

EKONOMETRIA

26

Zastosowanie matematyki w ekonomii

Redaktor naukowy Janusz Łyko



**Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2009**

Spis treści

Wstęp	7
Beata Bal-Domańska , Ekonometryczna analiza sigma i beta konwergencji regionów Unii Europejskiej	9
Andrzej Bąk, Aneta Rybicka, Marcin Pelka , Modele efektów głównych i modele z interakcjami w <i>conjoint analysis</i> z zastosowaniem programu R	25
Katarzyna Budny , Kurtoza wektora losowego	44
Wiktor Ejsmont , Optymalna liczebność grupy studentów	55
Kamil Fijorek , Model regresji dla cechy przyjmującej wartości z przedziału $(0,1)$ – ujęcie bayesowskie	66
Paweł Hanczar , Wyznaczanie zapasu bezpieczeństwa w sieci logistycznej ...	77
Roman Huptas , Metody szacowania wewnątrzdziennej sezonowości w analizie danych finansowych pochodzących z pojedynczych transakcji	83
Aleksandra Iwanicka , Wpływ zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny w skończonym horyzoncie czasowym w wieloklasowym modelu ryzyka.....	97
Agnieszka Lipieta , Stany równowagi na rynkach warunkowych	110
Krystyna Melich-Iwanek , Polski rynek pracy w świetle teorii histerezy.....	122
Rafał Piszczek , Zastosowanie modelu logit w modelowaniu upadłości	133
Marcin Salamaga , Próba weryfikacji teorii parytetu siły nabywczej na przykładzie kursów wybranych walut	149
Antoni Smoluk , O zasadzie dualności w programowaniu liniowym	160
Małgorzata Szulc-Janek , Influence of recommendations announcements on stock prices of fuel market	170
Jacek Welc , Regresja liniowa w szacowaniu fundamentalnych współczynników Beta na przykładzie spółek giełdowych z sektorów: budownictwa, informatyki oraz spożywczego	180
Andrzej Wilkowski , O współczynniku korelacji	191
Mirosław Wójciak , Klasyfikacja nowych technologii energetycznych ze względu na determinanty ich rozwoju.....	199
Andrzej Wójcik , Wykorzystanie modeli wektorowo-autoregresyjnych do modelowania gospodarki Polski	209
Katarzyna Zeug-Żebro , Rekonstrukcja przestrzeni stanów na podstawie wielowymiarowych szeregów czasowych.....	219

Summaries

Beata Bal-Domańska , Econometric analysis of sigma and beta convergence in the European Union regions	24
Andrzej Bąk, Aneta Rybicka, Marcin Pelka , Main effects models and main and interactions models in <i>conjoint analysis</i> with application of R software.....	43
Katarzyna Budny , Kurtosis of a random vector	53
Wiktor Ejsmont , Optimal class size of students	65
Kamil Fijorek , Regression model for data restricted to the interval (0,1) – Bayesian approach	76
Paweł Hanczar , Safety stock level calculation in a supply chain network.....	82
Roman Huptas , Estimation methods of intraday seasonality in transaction financial data analysis	96
Aleksandra Iwanicka , An impact of some outside risk factors on the finite-time ruin probability for a multi-classes risk model.....	109
Agnieszka Lipieta , States of contingent market equilibrium	121
Krystyna Melich-Iwanek , The Polish labour market in light of the hysteresis theory	132
Rafał Piszczek , Logit model applications for bankruptcy modelling.....	148
Marcin Salamaga , Attempt to verify the purchasing power parity theory in the case of some foreign currencies.....	159
Antoni Smoluk , On dual principle of linear programming	168
Małgorzata Szulc-Janek , Analiza wpływu rekomendacji analityków na ceny akcji branży paliwowej (Analiza wpływu rekomendacji analityków na ceny akcji branży paliwowej)	178
Jacek Welc , A linear regression in estimating fundamental betas in the case of the stock market companies from construction, it and food industries	190
Andrzej Wilkowski , About the coefficient of correlation	198
Mirosław Wójciak , Classification of new energy related technologies based on the determinants of their development	208
Andrzej Wójcik , Using vector-autoregressive models to modelling economy of Poland.....	218
Katarzyna Zeug-Żebro , State space reconstruction from multivariate time series	227

Aleksandra Iwanicka

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

WPLYW ZEWNĘTRZNYCH CZYNNIKÓW RYZYKA NA PRAWDOPODOBIENSTWO RUINY W SKOŃCZONYM HORYZONCIE CZASOWYM W WIELOKLASOWYM MODELU RYZYKA

Streszczenie: Omówiony zostanie model ryzyka dla kilku klas ubezpieczeń, na które oddziałują zewnętrzne czynniki ryzyka. Zakładać będziemy, że w każdej klasie szkody pojawiają się zgodnie z procesami Poissona. Model ten można przekształcić do klasycznego modelu ryzyka, w którym znanych jest wiele metod wyznaczania i aproksymacji prawdopodobieństwa ruiny. Na podstawie numerycznych obliczeń zostanie przeprowadzona krótka analiza wpływu zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny w skończonym horyzoncie czasowym w modelu ryzyka dla ustalonej liczby klas ubezpieczeń. Analiza będzie przeprowadzona w przypadku, kiedy rozkłady szkód są lekkoogonowe, oraz osobno w przypadku, kiedy rozkłady szkód są ciężkoogonowe.

Słowa kluczowe: wieloklasowy model ryzyka, skorelowane sumy zagregowanych szkód, zewnętrzne czynniki ryzyka, prawdopodobieństwo ruiny w skończonym horyzoncie czasowym, poprawiona aproksymacja dyfuzyjna.

1. Wstęp

Celem pracy jest przedstawienie krótkiej analizy wpływu zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny w skończonym horyzoncie czasowym w wybranym wieloklasowym modelu ryzyka na przykładach numerycznych obliczeń. W pracy omówiono model ryzyka dla kilku klas ubezpieczeń, na które mogą oddziaływać zewnętrzne czynniki ryzyka, m.in. takie jak kłęski żywiołowe, powodujące jednocześnie pojawianie się dodatkowych wypłat w różnych klasach ubezpieczeń zgodnie z jednorodnymi procesami Poissona [Ambagaspitiya 1998]. Model ten można przekształcić do klasycznego modelu ryzyka [Ambagaspitiya 1998]. W klasycznym modelu ryzyka jest znanych wiele metod szacowania prawdopodobieństwa ruiny w skończonym horyzoncie czasu [Asmussen 2000; Rolski i in. 1998]. Analizę wpływu zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny przeprowadzono w dwóch przypadkach: lekkoogonowych rozkładów wypłat oraz ciężkoogonowych rozkładów wypłat.

Na początku omówiony zostanie model ryzyka dla n klas ubezpieczeń, na które mogą oddziaływać zewnętrzne czynniki ryzyka [Ambagaspitiya 1998]. Niech $\{X_{ij}\}_{j \in N}$ będzie ciągiem kolejnych niezależnych dodatnich wypłat w i -tej klasie ubezpieczeń o jednakowych rozkładach z gęstością f_{X_i} . Ponadto wypłaty z dowolnej klasy ubezpieczeń są niezależne od wypłat z każdej innej klasy ubezpieczeń. Sumę zagregowanych wypłat do momentu t włącznie z i -tej klasy ubezpieczeń oznaczamy:

$$S_i(t) = \sum_{i=1}^{N_i(t)} X_{ij}, \quad (1)$$

gdzie proces zliczający wypłaty $\{N_i(t)\}_{t \geq 0}$ jest jednorodnym procesem Poissona, który nie zależy od wypłat. Niech $\mathbf{N} = [N_1, N_2, \dots, N_n]^T$. Ponieważ na klasy oddziałują zewnętrzne czynniki ryzyka, elementy wektora \mathbf{N} zależą od siebie w następujący sposób:

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\mathbf{M}, \quad (2)$$

gdzie elementy M_j wektora wertykalnego $\mathbf{M} = (M_j)_{k \times 1}$ są niezależnymi jednorodnymi procesami Poissona z intensywnościami λ_j , a $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times k}$ jest macierzą binarną. Sumę zagregowanych szkód z n klas ubezpieczeń do momentu t włącznie można zapisać jako:

$$S(t) = \sum_{i=1}^n S_i(t). \quad (3)$$

Wówczas proces ryzyka dla n klas ubezpieczeń w chwili t definiuje się w następujący sposób:

$$R(t) = u + ct - S(t), \quad (4)$$

gdzie u jest kapitałem początkowym, a c jest stałą dodatnią intensywnością napływu składki w jednej jednostce czasu z n klas ubezpieczeń. Proces ryzyka w chwili t można w uproszczeniu interpretować jako stan rezerw ubezpieczyciela w chwili t . Przez ruinę będziemy rozumieć przyjęcie przez proces ryzyka $R(t)$ po raz pierwszy wartości mniejszej od zera. Ponadto aby zapewnić wypłacalność ubezpieczyciela (tj. aby z prawdopodobieństwem równym jeden nie nastąpiła ruina w skończonym czasie), o intensywności c będziemy zakładać, że spełnia następujący warunek:

$$c = (1 + \theta) E(S(1)),$$

gdzie θ jest stałą dodatnią wartością, którą nazywamy względnym narzutem na bezpieczeństwo. Model ryzyka (4) dla jednej klasy ubezpieczeń, tzn. dla $n=1$, nazywamy klasycznym modelem ryzyka.

Aby zdefiniować prawdopodobieństwo ruiny, wprowadźmy wcześniej pojęcie momentu ruiny w następujący sposób:

$$\tau = \inf \{t \geq 0 : R(t) < 0\}.$$

Wtedy prawdopodobieństwo ruiny w skończonym horyzoncie czasu T definiujemy następująco:

$$\Psi(u) = P(\tau \leq T). \quad (5)$$

2. Metoda szacowania prawdopodobieństwa ruiny

Można pokazać, że wieloklasowy proces ryzyka (4) w dowolnej ustalonej chwili t ma taki sam rozkład jak klasyczny model ryzyka w chwili t z procesem zliczającym wypłaty o intensywności $\lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i$ oraz z wypłatami o jednakowym rozkładzie z gęstością postaci [Ambagaspitia 1998]:

$$f_{X^t}(x) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^k \lambda_i (f_{X_1}^{*(a_{1i})} * f_{X_2}^{*(a_{2i})} * \dots * f_{X_n}^{*(a_{ni})})(x), \quad (6)$$

gdzie $f_{X_i}^{*(a_{ji})}$ jest a_{ji} splotem gęstości f_{X_i} oraz $f_{X_i}^{*(0)} \equiv 1$.

W klasycznym modelu ryzyka jest znanych wiele metod szacowania prawdopodobieństwa ruiny w skończonym horyzoncie czasu [Asmussen 2000; Rolski i in. 1998]. Jednak część z tych metod opiera się na istnieniu współczynnika dopasowania. Z definicji współczynnikiem dopasowania nazywamy dodatnie rozwiązanie (o ile istnieje) następującego równania:

$$1 + (1 + \theta)\mu R = M_X(R), \quad R < \sup_z M_X(z) < \infty,$$

gdzie M_X oznacza funkcję tworzącą momenty wypłaty X w klasycznym modelu ryzyka.

Istnienie współczynnika dopasowania uzależnione jest od typu rozkładu wypłat, tzn. od tego, czy jest to rozkład lekkoogonowy czy ciężkoogonowy. Rozkład zmiennej losowej X nazywamy lekkoogonowym lub rozkładem o lekkim ogonie, gdy istnieją stałe dodatnie wartości a i b spełniające dla każdej wartości rzeczywistej x następujący warunek:

$$\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x) \leq a \exp(-bx),$$

gdzie F_X oznacza dystrybuantę zmiennej losowej X . W przeciwnym razie rozkład zmiennej losowej X nazywamy ciężkoogonowym lub rozkładem o ciężkim ogonie. Prosty przykład rozkładu lekkoogonowego jest rozkład wykładniczy. Współczynnik dopasowania można wyznaczać tylko w przypadku lekkoogonowych rozkładów wypłat.

W pracy do szacowania prawdopodobieństwa ruiny w skończonym horyzoncie czasowym w przypadku lekkoogonowych rozkładów wypłat zastosowano poprawioną aproksymację dyfuzyjną postaci [Asmussen 2000]:

$$\Psi(u, T) \approx IG\left(\frac{cT\delta_1}{u^2} + \frac{\delta_2}{u}; -\frac{Ru}{2}; 1 + \frac{\delta_2}{u}\right), \quad (7)$$

gdzie $\delta_1 = \frac{\lambda}{c} M_X''(\gamma_0)$, $\delta_2 = M_X'''(\gamma_0) / (3M_X''(\gamma_0))$, przy czym γ_0 jest dodatnim rozwiązaniem równania: $\frac{\lambda}{c} M_X'(\gamma_0) - 1 = 0$, a funkcje M_X' , M_X'' i M_X''' oznaczają kolejno pierwszą, drugą i trzecią pochodną funkcji M_X . Ponadto R jest współczynnikiem dopasowania oraz $IG(x; \zeta; u)$ jest dystrybuantą rozkładu odwrotnego gaussowskiego z parametrami ζ i u , określoną wzorem:

$$IG(x; \zeta; u) = 1 - \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{x}} - \zeta\sqrt{x}\right) + \exp(2\zeta u) \Phi\left(-\frac{u}{\sqrt{x}} - \zeta\sqrt{x}\right).$$

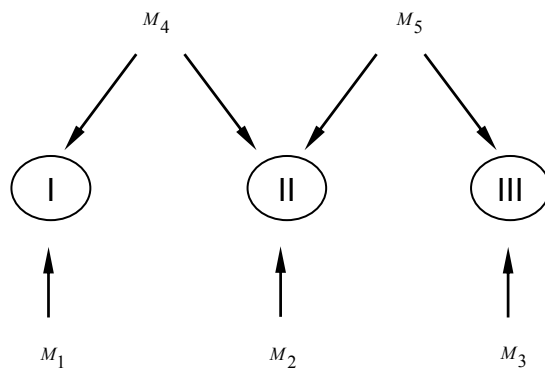
Wyniki oszacowania prawdopodobieństwa ruiny uzyskiwane poprawioną aproksymacją dyfuzyjną charakteryzują się małymi względnymi błędami w odniesieniu do wyników otrzymywanych symulacjami metodą Monte Carlo. Wahania w tych błędach mogą być bardziej spowodowane niedokładnością metody Monte Carlo niż przez sam błąd aproksymacji, dlatego może ona doskonale służyć do szacowania prawdopodobieństwa ruiny w przypadku lekkoogonowych rozkładów wypłat.

W przypadku dowolnych ciężkoogonowych rozkładów wypłat (bez przyjmowania dodatkowych założeń o tych rozkładach) do szacowania prawdopodobieństwa ruiny $\Psi(u, T)$ można jedynie stosować metody symulacyjne.

W kolejnym punkcie przyjęto trzyklasowy model ryzyka, w którym w dalszej części pracy przeprowadzono analizę wpływu zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny w skończonym horyzoncie czasowym w przypadku lekkoogonowych i osobno ciężkoogonowych rozkładów wypłat.

3. Trzyklasowy model ryzyka

Przyjmijmy model ryzyka dla trzech klas ubezpieczeń, na które oddziałują zewnętrzne czynniki ryzyka. Niech w i -tej klasie ubezpieczeń działają czynniki ryzyka właściwe tylko dla tej klasy, które powodują pojawianie się wypłat zgodnie z jednorodnym procesem Poissona M_i o intensywności λ_i . Ponadto niech na klasy pierwszą i drugą oddziałują zewnętrzne czynniki ryzyka wspólne dla obu klas, które powodują pojawianie się w tych klasach dodatkowych wypłat zgodnie z jednorodnym procesem Poissona M_4 o intensywności λ_4 . Natomiast na klasy drugą i trzecią oddziałują inne zewnętrzne czynniki ryzyka wspólne dla obu tych klas, które powodują pojawianie się dodatkowych wypłat w tych klasach zgodnie z jednorodnym procesem Poissona M_5 z intensywnością λ_5 . Sytuację wpływu poszczególnych czynników ryzyka na wszystkie trzy klasy ubezpieczeń przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Wpływ zewnętrznych czynników ryzyka na poszczególne klasy ubezpieczeń

Źródło: opracowanie własne.

Podsumowując, proces zliczający wypłaty w pierwszej klasie jest jednorodnym procesem Poissona $N_1 = M_1 + M_4$ z intensywnością $\lambda_1 + \lambda_4$, w drugiej klasie ubezpieczeń jest jednorodnym procesem Poissona $N_2 = M_2 + M_4 + M_5$ z intensywnością $\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_5$, a w trzeciej klasie jest jednorodnym procesem Poissona $N_3 = M_3 + M_5$ z intensywnością $\lambda_3 + \lambda_5$. Dodatkowo warto zaznaczyć, że oddziaływanie zewnętrznych czynników ryzyka na poszczególne klasy ubezpieczeń powoduje, że procesy N_1 , N_2 i N_3 mogą zależeć od siebie. Wektor

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 + M_4 \\ M_2 + M_4 + M_5 \\ M_3 + M_5 \end{bmatrix} \quad \text{można zapisać zgodnie ze wzorem (2),}$$

tzn. $\mathbf{N} = \mathbf{A}\mathbf{M}$, z macierzą binarną $\mathbf{A} = (a_{ij})_{3 \times 5}$ oraz wektorem wertykalnym $\mathbf{M} = (M_j)_{5 \times 1}$, w następujący sposób:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{bmatrix}.$$

Model ryzyka (4) przyjmuje następującą postać:

$$R(t) = u + ct - \sum_{j=1}^{M_1(t)+M_4(t)} X_{1j} + \sum_{j=1}^{M_2(t)+M_4(t)+M_5(t)} X_{2j} + \sum_{j=1}^{M_3(t)+M_5(t)} X_{3j}. \quad (8)$$

Model ryzyka (8) można przekształcić do klasycznego modelu ryzyka postaci:

$$R(t) = u + ct - \sum_{j=1}^{N(t)} X'_j, \quad (9)$$

gdzie proces zliczający wypłaty $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ jest jednorodnym procesem Poissona z intensywnością $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5$, a X'_j to kolejne wypłaty niezależne od siebie oraz od $\{N(t)\}_{t \geq 0}$, które mają ten sam rozkład z gęstością (6) przyjmującą następującą postać:

$$\begin{aligned} f_{X'}(x) &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^5 \lambda_i \left(f_{X_1}^{*(a_{1i})} * f_{X_2}^{*(a_{2i})} * f_{X_3}^{*(a_{3i})} \right)(x) = \frac{1}{\lambda} \left(\lambda_1 \left(f_{X_1}^{*(1)} * f_{X_2}^{*(0)} * f_{X_3}^{*(0)} \right)(x) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_2 \left(f_{X_1}^{*(0)} * f_{X_2}^{*(1)} * f_{X_3}^{*(0)} \right)(x) + \lambda_3 \left(f_{X_1}^{*(0)} * f_{X_2}^{*(0)} * f_{X_3}^{*(1)} \right)(x) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_4 \left(f_{X_1}^{*(1)} * f_{X_2}^{*(1)} * f_{X_3}^{*(0)} \right)(x) + \lambda_5 \left(f_{X_1}^{*(0)} * f_{X_2}^{*(1)} * f_{X_3}^{*(1)} \right)(x) \right) = \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda} f_{X_1}(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda} f_{X_2}(x) + \frac{\lambda_3}{\lambda} f_{X_3}(x) + \frac{\lambda_4}{\lambda} \left(f_{X_1} * f_{X_2} \right)(x) + \frac{\lambda_5}{\lambda} \left(f_{X_2} * f_{X_3} \right)(x). \end{aligned}$$

Sprawdzenie trzyklasowego modelu ryzyka (8) do klasycznej postaci (9) umożliwia zastosowanie poprawionej aproksymacji dyfuzyjnej do szacowania prawdopodobieństwa ruiny $\Psi(u, T)$.

W kolejnym punkcie pracy przeprowadzono analizę wpływu zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny we wprowadzonym modelu ryzyka (8) z zadanymi lekkoogonowymi rozkładami wypłat.

4. Analiza w przypadku lekkoogonowych rozkładów wypłat

Przyjmijmy, że wypłaty w trzyklasowym modelu ryzyka (8) mają wykładnicze rozkłady wypłat w każdej klasie, tj. $X_{ij} \sim W(\beta_i)$, $i = 1, 2, 3$. Wówczas proces ryzyka (8) sprowadza się do klasycznego modelu ryzyka (9) z wypłatami o gęstości określonej wzorem:

$$\begin{aligned}
 f_{X'}(x) = & \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} + \frac{\lambda_4}{\lambda} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} \right) \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x) \beta_1 \exp(-\beta_1 x) + \\
 & + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda} + \frac{\lambda_4}{\lambda} \cdot \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} + \frac{\lambda_5}{\lambda} \cdot \frac{\beta_3}{\beta_3 - \beta_2} \right) \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x) \beta_2 \exp(-\beta_2 x) + \\
 & + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} + \frac{\lambda_5}{\lambda} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_3} \right) \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x) \beta_3 \exp(-\beta_3 x).
 \end{aligned} \tag{10}$$

Funkcja (10) jest gęstością rozkładu fazowego, ponieważ rozkład wykładniczy jest rozkładem fazowym, a rodzina rozkładów fazowych jest zamknięta na skończoną operację splotów rozkładów oraz skończoną mieszkankę wypukłą rozkładów [Rolski i in. 1998]. Ponadto ciągłe rozkłady fazowe są rozkładami lekkoogonowymi [Rolski i in. 1998].

Na przykładach numerycznych obliczeń zbadano wpływ zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny $\Psi(u, T)$ w modelu ryzyka (8) przy zadanych wartościach parametrów wykładniczych rozkładów wypłat: $\beta_1 = 0,5$, $\beta_2 = 2$, $\beta_3 = 3$. Względny narzut na bezpieczeństwo θ ustalono na poziomie 0,05. Za pomocą poprawionej aproksymacji dyfuzyjnej (7) oszacowano prawdopodobieństwo ruiny w kolejnych przypadkach o różnym stopniu oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka na poszczególne klasy ubezpieczeń. Stopień ten wyraża się wysokością intensywności procesów zliczających wypłaty powodowanych przez zewnętrzne czynniki ryzyka, tj. wysokością wartości λ_4 oraz λ_5 . Należy zwrócić uwagę, że w kolejnych przypadkach intensywność procesu zliczającego wszystkie wypłaty N_i w i -tej klasie ubezpieczeń jest ustalana na tej samej wysokości. Prawdopodobieństwo ruiny oszacowano osobno w następujących różnych przypadkach wartości intensywności λ_i procesów zliczających wypłaty M_i :

$$(1) \quad \lambda_1 = 7, \lambda_2 = 20, \lambda_3 = 15;$$

$$(2) \quad \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 14, \lambda_3 = 11, \lambda_4 = 2, \lambda_5 = 4;$$

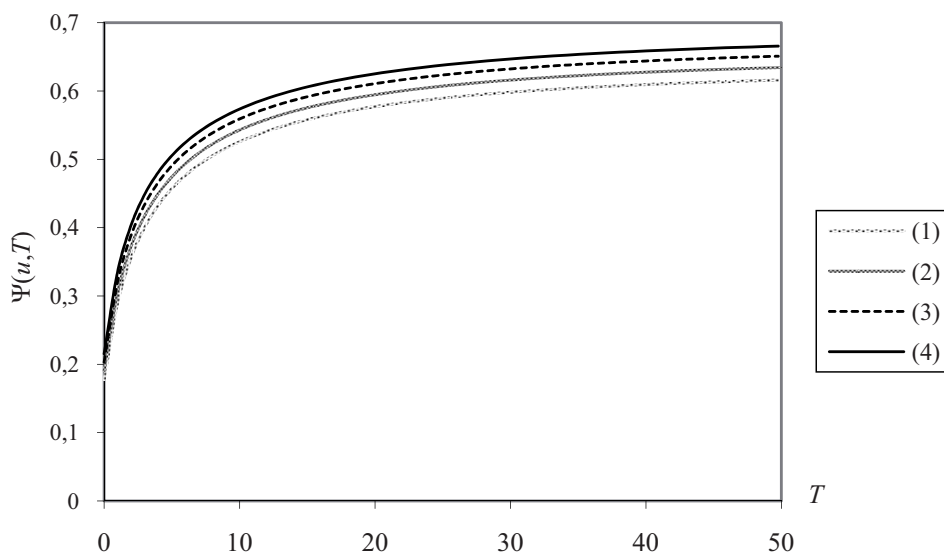
$$(3) \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 8, \lambda_3 = 7, \lambda_4 = 4, \lambda_5 = 8;$$

$$(4) \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3, \lambda_4 = 6, \lambda_5 = 12.$$

W pierwszym przypadku przyjęto brak oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka na poszczególne klasy ubezpieczeń. W kolejnych przypadkach można obserwować wzrost stopnia oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka na wszystkie klasy ubezpieczeń. Wyniki oszacowania prawdopodobieństwa ruiny $\Psi(u, T)$ we wszystkich czterech przypadkach przedstawiono w formie wykresów zamieszczonych na rys. 2, 3, 4 i 5.

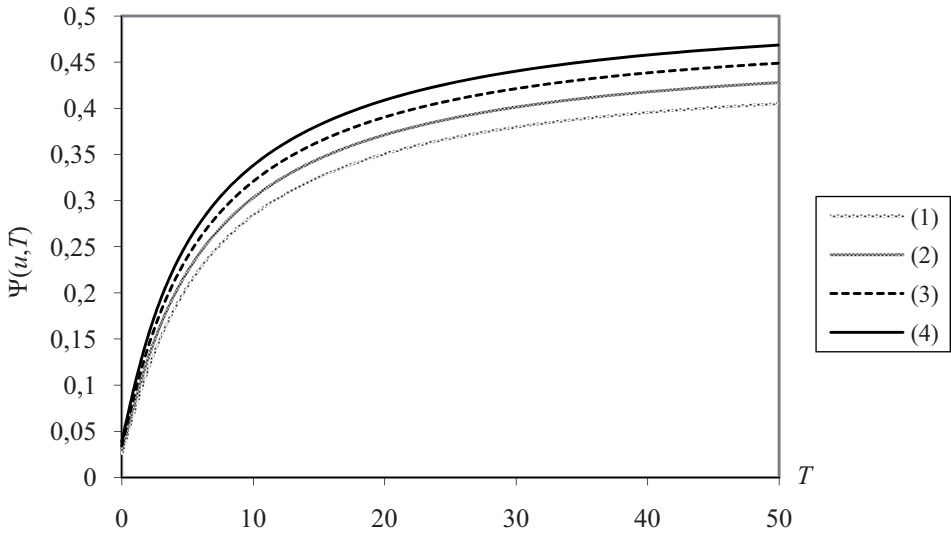
Na rysunkach 2 i 3 przedstawiono wykresy oszacowania $\Psi(u, T)$ w zależności od horyzontu czasowego T przy ustalonej wartości kapitału początkowego u . Dla dowolnie ustalonej wartości horyzontu czasowego T można obserwować wzrost oszacowanego prawdopodobieństwa ruiny $\Psi(u, T)$ wraz ze zwiększaniem stopnia oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka na poszczególne klasy ubezpieczeń w przyjętych przypadkach od (1) do (4).

Na rysunkach 4 i 5 przedstawiono wykresy oszacowania $\Psi(u, T)$ w zależności od kapitału początkowego u przy ustalonym horyzoncie czasowym T . Dla dowolnie ustalonej wartości kapitału początkowego u można obserwować wzrost oszacowanego prawdopodobieństwa ruiny $\Psi(u, T)$ przy zwiększającym się stopniu oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka w przypadkach od (1) do (4).



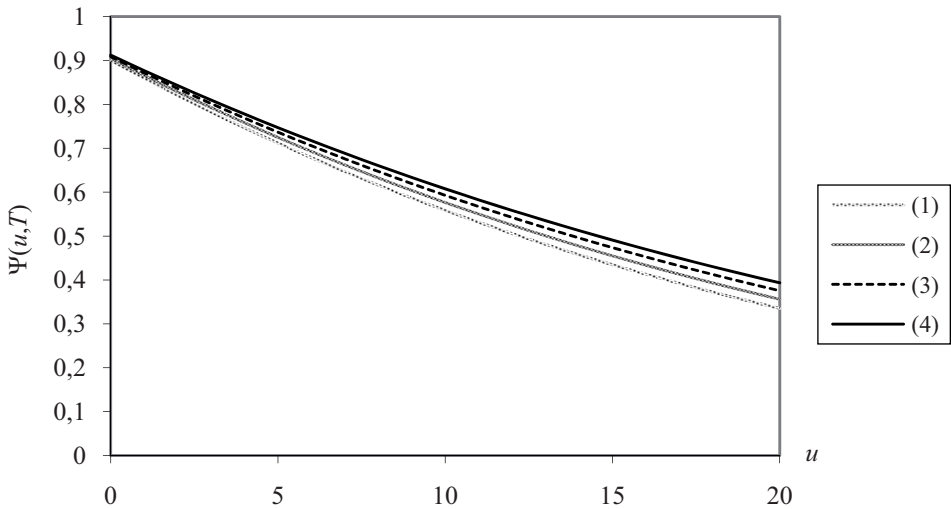
Rys. 2. Wykresy oszacowania $\Psi(u, T)$ w zależności od horyzontu czasowego T przy kapitale początkowym $u = 10$

Źródło: opracowanie własne.



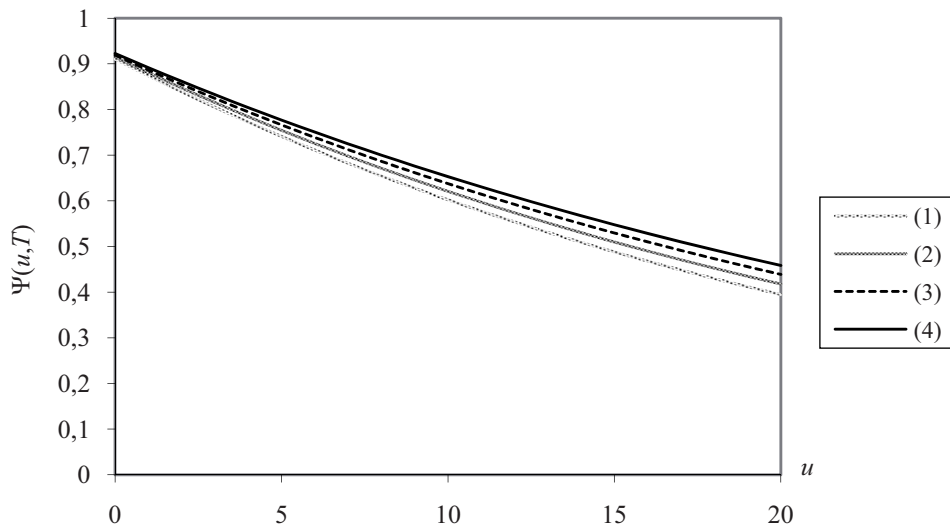
Rys. 3. Wykresy oszacowania $\Psi(u, T)$ w zależności od horyzontu czasowego T przy kapitale początkowym $u = 20$

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 4. Wykresy oszacowania $\Psi(u, T)$ w zależności od kapitału początkowego u przy horyzoncie czasowym $T = 20$

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 5. Wykresy oszacowania $\Psi(u, T)$ w zależności od kapitału początkowego u przy horyzoncie czasowym $T = 50$

Źródło: opracowanie własne.

W piątym punkcie pracy zbadano wpływ zewnętrznych czynników ryzyka na prawdopodobieństwo ruiny $\Psi(u, T)$ w modelu ryzyka (8) dla zadanych ciężkoogonowych rozkładów wypłat.

5. Analiza w przypadku ciężkoogonowych rozkładów wypłat

Przyjmijmy, że wypłaty w modelu ryzyka (8) mają rozkłady ciężkoogonowe zadane następująco: w pierwszej klasie wypłaty X_{1j} mają rozkład logarytmiczno-normalny postaci $LN(0.25, 0.125)$, w drugiej klasie wypłaty X_{2j} mają rozkład logarytmiczno-normalny postaci $LN(0.2, 0.1)$, natomiast w trzeciej klasie wypłaty X_{3j} mają rozkład Weibulla postaci $We(1, 0.8)$. Ponadto ustalmy względny narzut na bezpieczeństwo θ na poziomie 0,05. Prawdopodobieństwo ruiny $\Psi(u, T)$ oszacowano w czterech przypadkach zadanych wartości intensywności λ_i procesów zliczających wypłaty M_i :

- (1) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 4$;
- (2) $\lambda_1 = 1,5, \lambda_2 = 3,5, \lambda_3 = 3, \lambda_4 = 0,5, \lambda_5 = 1$;
- (3) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 1, \lambda_5 = 2$;
- (4) $\lambda_1 = 0,5, \lambda_2 = 0,5, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 1,5, \lambda_5 = 3$.

Podobnie jak w punkcie czwartym pracy w pierwszym przypadku założono również brak oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka na poszczególne klasy ubezpieczeń. W kolejnych przypadkach zwiększano stopień oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka na wszystkie klasy ubezpieczeń. Wyniki oszacowania prawdopodobieństwa ruiny $\Psi(u, T)$ we wszystkich czterech przypadkach otrzymano symulacjami metodą Monte Carlo na podstawie 10 000 trajektorii procesu ryzyka (8). Wyniki przedstawiono w tab. 1, 2, 3 i 4.

Tabele 1 i 2 zawierają wyniki oszacowania prawdopodobieństwa ruiny przy ustalonym kapitale początkowym u dla kolejnych wybranych wartości horyzontu czasu T . Można zauważyć, że dla ustalonego horyzontu czasu T występuje, podobnie jak w przykładzie z wykładniczymi rozkładami wypłat, wzrost oszacowanego prawdopodobieństwa ruiny $\Psi(u, T)$ w miarę wzrostu stopnia oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka w kolejnych przypadkach od (1) do (4).

Tabela 1. Wyniki oszacowanego prawdopodobieństwa ruiny $\Psi(u, T)$ przy kapitale początkowym $u = 5$

Przypadki T	(1)	(2)	(3)	(4)
5	0,4001	0,4359	0,4600	0,4960
10	0,5041	0,5413	0,5566	0,5779
15	0,5430	0,5694	0,5973	0,6212
20	0,5610	0,5895	0,6256	0,6472
25	0,5853	0,6177	0,6455	0,6639
30	0,5983	0,6266	0,6619	0,6855
50	0,6144	0,6513	0,6853	0,7005

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2. Wyniki oszacowanego prawdopodobieństwa ruiny $\Psi(u, T)$ przy kapitale początkowym $u = 15$

Przypadki T	(1)	(2)	(3)	(4)
5	0,0380	0,0568	0,0736	0,0909
10	0,1019	0,1275	0,1568	0,1819
15	0,1411	0,1668	0,2009	0,2366
20	0,1794	0,2110	0,2335	0,2767
25	0,1953	0,2326	0,2749	0,2980
30	0,2078	0,2515	0,2828	0,3199
50	0,2507	0,2938	0,3375	0,3650

Źródło: opracowanie własne.

Tabele 3 i 4 zawierają wyniki oszacowania prawdopodobieństwa ruiny $\Psi(u, T)$ przy ustalonym horyzoncie czasu T dla zmieniającego się kapitału początkowego u . Dla ustalonej wartości kapitału początkowego u można obserwować także wzrost oszacowanego prawdopodobieństwa ruiny $\Psi(u, T)$ przy zwiększającym się stopniu oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka w kolejnych przypadkach od (1) do (4).

Tabela 3. Wyniki oszacowanego prawdopodobieństwa ruiny $\Psi(u, T)$ przy horyzoncie czasowym $T = 20$

Przypadki	(1)	(2)	(3)	(4)
u				
0	0,8687	0,8766	0,8814	0,8786
5	0,5610	0,5895	0,6256	0,6472
10	0,3256	0,3655	0,3980	0,4324
15	0,1794	0,2110	0,2335	0,2767
20	0,0860	0,1139	0,1410	0,1616

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4. Wyniki oszacowanego prawdopodobieństwa ruiny $\Psi(u, T)$ przy horyzoncie czasowym $T = 50$

Przypadki	(1)	(2)	(3)	(4)
u				
0	0,8915	0,8909	0,9033	0,8993
5	0,6144	0,6513	0,6853	0,7005
10	0,3949	0,4368	0,4841	0,5132
15	0,2507	0,2938	0,3375	0,3650
20	0,1551	0,1921	0,2197	0,2531

Źródło: opracowanie własne.

Z analizy wyników przedstawionych w tab. 1, 2, 3 i 4 można wywnioskować, że dla wybranych rozkładów ciężkoogonowych wypłat w miarę zwiększania stopnia oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka na poszczególne klasy ubezpieczeń wzrasta prawdopodobieństwo ruiny.

6. Podsumowanie

W przeprowadzonej w niniejszej pracy krótkiej analizie wpływu zewnętrznych czynników ryzyka w przyjętym trzyklasowym modelu ryzyka (8) zaobserwowano, że w miarę zwiększania stopnia oddziaływania zewnętrznych czynników ryzyka na poszczególne klasy ubezpieczeń następował wzrost prawdopodobieństwa ruiny w skończonym horyzoncie czasu zarówno w przypadku zadanych rozkładów lek-

koogonowych wypłat, jak i w przypadku zadanych ciężkoogonowych rozkładów wypłat. Przeprowadzona analiza może stanowić dosyć istotny argument przemawiający za tym, aby uwzględniać oddziaływanie zewnętrznych czynników ryzyka w wieloklasowym modelu ryzyka przy szacowaniu prawdopodobieństwa ruiny, co jednocześnie powoduje odrzucenie klasycznego założenia o niezależności procesów zliczających wypłaty w poszczególnych klasach ubezpieczeń. W pracy omówiono wieloklasowy model ryzyka, w którym zewnętrzne czynniki powodowały szkody zgodnie z jednorodnymi procesami Poissona. Jednak można byłoby także przyjąć wieloklasowy model ryzyka, w którym zewnętrzne czynniki ryzyka powodują szkody zgodnie z procesem Erlanga [Guo, Wu, Yuen 2002]. Ponadto można inaczej niż w tej pracy definiować ruinę w wieloklasowym modelu ryzyka, tzn. przez ruinę rozumieć spadek procesu ryzyka po raz pierwszy poniżej zera dla co najmniej jednej klasy ubezpieczeń, co znacznie utrudnia szacowanie prawdopodobieństwa ruiny [Guo, Wu, Yuen 2006].

Literatura

- Ambagaspiya R.S., *On the Distribution of a Sum of Correlated Aggregate Claims*, „Insurance: Mathematics and Economics” 1998 nr 23, s. 15-19.
- Asmussen S., *Ruin Probabilities*, „Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability” 2000.
- Guo J., Wu X., Yuen K.C., *On a Correlated Aggregate Claims Model with Poisson and Erlang Risk Processes*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2002 nr 31, s. 205-214.
- Guo J., Wu X., Yuen K.C., *On the First Time of Ruin in the Bivariate Compound Poisson Model*, „Insurance: Mathematics and Economics” 2006 nr 38, s. 298-308.
- Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugles J., *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, Wiley 1998.

AN IMPACT OF SOME OUTSIDE RISK FACTORS ON THE FINITE-TIME RUIN PROBABILITY FOR A MULTI-CLASSES RISK MODEL

Summary: In this paper the author considers a risk model for several classes of insurance business, which is simply called a multi-class risk model. In this model it is assumed that all the claim number processes are correlated with Poisson processes. The correlation between the claim number processes is due to an influence of some outside risk factors like natural disasters on classes of business. This model can be transformed to a classical risk model. On some numerical examples we investigate the impact of outside risk factors on the finite-time ruin probability for the assumed risk model in two cases of claim size distributions: heavy-tailed distributions and light-tailed distributions.