoty charakterystyki amplitudowej mają nachylenie o wielokrotności +/- 20 dB/dek,
- każdy biegun objawia się załamaniem asymptot o -20 dB/dek,
- każde zero objawia się załamaniem asymptot o +20 dB/dek,
- charakterystyki asymptotyczne mają określone błędy (dla pulsacji załamania maksymalny błąd 3dB a w odległości oktawy od pulsacji załamania błąd 1 dB).

Podstawowy obszar zastosowań to projektowanie układów dynamiki oraz identyfikacja modelu układu na podstawie eksperymentu.

Do identyfikacji modelu konieczne jest wykonanie serii eksperymentów, w których na wejście układu podaje się sygnał sinusoidalny o różnych częstotliwościach i po ustaleniu się odpowiedzi odczytuje wzmocnienie oraz przesunięcie fazowe sygnału wyjściowego. Wyniki przedstawione na wykresie $M(\omega)$ obudowuje się asymptotami o nachyleniach, które są wielokrotnościami 20dB/dek. Odtwarzając asymptoty członów podstawowych można wyznaczyć iloczyn transmitancji odpowiadający charakterystykom oraz wyznaczyć ich parametry. Przykładowe asymptoty:



1° Wśród asymptot a-f wskaż te, które dotyczą układów drugiego rzędu?

2° Rozłóż asymptoty na człony podstawowe i opisz sposób wyznaczenia parametrów.



9. Podsumowanie analitycznych metod badania dynamiki

9.1. Wybrane własności układu liniowego

Opisane metody analizy dynamiki układów dotyczą prawie zawsze układów liniowych. Ta różnorodność metod jest wynikiem charakterystycznych własności układów liniowych:

- 1° W układach liniowych ma zastosowanie zasada superpozycji, co sprawia, że rozwiązanie równania różniczkowego opisującego dynamikę układu jest sumą składowej swobodnej i wymuszonej.
- 2° Znana postać rozwiązania swobodnego każdego liniowego układu dynamiki, a parametry tego rozwiązania są wyznaczane na podstawie algebraicznego równania charakterystycznego.
- 3° Kryterium położenia pierwiastków równania charakterystycznego wystarcza do określenia stabilności układu liniowego.
- 4° Rozwiązanie swobodne decyduje o własnościach dynamicznych układu liniowego.
- 5° Własności dynamiczne układu liniowego nie zależą od wymuszenia.
- 6° Odpowiedź na pochodną sygnału równa się pochodnej odpowiedzi na ten sygnał.
- 7° Układ liniowy ma jeden punkt równowagi.
- 8° Stabilność lub niestabilność układu nie zależy od warunków początkowych – jeśli układ liniowy jest stabilny to jest stabilny globalnie, a jeśli jest niestabilny to również globalnie.
- 9° Układy liniowe można opisać za pomocą transmitancji dzięki zastosowaniu przekształcenia Laplace'a / Fourier'a.



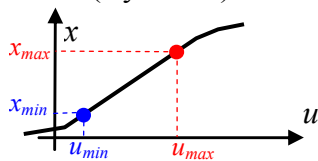
Sprawdź własność 6° na przykładzie funkcji impulsowej $\delta(t)$, która jest pochodną funkcji skokowej $1(t)$. Z której własności wynika, że reakcja układu nie zależy od punktu pracy? Jakie praktyczne znaczenie może mieć pojęcie globalnej stabilności?

9.2. Analiza układów nieliniowych

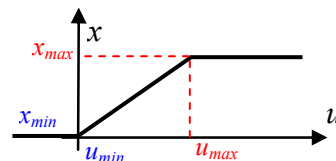
9.2.1. Przyczyny nieliniowości obiektów

Liniowe modele dynamiki można analizować dokładnie i różnymi metodami. Natomiast dokładna analiza dynamiki układów nieliniowych jest znacznie trudniejsza a często wręcz niemożliwa, ponieważ nie można podzielić problemu na prostsze podzadania (nie można stosować zasady superpozycji), rzadko znane jest rozwiązanie nieliniowych równań różniczkowych a własności układu zależą i od punktu pracy, i od wymuszenia.

Tymczasem rzeczywiste obiekty są zawsze nieliniowe ¹, choćby ze względu na fizyczne ograniczenia sygnałów, wynikające na przykład z wymiarów geometrycznych czy warunków bezpieczeństwa (Rys. I-27).



Rys. I-27. Ograniczona liniowość sygnałów



Rys. I-28. Nasycenie - nieliniowość nieróżniczkowalna

Nieliniowości rzeczywistych obiektów (procesów) mogą mieć zarówno charakter funkcji różniczkowalnych (np. funkcje potęgowe, wymierne), jak i funkcji nieróżniczkowalnych (np. nasycenie Rys. I-28). Funkcje nieróżniczkowalne są często wykorzystywane w badaniach symulacyjnych (\Rightarrow), natomiast w badaniach analitycznych unika się ich (ogranicza się analizę do liniowego zakresu zależności sygnałów).

II.7.1

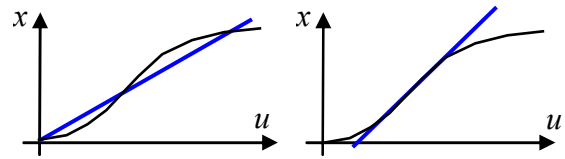
9.2.2. Przybliżenie i linearyzacja

W modelach konstruowanych na potrzeby automatyki problem nieliniowości rozwiązuje się bardzo często dzięki zastosowaniu opisów przybliżonych. Modele te nie służą do tworzenia wirtualnej rzeczywistości, tylko do opisanie podstawowych zjawisk, zazwyczaj istotnych z punktu widzenia sterowania obiektem.

¹ Patrz: układy nieliniowe, np. [3/r.5.1]

Pierwszym sposobem uproszczenia modelu jest przeanalizowanie warunków konstrukcji i przeznaczenia modelu w celu zdefiniowania dopuszczalnych założeń. Praktycznie w każdym modelu występują założenia na temat stałych wartości określonych parametrów obiektu. Na przykład bardzo wiele parametrów zależy od temperatury¹, ale zakłada się, że temperatura badanego układu jest praktycznie niezmienna lub że jej wpływ jest pomijalny w porównaniu z innymi zjawiskami, które są przedmiotem badań.

Typowym sposobem uproszczenia jest też zastosowanie w konstrukcji modelu zamiast funkcji nieliniowej jej liniowego przybliżenia metodą siecznej lub stycznej (Rys. I-29) (⇒).



Rys. I-29. Liniowe przybliżenie funkcji

I.10.1.2

Ogólna metoda postępowania w przypadku modeli nieliniowych ale różniczkowalnych polega na wykonaniu **linearyzacji dynamicznej** w punkcie równowagi układu ². Zakładając, że nieliniowy model ma postać:

$$f(x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t), u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(m)}(t)) = 0 \quad (I-88)$$

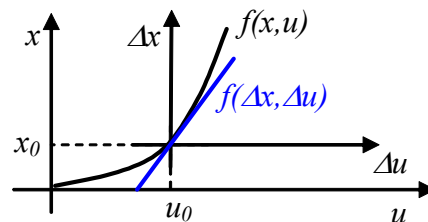
to metoda polega na rozwinięciu funkcji $f(x, u)$ w szereg Taylora, ograniczeniu tego rozwinięcia do elementów liniowych i przesunięciu układu współrzędnych do punktu równowagi $f(x_0, u_0)$:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0 \Delta x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_0 \Delta \dot{x}(t) + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial x^{(n)}} \right|_0 \Delta x^{(n)}(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_0 \Delta u(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{u}} \right|_0 \Delta \dot{u}(t) + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial u^{(n)}} \right|_0 \Delta u^{(n)}(t) = 0 \quad (I-89)$$

gdzie: $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0, \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_0, \dots, \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_0, \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{u}} \right|_0, \dots$ są parametrami zlinearyzowanego modelu wyznaczonymi

jako wartości pochodnych funkcji f po zmiennych x, u i ich pochodnych, obliczone w punkcie równowagi (x_0, u_0) .

Interpretacja linearyzacji dynamicznej (Rys. I-30) pokazuje, że przybliżenie modelu polega na wyznaczeniu prostej stycznej do funkcji $f(x, u)$ w punkcie równowagi – to właśnie ta prosta jest zlinearyzowanym modelem zapisanym w przesuniętym układzie współrzędnych $f(\Delta x, \Delta u)$



Rys. I-30. Linearyzacja dynamiczna w punkcie równowagi

Poprawność wniosków na temat własności dynamicznych (np. stabilności/niestabilności) nieliniowego układu, wyprowadzone na podstawie badania zlinearyzowanego modelu zależą od dokładności przybliżonego modelu, na przykład obowiązują tylko w pewnym otoczeniu punktów równowagi.

9.2.3. Badania symulacyjne

Ograniczone możliwości analitycznego badania układów nieliniowych powodują, że często wykorzystuje się badania symulacyjne. Modele w postaci równań różniczkowych liniowych i nieliniowych są wprowadzane do programów symulacyjnych według tych samych zasad (⇒). Równania liniowe mają dodatkowe możliwości definiowania modeli oparte na macierzowych równaniach stanu i transmitancjach. Różnice w badaniach dynamiki modeli liniowych i nieliniowych polegają na zakresie badań – własności układu nieliniowego powinny być zbadane w różnych punktach pracy i dla różnych parametrów wymuszeń. Ostrożna powinna być też interpretacja wniosków – badania symulacyjne pokazują wynik dla konkretnych wartości parametrów i zmiennych. Uogólnienie tych wyników stanowi oddzielne zadanie.

I.1.4÷7
B

¹ np. parametry elektryczne, gęstość, ciepło właściwe, wymiary geometryczne – patrz np. [3/r.5÷11]

² Patrz: linearyzacja dynamiczna, np. [3/r.2.3.1]

10. Konstrukcja i analiza modeli dynamiki obiektów

Modele i metody przedstawione w punktach I.1÷9 pozwalają na opis i badanie własności dynamicznych rzeczywistych obiektów. Modele badanych obiektów można otrzymać eksperymentalnie na podstawie charakterystyk czasowych (⇔) lub częstotliwościowych (⇔), a także teoretycznie, dzięki znajomości zjawisk zachodzących na obiekcie, co jest przedmiotem niniejszego punktu. Rozpatrywane będą proste przykłady obiektów z dziedziny układów hydraulicznych, cieplnych, elektrycznych i mechanicznych. Podstawą konstrukcji modeli w każdym przypadku są równania bilansowe. Aby model był kompletny ilość równań musi odpowiadać ilości zmiennych wyjściowych modelu¹.

10.1. Zbiorniki – otwarte układy hydrauliczne

10.1.1. Zasady konstrukcji i podstawowe zjawiska hydrauliczne

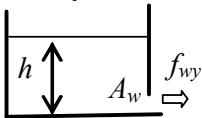
Najprostsze modele dynamiki konstruowane dla obiektów hydraulicznych występują w przypadku układów składających się z otwartych zbiorników przez które przepływa ciecz o stałej gęstości, na przykład woda². Konstrukcja modeli opiera się dynamicznym bilansie objętości cieczy (V) w każdym zbiorniku – zmiana objętości w czasie jest wynikiem bilansu strumieni wpływających i wypływających (f_i):

$$\frac{dV(t)}{dt} = \sum \pm f_i(t), \quad [\text{m}^3/\text{s}] \quad (\text{I-90})$$

Opisywane modele będą dotyczyły zbiorników o płaskim dnie o powierzchni A i pionowych ścianach, to znaczy, że w bilansie (I-90) zamiast objętości V może występować wysokość h :

$$A \frac{dh(t)}{dt} = \sum \pm f_i(t) \quad (\text{I-91})$$

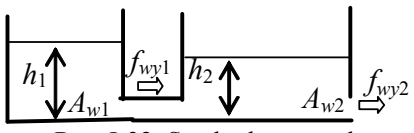
Przepływ cieczy pomiędzy zbiornikami często odbywa się na zasadzie swobodnego wypływu przez otwór w dnie zbiornika³. Strumień wypływu na zewnątrz zależy od powierzchni otworu A_w i wysokości cieczy w zbiorniku h (Rys. I-31) i wyraża się wzorem:



$$f_{wy}(t) = A_w \sqrt{2gh(t)} \quad (\text{I-92})$$

Rys. I-31. Swobodny wypływ

Jeśli ciecz wypływa nie na zewnątrz a do kolejnego zbiornika (Rys. I-32), to strumień swobodnego wypływu zależy od powierzchni otworu i różnicy wysokości pomiędzy zbiornikami:



$$f_{wy1}(t) = A_{w1} \sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))} \quad (\text{I-93})$$

(dotyczy to tylko przepływu pomiędzy zbiornikami, bo wypływ f_{wy2} odbywa się na zewnątrz).

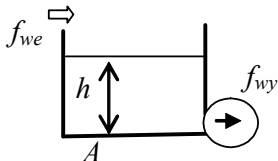
Rys. I-32. Swobodny przepływ

Przepływ cieczy pomiędzy zbiornikami może być również wymuszony za pomocą pomp o sterowanej wydajności, niezależnej od poziomu cieczy w zbiornikach.

Więcej o zjawiskach fizycznych w otwartych układach hydraulicznych [3].

10.1.2. Zbiorniki jako podstawowe człony dynamiki

Opierając na zasadach opisanych powyżej przyjrzymy się własnościom dwóch prostych obiektów z jednym zbiornikiem. Dla zbiornika z pompą (Rys. I-33) można napisać jedno równanie bilansowe:



$$A \dot{h}(t) = f_{we}(t) - f_{wy}(t) \quad (\text{I-94})$$

Równanie (I-94) jest pełnym modelem dynamiki obiektu, z którego można wyznaczyć przebieg zmian wysokości h dla zadanych zmiennych wejściowych f_{we} i f_{wy} .

Model zbiornika z pompą jest członem całkującym (⇔).

Rys. I-33. Zbiornik z pompą

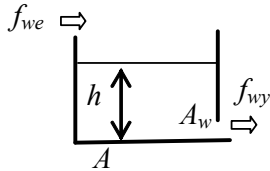
I.7.1

¹ pozostałe zmienne to wejścia modelu (ich stan jest wymuszony z zewnątrz i nie zależy od stanu obiektu)

² ciecz niezbyt lepka, niezbyt gęsta, jednorodna,

³ w dnie zbiornika lub w ścianie przy dnie

Równanie dynamiki zbiornika ze swobodnym wypływem (Rys. I-34) powstaje również na bazie bilansu cieczy wpływającej f_{we} i wypływającej (f_{wy}) ze zbiornika:



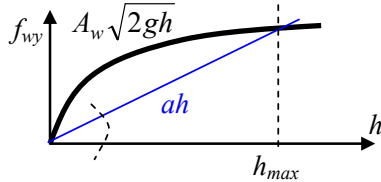
$$A\dot{h}(t) = f_{we}(t) - f_{wy}(t) \quad (I-95)$$

gdzie zmienną stanu jest aktualna wysokość cieczy h , a strumień wypływu opisuje zależność (I-92), wobec tego model ma postać:

$$A\dot{h}(t) = f_{we}(t) - A_w\sqrt{2gh(t)} \quad (I-96)$$

Rys. I-34. Zbiornik z wypływem

Model jest nieliniowy ale można go uprościć linearyzując wzór na swobodny wypływ (\Rightarrow) na przykład **metodą siecznej** (Rys. I-35) – minimalny wypływ cieczy f_{wy} wynosi zero, a maksymalny ma miejsce przy maksymalnej wysokości cieczy h_{max} , która wynika z wysokości ścian zbiornika (są to jednocześnie naturalne ograniczenia zastosowania modelu). Zlinearyzowany model ma postać:



$$A\dot{h}(t) = f_{we}(t) - ah(t) \quad (I-97)$$

gdzie współczynnik a wynika z równości:

$$ah_{max} = A_w\sqrt{2gh_{max}} \quad (I-98)$$

Rys. I-35. Linearyzacja swobodnego wypływu

Dokładność modelu zależy od punktu pracy wyznaczonego przez aktualny poziom cieczy w zbiorniku. Model (I-97) można przetworzyć do postaci członu inercyjnego (\Rightarrow).

Zbiorniki ze swobodnym wypływem mają **własność samowyrównywania**, ponieważ wypływ cieczy zmniejsza się gdy ilość cieczy w zbiorniku maleje. To wewnętrzne sprzężenie sprawia, że obiekt przy ograniczonej zmianie na wejściu samoczynnie przechodzi z jednego stanu ustalonego do innego stanu ustalonego (jest zawsze stabilny). Wszystkie człony inercyjne wykazują tę własność, natomiast człony całkujące – nie.

1° Sprawdź jednostki w równaniach bilansowych (I-94) i (I-97) i zbadaj ich stabilność. (*²⁸)

2° Przedstaw modele w postaci podstawowych członów dynamiki transmitancji.

3° Jak powierzchnia dna i otworu wpływa na własności dynamiczne zbiornika ze swobodnym wypływem? Jaką wartość ma stała czasowa zlinearyzowanego modelu i jaki ma wymiar?

4° Określ maksymalny strumień jaki może wpływać do zbiornika f_{wemax} , tak aby nie przekroczyć wysokości ścian zbiornika h_{max} .

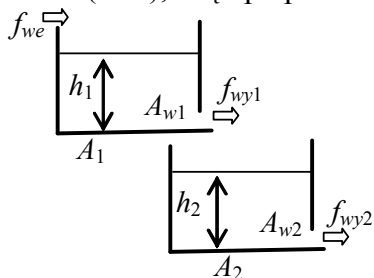
10.1.3. Kaskady zbiorników

Podstawę konstrukcji modelu dla obiektu zawierającego kilka zbiorników stanowi układ równań różniczkowych opisujących zmianę objętości w każdym ze zbiorników. Przeanalizujemy dwa typowe układy zbiorników ze swobodnym wypływem: kaskadę niewspółdziałającą (Rys. I-36) i współdziałającą (Rys. I-37). Oba układy zawierają dwa zbiorniki więc oba modele opierają na układzie równań:

$$\begin{cases} A_1\dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - f_{wy1}(t) \\ A_2\dot{h}_2(t) = f_{wy1}(t) - f_{wy2}(t) \end{cases} \quad (I-99)$$

W przypadku **kaskady niewspółdziałającej** (\Rightarrow) strumienie cieczy f_{wy1} i f_{wy2} są opisane wzorem (I-92), więc po podstawieniu do układu (I-99) dokładny model obiektu ma postać:

$$\begin{cases} A_1\dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - A_{w1}\sqrt{2gh_1(t)} \\ A_2\dot{h}_2(t) = A_{w1}\sqrt{2gh_1(t)} - A_{w2}\sqrt{2gh_2(t)} \end{cases} \quad (I-100)$$



Jeśli zamiast dokładnego wzoru na swobodny wpływ zostanie zastosowany wzór zlinearyzowany, to powstanie uproszczony model obiektu:

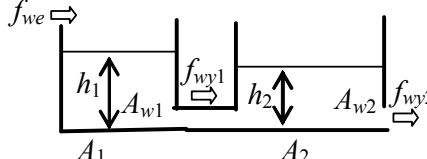
$$\begin{cases} A_1\dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - a_1h_1(t) \\ A_2\dot{h}_2(t) = a_1h_1(t) - a_2h_2(t) \end{cases} \quad (I-101)$$

Rys. I-36. Kaskada niewspółdziałająca

Jak łatwo zauważyć w modelach pierwsze równanie zależy tylko od jednej zmiennej stanu h_1 , a drugie od obu zmiennych h_1 i h_2 , czyli pierwszy zbiornik oddziałuje na drugi, ale drugi nie

ma wpływu na pierwszy, to znaczy, że układ jest **unilateralny**.

I.7.1 Podstawowa różnica w konstrukcji modelu dla **kaskady współdziałającej** (\Leftrightarrow) dotyczy opisu strumienia przepływu pomiędzy zbiornikami f_{wy1} , który zależy od różnicy poziomów, zgodnie ze wzorem (I-93). Po podstawieniu odpowiednich zależności na f_{wy1} i f_{wy2} do układu (I-99) otrzymujemy dokładny model kaskady:



$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - A_{w1} \sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))} \\ A_2 \dot{h}_2(t) = A_{w1} \sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))} - A_{w2} \sqrt{2gh_2(t)} \end{cases} \quad (I-102)$$

Rys. I-37. Kaskada współdziałająca

lub model uproszczony:

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = f_{we}(t) - a_1(h_1(t) - h_2(t)) \\ A_2 \dot{h}_2(t) = a_1(h_1(t) - h_2(t)) - a_2 h_2(t) \end{cases} \quad (I-103)$$

W obu równaniach modelu kaskady współdziałającej występują obie zmienne stanu h_1 i h_2 – zbiorniki wpływają na siebie wzajemnie.

II.7.3 Dokładne modele kaskad (I-100), (I-102) są nieliniowe, więc oprócz wyznaczenia punktu równowagi, trudno je analizować – łatwiej przeprowadzić badania symulacyjne (\Leftrightarrow). Możliwa jest jednak analiza modeli zlinearyzowanych (I-101), (I-103) i sformułowanie przybliżonych wniosków. Wartości wszystkich parametrów powyższych modeli można wyznaczyć na podstawie wymiarów geometrycznych.

Przeprowadź analizę własności kaskad na podstawie równań różniczkowych



- 1° Wyznacz wzór na punkt równowagi. Naszkicuj charakterystykę statyczną.
- 2° Wysokość ścian zbiorników wynosi h_{1max} i h_{2max} . Jaką wartość może mieć strumień przepływu wejściowego w stanie ustalonym, aby ciecz nie przelewała się przez ściany?

- I.5.1**
- 3° Zapisz model kaskady w postaci równań stanu (\Leftrightarrow). Wyznacz równanie charakterystyczne.
 - 4° Jak zmienią się modele układów jeśli pojawi się drugie źródło cieczy f_{we2} , które wprowadza ciecz bezpośrednio do drugiego zbiornika?

Powtórz/uzupełnij elementy analizy własności kaskad na podstawie transmitancji

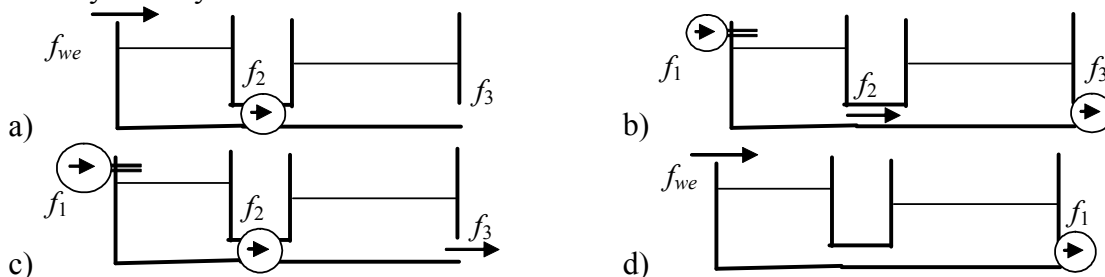
- I.6.2**
- 5° Wyznacz transmitancje kaskady: $h_1 = \dots$, $h_2 = \dots$ (\Leftrightarrow). Wyznacz równanie charakterystyczne i porównaj z równaniem wyznaczonym na podstawie równań stanu

- 6° Czy układy kaskadowe są stabilne? Uzasadnij.
- 7° Sprawdź, czy można tak dobrać parametry zbiorników (wymiary, otwory), aby zakłócenie przepływu nie wywoływało oscylowania poziomów w zbiornikach kaskad?

- I.6.2**
- 8° Rozłóż transmitancje obiektów na iloczyn podstawowych członów dynamiki (\Leftrightarrow).

10.1.4. Przykłady otwartych układów hydraulicznych

Dysponując zbiornikami oraz pompami o sterowanej wydajności można konstruować obiekty o różnych własnościach.



Spróbuj przewidzieć własności dokładnych i uproszczonych modeli obiektów a-d.

- 1° Jaki będzie rząd modelu obiektu?
 - 2° Ile i jakie będzie miał zmienne stanu? Ile i jakie zmienne wejściowe ma model obiektu?
 - 3° Uproszczony model ma postać równań stanu ($\dot{x} = Ax + Bu$) - jaki wymiar ma macierz A?
 - 4° Czy dokładny model obiektu jest liniowy? Ile równań stanu będzie zawierał ten model?
 - 5° Czy dokładny model obiektu można zapisać w postaci macierzowych równań stanu?
 - 6° Ile równań różniczkowych wystarczy do opisanie obiektu?
 - 7° Którego stopnia będzie mianownik transmitancji obiektu?
 - 8° Czy jest to obiekt unilateralny?
- Odpowiedzi uzasadnij analitycznie.



10.2. Obiekty cieplne – układy termokinetyczne

10.2.1. Zasady konstrukcji i podstawowe zjawiska cieplne

Pierwszym krokiem w konstrukcji prostych modeli obiektów cieplnych jest wskazanie najbardziej znaczących magazynów ciepła (Q) w układzie. Opisywane modele wykorzystują założenie o doskonałym mieszanii, to znaczy, że w całej objętości magazynu panuje jednakowa temperatura (T) więc zawartość ciepła można obliczyć ze wzoru:

$$Q(t) = c_p \rho V T(t) = C_V T(t) \quad (I-104)$$

gdzie C_V oznacza pojemność cieplną magazynu – stały parametr zależny od ciepła właściwego c_p , gęstości ρ i objętości V substancji wypełniającej magazyn. Drugi krok w konstrukcji modelu to opis zmiany zawartości magazynu w czasie w postaci bilansu źródeł i strat ciepła (q_i):

$$\frac{dQ(t)}{dt} = C_V \frac{dT(t)}{dt} = \sum \pm q_i(t), [\text{W}] \quad (I-105)$$

Główną przyczyną strat jest przewodzenie ciepła przez ściany (Rys. I-38). Strumień traconego ciepła jest proporcjonalny do różnicy temperatur:

T_w

T_{zew}

K_c

$q_{str}(t) = K_c (T_w(t) - T_{zew}(t)) \quad (I-106)$

a współczynnik proporcjonalności K_c zależy od powierzchni, grubości i materiału ścian.

Rys. I-38. Przewodzenie ciepła przez ściany

Najprostszym źródłem ciepła w magazynie jest grzałka elektryczna o określonej mocy (q_g), zwykle z możliwością sterowania. Innym typowym sposobem ogrzewania jest przenoszenie ciepła przez medium (nośnik ciepła), na przykład nawiew ciepłego powietrza do pomieszczenia, dopływ gorącej wody do grzejnika (Rys. I-39). Strumień dostarczanego ciepła zależy od własności nośnika (c_p, ρ) oraz aktualnego przepływu f i temperatury T_z :

T_w

$T_p = T_w$

f

$q_z(t) = c_p \rho f(t) T_z(t) \quad (I-107)$

Zakłada się, że ta sama ilość nośnika wypływa z magazynu i zabiera z sobą część ciepła:

Rys. I-39. Przenoszenie ciepła przez medium

$$q_p(t) = c_p \rho f(t) T_p(t) = c_p \rho f(t) T_w(t) \quad (I-108)$$

Na podstawie założenia o doskonałym mieszanii uznaje się, że temperatura nośnika wypływającego z magazynu (T_p) jest równa temperaturze nośnika w magazynie (T_w).

Więcej o zjawiskach fizycznych występujących w układach termokinetycznych w [3].

10.2.2. Podstawowe obiekty cieplne

Założmy, że badany obiekt cieplny to pojedynczy magazyn ciepła, który traci ciepło przez zewnętrzne ściany. W pierwszym przypadku (Rys. I-40) magazyn jest ogrzewany za pomocą grzejnika elektrycznego a jego model opiera się na następującym równaniu bilansowym:

T_w, C_V

T_{zew}

K_c

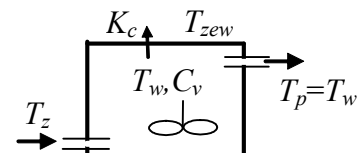
$C_V \dot{T}_w(t) = q_g(t) - K_c (T_w(t) - T_{zew}(t)) \quad (I-109)$

Zmienną wyjściową modelu jest temperatura T_w charakteryzująca aktualny stan magazynu (zmienna stanu). Pozostałe zmienne – moc q_g i temperatura na zewnątrz T_{zew} – są zmiennymi wejściowymi, ponieważ ich wartość nie zależy od procesów na obiekcie.

Rys. I-40. Magazyn z grzejnikiem elektrycznym

Model (I-109) jest liniowy, można więc wyznaczyć transmitancje obiektu. Układ ma jedno wyjście i dwa wejścia, więc transmitancje będą dwie (\Rightarrow) i będą to człony inercyjne ponieważ układ jest pierwszego rzędu i ma własność samowyrównywania (\Rightarrow) – im wyższa temperatura magazynu T_w , tym większa strata ciepła.

W drugim przypadku pojedynczego magazynu (Rys. I-41) występuje przepływ ogrzewającego medium, przy czym zmieniać może się zarówno strumień przepływu f , jak i temperatura zasilania T_z .



Rys. I-41. Magazyn z przepływem medium

I.6.3

I.6.3

Podstawą modelu jest równanie różniczkowe:

$$C_v \dot{T}_w(t) = c_p \rho f(t)(T_z(t) - T_w(t)) - K_c(T_w(t) - T_{zew}(t)) \quad (I-110)$$

gdzie zmienną wyjściową jest temperatura medium w magazynie T_w , a pozostałe zmienne są wejściami (f , T_z i T_{zew}). Jeśli strumień przepływu jest zmienną, to model (I-110) jest nieliniowy. Jeśli jednak w konkretnym przypadku można założyć, że przepływ jest parametrem obiektu (\Rightarrow), to model będzie liniowy i można wyznaczyć jego transmitancje (dwa człony inercyjne tak jak dla (I-109)).

I.9.2.2

Wartości parametrów w modelach cieplnych można wyznaczyć na podstawie wymiarów geometrycznych magazynów ciepła i własności fizycznych substancji¹. Część z nich można również wyliczyć wykorzystując równania statyczne modelu oraz informacje na temat wartości zmiennych wejściowych i wyjściowych w pewnym punkcie pracy² (\Rightarrow).

II.9

- 1° Sprawdź jednostki w modelu (I-109). Wyznacz równanie charakterystyczne. (*²⁹)
- 2° Wyznacz wszystkie transmitancje (I-109) i narysuj schemat blokowy modelu. Wyznacz równanie charakterystyczne modelu. (*³⁰).
- 3° Przetwórz model (I-109) w postaci podstawowych członów dynamiki – określ typ członów, parametry i jednostki. (*³¹).
- 4° Wykonaj badania opisane powyżej (1°÷3°) dla modelu (I-110), przyjmując założenie gwarantujące liniowość obiektu. Od czego zależą stałe czasowe modelu?

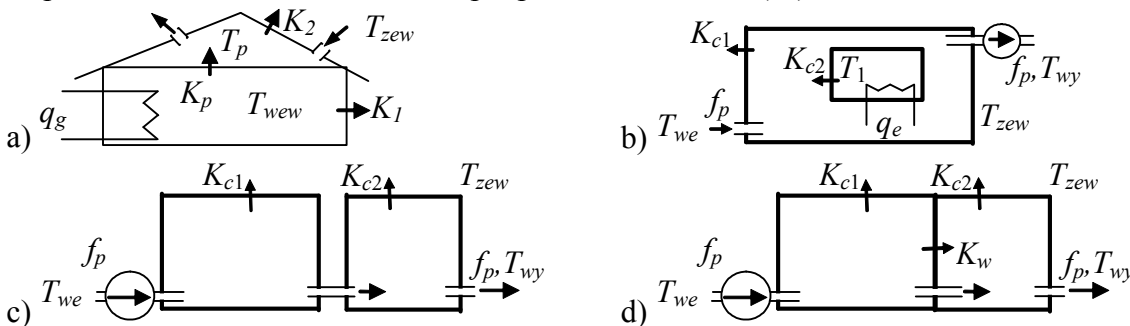


10.2.3. Wielowymiarowe układy cieplne

Układ cieplny zawierający kilka znaczących magazynów wymaga ułożenia kilku równań bilansowych – model zawiera tyle równań różniczkowych ile jest znaczących magazynów ciepła. Wybór magazynów następuje na podstawie ich pojemności cieplnych i jest ustalany na etapie formułowania założeń dla modelu. Zmiennymi wyjściowymi modelu są zmienne stanu, to znaczy zmienne opisujące stan poszczególnych magazynów (temperatury). Pozostałe zmienne modelu powinny mieć charakter wejść, czyli zmiennych, które nie zależą od stanu obiektu, tylko są wymuszane z zewnątrz³.

Obiekty przedstawione poniżej mają jedną wspólną cechę – zawierają dwa magazyny ciepła. Jednak ich własności będą się różnić ze względu na relacje pomiędzy magazynami ciepła oraz założenia ustalane na etapie planowania badań (\Rightarrow).

II.9



Przed konstrukcją modeli obiektów a÷d spróbuj określić jego zmienne wejściowe i wyjściowe oraz przewidzieć własności (rząd, liniowość, unilateralność)

- 1° Skonstruuj model obiektu w postaci równań różniczkowych (kompletny model zawiera zmienne, które są albo zmiennymi stanu, albo zmiennymi wejściowymi). (*³²)
- 2° Wyznacz wzory na punkt równowagi (dla wszystkich zmiennych wyjściowych).
- 3° Podaj równania statyczne i charakterystyczne oraz macierz stanu modelu.
- 4° Przedstaw model w postaci transmitancji, przyjmując w razie potrzeby założenia zapewniające liniowość obiektu (jakie?). Jak sprawdzić poprawność transmitancji (*³³)



¹ w ten sposób są obliczane wartości parametrów podczas projektowania obiektów, np. projekty budowlane

² informacje tego typu można znaleźć w projektach lub uzyskać doświadczalnie

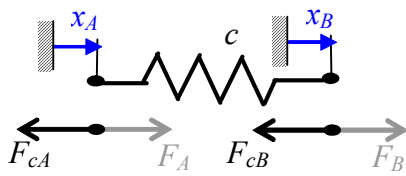
³ W pewnych przypadkach, gdy brak założenia o doskonałym mieszaniu, może się zdarzyć, że zmiennych wyjściowych będzie więcej niż równań różniczkowych (nie wszystkie zmienne poza zmiennymi stanu można uznać za wejścia) – należy wówczas szukać dodatkowych zależności i wyeliminować nadmiarowe zmienne.

10.3. Obiekty mechaniczne liniowe

10.3.1. Podstawowe zasady konstrukcji i elementy mechaniczne

Modele dynamiki układów mechanicznych opierają się na bilansie sił i momentów sił. Najprostsze modele występują w przypadkach gdy ruch odbywa się wzdłuż jednego kierunku a obrót wokół jednej osi¹. Pierwszy etap konstrukcji modelu polega na wykonaniu schematu, który opisuje działanie układu za pomocą idealnych elementów podstawowych: sprężyny, tłumika i masy oraz zewnętrznych sił.

Sprężyna reprezentuje siły sprężystości – siły reakcji elementu proporcjonalne do przesunięcia końców²:

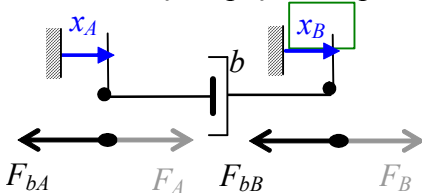


Rys. I-42. Sprężyna

$$\begin{aligned} F_{cA}(t) &= c(x_A(t) - x_B(t)) \\ F_{cB}(t) &= c(x_B(t) - x_A(t)) \end{aligned} \quad (I-111)$$

gdzie x_A przesunięcie końca A , x_B – przesunięcie drugiego końca, c – współczynnik sztywności (zależny od konstrukcji i materiału).

Tłumik reprezentuje zjawisko tarcia podczas ruchu ciała w cieczy lub gazie (tarcie lepkie), które powoduje nieodwracalne przekształcanie energii mechanicznej w ciepło. Siły reakcji tłumika zależą do prędkości poruszających się końców³:

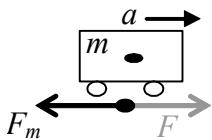


Rys. I-43. Tłumik

$$\begin{aligned} F_{bA}(t) &= b(\dot{x}_A(t) - \dot{x}_B(t)) \\ F_{bB}(t) &= b(\dot{x}_B(t) - \dot{x}_A(t)) \end{aligned} \quad (I-112)$$

gdzie $\dot{x}_A(t)$ – prędkość końca A , $\dot{x}_B(t)$ – prędkość końca B , b – współczynnik tłumienia (zależny od konstrukcji i materiału).

Masa jest własnością ciała, która przeciwdziała zmianie prędkości wymuszanej przez zewnętrzną siłę. Siła reakcji F_m jest proporcjonalna do przyspieszenia (a):



Rys. I-44. Masa

$$F_m(t) = m\ddot{x}(t) \quad (I-113)$$

gdzie $\ddot{x}(t)$ – przyspieszenie (a), m – masa.

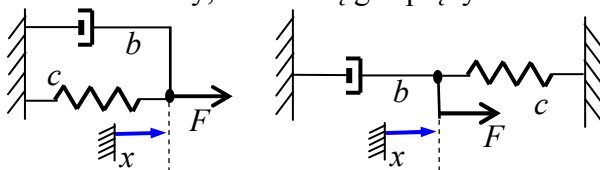
Opisywany element nie zajmuje się kształtem ciała i punktem przyłożenia siły – cała masa ciała jest skupiona w jednym punkcie.

Konstrukcja modeli układów mechanicznych poruszających się wzdłuż jednego kierunku polega na ułożeniu bilansu sił dla wszystkich punktów, które łączą elementy schematu i mają różne przesunięcia lub inaczej mówiąc – poruszają się z różnymi prędkościami (punkty bilansowe). Po jednej stronie bilansu występują wszystkie zewnętrzne siły akcji, a po drugiej stronie – siły reakcji wszystkich elementów połączonych z danym punktem.

Zjawiska fizyczne i konstrukcję bardziej złożonych modeli mechanicznych opisano na przykład w [3].

10.3.2. Proste człony mechaniczne

Najprostsze układy mechaniczne zawierają jeden ruchomy punkt. Modele takich układów zawierają jedno równanie bilansowe ale rząd modelu zależy od elementów, które tworzą układ. Załóżmy, że tworzą go sprężyna i tłumik reprezentujący opory tarcia (Rys. I-45).



Rys. I-45. Sprężyna z tłumikiem

W równaniu bilansowym występuje zewnętrzna siła F i suma sił reakcji sprężyny i tłumika z jednym usztywnionym końcem:

$$b\dot{x}(t) + cx(t) = F(t) \quad (I-114)$$

¹ w ogólnym przypadku trzeba uwzględnić fakt, że siły i momenty sił są wielkościami wektorowymi

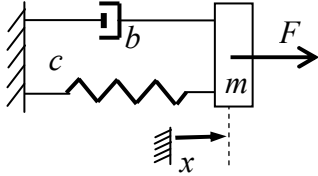
² zewnętrzna siła akcji (F_A) wywołuje przesunięcia aż do zrównoważenia przez siłę reakcji elementu (F_{cA})

³ zewnętrzna

a siła akcji (F_A) jest zrównoważona przez siłę reakcji elementu (F_{bA}) przy pewnych prędkościach

Zmienną wejściową modelu jest siła zewnętrzna F a wyjściem przesunięcie x . Model jest liniowy a jego transmitancją jest człon inercyjny.

Podstawowym przykładem układu drugiego rzędu jest połączenie sprężyny i tłumika z uwzględnieniem masy układu (Rys. I-46) opisane równaniem:



$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = F(t) \quad (I-115)$$

Ponieważ parametry rzeczywistego układu (c, b, m) są praktycznie dodatnie¹ więc układ da się przedstawić w postaci członu oscylacyjnego (\Rightarrow).

I.3.2

Rys. I-46. Masa ze sprężyną i tłumikiem

Schemat (Rys. I-46) może opisywać również ciało o pewnej masie zawieszono na sprężynie, w której tłumik reprezentuje straty energii na tarcie, a część zewnętrznej siły F pochodzi od ciężaru ciała $F(t) = gm + F_{zew}(t)$, gdzie g – przyspieszenie ziemskie.

Jeśli powyższy układ nie zawiera sprężyny, to można nadal korzystać z modelu (I-115) przyjmując $c=0$, albo zastosować podstawienie zmiennych:

$$m\dot{v}(t) + bv(t) = F(t) \quad (I-116)$$

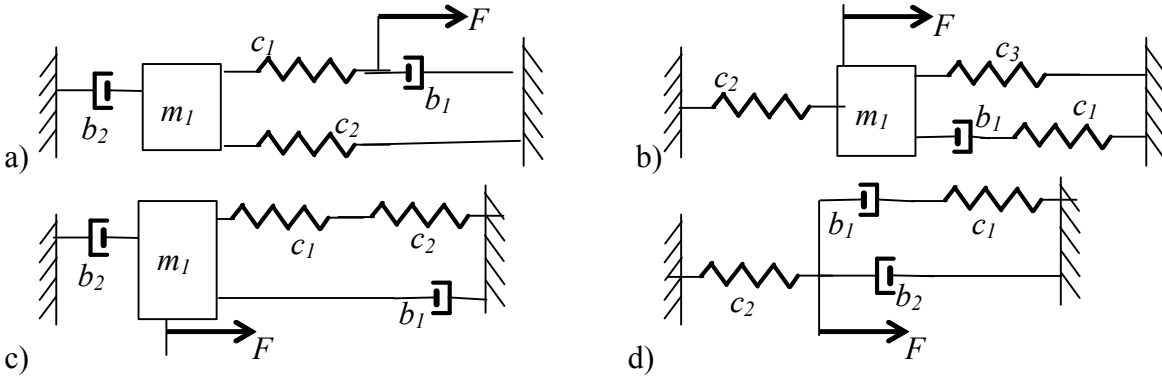
czyli zamiast przesunięcia $x(t)$ obserwować prędkość $v(t)$. Badając przesunięcie model jest drugiego rzędu, a badając prędkość – pierwszego².



- 1° Wyznacz równania charakterystyczne i warunki stabilności modeli z punktu 10.3.2.
- 2° Które elementy modeli mają wpływ na stan ustalony?
- 3° Przedstaw modele w postaci członów podstawowych i określ ich parametry (*³⁴)
- 4° Zbadaj inne warianty prostych modeli z jednym punktem (zawierające różne zestawy elementów).

10.3.3. Układy złożone

Układy przedstawione poniżej mają wspólną cechę – zawierają dwa punkty o różnych przesunięciach (x_1, x_2), czyli wymagają ułożenia dwóch równań bilansowych.



Zanim przystąpisz do konstrukcji modeli obiektów a-d spróbuj przewidzieć jego rząd.

- 1° Ułóż równania bilansowe. Wyznacz równania statyczne i punkt równowagi. (*³⁵)
- 2° Przedstaw model w postaci równań stanu (\Rightarrow)
- 3° Wyznacz transmitancje obiektów (z równań bilansowych) (\Rightarrow)
- 4° Podaj równanie charakterystyczne.
- 5° Czy modele mają charakter układów współdziałających (\Rightarrow)?

I.5.2

I.5.2

I.5.2

¹ można wymyślić np. układ o ujemnym traciui ale to dość specyficzny przypadek

² podstawienie nie zmienia własności dynamiki obiektu, tylko wnioski z badań dotyczą różnych zmiennych

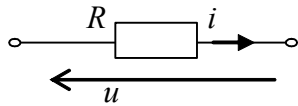
10.4. Układy elektryczne

10.4.1. Podstawowe elementy i zasady konstrukcji modeli dynamicznych

Modele dynamiki układów mechanicznych opierają się na bilansie napięć w oczkach obwodu i prądów lub ładunków w węzłach¹. W praktyce używa się do opisu obwodów spadków napięć i natężeń prądów – wielkości, które łatwo jest zmierzyć. Ale można również wykorzystywać opis za pomocą napięć i ładunków, ułatwia dostrzeżenie analogii pomiędzy układami elektrycznymi i mechanicznymi, cieplnymi, hydraulicznymi.

Podstawowe elementy układów elektrycznych to rezystor, kondensator i cewka oraz idealne źródła napięciowe lub prądowe.

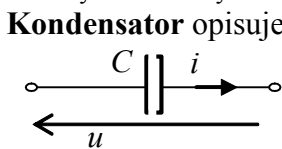
Rezystor reprezentuje straty energii elektrycznej na ciepło. Relacja pomiędzy natężeniem prądu i oraz spadkiem napięcia na rezystorze jest proporcjonalna:



Rys. I-47. Rezystor

$$u(t) = Ri(t) \leftrightarrow u(t) = R\dot{q}(t) \quad (I-117)$$

gdzie R – rezystancja (zależna od wymiarów geometrycznych elementu i materiału), $\dot{q}(t)$ – zmiana ładunku w czasie $=i(t)$.

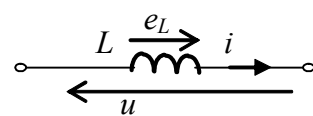


Rys. I-48. Kondensator

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \leftrightarrow q(t) = Cu(t) \quad (I-118)$$

gdzie C – pojemność elektryczna (zależna od budowy i materiału kondensatora), $q(t)$ – ładunek.

Cewka jest elementem bezwładnościowym, który przeciwdziała zmianie natężenia prądu przez samoindukcję siły elektromotorycznej e , która jest proporcjonalna do zmiany prądu:



Rys. I-49. Cewka

$$e_L(t) = -L \frac{di(t)}{dt} \leftrightarrow e_L(t) = -L\dot{q}(t) \quad (I-119)$$

gdzie L – indukcyjność własna (zależna od kształtu i materiału cewki).

Ponieważ zależności (I-117)÷(I-119) są liniowe więc często w praktyce stosuje się ich operatorową postać wyrażoną jako wzór na spadek napięcia lub natężenie prądu (Tab. I-6).

Tab. I-6. Stosowane opisy podstawowych elementów elektrycznych

	$u(i)$		$u(i)$	$u(q)$	$Z(s)$
rezystor (R)	$u(t) = Ri(t)$	$u(s) = Ri(s)$	$i(t) = Gu(t)$	$u(t) = R\dot{q}(t)$	R
kondensator (C)	$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$	$u(s) = \frac{1}{sC} i(s)$	$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$	$u(t) = \frac{1}{C} q(t)$	$\frac{1}{sC}$
cewka (L)	$e_L(t) = -L \frac{di(t)}{dt}$	$u(s) = sLi(s)$		$u(t) = L\dot{q}(t)$	sL

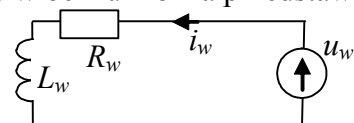
Równania bilansowe oczek i węzłów powstają często od razu w postaci operatorowej (⇒) I.6.1 wykorzystując pojęcie impedancji operatorowej ²:

$$Z(s) = \frac{u(s)}{i(s)} \quad (I-120)$$

Rozwinięcie przedstawionych zasad zawiera na przykład ³[3].

10.4.2. Najprostsze człony

Rozważmy prosty obwód złożony ze źródła napięcia, cewki i rezystora (Rys. I-50). Bilans napięć w oczku można przedstawić w postaci równania różniczkowego:



Rys. I-50. Obwód wzbudzenia silnika

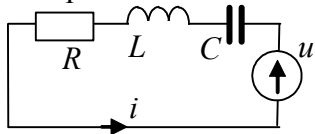
$$L_w \frac{di_w(t)}{dt} + R_w i_w(t) = u_w(t) \quad (I-121)$$

¹ z definicji natężenie prądu jest pochodną ładunku w czasie: $i(t) = dq(t) / dt$

² Patr: impedancja operatorowa (zespolona), np. [3 (r.6.7)]

Jest to równanie odpowiadające transmitancji członu inercyjnego. Praktycznym przykładem rozważanego obiektu być może być uzwojenie silnika wytwarzające pole magnetyczne – model uwzględnia indukcyjność zwojów i ich rezystancję.

Na bazie elementów RLC bardzo łatwo jest zbudować człon oscylacyjny. Opisując układ (Rys. I-51) w dziedzinie czasu, za pomocą napięć i prądów uzyskuje się równanie całkowo-różniczkowe postaci:



$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = u(t) \quad (I-122)$$

Rys. I-51. Układ oscylacyjny RLC

Oscylacyjny charakter modelu (I-122) łatwiej dostrzec w postaci operatorowej modelu:

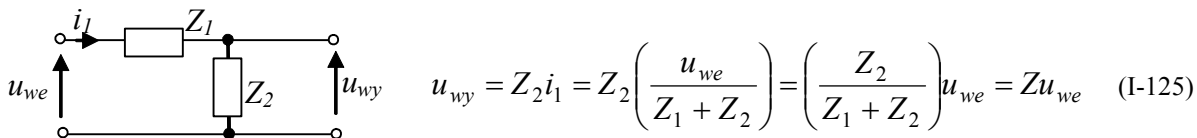
$$\left(sL + R + \frac{1}{sC} \right) i(t) = u(t) \leftrightarrow i(s) = \frac{sC}{s^2LC + sRC + 1} u(s) \quad (I-123)$$

lub opisując układ za pomocą napięć i ładunków:

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t) \quad (I-124)$$

Nawet ten prosty przykład dobrze ilustruje dlaczego w praktyce inżynierskiej do opisu i analizy liniowych obwodów elektrycznych stosuje się postać operatorową i transmitancję¹.

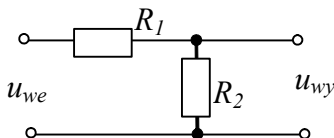
Podstawowe człony dynamiki konstruuje się również na bazie układu nazywanego czwórnikiem (Rys. I-52) – zmienną wejściową jest napięcie u_{we} , zmienną wyjściową napięcie u_{wy} a symbole Z_1 i Z_2 mogą reprezentować różne zestawy elementów RLC. Ogólny wzór opisujący czwórnik wynika z zależności:



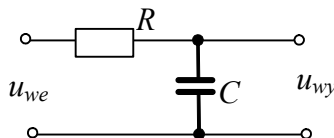
$$u_{wy} = Z_2 i_1 = Z_2 \left(\frac{u_{we}}{Z_1 + Z_2} \right) = \left(\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \right) u_{we} = Z u_{we} \quad (I-125)$$

Rys. I-52. Uogólniony czwórnik

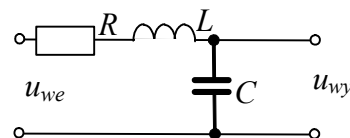
Wzór (I-124) ma uproszczoną postać i nie pokazuje, że napięcia i impedancje są funkcjami zmiennej s – funkcja $u_{we}(s)$ to transformata funkcji wymuszającej $u_{we}(t)$, funkcja $u_{wy}(s)$ jest transformatą odpowiedzi układu, natomiast funkcje $Z_1(s)$ i $Z_2(s)$ wynikają z elementów, które zostaną podstawione pod impedancje Z_1 i Z_2 . W ten sposób uzyskuje się różne typy członów, na przykład proporcjonalny (Rys. I-53), inercyjny (Rys. I-54), oscylacyjny (Rys. I-55).



Rys. I-53. Dzielnik napięcia



Rys. I-54. człon inercyjny RC



Rys. I-55. Człon oscylacyjny RLC



- 1° Podaj transmitancje czwórników opisanych powyżej (Rys. I-53, Rys. I-54, Rys. I-55). Przekształć je do transmitancji podstawowych członów dynamiki i wyznacz parametry.
- 2° Wyznacz transmitancje czwórnika dla innych zestawów elementów RLC. Określ rząd obiektu, podaj równanie charakterystyczne, rozłóż na podstawowe człony dynamiki.

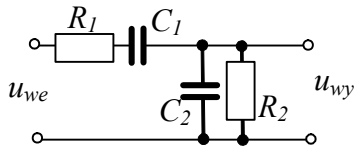
Impedancje czwórnika (Z_1 i Z_2) mogą oznaczać nie tylko pojedyncze elementy RLC ale także różne szeregowo-równoległe układy RLC. W takich przypadkach pomocny jest wzór na obliczanie impedancji zastępczej $Z(s)$ elementów połączonych szeregowo (I-126) i równoległe (I-127).

$$Z(s) = Z_a(s) + Z_b(s) \quad (I-126)$$

$$Z(s) = \frac{Z_a(s)Z_b(s)}{Z_a(s) + Z_b(s)} \quad (I-127)$$

¹ nie ma problemu całkowo-różniczkowych równań a do opisu obwodu stosuje się zmienne, które łatwo zmierzyć (napięcia i prądy) – pod warunkiem, że można założyć zerowe warunki początkowe

Na przykład w układzie czwórnika przedstawionego poniżej (Rys. I-56) impedancję Z_1 stanowi szeregowego połączenie rezystora R_1 i kondensatora C_1 :



Rys. I-56. Przykład złożonego czwórnika

$$Z_1 = \frac{sR_1C_1 + 1}{sC_1}, \quad (I-128)$$

a impedancję Z_2 – równoległe połączenie R_2 i C_2 :

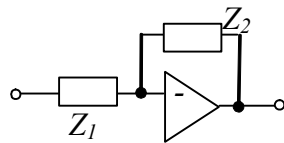
$$Z_2 = \frac{R_2}{sR_2C_2 + 1} \quad (I-129)$$

Po podstawieniu impedancji Z_1 i Z_2 do zależności (I-125) i uporządkowaniu do postaci wymiernej uzyskujemy następującą transmitancję czwórnika:

$$Z(s) = \frac{sR_2C_1}{(sR_1C_1 + 1)(sR_2C_2 + 1) + sR_2C_1} \quad (I-130)$$

- 1° Wyznacz transmitancję czwórnika, w którym impedancja Z_1 to równoległe połączenie rezystora z cewką, impedancja Z_2 to szeregowo połączenie takich elementów. (*36)
- 2° Zaproponuj różne postacie złożonego czwórnika i wyznacz odpowiednie transmitancje.

Realizacje najprostszych członów dynamiki przedstawione w tym punkcie ograniczają się do zastosowania elementów RLC. Należy jednak dla porządku wspomnieć również o członach budowanych na bazie wzmacniaczy operacyjnych ¹. Często wykorzystywany jest układ ze sprzężeniem zwrotnym wokół wejścia odwracającego wzmacniacza (Rys. I-57). Uogólniony i uproszczony opis tego układu ma postać:



Rys. I-57. Uogólniony wzmacniacz odwracający

$$u_{wy}(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}u_{we}(s) \quad (I-131)$$

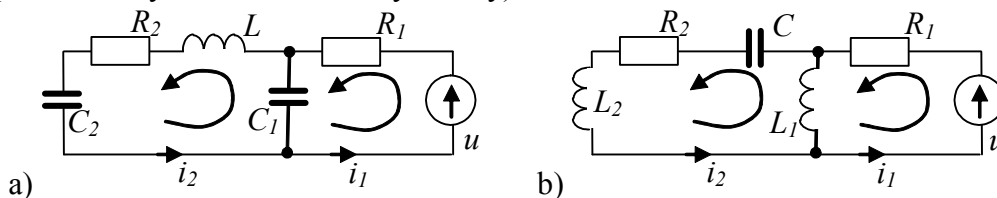
Podstawiając pod impedancje różne elementy RLC można uzyskać różne warianty transmitancji, na przykład:

- idealny człon całkujący – gdy Z_1 to rezystor, Z_2 – kondensator,
- idealny człon różniczkujący – gdy Z_1 to kondensator, Z_2 – rezystor.

- 1° Narysuj układy i wyznacz wzmocnienie i parametry czasowe podstawowych członów dynamiki zrealizowanych na bazie wzmacniacza operacyjnego.

10.4.3. Układy wieloobwodowe

Jedną z metod układania równań dla złożonych obwodów elektrycznych jest metoda oczkowa. Pierwszy etap metody polega na wyznaczeniu odpowiedniej liczby niezależnych oczek. W układach przedstawionych poniżej można wyróżnić po dwa niezależne oczka (sposób ich wyznaczenia może być różny).



- 1° W obwodach a i b wyróżniono dwa oczka. Napisz układy równań operatorowych. Wyznacz transmitancje, zakładając że zmiennymi wyjściowymi są prądy i_1 i i_2 .
- 2° Zaproponuj inny układ oczek, napisz odpowiednie równania i wyznacz transmitancje dla zmiennych wyjściowych tak jak w poprzednim zadaniu.
- 3° Wyznacz uogólniony wzór na transmitancje obwodów typu a i b, wprowadzając impedancje zastępcze gałęzi. Określ postać tych impedancji w przypadku obwodów a i b?

¹ Patrz: wzmacniacze operacyjne, np. [2], [3 (r.6.7.3)]

10.5. Analogie

Porównanie opisu obiektów różnego typu pozwala sformułować kilka analogii (Tab.I.-7).

Tab.I.-7. Przykłady analogii

	obiekty cieplne		obwody elektryczne		układy mechaniczne		układy hydrauliczne		
							zamknięte		otwarte
magazyn	$Q = C_V T$	$q = C_V u$	$u = -\frac{1}{C} q$	$F = cx$				$V = Ah$	
przewodność (lub opór)	$\frac{dQ}{dt} = C_V \frac{dT}{dt}$	$\frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$						$\frac{dV}{dt} = A \frac{dh}{dt}$	
	$q = C_V \frac{dT}{dt}$	$i = C \frac{du}{dt}$	$u = \frac{1}{C} \int idt$	$F = c \int v dt$			$f = \frac{V}{K} \frac{d\Delta p}{dt}$		
bezwładność	$q = K_c T$	$i = \frac{1}{R} u$	$u = Ri$	$F = bv$			$f = \frac{1}{R} \Delta p$		$f \approx ah$ (*)
		$i = \frac{1}{L} \int u dt$	$u = L \frac{di}{dt}$	$F = m \frac{dv}{dt}$			$\Delta p = m \frac{df}{dt}$		
źródła	q	i	u	F			Δp		f
funkcje czasu	$Q(t), q(t), T(t)$	$q(t), i(t), u(t)$		$x(t), v(t), F(t)$			$\Delta p(t), f(t)$		$V(t), f(t), h(t)$
bilans	$\sum q$	$\sum i, \sum u$		$\sum F$			$\sum q, \sum f$		$\sum f$

Uwaga: W tabeli pominięto oznaczenie funkcji czasu, na przykład jest T zamiast $T(t)$

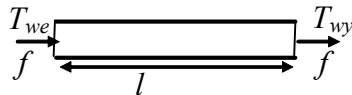
Analogie dotyczą opisu liniowego, natomiast zależności dokładnie to: (*) $\Delta p = Rf^2$, (**) $f = k\sqrt{h}$

Zmienne i jednostki:

- obiekty cieplne: $Q(t)$ – ciepło [J], $q(t)$ – moc, strumień ciepła [W], $T(t)$ – temperatura [K],[°C];
- obwody elektryczne: $q(t)$ – ładunek elektryczny [C], $i(t)$ – natężenie prądu [A], $u(t)$ – napięcie, różnica potencjałów [V];
- układy mechaniczne: $x(t)$ – przesunięcie [m], $v(t)$ – prędkość [m/s], $F(t)$ – siła [N];
- układy hydrauliczne: $V(t)$ – objętość [m³], $f(t)$ – przepływ, strumień [m³/s], $\Delta p(t)$ – ciśnienie [Pa=N/m²].

Analogie opierają się na podobieństwie opisu zjawisk. Jak można zauważyć na podstawie tabeli najbardziej podobne są do siebie opisy układów elektrycznych i mechanicznych – spadki napięć odpowiadają siłom a ładunki – przesunięciom ¹. Poza tym w obu układach występują elementy gromadzące energię (kondensator, sprężyna) i rozpraszające energię (rezystor, tłumik) oraz elementy bezwładnościowe przeciwdziałające zmianom (cewka, masa)². Analogie tę można rozszerzyć o układy hydrauliczne zamknięte, czyli układy w których rozpatruje się przepływ medium wymuszony przez różnicę ciśnień, przy czym to medium wykazuje pewną masę i jest ściśliwe³ – zakłada się, że można pominąć termodynamiczne przemiany gazu ⁴.

Drugą parę bardzo podobnych opisów stanowią modele obiektów cieplnych i układów hydraulicznych otwartych (zbiorniki) – ciepłu odpowiadają objętości a strumieniom ciepła (mocy) – przepływy medium. W obu przypadkach bilansuje się zawartość pewnego rodzaju magazynów (ciepła, objętości), a ich stan charakteryzują zmienne stanu (temperatura, wysokość). W porównaniu do układów mechanicznych i elektrycznych – nie występuje tu odpowiednik zjawiska bezwładności⁵. W obiektach cieplnych można za to wskazać charakterystyczne przykłady elementów opóźniających (\Rightarrow), które występują przy wykorzystaniu przepływającego medium jako nośnika – na przykład ciepła (Rys. I-58). Jeśli ściany przewodu są dobrze izolowane (przewodzenie ciepła przez ściany jest pomijalne) to ma miejsce jedynie opóźnienie transportowe opisane równaniem:




Rys. I-58. Opóźnienie transportowe

$$T_{wy}(t) = T_{we}(t - T_o) \quad (I-132)$$

gdzie T_o – czas opóźnienia zależny od odległości i prędkości przepływu.

Każda analogia ma swoje ograniczenia – zakres zastosowania, na przykład założenie o liniowości zastosowanego opisu. Analogie ułatwiają nam przeniesienie wiedzy pomiędzy dziedzinami i pokazują znaczenie rozwijania i zastosowania uniwersalnych metod analizy, opartych na równaniach różniczkowych i transmitancjach.

¹ Na podstawie tabeli (Tab.I-7) wskaż układy analogiczne do obiektów analizowanych w rozdziale I-10, w szczególności zwróć uwagę na analogię układów mechanicznych i elektrycznych oraz układów hydraulicznych i cieplnych. 

¹ Patrz: analogie elektromechaniczne, np. [11]

² elementy mechaniczne mają mniejszy zakres liniowości opisu niż elementy elektryczne

³ Przy przepływie cieczy uwzględnia się masę a zwykle pomija ściśliwość. Natomiast przy przepływie gazu należy uwzględnić ściśliwość a masę można pominąć.

⁴ Patrz: mechanika gazów, przemiany gazowe, np. [3 (r.11)]

⁵ Bezwładność przepływającej cieczy rozpatruje się w układach hydraulicznych zamkniętych

Część II: Badania symulacyjne

Badania symulacyjne przedstawione w tej części zostały oparte na podstawowych możliwościach jakie oferuje komercyjne oprogramowanie Matlab (wer. ≥ 5.3) wraz z bibliotekami Simulink i Control, oraz jego darmowe odpowiedniki – Scilab (wer. ≥ 5.3) i Octave. Pełny opis funkcji użytych w przykładach jest dostępny w dokumentacji poszczególnych pakietów, m. in. po wywołaniu podręcznej pomocy: „help nazwa_funkcji”.

1. Zmienne, wykresy, skrypty

1.1. Wprowadzenie – elementy

1.1.1. Zmienne

Programy symulacyjne takie jak Matlab i jemu podobne są przystosowane w szczególności do wykonywania operacji na wektorach i macierzach. Tę własność wykorzystuje się nie tylko do wykonywania operacji na macierzach (np.: $A+B$, $A-B$, $A*B$, A/B), ale także jako sposób realizacji szybkich pętli programowych – wówczas używane są operatory z kropką działające na elementach macierzy (np. $A.+B$, $A.-B$, $A.*B$, $A./B$). W każdym przypadku warunkiem wykonania operacji jest zgodność wymiarów macierzy odpowiednia dla operacji. Wektory i macierze są również typowym sposobem definiowania zestawu współczynników, na przykład dla wielomianów.

Właściwie każda prosta zmienna (liczba, zmienna logiczna, znak, tekst, wektor) może być traktowana jako macierz o określonych wymiarach, niezależnie od tego jak została zdefiniowana. Zmienne mogą być definiowane przez:

- podstawienie wartości, np.: $a=3$, $b=[1\ 2; 3\ 4]$, $c='cos'$, $d=['aaa';'bbb';'ccc']$,
- zastosowanie specjalistycznych funkcji, np.: $zeros(2)$, $ones(3)$, $eye(2)$,
- wygenerowane za pomocą operatora ':', np.: $a=0:2:20$.

1.1.2. Wykresy

Własności obiektów automatyki bardzo często są prezentowane i badane na podstawie różnego typu wykresów. Zazwyczaj stosowane są rodziny wykresów w układzie x-y, a dane do wykresów zawarte są w zmiennych typu wektor lub macierz. Do utworzenia wykresów wystarcza podstawowa funkcja typu plot, która umożliwia rysowanie wykresów w różnych kolorach i różnymi typami linii. Dodatkowe możliwości zapewniają funkcje do definiowania różnych własności wykresu lub okna graficznego, w którym ten wykres jest wyświetlany, na przykład tytuł, opis osi, legenda, skalowanie, itp.

1.1.3. Skrypty

Badania symulacyjne polegają zazwyczaj na wygenerowaniu wielu serii wyników, otrzymywanych na przykład dla różnych wartości wybranych parametrów. Pojawia się więc problem sposobu dokumentowania prowadzonych badań. Można to w prosty sposób osiągnąć za pomocą skryptów, w których będą zapisane pełne programy badań – od zdefiniowania zmiennych, przez wykonanie symulacji, do opracowania wyników. Skrypt zapewnia nie tylko dokumentowanie ale także możliwość powtórzenia badań, poprawienia błędów, zmodyfikowania zakresu, itd. W skryptach często wykorzystuje się elementy programowania, takie jak instrukcje warunkowe czy pętle (Tab. II-1).

Tab. II-1. Elementy programowania

	Matlab	Scilab	Octave
komentarz liniowy	% ...	// ...	# ... lub % ...
komentarz blokowy			{ ... } lub %{ ... %}
warunek	if WL, OP1, else OP2, end	if WL, OP1, else OP2, end	if WL OP1 else OP2 endif
wybór	switch WL, case OP1, ... otherwise OPn, end	select WL, case OP1 else OPn, end	switch WL case OP1 ... otherwise OPn, endswitch
pętla for	for LP, operacje end	for LP do , operacje end	for LP operacje endfor
pętla while	while WL, OP end	while WL do , OP end	while WL OP endwhile

gdzie: WL – warunek logiczny, OP – operacje, LP – licznik pętli, np.: i=początek:krok:koniec,

1.2. Przykłady – podstawowe funkcje i operacje

Kilka poniższych fragmentów skryptów (Tab. II-2) zawiera przykłady generowania i operacji na zmiennych (w szczególności macierzy), tworzenia i definiowania własności okna graficznego oraz rysowania dwu- i trój-wymiarowych wykresów funkcji.

Tab. II-2. Przykłady skryptów generujących wykresy

	Matlab	Scilab	Octave
Nazwa skryptu	*.m	*.sci	*.m
Otarcie okna Bez kasowania Włącz siatkę	figure; hold on; grid on;	figure(); set(gca(), 'auto_clear', 'off'); set(gca(), 'grid', [1,1]);	figure; hold on; grid on;
Wykres funkcji ax^2	x = [-10:1:10]; for a = -2 : .5 : 2; plot(x, a*x.*x); end	x = [-10:1:10]; for a = -2 : .5 : 2 do plot(x, a*x.*x); end	x = [-10:1:10]; for a = -2 : .5 : 2; plot(x, a*x.*x); endfor
Wykres funkcji $xe^{(-x^2-y^2)}$	[x,y]=meshgrid(-2:.2:2,-2:.2:2) z = x.*exp(-x.^2-y.^2); mesh(z)	[x,y]=meshgrid(-2:.2:2,-2:.2:2) z = x.*exp(-x.^2-y.^2); mesh(z)	[x,y]=meshgrid(-2:.2:2,-2:.2:2) z = x.*exp(-x.^2-y.^2); mesh(x,y,z)

Wykresy są często podstawowym sposobem prezentacji wyników badań, powinny więc być wykonane i opisane w przejrzysty sposób, czemu służą przedstawione funkcje - Tab. II-3.

Tab. II-3. Funkcje pomocnicze wykresów

	Matlab	Scilab	Octave
Tytuł wykresu	title('Tytuł wykresu');	title('Tytuł wykresu');	title("Tytuł wykresu")
Opis osi x	xlabel('Czas [s]');	xlabel('Czas [s]');	xlabel("Opis osi x")
Opis osi y	ylabel('Wyjście');	ylabel('Wyjście');	ylabel("Opis osi y")
Tekst na wykresie	text(1,27, 'dowolny');	xstring(1, 27, 'dowolny');	text(1, 27, "dowolny");
Legenda	legend('A', 'B');	legend('A', 'B');	legend("A", "B");
Kolor i typ linii	plot(x, x+x, 'r-')	plot(x, x+x, 'r-')	
Podział okna i wybór części aktywnej	subplot(2,1,1); plot(x, x+x); subplot(2,1,2); plot(x, x);	subplot(2,1,1); plot(x, x+x); subplot(2,1,2); plot(x, x);	

1.3. Zadania – zastosowanie macierzy i wykresów

Celem pierwszych symulacji jest sprawdzenie funkcji związanych z generowaniem wykresów oraz zastosowaniem macierzy (wektorów) w różnych rolach:

- generowanie macierzy i odwoływanie się do wybranych elementów (m.in. operator ':'),
- operacje na macierzach i na elementach macierzy,
- rysowanie wykresów dwu- i trój-wymiarowych.

Symulacje należy zrealizować z wykorzystaniem skryptów.

- 1° Zdefiniuj przykładowe macierze o wybranej ilości wierszy i kolumn, a następnie zrealizuj operacje mnożenia/dzielenia: a) dwóch macierzy, b) elementów dwóch macierzy. Zwróć uwagę na dopasowanie wymiarów macierzy zależnie od operacji.
- 2° Za pomocą wektora/macierzy zdefiniuj przykładowy wielomian oraz układ równań, a następnie wyznacz jego pierwiastki. Sprawdź np. funkcje *poly* i *roots* w Matlabie.
- 3° Określ typ (\Rightarrow) podanych funkcji i przedstaw rodziny wykresów tych funkcji:

1.1.1

$$a) y = \sqrt{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2 + c}, \quad b) y = \frac{1}{\sqrt{ax^2 + b}}, \quad c) y = \frac{a+bx}{c+dx}, \quad d) y = a^x$$

Dobierz odpowiednio dziedzinę funkcji, a spośród różnych wartości parametrów (*a*, *b*, *c*, *d*) wybierz takie zestawy aby uzyskać różne postaci krzywych. Rysowanie danej rodziny wykresów dla różnych wartości parametrów zrealizuj przy użyciu pętli. Zastosuj różne kolory i typy linii – zestaw ciągów formatujących linii zdefiniuj w macierzy, np. format= ['r-' ; 'b--']

- 4° Narysuj powierzchnie $z(x,y)$ opisane następującymi funkcjami:

$$a) ax^2 + by^2 = cz, \quad b) a^2x^2 + b^2y^2 + cz^2 = 1.$$

Dobierz dziedzinę funkcji, tak aby przedstawić wszystkie charakterystyczne cechy powierzchni, np. punkty nieciągłości, ekstrema. Jak wartości parametrów (*a*, *b*, *c*) wpływają na wygląd powierzchni?

2. Charakterystyki statyczne

2.1. Wprowadzenie – parametry opisu statycznego

I.1.2

Najprostszy opis własności obiektu to jego model statyczny (\Rightarrow). Na tej podstawie można wyznaczyć wzory opisujące każdą zmienną wyjściową obiektu w zależności od jego zmiennych wejściowych i wykonać charakterystyki statyczne. Określenie, które ze zmiennych są wejściami a które wyjściami wynika z interpretacji fizycznej modelu – wartości na wejściach są zdeterminowane przez źródła niezależne od stanu obiektu (ustalane poza granicami obiektu) a wartości na wyjściach są efektem działania opisywanych procesów. Wartości pozostałych parametrów modelu wynikają głównie z wymiarów obiektu i własności fizycznych materiałów w określonych warunkach. To że są to wartości stałe jest zawsze wynikiem przyjętych założeń (np. stała temperatura otoczenia, pomijalny wpływ ciśnienia).

2.2. Przykład – statyczny układ sprężyn

I.10.3.1

Proste połączenie dwóch sprężyn o różnych współczynnikach sztywności c_1 i c_2 , na które działa siła F (Rys. II-1) można opisać algebraicznym układem równań:



$$\begin{cases} 0 = c_1 x_1 + c_2 (x_1 - x_2) \\ F = c_2 (x_2 - x_1) \end{cases} \quad (\text{II-1})$$

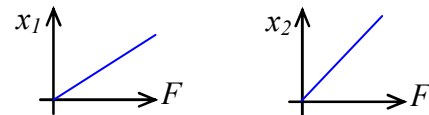
Rys. II-1. Połączenie dwóch sprężyn

Siła F jest zmienną wejściową układu, natomiast położenia końców sprężyn x_1 i x_2 są zmiennymi wyjściowymi, które można wyznaczyć analitycznie:

$$x_1 = \frac{F}{c_1} \quad \text{oraz} \quad x_2 = \frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2} F \quad (\text{II-2})$$

Na tej podstawie można narysować charakterystyki statyczne układu postaci jak na Rys. II-2. W operacji rysowania wykresów wskazane jest wykorzystanie wektorów wartości – zdefiniowanie wektora wartości zmiennej wejściowej F oraz wzoru do wygenerowania wektorów wielkości wyjściowych (za pośrednictwem zmiennej x_1 lub bezpośrednio jako parametr funkcji plot):

```
F=[0:1:100];           %wektor wartości wejściowych
x1=c1*F;               %wektor wartości wyjściowych x1
figure; plot(F, x1);
figure; plot(F, (c1+c2)./(c1*c2)./F);
```



Rys. II-2. Charakterystyki statyczne układu

Do przeprowadzenia symulacji konieczna jest znajomość wartości współczynników c_1 i c_2 , które można obliczyć na podstawie znajomości kształtu i materiału sprężyny. Można je również wyznaczyć na podstawie pomiaru wartości zmiennych w wybranym punkcie pracy (F_0, x_{10}, x_{20}), które należy podstawić do układu (II-1) i rozwiązać względem c_1 i c_2 :

$$c_1 = \frac{F_0}{x_{10}} \quad \text{oraz} \quad c_2 = \frac{F_0}{x_{20} - x_{10}} \quad (\text{II-3})$$

Ponieważ model (II-1) jest liniowy, więc wszystkie powyższe działania można również zapisać i wykonać macierzowo. Jeśli siła i przesunięcia są zmiennymi układu, to macierzowy zapis modelu ma postać:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{lub symbolicznie} \quad \mathbf{F} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (\text{II-4})$$

gdzie \mathbf{F} i \mathbf{x} to wektory zmiennych¹, \mathbf{C} – macierz współczynników. Stąd wektor zmiennych wyjściowych \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{F} \quad (\text{II-5})$$

¹ Należy rozróżniać wektor wartości zmiennej (np. F, x_1, x_2) i wektor zmiennych wejściowych \mathbf{F} (składający się z wartości 0 i zmiennej F) czy wyjściowych \mathbf{x} (zawierający zmienne x_1 i x_2).

Można też przy użyciu macierzy wyznaczyć wartości współczynników na podstawie pomiarów siły i przesunięć (F_0, x_{10}, x_{20}). W tym celu model (II-1) należy zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{10} - x_{20} \\ 0 & x_{20} - x_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \text{ lub symbolicznie } \mathbf{F} = \mathbf{Xc} \quad (\text{II-6})$$

gdzie tym razem \mathbf{F} i \mathbf{c} występują w roli wektorów zmiennych, a \mathbf{X} w roli macierzy współczynników (wyznaczonych na podstawie wartości x_{10}, x_{20}), co pozwala wyznaczyć wartości wektora \mathbf{c} :

$$\mathbf{c} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{F} \quad (\text{II-7})$$

Ręczne wykonywanie operacji na macierzach może być kłopotliwe (np. przy odwracaniu dużych macierzy), ale programy symulacyjne są wyspecjalizowane w tego typu działaniach. Są to jednak operacje na wartościach, więc:

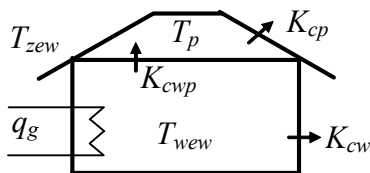
- nie będzie możliwości analizy wzoru funkcji (pożyteczne, choć nie zawsze konieczne),
- łatwo obliczyć pojedyncze wartości, np. współczynniki c_1 i c_2 ze wzoru (II-7),
- trudniej wygenerować i korzystać z wektorów wartości zmiennej, która już jest wektorem, na przykład w celu narysowania charakterystyk statycznych na podstawie wzoru (II-5) należy wygenerować i operować na elementach macierzy, np.:

$$\begin{bmatrix} x_1(1) & \dots & x_1(n) \\ x_2(1) & \dots & x_2(n) \end{bmatrix} = \mathbf{C}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ F(1) & \dots & F(n) \end{bmatrix}, \text{ plot}(F(2,:), x(1,:), F(2,:), x(2,:), \dots)$$

2.3. Zadanie – generowanie charakterystyk statycznych

2.3.1. Charakterystyki statyczne pomieszczenia z grzejnikiem

Dla pomieszczenia z grzejnikiem elektrycznym (Rys. II-3) można skonstruować bilans ciepła (\Rightarrow) dostarczanego przez grzejnik o mocy q_g i ciepła traconego: przez zewnętrzne ściany o współczynniku strat K_{cw} , przez sufit – współczynnik strat $K_{cwp}=0,25K_{cw}$, przez dach – o współczynniku strat K_{cp} .



$$\begin{cases} 0 = q_g - K_{cw}(T_{wew} - T_{zew}) - K_{cwp}(T_{wew} - T_p) \\ 0 = K_{cwp}(T_{wew} - T_p) - K_{cp}(T_p - T_{zew}) \end{cases} \quad (\text{II-8})$$

Jeśli sufit byłby doskonale izolowany, to model byłby znacznie prostszy:

$$0 = q_g - K_{cw}(T_{wew} - T_{zew}) \quad (\text{II-9})$$

Rys. II-3. Pomieszczenie z grzejnikiem

Model (I-8) ma dwie zmienne wejściowe: moc grzejnika elektrycznego (q_g) i temperaturę na zewnątrz (T_{zew}). Z wykonanych pomiarów wiadomo, że dla $q_g=1000$ W i $T_{zew}=-20^\circ\text{C}$, temperatura wewnątrz pomieszczenia T_{wew} wynosi 20°C a na poddaszu T_p wynosi 10°C .

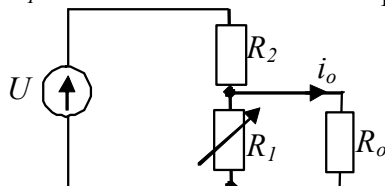
Wyznacz wzór i narysuj charakterystyki statyczne układu (dwuwymiarowe).

Uwagi:

- wyznaczn współczynniki strat na podstawie dostępnych pomiarów,
- dobrać realne zakresy zmiennych na charakterystykach,
- opisać wykresy (osie, rodziny krzywych), użyć siatki, wprowadzić zróżnicowanie linii dla poszczególnych wykresów.

2.3.2. Charakterystyki układu elektrycznego

Przedmiotem kolejnej analizy jest dzielnik napięcia (Rys. II-4). Za pomocą potencjometru R_1 można ustawić wartość napięcia na obciążeniu R_o lub prąd obciążenia i_o (\Rightarrow).



Rys. II-4. Dzielnik napięcia

Określ wejścia, wyjścia i parametry układu. Wyznacz charakterystyki statyczne układu.

Kiedy trzeba uwzględnić rezystancje przewodów łączących? Jak to wpłynie na opis układu?

3. Funkcje czasu – wykresy rozwiązań analitycznych

3.1. Wprowadzenie

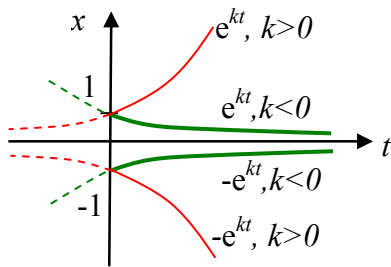
1.1.2

Własności dynamiczne powodują, że reakcje obiektu na zmiany nie zachodzą natychmiast, co można zaobserwować na wykresach czasowych (\Rightarrow). W przypadku prostych, liniowych obiektów można wyznaczyć wzór funkcji opisujący te reakcje – jest to rozwiązanie równania różniczkowego, które jest modelem dynamiki danego obiektu (\Rightarrow). Ze względu na własności dynamiki najbardziej interesująca jest część swobodna tego rozwiązania, decydująca o stabilności obiektu, a złożona ze składowych postaci: Ae^{at} , $Ae^{at} \cos(\omega t + \varphi)$, $At^m e^{at}$.

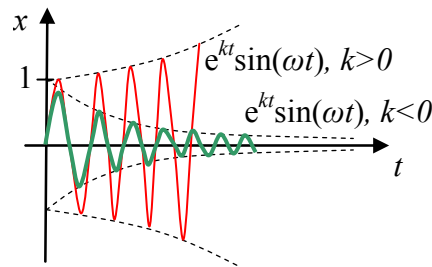
1.2

3.2. Przykład – funkcje eksponencjalne

Funkcje będące przedmiotem badań są złożeniem (sumą) funkcji eksponencjalnych (Rys. II-5) i/lub iloczynu takiej funkcji z funkcją sinusoidalną (Rys. II-6), przy czym składowe mają różne współczynniki wzmocnienia i różne wartości początkowe (dla $t=0$).



Rys. II-5. Przykładowe wykresy $x = \pm e^{at}$



Rys. II-6. Przykładowe wykresy $x = e^{at} \cos(\omega t)$

Z punktu widzenia zastosowania w automatyce interesujące są przebiegi tych funkcji tylko dla $t > 0$. Wartości funkcji w chwili $t=0$ wynikają z założonych warunków początkowych.

3.3. Zadania – badanie przebiegu złożonych funkcji

3.3.1. Przebiegi złożonych funkcji

Celem pierwszych symulacji jest wygenerowanie wykresów kilku typów funkcji $x(t)$, które występują w rozwiązaniach równań różniczkowych i mogą mieć różny przebieg w zależności od wartości parametrów:

- $x(t) = Ae^{at} + x_0$,
- $x(t) = Ae^{at} \cos(\omega t + \varphi) + x_0$,
- $x(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + x_0$,
- $x(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} \cos(\omega t + \varphi) + x_0$.

1° Spróbuj przewidzieć możliwe postacie wykresów funkcji a-d dla $t > 0$.

2° Następnie napisz skrypt, który dla poszczególnych funkcji rysuje ich składniki oraz pełny przebieg $x(t)$. Dobierz różne wartości parametrów aby uzyskać charakterystyczne postacie wykresów:


- w funkcji „a” zbadaj wpływ wartości parametrów A i α ,
- w funkcji „b” zbadaj wpływ wartości parametrów ω , φ ,
- w funkcjach „c” i „d” zaproponuj kilka zestawów parametrów, które zilustrują różne przypadki sumowania składowych w zależności od wartości parametrów α_i :
 - wartości porównywalne: $\alpha_1 \approx \alpha_2 < 0$ lub $\alpha_1 \approx \alpha_2 > 0$,
 - wartości ujemne, znacznie różne od siebie: $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 < 0$, $|\alpha_1| \gg |\alpha_2|$,
 - wartości różnych znaków: $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$, $|\alpha_1| \gg |\alpha_2|$.

Pogrupuj wykresy tak aby z jednej strony ograniczyć ilość generowanych obrazów, a z drugiej – umożliwić porównanie przebiegów (porównywane przebiegi na jednym obrazie, obrazy w tej samej skali, ...).

3° Porównywanie przebiegów na podstawie obrazów prowadzi jedynie do rezultatów jakościowych. Zaproponuj wskaźniki, które pozwoliłyby na porównać wykresy w sposób ilościowy.

3.3.2. Interpretacja rozwiązania równania różniczkowego

Wykresy funkcji $x(t)$ wygenerowane w punkcie 3.3.1 opisują reakcje różnych obiektów na pewne wymuszenia.

- 1° Jaką postać mają równania różniczkowe, których rozwiązaniem są funkcje $x(t)$?
- 2° Co można powiedzieć o tych poszczególnych obiektach: jaki jest rząd układu, ile i jakie bieguny ma układ, czy jest stabilny, ...?
- 3° Przedstaw bieguny zbadanych układów na płaszczyźnie zespolonej.
- 4° Które z parametrów funkcji $x(t)$ zależą od warunków początkowych.
- 5° Podziel rozwiązanie na składową swobodną i wymuszoną. Podaj postać wymuszenia.
- 6° Naskicuj przykładową odpowiedź obiektu na wymuszenie impulsowe (\Rightarrow). 19.1 
- 7° Jak zmieni się postać rozwiązania równania różniczkowego jeśli wystąpią bieguny wielokrotne?

4. Symulacyjne rozwiązywanie równań różniczkowych

4.1. Wprowadzenie – rozwiązanie analityczne i symulacyjne

I.2

Badanie dynamiki obiektów opisanych prostymi, liniowymi równaniami różniczkowymi lub układami takich równań można przeprowadzić rozwiązując analitycznie równanie różniczkowe, na przykład metodą klasyczną (⇒). Nie zawsze jednak potrzebny jest dokładny wzór rozwiązania. A przede wszystkim nie zawsze jest możliwe uzyskanie tego wzoru, czyli analityczne rozwiązanie równania różniczkowego, zwłaszcza gdy jest ono nieliniowe. Równania różniczkowe liniowe/nieliniowe można rozwiązywać również symulacyjnie za pomocą algorytmów całkowania numerycznego ¹, które pozwalają wyznaczyć zachowanie obiektu przy zadanym wymuszeniu i wybranych warunkach początkowych.

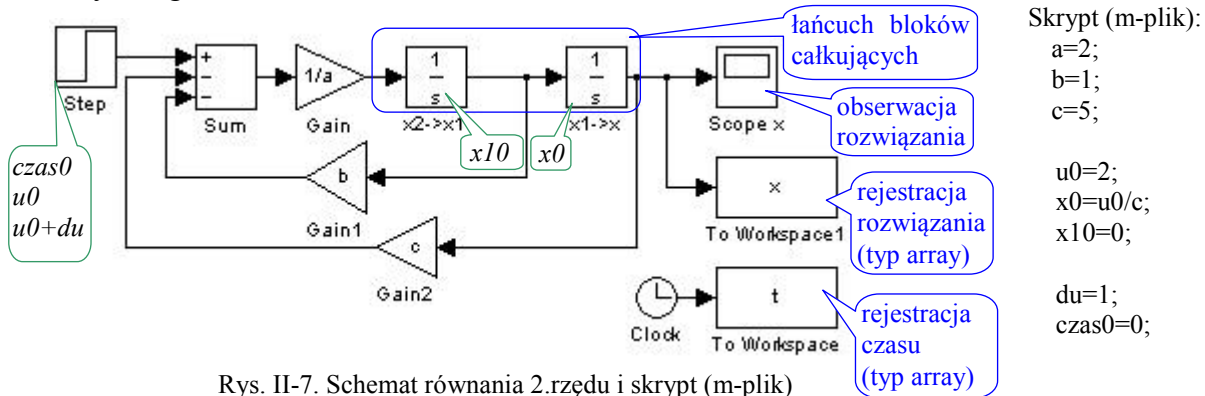
4.2. Przykład – konstrukcja schematu symulacyjnego

B.2

Do symulacyjnego rozwiązania równania różniczkowego (układu równań) można wykorzystać graficzny sposób definiowania badanych modeli, dostępny w programie Matlab+Simulink lub Scilab+Xcos (⇒). W tym celu należy przekształcić równanie (układ równań), tak aby po lewej stronie została najwyższa pochodna zmiennej wyjściowej, np.:

$$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = u(t) \rightarrow \ddot{x}(t) = \frac{1}{a}(-b\dot{x}(t) - cx(t) + u(t)). \quad (II-10)$$

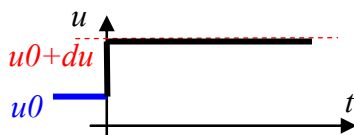
Rysowanie schematu (Rys. II-7) rozpoczyna się od łańcucha bloków całkujących (Integrator) – na wyjściu ostatniego bloku będzie dostępne x , czyli szukane rozwiązanie, a na wejściu pierwszego będzie podany sygnał najwyższej pochodnej \ddot{x} , którą należy odtworzyć graficznie na podstawie równania (II-10). Charakterystyczne pętle jakie powstają pomiędzy wejściami i wyjściami nie stanowią problemu dla iteracyjnych algorytmów całkowania numerycznego.



Rys. II-7. Schemat równania 2. rzędu i skrypt (m-plik)

Na schemacie można wpisywać bezpośrednio wartości wszystkich potrzebnych parametrów, lub używać zmiennych Matlaba (Scilaba), które zostaną zainicjowane przed uruchomieniem symulacji – najlepiej w skrypcie². Dzięki zastosowaniu zmiennych uzyskuje się uniwersalny schemat, który można uruchamiać dla różnych zestawów parametrów.

Na schemacie Rys. II-7 użyto zmiennych a , b , c , które pełnią rolę parametrów równania, a także zmiennych $x10$ i $x0$ do określenia warunków początkowych, oraz $u0$ i du – do sparametryzowania funkcji wejściowej (Rys. II-8).



Rys. II-8. Parametry wymuszenia skokowego (bloku Step)

Zmienna $u0$ jest równa wartości początkowej sygnału wejściowego u . Natomiast zmienna du odpowiada wartości skoku (przyrost wartości względem wartości początkowej). Jeśli $du=0$, to na wyjściu bloku Step będzie stała wartość.

Warunki początkowe dla równania różniczkowego można ustalić za pomocą parametrów „Initial condition” w blokach całkujących (domyślnie te parametry mają wartość zero).

¹ metody całkowania numerycznego, np. w [9/r.3], [6/r.17.1]

² Zaleca się żeby nazwy skryptów i schematów były różne (niezależnie od różnicy rozszerzeń w nazwach plików), ponieważ programy symulacyjne interpretują napotkane nazwy w określonej kolejności (komenda/funkcja, zmienna, schemat, skrypt) i realizują pierwszą wyszukaną możliwość

Na schemacie Rys. II-7 warunki początkowe zostały przekazane za pośrednictwem zmiennych $xI0$ i $x0$, odpowiadających wartościom $\dot{x}(0)$ i $x(0)$. Jeśli warunki początkowe są określone przez wartości $\ddot{x}(0)$ i $\dot{x}(0)$, to należy przeliczyć je na wartości $\dot{x}(0)$ i $x(0)$. Ma to miejsce na przykład przy uruchamianiu symulacji od stanu równowagi (\Leftrightarrow), czyli dla warunków $\ddot{x}(0) = \dot{x}(0) = 0$. Podstawienie wartości $\ddot{x}(0)$ i $\dot{x}(0)$ do równania (II-10) umożliwia obliczenie wartości $x(0)$, co oznacza, że w blokach całkujących zostaną podstawione wartości $xI0=0$ i $x0=u0/c$ (obliczone w skrypcie).

I.2.1.2

Przeprowadzenie symulacji zaczyna się od uruchomienia skryptu za pomocą komend dostępnych w menu edytora lub przez wywołanie nazwy pliku w oknie Matlab (Scilaba). Także w oknie edytora graficznego dostępne są komendy do uruchomienia symulacji dla danego schematu i do określenia parametrów algorytmu obliczeniowego (np. czas symulacji).

Najprostszy sposób prezentacji wyników symulacji to zastosowanie na schemacie bloku typu oscyloskop (np. Scope), przeznaczonego przede wszystkim do obserwowania wykresów wartości na bieżąco podczas symulacji. Wykresy można również narysować po zakończeniu symulacji za pomocą funkcji plot na podstawie wartości zarejestrowanych na przykład za pomocą bloku Scope lub To workspace.

	Matlab/Simulink	Scilab/Xcos	Octave
Blok typu oscyloskop	Scope	Cscope	---
Blok zbierania danych	To workspace	TOWS_c	---

Aby odtworzyć dany wykres konieczny jest wektor wartości zmiennej oraz wektor czasu, zawierający momenty czasu (wartości zmiennej t), w których zostały wyznaczone wartości rozwiązania. W celu optymalizacji obliczeń często stosowane są zmiennie-krokowe algorytmy całkowania ¹, a wówczas wartości wektora czasu zmieniają się nierównomiernie. Wartości zmiennych i czasu mogą być rejestrowane w postaci oddzielnych wektorów lub w postaci struktury zawierającej wektor wartości i wektor czasu (w Matlabie typ zmiennej określa się w bloku rejestrującym, w Scilabie zawsze jest struktura time+values).

4.3. Zadania – badanie układu 1.rzędu

Celem badań jest uzyskanie rozwiązania równania różniczkowego metodą symulacyjną i porównanie z rozwiązaniem analitycznym. Badaniom zostanie podane proste, liniowe równanie różniczkowe 1. rzędu:

$$a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = bu(t) \quad (\text{II-11})$$

Przykładem obiektu opisanego tego typu równaniem jest obwód elektryczny z cewką i rezystancją (\Leftrightarrow np. Rys. I-50), sprężyna połączona z tłumikiem (\Leftrightarrow np. Rys. I-45), pojedynczy magazyn ciepła (\Leftrightarrow np. Rys. I-40) czy pojedynczy zlinearyzowany zbiornik z wpływem cieczy (\Leftrightarrow np. Rys. I-31).

I.10.4.2
I.10.3.2
I.10.2.2
I.10.1.1

Ponieważ równanie (II-11) bardzo łatwo jest rozwiązać analitycznie, to pozwoli sprawdzić poprawność rozwiązania symulacyjnego. Należy dobrać parametry a_1 , a_0 , b tak aby układ był stabilny (\Leftrightarrow). Następnie zbudować schemat równania w środowisku Matlab/Simulink lub Scilab/Xcos i przygotować skrypt inicjujący wartości parametrów, w tym również parametry sygnału wejściowego ($u0$, du) oraz warunki początkowe ($x0$).

I.2.1.1

- 1° Wygeneruj rozwiązania $x(t)$ dla stałej wartości wejściowej ($du=0$) i dla różnych warunków początkowych: a) $\dot{x}(0) = 0$, b) $\dot{x}(0) \neq 0$, c) $x(0) = 0$, d) $x(0) \neq 0$.
Jaki wpływ na rozwiązanie ma wartość sygnału wejściowego, np. $u0=0$ oraz $u0=1$?
Dlaczego niektóre symulacje generują wykres o stałej wartości a inne nie?
- 2° Zweryfikuj otrzymane wykresy przez porównanie z analitycznym rozwiązaniem równania różniczkowego – narysuj rozwiązanie pełne i jego składowe (swobodną i wymuszoną).
- 3° Powtórz symulacje 1° dla wymuszenia skokowego $1(t)$ występującego w chwili 0, czyli $u(t) = 0$ dla $t < 0$ i $u(t)=1$ dla $t \geq 0$ (co odpowiada zmiennym $u0=0$, $du=1$, $czas0=0$).
Porównaj wyniki 1° i 3°, i wyjaśnij podobieństwa i różnice.

¹ Patrz: stało- i zmiennie-krokowe algorytmy całkowania numerycznego

5. Liniowy model drugiego rzędu

5.1. Wprowadzenie – zastosowanie i forma modeli drugiego rzędu

Liniowe modele dynamiki drugiego rzędu pojawiają się często jako punkt wyjścia do opracowywania różnych metod badania i projektowania układów automatyki, ponieważ:

- ich własności dynamiczne nie zależą od wymuszenia (punktu pracy),
- są dość proste by wykonać badania analityczne,
- mogą opisać każdy przypadek reakcji - stabilny i niestabilny, z oscylacjami lub bez nich.

I.3.2 Najbardziej charakterystyczną postacią modelu drugiego rzędu jest równanie oscylacyjne ⇨:

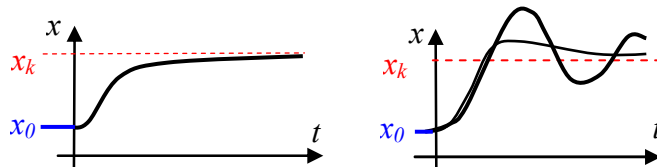
$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = b_0 u(t) \quad (\text{II-12})$$

gdzie: ξ - współczynnik tłumienia, ω_n - pulsacja drgań własnych ($\omega_n > 0$). Jako przykład prostego obiektu oscylacyjnego najłatwiej wskazać układ mechaniczny zawierający element sprężysty i tłumiący oraz masę (⇨ Rys. I-46). Takie same własności mają również dowolne modele w postaci równań stanu czy transmitancji, jeśli ich równanie charakterystyczne można sprowadzić do postaci:

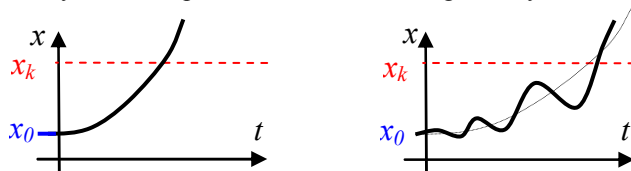
$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n \lambda + \omega_n^2 = 0 \quad (\text{II-13})$$

I.10.4.2 Może to być prosty obwód elektryczny RLC (⇨), ale mogą to być różne liniowe lub zlinearyzowane układy drugiego rzędu cieplne, hydrauliczne i inne.

Typowym elementem badania dynamiki obiektów jest obserwacja reakcji układu na skokową zmianę wartości zmiennej wejściowej. Na wykresach poniżej (Rys. II-9, Rys. II-10) przedstawiono możliwe typy odpowiedzi.



Rys. II-9. Odpowiedź układu stabilnego na wymuszenie skokowe



Rys. II-10. Odpowiedź układu niestabilnego na wymuszenie skokowe

Reakcja na wymuszenie skokiem jednostkowym $1(t)$ nazywa się odpowiedzią skokową.

5.2. Przykład – poprawność charakterystyk czasowych i punkty pracy

Poprawne wykonanie badania reakcji na wymuszenie skokowe sygnału wejściowego wymaga by ten skok był jedyną przyczyną zmian obserwowanych w układzie, to znaczy, że musi być podany na układ znajdujący się w stanie równowagi. W badaniach symulacyjnych można to zrealizować na dwa sposoby:

- uruchomić symulację od dowolnych warunków początkowych, poczekać aż układ dojdzie do stanu równowagi i wówczas podać skok,
- z równania statycznego wyznaczyć stan równowagi x_0 dla początkowej wartości sygnału wejściowego u_0 i uruchomić symulację przyjmując jako warunki początkowe punkt równowagi – skok można podać od razu na początku symulacji.

Pierwszy sposób wymaga dłuższego czasu symulacji i można go realizować tylko w przypadku układów stabilnych (⇨). Drugi sposób wymaga przeprowadzenia dodatkowych obliczeń (wyznaczenia stanu równowagi), ale jest bardziej ogólny (układy liniowe/nieliniowe, stabilne/niestabilne) i daje dodatkowe możliwości¹.

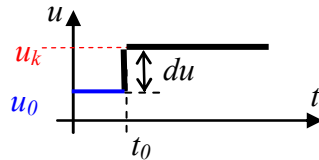
I.4.2.1

Warto przygotować schemat i skrypt badanego układu w ten sposób aby uruchamiać symulację od dowolnego stanu równowagi – na przykład w przypadku jednego równania z jednym wejściem można to zrealizować w następujący sposób:

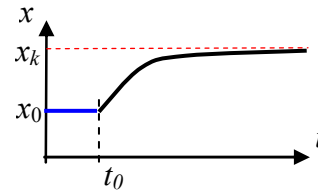
¹ np. weryfikację poprawności schematu (patrz II.7.2)

- użyć na schemacie zmiennych $u0$ (wartość początkowa w bloku skoku) i $x0$ (warunek początkowy w końcowym bloku całkującym),
- zainicjować wartość $u0$ i wyliczyć wartość $x0$ dla danego $u0$ na podstawie wzoru na stan równowagi – najlepiej w skrypcie.

Dodatkowo można przesunąć moment wystąpienia zmiany wartości na wejściu: $u(t) = u_0$ dla $t < t_0$, $u(t) = u_0 + du$, dla $t \geq t_0$ (Rys. II-11). Wówczas na wyjściu układu do chwili t_0 obserwujemy stan równowagi a reakcja układu może pojawić się dopiero od chwili t_0 (Rys. II-12), co potwierdza, że jedyną przyczyną reakcji układu jest zmiana sygnału wejściowego.



Rys. II-11. Przesunięte wymuszenie skokowe



Rys. II-12. Reakcja układu w stanie równowagi na skokową zmianę wartości na wejściu

Na przebiegach czasowych Rys. II-11 i Rys. II-12 można zaobserwować czas i sposób przejścia układu z początkowego punktu pracy (punkt u_0, x_0 na charakterystyce statycznej) do punktu końcowego (u_k, x_k). Reakcje układów liniowych nie zależą od punktu pracy (⇒). 1.2.1

W badaniach dynamiki układów wyznacza się również odpowiedź na zakłócenie impulsowe i jeśli jest to impuls Diraca $\delta(t)$, to mówimy o odpowiedzi impulsowej układu. Funkcja $\delta(t)$ to impuls o jednostkowej powierzchni ale nieskończenie krótki i nieskończenie wysoki, więc praktycznie niewykonalny (i fizycznie, i symulacyjnie). Wobec tego stosuje się przybliżenia, na przykład impuls prostokątny o powierzchni równej 1, zrealizowany za pomocą dwóch sygnałów skokowych przesuniętych w czasie.

5.3. Zadania – charakterystyki czasowe modelu oscylacyjnego

Przedmiotem badań są własności równania oscylacyjnego (II-12), które wynikają z analizy teoretycznej wzorów na pierwiastki równania charakterystycznego (II-13).

- 1° Wyznacz przedziały wartości ζ , które odpowiadają różnym typom reakcji układu na zmiany – stabilny/niestabilny, z/bez oscylacji (⇒). Określ położenie biegunów układu na płaszczyźnie zespolonej dla wyznaczonych przedziałów wartości ζ i na ich granicach. 1.3.2
- 2° Przygotuj schemat i skrypt do badań symulacyjnych, przewidując możliwość uruchomienia symulacji od dowolnego stanu równowagi (punktu pracy):
 - sparametryzuj funkcję skokową na wejściu (zmiennne $u0$ i du),
 - oblicz w skrypcie warunki początkowe dla bloków całkujących,
 - sprawdź przygotowany model przez wykonanie symulacji w stanie równowagi ($du=0$).
- 3° Wykonaj symulacje typowych reakcji układu przy pobudzeniu skokiem jednostkowym $u=1(t)$ dla wybranych wartości współczynnika tłumienia ζ .
- 4° Powtórz punkt 3° dla pobudzenia impulsowego $u_0=\delta(t)$:
 - zaproponuj sposób realizacji funkcji, która przybliży impuls Diraca,
 - przed wykonaniem symulacji spróbuj przewidzieć przebieg wykresów (⇒). 1.9.1
- 5° Uzyskane wyniki przedstaw w Tab. II-4

Tab. II-4. Odpowiedzi czasowe członu oscylacyjnego

Przedział*	Wybrana wartość ζ	Położenie biegunów w układzie Im(Re)	Odpowiedź skokowa $h(t)$	Odpowiedź impulsowa $k(t)$
$\zeta < -1$				
$-1 < \zeta < 0$				
$\zeta = 0$				
$0 < \zeta < 1$				
$1 < \zeta$				

*Uzupełnij oznaczenie przedziałów wartości ζ uwzględniające wartości -1 i 1 (wprowadź znak \leq)

6. Portrety fazowe

6.1. Wprowadzenie – warunki generowania portretów

I.4

Portret fazowy (\Rightarrow) w programie symulacyjnym powstaje przez wielokrotne uruchomienie obliczeń reakcji obiektu dla stałego wymuszenia (zwykle równego zero) i różnych warunków początkowych oraz przedstawienie wyników w układzie współrzędnych $[x, \dot{x}]$. To oznacza, że badany model może być co najwyżej drugiego rzędu i musi umożliwić zainicjowanie różnych warunków początkowych¹. Model może być nieliniowy i mogą to być nawet funkcje typu nasycenie, strefa martwa, przekaźnik, itp.² – portrety fazowe wspomagają szczególnie badania stabilności takich właśnie przypadków. Własności modeli liniowych można badać w prostszy sposób (nawet analitycznie) a na podstawie położenia biegunów łatwo przewidzieć typ portretu (\Rightarrow węzeł/ognisko stabilne/niestabilne, centrum, siodło). Portrety modeli nieliniowych (\Rightarrow) są bardziej złożone, na przykład mogą zawierać więcej niż jeden punkt równowagi a stabilność trajektorii może zależeć od warunków początkowych. Nieznajomość obszarów stabilności utrudnia generowanie nieznanego portretu, wiadomo jednak, że model różniczkowalny ma w odpowiednio małym otoczeniu każdego punktu równowagi portret podobny do układów liniowych.

I.4.1

I.4.2

6.2. Przykład – automatyzacja badań

Realizacja programu badań za pomocą skryptów zapewnia nie tylko dokumentację przyjętych założeń (np. wartości parametrów). Zarówno Matlab jak i Scilab oferują także możliwość uruchamiania symulacji w trybie wsadowym (Tab. II-5), co w połączeniu z elementami programowania (pętle, instrukcje warunkowe) pozwala zautomatyzować powtarzające się operacje, na przykład uruchamianie symulacji dla różnych zestawów parametrów i zbiorczą prezentację wyników.

Tab. II-5. Funkcje do uruchamiania symulacji w trybie wsadowym

	Matlab/Simulink	Scilab/Xcos
Uruchomienie symulacji	sim	xcos_simulate
Funkcje skojarzone	simget simset	loadXcosLibs importXcosDiagram

Programy symulacyjne wykazują duże różnice w sposobie realizacji tego zadania ze względu na zestaw funkcji i ich działanie. Fragmenty skryptów w Tab. II-6 zawierają przykład pętli, która uruchamia symulacje dla schematu równania różniczkowego zapisanego w pliku „model”. Zakłada się, że zmienna a jest parametrem modelu, natomiast $x1$ i $x2$ są zmiennymi w blokach zbierania danych umieszczonych na schemacie. Efektem działania są wykresy przebiegów czasowych zmiennej $x1$ i $x2$ na oddzielnych rysunkach i w różnych kolorach.

Tab. II-6. Przykład skryptu z uruchamianiem symulacji

Matlab	Scilab
<pre>f1=figure; hold on; grid on; f2=figure; hold on; grid on; kolor='rgb'; tab_a=[0, 1, 5]; for i=1:3 a=tab_a(i); [t]=sim('model'); figure(f1); plot(t, x1,kolor(i)); figure(f2); plot(t, x2,kolor(i)); end</pre>	<pre>loadXcosLibs(); importXcosDiagram('model.xcos'); //tworzy scs_m n1=figure(); set(gca(), 'auto_clear', 'off'); set(gca(), 'grid', [1,1]); n2=figure(); set(gca(), 'auto_clear', 'off'); set(gca(), 'grid', [1,1]); kolor=['r', 'g', 'b']; tab_a=[0, 1, 5]; for i=1:3 a=tab_a(i); scicos_simulate(scs_m); figure(n1); plot(x1.time, x1.values, kolor(i)); figure(n2); plot(x2.time, x2.values, kolor(i)); end</pre>

W skrypcie Matlaba wykorzystano fakt, że funkcja uruchamiająca symulację (sim) ma możliwość zwracania wartości, między innymi wektora czasu, który został podstawiony pod zmienną t i wykorzystany w funkcji plot. W tej sytuacji zmienne $x1$ i $x2$ rejestrowane przez bloki zbierania danych (To workspace) mogą zamiast struktury mieć postać prostego wektora

¹ tego warunku nie spełniają modele w postaci transmitancji

² nieliniowe nieróżniczkowalne

(opcja Matrix). Scilab nie udostępnia takich opcji – dane w bloku zbierania danych (TOWS_c) zawsze mają postać struktury.

Matlab i Scilab różnią się też znacznie w sposobie zmiany parametrów obliczeniowych, takich jak czas symulacji, wybór i parametry algorytmu całkowania. Są one przechowywane w pliku ze schematem i mogą być zadawane podczas edycji schematu. W trybie wsadowym można jednak uruchomić symulację z innymi parametrami niż te zapamiętane ze schematem. Często dotyczy to czasu symulacji – w Matlabie podaje się go jako parametr funkcji sim, a w Scilabie zmienia się element w strukturze scs_m, tworzącej się automatycznie po wczytaniu schematu za pomocą funkcji importXcosDiagram.

6.3. Zadania – portrety układów liniowych

Celem badań jest wygenerowanie charakterystycznych typów portretów fazowych układu liniowego drugiego rzędu (Rys. I-11).

1° Wygeneruj wszystkie typy portretów fazowych równania oscylacyjnego oraz portret typu siodło. Wykorzystaj model przygotowany w punkcie 5.3. Dobierz wartości parametrów równania i warunki początkowe, dla których można uzyskać typowe portrety.

Uwagi do wykonania:

- wykorzystaj możliwość wsadowego uruchamiania symulacji i napisz skrypt realizujący zadanie,
- ustal stałe wymuszenie i wybierz warunki początkowe w różnych punktach płaszczyzny stanu (nie tylko na osiach),
- w przypadku układów niestabilnych zwróć uwagę na odpowiedni dobór warunków początkowych i czasu symulacji (przy szybkim oddalaniu się od punktu równowagi może nastąpić przekroczenie zakresu wartości zmiennych),
- zaznacz kierunki trajektorii i punkt (punkty?) równowagi, określ stabilność układu.

2° Określ związki pomiędzy wygenerowanymi portretami fazowymi a typami odpowiedzi skokowych otrzymanymi w punkcie 5.3. Wskaż odpowiadające sobie punkty wartości ekstremalnych na wykresach czasowych i portretach.

6.4. Portrety układów nieliniowych

Jako przykład analizy układów nieliniowych niech posłużą dwa równania, pozornie niewiele różniące się od badanego wcześniej równania liniowego drugiego rzędu:

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx^2 + dx = F \quad (\text{II-14})$$

oraz

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx^3 + dx = F \quad (\text{II-15})$$

W przypadku odpowiednio dobranych wartości parametrów powyższe równania mogłyby opisywać na przykład model dynamiki układu z nieliniową sprężyną (⇔).

Celem badań jest wygenerowanie portretów fazowych równań (II-14) i (II-15) oraz określenie stabilności tych układów. Równania są nieliniowe i trudno jest przewidzieć wygląd portretów (⇔), więc przed rozpoczęciem symulacji warto zwrócić uwagę przynajmniej na rzęd modelu, na postać równania statycznego i ilość punktów równowagi.

1° Wykonaj portret fazowy badanego równania dla następujących przypadków:

- a) $a=1, b=1, c=0.01, d=-10, F_0=0,$
- b) $a=1, b=1, c=-0.01, d=10, F_0=0.$

Zaznacz kierunki trajektorii. Wskaż punkt/punkty równowagi. Określ stabilność układu.

2° Określ wpływ wskazanych parametrów na kształt portretu badanego równania:

- jak się zmieni portret dla $F_0 > 0$?
- jak zapewnić żeby układ miał punkt równowagi na przykład w punkcie $x_0=5$?

3° Wykonaj linearyzację badanego równania i zbadaj stabilność układu analitycznie (⇔). I.9.2

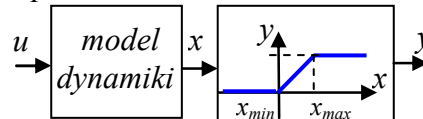
7. Badanie obiektów rzeczywistych (na przykładzie zbiorników)

7.1. Wprowadzenie – założenia i ograniczenia modeli

Elementarne liniowe układy dynamiki 1. i 2 rzędu mają duże znaczenie teoretyczne ale nie występują w rzeczywistych warunkach. Zastosowanie tak prostych modeli zawsze jest efektem przyjętych założeń, które pozwalają uprościć opis, kosztem ograniczenia dokładności modelu. Prostszy model to nie tylko łatwiejsze obliczenia ale także mniejsza ilość parametrów, których wartości trzeba wyznaczyć. Tak więc w praktyce inżynierskiej kluczową rolę odgrywa przygotowanie dobrego i w miarę prostego modelu.

Podstawowe znaczenie mają założenia upraszczające dotyczące zakresu stosowania modelu, jego rzędu oraz liniowości opisu. Zazwyczaj każdy model jest konstruowany przy założeniu, że zmienne opisujące przebieg procesów nie przekroczą naturalnych ograniczeń czy dopuszczalnych wartości, na przykład nie zdarzy się ujemny poziom cieczy, temperatura nie spowoduje odkształcenia lub zniszczenia elementu, itp.

Jeśli jednak model miałby być wykorzystywany na granicy zakresu wartości zmiennych, to uzupełnia się go blokami nasycenia, które ograniczają wartości zmiennych (Rys. II-13).



Rys. II-13. Ograniczenie wartości zmiennych

Praktycznie również zawsze stosuje się założenia, które ograniczają rząd modelu. W przypadku modeli liniowych odpowiada to wprost uwzględnieniu tylko tych biegunów układu, które mają istotne znaczenie dla stabilności, czasu reakcji, oscylacji (\Rightarrow). Doświadczenia z konstrukcji modeli na podstawie opisu zjawisk fizycznych (\Rightarrow) wskazują, że element (proces) ma tym większy wpływ na dynamikę im stanowi większy magazyn wielkości (masy, energii, ...) w układzie.

Równie ważne są założenia zapewniające liniowość modelu (o ile to możliwe). Właściwie to występują one zawsze bo każda liniowa zależność stosowana do opisu rzeczywistości jest jedynie jej przybliżeniem. Wymienia się więc najistotniejsze założenia, decydujące o dokładności upraszczanego modelu, która zależy również od przewidywanego zakresu zmian wartości zmiennych.

7.2. Przykład – weryfikacja poprawności schematu

Symulacyjną metodę badania modeli rzeczywistych układów wybiera się zwykle wówczas gdy badania analityczne są zbyt złożone. To oznacza także, że trudno ocenić wiarygodność uzyskanych wyników, bo trudno je przewidzieć. Tymczasem doświadczenie pokazuje, że nawet przy rysowaniu prostych schematów często zdarzają błędy – pomyłka w połączeniu, zły znak funkcji, parametr, itp. Aby je wyeliminować należy przed realizacją programu badań zweryfikować poprawność przygotowanego schematu. Proponowana metoda opiera się na wykorzystaniu symulacji dowolnego stanu równowagi bez żadnych zakłóceń (\Rightarrow).

Zakłada się, że pozytywnie zweryfikowany schemat nie będzie edytowany podczas badań, co pozwoli uniknąć przypadkowych błędów. Wobec tego schemat powinien być sparametryzowany a program badań realizowany za pomocą skryptów. Każdy sygnał wejściowy¹ będzie definiowany jako wymuszenie skokowe sparametryzowane za pomocą zmiennych typu stan początkowy $u0$ i zmiana wartości du (Rys. II-11). Warunek początkowy w każdym „końcowym” bloku całkującym² zostanie przekazany za pomocą zmiennej (np. $x0$), która będzie obliczana w skrypcie na podstawie wzoru na punkt równowagi. Jeśli wzór na punkt równowagi i schemat są poprawne, to symulacja ze stałą wartością na wejściu ($du=0$) musi utrzymać stałą wartość na wyjściu równą wartości początkowej $x0$ (\Rightarrow).

Proponowana metoda weryfikacji nie zapewnia ujawnienia wszystkich możliwych błędów, ale sprawdza się w większości przypadków. Podczas właściwych badań można zmieniać punkt pracy (zależny od $u0$) i zakłócenie (du) ograniczając się jedynie do zmian w skrypcie³.

¹ w ogólności badane układy mogą mieć więcej niż jedno wejście

² tzn. w ostatnim elemencie łańcucha bloków całkujących (w przypadku układu równań różniczkowych takich łańcuchów jest tyle ile jest zmiennych stanu)

³ Uporządkowany skrypt pomaga kontrolować poprawność wartości parametrów w kolejnych symulacjach, np. łatwiej zauważyć błąd w krótkim skrypcie niż przez przeglądanie parametrów w blokach na schemacie.

Jeśli dodatkowo skok wartości wejściowej du będzie przesunięty w czasie (skok w chwili $t_0 > 0$), to można sobie zapewnić powtarzalną kontrolę poprawności na wykresach podczas typowego badania reakcji na wymuszenie skokowe – na odcinku $0 \div t_0$ wykres powinien przedstawiać zawsze stan równowagi (Rys. II-12).

7.3. Zadania – badanie własności kaskad zbiorników

Przedmiotem badań są statyczne i dynamiczne własności kaskady zbiorników (\Rightarrow). Celem natomiast jest określenie jaki wpływ na te własności mają wielkości zbiorników, sposób ich połączenia oraz dokładność modelu. Większa dokładność badanych modeli będzie związana z ich nieliniowością, można się więc spodziewać, że uproszczone modele będą wykazywały takie same własności dynamiczne w całym zakresie pracy, a własności modeli dokładnych będą zależeć od punktu pracy (\Rightarrow).

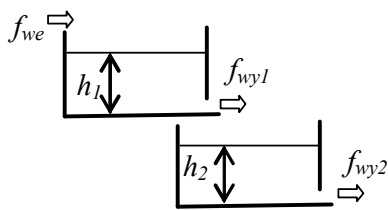
I.10.1.3

I.2.3

7.3.1. Kaskada niewspółdziałająca

Pierwsza kaskada zbiorników ze swobodnym wypływem (Rys. II-14) tworzy układ unilateralny – kaskadę niewspółdziałającą (\Rightarrow).

I.10.1.3



Rys. II-14. Kaskada niewspółdziałająca

Model obiektu zawiera dwa równania i jeśli ma być dokładny, to będzie nieliniowy, ponieważ zawiera funkcje związane ze swobodnym wypływem (I-92). Można go jednak zlinearyzować, na przykład metodą siecznej (\Rightarrow). Zarówno dokładną jak i przybliżoną wersję modelu można zaimplementować na schemacie w programie symulacyjnym.

I.10.4.2

Wartości wszystkich parametrów dokładnego i przybliżonego modelu można wyznaczyć na podstawie przyjętych wymiarów – powierzchnia dna i otworu, wysokość zbiornika.

- 1° Przygotuj przybliżony (zlinearyzowany) model obiektu i wykonaj podstawową analizę – rząd, liniowość, zmienne wejściowe i wyjściowe, równania statyczne, punkt równowagi.
- 2° Narysuj schemat i przygotuj skrypt z parametrami, zakładając że badane będą odpowiedzi skokowe obiektu a symulacje będą uruchamiane dla różnych punktów pracy. Wykonaj weryfikację poprawności schematu na podstawie symulacji w stanie równowagi.
- 3° Wyznacz reakcję kaskady na takie samo wymuszenie skokowe df_{we} w 3 punktach pracy:
 - wyznacz punkty pracy (stany równowagi), np. dla $f_{we0} = 0, 0.5f_{wemax}, 0.9f_{wemax}$,
 - określ niewielkie wymuszenie, np. $df_{we} = 10\% f_{wemax}$.
- 4° Przedstaw wyniki badań na wykresach, tak aby zapewnić możliwość porównania reakcji wygenerowanych podczas badań (w różnych punktach, dla różnych zbiorników).
- 5° Jaki wpływ na własności mają różnice w wielkości zbiorników, np. oba równe, pierwszy znacznie większy, drugi znacznie większy?
- 6°÷10° Powtórz punkty 1°÷5° dla dokładnego modelu kaskady niewspółdziałającej i porównaj wykresy obu modeli. Jaki wpływ na wyniki ma linearyzacja modelu?

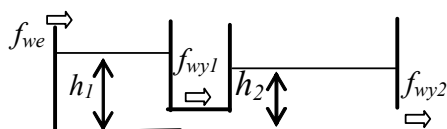
Uwagi:

- Wyznacz wartość maksymalnego przepływu wejściowego f_{wemax} w ten sposób aby w stanie ustalonym nie przekroczyć założonej wysokości zbiorników.
- Przesuń moment zmiany wymuszenia $t_0 > 0$, aby kontrolować poprawność symulacji.

7.3.2. Kaskada współdziałająca

Druga kaskada zbiorników ze swobodnym wypływem (Rys. II-15) to układ nieunilateralny – kaskada współdziałająca (\Rightarrow).

I.10.1.3



Rys. II-15. Kaskada współdziałająca

Jeśli sposób połączenia będzie jedyną zmianą w stosunku do modelu 7.3.1, to będzie można zbadać jaki wpływ na własności układu ma sposób ich połączenia.

- 1°÷11° Wykonaj pogram badań analogiczny jak dla kaskady niewspółdziałającej. Porównaj wykresy obu kaskad.

8. Alternatywne metody symulacji modeli

8.1. Wprowadzenie – różne sposoby definiowania modeli

Podstawową formą modeli dynamiki obiektów o parametrach skupionych są równania różniczkowe zwyczajne. Zasady konstrukcji i weryfikacji poprawności schematów symulacyjnych tych równań są takie same dla równań liniowych i nieliniowych. Oczywiście schematy układów liniowych są znacznie prostsze. Modele liniowe można również zapisać jako równania stanu w formie macierzowej (\Leftrightarrow) lub przekształcić do transmitancji (\Leftrightarrow), a dysponując jedną z tych form można uprościć tworzenie schematu, wykorzystując specjalne bloki i wprowadzając odpowiednio macierze równań stanu lub współczynniki transmitancji. Modele tego typu można przygotować również w trybie tekstowym (w skrypcie), używając odpowiedniej funkcji. Poza specjalizowanymi blokami i funkcjami istnieje jeszcze możliwość zdefiniowania modelu w pliku funkcyjnym. Jest to najbardziej pierwotna forma modelu w programach symulacyjnych, związana z bezpośrednio algorytmami całkowania numerycznego.

8.2. Przykład – definicja modeli w blokach, funkcjach i plikach

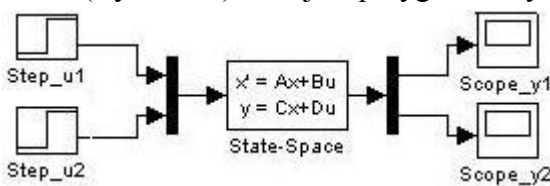
8.2.1. Bloki na schemacie graficznym

Na schematach symulacyjnych można wykorzystywać kilka bloków do definiowania modeli liniowych (Tab. II-7).

Tab. II-7. Wybrane bloki do definiowania modeli liniowych

	Matlab/Simulink	Scilab/Xcos	Octave
równania stanu	State-Space	CLSS	---
transmitancja	Transfer Fcn	CLR	---

Oferowane bloki mają swoją specyfikę i ograniczenia w zastosowaniu¹. W przypadku równań stanu (Rys. II-16) blok jest przygotowany do wprowadzenia modelu postaci macierzowej:



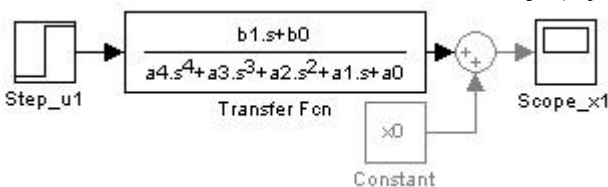
Rys. II-16. Blok równań stanu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (II-16)$$

gdzie wektor u zawiera zmienne wejściowe, a wektor y - zmienne wyjściowe. Wymiary macierzy A , B , C , D muszą się zgadzać, tak aby móc wykonać operacje na macierzach.

Na wyjściu bloku dostępny jest tylko wektor y , jeśli więc istnieje potrzeba obserwowania zmiennych stanu x , to trzeba zdefiniować zmienne wyjściowe, które będą im odpowiadać. Blok umożliwia podanie wektora wartości początkowych dla zmiennych stanu x_0 , można więc uruchamiać symulacje od różnych warunków początkowych.

Podstawowa forma bloku transmitancji (Rys. II-17) jest typu SISO:



Rys. II-17. Blok transmitancji

$$x_1(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} u_1(s) \quad (II-17)$$

czyli ma jedną zmienną wejściową u_1 i jedną wyjściową – zmienną stanu x_1 .

Współczynniki wielomianu licznika i mianownika są przekazywane do bloku za pomocą wektorów wartości. Programy symulacyjne zwykle akceptują tylko takie transmitancje, w których stopień licznika jest mniejszy niż stopień mianownika (ewentualnie równy). Transmitancja z definicji jest modelem o zerowych warunkach początkowych. Zazwyczaj nie stanowi to problemu dla badań symulacyjnych, należy tylko podawać na wejście sygnał o zerowej wartości początkowej. Ponieważ reakcja modelu liniowego nie zależy od punktu pracy, więc w razie konieczności wyniki symulacji można przesunąć o wartość x_0 i uzyskać symulację przebiegu zmian od wybranego stanu równowagi.

¹ Nowsze wersje programów oferują dodatkowe wersje bloków bez ograniczeń, jednak są to de facto bloki, które nie ujawniają ograniczeń na zewnątrz ale obchodzą je za pomocą wewnętrznych konwersji.

8.2.2. Funkcje w skryptach

Typowe badania modeli zapisanych w postaci macierzowych równań stanu czy transmitancji można zrealizować za pomocą prostych funkcji (Tab. II-8).

Tab. II-8. Wybrane funkcje do definiowania i badania modeli liniowych

	Matlab/Control	Scilab	Octave
równania stanu	ss	syslin	
transmitancja	tf, zpk	syslin	
odpowiedzi czasowe	step, impulse	csim	

Jedna grupa funkcji umożliwia definicję modelu i zapamiętanie go pod wybraną nazwą. Parametry i ograniczenia funkcji są takie same jak analogicznych bloków na schematach. Druga grupa funkcji służy do uruchamiania symulacji, która generuje wykres przedstawiający reakcję modelu na standardowe zakłócenie (skok jednostkowy, impuls).

8.2.3. Definiowanie modeli w pliku funkcyjnym

Definicja modelu w pliku funkcyjnym wymaga przedstawienia go w postaci układu równań pierwszego rzędu (⇒), na przykład w przypadku modelu van der Pola:

I.5.2

$$\ddot{x}(t) = c(1 - x^2)\dot{x} - x \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = c(1 - x_1^2)x_2 - x_1 \end{cases} \quad (\text{II-18})$$

Badany model należy zapisać w pliku funkcyjnym, zgodnie z zasadami konstrukcji takich plików w danym programie symulacyjnym (Tab. II-9).

Tab. II-9. Przykład funkcji definiującej model dynamiki

Matlab	Scilab	Octave
function[xprim] = vdp(t, x) global c; xprim = [x(2); ... c*(1-x(1)^2)*x(2)-x(1)];	function[xprim] = vdp(t, x) global c; xprim(1) = x(2); xprim(2)=c*(1-x(1)^2)*x(2) - x(1); endfunction	

Zakładając, że „vdp” z odpowiednim rozszerzeniem jest nazwą pliku zawierającego model, uruchomienie symulacji można zrealizować w skrypcie (Tab. II-10).

Tab. II-10. Przykład symulacji z wykorzystaniem funkcji definiującej model dynamiki

Matlab	Scilab	Octave
global c c=1; tend=100; x0 = [-2.5; 2.5]; [T,x]=ode45('vdp',[0 tend], x0); plot(x(:,1), x(:,2))	c=1; tend=100 ; x0 = [-2.5; 2.5]; t = linspace(0, tend,500); exec('vdp.sci'); [x] = ode(x0, 0, t, vdp); plot(x(1,:), x(2,:))	

8.3. Zadania – program badania kaskady liniowej zapisany w skrypcie

Proponowane ćwiczenia polegają na powtórzeniu badań zrealizowanych wcześniej (p.II.7) z wykorzystaniem omówionych bloków, funkcji i plików. O ile to możliwe badania powinny być przeprowadzone w tych samych warunkach. To pozwoli z jednej strony zweryfikować poprawność modeli, a z drugiej strony określić ograniczenia poszczególnych metod.

1° Przygotuj zlinearyzowany model kaskady niewspółdziałającej w postaci:

- a) macierzowej,
- b) transmitancji.

2° Wykonaj aplikację modeli (1a, 1b):

- a) na schemacie za pomocą odpowiednich bloków,
- b) w skrypcie za pomocą odpowiednich funkcji.

Wyznacz odpowiedzi modeli na wymuszenia skokowe.

Uwagi do wykonania:

- wykonaj wykresy umożliwiające porównanie wyników z kolejnych punktów,
- o ile możliwe lub ma sens, to zbadaj reakcję modelu w różnych punktach pracy.

Porównaj wyniki badań – przedstaw spostrzeżenia i wnioski w punktach.

Które wnioski powtórzą się gdy badaniom zostanie poddana kaskada współdziałająca?

3° Wykonaj aplikację i badania zlinearyzowanego modelu kaskady współdziałającej.

9. Planowanie badań (projekt na przykładzie obiektów cieplnych)

9.1. Wprowadzenie – wybór metod

Programy symulacyjne oferują różne sposoby definiowania i badania modeli dynamiki układów (przedstawione w poprzednich rozdziałach). W ogólności wybór metody zależy od:

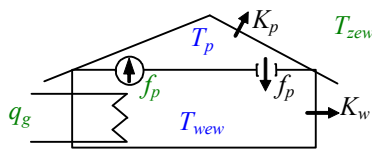
- założonego celu – jak model będzie wykorzystywany, jakie zjawiska i własności będą badane,
- możliwości technicznych – jakie funkcje są dostępne w wybranym/dostępnym programie symulacyjnym,
- umiejętności badacza – opanowanie różnych metod daje możliwość wybrania metody optymalnej (prostej, szybkiej, uniwersalnej, ...) w danym przypadku.

W szczególności podczas wyboru metody uwzględnia się:

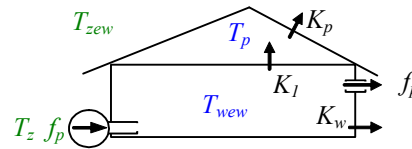
- typ modelu – czy badany model jest liniowy – nieliniowy (czy musi być nieliniowy),
- formę modelu – czy pierwotny model ma postać równań różniczkowych czy transmitancji, czy można/warto przekształcić go na inną formę,
- wybór zmiennych wejściowych – czy można ograniczyć ilość wejść modelu przyjmując, że niektóre z nich mają zawsze stałe wartości (są więc parametrami modelu),
- sposób prezentacji wyników – charakterystyki czasowe, wskaźniki obliczone na ich podstawie, ...

9.2. Przykład – podstawowy program badań

Założmy, że przedmiotem badań jest obiekt cieplny, w którym występuje przepływ medium, na przykład (\Rightarrow):



Rys. II-18. Przykład z ogrzewaniem elektrycznym



Rys. II-19. Przykład z ogrzewaniem przez nawiew

Jeśli przepływ medium f_p zmienia się w czasie, to modele obiektów będą nieliniowe:

a) model obiektu z Rys. II-18

$$\begin{cases} C_{vw} \dot{T}_{wew}(t) = q_g(t) - c_p \rho_p f_p(t) T_{wew}(t) + c_p \rho_p f_p(t) T_p(t) - K_w (T_{wew}(t) - T_{zew}(t)) \\ C_{vp} \dot{T}_p(t) = c_p \rho_p f_p(t) T_{wew}(t) - c_p \rho_p f_p(t) T_p(t) - K_p (T_p(t) - T_{zew}(t)) \end{cases} \quad (II-19)$$

b) model obiektu z Rys. II-19

$$\begin{cases} C_{vw} \dot{T}_{wew}(t) = c_p \rho_p f_p(t) (T_z(t) - T_{wew}(t)) - K_1 (T_{wew}(t) - T_p(t)) - K_w (T_{wew}(t) - T_{zew}(t)) \\ C_{vp} \dot{T}_p(t) = K_1 (T_{wew}(t) - T_p(t)) - K_p (T_p(t) - T_{zew}(t)) \end{cases} \quad (II-20)$$

W obu przypadkach modele zawierają dwie zmienne stanu (T_{wew} , T_p) oraz trzy zmienne wejściowe: a) q_g , T_{zew} , f_p ; b) T_z , T_{zew} , f_p . Wartości współczynników modeli będą wyznaczone na podstawie znanych (założonych) wartości nominalnych (obliczeniowych) zmiennych (q_{gN} lub T_{zN} oraz T_{zewN} , f_{pN} , T_{wewN} , T_{pN}).

Celem badań jest przeprowadzenie podstawowej analizy czasowej układu, opierającej się na zarejestrowaniu reakcji obiektu na zmiany pojawiające się na wejściach. Ponieważ model jest nieliniowy, to reakcje układu będą zależeć od punktu pracy. Proponowany poniżej sposób badań powinien zapewnić wyniki, które zilustrują te własności.

1° Badania w 3 punktach równowagi obliczonych na podstawie zmiennych wejściowych:

a) moc q_g , temperatura na zewnątrz T_{zew} , przepływ f_p :

$$\begin{array}{lll} \text{pkt1)} & q_{g0} = q_{gN} & \text{pkt2)} & q_{g0} = q_{gN} * d_q & \text{pkt3)} & q_{g0} = q_{gN} * d_q \\ & T_{zew0} = T_{zewN} & & T_{zew0} = T_{zewN} + d_T & & T_{zew0} = T_{zewN} + d_T \\ & f_{p0} = f_{pN} & & f_{p0} = f_{pN} & & f_{p0} = f_{pN} * d_f \end{array}$$

b) temperatura medium zasilającego T_z , temperatura na zewnątrz T_{zew} , przepływ f_p :

$$\begin{array}{lll} \text{pkt1)} & T_{z0} = T_{zN} & \text{pkt2)} & T_{z0} = T_{zN} + d_{Tz} & \text{pkt3)} & T_{z0} = T_{zN} + d_{Tz} \\ & T_{zew0} = T_{zewN} & & T_{zew0} = T_{zewN} + d_T & & T_{zew0} = T_{zewN} + d_T \\ & f_{p0} = f_{pN} & & f_{p0} = f_{pN} & & f_{p0} = f_{pN} * d_f \end{array}$$

Punkty pracy są wybierane w zakresie realnych warunków pracy obiektu, a więc na przykład $d_q=50\%$, $d_f=50\%$, $d_T=+5^\circ\text{C}$, $d_{Tz}=-5^\circ\text{C}$.

- 2° W każdym punkcie pracy badana jest reakcja układu kolejno na skokową zmianę wartości na poszczególnych wejściach – w przypadku mocy i przepływu jest to zmiana rzędu 10% wartości nominalnej, a dla temperatury o $1\div 2$ stopnie.
- 3° Wyniki symulacji zostaną przedstawione na kilku wykresach, które umożliwią porównanie reakcji układu na to samo zakłócenie w różnych punktach pracy. Pomocne w tym porównywaniu mogą być wykresy reakcji układu wykonane względem punktu pracy.
Uwaga: Na podstawie własności układów liniowych można przewidzieć, które reakcje układu będą takie same i ograniczyć przedstawiony program badań.
- 4° Uzupełnieniem badań będą charakterystyki statyczne a zwłaszcza zależność zmiennych wyjściowych od przepływu medium. Charakterystyki można wyznaczyć na dwa sposoby:
 - na podstawie wzorów do obliczania początkowego stanu równowagi (punktu pracy) – za pomocą funkcji plot,
 - na bazie schematu modelu – na wejście wybranej zmiennej (np. przepływu) należy wprowadzić funkcję, która od początkowego stanu równowagi będzie bardzo wolno narastać/maleć, tak aby układ ciągle nadążał za tą zmianą, co pozwoli obserwować charakterystyki statyczne w zależności od tej wybranej zmiennej bezpośrednio na rejestratorach x-y.

9.3. Zadania – badanie własności obiektu cieplnego

9.3.1. Model nieliniowy – schematy z blokami całkującymi

Wybierz do badań obiekt cieplny, w którym występuje przepływ medium (np. z punktu 9.2 lub 10.2.3). Skonstruuj model w postaci równań różniczkowych. Określ zmienne wejściowe i wyjściowe modelu oraz wartości nominalne tych zmiennych.

- 1° Przygotuj wzory do wyznaczania wartości parametrów oraz wartości początkowych (punktu pracy).
- 2° Wykonaj schemat symulacyjny układu i skrypt do uruchamiania symulacji (\Rightarrow). Wykonaj weryfikację poprawności schematu i skryptu (\Rightarrow). B.2
II.7.2
- 3° Wyznacz i zarejestruj reakcję obiektu na zmianę na każdym z wejść, w różnych punktach równowagi.
- 4° Przedstaw wyniki na wykresach, które będą ilustrować wnioski wynikające z badań.
- 5° Przedstaw charakterystyki statyczne obiektu i zaznacz obszar pracy.

9.3.2. Model liniowy – schematy z blokami równań stanu i transmitancji

Uzupełnij model obiektu badanego w poprzednim punkcie przyjmując założenie, że przepływ medium jest parametrem modelu o stałej wartości. Czy to założenie wystarczy aby model był liniowy?

- 1° Przedstaw badany model w postaci macierzowych równań stanu i w postaci transmitancji. Wykonaj dwa warianty schematu do badań modelu – z zastosowaniem bloków równań stanu oraz bloków transmitancji.
- 2° Wyznacz i zarejestruj reakcje modelu opartego na równaniach stanu, podając kolejno niewielkie zmiany na każdym z wejść, w różnych punktach równowagi. Badania wykonaj dla dwóch różnych wartości przepływu medium.
- 3° Wykonaj analogiczne badania reakcji modelu opartego na transmitancjach. Porównaj wyniki obu wariantów modelu.

10. Podstawowe człony dynamiki w dziedzinie czasu

10.1. Wprowadzenie – człony dynamiki i rzeczywiste objekty

Zarówno w badaniach teoretycznych jak i w praktyce inżynierskiej do opisu dynamiki obiektów często stosowane są podstawowe człony dynamiki (⇔). Mogą to być modele wynikające z bardzo uproszczonego opisu obiektu lub z zastosowania prostych metod identyfikacji (⇔), albo też złożone systemy skonstruowane przez połączenie podstawowych członów dynamiki (⇔). Oczywiście badania prowadzone w ten sposób są ograniczone do problemów liniowych, wobec tego w przypadku najprostszej analizy dynamiki w dziedzinie czasu wystarczy wygenerować odpowiedzi czasowe układu w jednym punkcie pracy (⇔), na przykład zerowym – tak jak to ma miejsce w przypadku zastosowania transmitancji.

10.2. Przykład – definicja i badanie układów opartych na członach

Jeśli badany model jest przedstawiony w postaci transmitancji, a zwłaszcza w postaci podstawowych członów dynamiki, to najprostszym sposobem zdefiniowania modelu i przeprowadzenia badań symulacyjnych jest wykonanie skryptu (⇔). Funkcje transmitancji można zdefiniować na dwa sposoby – określając współczynniki wielomianu licznika i mianownika (II-17) albo przez podanie odpowiednich wartości współczynnika wzmocnienia, zer licznika i biegunów mianownika (k, s_{zi}, s_{bi}):

$$x_1(s) = k \frac{(s - s_{z1}) \dots (s - s_{zm})}{(s - s_{b1}) \dots (s - s_{bn})} u_1(s) \quad (\text{II-21})$$

Dysponując modelami prostych członów można tworzyć bardziej złożone układy stosując połączenia szeregowo, równoległe, ze sprzężeniem zwrotnym, itp. Do definiowania takich modeli i wykonywania typowych metod badania własności dynamicznych przeznaczone są funkcje (Tab. II-11) z dziedziny komputerowo wspomaganego projektowania systemów sterowania (ang. Computer Aided Control System Design – CACSD)¹.

Tab. II-11. Wybrane funkcje do definiowania i badania transmitancji w dziedzinie czasu

	Matlab/Control	Scicos	Octave
definicja czlonu	tf, zp	syslin	
połączenia (układy)	operatory: +, *, \, / funkcje: series, parallel, append, feedback, ...	operatory: +, *, /.	
odpowiedzi czasowe	step, impulse	csim	

Zastosowanie funkcji CACSD pozwala zapisać cały program badań w prostych skryptach. Przykład poniżej (Tab. II-12) zawiera jedynie definicję układu inercyjnego i wygenerowanie jego odpowiedzi skokowej ale dodanie kolejnych prostych funkcji pozwala wygenerować charakterystyki częstotliwościowe układu (⇔) lub zaprojektować układ sterowania.

Tab. II-12. Przykład skryptu do badania transmitancji

Matlab	Scilab	Octave
s = tf('s'); S1 = 1/(1+2*s); step(S1);	ieee(2); s=poly(0,'s'); S1=syslin('c', 1/(2*s+1)); t=0:0.05:5; plot(t,csim('step', t, S1));	

Przedstawiony sposób prowadzenia badań symulacyjnych jest ograniczony do modeli liniowych, przedstawionych za pomocą transmitancji w postaci funkcji wymiernej, w której stopień licznika jest mniejszy (czasem mniejszy lub równy) niż stopień mianownika (⇔). Może więc pojawić się problem z badaniem idealnych członów proporcjonalnych, całkujących i różniczkujących. Rozwiązaniem jest zastosowanie tak zwanych członów rzeczywistych, czyli szeregowo połączenie czlonu idealnego z członem inercyjnym o niewielkiej stałej czasowej (niewielkiej w porównaniu do parametrów czlonu idealnego).

¹ w przypadku Matlaba funkcje CACSD są zawarte w Toolbox Control

10.3. Zadania – definicje i odpowiedzi czasowe modeli

10.3.1. Modele obiektów

Przedmiotem proponowanych badań są transmitancje złożone z podstawowych członów dynamiki. Natomiast celem badań jest określenie wpływu poszczególnych parametrów modelu na odpowiedź czasową.

1° Wykonaj skrypt, który generuje odpowiedzi skokowe dla wskazanych obiektów:

1) $\frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$	2) $\frac{K}{T_i s(T_2s+1)}$	3) $\frac{T_d s}{(T_2s+1)}$
a) $T_2 = 0$	a) $T_2 = 0$ (całk.idealny)	a) $T_2 = 0$ (różn.idealny)
b) $T_2 = T_1 / 10$	b) $T_2 = T_i / 100$ (całk.rzeczywisty)	b) $T_2 = T_d / 100$ (różn.rzeczywisty)
c) $T_2 = T_1 / 2$	c) $T_2 = T_i / 10$	c) $T_2 = T_d / 10$
d) $T_2 \approx T_1$	d) $T_2 \approx T_i$	d) $T_2 \approx T_d$
	e) $T_2 = 10T_i$	e) $T_2 = 10T_d$

W zależności od przyjętych wartości parametrów badane transmitancje odpowiadają obiektom (członom) podstawowym lub złożonym, idealnym lub rzeczywistym.

Uwagi do wykonania:

- Uwzględnij ograniczenia jakie stosowany program symulacyjny nakłada na postać transmitancji definiowanych za pomocą funkcji. Jeśli nie można zdefiniować członu idealnego, zastosuj człon rzeczywisty.
- Dobierz wartości parametrów, pamiętając że w badaniach symulacyjnych zwykle ważniejsze są relacje pomiędzy wartościami niż konkretne wartości. W podpunktach a÷e przedstawiono propozycje zestawu parametrów dla poszczególnych modeli, który obejmuje przypadki gdy wartości stałych czasowych są porównywalne albo jedna stała czasowa jest znacznie większa niż druga.

2° Załóż, że wykresy odpowiedzi skokowych uzyskane symulacyjnie dla modelu inercyjnego powstały w wyniku eksperymentu na rzeczywistym obiekcie o nieznannej transmitancji – dokładny model pełni rolę wirtualnego obiektu. Na podstawie wykresów wykonaj identyfikację parametrów modelu Kupfmüllera (⇒). 1.7.3

Uwagi do wykonania:

- Wykonaj identyfikację odręcznie (ocień położenie punktu przegięcia, narysuj styczną, odczytaj parametry). Zaproponuj sposób zautomatyzowania algorytmu.
- Porównaj odpowiedzi czasowe modelu dokładnego i przybliżonego.

3° Wskaż dowolne obiekty fizyczne o modelach odpowiadających badanym przypadkom transmitancji. Jak można zinterpretować iloczyn transmitancji?

10.3.2. Modele regulatorów

Podstawowe człony dynamiki są wykorzystywane nie tylko do opisu obiektów technologicznych, są również składnikami urządzeń sterujących, a w szczególności regulatorów ciągłych typu PID (⇒). 1.7.3

1° Zdefiniuj w skrypcie modele podstawowych regulatorów:

1) PI $K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$	2) PD $K_p (1 + T_d s)$	3) PID $K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$
---	----------------------------	--

Wygeneruj odpowiedzi skokowe dla różnych nastaw regulatora, czyli wartości wzmocnienia K_p , czasu całkowania T_i , czasu różniczkowania T_d .

2° Jak poszczególne składniki transmitancji wpływają na reakcję regulatora?

11. Podstawowe człony dynamiki w dziedzinie częstotliwości

11.1. Wprowadzenie

- 1.8.2 Charakterystyki przedstawiające dynamikę obiektów w dziedzinie częstotliwości (\Rightarrow) nie są tak naturalnym sposobem prezentacji własności dynamicznych jak odpowiedzi czasowe ale są bardziej precyzyjne. Szczególnie użyteczne są logarytmiczne charakterystyki modułu i fazy, które można przybliżyć prostymi asymptotami (\Rightarrow) umożliwiającymi odrębną analizę czy projektowanie własności układów.
- 1.8.3

11.2. Przykłady – generowanie charakterystyk częstotliwościowych

- 1.8.2 Eksperymentalne wyznaczanie charakterystyk częstotliwościowych obiektów fizycznych jest dość pracochłonne (\Rightarrow) i nie zawsze możliwe do zrealizowania w praktyce, ponieważ wymaga generowania sinusoidalnego sygnału wejściowego o różnych częstotliwościach. Natomiast wygenerowanie charakterystyk w badaniach symulacyjnych jest łatwe dzięki funkcjom jakie oferują programy symulacyjne w ramach narzędzi CACSD (Tab. II-13).

Tab. II-13. Wybrane funkcje do badania transmitancji w dziedzinie częstotliwości

	Matlab/Control	Scicos	Octave
ch.Nyquista	nyquist	nyquist	
ch.Bodego	bode	bode	

Charakterystyki mogą być generowane w różnych zakresach pulsacji (lub częstotliwości).

11.3. Zadania – dokładne i asymptotyczne charakterystyki Bodego

11.3.1. Wyznaczenie charakterystyk Bodego na podstawie transmitancji

Celem pierwszej części badań jest wyznaczenie charakterystyk Bodego symulacyjnie za pomocą funkcji symulacyjnie oraz odręcznie na podstawie asymptot. Badaniom zostaną poddane obiekty, które zostały zdefiniowane w punkcie II.10.3, co pozwoli porównać możliwości analizy własności na podstawie charakterystyk czasowych i częstotliwościowych.

1° Wykonaj skrypt, który generuje charakterystyki Bodego dla badanych obiektów na oddzielnych wykresach. Na podstawie transmitancji narysuj wykresy asymptotyczne badanych obiektów (na tych samych wykresach). Wyznacz maksymalne różnice pomiędzy wykresami dokładnymi i przybliżonymi.

Uwagi do wykonania:

- Uwzględnij ograniczenia jakie stosowany program symulacyjny nakłada na postać definiowanych transmitancji.
- Zwróć uwagę na jednostkę na osi wykresu funkcji bode() - ω czy f ?
- W razie potrzeby dobierz zakres częstotliwości dla których program symulacyjny generuje charakterystyki częstotliwościowe.

2° Wykonaj skrypt, który pozwoli porównać wykresy Bodego i Nyquista, tak aby ocenić wpływ wartości poszczególnych parametrów na postać wykresu. Czy na podstawie wykresów Bodego i Nyquista można ocenić typ i rząd transmitancji?

11.3.2. Identyfikacja transmitancji na podstawie charakterystyk Bodego

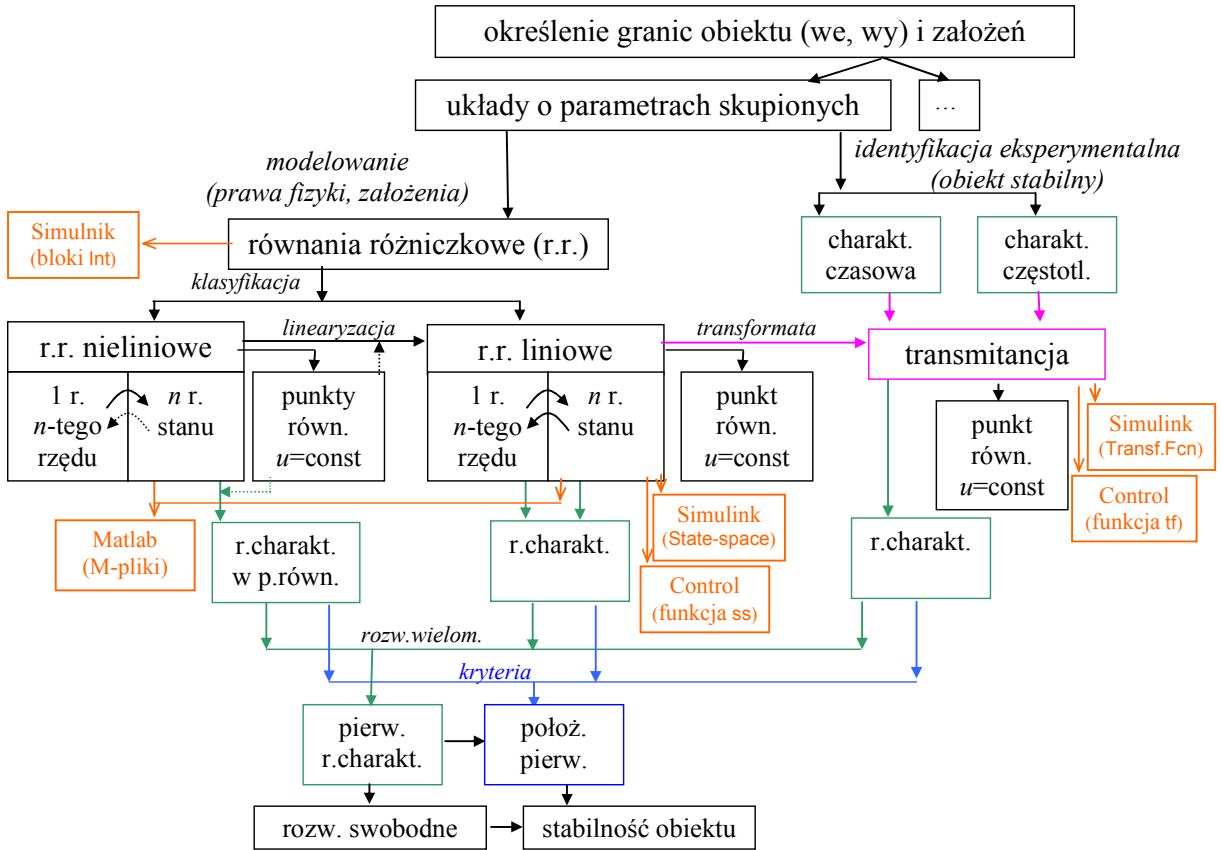
Druga część badań polega jest odwróceniem problemu z poprzedniego punktu. Założymy, że wykresy częstotliwościowe badanych obiektów (II.10.3) powstały w wyniku eksperymentu i celem badań jest identyfikacja nieznanymi transmitancji.

1° Wygeneruj charakterystyki Bodego dla badanych obiektów na oddzielnych wykresach. Na podstawie wykresów wyznacz asymptoty – krzywą łamaną o nachyleniach, które są wielokrotnościami $\pm 20\text{dB/dek}$. Odczytaj wartości charakterystycznych punktów i porównaj z wartościami oryginalnej transmitancji.

Dodatki

A. Zestawienie podstawowych metod badania dynamiki obiektów

Model dynamiki obiektu można uzyskać przez modelowanie na podstawie praw fizyki lub na drodze eksperymentu identyfikacyjnego. Różne sposoby konstrukcji modelu prowadzą do różnych form matematycznych, ale istnieje również wiele metod przekształcania poszczególnych form w inne (Rys. A-1).



Rys. A-1. Formy i przekształcenia opisu dynamiki obiektów

Na schemacie zaznaczono jedynie najczęściej stosowane przekształcenia w szczególności te opisane w opracowaniu:

- przekształcenie (liniowego/nieliniowego) równania n -tego rzędu w układ równań pierwszego rzędu (\Leftrightarrow), I.5.2
- przekształcenie równania/układu równań liniowych do transmitancji (\Leftrightarrow), I.6.2
- linearyzacja równania/układu równań nieliniowych (\Leftrightarrow). I.9.2

Własności dynamiki obiektu nie zależą od formy modelu. Model może jednak ograniczać zakres badań, na przykład zastosowanie liniowego modelu do nieliniowego obiektu (\Leftrightarrow), czy zastosowanie transmitancji determinujący zerowe warunki początkowe (\Leftrightarrow). I.9.2
I.6.1

Różne formy modeli są związane z różnymi metodami analizy własności obiektu, na przykład sposobem wyznaczania równania charakterystycznego czy punktu równowagi. Możliwe są też różne sposoby definiowania modeli w programach symulacyjnych:

- schematy równań różniczkowych (liniowych/nieliniowych) konstruowane na bazie bloków całkujących, np. Matlab/Simulink: bloki Int (\Leftrightarrow), II.4.2
- układy równań stanu (liniowe/nieliniowe) definiowane w plikach funkcyjnych, np. Matlab: M-pliki (\Leftrightarrow) II.8.2.3
- układy równań stanu w postaci macierzowej (liniowe) wprowadzane przez specjalizowane bloki lub funkcje, np. Matlab/Simulink: bloki State-space, Matlab/Control: funkcje ss (\Leftrightarrow), II.8.2
- transmitancje wprowadzane przez specjalizowane bloki lub funkcje - Matlab/Simulink: bloki Transfer Fcn, Matlab/Control: funkcje tf oraz zpk (\Leftrightarrow). II.8.2

B. Procedura konstrukcji i weryfikacji modelu symulacyjnego

Cel badań: Podstawowa analiza czasowa układu dynamicznego.

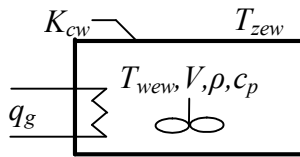
Model: Równania różniczkowe zwyczajne liniowe lub nieliniowe. Stabilność modelu nie jest zbadana (to wykażą badania). Można jednak określić punkt równowagi przy stałych wymuszeniach (nie ma członów/własności całkujących).

Badania: Wyznaczenie reakcji obiektu na skokowe zakłócenia wartości na wybranych wejściach, w różnych punktach pracy. Symulacja ma być uruchamiana od dowolnego stanu ustalonego (punktu równowagi).

B.1. Przykład realizacji analizy czasowej obiektu (liniowego/nieliniowego)

1° Opis i model obiektu oraz podstawowa analiza

Przedmiotem badań jest pomieszczenie z grzejnikiem elektrycznym o mocy q_e . Znane są następujące wartości nominalne (obliczeniowe): $q_{eN}=5\text{kW}$, $T_{zewN}=-20^\circ\text{C}$, $T_{wewN}=20^\circ\text{C}$. Opis dynamiki obiektu uwzględnia jedynie pojemność cieplną C_{vw} pomieszczenia (powietrza) o wymiarach $5 \times 5 \times 3\text{m}$.



$$C_{vw} \dot{T}_{wew}(t) = q_g(t) - K_{cw}(T_{wew}(t) - T_{zew}(t))$$

gdzie $C_{vw} = c_p \rho V$

Stan ustalony:

$$0 = q_g(t) - K_{cw}(T_{wew}(t) - T_{zew}(t))$$

Identyfikacja:

$$K_{cw} = q_{gN} / (T_{wewN} - T_{zewN})$$

Punkt równowagi:

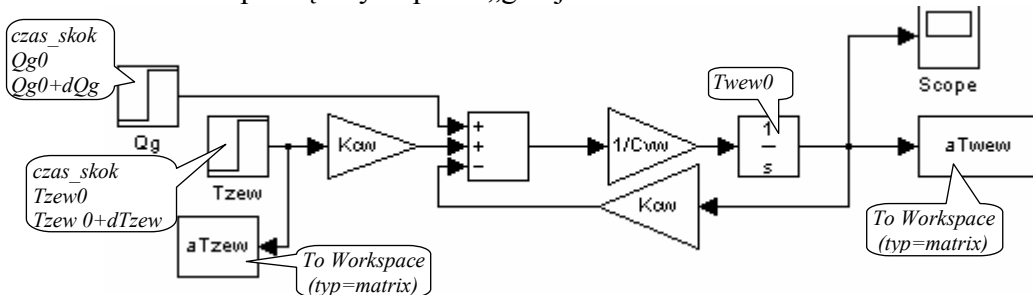
$$T_{wew0} = q_{g0} / K_{cw} + T_{zew0}$$

Klasyfikacja: model 1. rzędu, liniowy, 2 wejścia (q_e , T_{zew}), 1 zmienna stanu (T_{wew})

Typ: człon inercyjny

2° Aplikacja w programie Matlab/Simulink

a) Schemat modelu zapamiętany w pliku „grzejnik.mdl”



Rys. A-2. Schemat modelu Simulink z komentarzami

b) Skrypt inicjujący zmienne i uruchamiający symulację („grzejnik_badania.m”)

```

%=====
%wartości nominalne
QgN=5000;           %nominalna moc (5kW)
TzewN=-20;         %nominalna temperatura na zewnątrz (-20C)
TwewN=20;          %nominalna temperatura wewnątrz (-20C)

%identyfikacja parametrów statycznych
Kcw = Qgn / (Twewn-Tzewn);

%parametry "dynamiczne"
cpp=1000;           %J/kg K, powietrze
rop=1.2;            %kg/m3, powietrze
Vwew=5*5*3;        %m3
Cvw=cpp*rop*Vwew;

%=====
%warunki początkowe
Twew0= Twewn+0;    %+1 (planowane przesunięcie punktu pracy)
Qg0 = Qgn*1.0;     %*.8 (planowane przesunięcie punktu pracy)

%stan równowagi
Twew0 = Qg0/Kcw+Tzew0;
    
```

```

%=====
%zakłócenia
czas_skok=100;           %przesunięcie skoku w czasie
dTzew=1;
dQg=0;

%=====
%parametry symulacji
model='grzejnik';
czas=3000;               %czas symulacji (użyty: sim)
tmax=1;                  %maksymalny krok obliczeń (opcja)
terr=1e-5;              %błąd obliczeniowy (opcja)
opcje = simget(model); % (opcja)
opcje = simset('MaxStep', tmax, 'RelTol',terr); % (opcja)

%symulacja (reakcja na wybrane zakłócenie)
[t]=sim(model, czas, opcje);
figure, hold on, grid on, title('Twew(t), Tzew(t)');
plot(t,aTwew,'g');
plot(t,aTzew,'r');
    
```

Program badań można rozwinąć, na przykład wygenerować reakcje układu na taki sam skok temperatury zewnętrznej ale od różnych wartości początkowych

```

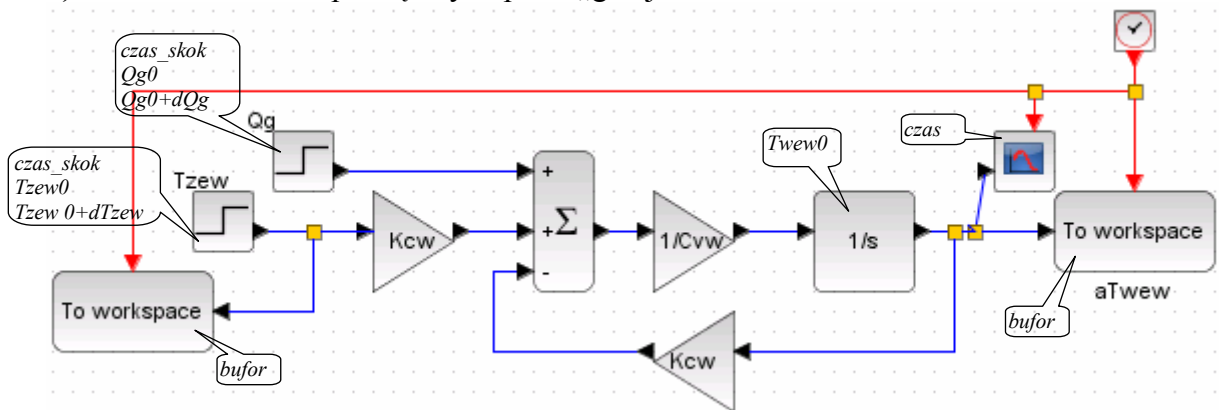
%symulacja (reakcja na wybrane zakłócenie od różnych punktów pracy)
kolor='grb'; maxkolor = size(kolor,2);
tab_Tzew0= [Tzewn+0, Tzewn+1, Tzewn+2]; %planowane punkty pracy
maxtab = size(tab_Tzew0,2); %ilość symulacji
figure, hold on, grid on, title('Twew(t) dla roznych Tzew');

for i=1:maxtab
    Tzew0= tab_Tzew0(i); %wartość na wejściu
    Twew0 = Qg0/Kcw+Tzew0; %obliczenie nowego punktu pracy
    [t]=sim(model, czas, opcje);
    plot(t, aTwew, kolor(mod(i-1, maxkolor)+1));
end
    
```

Uwaga: 1) Ilość wykresów zależy od zawartości wektora tab_Tzew0 (zastosowanie zmiennych maxkolor i maxtab zapewnia automatyczne dostosowanie parametrów pętli). 2) Ponieważ wszystkie wykresy są rysowane w jednym oknie, nie ma potrzeby przełączania okien. Jeśli pętli w pętli mają być obsługiwane różne okna, to podczas tworzenia okien należy zapamiętać uchwyty: h1=figure. Natomiast przed rysowaniem ustawić aktywne okno: figure(h1).

3° Aplikacja w programie Scilab/Xcos

a) Schemat modelu zapamiętany w pliku „grzejnik.xcos”



Rys. A-3. Schemat modelu Xcos z komentarzami

b) Skrypt inicjujący zmienne i uruchamiający symulację („grzejnik_badania.sce”):

```

//=====
//wartości nominalne
Qgn=5000; //nominalna moc (5kw)
Tzewn=-20; //nominalna temperatura na zewnątrz (-20C)
Twewn=20; //nominalna temperatura wewnątrz (20C)

//identyfikacja parametrów statycznych
Kcw=Qgn/(Twewn-Tzewn);

//parametry "dynamiczne"
cpp=1000; //J/kg K, powietrze
rop=1.2; //kg/m3, powietrze
Vwew=5*5*3; //m3
Cwv=cpp*rop*Vwew;
    
```

```
//=====
//warunki początkowe
Tzew0=Tzewn+0; //+1 (planowane przesunięcie punktu pracy)
Qg0=Qgn*1.0; //*.8 (planowane przesunięcie punktu pracy)

//stan równowagi
Twew0=Qg0/Kcw+Tzew0;

//=====
//zakłócenia
czas_skok=10; //przesunięcie skoku w czasie
dTzew=1;
dQg=0;

//=====
//parametry symulacji
model='grzejnik.xcos'; //nazwa z rozszerzeniem .xcos
czas=3000; //czas symulacji (użyty: scs_m.props, blok CSCCOPE)
loadXcosLibs(); //wczytaj biblioteki
importXcosDiagram(model);
scs_m.props.tf=czas; //czas trwania symulacji
Info=list(); //zmienna dla scicos_simulate
bufor=1000000; //wielkość bufora danych bloku To_workspace

//symulacja
Info=scicos_simulate(scs_m, Info);
figure; set(gca(), 'auto_clear', 'off'); xgrid(); title('Twew, Tzew');
set(gcf(), 'background', color(255,255,255));
plot(aTwew.time, aTwew.values, 'green');
plot(aTwew.time, aTzew.values, 'red');
```

Uwaga: Podczas wykonywania symulacji automatycznie zostanie otwarte okno bloku CSCCOPE, w którym na bieżąco będą rysowane wykresy. Okno nie ma autoskalowania – brak wykresu w oknie oznacza najprawdopodobniej niedopasowanie skali. Rezygnacja z bloków CSCCOPE na schemacie przyspiesza symulacje.

Program badań można rozwinąć, na przykład wygenerować reakcje układu na taki sam skok temperatury zewnętrznej ale od różnych wartości początkowych

```
//symulacja (reakcja na wybrane zakłócenie od różnych punktów pracy)
kolor=['green','red','blue']; maxkolor=size(kolor,2);
tab_Tzew0= [Tzewn+0, Tzewn+1, Tzewn+2,, Tzewn+3]; //planowane punkty pracy
maxtab = size(tab_Tzew0,2);
fig=figure(); set(gca(), 'auto_clear', 'off'); xgrid(); title('Twew(t) dla roznych Tzew');
set(gcf(), 'background', color(255,255,255));

for i = 1:maxtab do
    Tzew0= tab_Tzew0(i); //wartość na wejściu
    Twew0 = Qg0/Kcw+Tzew0; //obliczenie nowego punktu pracy
    Info=scicos_simulate(scs_m, Info); //symulacja
    figure(fig); plot(aTwew.time, aTwew.values, kolor(modulo(i-1, maxkolor)+1));
end
```

Uwaga: 1) Okno do zbierania wykresów jest przygotowane przed symulacją a w trakcie symulacji jest otwierane okno bloku CSCCOPE, więc przed funkcją plot należy przełączyć aktywne okno. To wymaga zapamiętania wskaźnika tworzonego okna: fig=figure(), by go wykorzystać do przełączenia: figure(fig). 2) Ilość wykresów zależy od zawartości wektora tab_Tzew0 (zastosowanie zmiennych maxkolor i maxtab zapewnia automatyczne dostosowanie parametrów pętli).

B.2. Ogólny algorytm postępowania

Algorytm opisuje ogólny sposób wykonywania schematu i skryptu złożonych modeli, który ułatwia zidentyfikowanie błędów jakie mogą się zdarzyć podczas edycji. Ostatnim punktem algorytmu jest realizacja założonego programu badań.

1° Określenie zmiennych wejściowych (U) i wyjściowych (X) modelu

2° Identyfikacja wartości współczynników (**I część** w pliku skryptu)

- Z modelu statycznego na podstawie podanych wartości nominalnych i dodatkowych założeń wyprowadzić wzory do obliczania współczynników modelu.
- Zainicjować w skrypcie zmienne wejściowe i wyjściowe, nominalne (tzn. zmienne wejściowe U_N i wyjściowe X_N , pod które podstawia się podane wartości nominalne).
- Wpisać w skrypcie wzory na współczynniki (K), wykorzystując zmienne nominalne.
- Zainicjować pozostałe zmienne (np. parametry opisujące dynamikę obiektu).

- 3° Ustalenie warunków początkowych (**II część** w pliku skryptu)
 - a) Zainicjować w skrypcie zmienne wejściowe, początkowe (U_0) i nadać im wartości nominalne ($U_0 = U_N$)
 - b) Zainicjować w skrypcie zmienne wyjściowe, początkowe (X_0) i nadać im wartości nominalne ($X_0 = X_N$)

- 4° Zdefiniowanie zakłóceń (**III część** w pliku skryptu)
 - a) Zainicjować w skrypcie zmienne opisujące zakłócenia na wejściach, o zerowych wartościach ($dU_0 = 0$)

- 5° Aplikacja modelu w oknie Simulink lub Xcos
 - a) Narysować schemat (jako parametry bloków podstawiać zmienne zdefiniowane w skrypcie¹ (⇒)). II.5.2
 - b) W „końcowych” blokach całkujących podstawić jako warunki początkowe odpowiednie zmienne X_0 (wartości początkowe pozostałych bloków całkujących pozostają na domyślnej wartości 0).
 - c) Jako źródła wejściowe zastosować bloki skoku, w których jako wartości początkowe zostaną podstawione odpowiednie zmienne U_0 , a jako wartości końcowe – wyrażenia $U_0 + dU_0$. Warto wprowadzić zmienną określającą czas wystąpienia skoku, an przykład zmienną *czas_skok* wspólną dla wszystkich bloków skoku, o wartości definiowanej w skrypcie. (⇒) II.5.2
 - d) Uruchomić symulację przy zerowych zakłóceniach ($dU_0 = 0$), tzn. że układ jest w stanie równowagi – jeśli model jest poprawny to na wyjściach występują stałe wartości, równe wartościom nominalnym (jeśli nie, to jest błąd - prawdopodobnie na schemacie). (⇒) II.7.2

- 6° Ustalenie warunków początkowych w dowolnym punkcie równowagi
 - a) Z modelu statycznego na podstawie obliczonych współczynników i założonych wartości początkowych zmiennych wejściowych (U_0) wyprowadzić wzory na zmienne wyjściowe (X_0) w stanie ustalonym.
 - b) Wprowadzić wzory na zmienne wyjściowe (X_0) do skryptu (w II części skryptu podmienić podstawienia $X_0 = X_N$ na wzory).
 - c) Sprawdzić poprawność wzorów i skryptu – jeśli zmienne wejściowe mają wartości nominalne ($U_0 = U_N$), to obliczenie zmiennych wyjściowych ze wzorów też powinno dawać wartości nominalne ($X_0 = X_N$) (jeśli nie, to jest błąd w wyprowadzeniu wzoru lub w skrypcie). (⇒) II.7.2

- 7° Uruchomienie symulacji od dowolnego punktu równowagi
 - a) Ustawić w skrypcie wartości początkowe zmiennych wejściowych (np. względem wartości nominalnych: $U_0 = U_N * 0.5$, czyli 50% wartości nominalnej; lub $U_0 = U_N - 1$, czyli o 1 mniej niż wartość nominalna).
 - b) Uruchomić skrypt i symulację – ponieważ wartości wejściowe są stałe (brak zakłóceń), to na wyjściach też powinny być stałe wartości (jeśli nie, to jest błąd na schemacie lub w skrypcie)

- 8° Realizacja programu badań – wyznaczenie reakcji na skokową zmianę wartości wybranych wielkości wejściowych w kilku punktach równowagi
 - a) Ustawić w skrypcie wartość zakłócenia na wybranym wejściu, podając wprost wartość (np. $dU_0 = 1$) lub względem wartości nominalnych (np. $dU_0 = U_N * 0.1$, czyli 10% wartości nominalnej)

¹ W przypadku Scilab/Xcos na schemacie można używać zmiennych, które zostały wcześniej zdefiniowane

C. Zadania i pytania

Poniższe zadania i pytania mają przekrojowy charakter i zakładają znajomość materiału zawartego w I i II części opracowania. Zadania analityczne polegają na rozwiązaniu problemu różnymi metodami, co pozwala zweryfikować poprawność otrzymanych wyników.

C.1. Definicje, własności, parametry

- 1° Opisz na czym polega i podaj przykład obiektu o następującej własności:
 - a) stabilność; b) samowyrównywanie; c) oscylacyjność; d) unilateralność.
- 2° Na czym polegają i czym się różnią (jeśli się różnią):
 - a) inercja i opóźnienie; b) rozwiązanie aperiodyczne i oscylacyjne; c) granica stabilności i zapas stabilności; d) punkt równowagi, stan równowagi, punkt pracy; e) układ stabilny globalnie i lokalnie; f) stan ustalony i nieustalony; g) składowa swobodna i wymuszona; h) odpowiedź skokowa i reakcja na wymuszenie skokowe; i) równania stanu i równania wyjściowe.
- 3° Opisz człony dynamiki (definicja, parametry, własności, przykłady obiektów):
 - a) człon inercyjny pierwszego rzędu i człon inercyjny drugiego rzędu,
 - b) równanie i człon oscylacyjny,
 - c) idealny i rzeczywisty człon różniczkujący,
 - d) człon opóźniający.
- 4° Podaj definicje następujących parametrów i relacje pomiędzy nimi:
 - a) bieguny i zera układu, pierwiastki równania charakterystycznego, rząd układu,
 - b) stała czasowa, inercja, rząd inercji,
 - c) wzmocnienie, tłumienie (współczynnik tłumienia), pulsacja własna.
- 5° Opisz własności rozwiązania linowego równania różniczkowego:
 - a) Jakie równania różniczkowe można rozwiązać klasyczną metodą rozwiązywania r.r.?
 - b) Opisz klasyczną metodę rozwiązywania równań różniczkowych.
 - c) Jaki wpływ na stabilność układu ma
 - krotność pierwiastka równania charakterystycznego? Uzasadnij
 - funkcja wymuszająca $u(t)$? Uzasadnij
 - d) Podaj warunek kiedy układ jest stabilny i w jego reakcjach nie ma oscylacji?
 - e) Kiedy w reakcji układu na zakłócenie skokowe nie wystąpią drgania?
 - f) Podaj interpretację biegunów układu opisywanego równaniem różniczkowym.
 - g) Na czym polega zasada superpozycji i kiedy może być stosowana?
- 6° Opisz własności trajektorii:
 - a) Co przedstawia kierunek trajektorii (co oznacza)?
 - b) Gdzie na płaszczyźnie (\dot{x} , x) leżą punkty równowagi?
 - c) Ile punktów równowagi może mieć układ liniowy?
 - d) Czy układ niestabilny ma punkt równowagi?
 - e) Co oznacza stabilność globalna układu? Czy występuje w układach nieliniowych?
 - f) W jakich układach występuje (może wystąpić) portret typu siodło?
 - g) Na jakiej podstawie portrety fazowe pozwalają wnioskować o stabilności układu?
 - h) Jakie typy portretów fazowych mogą wystąpić w układach liniowych drugiego rzędu?
- 7° Scharakteryzuj wybrane własności modeli dynamiki:
 - a) Czy jeden punkt równowagi świadczy o liniowości układu?
 - b) Jak wyznaczyć punkt równowagi dla nieliniowego równania różniczkowego?
 - c) Jaki wpływ na stabilność układu mają jego zera i bieguny?
 - d) Czy układy nieliniowe też „mają” zera i bieguny?
 - e) Podaj trzy formy modelu, na podstawie których można wyznaczyć równanie charakterystyczne. A jak na podstawie tych form wyznaczyć punkt równowagi?
 - f) Ile transmitancji można wyznaczyć w układzie typu MIMO? Które wybrać do badań?

C.2. Zadania analityczne

1° Klasyfikacja, formy i przekształcenia. Dla podanych równań:

a) $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + bx(t) = u(t) + \dot{u}(t)$

e) $\ddot{x}u + \dot{x} + x^2 = 2u$

b) $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + b\sqrt{x(t)} = u(t)$

f) $3\ddot{x} + \dot{x}x + xu = 2u$

c) $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t)x(t) = u(t)$

g) $a\ddot{x} + 2\dot{x} + 4ax = -2u$

d) $a\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + bx(t) = 2u(t)$

h) $a\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = u$

i) $-\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = u$

- określ rząd, liniowość, stacjonarność;
- napisz równanie statyczne i charakterystyczne;
- wyznacz pierwiastki równania charakterystycznego;
- napisz w postaci transmitancji i wyznacz bieguny układu;
- napisz w postaci równań stanu i wyznacz wartości własne macierzy stanu;
- zaproponuj sposób sprawdzenia wykonanych przekształceń,
- opisz jak wyznaczyć rozwiązanie równania – analitycznie / symulacyjnie.

2° Analiza własności.

a) $10\ddot{x}(t) + 7\dot{x}(t) + x(t) = 2u(t)$

c) $c\ddot{x}(t) + 6\dot{x}(t) + u_2(t)x(t) = 2u_1(t)$

b) $12\ddot{x}(t) + 7\dot{x}(t) + x(t) = 2u(t)$

d) $4\ddot{x}(t) + 12\dot{x}(t) + 6\dot{x}(t) + ax(t) = u(t)$

- Naszkicuj reakcję obiektu na wymuszenie skokowe od wartości 0 do wartości k (oznacz wartości punktów równowagi, przedstaw charakter odpowiedzi).
- Jaki jest stan ustalony i czy układ osiągnie ten stan?
- Jeśli można ten układ przedstawić w postaci członu oscylacyjnego to podaj tłumienie ζ .
- Przedstaw model w postaci równań stanu. Podaj macierz stanu.

3° Projektowanie układów. Dobierz wartość parametru a w modelu:

a) $\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + 4x(t) = u$

d) $a\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 4ax(t) = -2u$

b) $a\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 4x(t) = u$

e) $a\ddot{x}(t) - 2a\dot{x}(t) + 4x(t) = u$

c) $a\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) + 4x(t) = u$

f) $-\ddot{x}(t) - 2a\dot{x}(t) + 4x(t) = u$

- aby układ był stabilny i nie wykazywał oscylacji (na 2 sposoby - licząc Δ lub ζ);
- aby w odpowiedzi impulsowej nie występowały oscylacje (na 2 sposoby - licząc Δ lub ζ);
- aby tłumienie ζ było dodatnie (jakie własności zapewni równaniom ten warunek?);
- aby bieguny układu były leżały w ujemnej półpłaszczyźnie;
- aby układ miał dwa bieguny zespolone (jakie są konsekwencje tej własności?).

4° Model spełniający założenia. Zapisz w postaci transmitancji i w postaci równania różniczkowego model, który spełnia następujące założenia:

a) człon oscylacyjny o współczynniku tłumienia 0.1;

b) człon inercyjny o stałej czasowej 10s, który przy wymuszeniu o wartości 2 osiąga stan ustalony o wartości 2;

c) obiekt z biegunem w punkcie -2, który przy wymuszeniu $1(t)$ osiąga wartość 2.

Opisz stabilność, oscylacje, punkt równowagi i jednoznaczność zaproponowanego modelu.

5° Podstawowe człony. Dla podanych transmitancji:

a) $G(s) = \frac{a}{3s^3 + 3s^2 + 6s}$

c) $G(s) = \frac{a}{(s+4)(6s+1)}$

b) $G(s) = \frac{as}{3s^2 + as + 3}$

d) $G(s) = \frac{k(s+1)}{(s+5)^2(s+0.25)}$

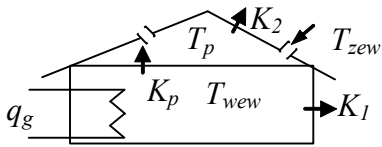
- określ warunki stabilności modelu;
- rozłóż na podstawowe człony dynamiki (iloczyn członów) i podaj ich parametry;
- określ kiedy w odpowiedzi układu pojawią się drgania;
- zaproponuj uproszczenie modelu (o ile to możliwe);
- naszkicuj charakterystyki częstotliwościowe Bodego.

6° Układ wielowymiarowy. Wykorzystaj różne metody badania przedstawionych modeli:

$$\text{a) } \begin{cases} 2\dot{x}_2(t) - 2x_1(t) + cx_2(t) = 2u_1(t) \\ m\dot{x}_1(t) + cx_1(t) = u_1(t) + u_2(t) \end{cases}
 \qquad
 \text{b) } \begin{cases} m\dot{x}_2(t) + 2x_1(t) - cx_2(t) = u_1(t) \\ 2\dot{x}_1(t) + cx_1(t) = u_1(t) + 2u_2(t) \end{cases}$$

- Przedstaw równania statyczne i wyznacz punkt równowagi.
- Przedstaw równania stanu modelu. Wyznacz równanie charakterystyczne. Przedstaw model przyjmując odwrotną kolejność zmiennych w wektorze stanu i powtórz wyznaczenie równania charakterystycznego.
- Wyznacz transmitancje układu. Porównaj je ze sobą. Na podstawie transmitancji wyznacz równanie charakterystyczne oraz wzór na punkt równowagi przy stałych wymuszeniach – porównaj z wynikami uzyskanymi na podstawie równań stanu.
- Co można powiedzieć na temat zachowania stabilności układów, jeśli wiemy, że parametry modeli (m, c) są dodatnie

7° Konstrukcja i analiza modelu obiektu. Skonstruuj model budynku z ogrzewaniem elektrycznym i przepływem powietrza przez poddasze. Wykonaj badania analityczne:



- wyznacz równania charakterystyk statycznych obiektu;
- wyznacz równanie charakterystyczne;
- wyznacz transmitancje dla T_{zew} i T_p ;
- udowodnij, że w rzeczywistych warunkach temperatura T_{zew} zawsze osiągnie stan równowagi.

Przedstaw sposoby symulacyjnego badania modelu. Wykonaj aplikacje modelu w programie symulacyjnym, wykorzystując różne możliwości programu.

Zaproponuj sposób wyznaczenia wartości parametrów modelu dla rzeczywistego obiektu, zakładając że istnieje możliwość wykonania pomiarów wartości zmiennych. Wiadomo także że w warunkach obliczeniowych ($T_{zew} = -20^\circ\text{C}$) 10 % ciepła jest tracone z powodu niedoskonałej izolacji i przepływu powietrza przez poddasze.

8° Analogie. Dla modelu 7° zaproponuj analogiczny układ hydrauliczny, elektryczny, mechaniczny.

Wybrane pozycje z literatury

1. Amborski K., Marusak A., *Teoria sterowania w ćwiczeniach*, WNT, Warszawa 1978
 2. Close C.C., Frederick D.K., Newell J.C., *Modeling and analysis of dynamic systems*, John Wiley & Sons, 2002
 3. Czemplik A., *Modele dynamiki układów fizycznych dla inżynierów*, WNT, Warszawa 2008
 4. Findeisen W., *Technika regulacji automatycznej*, PWN, Warszawa 1978
 5. Franklin G.F. i in., *Feedback control of dynamic systems*, Pearson, 2010
 6. Halawa J., *Symulacja i komputerowe projektowanie dynamiki układów sterowania*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2007
 7. Kaczorek T., *Teoria układów regulacji automatycznej*, WNT, Warszawa 1974
 8. Kurman K.J., *Teoria regulacji*, WNT, Warszawa 1975
 9. Osowski S., *Modelowanie i symulacja układów i procesów dynamicznych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2007
 10. Żuchowski A., *Uproszczone modele dynamiki*. Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Szczecińskiej, Szczecin 1998
 11. Encyklopedia techniki – Automatyka, Poradnik automatyka, ... i inne
- Pozycje z lat siedemdziesiątych można zastąpić nowszymi opracowaniami ale podane pozycje to klasyka dziedziny.

Podpowiedzi do pytań i zadań

Podpowiedzi mają na celu jedynie naprowadzić na sposób rozwiązania lub zasugerować możliwość sprawdzenia poprawności końcowego wyniku.

- *¹ Układ jest stabilny jeśli ..., np. wszystkie bieguny leżą lewej półpłaszczyźnie zespolonej
- *² Jeśli wszystkie bieguny leżą w lewej półpłaszczyźnie, to składowa od biegunu leżącego najbliżej osi. Chyba że układ ma jakiś dodatni biegun. Wyjaśnij.
- *³ Składowej od biegunów położonych najbardziej na lewo. Wyjaśnij.
- *⁴ Można narysować jedynie przykładowe składowe od wybranych warunków początkowych
- *⁵ Odpowiedź skokowa – rozwiązanie ogólne dla $u(t)=1(t)$, czyli $u(t>0)=1$. Odpowiedź impulsowa – rozwiązanie ogólne dla $u(t)=\delta(t)$, czyli $u(t>0)=0$.
- *⁶ Uwaga na równania nieliniowe – nie ma równania charakterystycznego (dlaczego?)
- *⁷ Uwaga na równania nieliniowe – nie ma biegunów (dlaczego?)
- *⁸ Z równania statycznego wyznacz a_0 tak by dla $u=1$ stan ustalony wynosił 10. Następnie dobierz a_1 tak by układ był stabilny.
- *⁹ Układy mogą mieć takie same bieguny ale różne charakterystyki statyczne
- *¹⁰ Wykorzystaj np. kryterium Routha
- *¹¹ Rozwiąż równanie oscylacyjne metodą klasyczną dla wymuszenia $1(t)$ lub $\delta(t)$, czyli przyjmując na wejściu stałą wartość odpowiednio 1 lub 0.
- *¹² Pochodna odpowiedzi skokowej = odpowiedzi impulsowej.
- *¹³ Należy zwrócić uwagę na to, że na osi x wartość pochodnej x wynosi 0, a zerowa pochodna funkcji oznacza maksymalną lub minimalną funkcji.
- *¹⁴ Zmienia się punkt równowagi, więc jak zmieni się portret (gdzie jest punkt równowagi)?
- *¹⁵ Uwaga 1: Przy dwóch zmiennych wejściowych charakterystyki statyczne można przedstawić na wykresach trójwymiarowych, np.: $x_1(u_1, u_2)$, lub jako rodzinę wykresów dwuwymiarowy parametryzowanych względem jednej ze zmiennych, np. $x_1(u_1)$ dla $u_2=\text{const}$.
Uwaga 2: Dwie zmienne wyjściowe nie oznaczają automatycznie, że układ ma dwa punkty równowagi
- *¹⁶ Równanie charakterystyczne nie zależy od kolejności równań
- *¹⁷ Jeśli wszystkie operacje zostały wykonane poprawnie (przekształcenie do układu równań, zapis w postaci macierzowej, wyznaczenie równania charakterystycznego), to równania charakterystyczne muszą być identyczne.
- *¹⁸ Równania charakterystyczne na podstawie równań stanu i transmitancji muszą być identyczne.
- *¹⁹ Uwaga na równania nieliniowe!
- *²⁰ Uwaga – oczywiście nie ma potrzeby wykonywania „mnożenia nawiasów” w mianowniku
- *²¹ Transmitancja powinna mieć postać funkcji wymiernej (tj. bez piętrowych ułamków)
- *²² Punkt równowagi jest jeden (układ liniowego), ale ma dwie składowe. Dwie metody: a) z równań różniczkowych (wyzerować pochodne i rozwiązać); b) z transmitancji (twierdzenie o wartości końcowej zastosowane do obu wejść)
- *²³ Proponowana metoda – przekształcenie do postaci operatorowej i uporządkowanie:

$$\begin{cases} (ms^2 + b_1s)x_1(s) = c_2x_2(s) + u_1(s) \\ b_2sx_2(s) = (b_3s + c_1)x_1(s) + u_1(s) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_1(s)x_1(s) = c_2x_2(s) + u_1(s) \\ b_2sx_2(s) = M_2(s)x_1(s) + u_1(s) \end{cases} \quad (*1)$$

- wyznaczenie z układu (*1) zmiennej wyjściowej x_1 :

$$x_1(s) = \frac{c_2x_2(s) + u_1(s)}{M_1(s)} \quad (*2)$$

- podstawienie do drugiego równania:

$$b_2sx_2(s) = M_2(s) \frac{c_2x_2(s) + u_1(s)}{M_1(s)} + u_1(s) \quad (*3)$$

- wyeliminowanie wyrażenia ułamkowego:

$$M_1(s)b_2sx_2(s) = M_2(s)(c_2x_2(s) + u_1(s)) + M_1(s)u_1(s) \quad (*4)$$

- wyznaczenie wyrażenia na x_2 (bez piętrowych ułamków):

$$x_2(s) = \frac{M_2(s) + M_1(s)}{M_1(s)b_2s - M_2(s)c_2} u_1(s) \quad (*5)$$

- podstawienie x_2 (*5) do wyrażenia (*2):

$$x_1(s) = \frac{c_2}{M_1(s)} \frac{M_2(s) + M_1(s)}{M_1(s)b_2s - M_2(s)c_2} u_1(s) + \frac{1}{M_1(s)} u_1(s) \quad (*6)$$

- sprowadzenie do wspólnego mianownika:

$$x_1(s) = \frac{1}{M_1(s)} \frac{c_2M_2(s) + c_2M_1(s) + M_1(s)b_2s - M_2(s)c_2}{M_1(s)b_2s - M_2(s)c_2} u_1(s) \quad (*7)$$

- uproszczenie i wyznaczenie wyrażenia na x_1 :

$$x_1(s) = \frac{c_2 + b_2s}{M_1(s)b_2s - M_2(s)c_2} u_1(s) \quad (*8)$$

Transmitancje w wyrażeniach (*5) i (*8) mają więc postać:

$$x_1(s) = \frac{c_2 + b_2s}{mb_2s^3 + b_1b_2s^2 - b_3c_2s - c_1c_2} u_1(s) \quad \text{oraz} \quad x_2(s) = \frac{ms^2 + (b_1 + b_3)s + c_1}{mb_2s^3 + b_1b_2s^2 - b_3c_2s + c_1c_2} u_1(s) \quad (*9)$$

Transmitancje mają ten sam mianownik, co pozwala sądzić, że są poprawne. Można jeszcze porównać równanie charakterystyczne transmitancji i pierwotnego układu równań (trzeba go jednak najpierw sprowadzić układu równań 1.rzędu)

*24 Wybierz najprostszą metodę.

*25 Napisz układ równań opisujący zależności pomiędzy sygnałami występującymi na danym schemacie.

Wyznacz transmitancję $x(s)/w(s)$ eliminując pozostałe zmienne. Podobnie $e(s)/w(s)$.

*26 Równoważne transmitancje mają te same bieguny i ten sam stan ustalony

*27 Jak to wpłynie na ilość biegunów i składowych rozwiązania? Czy to zmieni interpretację fizyczną zmiennych wejściowych i wyjściowych?

*28 Jednostki zmiennych w równaniach bilansowych:

$$(I-94) \quad A\dot{h} \left[m^2 \frac{m}{s} \right] = \sum f_{we} \left[\frac{m^3}{s} \right] \rightarrow \left[\frac{m^3}{s} \right];$$

$$(I-96) : A\dot{h} \left[m^2 \frac{m}{s} \right] = f_{we} \left[\frac{m^3}{s} \right] - A_w \sqrt{2gh} \left[m^2 \sqrt{\frac{m}{s^2} m} \right] \rightarrow \left[\frac{m^3}{s} \right];$$

$$(I-97): A\dot{h} \left[m^2 \frac{m}{s} \right] = f_{we} \left[\frac{m^3}{s} \right] - ah \left[\frac{m^3/s}{m} \right] \rightarrow \left[\frac{m^3}{s} \right]$$

*29 Jednostki zmiennych w równaniu (I-109): $C_v \dot{T}_w \left[\frac{J}{kgK} \frac{kg}{m^3} m^3 \cdot \frac{K}{s} \right] = q_g(t) [W] - K_c (T_w(t) - T_{zew}(t)) \left[\frac{W}{K} \cdot K \right] \rightarrow [W]$

Do wyznaczenia równania charakterystycznego wystarczy uporządkować równanie różniczkowe i na podstawie równania jednorodnego napisać równanie charakterystyczne.

*30 Równanie charakterystyczne na podstawie transmitancji i równania różniczkowego jest takie samo.

*31 Człon inercyjny, jednostką stałej czasowej jest [s]

*32 Równania bilansowe obiektu:

$$a) \begin{cases} C_{vw} \dot{T}_{we}(t) = q_g(t) - K_p (T_{we}(t) - T_p(t)) \\ C_{vp} \dot{T}_p(t) = K_p (T_{we}(t) - T_p(t)) - K_2 (T_p(t) - T_{zew}(t)) + c_p \rho_p f_p(t) (T_{zew}(t) - T_p(t)) \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} C_{v1} \dot{T}_1(t) = q_g(t) - K_{c2} (T_1(t) - T_{wy}(t)) \\ C_{v2} \dot{T}_{wy}(t) = K_{c2} (T_1(t) - T_{wy}(t)) - K_{c1} (T_{wy}(t) - T_{zew}(t)) + c_p \rho_p f_p(t) (T_{we}(t) - T_{wy}(t)) \end{cases}$$

*33 Wykorzystaj różne sposoby wyznaczenia transmitancji (6.2) i równania charakterystycznego (5.1, 6.1)

*34 Obiekt z Rys. I-45 jest członem inercyjnym: $x(s) = \frac{k}{Ts + 1} F(s)$, gdzie: $k = \frac{1}{c}$, $T = \frac{b}{c}$

*35 Równania bilansowe obiektu:

Równania statyczne:

Punkt równowagi:

$$a) \begin{cases} 0 = m_1 \ddot{x}_1(t) + b_3 \dot{x}_1(t) + c_2 x_1(t) + c_1 (x_1(t) - x_2(t)) \\ F(t) = c_1 (x_2(t) - x_1(t)) + b_1 \dot{x}_2(t) \end{cases} \quad a) \begin{cases} 0 = c_2 x_1 + c_1 (x_1 - x_2) \\ F(t) = c_1 (x_2 - x_1) \end{cases} \quad a) \begin{cases} x_1 = F / c_2 \\ x_2 = \frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2} F \end{cases}$$

*36 Zarówno w tym, jak i w każdym następnym przypadku doprowadź transmitancję do postaci wymiernej (bez piętrowych ułamków)