B A D A N I A   O P E R A C Y J N E   I   D E C Y Z J E

Nr 1 2007

Helena GASPARS*

ALOKACJA ZASOBU W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI: MODELE DECYZYJNE I PROCEDURY OBLICZENIOWE

Sformułowano modele optymalizacyjne, mające zastosowanie w zagadnieniu alokacji zasobu w warunkach niepewności, z którą mamy do czynienia wówczas, gdy zyski wynikające ze skierowania dużej ilości środka do konkretnej działalności są opisane jako zmienne losowe o nieznanym rozkładzie. Modele zostały skonstruowane na podstawie reguł Walda, Hurwicza, Bayesa i Savage'a. Przeanalizowano również możliwość zastosowania różnych procedur obliczeniowych, w tym programowania dynamicznego.

Słowa kluczowe: *zagadnienie alokacji zasobu, programowanie dynamiczne, binarne modele decyzyjne, podejmowanie decyzji w warunkach niepewności, stany natury, strategia czysta, strategia mieszana, dyskretne zagadnienie plecakowe*

Wstęp

Zagadnienie optymalnej alokacji zasobu dotyczy sytuacji, w której mamy do dyspozycji określoną ilość jakiegoś jednorodnego zasobu[1]. Może on być użytkowany na rozmaite sposoby. Każde możliwe zastosowanie nazywamy działalnością. W wyniku skierowania całości środka bądź jego części do wybranej działalności pojawia się korzyść. Celem rozdziału zasobu pomiędzy n działalności jest maksymalizacja korzyści całkowitej.

Zauważmy jednak, że z omawianym zagadnieniem wiąże się dość istotne upraszczające założenie. Wyznaczenie optymalnego planu alokacji zasobów wymaga znajomości zysków z tytułu przeznaczenia danej ilości środka na j-tą działalność. W praktyce z kolei rzadko się zdarza, by poziom dochodów był znany, zanim zostanie zrealizowana

* Katedra Badań Operacyjnych, Akademia Ekonomiczna w Poznaniu, al. Niepodległości 10, 60-967 Poznań, e-mail: helenagaspars@poczta.onet.pl

[1] Na przykład siłę roboczą, pieniądze, maszyny, pojazdy, surowiec.

zaplanowana inwestycja. Bezpieczniej jest zatem przyjąć dla każdego wyniku jakiś przedział liczbowy (wersja ciągła) lub chociaż kilkuelementowy zbiór (wersja dyskretna), uwzględniający różne możliwe scenariusze. W literaturze można wprawdzie znaleźć opis stochastycznej odmiany alokacji zasobu [14, s. 242–243], [18, s. 750–753], lecz znajduje ona zastosowanie tylko wtedy, gdy zysk wynikający ze skierowania danej ilości środka do konkretnej działalności jest opisany zmienną losową o znanym rozkładzie. W tej sytuacji mamy do czynienia z podejmowaniem decyzji w warunkach ryzyka, a celem alokacji zasobu jest maksymalizacja zysku oczekiwanego. Gdy rozkład prawdopodobieństwa owej zmiennej nie jest decydentowi znany, warto sformułować problem jako zagadnienie alokacji zasobu w warunkach niepewności.

W niniejszej pracy przedstawiono modele optymalizacyjne, które można by wykorzystać w tak zdefiniowanym problemie, oraz możliwe procedury jego rozwiązania. Analiza będzie dotyczyć zarówno sytuacji, w której maksymalna ilość zasobu skierowanego do wszystkich działalności jest z góry ustalona, jak i przypadku, w którym ilość ta jest dowolna. Prezentację proponowanych modeli i metod poprzedzi opis zagadnienia alokacji zasobów i problemu optymalizacji w warunkach niepewności.

1. Optymalny rozdział zasobu

W zagadnieniu optymalnego rozdziału zasobu zakłada się, że decydent dysponuje pewną ilością środka (b), który może być skierowany do n działalności ($j = 1, 2, \ldots, n$). Nakład środka w każdej działalności (x_j) daje określone korzyści ($f_j(x_j)$), które są zależne zarówno od poniesionych nakładów, jak i od rodzaju działalności, do której zostały skierowane. Korzyści te mierzone są niekoniecznie w jednostkach pieniężnych (np. wykorzystane maszyny mogą wpłynąć na przyrost posiadanych pieniędzy z tytułu sprzedaży wyprodukowanych przez nie wyrobów, ale mogą też wytworzyć inne urządzenia produkcyjne bądź zaowocować wzrostem wydajności przedsiębiorstwa). Celem decydenta jest ustalenie takiego rozdziału posiadanego zasobu, aby osiągnięta korzyść była maksymalna.

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \to \max , \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \le b . \tag{2}$$

Dodatkowo należy przyjąć, że nakład środka na j-tą działalność nie może spaść poniżej poziomu d_j, który najczęściej wynosi 0, ani przekroczyć maksymalnego dopuszczalnego nakładu g_j. Zbiór $\{d_j, \ldots, g_j\}$ stanowi tzw. zbiór stanów dopuszczalnych [17, s. 371].

$$0 = d_j \leq x_j \leq g_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Problem alokacji zasobu można także rozpatrywać przy założeniu, że posiadany zasób ma być w całości skierowany do n działalności. Wówczas warunek (2) ulega zmianie:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = b. \tag{4}$$

Aby rozwiązanie optymalne zadania opisanego warunkami (1), (3), (4) było efektywne, funkcje $f_j(x_j)$ powinny być monotoniczne (por. [6, s. 281–282]), a dokładniej rosnące, dla całego zbioru $\{d_j, \ldots, g_j\}$. Takie założenie nie jest natomiast konieczne, gdy obowiązuje warunek (2).

Analizując omawiane zagadnienie, należy kierować się następującymi założeniami [10, s. 205]:

1) rozdział zasobu jest dokonywany w jednostkach całkowitych,
2) korzyści z poszczególnych działalności można zmierzyć tą samą jednostką miary,
3) korzyść uzyskana z dowolnej działalności jest niezależna od ilości zasobu skierowanego do innej działalności,
4) całkowita korzyść, czyli użyteczność całego procesu alokacji, jest sumą korzyści cząstkowych, rozumianych jako użyteczności pochodzące z indywidualnych działalności.

W dalszej części opracowania korzyść będziemy utożsamiać z zyskiem, a optymalizacja będzie dotyczyć zadania opisanego warunkami (1)–(3).

2. Procedury ustalania optymalnego rozdziału zasobu

Warto podkreślić, że zagadnienie rozdziału zasobu jest problemem kombinatorycznym. Rozpatrzymy sytuację, w której zbiory stanów dopuszczalnych dla wszystkich zmiennych niezależnych są pięcioelementowe, czyli każda zmienna może przyjąć pięć różnych wartości. Jeżeli pominiemy warunek (2), to proces maksymalizacji dla n zmiennych będzie wówczas prowadzić do wyboru spośród 5^n różnych możliwości! Liczba kombinacji kurczy się, gdy zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest ograniczony nierównością (2), lecz i tak przeanalizowanie wszystkich możliwych przypadków w celu wyłonienia strategii optymalnej wymaga nadal wiele czasu. Dlatego zadanie (1)–(3) warto rozwiązywać za pomocą *programowania dynamicznego*, którego twórcą jest R.E. Bellman [1, s. 65–78], [2, s. 11–26], [7, s. 40–42], [11, s. 6–13]. Metoda programowania dynamicznego jest tak skonstruowana, że pozwala szybko rozwiązać problemy znacznie bardziej skomplikowane od zaprezentowanego. Jej efektywność wynika z faktu, iż zamiast żmudnego badania wszystkich wariantów dopuszczalnych, stosuje się odpowiednie równania funkcyjne. Klucz do wyjaśnienia takiego postępowania daje zasada optymalności Bellmana [8, s. 172], [16, s. 101]. Pozwala ona na dekompozycję zadania wyjściowego na ciąg powiązanych ze sobą prostszych zadań, które należy rozwiązywać po kolei [8, s. 171]. Na podstawie optimów warunkowych dla poszczególnych etapów można ustalić optymalne rozwiązanie zadania (1)–(3)[2].

Ponieważ rozdział nakładów jest dokonywany w jednostkach całkowitych, metoda programowania dynamicznego stosowana w zagadnieniu alokacji zasobów ma charakter numeryczny. Funkcje podawane są nie w postaci ogólnego wzoru analitycznego, lecz w formie wartości w tabeli. Tablicowany jest oczywiście tylko pewien określony zbiór wartości funkcji, odpowiadający skończonemu zbiorowi argumentów.

Metoda ogólna programowania dynamicznego nie jest skomplikowana. Można z niej korzystać zarówno wtedy, gdy zależy nam na skierowaniu posiadanego zasobu do wszystkich analizowanych działalności w części lub całości, jak i wówczas, gdy łączna wielkość zasobu, którą mamy do dyspozycji, nie jest z góry ustalona. Jednak wraz ze wzrostem rozmiarów zadania wzrasta również liczba równań funkcyjnych. Dlatego, gdy jest taka możliwość, stosuje się pewne metody uproszczone, które – podobnie jak metoda programowania dynamicznego – zwracają zawsze optimum [9, s. 71–72], [15, s. 165–167].

Problemy alokacyjne, w których całkowita wielkość rozdzielonego zasobu może być dowolna (co jest równoznaczne z pominięciem warunku (2)), prościej rozwiązać za pomocą tzw. *metody ekstremów lokalnych*. Zakłada ona wybór maksymalnej wartości funkcji $f_j(x_j)$ oddzielnie dla każdej działalności. Otrzymane wartości określają optymalne ilości zasobu skierowanego do poszczególnych działalności.

Gdy funkcje zysków krańcowych dla rozpatrywanych działalności są nierosnące:

[2] Zadanie (1)–(3) sprowadza się do obliczenia ekstremum funkcji wielu zmiennych. Można by więc, zamiast programowania dynamicznego polegającego na rozwiązaniu szeregu zadań wyznaczających maksimum (minimum) funkcji jednej zmiennej (chociaż nie wciąż tej samej) [16, s. 100], skorzystać z klasycznych metod rachunku różniczkowego. Polegają one na ustaleniu wzorów pochodnych cząstkowych funkcji głównej względem wszystkich zmiennych po kolei i na przyrównaniu tych pochodnych do zera. Okazuje się jednak, że taki zabieg stanowi warunek konieczny, lecz nie dostateczny dla istnienia ekstremum. Pochodna jest równa zeru nie tylko w punktach, gdzie występują ekstrema, ale również w punktach przegięcia. Kolejne ograniczenie rachunku różniczkowego wynika z faktu, iż w zagadnieniu alokacji poszukujemy ekstremum w pewnym obszarze skończonym. Tymczasem przyrównując pochodne do zera, otrzymujemy ekstrema lokalne. Nie znajdujemy natomiast zazwyczaj ekstremów położonych na krańcach interesującego nas obszaru. Rachunek różniczkowy traci na znaczeniu jeszcze z jednego powodu – przy optymalizacji rozdziału zasobu mamy do czynienia z funkcjami nieróżniczkowalnymi oraz z maksymalizacją na zbiorach nieciągłych. Tymczasem programowanie dynamiczne pokonuje wymienione trudności [2, s. 17].

$$f'_j(x_j+1) \le f'_j(x_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

rozwiązanie problemu alokacji można wyznaczyć, korzystając z kolejnej procedury uproszczonej, tzw. *metody zysków krańcowych*[3]. Najpierw należy określić zyski krańcowe dla każdej działalności zgodnie ze wzorem

$$f'_j(x_j) = f_j(x_j) - f_j(x_j - 1), \quad x_j = 1, 2, \ldots, g_j. \tag{6}$$

Jeżeli ilość zasobu jest dowolna, kolejne jednostki środka przydzielane są tam, gdzie zyski krańcowe są największe i tak długo, aż pojawią się niedodatnie wartości. Poniżej podano dokładny schemat postępowania.

K-tą jednostkę zasobu kierujemy do działalności, która spełnia warunek

$$F'_k(x^{k-1}_j) = \max_{j=1,\ldots,n} \{f'_j(x^{k-1}_j + 1)\}, \tag{7}$$

gdzie

x_j^{k-1} – wartość zmiennej x_j otrzymana w (k–1) etapie.

Początkowo $x_j = x_j^0 = d_j = 0$ dla $j = 1, 2, ..., n$. Zmienna x_j, dla której w k-tym etapie:

a) $f'_j(x_j^{k-1}+1) < F'_k(x_j^{k-1})$, przyjmuje w k-tym etapie wartość $x_j^k = x_j^{k-1}$,

b) $f'_j(x_j^{k-1}+1) = F'_k(x_j^{k-1})$, przyjmuje w k-tym etapie wartość $x_j^k = x_j^{k-1}+1$.

Gdy istnieje więcej niż jedna zmienna x_j, dla której w k-tym etapie $f'_j(x_j^{k-1}+1) = F'_k(x_j^{k-1})$, należy zwiększyć wartość tylko jednej z nich, a pozostałe zmienne rozpatrzyć w kolejnych iteracjach. Jeżeli $F'_k(x_j^{k-1}) \le 0$, dalszy rozdział zasobu nie powoduje wzrostu zysku całkowitego, zatem $x_j^k = x_j^{k-1}$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$.

Metoda zysków krańcowych może zastąpić metodę programowania dynamicznego również wtedy, gdy ilość posiadanego środka jest z góry ustalona i wynosi b. W tej sytuacji rozdział kolejnych jednostek zasobu kończymy, gdy $F'_k(x_j^{k-1}) \le 0$ lub/i gdy $k = b$.[4]

Stosując powyższy algorytm dla zadania (1)–(3) lub problemu pomijającego warunek (2), otrzymamy rozwiązanie optymalne, które niekoniecznie musi być jedynym.

---

[3] Metoda zysków krańcowych jest również nazywana metodą zachłanną. Polega ona na rozpatrywaniu danych w kolejności uporządkowanej. W każdym kroku wybieramy te dane, które są najodpowiedniejsze, a więc decydujemy się na najbardziej obiecującą w danym momencie drogę rozwiązania. Najczęściej metoda zachłanna prowadzi do otrzymania rozwiązania przybliżonego, choć istnieją problemy, dla których daje ona wynik optymalny (np. zagadnienie alokacji zasobu).

[4] Jeżeli zamiast warunku (2) wprowadzimy wzór (4), a funkcje zysków całkowitych będą rosnące dla każdej działalności, to przydzielanie kolejnych jednostek środka dobiegnie końca, gdy $k = b$.

Z większą liczbą strategii optymalnych możemy mieć do czynienia wówczas, gdy istnieje więcej niż jedna zmienna x_j, dla której w k-tym etapie $f_j'(x_j^{k-1}+1) = F_k'(x_j^{k-1})$. Zerowy zysk krańcowy przy jakiejkolwiek działalności również oznacza możliwość wyznaczenia przynajmniej dwóch rozwiązań optymalnych, które z matematycznego punktu widzenia są identyczne, gdyż wiążą się z taką samą wartością funkcji celu. Rozsądek podpowiada nam jednak, by nie kierować zasobu tam, gdzie dodatkowa jednostka środka nie zwiększy zysku całkowitego. Dlatego racjonalną strategią optymalną jest taka strategia optymalna, która pozwala osiągnąć dany poziom zysku przy jak najmniejszej ilości rozdzielonego zasobu.

3. Programowanie w warunkach niepewności

Z programowaniem w warunkach niepewności mamy do czynienia wówczas, gdy przynajmniej jeden parametr zadania jest zmienną losową o nieznanym (i niemożliwym do oszacowania na podstawie danych historycznych) rozkładzie. Wynik działania zależy zatem nie tylko od tego, jaką podejmiemy decyzję, ale także od tego, jaki wystąpi stan natury, przy czym prawdopodobieństwo wystąpienia danego stanu nie jest nam znane. Optymalizacja sprowadza się do wyboru najlepszej decyzji na podstawie macierzy zysków (wypłat):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & & a_{1n} \\ . & . & ..., & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ..., & a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

gdzie:

n – liczba możliwych decyzji,

m – liczba możliwych stanów natury,

a_{ij} – zysk z podjęcia j-tej decyzji, o ile wystąpi i-ty stan natury.

Podejmując decyzję w warunkach niepewności, możemy być zainteresowani ustaleniem optymalnej strategii czystej bądź mieszanej. Ze strategią czystą mamy do czynienia wówczas, gdy zależy nam na wyborze tylko jednej decyzji spośród n możliwych. Z kolei strategia mieszana stanowi kombinację strategii czystych. W literaturze można znaleźć różne podejścia, mające na celu wyznaczenie optymalnej strategii czystej bądź mieszanej [4, s. 136–141], [17, s. 233–242, 248–252]. Wybór konkretnej metody postępowania zależy od preferencji decydenta, jego nastawienia do ryzyka oraz sytuacji, w której ma podjąć decyzję. Celem niniejszego opracowania nie jest przedstawienie wszystkich możliwych procedur, lecz omówienie tej grupy metod, która mogłaby znaleźć bezpośrednio zastosowanie w zagadnieniu optymalnego rozdziału zasobu. Warto zaznaczyć, że alokacja zasobu pomiędzy różne działalności nie polega wcale na wyborze optymalnej strategii mieszanej, lecz na określeniu najlepszej strategii czystej – oddzielnie dla każdej działalności! Początkowo możemy mieć wrażenie, że rozdział środka w warunkach niepewności sprowadza się do znalezienia strategii mieszanej, ponieważ zasób ma trafić do różnych działalności w określonych proporcjach. Takie rozumowanie jest jednak obarczone błędem, gdyż działalności nie powinniśmy utożsamiać z konkretną decyzją, lecz z obszarem, dla którego decyzję należy dopiero podjąć! Warianty decyzyjne dla poszczególnych działalności odpowiadają natomiast elementom zbioru stanów dopuszczalnych $\{d_j, ..., g_j\}$.

Optymalną strategię czystą można wyznaczyć, korzystając m.in. z reguł Walda, Hurwicza, Savage'a i Bayesa (Laplace'a), przy czym należy podkreślić, że żadna z nich nie jest regułą, którą wszyscy we wszystkich sytuacjach uznaliby za rozsądną [4, s. 136].

Reguła Walda (reguła max-min) gwarantuje osiągnięcie pewnego minimalnego zysku, niezależnie od stanu natury. Decydent stosujący tę regułę, nawet przy zajściu najbardziej niekorzystnych okoliczności, uzyska w tych warunkach największą możliwą korzyść (por. [12, s. 130]). Sposób postępowania jest następujący. Należy określić dla każdej decyzji minimalną korzyść, którą możemy uzyskać, biorąc pod uwagę możliwość realizacji kolejnych stanów natury:

$$w_j = \min_i \{a_{ij}\}\,, \tag{9}$$

a następnie wybrać tę decyzję, dla której minimalna korzyść jest największa:

$$w_{j*} = \max_j \{w_j\}\,. \tag{10}$$

Reguła Walda jest zalecana pesymistom, czyli osobom o dużej awersji do ryzyka. Reguła max-min jest również nazywana regułą asekurancką [4, s. 137].

Reguła Hurwicza stanowi próbę połączenia dwóch skrajności (max-min i max-max). Wykorzystuje ona współczynnik ostrożności (pesymizmu), którego poziom ustala decydent:

$$0 \le \alpha \le 1\,. \tag{11}$$

Dla każdego wariantu decyzyjnego ustalamy zysk ważony:

$$h_j(\alpha) = \alpha \min_i \{a_{ij}\} + (1-\alpha) \max_i \{a_{ij}\}\,. \tag{12}$$

Optymalną strategią jest ta, dla której ważony zysk jest największy:

$$h_{j*}(\alpha) = \max_j \{h_j(\alpha)\}\,. \tag{13}$$

W szczególnych przypadkach reguła Hurwicza sprowadza się do reguły Walda (gdy $\alpha = 1$) bądź do omówionej poniżej reguły Bayesa (gdy występują tylko dwa stany natury i α = 0,5). W przypadku skrajnych wartości współczynnika ostrożności regułę Hurwicza można nazwać regułą asekurancką lub hazardową [4, s. 137].

Reguła Bayesa (*Laplace'a*), nazywana również regułą braku dostatecznej racji, zakłada, że skoro nie znamy prawdopodobieństw zaistnienia poszczególnych stanów natury, możemy przyjąć, że są one równie prawdopodobne. Wystarczy znaleźć dla każdej decyzji oczekiwaną korzyść (średni zysk):

$$b_j = \frac{1}{m}\sum_{i}^{m} a_{ij} \tag{14}$$

i wybrać wariant decyzyjny charakteryzujący się największym średnim zyskiem [4, s. 138]:

$$b_{j*} = \max_j \{b_j\}\,. \tag{15}$$

Zrównanie prawdopodobieństw dla stanów natury sprawia, iż mamy do czynienia z jednym z możliwych przypadków stochastycznego problemu alokacji zasobu[5].

Wreszcie *reguła Savage'a* (zwana także regułą min-max bądź regułą minimalnego żalu) ma na celu minimalizację utraconych korzyści, związanych z podjęciem decyzji, która okazała się nietrafna w kontekście zrealizowanego stanu natury. Dla każdego stanu natury ustalamy maksymalny zysk:

$$A_i = \max_j \{a_{ij}\}\,. \tag{16}$$

Wyznaczamy macierz względnych strat (utraconych korzyści):

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11}, & s_{12}, & & s_{1n} \\ . & . & \dots, & . \\ . & . & & . \\ s_{m1} & s_{m2} & \dots, & s_{mn} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

przy czym

$$s_{ij} = A_i - a_{ij}\,. \tag{18}$$

Dla każdej decyzji określamy maksymalną względną stratę

$$s_j = \max_i \{s_{ij}\} \tag{19}$$

i wybieramy tę decyzję, dla której maksymalna strata jest najmniejsza:

[5] Por. wstęp oraz [18].

$$s_{j*} = \min_j \{s_j\} . \qquad (20)$$

Savage proponuje zatem minimalizację względnych strat, które stanowią różnicę między najlepszym rezultatem, jaki można uzyskać, gdy wystąpi dany scenariusz, a wynikiem osiąganym przy wyborze konkretnej strategii i jednoczesnym wystąpieniu tego scenariusza. Reguła Savage'a jest też znana pod nazwą minimaksowej reguły zawodu [12, s. 131].

Wymienione konkurencyjne reguły mogą prowadzić do wyboru różnych decyzji.

4. Optymalizacja rozdziału zasobu w warunkach niepewności – modele decyzyjne

Załóżmy, że decydent dysponuje tabelą zysków całkowitych (w tys. zł), uwzględniającą dwa możliwe scenariusze: pesymistyczny (I) i optymistyczny (II). Środek może być ulokowany w trzech działalnościach A, B i C (n = 3), a ilość środka przeznaczona na j-tą działalność nie może przekroczyć 3 jednostek ($d_j = 0$, $g_j = 3$). Jeżeli na daną działalność nie zostanie przeznaczona ani jedna jednostka zasobu, dochód dla wariantu zarówno pesymistycznego, jak i optymistycznego będzie zerowy. Decydent zamierza tak przydzielić posiadany zasób środka, aby osiągnąć jak największe zyski.

Tabela 1

Tabela zysków całkowitych (wariant pesymistyczny i optymistyczny)

x_j	Działalność A		Działalność B		Działalność C	
	wariant I	wariant II	wariant I	wariant II	wariant I	wariant II
1	5	8	3	4	4	5
2	6	8	5	8	6	10
3	4	5	7	12	8	9

W tym przypadku bezpośrednie zastosowanie wspomnianej metody programowania dynamicznego, czy też procedur uproszczonych, nie wydaje się możliwe, choć można by było potraktować powyższe zadanie jako dwa odrębne problemy i wyznaczyć dwie strategie optymalne – dla obu wariantów osobno. Takie podejście pozbawia jednak decydenta możliwości uwzględnienia w modelu swoich preferencji i przypuszczeń co do szans wystąpienia danego scenariusza. Celem zaproponowanych poniżej modeli decyzyjnych jest ustalenie optymalnej alokacji zasobu w warunkach niepewności. Każdy model został sformułowany na podstawie innej reguły postępowania (zob. rozdz. 3).

a) *Reguła Walda* (max-min)

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=d_j}^{g_j}(\min_k\{a_{ijk}\}\cdot x_{ij})\to \max\ , \tag{21}$$

$$\sum_{i=d_j}^{g_j} x_{ij}=1\ ,\quad j=1,\ ...,\ n, \tag{22}$$

$$x_{ij}\in\{0,1\}\ , \tag{23}$$

gdzie:

n – liczba działalności,

a_{ijk} – zysk z j-tej działalności przy założeniu, że skierowanych zostanie do niej i jednostek oraz że wystąpi k-ty stan natury,

x_{ij} – zmienna przyjmuje wartość 1, gdy na j-tą działalność przeznaczymy i jednostek środka,

d – minimalny dopuszczalny nakład środka na j-tą działalność,

g_j – maksymalny dopuszczalny nakład środka na j-tą działalność.

Właśnie równania (22)–(23) świadczą o tym, iż przy alokacji zasobu w warunkach niepewności poszukujemy optymalnej strategii czystej (por. rozdz. 3). Gdy celem zadania jest skierowanie środka w ilości nie przekraczającej b jednostek, do modelu (21)–(23) należy dołączyć formułę:

$$\sum_{i=d_j}^{g_j}\left(i\cdot\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\right)\le b\ . \tag{24}$$

W naszym przykładzie zadanie (21)–(23) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}&0x_{01}+\min\{5,8\}x_{11}+\min\{6,8\}x_{21}+\min\{4,5\}x_{31}+0x_{02}\\&+\min\{3,4\}x_{12}+\min\{5,8\}x_{22}+\min\{7,12\}x_{32}+0x_{03}\\&+\min\{4,5\}x_{13}+\min\{6,10\}x_{23}+\min\{8,9\}x_{33}\to \max,\end{aligned} \tag{25}$$

$$x_{01}+x_{11}+x_{21}+x_{31}=1 \tag{26}$$

$$x_{02}+x_{12}+x_{22}+x_{32}=1 \tag{27}$$

$$x_{03}+x_{13}+x_{23}+x_{33}=1 \tag{28}$$

$$x_{01},x_{02},x_{03},...,x_{33}\in\{0,1\}\ . \tag{29}$$

Gdy dany jest parametr b (np. równy 5), nierówności (24) odpowiada warunek:

$$0(x_{01}+x_{02}+x_{03})+1(x_{11}+x_{12}+x_{13})+2(x_{21}+x_{22}+x_{23})+3(x_{31}+x_{32}+x_{33})\le 5\,. \quad (30)$$

Rozwiązaniem zadania (25)–(29) jest strategia (2,3,3)[6]. Maksymalny gwarantowany zysk wynosi wówczas 21 tys. zł. W przypadku problemu (25)–(30) istnieją trzy strategie optymalne: (1,1,3), (1,2,2) oraz (1,3,1).

Zauważmy, iż przykład został tak skonstruowany, że wystarczy zredukować tabelę zysków całkowitych, koncentrując się na wariancie pesymistycznym, i rozwiązać zwykłe zadanie rozdziału zasobu. Niekiedy jednak układ wartości odpowiadających poszczególnym scenariuszom może nie pozwolić na takie uproszczenie.

Warunki ograniczające modeli optymalizacyjnych w poszczególnych regułach postępowania są identyczne. Dlatego w dalszej części rozdziału przedstawione zostaną jedynie funkcje celu odpowiadające kolejnym regułom.

b) *Reguła Hurwicza*

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=d_j}^{g_j}((\alpha \min_k\{a_{ijk}\}+(1-\alpha)\max_k\{a_{ijk}\})x_{ij})\to \max\,. \quad (31)$$

Jeżeli założymy, że $\alpha = 0{,}2$, funkcja celu przyjmie postać:

$$\begin{aligned}&0x_{01}+7{,}4x_{11}+7{,}6x_{21}+4{,}8x_{31}+0x_{02}+3{,}8x_{12}+7{,}4x_{22}+11x_{32}\\&+0x_{03}+4{,}8x_{13}+9{,}2x_{23}+8{,}8x_{33}\to \max.\end{aligned} \quad (32)$$

Gdy łączny zasób przydzielony do poszczególnych działalności może być dowolny[7], rozwiązaniem optymalnym jest strategia (2,3,2). Jeśli natomiast decydent zamierza skierować maksymalnie 5 jednostek[8], powinien zrealizować plan (1,2,2).

c) *Reguła Bayesa* (*Laplace'a*)

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=d_j}^{g_j}\left(\frac{\sum_{k=1}^{T}a_{ijk}}{T}\cdot x_{ij}\right)\to \max\,, \quad (33)$$

gdzie T – liczba rozpatrywanych scenariuszy.

Wyrażenie (33) będzie dla naszego przykładu wyglądało następująco:

$$\begin{aligned}&0x_{01}+6{,}5x_{11}+7x_{21}+4{,}5x_{31}+0x_{02}+3{,}5x_{12}+6{,}5x_{22}+9{,}5x_{32}\\&+0x_{03}+4{,}5x_{13}+8x_{23}+8{,}5x_{33}\to \max.\end{aligned} \quad (34)$$

[6] Należy przeznaczyć 2 jednostki środka na działalność A i po 3 jednostki na działalności B i C.
[7] Zob. wzory (26)–(29) oraz (32).
[8] Zob. wzory (26)–(30) oraz (32).

Rozwiązaniem zadania (26)–(29) i równania (34) jest plan (2,3,3). Po uwzględnieniu warunku (30) otrzymujemy wynik (1,2,2).

W przypadku reguł Hurwicza i Bayesa celowo nie został podany zysk odpowiadający wyznaczonym strategiom, gdyż zastosowane funkcje celu stanowią jedynie sposób wyłonienia optymalnego rozwiązania na podstawie preferencji decydenta. Nie dają one natomiast informacji o zysku faktycznie przez niego otrzymanym, gdyż wagi tych funkcji wynikają z uśrednienia pewnych wartości.

d) *Reguła Savage'a* (min-max)

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=d_j}^{g_j}(\max_k\{s_{ijk}\}\cdot x_{ij})\to\min, \tag{35}$$

$$s_{ijk}=\max_i\{a_{ijk}\}-a_{ijk},\quad j=1,\ldots,n,\quad i=d_j,d_j+1,\ldots,g_j,\quad k=1,\ldots,T, \tag{36}$$

gdzie s_{ijk} – względna strata związana z j-tą działalnością przy założeniu, że skierowanych zostanie do niej i jednostek oraz że wystąpi k-ty stan natury.

Na podstawie względnych strat ustalonych dla analizowanego przykładu (tab. 2) można sformułować odpowiednią funkcję celu:

$$\begin{aligned}&\max\{6,8\}x_{01}+\max\{1,0\}x_{11}+\max\{0,0\}x_{21}+\max\{2,3\}x_{31}+\max\{7,12\}x_{02}+\\&\max\{4,8\}x_{12}+\max\{2,4\}x_{22}+\max\{0,0\}x_{32}+\max\{8,10\}x_{03}+\max\{4,5\}x_{13}+\\&\max\{2,0\}x_{23}+\max\{0,1\}x_{33}\to\min.\end{aligned} \tag{37}$$

Tabela 2

Tabela względnych strat

x_j	Działalność A		Działalność B		Działalność C	
	wariant I	wariant II	wariant I	wariant II	wariant I	wariant II
0	6	**8**	7	**12**	8	**10**
1	**1**	0	4	**8**	4	**5**
2	**0**	**0**	2	**4**	**2**	0
3	2	**3**	**0**	**0**	0	**1**

Kierując się równaniami (26)–(29) i (37), decydent powinien wybrać plan (2,3,3). Gdy z góry określona jest maksymalna ilość środka (b = 5), optymalny wynik jest następujący: (1,3,1).

Zaproponowane modele różnią się od zadania (1)–(3) nie tylko postacią funkcji celu, która tym razem uwzględnia fakt działania w warunkach niepewności, lecz interpretacją zmiennych decyzyjnych. W pierwotnym modelu zbudowanym dla deterministycznej odmiany zagadnienia alokacji zmienne x_j mogą przyjmować wartości ze zbioru liczb naturalnych i określają wielkość środka skierowanego do danej działalności. Jednakże, ze względu na stablicowanie wartości funkcji zysków całkowitych, wygodniej jest operować przy formułowaniu zadań zmiennymi binarnymi z podwójnym indeksem. Zmienna x_{ij} może być równa „1”, gdy na j-tą działalność przeznaczamy i jednostek środka, bądź „0”, gdy taka wielkość zasobu nie zostanie do niej skierowana. Taki zabieg oznacza jednak, że dla każdej działalności należy zdefiniować aż $(g_j - d_j + 1)$ zmiennych decyzyjnych[9]. Liczba warunków ograniczających nie ulegnie wprawdzie zmianie, ale ich postać stanie się bardziej złożona.

Zwróćmy uwagę na jeszcze jedną kwestię. W dotychczasowych rozważaniach przyjęto, że decydent, w zależności od swego nastawienia do ryzyka, może wybrać model skonstruowany na podstawie jednej z omówionych reguł. Z przedstawionych zadań wynika, iż wybrane podejście należy stosować w stosunku do wszystkich rozpatrywanych działalności. Może się jednak zdarzyć, iż decydent w różny sposób będzie oceniał inwestycje poczynione w poszczególnych działalnościach. Na przykład, jego zdaniem, wystąpienie pesymistycznego scenariusza może okazać się znacznie bardziej realne w przypadku pierwszej działalności, aniżeli w przypadku pozostałych. Jeżeli założymy, iż sceptycyzm decydenta wobec konkretnej działalności jest całkowicie subiektywny, to nic nie stoi na przeszkodzie, aby zastosować odpowiednio skonstruowaną hybrydę uwzględniającą różne reguły postępowania dla kolejnych działalności. Warunki takiego modelu mieszanego nie ulegną zmianie. Zmienią się tylko wagi funkcji celu.

5. Możliwe procedury rozwiązania modeli decyzyjnych

Z zaproponowanych w rozdziale 4 modeli decyzyjnych i podanego przykładu liczbowego wynika, że zastosowanie omówionych reguł pozwala przypisać każdej decyzji w ramach danej działalności jedną konkretną wartość, co bardzo ułatwia dalsze obliczenia. Znika bowiem nieliniowy charakter rozpatrywanych zadań. Po zredukowaniu modeli do postaci niezawierającej funkcji typu max{} lub min{} korzystanie z narzędzia *Solver* znajdującego się w pakiecie Excel jest możliwe, ale tylko w przypadku zadań o małych rozmiarach. Problemy charakteryzujące się dużą liczbą zmiennych i warunków ograniczających powinny być rozwiązywane za pomocą lepszych pakietów[10]. Ręczne rozwiązanie zaprezentowanych zadań nie jest proste, gdyż ich zmienne decyzyjne przyjmują wartości binarne, a więc ustalenie strategii optymalnej nawet dla problemów o małych rozmiarach może okazać się dość czasochłonne.

[9] Rozmiar modeli jest więc wykładniczy względem danych wejściowych.

[10] Zob. m.in. program QS (Quant System) oraz pakiet CPLEX (http://www.ilog.com/products/cplex).

Przedstawione modele przypominają zadania dotyczące binarnego zagadnienia załadunku, zwanego również dyskretnym problemem plecakowym bądź problemem złodzieja rabującego sklep. Zagadnienie to formułujemy następująco. Mamy do dyspozycji plecak o maksymalnej pojemności (nośności) b oraz zbiór n elementów $\{x_1, x_j, ..., x_N\}$, przy czym każdy element ma określoną wartość c_j oraz wielkość w_j (np. wagę). Należy znaleźć takie upakowanie plecaka, aby suma wartości znajdujących się w nim elementów była jak największa. Zmienna x_j przyjmuje wartość 1, gdy j-ty przedmiot zabieramy do plecaka, a „0", gdy ten przedmiot nie znajdzie się w plecaku. Dyskretne zagadnienie plecakowe jest zaliczane do klasy problemów NP-trudnych, a te z kolei można rozwiązać za pomocą przeglądu zupełnego, o dużej złożoności obliczeniowej: $\Theta(2^n)$, lub metody znacznie bardziej skutecznej, czyli *programowania dynamicznego*[11]. My również odwołamy się do tej metody, zastępując binarne zmienne decyzyjne z podwójnym indeksem zmiennymi x_j takimi, że $j = 1, 2, ..., n$ i $x_j \in \{d_j, ..., g_j\}$. Metoda programowania dynamicznego sprawdza się niezależnie od przyjętej reguły postępowania (patrz. rozdz. 4). Przykładowo, tabele 3, 4 i 5 zawierają informacje o możliwych maksymalnych względnych stratach dla n etapów, obliczonych na podstawie programowania dynamicznego przy założeniu, iż decydent stosuje regułę Savage'a[12].

Tabela 3

Tabela możliwych względnych strat (etap 1)[13]

x	x_A	$s_A(x_A)$
0	0	8
1	1	1
2	2	0
3	2	0
4	2	0
5	2	0

[11] http://pl.wikipedia.org/wiki/Problem_plecakowy

[12] Ze względu na wzór (19), danymi wejściowymi w zadaniu wykorzystującym regułę Savage'a są te względne straty, które okazały się najwyższe dla poszczególnych decyzji (podkreślono je w tab. 2). Wartości te posłużą nam do ustalenia łącznej względnej straty dla różnych wariantów decyzyjnych, a kombinacje, dla których poziom straty jest najniższy, wskażą rozwiązania optymalne.

[13] Z uwagi na przyjętą w rozdziale 4 wartość parametru b, względne straty obliczono jedynie dla x = 0, 1, …, 5, gdzie x stanowi wielkość posiadanego zasobu (który niekoniecznie musi być w całości rozdzielony). Wyrażenie $s_A(x_A)$ oznacza maksymalną względną stratę dla działalności A z tytułu skierowania do niej x_A jednostek zasobu. Ponieważ, począwszy od $x_A = 3$, funkcja względnych strat zaczyna rosnąć, nie warto kierować do analizowanej działalności więcej niż 2 jednostki środka nawet wówczas, gdy wielkość posiadanego zasobu jest większa.

Tabela 4

Tabela możliwych względnych strat (etap 2)[14]

	$s_B(x_B)$	12	8	4	0
$S_1(x)$	x \ x_B	0	1	2	3
8	0	**20**	–	–	–
1	1	**13**	16	–	–
0	2	12	**9**	12	–
0	3	12	8	**5**	8
0	4	12	8	4	**1**
0	5	12	8	4	**0**

Tabela 5

Tabela możliwych względnych strat (etap 3)

	$s_C(x_C)$	10	5	2	1
$S_2(x)$	x \ x_C	0	1	2	3
20	0	30	–	–	–
13	1	23	25	–	–
9	2	19	18	22	–
5	3	15	14	15	21
1	4	11	10	11	14
0	5	10	6	7	10

Z tabel 3–5 można odczytać optymalne strategie dla różnych poziomów parametru *b*.

Dzięki metodzie programowania dynamicznego w miarę szybko otrzymujemy rozwiązanie, lecz gdy liczba rozpatrywanych działalności, bądź/i liczebność ich zbiorów stanów dopuszczalnych, wzrasta, wtedy zwiększa się również liczba dokonywanych obliczeń. Każda dodatkowa działalność wymaga wygenerowania kolejnej tabeli możliwych względnych strat (dla reguły Savage'a) bądź możliwych zysków (dla pozostałych reguł). Dlatego, jeżeli tylko spełnione są odpowiednie założenia, warto korzystać z procedur uproszczonych, o których była mowa w rozdziale 2.

[14] $S_1(x)$ określa optymalny (minimalny) poziom względnej straty dla różnych wielkości posiadanego środka przy założeniu, że przydzielany jest on wyłącznie działalności A. $S_2(x)$ – optymalny (minimalny) poziom względnej straty dla różnych wielkości posiadanego środka przy założeniu, że przydzielany jest on działalności A i B.

Tabela 6

Optymalne strategie przy różnych poziomach parametru *b* [15]

b	Działalność A	Działalność B	Działalność C
0	0	0	0
1	1	0	0
2	1	0	1
3	1	1	1
4	1	2	1
5	1	3	1

Gdy łączna ilość środka nie jest z góry ustalona, rozpatrywany problem przestaje być NP-trudny. W takim przypadku znacznie szybciej uzyskamy rozwiązanie dzięki *metodzie ekstremów lokalnych*, która znajduje zastosowanie we wszystkich czterech modelach. W przypadku reguły Savage'a wystarczyłoby znaleźć minimalne wartości dla każdej działalności spośród maksymalnych względnych strat (tab. 7). Przy regule Walda należałoby odszukać maksymalne wartości spośród zysków minimalnych (tab. 8), natomiast przy modelach skonstruowanych na podstawie reguł Hurwicza, czy też Bayesa, poszukiwane ekstrema dla każdej działalności byłyby maksymalnymi średnimi ważonymi bądź arytmetycznymi.

Tabela 7

Tabela maksymalnych względnych strat (reguła Savage'a)

x_j	Działalność A	Działalność B	Działalność C
0	8	12	10
1	1	8	5
2	$\underline{0}$	4	2
3	3	$\underline{0}$	$\underline{1}$

Tabela 8

Tabela minimalnych zysków (reguła Walda)

x_j	Działalność A	Działalność B	Działalność C
0	0	0	0
1	5	3	4
2	$\underline{6}$	5	6
3	4	$\underline{7}$	$\underline{8}$

[15] Model skonstruowany na podstawie reguły Savage'a zakłada minimalizację maksymalnych względnych strat, a więc wyznaczanie strategii optymalnych dla wybranej wartości parametru *b* sprowadza się do znalezienia najmniejszych wartości funkcji $S_3(x)$, które pogrubiono w tabeli 5, a potem $S_2(x)$ i $S_1(x)$. W przypadku pozostałych trzech reguł postępowania to największe wartości tychże funkcji określają rozwiązanie optymalne.

Problem może pojawić się wówczas, gdy należy skierować do analizowanych działalności co najwyżej b jednostek zasobu. W tej sytuacji należy skorzystać z *metody zysków krańcowych*, ale pod warunkiem, że ich funkcje będą nierosnące.

Tabela 9

Tabela zysków krańcowych (reguła Walda)

x_j	Działalność A	Działalność B	Działalność C
1	5	3	4
2	1	2	2
3	–2	2	2

Tabela 10

Tabela zysków krańcowych (reguła Hurwicza)

x_j	Działalność A	Działalność B	Działalność C
1	7,4	3,8	4,8
2	0,2	3,6	4,4
3	–2,8	3,6	–0,4

Tabela 11

Tabela zysków krańcowych (reguła Bayesa)

x_j	Działalność A	Działalność B	Działalność C
1	6,5	3,5	4,5
2	0,5	3	3,5
3	–2,5	3	0,5

Okazuje się, że rozpatrywany przykład liczbowy spełnia ten warunek dla wszystkich trzech modeli zawierających kryterium maksymalizowane (tab. 9–11). Ustalenie rozwiązania optymalnego dla dowolnego poziomu parametru b jest zatem możliwe. Na przykład, stosując regułę Walda i przyjmując, że b = 5, powinniśmy pierwszą jednostkę środka skierować do działalności A, drugą do C, trzecią do B, czwartą np. do B i wówczas piątą do B lub C. Jeżeli czwarta jednostka zostanie przydzielona działalności C, to piąta może trafić do działalności B lub C. Posiadany zasób można zatem ulokować na trzy różne sposoby.

W przypadku kryterium minimalizowanego stosujemy oczywiście *metodę kosztów krańcowych*, z której można skorzystać, gdy są one niemalejące dla każdej działalności (por. [15, s.167]). Kolejne jednostki środka są przydzielane tam, gdzie koszty krańcowe są najmniejsze i tak długo, aż pojawią się nieujemne wartości. Gdy ilość posiadanego zasobu ma być rozdzielona w całości, procedura ta znajduje zastosowanie, o ile funkcje kosztów całkowitych są monotoniczne, a dokładniej malejące.

Celem zadania skonstruowanego na podstawie reguły Savage'a nie jest jednak minimalizacja kosztów, lecz minimalizacja względnych strat. Gdybyśmy mieli do czynienia z tabelą kosztów krańcowych, wówczas alokacja zasobu polegałaby na przydzielaniu środka, poczynając od najmniejszych kosztów krańcowych, przy czym punktem wyjścia przy rozdziale zasobu byłby pierwszy wiersz, czyli ten, dla którego alokacja jest na poziomie jednej jednostki. W naszym przypadku należy przyjąć nieco inny sposób postępowania. Tutaj punktem wyjścia nie jest pierwszy wiersz, lecz te wiersze, które dla poszczególnych działalności wskazują rozwiązanie optymalne przy założeniu, że łączna wielkość przydzielonego zasobu może być dowolna (zob. tab. 7). Chodzi zatem o wiersz trzeci dla działalności A i wiersz czwarty dla pozostałych dwóch działalności. Kombinacja tych „poziomów" wiąże się jednak z alokacją 8 jednostek (2+3+3). Jeżeli dysponujemy pięcioma jednostkami, należy zmniejszyć ilość przydzielonego zasobu, „przesuwając się" do wyżej położonych komórek w taki sposób, aby przyrosty maksymalnej względnej straty (wzór (38)) były jak najmniejsze.

$$s'_j(x_j) = \begin{cases} s_j(x_j) - s_j(x_j+1) & \\ 0 & , \quad \text{gdy} \\ s_j(x_j) - s_j(x_j-1) & \end{cases} \begin{array}{l} x_j = 0,1,\ldots,x_j^*-1 \\ x_j = x_j^* \\ x_j = x_j^*+1, x_j^*+2,\ldots,g_j, \end{array} \tag{38}$$

gdzie:

$s'_j(x_j)$ – przyrost maksymalnej względnej straty związany ze zmianą ilości środka przydzielonego j-tej działalności o jedną jednostkę,

$s_j(x_j)$ – maksymalna względna strata związana ze skierowaniem x_j jednostek środka do j-tej działalności,

x_j^* – optymalna wielkość środka skierowanego do j-tej działalności przy założeniu, że łączna ilość zasobu przydzielonego wszystkim działalnościom może być dowolna,

g_j – maksymalny dopuszczalny nakład środka na j-tą działalność.

W pierwszym rzędzie należy zmniejszyć ilość przydzielonego środka o jedną jednostkę w przypadku działalności A i C (tab. 12). Dzięki temu łączna wielkość rozdzielonego zasobu będzie równa już tylko 6 jednostek. Następny krok polega na obniżeniu wielkości środka przydzielonego działalności C o jeszcze jedną jednostkę. Strategii optymalnej (1,3,1) odpowiada wzrost względnej straty w stosunku do rozwiązania wygenerowanego dla zadania pomijającego warunek (2) o 1 + 1 + 3 = 5 tys. zł.

Przyjmijmy, że zaprezentowana nowa procedura będzie nosić nazwę *metody przyrostów względnych strat*. Tak jak zastosowanie, znanej z literatury, metody zysków (kosztów) krańcowych wymaga spełnienia warunku o nierosnących zyskach krańcowych (niemalejących kosztach krańcowych), tak też korzystanie z metody przyrostów względnych strat jest możliwe, o ile spełnione zostanie następujące założenie:

$$\begin{matrix} s'_j(x_j) \geq s'_j(x_j+1) \\ s'_j(x_j) \geq s'_j(x_j-1) \end{matrix}, \quad \text{gdy} \quad \begin{matrix} x_j = 0, 1, ..., x_j^* - 1 \\ x_j = x_j^* + 1,\ x_j^* + 2, ..., g_j. \end{matrix} \tag{39}$$

Tabela 12

Tabela przyrostów maksymalnych względnych strat (reguła Savage'a)

x_j	Działalność A	Działalność B	Działalność C
0	7	4	5
1	1	4	3
2	0	4	1
3	3	0	0

Krok 1

Krok 2

Krok 1

Zauważmy, że gdy ilość zasobu jest dowolna, rozwiązanie otrzymujemy od razu – zerowa wartość przyrostu maksymalnej straty wskazuje optymalną liczbę jednostek, jaką należy skierować do danej działalności.

Poniżej podano algorytm generowania strategii optymalnej metodą przyrostów maksymalnych względnych strat, gdy ilość rozdzielonego środka nie może przekroczyć *b*.

Mając dane rozwiązanie optymalne dla zadania pomijającego warunek (24), sprawdzamy, czy $r^* = \sum_{j=1}^{n} x_j^* \leq b$, gdzie x_j^* – optymalna ilość środka skierowanego do *j*-tej działalności. Jeżeli tak, otrzymana strategia jest również optymalna dla problemu uwzględniającego nierówność (24). Jeżeli $r^* = \sum_{j=1}^{n} x_j^* > b$, należy zmniejszyć wielkość ulokowanego zasobu w stosunku do rozwiązania $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ o $(r^* - b)$ jednostek. *K*-tą jednostkę środka „odbieramy" tej działalności, która w danym etapie spełnia warunek

$$S'_k(x_j^{k-1}) = \min_{j=1,\ldots,n} \{s'_j(x_j^{k-1} - 1)\}, \tag{40}$$

gdzie: x_j^{k-1} – wartość zmiennej x_j otrzymana w (*k*-1) etapie.

Początkowo $x_j = x_j^0 = x_j^*$ dla $j = 1, 2, ..., n$. Zmienna x_j, dla której w *k*-tym etapie:

a) $s'_j(x_j^{k-1} - 1) > S'_k(x_j^{k-1})$, przyjmuje w *k*-tym etapie wartość $x_j^k = x_j^{k-1}$,

b) $s'_j(x_j^{k-1} - 1) = S'_k(x_j^{k-1})$, przyjmuje w *k*-tym etapie wartość $x_j^k = x_j^{k-1} - 1$.

Gdy istnieje więcej niż jedna zmienna x_j, dla której w *k*-tym etapie $s'_j(x_j^{k-1} - 1) = S'_k(x_j^{k-1})$, należy zmniejszyć wartość tylko jednej z nich, a pozostałe zmienne rozpatrzyć w kolejnych iteracjach. Obliczenia kończymy, gdy $\sum_{j=1}^{n} x_j^k = b$. Dalszemu obniżaniu ilości rozdzielonego zasobu towarzyszyłby wzrost względnej straty, zatem dla rozwiązania zadania (22)–(24), (35)–(36) i przy założeniu (39) – warunek (24) będzie zawsze wiążący. Stosując powyższy algorytm dla analizowanego zadania, otrzymamy rozwiązanie optymalne, które niekoniecznie musi być jedynym. Z większą liczbą strategii optymalnych możemy mieć do czynienia wówczas, gdy istnieje więcej niż jedna zmienna x_j, dla której w k-tym etapie $s'_j(x_j^{k-1} - 1) = S'_k(x_j^{k-1})$.

Generowanie rozwiązania metodą przyrostów względnych strat również wtedy, gdy warunek (39) nie jest spełniony, może skutkować błędem w obliczeniach. Przyjmijmy na przykład, że maksymalne względne straty oraz ich przyrosty są równe wartościom zamieszczonym w tabelach 13 i 14.

Tabela 13

Tabela maksymalnych względnych strat (reguła Savage'a)

x_j	Działalność A	Działalność B	Działalność C
0	3	6	3
1	<u>0</u>	4	5
2	1	<u>0</u>	<u>2</u>

Tabela 14

Tabela przyrostów maksymalnych względnych strat (reguła Savage'a)

x_j	Działalność A	Działalność B	Działalność C
0	3	2	–2
1	<u>0</u>	4	3
2	1	<u>0</u>	<u>0</u>

Gdy łączna wielkość przydzielonego zasobu jest dowolna, strategia (1,2,2) jest optymalna. Jeżeli natomiast $b = 4$, to odczytanie rozwiązania optymalnego z tabeli 14 nie jest już takie oczywiste. Wydawać by się mogło, że szukanym wynikiem jest (0,2,2) lub (1,2,1). Tymczasem okazuje się, że optymalna strategia wygenerowana za pomocą metody programowania dynamicznego ma postać (2,2,0)! Na podstawie tego przykładu można wyciągnąć następujący wniosek. Niech r^* oznacza łączną ilość środka przydzielonego w sposób optymalny wszystkim działalnościom przy założeniu, że wielkość posiadanego zasobu nie jest z góry ustalona. Gdy warunek (39) nie jest spełniony, rozwiązanie dla konkretnego poziomu parametru $b < r^*$ może polegać na zmniejszeniu ilości środka skierowanego do konkretnej działalności, w stosunku do optymalnej wielkości ustalonej dla zadania pomijającego warunek (24), przy jednoczesnym zwiększeniu wielkości zasobu dla innej działalności!

Metoda przyrostów maksymalnych względnych strat nie jest oczywiście jedynym uproszczonym podejściem, jakie można zastosować, gdy obowiązuje warunek (24). Można przecież tabelę maksymalnych względnych strat (tab. 7) przedstawić jako tabelę zysków ujemnych, a następnie skorzystać z metody zysków krańcowych (zob. rozdz. 2).

Podsumowanie

1. W literaturze można znaleźć opis deterministycznej i stochastycznej wersji problemu alokacji zasobu [14], [18]. W niniejszym opracowaniu natomiast podjęto próbę sformułowania modeli decyzyjnych, mogących znaleźć zastosowanie w zagadnieniu alokacji zasobu w warunkach niepewności. Zaproponowane modele dotyczą jednowymiarowych procesów alokacyjnych, czyli takich, w których rozporządzamy tylko jednym jednorodnym zasobem [2, s. 11–44]. Przedstawione zadania charakteryzują się binarnymi zmiennymi decyzyjnymi oraz nieliniową funkcją celu, którą można w bardzo prosty sposób sprowadzić do postaci liniowej.

2. W związku z tym, iż rozdział środka w warunkach niepewności pomiędzy n działalności sprowadza się do wyznaczenia n optymalnych strategii czystych, wykorzystano w zaprezentowanych modelach decyzyjnych reguły Walda, Hurwicza, Bayesa i Savage'a. Podkreślono również, iż istnieje możliwość skonstruowania modelu uwzględniającego jednocześnie różne reguły decyzyjne. W pracy przyjęto, że decyzja podejmowana jest jednokrotnie. Gdyby natomiast celem poruszonego problemu było wielokrotne podejmowanie decyzji przy tej samej macierzy wypłat, nie byłoby powodu, by z góry zakładać, iż za każdym razem należy wybierać tę samą decyzję dla danej działalności. Lepsze mogłoby się okazać podejmowanie różnych możliwych decyzji z określoną częstością i wówczas alokacja zasobu polegałaby na wyborze strategii mieszanej (por. [4, s. 140]). Z uwagi na warunek (24) sformułowanie i rozwiązanie powyższego problemu nie byłoby jednak takie proste.

3. Oprócz modeli przedstawiono również procedury, umożliwiające rozwiązanie tychże zadań. Okazuje się, iż poza metodą programowania dynamicznego można korzystać z opisanych w literaturze procedur uproszczonych [9], [15], jeśli tylko dany problem spełnia odpowiednie założenia. Metoda ekstremów lokalnych może być stosowana niezależnie od przyjętej reguły postępowania, o ile maksymalna wielkość zasobu, którą rozdzielamy pomiędzy analizowane działalności, nie jest z góry ustalona. Gdy należy przydzielić środek w ilości nieprzekraczającej pewnego zadanego poziomu, metoda zysków krańcowych może się okazać bardzo przydatna pod warunkiem, że funkcje zysków krańcowych dla poszczególnych działalności są nierosnące. To założenie ma sens jedynie dla modeli skonstruowanych na podstawie reguły Walda, Hurwicza i Bayesa. Punktem wyjścia dla wymienionych reguł jest tabela zysków.

W przypadku reguły Savage'a, bazującej na względnych stratach, konieczne jest przyjęcie nieco innego sposobu postępowania zarówno w zakresie generowania tabeli z wynikami marginalnymi (zob. warunek (38)), jak i w zakresie formułowania założeń, które dane zadanie powinno spełnić, by można je było rozwiązać procedurą uproszczoną (wzór (39)).

4. Jest rzeczą oczywistą, iż znajomość dokładnych zysków z tytułu rozdziału środka pomiędzy działalności nie jest jedynym upraszczającym założeniem, przyjętym w zagadnieniu alokacji zasobu. Rozwiązując zadanie przyjmujemy, że rozpatrywane działalności funkcjonują całkowicie niezależnie (zob. rozdz. 1). Załóżmy, że środkiem do rozdziału jest kapitał, który można skierować do różnych obszarów w celu rozpoczęcia inwestycji. Okazuje się, że w rzeczywistości inwestycje rozpoczęte na danym terenie mogą wpłynąć na sytuację w innym obszarze nawet wówczas, gdy jest pomiędzy nimi wyznaczona granica. Dalsze rozszerzenie modeli optymalizacyjnych stosowanych w zagadnieniu alokacji zasobu mogłoby dotyczyć właśnie tej kwestii.

Bibliografia

[1] BELLMAN R.E., DREYFUS S.E., *On the computational solution of dynamic programming processes – I: on a tactical air warfare model of Mengel*, Operations Research, 1958, t. 6, s. 65–78.

[2] BELLMAN R.E., DREYFUS S.E., *Programowanie dynamiczne* (*zastosowanie*), PWE, Warszawa 1967.

[3] BERTSEKAS D.P., *Dynamic programming: Deterministic and Stochastic Models*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1987.

[4] CZERWIŃSKI Z., *Matematyka na usługach ekonomii*, PWN, Warszawa 1984.

[5] DENARDO E.V., *Dynamic programming: Models and Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1982.

[6] DZIUBIŃSKI I., ŚWIĄTKOWSKI T. (red.), *Poradnik matematyczny*, PWN, Warszawa 1985.

[7] FAURE R., KAUFMANN A., *Badania operacyjne na co dzień*, PWN, Warszawa 1968.

[8] GASS S.I., HARRIS C.M., *Encyclopedia of operations research and management science*, Kluwer Academic Publishers, 1996.

[9] GUZIK B. (red.), *Ekonometria i badania operacyjne. Uzupełnienia z badań operacyjnych*, MD 51, AE, Poznań 1999.

[10] KUKUŁA K. (red.), JĘDRZEJCZYK Z., SKRZYPEK J., WALKOSZ A., *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach*, PWN, Warszawa 1996.

[11] LESZ M., *Techniczno-ekonomiczne zastosowania metod programowania dynamicznego*, PWE, Warszawa 1968.

[12] MOORE P.G., *Basic Operational Research*, Sir Isaac Pitman and Sons Ltd, London 1968.

[13] PRATT J.W., HOWARD R., SCHLAIFER R., *The foundations of decision under uncertainty: An Elementary Exposition*, Mc Graw Hill, New York 1965.

[14] RADZIKOWSKI W., *Matematyczne techniki zarządzania*, PWE, Warszawa 1980.

[15] SIKORA W. (red.), ANHOLCER M., GASPARS H., OWCZARKOWSKI A., *Przykłady i zadania z badań operacyjnych i ekonometrii*, MD 163, AE, Poznań 2005.

[16] SZYMANOWSKI W. (red.), BARANOWSKA B., BIEŃKOWSKA-LIPIŃSKA K., LIPIEC-ZAJCHOWSKA M., *Badania operacyjne w zarządzaniu*, Wydawnictwo Prywatnej Wyższej Szkoły Biznesu i Administracji, Warszawa 1996.

[17] TRZASKALIK T., *Wprowadzenie do badań operacyjnych z komputerem*, PWE, Warszawa 2003.
[18] WAGNER H.M., *Principles of Operations Research with Applications to Managerial Decisions*, second edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1975.

Resource allocation under uncertainty: choice models and computational procedures

The deterministic and stochastic versions of the resource allocation problem have already been discussed in the literature. The goal of this contribution is to formulate optimization models applicable to the problem of resource allocation under uncertainty, which signifies that profits resulting from the assignment of a quantity of resource to a given activity, are defined as random variables with unknown distribution. The author presents four models depending on the attitude of the decision-maker towards states of nature that may occur, and refers to the rules formulated by Wald, Hurwicz, Bayes and Savage to this end. Possible computational procedures, allowing finding the optimal solution for each case, are also analyzed. Apart from the dynamic programming, two simplified methods used for the deterministic version of resource allocation can also be applied when decisions are made under uncertainty. However, these two methods require that the problem fulfil additional assumptions, which are partially different from those formulated for the deterministic approach.

Keywords: *resource allocation problem, dynamic programming, binary choice models, decision-making under uncertainty, states of nature, pure strategy, mixed strategy, binary knapsack problem*