

Bogdan RĘBIASZ\*

## ARYTMETYKA ZALEŻNYCH LICZB ROZMYTYCH W ANALIZACH FINANSOWYCH

W artykule przedstawiono uogólnienie zasady rozszerzenia Zadeha dla przypadku operacji arytmetycznych realizowanych na zależnych liczbach rozmytych. Zaprezentowano zadanie programowania nieliniowego, wykorzystywane do obliczania wartości wskaźników finansowych wyrażonych w postaci liczb rozmytych. Zaproponowano także wykorzystanie symulacji komputerowej do realizacji operacji arytmetycznych na zależnych liczbach rozmytych.

Słowa kluczowe: *zasada rozszerzenia, arytmetyka liczb rozmytych, analizy finansowe*

### 1. Wprowadzenie

Niepewność odnośnie do wartości parametrów ekonomicznych wykorzystywanych podczas realizacji analiz finansowych w przedsiębiorstwie opisywana jest zazwyczaj za pomocą rozkładów prawdopodobieństwa. Pod koniec lat 80. pojawiły się prace, w których stosowane są alternatywne metody opisu niepewności tych parametrów. Można tu przede wszystkim wymienić teorię zbiorów rozmytych, a kluczowe znaczenie odegrała praca Buckleya [1]. Następnie pojawiło się wiele prac w tym zakresie [2–10]. Podkreśla się w nich celowość stosowania liczb rozmytych obok lub zamiast rozkładów prawdopodobieństwa [10, 11]. W dostępnych publikacjach przedstawiane są zazwyczaj metody obliczania wybranych wskaźników finansowych, takich jak np. wartość zaktualizowana netto, wewnętrzna stopa zwrotu, próg rentowności, okres zwrotu nakładów [1, 2, 5, 6, 7, 9, 10]. Metody te opracowano przy założeniu, że podstawowe wielkości (przepływy pieniężne, zysk, koszty wytwarzania itd.), służące do wyliczania wspomnianych powyżej wskaźników, są przedstawione w postaci liczb

---

\* Wydział Zarządzania, Akademia Górniczo-Hutnicza, ul. Gramatyka 10, 30-067 Kraków, e-mail: [brebiasz@zarz.agh.edu.pl](mailto:brebiasz@zarz.agh.edu.pl)

rozmytych. Mniej uwagi poświęca się metodom realizacji operacji arytmetycznych, które pozwalają obliczyć te wielkości.

Podstawy arytmetyki liczb rozmytych, oparte na zasadzie rozszerzenia, przedstawił Zadeh [12]. Arytmetyka liczb rozmytych wydaje się być dobrze rozwiniętym fragmentem teorii zbiorów rozmytych. W praktyce jednak niejednokrotnie pojawia się pytanie, jak obliczać wartość wyrażenia arytmetycznego w sytuacji, gdy jego argumenty są przedstawione w postaci zależnych liczb rozmytych. Problem ten pojawia się często, gdy obliczane są wartości wskaźników ekonomicznych. Zjawisko skorelowania cen czy też wielkości sprzedaży różnych wyrobów przedsiębiorstwa jest powszechne. Gdy do opisu niepewności stosowane są rozkłady prawdopodobieństwa, metody modelowania zjawisk zależnych są dobrze rozwinięte. Posługujemy się tutaj pojęciem warunkowych rozkładów prawdopodobieństwa. Do wyznaczenia prognozowanej wartości wybranego wskaźnika, który kształtowany jest przez kilka losowych parametrów, stosowana jest symulacja komputerowa [13]. Metody generowania zależnych liczb losowych są dobrze rozwinięte i opisane w literaturze [13]. Natomiast kiedy stosujemy liczby rozmyte, możemy natrafić na problemy obliczeniowe w przypadku zależności argumentów wyrażeń arytmetycznych. Brak jest w literaturze wyczerpujących opracowań, dotyczących praktycznej realizacji działań arytmetycznych na zależnych liczbach rozmytych. Przedstawiane są jedynie wyniki dla wybranych, szczególnych przypadków zależności pomiędzy argumentami wyrażeń arytmetycznych [14–16].

W artykule przedstawiono dwie metody realizacji operacji arytmetycznych na zależnych liczbach rozmytych. Pierwsza metoda wykorzystuje w tym celu programowanie nieliniowe. W drugiej metodzie proponuje się wykorzystanie symulacji komputerowej dla realizacji operacji arytmetycznych na zależnych liczbach rozmytych.

## 2. Operacje arytmetyczne na liczbach rozmytych

Sformułowana przez Zadeha zasada rozszerzenia pozwala rozwiązać następujący problem operacji na zmiennych rozmytych. Rozważany jest zbiór niezależnych zmiennych  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , przyjmujących wartości w zbiorze liczb rzeczywistych. Dla każdej z tych zmiennych określony jest rozkład możliwości. Jak określić rozkład możliwości dla wartości funkcji  $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$  [14]. Rozważmy dwa zbiory  $\Omega$  i  $\Psi$  oraz odwzorowanie  $f\Omega$  w  $\Psi$ . Niech  $\Pi_E$  będzie miarą możliwości, określoną na zbiorze  $\Omega$  z rozkładem możliwości  $\mu_E$ . Dzięki wykorzystaniu odwzorowania podzbioru  $A$  zbioru  $\Psi$ ,  $f^{-1}(A) = \{\omega \mid f(\omega) \in A\}$ , można określić miarę możliwości  $\Pi_f$  na zbiorze  $\Psi$  według wzoru [14]:

$$\forall A \subseteq \Psi, \Pi_f(A) = \Pi_E(f^{-1}(A)). \quad (1)$$

$\Pi_f$  to rezultat przeniesienia  $\mu_E$  z  $\Omega$  na  $\Psi$  poprzez  $f$ . Rozkład możliwości  $\pi_f$  dla miary możliwości  $\Pi_f$  może być określony następująco [14]:

$$\forall u \in \Psi, \pi_f(u) = \Pi_f(\{u\}) = \begin{cases} \sup \{ \mu_E(\omega) \mid f(\omega) = u \} \\ 0 \quad \text{if } f^{-1}(u) = \phi \end{cases}. \quad (2)$$

Równanie (2) jest określane jako zasada rozszerzenia Zadeha. Gdy  $\Omega$  jest iloczynem  $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$  i dla  $E$  zachodzi  $\mu_E = \min(\mu_{E_1}, \mu_{E_2}, \dots, \mu_{E_n})$ , gdzie  $E_1, E_2, \dots, E_n$  są rozmytymi podzbioremi odpowiednio  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ , wtedy równanie (2) można zapisać następująco [14]:

$$\mu_{f(E_1, E_2, \dots, E_n)} = \begin{cases} \sup \{ \min(\mu(\omega_1), \mu(\omega_2), \dots, \mu(\omega_n)) \mid f(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = u \} \\ 0 \quad \text{if } f^{-1}(u) = \phi \end{cases}. \quad (3)$$

Gdy zmienne  $X_1, X_2, \dots, X_n$  o rozkładach możliwości  $E_1, E_2, \dots, E_n$  są niezależne i  $f(E_1, E_2, \dots, E_n)$  jest rozkładem możliwości  $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , wtedy zbiór rozmyty  $f(E_1, E_2, \dots, E_n)$  może być wyrażony za pomocą  $\alpha$ -poziomów  $E_1, E_2, \dots, E_n$  zgodnie z zależnością przedstawioną przez Nguyena [14, 15]:

$$\forall u, \mu_{f(E_1, E_2, \dots, E_n)}(u) = \sup \{ \alpha \in (0,1] \mid u \in f((E_1)_\alpha, (E_2)_\alpha, \dots, (E_n)_\alpha) \}. \quad (4)$$

Jednocześnie prawdziwa jest następująca zależność:

$$f((E_1)_\alpha, (E_2)_\alpha, \dots, (E_n)_\alpha) \subseteq (f(E_1, E_2, \dots, E_n))_\alpha \quad \forall \alpha \in (0, 1]. \quad (5)$$

Jeśli jednak  $f$  jest funkcją ciągłą, określoną na zbiorze liczb rzeczywistych i przyjmuje wartości w zbiorze liczb rzeczywistych oraz gdy  $E_1, E_2, \dots, E_n$  są zwartymi rozmytymi podzbioremami zbioru liczb rzeczywistych, to [17]:

$$f((E_1)_\alpha, (E_2)_\alpha, \dots, (E_n)_\alpha) = (f(E_1, E_2, \dots, E_n))_\alpha \quad \forall \alpha \in (0, 1]. \quad (6)$$

Przedstawione zależności pozwalają określić podstawowe działania arytmetyczne na najczęściej stosowanych w praktyce trapezowych liczbach rozmytych. Zakładając, że  $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$  i  $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$  są dwoma niezależnymi trapezowymi liczbami rozmytymi, podstawowe działania arytmetyczne na tych liczbach definiuje się następująco [10]:

- dodawanie:  $A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4), \quad (7)$

- odejmowanie:  $A - B = (a_1 - b_4, a_2 - b_3, a_3 - b_2, a_4 - b_1), \quad (8)$

- mnożenie:  $A \times B = [\min \{ a_1 b_1, a_1 b_4, a_4 b_1, a_4 b_4 \}, \min \{ a_2 b_2, a_2 b_3, a_3 b_2, a_3 b_3 \}, \max \{ a_2 b_2, a_2 b_3, a_3 b_2, a_3 b_3 \}, \max \{ a_1 b_1, a_1 b_4, a_4 b_1, a_4 b_4 \}], \quad (9)$

- dzielenie: jeśli  $0 \notin [b_1, b_4]$ , to  $A/B = [\min\{a_1/b_1, a_1/b_4, a_4/b_1, a_4/b_4\}, \min\{a_2/b_2, a_2/b_3, a_3/b_2, a_3/b_3\}, \max\{a_2/b_2, a_2/b_3, a_3/b_2, a_3/b_3\}, \max\{a_1/b_1, a_1/b_4, a_4/b_1, a_4/b_4\}]$ . (10)

Zgodnie z tymi definicjami podstawowe działania na dwóch liczbach rozmytych sprowadzają się do odpowiednich działań na dwóch parach liczb przedziałowych: 0 i 1 – poziomach rozmytych argumentów. Zaprezentowana koncepcja realizacji operacji arytmetycznych na liczbach rozmytych zakłada, że możliwe są wszystkie kombinacje realizacji odpowiednich liczb przedziałowych. To założenie nie jest jednak zawsze prawdziwe [10]. Jeśli jedna liczba oznacza na przykład cenę ropy naftowej, a druga liczba cenę benzyny, to duże realizacje cen ropy naftowej z reguły pociągają będą za sobą duże realizacje cen benzyny. Kombinacje małych realizacji cen jednego produktu i dużych drugiego produktu raczej nie występują, ponieważ wielkości te nie są niezależne. Dla zależnych trapezowych liczb rozmytych wprowadzono definicję tzw. ograniczonego odejmowania [10]. Jeśli  $A$  i  $B$  są zależnymi liczbami rozmytymi i  $a_i - b_i \leq a_{i+1} - b_{i+1}$  dla  $i = 1, 2, 3$ , to:

$$A - B = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3, a_4 - b_4). \quad (11)$$

Ograniczone odejmowanie dotyczy sytuacji, gdy dużym realizacjom jednej zmiennej zawsze odpowiadają duże realizacje drugiej zmiennej, a małym realizacjom jednej zmiennej małe realizacje drugiej zmiennej. Gdy analizujemy zjawiska ekonomiczne, dostrzegamy, że zazwyczaj zależności pomiędzy zmiennymi nie są tak jednoznaczne. W tym wypadku najczęściej możemy mówić o skorelowaniu zmiennych. W przypadku stosowania liczb rozmytych przy występowaniu skorelowania parametrów rachunku efektywności mogą pojawić się problemy wyboru schematu operacji arytmetycznych na liczbach rozmytych.

Jeśli wartości zmiennych  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  są ograniczone przez zbiór  $D \subseteq R^n$ , a ponadto  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ograniczone są odpowiednio przez zbiory rozmyte  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , to dla wyznaczenia rozkładu możliwości  $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$  zasada rozszerzenia określona przez równanie drugie musi być zmodyfikowana następująco [14]:

$$\forall z, \mu_{f(M_1, M_2, \dots, M_n, D)}(z) = \sup \{ \min(\mu_{M_1}(x_1), \mu_{M_2}(x_2), \dots, \mu_{M_n}(x_n)) \mid z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \}. \quad (12)$$

Bardziej ogólnie, gdy  $D$  jest zbiorem rozmytym określonym w  $R^n$ , równanie (12) można zapisać korzystając z miary możliwości [14]:

$$\begin{aligned} \forall z, \mu_{f(M_1, M_2, \dots, M_n, D)}(z) &= \Pi_{M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n}(f^{-1}(z) \cap D) \\ &= \sup \left\{ \min \left( \begin{array}{l} \mu_{M_1}(x_1), \mu_{M_2}(x_2), \dots, \mu_{M_n}(x_n), \\ \mu_D(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Zbór rozmyty  $f(M_1, M_2, \dots, M_n, D)$  może być zdefiniowany przy wykorzystaniu pojęcia  $\alpha$ -poziomów zbiorów  $M_1, M_2, \dots, M_n, D$  [14]:

$$(f(M_1, M_2, \dots, M_n, D))_\alpha \quad \text{dla } \alpha \in (0, 1]. \quad (14)$$

$$= \{f(X_1, X_2, \dots, X_n) \mid (X_1, X_2, \dots, X_n) \in (M_1)_\alpha \times (M_2)_\alpha \times \dots \times (M_n)_\alpha \times (D)_\alpha\}$$

Obliczenie rozmytej wielkości określonej równaniami (13) i (14) jest zadaniem trudnym i najczęściej wymaga użycia metod programowania nieliniowego. Literatura przytacza przykłady takich obliczeń dla wybranych, szczególnych przypadków zależności pomiędzy zmiennymi rozmytymi. Dubois i Prade rozwiązują problem działań arytmetycznych na zmiennych rozmytych w przypadku, gdy zbiór  $D$  jest określony przez równanie liniowe [14]. Enea i Piazza przedstawiają odmianę rozmytej metody AHP (*Analytic Hierarchy Process*) [18]. Nazywają ją „Constrained Fuzzy AHP”. Wprowadzają bowiem dodatkowe warunki na rozmyte wartości elementów macierzy, która zawiera oceny ważności poszczególnych kryteriów. Klir rozważa trapezowe liczby rozmyte [16]. Przedstawia wyniki działań arytmetycznych na trapezowych liczbach rozmytych, przy uwzględnieniu dodatkowych warunków (*requisite constraint*). Rozważa na przykład dwie trapezowe liczby rozmyte, które określają rozkłady możliwości dwóch zmiennych lingwistycznych. Przedstawia wyniki operacji arytmetycznych na tych zmiennych przy uwzględnieniu warunku, że jedna zmienna jest mniejsza od drugiej. Następnie porównuje je z wynikami operacji arytmetycznych bez uwzględnienia tego warunku.

### 3. Rozmyta regresja liniowa

Zależność między różnymi kategoriami ekonomicznymi (ceny wyrobów i surowców, ilości sprzedaży) może być opisana za pomocą rozmytej regresji liniowej (*Fuzzy Linear Regression* – FLR). Dostępna literatura opisuje wiele algorytmów rozmytej regresji liniowej [19–23]. Poniżej przedstawiono model wielokryterialnej rozmytej regresji liniowej (*multiobjective fuzzy linear regression model* – MOFR), opracowany przez Tran i Duckstein [23]. Model ten można zapisać następująco:

*Znajdź minimum w sensie Pareto*

$$\{R, V^p, E^p\}. \quad (15)$$

*Przy ograniczeniach:*

$$|(P_t)_\alpha - (O_t)_\alpha| \leq r_t, \quad r_t \geq 0 \quad \text{dla } t \in T, \quad (16)$$

$$(P_{L,t})_\alpha - (O_{L,t})_\alpha \leq \varepsilon_{L,t}, \quad (O_{R,t})_\alpha - (P_{R,t})_\alpha \leq \varepsilon_{R,t} \quad \text{dla } t \in T, \quad (17)$$

$$\varepsilon_{L,t}, \varepsilon_{R,t} \geq 0 \quad \text{dla } t \in T, \quad (18)$$

gdzie  $O$  i  $P$  są liczbami rozmytymi, reprezentującymi odpowiednio obserwacje i predykcje:  $P = AX$ , gdzie  $A$  jest wektorem rozmytych parametrów modelu, a  $X$  jest wektorem zmiennych objaśniających;  $(O_{L,t})_\alpha, (O_{R,t})_\alpha$  i  $(P_{L,t})_\alpha, (P_{R,t})_\alpha$  oznaczają kres dolny i górny dla  $\alpha$ -poziomów liczb rozmytych odpowiednio  $O$  i  $P$ ;  $T$  oznacza liczbę obserwacji;  $r_t$  oznacza odległość pomiędzy  $(O_t)_\alpha$  i średnią wartością predykcji  $(P_t)_\alpha$ ;  $R = \sum_{t=1}^T r_t$ ;  $V^p = \sum_{t=1}^T ((P_{R,t})_\alpha - (P_{L,t})_\alpha)^p$  oznacza miarę rozmytości;  $\varepsilon_{L,t}, \varepsilon_{R,t}$  są zmiennymi relaksacyjnymi i opisują odchylenia od obserwacji nietypowych;  $E^p = \sum_{t=1}^T (\varepsilon_{L,t}^p + \varepsilon_{R,t}^p)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  przedstawia poziom kompensacji.

Dla estymacji równań regresji zastosowano procedurę opisaną przez Tran i Duckstein [23]. Najpierw minimalizowane było  $R$  przy uwzględnieniu warunków, że wartości  $\varepsilon_{L,t}, \varepsilon_{R,t}$  dla każdego  $t$  są nie większe niż 5% średniej wartości  $(O_t)_\alpha$ . Następnie optymalna wartość  $R$  włączana była do warunków ograniczających. Przy tych warunkach minimalizowana była wartość  $V^p$  dla  $p = 2$ . Uzyskane w ten sposób współczynniki rozmytej regresji liniowej wykorzystywane były w dalszych obliczeniach.

#### 4. Symulacja systemów rozmytych

Koncepcję symulacji systemów rozmytych wprowadzili Liu i Iwamura [24, 25]. Symulacja systemów rozmytych polega na realizacji prób losowych na modelu z rozmytymi parametrami. Zakładając, że  $f$  jest funkcją i że  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_m, \dots, v_M)$  jest wektorem zmiennych rozmytych o funkcji przynależności  $\mu$ , można wykorzystać symulację komputerową do określenia rozkładu możliwości funkcji  $f$ . W tym celu losowo generowany jest wektor  $\mathbf{u}_k$  ze zbioru, który jest  $\alpha$ -poziomem wektora  $\mathbf{v}$  dla  $k = 1, 2, \dots, N$ . Dla dowolnego  $\bar{f}$  można określić:

$$\mu(\bar{f}) = \max_{1 < k < N} \{ \mu(\mathbf{u}_k) \mid f(\mathbf{u}_k) \geq \bar{f} \}, \quad (19)$$

gdzie:  $\mu(\mathbf{u}_k) = \min \{ \mu(u_{k1}); \mu(u_{k2}); \dots, \mu(u_{km}); \dots, \mu(u_{kM}) \}$ ,

a  $u_{km}$  są losowane z  $\alpha$ -poziomów składowych wektora  $\mathbf{v}$ .

Wielkości  $\mu(\bar{f})$  i  $\bar{f}$  określają rozkład możliwości dla funkcji  $f$ .

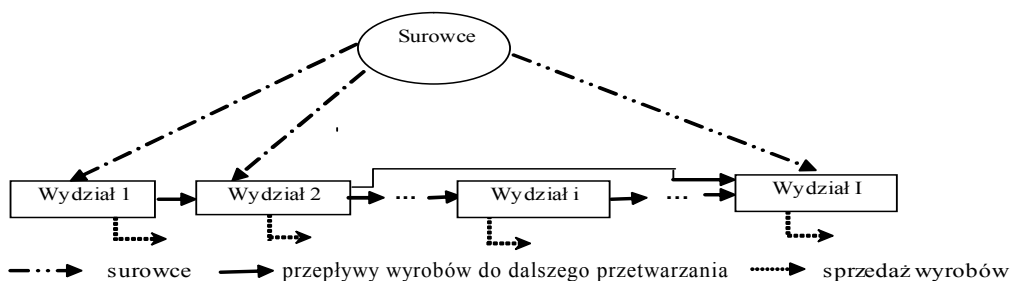
## 5. Metody realizacji operacji arytmetycznych na zależnych liczbach rozmytych

Zasady realizacji operacji arytmetycznych na trapezowych liczbach rozmytych przedstawiono w rozdziale drugim. Operacje te odpowiadają sytuacji, gdy liczby rozmyte są niezależne. Przedstawiono tam też koncepcję tzw. ograniczonego odejmowania. Realizacja odejmowania według tego schematu odpowiadałaby z kolei sytuacji, gdy duże realizacje jednej zmiennej pociągają za sobą duże realizacje drugiej zmiennej, a małe realizacje jednej zmiennej pociągają za sobą małe realizacje drugiej. Schemat ten można stosować w przypadku silnego dodatniego skorelowania argumentów wyrażeń arytmetycznych. W sytuacji słabego skorelowania parametrów rachunku efektywności może powstać problem, który wariant realizacji odejmowania wybrać. Ponadto w przypadku skorelowania parametrów rachunku efektywności realizacja operacji dodawania, mnożenia i dzielenia – odpowiednio według wzorów (7), (9) i (10) – może dawać nierealistyczne wyniki.

Przedstawiono dwie metody obliczenia wartości wyrażeń algebraicznych w przypadku, gdy poszczególne ich argumenty są wyrażone w postaci zależnych liczb rozmytych. Metody te omawia się na przykładzie obliczania zysku brutto dla przedsiębiorstw przemysłu metalurgicznego.

### 5.1. Wykorzystanie programowania nieliniowego do realizacji operacji arytmetycznych na zależnych liczbach rozmytych

Uproszczony schemat procesu produkcyjnego w hutnictwie przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Uproszczony schemat procesu produkcyjnego w hutnictwie

Zysk brutto ( $zb$ ) można w tym przypadku wyrazić według wzoru

$$zb = \sum_{i=1}^I c_i s_i - \sum_{o=1}^O c_o z_o - \sum_{i=1}^I k_i p_i - ks, \quad (20)$$

gdzie:

- $c_i, c_o$  – odpowiednio cena wyrobów  $i$  oraz cena surowca  $o$ ,
- $s_i$  – ilość sprzedaży wyrobu  $i$ ,
- $k_i$  – skorygowane jednostkowe koszty zmienne wyrobu  $i$  (koszty te nie obejmują wartości zużytych surowców i wyrobów z poprzedzających faz przetwarzania),
- $p_i$  – ilość produkcji wyrobu  $i$ ,
- $z_o$  – zużycie surowca  $o$ ,
- $ks$  – koszty stałe przedsiębiorstwa.

Między wielkościami występującymi w równaniu (20) występują zależności, wynikające ze specyfiki realizowanych procesów technologicznych. Zależności te przedstawiają równania (21) i (22).

$$s_i + \sum_{j=1, j \neq i}^I w_{ij} p_j - p_i = 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, I, \quad (21)$$

$$z_o = \sum_{i=1}^I m_{oi} p_i \quad \text{dla } o = 1, 2, \dots, O, \quad (22)$$

gdzie:

- $w_{ij}$  – wskaźnik zużycia wyrobu  $i$  na jednostkę produkcji wyrobu  $j$ ,
- $m_{oi}$  – wskaźnik zużycia surowca  $o$  na jednostkę produkcji wyrobu  $i$ .

Drugi rodzaj zależności, charakterystyczny dla wielkości występujących w równaniu (20), to skorelowanie cen poszczególnych wyrobów i cen surowców oraz skorelowanie ilości sprzedaży poszczególnych wyrobów. Dla wyrażenia tych zależności można wykorzystać metody rozmytej regresji liniowej (*fuzzy linear regression*). Postać uzyskanych za jej pomocą równań jest następująca:

$$c_i = l_{ij} c_j + n_{ij} \quad \text{dla } i, j = 1, 2, \dots, I; \quad i \neq j, \quad (23)$$

$$s_i = r_{ij} s_j + q_{ij} \quad \text{dla } i, j = 1, 2, \dots, I; \quad i \neq j, \quad (24)$$

gdzie  $l_{ij}, n_{ij}$ , i  $r_{ij}, q_{ij}$  są współczynnikami równań rozmytej regresji liniowej.

Argumenty równań (20)–(24), a więc:  $c_i, c_o, s_i, k_i, p_i, ks, m_{oi}, w_{ij}, l_{ij}, n_{ij}, r_{ij}, q_{ij}$  są obarczone niepewnością i mogą być traktowane jako zmienne rozmyte, których wartości są ograniczone przez odpowiednie liczby rozmyte:  $C_i, C_o, S_i, K_i, P_i, KS, M_{oi}, W_{ij}, L_{ij}, N_{ij}, R_{ij}, Q_{ij}$ . Z zależności (14) wynika, że problem określenia liczby rozmytej wyrażającej zysk brutto przedsiębiorstwa można zapisać korzystając z pojęcia  $\alpha$ -poziomów liczb rozmytych. Kres górny (sup) i kres dolny (inf) dla  $\alpha$ -poziomów liczb



by rozmytej określającej zysk brutto przedsiębiorstwa można wyznaczyć, rozwiązując sformułowane poniżej zadanie programowania nieliniowego.

W przypadku poszukiwania sup znajdź:

$$\sum_{i=1}^I c_i s_i - \sum_{o=1}^O c_o z_o - \sum_{i=1}^I k_i p_i - ks \rightarrow \max . \quad (25)$$

W przypadku poszukiwania inf znajdź:

$$\sum_{i=1}^I c_i s_i - \sum_{o=1}^O c_o z_o - \sum_{i=1}^I k_i p_i - ks \rightarrow \min \quad (26)$$

przy ograniczeniach opisanych równaniami i nierównościami (21)–(24) oraz nierównościami (27)–(38)

$$\inf(C_i)_\alpha \leq c_i \leq \sup(C_i)_\alpha \quad (27) \quad \inf(M_{oi})_\alpha \leq m_{io} \leq \sup(M_{oi})_\alpha \quad (33)$$

$$\inf(C_o)_\alpha \leq c_o \leq \sup(C_o)_\alpha \quad (28) \quad \inf(W_{ij})_\alpha \leq w_{ij} \leq \sup(W_{ij})_\alpha \quad (34)$$

$$\inf(S_i)_\alpha \leq s_i \leq \sup(S_i)_\alpha \quad (29) \quad \inf(L_{ij})_\alpha \leq l_{ij} \leq \sup(L_{ij})_\alpha \quad (35)$$

$$\inf(K_i)_\alpha \leq k_i \leq \sup(K_i)_\alpha \quad (30) \quad \inf(N_{ij})_\alpha \leq n_{ij} \leq \sup(N_{ij})_\alpha \quad (36)$$

$$\inf(P_i)_\alpha \leq p_i \leq \sup(P_i)_\alpha \quad (31) \quad \inf(R_{ij})_\alpha \leq r_{ij} \leq \sup(R_{ij})_\alpha \quad (37)$$

$$\inf(KS)_\alpha \leq ks \leq \sup(KS)_\alpha \quad (32) \quad \inf(Q_{ij})_\alpha \leq q_{ij} \leq \sup(Q_{ij})_\alpha \quad (38)$$

Przedstawiony powyżej sposób określania  $\alpha$ -poziomów liczby rozmytej opisującej zysk brutto można zastosować do obliczenia wartości dowolnego wskaźnika finansowego w przedsiębiorstwie. Będzie to wymagać jedynie zmiany postaci równań (25) i (26) tak, aby służyły one obliczaniu odpowiedniego wskaźnika.

## 5.2. Wykorzystanie symulacji systemów rozmytych do realizacji operacji arytmetycznych na zależnych liczbach rozmytych

Wydaje się, że koncepcja symulacji systemów rozmytych może być przydatna do realizacji operacji arytmetycznych na zależnych liczbach rozmytych. Dla wyliczenia zysku brutto przy uwzględnieniu zależności liczb rozmytych można zaproponować następujący algorytm.

START

Krok 1. Określ  $\gamma, H, G$ .

Krok 2. Przyjmij  $\alpha = 0$ .

Krok 3. Określ  $\alpha$ -poziomy dla liczb rozmytych  $C_i, C_o, S_i, K_i, C_o, M_{oi}, W_{ij}, KS$ .

Krok 4.  $h = 1$ .

Krok 5. Generuj losowo wektor  $u_h$ .

Krok 6. Określ  $zb_h$  dla wylosowanego wektora  $u_h$  i stopień przynależności  $\mu(zb_h)$ .

Krok 7.  $h = h + 1$ .

Krok 8. Jeżeli  $h \leq H$ , idź do kroku 5.

Krok 9.  $\alpha = \alpha + \gamma$ .

Krok 10. Jeżeli  $\alpha \leq 1$ , idź do kroku 3.

Krok 11. Podziel próbę obliczonych wartości  $zb_h$  na  $G$  rozłącznych klas.

Krok 12. Dla każdej z klas  $g = 1, 2, \dots, G$  określ  $\mu(zb_g) = \max_{zb_h \in \text{klasy } g} (\mu(zb_h))$ .

STOP

Składowymi wektora  $u$  są poszczególne wielkości służące do wyliczenia zysku brutto,  $u = [c_i, s_i, k_i \text{ dla } i = 1, 2, \dots, I; c_o \text{ dla } o = 1, 2, \dots, O; m_{oi}, \text{ dla } i = 1, 2, \dots, I, o = 1, 2, \dots, O; w_{ij} \text{ dla } i, j = 1, 2, \dots, I, i \neq j; ks]$ . Wektor ten generowany jest losowo z  $\alpha$ -poziomów odpowiednich liczb rozmytych:  $C_i, C_o, S_i, K_i, C_o, M_{oi}, W_{ij}, KS$ . Dla określenia wektora  $u$  najpierw generowane są liczby losowe o rozkładzie równomiernym na przedziale  $[0,1]$ . Kolejne liczby losowe odpowiadają kolejnym składowym wektora  $u$ . Losując te liczby zakłada się, iż są one zależne, a zależność ta jest określona przez macierz korelacji składowych wektora  $u$ . Stosuje się tutaj metodę przedstawioną przez Yanga [13], wykorzystującą dekompozycję Choleskiego macierzy korelacji. Następnie na podstawie tak wylosowanych liczb losowych określone są wartości składowych wektora  $u$ . Po podstawieniu tych wartości do równań (20)–(22) obliczane są wielkości  $p_i$  i  $z_o$ , a następnie  $zb$ . Jednocześnie można określić wartość stopnia przynależności  $\mu(zb)$ . Stopień przynależności określa się według równania:

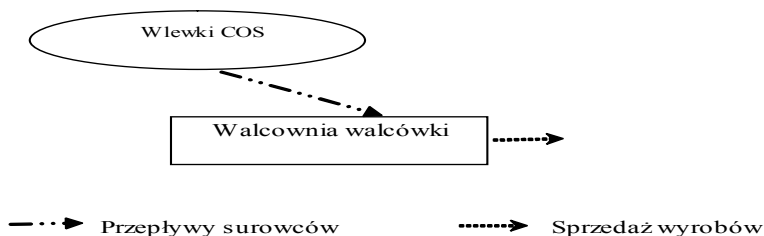
$$\mu(zb) = \min [ \mu(c_i), \mu(s_i), \mu(k_i) \text{ dla } i = 1, 2, \dots, I; \mu(c_o) \text{ dla } o = 1, 2, \dots, O; \mu(m_{oi}) \text{ dla } i = 1, 2, \dots, I; o = 1, 2, \dots, I; \mu(w_{ij}) \text{ dla } i, j = 1, 2, \dots, I; i \neq j; \mu(ks) ]. \quad (39)$$

Taki sposób realizacji symulacji komputerowej pozwala w efekcie uwzględnić zależność pomiędzy rozmytymi parametrami rachunku przy obliczaniu zysku brutto.

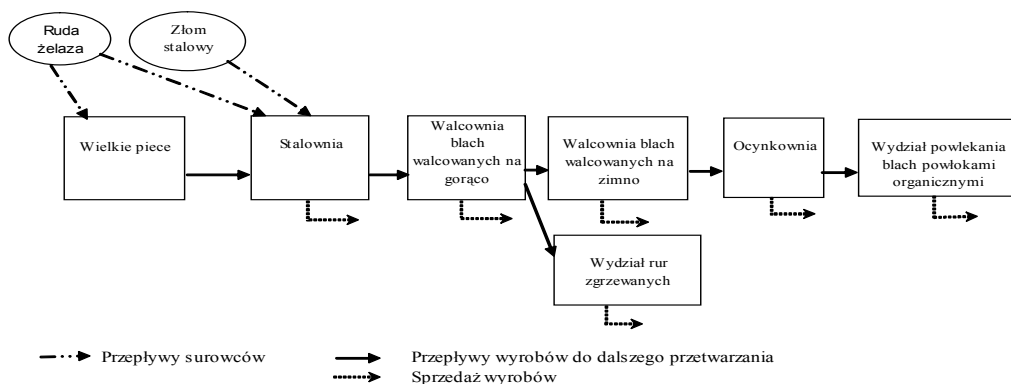
Podobnie jak w przypadku poprzedniej metody, przedstawiony powyżej sposób szacowania liczby rozmytej opisującej zysk brutto może być zastosowany do obliczenia wartości dowolnego wskaźnika finansowego w przedsiębiorstwie. Będzie to wymagać jedynie zmiany postaci równania (20) tak, aby służyło ono obliczaniu odpowiedniego wskaźnika.

## 6. Porównanie metod realizacji operacji arytmetycznych na liczbach rozmytych

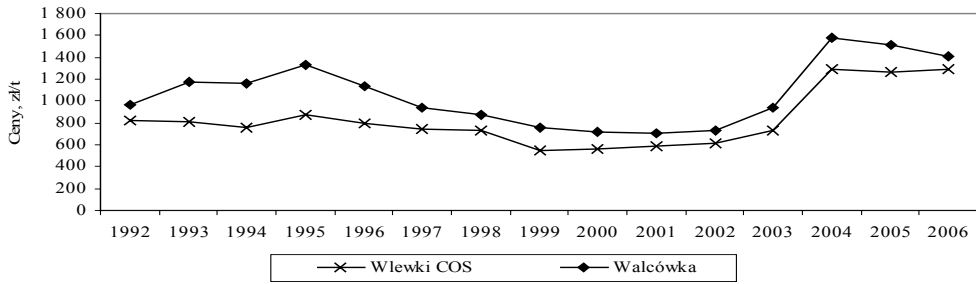
W rozdziale tym podano przykłady obliczania zysku brutto dla dwóch przedsiębiorstw. Na rysunkach 2 i 3 pokazano schematycznie procesy produkcyjne realizowane w tych przedsiębiorstwach. Ceny walcówki i ceny wlewków COS zużywanych do produkcji walcówki w latach 1992–2006 przedstawiono na rysunku 4. Współczynnik korelacji dla zależności ceny walcówki – ceny wlewków COS wynosił 0,869. W tabeli 1 podano trapezowe liczby rozmyte, określające prognozowane na 2007 rok parametry, służące do wyliczenia zysku brutto dla pierwszego przedsiębiorstwa. Wartość kosztów stałych dla tego przedsiębiorstwa oraz skorygowany jednostkowy koszt zmienny walcówki przyjęto jako wielkości rzeczywiste, które odpowiednio wyniosły 44 632 tys. zł/rok i 167,3 zł/t.



Rys. 2. Proces produkcyjny realizowany w pierwszym przedsiębiorstwie



Rys. 3. Proces produkcyjny realizowany w drugim przedsiębiorstwie



Rys. 4. Ceny walcówki i ceny wlewków COS w latach 1992–2006

Tabela 1. Trapezowe liczby rozmyte określające parametry prognozowane na 2007 rok służące do wyliczenia zysku dla pierwszego przedsiębiorstwa

Wskaźnik materiałochłonności dla walcówki t/t	1,0309	1,0417	1,0417	1,0526
Cena walcówki, zł/t	1 320,6	1 566,9	1 656,6	1 893,6
Cena wlewków COS, zł/t	1 047,6	1 275,9	1 366,2	1 536,3
Sprzedaż walcówki, tys. t	410,0	572,0	612,0	750,0

Zależność pomiędzy cenami walcówki oraz wlewków COS wyrażono wykorzystując model rozmytej regresji liniowej (MOFR). W tabeli 2 przedstawiono współczynniki równań regresji charakteryzujące te zależności.

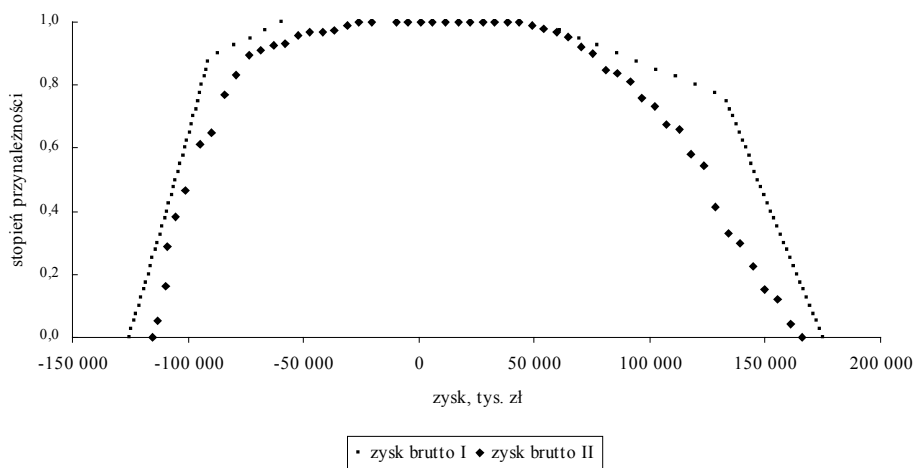
Tabela 2. Współczynniki równań regresji charakteryzujące zależności pomiędzy cenami walcówki i cenami wlewków COS

Zmienna objaśniana		Zmienna objaśniana	
		Ceny wlewków COS	Ceny walcówki
Ceny wlewków COS	$\hat{l}$		0,738
	$\check{l}$		0,859
	$\hat{n}$		-103,593
	$\check{n}$		63,36
Ceny walcówki	$\hat{l}$	1,079	
	$\check{l}$	1,079	
	$\hat{n}$	-56,793	
	$\check{n}$	394,905	

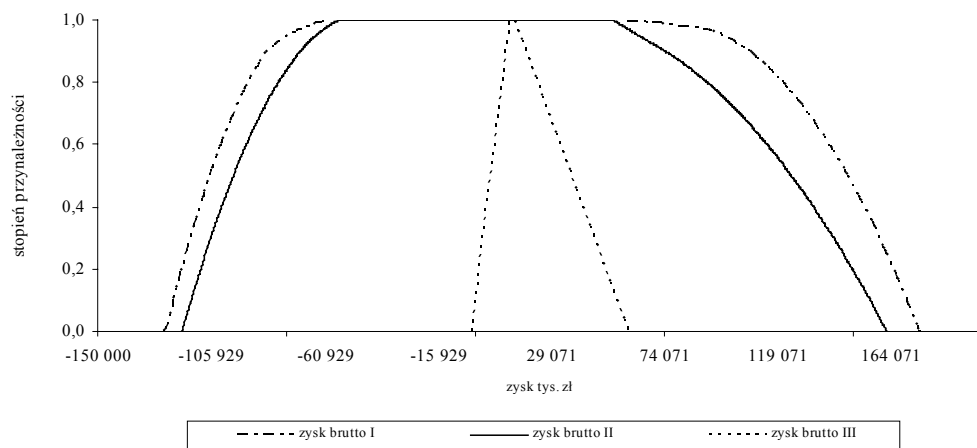
$\hat{l}$ ,  $\check{l}$ ,  $\hat{n}$ ,  $\check{n}$  – odpowiednio kres dolny i kres górny przedziału określającego wartość odpowiedniego współczynnika regresji.

Na rysunku 5 przedstawiono wyniki obliczeń, wykonanych dzięki wykorzystaniu metody programowania nieliniowego (metody opisanej w rozdziale 5.1) oraz dzięki symulacji systemów rozmytych (metody opisanej w rozdziale 5.2) dla realizacji operacji arytmetycznych na zależnych liczbach rozmytych. Obliczono w ten sposób od-

powiednio zysk brutto I i II. Na rysunku 6 przedstawiono porównanie liczb rozmytych charakteryzujących zysk brutto I i II oraz liczby rozmytej charakteryzujących zysk brutto III. Funkcje reprezentujące prawe i lewe strony liczb rozmytych przedstawiających zysk brutto I i II estymowano na podstawie danych, przedstawionych na rysunku 5. Zysk brutto III wyliczono w następujący sposób: korzystając ze wzoru (10), obliczono zużycie wlewków COS, obliczono przychody ze sprzedaży ze wzoru (9), obliczono koszty wytwarzania na podstawie wzorów (7) i (9), obliczono zysk brutto odejmując koszty wytwarzania od przychodu zgodnie ze wzorem (11).



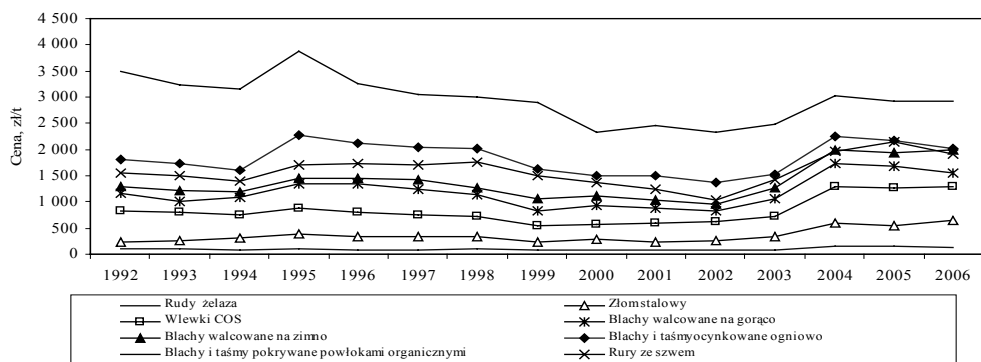
**Rys. 5.** Liczby rozmyte przedstawiające zysk brutto I i zysk brutto II dla pierwszego przedsiębiorstwa



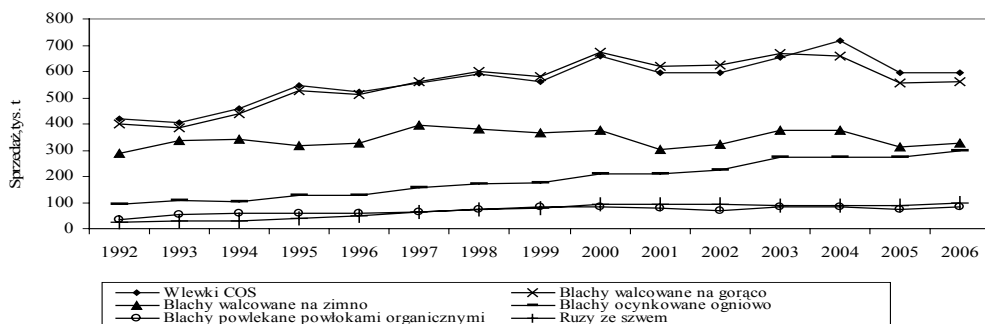
**Rys. 6.** Porównanie liczb rozmytych przedstawiających zysk brutto I, zysk brutto II i zysk brutto III dla pierwszego przedsiębiorstwa

Na rysunku 7 przedstawiono ceny wyrobów hutniczych produkowanych przez drugie przedsiębiorstwo oraz ceny rudy żelaza i złomu w latach 1992–2006. Ilość sprzedaży poszczególnych asortymentów wyrobów hutniczych drugiego przedsiębiorstwa w latach 1992–2006 pokazano na rysunku 8. W tabeli 3 przedstawiono macierz korelacji dla cen analizowanych asortymentów wyrobów hutniczych oraz cen rudy i złomu. Macierz korelacji dla wielkości sprzedaży wyrobów hutniczych produkowanych przez drugie przedsiębiorstwo pokazano w tabeli 4. W tabeli 5 przedstawiono trapezowe liczby rozmyte, określające prognozowane na 2007 rok ceny analizowanych asortymentów wyrobów hutniczych, ceny rudy żelaza i złomu, prognozowane ilości sprzedaży i prognozowane wskaźniki materiałochłonności. Wartość kosztów stałych drugiego przedsiębiorstwa przyjęto na poziomie 153 742,8 tys. zł/rok. Skorygowane koszty zmienne (zł/t) dla poszczególnych asortymentów wyrobów przyjęto jak poniżej:

Surówka	Wlewki COS	Blachy walcowane na gorąco	Blachy walcowane na zimno	Blachy ocynkowane ogniowo	Blachy pokrywane powłokami organicznymi	Rury ze szwem
473,4	136,7	136,7	43,3	34,7	167,7	77,9



**Rys. 7.** Ceny wyrobów hutniczych produkowanych przez drugie przedsiębiorstwo oraz ceny rudy żelaza i złomu w latach 1992–2006



**Rys. 8.** Ilość sprzedaży poszczególnych asortymentów wyrobów hutniczych drugiego przedsiębiorstwa w latach 1992–2006

**Tabela 3.** Macierz korelacji dla cen wyrobów hutniczych produkowanych przez drugie przedsiębiorstwo oraz cen rudy i złomu

	Rudy żelaza	Złom stalowy	Wlewki COS	Blachy walcowane na gorąco	Blachy walcowane na zimno	Blachy i taśmy ocynkowane ogniowo	Blachy i taśmy pokrywane powłokami organicznymi	Rury ze szwem
Rudy żelaza	1,000	0,833	0,936	0,843	0,890	0,597		0,752
Złom stalowy	0,833	1,000	0,932	0,905	0,957	0,678		0,805
Wlewki COS	0,936	0,932	1,000	0,937	0,969	0,719		0,832
Blachy walcowane na gorąco	0,843	0,905	0,937	1,000	0,971	0,875		0,911
Blachy walcowane na zimno	0,890	0,957	0,969	0,971	1,000	0,788		0,898
Blachy ocynkowane ogniowo	0,597	0,678	0,719	0,875	0,788	1,000	0,685	0,900
Blachy pokrywane powłokami organicznymi						0,685	1,000	0,463
Rury ze szwem	0,752	0,805	0,832	0,911	0,898	0,900	0,463	1,000

W tabeli uwzględniono współczynniki korelacji, których wartość była istotna przy testowaniu za pomocą statystyki *t*-Studenta dla poziomu istotności  $\alpha = 0,05$ .

**Tabela 4.** Macierz korelacji dla wielkości sprzedaży wyrobów hutniczych produkowanych przez drugie przedsiębiorstwo

	Wlewki COS	Blachy walcowane na gorąco	Blachy walcowane na zimno	Blachy i taśmy ocynkowane ogniowo	Blachy i taśmy pokrywane powłokami organicznymi	Rury ze szwem
Wlewki COS	1,000	0,961	0,467	0,816	0,846	0,860
Blachy walcowane na gorąco	0,961	1,000	0,487	0,743	0,846	0,888
Blachy walcowane na zimno	0,467	0,487	1,000		0,464	
Blachy i taśmy ocynkowane ogniowo	0,816	0,743		1,000	0,807	0,890
Blachy i taśmy pokrywane powłokami organicznymi	0,846	0,846	0,464	0,807	1,000	0,877
Rury ze szwem	0,860	0,888		0,890	0,877	1,000

W tabeli uwzględniono współczynniki korelacji, których wartość była istotna przy testowaniu za pomocą statystyki *t*-Studenta dla poziomu istotności  $\alpha = 0,05$ .

**Tabela 5.** Trapezowe liczby rozmyte określające prognozowane na 2007 rok parametry służące do wyliczenia zysku brutto dla drugiego przedsiębiorstwa

Wskaźniki materiałochłonności t/t				
Surówka-wlewki COS	0,860	0,865	0,866	0,870
Wlewki COS -blachy walcowane na gorąco	1,061	1,064	1,070	1,072
Blach walcowane na gorąco-blachy walcowane na zimno	1,099	1,111	1,117	1,120
Blachy walcowane na zimno-blachy ocynkowane	1,010	1,020	1,026	1,031
Blachy ocynkowane-blachy powlekane organicznie	1,003	1,004	1,005	1,008
Blachy walcowane na gorąco-rury	1,064	1,067	1,070	1,075
Sprzedaż, tys. t				
Wlewki COS	527,9	600,2	625,4	697,7
Blachy walcowane na gorąco	521,4	559,6	618,2	698,6
Blachy walcowane na zimno	209,9	292,2	348,4	431,1
Blachy i taśmy ocynkowane ogniowo	184,0	261,3	285,2	367,3
Blachy i taśmy pokrywane powłokami organicznymi	70,0	70,5	77,5	80,0
Rury ze szwem	87,1	92,5	107,9	116,1
Ceny zł/t/t				
Rudy żelaza	111,0	133,8	144,6	148,8
Złom stalowy	568,2	631,2	662,7	762,3
Wlewki COS	1 110,9	1 291,8	1 343,4	1 572,0
Blachy walcowane na gorąco	1 323,9	1 575,9	1 648,5	1 978,2
Blachy walcowane na zimno	1 631,7	1 965,9	2 016,9	2 359,8
Blachy i taśmy ocynkowane ogniowo	1 711,2	1 989,6	2 059,2	2 347,5
Blachy i taśmy pokrywane powłokami organicznymi	2 706,3	2 910,0	3 003,0	3 483,6
Rury ze szwem	1 805,1	1 920,3	1 985,7	2 223,9

Korzystając z modelu rozmytej regresji liniowej (MOFR), wyrażono zależność pomiędzy cenami analizowanych asortymentów wyrobów hutniczych, cenami rudy żelaza i złomu oraz ilościami sprzedaży. W tabeli 6 przedstawiono współczynniki równań regresji charakteryzujące zależności między cenami wyrobów produkowanych przez drugie przedsiębiorstwo oraz cenami rudy żelaza i złomu. W tabeli 7 podano współczynniki równań regresji, charakteryzujące zależności między ilościami sprzedaży poszczególnych asortymentów wyrobów produkowanych przez drugie przedsiębiorstwo. Wyniki obliczeń zysku brutto dla drugiego przedsiębiorstwa, wykonanych dzięki wykorzystaniu metody programowania nieliniowego (metody opisanej w rozdziale 5.1) oraz dzięki symulacji systemów rozmytych (metody opisanej w rozdziale 5.2) dla realizacji operacji arytmetycznych, przedstawiono na rysunku 9. Obliczono w ten sposób odpowiednio zysk brutto I i II. Na rysunku 10 przedstawiono porównanie liczb rozmytych charakteryzujących zysk brutto I i II oraz liczby rozmytej charakteryzującej zysk brutto III. Funkcje reprezentujące prawe i lewe strony liczb rozmytych charakteryzujących zysk brutto I i II estymowano na podstawie danych przedstawionych na rysunku 9. Zysk brutto III wyliczono w następujący sposób: obliczono produkcję każdego wyrobu, począwszy od blach pokrywanych powłokami organicznymi do surówki, wykorzystując



**Tabela 6.** Współczynniki równań regresji charakteryzujące zależności między cenami wyrobów produkowanych przez drugie przedsiębiorstwo oraz cenami rudy żelaza i złomu

Zmienna objaśniana	Zmienna objaśniająca								
	Rudy żelaza	Złom stalowy	Wlewki COS	Blachy walcowane na gorąco	Blachy walcowane na zimno	Blachy i taśmy ocynkowane ogniowo	Blachy pokrywane powłokami organicznymi	Rury ze szwem	
Rudy żelaza	$\hat{l}$	0,159	0,084	0,061	0,047	0,012		0,048	
	$\bar{l}$	0,159	0,103	0,083	0,084	0,087		0,083	
	$\hat{n}$		21,111	25,638	17,109	12,69	12,666		-1,221
	$\bar{n}$		71,973	25,638	17,109	12,69	12,666		-1,221
Złom stalowy	$\hat{l}$	3,233		0,365	0,329	0,31	0,184		0,278
	$\bar{l}$	5,506		0,608	0,482	0,428	0,401		0,455
	$\hat{n}$	-94,992		-48,765	-128,592	-153,786	-182,271		-229,845
	$\bar{n}$	-94,992		-48,765	-128,592	-153,786	-182,271		-229,845
Wlewki COS	$\hat{l}$	7,988	1,110		0,697	0,64	0,418		0,567
	$\bar{l}$	10,83	2,462		0,911	0,792	0,77		0,885
	$\hat{n}$	-138,942	195,651		-128,838	-157,572	-262,218		-328,674
	$\bar{n}$	-138,942	195,651		-128,838	-157,572	-262,218		-328,674
Blachy walcowane na gorąco	$\hat{l}$	6,297	1,415	1,288		0,747	0,744		0,7548757
	$\bar{l}$	13,445	2,628	1,812		0,925	0,94		1,0974639
	$\hat{n}$	176,151	474,792	-29,088		39,489	-354,384		-285,26529
	$\bar{n}$	176,151	474,792	-29,088		39,489	-354,384		-285,26529
Blachy walcowane na zimno	$\hat{l}$	9,256	1,836	1,145	1,054		0,661		0,902
	$\bar{l}$	14,965	3,126	1,567	1,202		1,1		1,219
	$\hat{n}$	131,652	497,646	243,459	33,411		-239,346		-313,335
	$\bar{n}$	131,652	497,646	243,459	33,411		-239,346		-313,335
Blachy i taśmy ocynkowane ogniowo	$\hat{l}$	2,865	0,642	0,488	0,724	0,705		0,364	0,765
	$\bar{l}$	11,675	2,503	1,254	1,093	0,705		0,609	1,135
	$\hat{n}$	1087,353	1258,074	1113,378	752,793	592,503		391,107	320,778
	$\bar{n}$	1087,353	1297,146	1113,378	752,793	1137,213		391,107	320,778
Blachy pokrywane powłokami organicznymi	$\hat{l}$						0,724		0,202
	$\bar{l}$						1,206		1,173
	$\hat{n}$						1194,462		1869,093
	$\bar{n}$						1194,462		1869,093
Rury ze szwem	$\hat{l}$	4,47	0,536	0,393	0,751	0,519	0,773	0,144	
	$\bar{l}$	12,865	3,001	1,516	1,042	1,004	0,932	0,478	
	$\hat{n}$	702,579	967,026	802,986	525,915	545,808	29,64	670,428	
	$\bar{n}$	702,579	967,026	802,986	525,915	545,808	29,64	670,428	

$\hat{l}$ ,  $\bar{l}$ ,  $\hat{n}$ ,  $\bar{n}$  – odpowiednio kres dolny i kres górny przedziału określającego wartość odpowiedniego współczynnika regresji.

wzory (7) i (10), zużycie poszczególnych surowców (ruda żelaza, złom) obliczono ze wzorów (7) i (10), koszty wytwarzania obliczono zgodnie ze wzorami (7) i (9), przychód

obliczono na podstawie wzorów (7) i (9), zysk brutto obliczono odejmując koszty wytwarzania od przychodu ze wzoru (11).

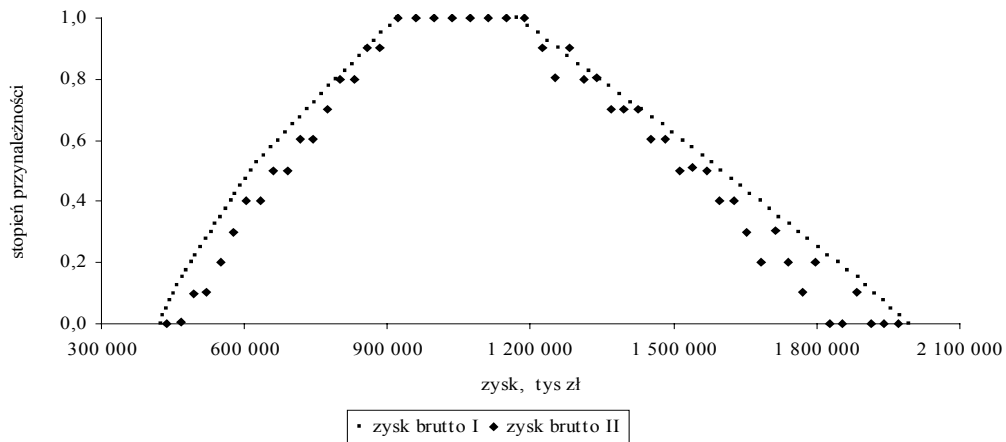
**Tabela 7.** Współczynniki równań regresji charakteryzujące zależności między ilościami sprzedaży poszczególnych asortymentów wyrobów produkowanych przez drugie przedsiębiorstwo

Zmienna objaśniana		Zmienna objaśniająca					Rury ze szwem
		Wlewki COS	Blachy walcowane na gorąco	Blachy walcowane na zimno	Blachy ocynkowane ogniowo	Blachy i taśmy pokrywane powłokami organicznymi	
Wlewki COS	$\hat{r}$		0,246	0,606	0,433	3,917	1,943
	$\check{r}$		0,285	1,841	1,628	6,177	3,54
	$\hat{q}$		1080,84	435,426	1114,605	658,32	1027,989
	$\check{q}$		1161,774	435,426	1114,605	658,32	1233,834
Blachy walcowane na gorąco	$\hat{r}$	0,826		0,879	0,932	4,318	1,425
	$\check{r}$	1,031		1,812	1,05	6,346	4,549
	$\hat{q}$	99,927		290,748	873,72	475,317	1062,018
	$\check{q}$	99,927		290,748	1362,957	687,363	1062,039
Blachy walcowane na zimno	$\hat{r}$	0,093	-0,002			1,059	
	$\check{r}$	0,265	0,141			1,059	
	$\hat{q}$	725,961	878,538			646,023	
	$\check{q}$	725,961	878,538			976,542	
Blachy ocynkowane ogniowo	$\hat{r}$	0,509	-0,156			3,059	1,714
	$\check{r}$	0,782	0,244			4,564	2,773
	$\hat{q}$	-531,24	466,716			-220,077	101,358
	$\check{q}$	-531,24	466,716			-220,077	101,358
Blachy pokrywane powłokami organicznymi	$\hat{r}$	0,117	0,05	0,204	0,166		0,026
	$\check{r}$	0,167	0,05	0,204	0,175		0,91
	$\hat{q}$	-34,863	30,279	-56,382	79,278		109,041
	$\check{q}$	-34,863	161,853	47,796	138,963		109,041
Rury ze szwem	$\hat{r}$	0,27	0,08		0,265	1,397	
	$\check{r}$	0,27	0,091		0,44	1,888	
	$\hat{q}$	-328,014	-77,994		7,023	-157,05	
	$\check{q}$	-176,085	120,987		7,023	-106,218	

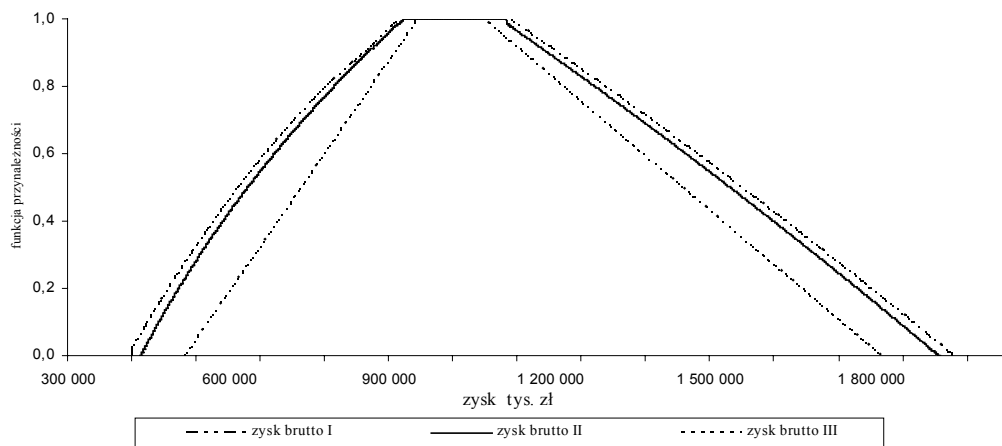
$\hat{r}$ ,  $\check{r}$ ,  $\hat{q}$ ,  $\check{q}$  – odpowiednio kres dolny i kres górny przedziału określającego wartość odpowiedniego współczynnika regresji.

Przedstawione na rysunkach 6 i 10 liczby rozmyte wskazują, że zastosowanie różnych metod realizacji operacji arytmetycznych daje różne wyniki. Obliczenia realizowane według wzorów (7)–(11) są równoznaczne z przyjęciem szeregu mało realnych założeń. Jest to np. założenie, że minimalnej wielkości produkcji określonego asortymentu wyrobu towarzyszy minimalna wartość wskaźnika materiałochłonności, służą-

cego do obliczenia kosztów materiałowych związanych z produkcją tego asortymentu. Tymczasem wielkość produkcji i wskaźniki materiałochłonności są niezależne.



**Rys. 9.** Liczby rozmyte przedstawiające zysk brutto I i zysk brutto II dla drugiego przedsiębiorstwa



**Rys. 10.** Porównanie liczb rozmytych przedstawiających zysk brutto I i II oraz zysk brutto III dla drugiego przedsiębiorstwa

Ograniczone odejmowanie zakłada ponadto, że minimalnym cenom sprzedawanych wyrobów towarzyszą minimalne ceny surowców do ich produkcji. Skorelowanie cen surowców i wyrobów sprawia, że równoczesne wystąpienie minimalnych wartości tych cen często nie jest możliwe. W związku z tym zastosowanie wzorów (7)–(11) daje jako wynik liczby rozmyte, które niezbyt trafnie odzwierciedlają możliwe realizacje zysku brutto (uzyskujemy zbyt wąskie przedziały dla 0 i 1 poziomów liczb roz-

mytych). Zastosowanie opisanych w rozdziałach 5.1 i 5.2 metod realizacji operacji arytmetycznych na zależnych liczbach rozmytych usuwa wskazane powyżej wady operacji arytmetycznych, realizowanych zgodnie ze wzorami (7)–(11). Dzięki tym metodom możliwe jest uwzględnienie wszystkich zależności, występujących między analizowanymi wielkościami. Jednakże w przypadku zastosowania metod programowania nieliniowego (metoda opisana w rozdziale 5.1) konieczna jest estymacja dużej liczby równań rozmytej regresji liniowej. W razie większej liczby zależnych parametrów może to znacznie komplikować proces obliczeniowy. Ponadto w przypadku wzrostu liczby estymowanych równań rozmytej regresji liniowej uzyskiwano często sprzeczne zadania programowania nieliniowego. Tej wady nie ma metoda oparta na symulacjach systemów rozmytych. Jednakże w przypadku dużej liczby rozpatrywanych parametrów wymagana jest odpowiednio duża liczba replikacji, co wydłuża proces obliczeniowy.

## Podsumowanie

W literaturze brakuje wyczerpujących opracowań, dotyczących praktycznej realizacji operacji arytmetycznych na zależnych liczbach rozmytych. Uwzględnienie zależności rozmytych argumentów wyrażeń algebraicznych jest jednak bardzo ważne dla prawidłowego przebiegu procesów decyzyjnych, realizowanych w warunkach niepewności. W pracy zaproponowano dwie metody realizacji operacji arytmetycznych na zależnych liczbach rozmytych. Metody te przyjęto do obliczenia zysku brutto w przedsiębiorstwach przemysłu metalurgicznego. Oprócz tego dokonano obliczeń, korzystając ze wzorów (7)–(11). Określają one zasady wykonywania operacji arytmetycznych na trapezowych liczbach rozmytych. Zastosowanie różnych metod realizacji operacji arytmetycznych na liczbach rozmytych daje w efekcie różne wyniki. Proponowane w rozdziale 5 metody realizacji operacji arytmetycznych pozwalają uwzględnić wszystkie zależności pomiędzy rozmytymi argumentami wyrażeń algebraicznych. Są to zarówno zależności wynikające z technicznych warunków wytwarzania, jak i zależności wynikające ze skorelowania argumentów. Takich możliwości nie dają wspomniane metody realizacji operacji arytmetycznych na trapezowych liczbach rozmytych. W związku z tym zastosowanie wzorów (7)–(11) pozwala otrzymać w wyniku liczby rozmyte, które niezbyt trafnie odzwierciedlają możliwe realizacje zysku brutto (uzyskujemy zbyt wąskie przedziały dla 0 i 1 poziomów liczb rozmytych). Przeprowadzone obliczenia wskazują, iż zależności pomiędzy argumentami wpływają istotnie na końcowy wynik i powinny być uwzględnione w praktycznych obliczeniach.

W prezentowanych przykładach argumenty wyrażeń arytmetycznych wyrażone były w postaci trapezowych liczb rozmytych. Omówione metody realizacji operacji

arytmetycznych na zależnych liczbach rozmytych można stosować w przypadku innych postaci funkcji przynależności. Metody te sprowadzają się bowiem do wykonywania określonych działań na  $\alpha$ -poziomach odpowiednich liczb rozmytych.

## Bibliografia

- [1] BUCKLEY J.J., *The fuzzy mathematics of finance*, Fuzzy Sets and Systems, 1987, 21(4), 257–273.
- [2] WAND T.L., *Discounted fuzzy cash flows analysis*, Industrial. Engineering. Conference, London 1985, pp. 476–481.
- [3] ANDERSSON L., *The theory of possibility and fuzzy sets: new ideas for risk analysis and decision making*, Document D8: Swedish Council for Building Research, Stockholm, Sweden 1988.
- [4] SCHMUCKER K.J., *Fuzzy sets, natural language computation and risk analysis*, Rockville, USA, Computer Science Press, 1984.
- [5] CHOUBINEH F., BEHRENS A., *Use of intervals and possibility distribution in economic analysis*, Journal of Operations Research Society, 1992, 43(9), 907–918.
- [6] CALZI M., LI., *Toward a general setting for the fuzzy mathematics of finance*, Fuzzy Sets and Systems, 1990, 35(4), 265–280.
- [7] CHIU C.Y., PARK S.C., *Fuzzy cash flow analysis using present worth criterion*, England. Economic, 1994, 39(2), 113–138.
- [8] ESOGBUE A.O., HEARNES W.E., *On Replacement Models via a Fuzzy Set Theoretic Framework*, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part C, Applications and Reviews, UK, 1998, 28(4), 549–558.
- [9] KAHRAMAN C., RUAN D., TOLGA E., *Capital budgeting techniques using discounted fuzzy versus probabilistic cash flows*, Information Sciences, 2002, 42(1), 57–76.
- [10] KUCHTA D., *Miękka matematyka w zarządzaniu. Zastosowanie liczb przedziałowych i rozmytych w rachunkowości zarządczej*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej. Wrocław 2001.
- [11] RĘBIASZ B., *Fuzziness and randomness in investment project risk appraisal*, Computer and Operations Research, 2007, 34(1), 199–210.
- [12] ZADEH L.A., *Fuzzy Sets*, Information and Control, 1965, 8, 338–353.
- [13] YANG T.I., *Simulation based estimation for correlated cost elements*, International Journal of Project Management, 2005, 23(4), 275–282.
- [14] DUBOIS D., PRADE H., *Fuzzy Numbers: An overview*, Dubois D., Prade H., Yager R.R. (eds.), [in:] *Fuzzy Sets for Intelligent Systems*, Morgan Kaufmann Publishers, San Mateo California 1993.
- [15] NGUYEN H.T., *A note of the fuzzy extension principle for fuzzy sets*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1978, 64(5), 369–384.
- [16] KLIR G.J., *Fuzzy arithmetic with requisite constraints*, Fuzzy Sets and Systems, 1997, 91(2), 165–175.
- [17] NEGOITA C.V., *Management Applications of Systems Theory*, Birkhauser Verlag, Basel 1978.
- [18] ENEA M., PIAZZA T., *Project Selection by Constrained Fuzzy AHP*, Fuzzy Optimization and Decision Making, 2004, 3(1), 39–62.
- [19] ÖZELKAN E.C., DUCKSTEIN L., *Multiobjective fuzzy regression: a general framework*, Computer and Operations Research, 2000, 27(7–8), 635–640.
- [20] CHEN T., WANG M.J.J., *Forecasting method using fuzzy concepts*, Fuzzy Sets and Systems, 1999, 105(3), 339–352.

- [21] PETERS G., *Fuzzy linear regression with fuzzy intervals*, Fuzzy Sets and Systems, 1994, 63(1), 45–55.
- [22] KAO Ch., CHYU CH.L., *A fuzzy linear regression model with better explanatory power*, Fuzzy Sets and Systems, 2002, 126(3), 401–409.
- [23] TRAN L., DUCKSTEIN L., *Multiobjective fuzzy regression with central tendency and possibilistic properties*, Fuzzy Sets and Systems, 2002, 130(1), 21–31.
- [24] LIU B., IWAMURA K., *Chance constrained programming with fuzzy parameters*, Fuzzy Sets and Systems, 1998, 94(2), 227–237.
- [25] LIU B., *A survey of credibility theory*, Fuzzy Optimization Decision Making, 2006, 5(4), 387–408.

### **Interactive fuzzy numbers arithmetic in financial analyses**

Fuzzy arithmetic seems to be a well-developed and well-formalized branch of fuzzy sets theory. Nevertheless, there are some problems with its practical implementation. In practice, one can very often encounter the question of how to calculate the value of an arithmetic expression when its arguments are presented as linked fuzzy numbers. This article presents the generalization of Zadeh's extension principle for arithmetic operations on fuzzy linked variables. Typical kinds of interaction between financial analyses parameters in industrial enterprises are discussed later. These interactions make use of nonlinear programming methods necessary to calculate the values of selected financial indices expressed by the fuzzy numbers. The article presents the problem of nonlinear programming applied to the calculation of the values of these indices. Additionally, the paper proposes the use of computer simulations in arithmetic operations on fuzzy linked variables. Furthermore, the example of gross profit calculations for two metallurgical companies is presented. The calculations done show that the interaction between the arguments of the arithmetic expression influences the final result significantly.

Keywords: *extension principle, fuzzy arithmetic, financial analyses*