

PRACE NAUKOWE

Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu

RESEARCH PAPERS

of Wrocław University of Economics

Nr 415

Ubezpieczenia wobec wyzwań XXI wieku



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2016

Redakcja wydawnicza: Jadwiga Marcinek
Redakcja techniczna: Barbara Łopusiewicz
Korekta: Justyna Mroczkowska
Łamanie: Agata Wiszniowska
Projekt okładki: Beata Dębska

Informacje o naborze artykułów i zasadach recenzowania
znajdują się na stronach internetowych
www.pracnaukowe.ue.wroc.pl
www.wydawnictwo.ue.wroc.pl

Publikacja udostępniona na licencji Creative Commons
Uznanie autorstwa-Użycie niekomercyjne-Bez utworów zależnych 3.0 Polska
(CC BY-NC-ND 3.0 PL)



© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wrocław 2016

ISSN 1899-3192
e-ISSN 2392-0041

ISBN 978-83-7695-571-1

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Zamówienia na opublikowane prace należy składać na adres:
Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
ul. Komandorska 118/120, 53-345 Wrocław
tel./fax 71 36 80 602; e-mail: econbook@ue.wroc.pl
www.ksiegarnia.ue.wroc.pl

Druk i oprawa: TOTEM

Spis treści

Wstęp	9
Maria Balcerowicz-Szkutnik, Włodzimierz Szkutnik: Problemy ubezpieczeń społecznych i emerytalnych w Federacji Rosyjskiej / Social and pension insurance problem in Russian Federation	11
Teresa H. Bednarczyk: Mikroubezpieczenia – innowacja produktowa czy powrót do korzeni? / Microinsurance – product innovation or return to the roots?.....	23
Barbara Cieślak: UBI zamiast czy obok SBM? / UBI together with or instead of BMS?.....	33
Roman Garbiec: Financial Effects of Social Security System Reforms in Selected Countries of the European Community / Efekty finansowe reform publicznych systemów ubezpieczeń społecznych w wybranych państwach Unii Europejskiej	42
Aleksandra Hęcka, Krzysztof Łyskawa: Ubezpieczenia zagrożeń środowiskowych w gospodarstwie rolnym / Insurance of environmental risk in agricultural entity.....	55
Marietta Janowicz-Lomott, Krzysztof Łyskawa: <i>Underwriting</i> i polityka lokacyjna zakładów ubezpieczeń w kształtowaniu taryf na rynku ubezpieczeń majątkowych / Underwriting and investment policy of insurances companies in creating rates on the market of property insurance.....	68
Maria Kiedrowska: Ryzyko badania sprawozdania finansowego zakładu ubezpieczeń / Insurance company financial statement audit risk	83
Bożena Kołosowska, Angelika Kuligowska: Praktyczne stosowanie triggerów na przykładzie ubezpieczenia gminy / Practical application triggers on the example of municipalities insurance	94
Rafał Komorowski, Katarzyna Kubiszewska: Islamic Takaful: Has it successfully substituted conventional insurance? / Islamic Takaful: czy skutecznie zastąpił ubezpieczenia komercyjne?.....	104
Lech Kujawski, Agnieszka Pobłocka: Oszacowanie rezerwy IBNR bayesowskim modelem <i>chain ladder</i> w ubezpieczeniach majątkowych / Bayesian methods for calculation the best estimate of IBNR technical provision in non-life insurance	115
Agnieszka Kurdyś-Kujawska: Motywy zakupu dobrowolnych ubezpieczeń przez rolników Pomorza Środkowego / The motives of purchase voluntary insurances by farmers of the Middle Pomerania	124

Robert Kurek: Nadzór nad globalnie działającymi zakładami ubezpieczeń – wymogi kapitałowe / Supervision over the globally functioning insurance institutions – capital requirements	134
Sergiusz Lenhardt: Perspektywy dla rynku ubezpieczeń samochodów zabytkowych w Polsce / Perspectives for the classic cars insurance market in Poland	143
Jerzy Łańcucki: Mechanizm nadzoru nad grupą ubezpieczeniową w nowych regulacjach unijnych / Mechanism of insurance group supervision in new EU regulations	152
Beata Nowotarska-Romaniak: The marketing meaning of customers as users of insurance services / Marketingowe znaczenie klientów jako użytkowników usług ubezpieczeniowych	163
Sylvia Pieńkowska-Kamieniecka: Partycypacja osób młodych w dodatkowym systemie emerytalnym / The participation of young people in the additional pension scheme	171
Piotr Pisarewicz: Wynagrodzenia z tytułu sprzedaży ubezpieczeń jako wyznacznik strategii rozwoju banków opartych na modelu współpracy z zakładami ubezpieczeń / Insurance commissions as a determinant of banks' strategies based on co-operation with an insurance companies.....	182
Agnieszka Przybylska-Mazur: Wybrana metoda oszacowania ryzyka rachunków zdrowia / Selected method of estimating the risk of health accounts.....	194
Paweł Rozumek: Instrumenty zarządzania ryzykiem katastroficznym i niekatastroficznym w rolnictwie – analiza porównawcza ubezpieczeń tradycyjnych i indeksowych / Catastrophic and non-catastrophic risk management tools in agriculture – comparative analysis of traditional and index insurances	203
Ewa Spigarska: Bilans zakładów ubezpieczeń na potrzeby wymogów wypłacalności i do celów statutowych – podobieństwa i różnice / Balance sheet of insurance companies for solvency requirements and for statutory purposes – similarities and differences.....	214
Grzegorz Strupczewski: Identyfikacja kluczowych determinant zakupu dotowanego ubezpieczenia upraw rolnych i zwierząt gospodarskich / Identification of the key determinants of subsidized crop and livestock insurance purchase.....	225
Waldemar Truszkiewicz: Medyczna ocena następstw szkody osobowej w roszczeniach odszkodowawczych – wielowymiarowy, nowoczesny System HBT (Human Body Trauma) Index w miejsce jednowymiarowej tabeli ZUS / Replacement of one-dimensional ZUS (Social Insurance Institute) table with a multidimensional, advanced HBT (Human Body Trauma) system in Medical valuation of consequences of injuries on the person in compensation claims	241

Tatiana Verezubova: Rodzaje ubezpieczeń w strategii finansowej zakładów ubezpieczeniowych rekomendowane na podstawie analizy ryzyka i rentowności – metodologia wyboru / The method of selection of preferential insurance forms based on risk analysis and profitability in financial strategy of insurance companies.....	250
Alicja Wolny-Dominiak, Stanisław Wanat: Taryfikacja <i>a priori</i> z wykorzystaniem kopuli / On the use of copula in ratemaking	258

Wstęp

Ubezpieczenie jako urządzenie gospodarcze funkcjonuje od bardzo dawna. We współczesnych czasach w wielu krajach w ramach rynków finansowych działają rozwinięte w różnym stopniu rynki ubezpieczeniowe. Ryzyko, które towarzyszy człowiekowi od zarania dziejów i które dało początek zorganizowania instytucji ubezpieczenia, występuje ciągle i jednocześnie na skutek rozwoju cywilizacyjnego, rozwoju technologicznego oraz zmieniających się procesów demograficznych. Pojawiają się nowe kategorie ryzyka, które mogą być przedmiotem ubezpieczenia. Wobec zmieniającego się otoczenia rynek ubezpieczeniowy dostosowuje się i proponuje nowe produkty ubezpieczeniowe. Jednocześnie zakłady ubezpieczeń z obowiązku muszą dbać o bezpieczeństwo finansowe swoich klientów, aby nie podważyć podstawowej zasady realności ochrony ubezpieczeniowej. Wszystkie te zjawiska można zaliczyć do obszarów badawczych środowiska akademickiego zajmującego się problematyką ubezpieczeniową. Ponadto nowe tendencje, które pojawiają się w systemach emerytalnych, wywołane starzeniem się społeczeństw i niewydolnością repartycyjnego systemu emerytalnego, a równocześnie pojawiającymi się kryzysami na rynkach finansowych, generują cały szereg problemów badawczych, które są również w zasięgu zainteresowań wielu środowisk akademickich. Funkcjonujący w Polsce od kilkunastu lat nowy system emerytalny budzi różne kontrowersyjne dyskusje i skłania do wstępnej oceny, a zagadnienia te wiążą się z funkcjonowaniem systemu ubezpieczeń społecznych, w tym również z finansowaniem ochrony zdrowia.

Jak widać, tematyka badawcza obejmująca bardzo szeroko rozumiane ubezpieczenia od strony teoretycznej, jak również praktyki ubezpieczeniowej, jest niezwykle obszerna. Wszystkie te problemy są zawarte w przygotowanej pracy.

Zbiór zawiera artykuły, zaprezentowane na IX Międzynarodowej Konferencji „Ubezpieczenia wobec wyzwań XXI wieku”, która odbyła się w maju 2015 r. w Rydzynie. Konferencja jest organizowana z inicjatywy i w wyniku współpracy Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu i Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu. Biorą w niej udział osoby reprezentujące wszystkie czołowe krajowe środowiska akademickie zajmujące się problematyką ubezpieczeniową oraz przedstawiciele praktyki ubezpieczeniowej. Od kilku lat przyjeżdżają również uczestnicy z zagranicy, z takich państw, jak: Rosja, Ukraina, Białoruś, Słowacja, Czechy i Niemcy. Tematyka badawcza prezentowana na obradach koncentruje się wokół następujących zagadnień:

- Funkcjonowanie rynku ubezpieczeniowego w Polsce i w świecie
- Zarządzanie ryzykiem w ubezpieczeniach
- Gospodarka finansowa ubezpieczycieli

- Zastosowanie metod ilościowych w ubezpieczeniach
 - Problematyka prawna w ubezpieczeniach
- Artykuły opublikowane w tym opracowaniu dotyczą powyższych zagadnień.

Pragniemy wszystkim Autorom serdecznie podziękować za przygotowanie interesujących artykułów poruszających wiele ważnych, aktualnych problemów i mamy nadzieję, że publikacja ta wzbogaci literaturę ubezpieczeniową i będzie inspiracją do dalszych badań.

W imieniu Autorów i własnym wyrażamy głęboką wdzięczność recenzentom: Pani Profesor Marii Balcerowicz-Szkutnik, Pani Profesor Teresie Bednarczyk, Panu Profesorowi Jackowi Lisowskiemu, Panu Profesorowi Markowi Monkiewiczowi, Panu Profesorowi Kazimierzowi Ortyńskiemu, Pani Profesor Wandzie Sułkowskiej, Panu Profesorowi Włodzimierzowi Szkutnikowi, Panu Profesorowi Tadeuszowi Szumliczowi oraz Panu Profesorowi Adamowi Śliwińskiemu – za cenne uwagi, które pozwoliły nadać publikacji lepszy kształt.

Redaktorzy naukow
Wanda Ronka-Chmielowiec
Patrycja Kowalczyk-Rólczyńska

Alicja Wolny-Dominiak

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
e-mail: alicja.wolny-dominiak@ue.katowice.pl

Stanisław Wanat

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie
e-mail: eswanat@cyf-kr.edu.pl

TARYFIKACJA *A PRIORI* Z WYKORZYSTANIEM KOPULI

ON THE USE OF COPULA IN RATEMAKING

DOI: 10.15611/pn.2016.415.24

Streszczenie: W dzisiejszej praktyce ubezpieczeniowej taryfikacja w masowych portfelach ryzyk przeprowadzana jest z wykorzystaniem regresyjnych modeli GLM. Najczęściej modeluje się osobno zmienne losowe będące liczbą szkód oraz wartością szkody dla pojedynczego ryzyka, zakładając niezależność pomiędzy tymi zmiennymi. W artykule przedstawiono alternatywne podejście, w którym przyjmuje się występowanie zależności modelowanej za pomocą kopuli. W proponowanym modelu oszacowano łączny rozkład obu zmiennych losowych oraz ich rozkłady brzegowe. Pozwoliło to na estymację wartości oczekiwanej łącznej wartości szkód oraz składki czystej dla pojedynczego ryzyka. W przykładzie empirycznym wykorzystano portfel polis komunikacyjnych. Obliczenia wykonano za pomocą funkcji pakietu {CopulaRegression} programu R.

Słowa kluczowe: taryfikacja, GLM, kopula, składka czysta.

Summary: In the current insurance practice in ratemaking the generalized linear models GLM are used. Most often, separately expected value of expected claim frequency and expected value of claim severity for individual risk taking important thesis of independence of both variables are estimated. The article confronts an alternative approach in which a relationship between these modeled variables using a copula function is acceptable. In the proposed model there were estimated both variables distribution joint as well as their marginal distributions. This allowed the estimation of the expected value of the total claim amount which is interpreted as a pure risk premium for individual risk. For the estimation there was used the likelihood function containing a specified copula function. To illustrate the functioning of the model a numerical example was shown/presented/demonstrated, which uses data from motor insurance databases. The calculations were carried out using the {CopulaRegression} R-package.

Keywords: ratemaking, GLM, copula, pure risk premium.

1. Wstęp

Istotnym elementem działalności zakładu ubezpieczeń majątkowych jest kalkulacja tzw. składki czystej dla pojedynczego ryzyka. W przypadku grup ubezpieczeń (np. komunikacyjne OC/AC), dla których zakład dysponuje masowym portfelem polis, do jej kalkulacji wykorzystuje się modele statystyczne. Ponieważ w praktyce najczęściej portfele nie są jednorodne pod względem szkodowości, przeprowadza się tzw. taryfikację, czyli podział portfela na jednorodne grupy polis. W tym celu stosuje się modele regresyjne, w których dla poszczególnych ryzyk modeluje się liczbę szkód i ich średnią wartość [Antonio, Valdez 2012], a następnie wyznacza składkę czystą jako wartość oczekiwaną zmiennej losowej łącznych szkód dla danego ryzyka [Dimakos, Di Rattalma 2002; Wolny-Dominiak 2014]. W modelach tych zmiennymi objaśniającymi są czynniki opisujące przedmiot ubezpieczenia, osobę ubezpieczającą się oraz region geograficzny.

W opisanym podejściu przyjmuje się istotne założenie niezależności pomiędzy zmiennymi losowymi opisującymi liczbę szkód oraz ich średnią wartość dla pojedynczej polisy. W praktyce założenie to nie zawsze jest spełnione, dlatego w pracy [Krämer i in. 2013] zaproponowano modelowanie zależności między tymi zmiennymi z wykorzystaniem kopuli. Za jej pomocą skonstruowano (dla pojedynczej polisy) łączny dwuwymiarowy rozkład dyskretnej zmiennej losowej modelującej liczbę szkód oraz ciągłej – modelującej wysokość średniej szkody. Następnie, w oparciu o oszacowane parametry tak skonstruowanych rozkładów dla polis tworzących jednorodne grupy, oszacowano łączny rozkład szkód dla portfela.

Celem niniejszej pracy jest propozycja rozszerzenia tego podejścia na model regresyjny, służący do szacowania składki czystej, oraz podanie przykładu jego aplikacji, w którym wykorzystuje się rzeczywiste dane z portfela polis AC, pochodzącego z zakładu ubezpieczeń działającego na rynku polskim.

2. Taryfikacja *a priori* z założeniem niezależności pomiędzy liczbą szkód oraz wartością szkody dla ryzyka

Rozważmy portfel n ryzyk. Przez pojedyncze ryzyko (ozn. S_i , $i = 1, \dots, n$) w portfelu rozumie się zmienną losową o określonym rozkładzie prawdopodobieństwa, opisującą wysokość łącznych szkód wygenerowanych w jednym okresie czasu przez odpowiadającą mu polisę [por. np. Bühlmann, Gisler 2005]. Głównym elementem wyceny ryzyka polisy i określenia dla niej składki (brutto) jest oszacowanie tzw. składki czystej (*pure risk premium*), którą definiuje się jako:

$$\pi_i = E[S_i], i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Przyjmując, że N_i oznacza liczbę szkód, natomiast Y_{ik} , $k = 1, \dots, N_i$, wartość pojedynczej szkody dla i -tego ryzyka, zmienna S_i ma następującą postać:

$$S_i = Y_{i1} + \dots + Y_{iN_i} \quad (2)$$

Zakładając, że zmienne Y_{i1}, \dots, Y_{iN_i} mają takie same rozkłady o wartości oczekiwanej $E(Y_i)$, są zmiennymi niezależnymi oraz niezależnymi od N_i , składkę czystą wyraża wzór:

$$\pi_i = E[S_i] = E[E[S_i | N_i]] = E[Y_i]E[N_i], \quad (3)$$

W przypadku gdy zakład ubezpieczeń dysponuje masowym portfelem ryzyk, jak np. w ubezpieczeniach komunikacyjnych OC/AC czy ubezpieczeniach nieruchomości, do szacowania wartości składki π_i stosowane są dwa modele regresyjne: model dla średniej liczby szkód (*claims frequency model*) oraz model dla średniej wartości szkody (*claims severity model*). Szeroki opis tej praktyki zawierają m.in. prace: [De Jong, Heller 2008; Frees 2009; Ohlsson, Johansson 2010]. Parametry modeli szacowane są w oparciu o dane czerpane z polis ubezpieczeniowych. Klasycznie w podejściu tym przyjmuje się następujące założenia:

- liczba szkód dla pojedynczego ryzyka ma rozkład Poissona $N_i \sim \text{Pois}(\lambda_i)$,
- zmienne Y_{ik} mają takie same rozkłady pochodzące z dyspersyjnej rodziny rozkładów wykładniczych z takim samym parametrem dyspersji $\phi^{(Y)}$.

Postać modeli jest następująca:

$$E[Y_i] = \exp(\mathbf{x}_i^{(Y)} \boldsymbol{\beta}^{(Y)}), \quad E[N_i] = E_i \exp(\mathbf{x}_i^{(N)} \boldsymbol{\beta}^{(N)}), \quad (4)$$

gdzie $\boldsymbol{\beta}^{(Y)} = (\beta_0^{(Y)}, \beta_1^{(Y)}, \dots, \beta_k^{(Y)})^T$, $\boldsymbol{\beta}^{(N)} = (\beta_0^{(N)}, \beta_1^{(N)}, \dots, \beta_k^{(N)})^T$ są wektorami efektów stałych; $\mathbf{x}_i^{(Y)}$, $\mathbf{x}_i^{(N)}$ są i -tymi wierszami macierzy odpowiednio modeli $\mathbf{X}^{(Y)}$ i $\mathbf{X}^{(N)}$, natomiast E_i oznacza ekspozycję na ryzyko (najczęściej czas trwania polisy). Wartość składki czystej wyznacza się wtedy następująco:

$$\hat{\pi}_i = E_i \exp(\mathbf{x}_i^{(Y)} \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(Y)}) \exp(\mathbf{x}_i^{(N)} \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(N)}) \quad (5)$$

Parametry modeli (4) szacuje się osobno, wykorzystując metodę największej wiarygodności.

Opisana powyżej praktyka zakładów ubezpieczeń ma zastosowanie jedynie przy założeniu niezależności wartości szkody Y_i od liczby szkód N_i dla ryzyka. Odrzucenie tego założenia wymaga modelowania łącznego rozkładu zmiennych Y_i i N_i . Do jego konstrukcji można wykorzystać kopule.

3. Wykorzystanie kopuli do konstrukcji dwuwymiarowych modeli z ciągłym i dyskretnym rozkładem brzegowym

Dwuwymiarowa kopula $C : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ jest to dystrybuenta wektora losowego (U_1, U_2) , którego rozkłady brzegowe są jednostajne na przedziale $[0,1]$ ($U_1 \sim \text{Uni}[0,1]$ oraz $U_2 \sim \text{Uni}[0,1]$). Szeroki obszar aplikacji kopuli wynika z twierdzenia Sklara [por. Sklar 1959]. W przypadku dwuwymiarowym twierdzenie to

mówi, że dla każdej dwuwymiarowej dystrybuanty F_{X_1, X_2} wektora losowego (X_1, X_2) z jednowymiarowymi dystrybuantami brzegowymi F_{X_1} i F_{X_2} istnieje dwuwymiarowa kopula C taka, że

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)), \quad (6)$$

oraz odwrotnie, jeżeli C jest kopulą, to równanie (6) określa dwuwymiarową dystrybuantę z dystrybuantami brzegowymi F_{X_1} i F_{X_2} . Twierdzenie to umożliwia dekompozycję rozkładu dwuwymiarowego na rozkłady brzegowe i kopule, a zatem daje możliwość oddzielnego modelowania rozkładów brzegowych i zależności między nimi (za pomocą kopuli).

W pracy kopula zostanie wykorzystana do konstrukcji dwuwymiarowego modelu, w którym jedna brzegowa jest ciągła, a druga dyskretna. Zakładając, że ciągła zmienna losowa Y oraz dyskretna N (przyjmująca wartości $k = 0, 1, \dots$) mają dystrybuanty odpowiednio F_Y i F_N , a struktura zależności między nimi jest modelowana za pomocą kopuli C z parametrem θ , model ten przyjmuje postać [Krämer i in. 2013]:

$$F_{Y, N}(y, k) = C(F_Y(y), F_N(k) | \theta). \quad (7)$$

W części empirycznej pracy rozważano kopule należące do następujących rodzin: Gaussa, Claytona, Gumbela i Franka. Każda z nich zależy od parametru θ , który można wyrazić za pomocą współczynnika τ -Kendalla (własności tych rodzin są szczegółowo omówione m.in. w następujących pracach: [Joe 1997; Nelsen 1999; Wanat 2012]).

W analizie empirycznej (w szczególności do estymacji i predykcji) będzie wykorzystywana łączna funkcja prawdopodobieństwa (gęstości/prawdopodobieństwa) zmiennych Y i N zdefiniowana następująco:

$$f_{Y, N}(y, k) = \frac{\partial}{\partial y} P(Y < y, N = k). \quad (8)$$

Wykorzystując kopule, funkcję tę można przedstawić w następujący sposób [por. Krämer i in. 2013]:

$$f_{Y, N}(y, k | \theta) = f_Y(y)(D_1(F_Y(y), F_N(k) | \theta) - D_1(F_Y(y), F_N(k-1) | \theta)), \quad (9)$$

gdzie

$$D_1(u_1, u_2 | \theta) := \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2 | \theta), \quad (10)$$

oznacza pochodną cząstkową kopuli C względem pierwszej zmiennej dla $u_1, u_2 \in (0, 1)$.

4. Model regresyjny do estymacji składki czystej z zastosowaniem kopuli

W celu estymacji składki czystej z uwzględnieniem zależności pomiędzy liczbą szkód i średnią wartością szkody najpierw zgodnie z (7) skonstruowano następujący model dla polis z co najmniej jedną szkodą:

$$F_{Y,N}(y_i, k_i) = C(F_Y(y_i | \mu_i, \phi^{(Y)}), F_N(k_i | \lambda) | \theta), \quad y_i > 0, \quad k_i = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

W modelu tym założono, że:

- średnia wartość szkody dla i -tej polisy ma rozkład gamma $Y_i \sim \text{Gamma}(\mu_i, \phi^{(Y)})$ z parametrem $\mu_i = \exp(\mathbf{x}_i^{(Y)} \boldsymbol{\beta}^{(Y)})$ uzależnionym od regresorów (X_1, \dots, X_i) oraz parametrem dyspersji $\phi^{(Y)}$ (takim samym dla wszystkich polis);
- liczba szkód dla każdej polisy ma ucięty rozkład Poissona (*zero-truncated Poisson*) $N_i \sim \text{ZTPois}(\lambda)$ z takim samym parametrem λ ;
- strukturę zależności między zmiennymi Y_i a N_i opisuje kopula C z takim samym parametrem θ .

Wektor parametrów tego modelu $(\boldsymbol{\beta}^{(Y)}, \phi^{(Y)}, \lambda, \theta)^T$ oszacowano, wykorzystując MNW z następującą funkcją wiarygodności, wyznaczoną w oparciu o łączny rozkład obu zmiennych:

$$L(y_1, \dots, y_n, k_1, \dots, k_n) = \prod_{i=1}^n f_{Y,N}(y_i, k_i | \mu_i, \phi^{(Y)}, \lambda, \theta), \quad (12)$$

gdzie $f_{Y,N}$ przedstawiono za pomocą (9).

Następnie przyjęto, że liczba szkód dla i -tej polisy ma rozkład Poissona $N_i^0 \sim \text{Pois}(\lambda)$ z parametrem λ oszacowanym za pomocą modelu (11) (stowarzyszony z rozkładem uciętym). Pozwoliło to, zgodnie z wcześniejszą definicją, wyrazić składkę czystą w następujący sposób:

$$\pi_i^z = E[S_i] = E[Y_i N_i^0] = \sum_{k_i} [y_i k_i f_{Y,N}(y_i, k_i | \mu_i, \phi^{(Y)}, \lambda, \theta) dy_i] \quad (13)$$

Ponieważ powyższy wzór ma skomplikowaną postać, uniemożliwiającą analityczne wyznaczenie składki, zastosowano podejście symulacyjne. W tym celu bezpośrednio wykorzystano łączny rozkład $f_{Y,N}(y_i, k_i | \mu_i, \phi^{(Y)}, \lambda, \theta)$, stosując następującą procedurę:

- oszacowano parametry $(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(Y)}, \hat{\phi}^{(Y)}, \hat{\lambda}, \hat{\theta})^T$;
- dla każdej polisy i wygenerowano $s = 1000$ wartości (y_{ij}, k_{ij}) , $j = 1, \dots, s$ z łącznego rozkładu $f_{Y,N}(y_i, k_i | \hat{\mu}_i, \hat{\phi}^{(Y)}, \hat{\lambda}, \hat{\theta})$ określonego wzorem (9);
- wyznaczono wartości składek $\hat{\pi}_i = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s y_{ij} k_{ij}$, $i = 1, \dots, n$.

W celu zobrazowania działania powyższej procedury rozważono portfel polis AC pochodzący z zakładu ubezpieczeń działającego na rynku polskim. Portfel zawiera 7000 polis, w tym 322 polisy szkodowe. Każdemu ryzyku przypisano następujące czynniki:

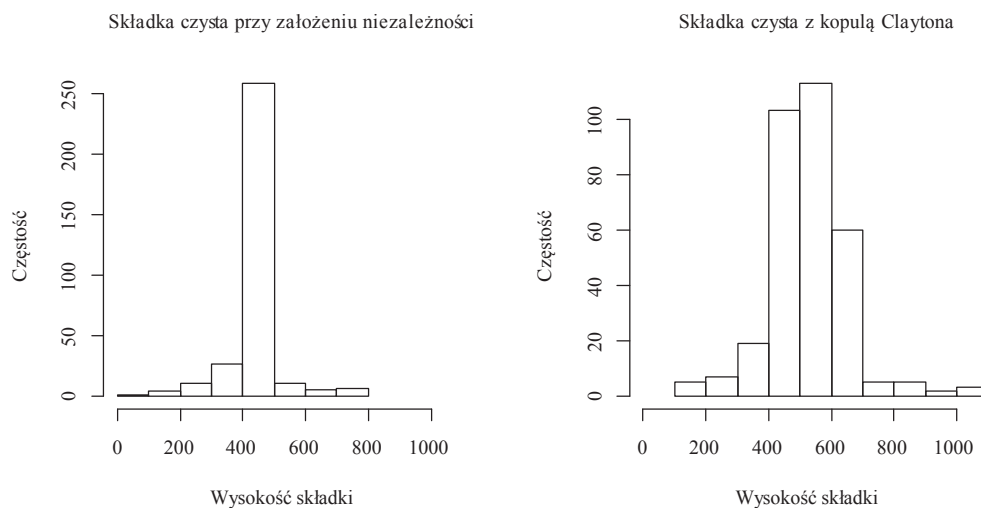
- płeć (X_{11}, X_{12}) ,
- wiek kierowcy $(X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{24}, X_{25}, X_{26})$,
- rodzaj paliwa (X_{31}, X_{32}) ,
- podział składki na raty (X_{41}, X_{42}) ,

gdzie X_{ij} oznacza j -tą realizację i -tego czynnika. Rozpatrywano cztery struktury zależności między liczbą szkód a średnią wartością szkody, modelowane odpowiednio

Tabela 1. Wyniki estymacji

Parametr	Niezależny	Kopula:			
		Gausa	Claytona	Gumbela	Franka
wyraz wolny	8,9636	8,9727	8,9974	8,9635	8,9822
mężczyzna	0,1725	0,1659	0,1498	0,1725	0,1592
wiek: 24-27	-0,0844	-0,0922	-0,1447	-0,0844	-0,0983
wiek: 28-44	-0,5123	-0,5149	-0,5207	-0,5122	-0,5192
wiek: 45-57	-0,4991	-0,5014	-0,5151	-0,4991	-0,5075
wiek: 58-75	-0,5010	-0,5135	-0,5576	-0,5009	-0,5304
wiek: 76+	-1,3358	-1,4627	-1,4619	-1,3360	-1,4643
disel	0,0601	0,0634	0,0695	0,0601	0,0662
składka na raty	-0,1491	-0,1483	-0,1485	-0,1491	-0,1484
$\hat{\lambda}$	0,0877	0,0884	0,0924	0,0877	0,0914
$\hat{\phi}^{(Y)}$	2,6989	1,1121	1,1101	1,1121	1,1126
$\hat{\theta}$	-	0,0675	0,6666	1,0000	0,8427
kryt. AIC	6415	6282	6281	6282	6282

Źródło: obliczenia własne z wykorzystaniem pakietu {CopulaRegression} programu R.



Rys. 1. Porównanie histogramów składki czystej w modelu z założoną niezależną strukturą zależności i strukturą modelowaną kopulą Claytona

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem pakietu {CopulaRegression} programu R.

za pomocą kopuli: Gaussa, Claytona, Gumbela oraz Franka. Dla porównania oszacowano model klasyczny, w którym zakłada się niezależność między tymi wielkościami. Do obliczeń wykorzystano pakiet {CopulaRegression} programu R. Wyniki estymacji przedstawiono w tabeli 1.

Kierując się kryterium informacyjnym AIC, za najlepszy uznano model, w którym struktura zależności modelowana jest kopulą Claytona z parametrem $\hat{\theta} = 0,6666$, co odpowiada współczynnikowi τ -Kendalla: $\hat{\tau} = 0,2499$. Przy jego pomocy oszacowano składki $\hat{\pi}_i^z$. Ich rozkład przedstawia rysunek 1, na którym dla porównania zamieszczono także rozkład składek czystych uzyskanych przy założeniu niezależności między liczbą szkód a średnią wartością szkody. Średnia wartość składki $\hat{\pi}_i^z$ wyniosła 525,23 PLN z odchyleniem standardowym 126,97 PLN, podczas gdy dla $\hat{\pi}_i$ uzyskano średnią 444,31 PLN i odchylenie standardowe 82,75 PLN. Przykładowo, dla mężczyzny w wieku 28-44 lat jeżdżącego samochodem na benzynę i płacącego jednorazowo otrzymano składkę czystą na poziomie 406,90 PLN (dla porównania w niezależności wynosi ona 366,12 PLN).

5. Zakończenie

W praktyce ubezpieczeniowej do szacowania składki czystej w masowych portfelach ryzyk wykorzystuje się modele GLM, w których zakłada się niezależność między zmiennymi losowymi liczby szkód i wysokości pojedynczych szkód, co umożliwia ich osobne (niezależne) modelowanie. Założenie to wydaje się zbyt restrykcyjne i dlatego w pracy przedstawiono alternatywny sposób, w którym stosując podejście zaproponowane w pracy [Krämer i in. 2013], skonstruowano łączny dwuwymiarowy rozkład dyskretnej zmiennej losowej modelującej liczbę szkód oraz ciągłej – modelującej wysokość średniej szkody. Wykorzystując to podejście dla portfela polis AC pochodzących z zakładu ubezpieczeń działającego na rynku polskim, oszacowano cztery modele, w których zależność modelowano odpowiednio kopulą Gaussa, Claytona, Gumbela i Franka. Dla porównania oszacowano także model klasyczny, w którym przyjmuje się niezależność między liczbą szkód a wysokością średniej szkody. Biorąc pod uwagę kryterium informacyjne AIC, modele, w których założono zależność, okazały się lepsze od modelu klasycznego, przy czym najlepiej strukturę zależności między liczbą szkód a średnią wartością szkody w analizowanym portfelu opisuje kopula Claytona.

Składki czyste wyznaczone na podstawie modelu z kopulą Claytona są przeciętnie wyższe i bardziej zróżnicowane od składek wyznaczonych za pomocą modelu klasycznego. Sugeruje to, że stosowany przez zakłady ubezpieczeń klasyczny model GLM przeciętnie nie doszacowuje składki czystej, co oczywiście może wpływać na niewłaściwą wycenę ryzyka polisy i kalkulację składki brutto na niewłaściwym poziomie.

Na zakończenie należy dodać, że niniejsza praca przedstawia wyniki wstępnych badań nad wykorzystaniem kopuli w szacowaniu składki czystej z wykorzystaniem

modeli GLM. Kolejne etapy będą skoncentrowane na analizie słuszności „przeniesienia” parametru uciętego rozkładu Poissona modelującego liczbę szkód polis szkodowych na rozkład Poissona modelujący liczbę szkód wszystkich polis oraz słuszności założenia takich samych struktur zależności między liczbą szkód i wysokością średniej szkody dla polis szkodowych i wszystkich w portfelu.

Podziękowanie

Publikacja została dofinansowana ze środków przyznanych Wydziałowi Zarządzania Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, w ramach dotacji na utrzymanie potencjału badawczego.

Literatura

- Antonio K., Valdez E.A., 2012, *Statistical concepts of a priori and a posteriori risk classification in insurance*, AStA Advances in Statistical Analysis 96, s. 187-224.
- Bühlmann H., Gisler A., 2005, *A course in credibility theory and its applications*, Springer.
- De Jong P., Heller G.Z., 2008, *Generalized linear models for insurance data*, Cambridge University Press.
- Dimakos X.K., Di Rattalma A.F., 2002, *Bayesian premium rating with latent structure*, Scandinavian Actuarial Journal 2002, s. 162-184.
- Frees E.W., 2009, *Regression modeling with actuarial and financial applications*, Cambridge University Press.
- Joe H., 1997, *Multivariate models and multivariate dependence concepts*, CRC Press.
- Krämer N., Brechmann E.C., Silvestrini D., Czado C., 2013, *Total loss estimation using copula-based regression models*, Insurance: Mathematics and Economics 53, s. 829-839.
- Nelsen R.B., 1999, *An introduction to copulas*, Springer Science & Business Media.
- Ohlsson E., Johansson B., 2010, *Non-life insurance pricing with generalized linear models*, Springer.
- Sklar M., 1959, *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*, Université Paris 8.
- Wanat S., 2012, *Modele zależności w agregacji ryzyka ubezpieczyciela*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, Kraków.
- Wolny-Dominiak A., 2014, *Taryfikacja w ubezpieczeniach majątkowych z wykorzystaniem modeli mieszanych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice.